

Annales 2011-2016 : complexes**EXERCICE 1** correction **Amerique du Sud 2011****Commun à tous les candidats****1.** Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D où :

$$z_A = 1 + 2i, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_C = 1 + \sqrt{3} + i, \quad z_D = \overline{z_C}.$$

(a) Placer les points A et B dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.**(b)** Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique.**(c)** En déduire la nature du triangle ABC.**3.** Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.**4.** Construire les points C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Expliquer la construction proposée.

EXERCICE 2

correction

Nouvelle Calédonie 2012

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.*

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on appelle A le point d'affixe 1 et \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 1.

La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation

$$(E): z^2 - 2z + 2 = 0,$$

où z est un nombre complexe. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .
2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle \mathcal{C} .

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{2z-1}{2z-2}.$$

1. Placer le point A et tracer le cercle \mathcal{C} sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a

$$(z' - 1)(z - 1) = \frac{1}{2}.$$

3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :

- $AM \times AM' = \frac{1}{2}$;
- $M' \neq A$;
- $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif

4. On considère le point P d'affixe $z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P' , image de P par f , et réaliser cette construction.
6. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \frac{3}{4}$. Soit M' son image par f .

- (a) Montrer que le point M' appartient au cercle \mathcal{C}' de centre O de rayon 1.
- (b) Tout point de \mathcal{C}' a-t-il un antécédent par f ?

EXERCICE 3

correction

Pondichéry 2012

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que \bar{z} est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z . On admet l'égalité : $|z|^2 = z\bar{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.

(a) Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f , et placer les points C et C' dans le repère donné en annexe.

(b) Montrer que le point C' appartient au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.

(c) Montrer que les points A, C et C' sont alignés.

2. Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f .

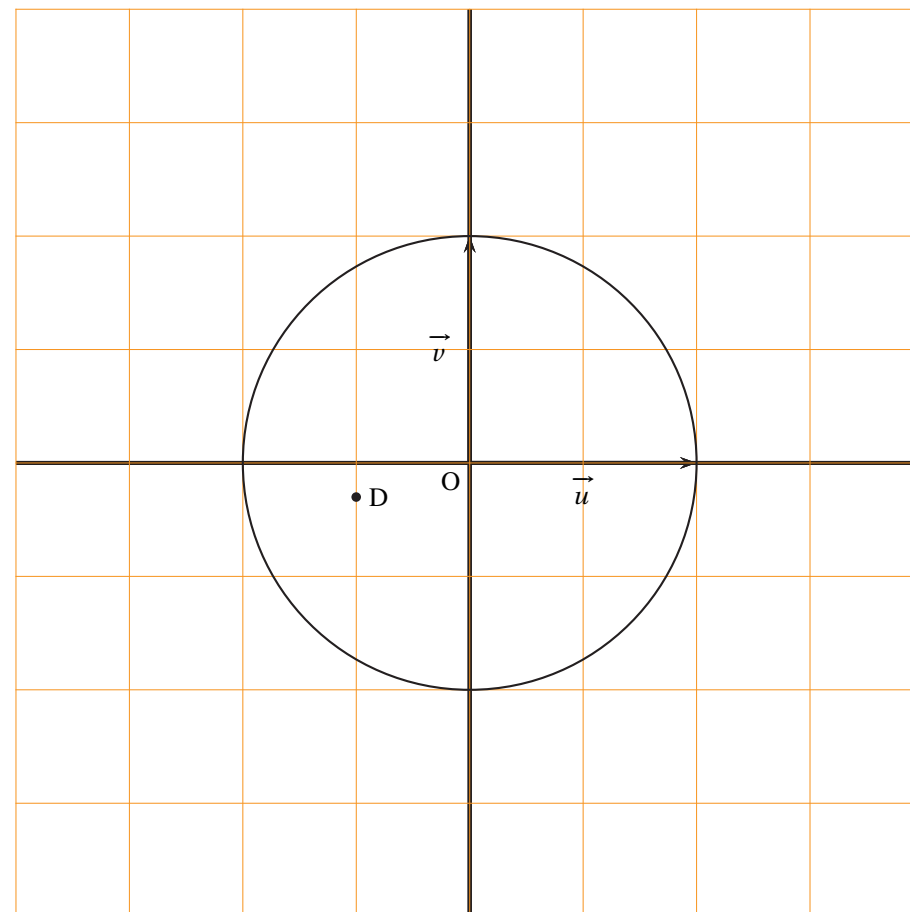
3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle \mathcal{C} .

4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel.

Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

5. On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D' par la transformation f .

Annexe à rendre avec la copie



EXERCICE 4 correction **Amerique du Sud 2013****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

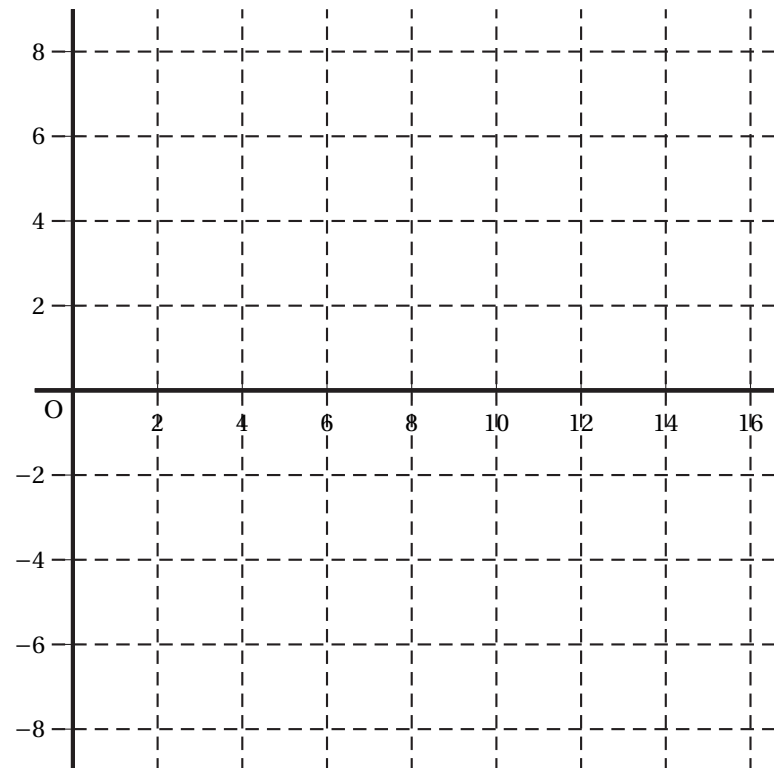
On considère l'équation

$$(E): z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.
 - (a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).
 - (b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
 - (c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$.
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3 .

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$.

5. On note $\ell^n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$.
 - (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ell^n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
 - (b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell^n \geq 1000$.



ANNEXE à rendre avec la copie

EXERCICE 5

correction

Antilles 2013

Commun n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n , par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n , on pose : $z_n = a_n + ib_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n .

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n) .

Partie A

1. Donner a_0 et b_0 .

2. Calculer z_1 , puis en déduire que $a_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables : A et B des nombres réels
 K et N des nombres entiers
 Initialisation : Affecter à A la valeur 1
 Affecter à B la valeur 1
 Traitement :
 Entrer la valeur de N
 Pour K variant de 1 à N
 Affecter à A la valeur $\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{3}$
 Affecter à B la valeur $\frac{B}{3}$
 FinPour
 Afficher A

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

(b) Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n , exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n , et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n , et déterminer la limite de (b_n) .

3. (a) On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}.$$

(b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n , $|a_n| \leq u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

EXERCICE 6

correction

Pondichéry 2013

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.

À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA) , la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM' = 2OI$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend

$$z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

(a) Déterminer la forme algébrique de z_M .

(b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.

Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

(c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

(a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y .

(b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y .

(c) Écrire les coordonnées des points I, B et M' .

(d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM' .

(e) Montrer que $BM' = 2OI$.

EXERCICE 7 correction **Nouvelle Calédonie 2013****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Proposition : Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.

2. Soit (E) l'équation $(z-4)(z^2-4z+8) = 0$ où z désigne un nombre complexe.

Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans \mathbb{C} , de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3. Proposition : Pour tout nombre réel α , $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha} \cos(\alpha)$.

4. Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Proposition : $1 + j + j^2 = 0$.

EXERCICE 8

correction

Antilles septembre 2014

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.

Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f .

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$.

Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

(a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

(b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

EXERCICE 9

correction

Centres Étrangers 2014

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 &= 16 \\ z_{n+1} &= \frac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe $z_n : r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O , on considère les points A_n d'affixes z_n .

1. (a) Calculer z_1, z_2 et z_3 .

(b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie.

(c) Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

(d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La suite (r_n) est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

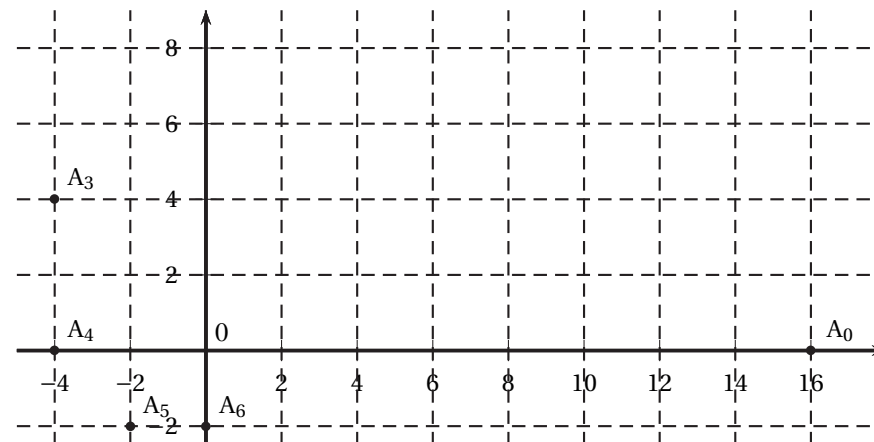
On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 , etc.

$$\text{Ainsi } L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n.$$

3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel $n : A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.

(b) Donner une expression de L_n en fonction de n .

(c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .



Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 10

correction

Liban 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

- Calculer u_0 .
- Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
- Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

- Déterminer la forme algébrique de z_1 .

- Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$.

En déduire la forme exponentielle de z_1 .

- Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

EXERCICE 11

correction

Métropole 2014

Commun à tous les candidats

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z .**1.** Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.Calculer a^2 sous forme algébrique.En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.**3. Restitution organisée de connaissances**On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe \bar{z} défini par $\bar{z} = x - iy$.

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué \bar{z} est également une solution de (E).En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

EXERCICE 12

correction

Nouvelle Calédonie mars 2014

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera SUR la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe de la forme $x + iy$, où x et y sont des réels.

1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1 + i)^4$. L'écriture exponentielle de z est :

- (a) $\sqrt{2}e^{i\pi}$
- (b) $4e^{i\pi}$
- (c) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
- (d) $4e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z = x + iy$ tels que $|z - 1 + i| = |\sqrt{3} - i|$ a pour équation :

- (a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$
- (b) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
- (c) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
- (d) $y = x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

3. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0 = 1 + i$ et $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n .

- (a) Pour tout entier naturel n , le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
- (b) Pour tout entier naturel n , le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.
- (c) La suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.

(d) Pour tout entier naturel n , un argument de $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$.

4. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 - i \quad ; \quad Z_B = 2 - 2i \quad \text{et} \quad Z_C = 1 + 5i.$$

On pose $Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

- (a) Z est un nombre réel.
- (b) Le triangle ABC est isocèle en A .
- (c) Le triangle ABC est rectangle en A .
- (d) Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

EXERCICE 13 correction **Pondichéry 2014**

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n .

(c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n + 1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

(a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

(b) Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. (a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .

(b) On admet que $z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$.

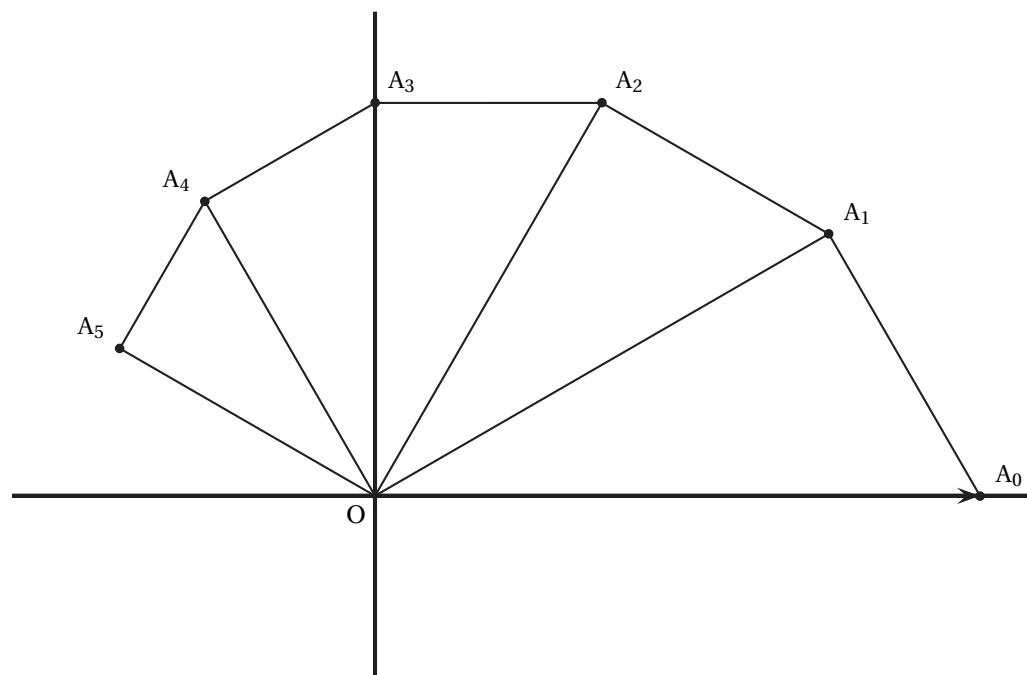
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

(c) Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9 .

Les traits de construction seront apparents.

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie



EXERCICE 14 correction Amérique du Nord 2015

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n , on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n; y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \text{ et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. (a) Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2 .

(b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

Variables :

i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :

x prend la valeur -3

y prend la valeur 4

Traitement :

Pour i allant de 0 à 20

 Construire le point de coordonnées $(x; y)$

t prend la valeur x

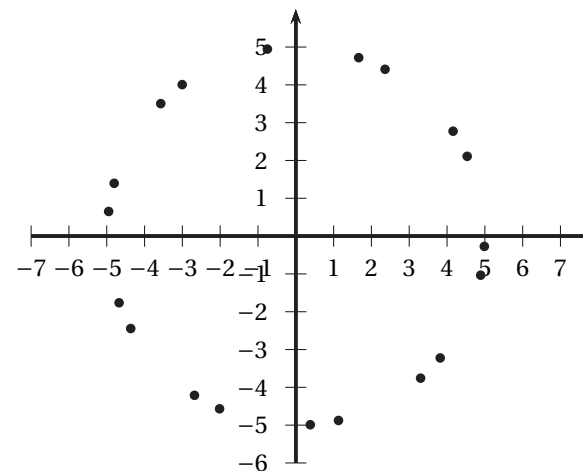
x prend la valeur \dots

y prend la valeur \dots

Fin Pour

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20} .

(c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2 .. On les nommera sur la figure jointe en **annexe**, (**à rendre avec la copie**).

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n , $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n .

(a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

(b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $z_n = e^{in\theta} z_0$.

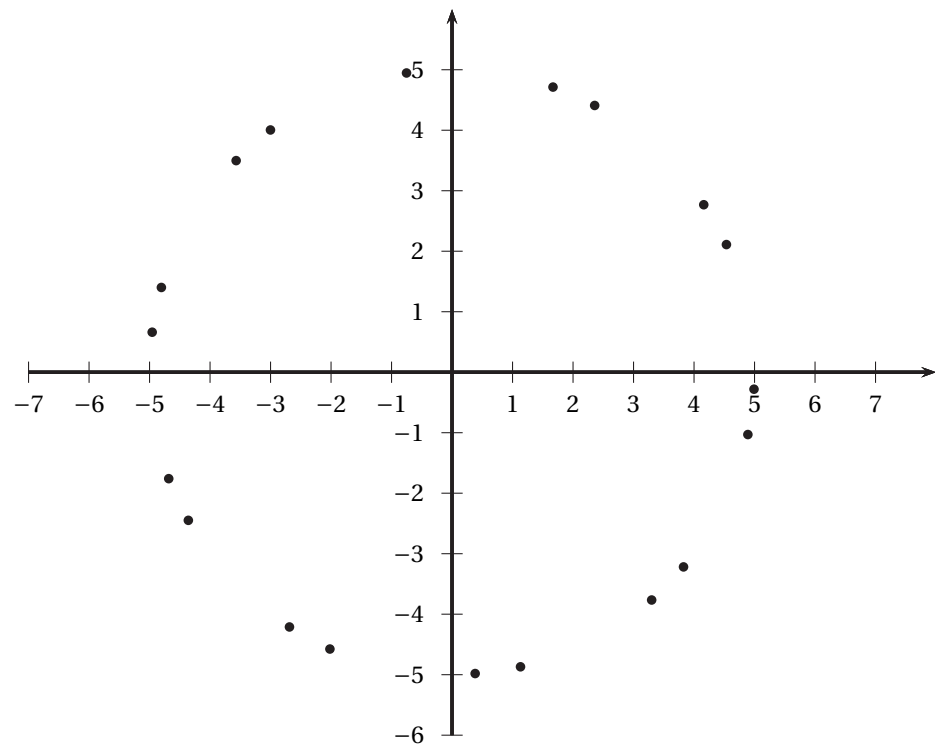
(d) Montrer que $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0 .

(e) Pour tout entier naturel n , déterminer, en fonction de n et θ , un argument du nombre complexe z_n .

Représenter θ sur la figure jointe en **annexe**, (**à rendre avec la copie**).

Expliquer, pour tout entier naturel n , comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n .

Annexe



EXERCICE 15

correction

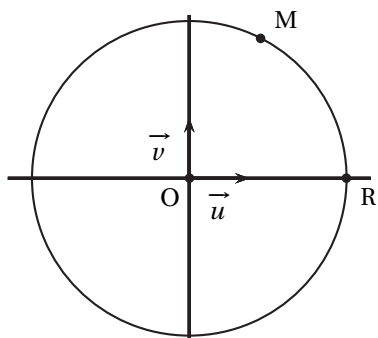
Antilles 2015

Commun à tous les candidats

Partie A

On appelle \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à \mathbb{C} , puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $[O; \vec{u})$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z .

2. Soit le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2} \left(\frac{z + |z|}{2} \right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M' .

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à \mathbb{C} et, pour tout entier naturel n , par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0 .

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?

2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?

3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.

(a) Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?

(b) Démontrer cette conjecture, puis conclure.

EXERCICE 16

correction

Asie 2015

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.**Partie A : propriétés du nombre j** 1. (a) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

(b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j , puis donner sa forme exponentielle.

3. Démontrer les égalités suivantes :

(a) $j^3 = 1$;

(b) $j^2 = -1 - j$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.

Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie BSoit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.2. En déduire que $AC = BC$.3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.

4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE 17

correction

Métropole 2015

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$,

$$b = 4 - 4i\sqrt{3} \text{ et } c = 8i.$$

(a) Calculer le module et un argument du nombre a .

(b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b .

(c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

(d) Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2. d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A' , B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

(a) Montrer que $b' = 8$.

(b) Calculer le module et un argument du nombre a' .

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment [MN] a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

(a) On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.

Calculer r et s . On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.

(b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?

Justifier ce résultat.

EXERCICE 18

correction

Polynésie 2015

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.

Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2. Soit A le point d'affixe $\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

3. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble \mathcal{E} .

EXERCICE 19

correction

Polynésie septembre 2015

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie AOn rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\Re(z)$.

- Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - i$.
- Déterminer, pour tout réel θ , la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $e^{i\theta}(1 - i)$.
- Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ ,

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Partie BDans cette partie, on admet que, pour tout réel θ , $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.Les représentations graphiques \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h des fonctions f , g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

- Conjecturer :
 - les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
 - la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{C}_g ;
 - la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g est maximal.
- Justifier que \mathcal{C}_g est située au-dessus de \mathcal{C}_f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

- (a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$h'(x) = e^{-x} \left[\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right].$$

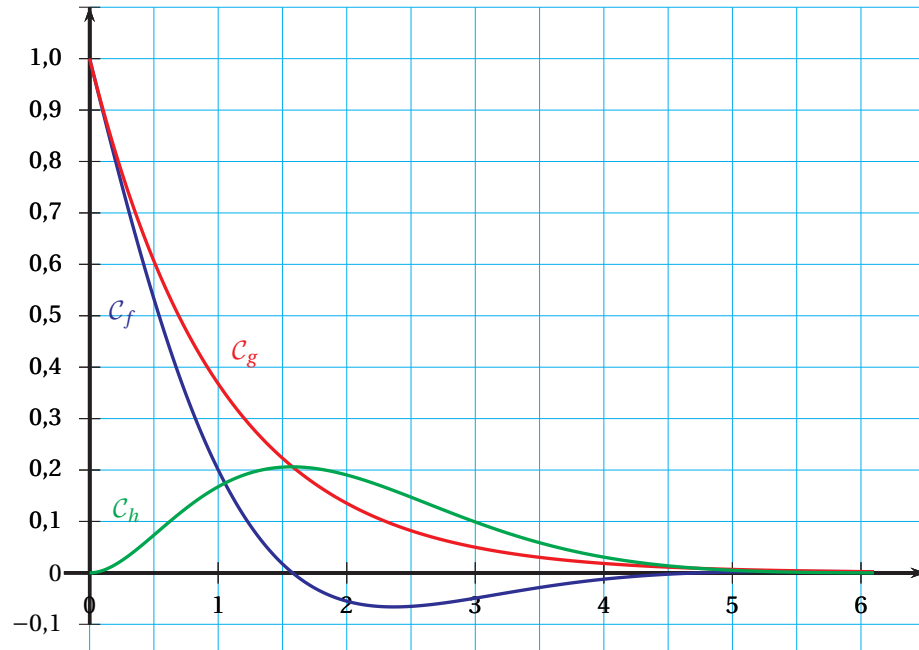
- Justifier que, sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0$.

- En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

- On admet que, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = \frac{1}{2} e^{-x} [-2 + \cos(x) - \sin(x)]$$

est une primitive de la fonction h .On note \mathcal{D} le domaine du plan délimité par les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} , exprimée en unités d'aire.**Annexe**



EXERCICE 20

correction

Amérique du Nord 2016

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.

Pour tout entier naturel non nul n , on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1 + i)^n$.

1. Écrire le nombre $1 + i$ sous forme exponentielle.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 , que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

EXERCICE 21 correction **Amérique du Sud 2016****Commun à tous les candidats**

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z - 4| = |z + 2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3i$.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z - 1)(z^2 - 8z + 25) = 0$ où z appartient à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\frac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $(-\sqrt{3} + i)^8$.

EXERCICE 22

correction

Antilles 2016

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note \mathcal{C} l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2|=1$.

1. Justifier que \mathcal{C} est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit a un nombre réel. On appelle \mathcal{D} la droite d'équation $y = ax$.
Déterminer le nombre de points d'intersection entre \mathcal{C} et \mathcal{D} en fonction des valeurs du réel a .

EXERCICE 23 correction **Centres Étrangers 2016**
Candidat/e/s n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautilus à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

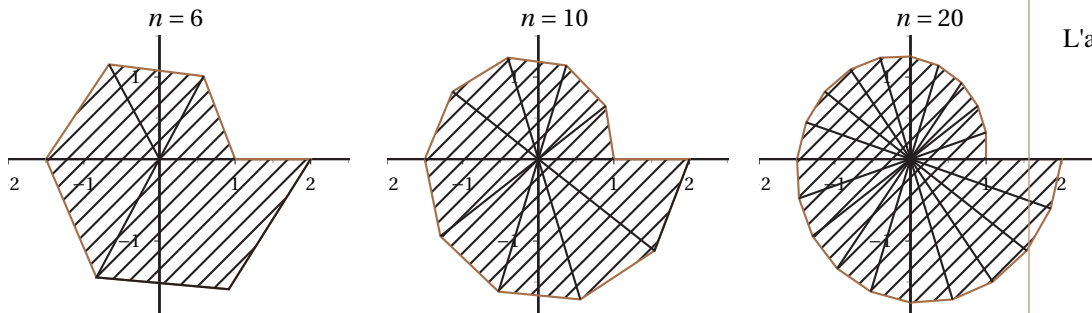
On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n , on définit les nombres

complexes $z_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k .

Dans ce modèle, le pourtour du nautilus est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leq k \leq n$.

Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leq k \leq 6$, on a $z_k = \left(1 + \frac{k}{6}\right) e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

- Déterminer la forme algébrique de z_1 .
- Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.
- Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n + 1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

- Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer la longueur OM_k .

- Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$, déterminer une mesure des angles $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_k})$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_{k+1}})$.

En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k}; \overrightarrow{OM_{k+1}})$.

- Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

- On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$.

L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES	A est un nombre réel k est un entier n est un entier
TRAITEMENT	Lire la valeur de n A prend la valeur 0 Pour k allant de 0 à $n-1$ <div style="text-align: center; margin: 5px 0;"> $A \text{ prend la valeur } A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ </div> Fin Pour
SORTIE	Afficher A

On entre dans l'algorithme $n = 10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

- On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7,3$.

Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 7,2$. On ne demande pas de déterminer n .

L1	VARIABLES :	A est un nombre réel
L2		k est un entier
L3		n est un entier
L4	TRAITEMENT :	n prend la valeur 2
L5		A prend la valeur 0
L6		Tant que
L7		n prend la valeur $n + 1$
L8		A prend la valeur 0
L9		Pour k allant de 0 à $n - 1$
L10		A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
		Fin Pour
L12		Fin Tant que
L13	SORTIE :	Afficher ...

EXERCICE 24

correction

Liban 2016

Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n .

On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A .

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$.

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés.

EXERCICE 25 correction **Métropole septembre 2016****Commun à tous les candidats**

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0 , où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1. (a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6

(b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 .

(c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?

Prouver cette conjecture.

2. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + i$.

3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

EXERCICE 26

correction

Nouvelle Calédonie novembre 2016

Commun à tous les candidats

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(a) Déterminer la forme exponentielle de a .

(b) Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

3. Soit M un point d'affixe z du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.

(a) Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.

(b) Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

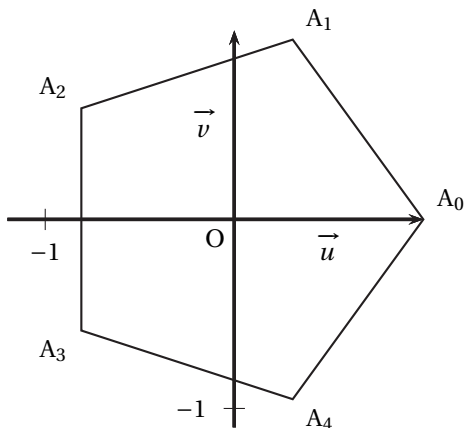
EXERCICE 27 correction **Pondichéry 2016**

Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\vec{OA}_0 = \vec{u}$.

On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :



- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0; 1; 2; 3\}$ on a $(\vec{OA}_k; \vec{OA}_{k+1}) = \frac{2\pi}{5}$.

1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\frac{i}{2}$.

Le cercle (\mathcal{C}) de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K .

Calculer BJ , puis en déduire BK .

2. (a) Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2 . Justifier brièvement.

(b) Démontrer que $BA_2^2 = 2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

(c) Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

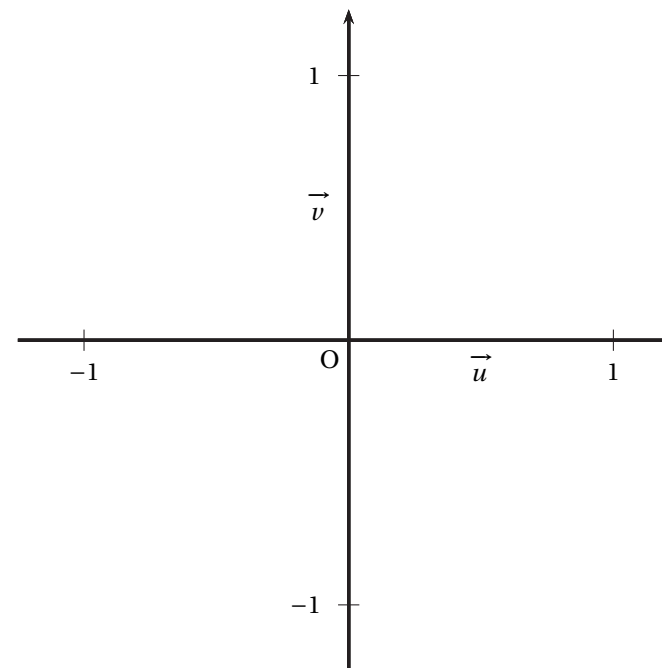
► Calcul formel	
1	$\cos(4\pi/5)$ $\rightarrow \frac{1}{4}(-\sqrt{5}-1)$
2	$\sqrt{(3-\sqrt{5})/2}$ $\rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$

« sqrt » signifie « racine carrée »

En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3. Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

Annexe



Correction

EXERCICE 1 énoncé Amérique du Sud 2011

Commun à tous les candidats

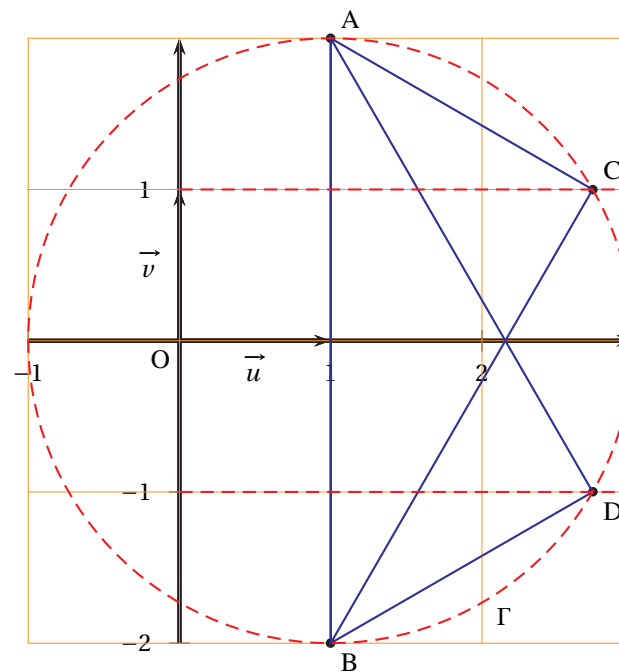
$$1. \quad z^2 - 2z + 5 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 5 = 0 \iff (z-1)^2 + 4 = 0 \iff (z-1)^2 - (2i)^2 = 0 \iff (z-1+2i)(z-1-2i) = 0$$

L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $1+2i$ et $1-2i$.

2. (a) Voir la figure ci-dessous.

$$(b) \quad \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1-2i-1-\sqrt{3}-i}{1+2i-1-\sqrt{3}-i} = \frac{-3i-\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} = \frac{(-3i-\sqrt{3})(i+\sqrt{3})}{(i-\sqrt{3})(i+\sqrt{3})} = \frac{3-3i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{i^2-3} = \frac{-4i\sqrt{3}}{-4} = i\sqrt{3}.$$

$$(c) \quad \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i\sqrt{3} \text{ (imaginaire pur)} : \text{cette égalité montre qu'un argument du quotient est égal à } \frac{\pi}{2}, \text{ soit } (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion le triangle ABC est rectangle en C. (non isocèle car $CB = \sqrt{3} CA$)3. Le triangle ABC est rectangle d'hypoténuse [AB] ; il est donc inscrit dans un cercle Γ de centre le milieu de [AB] soit le point d'affixe 1 et de rayon $\frac{1}{2} AB = 2$.Dans la symétrie autour de l'axe (O, \vec{u}) les points A et B sont symétriques de même que les points C et D puisque leurs affixes sont conjuguées.Le symétrique du triangle ABC est donc le triangle BAD. La symétrie étant une isométrie, le triangle BAD est lui aussi rectangle en D donc inscrit dans le même cercle Γ centré au milieu de [AB] et de rayon 2.4. C est le point partie réelle positive, intersection du cercle précédent Γ et de la droite d'équation $y = 1$. idem pour D avec la droite d'équation $y = -1$.

EXERCICE 2 énoncé Nouvelle Calédonie 2012

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

$$1. z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 2 = 0 \iff (z-1)^2 + 1 = 0 \iff (z-1)^2 - i^2 = 0 \iff (z-1+i)(z-1-i) = 0 \iff \begin{cases} z-1+i=0 \text{ ou} \\ z-1-i=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=1-i \text{ ou} \\ z=1+i \end{cases}.$$

2. Soit M_1 d'affixe $z_1 = 1 - i$. On a $AM_1 = |z_1 - z_A| = |1 - i - 1| = |-i| = 1$.De même $AM_2 = |z_2 - z_A| = |1 + i - 1| = |i| = 1$. Ces deux résultats signifient que M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre A et de rayon 1 soit au cercle \mathcal{C} .**Partie B**

1. Voir à la fin de l'exercice.

$$2. z' = \frac{2z-1}{2z-2} \implies z' - 1 = \frac{2z-1}{2z-2} - 1 \iff z' - 1 = \frac{2z-1-2z+2}{2z-2} \iff z'' - 1 = \frac{1}{2(z-1)} \iff (z' - 1)(z - 1) = \frac{1}{2}.$$

3. Le résultat précédent entraîne :

- en termes de modules : $AM \times AM' = \frac{1}{2}$;
- le produit des deux complexes étant non nul aucun des deux facteurs ne peut l'être, et en particulier $z' - 1 \neq 0 \iff z' \neq 1$, soit $M' \neq A$;
- en termes d'argument : $\arg[(z' - 1)(z - 1)] = 0 + 2k\pi$. Or $\arg[(z' - 1)(z - 1)] = (\vec{u} ; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{AM'})$, donc $(\vec{u} ; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

$$4. \text{ On a } z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \iff z_P - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \implies |z_P - 1| = |e^{i\frac{\pi}{4}}| \iff |z_P - 1| = 1.$$

Cette dernière égalité montre que P appartient au cercle de centre A et de rayon 1, donc au cercle \mathcal{C} .Il ne reste plus qu'à construire sur ce cercle le point tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{AP}) = \frac{\pi}{4}$.5. On a $AP \times AP' = \frac{1}{2}$; or $AP = 1$, donc $AP' = \frac{1}{2}$. Le point P' appartient au cercle \mathcal{C}_1 de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.

$$\text{D'autre part on a } (\vec{u}, \overrightarrow{AP'}) = -\frac{\pi}{4}.$$

On peut donc construire P_1 symétrique sur le cercle \mathcal{C} du point P autour de l'axe horizontal contenant A. Le point P' est le point commun à $[AP_1]$ et au cercle \mathcal{C}_1 . Voir plus bas.6. (a) On a donc $z = \frac{3}{4} + \alpha i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. D'où :

$$z' = \frac{2(\frac{3}{4} + \alpha i) - 1}{2(\frac{3}{4} + \alpha i) - 2} = \frac{\frac{3}{2} + 2\alpha i - 1}{\frac{3}{2} + 2\alpha i - 2} = \frac{\frac{1}{2} + 2\alpha i}{-\frac{1}{2} + 2\alpha i} = \frac{(\frac{1}{2} + 2\alpha i)(-\frac{1}{2} - 2\alpha i)}{(-\frac{1}{2} + 2\alpha i)(-\frac{1}{2} - 2\alpha i)} \\ = \frac{-\frac{1}{4} - \alpha i - \alpha i + 4\alpha^2}{\frac{1}{4} + 4\alpha^2} = \frac{-\frac{1}{4} - 2\alpha i + 4\alpha^2}{\frac{1}{4} + 4\alpha^2}.$$

$$\text{D'où } |z'|^2 = \frac{(-\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2}{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2} + \frac{4\alpha^2}{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2} = \frac{\frac{1}{16} + 16\alpha^4 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2}{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{16} + 16\alpha^4 + 2\alpha^2}{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2} = \frac{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2}{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2} = 1. \text{ D'où } |z'| = 1 : \text{ le point } M'' \text{ appartient au cercle } \mathcal{C}' \text{ de centre O de rayon 1.}$$

(b) Un point M' de \mathcal{C}' a une affixe qui peut s'écrire $z' = e^{ia}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Son ou ses antécédents par f vérifient :

$$e^{ia} = \frac{2z-1}{2z-2} \iff 2ze^{ia} - 2e^{ia} = 2z - 1 \iff 2z(e^{ia} - 1) = 2e^{ia} - 1 \iff z = \frac{2e^{ia} - 1}{e^{ia} - 1} \text{ si } e^{ia} - 1 \neq 0.$$

Or $e^{ia} - 1 = 0 \iff e^{ia} = 1 \iff a = 0 \iff z = 1$. C'est le point A et on sait que ce point n'a pas d'image par f . La réponse est : non.

EXERCICE 3 énoncé **Pondichéry 2012**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Restitution organisée de connaissances**Partie B :** Étude d'une transformation particulière

1. (a) On a $z_{C'} = \frac{1 - (-2 + i)}{-2 + i - 1} = \frac{3 - i}{-3 - i} = \frac{(3 - i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)} = \frac{-9 + 1 + 3i + 3i}{9 + 1} = \frac{-8 + 6i}{10} = -\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}$.

(b) De $|z_{C'}|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$, on déduit que le point C' appartient au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.

$|z_{C'}| = OC' = 1$ ce qui montre que C' appartient au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.

(c) Calculons $\frac{z_C - z_A}{z_{C'} - z_A} = \frac{-2 + i - 1}{\frac{-4 + 3i}{5} - 1} = \frac{-15 + 5i}{-9 + 3i} = \frac{5(-3 + i)}{3(-3 + i)} = \frac{5}{3} \in \mathbb{R}$.

L'argument de ce quotient est donc nul, soit $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) = 0 \pmod{2\pi}$, ce qui signifie que les points A , C et C' sont alignés.

2. Les points qui ont pour image le point A d'affixe 1 ont une affixe $z \neq 1$ telle que :

$$z' = 1 = \frac{1 - z}{\bar{z} - 1}$$

En posant $z = x + iy$, l'équation précédente s'écrit :

$$1 = \frac{1 - x - iy}{x - iy - 1} \iff x - iy - 1 = 1 - x - iy \iff 2x - 2 = 0 \iff x = 1$$

Les points solutions ont donc pour affixe $z = 1 + iy$ avec $y \neq 0$: ce sont les points de la droite Δ d'équation $x = 1$ privée du point A .

3. On a pour $z \neq 1$, $|z'| = \left| \frac{1 - z}{\bar{z} - 1} \right| = \frac{|1 - z|}{|\bar{z} - 1|} = \frac{|1 - x - iy|}{|x - iy - 1|} = \frac{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} = 1$.

On vient donc de démontrer que pour tout point M d'affixe $z \neq 1$,

$$|z'| = OM' = 1.$$

Tous les points M' appartiennent au cercle \mathcal{C} .

4. Calculons pour $z \neq 1$, le quotient $\frac{z' - 1}{z - 1} = \frac{\frac{1 - z}{\bar{z} - 1} - 1}{z - 1} = \frac{1 - z - \bar{z} + 1}{(z - 1)(\bar{z} - 1)}$.

Le numérateur : $1 - z - \bar{z} + 1 = 2 - (z + \bar{z}) = 2 - 2x \in \mathbb{R}$;

Le dénominateur : $(z - 1)(\bar{z} - 1) = (z - 1)\overline{z - 1} = |z - 1|^2 \in \mathbb{R}_+$ (réel positif). Finalement $\frac{z' - 1}{z - 1} \in \mathbb{R}$ signifie qu'il existe un réel k tel que $z' - 1 = k(z - 1)$ ou encore $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$, ce qui signifie que les points A , M et M' sont alignés.

\mathbb{R} signifie qu'il existe un réel k tel que $z' - 1 = k(z - 1)$ ou encore $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$, ce qui signifie que les points A , M et M' sont alignés.

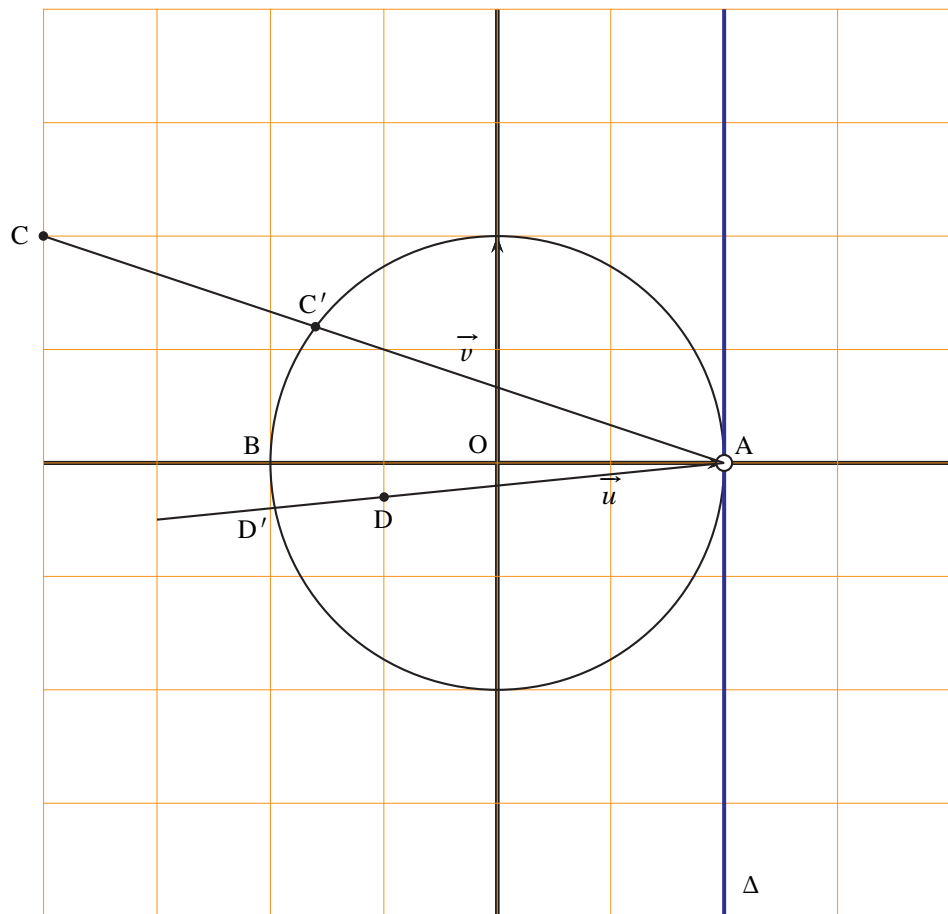
5. D'après la question précédente, D' est aligné avec A et D , donc

- D' appartient au cercle \mathcal{C} ;

- D' est sur la droite (AD) .

La construction est donc évidente.

Annexe à rendre avec la copie



EXERCICE 4 énoncé Amérique du Sud 2013

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

1. On résout l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$; $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4$.

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z' = \frac{-(-2\sqrt{3}) + i\sqrt{4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i \text{ et } z'' = \sqrt{3} - i.$$

2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.

$$(a) \quad z_1 = 2^1 e^{i(-1)^1 \frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{-\pi}{6}} = 2 \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \sqrt{3} - i = z''$$

Donc z_1 est solution de l'équation (E).

$$(b) \quad z_2 = 2^2 e^{i(-1)^2 \frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} + 2i$$

$$z_3 = 2^3 e^{i(-1)^3 \frac{\pi}{6}} = 8e^{i\frac{-\pi}{6}} = 8 \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right) = 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 4\sqrt{3} - 4i$$

(c) $|z_1| = 2$ donc le point M_1 d'affixe z_1 est situé sur le cercle de centre O et de rayon 2 ; de plus, la partie imaginaire de z_1 est -1 donc le point M_1 est situé sur la droite d'équation $y = -1$.

Pour placer le point M_2 , on utilise le fait que $|z_2| = 4$ et que $\text{Im}(z_2) = 2$.

Pour placer le point M_3 , on utilise le fait que $|z_3| = 8$ et que $\text{Im}(z_3) = -4$.

$z_4 = 2^4 e^{i(-1)^4 \frac{\pi}{6}} = 16e^{i\frac{\pi}{6}}$; pour placer le point M_4 , on utilise le fait que $|z_4| = 16$; de plus $\arg(z_4) = \frac{\pi}{6} = \arg(z_2)$ donc les points O, M_2 et M_4 sont alignés donc $M_4 \in (OM_2)$.

Voir la figure en annexe.

$$\text{Si } n \geq 1 \text{ et } n \text{ pair, } (-1)^n = +1, \text{ donc } e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}.$$

$$\text{Donc si } n \geq 1 \text{ pair, } z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right).$$

$$\text{Si } n \text{ impair, } (-1)^n = -1, \text{ donc } e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{-\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}.$$

$$\text{Donc si } n \text{ impair, } z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right).$$

$$\text{Donc pour tout entier } n \geq 1, z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$$

$$3. \quad M_1 M_2 = |z_2 - z_1| = |2\sqrt{3} + 2i - (\sqrt{3} - i)| = |2\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} + i| = |\sqrt{3} + 3i|$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$M_2 M_3 = |z_3 - z_2| = |4\sqrt{3} - 4i - (2\sqrt{3} + 2i)| = |4\sqrt{3} - 4i - 2\sqrt{3} - 2i| = |2\sqrt{3} - 6i|$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2} = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 2^2 \sqrt{3}$$

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_n M_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$.

5. On note $\ell_n = M_1 M_2 + M_2 M_3 + \dots + M_n M_{n+1}$.

(a) D'après la question 4, $\ell_n = 2\sqrt{3} + 2^2 \sqrt{3} + \dots + 2^n \sqrt{3} = (2 + 2^2 + \dots + 2^n) \sqrt{3}$

La suite (2^n) définie pour $n \geq 1$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $2^1 = 2$; la somme S de ses premiers termes consécutifs est donnée par la formule :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$\text{donc } 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$$

$$\ell_n = (2 + 2^2 + \dots + 2^n) \sqrt{3} = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$$

$$(b) \quad \ell_n \geq 1000 \iff 2\sqrt{3}(2^n - 1) \geq 1000 \iff 2^n - 1 \geq \frac{1000}{2\sqrt{3}} \iff 2^n \geq \frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1.$$

La fonction \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc

$$\ell_n \geq 1000 \iff \ln(2^n) \geq \ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right) \iff n \ln 2 \geq \ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right)$$

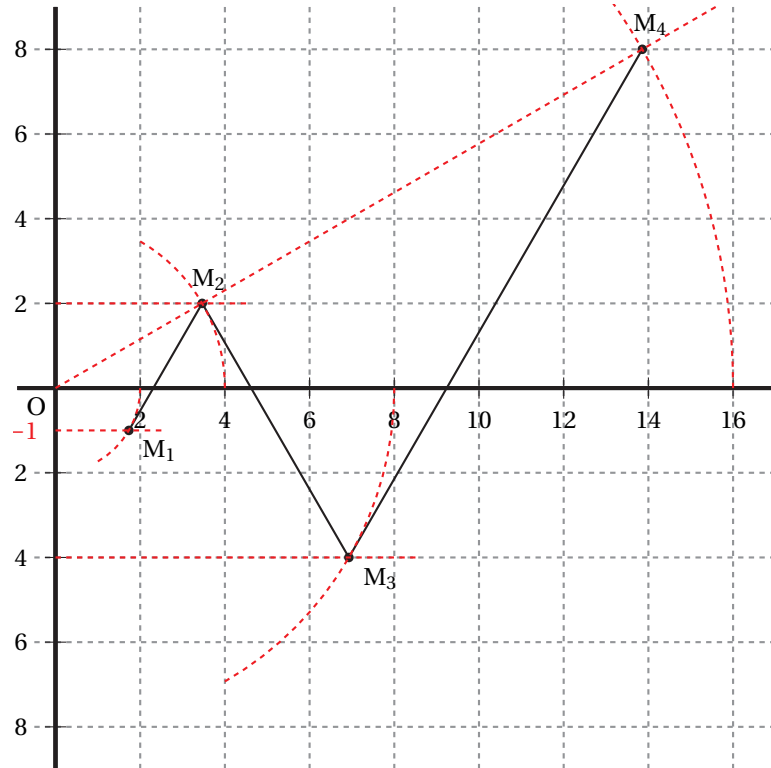
Or $\ln 2 > 0$ donc

$$\ell_n \geq 1000 \iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right)}{\ln 2} \iff n \geq 8,18.$$

Le plus petit entier n tel que $\ell_n \geq 1000$ est 9.

On peut vérifier que $\ell_8 = 510\sqrt{3} \approx 883 < 1000$ et $\ell_9 = 1022\sqrt{3} \approx 1770 > 1000$.

ANNEXE à rendre avec la copie



EXERCICE 5 énoncé **Antilles 2013**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.

2. $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{3} = \frac{1+i+\sqrt{2}}{3} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$. On a alors $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.

3. (a) Pour $N = 2$, le tableau de l'état des variables dans l'algorithme est :

K	A	B
1	0,8047	0,3333
2	0,5586	0,1111

(b) Plus généralement, pour une valeur de N saisie par l'utilisateur, l'algorithme affichera la valeur de a_N .**Partie B**1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$ et $z_{n+1} = \frac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$, donc :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{3}.$$

2. La suite (b_n) est géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{3}$, par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on en déduit que (b_n) converge vers 0.3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| = \left| \frac{z_n + |z_n|}{3} \right| = \frac{1}{3} |z_n + |z_n|| \leq \frac{1}{3} (|z_n| + |z_n|)$, c'est-à-dire : $|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}$.(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.□ On a $u_0 = |z_0| = \sqrt{2}$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2} = \sqrt{2}$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.□ Supposons que, pour un certain entier naturel n , $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$, alors :

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3} u_n \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2},$$

la propriété est donc héréditaire.

□ En conclusion, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |z_n| \geq 0$, donc : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = 0$, le théorème « des gendarmes » permet de conclure que la suite (u_n) converge vers 0.(c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = |z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{a_n^2} = |a_n|.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |a_n| \leq u_n$. Comme (u_n) converge vers 0, le théorème « des gendarmes » permet à nouveau de conclure que $(|a_n|)$ converge vers 0, donc que (a_n) converge vers 0.

EXERCICE 6 énoncé **Pondichéry 2013**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(a)
$$z_M = 2 \times \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

(b)
$$z_{M'} = -iz_M = -i(1 - i\sqrt{3}) = -i + i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} - i.$$

Module et argument méthode algébrique :

$$|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \text{ et si l'on nomme } \theta \text{ un argument de } z_{M'} \text{ alors, par propriété,}$$

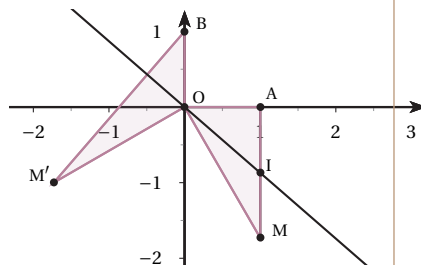
$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ On reconnaît } \theta = -\frac{5\pi}{6} \text{ (modulo } 2\pi).$$

Module et argument par la forme exponentielle :

$$|z_{M'}| = |-i| \times |z_M| = 1 \times |2e^{-i\frac{\pi}{3}}| = 2$$

$$\arg(z_{M'}) = \arg(-i) + \arg(z_M) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} \text{ (modulo } 2\pi).$$

- (c) La figure n'est pas à l'échelle.
-
- Graphiquement on vérifie les propriétés 1 et 2.

2. Cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

(a)
$$z_I = \frac{z_A + z_M}{2} = \frac{x+1}{2} + i \frac{y}{2}.$$

(b)
$$z_{M'} = -i(x + iy) = y - ix.$$

(c)
$$I\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}\right), B(0; 1) \text{ et } M'(y; -x).$$

(d)
$$\vec{OI} \cdot \vec{BM'} = \left(\frac{x+1}{2}\right) \times y + \left(\frac{y}{2}\right) \times (-x-1) = \frac{xy}{2} + \frac{1}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
 donc les droites (OI) et (BM') sont perpendiculaires.(e)
$$BM' = \sqrt{y^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$
 et d'autre part, $2OI = 2\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{2}{2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ donc

$$2OI = BM'.$$

EXERCICE 7 énoncé Nouvelle Calédonie 2013

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

1. $(1+i)^{4n} = ((1+i)^4)^n$ et $(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2$
 $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$; donc $(1+i)^4 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$
 Donc $(1+i)^{4n} = (-4)^n$; **la proposition est vraie.**

2. On cherche les solutions de l'équation (E) : $(z-4)(z^2-4z+8) = 0$.
 Il y a $z=4$ qui annule $z-4$.

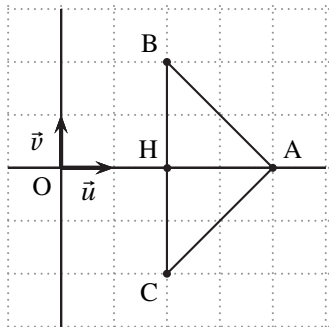
Pour $z^2-4z+8=0$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 16 - 32 = -16 < 0$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-4) + i\sqrt{16}}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i \text{ et } z_2 = 2-2i$$

L'équation (E) admet pour solutions $\{4, 2+2i, 2-2i\}$.

Représentons les points dont les affixes sont solutions de (E) :



Le triangle ABC est isocèle en A car les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe (O, \vec{u}) et A appartient à cet axe ; donc le milieu H de [BC] est aussi le pied de la hauteur issue de A dans le triangle.

H a pour affixe 2 donc $AH=2$; de plus $BC = |2+2i-2-2i| = |4i| = 4$.

L'aire de ce triangle vaut donc :

$$\frac{BC \times AH}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

La proposition est fausse.

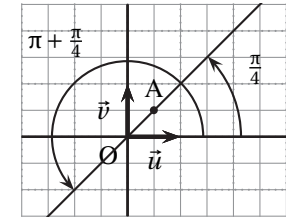
3. Soit α un nombre réel quelconque ; on sait que $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$.

$$\begin{aligned} 1 + e^{2i\alpha} &= 1 + (e^{i\alpha})^2 = 1 + (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = 1 + \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha + i^2 \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cos \alpha = 2e^{i\alpha} \cos \alpha \end{aligned}$$

La proposition est vraie.

4. Le nombre complexe z_A a pour argument $\frac{\pi}{4}$ donc le nombre complexe $(z_A)^n$ a pour argument $n \frac{\pi}{4}$ (argument d'un produit).

Les points O, A et M_n sont alignés si et seulement si l'argument de l'affixe de M_n est $\frac{\pi}{4}$ ou $\pi + \frac{\pi}{4}$ à 2π près.



On suppose que $n-1$ est divisible par 4 ; le nombre $n-1$ peut alors s'écrire $4k$ avec k entier et donc n s'écrit $4k+1$.

L'argument de l'affixe de M_n qui est $n \frac{\pi}{4}$ peut s'écrire $(4k+1) \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4}$ qui est bien équivalent à $\frac{\pi}{4}$ ou $\pi + \frac{\pi}{4}$ à 2π près ;
 donc si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

La proposition est vraie.

5. Le nombre j a pour module 1 et argument $\frac{2\pi}{3}$ donc j^2 a pour module $1^2 = 1$ et pour argument $2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

On a : $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (propriétés du cercle trigonométrique).

Et : $j^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Donc $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$.

La proposition est vraie.

Une solution plus élégante consiste à écrire le nombre j sous la forme $e^{i \frac{2\pi}{3}}$ pour prouver que $j^3 = 1$. Ensuite on développe $(1 + j + j^2)(1 - j)$ en $1 - j^3$ qui donne donc 0. Et comme j n'est pas égal à 1, le facteur $1 - j$ n'est pas nul, mais comme le produit $(1 + j + j^2)(1 - j)$ est nul, c'est le facteur $1 + j + j^2$ qui est nul.

EXERCICE 8 énoncé **Antilles septembre 2014****Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. $f(-1 + i\sqrt{3}) = (-1 + i\sqrt{3})^2 + 2(-1 + i\sqrt{3}) + 9 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$

2. On résout dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$:

$$f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 9 = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0 ; \Delta = 4 - 16 = -12 = -(2\sqrt{3})^2$$

Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$ On appelle A le point d'affixe $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $z_B = -1 - i\sqrt{3}$

$$|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$$

Soit θ_A un argument de z_A :
$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta_A = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \implies \theta_A = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Donc $z_A = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ $|z_A| = 2$ donc le point A se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2. De plus la partie réelle de A vaut -1 donc A se trouve sur la droite d'équation $x = -1$. Idem pour B.

Voir graphique page ??.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

$$f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$$

Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.

$$\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32 ; \Delta < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \lambda < 8$$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $] -\infty; 8[$.4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$ $f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2$; donc $|f(z) - 8| = |(z + 1)^2| = |z + 1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.

Donc $|f(z) - 8| = 3 \iff |z + 1|^2 = 3 \iff |z + 1| = \sqrt{3}$

Soit Ω le point d'affixe -1 , donc de coordonnées $(-1; 0)$; si on appelle M le point d'affixe z , alors $|z + 1| = \sqrt{3} \iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$.L'ensemble des points M vérifiant $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.

On trace (F) sur le graphique (voir page ??).

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

(a)
$$f(z) = z^2 + 2z + 9 = (x + iy)^2 + 2(x + iy) + 9 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 9 = x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$$

(b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

$$f(z) \text{ réel} \iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x + 1) = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = -1$$

Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x = -1$.Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$. Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(-1 - \sqrt{3}; 0)$ et $(-1 + \sqrt{3}; 0)$.Les points A et B ont pour affixes z_A et z_B dont les parties réelles sont égales à -1 ; donc A et B sont situés sur la droite D_2 .

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1 + i\sqrt{3} + 1| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \text{ donc le point A appartient au cercle (F).}$$

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |-1 - i\sqrt{3} + 1| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \text{ donc le point B appartient au cercle (F).}$$

Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont :

$$(-1 - \sqrt{3}; 0), (-1 + \sqrt{3}; 0), (-1; \sqrt{3}) \text{ et } (-1; -\sqrt{3})$$

EXERCICE 9 énoncé Centres Étrangers 2014

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z_n par :

$$\begin{cases} z_0 &= 16 \\ z_{n+1} &= \frac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O , on considère les points A_n d'affixes z_n .

$$6. 1. (a) \quad z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \frac{1+i}{2} \times 16 = 8 + 8i.$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \left(\frac{1+i}{2}\right)(8 + 8i) = 4 + 4i + 4i - 4 = 8i.$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = 8i \left(\frac{1+i}{2}\right) = 4i - 4 = -4 + 4i.$$

(b) Voir l'annexe.

$$(c) \quad \text{Si } z = \frac{1+i}{2} \text{ alors } |z|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}, \text{ donc } |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Donc } z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{Un argument de } \frac{1+i}{2} \text{ est donc } \frac{\pi}{4}.$$

$$(d) \quad OA_0 = |z_0| = r_0 = 16 ;$$

$$OA_1 = |z_1| = r_1 = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2} ;$$

$$A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8 + 8i - 16| = |-8 + 8i| = 8\sqrt{2}.$$

On a donc $OA_1 = A_0A_1$: le triangle est isocèle en A_1 ;D'autre part $(8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = 16^2 \iff A_0A_1^2 + OA_1^2 = OA_0^2$ signifie (réciproque du théorème de Pythagore) que le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1 .

$$2. \quad r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} z_n \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \times |z_n| \text{ (le module du produit est égal au produit des modules)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} r_n.$$

$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n \text{ montre que la suite } (r_n) \text{ est géométrique, de raison } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{On sait que } r_n r_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n.$$

$$\text{Comme } 0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1, \text{ on sait que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0.$$

La suite converge vers 0.

Comme $r_n = |z_n| = OA_n$, ceci signifie géométriquement que la limite des points A_n est le point O .3. (a) Quel que soit le naturel n :

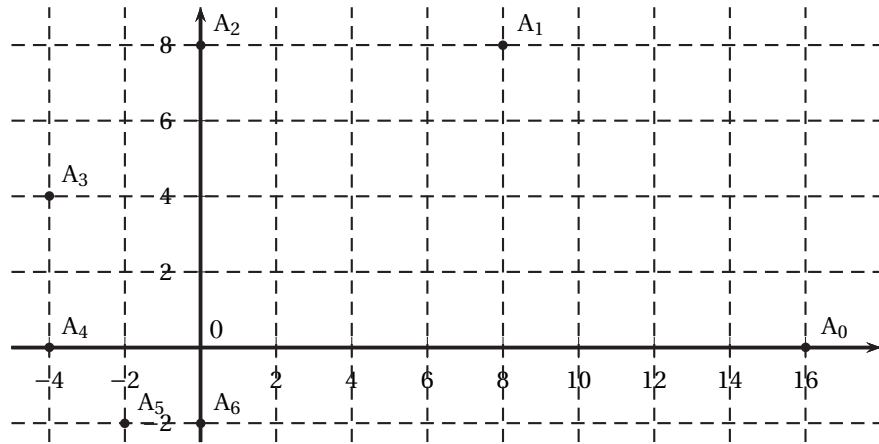
$$A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left| \frac{1+i}{2} z_n - z_n \right| = \left| z_n \left(\frac{1+i}{2} - 1 \right) \right| = \left| z_n \left(\frac{-1+i}{2} \right) \right| = \left| \frac{-1+i}{2} \right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n = r_{n+1}.$$

(b) L_n est donc la somme des n (sauf r_0) premiers termes de la suite géométrique (r_n) .

$$\text{Donc } L_n = 8\sqrt{2} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$(c) \quad \text{On sait que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{8\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{16}{\sqrt{2} - 1} = \frac{16(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = 16(\sqrt{2} + 1).$$

Annexe à rendre avec la copie



EXERCICE 10 énoncé Liban 2014**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n$$

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

1. $u_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - i| = 2$.
2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1 + i)z_n| = |1 + i| \times |z_n| = \sqrt{2}|z_n| = \sqrt{2}u_n$
3. D'après le cours, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 2(\sqrt{2})^n$; (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2} > 1$ et de premier terme strictement positif, elle diverge donc vers $+\infty$.
- 5.

Variables	: u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	: Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	: Demander la valeur de p
Traitement	: Tant que $u \leq p$ Faire Affecter à n la valeur $n + 1$ Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$ Fin du Tant Que
Sortie	: Afficher n

Partie B

$$1. z_1 = (1 + i) \times (\sqrt{3} - i) = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1).$$

$$2. z_0 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2e^{-i\pi/6}$$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

$$z_1 = 2e^{-i\pi/6} \times \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12}.$$

3. Des deux questions précédentes, on obtient que

$$1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

EXERCICE 11 énoncé **Métropole 2014**

Commun à tous les candidats

1. Nous avons une équation de degré 2, à coefficients réels. On va donc calculer le discriminant Δ du trinôme du second degré.

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = 16 - 4 \times 16 = -3 \times 16 = -48.$$

Le discriminant étant strictement négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées,

$$\text{qui sont : } Z_1 = \frac{-4 - i\sqrt{48}}{2} = \frac{-4 - 4i\sqrt{3}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3} \text{ et } Z_2 = \overline{Z_1} = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

Présentons maintenant ces nombres sous leur forme exponentielle, en commençant par calculer le module de Z_1 : $|Z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4.$

$$\text{On peut donc écrire : } Z_1 = 4 \times \left(\frac{-2}{4} + i \frac{-2\sqrt{3}}{4} \right) = 4 \times \left(\frac{-1}{2} + i \frac{-\sqrt{3}}{2} \right).$$

Un argument de Z_1 sera donc un angle dont le cosinus est $\frac{-1}{2}$ et le sinus est $\frac{-\sqrt{3}}{2}$, donc

$$\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ dont la mesure principale est } \frac{-2\pi}{3}.$$

La forme exponentielle de Z_1 est donc : $Z_1 = 4e^{\frac{-2i\pi}{3}}$, et puisque Z_2 est le conjugué de Z_1 , d'après les propriétés des modules et arguments : $Z_2 = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$. L'équation admet donc deux solutions, qui sous leurs formes exponentielles sont : $Z_1 = 4e^{\frac{-2i\pi}{3}}$ et $Z_2 = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

2. Si a a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{3}$, alors $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et donc, d'après les propriétés du module et des arguments, $a^2 = 2^2 e^{2 \times i\frac{\pi}{3}}$, donc on a $a^2 = Z_2$ et donc la forme algébrique de a^2 est $-2 + 2i\sqrt{3}$.

Le nombre a est donc une solution à l'équation dont on parle dans cette question. L'autre solution sera donc $-a$, car $(-a)^2 = a^2$, donc si a est une solution, $-a$ en sera une aussi. On va donc présenter les deux solutions sous forme algébrique, comme demandé :

$$a = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \times \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } -a = -1 + i \times (-\sqrt{3}).$$

3. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Il existe donc quatre nombres réels $x_1 ; y_1 ; x_2$ et y_2 tels que $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors } z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Comme les nombres x_1, x_2, y_1 et y_2 sont réels, alors on peut définir les nombres $x_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2$ et $y_3 = x_1 y_2 + x_2 y_1$, qui sont réels également.

On a donc écrit le produit $z_1 z_2$ sous la forme $x_3 + iy_3$, où x_3 et y_3 sont des nombres réels, donc le conjugué de $z_1 z_2$ est :

$$\overline{z_1 z_2} = x_3 - iy_3 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Par ailleurs, calculons le produit : $\overline{z_1} \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \times (x_2 - iy_2)$

$$\overline{z_1} \overline{z_2} = x_1 x_2 - ix_1 y_2 - iy_2 x_1 + (-i)^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \overline{z_1 z_2}$$

Nous avons donc démontré que pour deux nombres complexes quelconques z_1 et z_2 , on a : $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$.

La seconde propriété sera démontrée par récurrence. Posons, pour tout entier naturel n non nul la propriété \mathcal{P}_n , qui dit que pour tout complexe z , on a $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $z^1 = z$, donc $\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$: la propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

Hérédité : Pour un entier k naturel non nul, on suppose vraie la propriété \mathcal{P}_k , c'est à dire que l'on suppose que pour tout complexe z , on a $\overline{z^k} = (\overline{z})^k$.

On souhaite maintenant démontrer que si cette propriété est vraie, alors la propriété suivante doit être vraie aussi.

Soit z un nombre complexe. On s'intéresse donc à $\overline{z^{k+1}}$. On a $z^{k+1} = z^k \times z$, donc :

$$\begin{aligned} \overline{z^{k+1}} &= \overline{z^k \times z} \\ &= \overline{z^k} \times \overline{z} && \text{application de la propriété précédente.} \\ &= (\overline{z})^k \times \overline{z} && \text{par hypothèse de récurrence.} \\ &= (\overline{z})^{k+1} && \text{ce qui constitue la propriété } \mathcal{P}_{k+1}. \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que si la propriété \mathcal{P}_k est vraie, cela implique que \mathcal{P}_{k+1} l'est également : la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc, on peut donc dire que pour tout entier n naturel non nul, et pour tout nombre complexe z , on a $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

4. Soit z une solution de l'équation (E), cela signifie que l'on a : $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$. Vérifions maintenant si le conjugué de z est une solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \overline{z^4 + 4z^2 + 16} &= \overline{z^4} + \overline{4z^2} + \overline{16} && \text{dernière propriété démontrée.} \\ &= \overline{z^4} + \overline{4z^2} + 16 && \text{première propriété démontrée} \\ & && \text{sachant que } 4 = \overline{4}, \text{ car } 4 \text{ est réel.} \\ &= \overline{z^4 + 4z^2 + 16} && \text{somme des conjugués.} \\ &= \overline{0} && \text{car } z \text{ est solution de (E).} \\ &= 0 && \text{car } 0 \text{ est réel, donc est son propre conjugué.} \end{aligned}$$

On a établi à la question 2. que les nombres a et $-a$ sont tels que $a^2 = Z_2$ et $(-a)^2 = Z_2$.

Comme par ailleurs on a dit que Z_2 est solution de l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$, cela signifie que

$(a^2)^2 + 4(a^2) + 16 = 0$, donc que $a^4 + 4a^2 + 16 = 0$, donc a est solution de (E) et de la même façon, $-a$ est aussi une solution de cette équation.

En appliquant la propriété démontrée au début de cette question, on en déduit que les nombres \bar{a} et $\overline{-a}$ sont également des solutions à cette équation. Nous avons donc 4 solutions à l'équation, qui sont distinctes : $a = 1 + i\sqrt{3}$; $-a = -1 - i\sqrt{3}$; $\bar{a} = 1 - i\sqrt{3}$ et $\overline{-a} = -1 + i\sqrt{3}$, donc puisqu'il y a au maximum 4 solutions à l'équation, celle-ci ne peut avoir d'autre solution que celles trouvées, et donc l'équation (E) a été résolue.

EXERCICE 12 énoncé Nouvelle Calédonie mars 2014

Commun à tous les candidats

*Aucune justification n'était demandée dans cet exercice.***1. Réponse b.** : $4e^{i\pi}$

Le nombre $1+i$ a pour écriture complexe $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc le nombre $(1+i)^4$ a pour écriture complexe $(\sqrt{2})^4 e^{i4\frac{\pi}{4}} = 4e^{i\pi}$.

2. Réponse c. : $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

Si on appelle A le nombre d'affixe $1-i$, l'équation $|z-1+i| = |\sqrt{3}-i|$ équivaut à $|z-z_A| = |\sqrt{3}-i|$, ou encore $|z-z_A|^2 = |\sqrt{3}-i|^2 \iff |z-z_A|^2 = 4$.

3. Réponse c. : la suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.

$$Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n \implies |Z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2}Z_n \right| \iff |Z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \times |Z_n| \iff |Z_{n+1}| = \frac{\sqrt{2}}{2} |Z_n|$$

Donc la suite $U_n = |Z_n|$ est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$; or $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc la suite est convergente et a pour limite 0.

4. Réponse c. : ABC est rectangle en A.

$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{10}$; $AC = 2\sqrt{10}$ et $BC = 5\sqrt{2}$; $BC^2 = AB^2 + AC^2$ d'où la réponse **c**.

EXERCICE 13 énoncé Pondichéry 2014

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} =$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

$$1. \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$\text{Or } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Donc le nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ a pour module $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{6}$ donc sa forme exponentielle est $\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$2. (a) r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n\right| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$$

Donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = |z_0| = 1$.

(b) La suite (r_n) est géométrique donc, pour tout n , $r_n = r_0 \times q^n$, donc $r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

$$(c) OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

(r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$; or $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc la suite (r_n) converge vers

0. La longueur OA_n tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. (a) On fait tourner l'algorithme donné dans le texte en prenant pour P la valeur 0,5 :

	n	R	P	R > P
Initialisations	0	1	0,5	Vrai
Traitement	1	0,866	0,5	Vrai
	2	0,75	0,5	Vrai
	3	0,6495	0,5	Vrai
	4	0,5625	0,5	Vrai
	5	0,487	0,5	Faux
Sortie	Afficher 5			

La valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$ est 5.

(b) Cet algorithme s'arrête dès que $R \leq P$ et affiche alors n , c'est-à-dire qu'il affiche la plus petite valeur de n pour laquelle R donc $r_n = OA_n$ est inférieur ou égal à P.

On peut donc dire que $OA_{32} > 0,01$ et que $OA_{33} \leq 0,01$.

Vérification à la calculatrice : $r_{32} \approx 0,01002$ et $r_{33} \approx 0,00868$.

4. (a) On considère le triangle OA_nA_{n+1} .

$$OA_n = r_n \text{ donc } (OA_n)^2 = r_n^2$$

$$OA_{n+1} = r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n \text{ donc } (OA_{n+1})^2 = \frac{3}{4}r_n^2$$

$$\begin{aligned} A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| &= \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i - 1\right)z_n\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \times r_n = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}}r_n = \sqrt{\frac{4}{16}}r_n = \frac{1}{2}r_n \text{ donc } (A_nA_{n+1})^2 = \frac{1}{4}r_n^2 \end{aligned}$$

$$(A_nA_{n+1})^2 + (OA_{n+1})^2 = \frac{1}{4}r_n^2 + \frac{3}{4}r_n^2 = r_n^2 = (OA_n)^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .

(b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

Le point A_n , d'affixe z_n , appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son argument est $\frac{\pi}{2}$

ou $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π , c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ modulo π , donc il peut s'écrire $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Le nombre z_n a pour argument $\frac{n\pi}{6}$; $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff n = 3 + 6k$.

Mais n est un entier naturel donc k doit être strictement positif donc appartenir à \mathbb{N} .

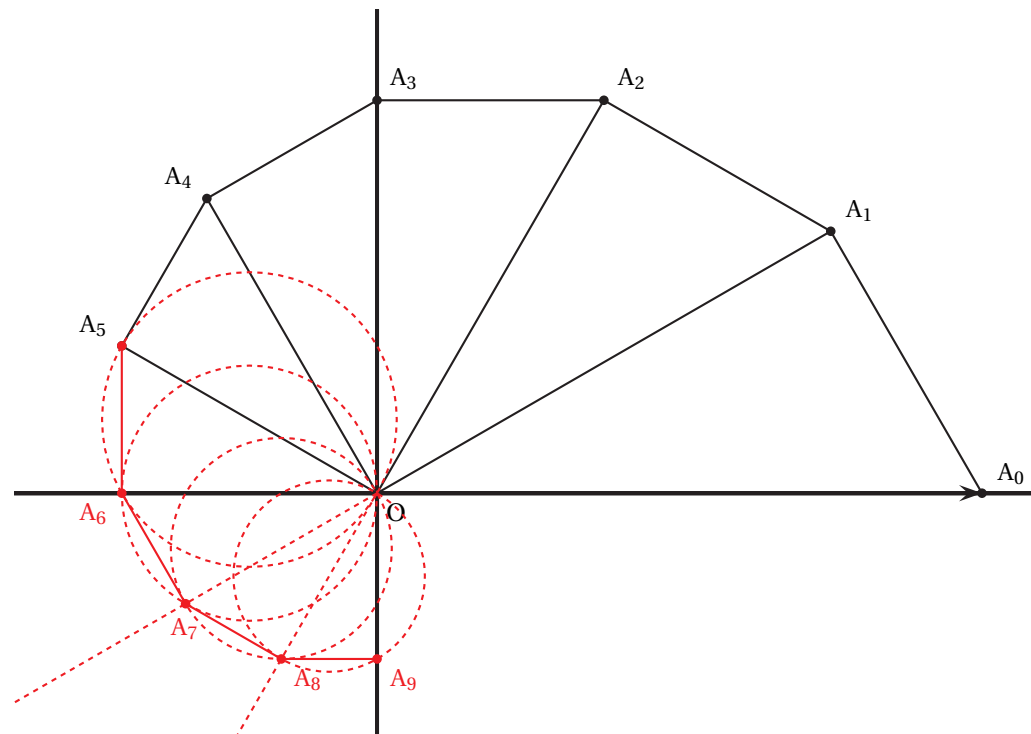
Donc si n s'écrit $3 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors le point A_n appartient à l'axe des ordonnées.

(c) Le point A_6 a pour affixe z_6 qui a pour argument $\frac{6\pi}{6} = \pi$; ce point est donc sur l'axe des abscisses. Comme le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_6 , on trace le cercle de diamètre $[OA_5]$; le point A_6 est à l'intersection de ce cercle et de l'axe des abscisses.

Le point A_7 a pour affixe z_7 qui a pour argument $\frac{7\pi}{6}$; donc les points A_1 , O et A_7 sont alignés. Le point A_7 se trouve donc à l'intersection du cercle de diamètre $[OA_6]$ et de la droite (OA_1) .

Etc. (Voir figure en annexe)

Remarque : les points A_3 et A_9 appartiennent à l'axe des ordonnées, ce qui correspond bien à la réponse trouvée à la question **4.b**.



ANNEXE NON SPÉCIALITÉ

EXERCICE 14 énoncé Amérique du Nord 2015

1. (a) On applique les formules de récurrence proposées en utilisant un petit programme fait à la calculatrice.

On obtient :

$$A_0 (-4, 8; 1, 4) \quad A_1 (-4, 68; -1, 76) \quad A_2 (-2, 688; -4, 216)$$

(b) Voir plus bas :

Variables :

i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :

x prend la valeur -3

y prend la valeur 4

Traitement :

Pour i allant de 0 à 20

Construire le point de coordonnées $(x; y)$

t prend la valeur x

x prend la valeur $0,8 \times x - 0,6 \times y$.

y prend la valeur $0,6 \times t + 0,8 \times y$.

Fin Pour

Remarque. L'erreur à ne pas commettre ici était d'utiliser x dans le calcul de y . En effet, à ce stade, x a déjà été modifié. C'est d'ailleurs pour cela que l'algorithme propose de stocker temporairement l'ancienne valeur de x dans la variable t .

(c) On a identifié les points sur l'annexe en fonction de leurs coordonnées. Ils semblent appartenir à un cercle de centre O et de rayon 5 .

2. (a) Faisons une démonstration par récurrence puisque la suite z est définie par récurrence.

Au rang 0 , $|z_0| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$. La propriété est vérifiée.

Fixons un entier p et supposons que $|z_p| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = 5$.

Au rang $p+1$:

$$\begin{aligned} |z_{p+1}| &= \sqrt{x_{p+1}^2 + y_{p+1}^2} \\ &= \sqrt{(0,8x_p - 0,6y_p)^2 + (0,6x_p + 0,8y_p)^2} \\ &= \sqrt{(0,8^2 + 0,6^2)x_p^2 + (0,6^2 + 0,8^2)y_p^2 + (0,8 \times 0,6 - 0,6 \times 0,8)x_p y_p} \\ &= \sqrt{x_p^2 + y_p^2}. \text{ Or, par hypothèse, } \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = 5. \text{ Donc :} \\ |z_{p+1}| &= 5 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire et initialisée.

Ainsi, pour tout n , on a bien $u_n = |z_n| = 5$, ce qui prouve notre conjecture concernant le lieu des points.

(b) Calculons, pour tout n , la forme algébrique de $e^{i\theta} z_n$:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} z_n &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) (x_n + i y_n) \\ &= (0,8 + i0,6)(x_n + i y_n) \\ &= (0,8x_n + i^2 0,6y_n) + (0,6x_n + 0,8y_n)i \\ &= (0,8x_n - 0,6y_n) + (0,6x_n + 0,8y_n)i \end{aligned}$$

On reconnaît les formules de récurrence de x_{n+1} et y_{n+1} :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} z_n &= x_{n+1} + y_{n+1}i \\ &= z_{n+1} \end{aligned}$$

(c) z est une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$ sur des complexes. Comme cette notion n'est pas au programme, nous allons redémontrer la formule explicite.

Pour $n = 0$ la formule est bien sûr vraie. Supposons-la vraie à un rang p fixé : $z_p = e^{ip\theta} z_0$.

Mais nous savons que $z_{p+1} = e^{i\theta} z_p = e^{i\theta} e^{ip\theta} z_0$. On a ainsi :

$$z_{p+1} = e^{ip\theta + i\theta} z_0 = e^{i(p+1)\theta} z_0.$$

La propriété est donc héréditaire et initialisée.

Ainsi, pour tout n , on a bien $z_n = e^{in\theta} z_0$.

(d) Posons $\theta_0 = \arg(z_0)$. Par définition :

$$\frac{z_0}{|z_0|} = \cos(\theta_0) + i \sin(\theta_0). \text{ Or : } \frac{z_0}{|z_0|} = \frac{-3}{5} + i \frac{4}{5}$$

$= -0,6 + i0,8$. On reconnaît les valeurs de cos et sin de θ :

$= -\sin(\theta) + i \cos(\theta)$. En utilisant les formules de trigonométrie, on a :

$$\frac{z_0}{|z_0|} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

On a donc bien, en identifiant la première et la dernière ligne, $\arg(z_0) = \theta_0 = \frac{\pi}{2} + \theta$

Remarque. On pouvait également calculer la forme algébrique de $|z_0|e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ et montrer qu'elle était identique à celle de z_0 . Cette méthode est d'ailleurs certainement plus « facile » à mettre en œuvre.

(e) On utilise les propriétés de l'argument :

$$\arg(z_n) = \arg(e^{in\theta} z_0) = \arg(e^{in\theta}) + \arg(z_0) = n\theta + \frac{\pi}{2} + \theta = (n+1)\theta + \frac{\pi}{2}$$

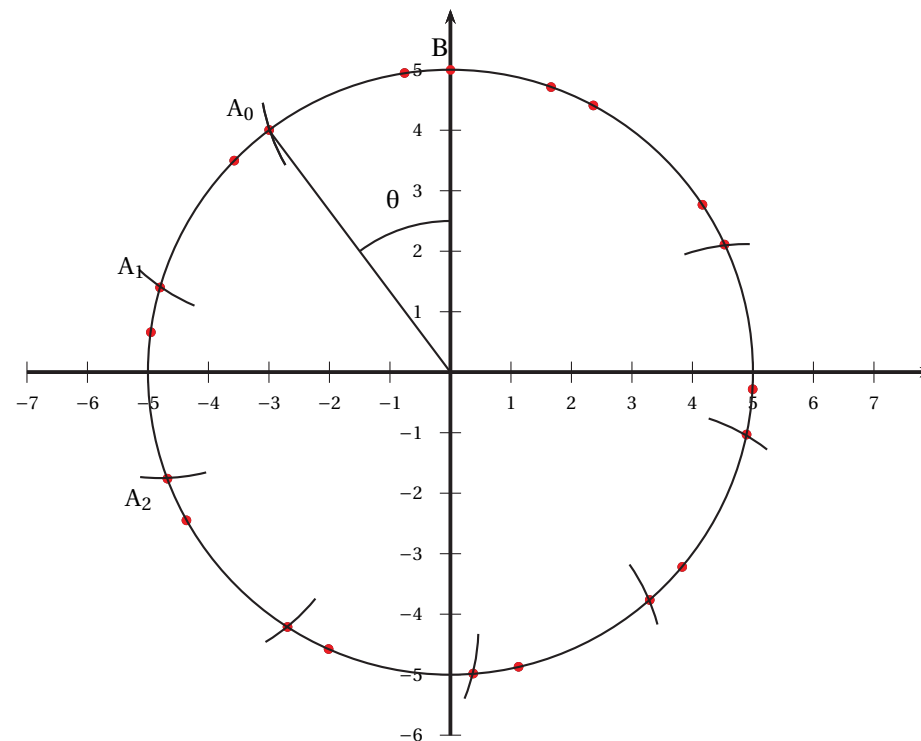
On représente θ en utilisant le point A_0 . En effet, ce point vérifie $(\vec{i}; \vec{OA}_0) = \arg(z_0) = \theta + \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, on obtient facilement, par différence, que $(\vec{j}; \vec{OA}_0) = \theta$.

On a tracé θ en annexe en utilisant cette dernière remarque.

Pour obtenir A_{n+1} :

À partir du point A_n , on se déplace d'un angle θ sur le cercle de rayon 5 et de centre O pour obtenir A_{n+1} . Cette opération peut se faire à l'aide d'un compas en reportant une longueur correspondant à θ .

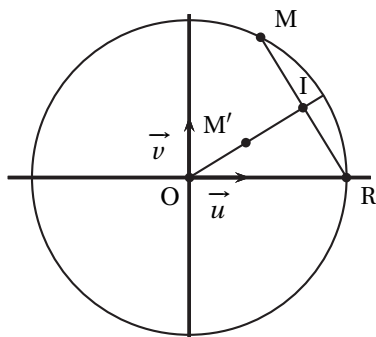


EXERCICE 15

énoncé

Antilles 2015

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Puisque $OM = OR$, on a $|z_M| = |z_R| = |z|$.

Comme R a un argument égal à 0 à 2π près on a $z_R = |z|$.

2.

$$z' = \frac{1}{2} \left(\frac{z + |z|}{2} \right).$$

L'affixe de $\frac{z + |z|}{2}$ est égale à la demi-somme des affixes de celles de M et de R . Le point ayant cette affixe est donc le milieu I du segment $[MR]$.

Finalement le point M' est le milieu de $[OI]$.

Partie B

1. Si z_0 est un nombre réel négatif, on a $|z_0| = -z_0$. D'où

$$z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} = \frac{z_0 - z_0}{4} = 0 \text{ et tous les termes suivants de la suite sont nuls. La suite converge vers } 0.$$

2. Si z_0 est un nombre réel positif, on a $|z_0| = z_0$. D'où

$$z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} = \frac{z_0 + z_0}{4} = \frac{z_0}{2}, \text{ puis } z_2 = \frac{z_1 + |z_1|}{4} = \frac{\frac{z_0}{2} + \frac{z_0}{2}}{4} = \frac{z_0}{4}.$$

Montrons par récurrence que $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

Initialisation : on vu que la relation est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $z_p = \frac{z_0}{2^p}$; alors

$$z_{p+1} = \frac{z_p + |z_p|}{4} = \frac{\frac{z_0}{2^p} + \frac{z_0}{2^p}}{4} = \frac{\frac{z_0}{2^{p-1}}}{2^2} = \frac{z_0}{2^{p+1}} : \text{ la relation est vraie au rang } p + 1.$$

On a donc démontré que pour tout naturel $u_n = \frac{z_0}{2^n}$.

La suite (z_n) est donc une suite géométrique de premier terme z_0 et de raison $\frac{1}{2}$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que cette suite converge vers 0 .

3. (a) D'après la première construction, le module de z'_M est inférieur à celui de z_M et son argument est égal à la moitié. On peut donc conjecturer que la suite $(|z_n|)$ va elle aussi converger vers 0 .

(b) On sait (inégalité triangulaire que pour tous complexes z_1 et z_2 , que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

En appliquant cette inégalité à $\frac{z_n}{4}$ et à $\frac{|z_n|}{4}$, on obtient :

$$|z_{n+1}| \leq \left| \frac{z_n}{4} \right| + \left| \frac{|z_n|}{4} \right| \text{ ou encore}$$

$$|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{4} \text{ ou}$$

$$|z_{n+1}| \leq \frac{|z_n|}{2}.$$

On montre de la même façon que précédemment par récurrence que $|z_n| \leq \frac{|z_0|}{2^n}$, c'est-à-dire que la suite $(|z_n|)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $|z_0|$: elle converge donc vers 0 .

EXERCICE 16 énoncé **Asie 2015****Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. (a) On résout l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$; $\Delta = -3 < 0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

(b) $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = z_1$ donc j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

2. $|j|^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ donc $|j| = 1$

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; on cherche θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Donc $\theta = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

La forme exponentielle de j est donc : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3. (a) $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\frac{2\pi \times 3}{3}} = e^{i \times 2\pi} = 1$

(b) j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ donc $j^2 + j + 1 = 0$ et donc $j^2 = -1 - j$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.

P a pour affixe 1 ; Q a pour affixe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et R pour affixe $j^2 = -1 - j = -1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$PQ^2 = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right|^2 = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \implies PQ = \sqrt{3}$$

$$QR^2 = \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = |-i\sqrt{3}|^2 = 3 \implies QR = \sqrt{3}$$

$$RP^2 = \left| 1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = \left| \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \implies RP = \sqrt{3}$$

$PQ = QR = RP$ donc le triangle PQR est équilatéral.

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.

On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. On sait que $a + bj + cj^2 = 0$ donc $a = -jb - j^2c$.

Or, d'après la question A. 3. b., $j^2 = -1 - j$ donc :

$$a = -jb - j^2c = -jb - (-1 - j)c = -jb + c + jc \iff a - c = j(c - b)$$

$$2. a - c = j(c - b) \implies |a - c| = |j(c - b)| \iff |a - c| = |j| \times |c - b|$$

On a vu précédemment que $|j| = 1$; de plus $|a - c| = AC$ et $|c - b| = BC$.

On a donc démontré que $AC = BC$.

3. On sait que $a = -jb - j^2c$. On sait aussi que $j^2 = -1 - j$ donc $j = -1 - j^2$.

On a donc $a = -(-1 - j^2)b - j^2c = b + j^2b - j^2c$ ce qui équivaut à $a - b = j^2(b - c)$.

4. On sait que $|j| = 1$ donc $|j^2| = |j|^2 = 1$. De plus $|a - b| = AB$ et $|b - c| = CB$.

On a vu dans la question précédente que $a - b = j^2(b - c)$ ce qui entraîne $|a - b| = |j^2(b - c)|$ ou encore $|a - b| = |j^2| \times |b - c|$. Cette dernière égalité équivaut à $AB = CB$.

Comme $AC = BC$ et $AB = CB$, on a démontré que le triangle ABC était équilatéral.

EXERCICE 17 énoncé **Métropole 2015**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit l'équation $z^2 - 8z + 64 = 0$.

$$\Delta = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0.$$

L'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{8 + i\sqrt{3} \times 64}{2} = \boxed{4 + 4i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = \boxed{4 - 4i\sqrt{3}}.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$. (figure à la fin de l'exercice)

(a) $|a| = |4 + 4i\sqrt{3}| = 4|1 + i\sqrt{3}| = 4 \times 2 = \boxed{8}$.

On en déduit $a = 8 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$. Un argument de a est donc $\frac{\pi}{3}$.

(b) On a trouvé $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \bar{a} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(c) $|a| = 8$; $|b| = |\bar{a}| = |a| = 8$ et $|c| = |8i| = 8$. Les points A, B et C sont donc sur le cercle de centre O et de rayon 8.

(d) Voir figure en fin d'exercice.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

(a) $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = \boxed{8}$.

(b) $|a'| = |ae^{i\frac{\pi}{3}}| = |a| \times |e^{i\frac{\pi}{3}}| = |a| = \boxed{8}$ car $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout θ réel.

$$\arg(a') = \arg\left(ae^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \arg(a) + \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. (a) On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.

$$\text{On a : } r = \frac{a' + b}{2} = \frac{-4 + 4i\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3}}{2} = \boxed{0}.$$

$$s = \frac{b' + c}{2} = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i.$$

$$\text{On a admis que } t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3}).$$

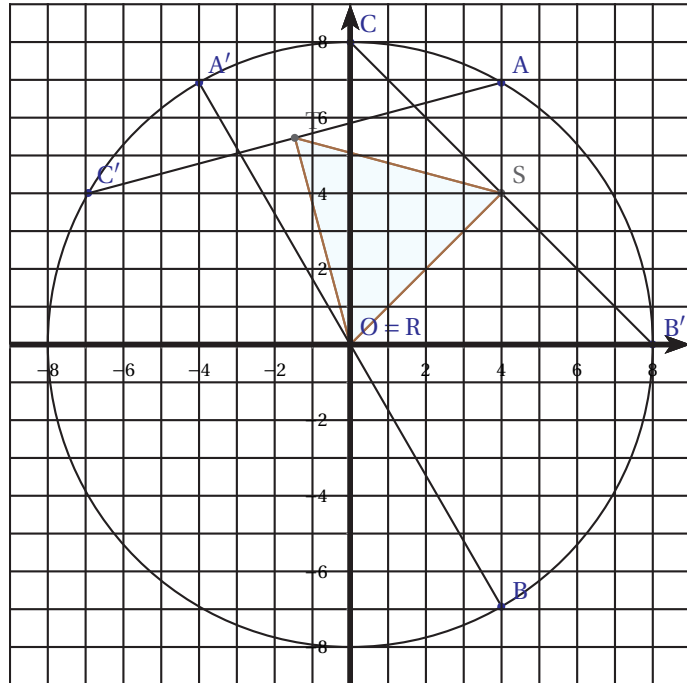
(b) Il semble que la figure que RST soit un triangle équilatéral.

- $RS = |s - r| = |4 + 4i| = 4|1 + i| = \boxed{4\sqrt{2}}$.

- $ST = |t - s| = |-2 - 2\sqrt{3} + i(-2 + 2\sqrt{3})| = 2|-1 - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})|$
 $= 2\sqrt{(-1 - \sqrt{3})^2 + (-1 + \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{(1 + 2\sqrt{3} + 3) + (1 - 2\sqrt{3} + 3)} = 2\sqrt{8}$
 $= \boxed{4\sqrt{2}}$.

- $RT = |t - r| = |2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})|$
 $= 2|1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})| = 2\sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3} = 2\sqrt{8}$
 $= \boxed{4\sqrt{2}}$.

$RS = ST = RT = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est **équilatéral**.



EXERCICE 18 énoncé Polynésie 2015

Commun à tous les candidats

$$1. M(z) \text{ est invariant si } M' = M \iff z' = z \iff z^2 + 4z + 3 = z \iff z^2 + 3z + 3 = 0.$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3 = (i\sqrt{3})^2.$$

Cette équation a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{On a } |z_1|^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3}.$$

Le même calcul donne $|z_2| = \sqrt{3}$.

$$\text{On a donc } z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

On trouve de la même façon que $z_2 = \sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

$$2. \text{ On a } z_A = z_2, \text{ donc } |z_A| = OA = |z_2| = \sqrt{3}.$$

De même $z_B = z_1$, donc $|z_B| = OB = |z_1| = \sqrt{3}$.

$$\text{Enfin } AB = |z_B - z_A| = \left| \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \right) \right| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}.$$

On a donc $OA = OB = AB = \sqrt{3}$: le triangle OAB est un triangle équilatéral.3. Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ son point associé. M' est sur l'axe des réels si $y' = 0$.Or on sait que l'affixe du point M est :

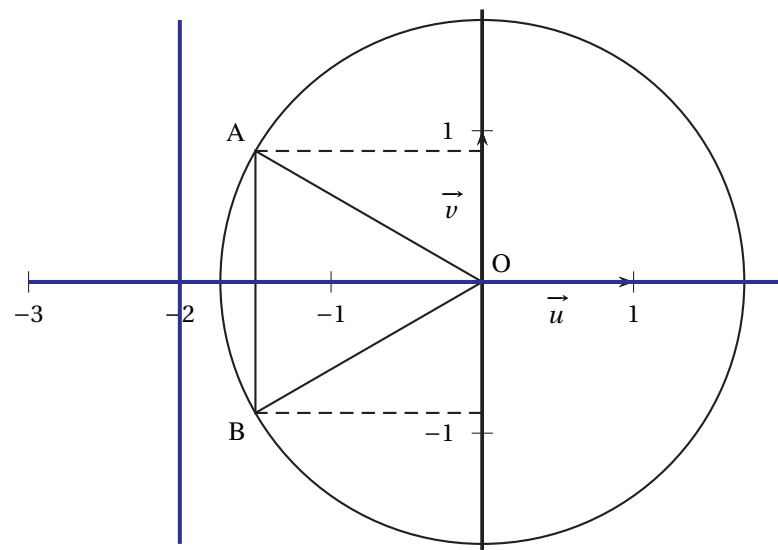
$$z^2 + 4z + 3 = (x + iy)^2 + 4(x + iy) + 3 = x^2 - y^2 + 2ixy + 4x + 4iy + 3 = x^2 - y^2 + 3 + i(2xy + 4y).$$

$$\text{On a donc } y' = 0 \iff 2xy + 4y = 0 \iff 2y(x + 2) = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ x + 2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ x = -2 \end{cases}$$

Conclusion : l'ensemble \mathcal{E} est constitué des points d'ordonnée nulle donc de l'axe des abscisses et des points de la droite verticale dont une équation est $x = -2$ (droites en bleu).

4.



EXERCICE 19 énoncé Polynésie septembre 2015

Partie A

1. Soit u le nombre complexe $1 - i$.

$$|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} ; \text{ donc } u = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

On cherche le réel α tel que
$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ Donc } \alpha = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

L'écriture complexe du nombre $u = 1 - i$ est donc $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2. $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ donc

$$e^{i\theta}(1 - i) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(1 - i) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) - i\sin(\theta) - i^2\sin(\theta) \\ = (\cos(\theta) + \sin(\theta)) + i(\sin(\theta) - \cos(\theta)) \text{ (forme algébrique)}$$

$$\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ donc } e^{i\theta}(1 - i) = e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} \text{ (écriture exponentielle)}$$

3. Le nombre complexe $e^{i\theta}(1 - i)$ s'écrit d'une part $(\cos(\theta) + \sin(\theta)) + i(\sin(\theta) - \cos(\theta))$ et d'autre part $\sqrt{2}e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$, c'est-à-dire $\sqrt{2} \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \right)$.

En identifiant les parties réelles, on obtient : $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

C'est un résultat que l'on peut retrouver directement en développant $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ au moyen de la formule $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x} \cos(x)$
 $g(x) = e^{-x}$.

On définit la fonction h sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ et \mathcal{C}_h des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. D'après les graphiques :

(a) On peut conjecturer que les limites des fonctions f et g en $+\infty$ sont égales à 0.

(b) La courbe \mathcal{C}_f semble située en dessous de la courbe \mathcal{C}_g .

(c) L'écart entre les deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g semble maximal pour $x = 2$.

2. $g(x) - f(x) = e^{-x} - e^{-x} \cos(x) = (1 - \cos(x))e^{-x}$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ et $\cos(x) \leq 1$ donc $(1 - \cos(x)) \geq 0$; donc, pour tout x , $g(x) - f(x) \geq 0$ et donc la courbe \mathcal{C}_g est située au-dessus de la courbe \mathcal{C}_f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$; donc la courbe \mathcal{C}_g admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

• Pour tout x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et comme $e^{-x} > 0$, $-e^{-x} \leq e^{-x} \cos(x) \leq e^{-x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos(x) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la courbe \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. (a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0 ; +\infty[$ donc la fonction h est dérivable sur $[0 ; +\infty[$:

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) = -e^{-x} - (-e^{-x} \cos(x) + e^{-x}(-\sin(x))) = e^{-x}(-1 + \cos(x) + \sin(x))$$

On a vu dans la partie A que, pour tout réel θ , $\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$, donc

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x).$$

On peut donc en déduire que $h'(x) = e^{-x} \left[\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right]$.

(b)

• On se place dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

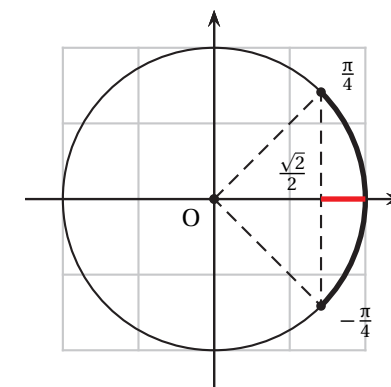
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$$



• On se place dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

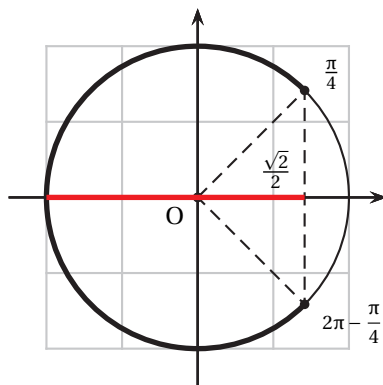
$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0$$



(c) $h(x) = g(x) - f(x) = e^{-x}(1 - \cos(x))$

$$h(0) = e^0(1 - \cos(0)) = 1(1 - 1) = 0$$

$$h(2\pi) = e^{-2\pi}(1 - \cos(2\pi)) = e^{-2\pi}(1 - 1) = 0$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)) = e^{-\frac{\pi}{2}}(1 - 0) = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,21$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
e^{-x}	+		+
$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$	+	0	-
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	0	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	0

5. On admet que, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction H définie par $H(x) = \frac{1}{2}e^{-x}[-2 + \cos(x) - \sin(x)]$

est une primitive de la fonction h . On note \mathcal{D} le domaine du plan délimité par les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.

On a démontré dans la question 2. que, pour tout x , $g(x) - f(x) \geq 0$ donc on peut en déduire que $h(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

Donc l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} , exprimée en unités d'aire, est donnée par : $\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} h(x) dx$

On sait que la fonction h est une primitive de la fonction h , donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{2\pi} h(x) dx = H(2\pi) - H(0) = \left[\frac{1}{2}e^{-x}[-2 + \cos(x) - \sin(x)] \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\pi}[-2 + \cos(2\pi) - \sin(2\pi)] - \frac{1}{2}e^0[-2 + \cos(0) - \sin(0)] = \frac{1}{2}e^{-2\pi}[-2 + 1] - \frac{1}{2}[-2 + 1] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi} \text{ unité d'aire} \end{aligned}$$

EXERCICE 20 énoncé Amérique du Nord 2016

$$1. \quad 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2. La distance maximale entre O et un point quelconque d'un côté du carré est 4.

Un point M_n sort du carré si $OM_n > 4$

$$\text{or } OM_n = |z_n| = (\sqrt{2})^n$$

$$OM_n > 4 \iff (\sqrt{2})^n > 4$$

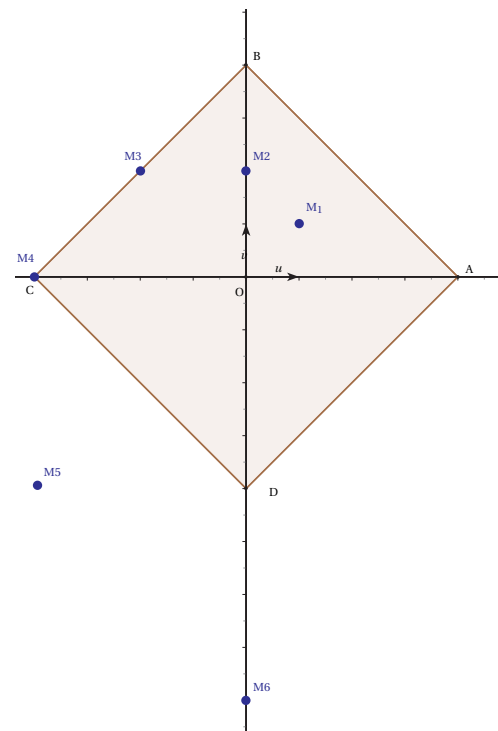
$$\iff n \ln(\sqrt{2}) > \ln(2^2)$$

$$\iff n > \frac{2 \ln(2)}{\frac{1}{2} \ln(2)}$$

$$\iff n > 4$$

Donc pour $n_0 = 5$, pour tout entier

$n \geq n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD



EXERCICE 21 énoncé Amérique du Sud 2016

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3i$.

Proposition vraie

- Soit B le point d'affixe $b = 4$ et C le point d'affixe $c = -2i$; on appelle M le point d'affixe z .

$$|z-4| = |z+2i| \iff |z-b| = |z-c| \iff MB = MC$$

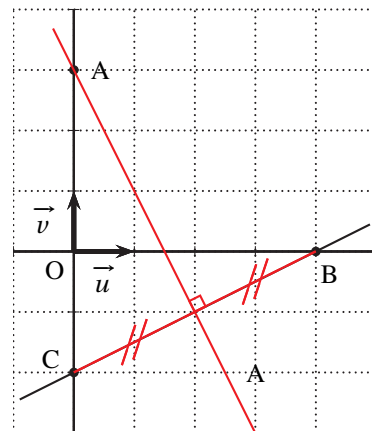
Donc l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est la médiatrice Δ du segment $[BC]$.

- On appelle a l'affixe du point A.

$$AB = |b-a| = |4-3i| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$AC = |c-a| = |-2i-3i| = |-5i| = 5$$

Donc le point A est à égale distance de B et de C ; il appartient donc à la droite Δ , médiatrice de $[BC]$.



L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est donc la droite médiatrice du segment $[BC]$ et cette droite passe par le point A d'affixe $3i$.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)(z^2-8z+25) = 0$ où z appartient à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition vraie

- L'équation $z-1 = 0$ a pour solution le nombre $a = 1$ affixe d'un point appelé A.

- On résout dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 8z + 25 = 0$; $\Delta = 64 - 100 = -36$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées $b = \frac{8+6i}{2} = 4+3i$ et $c = 4-3i$.

Ces deux nombres complexes b et c sont les affixes de deux points qu'on appelle B et C.

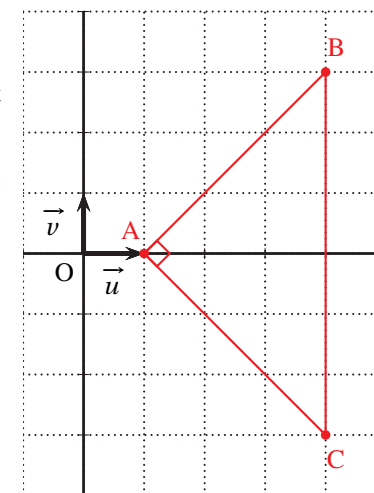
- L'équation (E) a donc trois solutions qui sont les affixes des trois points A, B et C.

$$AB^2 = |b-a|^2 = |4+3i-1|^2 = |3+3i|^2 = 9+9 = 18$$

$$AC^2 = |c-a|^2 = |4-3i-1|^2 = |3-3i|^2 = 9+9 = 18$$

$$BC^2 = |c-b|^2 = |4-3i-4-3i|^2 = |-6i|^2 = 36$$

- $18+18=36$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.



Donc les points du plan dont les affixes sont les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\frac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $(-\sqrt{3}+i)^8$.

Proposition fausse

Soit z le nombre complexe $-\sqrt{3}+i$; on cherche θ un argument de z .

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

On cherche donc θ tel que $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$; un argument de z est donc $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

D'après le cours, un argument de z^8 est $8\theta = \frac{40\pi}{6} \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Les nombres $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ ne sont pas congrus modulo 2π donc la proposition est fausse.

EXERCICE 22 énoncé Antilles 2016

Commun à tous les candidats

1. Notons A le point d'affixe 2. Soit M un point d'affixe z , alors $AM = |z - 2|$. Par conséquent :

$$M \in \mathcal{C} \iff |z - 2| = 1 \iff AM = 1.$$

L'ensemble \mathcal{C} est donc le cercle de centre A et de rayon 1.

2. Posons $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors $z - 2 = (x - 2) + iy$ et

$|z - 2| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$. Par conséquent,

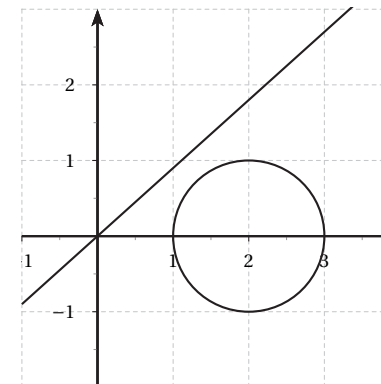
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} &\iff \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff (x - 2)^2 + y^2 = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff (x - 2)^2 + (ax)^2 = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff x^2 - 4x + 4 + a^2 x^2 = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff (1 + a^2)x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ et } y = ax \end{aligned}$$

• $(1 + a^2)x^2 - 4x + 3$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (1 + a^2) \times 3 = 4 - 12a^2$. On a donc :

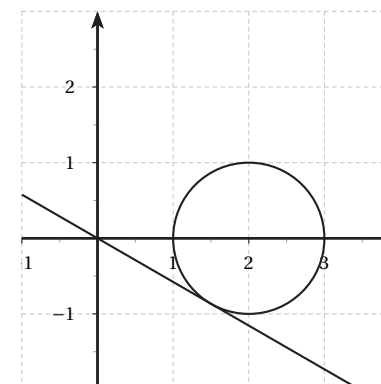
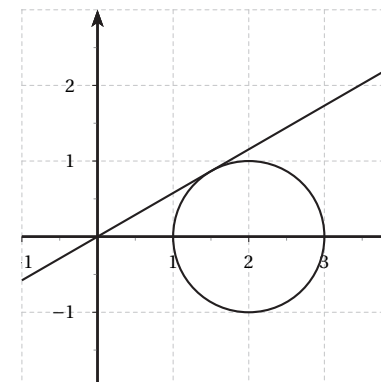
$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\iff 4 - 12a^2 > 0 \\ &\iff a^2 < \frac{1}{3} \\ &\iff -\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

On peut alors distinguer trois cas :

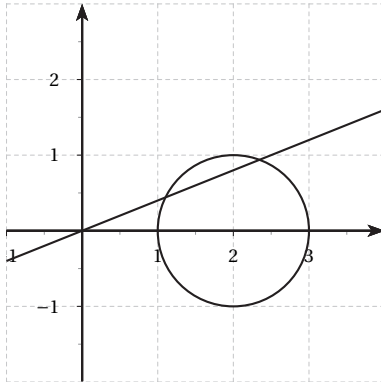
□ **Premier cas.** $a \in]-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty[$: aucun point d'intersection.



□ **Deuxième cas.** $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$: un seul point d'intersection (la droite et le cercle sont tangents).



□ **Troisième cas.** $a \in \left] -\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[$: deux points d'intersection.



EXERCICE 23 énoncé Centres Étrangers 2016

Partie A

1. $z_1 = \left(1 + \frac{1}{6}\right) e^{i\frac{2\pi}{6}} = \frac{7}{6} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{6} \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7}{12} + i\frac{7\sqrt{3}}{12}$:

$$z_1 = \frac{7}{12} + i\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

2. $z_0 = \left(1 + \frac{0}{6}\right) e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{6}} = e^{i \times 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 : z_0 = 1$

$z_6 = \left(1 + \frac{6}{6}\right) e^{i\frac{2 \times 6 \times \pi}{6}} = 2e^{i \times 2\pi} = 2(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2 : z_6 = 2$

3.

Soit H_1 le pied de la hauteur du triangle OM_0M_1 issue de M_1 . Dans le triangle rectangle OM_1H_1 , on a $\sin \widehat{M_0OM_1} = \frac{H_1M_1}{OM_1}$, soit

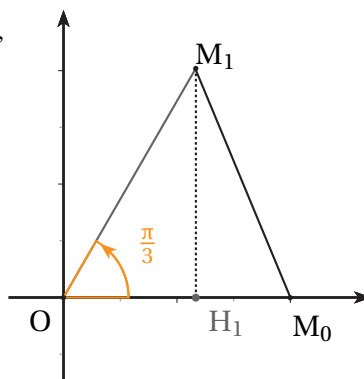
$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{H_1M_1}{\frac{7}{6}}$$

On en déduit :

$$H_1M_1 = \frac{7}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

L'aire du triangle OM_0M_1 est alors égale, en u.a, à

$$\frac{OM_0 \times H_1M_1}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$



Partie B

1.

$$OM_k = |z_{M_k}| = |z_k| = \left| \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right| = \left| 1 + \frac{k}{n} \right| \times \left| e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right| = 1 + \frac{k}{n}$$

2. Par hypothèse, on a : $z_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Puisque $1 + \frac{k}{n} > 0$, alors $\arg(z_k) = \frac{2k\pi}{n} [2\pi]$.

Par suite :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}\right) = \text{Arg}(z_k) = \frac{2k\pi}{n} [2\pi] \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \text{Arg}(z_{k+1}) = \frac{2(k+1)\pi}{n} [2\pi]$$

3.

$$\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \left(\overrightarrow{OM_k}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = -\frac{2k\pi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, notons H_{k+1} le pied de la hauteur issue du point M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} .

• Si $n = 2$, le triangle OM_0M_1 est plat : on a alors $M_1H_1 = 0$

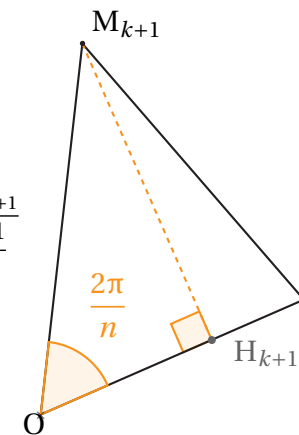
• Supposons $n \geq 3$:

Que H_{k+1} appartienne à la demi-droite $[OM_k)$ (si $n \geq 3$) ou non (si $n = 3$), on a :

$$\sin \frac{2\pi}{n} = \sin \left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \sin \widehat{H_{k+1}OM_{k+1}} = \frac{M_{k+1}H_{k+1}}{OM_{k+1}} = \frac{M_{k+1}H_{k+1}}{1 + \frac{k+1}{n}}$$

Finalement :

$$M_{k+1}H_{k+1} = \left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \times \sin \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$



4.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	5,731	6,848

5. Les deux lignes à compléter sont

L6 : Tant que $A < 7,2$

et

L13 : Afficher n *Remarque* : on obtient $n = 20$.

EXERCICE 24 énoncé **Liban 2016****Commun à tous les candidats**

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n .

On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A .

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

(a) Montrons que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{1}{2}i \times z_n + 5 - (4 + 2i) = \frac{1}{2}i \times z_n + 1 - 2i$.

Pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2}i \times u_n = \frac{1}{2}i(z_n - z_A) = \frac{1}{2}i(z_n - 4 - 2i) = \frac{1}{2}i \times z_n + 1 - 2i$.

Et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$.

(b) On va démontrer par récurrence que, pour tout n , la propriété $\mathcal{P}_n : \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$ est vraie.

• *Initialisation* : $u_0 = z_0 - z_A = -z_A = -4 - 2i$; pour $n = 0$, $\left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i) = \left(\frac{1}{2}i\right)^0 (-4 - 2i) = -4 - 2i$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité* : on suppose la propriété vraie au rang quelconque $p \leq 0$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2}i\right)^p (-4 - 2i)$; on va la démontrer au rang $p + 1$.

$$u_{p+1} = \frac{1}{2}i u_p = \frac{1}{2}i \times \left(\frac{1}{2}i\right)^p (-4 - 2i) = \left(\frac{1}{2}i\right)^{p+1} (-4 - 2i)$$

Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.

• La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

Pour tout entier naturel n , $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$

2. Démontrons que, pour tout entier naturel n , les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés.

Le vecteur $\overrightarrow{AM_n}$ a pour affixe $u_n = z_n - z_A$, et le vecteur $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ a pour affixe $u_{n+4} = z_{n+4} - z_A$.

Mais d'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4} (-4 - 2i)$ et $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$.

On en déduit que pour tout entier naturel n , $u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}i\right)^4 u_n$.

Mais $\left(\frac{1}{2}i\right)^4 = \frac{1}{16}$

On en déduit que pour tout entier naturel n , $u_{n+4} = \frac{1}{16} u_n$ et $\overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{16} \overrightarrow{AM_n}$

Ce qui prouve que, pour tout entier naturel n , les vecteurs sont colinéaires et par conséquent les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés.

EXERCICE 25 énoncé **Métropole septembre 2016**

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0 , où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}$.

1. (a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$.

$$z_1 = 1 - \frac{1}{z_0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad z_2 = 1 - \frac{1}{z_1} = 1 - 2 = -1; \quad z_3 = 1 - \frac{1}{z_2} = 1 - \frac{1}{-1} = 1 + 1 = 2;$$

ensuite on retrouve $z_4 = \frac{1}{2}$, $z_5 = -1$ et $z_6 = 2$.

(b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$.

$$z_1 = 1 - \frac{1}{i} = 1 + i; \quad z_2 = 1 - \frac{1}{z_1} = 1 - \frac{1}{1+i} = 1 - \frac{1-i}{1+1} = \frac{2-1+i}{2} = \frac{1+i}{2};$$

$$z_3 = 1 - \frac{1}{z_2} = 1 - \frac{1}{\frac{1+i}{2}} = 1 - \frac{2}{1+i} = \frac{1+i-2}{1+i} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+1+i+i}{1+1} = i = z_0;$$

ensuite on retrouve $z_4 = z_1 = 1 + i$, puis $z_5 = \frac{1+i}{2}$ et $z_6 = i$.

(c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.

Des résultats de la question précédente, on peut conjecturer que $z_{3n} = z_0$, pour $n \in \mathbb{N}$.

On démontre cette conjecture par récurrence sur n :

• **Initialisation** : on a bien $z_{3 \times 0} = z_0$.

• **Hérédité** : supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $z_{3p} = z_0$, alors

$$\begin{aligned} z_{3(p+1)} = z_{3p+3} &= 1 - \frac{1}{z_{3p+2}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{z_{3p+1}}} = 1 - \frac{z_{3p+1}}{z_{3p+1} - 1} = \frac{z_{3p+1} - 1 - z_{3p+1}}{z_{3p+1} - 1} \\ &= \frac{-1}{z_{3p+1} - 1} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{z_{3p}} - 1} = \frac{-1}{-\frac{1}{z_{3p}}} = z_{3p} = z_0. \end{aligned}$$

• **Conclusion** : on a donc démontré que $z_{3 \times 0} = z_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $z_{3p} = z_0$, alors $z_{3(p+1)} = z_0$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_0$.

2. Comme $2016 = 3 \times 672$, on a d'après la question précédente $z_{2016} = z_0 = 1 + i$.

3. On a $z_0 = z_1 \iff z_0 = 1 - \frac{1}{z_0}$ (avec $z_0 \neq 0$) ou encore

$$\begin{aligned} z_0^2 = z_0 - 1 &\iff z_0^2 - z_0 + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff \\ \left(z_0 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z_0 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 0 \iff \begin{cases} z_0 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ z_0 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc deux valeurs de z_0 pour lesquelles $z_1 = z_0$.

Dans ces deux cas, $z_2 = 1 - \frac{1}{z_1} = 1 - \frac{1}{z_0} = z_1$, et ainsi de suite, donc les suites (z_n) sont constantes.

EXERCICE 26 énoncé Nouvelle Calédonie novembre 2016

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$

défini par : $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$(a) \quad |a|^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 ; \text{ donc } |a| = 1$$

$$\text{On cherche le réel } \alpha \text{ tel que } \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ Donc } \alpha = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \text{ avec } k \text{ entier relatif}$$

La forme exponentielle de a est $e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

(b) On sait que, pour tout complexe z , $z\bar{z} = |z|^2$ donc $a\bar{a} = |a|^2 = 1$.

$$f(a) = a + \frac{1}{a} = a + \frac{\bar{a}}{a\bar{a}} = a + \bar{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

La forme algébrique de $f(a)$ est $-\sqrt{2}$.

2. On résout, dans l'ensemble des nombres complexes non nuls, l'équation $f(z) = 1$:

$$f(z) = 1 \iff z + \frac{1}{z} = 1 \iff \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{z}{z} \iff \frac{z^2 - z + 1}{z} = 0 \iff z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \text{ donc l'équation admet deux solutions conjuguées } z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Soit M un point d'affixe z du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.

(a) Le nombre complexe z s'écrit sous forme exponentielle : $|z|e^{i\theta}$.

Le point $M(z)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1 donc $OM = 1$ ce qui veut dire que $|z| = 1$.

Donc z peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$.

$$(b) \quad f(z) = z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

Les deux nombres complexes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont deux nombres complexes conjugués donc leur somme est un réel (le double de leur partie réelle).

Donc $f(z)$ est un réel.

4. On cherche $M(z)$ tel que $f(z)$ soit réel.

Posons $z = x + iy$:

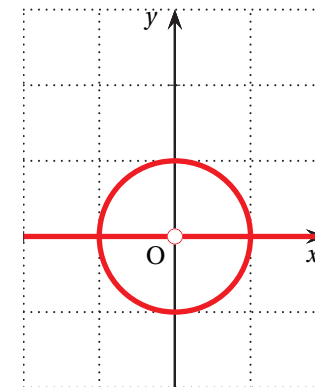
$$\begin{aligned} f(z) = z + \frac{1}{z} &= x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x(x^2 + y^2) + iy(x^2 + y^2) + x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2} + i\frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$f(z)$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, autrement dit si $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$.

Ce qui signifie que soit $y = 0$ soit $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

- $y = 0$ veut dire que la partie réelle de z est nulle donc que le point M se trouve sur l'axe des abscisses. Mais il ne faut pas oublier de retirer l'origine O du repère car z doit être non nul.
- $x^2 + y^2 - 1 = 0 \iff x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre O et de rayon 1.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel est la réunion de l'axe des abscisses privé du point O , et du cercle de centre O et de rayon 1.



EXERCICE 27 énoncé **Pondichéry 2016**

1. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OBJ rectangle en O donne :

$$BJ^2 = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \implies BJ = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$BK = BJ - KI = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

2. (a) L'affixe de A_2 a pour module 1 et pour argument $\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$. Donc $z_{A_2} = e^{i\frac{4\pi}{5}}$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad BA_2^2 &= |z_{A_2} - z_B|^2 = \left| e^{i\frac{4\pi}{5}} - (-1) \right|^2 = \left| e^{i\frac{4\pi}{5}} + 1 \right|^2 = \left| \cos \frac{4\pi}{5} + 1 + i \sin \frac{4\pi}{5} \right|^2 \\ &= \left(\cos \frac{4\pi}{5} + 1 \right)^2 + \sin^2 \frac{4\pi}{5} = \cos^2 \frac{4\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} + 1 + \sin^2 \frac{4\pi}{5} = 2 + 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) \end{aligned}$$

(c) D'après le logiciel de calcul formel, $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}(-\sqrt{5}-1)$ donc :

$$BA_2^2 = 2 + 2 \times \frac{1}{4}(-\sqrt{5}-1) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Donc } BA_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \text{ d'après le logiciel de calcul formel.}$$

On en déduit que $BA_2 = BK$.

3. Procédé de construction (voir figure ??) :

- Soit C le point de coordonnées $(0; 1)$. La médiatrice de $[OC]$ coupe l'axe des ordonnées au point J de coordonnées $(0; \frac{1}{2})$.

On place le point B sur l'axe des abscisses, d'abscisse négative tel que $OB = 2OJ$, on construit $[BJ]$ et le cercle \mathcal{C} centré en J passant par O donc de rayon $\frac{1}{2}$;

- on obtient le point K à l'intersection du cercle \mathcal{C} et du segment $[BJ]$;
- le cercle de centre B de rayon BK coupe le cercle unitaire aux points A_2 et A_3 ;
- le cercle de centre A_2 passant par A_3 recoupe le cercle unitaire en A_1 ;
- le cercle de centre A_3 passant par A_2 recoupe le cercle unitaire en A_4 ;
- le point A_0 est le point d'affixe 1.