

Ministère de l'Éducation Nationale

République du Mali



Un Peuple-Un But-Une Foi

Collection DEF en Poche
La Clé du DEF

Des sujets du DEF : Énoncés et Corrections

Mathématiques



ANNÉE SCOLAIRE 2020/2021

SOMMAIRE

Avant-propos.....	4
Auteurs	4
RAPPELS	5
ENONCES	7
DEF 2010	7
DEF 2011.....	8
DEF 2012.....	9
DEF 2013.....	10
DEF 2014.....	11
DEF 2015.....	12
DEF 2016.....	13
DEF 2017.....	14
DEF 2018.....	15
DEF 2019.....	16
DEF 2020.....	17
Solutions	18
DEF 2010.....	18
Algèbre :	18
Géométrie :	19
DEF 2011.....	21
I- Algèbre :	21
II-Géométrie :	22
DEF 2012.....	24
I- Algèbre:	24
II- Géométrie :	25
DEF 2013.....	27
I- Algèbre :	27
II- Géométrie :	28
DEF 2014.....	29

I- Algèbre:.....	29
II- Géométrie :	31
DEF 2015.....	33
I- Algèbre :	33
II-Géométrie :	34
DEF 2016.....	35
I- Algèbre :	35
II- Géométrie :	36
DEF 2017.....	38
I- Algèbre:.....	38
II- Géométrie :	40
DEF 2018.....	41
I- Algèbre:.....	41
II- Géométrie :	42
DEF 2019.....	43
I- Algèbre :	43
II- Géométrie :	44
DEF 2020.....	46
I- Algèbre :	46
II- Géométrie :	47

Avant-propos

Bissimillah Rahman Rahim, Allahoumasoli Allah Seydina Mohamadine Wassolim (S.A.W).

Ce manuel a été élaboré par les Frères Alassane et Fousseyni permettant d'aider les candidats au DEF qui sont les élèves de la 9^{ème} année à mieux maîtriser les Mathématiques surtout les anciens sujets du DEF.

Il contient des anciens sujets de 2010 à 2020 et leurs solutions, il comprend :

- première partie Rappels ;
- deuxième partie Enoncés ;
- troisième partie Solutions.

Nulle œuvre humaine n'est tenue parfaite donc vos suggestions et critiques sont les bienvenus !

Auteurs

Les frères Jumeaux « Alassane et Fousseyni »

Email : www.alassanediarra9101@gmail.com

Tél : (00223) 91 01 09 99 / 77 82 33 03

RAPPELS

1. LES ENSEMBLES DE NOMBRES :

IN : est l'ensemble des entiers (ou nombres) naturels.

$$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$$

IZ : est l'ensemble des entiers relatifs.

$$\mathbb{Z} = \{\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; +1 ; +2 ; +3 ; \dots\}$$

IZ* : est l'ensemble des entiers relatifs privé de zéro (0).

$$\mathbb{Z}_+ = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\} \text{ Donc } \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{0 ; -1 ; -2 ; -3 ; \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$$

ID : est l'ensemble des nombres décimaux relatifs.

Un décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$; $a \in \mathbb{Z}$ et

$n \in \mathbb{N}$ (ou de la forme $a.10^p$; $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$).

Exemples : 2,5 et $\frac{3}{4}$ sont des décimaux car :

$$2,5 = \frac{25}{10} = \frac{25}{10^1} ; \quad \frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{75}{10^2}$$

IQ : est l'ensemble des nombres rationnels.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec

$b \neq 0$; $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

Exemples : $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$ et $\frac{17}{16}$ sont des exemples de rationnels.

2. NOMBRES OPPOSES :

Deux nombres a et b sont opposés lorsque : **$a = -b$ ou $b = -a$ ou $a + b = 0$.**

Exemples : 2 et -2 sont opposés.

3. NOMBRES INVERSES :

Deux nombres a et b sont inverses l'un de l'autre lorsque **$ab = 1$ ou $a = \frac{1}{b}$ ou**

$b = \frac{1}{a}$. **Exemples** : $\frac{7}{9}$ et $\frac{9}{7}$ sont inverses de même que -5 et $-\frac{1}{5}$.

3. OPERATIONS DANS $\mathbb{Q}$:

a) Somme et différence de deux nombres rationnels :

$$a, b, c, d \text{ des nombres rationnels : } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d} \text{ et } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$$

$$\text{Exemples : } \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5 + 3 \times 1}{3 \times 5} = \frac{10 + 3}{15} = \frac{13}{15} \text{ et } \frac{7}{2} - \frac{8}{3} = \frac{7 \times 3 - 2 \times 8}{2 \times 3} = \frac{21 - 16}{6} = \frac{5}{6}$$

b) Produit et quotient de deux nombres rationnels :

a, b, c, d des nombres rationnels : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ et $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

Exemples : $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1 \times 2}{4 \times 5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ et $\frac{3}{7} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$

4. PROPRIETES DE PUISSANCES :

- Produit de puissances d'un même nombre

$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$ avec $a \neq 0$; $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$. **Exemple :** $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

- Puissance d'une puissance $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$ Exemple : $(2^3)^4 = 2^{12}$

- Quotient de deux puissances d'un même nombre

$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ Exemple : $\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1}$

- Puissance d'un produit

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ Exemple : $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$; $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$.

- Puissance d'un quotient $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Exemple : $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$.

$-(\sqrt{a})^3 = a\sqrt{a}$. **D'une manière générale :** Pour tout réel a positif,

$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$ lorsque n est pair

$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n-1}{2}} \times \sqrt{a}$ lorsque n est impair

Exemple : $\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3$ car 6 est pair ; $\sqrt{2^7} = 2^{\frac{7-1}{2}} \sqrt{2}$ car 7 est impair

$-a^n = a^p$ lorsque $n = p$ et $a^n = b^n$ lorsque $a = b$

Exemple : $5^a = 5^2$ alors $a = 2$.

5. PRODUITS REMARQUABLES :

a) Identités remarquables et développement

Pour tous nombres réels a et b, on développe :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (x + 6)(x - 6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$$

b) Identités remarquables et factorisation

Pour tous nombres réels a et b, on factorise :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad 9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2 = (3x + 2)(3x + 2)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad \frac{1}{4}x^2 - 7x + 49 = \left(\frac{1}{2}x - 7\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - 7\right)\left(\frac{1}{2}x - 7\right)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad 16x^2 - 64 = (4x + 8)(4x - 8)$$

ENONCES

DEF 2010

I-Algèbre :

Exercice 1 :

1°) a) Décompose les nombres naturels 320 et 48 en produits de facteurs premiers. En déduire $\sqrt{320}$ et $\sqrt{48}$ sous forme de $x\sqrt{y}$.

b) Vérifier que le réel $5 - 2\sqrt{5}$ est positif.

2°) Ecris les réels suivants sous forme de fraction ou de nombre entier relatif.

$$E = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{6}}; \quad T = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}} - \sqrt{12+\sqrt{48}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}}.$$

Exercice 2 :

Soient les réels a, b, c.

- Développe : $(a + b + c)^2$ et $(a + b + c)^3$.

2- Démontre que si $a + b + c = 0$ alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Problème :

Un train est constitué, à l'aller de deux locomotives identiques et de dix wagons-citernes du même modèle et ce train mesure alors 152 m de long. Après avoir vidé le contenu de tous les wagons-citernes, on décroche une locomotive et on ajoute deux wagons-citernes vides. Après ces changements, le train ainsi constitué mesure 160 m de long. Trouve la longueur d'une locomotive et celle d'un wagon-citerne.

II- GEOMETRIE :

PARTIE A :

Soient E, F, G un triangle rectangle en F et soit O le milieu de l'hypoténuse. La bissectrice de $\widehat{FOG}$ coupe (FG) en I.

1 – Démontre que (OI) est parallèle à (EF).

2 – Démontre que les angles $\widehat{FOI}$ et $\widehat{FEO}$ ont même mesure.

3 – Le point O a pour image T par la symétrie orthogonale d'axe (FG).

Démontre que (FT) est parallèle à (FG) et précise la nature du quadrilatère OGTF.

PARTIE B : Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OE'}, \overrightarrow{OF})$.

1- Trace par rapport à ce repère la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ et place le point A (2 ; 2).

2- Construis le point A' tel que la droite (D) soit médiatrice du segment [AA']. Donne une équation de la droite (AA').

3- Calcule les coordonnées du point d'intersection H de la droite (AA') et de la droite (D). On appelle B le point d'abscisse 0 de la droite (D).

Sachant que $2,235 < \sqrt{5} < 2,236$. Calcule à 10^{-2} près par défaut les longueurs A'B et BH. (Prendre le centimètre comme unité de longueur).

NB : Les deux parties A et B sont indépendantes.

DEF 2011

I-Algèbre :

Exercice 1 :

La somme de deux nombres entiers est 320. Si l'on divise le plus grand des deux nombres par l'autre, le quotient est 3 et le reste est 8. Quels sont ces deux nombres ?

Exercice 2 :

Soient les nombres réels a et b tels que : $a = \frac{m-1}{2}$ et $b = \frac{m-4}{2}$.

Calcule le nombre réel m pour que :

1°) a et b soient opposés.

2°) a et b soient inverses.

Problème :

On donne les deux applications f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{9} - x^3 + 2x^2 \text{ et } g(x) = (7x - 3)^2 - 5^2.$$

1- Factorise f(x) et g(x) dans $\mathbb{R}$ puis résous $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

2- On considère la fonction rationnelle h définie dans $\mathbb{R}^2$ par : $h(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{f(x)}$.

a) Détermine le domaine de définition de h dans $\mathbb{R}$ et puis simplifie h(x).

b) Calcule $h(\sqrt{3})$.

c) Résous $g(x) = -16$.

II- GEOMETRIE :

Exercice 1 :

Dessine un triangle ABC rectangle en A. Soit I le milieu de l'hypoténuse BC.

Construis l'image I_1 de I par la translation du vecteur $\overrightarrow{BA}$ et l'image I_2 de I par la translation du vecteur $\overrightarrow{CA}$. Montre que les points I_1 ; A et I_2 sont alignés.

Exercice 2 :

On considère un cercle de centre A et de rayon $r = 5\text{cm}$. Soit [EF] un de ses diamètres, M est un point du segment [AE] tel que $AM = 4\text{cm}$ et P un point du cercle tel que $MP = 3\text{cm}$.

- Représente la figure.
- Montre que le triangle AMP est rectangle en M.
- Trace la tangente au cercle en F. Cette droite coupe la droite (AP) en T. Démontre que les droites (FT) et (MP) sont parallèles.
- Calcule la longueur AT.

DEF 2012

I-ALGEBRE :

Exercice 1 :

Trouve $a \in \mathbb{N}$ tel que : $2^{4-a} = 1$; $(3^a)^5 = 1$; $9^{3a} = 3^{12}$; $(2^2)^{3a} = 4^6$; $5 \times 5^{a-3} = 25$.

Exercice 2 :

a) Développe $(3\sqrt{2} + 5)(3\sqrt{2} - 5)$. En déduis une écriture simplifiée du nombre $\frac{-7\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 5}$.

b) Donne un encadrement à 10^{-2} près du nombre $6 - 5\sqrt{2}$ sachant que : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

Exercice 3 :

On donne $a = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

On pose : $U = a + b$.

- Calcule $a \times b$;
- Calcule U^2 .

Problème :

L'âge d'un père est inférieur de 3 ans à la somme des âges de ses trois enfants.

Sachant que les âges du père et de ses trois enfants sont respectivement proportionnels à 15 ; 7 ; 5 et 4, trouve l'âge de chacun d'eux.

II- GEOMETRIE :

PARTIE I:

Soit A, B, C un triangle isocèle de base [BC] et I le milieu de [BC]. On construit le point Q tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IQ}$. Démontre que le quadrilatère ACQB est un parallélogramme puis un losange.

PARTIE II :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$, on donne les points A (4 ; 2) ; B(2 ; 6) ; C(-1 ; -3).

- 1- Place ces points et trace les médiatrices (Δ) et (Δ') des segments [AB] et [AC].
- 2- Trouve une équation de (Δ) et une équation de (Δ') et détermine les coordonnées de M point d'intersection de (Δ) et (Δ') .
- 3- Montre que M appartient à la médiatrice de [BC].

NB : Les parties I et II sont indépendantes.

DEF 2013

I-ALGEBRE :

1°) Compare, d'après leurs carrés, les nombres suivants :

$$3\sqrt{5} \text{ et } 2\sqrt{11} ; \sqrt{24} \text{ et } 2 + \sqrt{3} ; \sqrt{5} + \sqrt{7} \text{ et } \sqrt{12 + 2\sqrt{35}}.$$

2°) Trois personnes se partagent une somme proportionnellement à 12 ; 15 et 14 sachant que la part du troisième vaut 28 000F.

Calcule : - la part qui revient à chacune des deux personnes ;
- la somme à partager.

3°) On donne $f(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2$.

a) Développe, réduis et ordonne $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

b) Résous dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$ et $f(x) = 1/4$.

c) Développe $(\sqrt{5} + 1)^2$ et $(\sqrt{5} - 1)^2$. En déduis une expression plus simple de

$$A = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \text{ et } B = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}.$$

d) Montre que $f(\sqrt{5}) = \frac{A}{B}$.

II- GEOMETRIE : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne les points suivants A (-2 ; 5) ; B(-2 ; -3) et C($\frac{10}{3}$; 1).

1°) Place ces points dans le repère.

2°) Trouve une équation de la hauteur h_1 issue de B puis une équation de la hauteur h_2 issue de C. Trouve les coordonnées du point H intersection de h_1 et h_2 .

3°) Trouve une équation de la médiatrice de [AC] puis une équation de la médiatrice de [AB]. Quelles sont les coordonnées du centre W du cercle circonscrit au triangle ABC ?

4°) Trouve les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

5°) Démontre que les points W, G, H sont tels que : $2 \times \overrightarrow{WG} = \overrightarrow{WH}$.

DEF 2014

I-ALGEBRE :

On considère les applications : f, g, h définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

par $f(x) = (2x + 3)^2 - (x + 6)^2$; $h(x) = ax^2 + bx + c$; $g(x) = (x + 3)(5 - x) - h(x)$

1. Détermine les réels a ; b et c de h(x) sachant que $h(0) = 18$; $h(-3) = 0$ et $h(-1) = -8$. Ecris h(x).

2. Développe, réduis et ordonne f(x) et g(x) suivant les puissances décroissantes de x.

3. Factorise f(x) et g(x).

4. Soit la fonction rationnelle q définie par : $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

a) Détermine l'ensemble de définition de q et simplifie q(x).

b) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations : $q(x) = 0$; $q(x) = -\frac{9}{4}$; $q(x) = \sqrt{3}$.

II- GEOMETRIE :

Exercice 1 :

Construis un triangle ABC dont les côtés mesurent : $AB = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$. Détermine la nature du triangle.

Calcule : $\cos \hat{C}$; $\cos \hat{B}$.

Construis le point H projeté orthogonal sur (BC).

Exercice 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1°) Place ces points A (2 ; 4) ; B (-2 ; 0) et C (4 ; 0) dans le repère.

2°) Calcule les coordonnées des points A' et B' respectivement milieu de [BC] et [AC].

3°) Trouve une équation de (AA') et une équation de (BB').

En déduis les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

4°) Trouve une équation de la médiatrice de [BC] et celle de [AC]. En déduis les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC et calcule le rayon de ce cercle.

DEF 2015

I-ALGEBRE :

A) On définit le polynôme $P(x)$ tel que : $P(x) = x^2 + (a - b + 3)x + 2a - 3b$ où a et b sont deux réels.

1) Calcule a et b sachant que $P(0) = 9$ et $P(1) = 4$.

2) En remplaçant a et b par leurs valeurs ainsi trouvées, factorise $P(x)$.

B) On considère les applications polynômes suivantes :

$$A(x) = (x - 5)(3x - 8) + (x - 5)^2 + 2x^2 - 50 \quad ; \quad B(x) = (3x - 15).$$

1) Développe, réduis et ordonne ces polynômes suivant les puissances décroissantes de x .

2) Factorise $A(x)$ et $B(x)$.

3) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $A(x) = 0$; $B(x) = 0$; $A(x) = B(x)$.

4) Détermine l'ensemble de définition de la fonction rationnelle $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

5) Calcule $f(0)$; $f(\sqrt{2})$.

II- GEOMETRIE :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on considère les points A , B , C tels que : $A(0 ; 3)$; $B(6 ; 3)$ et $C(-3/2 ; +9/3)$.

1) Place ces points dans le repère puis montre que A , B , C sont alignés.

2) Détermine les coordonnées du milieu M de $[BC]$ puis celles du point D symétrique de O par rapport à M .

3) Calcule les distances : $d(O, C)$; $d(O, D)$; $d(C, D)$. En déduis la nature du triangle OCD .

4) Calcule les coordonnées du centre I du cercle circonscrit au triangle OCD puis calcule son rayon r .

DEF 2016

I-ALGEBRE :

Exercice 1 : (4 points)

Calcule et donne le résultat sous la forme la plus simple :

$$A = 2 + (2 + \sqrt{2}) (2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) ; B = 2 \times \sqrt{\frac{2}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{8}} ; C = 4 \times \sqrt{\frac{26}{5}} \times \sqrt{\frac{65}{8}}.$$

Exercice 2 : (4 points)

On considère les polynômes : $A(x) = (9x^2 - 1) (2x + 3) - (4x^2 - 9) (3x + 1)$;

$B(x) = (x^2 - 4) (3x - 1) - (9x^2 - 1) (x + 2)$.

1°) Mettre $A(x)$ et $B(x)$ sous la forme de produit de polynômes du 1^{er} degré.

2°) Soit la fonction rationnelle P telle que $P(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$. Montre que $P(x)$ après simplification peut s'écrire sous la forme $P'(x) = \frac{1+3x}{1-3x}$.

Quel est l'ensemble de définition de $P'(x)$?

Problème : « les âges d'Ali et Boubacar » (2 points)

Ali s'adresse à Boubacar en ces termes ; « j'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai la somme de nos âges sera égal à 98 ans ». Détermine l'âge de chacune de ces deux personnes.

II- GEOMETRIE : (10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1°) a) Place dans le repère les points $A(-4 ; 1)$; $D(2 ; 7)$; $E(0 ; -3)$.

b) Calcule les distances AD ; AE ; DE et en déduis la nature du triangle EAD .

2°) Détermine les coordonnées du point F image du point D par la translation du vecteur $\overrightarrow{AE}$.

3°) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle EAD .

a) Détermine les coordonnées du point K , centre du cercle $(\mathcal{C})$ puis calcule son rayon.

b) Montre que le point F appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

4°) Détermine une équation de chacune des droites (AD) et (AE) .

5°) Montre que les droites (AD) et (AE) sont perpendiculaires.

DEF 2017

I-ALGEBRE :

Exercice 1 : (4 points)

Dessine un triangle ABC tels que $AB = 4\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$ et $AC = 3\text{cm}$.

1°) Montre que ABC est un triangle rectangle en A.

2°) Calcule les valeurs suivantes : $\sin(\hat{B})$; $\cos(\hat{B})$; $\tan(\hat{B})$.

Exercice 2 : (4 points)

Soient les polynômes suivants : $f(x) = (4x + 5)^2 - (2x - 3)^2$ et

$g(x) = (3x + 1)(3x + 2) - (x - 8)(3x + 1) + 9x^2 - 1$.

1°) Développe, réduis et ordonne $f(x)$ et $g(x)$ suivant les puissances croissantes de x .

2°) Factorise $f(x)$ et $g(x)$.

3°) Résous dans $\mathbb{R}$, les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

Problème : (2 points)

Lors d'un spectacle, la famille NIARE, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 165 FCFA. Pour le même spectacle, la famille DIARRA, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 90 FCFA.

1°) Quel est le prix du spectacle pour un adulte et le prix du spectacle pour un enfant.

2°) Combien paiera la famille DIALLO, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants ?

II- GEOMETRIE : (10 points)

1°) a) Place dans le repère les points A (3 ; 2) ; B (9 ; 5) ; C (1 ; 6).

b) Calcule les coordonnées du point K milieu du segment [AC].

2°) Cherche les coordonnées du point D (x_D ; y_D) afin que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

a) Justifie que les coordonnées de D doivent vérifier les deux égalités suivantes : $\frac{9+x_D}{2} = 2$; $\frac{5+y_D}{2} = 4$.

b) Dédus des égalités suivantes les coordonnées du point D ; puis place ce point dans le repère.

3°) On considère le point E (7 ; 9).

Le quadrilatère ABEC est-il un rectangle ? Justifie votre réponse.

4°) Détermine la nature du polygone ABED. Calcule les distances : AB ; ED et AC.

5°) Détermine l'aire $\mathcal{A}$ du polygone ABED.

DEF 2018

I- ALGEBRE :

Exercice 1 : (4 points)

1.) Calculer a, b, c dans les proportions suivantes :

a) $\frac{a}{4} = \frac{2}{5}$; b) $\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{12}$ et $a + b + c = 9$

2.) Déterminer les réels A et B tels que :

$$A = \sqrt{32 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}$$

$$B = 4\sqrt{8} - 3\sqrt{12} + \sqrt{16}$$

Exercice 2 : (4 points)

Soient les polynômes suivants : $f(x) = (x+4)^2 - (2x-1)^2$ et

$g(x) = (2x-3)(2x+1) - (3-2x)(x+1)$.

1.) Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré.

2.) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

Problème : (2 points)

Le bureau des supporters d'une équipe de football décide de payer un ballon de football à 11 900 FCFA. Il resterait 300 FCFA après l'achat du ballon, si chaque homme du bureau payait 700 FCFA et chaque femme 500 FCFA. Mais si chaque homme du bureau payait 500 FCFA et chaque femme 700 FCFA, il manquerait 100 FCFA pour l'achat du ballon. Quel est le nombre d'hommes et de femmes qui composent ce bureau ?

II- Géométrie : (10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J) d'unité 1 cm.

1.) Place dans le repère les points A (-1 ; 4), B (0 ; -1), C (4 ; 5).

2.) Calcule les distances : d (A ; B) ; d (A ; C) ; d (B ; C) et en déduire la nature du triangle ABC.

3.) Déterminer les coordonnées du point I centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

4.) Trouver les coordonnées du point D, image du point B par la translation du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

5.) Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire à la droite (BC).
Détermine la nature et l'aire du polygone ABDC.

DEF 2019

I- ALGEBRE :

Exercice 01 : (4 points)

Soient a et b deux réels tels que $a = 4 - 3\sqrt{3}$ et $b = 3 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

1°) Calculer a^2 et b^2 ; 2°) Montrer que $a^2 + 3b^2 = 86$.

3°) On donne $P = \sqrt{43 - 24\sqrt{3}}$; écrire P sous la forme de $m\sqrt{3} + n$ avec m et n deux entiers relatifs.

Exercice 02 : (4 points)

Soient les polynômes suivants : $f(x) = (2x+1)^2 - (x-4)^2$ et $g(x) = (2x+1)(x+1) - 4x^2 - 2x$.

1°) Ecrire f(x) et g(x) sous forme de produits de facteurs du premier degré.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

Problème : (2 points)

Pour cinq melons et deux mangues, Abdoul a payé 760 FCFA. Alima a acheté trois melons et une mangue, elle a payé 440 FCFA. Quel est le prix d'un melon et celui d'une mangue ?

II – GEOMETRIE : (10 points)

Partie A : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) d'unité 1 cm.

1°) Donne une équation de la droite (AB) passant par A ($x_A ; y_A$) et B ($x_B ; y_B$) ;

2°) Donne une équation de la droite (Δ) passant par le point A (-1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{U}(4 ; 3)$.

3°) On donne le point A du plan et le vecteur $\vec{AB}$ tels que : A (2 ; -3) et $\vec{AB}(1 ; 4)$.

Détermine les coordonnées du point B.

4°) On donne la droite (K) d'équation : $y = -2x + 1$ et la droite (L) d'équation : $4x + 2y - 5 = 0$. Démontre que les droites (K) et (L) sont parallèles.

Partie B : Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on donne les droites

(D) : $y = 2x + 4$ et (D') : $x + 2y - 3 = 0$.

1. Démontre que (D) passe par le point B (-5 ; -6) et que (D') passe par E (5 ; -1).

2. Démontre que (D) et (D') sont perpendiculaires en un point A dont on donnera les coordonnées.

3. Calcule les distances AB et AE.
4. Trace (D) et (D') dans le repère (O ; I ; J).
5. Démontre que le triangle ABE est un triangle rectangle en A.

DEF 2020

I- ALGEBRE :

Exercice 01 :

1°) Comparez : $\sqrt{\frac{50}{2}}$ et $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{4 \times 25}$ et $\sqrt{4} \times \sqrt{25}$.

2°) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} ; B = (\sqrt{5} - 3)(4 + \sqrt{5}) ; C = (\sqrt{3} + 5\sqrt{2})^2 .$$

3°) Développer, réduire et ordonner f(x) ; g(x) et h(x) suivant les puissances décroissantes de x :

$$f(x) = (3x - 2)^2 + (x - 4)(x + 4) \quad \text{et} \quad g(x) = (2x - 6)^2 - (4x - 3)^2 \text{ et} \\ h(x) = (2x - 5)(3x + 1) - (3x + 3)(3x - 3)$$

Exercice 01 :

Fatou achète 2 pigeons et 3 pintades à 40 Euros.

Moussa achète 7 pigeons et 2 pintades à 55 Euros.

En désignant par x le prix d'achat d'un pigeon et y celui d'une pintade :

- 1- Traduire chacune de ces phrases en une équation.
- 2- Ecris le système formé par ces équations.
- 3- En déduis le prix d'achat d'un pigeon et celui d'une pintade.

II – GEOMETRIE :

1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), place les points suivants : A(1 ; 3), B(4 ; -1), C(-3 ; 0).

2°) Calcule les distances AB, BC, et AC. Donne la nature du triangle ABC et justifie ta réponse.

3°) Calcule les coordonnées du point K centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Trouve la longueur du rayon de ce cercle.

4°) Trouve l'équation de la droite (AF) avec F(-6 ; 4).

5°) Quelle est la position de cette droite par rapport au cercle ?

Solutions

DEF 2010

Algèbre :

Exercice 1 : 1) a- Décompose les nombres naturels 320 et 48 en produits de facteurs premiers. En déduisons $\sqrt{320}$ et $\sqrt{48}$ sous forme de $x\sqrt{y}$.

320	2	48	2	$\sqrt{320} = \sqrt{2^6 \times 5} = \sqrt{64 \times 5} = \boxed{8\sqrt{5}}$
160	2	24	2	
80	2	12	2	$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \times 3} = \sqrt{16 \times 3} = \boxed{4\sqrt{3}}$
40	2	6	2	
20	2	3	3	
10	2	1		
5	5			
1				

$320 = 2^6 \times 5$ $48 = 2^4 \times 3$

b) Vérifions que le réel $5-2\sqrt{5}$ est positif. Elevons les termes au carré,

$$(5)^2 - (2\sqrt{5})^2 = 25 - 20 = 5 > 0, \text{ alors } 5-2\sqrt{5} \text{ positif.}$$

2) Ecrivons les réels E et T sous forme de fraction ou de nombre entier

relatif. $E = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(3+\sqrt{2})} - \sqrt{\frac{1}{4} \times 6}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{6}} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{6})}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{6}} = \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}}$

$T = \frac{\sqrt{20-320} - \sqrt{12+48}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4(5-2\sqrt{5})} - \sqrt{4(3+\sqrt{3})}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{2 \times \sqrt{5-2\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{3}}}{-(\sqrt{5-2\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{3}})} = \Rightarrow \boxed{T = -2}$

Exercice 2:

1- Développons : $(a+b+c)^2$ et $(a+b+c)^3$

$$\begin{aligned} * (a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2.(a+b).c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}$$

$$\begin{aligned} * (a+b+c)^3 &= (a+b+c)(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + ac^2 + a^2b + c^2b + a^2c + b^2c + 2a^2b + 2abc + 2a^2c + 2ab^2 + 2b^2c \\ &\quad + 2abc + 2abc + 2bc^2 + 2ac^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3c^2b + 3a^2c + 3b^2c + 6abc}$$

2) Démontrons que si $a+b+c = 0$, alors $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

On sait que : $a = -(b+c)$; $b = -(a+c)$; $c = -(a+b)$

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3 &= a^2a+b^2b+c^2c \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = -a^2(b+c)-b^2(a+c)-c^2(a+b) \\&= -a^2b - a^2c - b^2a - b^2c - c^2a - c^2b \\&= -a^2b - b^2a - a^2c - c^2a - b^2c - c^2b \\&= -ab(a+b) - ac(a+c) - bc(b+c) \\&= abc + abc + abc \\&= 3abc\end{aligned}$$

d'où $\boxed{a^3+b^3+c^3 = 3abc}$

Problème: Trouvons la longueur d'une locomotive et celle d'un wagon-citerne. Soient x et y ces deux longueurs respectives.

$$\begin{cases} 2x + 10y = 152 & 1 \\ x + 12y = 160 & 2 \end{cases}$$

En utilisant ces deux équations, on aura: $\boxed{x = 16\text{m et } y = 12\text{m}}$

Une locomotive mesure 16m et un wagon-citerne mesure 12m.

Géométrie :

Partie A 1) EFG étant un triangle rectangle, $O \in (EG)$ et $(OI) \perp (FG)$, alors $(OI) \parallel (EF)$.

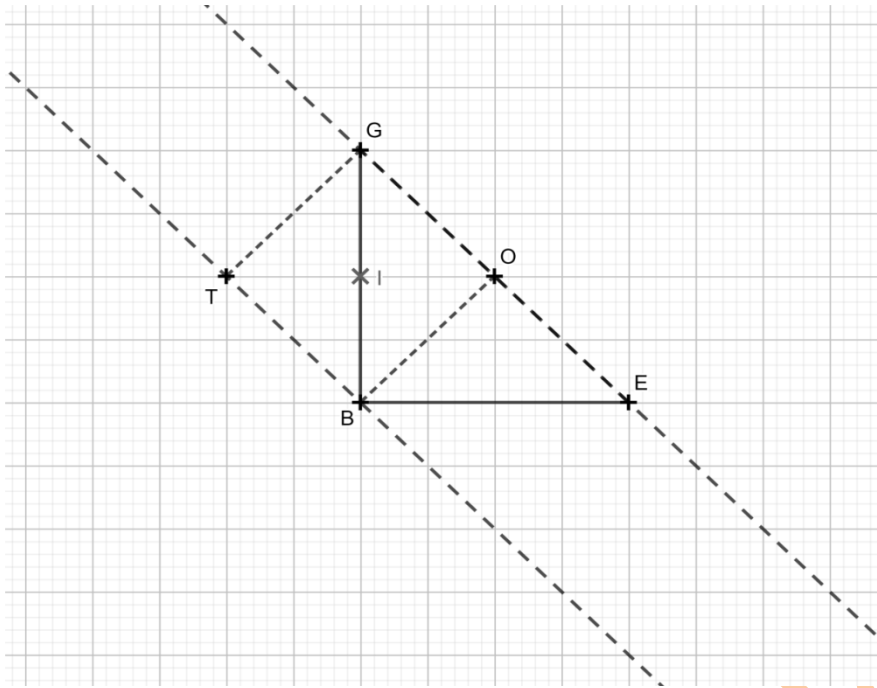
2) $\widehat{FOI}$ et $\widehat{FEO}$ ont même mesure car $(OI) \parallel (EF)$

et que $\widehat{FOI}$ se trouve dans le secteur

angulaire $\widehat{FEO}$. 3) On remarque que $IG = FI$ et

$FO = OG$ d'où $FO = OG$. Alors $(FT) \parallel (EG)$.

Le quadrilatère OGTF est un carré.



Partie B

1) Traçons la droite (D) : $y = 2x + 1$ et plaçons le point A (2 ; 2).

2) Donnons une équation de la droite (AA'). Soit A' (x ; y) tel que $(D) \perp (AA')$.

Posons $\vec{AA'} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$ X ; Y et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ X' ; Y', vecteur directeur de (D). D'après la formule : $XX' + YY' = 0$, on a : $(x-2) \times 1 + (y-2) \times 2 = 0$

$$(AA') : x + 2y - 6 = 0$$

3) Calculons les coordonnées de H. Formons un système avec les deux équations.

$$\begin{cases} (D) : y = 2x + 1 \\ (AA') : x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

On trouve $x = 4/5$ et $y = 13/5$ $H(\frac{4}{5} ; \frac{13}{5})$

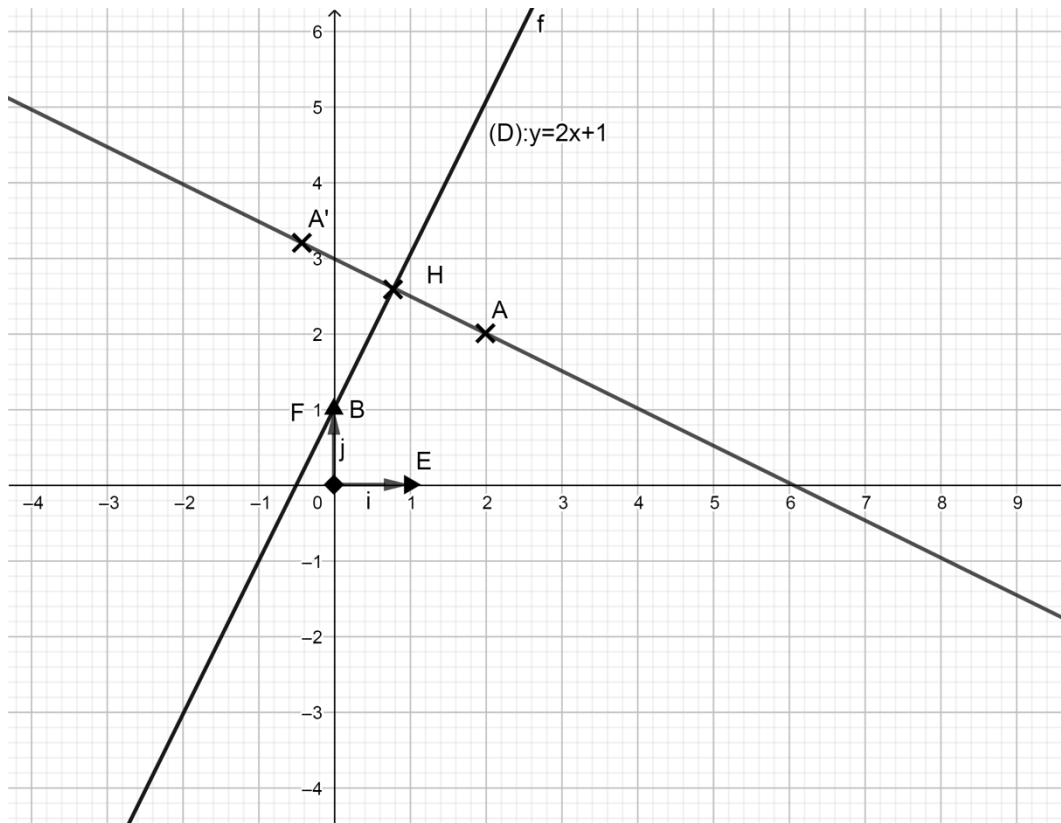
Calculons les longueurs BH et AB. B (0 ; 1)

$$BH = \sqrt{(x_H - x_B)^2 + (y_H - y_B)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{13}{5} - 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \quad \boxed{BH = \frac{4 \times 2,23}{5} = 1,78 \text{ cm}}$$

Sur la figure, on voit que B est équidistant de A' et A, alors $A'B = AB$.

$$AB = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{AB = 2,23 \text{ cm}}$$



DEF 2011

I- Algèbre :

Exercice 1 : Trouvons ces deux nombres x et y : $x > y$, $x + y = 320$ 1

$\frac{x}{y} : q = 3$ et $r = 8 \Rightarrow x = 3y + 3$ 2. En utilisant ces deux équations, on trouve : $x = 242$ et $y = 78$

Exercice 2 : $a = \frac{m-1}{2}$ et $b = \frac{m-4}{2}$

Calculons le nombre réel m pour que :

a-) a et b soient opposés. $a = -b \Rightarrow \frac{m-1}{2} = -(\frac{m-4}{2}) \Rightarrow m-1 = -m+4$
 $\Rightarrow 2m = 5 \Rightarrow \boxed{m = 5/2}$

b-) a et b soient inverses. $a = 1/b$ ou $b = 1/a$ ou $ab = 1$
 $ab = 1 \Rightarrow (\frac{m-1}{2})(\frac{m-4}{2}) = 1 \Rightarrow \frac{(m-1)(m-4)}{4} = 1 \Rightarrow m^2 - 5m = 0$
 $\Rightarrow m(m-5) = 0 \quad \boxed{m = 0 \text{ ou } m = 5}$

Problème : $f(x) = \frac{x-2}{9} - x^3 + x^2$ et $g(x) = (7x-3)^2 - 5^2$

1) Factorisons f et g dans $\mathbb{R}$ puis résolvons $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$

$f(x) = \frac{x-2}{9} - x^3 + 2x^2 = \frac{x-2}{9} - x^2(x-2) \quad g(x) = (7x-3)^2 - 5^2$

$$= (x-2)\left(\frac{1}{9}x^2\right) = -(x-2)\left(x^2 - \frac{1}{9}\right)$$

$$\boxed{f(x) = -(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow -(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 2\right\}}$$

$$= [(7x - 3) - 5][(7x - 3) + 5]$$

$$= (7x-3-5)(7x-3+5)$$

$$\boxed{g(x) = (7x-8)(7x+2)}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow (7x-8)(7x+2) = 0$$

$$x = 8/7 \text{ ou } x = -2/7$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{2}{7}; \frac{8}{7}\right\}}$$

$$2) \quad h(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{f(x)}$$

a) Déterminons le domaine de définition de h dans IR puis simplifions h(x).

$$h(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{f(x)} = \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{-(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)} \quad D_h = \left\{x \in \mathbb{R} / -(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \neq 0\right\}$$

$$x \neq 2 \text{ ou } x \neq -1/3 \text{ ou } x \neq 1/3$$

$$\boxed{D_h = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 2\right\}}$$

$$a) \text{ Calculons } h(\sqrt{3}). \quad h(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^2 - \frac{1}{9}}{\frac{\sqrt{3}-2}{9}(\sqrt{3})^3 + 2(\sqrt{3})^2} = \frac{27}{52-26\sqrt{3}}$$

$$\text{On rends rationnel : } \boxed{h(\sqrt{3}) = \frac{702+351\sqrt{3}}{338}}$$

$$c) \text{ Résolvons } g(x) = -16 \Rightarrow (7x-8)(7x+2) = -16$$

$$\Rightarrow 49x^2 + 14x - 56x - 16 = -16$$

$$\Rightarrow 49x^2 - 42x = 0$$

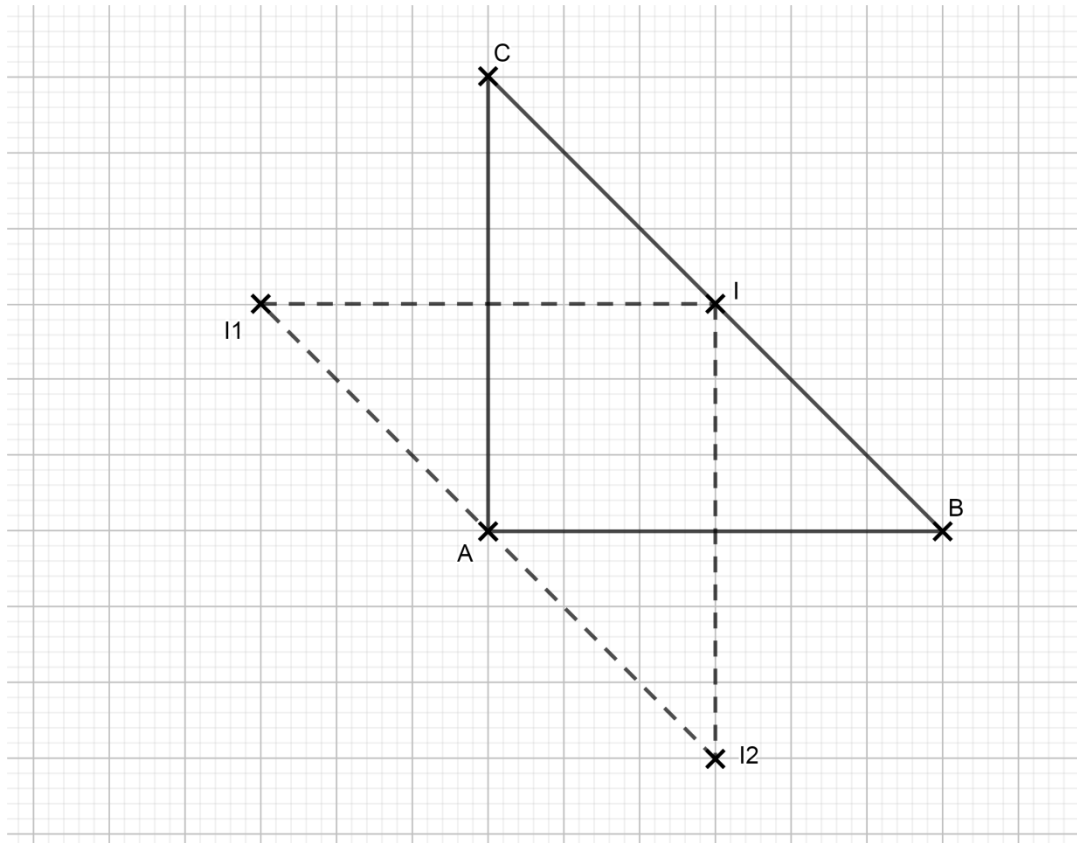
$$\Rightarrow 7x(7x-6) = 0 \quad 7x = 0 \text{ ou } 7x-6 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 6/7$$

$$\boxed{S = \left\{0; \frac{6}{7}\right\}}$$

II-Géométrie :

Exercice 1 :

Explication : Les points I_1 ; A et I_2 sont alignés car A est élément de la droite (I_1I_2) .



Exercice 2 :

a) Représentation de la figure.

b) Montrons que AMP est rectangle en M: $AM = 4\text{cm}$; $MP = 3\text{cm}$

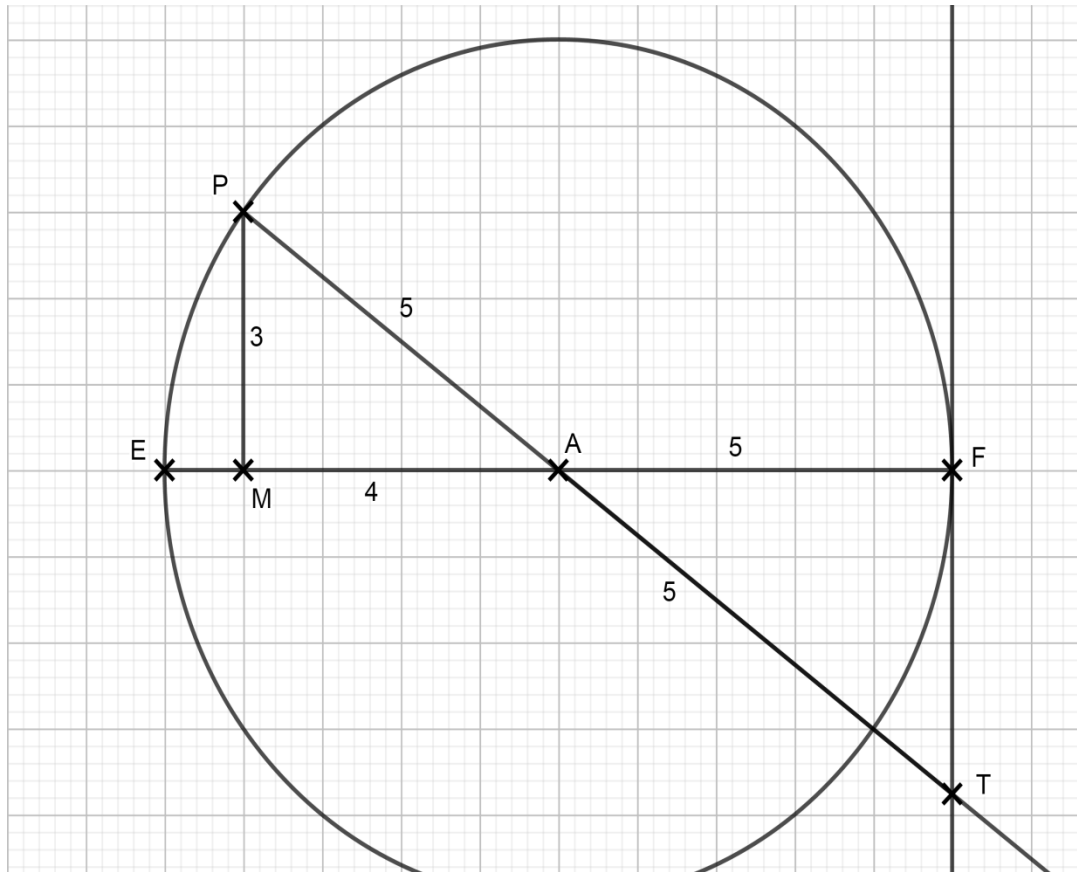
$AP^2 = AM^2 + MP^2 + 16 + 9 = 25 \Rightarrow AP = 5\text{cm}$, alors AMP est rectangle en M.

c) $(MP) \parallel (EF)$ et que la tangente est toujours parallèle au diamètre, ici (EF) . Alors (MP) et (FT) sont parallèles.

d) Calculons la longueur AT.

On mesure l'angle $\widehat{FAT} = 35^\circ$. Dans le triangle FAT $\cos 35^\circ = \frac{FA}{AT}$

$$AT = \frac{FA}{\cos 35^\circ} = \frac{5}{\cos 35^\circ} \Rightarrow \boxed{AT = 6,1\text{ cm}}$$



DEF 2012

I- Algèbre:

Exercice1: Trouvons $a \in \mathbb{N}$ tel que :

$$2^{4-a} = 1 \Rightarrow 2^{4-a} = 2^0 \Rightarrow 4 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$(3^a)^5 = 1 \Rightarrow 3^{5a} = 3^0 \Rightarrow 5a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$9^{3a} = 3^{12} \Rightarrow (3^2)^{3a} = 3^{12} \Rightarrow 3^{6a} = 3^{12} \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$(2^2)^{3a} = 4^6 \Rightarrow (2^2)^{3a} = (2^2)^6 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$5 \times 5^{a-3} = 25 \Rightarrow 5^{a-3+1} = 5^2 \Rightarrow 5^{a-2} = 5^2 \Rightarrow a - 2 = 2 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

Exercice 2: a) Développons : $(3\sqrt{2} + 5)(3\sqrt{2} - 5) = 18 - 25 = \boxed{-7}$

En déduisons une écriture simplifiée :

$$\frac{-7\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+5} = \frac{(-7\sqrt{2})(3\sqrt{2}-5)}{-7} = \sqrt{2}(3\sqrt{2}-5) = \boxed{6-5\sqrt{2}}$$

b) Donnons un encadrement à 10^{-2} près de $6 - 5\sqrt{2}$.

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \Rightarrow 7,05 < 5\sqrt{2} < 7,10 \Rightarrow -7,10 < \sqrt{2} < -7,01$$

$$\boxed{1,10 < 6 - 5\sqrt{2} < -1,05}$$

Exercice 3 : $a = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$; $U = a + b$

a) Calculons ab .

$$\begin{aligned} ab &= (\sqrt{7 - 4\sqrt{3}})(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}) \\ &= \sqrt{(7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{49 - 48} \\ &= \sqrt{1} \end{aligned}$$

$$\boxed{ab = 1}$$

b) Calculons U^2

$$\begin{aligned} U^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &= 7 - 4\sqrt{3} + 7 + 4\sqrt{3} + 2 \times 1 \end{aligned}$$

$$U^2 = 14 + 2$$

$$\boxed{U^2 = 16}$$

Problème : Soient p , x , y et z les âges respectifs du père et ceux de ses enfants.

$$x + y + z = p + 3$$

$$\frac{p}{15} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{p+x+y+z}{31}$$

$$\frac{p}{15} = \frac{3+2p}{31} \Rightarrow 31p = 45 + 30p \Rightarrow \boxed{p = 45 \text{ ans}}$$

$$\frac{x}{7} = \frac{p}{15} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{45}{15} \Rightarrow \frac{x}{7} = 3 \Rightarrow \boxed{x = 21 \text{ ans}}$$

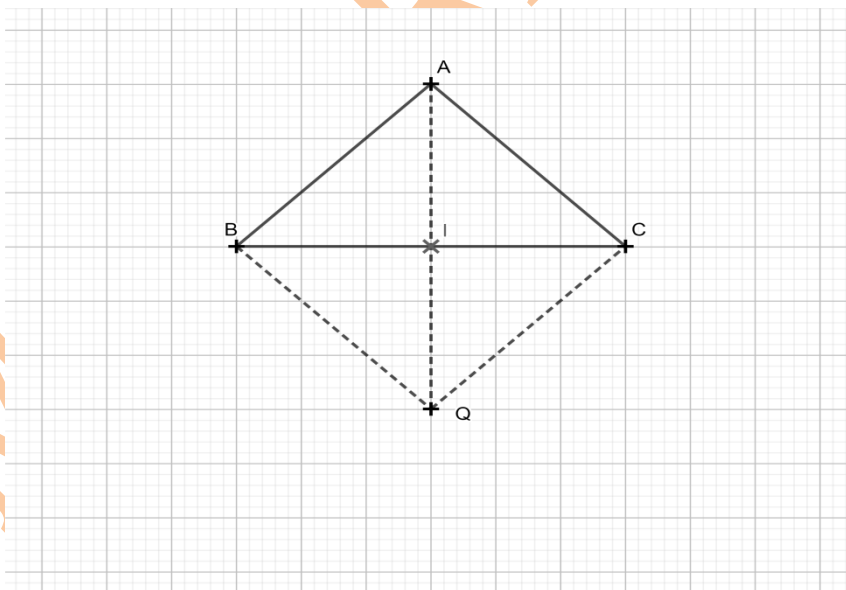
$$\frac{y}{5} = 3 \Rightarrow \boxed{y = 15 \text{ ans}}$$

$$\frac{z}{4} = 3 \Rightarrow \boxed{z = 12 \text{ ans}}$$

II- Géométrie :

A- Partie : I

ABC étant isocèle, I milieu de [BC], $\vec{AI} = \vec{IQ}$. Alors BQ = AC = BA = QC, d'où ACQB est un parallélogramme puis un losange.



B- Partie : II

1) Voir figure.

2) Trouvons une équation de (Δ) et celle de (Δ') .

* $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Soient I milieu de [AB], $I(3 ; 4)$ et $N(x ; y) \in (\Delta)$ tel que : $(AB) \perp (IN)$, $\overrightarrow{IN} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix}$. $XX' + YY' = 0 \Rightarrow -2(x-3) + 4(y-4) = 0$

$$(\Delta) : x - 2y + 5 = 0$$

* $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Soient J milieu de [AC], $J(\frac{3}{2} ; \frac{-1}{2})$ et $L(x ; y) \in (\Delta')$ tel que : $(AC) \perp (JL)$, $\overrightarrow{JL} \begin{pmatrix} x-\frac{3}{2} \\ y+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. $XX' + YY' = 0 \Rightarrow -5(x - \frac{3}{2}) - 4(y + \frac{1}{2}) = 0$

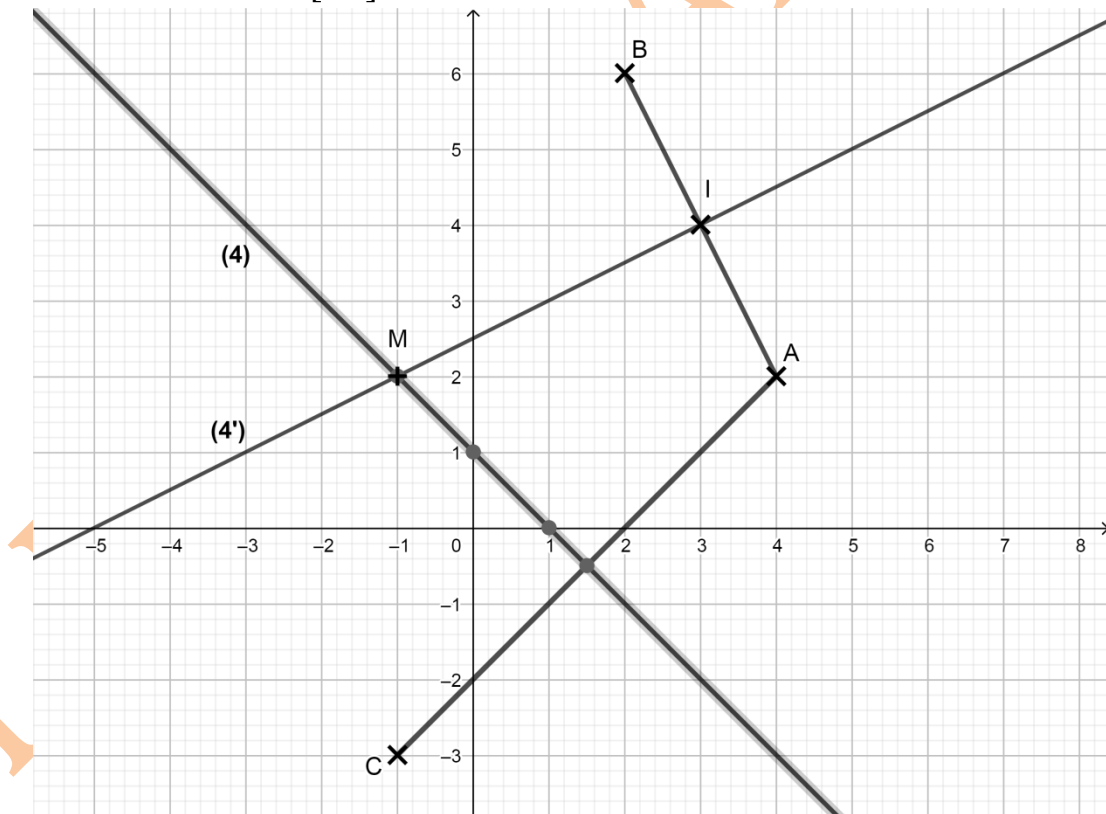
Après simplification, on a : $(\Delta') : x + y - 1 = 0$

Déterminons les coordonnées de M, intersection des droites (Δ) et (Δ') .

Formons un système avec les deux équations.

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 & 1 \\ x + y - 1 = 0 & 2 \end{cases} \text{Après résolution, on aura : } x = -1 \text{ et } y = 2 \quad \boxed{M \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

3) Dans un triangle les trois médiatrices se coupent en un point, M est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [AC], alors il appartient aussi à celle [BC].



DEF 2013

I- Algèbre :

1) Comparons :

* $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$: $(3\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{11})^2 = 27 - 44 = -17 < 0$, alors $\boxed{3\sqrt{5} < 2\sqrt{11}}$

* $\sqrt{24}$ et $2+\sqrt{3}$: $(\sqrt{24})^2 - (2+\sqrt{3})^2 = 24 - 4\sqrt{3} - 7 = 17 - 4\sqrt{3}$
 $\Rightarrow (17)^2 - 4\sqrt{3})^2 = 289 - 112 = 177 > 0$, alors $\boxed{\sqrt{24} > 2+\sqrt{3}}$

* $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ et $\sqrt{12 + 2\sqrt{35}}$:

$(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - (\sqrt{12 + 2\sqrt{35}})^2 = 5 + 2\sqrt{5 \times 7} + 7 - (12 + 2\sqrt{35})$
 $= 12 + 2\sqrt{35} - 12 - 2\sqrt{35} = 0$, alors $\boxed{\sqrt{5} + \sqrt{7} = \sqrt{12 + 2\sqrt{35}}}$

2) Soient x, y et z les parts respectifs des trois personnes.

$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{28\,000}{14} = 2000$ $\frac{x}{12} = 2000 \Rightarrow \boxed{x = 24\,000 \text{ FCFA}}$

$\frac{y}{15} = 2000 \Rightarrow \boxed{y = 30\,000 \text{ FCFA}}$ et $\boxed{z = 28\,000 \text{ FCFA}}$

La somme à partager est : $S = 24\,000 + 30\,000 + 28\,000 \Rightarrow \boxed{S = 82\,000 \text{ FCFA}}$

3) $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2$

a) Développons, réduisons et ordonnons : $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1)$

b) Résolvons dans IR, $f(x) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{4}$.

$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0$
 $\Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$ $\boxed{S = \{-1\}}$

$f(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$
 $\Rightarrow x(x+2) = 0$

$x = 0$ ou $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$ $\boxed{S = \{-2; 0\}}$

c) Développons $(\sqrt{5} + 1)^2$ et $(\sqrt{5} - 1)^2$

$(\sqrt{5} + 1)^2 = 6 + 2\sqrt{5}$; $(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$.

En déduisons : $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = \boxed{\sqrt{5} + 1}$

$B = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \boxed{\sqrt{5} - 1}$

d) Montrons que $f(\sqrt{5}) = \frac{A}{B}$

$$\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2 - (1)^2} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)^2$$

$$f(\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)^2 = \frac{A}{B} \quad \text{Alors} \quad \boxed{f(\sqrt{5}) = \frac{A}{B}} \quad \text{CQFM(ce qui fallait montrer)}$$

II- Géométrie :

$$A(-2; 5); B(-2; -3); C\left(\frac{10}{3}; 1\right)$$

1) Plaçons les points A ; B et C (voit figure)

2) Trouvons une équation de h_1 et celle de h_2 .

* h_1 passe par B et $\perp$ à (AC).

Soit $H(x; y) \in h_1$, tel que $(BH) \perp (AC)$ et $XX' + YY' = 0$

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} x+2 \\ y+3 \end{pmatrix} X; Y \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ -4 \end{pmatrix} X', Y' \quad XX' + YY' = 0 \Rightarrow \frac{16}{3}(x+2) - 4(y+3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(h_1) : 4x - 3y - 1 = 0}$$

* h_2 passe par C et $\perp$ à (AB).

Soit $H(x; y) \in h_2$, tel que $(CH) \perp (AB)$ et $XX' + YY' = 0$

$$\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} x - \frac{10}{3} \\ y - 1 \end{pmatrix} X; Y \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} X', Y' \quad XX' + YY' = 0 \Rightarrow 0(x - \frac{10}{3}) - 8(y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(h_2) : y = 1}$$

Trouvons les coordonnées de H ; formons un système avec les deux

$$\text{équations.} \quad \begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3 \times 1 - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \boxed{H(1)}$$

3) Trouvons une équation de la médiatrice de [AC] puis celle de la médiatrice de [AB].

* Soient (Δ) l'équation de la médiatrice de [AC], $M(x; y) \in (\Delta)$, $I(\frac{2}{3}; 3)$ milieu

de [AC] tel que $(IM) \perp (AC)$. $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ -4 \end{pmatrix} X; Y$ et $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x - \frac{2}{3} \\ y - 3 \end{pmatrix} X', Y'$

$$\frac{16}{3}(x - \frac{2}{3}) - 4(y - 3) = 0 \Rightarrow 48x - 36y + 76 = 0 \quad \boxed{(\Delta) : 12x - 9y + 19 = 0}$$

* Soient (Δ') l'équation de la médiatrice de [AB], $N(x; y) \in (\Delta')$, $J(-2; 1)$

milieu de [AB] tel que $(JN) \perp (AB)$. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} X; Y$ et $\overrightarrow{JN} \begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 1 \end{pmatrix} X', Y'$

$$0(x + 2) - 8(y - 1) = 0 \Rightarrow -8y + 8 = 0 \quad \boxed{(\Delta') : y = 1}$$

Les coordonnées du centre W du cercle circonscrit au triangle ABC sont :

W est le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ') .

$$\begin{cases} 12x - 9y + 19 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x = 9 \times 1 - 19 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{6} \\ y = 1 \end{cases} \quad \boxed{W\left(-\frac{5}{6}; 1\right)}$$

4) Trouvons les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

G est le point d'intersection des médianes.

Soient (D) la médiane passant par B (-2 ; -3) et I ($\frac{2}{3}$; 3) milieu de [AC] ;

$M(x ; y) \in (D)$ tel que $(BM) // (BI) \xrightarrow{BI} \left(\frac{8}{6}\right) X ; Y$ et $\xrightarrow{BM} \left(\frac{x+2}{y+3}\right) X' ; Y'$

$$XY' = X'Y \Rightarrow 6(+2) = \frac{8}{3}(y+3) \Rightarrow (D) : 9x - 4y + 6 = 0$$

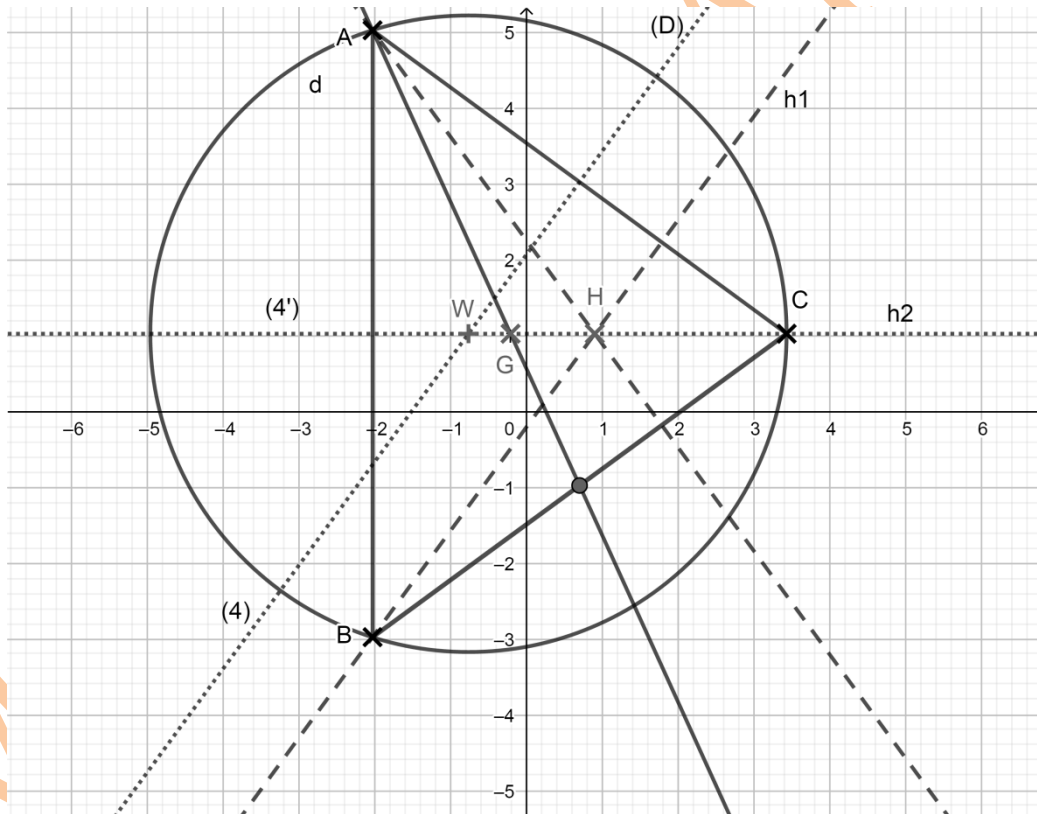
$(h_2) : y = 1$, est aussi la médiane passant par C et H milieu de [AB].

$$\begin{cases} 9x - 4y + 6 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{9} \\ y = 1 \end{cases} \quad \boxed{G\left(\frac{-2}{9} ; 1\right)}$$

5) Démontrons que W, G, H sont tels que : $2 \times \overrightarrow{WG} = \overrightarrow{GH}$

$$H\left(1 ; 1\right) ; G\left(\frac{-2}{9} ; 1\right) ; W\left(\frac{-5}{6} ; 1\right) \quad \overrightarrow{GH} \left(\frac{1+\frac{2}{9}}{1-1}\right) \Rightarrow \overrightarrow{GH} \left(\frac{11}{9} ; 0\right)$$

$$\overrightarrow{WG} \left(\frac{-\frac{2}{9}+\frac{5}{6}}{1-1}\right) \Rightarrow \overrightarrow{WG} \left(\frac{33}{54} ; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{WG} \left(\frac{11}{18} ; 0\right) \frac{11}{9} = 2 \times \frac{11}{18} \quad \text{Alors } \boxed{2 \times \overrightarrow{WG} = \overrightarrow{GH}}$$



DEF 2014

I- Algèbre:

$$f(x) = (2x+3)^2 - (x+6)^2 ; h(x) = ax^2 + bx + c ; g(x) = (x+3)(5-x) - h(x)$$

1) Déterminons les réels a, b et c.

$$h(0) = 18 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 18}$$

$$h(-3) = 0 \Rightarrow a(-3)^2 + b(-3) + c = 0 \Rightarrow 9a - 3b + 18 = 0 \Rightarrow 3a - b + 6 = 0 \quad 1$$

$$h(-1) = -8 \Rightarrow a - b + 18 = -8 \Rightarrow a - b = -26 \Rightarrow b = a + 26 \quad 2$$

$$1: 3a - a - 26 + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 10}$$

$$2: b = 10 + 26 \Rightarrow \boxed{b = 36} \quad \text{Ecrivons: } \boxed{h(x) = 10x^2 + 36x + 18}$$

2) Développons, réduisons et ordonnons f et g.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+3)^2 - (x+6)^2 = 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 + 12x + 36) \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - x^2 - 12x - 36 = 3x^2 - 27 \Rightarrow \boxed{f(x) = 3x^2 - 27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+3)(5-x) - h(x) = (x+3)(5-x) - (10x^2 + 36x + 18) \\ &= 5x - x^2 + 15 - 3x - 10x^2 - 36x - 18 = \Rightarrow \boxed{g(x) = -11x^2 - 34x - 3} \end{aligned}$$

3) Factorisons f et g.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+3)^2 - (x+6)^2 = [(2x+3) - (x+6)][(2x+3) + (x+6)] \\ &= (2x+3-x-6)(2x+3+x+6) \Rightarrow f(x) = 3(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

$$g(x) = (x+3)(5-x) - h(x) = (x+3)(5-x) - (10x^2 + 36x + 18)$$

$$\begin{aligned} \text{Factorisons } h(x), h(-3) = 0 \text{ alors } h(x) &= (x+3)(ax+b) \\ &= ax^2 + bx + 3ax + 3b \\ &= ax^2 + (3a+b)x + 3b \end{aligned}$$

$$h(x) = h(x) \Rightarrow 10x^2 + 36x + 18 = ax^2 + (3a+b)x + 3b$$

$$\text{Par identification, } a = 10 ; 3b = 18 \Rightarrow b = 6$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } g(x) &= (x+3)(5-x) - (x+3)(10x+6) = (x+3)[(5-x) - (10x+6)] \\ &= (x+3)(5-x-10x-6) \Rightarrow g(x) = (x+3)(-11x-1) \end{aligned}$$

$$4) \quad q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3(x-3)(x+3)}{(x+3)(-11x-1)}$$

a) Déterminons l'ensemble de définition de q.

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / (x+3)(-11x-1) \neq 0\} \Rightarrow (x+3)(-11x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \text{ ou}$$

$$x \neq -\frac{1}{11} \quad D_{h=IR-\left\{-3; -\frac{1}{11}\right\}} \quad q(x) = \frac{3(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(-11x-1)} = \frac{3(x-3)}{(-11x-1)}$$

b) Résolvons dans IR :

$$* q(x) = 0 \Rightarrow \frac{3(x-3)}{(-11x-1)} = 0 \Rightarrow 3(x-3) = 0 \quad x = 3 \quad \boxed{S = \{3\}}$$

$$\begin{aligned} * q(x) &= \frac{-9}{4} \Rightarrow \frac{-3(x-3)}{11x+1} = \frac{-9}{4} \Rightarrow \frac{x-3}{11x+1} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x-12 = 33x+3 \\ &\Rightarrow 29x = -15 \Rightarrow x = \frac{-15}{29} \quad \boxed{S = \left\{\frac{-15}{29}\right\}} \end{aligned}$$

II- Géométrie :

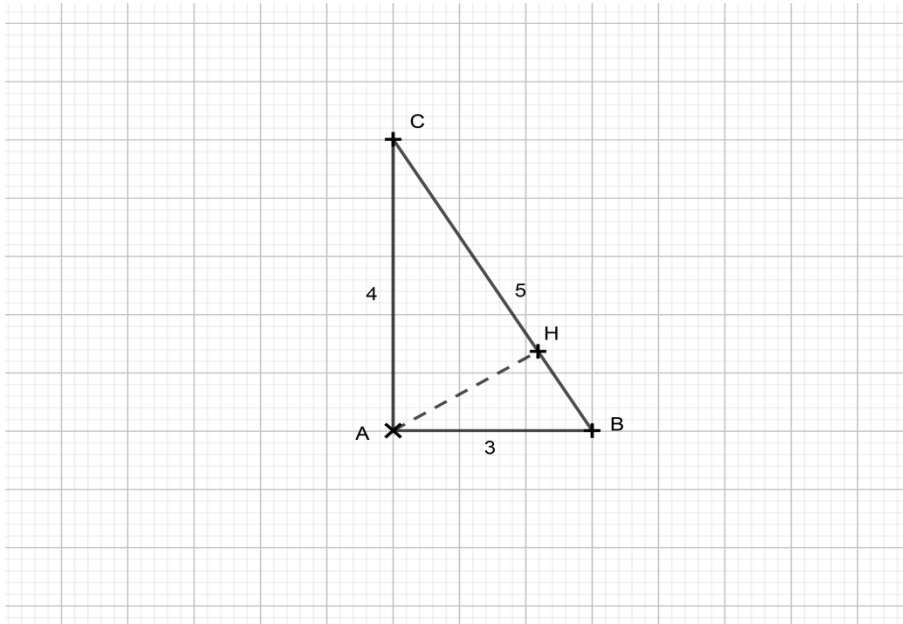
Exercice 1 : $AB = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$

Déterminons la nature du triangle ABC.

$$AB^2 = 3^2 = 9 ; AC^2 = 4^2 = 16 ; BC^2 = 5^2 = 25$$

$AB^2 + AC^2 = 25 = BC^2$, alors ABC est rectangle en A. Calculons :

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} ; \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}. \text{ Construisons le point H (voir figure).}$$



Exercice 2 :

1) Plaçons les points $A(2 ; 4)$, $B(-2 ; 0)$ et $C(4 ; 0)$ (voir figure)

2) Calculons les coordonnées des points A' et B' .

$$A' : \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{0+0}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} ; B' : \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{4+0}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B' \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

3) Trouvons une équation de (AA') et une équation de (BB') .

* Soient $M(x ; y) \in (AA')$, (AA') passe par A et A' tel que $(AM) \parallel (AA')$.

$$XY' = X'Y : \begin{cases} \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AA'} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \end{cases} \quad -4(x-2) = -1(y-4) \Rightarrow \boxed{(AA') : 4x - y - 4 = 0}$$

* Soient $N(x ; y) \in (BB')$, (BB') passe par B et B' tel que $(BN) \parallel (BB')$.

$$XY' = X'Y : \begin{cases} \overrightarrow{BN} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BB'} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad 2(x+2) = 5y \Rightarrow \boxed{(BB') : 2x - 5y + 4 = 0}$$

En déduisons les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Formons un système avec les équations de (AA') et (BB') .

$$\begin{cases} 4x - y - 4 = 0 \\ 2x - 5y + 4 = 0 \end{cases} \quad x = \frac{4}{3} \text{ et } y = \frac{10}{9} \quad \boxed{G\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{9}\right)}$$

4) Trouvons une équation de la médiatrice de [BC] puis celle de la médiatrice de [AC].

* Soient (Δ) l'équation de la médiatrice de [BC], $M(x; y) \in (\Delta)$, $I(1; 0)$ milieu de [BC] tel que $(IM) \perp (BC)$. $\vec{BC} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} X; Y$ et $\vec{IM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} X', Y'$

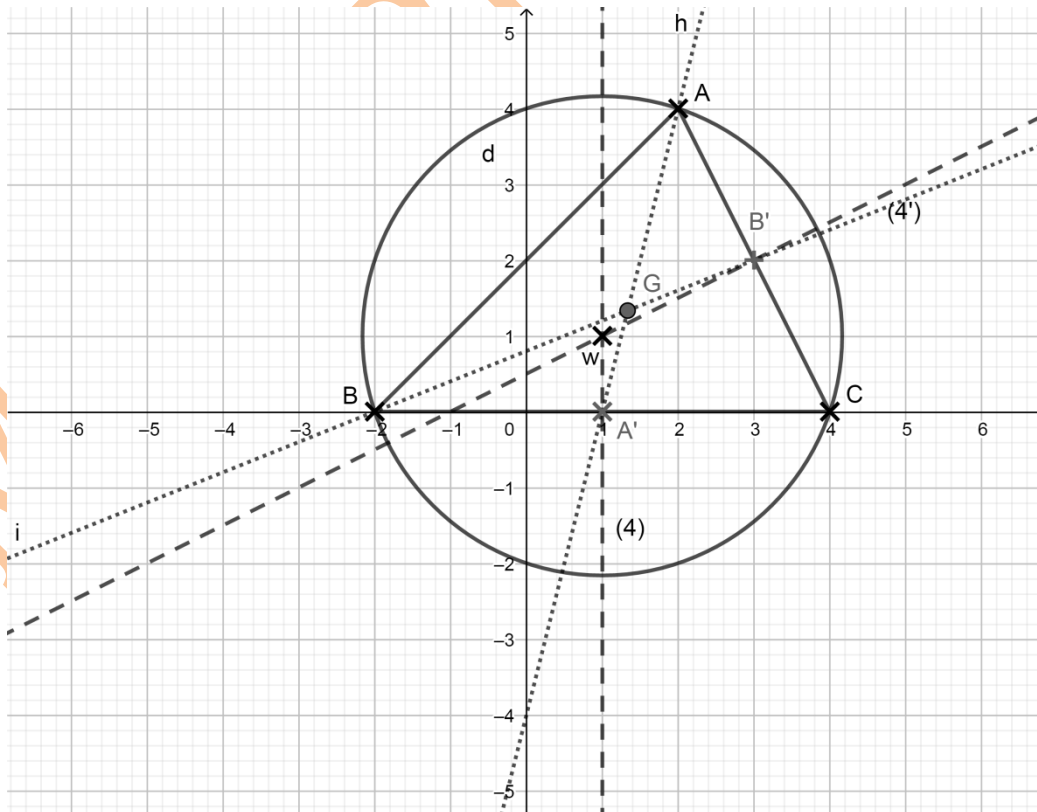
$$6(x-1) + 0(y) = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{(\Delta) : x = 1}$$

* Soient (Δ') l'équation de la médiatrice de [AC], $N(x; y) \in (\Delta')$, $J(3; 2)$ milieu de [AC] tel que $(JN) \perp (AC)$. $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} X; Y$ et $\vec{JN} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} X', Y'$

$$2(x-3) - 4(y-2) = 0 \Rightarrow 2x - 4y + 2 = 0 \quad \boxed{(\Delta') : x - 2y + 1 = 0}$$

En déduisons les coordonnées du centre ω du cercle circonscrit au triangle ABC sont : W est le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ') .

$$\begin{cases} x = 1 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \boxed{\omega(1, 1)}$$



DEF 2015

I- Algèbre :

A-/ $P(x) = x^2 + (a-b+3)x + 2a-3b$

1) Calculons a et b sachant que:

$$P(0) = 9 \Rightarrow (0)^2 + (a-b+3)(0) + 2a-3b = 9 \Rightarrow 2a-3b = 9 \quad 1$$

$$P(1) = 4 \Rightarrow (1)^2 + (a-b+3)(1) + 2a-3b = 4 \Rightarrow 3a-4b = 0 \Rightarrow a = \frac{4b}{3} \quad 2$$

$$1 : 2\left(\frac{4b}{3}\right) - 3b = 9 \Rightarrow 8b - 9b = 27 \Rightarrow \boxed{b = -27} \text{ et } \boxed{a = -36}$$

2) Factorisons P(x) : $P(x) = x^2 + (-36+27+3)x + 2(-36)-3(-27)$
 $= x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \Rightarrow \boxed{P(x) = (x-3)(x-3)}$

B-/ $A(x) = (x-5)(3x-8) + (x-5)^2 + 2x^2 - 50$ et $B(x) = (3x-15)$

$$A(x) = (x-5)(3x-8) + (x-5)^2 + 2x^2 - 50 = 3x^2 - 23x + 40 + x^2 - 10x + 25 + 2x^2 - 50$$

$$\boxed{A(x) = 6x^2 - 13x + 25}$$

$$B(x) = (3x-15) \Rightarrow \boxed{B(x) = 3x-15}$$

2) Factorisons A(x) et B(x).

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-5)(3x-8) + (x-5)^2 + 2x^2 - 50 \\ &= \underline{(x-5)}(3x-8) + \underline{(x-5)}(x-5) + 2\underline{(x-5)}(x+5) \\ &= (x-5)(3x-8+x-5+2x+10) \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = 3(x-5)(3x-1)}$$

$$B(x) = (3x-15) \Rightarrow \boxed{B(x) = 3(x-5)}$$

3) Résolvons dans IR les équations: $A(x) = 0 \Rightarrow 3(x-5)(3x-1) = 0$

$$3(x-5) = 0 \text{ ou } 3x-1 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -1/3 \quad \boxed{S = \left\{-\frac{1}{3}; 5\right\}}$$

$$A(x) = B(x) \Rightarrow 3(x-5)(3x-1) = 3(x-5) \Rightarrow 3x-1 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad \boxed{S = \left\{\frac{2}{3}\right\}}$$

4) Déterminons l'ensemble de définition de f.

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{3(x-5)(3x-1)}{3(x-5)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3(x-5) \neq 0\}$$

$$3(x-5) \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \quad \boxed{D_f = \mathbb{R} - \{5\}}$$

5) Calculons f(0) et f($\sqrt{2}$).

$$f(x) = \frac{3(x-5)(3x-1)}{3(x-5)} = 3x-1 \quad \begin{cases} f(0) = 3(0) - 1 \Rightarrow f(0) = -1 \\ f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2}) - 1 \end{cases}$$

II-Géométrie :

$$A(0 ; 3) ; B(6 ; 3) ; C\left(\frac{-3}{2} ; \frac{+9}{3}\right)$$

1) Plaçons les points A, B et C puis montrons que A, B, C sont alignés.

$$A, B, C \text{ sont alignés ssi } \overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{AC} \left(\frac{-3}{2} - 0 \right) = \Rightarrow \overrightarrow{AC} \left(\frac{-3}{2} \right), \overrightarrow{AB} \left(\frac{6-0}{3-3} \right) \\ \Rightarrow \overrightarrow{AB} \left(\frac{3}{0} \right) ; 3 = -2\left(\frac{-3}{2}\right), \text{ alors } \overrightarrow{AB} = -2 \times \overrightarrow{AC}. \text{ D'où A, B, C sont alignés.}$$

2) Déterminons les coordonnées du milieu M de [BC] puis celles du point D symétrique de O par rapport à M.

$$* M : \begin{cases} \frac{\frac{-3}{2} + 6}{2} = \frac{9}{4} \\ \frac{3+3}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{9}{4} ; 3\right)}$$

$$* \overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MO} \Rightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{9}{4} \\ y - 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ -3 \end{pmatrix} \begin{cases} x - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \\ y - 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D\left(\frac{9}{2} ; 6\right)}$$

3) Calculons les distances :

$$d(O, C) = \sqrt{\left(\frac{-3}{2} - 0\right)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$d(O, D) = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 0\right)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + 36} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$$

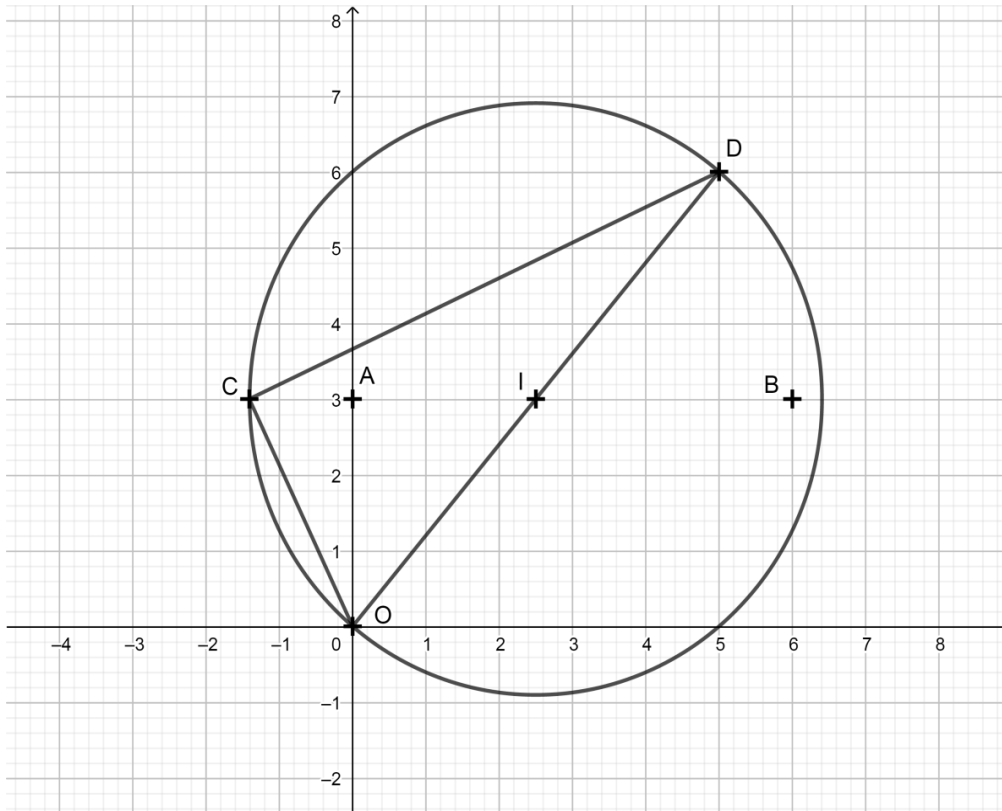
$$d(C, D) = \sqrt{\left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$OD^2 = \frac{225}{4} ; CD^2 = 45 ; OC^2 = \frac{45}{4} ; CD^2 + OC^2 = \frac{225}{4} = OD^2, \text{ OCD est rectangle en C.}$$

4) Calculons les coordonnées de I puis calculons le rayon r.

OCD étant rectangle en C, I est le milieu de [OD] son hypoténuse.

$$I : \begin{cases} \frac{0 + \frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{4} \\ \frac{0+6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\frac{9}{4} ; 3\right)} \quad r = \frac{OD}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{15}{4}}$$



DEF 2016

I- Algèbre :

Exercice 1:

Calculons et donnons le résultat le plus simple.

$$A = 2 + (2 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}})(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = 2 + (2 + \sqrt{2})(4 - 2 - \sqrt{2}) \\ = 2 + (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2 + 4 - 2 = 4 \Rightarrow \boxed{A = 4}$$

$$B = 2\sqrt{\frac{2}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{\frac{2 \times 3}{27 \times 8}} = 2\sqrt{\frac{1 \times 1}{9 \times 4}} = 2\sqrt{\frac{1}{36}} = 2 \times \frac{1}{6} = \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{3}}$$

$$C = 4\sqrt{\frac{26}{5}} \times \sqrt{\frac{65}{8}} = 4\sqrt{\frac{26 \times 65}{5 \times 8}} = 4\sqrt{\frac{13 \times 13}{1 \times 4}} = 4\sqrt{\frac{169}{4}} = 4 \times \frac{13}{2} = 26 \Rightarrow \boxed{C = 26}$$

Exercice 2: $A(x) = (9x^2 - 1)(2x + 3) - (4x^2 - 9)(3x + 1)$ et

$$B(x) = (x^2 - 4)(3x - 1) - (9x^2 - 1)(x + 2)$$

1) Mettons $A(x)$ et $B(x)$ en produits de facteurs premiers.

$$A(x) = (9x^2 - 1)(2x + 3) - (4x^2 - 9)(3x + 1) \\ = (3x + 1)(3x - 1)(2x + 3) - (2x - 3)(2x + 3)(3x + 1) \\ = (3x + 1)(2x + 3)(3x - 1 - 2x + 3)$$

$$\boxed{A(x) = (3x + 1)(2x + 3)(x + 2)}$$

$$B(x) = (x^2 - 4)(3x - 1) - (9x^2 - 1)(x + 2)$$

$$= (x-2)(x+2)(3x-1) - (3x-1)(3x+1)(x+2)$$

$$= (x+2)(3x-1)(x-2-3x-1)$$

$$\boxed{B(x) = (x+2)(3x-1)(-2x-3)}$$

$$2) P(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

Montrons que $P(x)$ peut s'écrire sous la forme de $P'(x) = \frac{1+3x}{1-3x}$

$$P(x) = \frac{(3x+1)(2x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1)(-2x-3)} = \frac{(3x+1)(2x+3)(x+2)}{-(x+2)(3x-1)(2x+3)} = \frac{3x+1}{-(3x-1)} = \frac{1+3x}{1-3x} = P'(x)$$

$$D_{p'} = \{x \in \mathbb{R} / 1 - 3x \neq 0\} \quad 1-3x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3} \quad \boxed{D_{p'} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}}$$

Problème : Déterminons les deux âges.

Soient x , l'âge d'Ali, y celui de Boubacar, k et k' les intervalles des temps.

	Passé	Présent	Futur
Ali	$x-k$	x	$x+k'$
Boubacar	$y-k$	y	$y+k'$

$$\begin{cases} x = 3(y-k) & 1 \\ x-k = y & 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y+k' & 3 \\ x+k' + y+k' = 98 & 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3(y-k) & 1 \\ x-k = y & 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{3y-x}{3} \\ k = x-y \end{cases} \Rightarrow k = k \Rightarrow x-y = \frac{3y-x}{3} \Rightarrow 2x = 3y \text{ (I)}$$

$$\begin{cases} x = y+k' & 3 \\ x+k' + y+k' = 98 & 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k' = x-y \\ x+y+2k' = 98 \end{cases} \Rightarrow x+y+2(x-y) = 98$$

$$\Rightarrow 3x-y = 98 \text{ (II)}$$

$$\begin{cases} 2x = 3y \text{ (I)} \\ 3x-y = 98 \text{ (II)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2x}{3} \\ y = -98 + 3x \end{cases} \Rightarrow y = y$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3} = -98 + 3x \Rightarrow 7x = 294$$

$$\boxed{x = 42 \text{ ans}} \text{ et } y = \frac{2 \times 42}{3} \Rightarrow \boxed{y = 28 \text{ ans}}$$

II- Géométrie :

1- a) Plaçons les points $A(-4 ; 1)$; $D(2 ; 7)$; $E(0 ; -3)$

b) Calculons les distances : $AD = \sqrt{(2+4)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{36+36} = \boxed{6\sqrt{2}}$

$$AE = \sqrt{(0+4)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{16+16} = \boxed{4\sqrt{2}}$$

$DE = \sqrt{(0-2)^2 + (-3-7)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104} = \sqrt{4 \times 26} = 2\sqrt{26}$
 $DE^2 = 104$; $AD^2 = 72$; $AE^2 = 32$; $AD^2 + AE^2 = 104 = DE^2$, alors EAD est rectangle en A.

2) Les coordonnées de F sont :

$$t_{\vec{AE}(D)} = F \Rightarrow \vec{AE} = \vec{DF} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \quad \boxed{F(6, 3)}$$

3- a) Déterminons les coordonnées de K puis calculons le rayon r.

EAD étant rectangle en A, K est le milieu de [ED] son hypoténuse.

$$K : \begin{cases} \frac{0+2}{2} = 1 \\ \frac{-3+7}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(1, 2)} \quad r = \frac{ED}{2} = \frac{2\sqrt{26}}{2} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{26}}$$

b) Montrons que F est élément de $(\mathcal{C})$. ED est le diamètre de $(\mathcal{C})$ et F forme avec [ED] un triangle rectangle en F. On sait que tout point formant un triangle rectangle en ce point avec le diamètre d'un cercle, ce point est élément de ce cercle. Alors F appartient à $(\mathcal{C})$.

4) Déterminons une équation des droites (AD) et (AE).

* Soit $M(x; y) \in (AD)$ tel que $(AM) \parallel (AD)$

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x+4 \\ y-1 \end{pmatrix} X'; Y' \text{ et } \vec{AD} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} X; Y \quad XY' = X'Y \Rightarrow 6(x+4) = 6(y-1) \\ \Rightarrow \boxed{(AD) : x - y + 5 = 0}$$

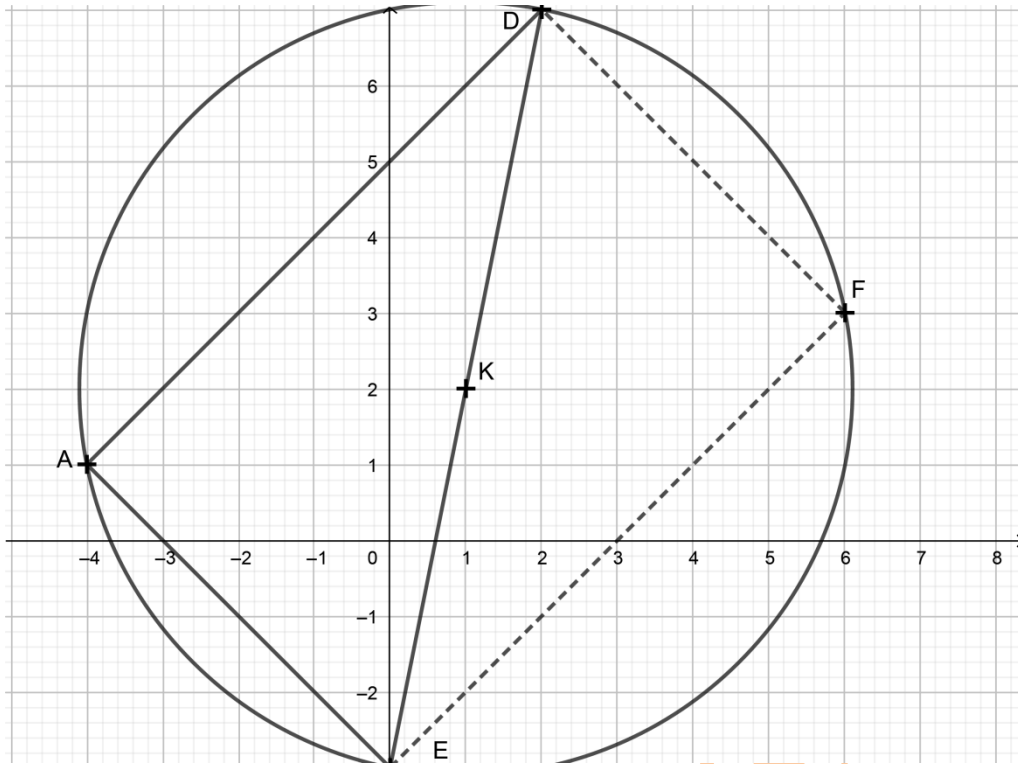
* Soit $N(x; y) \in (AE)$ tel que $(AN) \parallel (AE)$

$$\vec{AN} \begin{pmatrix} x+4 \\ y-1 \end{pmatrix} X'; Y' \text{ et } \vec{AE} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} X; Y \quad XY' = X'Y \Rightarrow 4(x+4) = -4(y-1) \\ \Rightarrow \boxed{(AE) : x + y + 3 = 0}$$

5) Montrons que (AD) et (AE) sont perpendiculaires.

$$(AD) : x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = x + 5 ; \alpha = 1 / (AE) : x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -x - 3 ; \alpha' = -1$$

$$(AD) \perp (AE) \text{ ssi } \alpha\alpha' = -1 \quad \alpha\alpha' = 1(-1) = -1, \text{ alors } (AD) \perp (AE)$$



DEF 2017

I- Algèbre:

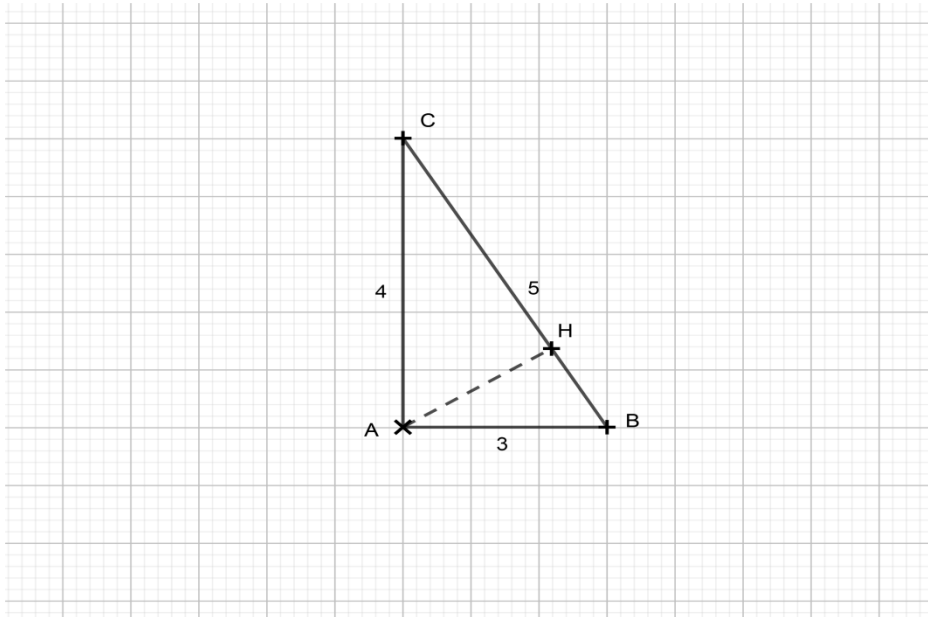
Exercice 1 : $AB = 4\text{cm}$; $AC = 3\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$.

1) Déterminons la nature du triangle ABC.

$$AB^2 = 4^2 = 16 ; AC^2 = 3^2 = 9 ; BC^2 = 5^2 = 25$$

$AB^2 + AC^2 = 25 = BC^2$, alors ABC est rectangle en A.

2) Calculons : $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$; $\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}$; $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$



Exercice 2 : $f(x) = (4x+5)^2 - (2x-3)^2$ et

$$g(x) = (3x+1)(3x+2) - (x-8)(3x+1) + 9x^2 - 1$$

1) Développons, réduisons et ordonnons f et g suivant les puissances croissantes de x .

$$f(x) = (4x+5)^2 - (2x-3)^2 = 16x^2 + 40x + 25 - 4x^2 + 12x - 9 \\ = 12x^2 + 52x + 16 \Rightarrow \boxed{f(x) = 16 + 52x + 12x^2}$$

$$g(x) = (3x+1)(3x+2) - (x-8)(3x+1) + 9x^2 - 1 = 9x^2 + 9x + 2 - (3x^2 - 21x - 8) + 9x^2 - 1 \\ = 18x^2 + 9x + 1 - 3x^2 + 21x + 8 \Rightarrow \boxed{g(x) = 9 + 30x + 15x^2}$$

2) Factorisons f et g . $f(x) = [(4x+5) - (2x-3)][(4x+5) + (2x-3)] \\ = (2x+8)(6x) \Rightarrow \boxed{f(x) = 6x(2x+8)}$

$$g(x) = (3x+1)(3x+2) - (x-8)(3x+1) + (3x-1)(3x+1) \\ = (3x+1)[(3x+2) - (x-8) + (3x-1)] \\ = (3x+1)(2x+10+3x-1)$$

$$\boxed{g(x) = (3x+1)(5x+9)}$$

3) Résolvons $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 6x(2x+8) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \text{ ou } 2x+8 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -4 \quad \boxed{S = \{-4; 0\}}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow (3x+1)(5x+9) = 0 \Rightarrow 3x+1 = 0 \text{ ou } 5x+9 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{9}{5} \quad \boxed{S = \left\{-\frac{9}{5}; -\frac{1}{3}\right\}}$$

Problème :

1) Soient x le prix pour un adulte et y celui pour un enfant, déterminons-les.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 165 & 1 \\ 2x + 2y = 90 & 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 165 \\ x + y = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 30 \end{cases}$$

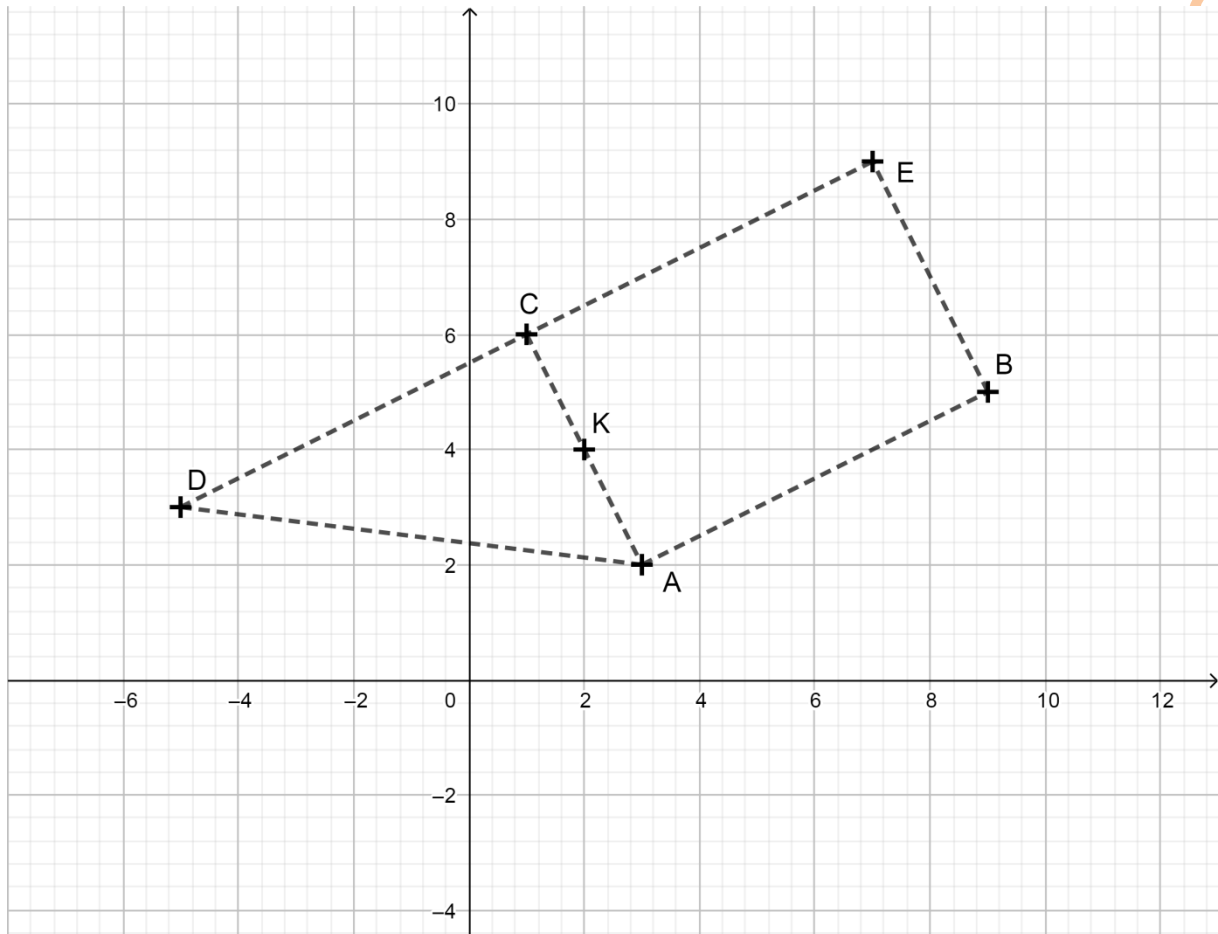
Le prix pour un adulte est 15 Euros et 30 Euros pour un enfant.

2) La somme S à payer par la famille DIALLO est : $S = 3x + 2y = 3 \times 30 + 2 \times 15$

$$\boxed{S = 120 \text{ Euros}}$$

II- Géométrie :

1- a) Plaçons les points : A(3 ; 2) ; B(9 ; 5) ; C(1 ; 6) (voir figure)



b) Calculons les coordonnées de K milieu de [AC].

$$K = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{2+6}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(2, 4)}$$

2- a) Justification :

ABCD est un parallélogramme, on constate que $\overrightarrow{KD} = -\overrightarrow{KB}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D - 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 9 - 2 \\ 5 - 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 2 = -9 + 2 \\ y_D - 4 = -5 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D + 9 = 4 \\ y_D + 5 = 8 \end{cases}$$

Divisons le tout par 2, $\begin{cases} \frac{x_D + 9}{2} = 2 \\ \frac{y_D + 5}{2} = 4 \end{cases}$

b) Déduisons les coordonnées du point D. $\frac{x_D + 9}{2} = 2 \Rightarrow x_D = 4 - 9 ; x_D = -5$

$$\frac{y_D+5}{2} = 4 \Rightarrow y_D = 8-5 ; y_D = 3 \quad \boxed{D\left(\begin{smallmatrix}-5 \\ 3\end{smallmatrix}\right)}$$

3) $E\left(\begin{smallmatrix}7 \\ 9\end{smallmatrix}\right)$ Le quadrilatère ABEC est un rectangle ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ et

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix}6 \\ 3\end{smallmatrix}\right) = \overrightarrow{CE}\left(\begin{smallmatrix}6 \\ 3\end{smallmatrix}\right) \text{ et } \overrightarrow{AC}\left(\begin{smallmatrix}-2 \\ 4\end{smallmatrix}\right) = \overrightarrow{BE}\left(\begin{smallmatrix}-2 \\ 4\end{smallmatrix}\right)$$

Soient $\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix}x \\ y\end{smallmatrix}\right) ; \overrightarrow{AC}\left(\begin{smallmatrix}x' \\ y'\end{smallmatrix}\right) \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ssi $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \Rightarrow \frac{6}{6} = \frac{3}{3}$, alors $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

D'où ABEC est un rectangle.

4) Le polygone ABED est un trapèze rectangle en E.

$$AB = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}cm}$$

$$ED = \sqrt{(7+5)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = \boxed{6\sqrt{5}cm}$$

$$AC = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}cm}$$

5) Déterminons l'aire $\mathcal{A}$ du polygone ABED.

$$\mathcal{A} = \frac{(ED+AB) \times AC}{2} = \frac{(3\sqrt{5}+6\sqrt{5}) \times 2\sqrt{5}}{2} = \frac{9\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{2} = \frac{18 \times 5}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = 45cm^2}$$

DEF 2018

I- Algèbre:

Exercice 1:

1) Calculons a, b et c.

$$a) \frac{a}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5a = 4 \times 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{5}}$$

$$b) \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{12} \text{ et } a+b+c = 9 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{12} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = 1} ; \frac{b}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b = 2} ; \frac{c}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{c = 6}$$

2) Déterminons les réels A et B.

$$A = \sqrt{32 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}} = \sqrt{32 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + 1}}}}$$

$$= \sqrt{32 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + 2}}} = \sqrt{32 + \sqrt{13 + 3}} = \sqrt{32 + 4} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow \boxed{A = 6}$$

$$B = 4\sqrt{8} - 3\sqrt{18} + \sqrt{16} = 4\sqrt{4 \times 2} - 3\sqrt{9 \times 2} + \sqrt{(4)^2}$$

$$= 8\sqrt{2} - 9\sqrt{2} + 4 = -\sqrt{2} + 4 \Rightarrow \boxed{B = -\sqrt{2} + 4}$$

Exercice 2: $f(x) = (x+4)^2 - (2x-1)^2$; $g(x) = (2x-3)(2x+1) - (3-2x)(x+1)$

1) Mettons f et g sous forme de produits de facteurs premiers.

$$f(x) = (x+4)^2 - (2x-1)^2 = [(x+4) - (2x-1)][(x+4) + (2x-1)]$$

$$= (x+4-2x+1)(x+4+2x-1)$$

$$\boxed{f(x) = (-x+5)(3x+3)}$$

$$g(x) = (2x-3)(2x+1) - (3-2x)(x+1) = (2x-3)(2x+1) + (2x-3)(x+1) \\ = (2x-3)(2x+1+x+1)$$

$$\boxed{g(x) = (2x-3)(3x+2)}$$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow (-x+5)(3x+3) = 0 \Rightarrow -x+5 = 0 \text{ ou } 3x+3 = 0$$

$$x = 5 \text{ ou } x = -1 \quad \boxed{S = \{-1; 5\}}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow (2x-3)(3x+2) = 0 \Rightarrow 2x-3 = 0 \text{ ou } 3x+2 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \quad \boxed{S = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}}$$

Problème : Déterminons le nombre d'hommes et celui de femmes, soient x et y ces deux nombres respectifs.

$$\begin{cases} 700x + 500y = 11\,900 + 300 \\ 500x + 700y = 11\,900 - 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 700x + 500y = 12\,200 \\ 500x + 700y = 11\,800 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 7x + 5y = 122 & 1 \\ 5x + 7y = 118 & 2 \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne $\boxed{x = 11}$ et $\boxed{y = 9}$.

Ce bureau compose 11 hommes et 9 femmes.

II- Géométrie :

1) Plaçons les points $A(-1; 4)$; $B(0; -1)$; $C(4; 5)$ (voir figure)

$$2) \text{ Calculons les distances : } d(A,B) = \sqrt{(0+1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{1+25} = \boxed{\sqrt{26}}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(4+1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{25+1} = \boxed{\sqrt{26}}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(4-0)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = \boxed{2\sqrt{13}}$$

$AB^2 = 26$; $AC^2 = 26$; $BC^2 = 52$; $AB^2 + AC^2 = 52 = BC^2$, d'où ABC est rectangle en A.

3) Déterminons les coordonnées de I milieu de [BC].

$$I = \begin{cases} \frac{0+4}{2} = 2 \\ \frac{-1+5}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)}$$

4) Trouvons les coordonnées du point D(x ; y).

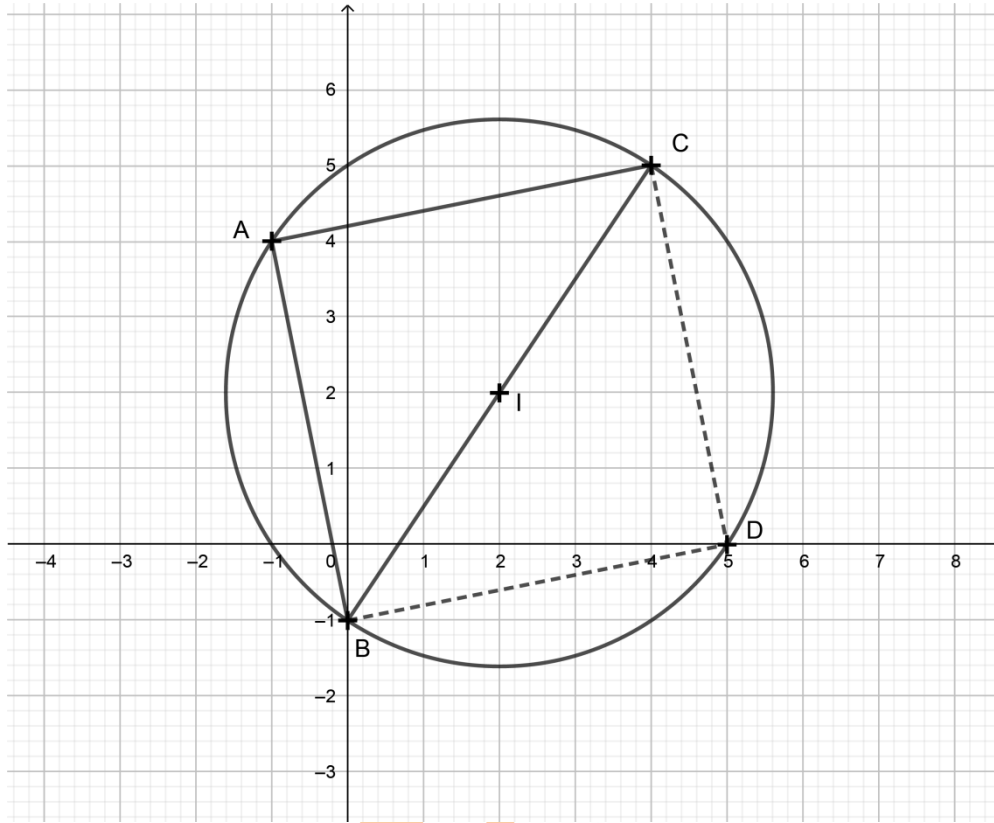
$$t_{\vec{AC}}(B) = D \Rightarrow \vec{AC} = \vec{BD} \Rightarrow \binom{5}{1} = \binom{x-0}{y+1} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \quad \boxed{D\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}$$

5) Montrons que (AD) et (BC) sont perpendiculaires.

ABC étant rectangle en A, D image de B par la $t_{\vec{AC}}$, de plus (AD) et (BC) sont

les diagonales du polygone ABCD d'où (AD) et (BC) sont perpendiculaires.
Le polygone ABCD est un carré.

Son aire est : $\mathcal{A} = AB^2 = AC^2 = (\sqrt{26})^2 = 26 \Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = 26 \text{ cm}^2}$



DEF 2019

I- Algèbre :

Exercice 1 : $a = 4 - 3\sqrt{3}$ et $b = 3 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

1) Calculons : $a^2 = (4 - 3\sqrt{3})^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times 3\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2 = 16 - 24\sqrt{3} + 27$

$$\boxed{a^2 = 43 - 24\sqrt{3}}$$

$$b^2 = \left(3 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 9 + 8\sqrt{3} + \frac{48}{9} = \frac{43}{3} + 8\sqrt{3}$$

$$\boxed{b^2 = \frac{43 + 24\sqrt{3}}{3}}$$

2) Montrons que $a^2 + 3b^2 = 86$

$$a^2 + 3b^2 = 43 - 24\sqrt{3} + 3\left(\frac{43 + 24\sqrt{3}}{3}\right) = 43 - 24\sqrt{3} + 43 + 24\sqrt{3} = 86,$$

alors $a^2 + 3b^2 = 86$

3) $P = \sqrt{43 - 24\sqrt{3}}$ Ecrivons P sous forme de $m\sqrt{3} + n$.

$$P = \sqrt{43 - 24\sqrt{3}} = \sqrt{a^2} = \sqrt{(4 - 3\sqrt{3})^2} = 4 - 3\sqrt{3}$$

$$P = -3\sqrt{3} + 4 : \begin{cases} m = -3 \\ n = 4 \end{cases}$$

Exercice 2 : $f(x) = (2x+1)^2 - (x-4)^2$ et $g(x) = (2x+1)(x+1) - 4x^2 - 2x$

1) Ecrivons f et g sous forme de produits de facteurs premiers.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+1)^2 - (x-4)^2 = [(2x+1) - (x-4)][(2x+1) + (x-4)] \\ &= (2x+1-x+4)(2x+1+x-4) \Rightarrow \boxed{f(x) = (x+5)(3x-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (2x+1)(x+1) - 4x^2 - 2x = (2x+1)(x+1) - 2x(2x+1) \\ &= (2x+1)(x+1-2x) \Rightarrow \boxed{g(x) = (2x+1)(-x+1)} \end{aligned}$$

2) Résolvons dans IR, $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x+5)(3x-3) = 0 \Rightarrow x+5 = 0 \text{ ou } 3x-3 = 0$$

$$x = -5 \text{ ou } x = 1 \quad \boxed{S = \{-5; 1\}}$$

$$g(x) = (2x+1)(-x+1) = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \text{ ou } -x+1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 1 \quad \boxed{S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}}$$

Problème : Déterminons le prix d'un melon et celui d'une mangue, soient x et y ces deux prix.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 760 & 1 \\ 3x - y = 440 & 2 \end{cases} \quad \text{Après résolution, on aura : } x = 120 \text{ FCFA le}$$

prix d'un melon et $y = 80$ FCFA celui d'une mangue.

II- Géométrie :

Partie : A

1) Donnons une équation de la droite (AB) passant par $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

Soit $M(x; y) \in (AB)$ tel que $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} X; Y \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} X'; Y'$$

$$XY' = X'Y \Rightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)$$

$$\Rightarrow xy_B - xy_A - x_A y_B + x_A y_A = yx_B - yx_A - y_A x_B + y_A x_A$$

$$\Rightarrow (y_B - y_A)x - x_A y_B = (x_B - x_A)y - y_A x_B$$

$$\boxed{(AB) : (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - x_A y_B + y_A x_B = 0}$$

2) Donnons une équation de la droite (Δ) passant par $A(2; -3)$ et de vecteur directeur $\vec{U}(4; 3)$.

$$\text{Soit } N(x; y) \in (\Delta) \text{ tel que } \overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix} // \vec{U} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} ; XY' = X'Y \Rightarrow 3(x-2) = 4(y+3)$$

$$\boxed{(\Delta) : 3x - 4y - 18 = 0}$$

3) Déterminons les coordonnées de B. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; A(2 ; -3)

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = 1 \end{cases} \quad \boxed{B \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

4) (K) : $y = -2x + 1$; $\alpha = -2$ et (L) : $4x + 2y - 5 = 0$

$$y = -2x + \frac{5}{2} ; \alpha = -2$$

(K) et (L) sont parallèles ssi $\alpha = \alpha' \Rightarrow -2 = -2$, alors (K) // (L).

Partie : B (D) : $y = 2x + 4$ et (D') : $x + 2y - 3 = 0$

1) (D) passe par B(-5 ; -6) si les coordonnées de B vérifie l'équation de (D).

$$-6 = 2(-5) + 4 = 0 \Rightarrow -6 = -6, \text{ alors } B \in (D).$$

(D') passe par E(5 ; 1) si les coordonnées de E vérifie l'équation de (D').

$$5 + 2(-1) - 3 = 0 \Rightarrow 5 - 5 = 0, \text{ alors } E \in (D').$$

2) Démontrons que (D) et (D') sont perpendiculaires en un point dont on donnera les coordonnées. (D) : $y = 2x + 4$; $\alpha = 2$

$$(D') : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} ; \alpha' = -1/2$$

$$(D) \perp (D') \text{ ssi } \alpha\alpha' = -1 \quad \alpha\alpha' = 2(-1/2) = -1, \text{ alors } (D) \perp (D').$$

A étant l'intersection de (D) et (D'), ses coordonnées sont le couple de solution du système formé par les deux équations de (D) et (D').

$$\begin{cases} y = 2x + 4 & 1 \\ x + 2y - 3 = 0 & 2 \end{cases} \quad \text{On aura : } x = -1 \text{ et } y = 2 \quad \boxed{A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad 3)$$

Calculons les distances :

$$AB = \sqrt{(-5 + 1)^2 + (-6 - 2)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \boxed{4\sqrt{5}cm}$$

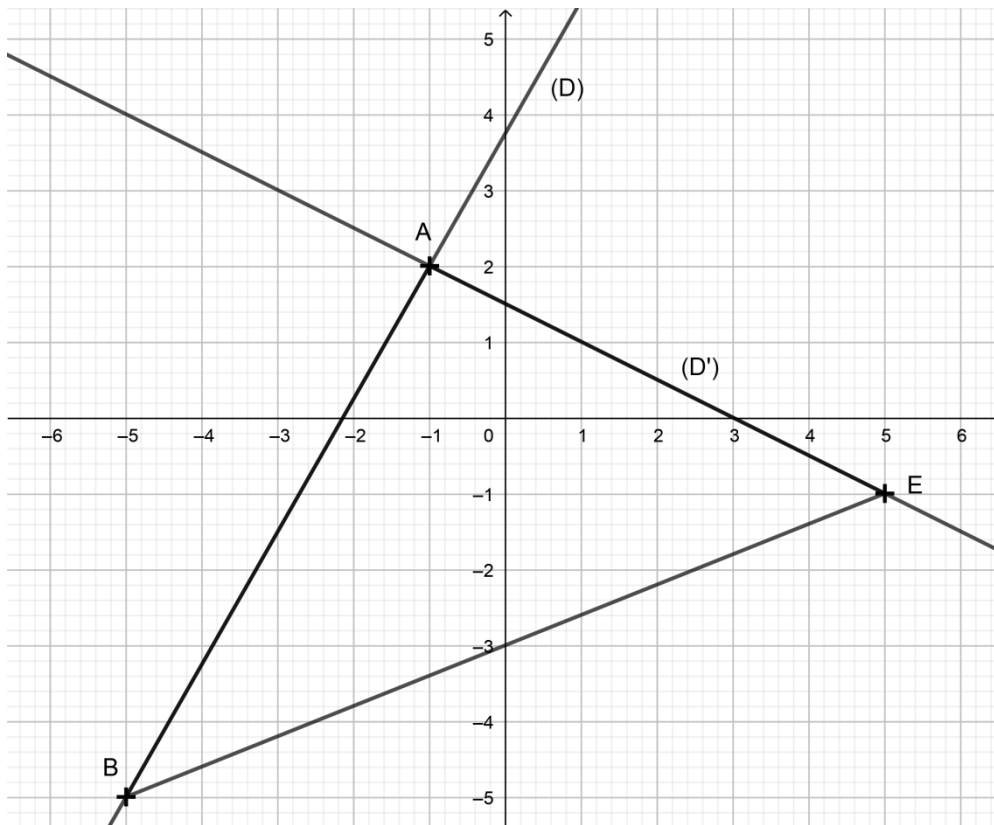
$$AE = \sqrt{(5 + 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}cm}$$

4) Traçons (D) et (D') dans le repère.

5) ABE est rectangle en A ssi $BE^2 = AB^2 + AE^2$; $BE^2 = (5 + 5)^2 + (-1 + 6)^2 = 125$

$$AB^2 = 80 ; AE^2 = 45$$

$$AB^2 + AE^2 = 125 = BE^2, \text{ alors ABE est bien rectangle en A.}$$



DEF 2020

I- Algèbre :

Exercice 1 :

1°) Comparons : $\sqrt{\frac{50}{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{4} \times \sqrt{25}$

2°) Simplifions les expressions suivantes :

$$A = 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (7 + 3 - 5)\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{A = 5\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} B &= (\sqrt{5} - 3)(4 + \sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 12 \\ &= 5 - 12 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{B = -7\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}C &= (\sqrt{3} + 5\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 5 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (5\sqrt{2})^2 \\&= 3 + 10\sqrt{6} + 50 \\ \boxed{C} &= \boxed{53 + 10\sqrt{6}}\end{aligned}$$

3°) Développons, réduisons et ordonnons :

$$\begin{aligned}f(x) &= (3x - 2)^2 + (x - 4)(x + 4) \\&= 9x^2 - 12x + 4 + x^2 - 16\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = 10x^2 - 12x - 12}$$

$$\begin{aligned}g(x) &= (2x - 6)^2 - (4x - 3)^2 \\&= 4x^2 - 24x + 36 - 16x^2 + 24x - 9\end{aligned}$$

$$\boxed{g(x) = -12x^2 + 27}$$

$$\begin{aligned}h(x) &= (2x - 5)(3x + 1) - (3x + 3)(3x - 3) \\&= 6x^2 - 13x - 5 - 9x^2 + 9\end{aligned}$$

$$\boxed{h(x) = -3x^2 - 13x + 4}$$

Exercice 2 : Sachant x le prix d'achat d'un pigeon et y celui d'une pintade.

1°) Traduction : $2x + 6y = 80$

$$7x + 2y = 55$$

$$2^\circ) \text{Ecrivons : } \begin{cases} 2x + 6y = 80 \\ 7x + 2y = 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 80 \\ -21x - 6y = -165 \end{cases} \Rightarrow \frac{-17x}{-85} = \frac{-85}{-85} \Rightarrow x = 5$$

Remplaçons x par sa valeur dans 1

$$10 + 3y = 40 \Rightarrow y = \frac{30}{3} \Rightarrow y = 10$$

Un pigeon coûte 5 Euros et une pintade coûte 10 Euros.

II- Géométrie :

1) Plaçons les points A(1 ; 3) ; B(4 ; -1) ; C(-3 ; 0) (voir figure)

2) Calculons les distances : $d(A,B) = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$$d(A,C) = \sqrt{(-3-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(B,C) = \sqrt{(-3-4)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

$AB^2 = 5$; $AC^2 = 5$; $BC^2 = 50$; $AB^2 + AC^2 = 50 = BC^2$, d'où ABC est rectangle en A.

3) Déterminons les coordonnées de K milieu de [BC].

$$K = \begin{cases} \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{-1+0}{2} = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$$

Le rayon $r = KA = KC = KB$

$$r = KC = \sqrt{\left(-3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$r = \frac{\sqrt{50}}{2} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

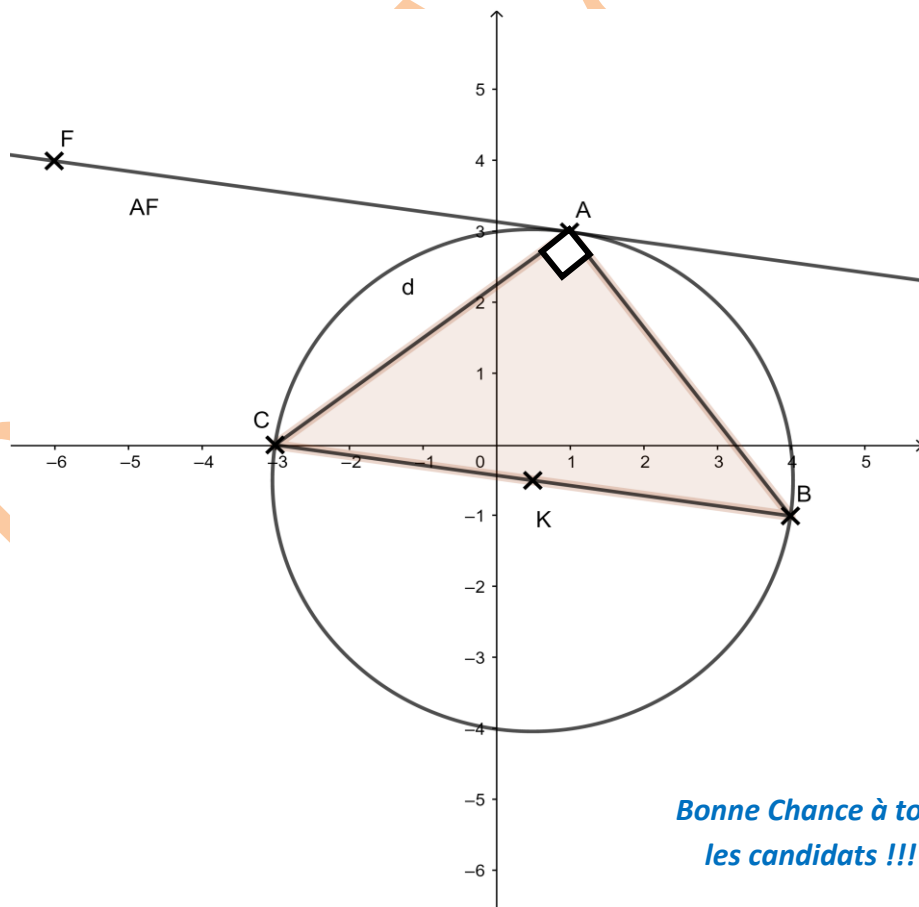
4°) F(-6 ; 4). L'équation de la droite (AF) est :

Soit $M(x ; y) \in (AF)$ tel que $(AM) \perp (AF)$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (x-1) = -7(y-3)$$

$$\Rightarrow (AF) : x + 7y - 22 = 0$$

5°) La droite (AF) est la tangente en A par rapport au cercle.



Bonne Chance à tous
les candidats !!!

