

**COLLECTION  
PARABOLE**

**BAC  
C  
1<sup>ère</sup> édition**

46901 15 99

# MATHÉMATIQUES

IMPRIMERIE EXCELLENCE  
TÉL: 46 97 17 51

**Sujets corrigés de 2005 à 2019**  
**Session Normale**  
+  
**Session Complémentaire**  
**élaboré**

**Par Ahmed Jeilany O Youmbabe**

Professeur au Lycée de Garçons II

Dépot Légal N°: 2145 / 2019

+ (222) 22 05 69 62

41 81 31 82

f | Eljeilany.youmbabe.3

E-MAIL: medjil1972@gmail.com

## Sommaire

|             |                     |                       | Pages      |
|-------------|---------------------|-----------------------|------------|
|             | <b>Sommaire</b>     |                       | <b>1</b>   |
|             | <b>Préface</b>      |                       | <b>2</b>   |
|             | <b>Baccalauréat</b> |                       |            |
| <b>2019</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>3</b>   |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>11</b>  |
| <b>2018</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>18</b>  |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>27</b>  |
| <b>2017</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>35</b>  |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>44</b>  |
| <b>2016</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>52</b>  |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>60</b>  |
| <b>2015</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>67</b>  |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>77</b>  |
| <b>2014</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>85</b>  |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>92</b>  |
| <b>2013</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>100</b> |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>109</b> |
| <b>2012</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>116</b> |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>124</b> |
| <b>2011</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>130</b> |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>138</b> |
| <b>2010</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>144</b> |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>151</b> |
| <b>2009</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>158</b> |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>165</b> |
| <b>2008</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>172</b> |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>179</b> |
| <b>2007</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>186</b> |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>194</b> |
| <b>2006</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>202</b> |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>211</b> |
| <b>2005</b> | <b>session</b>      | <b>normale</b>        | <b>220</b> |
|             |                     | <b>complémentaire</b> | <b>229</b> |

## Préface

Ce manuel comprend les principaux thèmes corrigés pour le baccalauréat série scientifique « D » et ce, pour les années 2005 à 2019 y compris la session normale et complémentaire.

En plus de l'énoncé du sujet le thème est toujours suivi de sa correction afin que l'élève puisse bénéficier de solutions relativement facile à comprendre.

Aussi les réponses aux questions ne sont pas directes mais largement justifiées et commentées, ainsi ces questions sont incarnées dans les tableaux « Questions à choix multiples » justifiées afin que l'élève parvient à appréhender pourquoi elles ont été choisies, tel est l'intérêt significatif de ce manuel que nous proposons pour nos potentiels candidats au baccalauréat.

*Ahmed Eljeilany O Youmbabe*

## Bac 2019 session normale

### Énoncé

**Exercice N°1 :**

1. On considère dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation (E) :  $7x - 5y = 1$ .

a. Justifie que le couple (3 ; 4) est une solution de (E) puis résoudre (E).

b. Montrer que si (x ; y) est une solution de (E) alors  $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ y \equiv 4[7] \end{cases}$

2. Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs A tels que  $\begin{cases} A \equiv 4[5] \\ A \equiv 3[7] \end{cases}$

a. Soit A un élément de S. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers (x ; y) tel que  $A = 7x + 3 = 5y + 4$  où (x ; y) est une solution de (E).

b. En déduire que  $A \in S$  si et seulement si  $A = 24 + 35k$ .

c. Soit n et a deux entiers naturels ( $0 < n < 9$ ) et B un entier qui s'écrit, en base n, sous la forme  $\overline{374}_n$ . Déterminer n puis en déduire l'écriture décimale de l'entier B sachant qu'il appartient à S.

**Exercice N°2 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O;  $\vec{u}$ ;  $\vec{v}$ ).

1. Pour tout nombre complexe z on pose :  $P(z) = z^3 - (5 + 4i)z^2 + (7 + 10i)z + 5 - 10i$ .

Calculer P(i) puis déterminer les solutions de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $\text{Re}(z_0) < \text{Re}(z_1) < \text{Re}(z_2)$ .

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$ .

a. Déterminer la nature du triangle ABC.

b. Soit G le barycentre du système  $\{(A; 13); (B; -3); (C; 2)\}$ . Déterminer l'affixe de G.

c. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tels que :  $13MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 12$ .

3. On considère l'hyperbole H de centre G qui passe par C et dont A est un sommet.

a. Déterminer le 2<sup>ème</sup> sommet de H.

b. Vérifier que l'équation de H peut s'écrire sous la forme  $x^2 - 3(y - 2)^2 = -3$ .

c. Donner l'équation réduite de H puis déterminer ses foyers, ses asymptotes et son excentricité et la construire.

**Exercice N°3 :**

On considère la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = x^3 - x \ln x$ , si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ .

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ).

1. a. Étudier la continuité de f et la dérivabilité de f à droite de 0.

b. Calculer et interpréter graphiquement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

2. a. Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$  et en montrer que (C) admet un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.

b. Étudier les variations de f' et en déduire le signe de f'(x).

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. a. Montrer que f réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Étudier la position relative entre (C) et (C') et justifier qu'elles se coupent en trois points dont l'un est d'abscisse  $\alpha$  avec  $0,45 \leq \alpha \leq 0,46$  ((C') étant la courbe de la réciproque  $f^{-1}$  de f).

4. Tracer dans le repère orthonormé (O;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ) les courbes (C) et (C').

5. a. À l'aide d'une intégration par parties déterminer la primitive F qui s'annule en 1 de la fonction f sur  $]0; +\infty[$ .

b. Exprimer en fonction de n et  $\alpha$  les intégrales  $K = \int_{\alpha}^1 f(t)dt$  et  $I(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(n)$ .

c. Déduire l'aire S du domaine plan formé par les courbes (C) et (C').

**Exercice N°4 :**

On considère un triangle équilatéral direct ABC de côté a ( $a > 0$ ). Soient D, E et F les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]. On considère le carré direct AGHD de centre O. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [EC], [GH] et [AD].

1. Faire une figure illustrant les données qu'on complètera au fur et à mesure.

2. a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en C et E en D.

b. Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

3. a. Montrer qu'il existe une unique rotation r transformant H en B et D en E. Préciser son angle. Soit  $\Omega$  son centre.

b. Montrer que  $\Omega$  appartient à la droite (CF) et au cercle de diamètre [AB].

c. En utilisant les angles  $(\overline{D\Omega}; \overline{DE})$  et  $(\overline{DE}; \overline{DG})$  montrer que  $\Omega \in (DG)$ . Placer  $\Omega$ .

4. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S et une seule qui transforme B en D et D en I.

b. Soit S' la similitude directe de centre A de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ . Déterminer S'(B) et S'(D). Caractériser S.

5. On considère la suite des points  $(M_n)$  définie par :  $M_0 = B$  et  $M_{n+1} = S(M_n)$ .

a. Démontrer que le triangle  $AM_nM_{n+1}$  est rectangle.

b. Déterminer la nature du triangle  $ABM_{2019}$  et calculer son aire en fonction de a.

**Exercice N°5 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ .

1. Etudier les variations de  $f$  et tracer sa courbe  $\Gamma$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $0,7 < \alpha < 0,8$ .
3. Soit  $A$  l'aire du domaine délimité par  $\Gamma$ ,  $(Ox)$  et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = \ln 3$ .

a. Montrer que  $A = \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ .

b. En posant  $t = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ , montrer que  $A = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{2dt}{t^2-1}$ .

c. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{2}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$  et en déduire la valeur de  $A$ .

4. Soit  $(I_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $I_n = \int_{\alpha}^{\ln 3} (f(t))^{2n} dt$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n I_k = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$ .

a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  que  $\frac{\ln 3 - \alpha}{2^{2n}} \leq I_n \leq (\ln 3 - \alpha)\alpha^{2n}$  puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

b. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = (f(x))^3 - f(x) \dots (1)$ .

c. En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 1 + 2\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$  puis en déduire  $I_1$ .

5. a. Montrer à l'aide de l'égalité (1) que  $\forall n \in \mathbb{N}^*; I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2^{2n}} - \alpha^{2n} \right)$ .

b. Montrer que  $I_{n+1} = \ln \left( \frac{3e^{-n}}{4\alpha^2} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^{2k}} - \alpha^{2k} \right)$ .

c. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \alpha^{2k} - \frac{1}{2^{2k}} \right) = \ln \left( \frac{3}{4(1-\alpha^2)} \right)$ .

**Solution****Exercice N°1 :**

1. On considère dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation (E) :  $7x - 5y = 1$ .

a. Justifie que le couple  $(3; 4)$  est une solution de (E) puis résoudre (E) :

• Vérification :

$$7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 21 - 20 = 1.$$

• Résolution :

$$\text{On a : } \begin{cases} 7x - 5y = 1 \\ 7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow 7(x-3) - 5(y+4) = 0 \Rightarrow 7(x-3) = 5(y+4) \Rightarrow 7 \mid 5(y+4).$$

$$\begin{cases} 7 \mid 5(5x-1) \text{ alors d'après Gauss } 7 \mid y+4 \Rightarrow y+4 = 7k \Rightarrow y = 4 + 7k \\ 7 \wedge 5 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Or } 7(x-3) = 5(y+4) \Rightarrow 7(x-3) = 5 \cdot 7k \Rightarrow x-3 = 5k \Rightarrow x = 3 + 5k.$$

Réciproquement tout couple  $(3 + 5k; 4 + 7k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$  est solution de l'équation (E).

D'où  $S = \{(3 + 5k; 4 + 7k); \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$ .

b. Montrer que si  $(x; y)$  est une solution de (E) alors  $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ y \equiv 4[7] \end{cases}$  :

$$(x; y) \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 3 + 5k \\ y \equiv 4 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \equiv 5k \\ y - 4 \equiv 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 3[5] \\ y \equiv 4[7] \end{cases}$$

2. Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble  $S$  des entiers relatifs  $A$  tels que  $\begin{cases} A \equiv 4[5] \\ A \equiv 3[7] \end{cases}$

a. Soit  $A$  un élément de  $S$ . Démontrer qu'il existe un couple d'entiers  $(x; y)$  tel que  $A = 7x + 3 = 5y + 4$  où  $(x; y)$  est une solution de (E) :

$$A \in S \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv 4[5] \\ A \equiv 3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists y \in \mathbb{Z}; A = 4 + 5y \\ \exists x \in \mathbb{Z}; A = 3 + 7x \end{cases} \Rightarrow 3 + 7x = 4 + 5y \Rightarrow 7x - 5y = 1. \text{ Donc le couple } (x; y) \text{ est une solution de (E) :}$$

b. En déduire que  $A \in S$  si et seulement si  $A = 24 [35]$  :

$A \in S$  alors d'après 2.a)  $\exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $A = 7x + 3 = 5y + 4$  où  $(x; y)$  est une solution de (E).

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}; A = 7(3 + 5m) + 3 = 24 + 35m \Rightarrow A = 24 [35].$$

c. Soit  $n$  et  $a$  deux entiers naturels ( $0 < n < 9$ ) et  $B$  un entier qui s'écrit, en base  $n$ , sous la forme  $\overline{374a}$ . Déterminer  $n$  puis en déduire l'écriture décimale de l'entier  $B$  sachant qu'il appartient à  $S$  :

Puisque  $7$  est un chiffre du système de base  $n$  alors  $n > 7$  et comme  $n < 9$  alors  $n = 8$ .

Donc on a  $B = \overline{374a} = a + 4 \times 8 + 7 \times 8^2 + 3 \times 8^3 = a + 32 + 448 + 1536 = 2016 + a$ . Comme  $a$  est un chiffre du système de base 8 alors  $0 \leq a \leq 7 \Rightarrow 2016 \leq B \leq 2023 \Rightarrow 2016 \leq 35m + 24 \leq 2023 \Rightarrow \frac{1992}{35} \leq m \leq \frac{1999}{35} \Rightarrow m = 57 \Rightarrow B = 2019$ .

**Exercice N°2 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (5 + 4i)z^2 + (7 + 10i)z + 5 - 10i$ .

Calculer  $P(i)$  puis déterminer les solutions de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $\text{Re}(z_0) < \text{Re}(z_1) < \text{Re}(z_2)$  :

$$P(i) = i^3 - (5 + 4i)i^2 + (7 + 10i)i + 5 - 10i = -i + 5 + 4i + 7i - 10 + 5 - 10i = 10i - 10i - 5 + 5 = 0.$$

$i$  est une racine de du polynôme  $P$ , alors il existe deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tel que :  $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$ .

$$\Rightarrow P(z) = (z - i)(z^2 - (5 + 3i)z + 10 + 5i).$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z - i)(z^2 - (5 + 3i)z + 10 + 5i) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z - i = 0 \\ z^2 - (5 + 3i)z + 10 + 5i = 0 \end{cases}$$

$$\bullet z - i = 0 \Rightarrow z = i$$

$$\bullet z^2 - (5 + 3i)z + 10 + 5i = 0 :$$

$$\Delta = \frac{(-5 - 3i)^2 - 4 \times 1(10 + 5i)}{4} = \frac{25 - 9 + 30i - 40 - 20i}{4} = \frac{-24 + 10i}{4} = \frac{1 + 5i}{2}$$

$$\Rightarrow z = \frac{5 + 3i + 1 + 5i}{2} = 3 + 4i \text{ et } z = \frac{5 + 3i - 1 - 5i}{2} = 2 - i.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  est  $\{i; 3 + 4i; 2 - i\}$ .

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$ .

$$z_0 = z_A = i; z_1 = z_B = 2 - i \text{ et } z_2 = z_C = 3 + 4i.$$

a. Déterminer la nature du triangle ABC :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2 - i - i}{3 + 4i - i} = \frac{2 - 2i}{3 + 3i} = \frac{2(1 - i)}{3(1 + i)} = \frac{2(1 - i)(1 - i)}{3(1 + i)(1 - i)} = \frac{2(-2i)}{3 \times 2i} = \frac{-2}{3}i$$

Donc le triangle ABC est rectangle en A non isocèle.

b. Soit G le barycentre du système  $\{(A; 13); (B; -3); (C; 2)\}$ . Déterminer l'affixe de G :

$$z_G = \frac{13z_A - 3z_B + 2z_C}{12} = \frac{13i - 6 + 3i + 6 + 8i}{12} = \frac{24i}{12} = 2i.$$

c. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tels que :  $13MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 12$  :

$$\text{Pour tout point M du plan, on a : } 13MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 12MG^2 + 13GA^2 - 3GB^2 + 2GC^2$$

$$\text{Or } GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |i - 2i|^2 = |-i|^2 = 1; GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |2 - i - 2i|^2 = |2 - 3i|^2 = 13 \text{ et}$$

$$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |3 + 4i - 2i|^2 = |3 + 2i|^2 = 13.$$

$$\Rightarrow 13GA^2 - 3GB^2 + 2GC^2 = 13 \times 1 - 3 \times 13 + 2 \times 13 = 39 - 39 + 26 = 26 \Rightarrow 13MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 12 \Rightarrow 12MG^2 = 12 \Rightarrow MG^2 = 1 \Rightarrow MG = AG.$$

D'où  $\Gamma = C_{(G; AG)}$

3. On considère l'hyperbole H de centre G qui passe par C et dont A est un sommet.

a. Déterminer le 2<sup>ème</sup> sommet de H :

Le 2<sup>ème</sup> sommet de H est le symétrique A' de A par rapport à G, son affixe est  $3i$ .

b. Vérifier que l'équation de H peut s'écrire sous la forme  $x^2 - 3(y - 2)^2 = -3$  :

$$\text{L'axe focal de H est (AG) qui est } (O; \vec{v}). \text{ L'équation réduite de H est de la forme : } \frac{(x - x_G)^2}{a^2} - \frac{(y - y_G)^2}{b^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{(y - 2)^2}{b^2} = -1.$$

$$\text{La valeur de } b = AG = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{(y - 2)^2}{1} = -1 \Leftrightarrow x^2 - a^2(y - 2)^2 = -a^2 \text{ et comme } C \in H \text{ alors les coordonnées de C vérifient}$$

$$\text{l'équation de H } \Rightarrow 3^2 - a^2(4 - 2)^2 = -a^2 \Rightarrow 9 - 4a^2 = -a^2 \Rightarrow -3a^2 = -9 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}.$$

Donc l'équation de H s'écrit sous la forme :  $x^2 - 3(y - 2)^2 = -3$ .

c. Donner l'équation réduite de H puis déterminer ses foyers, ses asymptotes et son excentricité et la construire :

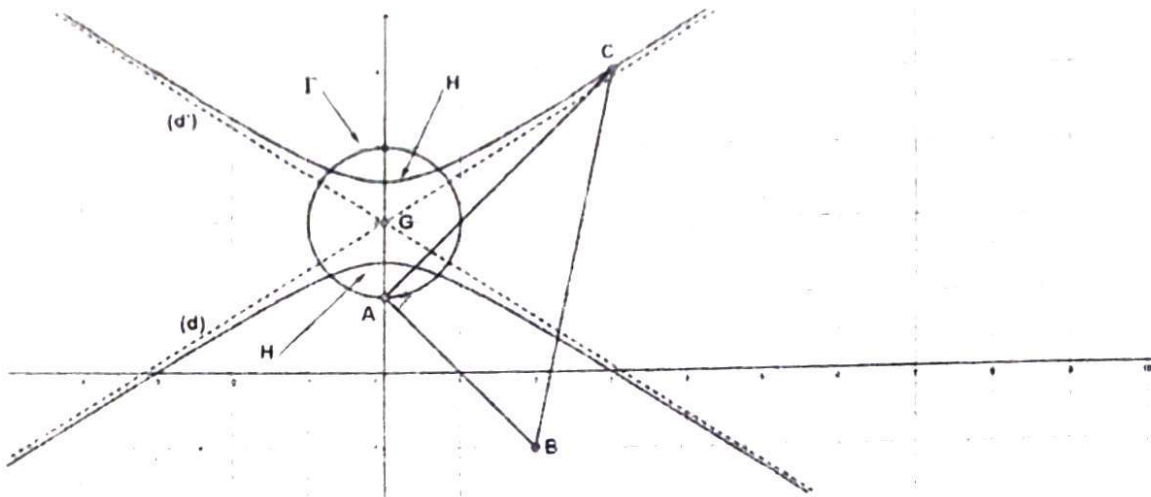
$$\bullet \text{L'équation réduite de H est } \frac{x^2}{3} - \frac{(y - 2)^2}{1} = -1.$$

$$\text{La demi-distance focale est } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\bullet \text{Les foyers de H sont } F(x_0; y_0 + c) \Rightarrow F(0; 2 + 2) \Rightarrow F(0; 4) \text{ et } F'(x_0; y_0 - c) \Rightarrow F'(0; 2 - 2) \Rightarrow F'(0; 0) = O.$$

$$\bullet \text{Les équations des asymptotes (d) et (d')} \text{ sont : (d) : } y - 2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x \text{ et (d')} : y - 2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow y = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

$$\bullet \text{L'excentricité de H est } e = \frac{c}{b} = \frac{2}{1} = 2.$$



**Exercice N°3 :**

On considère la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = x^3 - x \ln x$ , si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ .

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Etudier la continuité de  $f$  et la dérivabilité de  $f$  à droite de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 - 0 = 0 = f(0).$$

Donc  $f$  est continue à droite de 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Donc  $f$  n'est pas dérivabilité à droite de 0.

b. Calculer et interpréter graphiquement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty \times 1 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty \times 1 = +\infty.$$

2. a. Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$  et en montrant que (C) admet un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées :

$$f'(x) = 3x^2 - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = 3x^2 - 1 - \ln x \text{ et } f''(x) = 6x - \frac{1}{x} = \frac{6x^2 - 1}{x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

|          |   |                      |           |
|----------|---|----------------------|-----------|
| $x$      | 0 | $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | - | 0                    | +         |

Donc (C) admet un point d'inflexion au point A d'abscisse  $\frac{1}{\sqrt{6}}$  et d'ordonnée  $f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{6\sqrt{6}} + \frac{\ln 6}{2\sqrt{6}} = \frac{1+3\ln 6}{2\sqrt{6}}$

b. Etudier les variations de  $f'$  et en déduire le signe de  $f'(x)$  :

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

|          |   |                      |           |
|----------|---|----------------------|-----------|
| $x$      | 0 | $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | - | 0                    | +         |
| $f'(x)$  |   | $\frac{-1+\ln 6}{2}$ |           |

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{-1 + \ln 6}{2}$$

Donc  $\forall x > 0 ; f'(x) \geq \frac{-1+\ln 6}{2} > 0$

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +         |
| $f(x)$  | 0 | $+\infty$ |

3. a. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera :

$f$  est continue et strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  alors elle réalise une bijection l'intervalle  $J$  qui est lui-même.

b. Etudier la position relative entre (C) et (C') et justifier qu'elles se coupent en trois points dont l'un est d'abscisse  $\alpha$  avec

$0,45 \leq \alpha \leq 0,46$  ((C') étant la courbe de la réciproque  $f^{-1}$  de  $f$ ) :

•  $f(0) = 0$  alors le point O est un point commun pour (C) et (C').

•  $\forall x > 0, f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x^3 - x \ln x - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - \ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \ln x - 1 = 0$

Soit  $g(x) = x^2 - \ln x - 1 \Rightarrow g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} = \frac{2(x^2 - \frac{1}{2})}{x} = \frac{2(x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}})}{x}$

Donc le signe de  $g'(x)$  est celui de  $x - \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1 + \ln 2}{2} < 0$$

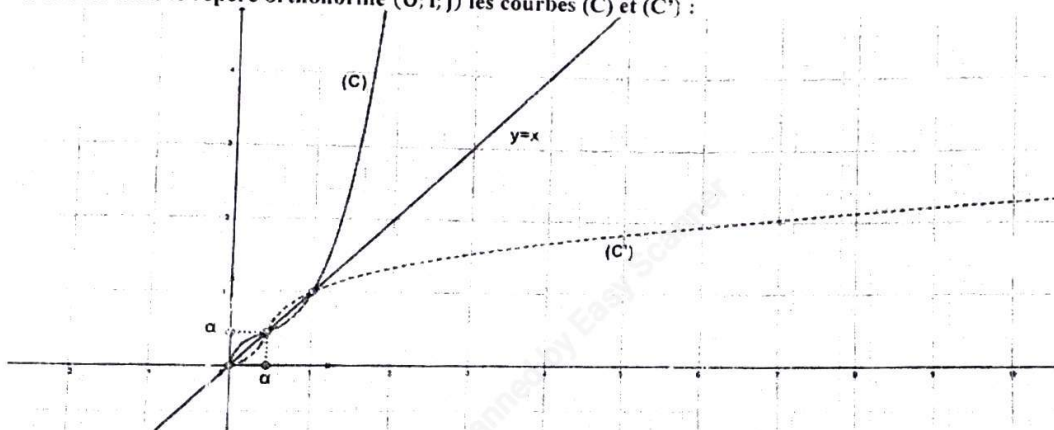
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - \ln x - 1) = 0 - (-\infty) - 1 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \times 1 = +\infty.$$

|         |           |                        |           |
|---------|-----------|------------------------|-----------|
| x       | 0         | $\frac{1}{\sqrt{2}}$   | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | -                      | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $\frac{-1 + \ln 2}{2}$ | $+\infty$ |

Donc d'après le tableau de variation ci-dessus l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $]0; +\infty[$  deux solutions l'une est 1 car  $g(1) = 0$ . Soit  $\alpha$  l'autre solution. On a  $g(0,45) \times g(0,46) < 0$ .

4. Tracer dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  les courbes (C) et (C') :



5. a. A l'aide d'une intégration par parties déterminer la primitive  $F$  qui s'annule en 1 de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  : Cette primitive est définie par :  $\forall x \in ]0; +\infty[, F(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

Donc on a :  $F(x) = \int_1^x (t^3 - t \ln t) dt = \int_1^x t(t^2 - \ln t) dt$ .

$$u(t) = t^2 - \ln t \quad \begin{cases} u'(t) = 2t - \frac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 2t - \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$F(x) = \left[ \frac{t^2}{2} (t^2 - \ln t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2} \left( 2t - \frac{1}{t} \right) dt = \left[ \frac{t^2}{2} (t^2 - \ln t) \right]_1^x - \int_1^x \left( t^3 - \frac{1}{2} t \right) dt = \left[ \frac{t^2}{2} (t^2 - \ln t) \right]_1^x - \left[ \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{4} \right]_1^x$$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \ln x$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \ln x.$$

b. Exprimer en fonction de  $n$  et  $\alpha$  les intégrales  $K = \int_{\alpha}^1 f(t) dt$  et  $I(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t) dt$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(n)$  :

$$K = \int_{\alpha}^1 f(t) dt = F(1) - F(\alpha) = -F(\alpha) = -\frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha.$$

$$\text{Or } I(n) = \alpha \Rightarrow \alpha^3 - \alpha \ln \alpha = \alpha \Rightarrow \alpha \ln \alpha = \alpha^3 - \alpha \Rightarrow \alpha^2 \ln \alpha = \alpha^4 - \alpha^2 \Rightarrow K = -\frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^4 - \alpha^2}{2} = \frac{\alpha^4 + \alpha^2 - 2\alpha^4 + 2\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^4 - 3\alpha^2 + 2}{4}$$

$$\text{D'où } K = \frac{\alpha^4 - 3\alpha^2 + 2}{4}$$

$$I(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t) dt = F(\alpha) - F\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{-\alpha^4 + 3\alpha^2 - 2}{4} - \left( \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{4n^2} + \frac{\ln n}{2n^2} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow I(n) = \frac{-\alpha^4 + 3\alpha^2}{4} - \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{4n^2} - \frac{\ln n}{2n^2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{-\alpha^4 + 3\alpha^2}{4} - \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{4n^2} - \frac{\ln n}{2n^2} \right) = \frac{-\alpha^4 + 3\alpha^2}{4} \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{4n^4} - \frac{1}{4n^2} - \frac{\ln n}{2n^2} \right) = 0$$

c. Déduire l'aire  $S$  du domaine plan formé par les courbes  $(C)$  et  $(C')$  :  
Le domaine demandé est symétrique par rapport à la droite d'équation  $y=x$ .

$$S = 2 \int_0^{\alpha} (f(x) - x) dx + 2 \int_{\alpha}^1 (x - f(x)) dx$$

$$\begin{aligned} \bullet 2 \int_0^{\alpha} (f(x) - x) dx &= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} (f(x) - x) dx = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( I(n) - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^{\alpha} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( I(n) - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{2n^2} \right) \\ &= 2 \left( \frac{-\alpha^4 + 3\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2} \right) = 2 \int_0^{\alpha} (f(x) - x) dx = \frac{-\alpha^4 + \alpha^2}{2} \end{aligned}$$

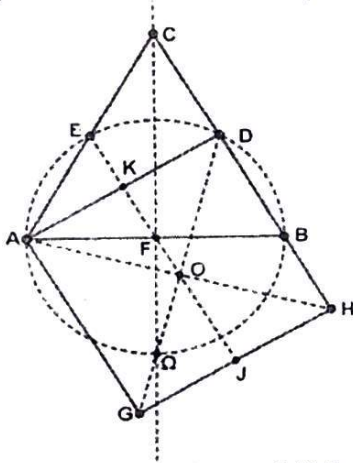
$$\bullet 2 \int_{\alpha}^1 (x - f(x)) dx = 2 \int_{\alpha}^1 x dx - 2 \int_{\alpha}^1 f(x) dx = 2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^1 - 2K = 1 - \alpha^2 - \frac{\alpha^4 - 3\alpha^2 + 2}{2} = \frac{-\alpha^4 + \alpha^2}{2}$$

$$\text{Donc } S = 2 \int_0^{\alpha} (f(x) - x) dx + 2 \int_{\alpha}^1 (x - f(x)) dx = \frac{-\alpha^4 + \alpha^2}{2} + \frac{-\alpha^4 + \alpha^2}{2} = \alpha^2 - \alpha^4.$$

#### Exercice N°4 :

On considère un triangle équilatéral direct  $ABC$  de côté  $a$  ( $a > 0$ ). Soient  $D, E$  et  $F$  les milieux respectifs des côtés  $[BC], [CA]$  et  $[AB]$ . On considère le carré direct  $AGHD$  de centre  $O$ . Soient  $I, J$  et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[EC], [GH]$  et  $[AD]$ .

1. Faire une figure illustrant les données qu'on complètera au fur et à mesure :



2. a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $f$  qui transforme  $A$  en  $C$  et  $E$  en  $D$  :

$f : \begin{cases} A \rightarrow C \\ E \rightarrow D \end{cases}$  et comme  $AE = CD = \frac{a}{2}$  alors il existe un antidéplacement  $f$  tel que  $f(A) = C$  et  $f(E) = D$ .

b. Montrer que  $f$  est une symétrie glissante et donner sa forme réduite :

- $f$  n'est pas une réflexion car  $\text{Med}[AC] \neq \text{Med}[ED]$ , donc  $f$  est une symétrie glissante.
- L'axe de  $f$  passe par  $E$  milieu de  $[AC]$  et par le milieu de  $[ED]$ , donc l'axe de  $f$  est  $(ED)$ .
- Comme  $E$  est un point de l'axe et  $f(E) = D$  alors le vecteur de  $f$  est  $\vec{ED}$ .

D'où la forme réduite de  $f : f = S_{ED} \circ t_{\vec{ED}} = t_{\vec{ED}} \circ S_{ED}$

3. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  transformant  $H$  en  $B$  et  $D$  en  $E$ . Préciser son angle. Soit  $\Omega$  son centre :

$r : \begin{cases} H \rightarrow B \\ D \rightarrow E \end{cases}$  et comme  $AD = BE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  et  $\vec{HD} \neq \vec{BE}$  alors la rotation  $r$  existe et unique.

L'angle de  $r$  est  $\theta = (\vec{HD}; \vec{BE}) = (\vec{BC}; \vec{BE}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ . D'où  $r = r_{(\Omega; \frac{\pi}{6})}$

b. Montrer que  $\Omega$  appartient à la droite  $(CF)$  et au cercle de diamètre  $[AB]$  :

•  $r : D \rightarrow E \Rightarrow \Omega \in \text{Med}[ED] = (CF)$  car  $\begin{cases} CD = CE \\ FD = FE \end{cases}$

•  $\begin{cases} (\vec{\Omega D}; \vec{DE}) = \frac{\pi}{6} [2\pi] \\ (\vec{AD}; \vec{AE}) = \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \Omega, A, D \text{ et } E \text{ sont cocycliques, or le cercle circonscrit au triangle } ADE \text{ est de diamètre } [AB].$

c. En utilisant les angles  $(\vec{D\Omega}; \vec{DE})$  et  $(\vec{DE}; \vec{D\Omega})$  montrer que  $\Omega \in (DG)$ . Placer  $\Omega$  :

$$(\vec{D\Omega}; \vec{D\Omega}) = (\vec{D\Omega}; \vec{DE}) + (\vec{DE}; \vec{D\Omega}) = -\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 0 [2\pi] \Rightarrow \Omega \in (DG).$$

D'où  $\Omega$  est point d'intersection des droites  $(CF)$  et  $(DG)$ . ( Voir la construction )

4. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $S$  et une seule qui transforme  $B$  en  $D$  et  $D$  en  $I$  :

Comme  $B \neq D$  et  $D \neq I$  alors qu'il existe une unique similitude directe  $S$  et une seule qui transforme  $B$  en  $D$  et  $D$  en  $I$ .

b. Soit  $S'$  la similitude directe de centre  $A$  de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ . Déterminer  $S'(B)$  et  $S'(D)$ . Caractériser  $S$  :

• Le triangle  $ABD$  est rectangle en  $D$  et  $(\vec{AB}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AD}{AB} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (\vec{AB}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow S'(B) = D.$

• Le triangle ADI est rectangle en I et  $(\overline{AD}; \overline{AI}) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AI}{AD} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (\overline{AD}; \overline{AI}) = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow S'(D) = 1.$

Il existe une unique similitude directe et une seule qui transforme B en D et D en I. D'où  $S = S' = S_{(A, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6})}$

5. On considère la suite des points  $(M_n)$  définie par :  $M_0 = B$  et  $M_{n+1} = S(M_n)$ .

a. Démontrer que le triangle  $AM_nM_{n+1}$  est rectangle :

$$M_{n+1} = S(M_n) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AM_{n+1}}{AM_n} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (\overline{AM_n}; \overline{AM_{n+1}}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

D'après AlKashi :

$$\begin{aligned} M_nM_{n+1}^2 &= AM_n^2 + AM_{n+1}^2 - 2AM_{n+1} \times AM_n \cos(\overline{AM_n}; \overline{AM_{n+1}}) = AM_n^2 + AM_{n+1}^2 - 2AM_{n+1} \times AM_n \cos \frac{\pi}{6} \\ &= AM_n^2 + AM_{n+1}^2 - 2AM_{n+1} \times AM_n \times \frac{AM_{n+1}}{AM_n} = AM_n^2 + AM_{n+1}^2 - 2AM_{n+1}^2 = AM_n^2 - AM_{n+1}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AM_n^2 = M_nM_{n+1}^2 + AM_{n+1}^2$$

D'où le triangle  $AM_nM_{n+1}$  est rectangle en  $M_{n+1}$ .

b. Déterminer la nature du triangle  $ABM_{2019}$  et calculer son aire en fonction de a :

Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^+ ; M_n = S^n(M_0)$ .

• **Initialisation :**

Pour  $n=1$  on a  $M_1 = S(M_0) = S^1(M_0)$ .

• **Transmission :**

Montrons que si pour  $p \geq 1 ; M_p = S^p(M_0)$  alors  $M_{p+1} = S^{p+1}(M_0)$ .

$M_{p+1} = S(M_p) = S(S^p(M_0)) = S^{p+1}(M_0)$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^+ ; M_n = S^n(M_0)$ .

S étant la similitude de centre A de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$  alors  $S^n$  est la similitude de centre A de rapport  $(\frac{\sqrt{3}}{2})^n$  et d'angle  $\frac{n\pi}{6}$ .

$$\text{Donc } S^n = S_{(A, (\frac{\sqrt{3}}{2})^n, \frac{n\pi}{6})} \Rightarrow M_{2019} = S^{2019}(M_0) = S^{2019}(B) \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM_{2019}}{AB} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2019} \\ (\overline{AB}; \overline{AM_{2019}}) = \frac{2019\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

•  $(\overline{AB}; \overline{AM_{2019}}) = \frac{2019\pi}{6} [2\pi] = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow$  Le triangle  $ABM_{2019}$  est rectangle en A.

$$\bullet \frac{AM_{2019}}{AB} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2019} \Rightarrow AM_{2019} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2019} AB = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2019} a.$$

$$\bullet \text{L'aire du triangle } ABM_{2019} \text{ est : } \frac{1}{2} AB \times AM_{2019} = \frac{1}{2} a \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2019} a = \frac{3^{1009} \sqrt{3}}{2^{2020}} a^2.$$

**Exercice N°5 :**

Soit f la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ .

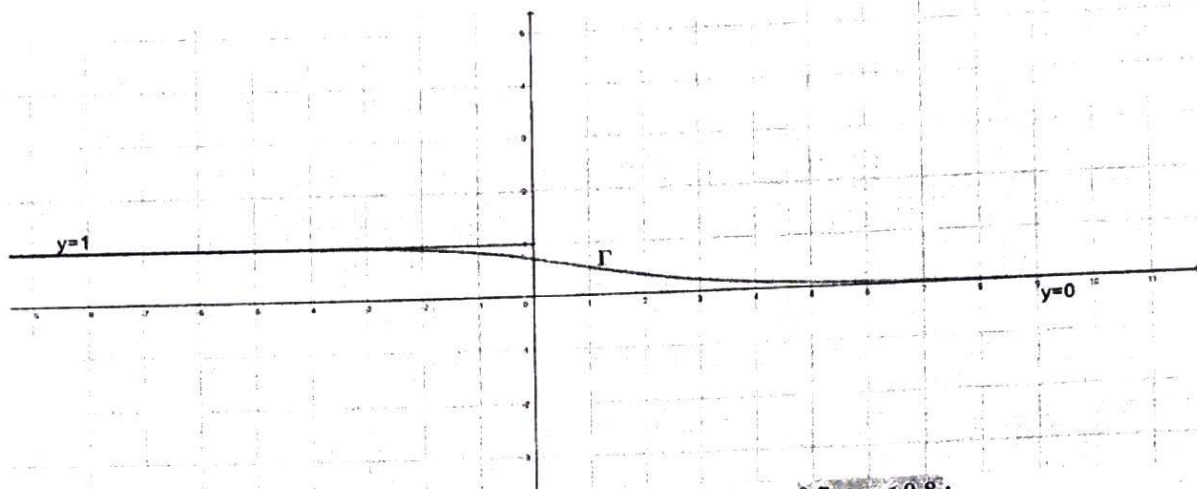
1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe  $\Gamma$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

La courbe  $\Gamma$  admet deux asymptotes horizontales d'équations respectives  $y=0$  et  $y=1$ .

$$f'(x) = \frac{-e^x}{2(1+e^x)\sqrt{1+e^x}} < 0$$

|       |           |           |
|-------|-----------|-----------|
| x     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| f'(x) | -         |           |
| f(x)  | 1         | 0         |



2. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $0,7 < \alpha < 0,8$ :  
 Posons  $g(x) = f(x) - x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1 < 0$  car  $f'$  est négative. Donc  $g$  est strictement négative sur  $\mathbb{R}$ .  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x = -\infty$ .  
 $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , alors l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$ . D'où l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$ . De plus  $g(0,7) \times g(0,8) > 0$  alors  $\alpha$  n'est pas encadrée par 0,7 et 0,8. Ce pendant  $g(0,5) \times g(0,6) < 0$  alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire  $0,5 < \alpha < 0,6$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         |           |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $-\infty$ |

3. Soit  $A$  l'aire du domaine délimité par  $\Gamma$ ,  $(Ox)$  et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = \ln 3$ .

a. Montrer que  $A = \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ :

Comme  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  et en particulier sur  $[\alpha; \ln 3]$  alors l'aire  $A = \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ .

b. En posant  $t = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ , montrer que  $A = \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{2dt}{t^2-1}$ :

En posant  $t = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$  on trouve :

$$\bullet dt = \frac{-e^x}{2(1+e^x)\sqrt{1+e^x}} dx = \frac{1-(1+e^x)}{2(1+e^x)\sqrt{1+e^x}} dx = \frac{1}{2}(t^3 - t)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{t^3-t}$$

$$\bullet \text{ Pour les bornes de l'intégrale : } \begin{cases} x = \alpha \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{1+e^{\alpha}}} \\ x = \ln 3 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{1+e^{\ln 3}}} \end{cases} \Rightarrow A = \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int_{\alpha}^{\ln 3} t \times \frac{2dt}{t^3-t} = \int_{\alpha}^{\ln 3} t \times \frac{2dt}{t(t^2-1)} = \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{2dt}{t^2-1}$$

c. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{2}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$  et en déduire la valeur de  $A$  :

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{(t+1) - (t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{t+1}{(t-1)(t+1)} - \frac{t-1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$

$$A = \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{2dt}{t^2-1} = \int_{\alpha}^{\ln 3} \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{dt}{t-1} - \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{dt}{t+1} = [\ln|t-1| - \ln|t+1|]_{\alpha}^{\ln 3} = \left[ \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_{\alpha}^{\ln 3} = \ln \left( \frac{1}{3} \right) - \ln \left( \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) = \ln \left( \frac{1+\alpha}{3(1-\alpha)} \right)$$

4. Soit  $(I_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $I_n = \int_{\alpha}^{\ln 3} (f(t))^{2n} dt$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n I_k = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$ .

a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  que  $\frac{\ln 3 - \alpha}{2^{2n}} \leq I_n \leq (\ln 3 - \alpha)\alpha^{2n}$  puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

$f$  est décroissante alors  $\alpha \leq x \leq \ln 3 \Rightarrow f(\ln 3) \leq f(x) \leq f(\alpha) \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \alpha \Rightarrow \frac{1}{2^{2n}} \leq (f(x))^{2n} \leq \alpha^{2n}$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{1}{2^{2n}} dt \leq \int_{\alpha}^{\ln 3} (f(t))^{2n} dt \leq \int_{\alpha}^{\ln 3} \alpha^{2n} dt \Rightarrow \frac{\ln 3 - \alpha}{2^{2n}} \leq I_n \leq (\ln 3 - \alpha)\alpha^{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha^2)^n = 0 \text{ car } 0 < \alpha^2 < 1.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 - \alpha}{2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 3 - \alpha)\alpha^{2n} = 0$  et d'après TG  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

b. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, 2f'(x) = (f(x))^3 - f(x) \dots (1)$  :

$$D'après la question 1, on a :  $2f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)\sqrt{1+e^x}} = \frac{-(e^x+1)+1}{(1+e^x)\sqrt{1+e^x}} = \frac{-1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{1}{(1+e^x)\sqrt{1+e^x}} = \frac{-1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{1}{(\sqrt{1+e^x})^3} = (f(x))^3 - f(x)$ .$$

D'où  $\forall x \in \mathbb{R}, 2f'(x) = (f(x))^3 - f(x) \dots (1)$ .

c. En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 1 + 2\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$  puis en déduire  $I_1$  :

$$2f'(x) = (f(x))^3 - f(x) \Rightarrow (f(x))^3 = f(x) + 2f'(x) \Rightarrow (f(x))^2 = 1 + 2\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \text{ (En divisant les deux membres de l'égalité par } f(x)\text{).}$$

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\ln 3} (f(t))^2 dt = \int_{\alpha}^{\ln 3} \left( 1 + 2 \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \right) dt = [t + 2 \ln(f(t))]_{\alpha}^{\ln 3} = \ln 3 + 2 \ln(f(\ln 3)) - (\alpha + 2 \ln(f(\alpha)))$$

$$= \ln 3 + 2 \ln \left( \frac{1}{2} \right) - (\alpha + 2 \ln(\alpha)) = \ln 3 - \ln 4 - \alpha - \ln(\alpha^2) = -\alpha + \ln \left( \frac{3}{4\alpha^2} \right) = \ln \left( \frac{3e^{-\alpha}}{4\alpha^2} \right)$$

$$\text{Or } f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+e^{\alpha}}} = \alpha \Rightarrow \frac{1}{1+e^{\alpha}} = \alpha^2 \Rightarrow 1 + e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2} \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \Rightarrow e^{-\alpha} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \Rightarrow I_1 = \ln \left( \frac{3e^{-\alpha}}{4\alpha^2} \right) = \ln \left( \frac{3}{4\alpha^2} \times \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \right) = \ln \left( \frac{3}{4(1-\alpha^2)} \right).$$

5. a. Montrer à l'aide de l'égalité (1) que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ;  $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2^{2n}} - \alpha^{2n} \right)$  :

En multipliant les membres de l'égalité (1) par  $(f(x))^{2n-1}$  on trouve :  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2f'(x)(f(x))^{2n-1} = (f(x))^{2n+2} - (f(x))^{2n}$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\ln 3} 2f'(t)(f(t))^{2n-1} dt = \int_{\alpha}^{\ln 3} (f(t))^{2n+2} dt - \int_{\alpha}^{\ln 3} (f(t))^{2n} dt = I_{n+1} - I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n = \left[ \frac{2}{2n} (f(t))^{2n} \right]_{\alpha}^{\ln 3} = \frac{1}{n} \left[ (f(t))^{2n} \right]_{\alpha}^{\ln 3} = \frac{1}{n} \left( (f(\ln 3))^{2n} - (f(\alpha))^{2n} \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2^{2n}} - \alpha^{2n} \right)$$

b. Montrer que  $I_{n+1} = \ln \left( \frac{3e^{-n}}{4\alpha^2} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^{2k}} - \alpha^{2k} \right)$  :

$$\frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^{2k}} - \alpha^{2k} \right) = I_{k+1} - I_k \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^{2k}} - \alpha^{2k} \right) = \sum_{k=1}^n (I_{k+1} - I_k) = \sum_{k=1}^n I_{k+1} - \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{p=2}^{n+1} I_p - \sum_{p=1}^n I_p = I_{n+1} - I_1$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = I_1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^{2k}} - \alpha^{2k} \right) = \ln \left( \frac{3e^{-n}}{4\alpha^2} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^{2k}} - \alpha^{2k} \right).$$

c. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \alpha^{2k} - \frac{1}{2^{2k}} \right) = \ln \left( \frac{3}{4(1-\alpha^2)} \right)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( \frac{3e^{-n}}{4\alpha^2} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^{2k}} - \alpha^{2k} \right) \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^{2k}} - \alpha^{2k} \right) = -\ln \left( \frac{3e^{-n}}{4\alpha^2} \right)$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \alpha^{2k} - \frac{1}{2^{2k}} \right) = \ln \left( \frac{3}{4(1-\alpha^2)} \right)$$

## Bac 2019 session complémentaire Énoncé

### Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (12 + 5i)z^2 + (45 + 42i)z - (54 + 97i).$$

1. a. Déterminer les nombres  $m$  et  $p$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = (z - 3 - 4i)(z^2 + mz + p)$  puis résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

b. On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  images respectives des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ , avec  $\text{Re}(z_A) \geq \text{Re}(z_B) \geq \text{Re}(z_C)$ .

Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

2. a. Déterminer l'abscisse du point  $I$ , barycentre du système  $\{(A; -3); (B; 2); (C; 3)\}$ .

b. Donner l'écriture complexe de la similitude directe  $S$  de centre  $I$ , de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

c. Montrer que l'image de  $C$  par  $S$  est le point  $D$  d'abscisse  $1+4i$ .

3. On considère l'ellipse  $\Gamma$  de centre  $I$  dont  $D$  et  $A$  sont des sommets.

a. Donner l'équation réduite de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

b. Déterminer l'excentricité, les foyers et les autres sommets de  $\Gamma$ . Construire  $\Gamma$ .

4. On considère la suite  $(M_n)$  des points du plan définis par  $M_0 = C$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $M_{n+1} = S(M_n)$ .

a. Déterminer les abscisses respectives  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  des points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

b. Montrer que tous les points  $M_n$  appartiennent à l'une des quatre droites  $(IA)$ ,  $(IB)$ ,  $(IC)$  et  $(ID)$ . Laquelle passe par  $M_{2019}$ .

### Exercice N°2 :

$$\text{On pose, } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_2^4 \frac{(x-2)^n e^{2-x}}{n!} dx.$$

1. a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I_1$ .

b. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (1 - e^{-2})$ .

2. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-2}$ .

b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3. On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{2^n}{n!} \times e^{-2}$ .

a. Vérifier que  $\forall n \geq 5$  ;  $u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$ .

b. Montrer que  $\forall n \geq 5; 0 \leq u_n \leq \frac{4}{15} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

c. Justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq I_n \leq (e^2 - 1)u_n$ , puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

4. a. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*; I_n = 1 - e^{-2} \times \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right) = 1 - e^{-2} \times \left(\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}\right)$ .

b. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^2$ .

### Exercice N°3 :

On considère un triangle ABC rectangle isocèle direct en A. On définit les milieux respectifs I, J, K et O de segments [AB], [BC], [CA] et [AJ]. Soit D le symétrique de A par rapport à J.

1. Placer les données précédentes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

2. On considère l'antidépacement f qui transforme K en J et I en D. Vérifier que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui transforme A en I et B en J.

b. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

c. Montrer que le centre  $\Omega$  de S appartient aux cercles circonscrits aux triangles AOI et BIJ. En déduire que  $\Omega \in (BO)$ .

d. Déterminer S(C) et en déduire que les points  $\Omega$ , C et I sont alignés.

e. Trouver deux réels a et b tels que  $\Omega = \text{bar}((C, a); (I, b))$ .

4. Soit h l'homothétie de centre  $\Omega$  qui transforme O en B et soit  $g = \text{hoS}$ .

a. Montrer que  $h(I) = C$  et en déduire le rapport de h.

b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de g et déterminer  $g(A)$  et  $g(I)$ .

c. Déterminer l'image du carré AIJK par g et en déduire que la droite ( $\Omega D$ ) passe par le milieu L du segment [AI].

### Exercice N°4 :

Soit la fonction f définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{3 \ln x}{1+x^3}$  et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ) d'unité graphique 2 cm.

1. Pour tout réel strictement positif x, on pose  $u(x) = 1 + x^3(1 - 3 \ln x)$ .

a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ .

b. Dresser le tableau de variation de u.

c. Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $1,5 \leq \alpha \leq 1,6$ . En déduire le signe de  $u(x)$ .

2. a. Calculer et interpréter graphiquement  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b. Montrer que  $\forall x > 0$   $f'(x) = \frac{3u(x)}{x(1+x^3)^2}$  et dresser le tableau de variation de f.

c. Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^3}$  et tracer la courbe (C).

3. Pour tout entier n strictement positif, on définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = \int_1^e \frac{(\ln t)^n}{1+t^3} dt$ .

a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante et minorée puis en déduire qu'elle est convergente.

b. Montrer que  $\forall n \geq 1; \frac{1}{1+e^3} \int_1^e (\ln t)^n dt \leq v_n \leq \int_1^e (\ln t)^n dt$ .

4. On note, pour tout entier n strictement positif,  $w_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$ .

a. Justifier que la suite  $(w_n)$  est décroissante.

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\forall n \geq 1; w_{n+1} = e - (n+1)w_n$ .

c. Montrer que  $\forall n \geq 1; \frac{e}{n+2} \leq w_n \leq \frac{e}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .

d. Justifier que  $\frac{w_n}{1+e^3} \leq v_n \leq \frac{w_n}{2}$  puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

## Solution

### Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ). Pour tout nombre complexe z on pose :

$$P(z) = z^3 - (12 + 5i)z^2 + (45 + 42i)z - (54 + 97i).$$

1. a. Déterminer les nombres m et p tels que  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 3 - 4i)(z^2 + mz + p)$  puis résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$  :

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 3 - 4i)(z^2 - (9 + i)z + 22 + 3i).$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z - 3 - 4i)(z^2 - (9 + i)z + 22 + 3i) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z - 3 - 4i = 0 \\ z^2 - (9 + i)z + 22 + 3i = 0 \end{cases}$$

$$\bullet z - 3 - 4i = 0 \Rightarrow z = 3 + 4i$$

$$\bullet z^2 - (9 + i)z + 22 + 3i = 0 :$$

$$\Delta = (9 + i)^2 - 4 \times 1(22 + 3i) = 81 - 1 + 18i - 88 - 12i = -8 + 6i = (1 + 3i)^2$$

$$\Rightarrow z = \frac{9+i+1+3i}{2} = 5 + 2i \text{ et } z = \frac{9+i-1-3i}{2} = 4 - i.$$

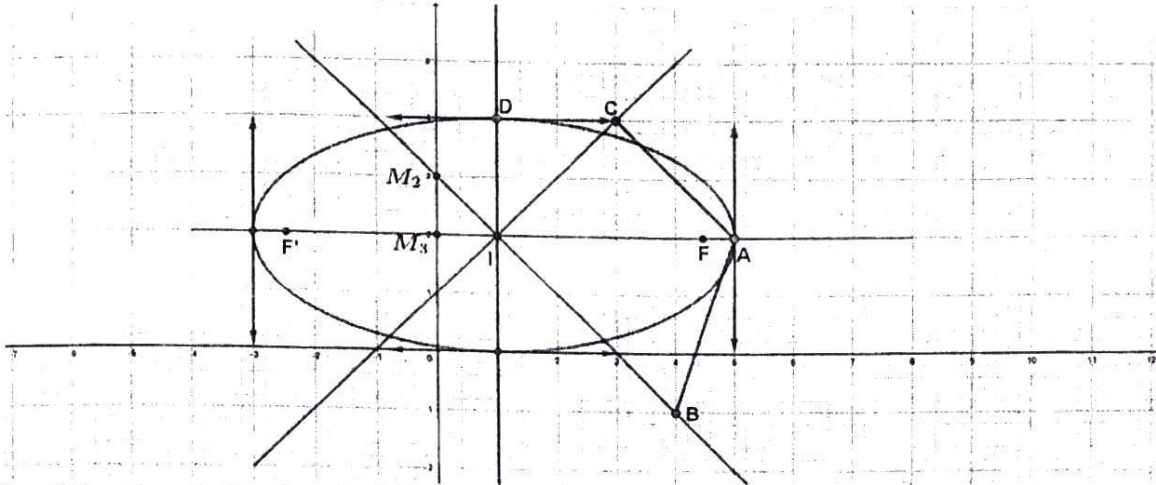
Tableau d'Hôrner

|        |           |        |           |          |
|--------|-----------|--------|-----------|----------|
|        | 1         | -12-5i | 45+42i    | -54-97i  |
| 3 + 4i | $\otimes$ | 3 + 4i | -23 - 39i | 54 + 97i |
|        | 1         | -9 - i | 22 + 3i   | 0        |
|        |           | m      | p         |          |

Donc l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z)=0$  est  $\{3+4i; 5+2i; 4-i\}$ .

b. On considère les points A, B et C images respectives des solutions de l'équation  $P(z)=0$ , avec  $\text{Re}(z_A) \geq \text{Re}(z_B) \geq \text{Re}(z_C)$ . Placer les points A, B et C :

On a  $z_A = 5+2i$ ;  $z_B = 4-i$  et  $z_C = 3+4i$ .



2. a. Déterminer l'affixe du point I, barycentre du système  $\{(A; -3); (B; 2); (C; 3)\}$  :

$$z_I = \frac{-3z_A + 2z_B + 3z_C}{2} = \frac{-15 - 6i + 8 - 2i + 9 + 12i}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i.$$

b. Donner l'écriture complexe de la similitude directe S de centre I, de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  :

$$z' - z_I = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - z_I) \Rightarrow z' - 1 - 2i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (z - 1 - 2i) \Rightarrow z' = \frac{1+i}{2} z + \frac{3+i}{2}$$

c. Montrer que l'image de C par S est le point D d'affixe  $1+4i$  :

$$z' = \frac{1+i}{2} z_C + \frac{3+i}{2} = \frac{1+i}{2} (3+4i) + \frac{3+i}{2} = 1+4i. \text{ D'où } s(C) = D.$$

3. On considère l'ellipse  $\Gamma$  de centre I dont D et A sont des sommets.

a. Donner l'équation réduite de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  :

Comme  $(\overline{IA}; \overline{ID}) = \arg \left( \frac{z_D - z_I}{z_A - z_I} \right) = \arg \left( \frac{1+4i-1-2i}{5+2i-1-2i} \right) = \arg \left( \frac{2i}{4} \right) = \arg \left( \frac{i}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$  alors les droites (IA) et (ID) sont les axes de  $\Gamma$ , et puisque  $IA = 4$  et  $ID = 2$  alors (IA) est l'axe focale de  $\Gamma$ . D'où les longueurs des axes sont  $a=4$  et  $b=2$ .

Donc l'équation réduite de  $\Gamma$  est :  $\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$ .

b. Déterminer l'excentricité, les foyers et les autres sommets de  $\Gamma$ . Construire  $\Gamma$  :

• La demi distance focale est  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ .

• L'excentricité de  $\Gamma$  est  $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

• Les foyers sont  $F(1+2\sqrt{3}; 2)$  et  $F'(1-2\sqrt{3}; 2)$ .

• Les autres sommets de  $\Gamma$  sont :  $A' = s_1(A) \Rightarrow A'(-3; 2)$  et  $D' = s_1(D) \Rightarrow D'(1; 0)$ .

• Pour la construction de  $\Gamma$  voir la figure ci-dessus.

4. On considère la suite  $(M_n)$  des points du plan définis par  $M_0 = C$  et  $\forall n \in \mathbb{N}; M_{n+1} = S(M_n)$ .

a. Déterminer les affixes respectives  $z_1, z_2$  et  $z_3$  des points  $M_1, M_2$  et  $M_3$  :

•  $M_1 = S(M_0) = S(C) = D \Rightarrow z_1 = z_D = 1+4i$ .

•  $M_2 = S(M_1) = S(D) \Rightarrow z_2 = \frac{1+i}{2} z_D + \frac{3+i}{2} = \frac{1+i}{2} (1+4i) + \frac{3+i}{2} = 3i \Rightarrow z_2 = 3i$ .

•  $M_3 = S(M_2) = S(3i) \Rightarrow z_3 = \frac{1+i}{2} z_D + \frac{3+i}{2} = \frac{1+i}{2} (3i) + \frac{3+i}{2} = 2i \Rightarrow z_3 = 2i$ .

b. Montrer que tous les points  $M_n$  appartiennent à l'une des quatre droites (IA), (IB), (IC) et (ID). Laquelle passe par  $M_{2019}$  :

Lieu géométrique de  $M_n$  :

Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*; M_n = S^n(M_0)$ .

• Initialisation :

Pour  $n=1$  on a  $M_1 = S(M_0) = S^1(M_0)$ .

• Transmission :

Montrons que si pour  $p \geq 1; M_p = S^p(M_0)$  alors  $M_{p+1} = S^{p+1}(M_0)$ .

$M_{p+1} = S(M_p) = S(S^p(M_0)) = S^{p+1}(M_0)$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*; M_n = S^n(M_0)$ .

Tout entier naturel  $n$  s'écrit sous la forme  $n = 4p+q$  avec  $p$  et  $q$  des entiers et  $0 \leq q < 4$ . Or d'une part  $S^n = S^{4p+q} = (S^4)^p \circ S^q$

et d'autre part  $S^4$  est la similitude directe de centre I, de rapport  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4}$  et d'angle  $4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$ , donc  $S^4 = h_{(I; -\frac{1}{4})} = h$ .

Alors on a  $(S^4)^p = h^p \Rightarrow S^n = S^{4p+q} = h^p \circ S^q$  et puisque  $M_{4p+q} = S^{4p+q}(M_0) = h^p \circ S^q(M_0) = h^p(M_q)$ . D'où  $M_{4p+q} \in (IM_q)$ .

Donc  $\forall p \in \mathbb{N}^*$  ;

•  $M_{4p} \in (IM_0) \Rightarrow M_{4p} \in (IC)$  car  $M_0 = C$ .

•  $M_{4p+1} \in (IM_1) \Rightarrow M_{4p+1} \in (ID)$  car  $M_1 = D$ .

•  $M_{4p+2} \in (IM_2) \Rightarrow M_{4p+2} \in (IB)$  car  $M_2 \in (IB)$ .

•  $M_{4p+3} \in (IM_3) \Rightarrow M_{4p+3} \in (IA)$  car  $M_3 \in (IA)$ .

On peut conclure que tous les points  $M_n$  sont situés sur l'une des quatre droites (IA), (IB), (IC) et (ID).

Position de  $M_{2019}$  :

On a  $2019 = 4 \times 504 + 3$  et comme  $M_{4p+3} \in (IA)$  alors  $M_{2019} \in (IA)$ .

Exercice N°2 :

On pose,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \int_2^4 \frac{(x-2)^n e^{2-x}}{n!} dx$ .

1. a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I_1$  :

$I_1 = \int_2^4 (x-2)e^{2-x} dx$ .

$u(t) = x-2 \mid \Rightarrow u'(t) = 1$   
 $v'(t) = e^{2-x} \mid \Rightarrow v(t) = -e^{2-x}$

$I_1 = [-(x-2)e^{2-x}]_2^4 + \int_2^4 e^{2-x} dx = [-(x-2)e^{2-x}]_2^4 - [e^{2-x}]_2^4 = [(1-x)e^{2-x}]_2^4 = 1 - 3e^{-2}$ .

b. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (1 - e^{-2})$  :

$2 \leq x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x-2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^n \leq 2^n \Rightarrow 0 \leq \frac{(x-2)^n}{n!} \leq \frac{2^n}{n!} \Rightarrow 0 \leq \frac{(x-2)^n e^{2-x}}{n!} \leq \frac{2^n e^{2-x}}{n!} \Rightarrow 0 \leq \int_2^4 \frac{(x-2)^n e^{2-x}}{n!} dx \leq \int_2^4 \frac{2^n e^{2-x}}{n!} dx$   
 $\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} [-e^{2-x}]_2^4 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (1 - e^{-2})$ .

2. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-2}$  :

$I_{n+1} = \int_2^4 \frac{(x-2)^{n+1} e^{2-x}}{(n+1)!} dx$ .

$u(t) = \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!} \mid \Rightarrow u'(t) = \frac{(x-2)^n}{n!}$   
 $v'(t) = e^{2-x} \mid \Rightarrow v(t) = -e^{2-x}$

$\Rightarrow I_{n+1} = \left[ \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{2-x} \right]_2^4 + \int_2^4 \frac{(x-2)^n e^{2-x}}{n!} dx = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-2} + I_n = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-2}$ .

b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et en déduire qu'elle est convergente :

Décroissance de  $(I_n)$  :

$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-2} \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-2} < 0$ . Donc  $(I_n)$  est décroissante.

Convergence de  $(I_n)$  :

Comme la suite  $(I_n)$  est décroissante et minorée ( d'après 1.b) alors elle est convergente.

3. On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{2^n}{n!} \times e^{-2}$ .

a. Vérifier que  $\forall n \geq 5$  ;  $u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$  :

$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-2} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-2} \Rightarrow \frac{2}{n+1} \times \frac{2^n}{n!} \times e^{-2} = \frac{2}{n+1} u_n$

Or  $n \geq 5 \Rightarrow n+1 \geq 6 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{n+1} u_n \leq \frac{1}{3} u_n$  car  $0 < u_n$ . D'où  $\forall n \geq 5$  ;  $u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$ .

b. Montrer que  $\forall n \geq 5$  ;  $0 \leq u_n \leq \frac{4}{15} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :

• Montrer que d'abord que  $\forall n \geq 5$  ;  $0 \leq u_n \leq \frac{4}{15} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}$

La méthode de cascade suivante nous permet de répondre à cette question.

$u_6 \leq \frac{1}{3} u_5$

$u_7 \leq \frac{1}{3} u_6$

$u_8 \leq \frac{1}{3} u_7$

.....

$u_n \leq \frac{1}{3} u_{n-1}$

$u_n \leq u_5 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-5} \Rightarrow u_n \leq u_5 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-5} \Rightarrow u_n \leq \frac{4}{15} e^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-5} \Rightarrow \forall n \geq 5 ; 0 \leq u_n \leq \frac{4}{15} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}$  car  $\frac{4}{15} e^{-2} \leq \frac{4}{15}$

• En déduisons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{15} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-5} = 0$  alors d'après TG  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

c. Justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $0 \leq I_n \leq (e^2 - 1)u_n$ , puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

• Justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $0 \leq I_n \leq (e^2 - 1)u_n$  :

D'après 1.b, on a  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (1 - e^{-2}) \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{2^n e^2}{n! e^2} (1 - e^{-2}) \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1) \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} \times e^{-2} (e^2 - 1)$

• En déduisons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^2 - 1)u_n = 0$  ((puis que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ) alors d'après TG  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ ).

4. a. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $I_n = 1 - e^{-2} \times \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right) = 1 - e^{-2} \times \left(\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}\right)$  :

Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $I_n = 1 - e^{-2} \times \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$ .

• **Initialisation :**

Pour  $n=1$  on a  $I_1 = 1 - 3e^{-2} = 1 - e^{-2} \left(1 + \frac{2^1}{1!}\right)$ .

• **Transmission :**

Montrons que si pour  $p \geq 1$ ;  $I_p = 1 - e^{-2} \times \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^p}{p!}\right)$  alors  $I_{p+1} = 1 - e^{-2} \times \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^{p+1}}{(p+1)!}\right)$ .

On a  $I_{p+1} = I_p - \frac{2^{p+1}}{(p+1)!} \times e^{-2} = 1 - e^{-2} \times \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^p}{p!}\right) - \frac{2^{p+1}}{(p+1)!} \times e^{-2} = 1 - e^{-2} \times \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^{p+1}}{(p+1)!}\right)$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $I_n = 1 - e^{-2} \times \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$ .

b. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^2$  :

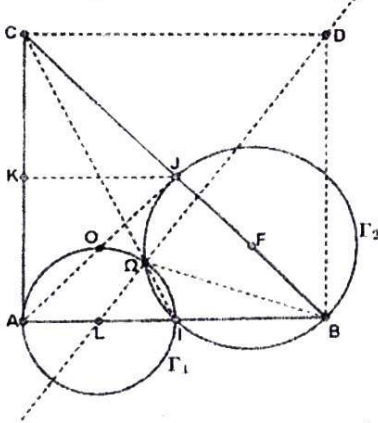
On a  $I_n = 1 - e^{-2} \times \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^{-2} \left[e^2 - \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)\right]$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e^2 - \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)\right] = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^2$ .

### Exercice N°3 :

On considère un triangle ABC rectangle isocèle direct en A. On définit les milieux respectifs I, J, K et O de segments [AB], [BC], [CA] et [AJ]. Soit D le symétrique de A par rapport à J.

1. Placer les données précédentes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure :



2. On considère l'antidépacement  $f$  qui transforme K en J et I en D. Vérifier que  $f$  est une symétrie glissante et donner sa forme réduite :

• **Nature de  $f$  :**

Comme  $\text{med}[KJ] \neq \text{med}[ID]$  alors  $f$  n'est pas une réflexion, donc elle est une symétrie glissante.

• **L'axe de  $f$  :**

Il passe par les milieux respectifs des segments [KJ] et [ID], or le milieu de [ID] appartient à (KJ) et différent du milieu de [KJ].

D'où l'axe de  $f$  est la droite (KJ).

• **Le vecteur de  $f$  :**

K étant un point de l'axe de  $f$  et  $f(K) = J$  alors le vecteur de  $f$  est  $\vec{KJ}$ .

• **La forme réduite de  $f$  :**

$$f = s_{(KJ)} \circ t_{\vec{KJ}} = t_{\vec{KJ}} \circ s_{(KJ)}$$

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui transforme A en I et B en J :

On a  $\begin{cases} A \neq I \\ B \neq J \end{cases}$  donc il existe une unique similitude directe S qui transforme A en I et B en J.

b. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S :

Le rapport de S est  $\frac{II'}{AB} = \frac{JJ'}{AC} = \frac{II'}{2IJ} = \frac{1}{2}$  et l'angle de S :  $(\overline{AB}; \overline{IJ}) = (\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

c. Montrer que le centre  $\Omega$  de  $S$  appartient aux cercles circonscrits aux triangles  $AOI$  et  $BIJ$ . En déduire que  $\Omega \in (BO)$  :

On a  $\Omega$  est le centre de  $S$  et  $\begin{cases} S(A) = I \\ S(B) = J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega I}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega J}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ . Donc  $\Omega$  appartient aux cercles de diamètres  $[AI]$  et  $[BJ]$  qui passe respectivement par  $O$  et  $I$ . D'où  $\Omega$  appartient aux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  circonscrits respectivement aux triangles  $AOI$  et  $BIJ$ . Le point  $\Omega$  est le deuxième point d'intersection des deux cercles autre que  $I$ .

En déduisons que  $\Omega \in (BO)$  :

$$\Omega \in \Gamma_1 \Rightarrow (\overline{\Omega I}; \overline{\Omega O}) = (\overline{AI}; \overline{AO})[\pi] = \frac{\pi}{4}[\pi] \text{ et } \Omega \in \Gamma_2 \Rightarrow (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega I}) = (\overline{JB}; \overline{JI})[\pi] = -\frac{\pi}{4}[\pi].$$

$$\Rightarrow (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega O}) = (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega I}) + (\overline{\Omega I}; \overline{\Omega O}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0[\pi]. \text{ D'où } \Omega \in (BO).$$

d. Déterminer  $S(C)$  et en déduire que les points  $\Omega$ ,  $C$  et  $I$  sont alignés :

Image de  $C$  par  $S$  :

$ABC$  étant un triangle rectangle isocèle et direct en  $A$ , alors son image  $IJC'$  (avec  $C' = S'(C)$ ) est aussi un triangle rectangle isocèle et direct en  $I = S(A)$ . Donc l'image de  $ABC$  par  $S$  est  $IJA$ . D'où  $S(C) = A$ .

Alignement des points  $\Omega$ ,  $C$  et  $I$  :

$$\text{On a } SoS = h_{(\Omega; -\frac{1}{4})}$$

$$SoS(C) = S(A) = I \Leftrightarrow h_{(\Omega; -\frac{1}{4})}(C) = I. \text{ D'où l'alignement des points } \Omega, C \text{ et } I.$$

e. Trouver deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\Omega = \text{bar}\{(C, a); (I, b)\}$  :

$$h_{(\Omega; -\frac{1}{4})}(C) = I \Leftrightarrow \overline{\Omega I} = -\frac{1}{4}\overline{\Omega C} \Leftrightarrow 4\overline{\Omega I} + \overline{\Omega C} = \vec{0} \Leftrightarrow \Omega = \text{bar}\{(C, 1); (I, 4)\}. \text{ D'où } \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

4. Soit  $h$  l'homothétie de centre  $\Omega$  qui transforme  $O$  en  $B$  et soit  $g = hoS$ .

a. Montrer que  $h(I) = C$  et en déduire le rapport de  $h$  :

Image de  $I$  par  $h$  :

$h(I)$  appartient à l'intersection des droites :  $(\Omega I)$  et la parallèle à  $(IO)$  passant par  $B$  qui n'est autre que  $C$ . D'où  $h(I) = C$ .

b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $g$  et déterminer  $g(A)$  et  $g(I)$  :

Nature de  $g$  :

$g$  est la composée d'une homothétie et d'une similitude directe alors  $g$  est une similitude directe.

Les éléments caractéristiques de  $g$  :

$$\overline{\Omega C} = -4\overline{\Omega I} \Rightarrow h = h_{(\Omega; -\frac{1}{4})} = S_{(\Omega; 4; \pi)}$$

Le centre de  $g$  est  $\Omega$  ; le rapport de  $g$  :  $\frac{1}{2} \times 4 = 2$  et l'angles de  $g$  :  $\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

$$g = S_{(\Omega; 2; -\frac{\pi}{2})} = S^{-1} \text{ et } g = hoS = Soh \text{ ( la composée est commutative car } S \text{ et } h \text{ ont même centre).}$$

Détermination  $g(A)$  et  $g(I)$  :

$$g(A) = hoS(A) = h(I) = C \text{ et } g(I) = Soh(I) = S(C) = A.$$

c. Déterminer l'image du carré  $AIJK$  par  $g$  et en déduire que la droite  $(\Omega D)$  passe par le milieu  $L$  du segment  $[AI]$  :

Image du carré  $AIJK$  :

$AIJK$  est un carré direct construit sur le segment  $[AI]$  alors son image est aussi un carré direct construit sur le segment  $[CA]$  image du segment  $[AI]$ . Donc l'image du carré  $AIJK$  est le carré  $CABD$ .

Appartenance du  $L$  milieu de  $[AI]$  à la droite  $(\Omega D)$  :

$$\text{On a d'une part : } \begin{cases} S(A) = I \\ S(C) = A \end{cases} \text{ et comme } S \text{ conserve le milieu alors } S(K) = L.$$

$$\text{D'autre part : } g(K) = D \Leftrightarrow D = hoS(K) \Leftrightarrow D = h(L) \Rightarrow \Omega ; D \text{ et } L \text{ sont alignés. D'où } L \in (\Omega D).$$

Exercice N°4 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{3\ln x}{1+x^3}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

d'unité graphique 2 cm.

1. Pour tout réel strictement positif  $x$ , on pose  $u(x) = 1 + x^3(1 - 3\ln x)$ .

a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^3(1 - 3\ln x)) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 1 + 0 - 0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^3(1 - 3\ln x)) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3\ln x) = 1 + (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

b. Dresser le tableau de variation de  $u$  :

$$u'(x) = 3x^2(1 - 3\ln x) - \frac{3}{x} \times x^3 = 3x^2 - 9x^2 \ln x - 3x^2 = -9x^2 \ln x.$$

Le signe de  $u'(x)$  est celui de  $(-\ln x)$ .

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $u'(x)$ |   | + | -         |
| $u(x)$  | 1 | 2 | $-\infty$ |

c. Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $1,5 \leq \alpha \leq 1,6$ . En déduire le signe de  $u(x)$  :  
 Sur l'intervalle  $]0; 1]$ ,  $u(x) > 0$  et sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  la fonction  $u$  est continue, strictement décroissante et change de signe, alors l'équation  $u(x) = 0$  admet dans cet intervalle une unique solution  $\alpha$ . Par conséquent  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $u(x) = 0$  sur  $]0; +\infty[$ .

On a  $u(1,5) > 0$  et  $u(1,6) < 0$  alors d'après le TVI  $1,5 \leq \alpha \leq 1,6$ .

Tableau du signe de  $u$  sur  $]0; +\infty[$  :

|        |   |          |           |
|--------|---|----------|-----------|
| $x$    | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $u(x)$ |   | +        | 0 -       |

2. a. Calculer et interpréter graphiquement  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \ln x}{1 + x^3} = 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + x^3} \ln x = 1 \times (+\infty) = +\infty.$$

Donc (C) admet une asymptote verticale d'équation  $x=0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x}{1 + x^3} = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0.$$

Donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation  $y=0$ .

b. Montrer que  $\forall x > 0$   $f'(x) = \frac{3u(x)}{x(1+x^3)^2}$  et dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$f'(x) = 3 \times \frac{\frac{1}{x}(1+x^3) - 3x^2 \ln x}{(1+x^3)^2} = 3 \times \frac{1+x^3 - 3x^3 \ln x}{x(1+x^3)^2} = 3 \times \frac{1+x^3(1-3 \ln x)}{x(1+x^3)^2} = \frac{3u(x)}{x(1+x^3)^2}$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $u(x)$ .

|         |   |          |           |
|---------|---|----------|-----------|
| $x$     | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +        | 0 -       |
| $f(x)$  |   |          |           |

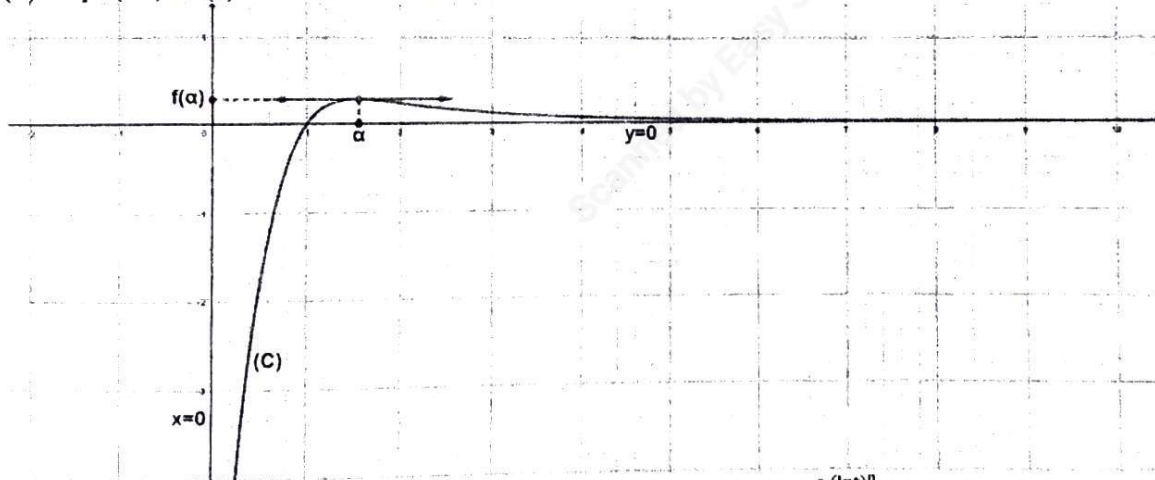
$-\infty \swarrow \quad \nearrow 0$   
 $f(\alpha)$

c. Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^3}$  et tracer la courbe (C) :

$$f(\alpha) = \frac{3 \ln \alpha}{1 + \alpha^3} \text{ or } g(\alpha) = 0 \Rightarrow 1 + \alpha^3(1 - 3 \ln \alpha) = 0 \Rightarrow \ln \alpha = \frac{1 + \alpha^3}{3\alpha^3} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{3 \ln \alpha}{1 + \alpha^3} = \frac{3 \times \frac{1 + \alpha^3}{3\alpha^3}}{1 + \alpha^3} = \frac{1}{\alpha^3}$$

La représentation graphique de  $f$  :

(C) coupe (Ox) si  $f(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x=1$ .



3. Pour tout entier  $n$  strictement positif, on définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = \int_1^e \frac{(\ln t)^n}{1+t^3} dt$ .

a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante et minorée puis en déduire qu'elle est convergente :

$$1 \leq t \leq e \Rightarrow 0 \leq \ln t \leq 1 \Rightarrow \forall n \geq 1; 0 \leq (\ln t)^{n+1} \leq (\ln t)^n \Rightarrow \forall n \geq 1; 0 \leq \frac{(\ln t)^{n+1}}{1+t^3} \leq \frac{(\ln t)^n}{1+t^3}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 \leq \int_1^e \frac{(\ln t)^{n+1}}{1+t^3} dt \leq \int_1^e \frac{(\ln t)^n}{1+t^3} dt \Rightarrow \forall n \geq 1, 0 \leq v_{n+1} \leq v_n$$

Donc  $(v_n)$  est décroissante et minorée par 0.

La suite  $(v_n)$  est convergente car elle décroissante et minorée.

b. Montrer que  $\forall n \geq 1; \frac{1}{1+e^3} \int_1^e (\ln t)^n dt \leq v_n \leq \int_1^e (\ln t)^n dt$  :

$$1 \leq t \leq e \Rightarrow 1 \leq t^3 \leq e^3 \Rightarrow 2 \leq 1 + t^3 \leq 1 + e^3 \Rightarrow \frac{1}{1+e^3} \leq \frac{1}{1+t^3} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n \geq 1, \frac{(\ln t)^n}{1+e^3} \leq \frac{(\ln t)^n}{1+t^3} \leq \frac{(\ln t)^n}{2} \text{ car } (\ln t)^n \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e^3} \int_1^e (\ln t)^n dt \leq \int_1^e \frac{(\ln t)^n}{1+t^3} dt \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \Rightarrow \frac{1}{1+e^3} \int_1^e (\ln t)^n dt \leq v_n \leq \int_1^e (\ln t)^n dt.$$

4. On note, pour tout entier  $n$  strictement positif,  $w_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$ .

a. Justifier que la suite  $(w_n)$  est décroissante :

$$1 \leq t \leq e \Rightarrow 0 \leq \ln t \leq 1 \Rightarrow \forall n \geq 1; 0 \leq (\ln t)^{n+1} \leq (\ln t)^n \Rightarrow 0 \leq \int_1^e (\ln t)^{n+1} dt \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \Rightarrow \forall n \geq 1; 0 \leq w_{n+1} \leq w_n.$$

Donc  $(w_n)$  est décroissante et minorée par 0.

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\forall n \geq 1; w_{n+1} = e - (n+1)w_n$  :

On a :  $w_{n+1} = \int_1^e (\ln t)^{n+1} dt$ .

$$u(t) = (\ln t)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad u'(t) = (n+1) \frac{1}{t} (\ln t)^n$$

$$v'(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad v(t) = t$$

$$\Rightarrow w_{n+1} = [t(\ln t)^{n+1}]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln t)^n dt = e - (n+1)w_n.$$

c. Montrer que  $\forall n \geq 1; \frac{e}{n+2} \leq w_n \leq \frac{e}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$  :

La suite  $(w_n)$  est décroissante.

• On a :  $w_{n+1} = e - (n+1)w_n$  et  $w_{n+1} \leq w_n$  alors  $e - (n+1)w_n \leq w_n \Rightarrow e \leq (n+2)w_n \Rightarrow \frac{e}{n+2} \leq w_n \dots \dots \dots (*)$

•  $w_n = e - nw_{n-1} \Rightarrow w_{n-1} = \frac{e - w_n}{n}$  et comme  $w_n \leq w_{n-1} \Rightarrow w_n \leq \frac{e - w_n}{n} \Rightarrow (n+1)w_n \leq e \Rightarrow w_n \leq \frac{e}{n+1} \dots \dots \dots (**)$

D'où de (\*) et (\*\*) on trouve  $\forall n \geq 1; \frac{e}{n+2} \leq w_n \leq \frac{e}{n+1}$ .

On a : d'une part la suite  $(w_n)$  est convergente car elle décroissante et minorée et d'autre part d'après les Gendarmes

comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

d. Justifier que  $\frac{w_n}{1+e^3} \leq v_n \leq \frac{w_n}{2}$  puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  :

De la question 3. b, on a :  $\frac{1}{1+e^3} \int_1^e (\ln t)^n dt \leq v_n \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \Rightarrow \frac{w_n}{1+e^3} \leq v_n \leq \frac{w_n}{2}$ .

comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_n}{1+e^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_n}{2} = 0$  alors d'après TG  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

## Bac 2018 session normale

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

1. On considère l'équation (E) :  $25x - 49y = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières.

b. Vérifier que le couple (10 ; 5) est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).

c. Montrer qu'il existe un unique entier  $p$  compris entre 1960 et 2018 tel que  $25p \equiv 5[49]$ .

2. a. Justifier que si  $(x ; y)$  est une solution de (E) alors  $5x \equiv 1[7]$  et  $y \equiv 0[5]$ .

b. Montrer que  $5x \equiv 1[7]$  si et seulement si  $x \equiv 3[7]$ .

3. a. Soit  $x$  un entier relatif. Quels sont les restes de  $x^2$  dans la division euclidienne par 7 ?

b. Existe-il un couple  $(x ; y)$  d'entiers relatifs tels que  $(x^2 ; y^2)$  soit solution de (E) ?

#### Exercice N°2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - (9-i)z - 6 + 18i.$$

1. a. Calculer  $P(3i)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z-3i)(z^2 + az + b)$ .

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

c. On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $|z_C| \leq |z_B| \leq |z_A|$ . Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC.

d. Soit  $A' = \text{bar}\{(A; -5); (B; 6); (C; 12)\}$ . Vérifier que l'affixe de  $A'$  est  $z_{A'} = -3 + i$ . Placer  $A'$ .

2. On considère l'ellipse  $\Gamma$  de sommets A,  $A'$  et B.

a. Déterminer le centre I et l'excentricité de  $\Gamma$ .

b. Déterminer une équation cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

c. Préciser l'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe (Ox).

d. Déterminer les foyers et les directrices de  $\Gamma$  puis construire  $\Gamma$ .

#### Exercice N°3 :

ABCD est un parallélogramme tel que  $(\overline{AB}; \overline{AD}) = \frac{\pi}{4}$  et  $AB = 2AD$ .

On définit les points E, F, G et H tels que AEFB et ADGH soient des carrés directs. Soit I, J et K les milieux respectifs des segments [EC], [CG] et [GA].

1. Représenter les données précédentes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

2. Soit  $R_A$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , T la translation de vecteur  $\overline{BC}$  et  $f = \text{ToR}_A$ .

a. Quelle est la nature de  $f$ .

b. Déterminer  $f(D)$  puis caractériser F. Quelle est l'image du point F par  $f$  ?

c. Justifier que les segments [DF] et [CG] sont perpendiculaires et de même longueur.

3. a. Comparer les vecteurs  $\overline{DF}$  et  $\overline{CE}$  puis en déduire que le triangle ECF est rectangle isocèle direct en C.

b. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $g$  qui transforme E en C et C en G.

c. Vérifier que  $g$  est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite.

4. Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en D.

- Déterminer le rapport de S et une mesure de l'angle de S.
- Montrer que le centre  $\Omega$  de S appartient aux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  circonscrits respectivement aux carrés AFEB et ADGH. Placer  $\Omega$ .
- Montrer que  $S(F) = G$  puis en déduire que  $S(\Gamma_1) = \Gamma_2$ .
- Soit M un point de  $\Gamma_1$  et  $M' = S(M)$ . Montrer que les points A, M et M' sont alignés.

**Exercice N°4 :**

- Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' - 6y' + 8$ .
  - Déterminer la solution  $y_0$  de (E) dont la courbe passe par le point A(0 ; -1) et admet en ce point une tangente horizontale.
- Soit la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{4x} - 2e^{2x}$  et (C) sa courbe représentative dans repère orthonormé (O;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ).

a. Calculer et interpréter les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

b. Dresser de tableau de variations de f.

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle  $I = ]-\infty; 0]$ .

a. Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Calculer et interpréter la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{g^{-1}(x)}{x+1}$  où  $g^{-1}$  est la réciproque de g.

c. Soit (C') la courbe de  $g^{-1}$ . Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en unique point B d'abscisse  $\alpha$  tel que  $-0,6 < \alpha < -0,5$ .

d. Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C').

Donner l'expression de  $g^{-1}(x)$ .

4. Soit S l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes (C) et (C') et les axes de coordonnées.

a. Montrer que  $S = 2 \int_{\alpha}^0 (x - f(x)) dx$ .

b. Calculer la valeur de S en fonction de  $\alpha$  et en donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

**Exercice N°5 :****Partie A :**

Soit la fonction f définie sur  $]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1)$ .

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ).

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

2. a. Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$  puis étudier les variations de f'.

b. Calculer  $f'(0)$  et en déduire le signe  $f'(x)$ .

3. a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Tracer la courbe (C).

4. a. Calculer  $\int_0^x \frac{t}{t+1} dt$  et à l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^x (t+1)\ln(t+1) dt$ .

b. En déduire la primitive F de f sur  $]-1; +\infty[$  qui s'annule en 0.

c. Calculer l'aire  $A_n$  du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = n$ , pour n un entier naturel  $n \geq 1$ .

**Partie B :**

Soit  $(U_n)$  la suite définie  $\forall n \geq 1$  par :  $U_n = \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{3} f(2) + \frac{1}{4} f(3) + \dots + \frac{1}{n} f(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} f(k)$

1. Posons  $\forall n \geq 1$  :  $V_n = \frac{1}{n+1} f(n)$ .

a. Vérifier que  $\forall n \geq 1$  :  $V_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \ln(n+1)$ .

b. En déduire que  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \ln(n!)$ .

2. Notons  $\forall n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  et  $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

a. Montrer que  $\forall k \geq 1$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$  puis en déduire que  $\frac{1}{n} + \ln n \leq S_n \leq 1 + \ln n$ .

b. Montrer que  $\forall k \geq 1$ ,  $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$  puis en déduire que  $1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq S'_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ .

c. En déduire que  $\forall n \geq 1$  ;  $\frac{2}{n} - 2 \leq U_n + \ln((n+1)!) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ .

## Solution

### Exercice N°1 :

1. On considère l'équation (E) :  $25x - 49y = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières :

| Dividende | diviseur | reste |       |
|-----------|----------|-------|-------|
| 49        | 25       | 24    | $r_1$ |
| 25        | 24       | 1     | $r_2$ |
| 24        | 1        | 0     | $r_3$ |

Le dernier reste non nul étant, alors le  $\text{pgcd}(49; 24) = 1$ .

b. Vérifier que le couple (10 ; 5) est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E) :

On a  $25 \times 10 - 49 \times 5 = 250 - 245 = 5$ . D'où le couple (10 ; 5) est une solution particulière de (E).

Résolvons l'équation (E) :

$$\begin{cases} 25 \times 10 - 49 \times 5 = 5 \\ 25x - 49y = 5 \end{cases} \Rightarrow 25(x - 10) - 49(y - 5) = 0 \Rightarrow 25(x - 10) = 49(y - 5)$$

$$\bullet 25(x - 10) = 49(y - 5) \Rightarrow 25 \mid 49(y - 5) \text{ et d'après Gauss } \begin{cases} 25 \mid 49(y - 5) \text{ alors } 25 \mid (y - 5) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y - 5 = 25k \\ 49 \wedge 25 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 25k + 5$$

$$\begin{cases} 25x - 49y = 5 \\ y = 25k + 5 \end{cases} \Rightarrow x = 49k + 10 \Rightarrow \begin{cases} x = 49k + 10 \\ y = 25k + 5 \end{cases}$$

D'où  $S = \{(49k + 10; 25k + 5) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

c. Montrer qu'il existe un unique entier  $p$  compris entre 1960 et 2018 tel que  $25p \equiv 5[49]$  :

$$25p \equiv 5[49] \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; 25p = 49q + 5 \Leftrightarrow (p; q) \text{ solution de l'équation (E)} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 49k + 10 \\ q = 25k + 5 \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

On a  $1960 \leq p \leq 2018 \Rightarrow 1960 \leq 49k + 10 \leq 2018 \Rightarrow \frac{1960-10}{49} \leq k \leq \frac{2018-10}{49}$ . La seule valeur possible de  $k$  est 40.

Donc la seule valeur possible de  $p$  est :

$$p = 49 \times 40 + 10 = 1970.$$

2. a. Justifier que si  $(x; y)$  est une solution de (E) alors  $5x \equiv 1[7]$  et  $y \equiv 0[5]$  :

Le couple  $(x; y)$  solution de (E)  $\Leftrightarrow 25x - 49y = 5 \Leftrightarrow 25x - 5 = 49y \Leftrightarrow 5(5x - 1) = 7 \times 7y$

$$\bullet 5(5x - 1) = 7 \times 7y \Rightarrow 7 \mid 5(5x - 1).$$

$$\begin{cases} 7 \mid 5(5x - 1) \text{ alors d'après Gauss } 7 \mid (5x - 1) \Rightarrow 5x - 1 \equiv 0[7] \Rightarrow 5x \equiv 1[7] \\ 7 \wedge 5 = 1 \end{cases}$$

$$\bullet 5(5x - 1) = 7 \times 7y \Rightarrow 5 \mid 7 \times 7y. \begin{cases} 5 \mid 7 \times 7y \\ 49 \wedge 5 = 1 \end{cases} \text{ alors d'après Gauss } 5 \mid y \Rightarrow y \equiv 0[5]$$

b. Montrer que  $5x \equiv 1[7]$  si et seulement si  $x \equiv 3[7]$  :

Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour  $x$  et  $5x$ .

|      |   |   |   |   |   |   |   |
|------|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $5x$ | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |

Du tableau on déduit que  $5x \equiv 1[7] \Leftrightarrow x \equiv 3[7]$

3. a. Soit  $x$  un entier relatif. Quels sont les restes de  $x^2$  dans la division euclidienne par 7 ?

Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour  $x$  et  $5x$ .

|       |   |   |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $x^2$ | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |

L'ensemble des restes dans la division euclidienne par 7 est  $\{0; 1; 2; 4\}$ .

b. Existe-il un couple  $(x; y)$  d'entiers relatifs tels que  $(x^2; y^2)$  soit solution de (E) ?

D'après la question 2) pour que le couple  $(x^2; y^2)$  soit solution de (E) il faut que  $5x^2 \equiv 1[7] \Rightarrow x^2 \equiv 3[7]$  ça est impossible car 3 ne peut pas être un reste dans la division euclidienne de  $x^2$  par 7.

### Exercice N°2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose  $P(z) = z^3 - (1 + 4i)z^2 - (9 - i)z - 6 + 18i$ .

1. a. Calculer  $P(3i)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b)$  :

$$P(3i) = (3i)^3 - (1 + 4i)(3i)^2 - (9 - i) \times 3i - 6 + 18i = -27i + 9 + 36i - 27i - 3 - 6 + 18i = 0$$

$3i$  est une racine de du polynôme  $P$ , alors il existe deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tel que :  $P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b)$ .

$\Rightarrow P(z) = (z - 3i)(z^2 - (1 + i)z - 6 - 2i)$

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  :

$P(z) = 0 \Rightarrow (z - 3i)(z^2 - (1 + i)z - 6 - 2i) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} z - 3i = 0 \\ z^2 - (1 + i)z - 6 - 2i = 0 \end{cases}$

•  $z - 3i = 0 \Rightarrow z = 3i$   
 •  $z^2 - (1 + i)z - 6 - 2i = 0$  :

$\Delta = (-(1 + i))^2 - 4 \times 1 \times (-6 - 2i) = 1 - 1 + 2i + 24 + 8i = 24 + 10i = 5^2 - 1^2 + 2 \times 1 \times 5i = (5 + i)^2$

$\Rightarrow z = \frac{1+i+5+i}{2} = 3 + i$  et  $z = \frac{1+i-5-i}{2} = -2$ .

Donc l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z)=0$  est  $\{3i; 3 + i; -2\}$ .

c. On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $|z_C| \leq |z_B| \leq |z_A|$ . Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC :

On remarque facilement que  $|-2| \leq |3i| \leq |3 + i|$ , alors on a :  $z_A = 3 + i$  ;  $z_B = 3i$  et  $z_C = -2$  (voir la construction).

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{3+i-3i}{-2-3i} = \frac{3-2i}{-2-3i} = i$ . D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

d. Soit  $A' = \text{bar} \{(A; -5); (B; 6); (C; 12)\}$ . Vérifier que l'affixe de  $A'$  est  $z_{A'} = -3 + i$ . Placer  $A'$  :

$z_{A'} = \frac{-5z_A + 6z_B + 12z_C}{13} = \frac{-5(3+i) + 6(3i) + 12(-2)}{13} = -3 + i$ .

2. On considère l'ellipse  $\Gamma$  de sommets A,  $A'$  et B.

a. Déterminer le centre I et l'excentricité de  $\Gamma$  :

Les points A,  $A'$  et B étant des sommets et B appartient à la médiatrice du segment  $[AA']$ , donc la droite  $(AA')$  est un axe de  $\Gamma$  et par conséquent le centre de  $\Gamma$  est le milieu I de  $[AA']$  tel que  $z_I = i$ .

Les demi-longueurs des axes sont :  $a = IA = |3 + i - i| = 3$  et  $b = IB = |3i - i| = |2i| = 2$ .

$a > b$  alors on a :  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$  ; l'excentricité  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

b. Déterminer une équation cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  :

Une équation cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  est :  $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

c. Préciser l'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe  $(Ox)$  :

Les coordonnées  $(x; y)$  des points d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe  $(Ox)$  vérifient :

$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Donc  $\Gamma$  coupe  $(Ox)$  en deux points D  $(\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0)$  et E  $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0)$ .

d. Déterminer les foyers et les directrices de  $\Gamma$  puis construire  $\Gamma$  :

Les coordonnées des foyers dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  sont  $F(\sqrt{5}; 0)$  et  $F'(-\sqrt{5}; 0)$  et les directrices de  $\Gamma$  sont les droites D et D'.

d'équations respectives  $x = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{5}}$  et  $x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ . On peut remarquer facilement que  $|-2| \leq |3i| \leq |3 + i|$ , alors on a :  $z_A = 3 + i$  ;  $z_B = 3i$  et  $z_C = -2$  (voir la construction).

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

d. Soit  $A' = \text{bar} \{(A; -5); (B; 6); (C; 12)\}$ . Vérifier que l'affixe de  $A'$  est  $z_{A'} = -3 + i$ . Placer  $A'$  :

$z_{A'} = \frac{-5z_A + 6z_B + 12z_C}{13} = \frac{-5(3+i) + 6(3i) + 12(-2)}{13} = -3 + i$ .

2. On considère l'ellipse  $\Gamma$  de sommets A,  $A'$  et B.

a. Déterminer le centre I et l'excentricité de  $\Gamma$  :

Les points A,  $A'$  et B étant des sommets et B appartient à la médiatrice du segment  $[AA']$ , donc la droite  $(AA')$  est un axe de  $\Gamma$  et par conséquent le centre de  $\Gamma$  est le milieu I de  $[AA']$  tel que  $z_I = i$ .

Les demi-longueurs des axes sont :  $a = IA = |3 + i - i| = 3$  et  $b = IB = |3i - i| = |2i| = 2$ .

$a > b$  alors on a :  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$  ; l'excentricité  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

b. Déterminer une équation cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  :

Une équation cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  est :  $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

c. Préciser l'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe  $(Ox)$  :

Les coordonnées  $(x; y)$  des points d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe  $(Ox)$  vérifient :

$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Donc  $\Gamma$  coupe  $(Ox)$  en deux points D  $(\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0)$  et E  $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0)$ .

d. Déterminer les foyers et les directrices de  $\Gamma$  puis construire  $\Gamma$  :

Les coordonnées des foyers dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  sont  $F(\sqrt{5}; 0)$  et  $F'(-\sqrt{5}; 0)$  et les directrices de  $\Gamma$  sont les droites D et D'.

d'équations respectives  $x = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{5}}$  et  $x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ . On peut remarquer facilement que  $|-2| \leq |3i| \leq |3 + i|$ , alors on a :  $z_A = 3 + i$  ;  $z_B = 3i$  et  $z_C = -2$  (voir la construction).

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

d. Soit  $A' = \text{bar} \{(A; -5); (B; 6); (C; 12)\}$ . Vérifier que l'affixe de  $A'$  est  $z_{A'} = -3 + i$ . Placer  $A'$  :

$z_{A'} = \frac{-5z_A + 6z_B + 12z_C}{13} = \frac{-5(3+i) + 6(3i) + 12(-2)}{13} = -3 + i$ .

2. On considère l'ellipse  $\Gamma$  de sommets A,  $A'$  et B.

a. Déterminer le centre I et l'excentricité de  $\Gamma$  :

Les points A,  $A'$  et B étant des sommets et B appartient à la médiatrice du segment  $[AA']$ , donc la droite  $(AA')$  est un axe de  $\Gamma$  et par conséquent le centre de  $\Gamma$  est le milieu I de  $[AA']$  tel que  $z_I = i$ .

Les demi-longueurs des axes sont :  $a = IA = |3 + i - i| = 3$  et  $b = IB = |3i - i| = |2i| = 2$ .

$a > b$  alors on a :  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$  ; l'excentricité  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

b. Déterminer une équation cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  :

Une équation cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  est :  $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

c. Préciser l'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe  $(Ox)$  :

Les coordonnées  $(x; y)$  des points d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe  $(Ox)$  vérifient :

$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Donc  $\Gamma$  coupe  $(Ox)$  en deux points D  $(\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0)$  et E  $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0)$ .

d. Déterminer les foyers et les directrices de  $\Gamma$  puis construire  $\Gamma$  :

Les coordonnées des foyers dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  sont  $F(\sqrt{5}; 0)$  et  $F'(-\sqrt{5}; 0)$  et les directrices de  $\Gamma$  sont les droites D et D'.

d'équations respectives  $x = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{5}}$  et  $x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ . On peut remarquer facilement que  $|-2| \leq |3i| \leq |3 + i|$ , alors on a :  $z_A = 3 + i$  ;  $z_B = 3i$  et  $z_C = -2$  (voir la construction).

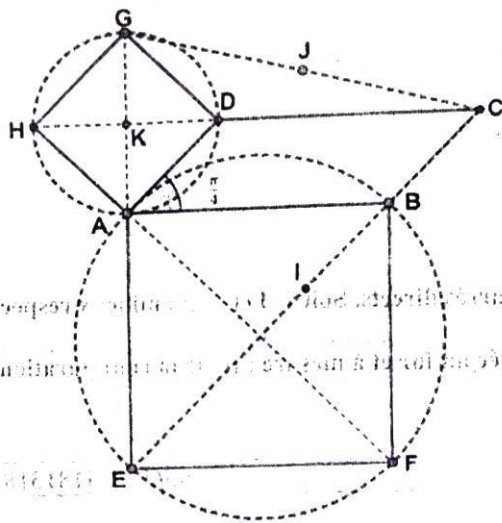
D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

d. Soit  $A' = \text{bar} \{(A; -5); (B; 6); (C; 12)\}$ . Vérifier que l'affixe de  $A'$  est  $z_{A'} = -3 + i$ . Placer  $A'$  :

$z_{A'} = \frac{-5z_A + 6z_B + 12z_C}{13} = \frac{-5(3+i) + 6(3i) + 12(-2)}{13} = -3 + i$ .

Tableau d'Hôrner

|    |   |       |       |        |
|----|---|-------|-------|--------|
|    | 1 | -1-4i | -9+i  | -6+18i |
| 3i |   | 3i    | 3-3i  | 6-18i  |
|    | 1 | -1-i  | -6-2i | 0      |
|    |   | a     | b     |        |



2. Soit  $R_A$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , T la translation de vecteur  $\overrightarrow{BC}$  et  $f = T \circ R_A$ .

a. Quelle est la nature de f :  
f est la composée d'une translation avec une rotation différente de l'identité donc f est une rotation de même angle  $\frac{\pi}{2}$ .

b. Déterminer f(D) puis caractériser F. Quelle est l'image du point F par f ?  
On a :  $R_A(D) = H$  et  $T(H) = G$  alors  $f(D) = G$  et comme le centre  $\Omega$  de f vérifie que  $\Omega DG$  est un triangle isocèle rectangle en  $\Omega$  et direct et que le triangle  $KDG$  est un triangle isocèle rectangle en K et direct alors  $\Omega$  et K sont confondus. Donc

$f = r_{(K, \frac{\pi}{2})}$   
c. Justifier que les segments [DF] et [CG] sont perpendiculaires et de même longueur :

$D \rightarrow G$   
 $F \rightarrow C \mid \left( \overrightarrow{DF}; \overrightarrow{GC} \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  les segments [DF] et [CG] sont perpendiculaires et de même longueur.

3. a. Comparer les vecteurs  $\overrightarrow{DF}$  et  $\overrightarrow{CE}$  puis en déduire que le triangle ECG est rectangle isocèle direct en C :

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$  or  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE}$  donc

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$ .

$CE = DF = CG \mid \left( \overrightarrow{CE}; \overrightarrow{GC} \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  ECG est rectangle isocèle direct en C.

b. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme E en C et C en G :

Comme  $EG=CG$  alors il existe un unique déplacement g tel que  $\begin{cases} g(E) = C \\ g(C) = G \end{cases}$

c. Vérifier que g est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite :

g est soit une réflexion soit une symétrie glissante.

g ne peut pas être une réflexion car comme  $g(E) = C$  alors on aura  $g(C) = E$  ce qui n'est pas le cas. D'où g est une symétrie glissante.

L'axe de g passe par les milieux des segments qui sont respectivement I et J. D'où l'axe de d est (IJ).

Comme  $gog(E) = G$  alors le vecteur de g est  $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{IJ}$  (théorème des milieux).

Donc  $g = t_{\overrightarrow{IJ}} \circ s_{(IJ)} = s_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{IJ}}$

4. Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en D.

a. Déterminer le rapport de S et une mesure de l'angle de S :

Soit k le rapport et  $\alpha$  une mesure de l'angle de S.

$$\begin{cases} S(B) = A \\ S(A) = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{AB}{AB} = \frac{1}{2} \\ \alpha = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AD}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \\ \alpha = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

b. Montrer que le centre  $\Omega$  de S appartient aux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  circonscrits respectivement aux carrés AFEB et ADGH. Placer  $\Omega$  :

Le centre  $\Omega$  de S vérifie :  $(\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega A}) = (\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega D}) = \frac{5\pi}{4}$

•  $(\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi = (\overrightarrow{EB}; \overrightarrow{EA}) + \pi \Rightarrow$  les points  $\Omega, A, B$  et E sont cocycliques.

Donc  $\Omega$  appartient au cercle circonscrit au triangle ABE qui est  $\Gamma_1$ .

•  $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega D}) = \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi = (\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GD}) + \pi \Rightarrow$  les points  $\Omega, A, D$  et G sont cocycliques.

Donc  $\Omega$  appartient au cercle circonscrit au triangle ADG qui est  $\Gamma_2$ .

Cela montre que  $\Omega$  est le 2<sup>e</sup> point d'intersection autre que A de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

c. Montrer que  $S(F) = G$  puis en déduire que  $S(\Gamma_1) = \Gamma_2$  :

Soit  $F' = S(F)$ . On a  $S : \begin{cases} B \rightarrow A \\ A \rightarrow D \\ F \rightarrow F' \end{cases}$  et comme BAF est un triangle, isocèle rectangle en A et direct alors son image ADF' par S est aussi un triangle, isocèle rectangle en D et direct c'est le cas du triangle ADG. Donc  $S(F) = G$ .

d. Soit M un point de  $\Gamma_1$  et  $M' = S(M)$ . Montrer que les points A, M et M' sont alignés :

• M un point de  $\Gamma_1$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EB}) [\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{4} [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{4} [\pi]$$

$$\begin{cases} S(B) = A \\ S(M) = M' \end{cases} \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{5\pi}{4} [2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM'}) [2\pi] = -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} [\pi] = \pi [\pi]$$

Donc les points A, M et M' sont alignés.

**Exercice N°4 :**

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' - 6y' + 8 = 0$  :

L'équation caractéristique de (E) est :  $x^2 - 6x + 8 = 0$ .

$$\Delta' = (-3)^2 - 1 \times 8 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x_1 = 3 + 1 = 4 \text{ et } x_2 = 3 - 1 = 2.$$

La solution générale y de (E) est :  $y(x) = Ae^{4x} + Be^{2x}$  où A et B des réels.

b. Déterminer la solution  $y_0$  de (E) dont la courbe passe par le point A(0 ; -1) et admet en ce point une tangente horizontale :

$$y_0(x) = Ae^{4x} + Be^{2x}$$

On a :  $\begin{cases} y_0(0) = -1 \\ y_0'(0) = 0 \end{cases}$  or  $y'(x) = 4Ae^{4x} + 2Be^{2x}$  alors  $\begin{cases} y_0(0) = -1 \\ y_0'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ 4A + 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$

D'où  $y_0(x) = e^{4x} - 2e^{2x}$

2. Soit la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{4x} - 2e^{2x}$  et (C) sa courbe représentative dans repère orthonormé (O;  $\vec{i}; \vec{j}$ ).

a. Calculer et interpréter les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{4x} - 2e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x} - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t - 2 \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 - 2 \times 0 = 0$$

Donc  $y=0$  AH en  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{4x} - 2e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2) e^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t - 2) \times \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

(C) admet branche infinie au voisinage de  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x} - 2e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2x} - 2)e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t - 2) \times \lim_{t \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{e^t}{t} = +\infty \times (+\infty) = +\infty.$$

D'où (C) admet BP de direction (Oy) en  $+\infty$ .

b. Dresser de tableau de variations de f :

$$f'(x) = 4e^{4x} - 4e^{2x} = 4e^{4x}(e^{2x} - 1) = 4e^{4x}(e^x - 1)(e^x + 1).$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(e^x - 1)$ .

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

|         |           |    |           |
|---------|-----------|----|-----------|
| x       | $-\infty$ | 0  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0  | +         |
| f(x)    | 0         | -1 | $+\infty$ |

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle  $I = ]-\infty; 0]$ .

a. Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera :

g est continue et décroissante alors elle réalise une bijection de I sur l'intervalle  $J = g(I) = [-1; 0]$ .

|         |           |    |
|---------|-----------|----|
| x       | $-\infty$ | 0  |
| $g'(x)$ | -         | 0  |
| g(x)    | 0         | -1 |

b. Calculer et interpréter la limite suivante

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{g^{-1}(x)}{x+1}$  où  $g^{-1}$  est la réciproque de g :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{g^{-1}(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{g^{-1}(x) - 0}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(-1)}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y - 0}{g(y) - g(0)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{g(y) - g(0)}{y - 0}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Graphiquement, (C'), la courbe de  $g^{-1}$  admet à droite de (-1) une demi-tangente verticale orientée vers le bas.

c. Soit  $(C')$  la courbe de  $g^{-1}$ . Montrer que les courbes  $(C)$  et  $(C')$  se coupent en unique point  $B$  d'abscisse  $\alpha$  tel que  $-0,6 < \alpha < -0,5$  :

Les courbes  $(C)$  et  $(C')$  sont symétriques par rapport à la droite  $\Delta : y = x$  alors ces courbes se coupent sur  $\Delta$ . D'où les points d'intersection des courbes  $(C)$  et  $(C')$  sont les points d'intersection de  $(C)$  et  $\Delta$ .

$g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$ , posons  $h(x) = g(x) - x$ .

$$h'(x) = g'(x) - 1 = 4e^{4x} - 4e^{2x} - 1 = (2e^{2x} - 1)^2 - 2 = (2e^{2x} - 1 - \sqrt{2})(2e^{2x} - 1 + \sqrt{2})$$

Le signe de  $h'(x)$  est celui de  $(2e^{2x} - 1 - \sqrt{2})$  car  $(2e^{2x} - 1 + \sqrt{2}) > 0$

$$2e^{2x} - 1 - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2e^{2x} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow e^{2x} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} x = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$h(0) = -1$$

|         |           |    |
|---------|-----------|----|
| x       | $-\infty$ | 0  |
| $h'(x)$ |           | -  |
| $h(x)$  | $+\infty$ | -1 |

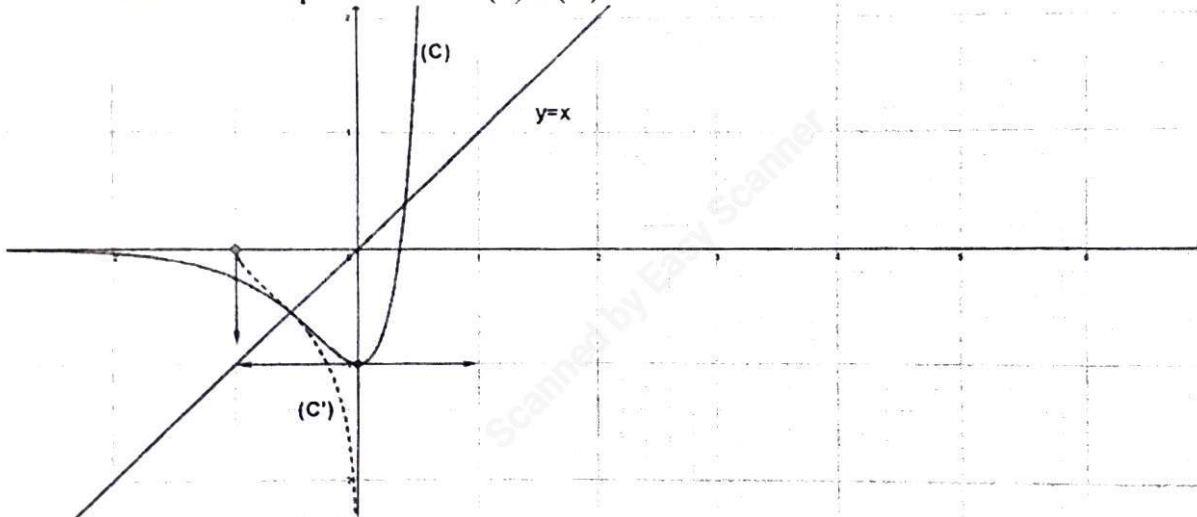
$h$  est continue de plus  $h(]-\infty; 0]) = [-1; +\infty[$  et comme  $0 \in [-1; +\infty[$  alors il existe un unique nombre  $\alpha \in ]-\infty; 0]$  tel que  $h(\alpha) = 0$ . D'où l'équation  $h(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $I$  une unique solution  $\alpha$ .

$$f(-0,6) \approx 0,088 > 0$$

$\Rightarrow$  d'après le théorème de la valeur intermédiaire  $-0,6 < \alpha < -0,5$ .

$$f(-0,5) \approx -0,1 < 0$$

d. Tracer dans le même repère les courbes  $(C)$  et  $(C')$  :



Donner l'expression de  $g^{-1}(x)$  :

$\forall x \in [-1; 0], g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x ; y \in ]-\infty; 0]$ . Exprimons  $y$  en fonction de  $x$ .

$$g(y) = x \Rightarrow e^{4y} - 2e^{2y} = x \Rightarrow e^{4y} - 2e^{2y} + 1 = x + 1$$

$$\Rightarrow (e^{2y} - 1)^2 = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} e^{2y} - 1 = \sqrt{x+1} \\ e^{2y} - 1 = -\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{2y} = 1 + \sqrt{x+1} \\ e^{2y} = 1 - \sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = \ln(1 + \sqrt{x+1}) \\ 2y = \ln(1 - \sqrt{x+1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{x+1}) \\ y = \frac{1}{2} \ln(1 - \sqrt{x+1}) \end{cases}$$

Or  $y = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{x+1})$  est rejetée car  $y < 0$  alors  $g^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln(1 - \sqrt{x+1})$ .

4. Soit  $S$  l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes  $(C)$  et  $(C')$  et les axes de coordonnées.

a. Montrer que  $S = 2 \int_{\alpha}^0 (x - f(x)) dx$  :

Soit  $S_1$  l'aire du domaine délimité par  $(C)$ , la première bissectrice et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=\alpha$  et soit  $S_2$  l'aire du domaine délimité par  $(C')$ , la première bissectrice et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=\alpha$ . Les deux domaines étant symétriques par rapport à  $\Delta$ , ils ont même aire, d'où  $S_1 = S_2$

$\Rightarrow S = 2S_2 = 2S_1 = 2 \int_{\alpha}^0 (x - f(x)) dx$  car sur l'intervalle  $[\alpha; 0]$  l'axe  $\Delta$  est au dessus de  $(C)$ .

b. Calculer la valeur de  $S$  en fonction de  $\alpha$  et en donnée une valeur approchée à  $10^{-2}$  près :

$$S = 2 \int_{\alpha}^0 (x - f(x)) dx = 2 \int_{\alpha}^0 (x - e^{4x} + 2e^{2x}) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} e^{4x} + e^{2x} \right]_{\alpha}^0 = -\frac{1}{4} + 1 - \left( \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{4} e^{4\alpha} + e^{2\alpha} \right) = \frac{3}{4} - \left( \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{4} e^{4\alpha} - e^{2\alpha} \right)$$

$$S \approx 0,58 \text{ (une valeur approchée à } 10^{-2} \text{ près)}$$

## Exercice N°5 :

## Partie A :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1)$ . On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1) \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{t-1}{t} - t \ln t \right) = \frac{-1}{0^+} - 0 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1) \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{t-1}{t} - t \ln t \right) = 1 - (+\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x+1} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x+1) \right) = +\infty.$$

2. a. Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$  puis étudier les variations de  $f'$  :

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \ln(x+1) - 1 \text{ et } f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^3} - \frac{1}{x+1} < 0 \text{ pour } x \in ]-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{1}{(x+1)^2} - \ln(x+1) - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{t^2} - \ln t - 1 \right) = +\infty - (-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{(x+1)^2} - \ln(x+1) - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} - \ln t \right) = 0 - (+\infty) = -\infty.$$

|          |           |   |           |
|----------|-----------|---|-----------|
| $x$      | -1        |   | $+\infty$ |
| $f''(x)$ |           | - |           |
| $f'(x)$  | $+\infty$ |   | $-\infty$ |

b. Calculer  $f'(0)$  et en déduire le signe  $f'(x)$  :

$$f'(0) = \frac{1}{(0+1)^2} - \ln(0+1) - 1 = 0. \text{ D'où le résumé du signe de } f'(x) \text{ dans le tableau suivant :}$$

|         |    |   |           |
|---------|----|---|-----------|
| $x$     | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +  | 0 | -         |

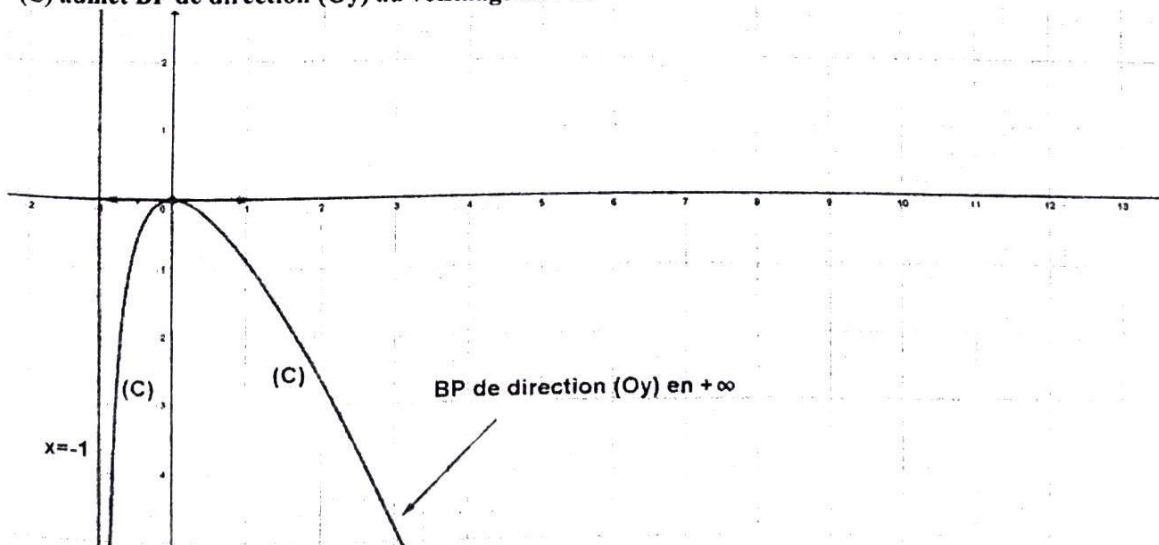
3. a. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

|         |    |   |           |
|---------|----|---|-----------|
| $x$     | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |    | + | 0         |
| $f(x)$  |    | 0 |           |

b. Tracer la courbe (C) :

•  $x = -1$  AV de (C).

• (C) admet BP de direction (Oy) au voisinage de  $+\infty$ .



4. a. Calculer  $\int_0^x \frac{t}{t+1} dt$  et à l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^x (t+1)\ln(t+1) dt$  :

$$\int_0^x \frac{t}{t+1} dt = \int_0^x \frac{t+1-1}{t+1} dt = \int_0^x 1 dt - \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = [t]_0^x - [\ln(t+1)]_0^x = x - \ln(x+1).$$

Calculons  $\int_0^x (t+1) \ln(t+1) dt$  à l'aide d'une intégration par partie.

$$\begin{aligned} u(t) = \ln(t+1) & \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t+1} \\ v'(t) = t+1 & \Rightarrow v(t) = \frac{(t+1)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x (t+1) \ln(t+1) dt &= \left[ \frac{(t+1)^2}{2} \ln(t+1) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t+1}{2} dt = \left[ \frac{(t+1)^2}{2} \ln(t+1) \right]_0^x - \left[ \frac{(t+1)^2}{4} \right]_0^x \\ &= \frac{(x+1)^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

b. En déduire la primitive F de f sur  $]-1; +\infty[$  qui s'annule en 0 :

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x \left( \frac{x}{x+1} - (x+1) \ln(x+1) \right) dt = \int_0^x \frac{t}{t+1} dt - \int_0^x (t+1) \ln(t+1) dt \\ &= x - \ln(x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} \ln(x+1) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x - \left( 1 + \frac{(x+1)^2}{2} \right) \ln(x+1) \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x - \left( \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} \right) \ln(x+1). \end{aligned}$$

c. Calculer l'aire  $A_n$  du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x=0$  et  $x=n$ , pour  $n$  un entier naturel  $n \geq 1$  :

$$A_n = \int_0^n -f(t) dt = - \int_0^n f(t) dt = \left( \frac{n^2}{2} + n + \frac{3}{2} \right) \ln(n+1) - \frac{n^2}{4} - \frac{3}{2}n.$$

**Partie B :**

$$\text{Soit } (U_n) \text{ la suite définie } \forall n \geq 1 \text{ par : } U_n = \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{3} f(2) + \frac{1}{4} f(3) + \dots + \frac{1}{n} f(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} f(k).$$

$$1. \text{ Posons } \forall n \geq 1 : V_n = \frac{1}{n+1} f(n).$$

$$a. \text{ Vérifier que } \forall n \geq 1 : V_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \ln(n+1) :$$

$$\begin{aligned} V_n = \frac{1}{n+1} f(n) &= \frac{1}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} - (n+1) \ln(n+1) \right) = \frac{1}{n+1} \left( \frac{n+1-1}{n+1} - (n+1) \ln(n+1) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{n+1} - (n+1) \ln(n+1) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \ln(n+1) \end{aligned}$$

$$b. \text{ En déduire que } U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \ln(n!) :$$

$$\begin{aligned} U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} f(k) &= \sum_{k=1}^{n-1} V_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} - \ln(k+1) \right) = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \ln k \right) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^n \ln k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \ln \left( \prod_{k=2}^n k \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \ln(n!) \end{aligned}$$

$$2. \text{ Notons } \forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

$$a. \text{ Montrer que } \forall k \geq 1, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \text{ puis en déduire que } \frac{1}{n} + \ln n \leq S_n \leq 1 + \ln n :$$

$$\forall k \geq 1, k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \left[ \frac{t}{k+1} \right]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \left[ \frac{t}{k} \right]_k^{k+1} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

$$\text{En déduisons que } \frac{1}{n} + \ln n \leq S_n \leq 1 + \ln n :$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \Rightarrow S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow S_n - 1 \leq [\ln t]_1^n \leq S_n - \frac{1}{n} \Rightarrow S_n - 1 \leq \ln n \leq S_n - \frac{1}{n} \Rightarrow -1 \leq -S_n + \ln n \leq -\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow -1 - \ln n \leq -S_n \leq -\frac{1}{n} - \ln n \Rightarrow \frac{1}{n} + \ln n \leq S_n \leq 1 + \ln n.$$

$$b. \text{ Montrer que } \forall k \geq 1, \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \text{ puis en déduire que } 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq S'_n \leq 2 - \frac{1}{n} :$$

$$\forall k \geq 1, k \leq t \leq k+1 \Rightarrow k^2 \leq t^2 \leq (k+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow \left[ \frac{t}{(k+1)^2} \right]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \left[ \frac{t}{k^2} \right]_k^{k+1} \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

$$\text{En déduisons que } 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq S'_n \leq 2 - \frac{1}{n} :$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \Rightarrow S'_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t^2} \leq S'_n - \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow S'_n - 1 \leq \left[ \frac{-1}{t} \right]_1^n \leq S'_n - \frac{1}{n^2} \Rightarrow S'_n - 1 \leq -\frac{1}{n} + 1 \leq S'_n - \frac{1}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} S'_n - 1 \leq -\frac{1}{n} + 1 \\ -\frac{1}{n} + 1 \leq S'_n - \frac{1}{n^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S'_n \leq 2 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq S'_n \end{cases}$$

c. En déduire que  $\forall n \geq 1; \frac{2}{n} - 2 \leq U_n + \ln((n+1)!) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ ;

On a  $\forall n \geq 1; U_n = S'_n - S_n - \ln(n!) \Rightarrow U_n + \ln((n-1)!) = S'_n - S_n - \ln(n!) + \ln((n-1)!)$

$\Rightarrow U_n + \ln((n-1)!) = S'_n - S_n - \ln\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right) \Rightarrow U_n + \ln((n-1)!) = S'_n - S_n - \ln(n)$

Or  $\forall n \geq 1; \frac{1}{n} + \ln n \leq S_n \leq 1 + \ln n$  et  $\frac{1}{n} - 2 \leq -S'_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{2}{n} - 2 + \ln n \leq S_n - S'_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \ln n$

$\Rightarrow \frac{2}{n} - 2 \leq S_n - S'_n - \ln n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ .

D'où  $\frac{2}{n} - 2 \leq U_n + \ln((n+1)!) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ .

## Bac 2018 session complémentaire

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (7 + 3i)z^2 + (12 + 15i)z - 4 - 18i.$$

1. a. Calculer  $P(2)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$ .

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

c. On considère les points  $A, B$  et  $D$  images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $\text{Im}(z_A) \leq \text{Im}(z_B) \leq \text{Im}(z_D)$ . Placer les points  $A, B$  et  $D$  et déterminer la nature du triangle  $ABD$ .

2. a. Déterminer le barycentre du système  $\{(A; 9); (B; -6); (C; 2)\}$ , où  $C$  est symétrique de  $A$  par rapport à  $(BD)$ .

b. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_1$  des points  $M$  du plan tels que  $9MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10$ .

c. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_2$  des points  $M$  du plan tels que  $4MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10$ .

d. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_3$  des points  $M$  du plan tels que  $(9\overline{MA} - 6\overline{MB} + 2\overline{MC})(\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}) = 10$ .

3. Soit  $S^0 = \text{id}_P$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, S^{n+1} = \text{SoS}^n$  où  $S$  est la similitude directe qui transforme  $A$  en  $B$  et  $B$  en  $D$ .

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $S^{2018}$ .

b. Justifier que  $S^{2020^{2020}}$  est une homothétie de rapport négatif.

#### Exercice N°2 :

I- On considère la fonction numérique  $f$  sur  $[0; +\infty[$  par :  $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  à droite de  $0$ .

b. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

2. a. Montrer que  $\forall t \geq 0, 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$ .

b. En déduire que  $\forall x > 0, -\frac{1}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}$ .

c. En déduire que la courbe  $(C)$  admet une asymptote oblique  $\Delta$  dont on donnera l'équation.

3. Construire la courbe  $(C)$  et la droite  $\Delta$ .

4. a. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

b. Construire la courbe  $(C')$  de  $f^{-1}$  où  $f^{-1}$  est la réciproque de  $f$ .

II-  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on définit sur  $[0; +\infty[$  la fonction numérique  $f_n$  par :  $\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1. a. Montrer que  $f_n$  est continue et dérivable à droite de  $0$ .

b. Étudier les variations de  $f_n$  et en déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f_n(x) = \frac{1}{n}$  admet une unique solution  $\alpha_n$  sur  $]0; +\infty[$ .

2. a. Soit  $g_n(x) = f_n(x) - \frac{1}{n}$ . Étudier sur  $]0; +\infty[$  le signe de  $g_{n+1}(x) - g_n(x)$  et en déduire que la suite  $(\alpha_n)$  est strictement décroissante et qu'elle est convergente.

b. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1 \right)$ . En déduire la limite de  $(\alpha_n)$ .

Exercice N°3 :

Soit ABCD un carré direct de centre O et de côté  $a > 0$ . On note G le milieu du segment [AB] et E et F les points tels que le quadrilatère AEFG soit un carré direct.

- Faire une figure illustrant les données que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale.
- Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme O en A et B et O.
- Déterminer les éléments caractéristiques de  $r$ .
- Soit  $g$  l'antidépacement défini par  $g(B)=E$  et  $g(O)=G$ . Montrer que  $g$  est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.
- Montrer qu'il existe une unique similitude  $s$  qui transforme C en F et B et E, déterminer le rapport et un angle de  $s$ .
- Déterminer l'image du carré ABCD par  $s$  puis en déduire le centre de  $s$ .
- Soit  $h=s \circ r^{-1}$ .
  - Montrer que  $h$  est une homothétie dont on précisera le rapport.
  - Soit I le centre de  $h$ . Montrer que I est le barycentre du système  $\{(O; 1); (E; 2)\}$ . Placer I.
  - Pour tout point M du plan autre que I, on pose  $M'=r(M)$  et  $M''=s(M)$ . Montrer que la droite  $(M'M'')$  passe par un point fixe que l'on précisera.
- Soit l'hyperbole de foyer O et F qui passe par le point J projeté orthogonal de I sur (OF).
  - Déterminer les coordonnées des points O, E, I et J dans le repère  $(G; \overline{GB}; \overline{GO})$ .
  - Ecrire l'équation de  $\Gamma$  dans ce repère.
  - Déterminer les sommets, les asymptotes et l'excentricité de  $\Gamma$ .
  - Construire  $\Gamma$ .

Exercice N°4 :

On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x + 2\ln(1 + e^x)$  et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Partie A

- Donner le tableau de variation de  $f$ .
- Démontrer que la courbe (C) admet deux asymptotes D et D' que l'on déterminera et préciser leurs positions relatives par rapport à (C).
- Construire la courbe (C) et leurs asymptotes dans le même repère.
- Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = [0; +\infty[$ .
  - Montrer que  $g$  est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera.
  - Construire dans le repère précédent la courbe (C') de  $g^{-1}$ .

Partie B

On considère la suite numérique  $(u_n)$  par  $u_0 = \ln 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \int_0^{\ln 5} (f'(t))^n dt$ .

- Calculer  $u_1$ .
  - Montrer  $\forall x \in [0; \ln 5]$ ;  $0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$ .
    - En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln 5$ .
    - Déterminer la limite de  $(u_n)$ .
  - Montrer que  $\forall x \in [0; +\infty]$ ;  $(f'(x))^2 - 1 = -2f''(x)$ .
    - Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $u_{n+2} - u_n = \frac{-2}{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ .
  - En déduire que  $u_{2n} = \ln 5 - \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}$  et  $u_{2n+1} = \ln\left(\frac{9}{5}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$ .
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} \left(\frac{2}{3}\right)^p$ .
- Montrer que  $v_n = \ln 3 - \frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}$  puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

## Solution

Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose  $P(z) = z^3 - (7 + 3i)z^2 + (12 + 15i)z - 4 - 18i$ .

- Calculer  $P(2)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C}$ :  $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$ :  
 $P(2) = 2^3 - (7 + 3i) \times 2^2 + (12 + 15i) \times 2 - 4 - 18 = 8 - 28 - 12i + 24 + 30i - 4 - 18i = 0$ .  
 2 est une racine du polynôme P alors,  $\forall z \in \mathbb{C}$ :

$P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$ . Déterminons les réels  $a$  et  $b$  à l'aide du tableau d'Hôrner :

- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-2)(z^2 - (5+3i)z + 2 + 9i) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z-2=0 \\ z^2 - (5+3i)z + 2 + 9i = 0 \end{cases}$$

$$\bullet z-2=0 \Rightarrow z=2$$

Tableau d'Hôrner

|   |   |       |        |        |
|---|---|-------|--------|--------|
|   | 1 | -7-3i | 12+15i | -4-18i |
| 2 |   | 2     | -10-6i | 4+18i  |
|   | 1 | -5-3i | 2+9i   | 0      |
|   |   | a     | b      |        |

$$z^2 - (5 + 3i)z + 2 + 9i = 0:$$

$$\Delta = (-5 + 3i)^2 - 4 \times 1(2 + 9i) = 25 - 9 + 30i - 8 - 36i = 8 - 6i = (3 - i)^2$$

$$\Rightarrow z = \frac{5+3i+3-i}{2} = 4 + i \text{ et } z = \frac{5+3i-3+i}{2} = 1 + 2i$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z)=0$  est  $\{2; 4 + i; 1 + 2i\}$ .

c. On considère les points A, B et D images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $\text{Im}(z_A) \leq \text{Im}(z_B) \leq \text{Im}(z_D)$ . Placer les points A, B et D et déterminer la nature du triangle ABD :

$$\text{Im}(2) \leq \text{Im}(4 + i) \leq \text{Im}(1 + 2i) \Rightarrow z_A = 2; z_B = 4 + i \text{ et } z_D = 1 + 2i.$$

2. a. Déterminer le barycentre du système  $\{(A; 9); (B; -6); (C; 2)\}$ , où C est symétrique de A par rapport à (BD) :

$$\overline{DB} \left( \frac{3}{-1} \right) \Rightarrow (BD) : y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \text{ et la perpendiculaire à (BD) passant par A a pour équation } y = 3x - 6.$$

Soit I le milieu de [AC] alors les coordonnées (x ; y) de I vérifient le système  $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \\ y = 3x - 6 \end{cases}$

$$\Rightarrow I \left( \frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right) \Rightarrow z_C = 2z_I - z_A = 2 \times \left( \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i \right) - 2 = 3 + 3i.$$

Donc le barycentre du système  $\{(A; 9); (B; -6); (C; 2)\}$  a pour affixe :

$$\frac{9z_A - 6z_B + 2z_C}{5} = \frac{9 \times 2 - 6(4+i) + 2(3+3i)}{5} = 0. \text{ Donc le point O est le barycentre du système } \{(A; 9); (B; -6); (C; 2)\}.$$

b. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_1$  des points M du plan tels que  $9MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10$  :

$$\text{On pose } \varphi(M) = 9MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2.$$

$$\text{Donc } \varphi(M) = 5MO^2 + \varphi(O) \text{ où } \varphi(O) = 9 \times OA^2 - 6 \times OB^2 + 2 \times OC^2$$

$$\text{Or } OA^2 = |z_A|^2 = 4; OB^2 = |z_B|^2 = 17 \text{ et } OC^2 = |z_C|^2 = 18.$$

$$\Rightarrow \varphi(O) = 9 \times OA^2 - 6 \times OB^2 + 2 \times OC^2 = 9 \times 4 - 6 \times 17 + 2 \times 18 = -30 \Rightarrow \varphi(M) = 5MO^2 - 56.$$

$$9MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10 \Rightarrow 5MO^2 - 30 = -10 \Rightarrow 5MO^2 = 20 \Rightarrow MO^2 = 4 = OA^2 \Rightarrow MO = OA.$$

$\Gamma_1$  est le cercle de centre O passant par A.

c. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_2$  des points M du plan tels que  $4MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10$  :

$$\text{On pose } \psi(M) = 4MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 \text{ et}$$

$$\overline{f(M)} = 4\overline{MA} - 6\overline{MB} + 2\overline{MC}.$$

$$\text{Donc } \psi(M) = 2\overline{MO} \cdot \overline{f(O)} + \varphi(O) \text{ où } \psi(O) = 4OA^2 - 6OB^2 + 2OC^2 \text{ et } \overline{f(O)} = 4\overline{OA} - 6\overline{OB} + 2\overline{OC}$$

$$\psi(O) = 4OA^2 - 6OB^2 + 2OC^2 = 4 \times OA^2 - 6 \times OB^2 + 2 \times OC^2.$$

$$\text{On a } 9\overline{MA} - 6\overline{MB} + 2\overline{MC} = \vec{0} \Rightarrow 4\overline{MA} + 5\overline{MA} - 6\overline{MB} + 2\overline{MC} = \vec{0} \Rightarrow 4\overline{OA} - 6\overline{OB} + 2\overline{OC} = -5\overline{OA} \Rightarrow \overline{f(O)} = -5\overline{OA}.$$

$$\text{D'où } 4MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10 \Rightarrow 2\overline{MO} \cdot \overline{f(O)} + \varphi(O) = -10 \Rightarrow 2\overline{MO} \cdot (-5\overline{OA}) - 50 = -10.$$

$$\Rightarrow -10\overline{MO} \cdot \overline{OA} - 50 = -10 \Rightarrow \overline{MO} \cdot \overline{OA} + 5 = 1 \Rightarrow \overline{MO} \cdot \overline{OA} = -4 \Rightarrow \overline{OM} \cdot \overline{OA} = 4 \Rightarrow \overline{OM} \cdot \overline{OA} = \overline{OA} \cdot \overline{OA}$$

$$\Rightarrow \overline{OM} \cdot \overline{OA} - \overline{OA} \cdot \overline{OA} = 0 \Rightarrow \overline{OA}(\overline{OM} - \overline{OA}) = 0 \Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{AM} = 0. \text{ D'où } \Gamma_2 \text{ est la perpendiculaire à (OA) en A, c'est la tangente du cercle } \Gamma_1 \text{ en A.}$$

d. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_3$  des points M du plan tels que  $(9\overline{MA} - 6\overline{MB} + 2\overline{MC})(\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}) = 10$  :

$$\text{On pose } \overline{g(M)} = 9\overline{MA} - 6\overline{MB} + 2\overline{MC} \text{ et}$$

$$\overline{h(M)} = \overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}.$$

$$\text{On a : } O = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 9 & -6 & 2 \\ \hline \end{array} \text{ et bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline I & B \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array} = D \text{ car D est symétrique de B par rapport à I.}$$

$$\text{D'où } \overline{g(M)} = 5\overline{MO} \text{ et } \overline{h(M)} = \overline{MD}.$$

$$(9\overline{MA} - 6\overline{MB} + 2\overline{MC})(\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}) = 10 \Rightarrow 5\overline{MO} \cdot \overline{MD} = 10 \Rightarrow \overline{MO} \cdot \overline{MD} = 2 \Rightarrow MJ^2 - \frac{OD^2}{4} = 2 \text{ (où } J=O \cdot D)$$

$$\Rightarrow MJ^2 - OJ^2 = 2 \Rightarrow MJ^2 = 2 + OJ^2 \Rightarrow MJ^2 = 2 + \frac{1}{4} + 1 \Rightarrow MJ^2 = \frac{13}{4} \text{ or } AJ^2 = \frac{13}{4} \text{ alors } MJ^2 = AJ^2 \Rightarrow MJ = AJ$$

Donc  $\Gamma_3$  est le cercle de centre J passant par A où J le milieu de [OD].

3. Soit  $S^0 = \text{id}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, S^{n+1} = \text{SoS}^n$  où S est la similitude directe qui transforme A en B et B en D.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $S^{2018}$  :

$$z_D - z_B = \frac{1 + 2i - 4 - i}{4 + i - 2} = \frac{-3 + i}{2 + i} = \frac{(-3 + i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{-5 + 5i}{5} = -1 + i$$

• Une mesure de l'angle de S :

$$\alpha = (\overline{AB}; \overline{BD}) = \arg \left( \frac{z_D - z_B}{z_B - z_A} \right) = \arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{• Le rapport de S : } k = \frac{|z_D - z_B|}{|z_B - z_A|} = \left| \frac{z_D - z_B}{z_B - z_A} \right| = |-1 + i| = \sqrt{2}$$

$$\text{• Le centre de S est } \Omega \text{ dont l'affixe } \omega \text{ est tel que : } \omega = \frac{z_B - \sqrt{2}z_A}{1 - \sqrt{2}} = \frac{4 + i - 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{4 - 2\sqrt{2} + i}{1 - \sqrt{2}}$$

$$\text{Alors on a : } S^{2018} = s \left( \Omega; (\sqrt{2})^{2018}; \frac{3\pi}{4} \times 2018 \right) = s \left( \Omega; 2^{1009}; -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{D'où } S^{2018} = s \left( \Omega; 2^{1009}; -\frac{\pi}{2} \right)$$

b. Justifier que  $S^{2020^{2020}}$  est une homothétie de rapport négatif :

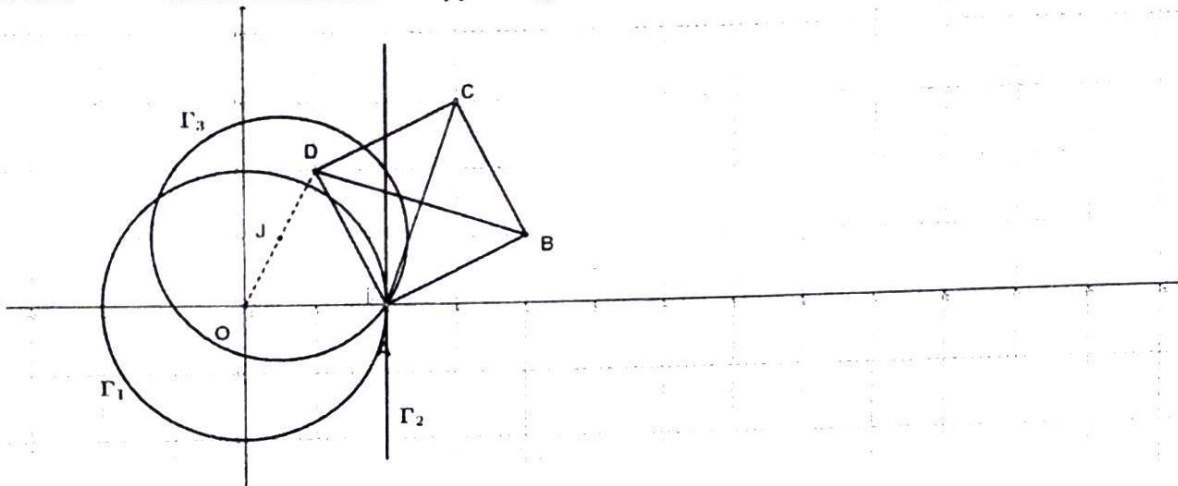
On a  $S^4 = s(\Omega; (\sqrt{2})^4; \frac{3\pi}{4} \times 4) = s(\Omega; 4; \pi) = h(\Omega; -4) = h$

On a :  $2020 \equiv 4[8] \Rightarrow 2020^{2020} \equiv 4^{2020}[8]$  or  $4^{2020} = 2^{4040} = 2^{3 \times 1346 + 2} = (2^3)^{1346} \times 2^2 = 8^{1346} \times 4$

$\Rightarrow 4^{2020} \equiv 4[8] \Rightarrow 2020^{2020} \equiv 4[8]$ . Alors il existe un entier relatif  $k$  tel que  $2020^{2020} = 8k + 4$

Donc  $S^{2020^{2020}} = S^{8k+4} = (S^4)^{2k+1} = h^{2k+1}$  qui est l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $(-4)^{2k+1} = -4^{2k+1} < 0$ .

D'où  $S^{2020^{2020}}$  est une homothétie de rapport négatif.



**Exercice N°2 :**

I- On considère la fonction numérique  $f$  sur  $[0; +\infty[$  par  $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On noté (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  à droite de 0 :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \times 0 = 0 = f(0)$ .

Donc  $f$  est continue à droite de 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+t}{e^t} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+t} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0 = f'(0)$ .

Donc  $f$  est dérivable à droite de 0.

b. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  :

$f'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}} + (x+1) \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = (x^2 + x + 1)e^{-\frac{1}{x}} > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-\frac{1}{x}} = +\infty \times 1 = +\infty$

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | 0 | +         |
| $f(x)$  | 0 | $+\infty$ |

2. a. Montrer que  $\forall t \geq 0; 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$  :

$\forall u \geq 0; 0 \leq e^{-u} \leq 1 \Rightarrow \forall x \geq 0; 0 \leq \int_0^x e^{-u} du \leq \int_0^x 1 du \Rightarrow \forall x \geq 0; 0 \leq [-e^{-u}]_0^x \leq [u]_0^x$

$\Rightarrow \forall x \geq 0; 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x \Rightarrow \forall t \geq 0; 0 \leq \int_0^t (1 - e^{-x}) dx \leq \int_0^t x dx \Rightarrow \forall t \geq 0; 0 \leq [x + e^{-x}]_0^t \leq \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^t$

$\Rightarrow \forall t \geq 0; 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2} \Rightarrow \forall x \geq 0; 0 \leq 1 + e^{-x} \leq x$ .

b. En déduire que  $\forall x > 0, -\frac{1}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}$  :

$\forall x > 0$  on a  $\frac{1}{x} > 0$  alors d'après a) on trouve  $0 \leq e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - 1 \leq \frac{1}{2x^2}$  et en multipliant par  $x+1 > 0$  on obtient

$0 \leq (x+1)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x+1}{x} - (x+1) \leq \frac{x+1}{2x^2} \Rightarrow 0 \leq (x+1)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - x \leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq (x+1)e^{-\frac{1}{x}} - x \leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}$

$\Rightarrow -\frac{1}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}$

D'où  $\forall x > 0, -\frac{1}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}$

c. En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique  $\Delta$  dont on donnera l'équation :  
D'après la double inégalité précédente et comme

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right) = 0$  et d'après les Gendarmes  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$  alors la droite  $\Delta : y = x$  est une asymptote oblique de (C) au voisinage de  $+\infty$ .

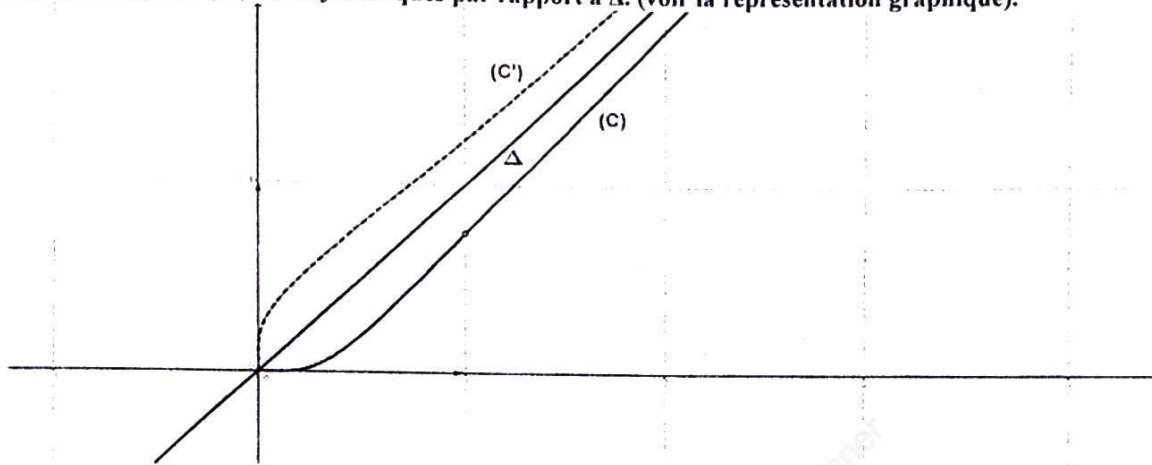
3. Construire la courbe (C) et la droite  $\Delta$  : (voir la construction graphique ci-dessous).

4. a. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera :

La fonction  $f$  est continue et croissante alors elle réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur l'intervalle  $J = ]0; +\infty[$ .

b. Construire la courbe (C') de  $f^{-1}$  où  $f^{-1}$  est la réciproque de  $f$  :

Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à  $\Delta$ . (voir la représentation graphique).



II- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on définit sur  $]0; +\infty[$  la fonction numérique  $f_n$  par :  $\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{x}} ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1. a. Montrer que  $f_n$  est continue et dérivable à droite de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{n} \times 0 = 0 = f_n(0)$$

D'où  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue à droite de 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{nx}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right) e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(e^{-t} + \frac{te^{-t}}{n}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(e^{-t} + \frac{1}{n} \times \frac{t}{e^t}\right) = 0$$

D'où  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est dérivable à droite de 0.

b. Etudier les variations de  $f_n$  et en déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f_n(x) = \frac{1}{n}$  admet une unique solution  $\alpha_n$  sur  $]0; +\infty[$  :

$f_n$  est le produit de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ , alors elle est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0; +\infty[ ; f_n'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \left(x + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{nx^2} + \frac{1}{x} + 1\right) e^{-\frac{1}{x}} > 0$$

D'où  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f_n'(x) \geq 0$ .

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| $x$       | 0 | $+\infty$ |
| $f_n'(x)$ | 0 | +         |
| $f_n(x)$  | 0 | $+\infty$ |

La fonction  $f_n$  est continue et croissante sur  $]0; +\infty[$  alors elle réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur l'intervalle

$$f_n(]0; +\infty[) = ]0; +\infty[.$$

On a  $\frac{1}{n} \in ]0; +\infty[$  alors il existe un unique réel  $\alpha_n \in ]0; +\infty[$  tel que  $f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ .

D'où l'équation  $f_n(x) = \frac{1}{n}$  admet une unique solution  $\alpha_n$  sur  $]0; +\infty[$ .

2. a. Soit  $g_n(x) = f_n(x) - \frac{1}{n}$ . Etudier sur  $]0; +\infty[$  le signe de  $g_{n+1}(x) - g_n(x)$  et en déduire que la suite  $(\alpha_n)$  est strictement décroissante et qu'elle est convergente :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) - g_n(x) &= f_{n+1}(x) - \frac{1}{n+1} - \left(f_n(x) - \frac{1}{n}\right) = \left(x + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{n+1} - \left(\left(x + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{n(n+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \forall x > 0$  alors  $g_{n+1}(x) \geq g_n(x) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; g_n(\alpha_{n+1}) \leq g_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = g_n(\alpha_n)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; g_n(\alpha_{n+1}) \leq g_n(\alpha_n)$

Comme  $g_n'(x) = f_n'(x) \geq 0$  alors  $g_n$  est croissante. Par conséquent  $\forall n \in \mathbb{N}^*; g_n(\alpha_{n+1}) \leq g_n(\alpha_n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$   
D'où  $(\alpha_n)$  est décroissante.

Comme  $(\alpha_n)$  est décroissante et minoré par 0 alors elle est convergente.

b. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ . En déduire la limite de  $(\alpha_n)$  :

On a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*; f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \left( \alpha_n + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{\alpha_n}} = \frac{1}{n} \Rightarrow n \left( \alpha_n + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{\alpha_n}} = 1 \Rightarrow n \left( \alpha_n + \frac{1}{n} \right) = e^{\frac{1}{\alpha_n}} \Rightarrow n\alpha_n + 1 = e^{\frac{1}{\alpha_n}} \Rightarrow n\alpha_n = e^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1 \right)$

Soit  $\beta$  la limite de la suite  $(\alpha_n)$ . Donc  $0 < \beta < \alpha_1$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1 \right) \Rightarrow n\alpha_n = e^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1$ .

Supposons que  $\beta \neq 0$  :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n\alpha_n = e^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( e^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1 \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( e^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1 \right)$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n\alpha_n) = +\infty \times \beta = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( e^{\frac{1}{\alpha_n}} - 1 \right) = e^{\frac{1}{\beta}} - 1 \in \mathbb{R}$ .

Alors c'est contradictoire.

D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ .

### Exercice N°3 :

Soit ABCD un carré direct de centre O et de côté  $a > 0$ . On note G le milieu du segment [AB] et E et F les points tels que le quadrilatère AEFB soit un carré direct.

1. a. Faire une figure illustrant les données que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale.

(Voir la construction ci-après)

b. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme O en A et B et O :

$OA = OB \neq 0$   
 $\overline{OA} \neq \overline{BO}$  | alors il existe une unique rotation r qui transforme O en A et B et O.

c. Déterminer les éléments caractéristiques de r :

Le centre de r appartient à l'intersection des médiatrices des segments [OA] et [OB] et comme  $\text{med}[OA] \cap \text{med}[OB] = \{G\}$  alors G est le centre de r.

Soit  $\alpha$  une mesure de l'angle de r :

$\alpha = (\overline{OB}; \overline{AO}) = (\overline{OB}; \overline{OA}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$

d. Soit g l'antidépacement défini par  $g(B)=E$  et  $g(O)=G$ . Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite :

Vu que  $\text{med}[BE] \neq \text{med}[OG]$  alors g est une symétrie glissante.

On a : (AE) et (OG) sont parallèles alors d'après le théorème des milieux, le milieu du segment [BE] est sur [GF].

Or l'axe de g passe par les milieux des segments [BE] et [OG], donc (OG) est l'axe de g.

O appartient à l'axe de g en plus  $g(O) = G$  alors le vecteur de g est  $\overline{OG}$ .

D'où la forme réduite de g :  $g = s_{(OG)} \circ t_{\overline{OG}} = t_{\overline{OG}} \circ s_{(OG)}$

2. a. Montrer qu'il existe une unique similitude s qui transforme C en F et B en E, déterminer le rapport et un angle de s :

$CB \neq 0$   
 $FE \neq 0$  | alors il existe une unique similitude s qui transforme C en F et B en E.

Le rapport s est  $k = \frac{EF}{CB} = \frac{EF}{2EF} = \frac{1}{2}$ .

Soit  $\beta$  une mesure de l'angle de s :

$\beta = (\overline{CB}; \overline{FE}) = (\overline{CB}; \overline{BA}) = (\overline{BC}; \overline{BA}) - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

b. Déterminer l'image du carré ABCD par s puis en déduire le centre de s.

Soit  $A' = s(A)$  et  $D' = s(D)$ . Comme ABCD est un carré direct alors son image  $A'EFD'$  est un carré direct, mais sur le segment [EF] on ne peut construire qu'un seul carré direct qui est AEFB alors on en déduit que  $A' = A$  et  $D' = G$ .

D'où  $s(ABCD) = AEFB$  et A est le centre de s.

3. Soit  $h = s \circ r^{-1}$ .

a. Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport :

Une mesure de l'angle de  $r^{-1}$  est  $-\frac{\pi}{2}$ , alors une mesure de l'angle de h est :  $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi = \pi[2\pi]$

Donc h est une similitude directe d'angle  $\pi$  et de rapport  $\frac{1}{2}$  et par conséquent h est une homothétie de rapport  $-\frac{1}{2}$

b. Soit I le centre de h. Montrer que I est le barycentre du système  $\{(O; 1); (E; 2)\}$ . Placer I :

$h(O) = s \circ r^{-1}(O) = s(B) = E$ . Or  $\overline{IE} = -\frac{1}{2}\overline{IO} \Rightarrow 2\overline{IE} + \overline{IO} = \vec{0}$ . D'où  $I = \text{bar}\{(E; 2); (O; 1)\}$ .

c. Pour tout point M du plan autre que I, on pose  $M' = r(M)$  et  $M'' = s(M)$ .  
Montrer que la droite  $(M'M'')$  passe par un point fixe que l'on précisera :

$$h(M') = s \circ r^{-1}(M') = s(M) = M''.$$

Alors les points  $M'$ ,  $M''$  image par l'homothétie  $h$  et le centre  $I$  de  $h$  sont alignés.  
D'où la droite  $(M'M'')$  par le point fixe  $I$ .

4. Soit l'hyperbole de foyer  $O$  et  $F$  qui passe par le point  $J$  projeté orthogonal de  $I$  sur  $(OF)$ .

a. Déterminer les coordonnées des points  $O$ ,  $E$ ,  $I$  et  $J$  dans le repère  $(G; \overline{GB}; \overline{GO})$  :

Dans le repère  $(G; \overline{GB}; \overline{GO})$  on a  $O(0; -1)$  et  $E(-1; -1)$  alors on aura  $x_1 = \frac{2(-1)+0}{3} = \frac{-2}{3}$

$$y_1 = \frac{2(-1)+1}{3} = \frac{-1}{3}. \quad J \text{ est le projeté orthogonal de } I \text{ sur l'axe des ordonnées, donc } x_J = 0 \text{ et } y_J = \frac{-1}{3}.$$

D'où  $I(\frac{-2}{3}; \frac{-1}{3})$  et  $J(0; \frac{-1}{3})$ .

b. Ecrire l'équation de  $\Gamma$  dans ce repère :

Le centre de  $\Gamma$  est le point  $G$ , son axe focal est  $(OF)$  (axe des ordonnées) et comme  $J \in (OF)$  alors  $J$  est au sommet de  $\Gamma$ , d'où

$$b = GJ = \frac{-1}{3} \text{ et } c = GO = 1 \text{ et par conséquent}$$

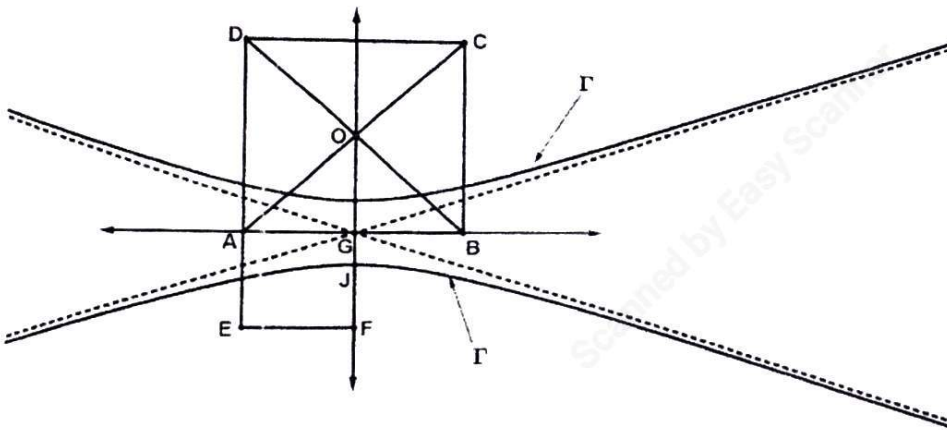
$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \text{ alors une équation cartésienne de } \Gamma \text{ est } -\frac{x^2}{\frac{9}{8}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1.$$

c. déterminer les sommets, les asymptotes et l'excentricité de  $\Gamma$  :

Les sommets de  $\Gamma$  sont  $J$  et son symétrique par rapport à  $G$  qui est de coordonnées  $(0; \frac{1}{3})$ , ses asymptotes ont pour équations

$$y = \frac{x\sqrt{2}}{4} \text{ et } y = \frac{-x\sqrt{2}}{4}. \text{ Sa excentricité est égale à : } \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

d. Construire  $\Gamma$  (voir la représentation graphique ci-dessous).



#### Exercice N°4 :

On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x + 2\ln(1 + e^x)$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

#### Partie A

1. a. Donner le tableau de variation de  $f$  :

$$f'(x) = -1 + \frac{2e^x}{1+e^x} = \frac{-1+e^x}{1+e^x}$$

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 2\ln(1 + e^x)) = +\infty + 2 \times 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2\ln(1 + e^x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2\ln(e^x(e^{-x} + 1))) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2x + \ln(e^{-x} + 1))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(e^{-x} + 1)) = +\infty + 0 = +\infty.$$

b. Démontrer que la courbe  $(C)$  admet deux asymptotes  $D$  et  $D'$  que l'on déterminera et préciser leurs positions relatives par rapport à  $(C)$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2\ln(1 + e^x)) = 0$$

D'où la droite  $D$  :  $y = -x$  est AO de  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .

$f(x) - y = f(x) + x = 2\ln(1 + e^x) > 0$ . Donc  $(C)$  est toujours au-dessus de  $D$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = 0$$

D'où la droite  $D' : y = x$  est AO de (C) au voisinage de  $+\infty$ .

$$f(x) - y = f(x) - x = \ln(e^{-x} + 1) > 0$$

Donc (C) est toujours au-dessus de  $D'$ .

c. construire la courbe (C) et leurs asymptotes dans le même repère :

(Voir la représentation graphique ci-après)

2. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = [0; +\infty[$ .

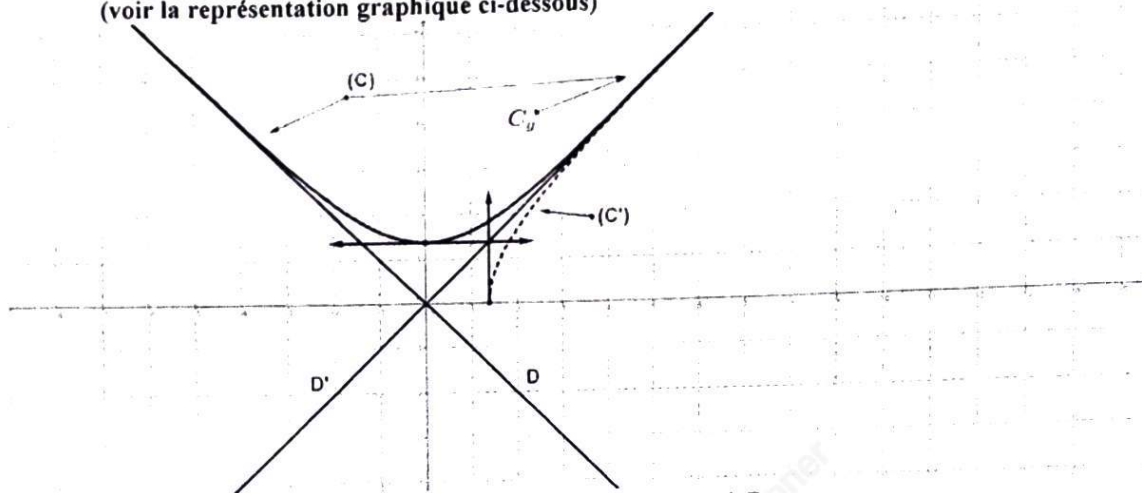
a. Montrer que  $g$  est une bijection de l'intervalle  $I$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera :

Sur l'intervalle  $I$ ,  $g$  est continue et croissante alors, elle réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I) = [0; +\infty[$ .

b. Construire dans le repère précédent la courbe (C') de  $g^{-1}$  :

La courbe de  $g$  et (C') celle de  $g^{-1}$  sont symétriques par rapport à la droite  $D'$ .

(voir la représentation graphique ci-dessous)



### Partie B

On considère la suite numérique  $(u_n)$  par  $u_0 = \ln 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \int_0^{\ln 5} (f'(t))^n dt$ .

1. Calculer  $u_1$  :

$$u_1 = \int_0^{\ln 5} f'(t) dt = [f(t)]_0^{\ln 5} = f(\ln 5) - f(0) = 2\ln 6 - \ln 5 - 2\ln 2 = \ln 9 - \ln 5 = \ln\left(\frac{9}{5}\right).$$

2. a. Montrer  $\forall x \in [0; \ln 5]$  ;  $0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$  :

$$f'(x) = \frac{-1+e^x}{1+e^x} = \frac{-2+1+e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{2}{1+e^x} \Rightarrow f''(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0.$$

D'où  $f'$  est croissante.

$$0 \leq x \leq \ln 5 \Rightarrow f'(0) \leq f'(x) \leq f'(\ln 5) \text{ or } f'(0) = 0 \text{ et } f'(\ln 5) = \frac{2}{3}$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0; \ln 5] ; 0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}.$$

b. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln 5$  :

$$\text{On a } \forall x \in [0; \ln 5] ; 0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{3} \Rightarrow x \in [0; \ln 5] ; 0 \leq (f'(t))^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow 0 \leq \int_0^{\ln 5} (f'(t))^n dt \leq \int_0^{\ln 5} \left(\frac{2}{3}\right)^n dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln 5.$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln 5.$$

c. Déterminer la limite de  $(u_n)$  :

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln 5 = 0 \text{ alors d'après les Gendarmes } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

3. a. Montrer que  $\forall x \in [0; +\infty[$  ;  $(f'(x))^2 - 1 = -2f''(x)$  :

$$\text{On a d'une part : } -2f''(x) = -2 \times \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} \text{ et d'autre part :}$$

$$(f'(x))^2 - 1 = \left(\frac{-1+e^x}{1+e^x}\right)^2 - 1 = \frac{(-1+e^x)^2}{(1+e^x)^2} - 1 = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1 - e^{2x} - 2e^x - 1}{(1+e^x)^2} = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0; +\infty[ ; (f'(x))^2 - 1 = -2f''(x).$$

b. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ;  $u_{n+2} - u_n = \frac{-2}{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$  :

$$u_{n+2} - u_n = \int_0^{\ln 5} (f'(t))^{n+2} dt - \int_0^{\ln 5} (f'(t))^n dt = \int_0^{\ln 5} ((f'(t))^2 - 1)(f'(t))^n dt$$

$$= -2 \int_0^{\ln 5} f''(t) \cdot (f'(t))^n dt = -2 \left[ \frac{1}{n+1} (f'(t))^{n+1} \right]_0^{\ln 5}$$

$$= \frac{-2}{n+1} \left( (f'(\ln 5))^{n+1} - (f'(0))^{n+1} \right)$$

$$= \frac{-2}{n+1} \frac{-2}{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

c. En déduire que  $u_{2n} = \ln 5 - \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}$  et  $u_{2n+1} = \ln\left(\frac{9}{5}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$  :

En déduisons que  $u_{2n} = \ln 5 - \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}$  ?

$$u_2 - u_0 = \frac{-2}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$u_4 - u_2 = \frac{-2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$u_6 - u_4 = \frac{-2}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_{2n} - u_{2n-2} = \frac{-2}{2n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1}$$

$$u_{2n} - u_0 = - \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1} \Rightarrow u_{2n} = \ln 5 - \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}$$

En déduisons que  $u_{2n+1} = \ln\left(\frac{9}{5}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$  ?

$$u_3 - u_1 = \frac{-2}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$u_5 - u_3 = \frac{-2}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$u_7 - u_5 = \frac{-2}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_{2n+1} - u_{2n-1} = \frac{-2}{2n} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$$

$$u_{2n} - u_1 = - \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} \Rightarrow u_{2n} = \ln\left(\frac{9}{5}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$$

4.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} \left(\frac{2}{3}\right)^p$ . Montrer que  $v_n = \ln 3 - \frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}$  puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  :

$$u_{2n} + u_{2n+1} = \ln 5 - \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1} + \ln\left(\frac{9}{5}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = \ln 9 - 2v_n = 2\ln 3 - 2v_n$$

$$\Rightarrow 2v_n = 2\ln 3 - u_{2n} - u_{2n+1} \Rightarrow \ln 3 - \frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \ln 3 - \frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2} \right) = \ln 3 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

## Bac 2017 session normale

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Le complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. a. Soit  $a$  un réel, résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue  $z$  :

$$(1+i)z^2 - 2(a+1)z - (-1+i)(a^2+1) = 0.$$

b. Soit  $f$  et  $g$  des transformations données par leurs expressions complexes,  $f: z \rightarrow z' = 1 - iz$  et  $g: z \rightarrow z'' = z - i$ .

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations  $f$  et  $g$ .

Dans le reste de l'exercice, on considère les points  $I, M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_0 = 1 - i, z_1 = 1 - ia$  et  $z_2 = a - i$  où  $a = e^{i\alpha}$ ,

$\alpha \in ]0; 2\pi[$ .

2. a. Montrer que le triangle  $IM_1M_2$  est rectangle en  $I$ , isocèle et direct.

b. Préciser les lieux géométriques des points  $M_1$  et  $M_2$  lorsque  $\alpha$  décrit  $]0; \pi[$ . Représenter ces lieux dans un repère orthonormé.

- c. Ecrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle pour  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ .
3. Soit  $M_3$  le point d'affixe  $z_3 = i\sin\alpha + ia$  et  $G$  l'isobarycentre des points  $M_1, M_2$  et  $M_3$ .
- a. Vérifier que  $z_G = \frac{1+\cos\alpha}{3} + i\frac{-1+2\sin\alpha}{3}$  puis montrer que, pour  $\alpha \in ]0; \pi[$ , le point  $G$  appartient à une ellipse  $\Gamma$  dont on donnera une équation.
- b. Préciser les sommets et l'excentricité de  $\Gamma$  puis la construire dans un repère orthonormé.
- Exercice N°2 :**
- ABC un triangle équilatéral direct de côté 4cm, et de cercle circonscrit  $\Gamma$ , les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. On pose  $A' = s_B(A)$ .
1. a. Faire une figure illustrant les données que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale.  
b. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $g$  vérifiant  $g(B)=A$  et  $g(A')=B$ . Vérifier que  $g$  est symétrie glissante et donner sa forme réduite.
- c. Soit  $r$  la rotation qui transforme C en B et J en K. Déterminer un angle et un centre de  $r$ .
2. Soit  $s$  la similitude directe qui transforme A en B et C en I, et on pose  $h=s \circ r$ .
- a. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de  $s$ .  
b. Soit  $\Omega$  le centre de  $s$ . Montrer que  $\Omega \in \Gamma$  et que les points  $\Omega, A$  et I sont alignés. Placer alors  $\Omega$ .  
c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $h$ .
3. Soit M un point de  $\Gamma$  distinct de  $\Omega$ , on pose  $M' = s(M)$  et  $M_1 = r(M)$ .
- a. Montrer que le triangle  $\Omega MM'$  est rectangle.  
b. Montrer que la droite  $(MM')$  passe par un point fixe que l'on déterminera.  
c. Montrer que les points  $M_1, M$  et  $M'$  sont alignés.
4. On pose  $M_0 = A$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = s(M_n)$ .
- a. Déterminer  $M_1$  et construire  $M_2$ .  
b. Vérifier  $M_{2017} \in (\Omega B)$ .
- c. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $L_n = M_n M_{n+1}$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n L_k$ , exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ , puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Exercice N°3 :**

Pour tout entier naturel  $n$  on définit la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$  et soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Montrer que toutes les courbes passent par un point fixe à déterminer.
2. a. Dresser le tableau de variation de  $f_0$ .  
b. On considère les points M et N de la courbe  $(C_0)$  d'abscisses respectives  $x$  et  $-x$ . Déterminer les coordonnées de A milieu de [MN], Que représente A pour  $(C_0)$  ?
3. a. Montrer que les courbes  $(C_0)$  et  $(C_1)$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.  
b. Déduire le tableau de variation de  $f_1$ .  
c. Construire  $(C_0)$  et  $(C_1)$  dans le même repère.
4. On suppose que  $n$  est strictement supérieur à 1.
- a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ . Interpréter.  
b. Calculer  $f_n'$  et dresser le tableau de variation de  $f_n$ .
5. Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx, n \in \mathbb{N}$ .
- a. Justifier l'existence de  $(u_n)$  puis vérifier que  $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ .  
b. Vérifier que  $u_0 + u_1 = 1$  et que  $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$  puis déduire  $u_1$  et  $u_2$ .  
c. Montrer que  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.

**Exercice N°4 :**

Soit la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

1. a. Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
b. Déduire que pour tout entier  $n \geq 6$ , l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  admet dans  $[1; \sqrt{e}]$  une seule solution notée  $a_n$ .  
c. Prouver que la suite  $(a_n)$  est décroissante, en déduire quelle converge.
2. a. Montrer que pour tout entier  $k$  strictement supérieur à 1, on a  $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$   
b. Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de  $n$  l'intégrale  $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx, n \geq 2$ .
3. Pour tout entier  $n$  supérieur strictement à 1, on pose :  $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2}$
- a. Montrer que  $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}$   
b. En déduire que  $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln n}{n}$

4. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$  et  $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$ .

a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$ . En déduire la limite de  $(I_n)$ .

b. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$ .

c. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2)^2}{1!} + \frac{(\ln 2)^3}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$ .

d. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $I_n$ . En déduire la limite de  $(u_n)$ .

## Solution

### Exercice N°1 :

1. a. Résoudre l'équation :  $(1+i)z^2 - 2(a+1)z - (-1+i)(a^2+1) = 0$ .

$$\Delta' = (-(a+1))^2 + (1+i)(-1+i)(a^2+1) = a^2 + 2a + 1 - 2a^2 - 2 = -a^2 + 2a - 1 = (i(a-1))^2$$

L'équation admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{a+1+i(a-1)}{1+i} = \frac{(1+i)(a-1)}{1+i} = a-1 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{a+1-i(a-1)}{1+i} = \frac{(1+i)(1-a)}{1+i} = 1-a$$

b. Soit  $f$  et  $g$  des transformations données par leurs expressions complexes,  $f: z \rightarrow z' = 1-iz$  et  $g: z \rightarrow z'' = z-i$ .

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations  $f$  et  $g$  :  $f(z) = z' = 1-iz = -iz + 1$  :

$$|-i| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f \text{ est un quart de tour indirect de centre } \Omega \text{ d'affixe } z_\Omega = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

$g(z) = z'' = z-i$ .  $g$  est une translation de vecteur  $\vec{w}$  d'affixe  $z_w = -i$ .

Dans le reste de l'exercice, on considère les points  $I, M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_0 = 1-i$ ;  $z_1 = 1-ia$  et  $z_2 = a-i$  où  $a = e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in ]0; 2\pi[$ .

2. a. Montrer que le triangle  $IM_1M_2$  est rectangle en  $I$ , isocèle et direct :

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{a-i-1+i}{1-ia-1+i} = \frac{a-1}{-ia+i} = \frac{a-1}{-i(a-1)} = \frac{1}{-i} = i.$$

Donc le triangle  $IM_1M_2$  est rectangle en  $I$ , isocèle et direct.

b. Préciser les lieux géométriques des points  $M_1$  et  $M_2$  lorsque  $\alpha$  décrit  $]0; \pi[$ . Représenter ces lieux dans un repère orthonormé :

$$z_1 = 1-ia \Rightarrow z_1 - 1 = -ia = e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{u}; \vec{JM}_1) = \alpha - \frac{\pi}{2} \\ JM_1 = 1 \end{cases} \quad \text{avec } -\frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Donc  $M_1$  appartient au demi cercle  $C_1$  de rayon 1 et de centre  $J$  d'affixe  $z_J = 1$  privé de  $K$  et  $L$  contenant dans le demi plan limité par la droite  $(KL)$  qui ne contient pas le point  $O$  avec  $z_K = 1+i$   $z_L = 1-i$ .

$$z_2 = a-i \Rightarrow z_2 + i = a \Rightarrow \begin{cases} (\vec{u}; \vec{PM}_2) = \alpha \\ PM_2 = 1 \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \alpha < \pi.$$

Donc  $M_2$  appartient au demi cercle  $C_2$  de rayon 1 et de centre  $P$  d'affixe  $z_P = -i$  privé du point  $L$  et  $Q$  d'affixe  $z_L = 1-i$  et  $z_Q = -1-i$  contenant dans le demi plan limité par la droite  $(LQ)$  qui contient le point  $O$ .

c. Ecrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle pour  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$  :

$$z_1 = 1-ia = 1 - e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})} = -2i \sin\left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{2}\right)} = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{4}\right)} = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow |z_1| = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \arg(z_1) = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\text{Donc une forme exponentielle de } z_1 \text{ est : } z_1 = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_2 = a-i = e^{i\alpha} - e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{2}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{2}}{2}\right)} = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{2}}{4}\right)} = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} < 0 \Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow |z_2| = -2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \arg(z_2) = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\text{Donc une forme exponentielle de } z_2 \text{ est : } z_2 = -2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

3. Soit  $M_3$  le point d'affixe  $z_3 = i \sin \alpha + ia$  et  $G$  l'isobarycentre des points  $M_1, M_2$  et  $M_3$ .

a. Vérifier que  $z_G = \frac{1+\cos \alpha}{3} + i \frac{-1+2 \sin \alpha}{3}$  puis montrer que, pour  $\alpha \in ]0; \pi[$ , le point  $G$  appartient à une ellipse  $\Gamma$  dont on donnera une équation :

$$z_1 = 1-ia = 1 - i(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 1 + \sin \alpha - i \cos \alpha$$

$$z_2 = a-i = \cos \alpha + i \sin \alpha - i = \cos \alpha + (-1 + i \sin \alpha)$$

$$z_3 = i \sin \alpha + ia = i \sin \alpha + i(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$= -\sin \alpha + i(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$z_G = \frac{z_{M_1} + z_{M_2} + z_{M_3}}{3} = \frac{1 + \sin\alpha - i\cos\alpha + \cos\alpha + (-1 + \sin\alpha)i - \sin\alpha + i(\cos\alpha + \sin\alpha)}{3}$$

$$= \frac{1 + \sin\alpha - i\cos\alpha + \cos\alpha + (-1 + \sin\alpha)i - \sin\alpha + i(\cos\alpha + \sin\alpha)}{3} = \frac{1 + \cos\alpha}{3} + i \frac{-1 + 2\sin\alpha}{3}$$

On pose  $x = x_G$  et  $y = y_G$ , alors  $\begin{cases} x = \frac{1+\cos\alpha}{3} \\ y = \frac{-1+2\sin\alpha}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = \cos\alpha \\ \frac{3y+1}{2} = \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow (3x - 1)^2 + \left(\frac{3y+1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x-\frac{1}{3})^2}{(\frac{1}{3})^2} + \frac{(y+\frac{1}{3})^2}{(\frac{2}{3})^2} = 1.$

Dans le repère  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$  avec  $\Omega(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$  on reconnaît l'ellipse (E) d'équation  $\frac{x^2}{(\frac{1}{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{2}{3})^2} = 1$

b. Préciser les sommets et l'excentricité de  $\Gamma$  puis la construire dans le repère précédent :

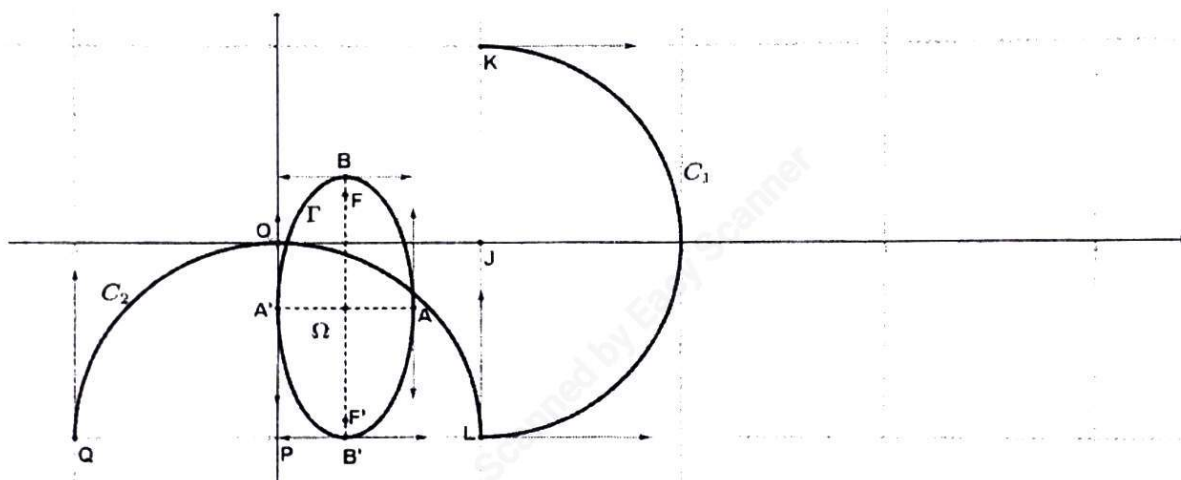
l'ellipse (E) a pour axe focal  $(\Omega; \vec{j})$ . Par ailleurs  $c = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Cette ellipse a pour excentricité  $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Dans  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ ;  $F(0; \frac{\sqrt{3}}{3})$  et  $F'(0; -\frac{\sqrt{3}}{3})$ ;  $D: Y = \frac{b}{e} = \frac{b'}{c} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$  et  $D': Y = -\frac{b}{e} = -\frac{b'}{c} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ .

Les sommets sont  $A(\frac{1}{3}; 0)$ ;  $A'(-\frac{1}{3}; 0)$ ;  $B(0; \frac{2}{3})$ ;  $B'(0; -\frac{2}{3})$ .

Dans  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ;  $F(\frac{1}{3}; \frac{-1+\sqrt{3}}{3})$  et  $F'(\frac{1}{3}; \frac{-1-\sqrt{3}}{3})$ ;  $D: y = \frac{4-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$  et  $D': y = \frac{-4-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$ .

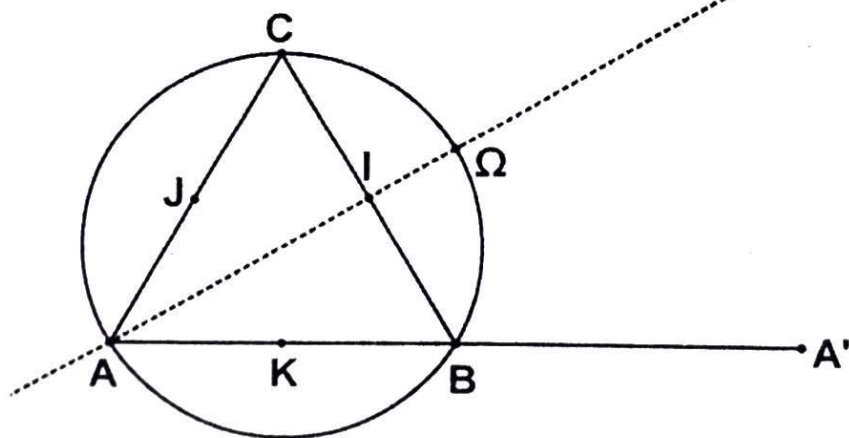
Les sommets sont  $A(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$ ;  $A'(0; -\frac{1}{3})$ ;  $B(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$  et  $B'(\frac{1}{3}; -1)$ .



**Exercice N°2 :**

ABC un triangle équilatéral direct de côté 4cm, et de cercle circonscrit  $\Gamma$ , les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. On pose  $A' = s_B(A)$ .

1. a. Faire une figure illustrant les données que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale :



b. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $g$  vérifiant  $g(B)=A$  et  $g(A')=B$ . Vérifier que  $g$  est symétrie glissante et donner sa forme réduite :

•Méthode1 :  $AB=A'B \neq 0$ . Donc il existe un unique antidéplacement  $g$  tel que  $g(B)=A$  et  $g(A')=B$ .  
 $gog(A')=A \neq A'$ . Donc  $g$  est une symétrie glissante.

**Méthode2 :** On suppose que  $g$  est une réflexion.

$g(B)=A \Rightarrow \Delta = \text{med}[AB]$  et  $g(A')=B \Rightarrow \Delta = \text{med}[A'B]$ , c'est contradictoire. Donc  $g$  est symétrie glissante.

$\bullet gog(A')=A \Rightarrow t_{2\vec{u}}=A'A \Rightarrow 2\vec{u} = \overline{A'A} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overline{A'A} = \overline{BA}$ .

$\bullet g(B)=A \Rightarrow A*B=B \in \Delta$  et  $g(A')=B \Rightarrow A'*B \in \Delta \Rightarrow \Delta = (AB)$ .

D'où la forme réduite de  $g : g = t_{\overline{BA}} \circ s_{(AB)} = s_{(AB)} \circ t_{\overline{BA}}$

c. Soit  $r$  la rotation qui transforme  $C$  en  $B$  et  $J$  en  $K$ . Déterminer un angle et un centre de  $r :$

$\bullet r : \begin{cases} C \rightarrow B \\ J \rightarrow K \end{cases} \Rightarrow \alpha = (\overline{CJ}; \overline{BK}) = (\overline{CA}; \overline{BA}) = (\overline{AC}; \overline{AB}) = -\frac{\pi}{3}$

**Détermination du centre :**

**Méthode1 :**  $\text{med}[BC] = \text{med}[JK]$  alors le centre de  $r$  est l'intersection de  $(BK)$  et  $(CJ)$ . Donc  $A$  est le centre de  $r$ .

**Méthode2 :**  $r_{(A; -\frac{\pi}{3})}(C) = B \Rightarrow A$  est le centre de  $r$ .

2. Soit  $s$  la similitude directe qui transforme  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $I$ , et on pose  $h = sor$ .

a. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de  $s :$

$\bullet s : \begin{cases} A \rightarrow B \\ C \rightarrow I \end{cases} \Rightarrow$  une mesure de  $\alpha = (\overline{AC}; \overline{BI}) = (\overline{AC}; \overline{BC}) = (\overline{CA}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{3}$  et le rapport  $k = \frac{BI}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b. Soit  $\Omega$  le centre de  $s$ . Montrer que  $\Omega \in \Gamma$  et que les points  $\Omega, A$  et  $I$  sont alignés. Placer alors  $\Omega :$

$\bullet s(A)=B \Rightarrow (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega B}) = \frac{\pi}{3}$ . Or  $(\overline{CA}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega B}) = (\overline{CA}; \overline{CB}) [2\pi] \Rightarrow$  les points  $\Omega, A, B$  et  $C$  sont cocycliques. Donc  $\Omega \in \Gamma$ .

Montrons que les points  $\Omega, A$  et  $I$  sont alignés :

**Méthode1 :**

$(\overline{\Omega A}; \overline{\Omega I}) = (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega B}) + (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega C}) + (\overline{\Omega C}; \overline{\Omega I}) = (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega B}) + (\overline{AB}; \overline{AC}) - \pi + (\overline{\Omega C}; \overline{\Omega I}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \pi + \frac{\pi}{3} = 0 [2\pi]$ .

Donc les points  $\Omega, A$  et  $I$  sont alignés.

**Méthode2 :**

$(\overline{\Omega A}; \overline{\Omega I}) = (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega B}) + (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega I}) = (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega B}) + (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega C})$  car  $(\overline{\Omega B}; \overline{\Omega I})$  est l'image de  $(\overline{\Omega A}; \overline{\Omega C})$  par  $s$ .

$\Rightarrow (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega I}) = (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega B}) + (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega C}) = (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega B}) + (\overline{BA}; \overline{BC}) [\pi] = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0 [\pi]$

Donc les points  $\Omega, A$  et  $I$  sont alignés.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $h :$

$h$  est la composée d'une similitude et une rotation dont la somme des angle est nulle. Donc  $h$  est une homothétie de rapport  $\frac{1}{2}$ .

$h(A) = sor(A) = s(A) = B$ , or  $\overline{A'B} = \frac{1}{2}\overline{A'A}$ , alors  $h = h_{(A; \frac{1}{2})}$

3. Soit  $M$  un point de  $\Gamma$  distinct de  $\Omega$ , on pose  $M' = s(M)$  et  $M_1 = r(M)$ .

a. Montrer que le triangle  $\Omega MM'$  est rectangle :

**Méthode1 :**

On a  $M' = s(M) \Rightarrow \begin{cases} (\overline{\Omega M}; \overline{\Omega M'}) = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\Omega M'}{\Omega M} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\cos(\overline{\Omega M}; \overline{\Omega M'}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{\Omega M'}{\Omega M}$

Donc le triangle  $\Omega MM'$  est rectangle en  $M'$ .

**Méthode2 :** D'après Alkashi dans le triangle  $\Omega MM'$  :

$MM'^2 = \Omega M'^2 + \Omega M^2 - 2\overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'} = \Omega M'^2 + \Omega M^2 - 2\Omega M \cdot \Omega M' \cos(\frac{\pi}{3}) = \Omega M'^2 + \Omega M^2 - \Omega M \cdot \Omega M'$

Or  $\Omega M = 2\Omega M'$

$\Rightarrow MM'^2 = \Omega M'^2 + \Omega M^2 - 2\Omega M'^2 = \Omega M^2 - \Omega M'^2 \Rightarrow \Omega M^2 = MM'^2 + \Omega M'^2$ .

Donc le triangle  $\Omega MM'$  est rectangle en  $M'$ .

b. Montrer que la droite  $(MM')$  passe par un point fixe que l'on déterminera :

$(\overline{MB}; \overline{MM'}) = (\overline{MB}; \overline{MA}) + (\overline{MA}; \overline{MM'}) = -\frac{\pi}{3} + (\overline{MA}; \overline{M\Omega}) + (\overline{M\Omega}; \overline{MM'}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = 0 [\pi]$

Donc  $(MM')$  passe par le point  $B$ .

c. Montrer que les points  $M_1, M$  et  $M'$  sont alignés :

On a  $M' = s(M)$  et  $M_1 = r(M)$ .

$(\overline{MM_1}; \overline{MM'}) = (\overline{MM_1}; \overline{MA}) + (\overline{MA}; \overline{MM'}) = (\overline{MM_1}; \overline{MA}) + (\overline{MA}; \overline{MB}) [\pi]$  car  $B \in (MM')$

$= (\overline{MM_1}; \overline{MA}) + (\overline{CA}; \overline{CB}) [\pi]$  car  $M \in \Gamma$ .

$= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} [\pi] = 0 [\pi]$ .

Donc les points  $M_1, M$  et  $M'$  sont alignés.

4. On pose  $M_0 = A$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = s(M_n)$ .

a. Déterminer  $M_1$  et construire  $M_2 :$

$M_1 = s(M_0) = s(A) = B$ .

$M_2 = s(M_1) = s(B)$ . Donc le triangle  $\Omega BM_2$  est rectangle en  $M_2$ .

b. Vérifier  $M_{2017} \in (\Omega B)$  :

$$M_{2017} = s(M_{2016}) = s(s(M_{2015})) = S^2(M_{2015}) = S^{2017}(M_0) = S^{2017}(A) = S^{2016}(s(A)) = S^{2016}(B)$$

Méthode 1 :

$$M_{2017} = S^{2016}(B) \Rightarrow (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega M_{2017}}) = 2016 \times \frac{\pi}{3} = 0$$

Donc  $M_{2017} \in (\Omega B)$ .

Méthode 2 :

$$M_{2017} = S^{2017}(A) \Rightarrow (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega M_{2017}}) = 2017 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega B}) + (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega M_{2017}}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega M_{2017}}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega M_{2017}}) = 0$$

Donc  $M_{2017} \in (\Omega B)$ .

c. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $L_n = M_n M_{n+1}$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n L_k$ , exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ , puis

déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  :

On a  $L_n = M_n M_{n+1}$  et  $L_{n+1} = M_{n+1} M_{n+2}$

$$s : \begin{cases} M_n \rightarrow M_{n+1} \\ M_{n+1} \rightarrow M_{n+2} \end{cases} \Rightarrow M_{n+1} M_{n+2} = \frac{1}{2} M_n M_{n+1} \Rightarrow L_{n+1} = \frac{1}{2} L_n$$

Donc  $(L_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $L_0 = M_0 M_1 = AB = 4$ .

$$S_n = L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n = \frac{L_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 8 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0.$$

Exercice N°3 :

Pour tout entier naturel  $n$  on définit la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$  et soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Montrer que toutes les courbes passent par un point fixe à déterminer :

$$f_n(x) = f_{n+1}(x) \Rightarrow \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow e^{-(n+1)x} = e^{-nx} \Rightarrow -(n+1)x = -nx \Rightarrow x=0.$$

Donc les courbes passent par le point  $(0; \frac{1}{2})$ .

2. a. Dresser le tableau de variation de  $f_0$  :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}};$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1; \lim_{n \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0$$

$$(f_0)'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$$

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| x         | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'_0(x)$ | +         |           |
| $f_0(x)$  | I         |           |

b. On considère les points  $M$  et  $N$  de la courbe  $(C_0)$  d'abscisses respectives  $x$  et  $-x$ . Déterminer les coordonnées de  $A$  milieu de  $[MN]$ . Que représente  $A$  pour  $(C_0)$  ?

$M(x; f_0(x))$  et  $N(-x; f_0(-x))$

$$A = M * N \Rightarrow x_A = \frac{x+(-x)}{2} = 0 \text{ et } y_A = \frac{f_0(x)+f_0(-x)}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} \right) = \frac{1}{2}$$

Donc  $A(0; \frac{1}{2})$ .

$$f_0(-x) + f_0(x) = 1 = 2 \times \frac{1}{2}$$

Donc  $A$  est le point de symétrie à  $(C_0)$ .

3. a. Montrer que les courbes  $(C_0)$  et  $(C_1)$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \text{ et } f_1(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow f_1(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}} = f_0(x)$$

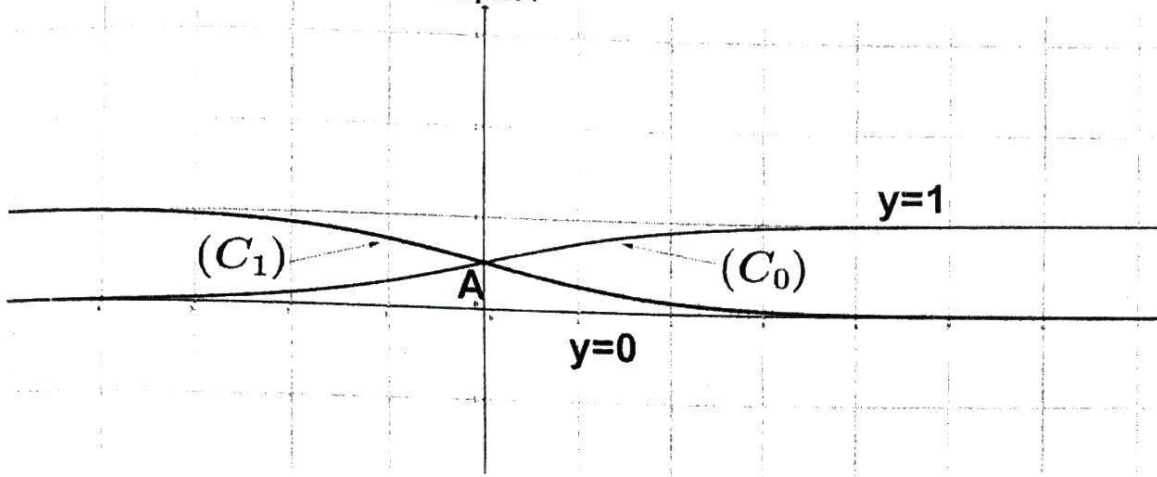
Donc  $(C_0)$  et  $(C_1)$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

b. Déduire le tableau de variation de  $f_1$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_0(-x) = 0; \lim_{n \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} f_0(-x) = 1$$

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| x         | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f_1'(x)$ |           | -         |
| $f_1(x)$  | 1         | 0         |

c. Construire  $(C_0)$  et  $(C_1)$  dans le même repère :



4. On suppose que n est strictement supérieur à 1.

a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ . Interpréter :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} = \frac{0}{1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-nx}}{e^{-x}(e^x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-(n-1)x}}{e^x + 1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-nx}}{x(1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{-(n-1)x}}{x(e^x + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -(n-1) \frac{e^{-(n-1)x}}{-(n-1)x} \times \frac{1}{e^x + 1} \right) = -\infty \times 1 = -\infty$$

Donc  $(C_n)$  admet BP de direction  $(Oy)$  en  $-\infty$ .

b. Calculer  $f_n'$  et dresser le tableau de variation de  $f_n$  :

$$f_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}(1 + e^{-x}) + e^{-x} \cdot e^{-nx}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{-ne^{-nx} - ne^{-(n+1)x} + e^{-(n+1)x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(-n - ne^{-x} + e^{-x})e^{-nx}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{(-n + (1-n)e^{-x})e^{-nx}}{(1 + e^{-x})^2} < 0$$

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| x         | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f_n'(x)$ |           | -         |
| $f_n(x)$  | $+\infty$ | 0         |

5. Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

a. Justifier l'existence de  $(u_n)$  puis vérifier que  $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$  :

$f_n$  est continue sur l'intervalle  $[0; 1]$ , alors  $u_n$  est définie, Par conséquent  $(u_n)$  existe.

$$u_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = [1 + e^x]_0^1 = \ln(1 + e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

b. Vérifier que  $u_0 + u_1 = 1$  et que  $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$  puis déduire  $u_1$  et  $u_2$  :

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1$$

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \left( \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{(1 + e^{-x})e^{-nx}}{1 + e^{-x}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[ \frac{-1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1-e^{-n}}{n}$$

$$u_0 + u_1 = 1 \Rightarrow u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \ln e - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$$

$$u_2 + u_1 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} \Rightarrow u_2 = \frac{e-1}{e} - u_1 = \frac{e-1}{e} - \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$$

c. Montrer que  $(u_n)$  est convergente est calculer sa limite :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f_{n+1}(x) dx - \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \left( \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} - \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{e^{-x}-1}{1+e^{-x}} \right) dx$$

$$\text{Or } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow e^{-x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{(e^{-x}-1)e^{-nx}}{1+e^{-x}} \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

Donc  $(u_n)$  est décroissante.

D'autre part : d'après le tableau de variation de  $f_n$  on a pour tout réel  $x$ ,  $0 \leq f_n(x) \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx \Rightarrow 0 \leq u_n$ .

Donc est  $(u_n)$  minorée par 0 ;

Comme  $(u_n)$  est décroissante et minorée alors elle est convergente.

On pose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$ .

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} + \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow L + L = 0 \Rightarrow 2L = 0 \Rightarrow L = \frac{0}{2} = 0$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Exercice N°4 :**

Soit la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1. a. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty(-\infty) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \text{ et } f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$$

|       |           |                |           |
|-------|-----------|----------------|-----------|
| x     | 0         | $\sqrt{e}$     | $+\infty$ |
| f'(x) |           | 0              |           |
| f(x)  | $-\infty$ | $\frac{1}{2e}$ | 0         |

b. Dédire que pour tout entier  $n \geq 6$ , l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  admet dans  $[1; \sqrt{e}]$  une seule solution notée  $a_n$  :

$f$  est continue et croissante sur  $[1; \sqrt{e}]$  alors,  $f([1; \sqrt{e}]) = [f(1); f(\sqrt{e})] = [0; \frac{1}{2e}]$

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2e} \Rightarrow \frac{1}{n} \in [0; \frac{1}{2e}]$$

Comme  $\frac{1}{n} \in [0; \frac{1}{2e}]$ , alors il existe un unique réel  $a_n$  de  $[1; \sqrt{e}]$  tel que  $f(a_n) = \frac{1}{n}$ . Donc l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  admet dans  $[1; \sqrt{e}]$  une seule solution notée  $a_n$ .

c. Prouver que la suite  $(a_n)$  est décroissante, en déduire quelle converge :

On a :  $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow f(a_{n+1}) < f(a_n)$ , comme  $f$  est strictement croissante alors  $a_{n+1} < a_n$ .

Donc  $(a_n)$  est décroissante.

$\forall n \geq 6, a_n > 0 \Rightarrow (a_n)$  est minorée.

$(a_n)$  est décroissante et minorée alors elle est convergente.

2. a. Montrer que pour tout entier  $k$  strictement supérieur à 1 on a :  $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$  :

$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ , en intégrant on obtient alors on trouve :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \Rightarrow \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$$

b. Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de  $n$  l'intégrale  $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$ ,  $n \geq 2$  :

$$u(x) = \ln x \quad \left| \quad u'(x) = \frac{1}{x} \right. \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \quad \left| \quad v(x) = \frac{-1}{x} \right.$$

$$\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[ \frac{-1}{x} \ln x \right]_2^n - \int_2^n \frac{-1}{x^2} dx = \left[ \frac{-1}{x} \ln x \right]_2^n - \left[ \frac{1}{x} \right]_2^n = \left[ \frac{-1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right]_2^n = \frac{-\ln n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$$

3. Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on pose :  $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2}$ .

a. Montrer que  $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}$  :

On a :  $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$  par suite on obtient :

$$\frac{\ln 3}{3^2} \leq \int_2^3 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln 2}{2^2}$$

$$\frac{\ln 4}{4^2} \leq \int_3^4 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln 3}{3^2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\ln n}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2}$$

$$\Rightarrow S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}$$

b. En déduire que  $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln n}{n}$  :

$$S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2} \Rightarrow S_n - \frac{\ln 2}{2^2} - \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq 0 \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2} - \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\ln 2}{2^2} - \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq -S_n \leq -\frac{\ln n}{n^2} - \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \Rightarrow \frac{\ln n}{n^2} + \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} \leq S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} \Rightarrow \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln n}{n}$$

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$  et  $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$  En déduire la limite de  $(I_n)$  :

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq \ln 2 \Rightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq (\ln 2)^n \Rightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{(\ln 2)^n}{x^2} \leq (\ln 2)^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \leq \int_1^2 (\ln 2)^n dx \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \leq \frac{1}{n!} \int_1^2 (\ln 2)^n dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$$

Comme  $0 < \ln 2 \leq 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$ . D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

b. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$  :

On a :  $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx$  ;

$$u(x) = (\ln x)^{n+1} \quad u'(x) = \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$$

$$v(x) = \frac{1}{x^2} \quad v'(x) = -\frac{1}{x^3}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left( \left[ -\frac{1}{x} (\ln x)^{n+1} \right]_1^2 - (n+1) \int_1^2 \frac{-(\ln x)^n}{x^2} dx \right) = -\frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} + I_n = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

c. En déduire que :  $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2)^2}{1!} + \frac{(\ln 2)^3}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$  :

**Méthode 1 :**

On a  $I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$I_2 - I_1 = -\frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^2}{2!}$$

$$I_3 - I_2 = -\frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^3}{3!}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow I_n - I_1 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right] \Rightarrow I_n = I_1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$$

D'après la question 2.b, on a :  $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow I_n = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2)^2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$

**Méthode 2 :**

Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2)^2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$

• La propriété est vraie car  $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2)^1}{1!} \right]$

• Montrons que si  $I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2)^2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$  alors  $I_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2)^2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} \right]$

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1 (\ln 2)^{n+1}}{2 (n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^{n+1}}{n!} \right] - \frac{1 (\ln 2)^{n+1}}{2 (n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^{n+1}}{n!} + \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} \right]$$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$

d. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $I_n$ . En déduire la limite de  $(u_n)$  :

On a :  $I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right] = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \left[ 1 + \frac{\ln 2}{2!} + \frac{(\ln 2)^2}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!} \right] = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} u_n$ .

D'où  $u_n = \frac{1-2I_n}{\ln 2}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-2I_n}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$

## Bac 2017 session complémentaire Énoncé

### Exercice N°1 :

- On considère l'équation (E) :  $2017x+41y=1$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - Vérifier que 2017 est un nombre premier puis montrer que l'équation (E) admet des solutions entières.
  - Vérifier que le couple  $(-5 ; 246)$  est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).
  - Déduire qu'il existe un unique entier  $y$  inférieur ou égale à 2016 tel que :  $41y \equiv 1[2017]$ .

Pour la suite de l'exercice, on rappelle qu'un entier  $x$  est l'inverse de  $y$  modulo 2017 si  $xy \equiv 1[2017]$ .

2. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

- Montrer que : si  $ab \equiv 0[2017]$  alors  $(a \equiv 0[2017] \text{ ou } b \equiv 0[2017])$  ;
- Déduire que : si  $a^2 \equiv 1[2017]$  alors  $(a \equiv 1[2017] \text{ ou } a \equiv -1[2017])$  ;
- Quels sont donc les entiers de l'intervalle  $[1; 4033]$  qui sont égaux à leurs inverses respectifs modulo 2017 ?

### Exercice N°2 :

Le complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. On considère l'équation (E) :  $iz^3 - (1+i)z^2 - (2+2i)z + 8i = 0$ .

a. Vérifier que l'équation (E) admet une solution réelle à déterminer.

b. Déterminer les deux autres solutions de l'équation (E).

c. Placer les points A, B et C d'affixes respectives :  $-2$  ;  $2-2i$  et  $1+i$ . Déterminer la nature du triangle ABC.

2. Soit  $s$  l'application du plan dans lui-même qui à tout point  $M(x ; y)$  associe le point  $M'(x' ; y')$  tel que  $x'=x+y$  et  $y'=-x+y-2$ .

a. Donner l'expression complexe de  $s$ .

b. Déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $s$ . Déterminer  $s(C)$ .

3. On désigne par  $z_G$  l'affixe du point G, centre de gravité du triangle ABC, et pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$f(z) = |z+2|^2 + |z-2+2i|^2 + |z-1-i|^2$$

a. Justifier que  $z_G = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$  et que  $f(z) = 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3}$ .

b. Déterminer, suivant les valeurs du réel  $k$ , l'ensemble  $\Gamma_k$  des points M du plan d'affixe  $z$  tels que  $f(z)=k$ . Déterminer l'ensemble  $\Gamma_{20}$ .

### Exercice N°3 :

ABCD est un rectangle direct tel que  $CB = 2CD$  et soient E, F et O les milieux respectifs des segments  $[CB]$ ,  $[AD]$  et  $[AE]$ . On pose  $I = S_B(A)$ .

1. a. Faire une figure illustrant les données qu'on complètera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontalement.

b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme A vers E et E vers D. Préciser le centre et un angle de  $r$ .

c. On pose  $f = S_{(DE)} \circ S_{(BF)} \circ S_{(AE)}$  déterminer  $f(A)$  et  $f(B)$  puis montrer que  $f$  est une symétrie glissante dont on précisera la forme réduite.

2. a. Montrer qu'il existe une unique similitude  $s$  qui transforme O vers E et E vers B, déterminer le rapport et un angle de  $s$ .

b. Soit  $\Omega$  le centre de  $s$ , montrer que  $\Omega$  appartient aux cercle  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de diamètre respectifs  $[EF]$  et  $[EI]$ , construire  $\Omega$ .

3. Soit M un point de  $\Gamma_1$  différent de  $\Omega$  et  $M'=s(M)$ .

a. Soient J et K les milieux respectifs des segments  $[EF]$  et  $[EI]$ . Montrer que  $s(J)=K$ . En déduire que  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$ .

b. Montrer alors que la droite  $(MM')$  passe par un point fixe à préciser.

c. En déduire une construction de  $M'$  à partir d'une position donnée de M.

4. Soit (P) la parabole de direction (AD) et de foyer E.

a. Déterminer le sommet de (P).

b. Montrer que (P) passe par B et C.

c. Déterminer les tangentes à (P) aux points B et C.

d. Montrer que (P) est la seule parabole de direction (AD) passant par B et C.

**Exercice N°4 :**

Pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1, on définit la fonction  $f_n$  sur  $]0; +\infty[$  par :  $f_n(x) = (\ln x)^n$  et on désigne par  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et discuter  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$  suivant la parité de  $n$ .

b. Calculer  $f_n'(x)$  dérivée de  $f_n(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f_n$  (suivant la parité de  $n$ ).

2. a. Etudier la position relative de  $(C_2)$  et  $(C_3)$ .

b. Construire  $(C_2)$  et  $(C_3)$  dans le même repère.

3. Pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1, on pose  $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e f_n(x) dx$  et  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

a. Montrer que  $I_2 = \frac{e-2}{2}$  (on procédera par intégration par parties).

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1, on a  $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$

c. Vérifier que  $I_2 = -1 + e \cdot u_2$

d. En déduire que  $\forall n \geq 2, I_n = -1 + e \cdot u_n$

4. a. Montrer que  $\forall x \in [1; e], 0 \leq f_n(x) \leq 1$ . Déduire  $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$

b. Déduire la limite de  $(I_n)$  et celle de  $(u_n)$ .

**Exercice N°5 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\begin{cases} f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \\ f(0) = \ln 3 \end{cases}$

1. a. Montrer que  $\forall x \leq 0; e^x \leq 1$  et que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ .

b. Déduire que  $\forall t > 0; \frac{1}{t} - t \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t}$

c. Montrer alors que  $\forall x > 0, \ln 3 - 4x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$

d. Déduire que  $f$  est continue et dérivable en  $0^+$  et que  $f'_d(0) = 0$

2. On considère la fonction  $g$ , définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t} dx$ .

a. Justifier que  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  puis déterminer sa dérivée  $g'(x)$ .

b. Montrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = -g(x) + g(3x)$

c. Déduire que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que  $\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} (e^{-9x^2} - 1)$

3. a. On suppose que  $x$  est supérieur à 1. Montrer que  $\forall t \in [x; 3x], e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$

b. En déduire que  $\forall t \in [x; 3x], e^{-9x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \leq e^{-x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$ .

c. Déduire alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

d. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

## Solution

**Exercice N°1 :**

1. On considère l'équation (E) :  $2017x + 41y = 1$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Vérifier que 2017 est un nombre premier puis montrer que l'équation (E) admet des solutions entières :

• On a  $\sqrt{2017} \approx 44, 91$ . Comme 2017 n'est pas divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égales aux racines carrées de 2017 alors le nombre 2017 est pas est premier.

• Comme  $2017 \wedge 41 = 1$  alors l'équation (E) admet des solutions entières.

b. Vérifier que le couple  $(-5; 246)$  est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E) :

$$2017(-5) + 41 \cdot 246 = -10085 + 10086 = 1$$

Donc le couple  $(-5; 246)$  est une solution particulière de (E).

• On pose  $x_0 = -5$  et  $y_0 = 246$ .

$$\text{On alors } 2017x + 41y = 2017x_0 + 41y_0 \Rightarrow 2017(x + x_0) = 41(y_0 - y)$$

$$2017 | 41(y_0 - y) \Rightarrow 2017 | y_0 - y \Rightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y_0 - y = 2017k \Rightarrow y = y_0 - 2017k$$

$$\begin{aligned} 2017 \wedge 41 &= 1 \\ \Rightarrow y &= 246 - 2017k \end{aligned}$$

D'autre part :

$$41 | 2017(x - x_0) \Rightarrow 41 | x - x_0 \Rightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x - x_0 = 41k \Rightarrow x = x_0 + 41k \Rightarrow x = -5 + 41k$$

$$2017 \wedge 41 = 1 \Rightarrow \text{Donc l'ensemble des solutions de (E) est } S = \{(-5 + 41k; 246 - 2017k) \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\}$$

c. Déduire qu'il existe un unique entier  $y$  inférieur ou égale à 2016 tel que :  $41y \equiv 1 [2017]$  :

Soit  $(x; y)$  une solution de (E), c'est-à-dire  $2017x + 41y = 1$

$$\text{Comme } \begin{cases} 2017x \equiv 0 [2017] \\ + \\ 41y \equiv 41y [2017] \end{cases} \Rightarrow 2017x + 41y \equiv 41y [2017] \Rightarrow 1 \equiv 41y [2017] \Rightarrow 41y \equiv 1 [2017]$$

Existe-il y tel que  $0 \leq y \leq 2016$  ?

$$0 \leq y \leq 2016 \Rightarrow 0 \leq 246 - 2017k \leq 2016 \Rightarrow -2016 \leq 2017k - 246 \leq 0$$

$$\Rightarrow -2016 + 246 \leq 2017k \leq 246 \Rightarrow -0,88 \leq k \leq 0,12 \Rightarrow k=0 \Rightarrow y=246=y_0$$

Donc  $41y_0 \equiv 1[2017]$

Pour la suite de l'exercice, on rappelle qu'un entier x est l'inverse de y modulo 2017 si  $xy \equiv 1[2017]$ .

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. Montrer que : si  $ab \equiv 0[2017]$  alors ( $a \equiv 0[2017]$  ou  $b \equiv 0[2017]$ ) :

On suppose que  $\begin{cases} ab \equiv 0[2017] \\ \text{et} \\ a \equiv 0[2017] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \equiv 0[2017] \\ \text{et} \\ 2017 \text{ ne divise pas } a \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab \equiv 0[2017] \\ \text{et} \\ 2017 \wedge a = 1 \text{ car } 2017 \text{ est premier} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2017 \mid ab \\ \text{et} \\ 2017 \wedge a = 1 \end{cases}$$

D'après Gauss  $2017 \mid b \Rightarrow b \equiv 0[2017]$

De même si  $\begin{cases} ab \equiv 0[2017] \\ \text{et} \\ b \equiv 0[2017] \end{cases}$  alors on aura  $a \equiv 0[2017]$

b. Dédurre que : si  $a^2 \equiv 1[2017]$  alors ( $a \equiv 1[2017]$  ou  $a \equiv -1[2017]$ ) :

$$\text{Si } a^2 \equiv 1[2017] \Rightarrow a^2 - 1 \equiv 0[2017] \Rightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0[2017]$$

et d'après la question précédente alors  $a-1 \equiv 0[2017]$  ou

$$a+1 \equiv 0[2017] \Rightarrow a \equiv 1[2017] \text{ ou } a \equiv -1[2017]$$

c. Quels sont donc les entiers de l'intervalle  $[1; 4033]$  qui sont égaux à leurs inverses respectifs modulo 2017 ?

$$a^2 \equiv 1[2017] \Rightarrow a \equiv 1[2017] \text{ ou } a \equiv -1[2017] \Rightarrow a=1+2017k \text{ ou } a=-1+2017k$$

$$\bullet 1 \leq a \leq 4033 \Rightarrow 1 \leq -1 + 2017k \leq 4033$$

$$\Rightarrow 2 \leq 2017k \leq 4034 \Rightarrow 0,0009 < k \leq 2 \Rightarrow k=1 \text{ ou } k=2 \Rightarrow a=2016 \text{ ou } a=4033.$$

$$\bullet 1 \leq a \leq 4033 \Rightarrow 1 \leq 1 + 2017k \leq 4033$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2017k \leq 4032 \Rightarrow 0 \leq k < 1,9991 \Rightarrow k=0 \text{ ou } k=1 \Rightarrow a=1 \text{ ou } a=2018.$$

Conclusion  $a \in \{1, 2016, 2018, 4033\}$

### Exercice N°2 :

Le complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ,

1. On considère l'équation (E) :  $iz^3 - (1+i)z^2 - (2+2i)z + 8i = 0$

a. Vérifier que l'équation (E) admet une solution réelle à déterminer :

Soit x une solution réelle de (E)  $ix^3 - (1+i)x^2 - (2+2i)x + 8i = 0$ .

$$-x^2 - 2x + (x^3 - x^2 - 2x + 8)i = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2x = 0 & (1) \\ x^3 - x^2 - 2x + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1)  $\Rightarrow x=0$  ou  $x=-2$  ; La solution 0 est rejetée car elle ne vérifie par l'équation (2) du système précédent.

Donc la solution réelle de (E) est  $z_0 = -2$ .

b. Déterminer les deux autres solutions de l'équation (E) :

Déterminons les nombres a et b tels que :  $iz^3 - (1+i)z^2 - (2+2i)z + 8i = (z+2)(z^2 + az + b)$ .

Tableau d'Horner :

|    |   |         |         |     |
|----|---|---------|---------|-----|
|    | i | -1 - i  | -2 - 2i | 8i  |
| -2 |   | -2i     | 2 + 6i  | -8i |
|    | i | -1 - 3i | 4i      | 0   |

$$\text{Donc } iz^3 - (1+i)z^2 - (2+2i)z + 8i = (z+2)(iz^2 - (1+3i)z + 4i)$$

$$iz^3 - (1+i)z^2 - (2+2i)z + 8i = 0 \Rightarrow (z+2)(iz^2 - (1+3i)z + 4i) = 0$$

$$\text{soit } z+2 = 0 \Rightarrow z = -2 \text{ soit } iz^2 - (1+3i)z + 4i = 0$$

$$\Delta = (-(1+3i))^2 - 4i \times 4i = -8 + 6i + 16 = 8 + 6i = (3+i)^2$$

$$z_1 = \frac{1+3i+3+i}{2i} = \frac{4+4i}{2i} = 2 - 2i \text{ et } z_2 = \frac{1+3i-3-i}{2i} = \frac{-2+2i}{2i} = 1 + i;$$

c. Placer les points A, B et C d'affixes respectives : -2 ; 2-2i et 1+i. Déterminer la nature du triangle ABC :

(Voir la construction ci-dessous)

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{2-2i-1-i}{-2-1-i} = \frac{1-3i}{-3-i} = i;$$

Donc le triangle ABC est rectangle en C.

2. Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x ; y) associe le point M'(x' ; y') tel que  $x' = x+y$  et  $y' = -x+y-2$ .

a. Donner l'expression complexe de s :

$$s : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y - 2 \end{cases} \Rightarrow x' + y'i = x + y + i(-x + y - 2) = (1-i)x + (1-i)yi - 2i \Rightarrow z' = (1-i)z - 2i$$

b. Dédurre la nature et les éléments caractéristiques de s. Déterminer s(C) :

$$z' = az + b \text{ avec } a = 1-i \text{ et } b = -2i$$

$$\begin{cases} |a| = \sqrt{2} \\ \arg a = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Donc  $s$  est une similitude directe de rapport  $k = \sqrt{2}$  et d'angle  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ , son centre est d'affixe

$$w = \frac{b}{1-a} = \frac{-2i}{1-1+i} = -2 = z_A$$

Le centre de  $s$  est le point A.

$$s(C) = B?$$

**Méthode 1 :**

On a  $C(1; 1)$

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 + 1 \\ y' = -1 + 1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = -2 \end{cases} \Rightarrow s(C) = B$$

**Méthode 2 :**

$$\text{On a : } \begin{cases} \frac{AB}{AC} = \sqrt{2} \\ (\vec{AC}; \vec{AB}) = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow s(C) = B$$

3. On désigne par  $z_G$  l'affixe du point G, centre de gravité du triangle ABC, et pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$f(z) = |z + 2|^2 + |z - 2 + 2i|^2 + |z - 1 - i|^2$$

a. Justifier que  $z_G = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$  et que  $f(z) = 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3}$  :

$$G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\} \Rightarrow z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-2 + 2 - 2i + 1 + i}{3} = \frac{1 - 1i}{3}$$

$$f(z) = |z + 2|^2 + |z - 2 + 2i|^2 + |z - 1 - i|^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3MG^2 + \varphi(G)$$

$$\varphi(G) = GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$GA^2 = \left| -2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 = \left| -\frac{7}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 = \frac{49}{9} + \frac{1}{9} = \frac{50}{9}$$

$$GB^2 = \left| 2 - 2i - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 = \left| \frac{5}{3} - \frac{5}{3}i \right|^2 = \frac{50}{9}$$

$$GC^2 = \left| 1 + i - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 = \left| \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i \right|^2 = \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = \frac{20}{9} \Rightarrow \varphi(G) = GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{50}{9} + \frac{50}{9} + \frac{20}{9} = \frac{120}{9} = \frac{40}{3}$$

$$\text{Donc } f(z) = 3MG^2 + \varphi(G) = 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3}$$

b. Déterminer, suivant les valeurs du réel  $k$ , l'ensemble  $\Gamma_k$  des points M du plan d'affixe  $z$  tels que  $f(z) = k$ . déterminer l'ensemble  $\Gamma_{20}$  :

$$f(z) = k \Rightarrow 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3} = k \Rightarrow 3MG^2 + \frac{40}{3} = k \Rightarrow MG^2 = \frac{3k-40}{9}$$

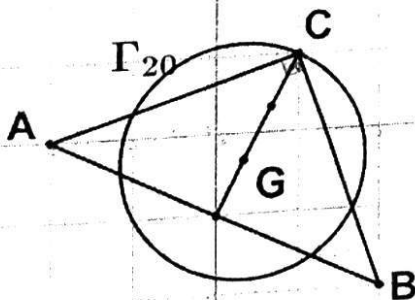
• Si  $k < \frac{40}{3}$  alors  $\Gamma_k = \emptyset$  ;

• Si  $k = \frac{40}{3}$  alors  $\Gamma_k = \{G\}$  ;

• Si  $k > \frac{40}{3}$  alors  $\Gamma_k = C_{(G; \frac{\sqrt{3k-40}}{3})}$

•  $k = 20 > \frac{40}{3}$  alors  $\Gamma_{20} = C_{(G; \frac{2\sqrt{5}}{3})}$  et comme  $GC^2 = \frac{20}{9}$  alors  $GC = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

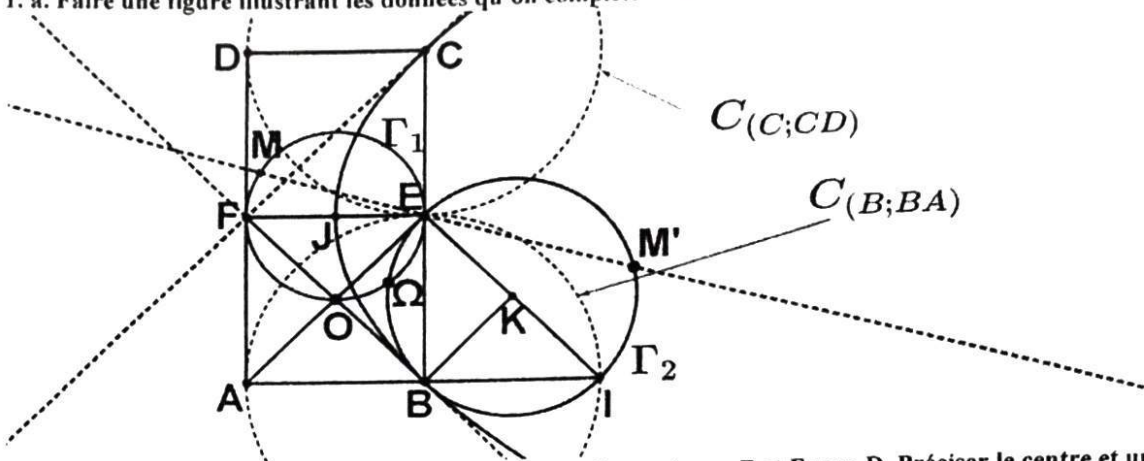
Par suite  $\Gamma_{20}$  est le cercle de centre G passant par C.



**Exercice N°3 :**

ABCD est un rectangle direct tel que  $CB = 2CD$  et soient E, F et O les milieux respectifs des segments [CB], [AD] et [AE]. On pose  $I = s_B(A)$ .

1. a. Faire une figure illustrant les données qu'on complètera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontalement :



b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme A vers E et E vers D. Préciser le centre et un angle de  $r$  :

Comme  $\begin{cases} AE = ED = AB\sqrt{2} \\ \text{et} \\ \overline{AE} \neq \overline{ED} \end{cases}$  alors il existe une unique rotation tel que :  $\begin{cases} r(A) = E \\ \text{et} \\ r(E) = D \end{cases}$

le centre  $\Omega \in \text{med}[AE] \cap \text{med}[ED] = (FB) \cap (FC) = F$ . Son angle  $\alpha = (\overline{AE}; \overline{ED}) = (\overline{EA}; \overline{ED}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$

c. On pose  $f = s_{(DE)} \circ s_{(BF)} \circ s_{(AE)}$  déterminer  $f(A)$  et  $f(B)$  puis montrer que  $f$  est une symétrie glissante dont on précisera la forme réduite :

$f(A) = s_{(DE)} \circ s_{(BF)} \circ s_{(AE)}(A) = s_{(DE)} \circ s_{(BF)}(A) = s_{(DE)}(E) = E$  et  $f(B) = s_{(DE)} \circ s_{(BF)} \circ s_{(AE)}(B) = s_{(DE)} \circ s_{(BF)}(F) = s_{(DE)}(F) = C$   
 D'une part,  $f$  est la composée d'un nombre impair d'antidéplacements, alors  $f$  est un antidéplacement.  
 D'autre part,  $f(A) = E$  et  $f(B) = C$  et comme  $\text{med}[AE] \neq \text{med}[BC]$ , alors  $f$  n'est pas une réflexion, d'où  $f$  est une symétrie glissante.  
 $f(A) = E \Rightarrow A * E \in \Delta$ , l'axe de  $f \Rightarrow O \in \Delta$  et  $f(B) = C \Rightarrow B * C \in \Delta \Rightarrow E \in \Delta$   
 Donc  $\Delta = (OE) = (AE)$ .

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $f$ ,  $f(B) = C \Rightarrow t_{\vec{u}} \circ s_{(AE)}(B) = C \Rightarrow t_{\vec{u}}(F) = C \Rightarrow \vec{u} = \overline{FC} = \overline{AE}$ .

D'où la forme réduite de  $f$  :  $f = t_{\overline{AE}} \circ s_{(AE)} = s_{(AE)} \circ t_{\overline{AE}}$

2. a. Montrer qu'il existe une unique similitude  $s$  qui transforme O vers E et E vers B, déterminer le rapport et un angle de  $s$  :

On a  $\begin{cases} O \neq E \\ E \neq B \end{cases}$  et donc il existe une unique similitude directe  $s$  telle que  $s(O) = E$  et  $s(E) = B$ .

Le rapport de  $s$  :  $k = \frac{EB}{OE} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$ , son angle  $\alpha = (\overline{OE}; \overline{EB}) = (\overline{EO}; \overline{EB}) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{-3\pi}{4}$

b. Soit  $\Omega$  le centre de  $s$ , montrer que  $\Omega$  appartient aux cercle  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de diamètre respectifs [EF] et [EI], construire  $\Omega$  :

$s(O) = E \Rightarrow (\overline{\Omega O}; \overline{\Omega E}) = \frac{-3\pi}{4} [2\pi] = \frac{\pi}{4} - \pi [2\pi] = (\overline{FO}; \overline{FE}) - \pi [2\pi]$   
 $\Rightarrow \Omega, O, E$  et  $F$  sont cocycliques en particulier  $\Omega$  est situé sur l'arc dans le demi plan limité par (OE) ne contenant pas F.  
 Donc  $\Omega \in C[EF]$ .

D'autre part  $s(E) = B \Rightarrow (\overline{\Omega E}; \overline{\Omega B}) = \frac{-3\pi}{4} [2\pi] = \frac{\pi}{4} - \pi [2\pi] = (\overline{IE}; \overline{IB}) - \pi [2\pi]$   
 $\Rightarrow \Omega, B, E$  et  $I$  sont cocycliques, en particulier  $\Omega$  est situé sur l'arc dans le demi-plan limité par (BE) ne contenant pas I.  
 Donc  $\Omega \in C[IE]$ .

Construction de  $\Omega$  :  $\begin{cases} \Omega \in C[EF] \cap C[IE] \\ \Omega \neq E \text{ car } s(E) = B \neq E \end{cases}$

Donc  $\Omega$  est le deuxième point d'intersection de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  tel que  $\Omega \neq E$ .

3. Soit M un point de  $\Gamma_1$  différent de  $\Omega$  et  $M' = s(M)$ .  
 a. Soient J et K les milieux respectifs des segments [EF] et [EI]. Montrer que  $s(J) = K$ . En déduire que  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$  :

**Méthode 1 :**

$J = E * F$  et  $K = E * I$ . On pose  $J' = s(J)$  ;  
 $s : J \rightarrow J' ; O \rightarrow E ; E \rightarrow B$ . Comme JOE est rectangle isocèle en J et direct alors J'EB est rectangle isocèle en J' et direct.  
 D'où  $s(J) = K$ .

Méthode 2 :

$$\text{Le point K vérifie : } \begin{cases} \frac{BK}{EJ} = \sqrt{2} \\ (\overline{EJ}; \overline{BK}) = \frac{-3\pi}{4} \\ \text{et} \\ s(E) = B \end{cases}$$

Donc  $s(J)=K$ .Déduisons que  $s(\Gamma_1)=\Gamma_2$  :

$\Gamma_1$  est le cercle de centre J passant par E donc  $s(\Gamma_1)$  est le cercle de centre  $s(J) = K$  passant par  $s(E) = B$ .

b. Montrer alors que la droite  $(MM')$  passe par un point fixe à préciser :

$$\begin{aligned} 2(\overline{EM}; \overline{EM'}) &= 2(\overline{EM}; \overline{E\Omega}) + 2(\overline{E\Omega}; \overline{EM'}) = (\overline{JM}; \overline{J\Omega}) + (\overline{K\Omega}; \overline{KM'}) \text{ (angle inscrit et angle au centre).} \\ &= (\overline{JM}; \overline{J\Omega}) - (\overline{KM'}; \overline{K\Omega}) = 0 \text{ car } s((\overline{JM}; \overline{J\Omega})) = (\overline{KM'}; \overline{K\Omega}). \end{aligned}$$

Donc  $(MM')$  passe par le point fixe E.c. En déduire une construction de  $M'$  à partir d'une position donnée de M :On trace  $(EM)$ , elle coupe  $\Gamma_2$  en  $M'$ .

4. Soit (P) la parabole de direction (AD) et de foyer E.

a. Déterminer le sommet de (P) :

On a le projeté orthogonal du foyer E sur la direction (AD) est le point F alors, le milieu J de [EF] est le sommet de (P).

b. Montrer que (P) passe par B et C :

• A est le projeté orthogonal de B sur la direction (AD), comme  $\frac{BE}{BA} = 1$ , alors (P) passe par B.• D est le projeté orthogonal de C sur la direction (AD), comme  $\frac{CE}{CD} = 1$ , alors (P) passe par C.

c. Déterminer les tangentes à (P) aux points B et C :

• La tangente à (P) au point B est la médiatrice de [EA], car E est le foyer et A est le projeté orthogonal de B sur la direction (AD), d'où la tangente à (P) en B est (BF).

• La tangente à (P) au point C est la médiatrice de [ED], car E est le foyer et D est le projeté orthogonal de C sur la direction (AD), d'où la tangente à (P) en C est (CF).

d. Montrer que (P) est la seule parabole de direction (AD) passant par B et C :

Soit (P') une parabole de direction (AD) passant par B et C et F' un foyer de (P'). Les points A et D sont les projetés orthogonaux de B et C respectivement sur (AD), alors

 $F' \in C_{(B,BA)} \cap C_{(C,CD)}$  alors F' n'est autre que le point E (les cercles  $C_{(B,BA)}$  et  $C_{(C,CD)}$  sont tangents en E).**Exercice N°4 :**Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on définit la fonction  $f_n$  sur  $]0; +\infty[$  par :  $f_n(x) = (\ln x)^n$  et on désigne par  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et discuter  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$  suivant la parité de n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^n = -\infty; \text{ si } n \text{ est impair.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^n = +\infty; \text{ si } n \text{ est pair.}$$

b. Calculer  $f_n'(x)$  dérivée de  $f_n(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f_n$  (suivant la parité de n) :

$$f_n'(x) = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$$

• Si n est pair alors  $(n-1)$  est impair. D'où le signe de  $(\ln x)^{n-1}$  est celui de  $\ln x$ .

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| x       | 0         | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - | 0         |
|         |           |   | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ |   | $+\infty$ |
|         |           | ↘ | ↗         |
|         |           | 0 |           |

• Si n est impair alors  $(n-1)$  est pair. D'où  $(\ln x)^{n-1} > 0$ 

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| x       | 0         | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | + | 0         |
|         |           |   | +         |
| $f(x)$  |           |   | $+\infty$ |
|         |           | ↗ | ↘         |
|         |           | 0 |           |
|         | $-\infty$ |   |           |

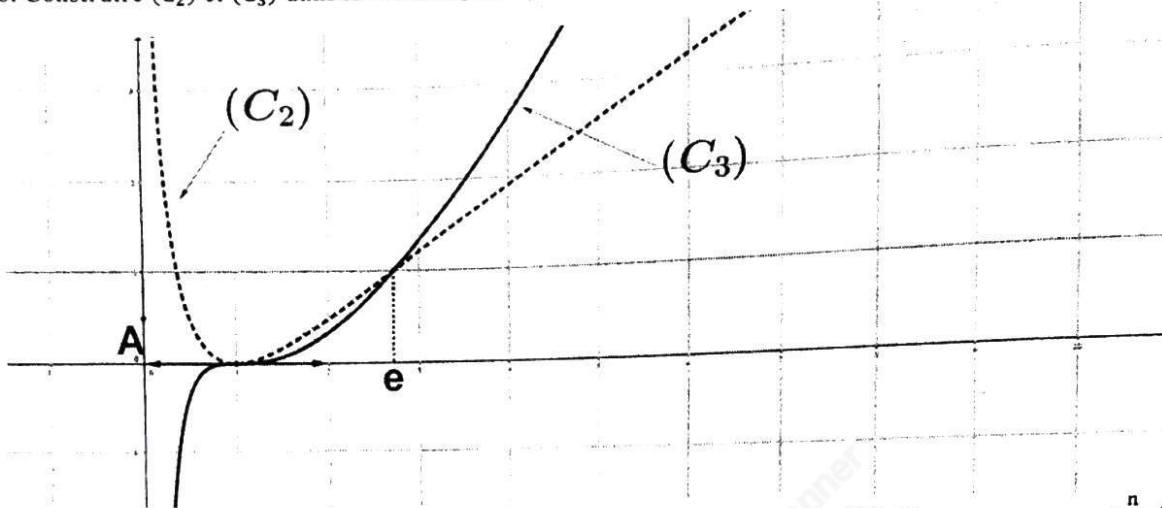
Classes des 7<sup>e</sup>C

2. a. Etudier la position relative de  $(C_2)$  et  $(C_3)$  :

$$f_3(x) - f_2(x) = (\ln x)^3 - (\ln x)^2 = (\ln x - 1)(\ln x)^2$$

|                   |                       |   |                       |   |                       |           |
|-------------------|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|-----------|
| x                 | $-\infty$             | 0 | -                     | 0 | +                     | $+\infty$ |
| $f_3(x) - f_2(x)$ | -                     | 0 | $\frac{(C_2)}{(C_3)}$ | 0 | $\frac{(C_3)}{(C_2)}$ | -         |
| PR                | $\frac{(C_2)}{(C_3)}$ |   | $\frac{(C_2)}{(C_3)}$ |   | $\frac{(C_3)}{(C_2)}$ |           |

b. Construire  $(C_2)$  et  $(C_3)$  dans le même repère :



3. Pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1, on pose :  $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e f_n(x) dx$  ;  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .

a. Montrer que  $I_2 = \frac{e-2}{2}$  (on procédera par intégration par parties) :

$$I_2 = \frac{(-1)^2}{2!} \int_1^e f_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2 \frac{1}{x} \ln x \\ v(x) = x \end{cases} \Rightarrow \int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e x \left(2 \frac{1}{x} \ln x\right) dx = e - 2 \int_1^e \ln x dx$$

On pose  $I = \int_1^e \ln x dx$ .

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \Rightarrow I = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}(e - 2) = \frac{e-2}{2}$$

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1, on a  $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$  :

$$\text{On a } I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_1^e f_{n+1}(x) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$$

On pose  $I = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{(n+1)}{x} (\ln x)^n \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx = e - \frac{(n+1)n!}{(-1)^n} I_n \Rightarrow I = e + \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}} I_n$$

$$\text{On a } I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} I = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left( e + \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}} I_n \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$$

c. Vérifier que  $I_2 = -1 + e \cdot u_2$  :

$$\text{On a } I_2 = \frac{e-2}{2} = -1 + \frac{e}{2} = -1 + \frac{1}{2}e = -1 + e \left( \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} \right) = -1 + e \cdot u_2$$

d. En déduire que  $\forall n \geq 2, I_n = -1 + e \cdot u_n$

Démontrons par récurrence :

• La propriété est vraie pour  $n=2$  car  $I_2 = -1 + e \cdot u_2$  ;

• Montrons que si  $I_n = -1 + e \cdot u_n$  alors  $I_{n+1} = -1 + e \cdot u_{n+1}$

$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + (-1 + e \cdot u_n) = -1 + e \left( u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right) = -1 + e \cdot u_{n+1}$$

Donc  $\forall n \geq 2, I_n = -1 + e \cdot u_n$

4. a. Montrer que  $\forall x \in [1; e], 0 \leq f_n(x) \leq 1$ . Déduire  $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$  ;

• Si  $1 \leq x \leq e$  et  $f_n$  strictement croissante alors  $f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(e) \Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq 1$

• On a :  $|I_n| = \frac{1}{n!} \int_1^e f_n(x) dx$ .

$$0 \leq f_n(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_1^e f_n(x) dx \leq [x]_1^e \Rightarrow 0 \leq \int_1^e f_n(x) dx \leq e - 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^e f_n(x) dx \leq \frac{e-1}{n!} \Rightarrow |I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$$

b. Dédire la limite de  $(I_n)$  et celle de  $(u_n)$  :

D'après le théorème des gendarmes  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

$$\text{On a : } \forall n \geq 2, I_n = -1 + e \cdot u_n \Rightarrow u_n = \frac{1 + I_n}{e}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + I_n}{e} = \frac{1}{e}$$

**Exercice N°5 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\begin{cases} f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \\ f(0) = \ln 3 \end{cases}$

1. a. Montrer que  $\forall x \leq 0, e^x \leq 1$  et que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$  :

•  $x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq e^0$  (car la fonction exp est croissante)  $\Rightarrow \forall x \leq 0, e^x \leq 1$

• On pose  $h(x) = e^x - x - 1$

On a  $h'(x) = e^x - 1$

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| x       | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | -         | 0 | +         |
| $h(x)$  |           | 0 |           |

D'après le tableau de variation de  $h$  :  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ .

b. Dédire que  $\forall t > 0; \frac{1}{t} - t \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t}$  :

On a  $-t^2 + 1 \leq e^{-t^2} \leq 1$ , en divisant par  $t > 0$  on obtient :  $\frac{-t^2+1}{t} \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{t} - t \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t}$

c. Montrer alors que  $\forall x > 0, \ln 3 - 4x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$  :

On a  $\frac{1}{t} - t \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t}$  en intégrant on trouve  $[\ln t]_x^{3x} - [\frac{1}{2}t^2]_x^{3x} \leq f(x) \leq [\ln t]_x^{3x}$

$$\Rightarrow \ln 3x - \ln x - \left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \leq f(x) \leq \ln 3x - \ln x \Rightarrow \ln 3 - 4x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$$

d. Dédire que  $f$  est continue et dérivable en  $0^+$ , et que  $f'_d(0) = 0$  :

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} :$$

$$\text{On a } \ln 3 - 4x^2 \leq f(x) \leq \ln 3 \Rightarrow -4x^2 \leq f(x) - \ln 3 \leq 0 \Rightarrow -4x^2 \leq f(x) - f(0) \leq 0 \Rightarrow \frac{-4x^2}{x} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq 0 \text{ avec } x > 0$$

$$\Rightarrow -4x \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq 0$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-4x) = 0 \text{ alors d'après les gendarmes } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = f'_d(0)$$

Donc  $f$  est dérivable à droite en 0 et par suite elle est continue en  $0^+$ .

2. On considère la fonction  $g$ , définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t} dx$ .

a. Justifier que  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  puis déterminer sa dérivée  $g'(x)$  :

Comme  $h(t) = \frac{e^{-t^2}}{t}$  est continue sur  $]0; +\infty[$  et  $1 \in ]0; +\infty[$  alors  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $g'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}$ .

b. Montrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = -g(x) + g(3x)$  :

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t^2}}{t} dt + \int_1^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt = -g(x) + g(3x) ;$$

c. Dédire que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que  $\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} (e^{-9x^2} - 1)$  :

$f$  est la somme et la composée des fonctions dérivable sur  $]0; +\infty[$ , donc  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

$$f(x) = -g(x) + g(3x) \Rightarrow f'(x) = -g'(x) + 3g'(3x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{x} + 3 \frac{e^{-(3x)^2}}{3x} = -\frac{e^{-x^2}}{x} + \frac{e^{-9x^2}}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x} (e^{-9x^2} - 1), \forall x > 0$$

3. a. On suppose que  $x$  est supérieur à 1. Montrer que  $\forall t \in [x; 3x], e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$  :

$$x \leq t \leq 3x \Rightarrow x^2 \leq t^2 \leq 9x^2 \Rightarrow -9x^2 \leq -t^2 \leq -x^2 \Rightarrow e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$$

b. En déduire que  $\forall t \in [x; 3x], e^{-9x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \leq e^{-x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$  :

$$\text{On a } e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2} \Rightarrow e^{-9x^2} \frac{1}{t} \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq e^{-x^2} \frac{1}{t} \Rightarrow e^{-9x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \leq e^{-x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$$

c. déduire alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :

$$\text{On a : } e^{-9x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \leq f(x) \leq e^{-x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \Rightarrow e^{-9x^2} [\ln t]_x^{3x} \leq \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \leq e^{-x^2} [\ln t]_x^{3x} \Rightarrow e^{-9x^2} \ln 3 \leq f(x) \leq e^{-x^2} \ln 3$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-9x^2} \ln 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \ln 3 = 0, \text{ alors d'après les Gendarmes } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

d. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

On a :  $\forall x > 0, f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} (e^{-8x^2} - 1)$ .

$-8x^2 < 0 \Rightarrow e^{-8x^2} < 1 \Rightarrow e^{-8x^2} - 1 < 0$

$e^{-8x^2} - 1 < 0$   
 $\frac{e^{-x^2}}{x} > 0 \Rightarrow f(x) < 0$

|        |         |           |
|--------|---------|-----------|
| $x$    | 0       | $+\infty$ |
| $f(x)$ | 0       | -         |
| $f(x)$ | $\ln 3$ | 0         |

## Bac 2016 session normale Énoncé

### Exercice N°1 :

On considère l'équation (E) :  $5x - 3y = 17$ , où  $x$  et  $y$  des entiers relatifs.

1. a. Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple (4 ; 1) est une solution particulière de (E).
- b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. Soit (x ; y) une solution de (E).

a. Montrer que si  $x$  est un diviseur de  $y$ , alors  $x$  est un diviseur de 17.

b. Soit  $m$  un entier relatif. Trouver les valeurs de  $m$  telles que le quotient  $\frac{1+5m}{4+3m}$  soit un entier relatif.

### Exercice N°2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ,

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (4 + 8i)z^2 + (-14 + 24i)z + 32 + 4i$ .

1. a. Calculer  $P(2i)$  et déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  :  $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$ .
- b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

On note  $z_1$ ;  $z_2$  et  $z_3$  ses solutions avec  $|z_1| < |z_2| < |z_3|$ .

c. Soient A, B et C les points d'affixes respectives  $z_1$ ;  $z_2$  et  $z_3$ . Déterminer l'affixe de G barycentre du système  $\{(O; 5); (A; -7); (C; 4)\}$ . Placer A, B, C et G sur la figure.

2. Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $Q(z) = z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i$ .

On note  $\Gamma$  l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $Q(z)$  soit imaginaire pur (ou nul).

- a. En posant  $z = x + iy$ , donner une équation cartésienne de  $\Gamma$  et montrer que  $\Gamma$  est une conique de centre G.
- b. Préciser les sommets et l'excentricité de  $\Gamma$  puis la construire dans le repère précédent.

### Exercice N°3 :

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ . Interpréter.

b. Calculer et interpréter les limites suivantes  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ .

c. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

d. Construire dans le repère précédent la courbe (C).

2. On définit pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $f_n$  par : 
$$\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans le repère précédent  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- a. Montrer que  $(C_n)$  est l'image de (C) par une homothétie  $h_n$  de centre O dont on préciser le rapport.
- b. Montrer que tous les points  $M_n$  de  $(C_n)$  en lesquels la tangente est orthogonale, sont situés sur une même droite  $\Delta$  dont on donnera une équation.
- c. Sans étudier  $f_1$ , déduire de ce qui précède le tableau de variation de  $f_1$  et la construction de sa courbe  $(C_1)$  dans le même repère. Justifier.

### Exercice N°4 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ . Soit (C) sa courbe représentative dans le repère précédent  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter.

- b. Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
 c. Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.  
 d. Tracer la courbe (C).  
 2. a. Calculer  $\int_0^x \ln(1+t)dt$  et déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $]-1; +\infty[$  qui s'annule en 0. (On pourra écrire  $f(x) = \ln(x+1) - 1 + \frac{x}{x+1}$ )  
 b. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on note  $A_n$  l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x=0$  et  $x=\frac{1}{n}$ . Donner l'expression de  $A_n$  en fonction de  $n$ .  
 3. Dans la suite de l'exercice on prendra  $x$  réel tel que  $x \in ]0; 1[$  et  $n$  un entier naturel non nul.

a. Montrer que pour tout  $n$   $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ .

b. En déduire que  $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}$ .

c. En utilisant a. et b. Montrer que :  $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{x+1} (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}$

d. Montrer que :  $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}$ .

e. En déduire que :  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k$ .

#### Exercice N°5 :

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O et de côté  $a$  ( $a > 0$ ). I ; J ; K et L les milieux respectifs des côtés [AB] ; [BC] ; [CD] et [DA].

Les points E et F tels que LDEF soit un carré direct.

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complètera au fur et à mesure.  
 b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme A en D et L en E.  
 c. Déterminer un angle et le centre de cette rotation.
2. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme J en O et C en D.  
 b. Déterminer l'angle et le rapport de  $s_1$   
 c. Déterminer  $s_1(B)$ , que peut-on en déduire à propos du centre de  $s_1$ .  
 d. Déterminer  $s_1(O)$  puis construire l'image du carré ABCD par  $s_1$ . Justifier la construction.
3. Soit  $s_2$  la similitude directe de centre A, de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . Déterminer  $s_2(O)$  et  $s_2(C)$ .
4. On pose  $f = s_2 \circ s_1^{-1}$  et pour tout point M du plan, on note  $M_1 = s_1(M)$ ,  $M_2 = s_2(M)$ .  
 a. Déterminer  $f(D)$  et caractériser  $f$ .  
 b. Montrer que si  $M_1 \neq M_2$  alors la droite  $(M_1 M_2)$  passe par un point fixe que l'on déterminera.  
 c. Déterminer l'ensemble  $\Gamma_1$  des points M du plan pour les quels les points M ;  $M_1$  et  $M_2$  sont alignés. (On pourra utiliser l'angle  $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$ ).
5. a. Vérifier que O est le barycentre du système  $\{(A; 1); (D; 3); (E; -2)\}$ .  
 b. Déterminer les ensembles  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  des points M tels que :  
 $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow 2MA^2 + 6MD^2 - 4ME^2 = a^2$  et  $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ME})(2\overrightarrow{ML} + 2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MB}) = 0$ .

## Solution

#### Exercice N°1 :

On considère l'équation (E) :  $5x - 3y = 17$ , où  $x$  et  $y$  des entiers relatifs.

1. a. Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple (4 ; 1) est une solution particulière de (E) :  
 Les entiers 5 et 3 sont premiers, donc premiers entre eux  $\Rightarrow 3 \wedge 5 = 1$  et comme 1 divise 17 alors (E) admet des solutions dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

$5 \times 4 - 3 \times 1 = 17 \Rightarrow (4 ; 1)$  est une solution particulière de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) :

Soit  $(x; y)$  une solution quelconque de (E), alors  $5x - 3y = 5 \times 4 - 3 \times 1 \Rightarrow 5(x-4) = 3(y-1)$  (\*)

D'après (\*) on a  $5 \mid 3(y-1)$ , or  $3 \wedge 5 = 1$ , donc d'après Gauss  $5 \mid (y-1) \Rightarrow$  il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $y-1 = 5k$

En remplaçant dans (\*) on trouve  $5(x-4) = 3 \times 5k \Rightarrow x-4 = 3k$

Il en résulte  $y = 1 + 5k$  et  $x = 4 + 3k$

Donc l'ensemble des solutions de (E) :  $\{(4 + 3k; 1 + 5k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$ .

2. Soit  $(x; y)$  une solution de (E).

a. Montrer que si  $x$  est un diviseur de  $y$ , alors  $x$  est un diviseur de 17 :

Si  $x \mid y$  alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $y = kx \Rightarrow 5x - 3kx = 17 \Rightarrow (5 - 3k)x = 17 \Rightarrow x \mid 17$ .

b. Soit  $m$  un entier relatif. Trouver les valeurs de  $m$  telles que le quotient  $\frac{1+5m}{4+3m}$  soit un entier relatif.

$$m \in \mathbb{Z}; \frac{1+5m}{4+3m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (4+3m) \mid (1+5m) \text{ c'est-à-dire } x \mid y$$

$$\Rightarrow x \mid 17 \Rightarrow x \in \{1; 17; -1; -17\}$$

$$\bullet x=1 \Rightarrow 4+3m=1 \Rightarrow m=-1$$

$$\bullet x=17 \Rightarrow 4+3m=17 \Rightarrow m=\frac{13}{3} \text{ (impossible)}$$

$$\bullet x=-1 \Rightarrow 4+3m=-1 \Rightarrow m=\frac{-5}{3} \text{ (impossible)}$$

$$\bullet x=-17 \Rightarrow 4+3m=-17 \Rightarrow m=-7$$

Donc les valeurs de  $m$  sont :  $m=-1$  ou  $m=-7$ .

### Exercice N°2 :

Le complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ,

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-14+24i)z + 32+4i.$$

1. a. Calculer  $P(2i)$  et déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  :

$$P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b) :$$

$$P(2i) = (2i)^3 - (4+8i)(2i)^2 + (-14+24i) \times (2i) + 32+4i$$

$$= -8i + 16 + 32i - 28i - 48 + 32 + 4i = -36i + 36i + 48 - 48 = 0 \Rightarrow P(2i) = 0.$$

$$P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b) ?$$

Tableau d'Horner

|    |   |       |         |        |
|----|---|-------|---------|--------|
|    | 1 | -4-8i | -14+24i | 32+4i  |
| 2i |   | 2i    | 12-8i   | -32-4i |
|    | 1 | -4-6i | -2+16i  | 0      |

$$\text{Donc } P(z) = (z-2i)(z^2 - 2(2+3i)z - 2 + 16i)$$

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ . On note  $z_1; z_2$  et  $z_3$  ses solutions avec  $|z_1| < |z_2| < |z_3|$  :

$$P(z) = (z-2i)(z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i)$$

$$\text{soit } z-2i=0 \Rightarrow z=2i \text{ soit } z^2 - 2(2+3i)z - 2 + 16i = 0$$

$$\Delta' = (-2-3i)^2 - 2 + 16i = 4 - 9 + 12i + 2 - 16i = -3 - 4i = (1-2i)^2$$

$$\Rightarrow z = 2+3i+1-2i = 3+i \text{ ou } z = 2+3i-1+2i = 1+5i$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z)=0$  est  $\{z_1 = 2i; z_2 = 3+i; z_3 = 1+5i\}$ .

c. Soient  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_1; z_2$  et  $z_3$ . Déterminer l'affixe de  $G$  barycentre du système  $\{(O; 5); (A; -7); (C; 4)\}$ . Placer  $A, B, C$  et  $G$  sur la figure :

$$G = \text{bar}\{(O; 5); (A; -7); (C; 4)\}$$

$$z_G = \frac{5z_O - 7z_A + 4z_C}{2} = \frac{5 \times 0 - 7 \times (2i) + 4(1+5i)}{2} = 2+3i$$

2. Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $Q(z) = z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i$ .

On note  $\Gamma$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Q(z)$  soit imaginaire pur (ou nul).

a. En posant  $z = x + iy$ , donner une équation cartésienne de  $\Gamma$  et montrer que  $\Gamma$  est une conique de centre  $G$  :

On a :  $z = x + iy$  alors :

$$Q(z) = (x+iy)^2 - (4+6i)(x+iy) - 2 + 16i = x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 + (2xy - 6x - 4y + 16)i$$

$$M(z) \in \Gamma \Leftrightarrow Q(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 = 0$$

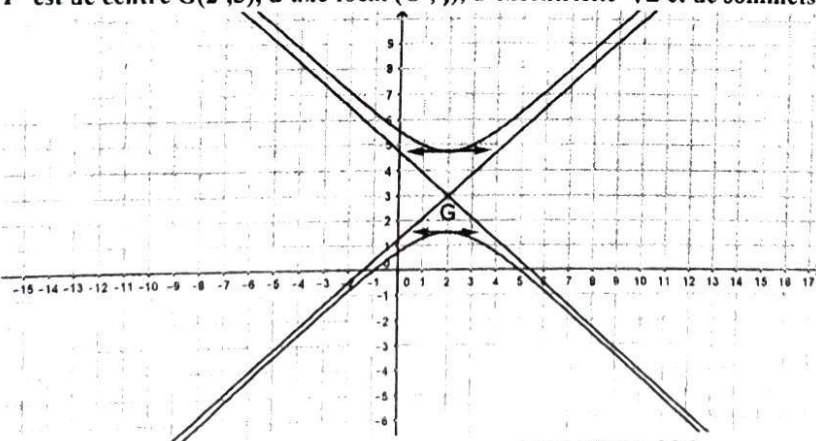
$$x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 - (y-3) + 9 - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - (y-3) = -3$$

$$\Rightarrow -\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y-3)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

Donc  $\Gamma$  est une hyperbole équilatérale.

b. Préciser les sommets et l'excentricité de  $\Gamma$  puis la construire dans le repère précédent :

$\Gamma$  est de centre  $G(2; 3)$ , d'axe focal  $(G; \vec{j})$ , d'excentricité  $\sqrt{2}$  et de sommets  $A(2; 3+\sqrt{3})$  et  $A'(2; 3-\sqrt{3})$ .



## Exercice N°3 :

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  Interpréter :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \quad (\text{car } \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \text{ pour } x \rightarrow 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0)$$

Donc  $f$  est continue à gauche de 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

Donc  $x=0$  est AV de  $(C)$ .

b. Calculer et interpréter les limites suivantes  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad (\text{car } \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \text{ pour } x \rightarrow 0^-)$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche de 0,  $f'_g(0) = 0$  alors  $(C)$  admet une demi tangente horizontale.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ xe^{\frac{1}{x}} - (x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x \left( e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^t - t - 1}{t} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{e^t - 1}{t} - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

Donc  $y = x + 1$  est AO de  $(C)$  en  $-\infty$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ xe^{\frac{1}{x}} - (x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1 \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^t - t - 1}{t} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{e^t - 1}{t} - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

Donc  $y = x + 1$  est AO de  $(C)$  en  $+\infty$ .

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $\frac{x-1}{x}$

|         |           |   |   |  |           |   |           |
|---------|-----------|---|---|--|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 0 |  | 1         |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | + | 0 |  | -         | 0 | +         |
| $f(x)$  |           |   | 0 |  | $+\infty$ |   | $+\infty$ |

$-\infty \rightarrow 0$        $+\infty \rightarrow e$        $+\infty \rightarrow +\infty$

d. Construire dans le repère précédent la courbe  $(C)$  :

2. On définit pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $f_n$  par : 
$$\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans le repère précédent  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a. Montrer que  $(C_n)$  est l'image de  $(C)$  par une homothétie  $h_n$  de centre  $O$  dont on précisera le rapport :

Soit  $h(O; n)$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $n$ .

$$M(x; y) \in (C) \text{ et } M'(x'; y') \text{ tel que } M' = h(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = nx \\ y' = ny \end{cases}$$

\*  $M \in (C) \Rightarrow M' \in (C_n)$  ?

$$y' = ny = nxe^{\frac{n}{x}} = n \frac{x'}{n} e^{\frac{n}{x'/n}} = x' e^{\frac{n}{x'}} \Rightarrow M' \in (C_n).$$

\*  $M' \in (C_n) \Rightarrow M \in (C)$  ?

$$y = \frac{1}{n} y' = \frac{1}{n} x' e^{\frac{n}{x'}} = \frac{1}{n} n x e^{\frac{n}{nx}} = x e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow M \in (C).$$

Donc  $(C_n)$  est l'image de  $(C)$  par une homothétie  $h_n(O; n)$

b. Montrer que tous les points  $M_n$  de  $(C_n)$  en lesquels la tangente est orthogonale, sont situés sur une même droite  $\Delta$  dont on

$$\text{donnera une équation : } f'_n(x) = e^{\frac{n}{x}} - \frac{n}{x} e^{\frac{n}{x}} = \left( \frac{x-n}{x} \right) e^{\frac{n}{x}}$$

$$\text{La tangente au point de } (C_n) \text{ est horizontale si } f'_n(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-n}{x} = 0 \Rightarrow x = n.$$

$f'_n(n) = en \Rightarrow M_n(n; en)$ .

$M_n M_{n+1} = \binom{1}{e} \Rightarrow (M_n M_{n+1}) : y = ex + b$  et comme  $M_n \in (M_n M_{n+1}) \Rightarrow en = en + b \Rightarrow b = 0$

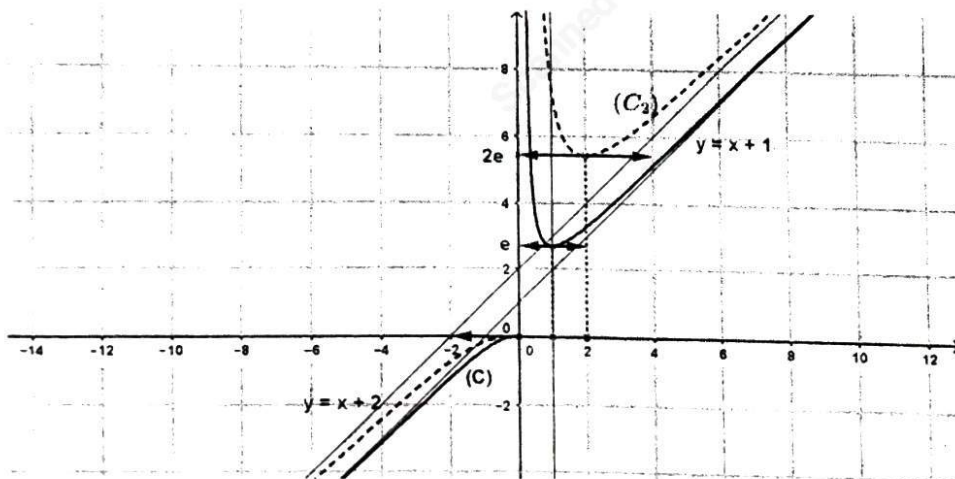
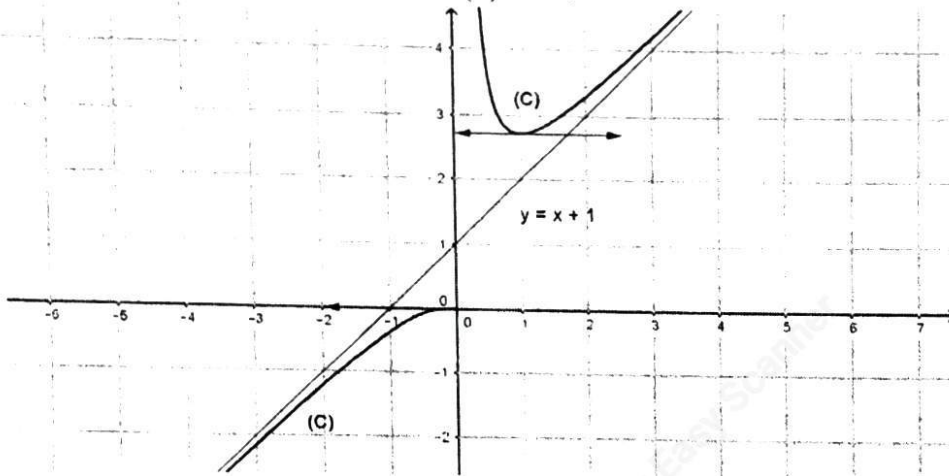
Donc les points  $M_n$  sont situés sur la droite fixe  $\Delta$  d'équation  $y = ex$ .

c. Sans étudier  $f_2$ , déduire de ce qui précède le tableau de variation de  $f_2$  et la construction de sa courbe  $(C_2)$  dans le même repère. Justifier :

|           |           |   |   |  |           |   |           |
|-----------|-----------|---|---|--|-----------|---|-----------|
| x         | $-\infty$ |   | 0 |  | 2         |   | $+\infty$ |
| $f'_2(x)$ |           | + | 0 |  | -         | 0 | +         |
| $f_2(x)$  |           |   | 0 |  | $+\infty$ |   | $+\infty$ |

Diagram showing arrows indicating the behavior of  $f_2(x)$  between critical points: from  $-\infty$  to 0, it increases; from 0 to  $2e$ , it decreases; from  $2e$  to  $+\infty$ , it increases.

Comme  $n = 2$  alors les abscisses et les ordonnées sont multipliées par 2.  
La droite  $\Delta'$  d'équation  $y = x + 2$  est AO de (C) en  $+\infty$ .



**Exercice N°4 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$   
Soit (C) sa courbe représentative dans le repère précédent  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter :

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \ln t - \frac{t-1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \ln t - 1 + \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (t \ln t - t + 1) = \frac{1}{0^+} \times 1 = +\infty$   
Donc  $x=1$  AV.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \right) = +\infty - 1 = +\infty$ .  
(C) admet BP en  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{x}{x^2+x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) = 0 - 0 = 0$$

Donc la branche parabolique en  $+\infty$  est de direction (Ox).

b. Dresser le tableau de variation de f :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Donc le signe  $f'(x)$  est celui de  $x$  car  $x+1 > 0$  pour  $x > -1$ .

|         |           |       |           |
|---------|-----------|-------|-----------|
| x       | -1        | 0     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - 0 + |           |
| f(x)    | $+\infty$ | 0     | $+\infty$ |

c. Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées :

$$f''(x) = \left( \frac{x}{(x+1)^2} \right)' = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

|          |    |       |           |
|----------|----|-------|-----------|
| x        | -1 | 1     | $+\infty$ |
| $f''(x)$ |    | + 0 - |           |

$f''(x)$  s'annule en 1 et change de signe alors (C) admet un point d'inflexion A d'abscisse 1 et d'ordonnée

$$f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{-1+2\ln 2}{2}; A\left(1; \frac{-1+2\ln 2}{2}\right)$$

La tangente T en A a pour équation  $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \ln 2$ .

d. Tracer la courbe (C) : (voir la courbe ci-après)

2. a. Calculer  $\int_0^x \ln(1+t) dt$  et déterminer la primitive F de f sur  $]-1; +\infty[$  qui s'annule en 0.

(On pourra écrire  $f(x) = \ln(x+1) - 1 + \frac{1}{x+1}$ ) :

Utilisons une intégration par parties :  $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln(t+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = t+1 \\ v'(t) = \frac{1}{t+1} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^x \ln(1+t) dt &= [(t+1)\ln(t+1)]_0^x - \int_0^x (t+1) \times \frac{1}{t+1} dt ; \\ &= [(t+1)\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x 1 dt \\ &= [(t+1)\ln(1+t)]_1^x - [t]_0^x = (x+1)\ln(x+1) - x \end{aligned}$$

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$  est la primitive de f qui s'annule en 0.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt ; \\ &= \int_0^x \left( \ln(x+1) - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dt \\ &= \int_0^x \ln(x+1) dt - \int_0^x 1 dt + \int_0^x \frac{1}{x+1} dt \\ &= (x+1)\ln(x+1) - x - [t]_0^x + [\ln(t+1)]_0^x \\ &= (x+1)\ln(x+1) - x - x + \ln(x+1) \\ &= (x+1)\ln(x+1) - 2x + \ln(x+1) \\ &= (x+2)\ln(x+1) - 2x \end{aligned}$$

b. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on note  $A_n$  l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \frac{1}{n}$ . Donner l'expression de  $A_n$  en fonction de n :

$$A_n = \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt = F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0) = F\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} + 2\right) \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) - \frac{2}{n}$$

3. Dans la suite de l'exercice on prendra  $x$  réel tel que  $x \in ]0; 1[$  et n un entier naturel non nul.

a. Montrer que pour tout n :  $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$  :

$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1}$  est la somme des (n+1) termes consécutifs d'une SG de raison (-x) et de premier terme 1.

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} (-x)^{n+1}}{1+x} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

b. En déduire que :  $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$  :

On a de la question précédente  $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$  : alors par intégration des deux membres entre

0 et x on trouve alors :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{k=1}^{n+1} ((-1)^{k-1} \int_0^x t^{k-1} dt) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \Rightarrow [\ln(1+x)]_0^x = \sum_{k=1}^{n+1} ((-1)^{k-1} \left[ \frac{t^k}{k} \right]_0^x + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt).$$

$$\text{Donc } \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

$$\text{c. En utilisant a. et b. Montrer que : } f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{1+x} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

$$\text{En multipliant l'égalité a. par x on obtient : } \frac{x}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x}$$

$$\text{Or } f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^k - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \left[ \frac{1}{k} - 1 \right] x^k + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{1+x} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

$$\text{Donc } f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{1+x} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

$$\text{d. Montrer que } 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \frac{x^{n+2}}{n+2} :$$

$\forall t \in [0; x]$  avec  $x \in [0; 1]$  on a  $1+t \geq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1} \Rightarrow 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \left[ \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^x \Rightarrow 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \frac{x^{n+2}}{n+2} \dots \dots (1)$$

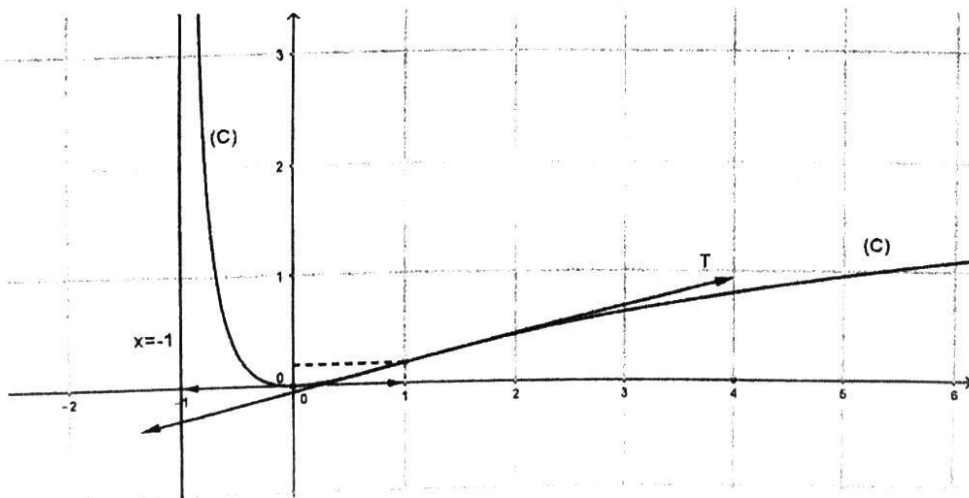
$$\text{e. En déduire que pour } 0 < x < 1; f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k :$$

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k \right| = \left| \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{1+x} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{1+x} \right| + \left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \right|$$

$$\text{D'après (1) : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = 0$$

$$\text{D'autre part } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+2} x^{n+2}}{1+x} = 0 \text{ pour } 0 < x < 1$$

$$\text{Donc pour } x \neq 1; f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k} x^k.$$



## Exercice N°5 :

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O et de côté a ( $a > 0$ ). I ; J ; K et L les milieux respectifs des côtés [AB] ; [BC] ; [CD] et [DA]. Les points E et F tels que LDEF soit un carré direct.

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complètera au fur et à mesure.

b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme A en D et L en E :

On a  $AL = ED \neq 0$  et  $\overrightarrow{AL} \neq \overrightarrow{DE}$ , donc il existe une unique rotation  $r : \begin{cases} A \rightarrow D \\ L \rightarrow E \end{cases}$

c. Déterminer un angle et le centre de cette rotation :

• Un angle de  $r$  est  $(\overrightarrow{AL}; \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

• Comme  $\begin{cases} FE = FL \\ (\overrightarrow{FL}; \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$  alors F est le centre de  $r$ .

2. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme J en O et C en D :

On a  $J \neq C$  et  $O \neq D$ , donc il existe une unique similitude directe  $s_1 : \begin{cases} J \rightarrow O \\ C \rightarrow D \end{cases}$

b. Déterminer l'angle et le rapport de  $s_1$  :

Un angle de  $s_1$  est  $(\overrightarrow{JC}; \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OK}; \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Le rapport de  $s_1$  est  $\frac{OD}{JC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$ .

c. Déterminer  $s_1(B)$ , que peut-on en déduire à propos du centre de  $s_1$  :

On a :  $J = B * C \Rightarrow s_1(J) = O = s_1(B) * D \Rightarrow s_1(B) = B$ . Donc le point B est le centre de  $s_1$ .  $s_1(B; \sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$

d. Déterminer  $s_1(O)$  puis construire l'image du carré ABCD par  $s_1$ . Justifier la construction :

Le triangle OAB est rectangle isocèle en O et direct :  $\begin{cases} \frac{BA}{BO} = \sqrt{2} \\ (\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow s_1(O) = A$ .

3. Soit  $s_2$  la similitude directe de centre A, de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . Déterminer  $s_2(O)$  et  $s_2(C)$  :

On a :  $\begin{cases} \frac{AL}{AO} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AL}) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow s_2(O) = L$  et  $\begin{cases} \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow s_2(C) = D$ .

4. On pose  $f = s_2 \circ s_1^{-1}$  et pour tout point M du plan, on note  $M_1 = s_1(M)$ ,  $M_2 = s_2(M)$ .

a. Déterminer  $f(D)$  et caractériser  $f$  :

$f(D) = s_2 \circ s_1^{-1}(D) = s_2(C) = D$ .

$f$  est la composée de deux similitude directes dont la somme des angles est égales à  $\frac{\pi}{4} + (-\frac{\pi}{4}) = 0 [2\pi]$  et dont le produit des rapports est  $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ , alors  $f$  est l'homothétie de centre D et de rapport  $\frac{1}{2}$ . Donc  $f = h(D; \frac{1}{2})$

b. Montrer que si  $M_1 \neq M_2$  alors la droite  $(M_1 M_2)$  passe par un point fixe que l'on déterminera :

$f(M_1) = s_2 \circ s_1^{-1}(M_1) = s_2(M) = M_2$ .

Si  $M_1 \neq M_2$ , alors  $\overrightarrow{DM_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DM_1}$ . Donc la droite  $(M_1 M_2)$  passe par le point fixe D.

c. Déterminer l'ensemble  $\Gamma_1$  des points M du plan pour les quels les points M,  $M_1$  et  $M_2$  sont alignés (On pourra utiliser l'angle  $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$ ) :

Le triangle  $BMM_1$  est rectangle isocèle en M et direct, donc  $(\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

Le triangle  $AMM_2$  est rectangle isocèle en  $M_2$  et direct, donc  $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MM_2}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

On a alors,  $(\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) = (\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MM_2}) = \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) - \frac{\pi}{4} [2\pi] = \frac{\pi}{4} - (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) [2\pi]$

Les points M ;  $M_1$  et  $M_2$  sont alignés

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) = 0 [\pi] \text{ ou} \\ M = M_1 \text{ ou} \\ M = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} [\pi] \text{ ou} \\ M = M_1 \Leftrightarrow B \text{ ou} \\ M = M_2 \Leftrightarrow M = A \end{cases}$

Or  $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Alors M décrit le cercle  $\Gamma_1$  de centre O et passant par A et B, c'est le cercle circonscrit au carré ABCD.

5. a. Vérifier que O est le barycentre du système  $\{(A; 1); (D; 3); (E; -2)\}$  :

Soit  $G = \text{bar} \begin{pmatrix} A & D & E \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OE})$

$\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \times \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow G = O$

Donc O = bar

| A | D | E  |
|---|---|----|
| 1 | 3 | -2 |

b. Déterminer les ensembles  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  des points M tels que,  $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow 2MA^2 + 6MD^2 - 4ME^2 = a^2$  :

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow 2MA^2 + 6MD^2 - 4ME^2 = a^2 \Leftrightarrow MA^2 + 3MD^2 - 2ME^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 2MO^2 + OA^2 + 3OD^2 - 2OE^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Or } OA^2 = OD^2 = \frac{a^2}{2} \text{ et } OE^2 = OK^2 + KE^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Rightarrow 2MO^2 + \frac{a^2}{2} + 3 \times \frac{a^2}{2} - 2 \times \frac{5a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow 2MO^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2MO^2 = a^2 \Leftrightarrow MO^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = OA^2 \Rightarrow OM = OA.$$

Donc est le cercle de centre O, passant par A.

$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (\overline{MA} + \overline{MK} - \overline{ME})(2\overline{ML} + 2\overline{MK} - \overline{MB}) = 0$ . Que peut-on remarquer ? :

$$\overline{MA} + \overline{MK} - \overline{ME} = \overline{MA} + \overline{MK} + \overline{EM} = \overline{MA} + \overline{EK} = \overline{MA} + \overline{AB} = \overline{MB}$$

$$2\overline{ML} + 2\overline{MK} - \overline{MB} = 2\overline{MD} + 2\overline{DL} + 2\overline{MD} + 2\overline{DK} - \overline{MB} = 4\overline{MD} + 2\overline{DO} - \overline{MB} = 4\overline{MD} + 2\overline{DO} - \overline{MD} - \overline{DB} = 3\overline{MD}$$

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (\overline{MA} + \overline{MK} - \overline{ME})(2\overline{ML} + 2\overline{MK} - \overline{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overline{MB} \times (3\overline{MD}) = 0 \Leftrightarrow \overline{MB} \times \overline{MD} = 0$$

Donc  $\Gamma_3$  est le cercle de diamètre [DB].

On remarque alors que  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ .

## Bac 2016 session complémentaire

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Pour tout nombre complexe z on pose :  $P(z) = z^3 - (1 + 3i)z^2 + 2iz + 6 - 2i$ .

1. a. Calculer  $P(1-i)$ .

b. Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout z de C :  $P(z) = (z - 1 + i)(z^2 + az + b)$ .

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

2. Soit A, B et C les points d'abscisses respectives  $z_A = -1 + i$ ;  $z_B = 1 - i$  et  $z_C = 1 + 3i$ .

a. Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC.

b. Déterminer l'affixe du point G barycentre du système  $\{(A; 2); (B; 1), (C; 1)\}$

c. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tels que :  $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16$ .

d. Déterminer et construire l'ensemble  $\Delta$  des points M du plan tels que :  $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16$ .

3. Soit s la similitude directe de centre C qui transforme A en B.

a. Déterminer l'écriture complexe de s.

b. Déterminer le rapport et un angle de s.

4. On considère la parabole P de foyer A et de directrice (BC).

a. Déterminer l'axe focal et le sommet de P.

b. Tracer P et P' dans le repère précédent où  $P' = s(P)$ .

c. Donner des équations cartésiennes de P et P' dans le repère précédent.

#### Exercice N°2 :

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (1+x)e^{-x}$

Soit la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

b. Interpréter les limites précédentes.

2. a. Dresser le tableau de variation de f et représenter sa courbe (C).

b. Calculer l'aire A du domaine plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x=-1$  et  $x=0$ .

3. Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}$  où n est entier naturel non nul.

Montrer que pour tout  $x \in [-1; 0]$  on a :  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$

4. Soit la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $I_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!} dx$ .

a. En interprétant graphiquement  $I_1$  donner sa valeur (on pourra utiliser A.2).

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

5. Soit la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $I_n = e - U_n$

b. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

c. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

**Exercice N°3 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{6e^x}$

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Vérifier que  $f$  est impaire et que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement.

c. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

d. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $\mathbb{R}$  trois solutions dont l'une  $\alpha$  vérifie  $2,8 < \alpha < 2,9$ .

2. a. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que déterminera.

b. Vérifier que pour tout réel  $x$  :  $(f(x))^2 - (f'(x))^2 = -\frac{1}{9}$ . En déduire l'expression de  $(f^{-1})'(x)$ .

c. Soit  $x$  un réel quelconque. Exprimer l'intégrale  $I(x) = \int_0^x \frac{3}{\sqrt{9t^2+1}} dt$  en fonction de  $f^{-1}(x)$ .

3. Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Pour tout point  $M(x; y)$  on note  $r(M) = M'$  et  $r((C)) = (C_1)$

a. Donner l'expression complexe de la rotation  $r$  puis écrire les coordonnées  $x'$  et  $y'$  de  $M'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

b. Montrer que  $(C_1)$  est la courbe représentative de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \ln(-3x + \sqrt{9x+1})$ .

c. Montrer que pour tout réel  $x$  ;  $h(-x) = f^{-1}(x)$ . On note  $(C')$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le repère précédent.

4. a. Montrer que  $(C)$  et  $(C')$  se coupent en deux points autres que l'origine.

b. Construire dans le même repère les courbes  $(C)$  et  $(C')$  et calculer en fonction de  $\alpha$  l'aire du domaine plan délimité par ces deux courbes ( $\alpha$  est le nombre indiqué en 1.d)

**Exercice N°4 :**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct  $ABC$  de centre et de côté  $a$  ( $a > 0$ ).  $I, J, K$  et  $L$  sont les milieux respectifs des segments  $[BC], [AC], [AB]$  et  $[AI]$  et  $D$  est le symétrique de  $I$  par rapport à  $J$ .

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.

2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme  $B$  en  $C$  et  $I$  en  $J$ .

b. Déterminer  $r_1(K)$  et déterminer le centre et un angle de  $r_1$ .

3. Soit  $r_2$  la rotation de centre  $K$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

a. Déterminer  $r_2(B)$  et  $r_2(I)$ .

b. En déduire  $r_2(C)$ .

4. a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $f$  du plan qui transforme  $B$  en  $C$  et  $I$  en  $J$ .

b. Montrer que  $f$  est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

c. Caractériser la transformation  $g = f \circ r_1^{-1}$

5. On considère la transformation  $\sigma = r_2 \circ r_1$  et on pose  $\sigma(M) = M'$ .

a. Caractériser  $\sigma$ .

b. Montrer que si  $M \neq M'$  alors la droite  $(MM')$  passe par un point fixe que l'on déterminera.

c. En déduire que le quadrilatère  $AMIM'$  est un parallélogramme.

6. Pour tout point  $M$  du plan, on pose  $r_1(M) = M_1$  et  $r_2(M) = M_2$ . Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  du plan pour lesquels  $M, M_1$  et  $M_2$  sont alignés (On pourra utiliser l'angle  $(\overline{MG}; \overline{MK})$ )

## Solution

**Exercice N°1 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (1+3i)z^2 + 2iz + 6 - 2i$ .

1. a. Calculer  $P(1-i)$  :

$$P(1-i) = (1-i)^3 - (1+3i)(1-i)^2 + 2i(1-i) + 6 - 2i = 1 - 3i - 3 + i - (1+3i)(-2i) + 2i + 2 + 6 - 2i = 1 - 3i - 3 + i + 2i - 6 + 2i + 2 + 6 - 2i = 0$$

b. Déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  :  $P(z) = (z-1+i)(z^2 + az + b)$  :

|     |   |       |       |       |
|-----|---|-------|-------|-------|
|     | 1 | -1-3i | 2i    | 6-2i  |
| 1-i |   | 1-i   | -4-4i | -6+2i |
|     | 1 | -4i   | -4-2i | 0     |

D'où  $P(z) = (z-1+i)(z^2 - 4iz - 4 - 2i)$

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  :

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-1+i)(z^2 - 4iz - 4 - 2i) = 0 \Rightarrow \text{soit } z-1+i = 0 \Rightarrow z=1-i \text{ soit } z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0.$$

$$\Delta' = (-2i)^2 + 4 + 2i = -4 + 4 + 2i = 2i \Rightarrow z = \frac{4i \pm \sqrt{2i}}{2} = 2i \pm \sqrt{2i} = 2i + 1 + i = 1 + 3i \text{ ou } z = 2i - 1 - i = -1 + i.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z)=0$  est  $\{1-i; 1+3i; -1+i\}$ .

2. Soit A, B et C les points d'abscisses respectives  $z_A = -1 + i$ ;  $z_B = 1 - i$  et  $z_C = 1 + 3i$ .

a. Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC : (voir la construction ci-après).

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + 3i + 1 - i}{1 - i + 1 - i} = \frac{2 + 2i}{2 - 2i} = \frac{(2 + 2i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} = \frac{4 + 4i + 4i - 4}{4 + 4} = \frac{8i}{8} = i.$$

Donc le triangle ABC est rectangle, isocèle en A.

b. Déterminer l'affixe du point G barycentre du système  $\{(A; 2); (B; 1); (C; 1)\}$  :

$$z_G = \frac{2z_A + z_B + z_C}{4} = \frac{-2 + 2i + 1 - i + 1 + 3i}{4} = i.$$

c. Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tels que :  $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16$  :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16 \Rightarrow 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 16$$

$$GA^2 = (-1 - 0)^2 + (1 - 1)^2 = 1; GB^2 = (1 - 0)^2 + (-1 - 1)^2 = 5 \text{ et } GC^2 = (1 - 0)^2 + (3 - 1)^2 = 5;$$

$$\Rightarrow 4MG^2 + 2 \times 1 + 5 + 5 = 16 \Rightarrow 4MG^2 = 16 - 12 \Rightarrow 4MG^2 = 4 \Rightarrow MG^2 = 1 \Rightarrow MG = 1. \text{ Donc } \Gamma = C_{(G; 1)}$$

d. Déterminer et construire l'ensemble  $\Delta$  des points M du plan tels que :  $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16$  :

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16 \Rightarrow 2\overline{MA} \times (\overline{AB} + \overline{AC}) + AB^2 + AC^2 = 16$$

$$\text{Or } \overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AI} \text{ avec } I = B^*C \text{ et } AB^2 = AC^2 = 4 + 4 = 8.$$

$$\Rightarrow 2\overline{MA} \times (2\overline{AI}) + 8 + 8 = 16 \Rightarrow 4\overline{MA} \times \overline{AI} = 0 \Rightarrow \overline{MA} \times \overline{AI} = 0 \Rightarrow \Delta \text{ est la perpendiculaire (AI) en A. Donc } \Delta = (BC).$$

3. Soit s la similitude directe de centre C qui transforme A en B.

a. Déterminer l'écriture complexe de s :

$$z' = az + b \Rightarrow \begin{cases} z_C = az_C + b & (1) \\ z_B = az_A + b & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) : z_C - z_B = a(z_C - z_A) \Rightarrow a = \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \frac{1 + 3i - 1 - i}{1 + 3i + 1 - i} = \frac{4i}{2 + 2i} = \frac{4i(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} = \frac{8i(1 - i)}{8} = 1 + i.$$

$$z_B = az_A + b \Rightarrow b = z_B - az_A = 1 - i - (1 + i)(-1 + i) = 1 - i + 2 = 1 - i.$$

$$\text{D'où l'écriture complexe de } s : z' = (1 + i)z + 1 - i$$

b. Déterminer le rapport et un angle de s :

$$\text{Le rapport de } s \text{ est : } |a| = |1 + i| = \sqrt{2} \text{ Un angle de } s \text{ est : } \arg a = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}.$$

4. On considère la parabole P de foyer A et de directrice (BC).

a. Déterminer l'axe focal et le sommet de P :

La droite (AG) est perpendiculaire à (BC), donc l'axe focale est la droite (AG).

b. Tracer P et P' dans le repère précédent où  $P' = s(P)$  :

P de foyer A et de directrice (BC)  $\Rightarrow P'$  de foyer B et de directrice (CD) avec  $(\overline{CB}; \overline{CD}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

c. Donner des équations cartésiennes de P et P' dans le repère précédent :

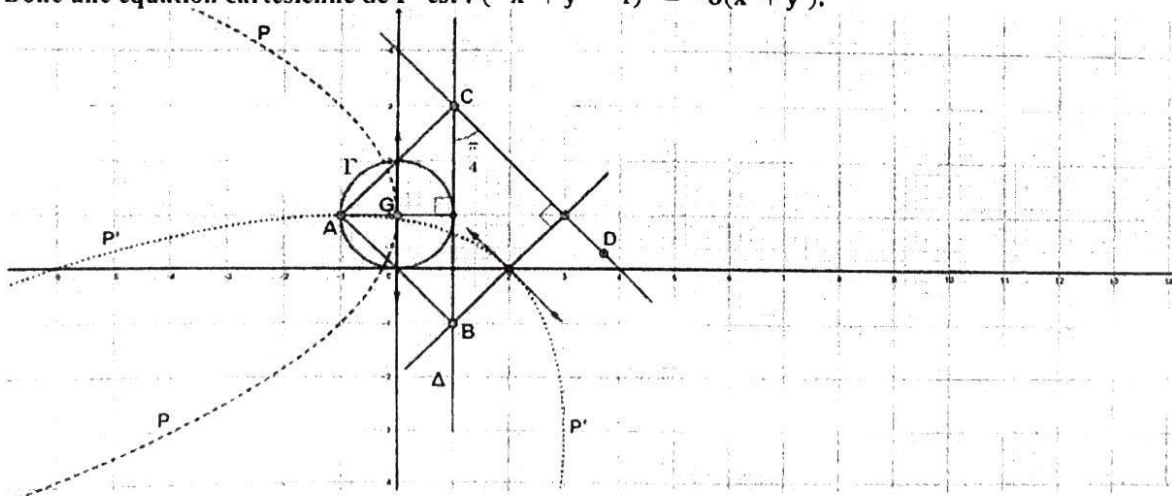
Dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  l'équation de P est :  $(Y - 1)^2 = 2pX$  avec  $\frac{p}{2} = -1 \Rightarrow P : (y - 1)^2 = -4x$ .

$$z' = (1 + i)z + 1 - i \Rightarrow x' + iy' = (1 + i)(x + iy) + 1 - i = x + iy + ix - y + 1 - i$$

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + y'}{2} \\ y = \frac{-x' + y' - 2}{2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{-x' + y' - 2}{2} - 1\right)^2 = -4 \times \frac{x' + y'}{2} \Rightarrow \left(\frac{-x' + y' - 4}{2}\right)^2 = -2(x' + y') \Rightarrow (-x' + y' - 4)^2 = -8(x' + y')$$

Donc une équation cartésienne de P' est :  $(-x' + y' - 4)^2 = -8(x' + y')$ .



**Exercice N°2 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (1+x)e^{-x}$

Soit la courbe (C) représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x)e^{-x} = -\infty \times (+\infty) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

b. Interpréter les limites précédentes :

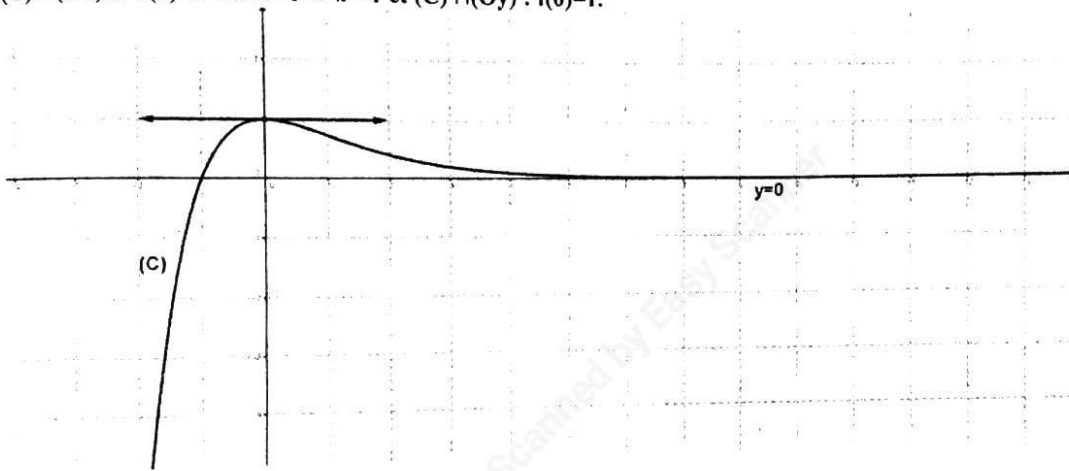
(C) admet BP de direction (Oy) en  $-\infty$  et admet  $y=0$  AH en  $+\infty$ .

2. a. Dresser le tableau de variation de  $f$  et représenter sa courbe (C) :

$$f'(x) = e^{-x} - (1+x)e^{-x} = -xe^{-x}$$

|       |           |   |           |
|-------|-----------|---|-----------|
| x     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) | +         | 0 | -         |
| f(x)  |           | 1 | 0         |

(C)  $\cap$  (Ox) si  $f(x)=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$  et (C)  $\cap$  (Oy) :  $f(0)=1$ .



b. Calculer l'aire A du domaine plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x=-1$  et  $x=0$  :

$$A = \int_{-1}^0 (1+x)e^{-x} dx$$

Utilisons une intégration par parties :  $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$$A = \int_{-1}^0 (1+x)e^{-x} dx = [-(x+1)e^{-x}]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-x} dx = [-(x+1)e^{-x}]_{-1}^0 - [e^{-x}]_{-1}^0 = -1 - 1 + e = e - 2$$

3. Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}$  où  $n$  est entier naturel non nul. Montrer que pour tout

$x \in [-1; 0]$  on a,  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$  :

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1+x)^n \leq 1 \text{ et } 1 \leq e^{-x} \leq e \text{ car } (x \rightarrow e^{-x} \text{ est décroissante})$$

$$\text{Par conséquent : } 0 \leq (1+x)^n e^{-x} \leq e \Rightarrow 0 \leq \frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{e}{n!} \Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$$

4. Soit la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $I_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!} dx$ .

a. En interprétant graphiquement  $I_1$  donner sa valeur (on pourra utiliser A.2) :

$$I_1 = \int_{-1}^0 f_1(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx \Rightarrow I_1 \text{ est l'aire A. Donc } I_1 = e - 2$$

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$  :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_{-1}^0 (1+x)^n e^{-x} dx$$

Utilisons une intégration par parties :  $\begin{cases} u'(x) = (1+x)^n \\ v(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{n+1} [(1+x)^{n+1} e^{-x}]_{-1}^0 + \frac{1}{n+1} \int_{-1}^0 (1+x)^{n+1} e^{-x} dx \right) = \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_{-1}^0 (1+x)^{n+1} e^{-x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)n!} + \frac{1}{(n+1)n!} \int_{-1}^0 (1+x)^{n+1} e^{-x} dx = \frac{1}{(n+1)!} + \int_{-1}^0 \frac{(1+x)^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!} dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

5. Soit la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $I_n = e - U_n$  :

On a pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$  alors :

$$I_2 = I_1 - \frac{1}{2!}$$

$$I_3 = I_2 - \frac{1}{3!}$$

$$I_4 = I_3 - \frac{1}{4!}$$

.....

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow I_n = I_1 - (U_n - 2) = e - 2 - U_n + 2 \Rightarrow I_n = e - U_n$$

b. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

De la question 3, on a pour tout  $x \in [-1; 0]$  on a,  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!} \Rightarrow 0 \leq \int_{-1}^0 f_n(x) dx \leq \int_{-1}^0 \frac{e}{n!} dx$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!} [x]_{-1}^0 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n!} = 0$$

c. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e - I_n) = e - 0 = e.$$

**Exercice N°3 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{6e^x}$ . Soit (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Vérifier que  $f$  est impaire et que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = \frac{e^{-2x}-1}{6e^{-x}} = \frac{1-e^{2x}}{6e^x} = -\frac{e^{2x}-1}{6e^x} = -f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}-1}{6e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{6e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{6} (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{6} (-\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -(+\infty) = -\infty$$

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{6e^x x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(6 \times \frac{e^x}{x}\right) \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(6 \times \frac{e^x}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) = +\infty \times 1 = +\infty.$$

(C) admet BP de direction (Oy) en  $+\infty$ .

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$f'(x) = \frac{1}{6} \times \frac{2e^{2x} \times e^x - e^x \times (e^{2x} - 1)}{e^{2x}} = \frac{1}{6} \times \frac{e^{3x} + e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{6} \times \frac{e^{2x} + 1}{e^x} > 0$$

|       |           |           |
|-------|-----------|-----------|
| x     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| f'(x) | +         |           |
| f(x)  | $-\infty$ | $+\infty$ |

d. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $\mathbb{R}$  trois solutions dont l'une  $\alpha$  vérifie  $2,8 < \alpha < 2,9$  :

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ avec } g(x) = f(x) - x.$$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{6} \times \frac{e^{2x} + 1}{e^x} - 1 = \frac{1}{6} \times \frac{e^{2x} - 6e^x + 1}{e^x}$$

$$e^{2x} - 6e^x + 1 = 0 \Rightarrow X^2 - 6X + 1 = 0 \text{ avec } X = e^x; \Delta = 36 - 4 = 32 \Rightarrow X_1 = 3 + 2\sqrt{2} \text{ et } X_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \ln(3 + 2\sqrt{2}) \text{ et } x_2 = \ln(3 - 2\sqrt{2}).$$

$$y_1 = g(\ln(3 + 2\sqrt{2})) = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^2 - 1}{6(3 + 2\sqrt{2})} - \ln(3 + 2\sqrt{2}) = \frac{16 + 12\sqrt{2}}{6(3 + 2\sqrt{2})} - \ln(3 + 2\sqrt{2}) = \frac{8 + 6\sqrt{2}}{9 + 6\sqrt{2}} - \ln(3 + 2\sqrt{2}) \approx -0,8 < 0$$

La fonction  $g$  est impaire car  $g(-x) = -g(x)$ .

$$y_2 = g(\ln(3 - 2\sqrt{2})) = -g(-\ln(3 - 2\sqrt{2})) = -g\left(\ln\left(\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}\right)\right) = -g(3 + 2\sqrt{2}) \approx 0,8 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{2x} - 1}{6e^x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{6} \left( \frac{e^{2x} - 1}{xe^x} - 6 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{6} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{1}{xe^x} - 6 \right) = +\infty \times (+\infty) = +\infty.$$

Comme g est impaire alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

|         |           |         |       |   |       |          |           |
|---------|-----------|---------|-------|---|-------|----------|-----------|
| x       | $-\infty$ | $\beta$ | $x_2$ | 0 | $x_1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | +       | 0     | - | 0     | +        |           |
| $g(x)$  |           |         | $y_2$ |   |       |          | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ | 0       |       | 0 |       | 0        |           |

- $g(0) = 0$ .
- g est continue et strictement croissante sur  $[x_1; +\infty[$  et  $g([x_1; +\infty[) = [y_1; +\infty[$ .  $0 \in [y_1; +\infty[$  alors il existe un unique réel  $\alpha \in ([x_1; +\infty[) =$  telle que  $g(x) = 0$ .
- Or  $g(2,8) < 0$  et  $g(2,9) > 0$  alors d'après le théorème de la valeur intermédiaire  $2,8 < \alpha < 2,9$ .
- g est continue et strictement croissante sur  $] -\infty; x_2]$  et  $g(]-\infty; x_2]) = ] -\infty; y_2]$ .  $0 \in ] -\infty; y_2]$  alors il existe un unique réel  $\beta \in ] -\infty; x_2]$  telle que  $g(x) = 0$ .
- Or  $g(-2,8) > 0$  et  $g(-2,9) < 0$  alors d'après le théorème de la valeur intermédiaire  $-2,9 < \beta < -2,8$ .
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ . Donc l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $\mathbb{R}$  trois solutions dont l'une  $\alpha$  vérifie  $2,8 < \alpha < 2,9$ .

2. a. Montrer que f réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle J que déterminera.  
La fonction f est continue et strictement croissante, donc elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur l'intervalle  $J = \mathbb{R}$ .

b. Vérifier que pour tout réel x :  $(f(x))^2 - (f'(x))^2 = -\frac{1}{9}$ . En déduire l'expression de  $(f^{-1})'(x)$  :

$$\begin{aligned} \bullet (f(x))^2 - (f'(x))^2 &= \left(\frac{e^{2x}-1}{6e^x}\right)^2 - \left(\frac{e^{2x}+1}{6e^x}\right)^2 = \frac{e^{4x}-2e^{2x}+1 - e^{4x}-2e^{2x}-1}{36e^{2x}} = \frac{-4e^{2x}}{36e^{2x}} = -\frac{1}{9} \\ \bullet (f(f^{-1}(x)))^2 - (f'(f^{-1}(x)))^2 &= -\frac{1}{9} \Rightarrow x^2 - (f'(f^{-1}(x)))^2 = -\frac{1}{9} \Rightarrow (f'(f^{-1}(x)))^2 = x^2 + \frac{1}{9} \Rightarrow (f'(f^{-1}(x)))^2 = \frac{9x^2+1}{9} \\ \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) &= \frac{1}{3}\sqrt{9x^2+1} \end{aligned}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{9x^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}; (f^{-1})'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$   
c. Soit x un réel quelconque. Exprimer l'intégrale  $I(x) = \int_0^x \frac{3}{\sqrt{9t^2+1}} dt$  en fonction de  $f^{-1}(x)$  :

$$I(x) = \int_0^x \frac{3}{\sqrt{9t^2+1}} dt = \int_0^x (f^{-1})'(t) dt = [f^{-1}(t)]_0^x = f^{-1}(x) - f^{-1}(0) = f^{-1}(x) - 0 = f^{-1}(x).$$

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Pour tout point M(x; y) on note  $r(M) = M'$  et  $r((C)) = (C_1)$   
a. Donner l'expression complexe de la rotation r puis écrire les coordonnées  $x'$  et  $y'$  de  $M'$  en fonction de x et y :

Soit  $M(z)$  et  $M'(z')$ , avec  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$ , donc l'expression complexe de r :  $z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 0) \Rightarrow z' = iz$   
 $\Rightarrow z' = i(x + iy) \Rightarrow x' + iy' = -y + xi \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

b. Montrer que  $(C_1)$  est la courbe représentative de la fonction h définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \ln(-3x + \sqrt{9x^2 + 1})$  :

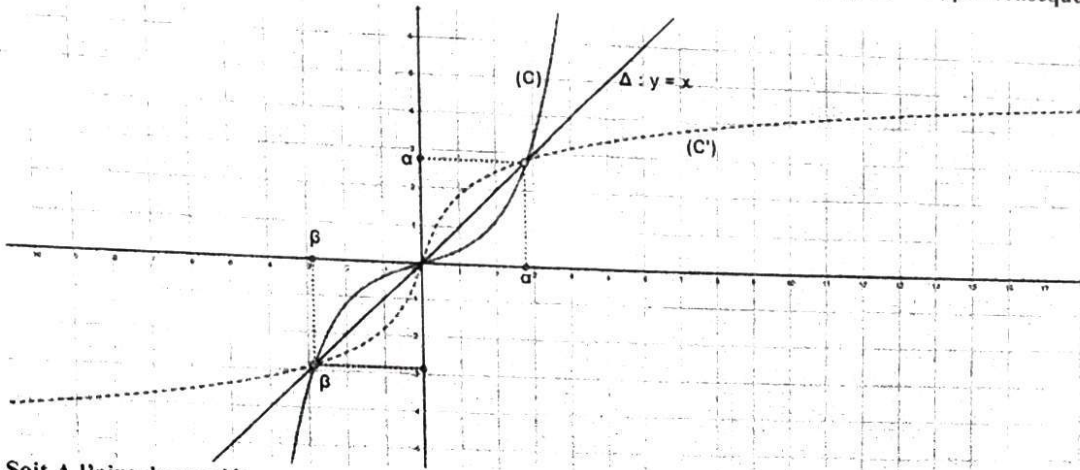
$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow M'(x'; y') \in (C_1)$   
 $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}-1}{6e^x} \Leftrightarrow -x' = \frac{e^{2y'}-1}{6e^{y'}} \Leftrightarrow e^{2y'} - 1 = -6x'e^{y'} \Leftrightarrow e^{2y'} + 6x'e^{y'} - 1 = 0 \Leftrightarrow Y^2 + 6x'Y - 1 = 0$  où  $Y = e^{y'}$   
 $\Delta' = (3x')^2 + 4 = 9(x')^2 + 4 \Rightarrow Y_1 = -3x' + \sqrt{9(x')^2 + 4}$  et  $Y_2 = -3x' - \sqrt{9(x')^2 + 4}$  (rejeté)  
 $Y_1 = -3x' + \sqrt{9(x')^2 + 4} \Leftrightarrow e^{y'} = -3x' + \sqrt{9(x')^2 + 4} \Leftrightarrow y' = \ln(-3x' + \sqrt{9(x')^2 + 4}) \Leftrightarrow y' = h(x')$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}; h(x) = \ln(-3x + \sqrt{9x^2 + 1})$ .  
c. Montrer que pour tout réel x ;  $h(-x) = f^{-1}(x)$ . On note  $(C')$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le repère précédent :

$$\begin{aligned} h(-x) &= \ln(-3x + \sqrt{9x^2 + 1}) = \ln(3x + \sqrt{9x^2 + 1}) \\ f(h(-x)) &= f\left(\ln(3x + \sqrt{9x^2 + 1})\right) = \frac{e^{2\ln(3x + \sqrt{9x^2 + 1})} - 1}{6e^{\ln(3x + \sqrt{9x^2 + 1})}} = \frac{(3x + \sqrt{9x^2 + 1})^2 - 1}{6(3x + \sqrt{9x^2 + 1})} \\ &= \frac{9x^2 + 6x\sqrt{9x^2 + 1} + 9x^2 + 1 - 1}{18x + 6\sqrt{9x^2 + 1}} = \frac{18x^2 + 6x\sqrt{9x^2 + 1}}{18x + 6\sqrt{9x^2 + 1}} = \frac{x(18x + 6\sqrt{9x^2 + 1})}{18x + 6\sqrt{9x^2 + 1}} = x \end{aligned}$$

$f(h(-x)) = x \Rightarrow h(-x) = f^{-1}(x)$ .  
Donc  $\forall x \in \mathbb{R}; h(-x) = f^{-1}(x)$ .

4. a. Montrer que (C) et (C') se coupent en deux points autres que l'origine :  
 $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$  alors d'après 1.d, les courbes (C) et (C') se coupent en deux points  $\alpha$  et  $\beta$  autres que l'origine.
- b. Construire dans le même repère les courbes (C) et (C') et calculer en fonction de  $\alpha$  l'aire du domaine plan délimité par ces deux courbes ( $\alpha$  est le nombre indiqué en 1.d) :
- (C) admet BP de direction (Oy) en  $+\infty$  alors (C') admet BP de direction (Ox) en  $+\infty$ .
  - La fonction  $g$  est impaire car  $f(-x) = -f(x)$  alors (C) admet BP de direction (Oy) en  $-\infty$ , par conséquent (C') admet BP de direction (Ox) en  $-\infty$ .



Soit A l'aire demandée.

$$\int_0^{\alpha} (x - f(x)) dx = \int_0^{\alpha} \left( x - \frac{e^{2x}-1}{6e^x} \right) dx = \int_0^{\alpha} \left( x - \frac{1}{6}(e^x - e^{-x}) \right) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}(e^x + e^{-x}) \right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{6}(e^{\alpha} + e^{-\alpha} - \frac{1}{3}).$$

$$\text{Donc } A = 4 \int_0^{\alpha} (x - f(x)) dx \text{ (ua)} = \left( 2\alpha^2 - \frac{2}{3}(e^{\alpha} + e^{-\alpha} - \frac{1}{3}) \right) \text{ (ua)}.$$

**Exercice N°4 :**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre G et de côté  $a$  ( $a > 0$ ). I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB] et [AI] et D est le symétrique de I par rapport à J.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complètera au fur et à mesure :

2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme B en C et I en J :

$$\text{On a } BI = CJ = \frac{a}{2} \neq 0 \text{ et } \overline{BI} \neq \overline{CJ}, \text{ donc il existe une unique rotation } r_1 : \begin{cases} B \rightarrow C \\ I \rightarrow J \end{cases}$$

b. Déterminer  $r_1(K)$  et déterminer le centre et un angle de  $r_1$  :

Le centre de  $r_1$  est le point G car  $\text{med}[BC] \cap \text{med}[IJ] = \{G\}$ .

• Un angle de  $r_1$  est  $(\overline{GB}; \overline{GC}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

$$r_1(K) = I \text{ car } \begin{cases} GK = GI \\ (\overline{GK}; \overline{GI}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

3. Soit  $r_2$  la rotation de centre K et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

a. Déterminer  $r_2(B)$  et  $r_2(I)$  :

$$r_2(B) = I \text{ car } \begin{cases} KI = KB \\ (\overline{KB}; \overline{KI}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ et } r_2(I) = J \text{ car } \begin{cases} KJ = KI \\ (\overline{KI}; \overline{KJ}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

b. En déduire  $r_2(C)$  :

$r_2 : \begin{cases} B \rightarrow I \\ I \rightarrow J \end{cases}$ . Comme C est le symétrique de B par rapport à I alors son image est le symétrique de I par rapport à J, donc  $r_2(C) = D$ .

4. a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $f$  du plan qui transforme B en C et I en J :

$$\text{On a } BI = CJ = \frac{a}{2} \neq 0, \text{ donc il existe un unique antidéplacement } f : \begin{cases} B \rightarrow C \\ I \rightarrow J \end{cases}$$

b. Montrer que  $f$  est une symétrie glissante et donner sa forme réduite :

$f$  est une symétrie glissante car  $\text{med}[BC] \neq \text{med}[IJ]$ .

**Forme réduite de  $f$  :**

• L'axe de  $f$  passe par le milieu de [BC] est celui de [IJ]. Donc (IJ) est l'axe de  $f$ .

• On pose  $f = s_{(IJ)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_{(IJ)}$  alors  $f(B) = C \Leftrightarrow t_{\vec{u}} \circ s_{(IJ)}(B) = C \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(E) = C \Leftrightarrow \vec{u} = \overline{EC} = \overline{IJ}$

D'où la forme réduite de  $f$  :  $f = s_{(IJ)} \circ t_{\vec{IJ}} = t_{\vec{IJ}} \circ s_{(IJ)}$

c. Caractériser la transformation  $g = \text{for}_1^{-1}$  :

$g$  est un antidéplacement car c'est la composée d'un antidéplacement  $f$  et d'un déplacement  $r_1^{-1}$ .

•  $g(C) = \text{for}_1^{-1}(C) = f(B) = C$ , donc  $g$  est une réflexion d'axe passant par C.

•  $g(J) = \text{for}_1^{-1}(J) = f(I) = J$ , donc  $g$  est une réflexion d'axe passant par  $J$ .  
 D'où  $g = s_{(CJ)}$

5. On considère la transformation  $\sigma = r_2 \circ r_1$  et on pose  $\sigma(M) = M'$ .

a. Caractériser  $\sigma$  :

$\sigma$  est une rotation d'angle  $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ , donc  $\sigma$  est symétrie centrale.

$\sigma(K) = r_2 \circ r_1(K) = r_2(I) = J$ . Donc  $\sigma = s_L$  car  $L = J * K$ .

b. Montrer que si  $M \neq M'$  alors la droite  $(MM')$  passe par un point fixe que l'on déterminera :

$\sigma(M) = M' \Leftrightarrow s_L(M) = M'$ , alors  $(MM')$  passe par un point fixe  $L$ , centre de la symétrie  $s_L$ .

c. En déduire que le quadrilatère  $AMIM'$  est un parallélogramme :

$$L = M * M'$$

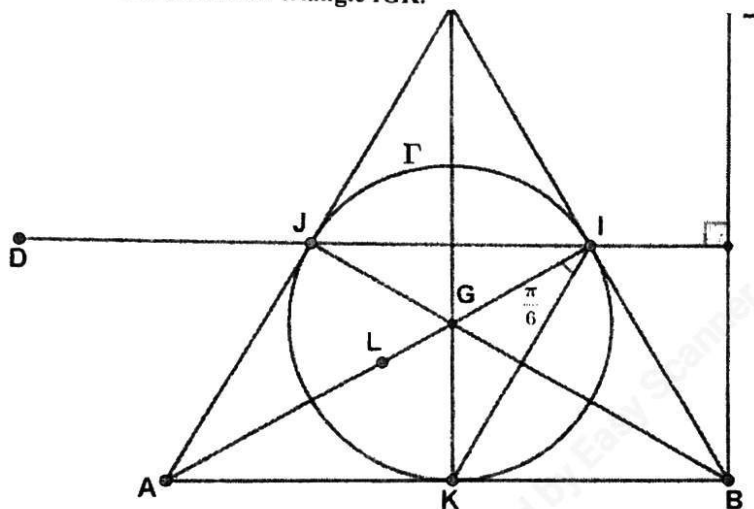
$$L = A * I \Rightarrow AMIM' \text{ est un parallélogramme, car les diagonales du quadrilatère } AMIM' \text{ ont même milieu } L.$$

6. Pour tout point  $M$  du plan, on pose  $r_1(M) = M_1$  et  $r_2(M) = M_2$ . Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  du plan pour lesquels  $M, M_1$  et  $M_2$  sont alignés (On pourra utiliser l'angle  $(\overline{MG}; \overline{MK})$  :

$$(\overline{MG}; \overline{MK}) = (\overline{MG}; \overline{MM_1}) + (\overline{MM_1}; \overline{MM_2}) + (\overline{MM_2}; \overline{MK}) = -\frac{\pi}{6} + \pi + \frac{\pi}{3}[\pi] = \frac{\pi}{6} + \pi[\pi] = (\overline{IG}; \overline{IK})[\pi]$$

$\Rightarrow M$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $IGK$ .

Donc  $\Gamma$  est le cercle circonscrit au triangle  $IGK$ .



## Bac 2015 session normale

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. On pose  $P(z) = z^3 - (11 + 6i)z^2 + (28 + 38i)z - 12 - 60i$  où  $z$  un nombre complexe.

a. Calculer  $P(3)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b)$ .

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $P(z) = 0$ .

c. Soient les points  $A, B$  et  $C$  images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $\text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$ . Calculer l'affixe du point  $G$  barycentre du système  $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$  et placer les points  $A, B, C$  et  $G$ .

2. Pour tout réel différent de 2, on définit l'application  $f_k$  du plan  $P$  dans lui-même qui à tout point  $M$  du plan associe le point  $M'$  tel que :  $\overline{MM'} = 2\overline{MA} - 2\overline{MB} + (3 - k)\overline{MC}$ .

a. Pour quelles valeurs de  $k$  l'application  $f_k$  est une translation? Déterminer alors son vecteur.

b. On suppose que  $k \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ . Montrer que  $f_k$  admet un unique point invariant  $\Omega_k$ . Reconnaître alors  $f_k$  et donner ses éléments caractéristiques en fonction de  $k$ .

c. Déterminer et construire le lieu géométrique des points  $\Omega_k$  lorsque  $k$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ . Reconnaître alors  $\Omega_1$ .

d. Pour  $k=1$ . Déterminer et construire le lieu géométrique du point  $R$  centre de gravité du triangle  $AMM'$  lors que  $M$  décrit le cercle  $\Gamma$  de centre  $G$  passant par  $C$ .

3. Pour tout point  $M$  du plan on pose  $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$  et  $\Gamma_m$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $\varphi(M) = m$ , où  $m$  est un réel.

a. Discuter suivant les valeurs de  $m$ , la nature de  $\Gamma_m$ .

b. Déterminer et construire  $\Gamma_m$  pour  $m=10$ .

**Exercice N°2 :**

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct ABCD tel que  $AB=a$  et  $AD=2a$  ( $a>0$ ). Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Soit O le centre de ABCD.

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes.
- b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme B en C et J en D. Préciser le centre et un angle de  $r$ .
2. a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $g$  qui transforme I en C et A en K.
- b. Montrer que  $g$  est une symétrie glissante et vérifie  $r$  que  $g = t_{\overline{IC}} \circ s_{AB}$ .
- c. Déterminer une droite  $\Delta$  telle que  $t_{\overline{BC}} = s_{\Delta} \circ s_{AB}$ . En déduire la forme réduite de  $g$  (on pourra remarquer que  $t_{\overline{IC}} = t_{\overline{IB}} \circ t_{\overline{BC}}$ ).
3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s$  qui transforme A en C et B en L. Déterminer l'angle et le rapport de  $s$ . Déterminer l'angle et le rapport de  $s$ . Montrer que  $s(J) = B$ .
- b. Soient  $\Gamma_1$  le cercle de centre A passant par B et  $\Gamma_2$  le cercle de centre C passant par L. Justifier que  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$ .
4. On désigne par P le centre de  $s$ .
  - a. Montrer que P est situé sur les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Préciser P.
  - b. Vérifier que P est le symétrique de L par rapport à (AC).
  - c. Soit E le symétrique de L par rapport à D. Vérifier que P est sur la droite (BE).
5. a. Soit R le symétrique de L par rapport à J. Montrer que  $s(L)=R$ .
- b. Soit M un point de  $\Gamma_1$  distinct de P. On note  $s(M)=M'$  et  $s(M')=M''$ . Montrer que :
  - i. La droite (MM') passe par un point fixe que l'on précisera.
  - ii. Le triangle MM'M'' est rectangle isocèle.
6. Soit  $\Gamma$  la parabole de foyer L et de directrice (BC).
  - a. Montrer que  $\Gamma$  passe par A, O et D.
  - b. Préciser la tangente à  $\Gamma$  en A et tracer  $\Gamma$ .
  - c. Déterminer et construire le foyer et la directrice de  $\Gamma'=s(\Gamma)$ .

**Exercice N°3 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$  et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Interpréter graphiquement.
- b. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- c. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque  $f^{-1}(x)$ . On note (C') la courbe de  $f^{-1}$  dans le même repère.
2. a. Vérifier que le point  $\Omega(0; \frac{1}{2})$  est un centre de symétrie de la courbe (C).
- b. Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse  $\alpha$  telle que  $0,4 < \alpha < 0,5$ .
- c. Tracer les courbes (C) et (C').
- d. Calculer, en fonction de  $\alpha$ , l'aire A du domaine plan limité par les courbes (C) et (C'), et les axes des coordonnées (On pourra remarquer que  $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ ).
3. Pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $I_n = \int_0^\alpha f^n(x) dx$  (où  $\alpha$  le réel trouvé en 2.b).
  - a. Justifier que  $I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$ .
  - b. Vérifier que pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = f^2(x) - f(x)$ .
  - c. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left( \alpha^n - \frac{1}{2^n} \right)$ .
  - d. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?
4. a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
- c. Montrer que  $I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \alpha^k - \frac{1}{2^k} \right)$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \alpha^k - \frac{1}{2^k} \right)$ .

**Exercice N°4 :**

1. On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $g(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

a. Déterminer a, b et c tels que pour tout x de  $\mathbb{R}^*$  :  $g(x) = \frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{x(x^2-4x+5)}$

b. Etudier le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

2. On considère la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = 3x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right)$  et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , interpréter graphiquement.

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

c. Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une, notée D est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D.

3. a. Vérifier que  $f'(x) = g(x)$  où  $g$  est la fonction définie en 1) et dresser le tableau de variation de  $f$ .

b. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dont on donnera un encadrement d'amplitude  $5 \times 10^{-1}$ .

c. Construire (C).

4. On se propose dans cette question de calculer l'aire  $S$  du domaine dé limité par la courbe et les droites d'équations respectives  $y=3x-3$ ;  $x=3$  et  $x=2+\sqrt{3}$ .

a. Vérifier que pour tout réel  $x$  on a :  $\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5} = 2 \left( 1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2} \right)$ .

b. Calculer  $A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx$ .

c. En posant  $x=2+\tan t$  pour tout  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ; calculer  $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx$ .

d. En utilisant une intégration par parties, calculer  $J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5) dx$  et  $K = 2 \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x) dx$ . En déduire le calcul de l'aire  $S$  exprimée en unité d'aire.

## Solution

### Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. On pose  $P(z) = z^3 - (11 + 6i)z^2 + (28 + 38i)z - 12 - 60i$  où  $z$  un nombre complexe.

a. Calculer  $P(3)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$  :

$P(3) = 3^3 - (11 + 6i) \times 3^2 + (28 + 38i) \times 3 - 12 - 60i = 27 - 99 - 54i + 84 + 114i - 12 - 60i = 0$ .

|   |   |          |           |           |
|---|---|----------|-----------|-----------|
|   | 1 | -11 - 6i | 28+38i    | -12 - 60i |
| 3 |   | 3        | -24 - 18i | 12 + 60i  |
|   | 1 | -8 - 6i  | 4 + 20i   | 0         |

D'où  $P(z) = (z-3)(z^2 - (8+6i)z + 4 + 20i)$

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $P(z)=0$ .

$P(z) = 0 \Rightarrow (z-3)(z^2 - (8+6i)z + 4 + 20i) = 0 \Rightarrow$  soit  $z-3 = 0 \Rightarrow z=3$  soit  $z^2 - (8+6i)z + 4 + 20i = 0$ .

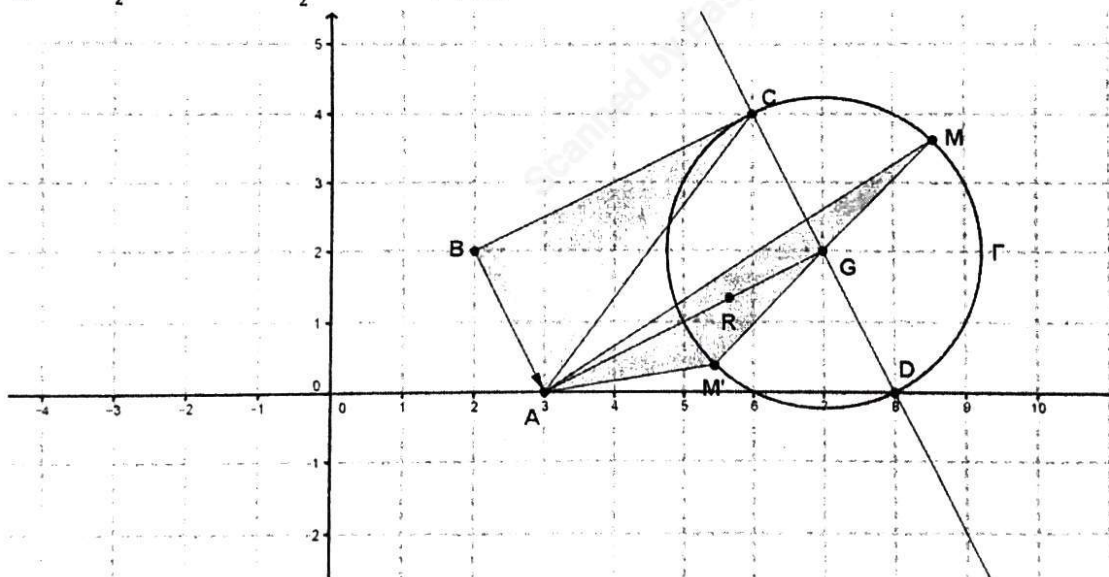
$\Delta' = \frac{-(8+6i)^2 - 4(4+20i)}{4} = \frac{16 - 9 + 24i - 4 - 20i}{4} = \frac{3 + 4i}{4} \Rightarrow z = \frac{8+6i \pm \sqrt{3+4i}}{2} = 4 + 3i + 2 + i = 6 + 4i$  ou  $z = 4 + 3i - 2 - i = 2 + 2i$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z)=0$  est  $\{3; 6 + 4i; 2 + 2i\}$ .

c. Soient les points  $A, B$  et  $C$  images des solutions de l'équation  $P(z)=0$  avec  $\text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$ . Calculer l'affixe du point  $G$  barycentre du système  $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$  et placer les points  $A, B, C$  et  $G$  :

$z_A = 3$ ;  $z_C = 2 + 2i$  et  $z_B = 6 + 4i$ .

$z_G = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2} = \frac{2 \times 3 - 2(6+4i) + 2(2+2i)}{2} = 7 + 2i$ .



2. Pour tout réel différent de 2, on définit l'application  $f_k$  du plan  $P$  dans lui-même qui à tout point  $M$  du plan associe le point  $M'$  tel que :  $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}$ .

a. Pour quelles valeurs de  $k$  l'application  $f_k$  est une translation ? Déterminer alors son vecteur :

$f_k$  est une translation ssi le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est constant  $\Leftrightarrow 2 - 2 + 3 - k = 0 \Leftrightarrow k = 3$ .

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{BA}$  car  $k=3$ .

b. On suppose que  $k \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ . Montrer que  $f_k$  admet un unique point invariant  $\Omega_k$ . Reconnaître alors  $f_k$  et donner ses éléments caractéristiques en fonction de  $k$  :

Si  $k \neq 3$ , alors le système  $\{(A; 2), (B; -2), (C; (3-k))\}$  admet un barycentre  $G_k$ .

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = (3-k)\overrightarrow{MG_k} \Rightarrow \overrightarrow{MG_k} + \overrightarrow{G_kM'} = (3-k)\overrightarrow{MG_k} \Rightarrow \overrightarrow{G_kM'} = (k-2)\overrightarrow{G_kM}$ .

$k \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ , alors  $M$  est invariant ssi  $M' = M \Rightarrow \overrightarrow{G_kM} = (k-2)\overrightarrow{G_kM} \Rightarrow (k-2)\overrightarrow{G_kM} = \vec{0} \Rightarrow M = G_k$ .

Donc  $f_k$  admet un point invariant  $G_k = \text{bar}\{(A; 2), (B; -2), (C; (3 - k))\}$ .

$$f_k(M) = M' \Leftrightarrow f_k = h_{(G_k, k-2)}$$

c. Déterminer et construire le lieu géométrique des points  $\Omega_k$  lorsque  $k$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ . Reconnaitre alors  $\Omega_1$  :

$$2\overrightarrow{\Omega_k A} - 2\overrightarrow{\Omega_k B} + (3 - k)\overrightarrow{\Omega_k C} = \vec{0} \Leftrightarrow (3 - k)\overrightarrow{\Omega_k C} = -2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow (3 - k)\overrightarrow{C\Omega_k} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{C\Omega_k} = \frac{2}{3-k}\overrightarrow{BA};$$

D'où  $\Omega_k$  appartient la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$ , c'est la droite  $(CG)$  ;

$\frac{2}{3-k}$  est l'abscisse de  $\Omega_k$  dans le repère  $(C; \overrightarrow{BA})$  ;

$$\text{On pose } g(k) = \frac{2}{3-k} \Rightarrow g'(x) = \frac{2}{(3-k)^2}$$

Lorsque  $k$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$  alors  $\frac{2}{3-k}$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $3$       | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +         |           | +         |
| $g(x)$  | $0$       | $+\infty$ | $0$       |

Donc  $\Omega_k$  décrit  $(CG) \setminus \{C; D\}$  avec  $D$  vérifie  $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA}$  ( $D$  est le symétrique de  $C$  par rapport à  $G$ ).

$\Omega_1$  vérifie  $\overrightarrow{C\Omega_1} = \frac{2}{3-1}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \Omega_1 = G$ .

d. Pour  $k=1$  ; déterminer et construire le lieu géométrique du point  $R$  centre de gravité du triangle  $AMM'$  lorsque  $M$  décrit le cercle  $\Gamma$  de centre  $G$  passant par  $C$  :

Pour  $k=1$  on a :  $f_1 = h_{(G, -1)} = S_G \Rightarrow M' = S_G(M)$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow M' \in \Gamma \Rightarrow (GA)$  est une médiane du triangle  $AMM'$  et par conséquent  $R$  est fixe :  $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$  ;

3. Pour tout point  $M$  du plan on pose  $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$  et  $\Gamma_m$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $\varphi(M)=m$ , où  $m$  est un réel.

a. Discuter suivant les valeurs de  $m$  la nature de  $\Gamma_m$  :

$$2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2 = 2MG^2 + \varphi(G)$$

$$\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2 ?$$

$$GA^2 = (7-3)^2 + (2-0)^2 = 20 ; GB^2 = (7-2)^2 + (2-2)^2 = 25 ; GC^2 = (7-6)^2 + (2-4)^2 = 5.$$

$$\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2 = 2 \times 20 - 2 \times 25 + 2 \times 5 = 40 - 50 + 10 = 0$$

$$M \in \Gamma_m \Leftrightarrow \varphi(M)=m \Leftrightarrow 2MG^2 = m \Leftrightarrow MG^2 = \frac{m}{2} ;$$

• Si  $m=0$  alors  $\Leftrightarrow MG^2 = 0 \Leftrightarrow MG = 0 \Leftrightarrow M = G \Leftrightarrow \Gamma_0 = \{G\}$  ;

• Si  $m < 0$  alors  $\Gamma_m = \emptyset$ .

• Si  $m > 0$  alors  $\Leftrightarrow MG = \sqrt{\frac{m}{2}} \Leftrightarrow \Gamma_m = C_{(G; \sqrt{\frac{m}{2}})}$ .

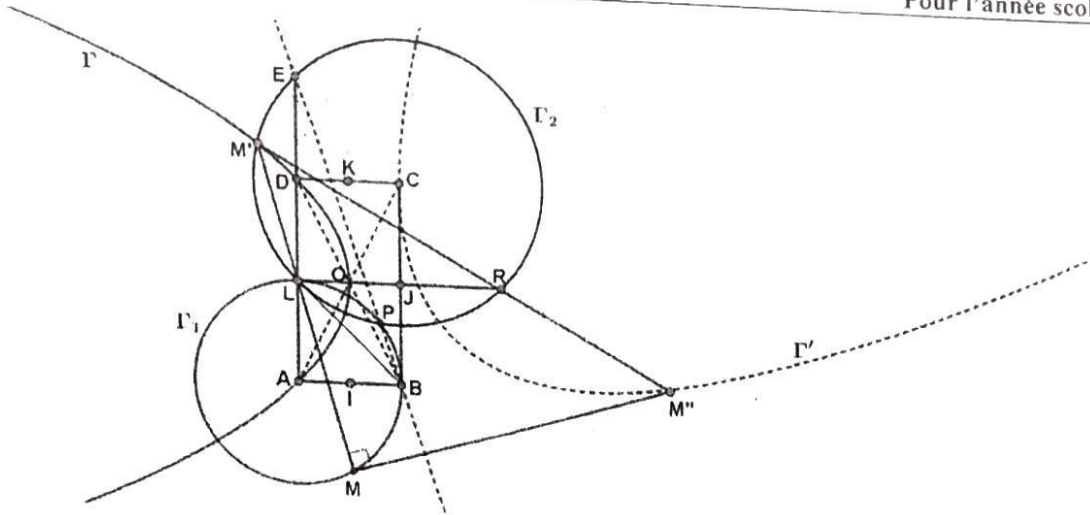
b. Déterminer et construire  $\Gamma_{10}$  :

$$M \in \Gamma_{10} \Leftrightarrow \Gamma_{10} = C_{(G; \sqrt{5})} \text{ Or } GC = \sqrt{5}. \text{ D'où } \Gamma_{10} = \Gamma.$$

### Exercice N°2 :

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct  $ABCD$  tel que  $AB=a$  et  $AD=2a$  ( $a>0$ ). Soient  $I, J, K$  et  $L$  les milieux respectifs des segments  $[AB], [BC], [CD]$  et  $[DA]$ . Soit  $O$  le centre de  $ABCD$ .

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes :



b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme  $B$  en  $C$  et  $J$  en  $D$ . Préciser le centre et un angle de  $r$  :

On a  $BJ=CD \neq 0$  et  $\overrightarrow{BJ} \neq \overrightarrow{CD}$ , donc il existe une unique rotation  $r : \begin{cases} B \rightarrow C \\ J \rightarrow D \end{cases}$

•Le centre de  $r$  est  $L$  car  $\text{med}[BC] \cap \text{med}[JD] = \{L\}$ .

•Un angle de  $r$  est  $(\overrightarrow{BJ}; \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

2. a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $g$  qui transforme  $I$  en  $C$  et  $A$  en  $K$  :

On a  $IA=CK \neq 0$ , donc il existe un unique antidéplacement  $g : \begin{cases} I \rightarrow C \\ A \rightarrow K \end{cases}$

b. Montrer que  $g$  est une symétrie glissante et vérifie  $r = g \circ t_{IC} \circ s_{AB}$  :

Comme  $\text{med}[IC] \neq \text{med}[AK]$  alors  $g$  est une symétrie glissante.

$t_{IC} \circ s_{AB}$  est un antidéplacement car c'est la composée d'un déplacement avec un antidéplacement.

$t_{IC} \circ s_{AB}(I) = t_{IC}(I) = C$  et  $g(A) = t_{IC} \circ s_{AB}(A) = t_{IC}(A) = K$

Comme  $t_{IC} \circ s_{AB} : \begin{cases} I \rightarrow C \\ A \rightarrow K \end{cases}$  et d'après l'unicité d'un antidéplacement alors  $g = t_{IC} \circ s_{AB}$ .

c. Déterminer une droite  $\Delta$  telle que  $t_{BC} = s_{\Delta} \circ s_{AB}$ . En déduire la forme réduite de  $g$  (on pourra remarquer que  $t_{IC} = t_{IB} \circ t_{BC}$ ) :

$t_{BC}(B) = s_{\Delta}(B) \Rightarrow C = s_{\Delta}(B) \Rightarrow \Delta = \text{med}[BC] \Rightarrow \Delta = (LJ)$ . D'où  $t_{IC} = s_{LJ} \circ s_{AB}$ .

$g = t_{IC} \circ s_{AB} = g = t_{IB} \circ t_{BC} \circ s_{AB} = t_{IB} \circ s_{LJ} \circ s_{AB} \circ s_{AB} = t_{IB} \circ s_{LJ}$

D'où la forme réduite de  $g : g = t_{IB} \circ s_{LJ}$  (car  $\overrightarrow{IB}$  est un vecteur directeur de l'axe  $(LJ)$ ).

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s$  qui transforme  $A$  en  $C$  et  $B$  en  $L$ . Déterminer l'angle et le rapport de  $s$ . Déterminer l'angle et le rapport de  $s$ . Montrer que  $s(J) = B$  :

On a  $A \neq B$  et  $C \neq L$ , donc il existe une unique similitude directe  $s : \begin{cases} A \rightarrow C \\ B \rightarrow L \end{cases}$

•Un angle de  $s$  est  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CL}) = (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{CL}) = (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CL}) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$

•Le rapport de  $s : \frac{CL}{AB} = \frac{AJ}{AB} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}$ .

$s : \begin{cases} A \rightarrow C \\ B \rightarrow L \\ J \rightarrow J' \end{cases}$  comme le triangle  $ABJ$  est direct, rectangle isocèle en  $B$  alors le triangle  $CLJ'$  est direct, rectangle isocèle en  $s(B)=L$ .

Or le triangle  $CLB$  est direct, rectangle isocèle en  $L$ . D'où  $s(J) = B$ .

b. Soient  $\Gamma_1$  le cercle de centre  $A$  passant par  $B$  et  $\Gamma_2$  le cercle de centre  $C$  passant par  $L$ . Justifier que  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$  :

$\Gamma_1$  est le cercle de centre  $A$  passant par  $B$ , alors  $s(\Gamma_1)$  est le cercle de centre  $C$  passant par  $L$ . D'où  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$ .

4. On désigne par  $P$  le centre de  $s$ .

a. Montrer que  $P$  est situé sur les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Préciser  $P$ .

$s : \begin{cases} P \rightarrow P \\ B \rightarrow L \end{cases} \Rightarrow (\overrightarrow{PB}; \overrightarrow{PL}) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi] \Rightarrow 2(\overrightarrow{PB}; \overrightarrow{PL}) = -\frac{3\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow 2(\overrightarrow{PB}; \overrightarrow{PL}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow 2(\overrightarrow{PB}; \overrightarrow{PL}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AL}) [2\pi]$

D'où  $P$  est situé sur le cercle  $\Gamma_1$ .

$s : \begin{cases} P \rightarrow P \\ A \rightarrow C \end{cases} \Rightarrow (\overrightarrow{PA}; \overrightarrow{PC}) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi] \Rightarrow 2(\overrightarrow{PA}; \overrightarrow{PC}) = -\frac{3\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow 2(\overrightarrow{PA}; \overrightarrow{PC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow 2(\overrightarrow{PA}; \overrightarrow{PC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AL}) [2\pi]$

D'où  $P$  est situé sur le cercle  $\Gamma_2$ . Comme  $P \in \Gamma_1$  et  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$  alors  $s(P) = P \in \Gamma_2$ .

Conclusion :  $P$  est situé sur les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

$P$  est l'intersection de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  autre que  $L$  car  $L = s(B)$ . ( $L$  ne peut pas être le centre de  $s$ )

b. Vérifier que  $P$  est la symétrique de  $L$  par rapport à  $(AC)$  :

$P \in \Gamma_1 \Rightarrow AP = AL \Rightarrow A \in \text{med}[PL] \Rightarrow (AC) = \text{med}[PL]$ .

$P \in \Gamma_2 \Rightarrow CP = CL \Rightarrow C \in \text{med}[PL]$

D'où P est le symétrique de L par rapport à (AC)

c. Soit E le symétrique de L par rapport à D. Vérifier que P est situé sur la droite (BE) :

$$(\overline{PB}; \overline{PE}) = (\overline{PB}; \overline{PL}) + (\overline{PL}; \overline{PE}) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}(\overline{CL}; \overline{CE})[2\pi] = -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}[2\pi] = -\pi[2\pi] = \pi[2\pi].$$

D'où P est situé sur la droite (BE).

5. a. Soit R le symétrique de L par rapport à J. Montrer que  $s(L)=R$  :

$$\text{Soit } s(L) = L'. \quad s : \begin{cases} A \rightarrow C \\ B \rightarrow L \\ J \rightarrow B \\ L \rightarrow L' \end{cases}$$

la similitude  $s$  conserve la configuration, comme  $ABJL$  est un carré direct, alors  $CLBL'$  est un carré

direct D'où  $s(L)=R$ .

b. Soit M un point de  $\Gamma_1$  distinct de P. On note  $s(M)=M'$  et  $s(M')=M''$ . Montrer que :

i. La droite  $(MM')$  passe par un point fixe que l'on précisera :

$$\bullet \text{ On suppose que M est distinct de L : } 2(\overline{LM}; \overline{LM'}) = 2(\overline{LM}; \overline{LP}) + 2(\overline{LP}; \overline{LM'}) = (\overline{AM}; \overline{AP}) + (\overline{CP}; \overline{CM'}).$$

$$\text{Comme la similitude conserve les angles orientés et } s : \begin{cases} A \rightarrow C \\ M \rightarrow M' \\ P \rightarrow P \end{cases} \text{ alors } (\overline{AM}; \overline{AP}) = (\overline{CM'}; \overline{CP}).$$

$$\Rightarrow 2(\overline{LM}; \overline{LM'}) = (\overline{AM}; \overline{AP}) + (\overline{CP}; \overline{CM'}) = (\overline{CM'}; \overline{CP}) + (\overline{CP}; \overline{CM'}) = (\overline{CM'}; \overline{CM'}) = 0[2\pi].$$

D'où la droite  $(MM')$  passe par le point L.

• Si M est en L alors la droite  $(MM')$  passe par le point L.

Conclusion : Pour tout point M de  $\Gamma_1$  distinct, la droite  $(MM')$  passe par le point fixe L.

ii. Le triangle  $MM'M''$  est rectangle isocèle.

$$s : \begin{cases} M \rightarrow M' \\ M' \rightarrow M'' \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} (\overline{MM'}; \overline{M'M''}) = -\frac{3\pi}{4}[2\pi] \\ \frac{MM'}{M'M''} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow s : \begin{cases} (\overline{M'M}; \overline{M'M''}) = -\frac{3\pi}{4} + \pi[2\pi] \\ \frac{M'M''}{MM'} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow s : \begin{cases} (\overline{M'M}; \overline{M'M''}) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ \frac{M'M''}{MM'} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

D'où Le triangle  $MM'M''$  est rectangle isocèle.

6. Soit  $\Gamma$  la parabole de foyer L et de directrice (BC).

a. Montrer que  $\Gamma$  passe par A, O et D :

La parabole  $\Gamma$  de foyer L et de directrice (BC) est l'ensemble des points M tels que  $\frac{ML}{MH} = 1$  où H est le projeté orthogonal de L sur (BC).

Les points B, J et C sont les projetés orthogonaux respectifs de A, O et D :

$$\bullet \frac{AL}{AB} = 1 \Rightarrow A \in \Gamma.$$

$$\bullet \frac{OL}{OJ} = 1 \Rightarrow O \in \Gamma.$$

$$\bullet \frac{DL}{DC} = 1 \Rightarrow D \in \Gamma.$$

D'où  $\Gamma$  passe par les points A, O et D.

b. Préciser la tangente à  $\Gamma$  en A et tracer  $\Gamma$  :

Comme B est le projeté orthogonal de A sur la directrice (BC), alors la tangente à  $\Gamma$  en A est la médiatrice du segment [BC]. C'est la droite (AJ).

c. Déterminer et construire le foyer et la directrice de  $\Gamma'=s(\Gamma)$  :

La similitude  $s$  conserve la configuration.  $s(L) = R$  et  $s((BC)) = (LB)$  car  $L = s(B)$  et  $B = s(J)$  puis que  $J \in (BC)$ .

Exercice N°3 :

Soit  $f$  la fonction définie sur par  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$  et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

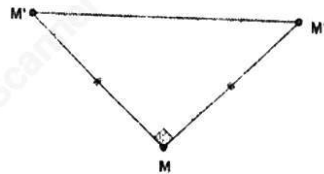
1. a. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+0} = 1. \text{ D'où } y = 1 \text{ AH de (C) au voisinage de } -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0. \text{ D'où } y = 0 \text{ AH de (C) au voisinage de } +\infty.$$

b. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \Rightarrow f \text{ est décroissante.}$$



|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| x       | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           |           |
| f(x)    | 1         | 0         |

c. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque  $f^{-1}(x)$ . On note  $(C')$  la courbe de  $f^{-1}$  dans le même repère :

La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante alors, elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur l'intervalle  $J = ]0; 1[$ .

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in ]0; 1[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in ]0; 1[ \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow y+ye^x = 1 \Rightarrow ye^x = 1-y \Rightarrow e^x = \frac{1-y}{y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right) \Rightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right).$$

D'où  $\forall y \in ]0; 1[; f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$ .

2. a. Vérifier que le point  $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(C)$  :

Montrons alors que  $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times \frac{1}{2}$  c'est-à-dire  $f(-x) + f(x) = 1$ .

$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} = 1.$$

D'où  $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(C)$ .

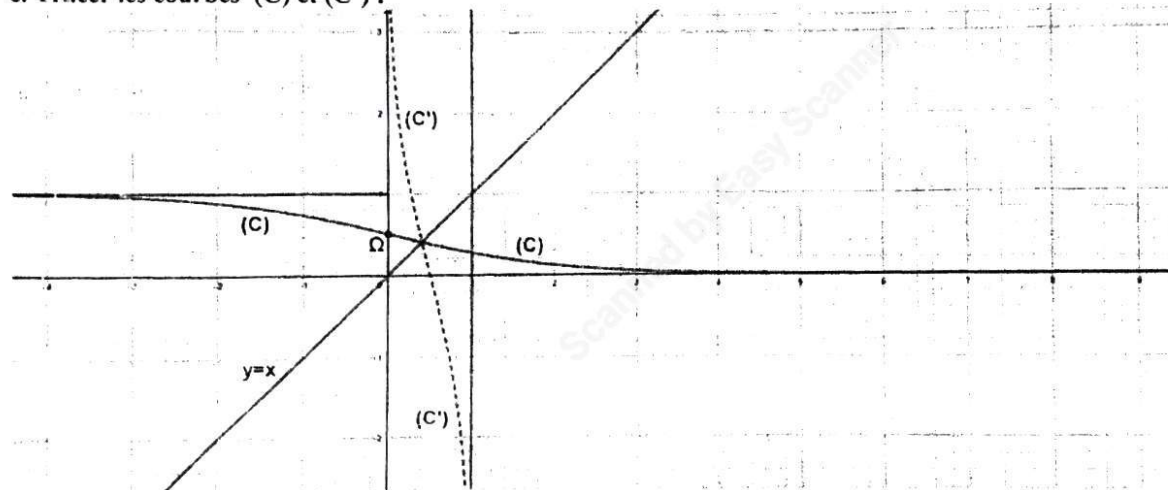
b. Montrer que les courbes  $(C)$  et  $(C')$  se coupent en un seul point d'abscisse  $\alpha$  telle que  $0,4 < \alpha < 0,5$  :

$$f(x) = x \Rightarrow f(x) - x = 0. \text{ On pose } g(x) = f(x) - x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = -\left(1 + \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right) < 0.$$

$g$  est continue et strictement décroissante, de plus  $g(0,4) \approx 0,001$  et  $g(0,5) \approx -0,12$  alors d'après propriété de la valeur intermédiaire l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  telle que  $0,4 < \alpha < 0,5$ .

D'où les courbes  $(C)$  et  $(C')$  se coupent en un seul point d'abscisse  $\alpha$  telle que  $0,4 < \alpha < 0,5$ .

c. Tracer les courbes  $(C)$  et  $(C')$  :



d. Calculer, en fonction de  $\alpha$ , l'aire  $A$  du domaine plan limité par les courbes  $(C)$  et  $(C')$ , et les axes des coordonnées (On pourra remarquer que  $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ ) :

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^\alpha (f(x) - x) dx = 2 \int_0^\alpha \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - x\right) dx = 2 \int_0^\alpha \left(-\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} - x\right) dx = -2 \int_0^\alpha \left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} + x\right) dx \\ &= -2 \left[\ln(e^{-x} + 1) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha = -2 \left(\ln(e^{-\alpha} + 1) - \ln 2 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) = 2 \left(\ln 2 - \ln(e^{-\alpha} + 1) - \frac{1}{2}\alpha^2\right) = \left(2\ln\left(\frac{2}{e^{-\alpha}+1}\right) - \alpha^2\right) \text{ (ua)} \end{aligned}$$

3. Pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $I_n = \int_0^\alpha f^n(x) dx$  (où  $\alpha$  le réel trouvé en 2.b).

a. Justifier que  $I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$  :

$$I_1 = \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = -\int_0^\alpha \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = -[\ln(e^{-x} + 1)]_0^\alpha = -\ln(e^{-\alpha} + 1) + \ln 2.$$

$$\text{Or } f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}+1} = \alpha \Rightarrow e^{-\alpha} + 1 = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} \Rightarrow \ln(e^{-\alpha} + 1) = \ln(e^{-\alpha}) - \ln(\alpha) = -\alpha - \ln(\alpha)$$

$$\Rightarrow I_1 = -\alpha - \ln(\alpha) + \ln 2 = \alpha + \ln(2\alpha).$$

b. Vérifier que pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = f^2(x) - f(x)$  :

$$f^2(x) - f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1+e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = f'(x).$$

Donc  $f'(x) = f^2(x) - f(x)$ .

c. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$  :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^\alpha f^{n+1}(x) dx - \int_0^\alpha f^n(x) dx = \int_0^\alpha (f^{n+1}(x) - f^n(x)) dx. \text{ Or on a } f'(x) = f^2(x) - f(x), \text{ donc}$$

$$f(x) f^{n-1}(x) = f^{n-1}(x) - f^n(x) \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^\alpha f'(x) f^{n-1}(x) dx \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} [f^n(x)]_0^\alpha$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} (f^n(\alpha) - f^n(0)) = \frac{1}{n} \left( \alpha^n - \frac{1}{2^n} \right).$$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left( \alpha^n - \frac{1}{2^n} \right)$ .

d. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?

On a  $0, 4 < \alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha^n < \frac{1}{2^n} \Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$ . Donc  $(I_n)$  est décroissante.

Comme  $f(x) > 0$  alors  $f^n(x) > 0 \Rightarrow \int_0^\alpha f^n(x) dx > 0 \Rightarrow I_n > 0$ . Donc  $(I_n)$  est positive.

On peut déduire que  $(I_n)$  est convergente car elle est décroissante et minorée

4. a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

La fonction  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  alors si  $0 \leq x \leq \alpha \Rightarrow 0 \leq x \leq \alpha \Rightarrow f(\alpha) \leq f(x) \leq f(0) \Rightarrow \alpha^{n+1} \leq f^n(x) \leq \frac{1}{2^n}$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha \alpha^{n+1} dx \leq \int_0^\alpha f^n(x) dx \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n} dx \Rightarrow \alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

D'où Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

c. Montrer que  $I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \alpha^k - \frac{1}{2^k} \right)$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \alpha^k - \frac{1}{2^k} \right)$  :

$$I_2 - I_1 = \frac{1}{1} \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)$$

$$I_3 - I_2 = \frac{1}{2} \left( \alpha^2 - \frac{1}{2^2} \right)$$

$$I_4 - I_3 = \frac{1}{3} \left( \alpha^3 - \frac{1}{2^3} \right)$$

.....

$$I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1} \left( \alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

$$I_n - I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \alpha^k - \frac{1}{2^k} \right) \Rightarrow I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \alpha^k - \frac{1}{2^k} \right) \Rightarrow I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \alpha^k - \frac{1}{2^k} \right)$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \alpha^k - \frac{1}{2^k} \right) = -\alpha - \ln(2\alpha)$ .

**Exercice N°4 :**

1. On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $g(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

a. Déterminer  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  :  $g(x) = \frac{(x-1)(ax^2 + bx + c)}{x(x^2 - 4x + 5)}$  :

|   |   |     |    |     |
|---|---|-----|----|-----|
|   | 3 | -12 | 19 | -10 |
| 1 |   | 3   | -9 | -10 |
|   | 3 | -9  | 10 | 0   |
|   | a | b   | c  |     |

$$D'où g(x) = \frac{(x-1)(3x^2 - 9x + 10)}{x(x^2 - 4x + 5)}$$

b. Etudier le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}^*$  :

on a :  $x^2 - 4x + 5 > 0$  et  $3x^2 - 9x + 10 > 0$ , donc le signe de  $g(x)$  est celui de  $\frac{x-1}{x}$

|                 |           |   |   |           |
|-----------------|-----------|---|---|-----------|
| $x$             | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $x-1$           | -         |   | 0 | +         |
| $x$             | -         | 0 | + | +         |
| $\frac{x-1}{x}$ | -         |   | 0 | +         |

2. On considère la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = 3x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right)$  et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right) \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right) = +\infty.$$

D'où  $x=0$  AV de (C).

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3x - 3 + \ln \left( \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 3) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1) = +\infty + 0 = +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3x - 3 + \ln \left( \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 3) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left( \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left( \frac{x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1) = -\infty + 0 = -\infty \end{aligned}$$

c. Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une, notée D est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D :  
 Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ , alors  $x = 0$  AV de (C).

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x - 3)) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x^2}{x^2} \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$$

Donc  $y = 3x - 3$  est AO au voisinage  $+\infty$  et  $-\infty$ .

$f(x) - y = f(x) - (3x - 3) = \ln \left( \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} \right)$ . On étudie alors le signe de :  $\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}$  avec 1.

$$d(x) = \frac{-4x + 5}{x^2} - 1.$$

|             |                      |                      |                      |           |
|-------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------|
| x           | $-\infty$            | 0                    | $\frac{5}{4}$        | $+\infty$ |
| $-4x + 5$   | +                    | +                    | 0                    | -         |
| $x^2$       | +                    | 0                    | +                    | +         |
| d(x)        | +                    | +                    | 0                    | -         |
| P. relative | $\frac{(C)}{\Delta}$ | $\frac{(C)}{\Delta}$ | $\frac{\Delta}{(C)}$ |           |
|             |                      | $\Delta \cap (C)$    |                      |           |

3. a. Vérifier que  $f'(x) = g(x)$  où g est la fonction définie en 1) et dresser le tableau de variation de f :

$$f'(x) = 3 + \frac{(2x-4)x^2 - 2x(x^2 - 4x + 5)}{x^4} = 3 + \frac{(2x-4)x - 2(x^2 - 4x + 5)}{x^4} \times \frac{x^3}{x^2 - 4x + 5} = \frac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x} = \frac{(x-1)(3x^2 - 9x + 10)}{x(x^2 - 4x + 5)} = g(x).$$

Le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $g(x)$ .

|         |           |           |         |           |
|---------|-----------|-----------|---------|-----------|
| x       | $-\infty$ | 0         | 1       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | -         | 0       | +         |
| f(x)    | $+\infty$ | $+\infty$ | $\ln 2$ | $+\infty$ |

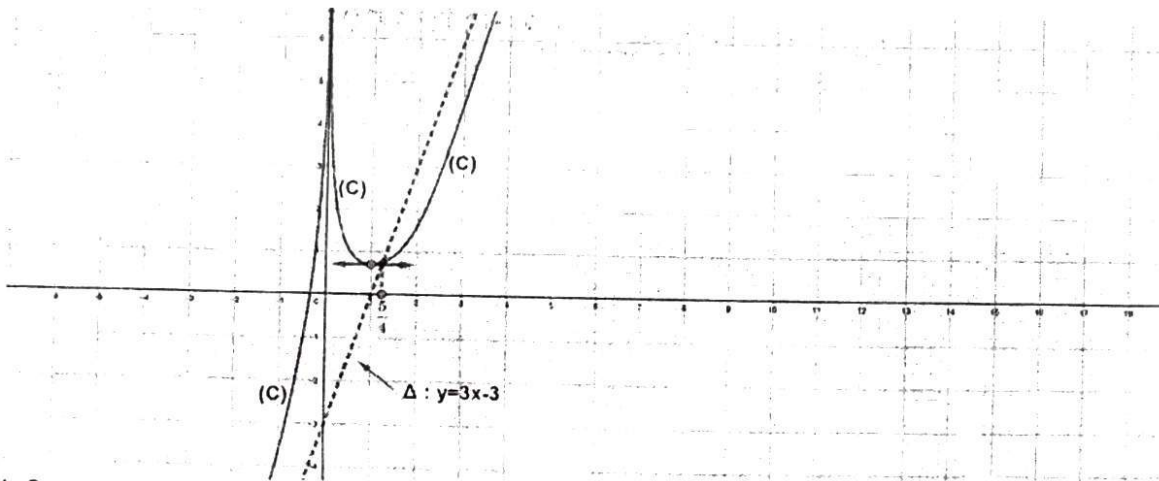
b. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dont on donnera un encadrement d'amplitude  $5 \times 10^{-1}$  :  
 La fonction f est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

- $f(]0; 1]) = ]\ln 2; +\infty[$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution dans  $]0; 1]$ .
- $f([1; +\infty[) = ]\ln 2; +\infty[$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution dans  $[1; +\infty[$ .
- $f(]-\infty; 0]) = ]-\infty; +\infty[$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  dans  $]-\infty; 0]$ .

D'où l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}^*$  une unique solution  $\alpha$ .

Comme  $f(-0,5) \approx -1,13 < 0$ , alors l'encadrement  $-0,5 < \alpha < 0$  est un encadrement d'amplitude  $5 \times 10^{-1}$  de  $\alpha$ .

c. Construire (C) :



4. On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine dé limité par la courbe et les droites d'équations respectives  $y=3x-3$  ;  $x=3$  et  $x=2+\sqrt{3}$ .

a. Vérifier que pour tout réel x on a :  $\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5} = 2 \left( 1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2} \right)$  :

$$2 \left( 1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2} \right) = 2 \left( 1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x^2-4x+5} \right) = 2 \left( 1 + \frac{x^2-4x+5+2x-4-1}{x^2-4x+5} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{x^2-4x+5+2x-4-1}{x^2-4x+5} \right) = 2 \left( \frac{x^2-2x}{x^2-4x+5} \right) = \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$$

b. Calculer  $A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx$  :

$$A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx = [\ln(x^2-4x+5)]_3^{2+\sqrt{3}} = \ln(4-4\sqrt{3}+3-8-4\sqrt{3}+5) - \ln 2 = \ln 4 - \ln 2 = \ln(2).$$

c. En posant  $x=2+\tan t$  pour tout  $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$  ; calculer  $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx$  :

$$x=2+\tan t \Rightarrow x-2 = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt \text{ si } x=3 \text{ alors } \tan t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ et } x=2+\sqrt{3} \text{ alors } \tan t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 t} \times (1 + \tan^2 t) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 1 dt = [t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

d. En utilisant une intégration par parties, calculer  $J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5) dx$  et  $K = 2 \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x) dx$ . En déduire le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire :

$$\text{Calculons } J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5) dx.$$

$$\text{Utilisons une intégration par parties : } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x^2-4x+5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = [x \ln(x^2-4x+5)]_3^{2+\sqrt{3}} + \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5} dx$$

$$= [x \ln(x^2-4x+5)]_3^{2+\sqrt{3}} - 2 \left( \int_3^{2+\sqrt{3}} 1 dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx \right).$$

$$= [x \ln(x^2-4x+5)]_3^{2+\sqrt{3}} - 2 \left( [x]_3^{2+\sqrt{3}} + \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx \right).$$

$$= (2+\sqrt{3}) \ln(4) - 3 \ln 2 - 2 \left( 2+\sqrt{3} - 3 + \ln 2 - \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= (4+2\sqrt{3}) \ln 2 - 3 \ln 2 - 2 \left( 2+\sqrt{3} - 3 + \ln 2 - \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= 4 \ln 2 + 2\sqrt{3} \ln 2 - 3 \ln 2 - 4 - 2\sqrt{3} + 6 - 2 \ln 2 + \frac{\pi}{6}$$

$$= (-1+2\sqrt{3}) \ln 2 - 2\sqrt{3} + 2 + \frac{\pi}{6}$$

# Bac 2015 session complémentaire

## Énoncé

Exercice N°1 :

Soit  $x$  et  $y$  des entiers relatifs. On pose  $f(x,y)=2x-3y$ .

1. a. Calculer  $f(5, 3)$ .
- b. En déduire les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation  $2x-3y=1$ .
2. Pour tout entier naturel  $n$  on pose  $X_n = f(5^n, 3^n)$ .
- a. Trouver, suivant les valeurs de  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $X_n$  par 7.
- b. Montrer que  $X_{2015} - 5$  est divisible par 7.

Exercice N°2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. On pose  $P(z)=z^3 - (6 + 5i)z^2 + (1 + 20i)z + 14 - 5i$  où  $z$  un nombre complexe.
  - a. Calculer  $P(i)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C} : P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$ .
  - b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $P(z)=0$ .
  2. On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixe respectives  $z_A = i, z_B = 4 + i$  et  $z_C = 2 + 3i$
- Soit  $s$  la similitude directe de centre  $A$  qui transforme  $B$  en  $C$ .
- a. Donner l'expression complexe de  $s$ .
  - b. Déterminer le rapport et un angle de  $s$ .
  3. a. Déterminer puis construire les ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des points du plan définis par :  
 $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \frac{z-1}{z-4-i}$  est imaginaire pur et  $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2-3i}$  est imaginaire pur.
  - b. Justifier que  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$ .

Exercice N°3 :

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral  $s$  direct  $ABC$  de centre  $O$  et de côté  $a$ , ( $a > 0$ ). Soient  $I, J$  et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[BC]$  ;  $[CA]$  et  $[AB]$ .

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes (on prendra  $(AB)$  horizontale).
- b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme  $B$  en  $C$  et  $J$  en  $K$ . Préciser le centre et un angle de  $r_1$ .
- c. Soit la rotation  $r_2$  qui transforme  $B$  en  $C$  et  $K$  en  $J$ . Préciser le centre et un angle de  $r_2$ .
2. a. Soit  $f=r_1 \circ r_2$  et  $g=r_2 \circ r_1$ . Caractériser  $f$  et  $g$ .
- b. Montrer que  $g \circ f = t_{\vec{BC}}$  où  $t_{\vec{BC}}$  est la translation de vecteur  $\vec{BC}$ .
3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s$  qui transforme  $B$  en  $I$  et  $C$  en  $J$ . Déterminer l'angle et le rapport de  $s$ .
- b. Déterminer  $s(A)$  et  $s(O)$ .
- c. Caractériser la composée  $h=r_1 \circ s$ .
4. Soit  $\Gamma$  l'ellipse de foyers  $I$  et  $J$  passant par  $C$ .
- a. Montrer que  $K \in \Gamma$ .
- b. Construire les sommets de  $\Gamma$ . Justifier la construction.

Exercice N°4 :

1. Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ .

- a. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- b. Tracer  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n(x) = \frac{(x+1)^n}{e^x}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F_n(x) = \int_{-1}^x f_n(t) dt$ .

Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$

3. Soit  $I_n = F_n(0) = \int_{-1}^0 f_n(t) dt$ .

- a. Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^* ; I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ .
- b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et positive.
- c. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^* ;$  on pose  $U_n = \frac{I_n}{n!}$ .

- a. Montrer que  $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$ . En déduire que  $U_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

b. Calculer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

Exercice N°5 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = x \ln(x+1)$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Interpréter graphiquement.

- b. Calculer  $\Gamma(x)$  et justifier que  $\begin{cases} -1 < x \leq 0; & f'(x) \leq 0 \\ x \geq 0; & f'(x) \geq 0 \end{cases}$
- c. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. a. Tracer la courbe (C).
- b. En remarquant que  $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$ , calculer  $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$ .
- c. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ .
3. Pour tout entier naturel non nul  $n$  on pose :  $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$ .
- a. Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique  $(U_n)$ . Justifier que  $U_1 = \frac{1}{4}$ .
- b. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .
4. Pour tout  $n \geq 0$  et pour tout réel  $x$  de  $[0; 1]$  on pose  $S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-x)^n$
- a. Justifier que  $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$
- a. Montrer que  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$ .
- b. En utilisant une intégration par parties, montrer que  $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left( \ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right)$ .
5. Soit  $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$ .
- a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}$ .
- b. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ln 2$ .
- c. Déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)U_n$ .

## Solution

### Exercice N°1 :

Soit  $x$  et  $y$  des entiers relatifs. On pose  $f(x,y) = 2x - 3y$ .

1. a. Calculer  $f(5, 3)$  :

$$f(5, 3) = 2 \times 5 - 3 \times 3 = 1.$$

b. En déduire les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation  $2x - 3y = 1$  :

$(5, 3)$  est une solution particulière de l'équation  $2x - 3y = 1$ .

$$\begin{cases} 2 \times 5 - 3 \times 3 = 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2(x - 5) - 3(y - 3) = 0 \Rightarrow 2(x - 5) = 3(y - 3) \Rightarrow 2 \mid 3(y - 3)$$

Comme 3 et 2 sont premiers entre eux alors d'après Gauss,  $2 \mid (y - 3) \Rightarrow$  il existe un entier relatif  $k$  tel que  $y - 3 = 2k$   
 $\Rightarrow y = 3 + 2k$ .

$$2(x - 5) = 3(y - 3) \Rightarrow 2(x - 5) = 3 \times 2k \Rightarrow x - 5 = 3k \Rightarrow x = 5 + 3k.$$

D'où  $S = \{(5 + 3k; 3 + 2k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$  on pose  $X_n = f(5^n, 3^n)$ .

a. Trouver, suivant les valeurs de  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $X_n$  par 7 :

$$X_n = f(5^n, 3^n) = 2 \times 5^n - 3 \times 3^n.$$

$$5^0 \equiv 1[7] \quad 3^0 \equiv 1[7]$$

$$5^1 \equiv 5[7] \quad 3^1 \equiv 3[7]$$

$$5^2 \equiv 4[7] \quad 3^2 \equiv 2[7]$$

$$5^3 \equiv 6[7] \quad 3^3 \equiv 6[7]$$

$$5^4 \equiv 2[7] \quad 3^4 \equiv 4[7]$$

$$5^5 \equiv 3[7] \quad 3^5 \equiv 5[7]$$

$$5^6 \equiv 1[7] \quad 3^6 \equiv 1[7]$$

$$5^{6k} \equiv 1[7] \quad 3^{6k} \equiv 1[7]$$

$$5^{6k+1} \equiv 5[7] \quad 3^{6k+1} \equiv 3[7]$$

$$5^{6k+2} \equiv 4[7] \quad 3^{6k+2} \equiv 2[7]$$

$$5^{6k+3} \equiv 6[7] \quad 3^{6k+3} \equiv 6[7]$$

$$5^{6k+4} \equiv 2[7] \quad 3^{6k+4} \equiv 4[7]$$

$$5^{6k+5} \equiv 3[7] \quad 3^{6k+5} \equiv 5[7]$$

• Si  $n=6k$  alors  $X_n = 2 \times 5^n - 3 \times 3^n \equiv 2 \times 1 - 3 \times 1[7] \equiv -1[7] \equiv 6[7]$ .

Donc le reste de la division euclidienne de  $X_n$  par 7 est 6.

• Si  $n=6k+1$  alors  $X_n = 2 \times 5^n - 3 \times 3^n \equiv 2 \times 5 - 3 \times 3[7] \equiv 1[7]$ .

Donc le reste de la division euclidienne de  $X_n$  par 7 est 1.

• Si  $n=6k+2$  alors  $X_n = 2 \times 5^n - 3 \times 3^n \equiv 2 \times 4 - 3 \times 2[7] \equiv 2[7]$ .  
Donc le reste de la division euclidienne de  $X_n$  par 7 est 2.

• Si  $n=6k+3$  alors  $X_n = 2 \times 5^n - 3 \times 3^n \equiv 2 \times 6 - 3 \times 6[7] \equiv -6[7] \equiv 1[7]$ .  
Donc le reste de la division euclidienne de  $X_n$  par 7 est 1.

• Si  $n=6k+4$  alors  $X_n = 2 \times 5^n - 3 \times 3^n \equiv 2 \times 2 - 3 \times 4[7] \equiv -8[7] \equiv 6[7]$ .  
Donc le reste de la division euclidienne de  $X_n$  par 7 est 6.

• Si  $n=6k+5$  alors  $X_n = 2 \times 5^n - 3 \times 3^n \equiv 2 \times 3 - 3 \times 5[7] \equiv -9[7] \equiv 5[7]$ .  
Donc le reste de la division euclidienne de  $X_n$  par 7 est 5.

b. Montrer que  $X_{2015} - 5$  est divisible par 7 :

$2015 = 335 \times 6 + 5 \Rightarrow$  le reste de la division euclidienne de  $X_{2015}$  par 7 est 5  $\Rightarrow X_{2015} \equiv 5[7] \Rightarrow X_{2015} - 5 \equiv 0[7]$   
Donc  $X_{2015} - 5$  est divisible par 7.

Exercice N°2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. On pose  $P(z) = z^3 - (6 + 5i)z^2 + (1 + 20i)z + 14 - 5i$  où  $z$  un nombre complexe.

a. Calculer  $P(i)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$  :

$P(i) = i^3 - (6 + 5i)i^2 + (1 + 20i)i + 14 - 5i = -i + 6 + 5i + i - 20 + 14 - 5i = 0$ .

|   |   |         |         |          |
|---|---|---------|---------|----------|
|   | 1 | -6 - 5i | 1 + 20i | 14 - 5i  |
| i |   | i       | 4 - 6i  | -14 + 5i |
|   | 1 | -6 - 4i | 5 + 14i | 0        |

D'où  $P(z) = (z - i)(z^2 - (6 + 4i)z + 5 + 14i)$

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $P(z) = 0$  :

$P(z) = 0 \Rightarrow (z - i)(z^2 - (6 + 4i)z + 5 + 14i) = 0 \Rightarrow$  soit  $z - i = 0 \Rightarrow z = i$  soit  $z^2 - (6 + 4i)z + 5 + 14i = 0$ .

$\Delta' = (-(6 + 4i))^2 - 4(5 + 14i) = 36 + 48i + 16 - 20 - 56i = -2i = (1 - i)^2 \Rightarrow z = 3 + 2i + 1 - i = 4 + i$  ou  
 $z = 3 + 2i - 1 + i = 2 + 3i$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  est  $\{i; 4 + i; 2 + 3i\}$ .

2. On considère les points A, B et C d'affixe respectives  $z_A = i$ ,  $z_B = 4 + i$  et  $z_C = 2 + 3i$

Soit  $s$  la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a. Donner l'expression complexe de  $s$  :

$z_C - z_A = a(z_B - z_A) \Rightarrow a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2 + 3i - i}{4 + i - i} = \frac{2 + 2i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  et  $z_A = \frac{b}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} \Rightarrow i = \frac{b}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} \Rightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

D'où l'expression complexe de  $s$  :  $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ .

b. Déterminer le rapport et un angle de  $s$  :

Le rapport de  $s$  :  $\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ; un angle de  $s$  :  $\arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \arg\left(\frac{1}{2}(1 + i)\right) = \arg\left(\frac{1}{2}\right) + \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

3. a. Déterminer puis construire les ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des points du plan définis par :

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \frac{z-1}{z-4-i}$  est imaginaire pur :

$$\frac{z-1}{z-4-i} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z-1}{z-4-i} = 0 \\ \arg\left(\frac{z-1}{z-4-i}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = z_A \\ \arg\left(\frac{z-1}{z-4-i}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} M = A \\ (\overline{MB}; \overline{MA}) = \frac{\pi}{2} [\pi] \end{array} \right.$$

D'où  $\Gamma_1$  est le cercle de diamètre  $[AB]$  privé de B.

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \frac{z-1}{z-2-3i}$  est imaginaire pur :

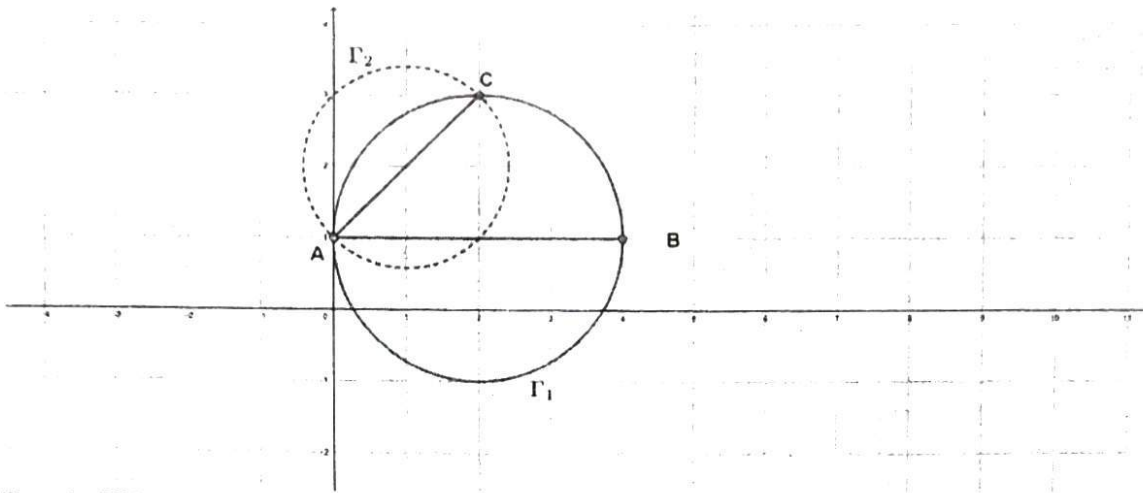
$$\frac{z-1}{z-2-3i} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z-1}{z-2-3i} = 0 \\ \arg\left(\frac{z-1}{z-2-3i}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = z_A \\ \arg\left(\frac{z-1}{z-2-3i}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} M = A \\ (\overline{MC}; \overline{MA}) = \frac{\pi}{2} [\pi] \end{array} \right.$$

D'où  $\Gamma_2$  est le cercle de diamètre  $[AC]$  privé de C.

b. Justifier que  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$  :

$s : \begin{cases} A \rightarrow A \\ B \rightarrow C \end{cases} \Rightarrow s : [AB] \rightarrow [AC] \Rightarrow s$  transforme le cercle de diamètre  $[AB]$  privé de B au cercle de diamètre  $[AC]$  privé de C.

D'où  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$ .

**Exercice N°3 :**

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O et de côté a, ( $a > 0$ ). Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [BC] ; [CA] et [AB].

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes (on prendra (AB) horizontale). (voir la construction ci-après).  
b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme B en C et J en K. Préciser le centre et un angle de  $r_1$

On a  $BJ = CK = \frac{a}{2} \neq 0$  et  $\overrightarrow{BJ} \neq \overrightarrow{CK}$ , donc il existe une unique rotation  $r_1 : \begin{cases} B \rightarrow C \\ J \rightarrow K \end{cases}$

• Le centre de  $r_1$  est O car  $\text{med}[BC] \cap \text{med}[JK] = \{O\}$ .

• Un angle de  $r_1$  est  $(\overrightarrow{BJ}; \overrightarrow{CK}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

Donc  $r_1 = r_{(O; \frac{2\pi}{3})}$

- c. Soit la rotation  $r_2$  qui transforme B en C et K en J. Préciser le centre et un angle de  $r_2$  :

• Le centre de  $r_2$  est A car  $(CK) \cap (BJ) = \{A\}$ .

• Un angle de  $r_2$  est  $(\overrightarrow{BK}; \overrightarrow{CJ}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

Donc  $r_2 = r_{(A; \frac{\pi}{3})}$

2. a. Soit  $f = r_1 \circ r_2$  et  $g = r_2 \circ r_1$ . Caractériser f et g :

• Caractérisation de f :

f est une rotation d'angle  $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow f$  est une symétrie centrale.

$f(A) = r_1 \circ r_2(A) = r_1(A) = B \Rightarrow$  le centre de f est J, le milieu de [AB].

D'où  $f = s_K$ .

• Caractérisation de g :

g est une rotation d'angle  $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow g$  est une symétrie centrale.

$g(C) = r_2 \circ r_1(C) = r_2(A) = A \Rightarrow$  le centre de g est J, le milieu de [AC].

D'où  $g = s_J$ .

- b. Montrer que  $g \circ f = t_{\overrightarrow{BC}}$  où  $t_{\overrightarrow{BC}}$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{BC}$  :

$g \circ f = s_J \circ s_K = t_{\overrightarrow{JK}} = t_{\overrightarrow{BC}}$

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme B en I et C en J. Déterminer l'angle et le rapport de s :

On a  $B \neq C$  et  $I \neq J$ , donc il existe une unique similitude directe  $s : \begin{cases} B \rightarrow I \\ C \rightarrow J \end{cases}$

• Un angle de s est  $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{IJ}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

• Le rapport de s :  $\frac{IJ}{BC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$ .

- b. Déterminer s(A) et s(O) :

$s : \begin{cases} A \rightarrow A' \\ B \rightarrow I \\ C \rightarrow J \end{cases}$  comme le triangle ABC est équilatéral direct alors le triangle A'IJ. D'où  $s(A) = K$ .

Comme  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OK}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$  et  $\frac{OK}{OA} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  alors  $s(O) = O$ .

- c. Caractériser la composée  $h = r_1 \circ s$  :

h est la composée de deux similitudes directes alors c'est une similitude directe.

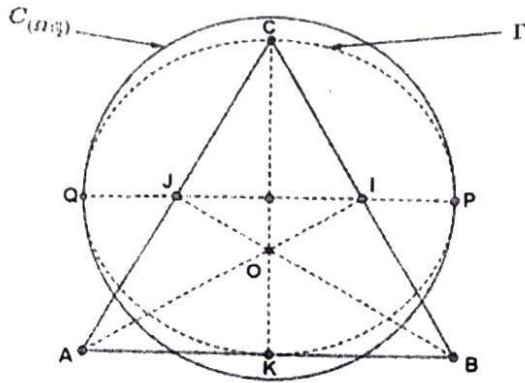
$h = r_1 \circ s = S_{(O; \frac{2\pi}{3})} \circ S_{(O; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3})} = S_{(O; \frac{1}{2}; \pi)} = h_{(O; -\frac{1}{2})}$

4. Soit  $\Gamma$  l'ellipse de foyers I et J passant par C.

- a. Montrer que  $K \in \Gamma$  :

$ME \in \Gamma \Leftrightarrow MI + MJ = CI + CJ = a$ . Or  $KI + KJ = a \Rightarrow K \in \Gamma$ .

- b. Construire les sommets de  $\Gamma$ . Justifier la construction.
- Le centre de  $\Gamma$  est  $\Omega$  le milieu de  $[IJ]$ .
  - Les sommets sur l'axe non focal sont : C et K car  $(CK) = \text{med}[IJ]$ .
  - Les sommets sur l'axe focal sont : les deux points d'intersection de  $(IJ)$  et  $C_{(\Omega, \frac{a}{2})}$ .



**Exercice N°4 :**

1. Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ .

a. Dresser le tableau de variation de f :

$$f'(x) = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-xe^x}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = -\infty \times \frac{1}{0^+} = -\infty \times (+\infty) = -\infty.$$

|       |           |   |           |
|-------|-----------|---|-----------|
| x     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) |           | + | -         |
| f(x)  |           |   |           |

$-\infty \swarrow$        $\searrow 0$

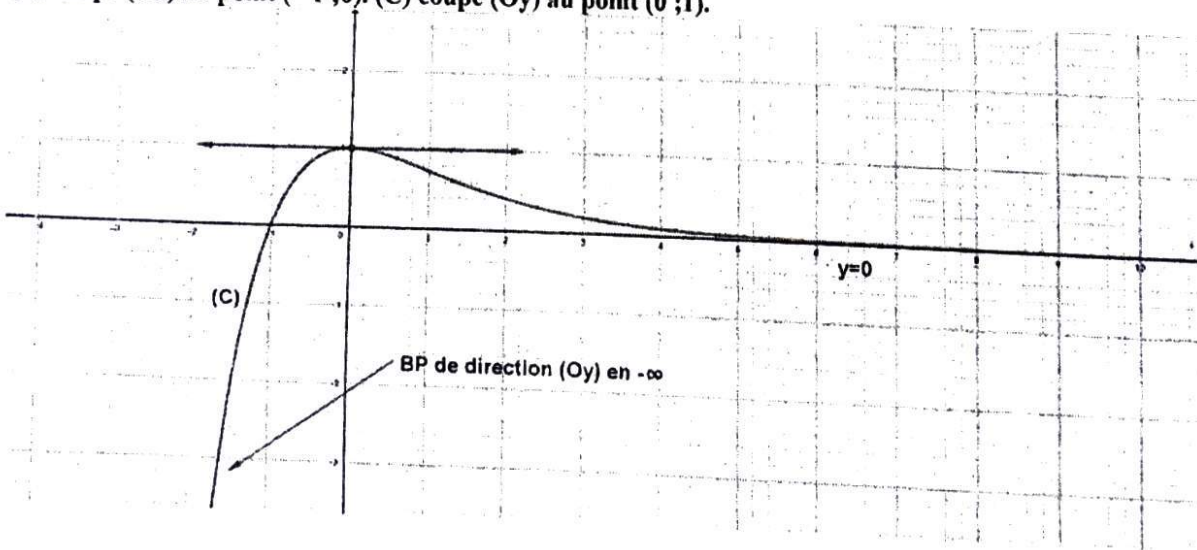
b. Tracer (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x+1}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = \frac{1}{0^-} \times (-\infty) = -\infty \times (-\infty) = +\infty$$

D'où (C) admet BP de direction (Oy) au voisinage de  $-\infty$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , alors  $y = 0$  de (C) en  $+\infty$ .

(C) coupe (Ox) au point  $(-1 ; 0)$ . (C) coupe (Oy) au point  $(0 ; 1)$ .



2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n(x) = \frac{(x+1)^n}{e^x}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F_n(x) = \int_{-1}^x f_n(t) dt$ .

Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$  :

$$F_{n+1}(x) = \int_{-1}^x f_{n+1}(t) dt = \int_{-1}^x \frac{(t+1)^{n+1}}{e^t} dt = \int_{-1}^x (t+1)^{n+1} e^{-t} dt.$$

Utilisons une intégration par parties :  $\begin{cases} u(t) = (t+1)^{n+1} \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = (n+1)t^n \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$$F_{n+1}(x) = [-(n+1)t^n e^{-t}]_{-1}^x + (n+1) \int_{-1}^x t^n e^{-t} dt = -f_{n+1}(x) + (n+1)F_n(x)$$

D'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$ .

3. Soit  $I_n = F_n(0) = \int_{-1}^0 f_n(t) dt \Rightarrow$

a. Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x) \Rightarrow F_{n+1}(0) = (n+1)F_n(0) - f_{n+1}(0) \Rightarrow I_{n+1} = (n+1)I_n - 1 \text{ car } f_{n+1}(0) = 1$$

b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et positive :

On rappelle que  $\forall X \in [0; 1]$  ;  $0 \leq X^{n+1} \leq X^n \leq 1$ .

$$\bullet -1 \leq t \leq 0 \Rightarrow 0 \leq t+1 \leq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 \leq (t+1)^{n+1} \leq (t+1)^n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 \leq \frac{(t+1)^{n+1}}{e^t} \leq \frac{(t+1)^n}{e^t}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{-1}^0 \frac{(t+1)^{n+1}}{e^t} dt \leq \int_{-1}^0 \frac{(t+1)^n}{e^t} dt \Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

D'où la suite  $(I_n)$  est décroissante et positive :

c. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

$$\bullet \text{ On a d'une part : } I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow (n+1)I_n - 1 \leq I_n \Rightarrow nI_n + I_n - I_n \leq 1 \Rightarrow nI_n \leq 1 \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{n}.$$

$$\bullet \text{ D'autre part : } 0 \leq I_{n+1} \Rightarrow 0 \leq (n+1)I_n - 1 \Rightarrow 1 \leq (n+1)I_n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n.$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ; on pose  $U_n = \frac{I_n}{n!}$ .

a. Montrer que  $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$ . En déduire que  $U_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  :

$$U_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} ((n+1)I_n - 1) = \frac{I_n}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\text{Donc } U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}.$$

$$U_2 = U_1 - \frac{1}{2!}$$

$$U_3 = U_2 - \frac{1}{3!}$$

$$U_4 = U_3 - \frac{1}{4!}$$

.....

$$U_n = U_{n-1} - \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow U_n = U_1 - \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

$$\text{Or } U_1 = \frac{I_1}{1!} = I_1 = F_1(0) = \int_{-1}^0 f_1(t) dt = \int_{-1}^0 \frac{t+1}{e^t} dt = \int_{-1}^0 (t+1)e^{-t} dt$$

Utilisons une intégration par parties :  $\begin{cases} u(t) = t+1 \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$$U_1 = I_1 = [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-t} dt = [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^0 - [e^{-t}]_{-1}^0 = -1 - 1 + e.$$

$$\Rightarrow U_n = U_1 - \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e - 1 - 1 - \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e - \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \right) - \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

$$\text{D'où } U_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

b. Calculer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \times 0 = 0.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 0.$$

**Exercice N°5 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = x \ln(x+1)$  et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \ln(x+1) = \lim_{t \rightarrow -1^+} (t-1) \ln t = -1 \times (-\infty) = +\infty.$$

D'où  $x = -1$  AV.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \times (+\infty) = +\infty.$$

D'où (C) admet une branche infinie au voisinage de  $+\infty$ .

b. Calculer  $f'(x)$  et justifier que  $\begin{cases} -1 < x \leq 0; & f'(x) \leq 0 \\ x \geq 0; & f'(x) \geq 0 \end{cases}$  :

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

|                 |    |       |           |
|-----------------|----|-------|-----------|
| x               | -1 | 0     | $+\infty$ |
| $\ln(x+1)$      |    | - 0 + |           |
| $\frac{x}{x+1}$ |    | - 0 + |           |
| $f'(x)$         |    | - 0 + |           |

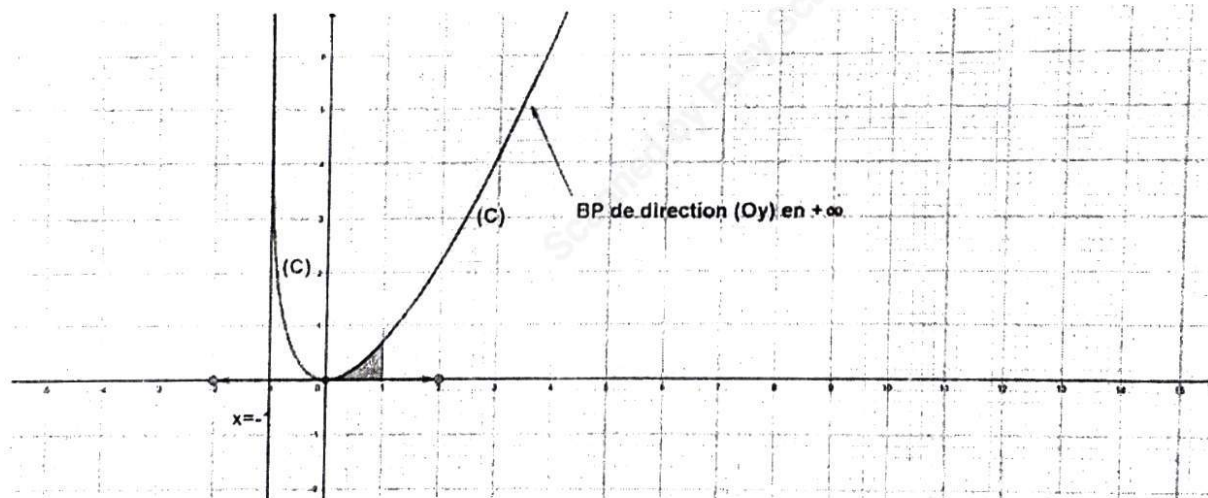
c. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

|         |    |                           |           |
|---------|----|---------------------------|-----------|
| x       | -1 | 0                         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |    | - 0 +                     |           |
| f(x)    |    | $+\infty$   0   $+\infty$ |           |

2. a. Tracer la courbe (C) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Donc (C) admet BP de direction (Oy) en  $+\infty$ .



b. En remarquant que  $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$ , calculer  $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$  :

|    |   |    |    |
|----|---|----|----|
|    | 1 | 0  | 0  |
| -1 |   | -1 | -1 |
|    | 1 | -1 | -1 |
|    | a | b  | c  |

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \int_0^1 \left( x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = -\frac{1}{2} + \ln 2.$$

c. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$  :

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x \ln(1+x) dx.$$

Utilisons une intégration par parties :  $\begin{cases} u(t) = \ln(1+t) \\ v'(t) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t+1} \\ v(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$

$$A = \left[ \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} + \ln 2 \right) = \frac{1}{4} \text{ (ua).}$$

3. Pour tout entier naturel non nul  $n$  on pose :  $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$ .

a. Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique  $(U_n)$ . Justifier que  $U_1 = \frac{1}{4}$  :

La fonction  $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$  est le produit de deux fonctions continues sur  $[0; 1]$  alors elle est continue sur  $[0; 1]$ .  
Donc la suite  $(U_n)$  est définie.

$$U_1 = \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \int_0^1 f(x) dx = A = \frac{1}{4}.$$

b. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

$$\text{On a : } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2 \Rightarrow 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2 dx \Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left[ \frac{x^{n+1} \ln 2}{n+1} \right]_0^1 \Rightarrow 0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0.$$

4. Pour tout  $n \geq 0$  et pour tout réel  $x$  de  $[0; 1]$  on pose  $S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-x)^n$

a. Justifier que  $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$  :

On rappelle que  $1+q+q^2+q^3+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  avec  $q \neq 1$ .

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-x)^n = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 - \dots + (-x)^n \\ = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

$$\text{D'où } S_n(x) = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

b. Montrer que  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$  :

$$\text{On a : } 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-x)^n = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-x)^n) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$\Rightarrow \left[ x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \right]_0^1 = [\ln(x+1)]_0^1 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

c. En utilisant une intégration par parties, montrer que  $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left( \ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right)$  :

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx.$$

Utilisons une intégration par parties :  $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x) \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

$$U_n = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx$$

$$\text{Or } (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = (-1)^{n+1} \left( \ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right)$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx = \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left( \ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right)$$

5. Soit  $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$ .

a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}$  :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{2} \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{x^{n+2}}{2(n+2)} \right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \left[ \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}.$$

b. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ln 2$  :

$$\text{On peut remarquer que } V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \Rightarrow V_n = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = 0 \text{ puis que } \frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}. \text{ D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ln 2.$$

c. Dédurre  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)U_n$  :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left( \ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right) \Rightarrow (n+1)U_n = \ln 2 - (-1)^{n+1} (\ln 2 - V_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2 - (-1)^{n+1} (\ln 2 - V_n)) = \ln 2.$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln 2$$

## Bac 2014 session normale Énoncé

### Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$ .

1. Calculer  $P(2i)$  et déterminer les solutions  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $P(z)=0$  sachant que  $\text{Im}(z_0) > \text{Im}(z_1) > \text{Im}(z_2)$ .

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$ . On pose  $z' = f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$ . On note M et M' les points d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ .

a. Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (BC) est  $2x+1=0$ .

b. Démontrer que si M décrit la droite (BC) privée de B et C, alors M' est situé sur l'axe des abscisses (On pourra remarquer que

$$z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

3. a. Démontrer que si  $|z| = 1$  alors  $f(z) = \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$ .

b. Vérifier que si  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$  alors  $f(z) = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$ .

4. a. Démontrer que si M décrit le cercle d'unité privé de B et C, alors M' est situé sur la courbe  $\Gamma$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 = (2x-1)^2$ .

b. Démontrer que  $\Gamma$  est une hyperbole. Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de  $\Gamma$ .

Construire  $\Gamma$  dans le repère précédent.

### Exercice N°2 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^x$ . Soit (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b. Tracer la courbe (C).

c. Vérifier que la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' - 2y' + y = 0$ .

d. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ .

2. On considère la suite numérique  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par  $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$ .

a. Montrer que  $I_1 = -1$ .

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  ;  $\frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

c. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ;

$$I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)I_n.$$

d. En déduire le calcul de l'intégrale  $J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1} dx$ . Donner la valeur de  $J$  sous la forme  $ae+b$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers relatifs.

### Exercice N°3 :

1. On considère la fonction numérique définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a. Montrer que  $f$  est continue à droite de zéro (On pourra écrire  $f(x) = x \ln(x+1) - x \ln x$ ).

b. Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de zéro. Donner une interprétation graphique.

c. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  (on pourra poser  $t = \frac{1}{x}$ ). Interpréter graphiquement.

2. a. Vérifier que  $f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ . En déduire le signe de  $f'(x)$ .

b. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c. Construire la courbe de  $f$ .

3. Pour tout  $n \geq 1$ , on pose :  $\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$  et  $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

- a. Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique  $(A_n)$ .
- b. Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$  on a :  $0 \leq x^{n-1}f(x) \leq x^{n-1}$  ; où  $f$  est la fonction définie dans la question 1).
- c. Justifier que  $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$
4. On pose  $I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^1 x^n \ln(x) dx$  et  $J_n(\alpha) = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$ .
- a. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer  $I_n(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$  et de  $n$ .
- b. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow 0^+} I_n(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}$
- c. En utilisant une intégration par parties, montrer que  $J_{n+1}(\alpha) = \frac{2n\alpha}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2} J_n$

**Exercice N°4 :** (Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment).

**Partie A**

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O et de côté  $a$ , ( $a > 0$ ). Soient K et L les milieux respectifs des segments [CD] et [AD].

- Faire une figure illustrant les données précédentes.
- Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme A en B et K en L. Préciser le centre et un angle de  $r$ .
- a. Prouver qu'il existe une unique similitude directe  $f_1$  qui transforme D en L et B en O. Déterminer le rapport et un angle de  $f_1$ .
- b. Soit P le centre de la similitude  $f_1$ . Vérifier que le point P est commun aux cercles de diamètres [AB] et [OD], puis le préciser. Vérifier que P est aussi le point d'intersection des deux droites (BL) et (AK).
- a. Soit  $f_2$  la similitude directe qui transforme B en D et O en L. Préciser son angle et son rapport.
- b. Montrer que le centre de la similitude  $f_2$  est le point P : même centre de  $f_1$ .
- a. Soit  $h = f_1 \circ f_2$ . Montrer que  $h$  est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport. En déduire deux réels  $\beta$  et  $\gamma$  tels que  $P = \text{bar}\{(B; \beta); (L; \gamma)\}$ .
- b. Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\lambda$  tels que  $P = \text{bar}\{(A; \alpha); (K; \lambda)\}$ .

**Partie B**

On se place maintenant dans l'espace et on construit sur le carré précédent un cube ABCDEFGH. On note :  $s_1$  la réflexion de plan (ABCD) ;  $s_2$  : la réflexion de plan (AEHD) ;  $s_3$  : la réflexion de plan (ABFE) et  $s_4$  : la réflexion de plan (DCGH). Soit  $f = s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4$  ;  $r = s_1 \circ s_2$  et  $t = s_3 \circ s_4$ . On ne demande pas de reproduire la figure.

- Montrer que  $r$  est un demi-tour dont on précisera l'axe.
- Montrer que  $t$  est une translation dont on précisera le vecteur.
- Reconnaitre et caractériser  $f$ .

## Solution

**Exercice N°1 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$ .

1. Calculer  $P(2i)$  et déterminer les solutions  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $P(z)=0$  sachant que  $\text{Im}(z_0) > \text{Im}(z_1) > \text{Im}(z_2)$  :

$$P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i = -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$$

$\Rightarrow$  il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$ .

Déterminons  $a$  et  $b$  :

|    |   |      |      |     |
|----|---|------|------|-----|
|    | 1 | 1-2i | 1-2i | -2i |
| 2i |   | 2i   | 2i   | 2i  |
|    | 1 | 1    | 1    | 0   |

$$\Rightarrow a = 1 \text{ et } b = 1$$

$$\text{D'où } P(z) = (z-2i)(z^2 + z + 1).$$

$$\Rightarrow z-2i = 0 \text{ ou } z^2 + z + 1 = 0$$

$$\bullet z-2i = 0 \Rightarrow z = 2i ;$$

$$\bullet z^2 + z + 1 = 0.$$

$$\Delta' = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = (i\sqrt{3})^2 \Rightarrow \begin{cases} z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ z_0 = 2i; z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$ . On pose  $z' = f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$ . On note M et M' les points d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ .

- a. Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (BC) est  $2x+1=0$  :

$$z_A = 2i ; z_B = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_C = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow A(0; 2) ; B\left(\frac{-1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } C\left(\frac{-1}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow 2x_B + 1 = 0 \text{ et } 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow 2x_C + 1 = 0. \text{ D'où une équation cartésienne de la droite (BC) est } 2x+1=0.$$

b. Démontrer que si M décrit la droite (BC) privée de B et C, alors M' est situé sur l'axe des abscisses (On pourra remarquer que

$$z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$M(x; y) \in (BC) \Rightarrow M\left(\frac{-1}{2}; y\right) \Rightarrow z = \frac{-1}{2} + yi \Rightarrow z' = \frac{1}{z^2 + z + 1} \Rightarrow z' = \frac{1}{\left(\frac{-1}{2} + yi + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}.$$

D'où M' est situé sur l'axe des abscisses.

3. a. Démontrer que si  $|z| = 1$  alors  $f(z) = \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$  :

On a :  $f(z) = \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

$$|z| = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{z\bar{z}}{z+z^2+z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$$

b. Vérifier que si  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in [-\pi; \pi] \setminus \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$  alors  $f(z) = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$  :

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}} = \frac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta-i\sin\theta} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$$

4. a. Démontrer que si M décrit le cercle d'unité privé de B et C, alors M' est situé sur la courbe  $\Gamma$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 = (2x - 1)^2$  :

$$M \in C_{(0;1)} \Rightarrow z = e^{i\theta} \Rightarrow z = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta} \Rightarrow z = \frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{1+2\cos\theta}i \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \frac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases} \Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = (2x' - 1)^2. \text{ D'où M' est situé sur la courbe } \Gamma \text{ d'équation cartésienne } x^2 + y^2 = (2x - 1)^2.$$

b. Démontrer que  $\Gamma$  est une hyperbole. Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de  $\Gamma$ .

Construire  $\Gamma$  dans le repère précédent :

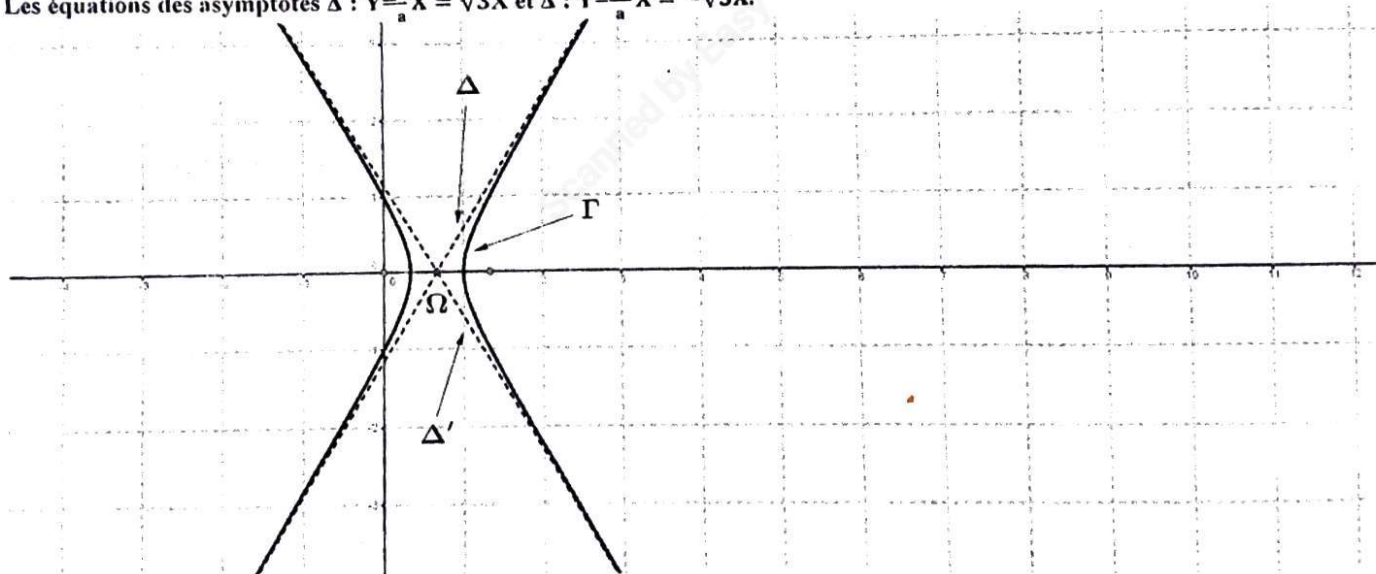
$$x^2 + y^2 = (2x - 1)^2 \Rightarrow (2x - 1)^2 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 - y^2 = 0 \Rightarrow 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 1 - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + 1 - y^2 = 0 \Rightarrow 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{3} + 1 - y^2 = 0 \Rightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{(y-0)^2}{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1. \text{ En posant } \begin{cases} X = x - \frac{2}{3} \\ Y = y \end{cases} \text{ et } \Omega\left(\frac{2}{3}; 0\right), \text{ alors dans le repère } (\Omega; \vec{i}; \vec{j})$$

l'équation de  $\Gamma$  devient  $\frac{X^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ , les sommets de  $\Gamma$  sont  $A\left(\frac{1}{3}; 0\right)$  et  $A'\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ .  $c = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$ ;  $e = \frac{c}{a} = 2$ .

Les équations des asymptotes  $\Delta : Y = \frac{b}{a}X = \sqrt{3}X$  et  $\Delta' : Y = -\frac{b}{a}X = -\sqrt{3}X$ .



**Exercice N°2 :**

Soit la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^x$ . Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

L.a. Dresser le tableau de variation de f :

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

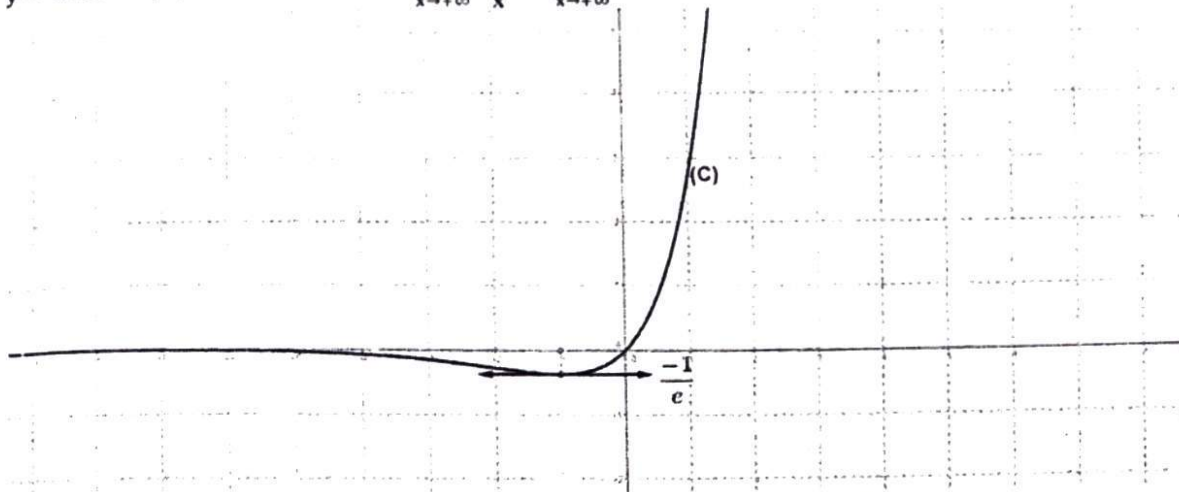
|       |           |                |           |
|-------|-----------|----------------|-----------|
| x     | $-\infty$ | -1             | $+\infty$ |
| f'(x) | -         | 0              | +         |
| f(x)  | 0         | $-\frac{1}{e}$ | $+\infty$ |

$$f(-1) = -\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$$

b. Tracer la courbe (C).

$y = 0$  AH de (C) en  $-\infty$  et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  alors (C) admet BP de direction (Oy) en  $+\infty$ .



c. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle  $y'' - 2y' + y = 0$  :

$$f(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^x$$

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (x+3)e^x - 2(x+2)e^x + (x+1)e^x = (x+3-2x-4+x+1)e^x = 0.$$

D'où f est solution de l'équation différentielle  $y'' - 2y' + y = 0$ .

d. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$  :

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0 \Rightarrow [f'(x)]_0^1 - 2[f(x)]_0^1 + \int_0^1 f(x) dx = 0 \Rightarrow f'(1) - f'(0) - 2f(1) + 2f(0) + \int_0^1 f(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -f'(1) + f'(0) + 2f(1) - 2f(0) = -2e + 1 + 2e = 1 \Rightarrow A = 1 \text{ (ua)}.$$

2. On considère la suite numérique  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par  $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$ .

a. Montrer que  $I_1 = -1$  :

$$I_1 = -\int_0^1 x e^x dx = -A = -1.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  ;  $\frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq e^x \leq e \Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e x^n \Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 e x^n dx \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |I_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

c. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  ;  $I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)I_n$  :

$$\begin{cases} u'(x) = x^n \\ v(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = (-1)^n \left( \frac{1}{n+1} [x^{n+1} e^x]_0^1 - \int_0^1 x^{n+1} e^x dx \right) \Rightarrow (n+1)I_n = (-1)^n \left( [x^{n+1} e^x]_0^1 - \int_0^1 x^{n+1} e^x dx \right)$$

$$\Rightarrow (-1)^n \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = (-1)^n [x^{n+1} e^x]_0^1 - (n+1)I_n \Rightarrow (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = (-1)^{n+1} [x^{n+1} e^x]_0^1 + (n+1)I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)I_n$$

d. En déduire le calcul de l'intégrale  $J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1} dx$ . Donner la valeur de J sous la forme  $ae+b$  où a et b sont des entiers relatifs :

|    |   |    |    |    |
|----|---|----|----|----|
|    | 1 | 4  | -3 | -6 |
| -1 |   | -1 | -3 | 6  |
|    | 1 | 3  | -6 | 0  |

$$\Rightarrow \frac{x^3+4x^2-3x-6}{x+1} = x^2 + 3x - 6.$$

$$J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1} dx = \int_0^1 (x^2 + 3x - 6) e^x dx = \int_0^1 x^2 e^x dx + 3 \int_0^1 x e^x dx - 6 \int_0^1 e^x dx = I_2 - 3I_1 - 6[e^x]_0^1$$

$$= e + 2I_1 - 3I_1 - 6(e-1) = e - 2 + 3 - 6e + 6 = -5e + 7.$$

Exercice N°3 :

1. On considère la fonction numérique définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a. Montrer que f est continue à droite de zéro (On pourra écrire  $f(x) = x \ln(x+1) - x \ln x$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x+1) - x \ln x) = 0 - 0 = 0 = f(0)$$

D'où f est continue à droite de zéro.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0. La courbe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

c. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  (on pourra poser  $t = \frac{1}{x}$ ). Interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

La droite  $y=1$  AH en  $+\infty$ .

2. a. Vérifier que  $f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ . En déduire le signe de  $f'(x)$  :

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

Comme  $f' < 0$  alors f est strictement décroissante.

|       |   |           |
|-------|---|-----------|
| x     | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) |   | -         |
| f(x)  |   | 0         |

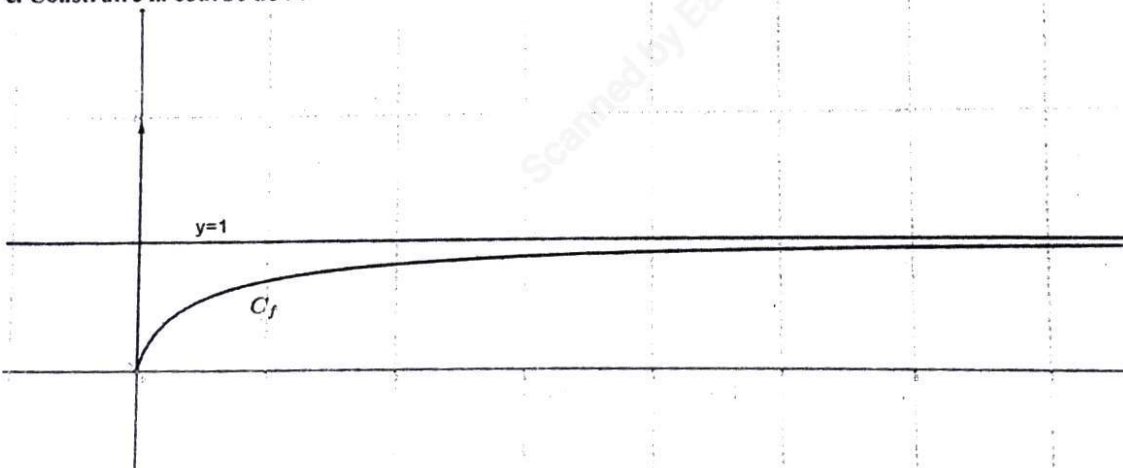
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) = 0$$

|       |   |           |
|-------|---|-----------|
| x     | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) |   | +         |

b. Dresser le tableau de variation de f :

|       |   |           |
|-------|---|-----------|
| x     | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) |   | +         |
| f(x)  |   | 1         |

c. Construire la courbe de f :



3. Pour tout  $n \geq 1$ , on pose :  $\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right); x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$  et  $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

a. Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique  $(A_n)$  :

$f_n$  est le produit et la composée de fonctions continues sur  $]0; 1]$  alors  $f_n$  est continue sur  $]0; 1]$  et comme  $f_n$  est continue à droite en 0 car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$  alors  $f_n$  est continue sur  $[0; 1]$ .

Comme  $f_n$  est continue sur  $[0; 1]$  alors l'intégrale de  $f_n$  sur  $[0; 1]$  est bien définie. D'où  $A_n$  existe pour tout  $n \geq 1$ .

b. Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$  on a :  $0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$  ; où f est la fonction définie dans la question 1) :  
D'après le tableau de variation de f alors  $0 \leq f(x) \leq 1$  pour tout  $x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$ .

c. Justifier que  $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$  :

$$0 \leq x^{n-1}f(x) \leq x^{n-1} \Rightarrow 0 \leq x^n f'(x) \leq x^n \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}.$$

D'après les Gendarmes  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0$ .

4. On pose  $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln(x) dx$  et  $J_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$ .

a. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer  $I_n(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$  et de  $n$  :

$$\begin{cases} u'(x) = x^n \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n(\alpha) = \frac{1}{n+1} [x^{n+1} \ln(x)]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1} \int_\alpha^1 x^n dx \Rightarrow I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_\alpha^1 = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln(\alpha) - \frac{1}{(n+1)^2} (1 - \alpha^{n+1})$$

$$\Rightarrow I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln(\alpha) + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

b. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow 0^+} I_n(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}$  :

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} I_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \left( \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln(\alpha) + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \frac{-1}{(n+1)^2}$$

c. En utilisant une intégration par parties, montrer que  $J_{n+1}(\alpha) = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2} J_n$  :

$$J_{n+1}(\alpha) = \int_\alpha^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx.$$

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = x^{n+1} \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = (n+1)x^n \ln(x+1) + \frac{x^{n+1}}{x+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = [(x+1)x^{n+1} \ln(x+1)]_0^1 - (n+1) \int_0^1 (x+1)x^n \ln(x+1) dx - \int_0^1 x^{n+1} dx$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1) \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx - (n+1) \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx - \left[ \frac{1}{n+2} x^{n+2} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1)J_{n+1} - (n+1)J_n - \frac{1}{n+2} \Rightarrow (n+2)J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1)J_n - \frac{1}{n+2}$$

$$D'où  $J_{n+1}(\alpha) = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2} J_n$$$

**Exercice N°4 :** (Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment).

#### Partie A

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O et de côté a, (a>0). Soient K et L les milieux respectifs des segments [CD] et [AD].

1. Faire une figure illustrant les données précédentes (voir la construction)

2. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L. Préciser le centre et un angle de r :

Comme AK = BL ≠ 0 et  $\overline{AK} \neq \overline{BL}$  alors il existe une unique r qui transforme A en B et K en L, de centre O intersection de med[AB] et med[KL] et d'angle  $\alpha = (\overline{OA}; \overline{OB}) = \frac{\pi}{2}$ .

3. a. Prouver qu'il existe une unique similitude directe  $f_1$  qui transforme D en L et B en O. Déterminer le rapport et un angle de  $f_1$  :

Comme DB ≠ 0 et KL ≠ 0 alors il existe une unique similitude directe  $f_1$  qui transforme D en L et B en O, de rapport

$$k = \frac{LO}{DB} = \frac{1}{2} \times \frac{OL}{OC} = \frac{1}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ et d'angle } \beta = (\overline{DB}; \overline{LO}) = (\overline{DB}; \overline{DC}) = \frac{\pi}{4}$$

b. Soit P le centre de la similitude  $f_1$ . Vérifier que le point P est commun aux cercles de diamètres [AB] et [OD], puis le préciser.

Vérifier que P est aussi le point d'intersection des deux droites (BL) et (AK) :

$$f_1 \begin{cases} P \rightarrow P \\ D \rightarrow L \text{ alors :} \\ B \rightarrow O \end{cases}$$

•  $(\overline{PD}; \overline{PL}) = \frac{\pi}{4} = (\overline{OD}; \overline{OL})$  alors les points P, O, L et D sont cocycliques. D'où  $P \in C_{[OD]}$

•  $(\overline{PB}; \overline{PO}) = \frac{\pi}{4} = (\overline{AB}; \overline{AO})$  alors les points P, A, B et O sont cocycliques. D'où  $P \in C_{[AB]}$

$\Rightarrow P \in C_{[OD]} \cap C_{[AB]}$  or  $P \neq O$  car  $f_1(B) = O$ , d'où P est le deuxième point d'intersection de  $C_{[OD]}$ ,  $C_{[AB]}$  autre que O.

$(\overline{PB}; \overline{PL}) = (\overline{PB}; \overline{PO}) + (\overline{PO}; \overline{PL}) = (\overline{AB}; \overline{AO}) + (\overline{DO}; \overline{DL}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0[\pi]$ . D'où  $P \in (BL)$ .

$(\overline{PA}; \overline{PK}) = (\overline{PA}; \overline{PO}) + (\overline{PO}; \overline{PK}) = (\overline{BA}; \overline{BO}) + (\overline{AB}; \overline{AO})[\pi] = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}[\pi] = 0[\pi]$ . D'où  $P \in (AK)$ .

4. a. Soit  $f_2$  la similitude directe qui transforme B en D et O en L. Préciser son angle et son rapport :

$$k' = \frac{DL}{OB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et d'angle } \theta = (\overline{BO}; \overline{DL}) = (\overline{DB}; \overline{DA}) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$(\overline{PB}; \overline{PD}) = (\overline{PB}; \overline{PO}) + (\overline{PO}; \overline{PD}) = \frac{\pi}{4} + (\overline{LO}; \overline{LD}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

b. Montrer que le centre de la similitude  $f_2$  est le point P : même centre de  $f_1$  :

Soit  $\Omega$  le centre de  $f_2$  on a :

$$\begin{cases} \Omega \rightarrow \Omega \\ B \rightarrow D \\ O \rightarrow L \end{cases}$$

$(\overline{\Omega O}; \overline{\Omega L}) = \frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} = \pi - (\overline{DL}; \overline{DO}) = \pi + (\overline{DO}; \overline{DL})$ . Donc les points  $\Omega, D, O$  et  $L$  sont cocycliques. D'où  $\Omega \in C_{(OD)}$ .

$(\overline{\Omega B}; \overline{\Omega D}) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega O}) + (\overline{\Omega O}; \overline{\Omega D}) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega O}) + (\overline{LO}; \overline{LD}) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega O}) = \frac{3\pi}{4} - (\overline{LO}; \overline{LD})$   
 $\Rightarrow (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega O}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega O}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overline{\Omega B}; \overline{\Omega O}) = \frac{\pi}{4} = (\overline{AB}; \overline{AO})$ . Donc les points  $\Omega, D, O$  et  $L$  sont cocycliques. D'où  $\Omega \in C_{(AB)}$ .

De plus  $f_2(O) = L$  alors  $\Omega \neq O$ . D'où  $\Omega = P$ .

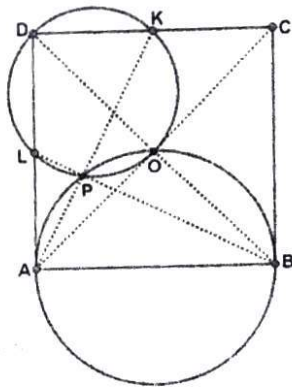
5. a. Soit  $h = f_1 \circ f_2$ . Montrer que  $h$  est une homothétie dont on précisera le centre est le rapport. En déduire deux réels  $\beta$  et  $\gamma$  tels que  $P = \text{bar}\{(B; \beta); (L; \gamma)\}$  :

$$h = f_1 \circ f_2 = s_{(P; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\pi}{4})} \circ s_{(P; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{4})} = s_{(P; \frac{1}{4}; \pi)} = h_{(P; -\frac{1}{4})}$$

$$h(B) = f_1 \circ f_2(B) = f_1(D) = L \Rightarrow \overline{PL} = -\frac{1}{4} \overline{PB} \Rightarrow 4 \overline{PL} + \overline{PB} = \vec{0}$$
. D'où  $P = \text{bar}\{(B; 4); (L; 1)\}$

b. Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\lambda$  tels que  $P = \text{bar}\{(A; \alpha); (K; \lambda)\}$  :

$$P = \text{bar} \begin{matrix} B & L \\ 1 & 4 \end{matrix} = \text{bar} \begin{matrix} A & D & C & A & D \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{matrix} = \text{bar} \begin{matrix} A & D & C \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix} = \text{bar} \begin{matrix} A & K \\ 3 & 2 \end{matrix}$$



**Partie B**

On se place maintenant dans l'espace et on construit sur le carré précédent un cube ABCDEFGH. On note :  $s_1$  la réflexion de plan (ABCD) ;  $s_2$  : la réflexion de plan (AEHD) ;  $s_3$  : la réflexion de plan (ABFE) et  $s_4$  : la réflexion de plan (DCGH). Soit  $f = s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4$  ;  $r = s_1 \circ s_2$  et  $t = s_3 \circ s_4$ . On ne demande pas de reproduire la figure.

1. Montrer que  $r$  est un demi-tour dont on précisera l'axe :

$r$  est la composée de deux symétries orthogonales de plans  $P_1 = (ABCD)$  et  $P_2 = (AEHD)$ . Comme  $P_1 \cap P_2 = (AD)$  et  $P_1 \perp P_2$  alors  $r$  est un demi-tour d'axe (AD).

2. Montrer que  $t$  est une translation dont on précisera le vecteur :

$t$  est la composée de deux symétries orthogonales de plans  $P_3 = (ABFE)$  et  $P_4 = (DCGH)$ . Comme  $P_3 \parallel P_4$  alors  $t$  est la translation de vecteur  $2\overline{DA}$ .

3. Reconnaître et caractériser  $f$  :

$f = s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 = \text{rot}$ . La transformation  $f$  est la composée d'un demi-tour d'axe (AD) et d'une translation de vecteur  $2\overline{DA}$ . Donc  $f$  est un vissage d'axe (AD) de vecteur  $2\overline{DA}$  et d'angle  $\pi$ .

# Bac 2014 session complémentaire

## Énoncé

### Exercice N°1 :

On considère l'équation (E) :  $11x+9y=19$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

1. a. Vérifier que  $(-4 ; 7)$  est une solution particulière de (E).
- b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

### 2. Uniquement pour la série C

Une variable aléatoire réelle  $X$  ne prend que trois valeurs :  $-4 ; 7$  et  $8$  avec les probabilités respectives :

$$p_1 = \frac{x-4}{9} ; p_2 = \frac{2x-y-8}{9} \text{ et } p_3 = \frac{8x+10y+2}{9}$$

- a. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers  $(x, y)$  tel que ces coordonnées soient acceptables. Préciser le.
- b. Montrer que l'espérance mathématique de  $X$  est  $E(X)=6$ .
- c. Calculer la variance de  $X$ .

### 2. bis. Uniquement pour la série TMGM.

On considère l'équation (E') :  $(11-9i)z+(11+9i)\bar{z}=38$ , d'inconnue le complexe  $z$  et  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$ .

- a. Soit  $M(x,y)$  un point d'affixe  $z$  où  $z$  est une solution de (E'). Montrer que l'équation (E') admet une infinité de solutions et déterminer le lieu géométrique  $\Delta$  des points  $M(x,y)$ .
- b. Quels sont les points  $M(x,y)$  de  $\Delta$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs ?

### Exercice N°2 :

1. Dans l'ensemble des nombres complexes  $C$ , on pose :  $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(-2-8i)z-8+4i$ .

- a. Calculer  $P(2i)$ .
- b. Résoudre l'équation  $P(z)=0$ .

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère la transformation  $f$  d'expression  $z' = \frac{1}{3}iz + \frac{2}{3} + 2i$ .

- a. Montrer que  $f$  est une similitude directe. Préciser le centre  $A$ , le rapport et un angle de  $f$ .
- b. Calculer l'affixe  $z_C$  du point  $C$  image de  $B(-3;-1)$  par  $f$ . Placer les points  $A, B$  et  $C$  sur la figure et montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle.
- c. Calculer l'affixe  $z_G$  du point  $G$  barycentre du système  $S = \{(A; -4), (B; 1), (C; 6)\}$ . Vérifier que les points  $A, B, C$  et  $G$  sont cocycliques.

3. Déterminer puis construire les ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des points  $M$  du plan définis par :

- a.  $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow -4MA^2 + MB^2 + 6MC^2 = 30$ .
- b.  $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = 16$

### Exercice N°3 :

1. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = -x^2 - \ln x$ .

- a. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- b. Montrer que l'équation  $g(x)=0$  admet dans  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ . Vérifier que  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ . En déduire le signe de  $g(x)$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x}(1 + \ln x)$ .

- a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ . Interpréter graphiquement.
- b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +x} (f(x) - (1-x))$ . Interpréter graphiquement.
- c. Vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .
- d. Construire la courbe représentative de  $f$ .

3. Soit  $f_m$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f_m(x) = -x + 1 + \frac{m^2}{x}(1 + \ln x - \ln m)$ , où  $m$  un paramètre réel strictement positif.

- a. Montrer que les courbes  $(C_m)$  représentatives des fonctions  $f_m$  dans un repère cartésien, admettent les mêmes asymptotes, dont on précisera le point d'intersection, noté  $G$ .
- b. Montrer que  $(C_m)$  est l'image de  $(C_1)$  par une homothétie de centre  $G$  dont on précisera le rapport.
- c. Déduire le tableau de variation de  $(C_m)$  à partir de celui de  $f$ .

### Exercice N°4 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle  $ABC$  équilatéral direct de centre  $O$  et de côté  $a$ , ( $a>0$ ).

Soient  $I, J$  et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[BC], [CA]$  et  $[AB]$ .

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite  $(AB)$  horizontale).
- b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $A$ .
- c. Déterminer un angle de  $r_1$  et préciser son centre.
- d. On considère la rotation  $r_2$  de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . Déterminer  $r_1 \circ r_2(B)$  et caractériser  $r_1 \circ r_2$ .
2. On considère les points  $D$  et  $E$  symétriques respectifs de  $I$  et  $J$  par rapport à  $K$ .

- a. Montrer qu'il existe un unique antidépassement  $g$  qui transforme  $A$  en  $K$  et  $J$  en  $E$ .  
 b. Justifier que  $g$  est une symétrie glissante. Déterminer  $g(D)$  et donner la forme réduite de  $g$ .  
 3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme  $B$  en  $I$  et  $C$  en  $J$ .  
 b. Déterminer le rapport et un angle de  $s_1$ . Justifier que  $O$  est le centre de  $s_1$ .  
 4. On considère les points  $M \in [BC]$ ,  $N \in [CA]$  et  $P \in [AB]$  tels que  $BM = CN = AP = x$ ;  $x \in [0; a]$ .  
 a. Montrer que le triangle  $MNP$  est équilatéral et de centre  $O$ .  
 b. Soit  $H$  le milieu de  $[MN]$ . Déterminer le lieu géométrique de  $H$  lorsque  $M$  décrit  $[BC]$ .  
 c. A partir d'une position donnée de  $M$  sur  $[BC]$ , montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_2$  qui transforme  $(A, B, C)$  en  $(P, M, N)$ . Préciser son centre.  
 d. Préciser la position de  $M$  sur  $[BC]$  pour laquelle, le quotient  $\lambda = \frac{OM}{OB}$  est minimal. En déduire la position de  $M$  sur  $[BC]$  pour laquelle l'aire du triangle  $MNP$  est minimale.

**Exercice N°5 :**

On considère la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$ . Soit  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . Donner une interprétation graphique.

b. Donner  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Donner une interprétation graphique.

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  et construire sa courbe  $\Gamma$ . (On remarquera que le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ ).

2. Soit  $A$  l'aire du domaine plan limité par la courbe  $\Gamma$ , l'axe des abscisses et les droites  $x=0$  et  $x=1$ .

Montrer que  $1 < A < \frac{e}{e-1}$ . (On ne cherche pas à calculer la valeur exacte de  $A$ ).

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $I_0 = 1$ .

a. Montrer que  $I_1 = 1 - 2e^{-1}$ . (On pourra utiliser une intégration par parties).

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n > 1$ , on a  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

4. On pose pour tout entier naturel :  $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_n$ .

a. Justifier que :  $S_n = \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$ .

b. Montrer que :  $A - S_n = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$ .

c. Montrer que  $0 \leq A - S_n \leq \frac{2}{n+2}$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = A$ .

d. Déterminer un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n > n_0$ ;  $A$  soit une valeur approchée de  $S_n$  à  $10^{-2}$  près.

## Solution

**Exercice N°1 :**

On considère l'équation (E) :  $11x + 9y = 19$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

1. a. Vérifier que  $(-4; 7)$  est une solution particulière de (E) :

$11(-4) + 9 \cdot 7 = -44 + 63 = 19$ . D'où le couple  $(-4; 7)$  est une solution particulière de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) :

On a :  $(-4; 7)$  est une solution particulière de l'équation  $11x + 9y = 19$ .

$$\begin{cases} 11(-4) + 9 \cdot 7 = 19 \\ 11x + 9y = 19 \end{cases} \Rightarrow 11(x + 4) + 9(y - 7) = 0 \Rightarrow 11(x + 4) = -9(y - 7) \Rightarrow 11 \mid -9(y - 7).$$

Comme 11 et 9 sont premiers entre eux alors d'après Gauss,  $11 \mid (y - 7) \Rightarrow$  il existe un entier relatif  $k$  tel que  $y - 7 = 11k$   
 $\Rightarrow y = 7 + 11k$ .

$$11(x + 4) = -9(y - 7) \Rightarrow 11(x + 4) = -9 \times 11k \Rightarrow x + 4 = -9k \Rightarrow x = -4 - 9k.$$

D'où  $S = \{(-4 - 9k; 7 + 11k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**2. Uniquement pour la série C**

Une variable aléatoire réelle  $X$  ne prend que trois valeurs :  $-4$ ;  $7$  et  $8$  avec les probabilités respectives :

$$p_1 = \frac{x-4}{9}; p_2 = \frac{2x-y-8}{9} \text{ et } p_3 = \frac{8x+10y+2}{9}$$

a. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers  $(x, y)$  tel que ces coordonnées soient acceptables. Préciser le :

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 \geq 0 \\ p_2 \geq 0 \\ p_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{9} + \frac{2x-y-8}{9} + \frac{8x+10y+2}{9} = 1 \\ \frac{x-4}{9} \geq 0 \\ \frac{2x-y-8}{9} \geq 0 \\ \frac{8x+10y+2}{9} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x + 9y = 19 \\ -4 - 9k - 4 \geq 0 \\ -8 - 18k - 7 - 11k - 8 \geq 0 \\ -32 - 72k + 70 + 110k + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4 - 9k \\ y = 7 + 11k \\ k \leq \frac{-8}{9} \\ k \leq \frac{-23}{29} \\ k \geq \frac{-40}{38} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ x = -4 - 9k = -4 + 9 = 5 \\ y = 7 + 11k = 7 - 11 = -4 \end{cases}$$

D'où il existe un unique couple de coordonnées  $(x; y)$  d'entiers tel que ces coordonnées soient acceptables. Ce couple est  $(5; -4)$ .

b. Montrer que l'espérance mathématique de  $X$  est  $E(X)=6$  :

Comme  $x = 5$  et  $y = -4$  alors  $p_1 = \frac{x-4}{9} = \frac{5-4}{9} = \frac{1}{9}$  ;  $p_2 = \frac{2x-y-8}{9} = \frac{2 \times 5 - (-4) - 8}{9} = \frac{6}{9}$  et  $p_3 = \frac{8 \times 5 + 10(-4) + 2}{9} = \frac{2}{9}$

|       |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$ | -4            | 7             | 8             |
| $p_i$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{6}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |

$$E(X) = -4 \times \frac{1}{9} + 7 \times \frac{6}{9} + 8 \times \frac{2}{9} = \frac{54}{9} = 6.$$

c. Calculer la variance de  $X$  :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = (-4)^2 \times \frac{1}{9} + 7^2 \times \frac{6}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} = \frac{438}{9} = \frac{146}{3}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{146}{3} - 36 = \frac{38}{3}$$

2. bis. Uniquement pour la série TMGM.

On considère l'équation  $(E')$  :  $(11-9i)z + (11+9i)\bar{z} = 38$ , d'inconnue le complexe  $z$  et  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$ .

a. Soit  $M(x,y)$  un point d'affixe  $z$  où  $z$  est une solution de  $(E')$ . Montrer que l'équation  $(E')$  admet une infinité de solutions et déterminer le lieu géométrique  $\Delta$  des points  $M(x,y)$  :

$$(11-9i)z + (11+9i)\bar{z} = 38 \Rightarrow (11-9i)z + (11-9i)\bar{z} = 38 \Rightarrow 2\operatorname{Re}((11-9i)z) = 38 \Rightarrow 2\operatorname{Re}(11-9i)(x+yi) = 38$$

$$\Rightarrow 2(11x + 9y) = 38 \Rightarrow 11x + 9y = 19 \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{19-11x}{9} \end{cases}$$

Donc l'équation  $(E')$  admet une infinité de solutions.

Le lieu géométrique des points  $M(x,y)$  est la droite  $\Delta : 11x + 9y = 19$ .

b. Quels sont les points  $M(x,y)$  de  $\Delta$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs ?

Les coordonnées des points  $M(x,y)$  de  $\Delta$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs sont  $(-4 - 9k; 7 + 11k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$  solutions de l'équation  $(E)$ .

**Exercice N°2 :**

1. Dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , on pose :  $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (-2-8i)z - 8 + 4i$ .

a. Calculer  $P(2i)$  :

$$P(2i) = (2i)^3 + (2-2i)(2i)^2 + (-2-8i)(2i) - 8 + 4i = -8i - 8 + 8i + 16 - 4i - 8 + 4i = 0$$

b. Résoudre l'équation  $P(z) = 0$  :

Comme  $P(2i) = 0$  alors il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$ .

Déterminons  $a$  et  $b$  :

|      |   |        |         |         |
|------|---|--------|---------|---------|
|      | 1 | $2-2i$ | $-2-8i$ | $-8+4i$ |
| $2i$ |   | $2i$   | $4i$    | $8-4i$  |
|      | 1 | 2      | $-2-4i$ | 0       |

$$\Rightarrow a = 2 \text{ et } b = -2 - 4i$$

$$D'où  $P(z) = (z-2i)(z^2 + 2z - 2 - 4i)$ .$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow z - 2i = 0 \text{ ou } z^2 + 2z - 2 - 4i = 0$$

$$\bullet z - 2i = 0 \Rightarrow z = 2i ;$$

$$\bullet z^2 + 2z - 2 - 4i = 0.$$

$$\Delta' = 1^2 - 1(-2-4i) = 1 + 2 + 4i = 3 + 4i = (2+i)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z' = -1 + 2 + i = 1 + i \\ z'' = -1 - 2 - i = -3 - i \end{cases}$$

$$\text{Donc } S = \{z_0 = 2i; z_1 = 1 + i; z_2 = -3 - i\}$$

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère la transformation  $f$  d'expression

$$z' = \frac{1}{3}iz + \frac{2}{3} + 2i.$$

a. Montrer que  $f$  est une similitude directe. Préciser le centre  $A$ , le rapport et un angle de  $f$  :

L'expression complexe de  $f$  est sous forme  $z' = az + b$ . Donc  $f$  est une similitude directe de rapport  $|a| = \left|\frac{1}{3}i\right| = \frac{1}{3}$  ; d'angle

$$\arg(a) = \arg\left(\frac{1}{3}i\right) = \frac{\pi}{2} \text{ et de centre } A \text{ d'affixe } z_A = \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{2}{3} + 2i}{1 - \frac{1}{3}i} = \frac{2+6i}{3-i} = \frac{(2+6i)(3+i)}{10} = \frac{6-6+20i}{10} = 2i.$$

b. Calculer l'affixe  $z_C$  du point  $C$  image de  $B(-3; -1)$  par  $f$ . Placer les points  $A, B$  et  $C$  sur la figure et montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle : (voir la figure).

$$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |-3 - i - 2i|^2 = |-3 - 3i|^2 = \sqrt{9+9}^2 = 18$$

$$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |1 + i - 2i|^2 = |1 - i|^2 = \sqrt{1+1}^2 = 2$$

$$BC^2 = |z_B - z_C|^2 = |-3 - i - 1 - i|^2 = |-4 - 2i|^2 = \sqrt{16+4}^2 = 20$$

Comme  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  alors le triangle ABC est rectangle en A.

$$z_C = \frac{1}{3}iz_B + \frac{2}{3} + 2i = \frac{1}{3}i(-3 - i) + \frac{2}{3} + 2i = 1+i.$$

c. Calculer l'affixe  $z_G$  du point G barycentre du système  $S = \{(A; -4), (B; 1), (C; 6)\}$ . Vérifier que les points A, B, C et G sont cocycliques :

$$z_G = \frac{-4z_A + z_B + 6z_C}{3} = \frac{-4(2i) - 3 - i + 6(1+i)}{3} = \frac{3-3i}{3} = 1-i.$$

3. Déterminer puis construire les ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des points M du plan définis par :

a.  $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow -4MA^2 + MB^2 + 6MC^2 = 30$  :

$$-4MA^2 + MB^2 + 6MC^2 = 3MG^2 - 4GA^2 + GB^2 + 6GC^2$$

$$GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |2i - 1 + i|^2 = |-1 + 3i|^2 = \sqrt{1+9}^2 = 10.$$

$$GB^2 = |z_G - z_B|^2 = |-3 - i - 1 + i|^2 = |-4|^2 = 16.$$

$$GC^2 = |z_G - z_C|^2 = |1 + i - 1 + i|^2 = |2i|^2 = 4.$$

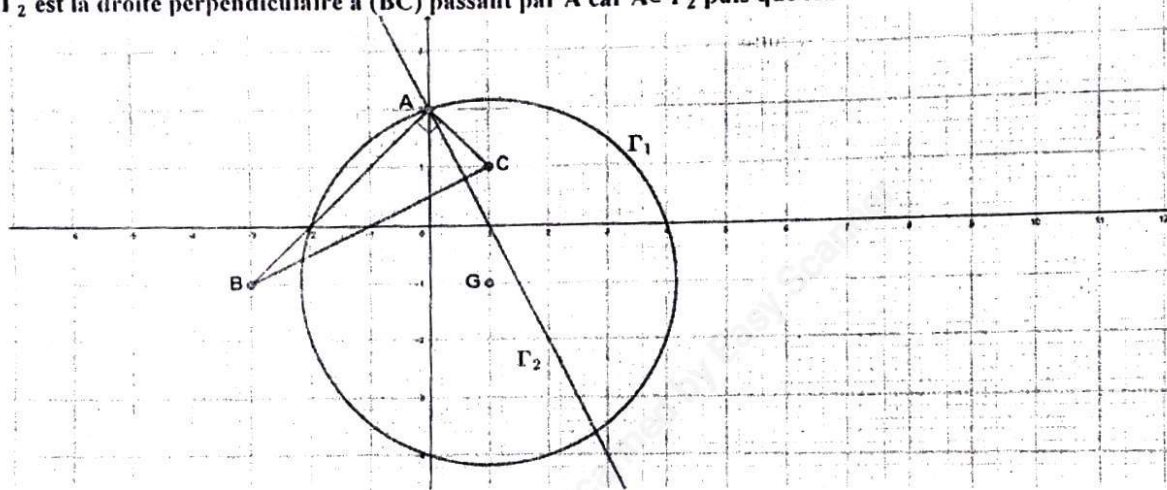
$$-4MA^2 + MB^2 + 6MC^2 = 3MG^2 - 4 \times 10 + 16 + 6 \times 4 = 3MG^2.$$

$$4MA^2 + MB^2 + 6MC^2 = 30 \Rightarrow 3MG^2 = 30 \Rightarrow MG^2 = 10 \Rightarrow MG^2 = GA^2 \Rightarrow MG = GA.$$

D'où  $\Gamma_1 = C_{(G; AG)}$

b.  $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = 16$  :

$\Gamma_2$  est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A car  $A \in \Gamma_2$  puis que  $AB^2 - AC^2 = 16$ .



**Exercice N°3 :**

1. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = -x^2 - \ln x$ .

a. Dresser le tableau de variation de  $g$  :

$$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right) < 0. \text{ Donc } g \text{ est strictement décroissante.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x^2 + \ln x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| x       | 0         |   | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | - |           |
| $g(x)$  | $+\infty$ |   | $-\infty$ |

b. Montrer que l'équation  $g(x)=0$  admet dans  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ . Vérifier que  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ . En déduire le signe de  $g(x)$  :  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$  et  $g(]0; +\infty[) = ]-\infty; +\infty[$ . Donc l'équation  $g(x)=0$  admet dans  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .

De plus  $g\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,26 > 0$  et  $g(1) = -1$ , alors d'après le théorème de la valeur intermédiaire  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ .

Le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$  :

|        |   |          |           |
|--------|---|----------|-----------|
| x      | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | - | 0        | +         |

2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x}(1 + \ln x)$ .

a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ . Interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x + 1 + \frac{1}{x}(1 + \ln x)\right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$$

Donc  $x=0$  AV.

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (1-x))$ . Interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (1-x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (1 + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0.$$

La droite  $\Delta : y = -x + 1$  AO de la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

c. Vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  et dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x^2} (1 + \ln x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = -1 - \frac{1}{x^2} (1 + \ln x) + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 - 1 - \ln x + 1}{x^2} = \frac{-x^2 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Tableau de variation de  $f$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -x + 1 + \frac{1}{x} (1 + \ln x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty.$$

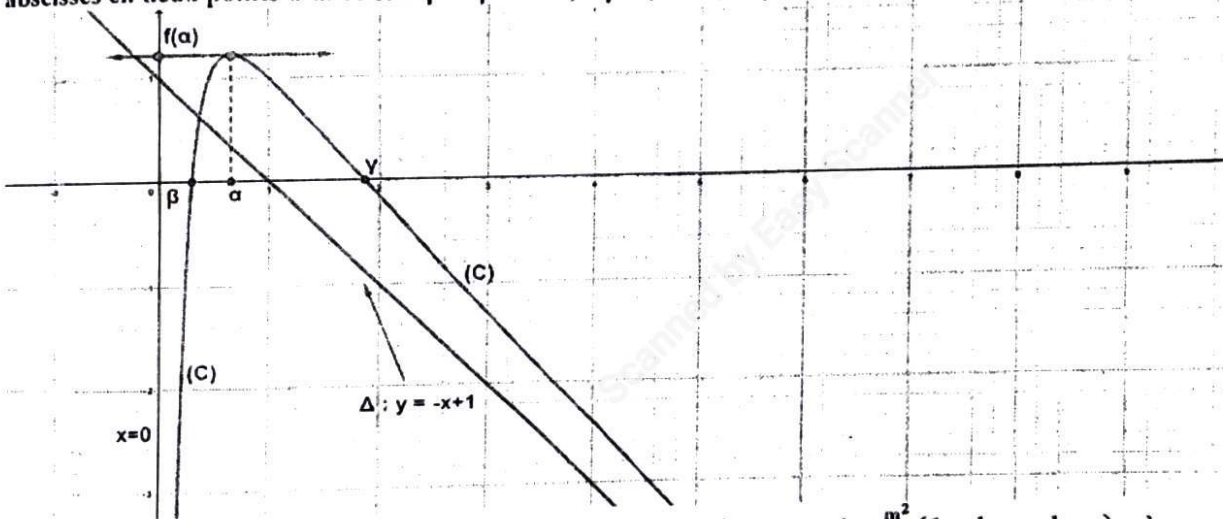
Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$ .

D'où le tableau de variation de  $f$ .

|         |     |             |           |
|---------|-----|-------------|-----------|
| $x$     | $0$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |     | $0$         |           |
| $f(x)$  |     | $f(\alpha)$ |           |

d. Construire la courbe représentative de  $f$  :

Pour la construire la courbe  $(C)$  de  $f$  on prend  $f(\alpha) = 1,2$ . Alors d'après le tableau de variation de  $f$  la courbe  $(C)$  coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses  $\beta$  et  $\gamma$  avec  $0,2 < \beta < 0,3$  et  $1,8 < \gamma < 1,9$  (d'après la propriété des valeurs intermédiaire)



3. Soit  $f_m$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f_m(x) = -x + 1 + \frac{m^2}{x} (1 + \ln x - \ln m)$ , où  $m$  un paramètre réel strictement positif.

a. Montrer que les courbes  $(C_m)$  représentatives des fonctions  $f_m$  dans un repère cartésien, admettent les mêmes asymptotes, dont on précisera le point d'intersection, noté  $G$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -x + 1 + \frac{1}{x} (1 + \ln x) \right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$$

Donc  $x=0$  AV des courbes  $(C_m)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_m(x) - (1-x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m^2}{x} (1 + \ln x - \ln m) = \lim_{x \rightarrow +\infty} m^2 \times \frac{1 + \ln x - \ln m}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} m^2 \times \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln m}{x} \right) = 0$$

Donc  $\Delta : y = -x + 1$  asymptote oblique des courbes  $(C_m)$  au voisinage de  $+\infty$ .

Donc toutes les courbes  $(C_m)$  admettent les mêmes asymptotes.

Les deux asymptotes se coupent au point  $G$  d'abscisse  $0$  et d'ordonnée  $y = -0 + 1 = 1$ . D'où  $G(0; 1)$ .

b. Montrer que  $(C_m)$  est l'image de  $(C_1)$  par une homothétie de centre  $G$  dont on précisera le rapport :

Une homothétie  $h$  de centre  $G$  et de rapport  $k$  transforme  $(C_1)$  en  $(C_m)$  si et seulement si :

$$M(x; y) \in (C_1) \Leftrightarrow h(M) = M'(x'; y') \in (C_m).$$

$$f_1(x) = y \Leftrightarrow f_m(x') = y'. \text{ Or } h(M) = M' \Leftrightarrow \overline{GM'} = k\overline{GM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - 0 \\ y' - 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky - k + 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc on : } f_1(x) = y \Leftrightarrow f_m(kx) = ky - k + 1 \Leftrightarrow f_m(kx) = kf_1(x) - k + 1.$$

$$\Leftrightarrow -kx + 1 + \frac{m^2}{kx} (1 + \ln(kx) - \ln m) = k \left( -x + 1 + \frac{1}{x} (1 + \ln x) \right) - k + 1.$$

$$\Leftrightarrow -kx + 1 + \frac{m^2}{kx} (1 + \ln x + \ln k - \ln m) = -kx + k + \frac{k}{x} (1 + \ln x) - k + 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2}{kx} (1 + \ln x + \ln k - \ln m) = \frac{k}{x} (1 + \ln x) \Leftrightarrow \frac{m^2}{x} (1 + \ln x + \ln k - \ln m) = \frac{k^2}{x} (1 + \ln x).$$

Alors par identification on obtient :  $\begin{cases} k^2 = m^2 \\ \ln k = \ln m \end{cases} \Rightarrow k = m.$

D'où  $h = h_{(G, m)}$

c. Dédurre le tableau de variation de  $(C_m)$  à partir de celui de  $f$  :

$$\overline{GM'} = m\overline{GM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - 0 \\ y' - 1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = mx \\ y' = my - m + 1 \end{cases}$$

|           |           |                |           |
|-----------|-----------|----------------|-----------|
| $x$       | 0         | $m\alpha$      | $+\infty$ |
| $f'_m(x)$ |           | +              | -         |
| $f_m(x)$  |           | $f_m(m\alpha)$ |           |
|           | $-\infty$ |                | $-\infty$ |

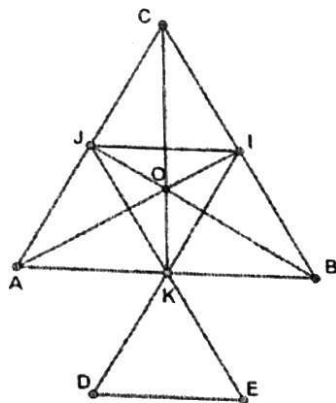
#### Exercice N°4 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre O et de côté  $a$ , ( $a > 0$ ).

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure :



(On pourra prendre la droite (AB) horizontale).

b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme A en B et C en A :

On a  $AC = BA = a \neq 0$  et  $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BA}$ , donc il existe une unique rotation  $r_1 : \begin{cases} A \rightarrow B \\ C \rightarrow A \end{cases}$

c. Déterminer un angle de  $r_1$  et préciser son centre :

• Un angle de  $r_1$  est  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ .

• Le centre de  $r_1$  est O car  $\text{med}[AB] \cap \text{med}[AC] = \{O\}$ .

Donc  $r_1 = r_{(O; \frac{2\pi}{3})}$

d. On considère la rotation  $r_2$  de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . Déterminer  $r_1 \circ r_2(B)$  et caractériser  $r_1 \circ r_2$  :

$$r_1 \circ r_2(B) = r_1(C) = A.$$

$r_1 \circ r_2$  est une symétrie centrale car  $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ . Le centre de cette symétrie est K milieu de [AB]. D'où  $r_1 \circ r_2 = s_K$ .

2. On considère les points D et E symétriques respectifs de I et J par rapport à K.

a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $g$  qui transforme A en K et J en E :

Comme  $AJ = KE = \frac{a}{2} \neq 0$ , donc il existe un unique antidéplacement  $g : \begin{cases} A \rightarrow K \\ J \rightarrow E \end{cases}$

b. Justifier que  $g$  est une symétrie glissante. Déterminer  $g(D)$  et donner la forme réduite de  $g$  :

Comme  $\text{med}[AK] \neq \text{med}[JE]$  alors  $g$  est une symétrie glissante.

Comme le triangle AJD est isocèle en A tel que  $(\overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AD}) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$  et le triangle KEI est isocèle en K tel que  $(\overrightarrow{KE}; \overrightarrow{KI}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$  et comme une symétrie glissante transforme un angle orienté en son opposé alors  $g(D) = I$ .

$$g : \begin{cases} A \rightarrow K \\ J \rightarrow E \\ D \rightarrow I \end{cases}$$

• D'une part : l'axe de  $g$  passe K milieu de [JE] et par le milieu de [AK] Donc l'axe de  $g$  est la droite (AB).

• D'autre part : comme A appartient à l'axe (AB) de  $g$  et  $g(A) = K$  alors le vecteur de  $g$  est  $\overrightarrow{AK}$ .

D'où la forme réduite de  $g : g = s_{AB} \circ t_{AK} = t_{AK} \circ s_{AB}$

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme B en I et C en J :

Comme  $B \neq C$  et  $I \neq J$ , donc il existe une unique similitude directe  $s : \begin{cases} B \rightarrow I \\ C \rightarrow J \end{cases}$

b. Déterminer le rapport et un angle de  $s_1$ . Justifier que O est le centre de  $s_1$ .

• Un angle de  $s$  est  $(\overline{BC}; \overline{IJ}) = (\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

• Le rapport de  $s : \frac{IJ}{BC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$ .

• Justifions que O est le centre de  $s_1$  :

Comme le triangle BCO est isocèle en O tel que  $(\overline{OB}; \overline{OC}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$  et le triangle IJO est isocèle en O tel que

$(\overline{OI}; \overline{OJ}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$  et comme une similitude directe conserve les angles orientés alors  $s_1(O) = O$ . D'où le point O est le centre de

$s_1$ .

4. On considère les points  $M \in [BC]$ ,  $N \in [CA]$  et  $P \in [AB]$  tels que  $BM = CN = AP = x ; x \in [0; a]$ .

a. Montrer que le triangle MNP est équilatéral et de centre O :

$$\overline{BM} = \frac{x}{a} \overline{BC}; \overline{CN} = \frac{x}{a} \overline{CA} \text{ et } \overline{AP} = \frac{x}{a} \overline{AB}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} B & C \\ a-x & x \end{pmatrix} \quad N = \text{bar} \begin{pmatrix} C & A \\ a-x & x \end{pmatrix} \quad \text{et } P = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B \\ a-x & x \end{pmatrix}$$

Soit la rotation  $r$  de centre O et d'angle  $\frac{2\pi}{3} \Rightarrow r(A) = B ; r(B) = C$  et  $r(C) = A$

$$\text{Donc } r(M) = \begin{pmatrix} C & A \\ a-x & x \end{pmatrix} = N ; r(N) = \begin{pmatrix} A & B \\ a-x & x \end{pmatrix} = P \text{ et } r(P) = \begin{pmatrix} B & C \\ a-x & x \end{pmatrix} = M$$

$\Rightarrow \begin{cases} OM = ON = OP \\ (\overline{OM}; \overline{ON}) = (\overline{ON}; \overline{OP}) = (\overline{OP}; \overline{OM}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$  D'où le triangle MNP est équilatéral.

b. Soit H le milieu de [MN]. Déterminer le lieu géométrique de H lorsque M décrit [BC] :

$$\begin{cases} (\overline{OM}; \overline{OH}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ \frac{OH}{OM} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow H = s_{(O; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3})}(M), \text{ donc lorsque M décrit [BC], le point H décrit } s_{(O; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3})}([BC]) = [IJ].$$

c. A partir d'une position donnée de M sur [BC], montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_2$  qui transforme (A, B, C) en (P, M, N). Préciser son centre :

Comme  $M \neq N$  et  $B \neq C$ , alors il existe une unique similitude directe  $s_2$  telle que  $s_2(B) = M$  et  $s_2(C) = N$ , or ABC et PMN sont équilatéraux directs, on a donc  $s_2(A) = P$ .

Donc  $s_2$  transforme (A, B, C) en (P, M, N).

$$O = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow s_2(O) = \begin{pmatrix} s_2(A) & s_2(B) & s_2(C) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{bar} \begin{pmatrix} P & M & N \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = O.$$

d. Préciser la position de M sur [BC] pour laquelle, le quotient  $\lambda = \frac{OM}{OB}$  est minimal. En déduire la position de M sur [BC] pour laquelle l'aire du triangle MNP est minimale :

$\lambda = \frac{OM}{OB}$  est minimal lorsque OM est minimal, c'est-à-dire lorsque M est le projeté orthogonal de O sur (BC), c'est-à-dire lorsque  $M = I$ . Or l'aire de MNP est le produit de celle de BCA par  $\lambda^2$ . D'où cette aire est minimale lorsque  $\lambda$  est minimal.

Exercice N°5 :

On considère la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$ . Soit  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . Donner une interprétation graphique :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}} = \frac{1}{1 - 0} = 1. \text{ D'où } y = 1 \text{ AH de (C) au voisinage de } +\infty.$$

b. Donner  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Donner une interprétation graphique.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - x} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \times 0 = 0. \text{ D'où } y = 0 \text{ AH de (C) au voisinage de } -\infty.$$

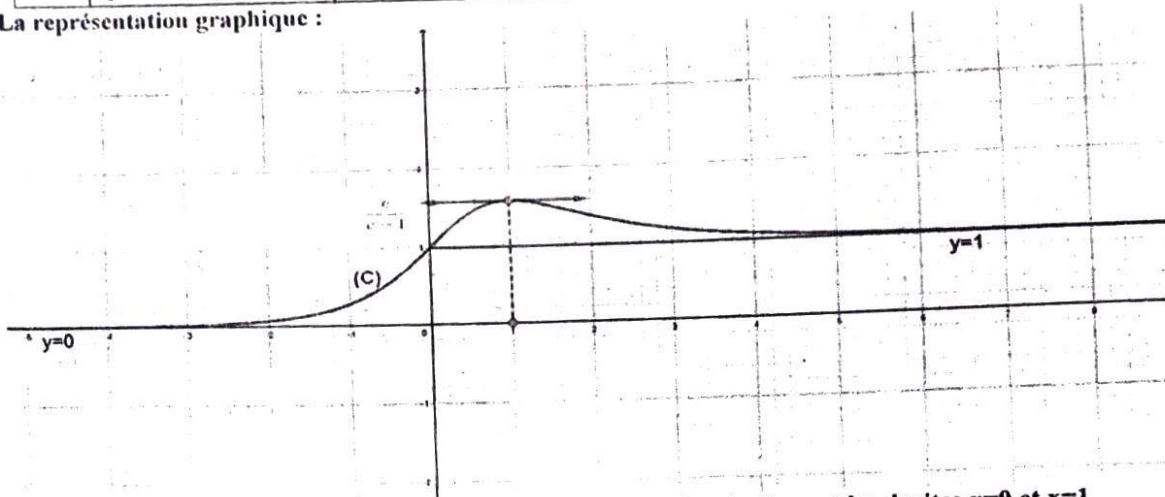
c. Dresser le tableau de variation de  $f$  et construire sa courbe  $\Gamma$ . (On remarquera que le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ ):

$$f(x) = \frac{e^x(e^x-x) - (e^x-1)e^x}{(e^x-x)^2} = \frac{-xe^x + e^x(1-x)e^x}{(e^x-x)^2(e^x-x)^2}; \text{ le signe de } f(x) \text{ est celui de } f(x).$$

|         |           |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$             | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$             | $-$       |
| $f(x)$  |           | $\frac{e}{e-1}$ |           |

0  $\swarrow$   $\searrow$  1

La représentation graphique :



2. Soit  $A$  l'aire du domaine plan limité par la courbe  $\Gamma$ , l'axe des abscisses et les droites  $x=0$  et  $x=1$ .

Montrer que  $1 < A < \frac{e}{e-1}$ . (On ne cherche pas à calculer la valeur exacte de  $A$ ):

L'aire  $A$  est égale à :  $A = \int_0^1 f(x) dx$  car  $f$  est positive sur  $[0; 1]$ .

D'après le tableau de variation on a :  $\forall x \in [0; 1]; 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1} \Rightarrow \int_0^1 1 dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{e}{e-1} dx$

$$\Rightarrow [x]_0^1 \leq A \leq \frac{e}{e-1} [x]_0^1 \Rightarrow 1 \leq A \leq \frac{e}{e-1}$$

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $I_0 = 1$ .

a. Montrer que  $I_1 = 1 - 2e^{-1}$ . (On pourra utiliser une intégration par parties):

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx;$$

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - 2e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}.$$

D'où  $I_1 = 1 - 2e^{-1}$ .

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n > 1$ , on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx.$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow -n \leq -nx \leq 0 \Rightarrow e^{-n} \leq e^{-nx} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{-nx} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n e^{-nx} \leq x^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} [x^{n+1}]_0^1 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

D'où  $\forall n > 1$ , on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

4. On pose pour tout entier naturel :  $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_n$ .

a. Justifier que :  $S_n = \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$ :

$$S_n = I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_n = 1 + \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx + \int_0^1 x^3 e^{-3x} dx + \dots + \int_0^1 x^n e^{-nx} dx.$$

$$= \int_0^1 1 dx + \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx + \int_0^1 x^3 e^{-3x} dx + \dots + \int_0^1 x^n e^{-nx} dx.$$

$$= \int_0^1 (1 + x e^{-x} + x^2 e^{-2x} + x^3 e^{-3x} + \dots + x^n e^{-nx}) dx = \int_0^1 (1 + (xe^{-1})^1 + (xe^{-1})^2 + (xe^{-1})^3 + \dots + (xe^{-1})^n) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$$

On rappelle que  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  où  $q \neq 1$ .

b. Montrer que :  $A - S_n = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$ :

$$A - S_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x - x} dx - \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{(1 - xe^{-x})e^x} dx - \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 - xe^{-x}} dx - \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - 1 + (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$$

c. Montrer que  $0 \leq A - S_n \leq \frac{2}{n+2}$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = A$  :

On a :  $A - S_n = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx = \int_0^1 (xe^{-x})^{n+1} \times \frac{1}{1 - xe^{-x}} dx = \int_0^1 (xe^{-x})^{n+1} \times f(x) dx = \int_0^1 x^{n+1} (e^{-x})^{n+1} \times f(x) dx.$

Or  $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1} \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1} \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1} \dots \dots \dots (1)$

et  $0 < e^{-(n+1)} \leq e^{-(n+1)x} \leq 1 \dots \dots \dots (2)$

En multipliant les deux encadrements (1) et (2) on a :  $0 \leq f(x)e^{-(n+1)x} \leq \frac{e}{e-1} \Rightarrow 0 \leq f(x)e^{-(n+1)x} \leq \frac{e}{e-1} \leq 2$

$\Rightarrow 0 \leq f(x)e^{-(n+1)x} \leq 2$  et en multipliant par  $x^{n+1}$  on obtient :  $0 \leq x^{n+1}f(x)e^{-(n+1)x} \leq \frac{e}{e-1} \leq 2x^{n+1}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^{n+1}f(x)e^{-(n+1)x} dx \leq \int_0^1 2x^{n+1} dx \Rightarrow 0 \leq A - S_n \leq \frac{2}{n+2} [x^{n+2}]_0^1 \Rightarrow 0 \leq A - S_n \leq \frac{2}{n+2}.$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A - S_n) = 0$  puis que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = A.$

d. Déterminer un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n > n_0$  ; A soit une valeur approchée de  $S_n$  à  $10^{-2}$  près :  $\frac{2}{n_0+2} \leq 10^{-2} \Rightarrow \frac{n_0+2}{2} \geq 10^2 \Rightarrow n_0 + 2 \geq 2 \times 10^2 \Rightarrow n_0 \geq 2 \times 10^2 - 2 \Rightarrow n_0 \geq 198.$

## Bac 2013 session normale

### Énoncé

**Exercice N°1 :**

On considère l'équation (E) :  $25x - 9y = 5$  où x et y sont des entiers relatifs.

1. a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que  $25u + 9v = 1$ . En déduire une solution particulière  $(x_0; y_0)$  de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2. On désigne par d le PGCD de x et y où  $(x; y)$  est une solution particulière de (E).

a. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b. Quelles sont les solutions  $(x; y)$  telles que x et y soient premiers entre eux ?

c. Peut-on trouver un couple  $(x; y)$  d'entiers relatifs tel que  $(x^2; y^2)$  soit solution de (E) ?

Justifier votre réponse.

**Exercice N°2 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe z on pose :

$$P(z) = z^3 - (9 - i)z^2 + (28 - 5i)z - 32 + 4i.$$

1. a. Calculer  $P(4)$  et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a :

$$P(z) = (z - 4)(z^2 + az + b).$$

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

2. On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $z_A = 4$  ;  $\text{Im}(z_B) > 0$  et  $\text{Im}(z_C) < 0$ .

a. Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre C qui transforme A en B.

b. Déterminer le rapport et un angle de s.

3. Pour tout nombre complexe z on pose  $Q(z) = z^2 - (5 - i)z + 8 - i$ .

On note  $\Gamma$  l'ensemble des points M d'affixe z tels que  $Q(z)$  soit imaginaire pur (ou nul).

a. En posant  $z = x + iy$ , donner une équation cartésienne de  $\Gamma$  et montrer que  $\Gamma$  est une hyperbole de centre  $\Omega(\frac{5}{2}; \frac{1}{2})$ .

b. Préciser les sommets et les asymptotes de  $\Gamma$  puis la construire.

**Exercice N°3 :**

Soit la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (3 - x)e^x$ . Soit  $\Gamma$  la courbe représentative de f dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ .

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Tracer la courbe (C).

d. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle  $y' - y = -e^x$  et calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=3$  :

2. On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel ;  $n \geq 1$  par :  $U_n = \frac{3^n}{n!}$ .

a. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 3$  ;  $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$ .

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 3$  ;  $0 \leq U_n \leq \frac{9}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

3. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  ;  $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^3 (3 - x)^n e^x dx$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!}$

a. Justifier que  $I_1 = e^3 - 4$ .

- b. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ;  $0 \leq I_n \leq (e^3 - 1) U_n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .
- c. En utilisant une intégration par parties, montrer que  $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$ .
- d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ :  $e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$ .
- En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^3$ .

**Exercice N°4 :**

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x ; \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

a. Montrer que  $g$  est continue en  $0^+$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

b. Dresser le tableau de variation de  $g$ .

c. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  et que  $1 < \alpha < 2$ . En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

2. On considère la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^3}$ .

a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b. Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ;  $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$ . En déduire le tableau de variation de  $f$ .

3. Pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ , on pose  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

a. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$ . Calculer  $F'(x)$  et déterminer le sens de variation de  $F$ .

b. Vérifier que pour tout  $t$  de  $]1; +\infty[$ ; on a :  $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}$ .

c. En utilisant une intégration par parties, calculer  $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt$ .

d. Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $t > 0$ ;  $\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$ .

4. a. En utilisant les résultats précédents, déduire que pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ ,

$$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq F(x) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$$

b. On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$ ; Montrer que  $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \leq L \leq \frac{1}{4}$ .

c. Tracer l'allure générale de la courbe de  $F$ .

**Exercice N°5 :**

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O et de côté  $a$ , ( $a > 0$ ). I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.

b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme C en O et K en I.

c. Déterminer un angle et le centre de cette rotation.

2. Soit  $f = S_{IJ} \circ S_{JO} \circ S_{OK}$ .

a. Vérifier que  $f = r_{S_{OK}}$  et déterminer  $f(D)$ ,  $f(K)$  et  $f(O)$ .

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f$  et donner sa forme réduite.

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme B en I et L en A puis déterminer le rapport  $\lambda_1$  de  $s_1$ .

b. Soit  $\alpha$  une mesure de l'angle  $s_1$ . Montrer que  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

c. Soit P le centre de  $s_1$ . E le symétrique de C par rapport à B. Montrer que le point P est situé sur les cercles circonscrits aux triangles BEI et BAL. Préciser P et le placer sur la figure.

d. Montrer que  $(\overline{PI}; \overline{PA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . En déduire que les points A, P et E sont alignés.

4. Soit  $s_2$  la similitude directe de centre B qui transforme C en L. On note  $\beta$  une mesure de son angle.

Soit  $g = s_1 \circ s_2$ .

a. Justifier que  $g$  est une similitude directe et déterminer  $g(B)$  et  $g(C)$ .

b. Montrer que  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . En déduire que le centre Q de  $g$  est situé sur deux cercles que l'on déterminera. Placer Q sur la figure.

c. Justifier que  $g(O) = P$ . En déduire la construction de l'image du carré ABCD par  $g$ .

## Solution

**Exercice N°1 :**

On considère l'équation (E) :  $25x - 9y = 5$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

1. a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $25u + 9v = 1$ . En déduire une solution particulière  $(x_0; y_0)$  de (E) :

$$25 = 9 \times 2 + 7 ; 9 = 7 \times 1 + 2 ; 7 = 2 \times 3 + 1$$

$$\text{On a donc : } 1 = 7 - 2 \times 3 = 7 - (9 - 7) \times 3 = 4 \times 7 - 3 \times 9 = 4 \times (25 - 2 \times 9) - 3 \times 9 = 25 \times 4 - 9 \times 11$$

$$\Rightarrow 25 \times 4 + 9 \times (-11) = 1 \Rightarrow (u; v) = (4; -11).$$

$$25u + 9v = 1 \Rightarrow 25u - 9(-v) = 1 \Rightarrow 25(5u) - 9(-5v) = 5 \Rightarrow (x_0; y_0) = (5u; -5v) = (20; 55)$$

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) :

$$25x - 9y = 5$$

$$25 \times 20 - 9 \times 55 = 5$$

$$\Rightarrow 25(x - 20) - 9(y - 55) = 0 \Rightarrow 25(x - 20) = 9(y - 55) \Rightarrow 25 \mid 9(y - 55)$$

Comme 25 et 9 sont premiers entre eux alors d'après Gauss,  $25 \mid (y - 55) \Rightarrow$  il existe un entier relatif  $k$  tel que  $y - 55 = 25k \Rightarrow y = 55 + 25k$ .

$$25(x - 20) = 9(y - 55) \Rightarrow 25(x - 20) = 9 \times 25k \Rightarrow x - 20 = 9k \Rightarrow x = 20 + 9k$$

D'où  $S = \{(x = 20 + 9k; 55 + 25k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2. On désigne par  $d$  le PGCD de  $x$  et  $y$  où  $(x; y)$  est une solution particulière de (E).  
a. Quelles sont les valeurs possibles de  $d$  ?

$$d = x \wedge y \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid 25x - 9y = 5 \Rightarrow d \mid 5 \Rightarrow d \in \{1; 5\}$$

b. Quelles sont les solutions  $(x; y)$  telles que  $x$  et  $y$  soient premiers entre eux ?

$x$  et  $y$  sont premiers entre eux  $\Rightarrow d = 1 \Rightarrow x$  n'est pas divisible par 5  $\Rightarrow k$  n'est pas multiple de 5 (car  $x = 25 + 9k$ )

c. Peut-on trouver un couple  $(x; y)$  d'entiers relatifs tel que  $(x^2; y^2)$  soit solution de (E) ? Justifier votre réponse :

$$(x^2; y^2) \text{ est une solution de l'équation (E) ssi } 25x^2 - 9y^2 = 5 \Leftrightarrow (5x - 3y)(5x + 3y) = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 5x + 3y = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 5x - 3y = 5 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow 10x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{10} \Rightarrow x = 0,6 \text{ ce qui est impossible car } x \in \mathbb{Z}$$

**Exercice N°2 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (9 - i)z^2 + (28 - 5i)z - 32 + 4i$$

1. a. Calculer  $P(4)$  et déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :

$$P(z) = (z - 4)(z^2 + az + b)$$

$$P(4) = 4^3 - (9 - i)4^2 + (28 - 5i) \times 4 - 32 + 4i = 64 - 144 + 16i + 112 - 20i - 32 + 4i = 0$$

Comme  $P(4) = 0$  alors il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z - 4)(z^2 + az + b)$ .

Déterminons  $a$  et  $b$  :

|   |   |          |            |            |
|---|---|----------|------------|------------|
|   | 1 | $-9 + i$ | $28 - 5i$  | $-32 + 4i$ |
| 4 | 4 | 4        | $-20 + 4i$ | $32 - 4i$  |
|   | 1 | $-5 + i$ | $8 - i$    | 0          |

$$\Rightarrow a = -5 + i \text{ et } b = 8 - i$$

$$D'où  $P(z) = (z - 4)(z^2 + (-5 + i)z + 8 - i)$$$

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  :

$$P(z) = 0 \Rightarrow z - 4 = 0 \text{ ou } z^2 + (-5 + i)z + 8 - i = 0$$

$$\bullet z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4$$

$$\bullet z^2 + (-5 + i)z + 8 - i = 0$$

$$\Delta = (-5 + i)^2 - 4 \times 1(8 - i) = 25 - 1 - 10i - 32 + 4i = -8 - 6i = (1 - 3i)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z' = \frac{5 - i + 1 - 3i}{2} = 3 - 2i \\ z'' = \frac{5 - i - 1 + 3i}{2} = 2 + i \end{cases}$$

$$\text{Donc } S = \{4; 3 - 2i; 2 + i\}$$

2. On considère les points  $A, B$  et  $C$  images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $z_A = 4; \text{Im}(z_B) > 0$  et  $\text{Im}(z_C) < 0$ .

a. Donner l'expression complexe de la similitude directe  $s$  de centre  $C$  qui transforme  $A$  en  $B$  :

$$z_A = 4; z_B = 2 + i \text{ et } z_C = 3 - 2i$$

L'expression complexe de  $s : z' = az + b$  avec  $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$  et  $b = z_B - az_A$ .

$$a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{2 + i - 3 + 2i}{4 - 3 + 2i} = \frac{-1 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(-1 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{5 + 5i}{1 + 5} = 1 + i \text{ et } b = z_B - az_A = 2 + i - (1 + i) \times 4 = 2 + i - 4 - 4i = -2 - 3i$$

$$D'où  $z' = (1 + i)z - 2 - 3i$$$

b. Déterminer le rapport et un angle de  $s$  :

$$\text{le rapport de } s : |a| = |1 + i| = \sqrt{2} \text{ et l'angle de } s : \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

3. Pour tout nombre complexe  $z$  on pose  $Q(z) = z^2 - (5 - i)z + 8 - i$ .

On note  $\Gamma$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Q(z)$  soit imaginaire pur (ou nul) :

a. En posant  $z = x + iy$ , donner une équation cartésienne de  $\Gamma$  et montrer que  $\Gamma$  est une hyperbole de centre  $\Omega(\frac{5}{2}; \frac{1}{2})$  :

$$Q(z) = (x + iy)^2 - (5 - i)(x + iy) + 8 - i = x^2 - y^2 + 2xyi - 5x - y + (x - 5y)i + 8 - i$$

$$= x^2 - y^2 - 5x - y + 8 + (2xy + x - 5y - 1)i$$

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \text{Re}(Q(z)) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 5x - y + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} - (y + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{5}{2})^2 - (y + \frac{1}{2})^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{5}{2})^2 - (y + \frac{1}{2})^2 = -2 \Leftrightarrow -\frac{(x - \frac{5}{2})^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y + \frac{1}{2})^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

Dans le repère  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$  avec  $\Omega(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$ ;  $\Gamma$  a pour équation  $-\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ .

D'où  $\Gamma$  est une hyperbole de centre  $\Omega$ .

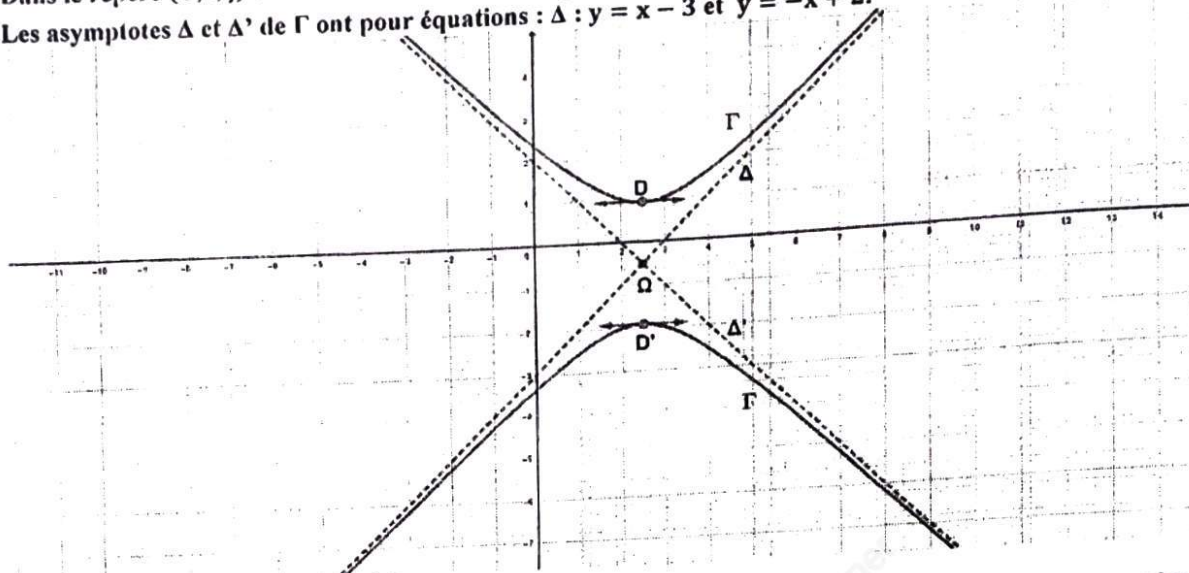
b. Préciser les sommets et les asymptotes de  $\Gamma$  puis la construire :

Dans le repère  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$  : Les sommets de  $\Gamma$  sont  $D(0; \sqrt{2})$  et  $D'(0; -\sqrt{2})$ .

Les asymptotes  $\Delta$  et  $\Delta'$  de  $\Gamma$  ont pour équations :  $\Delta : Y = X$  et  $Y = -X$ .

Dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  : Les sommets de  $\Gamma$  sont  $D(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2} + \sqrt{2})$  et  $D'(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2} - \sqrt{2})$ .

Les asymptotes  $\Delta$  et  $\Delta'$  de  $\Gamma$  ont pour équations :  $\Delta : y = x - 3$  et  $y = -x + 2$ .



**Exercice N°3 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (3 - x)e^x$ . Soit  $\Gamma$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 - 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = -\infty(+\infty) = -\infty.$$

b. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$f'(x) = -e^x + (3 - x)e^x = (-1 + 3 - x)e^x = (2 - x)e^x$$

|         |           |       |           |
|---------|-----------|-------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $2$   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $0$   |           |
| $f(x)$  |           | $e^2$ |           |

Arrows indicate the function is increasing from  $-\infty$  to  $e^2$  and then decreasing towards  $-\infty$ .

c. Tracer la courbe (C) :

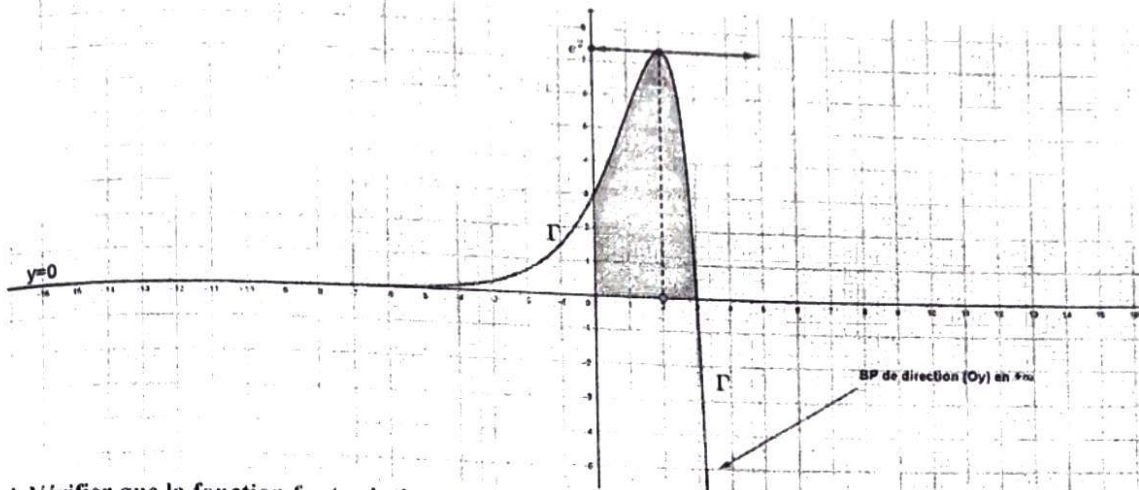
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 - x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = -\infty(+\infty) = -\infty.$$

La courbe  $\Gamma$  admet BP de direction (Oy) au voisinage de  $+\infty$ .

•  $y=0$  AV au voisinage de  $-\infty$ .

•  $f(0) = 3$  alors  $\Gamma$  coupe l'axe des ordonnées au point  $(0; 3)$ .

•  $f(x) = 0 \Rightarrow (3 - x)e^x = 0 \Rightarrow 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$ . Donc  $\Gamma$  coupe l'axe des abscisses au point  $(3; 0)$ .



d. Vérifier que la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' - y = -e^x$  et calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=3$  :

$$y' - y = (2 - x)e^x - (3 - x)e^x = (2 - x - 3 + x)e^x = -e^x.$$

Soit  $A$  l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=3$  alors :

$$A = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (f'(x) + e^x) dx = [f(x) + e^x]_0^3 = f(3) + e^3 - f(0) - 1 = (e^3 - 4) \text{ua}$$

2. On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel ;  $n \geq 1$  par :  $U_n = \frac{3^n}{n!}$ .

a. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 3$  ;  $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$  :

$$\text{On a : } \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \text{ or } n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$$

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 3$  ;  $0 \leq U_n \leq \frac{9}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

On a :  $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$ , donc :

$$0 \leq \frac{U_4}{U_3} \leq \frac{3}{4}$$

$$0 \leq \frac{U_5}{U_4} \leq \frac{3}{4}$$

$$0 \leq \frac{U_6}{U_5} \leq \frac{3}{4}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$0 \leq \frac{U_n}{U_{n-1}} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{U_n}{U_3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4+1} \Rightarrow 0 \leq \frac{U_n}{U_3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \Rightarrow 0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \Rightarrow 0 \leq U_n \leq \frac{9}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \text{ car } U_3 = \frac{9}{2}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ .

3. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  ;  $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x dx$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!}$

a. Justifier que  $I_1 = e^3 - 4$  :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x dx = \int_0^3 (3-x) e^x dx = \int_0^3 (3-x) e^x dx = \int_0^3 f(x) dx = A = e^3 - 4.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  ;  $0 \leq I_n \leq (e^3 - 1) U_n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

$$\text{On a : } 0 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 3-x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq (3-x)^n \leq 3^n \Rightarrow 0 \leq (3-x)^n e^x \leq 3^n e^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^3 (3-x)^n e^x dx \leq \int_0^3 3^n e^x dx \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^3 3^n e^x dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^3 3^n e^x dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{3^n}{n!} [e^x]_0^3 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{3^n}{n!} (e^3 - 1) \Rightarrow 0 \leq I_n \leq (e^3 - 1) U_n.$$

Donc pour tout entier naturel  $n \geq 1$  ;  $0 \leq I_n \leq (e^3 - 1) U_n$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

c. En utilisant une intégration par parties, montrer que  $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$  :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x dx \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^3 (3-x)^{n+1} e^x dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = (3-x)^{n+1} \\ v(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = -(n+1)(3-x)^n \\ v'(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \left( -(n+1) \int_0^3 (3-x)^n e^x dx + (n+1) \int_0^3 (3-x)^{n-1} e^x dx \right) \\ &= \frac{n+1}{(n+1)!} \int_0^3 (3-x)^{n-1} e^x dx - \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x dx = \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^{n-1} e^x dx - \frac{1}{n!} [(3-x)^n e^x]_0^3 \\ &= I_n - \frac{1}{n!} (3^n - 0) = I_n - \frac{3^n}{n!} = I_n - U_{n+1} \end{aligned}$$

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1 : e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$ .

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^3$  :

**Initialisation :**

Pour  $n=1 : I_1 = e^3 - 4 \Rightarrow e^3 = 4 + I_1 = 1 + 3 + I_1$

Donc la propriété est vraie pour  $n=1$ .

**Transmission :**

Montrons que si pour  $n$  donné ( $n \geq 1$ ) ;  $e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$  alors  $e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_{n+1}$  :

$$I_{n+1} = I_n - U_{n+1} = I_n - \frac{3^n}{n!} \Rightarrow I_{n+1} + \frac{3^n}{n!} = I_n \Rightarrow e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_{n+1}$$

Conclusion :  $\forall n \geq 1 : e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} \right) = e^3 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^3$ .

**Exercice N°4 :**

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x ; \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

a. Montrer que  $g$  est continue en  $0^+$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^3 - 3x^3 \ln x) = 0 = g(0)$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^3 - 3x^3 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( \frac{1}{x^3} + 1 - 3 \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^3} + 1 - 3 \ln x \right) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$ .

b. Dresser le tableau de variation de  $g$  :

$g'(x) = 3x^2 - 3 \left( 3x^2 \ln x + \frac{x^3}{x} \right) = 3x^2 - 3(3x^2 \ln x + x^2) = -9x^2 \ln x$

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $-9x^2$ | 0 | - | -         |
| $\ln x$ |   | - | 0         |
| $g'(x)$ | 0 | + | 0         |

D'où le tableau de variation de  $g$  :

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | 0 | + | 0         |
| $g(x)$  | 1 | 2 | $-\infty$ |

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 = g'_d(0)$ .

c. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  et que  $1 < \alpha < 2$ . En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$  :

La fonction  $g$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

•  $g(]0; 1]) = [0; 2]$ . Donc l'équation  $g(x) = 0$  n'admet pas de solution dans  $]0; 1]$ .

•  $g(]1; +\infty[) = ]-\infty; 2]$ . Donc l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]1; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .

D'où l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .

Comme  $g(1) > 0$  et  $g(2) = 9 - 24 \ln 2 < 0$  alors d'après le théorème de la valeur intermédiaire  $1 < \alpha < 2$ .

D'où le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$  :

|        |   |          |           |
|--------|---|----------|-----------|
| $x$    | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | + | 0        | -         |

2. On considère la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^3}$ .

a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^3} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty \times (-\infty) = -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$ .

b. Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ;  $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$ . En déduire le tableau de variation de  $f$  :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^3) - 3x^2 \ln x}{(1+x^3)^2} = \frac{1+x^3 - 3x^3 \ln x}{x(1+x^3)^2} = \frac{1+x^3 - 3x^3 \ln x}{x(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$ .

D'où le tableau de variation de  $f$ .

|         |   |     |           |
|---------|---|-----|-----------|
| $x$     | 0 | $a$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +   | 0 -       |
| $f(x)$  |   |     |           |

$-\infty$  ↗ 2 ↘  $0$

3. Pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ , on pose  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

a. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$ . Calculer  $F'(x)$  et déterminer le sens de variation de  $F$  :

Comme la fonction  $f$  une fonction continue sur  $[1; +\infty[$  et  $x$  et  $1 \in [1; +\infty[$ , alors la fonction  $F$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$  et  $F'(x) = f(x)$ . Le signe de  $F'(x)$  est celui de  $f(x)$ .

D'où le signe de  $f(x)$  sur  $]0; +\infty[$ :

|        |   |   |           |
|--------|---|---|-----------|
| $x$    | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f(x)$ |   | - | 0 +       |

D'où le sens de variation de  $F$  :

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 1 | $+\infty$ |
| $F'(x)$ | 0 | +         |
| $F(x)$  |   |           |

$0$  ↗

b. Vérifier que pour tout  $t$  de  $[1; +\infty[$  ; on a :  $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}$  :

Pour  $t \geq 1$  on a :  $1 \leq t^3 \leq 1 + t^3 \leq (1+t)^3$  (car  $(1+t)^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1 \geq t^3$ )  
 $\Rightarrow \frac{1}{(1+t)^3} \leq \frac{1}{1+t^3} \leq \frac{1}{t^3} \Rightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq \frac{\ln t}{1+t^3} \leq \frac{\ln t}{t^3}$  (car  $\ln t \geq 0$  puisque  $t \geq 1$ )  $\Rightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}$

c. En utilisant une intégration par parties, calculer  $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt$  :

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t^3} \\ v(t) = \ln t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{-1}{2t^2} \\ v'(x) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt = \left[ \frac{-\ln t}{2t^2} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{2t^2} \times \frac{1}{t} dt = \frac{-\ln x}{2x^2} + \int_1^x \frac{1}{2t^3} dt = \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4} \left[ \frac{-1}{t^2} \right]_1^x = \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}$$

d. Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $t > 0$  ;  $\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$  :

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2} = \frac{a + at + bt}{t(1+t)} + \frac{c}{(1+t)^2} = \frac{a + at + at + bt + bt + ct}{t(1+t)^2} = \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{t(1+t)^2}$$

Par identification des coefficients on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

D'où  $\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}$

4. a. En utilisant les résultats précédents, déduire que pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ ,

$$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq F(x) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$$

$$\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3} \Rightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt \Rightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3} \Rightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3} \Rightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq F(x) \leq \frac{\ln t}{t^3}$$

On pose  $J = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt$ . Calculons  $J$  :

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{(1+t)^3} \\ v(t) = \ln t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{-1}{2(1+t)^2} \\ v'(x) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = \left[ \frac{-\ln t}{2(1+t)^2} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{2(1+t)^2} \times \frac{1}{t} dt = \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{1}{t(1+t)^2} dt = \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \int_1^x \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \left[ \ln t - \ln(1+t) + \frac{1}{1+t} \right]_1^x = \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{x}{1+t} \right) + \frac{1}{1+t} \right]_1^x$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{x}{1+x} \right) + \frac{1}{1+x} - \ln \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right) = \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x}{1+x} \right) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) + \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{4} = \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1-2\ln 2}{4}$$

Classes des 7<sup>es</sup>C

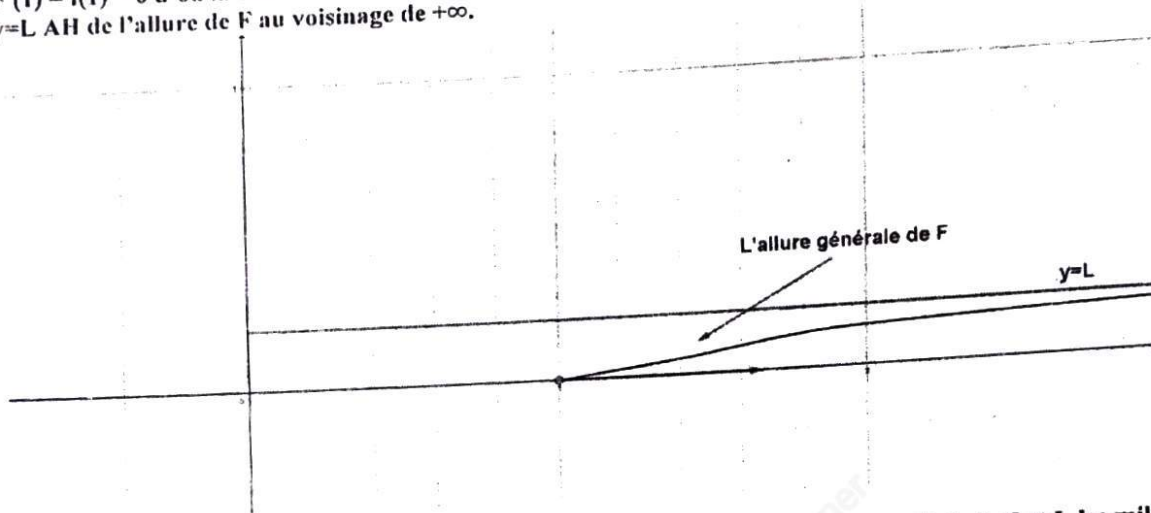
Comme  $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq F(x) \leq \frac{\ln t}{t^3}$  alors  $\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq F(x) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$  :

b. On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$ ; Montrer que  $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \leq L \leq \frac{1}{4}$  :

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \right) = -\frac{1-2\ln 2}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} \right) = \frac{1}{4}$  alors  $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \leq L \leq \frac{1}{4}$

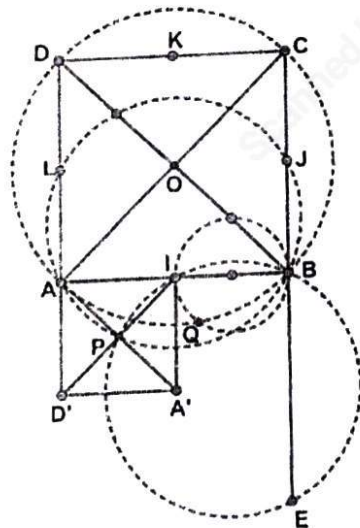
c. Tracer l'allure générale de la courbe de F :  
 $F'(1) = f(1) = 0$  d'où la courbe l'allure de F admet en  $1^+$  une demi tangente verticale.  
 $y=L$  AH de l'allure de F au voisinage de  $+\infty$ .



**Exercice N°5 :**

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O et de côté a, ( $a > 0$ ). I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure :



b. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme C en O et K en I :

On a  $CK=OI = \frac{a}{2} \neq 0$  et  $\overline{CK} \neq \overline{OI}$ , donc il existe une unique rotation r :  $\begin{cases} C \rightarrow O \\ K \rightarrow I \end{cases}$

c. Déterminer un angle et le centre de cette rotation :

- Un angle de r :  $(\overline{CK}; \overline{OI}) = (\overline{CD}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- Le centre de r est J car  $\text{med}[CO] \cap \text{med}[KI] = \{J\}$ .

Donc  $r = r_{(J; \frac{\pi}{2})}$

2. Soit  $f = S_{IJ} \circ S_{JO} \circ S_{OK}$ .

a. Vérifier que  $f = r \circ S_{OK}$  et déterminer f(D), f(K) et f(O) :

On a d'une part  $(IJ) \cap (JO) = \{J\}$  et d'autre part  $2(\overline{JO}; \overline{JI}) = 2 \times \frac{\pi}{4} [2\pi] = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  alors  $S_{IJ} \circ S_{JO} = r$ . Donc  $f = r \circ S_{OK}$

$f(D) = r_{O,K}(D) = r(C) = O$ ;  $f(K) = r_{O,K}(K) = r(K) = I$  et  $f(O) = r_{O,K}(O) = r(O) = B$ .  
 b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f$  et donner sa forme réduite :  
 $f$  est la composée de trois antiténements alors c'est un antiténement. Comme  $f(O)=B \neq O$  alors  $f$  n'est pas symétrie axiale.  
 •  $f(D) = O \Rightarrow$  Milieu de  $[OD]$  appartient à l'axe  $\Delta$  de  $f$ ;  $f(O) = B \Rightarrow$  Milieu de  $[OD]$  appartient à l'axe  $\Delta$  de  $f$ . Donc  $\Delta = (BD)$   
 •  $f(O)=B$  alors le vecteur  $\vec{u}$  de  $f$  est tel que  $2\vec{u} = \vec{DB} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{DB} = \vec{OB}$   
 Conclusion :  $f = S_{BD} \circ t_{\vec{OB}} = t_{\vec{OB}} \circ S_{BD}$

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme  $B$  en  $I$  et  $L$  en  $A$  puis déterminer le rapport  $\lambda_1$  de  $s_1$ .  
 On a :  $B \neq L$  et  $I \neq A$ , donc il existe une unique similitude directe  $s_1 : \begin{cases} B \rightarrow I \\ L \rightarrow A \end{cases}$   
 $\lambda_1 = \frac{IA}{BL} = \frac{\frac{AB}{2}}{\sqrt{AB^2 + AL^2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b. Soit  $\alpha$  une mesure de l'angle  $s_1$ . Montrer que  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  :  
 $\alpha = (\overline{BL}; \overline{IA}) = (\overline{BL}; \overline{BA}) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AB}{BL} = \frac{a}{\sqrt{AB^2 + AL^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

c. Soit  $P$  le centre de  $s_1$ .  $E$  le symétrique de  $C$  par rapport à  $B$ . Montrer que le point  $P$  est situé sur les cercles circonscrits aux triangles  $BEI$  et  $BAL$ . Préciser  $P$  et le placer sur la figure :

$(\overline{EB}; \overline{EI}) = -S_{AB}((\overline{EB}; \overline{EI})) = -(\overline{CB}; \overline{CI}) = (\overline{CI}; \overline{CB})$  or  $r_{(O; \frac{\pi}{2})} : (\overline{CI}; \overline{CB}) \rightarrow (\overline{BL}; \overline{BA})$   
 $\Rightarrow (\overline{EB}; \overline{EI}) = (\overline{CI}; \overline{CB}) = (\overline{BL}; \overline{BA}) = (\overline{BL}; \overline{IA}) = \alpha = (\overline{PB}; \overline{PI})$  car  $s_1 : \begin{cases} P \rightarrow P \\ B \rightarrow I \end{cases} \Rightarrow$  les points  $P, B, E$  et  $I$  sont cocycliques.

D'où  $P$  est situé sur le cercle circonscrit au triangle  $BEI$ .

$s_1 : \begin{cases} P \rightarrow P \\ L \rightarrow A \end{cases} \Rightarrow \alpha = (\overline{PI}; \overline{PA}) \Rightarrow (\overline{PL}; \overline{PA}) = (\overline{BL}; \overline{IA}) = (\overline{BL}; \overline{BA}) \Rightarrow$  les points  $P, B, A$  et  $L$  sont cocycliques.

D'où  $P$  est situé sur le cercle circonscrit au triangle  $BAL$ .

Conclusion :  $P$  est situé sur les cercles circonscrits aux triangles  $BEI$  et  $BAL$  avec  $P \neq B$  car  $s_1(B) \neq B$ .

d. Montrer que  $(\overline{PI}; \overline{PA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . En déduire que les points  $A, P$  et  $E$  sont alignés.

$s_1 : (\overline{PB}; \overline{PL}) \rightarrow (\overline{PI}; \overline{PA}) \Rightarrow (\overline{PI}; \overline{PA}) = (\overline{PB}; \overline{PL})$  car la similitude directe conserve les angles orientés.

Or  $(\overline{PB}; \overline{PL}) = (\overline{AB}; \overline{AI}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overline{PI}; \overline{PA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

$(\overline{PE}; \overline{PA}) = (\overline{PE}; \overline{PI}) + (\overline{PI}; \overline{PA}) = (\overline{BE}; \overline{BI}) + (\overline{PI}; \overline{PA}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} [\pi] = 0[\pi]$ .

Donc les points  $A, P$  et  $E$  sont alignés.

4. Soit  $s_2$  la similitude directe de centre  $B$  qui transforme  $C$  en  $L$ . On note  $\beta$  une mesure de son angle.

Soit  $g = s_1 \circ s_2$ .

a. Justifier que  $g$  est une similitude directe et déterminer  $g(B)$  et  $g(C)$  :

$g$  est une similitude directe car c'est la composée de deux similitudes directes.

$g(B) = s_1 \circ s_2(B) = s_1(B) = I$  et  $g(C) = s_1 \circ s_2(C) = s_1(L) = A$ .

b. Montrer que  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . En déduire que le centre  $Q$  de  $g$  est situé sur deux cercles que l'on déterminera. Placer  $Q$  sur la figure :

$\alpha + \beta = \beta + \alpha = (\overline{BC}; \overline{BL}) + (\overline{BL}; \overline{IA})$  car  $s_1 : \begin{cases} B \rightarrow I \\ L \rightarrow A \end{cases}$  c'est-à-dire  $\alpha = (\overline{BL}; \overline{IA})$  et  $s_2 : \begin{cases} B \rightarrow B \\ C \rightarrow L \end{cases}$  c'est-à-dire  $\beta = (\overline{BC}; \overline{BL})$   
 $\Rightarrow \alpha + \beta = (\overline{BC}; \overline{BI}) + (\overline{BL}; \overline{IA}) = (\overline{BC}; \overline{IA}) = (\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

On a  $g : \begin{cases} Q \rightarrow Q \\ B \rightarrow I \\ C \rightarrow A \end{cases}$

or l'angle de  $g$  est égal à  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overline{QB}; \overline{QI}) = \frac{\pi}{2}$  et  $(\overline{QC}; \overline{QA}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Q \in C_{[BI]}$  et  $Q \in C_{[CA]} \Rightarrow Q \in C_{[BI]} \cap C_{[CA]}$

c. Justifier que  $g(O) = P$ . En déduire la construction de l'image du carré  $ABCD$  par  $g$  :

Soit  $g(O) = O'$ .  $g : \begin{cases} O \rightarrow O' \\ B \rightarrow I \\ C \rightarrow A \end{cases}$  Comme le triangle  $BCO$  est isocèle rectangle en  $O$  alors  $IAO'$  est isocèle rectangle en  $O'$  alors

$O' = P$ , car  $IAP$  est isocèle rectangle en  $P$ . Donc  $g(O) = P$ .

Construction de l'image du carré  $ABCD$  par  $g$  :

On a déjà  $g : \begin{cases} B \rightarrow I \\ C \rightarrow A \end{cases}$

$O = B * D \Rightarrow g(O) = g(B) * g(D) \Rightarrow P = I * g(D) \Rightarrow D' = g(D)$  est le symétrique de  $I$  par rapport à  $P$ .

$O = A * C \Rightarrow g(O) = g(A) * g(C) \Rightarrow P = g(A) * A \Rightarrow A' = g(A)$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $P$ .

Donc  $g : ABCD \rightarrow A'IA'D'$ .

# Bac 2013 session complémentaire

## Énoncé

Exercice N°1 :

Soit la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$ . Le paramètre  $n$  est un entier naturel. Soit  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$ .
- b. Montrer que l'équation  $f_0(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $U_0$  et que  $U_0 \in ]-1; 0[$ .
- c. Tracer  $(C_0)$ .
2. a. Montrer que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par un point fixe  $A$  que l'on déterminera.
- b. Étudier les positions relatives des courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$ .
3. a. Prouver que pour tout entier naturel, l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une unique solution  $U_n$  et que  $U_n \in ]-1; 0[$ .
- b. On considère la suite de terme général  $U_n$ . Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

Exercice N°2 :

Pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  on pose :  $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 + (-5 + 18i)z + 18 - 12i$ .

1. a. Calculer  $P(2)$  et  $P(3i)$ .
- b. En déduire les nombres complexes  $z_1; z_2$  et  $z_3$  solutions de l'équation  $P(z)=0$  tels que  $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3|$ .
2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_1; z_2$  et  $z_3$  et le point  $G$  barycentre du système  $\{(A; 1), (B; -3), (C; 4)\}$ .

Pour tout point  $M$  du plan on pose :  $\varphi_1(M) = MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2$  et  $\varphi_2(M) = 4MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2$ .

- a. Vérifier que l'affixe du point  $G$  est  $z_G = 5 + \frac{3}{2}i$ .
- b. Donner une forme réduite de  $\varphi_1(M)$  et  $\varphi_2(M)$ .
- c. Déterminer et construire les ensembles :  $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \varphi_1(M) = -3$  et  $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \varphi_2(M) = -44$ .

Exercice N°3 :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 - \ln x}; x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$$

1. a. Montrer que  $f$  est continue en  $0^+$
- b. Étudier la dérivabilité de  $f$  en zéro à droite et interpréter graphiquement.
- c. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Interpréter graphiquement.
2. a. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- b. Donner l'équation de la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse 1.
- c. Tracer la courbe de  $f$ .
3. On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(t) = tf(t)$ . Pour tout  $x \in [1; +\infty[$ , on pose  $F(x) = \int_1^x g(t) dt = \int_1^x tf(t) dt$ .
- a. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$ . Calculer  $F'(x)$  et montrer que  $F$  est croissante.
- b. Vérifier que pour tout  $t$  de  $[1; +\infty[$ ;  $g(t) \geq \frac{2\ln t}{t}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .
- c. Dresser le tableau de variation de  $F$ .

Exercice N°4 :

Dans le plan orienté, on considère un losange direct  $ABCD$  de centre et de côté  $a$ , ( $a > 0$ ) tel que  $(\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

On considère les deux points  $E$  et  $F$  tels que  $OEFD$  soit un carré direct.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure (On pourra prendre  $(AC)$  horizontale).
2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $D$  en  $A$ .
- b. Préciser un angle et le centre de cette rotation.
3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s$  qui transforme  $B$  en  $D$  et  $D$  en  $F$ .
- b. Déterminer le rapport et un angle de  $s$ .
- c. Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(BF)$ . Déterminer les images des droites  $(BH)$  et  $(DH)$  par  $s$ . En déduire que  $H$  est le centre de  $s$ .
- d. Préciser et placer sur la figure les images des sommets du carré  $OEFD$  par la similitude  $s$ .  $O = B * D \Rightarrow$
4. On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(O; \overline{OE}; \overline{OD})$ .
- a. Déterminer les coordonnées des points  $E; D; B$  et  $F$  dans ce repère.
- b. Donner l'expression complexe de la similitude  $s$ .
- c. En utilisant 3.a) retrouver le rapport et l'angle de  $s$  et calculer les coordonnées de  $H$  dans le repère précédent.

Exercice N°5 :

Soit  $f$  la fonction de variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ . Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Vérifier que pour tout réel  $x$  on a :  $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x+1}$  et  $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x+1}$   
 b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et interpréter graphiquement.
2. a. Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
 b. Tracer (C) dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  
 c. Soit  $a$  un réel strictement supérieur à 1. Calculer en fonction de  $a$ , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = \ln a$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $I_n = \int_0^{\ln a} (f(t))^n dt$ .  
 a. Vérifier que  $I_1 = 2 \ln \left( \frac{a+1}{2\sqrt{a}} \right)$ .  
 b. Vérifier que pour tout réel  $x$  :  $f^2(x) = 1 - 2f'(x)$ . En déduire la valeur de  $I_2$ .  
 c. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 \leq I_n \leq \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^n \ln a$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .  
 d. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $I_n - I_{n+2} = \frac{2}{n+1} \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^{n+1}$
4. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose  $S_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^k$   
 a. Ecrire  $S_n(a)$  en fonction de certains termes de la suite  $(I_n)$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(a)$ .  
 b. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose :  $T_n = \frac{9}{11} + \frac{1}{2} \left( \frac{9}{11} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{9}{11} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left( \frac{9}{11} \right)^n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \frac{9}{11} \right)^k$   
 Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ .

## Solution

### Exercice N°1 :

Soit la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$ . Le paramètre  $n$  est un entier naturel.

Soit  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$f'_0(x) = 3x^2 + 4 > 0 \Rightarrow f_0$  est strictement croissante.

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| x         | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'_0(x)$ | +         |           |
| $f_0(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

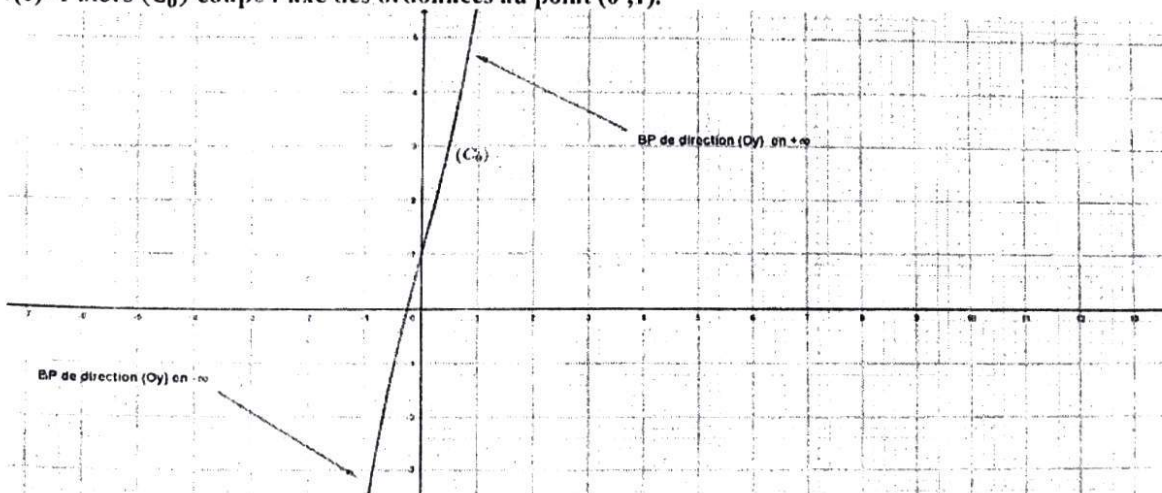
b. Montrer que l'équation  $f_0(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $U_0$  et que  $U_0 \in ]-1; 0[$  :

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et strictement croissante. Comme  $f_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  alors l'équation  $f_0(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $U_0$ .  
 $f_0(-1) = -4 < 0$  et  $f_0(0) = 1 > 0$  alors d'après la propriété de la valeur intermédiaire  $U_0 \in ]-1; 0[$ .

c. Tracer  $(C_0)$  :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x + 1}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty. \text{ Donc } (C_0) \text{ admet BP e direction } (Oy) \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty.$$

$f_0(0) = 1$  alors  $(C_0)$  coupe l'axe des ordonnées au point  $(0; 1)$ .



2. a. Montrer que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par un point fixe A que l'on déterminera :

$$f_{n-1}(x) = f_n(x) \Rightarrow x^3 + 2(n+3)x + 1 = x^3 + 2(n+2)x + 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Comme  $f_n(0) = 1$  alors toutes les courbes  $(C_n)$  passent par un point fixe  $A(0;1)$ .

b. Etudier les positions relatives des courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$  :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^3 + 2(n+3)x + 1 - (x^3 + 2(n+2)x + 1) = 2x.$$

|                       |                        |                        |                        |
|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $x$                   | $-\infty$              | $0$                    | $+\infty$              |
| $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ | $-$                    | $0$                    | $+$                    |
| P. relative           | $(C_n)$<br>$(C_{n+1})$ | $(C_n) \cap (C_{n+1})$ | $(C_{n+1})$<br>$(C_n)$ |

3. a. Prouver que pour tout entier naturel, l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une unique solution  $U_n$  et que  $U_n \in ]-1; 0[$  :

$f'_n(x) = 3x^2 + 2(n+2) > 0 \Rightarrow f_n$  est strictement croissante.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2(n+2)x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2(n+2)x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'_n(x)$ | $+$       |           |
| $f_n(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

$f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et strictement croissante. Comme  $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  alors l'équation  $f_n(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $U_n$ .

$f_n(-1) = -2(n+2) < 0$  et  $f_n(0) = 1 > 0$  alors d'après la propriété de la valeur intermédiaire  $U_n \in ]-1; 0[$ .

b. On considère la suite de terme général  $U_n$ . Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissante. En déduire qu'elle est convergente :

$\forall x \in ]-1; 0[$ , on a :  $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$  ; or  $U_n \in ]-1; 0[ \Rightarrow f_{n+1}(U_n) - f_n(U_n) < 0 \Rightarrow f_{n+1}(U_n) < 0$  car  $f_n(U_n) = 0$

$\Rightarrow f_{n+1}(U_n) < 0 = f_{n+1}(U_{n+1}) \Rightarrow f_{n+1}(U_n) < f_{n+1}(U_{n+1}) \Rightarrow U_n < U_{n+1}$  car  $f$  est strictement croissante.

De plus  $(U_n)$  est majorée par 0 car  $U_n < 0$ .

Donc  $(U_n)$  est convergente car elle est croissante et majorée.

Exercice N°2 :

Pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  on pose :  $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 + (-5 + 18i)z + 18 - 12i$ .

1. a. Calculer  $P(2)$  et  $P(3i)$  :

$$P(2) = 2^3 - (4 + 6i)2^2 + (-5 + 18i) \times 2 + 18 - 12i = 8 - 16 - 24i - 10 + 36i + 18 - 12i = 0.$$

$$P(3i) = (3i)^3 - (4 + 6i)(3i)^2 + (-5 + 18i) \times (3i) + 18 - 12i = -27i + 36 + 54i - 15i - 54 + 18 - 12i = 0.$$

b. En déduire les nombres complexes  $z_1$  ;  $z_2$  et  $z_3$  solutions de l'équation  $P(z)=0$  tels que  $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3|$  :

Comme  $P(2)$  et  $P(3i)$  alors  $P(z) = (z-2)(z-3i)(z-a) \Rightarrow 6ia = 18 - 12i \Rightarrow a = 2 + 3i$

$$\Rightarrow P(z) = (z-2)(z-3i)(z-(2+3i))$$

$$P(z)=0 \Rightarrow (z-2)(z-3i)(z-(2+3i)) = 0 \Rightarrow z-2 = 0 \text{ ou } z-3i = 0 \text{ ou } z-(2+3i) = 0$$

$$\Rightarrow z = 2 \text{ ou } z = 3i \text{ ou } z = 2 + 3i.$$

$$|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \Leftrightarrow z_A = 2 ; z_B = 3i \text{ et } z_C = 2 + 3i.$$

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les A, B et C d'affixes respectives  $z_1$  ;  $z_2$  et  $z_3$  et le point G barycentre du système  $\{(A; 1), (B; -3), (C; 4)\}$ .

Pour tout point M du plan on pose :  $\varphi_1(M) = MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2$  et  $\varphi_2(M) = 4MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2$ .

a. Vérifier que l'affixe du point G est  $z_G = 5 + \frac{3}{2}i$  :

$$z_G = \frac{z_A - 3z_B + 4z_C}{2} = \frac{2 - 3(3i) + 4(2+3i)}{2} = \frac{2 - 9i + 8 + 12i}{2} = \frac{10 + 3i}{2} = 5 + \frac{3}{2}i.$$

b. Donner une forme réduite de  $\varphi_1(M)$  et  $\varphi_2(M)$  :

$$\varphi_1(M) = MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = 2MG^2 + GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2$$

$$GA^2 = |z_A - z_G|^2 = \left| 2 - 5 - \frac{3}{2}i \right|^2 = \left| -3 - \frac{3}{2}i \right|^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}$$

$$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = \left| 3i - 5 - \frac{3}{2}i \right|^2 = \left| -5 + \frac{3}{2}i \right|^2 = 25 + \frac{9}{4} = \frac{109}{4}$$

$$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = \left| 2 + 3i - 5 - \frac{3}{2}i \right|^2 = \left| -3 + \frac{3}{2}i \right|^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}$$

$$\Rightarrow \varphi_1(M) = 2MG^2 + GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2 = 2MG^2 + \frac{45}{4} - 3 \times \frac{109}{4} + 4 \times \frac{45}{4} = 2MG^2 - \frac{102}{4} = 2MG^2 - \frac{51}{2}.$$

D'où une forme réduite de  $\varphi_1(M)$  :  $\varphi_1(M) = 2MG^2 - \frac{51}{2}$ .

$$\varphi_2(M) = 4MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2 = 2\overline{MA} \times (2\overline{AB} - 2\overline{AC}) - 2AB^2 - 2AC^2$$

Soit  $J = B^*C$ .

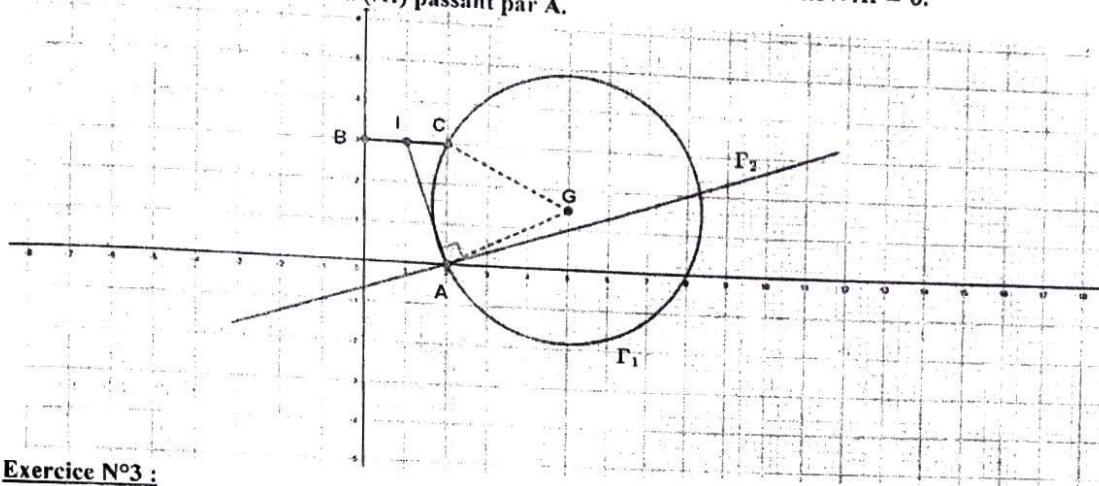
$$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |3i - 2|^2 = 4 + 9 = 13 \text{ et } AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |2 + 3i - 2|^2 = 9$$

$$\Rightarrow -2AB^2 - 2AC^2 = -2 \times 13 - 2 \times 9 = -26 - 18 = -44$$

$$\Rightarrow \varphi_2(M) = 2\overline{MA} \times (2\overline{AB} - 2\overline{AC}) - 2AB^2 - 2AC^2 = 2\overline{MA} \times 2\overline{AJ} - 44 = 4\overline{MA} \times \overline{AJ} - 44.$$

D'où une forme réduite de  $\varphi_2(M)$  :  $\varphi_2(M) = 4\overline{MA} \times \overline{AJ} - 44$ .

- c. Déterminer et construire les ensembles :  $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \varphi_1(M) = -3$  et  $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \varphi_2(M) = -44$  :
- $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \varphi_1(M) = -3 \Leftrightarrow 2MG^2 - \frac{51}{2} = -3 \Leftrightarrow 2MG^2 = -3 + \frac{51}{2} \Leftrightarrow 2MG^2 = \frac{45}{2} \Leftrightarrow MG^2 = \frac{45}{4} \Leftrightarrow MG = \frac{\sqrt{45}}{2}$
  - D'où  $\Gamma_1 = C(G; \frac{\sqrt{45}}{2})$  or  $AG^2 = CG^2 = \frac{45}{4}$ . Donc  $\Gamma_1$  est le cercle de centre G passant par A et C.
  - $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \varphi_2(M) = -44 \Leftrightarrow 4\overline{MA} \times \overline{AI} - 44 = -44 \Leftrightarrow 4\overline{MA} \times \overline{AI} = 0 \Leftrightarrow \overline{MA} \times \overline{AI} = 0$ .
  - Donc  $\Gamma_2$  est la perpendiculaire à (AI) passant par A.



**Exercice N°3 :**

On considère la fonction f définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $\begin{cases} f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 - \ln x}; x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$

1. a. Montrer que f est continue en  $0^+$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\ln x}{x^2 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\ln x}{\ln x \left( x^2 \times \frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2 \times \frac{1}{\ln x} - 1} = \frac{2}{0 \times 0 - 1} = -2 = f(0).$$

D'où f est continue en  $0^+$ .

b. Etudier la dérivabilité de f en zéro à droite et interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2\ln x}{x^2 - \ln x} + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{x^3 - x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x^2 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x - \frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{+\infty} = 0 = f'_d(0).$$

Donc f est dérivable à droite de 0. La courbe (C) de f admet au point d'abscisse 0 une demi tangente horizontale.

c. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x^2 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x^2 \left( 1 - \frac{\ln x}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x^2}} = 2 \times 0 \times 1 = 0.$$

$y=0$  All de (C) au voisinage de  $+\infty$ .

2. a. Dresser le tableau de variation de f :

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2 - \ln x) - 2\left(2x - \frac{1}{x}\right)\ln x}{(x^2 - \ln x)^2} = \frac{2x - \frac{2\ln x}{x} - 4x \ln x + \frac{2\ln x}{x}}{(x^2 - \ln x)^2} = \frac{2x(1 - 2\ln x)}{(x^2 - \ln x)^2}$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1 - 2\ln x$ .

$$1 - 2\ln x = 0 \Rightarrow 2\ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

D'où le tableau de variation de f :

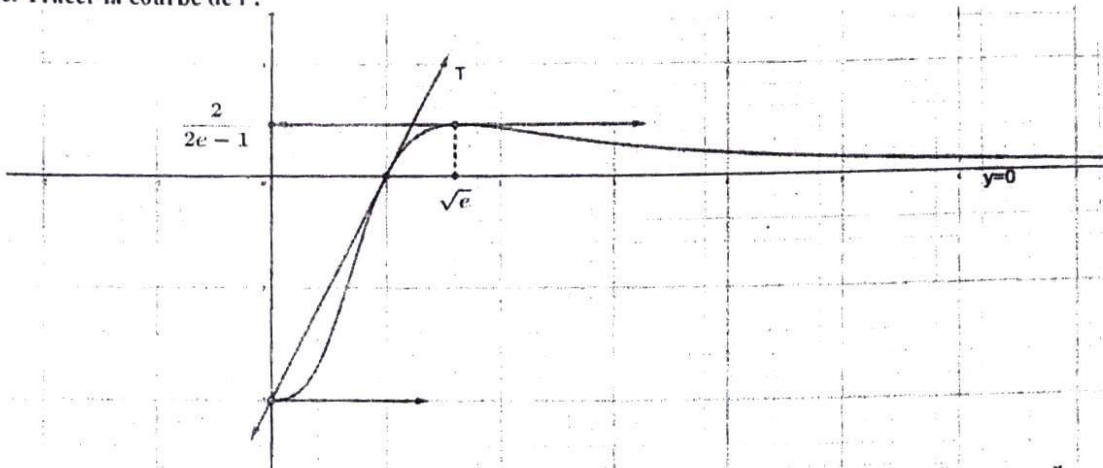
|           |    |                  |           |
|-----------|----|------------------|-----------|
| x         | 0  | $\sqrt{e}$       | $+\infty$ |
| $f'_n(x)$ | 0  | +                | -         |
| $f_n(x)$  | -2 | $\frac{2}{2e-1}$ | 0         |

b. Donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 :

$$T: y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 2 = 2x - 2 \text{ car } f'(1) = 2.$$

D'où T :  $y = 2x - 2$ .

c. Tracer la courbe de f :



3. On considère la fonction g définie par :  $g(t)=tf(t)$ . Pour tout  $x \in [1; +\infty[$ , on pose  $F(x)=\int_1^x g(t)dt=\int_1^x tf(t)dt$ .

a. Montrer que F est dérivable sur  $[1; +\infty[$ . Calculer  $F'(x)$  et montrer que F est croissante :

La fonction g est continue sur  $[1; +\infty[$  car elle est le produit de deux fonctions continue sur  $[1; +\infty[$ . D'où F est dérivable sur  $[1; +\infty[$ .

$$F'(x) = g(x) = xf(x) = \frac{2x \ln x}{x^2 - \ln x}$$

Comme  $x \geq 1$  alors  $f(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0 \Rightarrow F'(x) \geq 0$ . Donc f est croissante.

b. Vérifier que pour tout t de  $[1; +\infty[$ ;  $g(t) \geq \frac{2 \ln t}{t}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$  :

$$g(t) - \frac{2 \ln t}{t} = \frac{2t \ln t}{t^2 - \ln t} - \frac{2 \ln t}{t} = \frac{2t^2 \ln t - 2t^2 \ln t + 2 \ln^2 t}{t(t^2 - \ln t)} = \frac{2 \ln^2 t}{t(t^2 - \ln t)} = \frac{\ln t}{t} \times \frac{2 \ln t}{t^2 - \ln t} = \frac{\ln t}{t} \times f(t) \geq 0$$

Donc pour tout t de  $[1; +\infty[$ ;  $g(t) \geq \frac{2 \ln t}{t}$ .

$$g(t) \geq \frac{2 \ln t}{t} \Rightarrow tg(t) \geq 2 \ln t \Rightarrow \int_1^x g(t)dt \geq \int_1^x 2 \ln t dt \Rightarrow \int_1^x g(t)dt \geq 2 \int_1^x \ln t dt = 2 [t \ln t - t]_1^x \Rightarrow \int_1^x g(t)dt \geq 2(x \ln x - x + 1)$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2(x \ln x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left( \ln x - 1 + \frac{1}{x} \right) = 2 \times (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$  alors d'après le théorème de comparaison  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .

c. Dresser le tableau de variation de F :

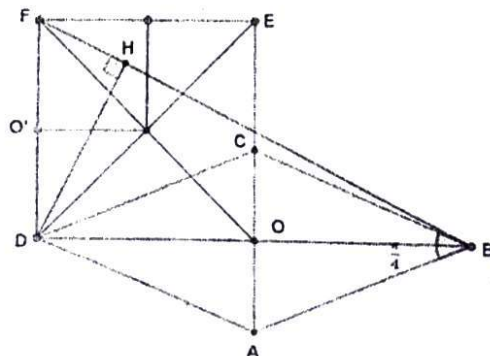
|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| x         | 1 | $+\infty$ |
| $F'_n(x)$ |   | +         |
| $F_n(x)$  |   | $+\infty$ |
|           | 0 |           |

Exercice N°4 :

Dans le plan orienté, on considère un losange direct ABCD de centre et de côté a, ( $a > 0$ ) tel que  $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

On considère les deux points E et F tels que OEFD soit un carré direct.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complètera au fur et à mesure (On pourra prendre (AC) horizontale) :



2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $D$  en  $A$  :

Comme  $AD=AB=a \neq 0$  et  $\overline{AD} \neq \overline{BA}$ , alors il existe une unique rotation  $r : \begin{cases} A \rightarrow B \\ D \rightarrow A \end{cases}$

b. Préciser un angle et le centre de cette rotation :

• Un angle de  $r : (\overline{AD}; \overline{BA}) = (\overline{AD}; \overline{AB}) + \pi = 2(\overline{AC}; \overline{AB}) + \pi = -\pi - (\overline{BA}; \overline{BC}) + \pi = (\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

• Le centre de  $r$  est  $E$  car  $\text{med}[AB] \cap \text{med}[AD] = \{E\}$ .

Justification :

On a d'une part :  $(\overline{AE}; \overline{AD}) = (\overline{AC}; \overline{AD}) = \frac{\pi - (\overline{DA}; \overline{DC})}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$ .

D'autre part :  $(\overline{DA}; \overline{DE}) = (\overline{DA}; \overline{DO}) + (\overline{DO}; \overline{DE}) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$

$\Rightarrow (\overline{AE}; \overline{AD}) = (\overline{DA}; \overline{DE}) \Rightarrow \triangle ADE$  est isocèle en  $E \Rightarrow EA = ED$ . Donc  $E \in \text{med}[AD]$ .

On a  $S_{AC} : \begin{cases} A \rightarrow A \\ E \rightarrow E \\ D \rightarrow B \end{cases}$  et comme  $AD \neq DE$  est isocèle en  $E$  alors  $ABE$  est isocèle en  $E \Rightarrow EA = EB$ . Donc  $E \in \text{med}[AB]$ .

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s$  qui transforme  $B$  en  $D$  et  $D$  en  $F$  :

On a :  $B \neq D$  et  $D \neq F$ , donc il existe une unique similitude directe  $s : \begin{cases} B \rightarrow D \\ D \rightarrow F \end{cases}$

b. Déterminer le rapport et un angle de  $s$  :

• Le rapport de  $s : \frac{DF}{BD} = \frac{DO}{2DO} = \frac{1}{2}$ .

• Un angle de  $r : (\overline{BD}; \overline{DF}) = (\overline{DB}; \overline{DF}) - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

c. Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(BF)$ . Déterminer les images des droites  $(BH)$  et  $(DH)$  par  $s$ .  
En déduire que  $H$  est le centre de  $s$  :

•  $S(BH)$  est la perpendiculaire à  $(BH)$  passant par  $D \Rightarrow S(BH) = (DH)$ .

•  $S(DH)$  est la perpendiculaire à  $(DH)$  passant par  $F \Rightarrow S(DH) = (FH)$ .

$H = (BH) \cap (DH) \Rightarrow s(H) = s((BH) \cap (DH)) = (DH) \cap (DF) = H$ . Donc  $H$  est le centre de  $s$ .

d. Préciser et placer sur la figure les images des sommets du carré  $OEFD$  par la similitude  $s$  :

$O = B^*D \Rightarrow s(O) = s(B)^*s(D) \Rightarrow O' = D^*F$

$DOEF$  est un carré direct alors  $FO^*s(E)s(F)$  est un carré direct et comme  $O' = D^*F$  alors  $E' = s(E) = O^*F$  et  $F' = s(F) = F^*E$ .  
 $D'$  où  $s : DOEF \rightarrow FO^*E^*F'$  (voir la figure).

4. On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(O; \overline{OE}; \overline{OD})$ .

a. Déterminer les coordonnées des points  $E; D; B$  et  $F$  dans ce repère :

$\overline{OE} = 1 \times \overline{OE} + 0 \times \overline{OD} \Rightarrow E(1; 0)$ ;  $\overline{OD} = 0 \times \overline{OE} + 1 \times \overline{OD} \Rightarrow D(0; 1)$ ;  $\overline{OB} = 0 \times \overline{OE} - 1 \times \overline{OD} \Rightarrow B(0; -1)$

$\overline{OF} = 1 \times \overline{OE} + 1 \times \overline{OD} \Rightarrow F(1; 1)$ .

b. Donner l'expression complexe de la similitude  $s$  :

$s : M(z) \rightarrow M'(z')$  ssi  $z' = az + b$ .

$s(B) = D$  et  $s(D) = F \Rightarrow \begin{cases} i = -ia + b \\ 1 + i = ia + b \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}i$  et  $b = \frac{1}{2} + i$ .

D'où l'expression complexe de la similitude  $s : z' = -\frac{1}{2}iz + \frac{1}{2} + i$ .

c. En utilisant 3.a) retrouver le rapport et l'angle de  $s$  et calculer les coordonnées de  $H$  dans le repère précédent :

• Le rapport de  $s : |a| = \left| -\frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2}$ .

• Un angle de  $r : \arg(a) = \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

• Les coordonnées de  $H : z_H = \frac{1}{2}iz_H + \frac{1}{2} + i \Rightarrow z_H = \frac{\frac{1}{2} + i}{1 - \frac{1}{2}i} = \frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{(1 + 2i)(2 - i)}{(2 - i)(2 - i)} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \Rightarrow H\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ .

**Exercice N°5 :**

Soit  $f$  la fonction de variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ . Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Vérifier que pour tout réel  $x$  on a :  $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x + 1}$  et  $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$  :

$-1 + \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{-e^x - 1 + 2e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$  et  $1 - \frac{2}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et interpréter graphiquement :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{e^x + 1} \right) = 1 - \frac{2}{+\infty} = 1 - 0 = 1$ . Donc  $y = 1$  AH de  $(C)$  au voilage de  $+\infty$ .

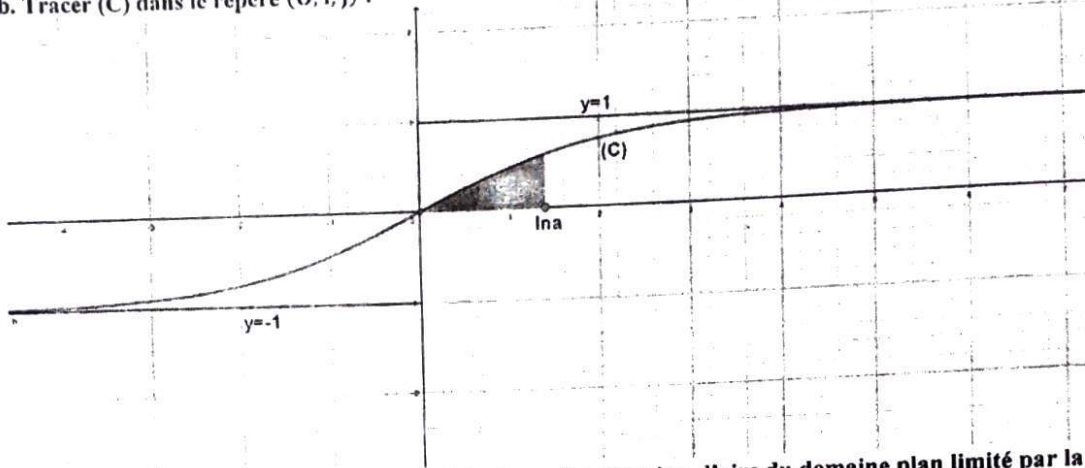
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -1 + \frac{2e^x}{e^x + 1} \right) = -1 + \frac{2 \times 0}{0 + 1} = -1 + 0 = -1$ . Donc  $y = -1$  AH de  $(C)$  au voilage de  $-\infty$ .

2. a. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$f'(x) = \frac{(e^x + 1)e^x - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)e^x - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ .

|       |           |    |           |
|-------|-----------|----|-----------|
| x     | $-\infty$ | 0  | $+\infty$ |
| f'(x) |           | +  |           |
| f(x)  |           | -1 | 1         |

b. Tracer (C) dans le repère (O; i; j) :



c. Soit a un réel strictement supérieur à 1. Calculer en fonction de a, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = \ln a$  :

L'aire demandée est :

$$A = \int_0^{\ln a} f(x) dx = \int_0^{\ln a} \left(-1 + \frac{2e^x}{e^x+1}\right) dx = [-x + 2\ln(e^x+1)]_0^{\ln a} = -\ln a + 2\ln(1+a) - 2\ln 2$$

$$= -2\ln\sqrt{a} + 2\ln(1+a) - 2\ln 2 = 2\ln(1+a) - 2\ln(2\sqrt{a}) = 2\ln\left(\frac{1+a}{2\sqrt{a}}\right)$$

3. Pour tout entier naturel l non nul, on pose  $I_n = \int_0^{\ln a} (f(t))^n dt$ .

a. Vérifier que  $I_1 = 2\ln\left(\frac{1+a}{2\sqrt{a}}\right)$  :

$$I_1 = \int_0^{\ln a} (f(t))^1 dt = \int_0^{\ln a} f(t) dt = A = 2\ln\left(\frac{1+a}{2\sqrt{a}}\right)$$

b. Vérifier que pour tout réel x :  $f^2(x) = 1 - 2f'(x)$ . En déduire la valeur de  $I_2$  :

$$1 - 2f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} = f^2(x)$$

La déduction de la valeur de  $I_2$  :

$$I_2 = \int_0^{\ln a} (f(t))^2 dt = \int_0^{\ln a} (1 - 2f'(t)) dt = [t + 2f(t)]_0^{\ln a} = \ln a + 2f(\ln a) - 2f(0) = \ln a - 2\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$$

c. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :  $0 \leq I_n \leq \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n \ln a$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

$$0 \leq t \leq \ln a \Rightarrow f(0) \leq f(t) \leq f(\ln a) \Rightarrow 0 \leq f(t) \leq \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow 0 \leq (f(t))^n \leq \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n \Rightarrow 0 \leq \int_0^{\ln a} (f(t))^n dt \leq \int_0^{\ln a} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n \ln a. \text{ D'où pour tout entier naturel n, on a : } 0 \leq I_n \leq \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n \ln a.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n$  puis que  $-1 < \left(\frac{a-1}{a+1}\right) < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

d. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :  $I_n - I_{n+2} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$  :

$$I_n - I_{n+2} = \int_0^{\ln a} (f(t))^n dt - \int_0^{\ln a} (f(t))^{n+2} dt = \int_0^{\ln a} ((f(t))^n - (f(t))^{n+2}) dt = \int_0^{\ln a} (f(t))^n (1 - (f(t))^2) dt$$

$$\int_0^{\ln a} 2f'(x)(f(t))^n dt = \frac{2}{n+1} [(f(t))^{n+1}]_0^{\ln a} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1} \text{ car } f(\ln a) = \frac{a-1}{a+1} \text{ et } f(0) = 0.$$

4. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose  $S_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$

a. Ecrire  $S_n(a)$  en fonction de certains termes de la suite  $(I_n)$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(a)$  :

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N} : I_n - I_{n+2} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1} \Rightarrow \text{pour } k = n+1 \text{ on a : } I_{k-1} - I_{k+1} = \frac{2}{k} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$$

$$\Rightarrow S_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (I_{k-1} - I_{k+1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_{k+1}$$

$$= \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} (I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1}) - \frac{1}{2} (I_2 + I_3 + \dots + I_{n-1}) - \frac{1}{2} I_n - \frac{1}{2} I_{n+1} = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2} I_n - \frac{1}{2} I_{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2} \times 2 \ln\left(\frac{1+a}{2\sqrt{a}}\right) = \ln\sqrt{a} + \ln\left(\frac{1+a}{2\sqrt{a}}\right) = \ln\left(\frac{(1+a)\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right) = \ln\left(\frac{1+a}{2}\right)$$

b. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose :  $T_n = \frac{9}{11} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{11}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{9}{11}\right)^n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\left(\frac{9}{11}\right)^k$

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$  :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\left(\frac{9}{11}\right)^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\left(\frac{10-1}{10+1}\right)^k = S_n(10) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(10) = \ln\left(\frac{1+10}{2}\right) = \ln\left(\frac{11}{2}\right)$$

## Bac 2012 session normale

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^x \ln(e^x + 1)$ . Soit (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

2. a. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

c. Tracer la courbe (C).

3. On pose  $I = \int_0^1 f(x) dx$ . On se propose de calculer  $I$  par deux méthodes.

Méthode a : Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = f(x) + ae^x + b + \frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}$ . En déduire  $I$ .

Méthode b : En posant  $t = e^x + 1$ , utiliser une intégration par parties pour calculer  $I$ .

#### Exercice N°2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points  $A(2; 1; 3)$ ;  $B(3; 2; 1)$ ;  $C(4; 1; 4)$ ;  $D(5; 3; -2)$  et  $E(6; -2; -4)$ .

1. a. Calculer  $\overline{AB}$ ;  $\overline{AC}$  et  $\overline{DE}$ . Vérifier que le vecteur  $\overline{DE}$  est normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).

d. Déterminer les coordonnées du point F projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Déterminer un réel  $\lambda$  tel que

$$\overline{EF} = \lambda \overline{DF}.$$

2. a. Calculer le volume  $V$  du tétraèdre ABCD. (On rappelle que  $V = \frac{1}{3} \text{base} \times \text{hauteur}$ ).

b. Déterminer les deux ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des points M de l'espace définis par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2 - ME^2 = 30.$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -36.$$

#### Exercice N°3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $E_\theta : z^2 - (6\cos\theta)z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$ ; avec  $\theta \in [0; 2\pi[$ .

1. a. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $E_\theta$ . On note  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de  $z_1$  avec  $\text{Im}(z_1) \geq 0$  si  $\theta \in [0; \pi[$ ;

b. Préciser les valeurs de  $\theta$  et les solutions de  $E_\theta$  dans les cas suivants :

\*L'équation  $E_\theta$  admet deux solutions doubles, dans ce cas on note  $A_1$  et  $A_2$  les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  avec  $\text{Re}(z_1) \geq 0$ .

\*L'équation  $E_\theta$  admet deux solutions imaginaires pures, dans ce cas on note  $B_1$  et  $B_2$  les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  avec  $\text{Im}(z_1) \geq 0$ .

2. Dans le cas général on note  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$

a. Déterminer le lieu géométrique  $\Gamma$  des points  $M_1$  et  $M_2$  lorsque  $\theta$  décrit  $[0; 2\pi[$ ;

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de  $\Gamma$  et le construire;

3. On définit l'application  $f$  qui à tout point M d'affixe  $z$  associe le point M' d'affixe  $z'$  barycentre du système  $\{(A_1; -4), (B_1; 2), (M; 3)\}$ .

a. Ecrire  $z'$  en fonction de  $z$  puis reconnaître  $f$  et donner ses éléments caractéristiques.

b. Donner une équation cartésienne de  $\Gamma' = f(\Gamma)$ .

Donner les éléments caractéristiques de  $\Gamma'$  dans  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

#### Exercice N°4 :

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme général  $U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ ;  $n \geq 2$ .

On considère la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x - \ln x$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  ; on pose  $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$ .
- En utilisant une intégration par parties, calculer  $\int_{\lambda}^1 \ln x dx$ .
  - En déduire le calcul de  $I(\lambda)$  puis  $\lim_{x \rightarrow 0^+} I(\lambda)$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on pose  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$
- Montrer que  $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ , pour  $1 \leq k \leq n-1$ .
  - En déduire que :  $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$  et  $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$
  - En utilisant 3. b) montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2}$ .
4. a. Montrer que  $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$  et que  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .
- En déduire que  $S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - \ln U_n$
  - De ce qui précède calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

**Exercice N°5 :**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct  $ABC$  de côté  $a$ , ( $a > 0$ ), de centre  $G$ . Soient  $I$ ,  $J$ , et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$ . Le point  $E$  est le symétrique de  $K$  par rapport à  $I$ .

- Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.
- Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme  $B$  en  $I$  et  $J$  en  $A$ .
  - Déterminer les éléments caractéristiques de  $r_1$ .
- Soit  $t$  la translation de vecteur  $\vec{AJ}$ . On pose  $r_2 = t \circ r_1$  et  $f = s_{JC} \circ s_{JE} \circ s_{KE}$ .
  - Déterminer  $r_2(J)$  et caractériser  $r_2$ .
  - Déterminer deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  telles que  $r_1 = s_{KC} \circ s_{\Delta_1}$  et  $r_2 = s_{JC} \circ s_{\Delta_2}$ . En déduire que  $f = t_{\vec{AJ}} \circ s_{KC}$ .
  - Déterminer l'image du triangle  $BIK$  par  $f$ . Justifier que  $f$  est symétrie glissante et donner sa forme réduite.
- Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s$  qui transforme  $E$  en  $I$  et  $C$  en  $G$ .
  - Déterminer un angle et le rapport de  $s$ .
  - Montrer que le centre de  $s$  est situé sur les cercles circonscrits aux triangles  $BCG$  et  $BEI$ . Préciser ce centre.
- Dans cette question,  $M$  est un point variable du cercle  $\Gamma$  de diamètre  $[BC]$ . On note  $s(M) = M'$ .
  - Déterminer le lieu géométrique  $\Gamma'$  du point  $M'$  lorsque  $M$  décrit  $\Gamma$ .
  - Montrer que pour tout point  $M$  de  $\Gamma$  distinct de  $B$ , la droite  $(MM')$  passe par le point  $K$ .
  - En déduire un programme de construction de  $M'$  à partir d'une position de  $M$  sur  $\Gamma$ . Placer  $M$  et  $M'$  en supposant que  $B$ ,  $M$  et  $C$  se succèdent dans le sens trigonométrique sur  $\Gamma$ .
- Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose  $s^2 = s \circ s$  et  $s^n = s \circ s^{n-1}$ . On définit une suite de points  $(M_n)$  par  $M_0 = E$ ,  $M_1 = s(M_0)$  et  $M_n = s^n(M_0)$ .
  - Sur une nouvelle figure, placer les points  $B$ ,  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  (Pour la construction, on pourra prendre la droite  $(BE)$  verticalement avec  $BE = 6 \text{ cm}$ ).
  - Calculer en fonction de  $n$  et  $a$  la somme :  $S_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$
  - Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et interpréter.
  - Justifier que  $M_{1960} \in (BM_1)$  et  $M_{2012} \in (BG)$ .

## Solution

**Exercice N°1 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^x \ln(e^x + 1)$ . Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(e^x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0 \times 0 = 0 \text{ alors } y = 0 \text{ AH en } -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(e^x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) = +\infty \times (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) = +\infty \times (+\infty) = +\infty.$$

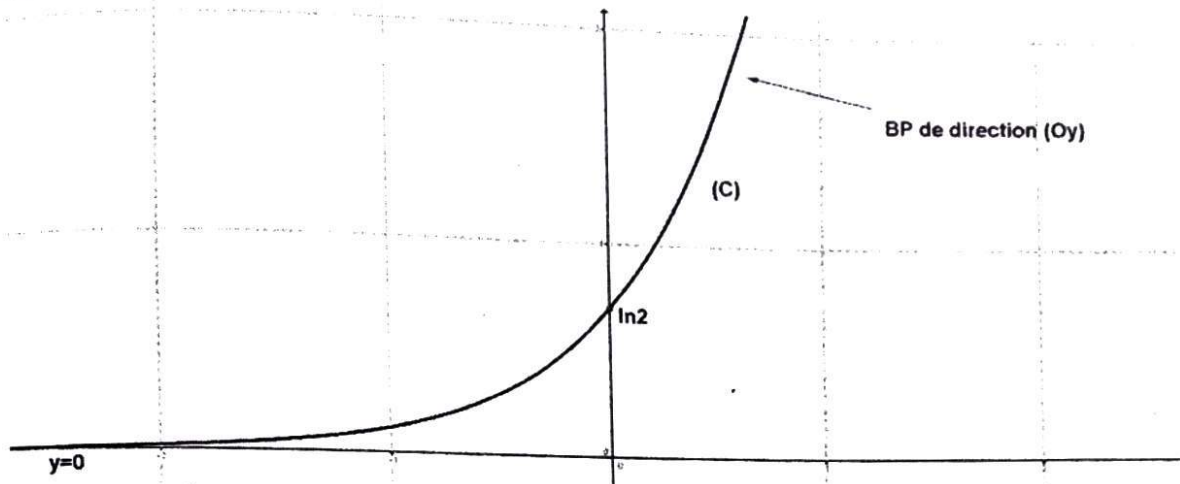
Donc  $(C)$  admet BP de direction  $(Oy)$  en  $+\infty$ .

2. a. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$f(x) = e^x \ln(e^x + 1) + \frac{(e^x)^2}{e^x + 1} = f(x) + \frac{e^{2x}}{e^x + 1} > 0. \text{ Donc } f(x) > 0.$$

|       |           |           |
|-------|-----------|-----------|
| x     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| f'(x) |           | +         |
| f(x)  | 0         | $+\infty$ |

- b. Montrer que f réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle J que l'on déterminera :  
 f est continue et strictement croissante alors elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur l'intervalle  $J=]0; +\infty[$ .  
 c. Tracer la courbe (C) :  
 $f(0)=\ln 2$



3. On pose  $I = \int_0^1 f(x) dx$ . On se propose de calculer I par deux méthodes.

**Méthode a :** Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x :  $f'(x) = f(x) + ae^x + b + \frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}$ . En déduire I :

$$f'(x) = f(x) + ae^x + b + \frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}} = f(x) + \frac{(ae^x+b)(1+e^{-x})+ce^{-x}}{1+e^{-x}} = f(x) + \frac{ae^{2x}+(a+b)e^x+b+c}{1+e^{-x}}$$

$$\text{Par identification } f(x) + \frac{ae^{2x}+(a+b)e^x+b+c}{1+e^{-x}} = f(x) + \frac{e^{2x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } f'(x) = f(x) + e^x - 1 + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow f(x) = f'(x) - e^x + 1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow F(x) = e^x \ln(e^x + 1) - e^x + x + \ln(1 + e^{-x})$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = e \ln(e + 1) - e + 1 - 1 - \ln(1 + e) - \ln(2) + 1 - \ln(2) \\ = (e + 1) \ln(e + 1) - 2 \ln(2) - e + 1$$

**Méthode b :** En posant  $t = e^x + 1$ , utiliser une intégration par parties pour calculer I :

$$\text{En posant } t = e^x + 1 \text{ on a : } dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t-1} \text{ et } e^x = t - 1 \text{ si } x=0 \text{ alors } t=2 \text{ et si } x=1 \text{ alors } t=e+1.$$

$$\text{On a : } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x \ln(e^x + 1) dx = \int_2^{e+1} (t-1) \ln t \frac{dt}{t-1} = \int_2^{e+1} \ln t dt.$$

$$\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = [t \ln t]_2^{e+1} - \int_2^{e+1} 1 dt = [t \ln t]_2^{e+1} - [t]_2^{e+1} = (e+1) \ln(e+1) - 2 \ln(2) - e + 1.$$

**Exercice N°2 :**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points  $A(2; 1; 3); B(3; 2; 1); C(4; 1; 4); D(5; 3; -2)$  et  $E(6; -2; -4)$ .

1. a. Calculer  $\vec{AB}$ ;  $\vec{AC}$  et  $\vec{DE}$ . Vérifier que le vecteur  $\vec{DE}$  est normal au plan (ABC) :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{AC} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 1-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{DE} \begin{pmatrix} 6-5 \\ -2-3 \\ -4+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{DE} \cdot \vec{AB} = 1 \times 1 - 5 \times 1 - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{DE}.$$

$$\vec{DE} \cdot \vec{AC} = 2 \times 1 - 5 \times 0 - 2 \times 1 = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{DE}.$$

Donc le vecteur  $\vec{DE}$  est normal au plan (ABC) ;

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) :

$$\text{Comme } \vec{DE} \text{ est normal au plan alors on a : } x-5y-2z+d=0 \text{ or } A \in (ABC), \text{ donc } 2-5 \times 1 - 2 \times 3 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = 9. \text{ D'où une équation cartésienne du plan (ABC) est la suivante : } x-5y-2z+9=0;$$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE) ;

Soit  $M(x; y; z)$  un point de la droite (DE) alors il existe un réel k tel que  $\vec{DM} = k\vec{DE}$  ;

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 5 = k \\ y - 3 = -5k \\ x + 2 = -2k \end{cases} \text{ D'où } \begin{cases} x = 5 + k \\ y = 3 - 5k \\ x = -2 - 2k \end{cases}$$

d. Déterminer les coordonnées du point F projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Déterminer un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{EF} = \lambda \vec{DF}$ ; F appartient à la fois au plan (ABC) et à la droite (DE) alors  $F(5+k; 3-5k; -2-2k)$  et

$$5 + k - 5(3 - 5k) - 2(-2 - 2k) + 9 = 0 \Rightarrow 30k + 3 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{10}, \text{ en remplaçant par la valeur de } k \text{ on trouve alors}$$

$$F\left(\frac{49}{10}; \frac{35}{10}; -\frac{18}{10}\right);$$

$$\vec{EF} = \lambda \vec{DF} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{49}{10} - 6 \\ \frac{35}{10} + 2 \\ -\frac{18}{10} + 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{49}{10} - 5 \\ \frac{35}{10} - 3 \\ -\frac{18}{10} + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} \\ \frac{55}{10} \\ \frac{22}{10} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{5}{10} \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 11;$$

$$\text{D'où } \vec{EF} = 11\vec{DF};$$

2. a. Calculer le volume V du tétraèdre ABCD. (On rappelle que  $V = \frac{1}{3} \text{ base} \times \text{hauteur}$ ) :

Comme  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont orthogonaux car

$$1 \times 2 + 1 \times 0 - 2 \times 1 = 0 \text{ alors } ABC \text{ est rectangle en } A;$$

$$\text{On a alors } V = \frac{1}{3} \left( \frac{AB \times AC}{2} \right) \times DF;$$

$$\text{Or } AB = \sqrt{(2-3)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{6};$$

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (1-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{et } DF = \sqrt{\left(\frac{49}{10} - 5\right)^2 + \left(\frac{35}{10} - 3\right)^2 + \left(-\frac{11}{10} + 2\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{10};$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \left( \frac{AB \times AC}{2} \right) \times DH = V = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{5}}{2} \right) \times \frac{\sqrt{30}}{10} = 0,5 \text{ uv}$$

b. Déterminer les deux ensemble  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des points M de l'espace défini par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2 - ME^2 = -30 \text{ et } M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -36;$$

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2 - ME^2 = -30 ? \text{ (Vérifier que } D \in \Gamma_1)$$

Vérifions que le point D appartient à  $\Gamma_1$  :

$$D \in \Gamma_1 \text{ car } : 11DD^2 - DE^2 = -30;$$

On a démontré déjà que  $\vec{EF} = 11\vec{DF}$  alors  $\vec{DF} - \vec{EF} = \vec{0}$ .

D'où F est le barycentre du système  $\{(E; -1); (D; 11)\}$

Comme  $11 + (-1) = 10 \neq 0$  alors  $\Gamma_1$  est la sphère de centre F passant par D. Le rayon de cette sphère est égal à  $DF = \frac{\sqrt{30}}{10}$ .

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -36 ? \text{ (Vérifier que } A \in \Gamma_2)$$

Vérifions que A appartient à  $\Gamma_2$  :

$$\text{On a } AD^2 = (2-5)^2 + (1-3)^2 + (3+2)^2 = 38 \text{ et } AE^2 = (6-2)^2 + (-2-1)^2 + (-4-3)^2 = 74.$$

$$\Rightarrow AD^2 - AE^2 = 38 - 74 = -36 \Rightarrow A \text{ appartient à } \Gamma_2;$$

Alors  $\Gamma_2$  est le plan passant par A et de vecteur normal  $\vec{DE}$ . D'où  $\Gamma_2 = (ABC)$

### Exercice N°3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On considère dans C l'équation  $E_\theta : z^2 - (6\cos\theta)z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$ ; avec  $\theta \in [0; 2\pi[$ .

1. a. Résoudre dans C l'équation  $E_\theta$ . On note  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de  $z_1$  avec  $\text{Im}(z_1) \geq 0$  si  $\theta \in [0; \pi[$  :

$$z^2 - (6\cos\theta)z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$$

$$\Delta' = (-3\cos\theta)^2 - (4 + 5\cos^2\theta) = 9\cos^2\theta - 4 - 5\cos^2\theta = -4 + 4\cos^2\theta = -4(1 - \cos^2\theta) = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions distinctes :  $z_1 = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$  et  $z_2 = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

b. Préciser les valeurs de  $\theta$  et les solutions de  $E_\theta$  dans les cas suivants :

\*L'équation  $E_\theta$  admet deux solutions doubles, dans ce cas on note  $A_1$  et  $A_2$  les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  avec  $\text{Re}(z_1) \geq 0$  :

$$\text{Deux solutions doubles} \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi.$$

$$\text{Si } \theta = 0 \text{ alors } z_1 = 3 \Rightarrow A_1(3; 0) \text{ et si } \theta = \pi \text{ alors } z_2 = -3 \Rightarrow A_2(-3; 0).$$

\*L'équation  $E_\theta$  admet deux solutions imaginaires pures, dans ce cas on note  $B_1$  et  $B_2$  les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  avec  $\text{Im}(z_1) \geq 0$  :

$$\text{Deux solutions imaginaires pures} \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ alors } z_1 = 2i \text{ et } z_2 = -2i. \text{ D'où } B_1(0; 2) \text{ et } B_2(0; -2) \text{ et si } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ alors } z_1 = -2i \text{ et } z_2 = 2i. \text{ D'où } B_1(0; -2) \text{ et } B_2(0; 2).$$

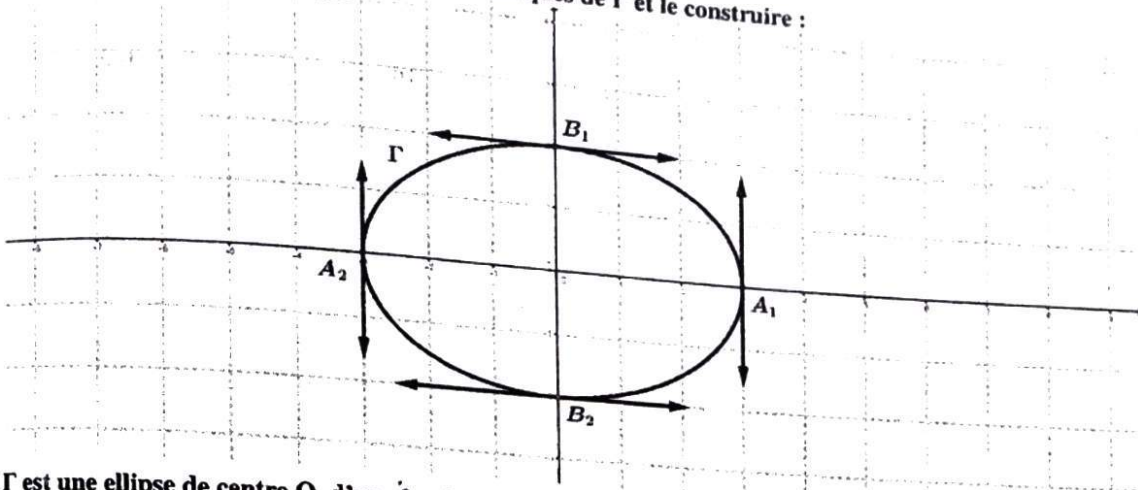
2. Dans le cas général on note  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$

a. Déterminer le lieu géométrique  $\Gamma$  des points  $M_1$  et  $M_2$  lorsque  $\theta$  décrit  $[0; 2\pi[$  :

$$M_1(x_1; y_1) \text{ le point d'affixe } z_1 \text{ et } M_2(x_2; y_2) \text{ le point d'affixe } z_2 \text{ alors } \begin{cases} x_1 = 3\cos\theta \\ y_1 = 2\sin\theta \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_2 = 3\cos\theta \\ y_2 = -2\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{3} = \cos\theta \\ \frac{y_1}{2} = \sin\theta \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{x_2}{3} = \cos\theta \\ \frac{y_2}{2} = -\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{2}\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \text{ et } \left(\frac{x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de  $\Gamma$  et le construire :



$\Gamma$  est une ellipse de centre O, d'axe focal (Ox).  $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ , d'excentricité  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , de foyers  $F(\sqrt{5}; 0)$  et  $F'(-\sqrt{5}; 0)$ , de directrices respectives  $d : x = \frac{9}{\sqrt{5}}$  et  $d' : x = -\frac{9}{\sqrt{5}}$  et de sommets  $A_1(3; 0)$ ;  $A_2(-3; 0)$ ;  $B_1(0; 2)$  et  $B_2(0; -2)$ .

3. On définit l'application  $f$  qui à tout point M d'affixe  $z$  associe le point M' d'affixe  $z'$  barycentre du système  $\{(A_1; -4), (B_1; 2), (M; 3)\}$ .

a. Ecrire  $z'$  en fonction de  $z$  puis reconnaître  $f$  et donner ses éléments caractéristiques :

Expression de  $f : z' = \frac{3z - 4 \times 3 + 2 \times 2i}{1} = 3z - 12 + 4i$ . Donc  $f$  est une expression complexe de la forme :  $z' = az + b$  avec

$a \in \mathbb{R}^*$ . Alors  $f$  est une homothétie de rapport  $a=3$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $\frac{b}{1-a} = \frac{-12 + 4i}{1-3} = 6 - 2i$ .

b. Donner une équation cartésienne de  $\Gamma' = f(\Gamma)$  :

Expressions analytiques de  $f : \begin{cases} x' = 3x - 12 \\ y' = 3y + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'+12}{3} \\ y = \frac{y'-4}{3} \end{cases}$

Or  $\Gamma : \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{x'+12}{3}\right)^2}{3^2} + \frac{\left(\frac{y'-4}{3}\right)^2}{2^2} = 1 \Rightarrow \Gamma' : \frac{(x'+12)^2}{9^2} + \frac{(y'-4)^2}{6^2} = 1$ .

Donner les éléments caractéristiques de  $\Gamma'$  dans  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  :

$\Gamma'$  est une ellipse de centre  $\Omega'(-12; 4)$  d'axe ( $\Omega x$ ) :  $y=4$ .  $c = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ , d'excentricité  $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

$\begin{cases} X = x + 12 \\ Y = y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X - 12 \\ y = Y + 4 \end{cases}$ . Alors, dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  l'ellipse  $\Gamma'$  est de foyers  $F(3\sqrt{5} - 12; 4)$  et

$F'(-3\sqrt{5} - 12; 4)$  et de sommets  $A'_1(-9; 4)$ ;  $A'_2(-15; 4)$ ;  $B'_1(-12; 6)$  et  $B'_2(-12; 2)$ .

**Exercice N°4 :**

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme général  $U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ ;  $n \geq 2$ .

On considère la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x - \ln x$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \times 1 = +\infty$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | 0         | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - | 0         |
|         |           |   | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ |   | $+\infty$ |

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  ; on pose  $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$ .

a. En utilisant une intégration par parties, calculer  $\int_{\lambda}^1 \ln x dx$  :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \Rightarrow \int_{\lambda}^1 \ln x dx = [x \ln x]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x} \cdot x dx = [x \ln x]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 1 dx = [x \ln x]_{\lambda}^1 - [t]_{\lambda}^1 = \lambda - \lambda \ln \lambda - 1.$$

b. En déduire le calcul de  $I(\lambda)$  puis  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$  :

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx = \int_{\lambda}^1 (x - \ln x) dx = \int_{\lambda}^1 x dx - \int_{\lambda}^1 \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 \ln x dx = \frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \lambda + \lambda \ln \lambda + 1 = \frac{3}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \lambda + \lambda \ln \lambda$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left( \frac{3}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \lambda + \lambda \ln \lambda \right) = \frac{3}{2}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, k \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on pose  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

a. Montrer que  $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ , pour  $1 \leq k \leq n-1$  :

$1 \leq k \leq n \Rightarrow 0 \leq \frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq 1$ . Alors fonction  $f$  est décroissante sur  $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]; f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt$$

$$\Rightarrow \left[ f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \Rightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b. En déduire que :  $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$  et  $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$  :

A partir de la double inégalité précédente on en déduit la somme récurrente suivante :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{4}{n}\right) \leq \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{n} f(1) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} f(1) \Leftrightarrow S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} \Leftrightarrow S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n.$$

$$D'autre part ; S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \Rightarrow -\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) - S_n \leq 0 \Rightarrow -I\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq -S_n \leq -I\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

c. En utilisant 3. b) montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2}$  :

D'après la double inégalité précédente, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \right)$

Or  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2}$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \times 0 = 0$  alors d'après les Gendarmes  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2}$

4. a. Montrer que  $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$  et que  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(\frac{3}{n}\right) \dots + \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \dots \times \frac{n}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$
 c'est la somme des termes consécutifs d'une suites arithmétiques

b. En déduire que  $S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - \ln U_n$  :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n} + \ln\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{n^2 + n}{2} + \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \right)$$

$$= \frac{n^2 + n}{2n^2} - \frac{1}{n} \ln \left( \frac{n!}{n^n} \right) = \frac{n^2 + n}{2n^2} - \ln \left( \left( \frac{n!}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{n^2 + n}{2n^2} - \ln \left( \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \right)$$

$$= \frac{n^2 + n}{2n^2} - \ln \left( \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \right) = \frac{n^2 + n}{2n^2} - \ln \left( \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) = \frac{n^2 + n}{2n^2} - \ln U_n$$

c. De ce qui précède calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

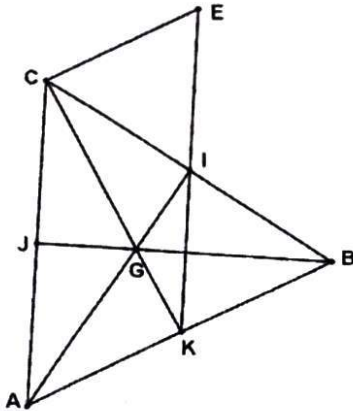
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2 + n}{2n^2} - \ln U_n \right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2 + n}{2n^2} \right) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

#### Exercice N°5 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de côté a, (a>0), de centre G. Soient I, J, et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. Le point E est le symétrique de K par rapport à I.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complètera au fur et à mesure :



2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme B en I et J en A :

$$r_1: \begin{matrix} B \rightarrow I \\ J \rightarrow A \end{matrix} \text{ On a } BJ = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } AI = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Comme  $BJ=AI$  et  $\overline{BJ} \neq \overline{IA}$ , alors il existe une unique rotation  $r_1$  transformant B en I et J en A.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de  $r_1$  :

L'angle de  $r_1$  :  $(\overline{BJ}; \overline{IA}) = (\overline{GJ}; \overline{GA}) = \frac{\pi}{3}$ . Le centre de  $r_1$  est K, point d'intersection de med[B]I et med[J]A.

3. Soit t la translation de vecteur  $\overline{AJ}$ . On pose  $r_2 = \text{tor}_1$  et  $f = s_{JC} \circ s_{JE} \circ s_{KE}$ .

a. Déterminer  $r_2(J)$  et caractériser  $r_2$  :

$$r_2(J) = \text{tor}_1(J) = t(A) = J. \text{ Alors } r_2 = r \left( J; \frac{\pi}{3} \right).$$

b. Déterminer deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  telles que  $r_1 = s_{KC} \circ s_{\Delta_1}$  et  $r_2 = s_{JC} \circ s_{\Delta_2}$ . En déduire que  $f = t_{\overline{AJ}} \circ s_{KC}$  :

On prend  $\Delta_1 = (KE)$  et  $\Delta_2 = (JE)$  car  $(\overline{KE}; \overline{KC}) = \frac{\pi}{6}$  et  $(\overline{JE}; \overline{JC}) = \frac{\pi}{6}$  alors on a :  $r_1 = s_{KC} \circ s_{KE}$  et  $r_2 = s_{JC} \circ s_{JE}$ .

$$f = s_{JC} \circ s_{JE} \circ s_{KE} = r_2 \circ s_{KE} = t_{\overline{AJ}} \circ r_1 \circ s_{KE} = t_{\overline{AJ}} \circ s_{KC} \circ s_{KE} \circ s_{KE} = t_{\overline{AJ}} \circ s_{KC}$$

c. Déterminer l'image du triangle BIK par f. Justifier que f est symétrie glissante et donner sa forme réduite :

$$f(B) = t_{\overline{AJ}} \circ s_{KC}(B) = t_{\overline{AJ}}(A) = J; f(I) = t_{\overline{AJ}} \circ s_{KC}(I) = t_{\overline{AJ}}(J) = C \text{ et } f(K) = t_{\overline{AJ}} \circ s_{KC}(K) = t_{\overline{AJ}}(K) = I. \text{ D'où } f(\text{BIK}) = \text{JCI}.$$

f est la composée d'un déplacement et un antidéplacement alors c'est un antidéplacement et comme med[B]I  $\neq$  med[IC]

Alors f est une symétrie glissante. Soit  $P=I*K$  et  $Q=I*C$ , la forme réduite de f est :  $f = t_{\overline{PQ}} \circ s_{PQ} = s_{PQ} \circ t_{\overline{PQ}}$ .

4. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme E en I et C en G :

Comme  $E \neq C$  et  $I \neq G$ , alors il existe une unique similitude directe s telle que  $s(E) = I$  et  $s(C) = G$ .

b. Déterminer un angle et le rapport de s :

$$\text{L'angle de } s : (\overline{EC}; \overline{IG}) = (\overline{IJ}; \overline{IG}) = \frac{\pi}{6}. \text{ Rapport de } s : \frac{IG}{EG} = \frac{\frac{1}{2}AI}{\frac{3}{2}I} = \frac{\frac{1\sqrt{3}}{2}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c. Montrer que le centre de s est situé sur les cercles circonscrits aux triangles BCG et BEI. Préciser ce centre :

Soit  $\Omega$  le centre de cette similitude, donc on a :

$$\bullet (\overline{\Omega E}; \overline{\Omega I}) = \frac{\pi}{6} = (\overline{BE}; \overline{BI}) \text{ alors les points } \Omega, B, E \text{ et } I \text{ sont cocycliques. D'où } \Omega \in C_{(BEI)}$$

$$\bullet (\overline{\Omega C}; \overline{\Omega G}) = \frac{\pi}{6} = (\overline{BC}; \overline{BG}) \text{ alors les points } \Omega, B, C \text{ et } G \text{ sont cocycliques. D'où } \Omega \in C_{(BCG)}$$

D'où  $\Omega \in C_{(BEI)} \cap C_{(BCG)}$

$$BE=AI=\frac{\sqrt{3}}{2}a \quad BI=\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{BI}{BE} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BI}{BE} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ (\overline{BE}; \overline{BI}) = \frac{\pi}{6} \end{array} \right. \Rightarrow s = S\left(B; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$$

5. Dans cette question, M est un point variable du cercle  $\Gamma$  de diamètre [BC]. On note  $s(M)=M'$ .

a. Déterminer le lieu géométrique  $\Gamma'$  du point  $M'$  lorsque M décrit  $\Gamma$  :

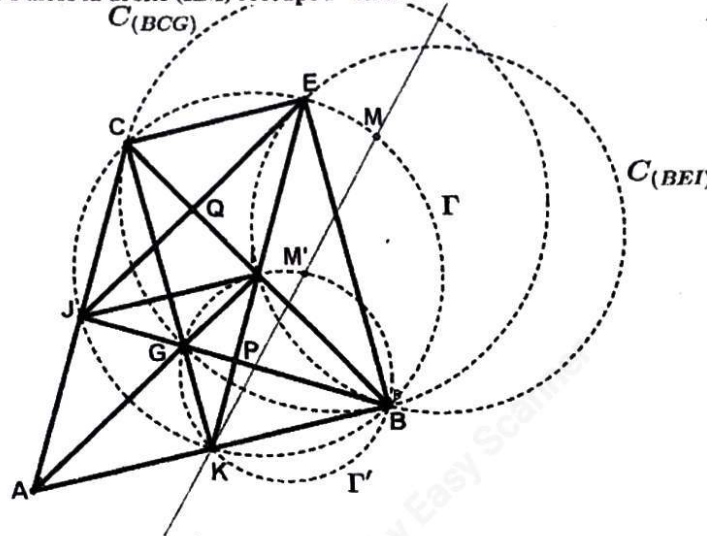
$M \in$  cercle de diamètre [BC] alors  $M' \in$  cercle de diamètre [BG] car  $s(B)=B$  et  $s(C)=G$ .

b. Montrer que pour tout point M de  $\Gamma$  distinct de B, la droite  $(MM')$  passe par le point K :

$$(\overline{KM}; \overline{KM'}) = (\overline{KM}; \overline{KB}) + (\overline{KB}; \overline{KM'}) [\pi] = (\overline{CM}; \overline{CB}) + (\overline{GB}; \overline{GM'}) [\pi]$$

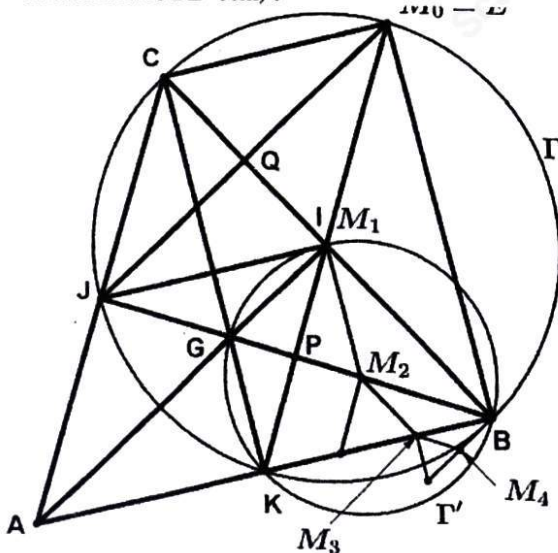
c. En déduire un programme de construction de  $M'$  à partir d'une position de M sur  $\Gamma$ . Placer M et  $M'$  en supposant que B, M et C se succèdent dans le sens trigonométrique sur  $\Gamma$  :

$M'$  est l'image de M par s alors la droite  $(KM)$  recoupe  $\Gamma'$  en  $M'$ .



6. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose  $s^2 = sos$  et  $s^n = sos^{n-1}$ . On définit une suite de points  $(M_n)$  par  $M_0 = E$ ,  $M_1 = s(M_0)$  et  $M_n = s^n(M_0)$ .

a. Sur une nouvelle figure, placer les points B,  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  (Pour la construction, on pourra prendre la droite (BE) verticalement avec  $BE=6cm$ ) :



b. Calculer en fonction de n et a la somme :  $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$  :

$$\frac{M_nM_{n+1}}{M_{n-1}M_n} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1} = M_0M_1 \frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^{n+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = EI \frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^{n+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{2} \frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^{n+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

c. Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et interpréter.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}}{2} \right) = \frac{a\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} - 1)}$$

lira  $S_n$  est la longueur de la ligne brisée  $M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$

d. Justifier que  $M_{1960} \in (BM_4)$  et  $M_{2012} \in (BG)$  :

$$1960 \times \frac{\pi}{6} = 326\pi + \frac{4\pi}{6} \text{ alors on a } \begin{cases} (\overline{BE}; \overline{BM_4}) = \frac{4\pi}{6} [2\pi] \\ (\overline{BE}; \overline{BM_{1960}}) = \frac{4\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow M_{1960} \in (BM_4)$$

$$2012 \times \frac{\pi}{6} = 334\pi + \frac{4\pi}{6} \text{ alors on a } (\overline{BE}; \overline{BM_{2012}}) = (\overline{BE}; \overline{BG}) + (\overline{BG}; \overline{BM_{2012}}) = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{6} = \pi [2\pi] \Rightarrow M_{2012} \in (BG)$$

## Bac 2012 session complémentaire

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (4 - 2i)z^2 + (4 - 6i)z - 4 + 8i$ .

a. Calculer  $P(-2i)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  de  $C$  :  $P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$ .

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $P(z) = 0$ .

2. Soit  $A, B$  et  $C$  les images de solutions de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $|z_A| < |z_B| < |z_C|$ .

a. Placer les points  $A, B$  et  $C$ .

b. Calculer l'abscisse du point  $G$  barycentre du système  $\{(O; 3), (A; -4), (B; 1), (C; 2)\}$ . Vérifier que  $A$  est le barycentre du système  $\{(O; 5), (B; -5), (G; 2)\}$ .

c. Déterminer et représenter l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  d'abscisse  $z$  telle que le nombre  $\frac{z-1-i}{z+2i}$  soit imaginaire pur.

3. Pour tout point  $M$  du plan on pose  $\varphi(M) = 3MO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2$  et on note  $\Gamma_k$  l'ensemble des points  $M$  tel que  $\varphi(M) = k$  où  $k$  est un réel.

a. Discuter suivant les valeurs de  $k$ , la nature de  $\Gamma_k$ .

b. Déterminer et construire  $\Gamma_{16}$ .

#### Exercice N°2 :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ . On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Calculer et interpréter graphiquement  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c. Construire la courbe  $(C)$ .

2. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose  $U_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln(\ln n) = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} - \ln(\ln n)$

a. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} \frac{f(t) dt}{1} \leq \frac{1}{n \ln n}$

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t) dt$ . En déduire le sens de variation de  $(U_n)$ .

c. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $U_{n+1} - U_n \geq f(n+1) - f(n)$ . En déduire que  $U_n \geq -\ln(\ln 2)$ .

d. Déduire de ce qui précède que la suite  $(U_n)$  est convergente vers une limite  $L$  telle que  $-\ln(\ln 2) \leq L \leq \frac{1}{2 \ln 2} - \ln(\ln 2)$

#### Exercice N°3 :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x^2 + 1}{e^x}$ . On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement.

b. Montrer que la courbe  $(C)$  de  $f$  admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point 1.

2. a. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b. Tracer la courbe  $(C)$ .

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ .

a. Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique  $(I_n)$ .

b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est positive et décroissante. Que peut-on en conclure ?

c. Donner un encadrement du nombre  $(I_n)$  qui permet de calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ . Calculer cette limite.

4. a. Calculer  $I_0$ .  
 b. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout  $n$ ,  $I_{n+1} = -\frac{1}{n} + (n+1)I_n$ .  
 c. Calculer l'aire sous la courbe (C) délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ .

**Exercice N°4 :**

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de côté  $a$ , ( $a > 0$ ).

Soient E et F les symétriques respectifs des points C et B par rapport à (AD). Soit G le point tel que le triangle DBG soit équilatéral direct. Soient I et J les milieux respectifs des segments [DB] et [DF].

- Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.
  - Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme D en G et F en B. Préciser l'angle et le centre de  $r_1$ .
  - Soit la rotation  $r_2$  qui transforme G en E et B en A. Préciser l'angle et le centre de  $r_2$ .
  - On pose  $r = r_2 \circ r_1$ . Déterminer  $r(D)$  et  $r(F)$ . Caractériser  $r$ .
2. On considère l'homothétie  $h$  de centre B et de rapport  $k = \frac{1}{2}$ . On note  $s = \text{hor}$ .
- Montrer que  $s$  est une similitude directe. Préciser le rapport et un angle de  $s$ .
  - Soit  $\Omega$  le centre de  $s$ . Montrer que  $\Omega$  appartient à deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  que l'on déterminera.
  - Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\Omega$  soit le barycentre du système  $\{(E; \alpha); (I; \beta)\}$ . Placer  $\Omega$  sur la figure.
3. On considère l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tels que  $MA + ME = 2a$  où  $a$  est la longueur du côté du carré ABCD.
- Montrer que  $\Gamma$  est une ellipse passant par D.
  - Préciser les sommets, les longueurs des axes de  $\Gamma$  et calculer son excentricité  $e$ .
  - Déterminer  $\Gamma' = s(\Gamma)$  puis construire  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .

## Solution

**Exercice N°1 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (4 - 2i)z^2 + (4 - 6i)z - 4 + 8i.$$

a. Calculer  $P(-2i)$  et déterminer deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  :

$$P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b) :$$

$$\begin{aligned} P(-2i) &= (-2i)^3 - (4 - 2i)(-2i)^2 + (4 - 6i)(-2i) - 4 + 8i \\ &= 8i + 4(4 - 2i) + (4 - 6i)(-2i) - 4 + 8i \\ &= 16i + 16 - 8i - 8i - 12 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Trouvons  $a$  et  $b$  :

|       |   |           |          |           |
|-------|---|-----------|----------|-----------|
|       | 1 | $-4 + 2i$ | $4 - 6i$ | $-4 + 8i$ |
| $-2i$ |   | $-2i$     | $8i$     | $4 - 8i$  |
|       | 1 | $-4$      | $4 + 2i$ | 0         |

$$\Rightarrow a = -4 \text{ et } b = 4 + 2i$$

D'où  $P(z) = (z + 2i)(z^2 - 4z + 4 + 2i)$ .

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les solutions de l'équation  $P(z) = 0$  :

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z + 2i)(z^2 - 4z + 4 + 2i) = 0$$

$$\Rightarrow z + 2i = 0 \text{ ou } z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$$

$$\bullet z + 2i = 0 \Rightarrow z = -2i ;$$

$$\bullet z^2 - 4z + 4 + 2i = 0.$$

$$\Delta' = 2^2 - 4 - 2i = -2i = (1 - i)^2 \Rightarrow \begin{cases} z' = 2 + 1 - i = 3 - i \\ z'' = 2 - 1 + i = 1 + i \end{cases}$$

$$\text{Donc } S = \{z_A = 1 + i; z_B = -2i; z_C = 3 - i\}$$

2. Soient A ; B et C les images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $|z_A| < |z_B| < |z_C|$ .

a. Placer les points A ; B et C : (voir la construction).

b. Calculer l'axe du point G barycentre du système  $\{(O; 3); (A; -4); (B; 1); (C; 2)\}$  :

$$z_G = \frac{3z_O - 4z_A + z_B + 2z_C}{2} = \frac{-4 - 4i - 2i + 6 - 2i}{2} = 1 - 4i$$

Vérifie que A est le barycentre du système  $\{(O; 5); (B; -5); (G; 2)\}$  :

$$\frac{5z_O - 5z_B + 2z_G}{2} = \frac{10i + 2 - 8i}{2} = 1 + i = z_A$$

c. Déterminer et représenter l'ensemble  $\Gamma$  des points M d'affixe  $z$  tels que  $\frac{z-1-i}{z+2i}$  soit imaginaire pur :

$$\frac{z-1-i}{z+2i} \text{ soit imaginaire pur} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z-1-i}{z+2i} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg\left(\frac{z-1-i}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - 1 - i = 0 \\ \text{ou} \\ \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = z_A \\ \text{ou} \\ (\overline{MB}; \overline{MA}) = \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$$

Donc  $\Gamma$  est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

3. Pour tout point M du plan on pose :

$$\varphi(M) = 3MO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2 \text{ et on note } \Gamma_k \text{ l'ensemble des points M tels que } \varphi(M) = k \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

a. Discuter suivant les valeurs de  $k$  la nature de  $\Gamma_k$  :

$$\varphi(M) = 3MO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 2MG^2 + \varphi(G)$$

$$\varphi(G) = 3GO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 51 - 100 + 5 + 26 = -18 \text{ car :}$$

$$GO^2 = (0-1)^2 + (0+4)^2 = 17; GA^2 = (1-1)^2 + (1+4)^2 = 25;$$

$$GB^2 = (0-1)^2 + (-2+4)^2 = 5; GC^2 = (3-1)^2 + (-1+4)^2 = 13.$$

$$\Rightarrow \varphi(M) = 2MG^2 - 18.$$

$$\varphi(M) = k \Rightarrow 2MG^2 - 18 = k \Rightarrow MG^2 = \frac{k+18}{2} \text{ alors si :}$$

$$\bullet k < -18 \Rightarrow \Gamma_k = \emptyset;$$

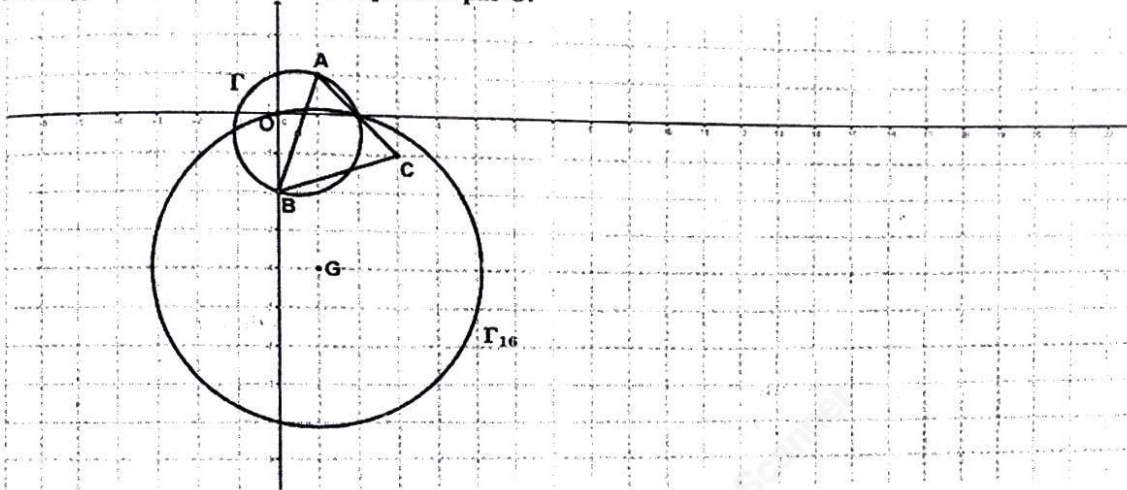
$$\bullet k = -18 \Rightarrow \Gamma_k = \{G\};$$

$$\bullet k = -18 \Rightarrow \Gamma_k = C \left( G; \sqrt{\frac{k+18}{2}} \right)$$

b. Déterminer et construire  $\Gamma_{16}$  :

$$M \in \Gamma_{16} \Leftrightarrow MG^2 = \frac{17+18}{2} \Leftrightarrow MG^2 = 17 = OG^2 \Leftrightarrow MG = OG.$$

D'où  $\Gamma_{16}$  est le cercle de centre  $G$  passant par  $O$ .



### Exercice N°2 :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ . On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Calculer et interpréter graphiquement  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x \ln x} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ AV.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{x \ln x} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{x \ln x} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ AV.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x \ln x} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ AH.}$$

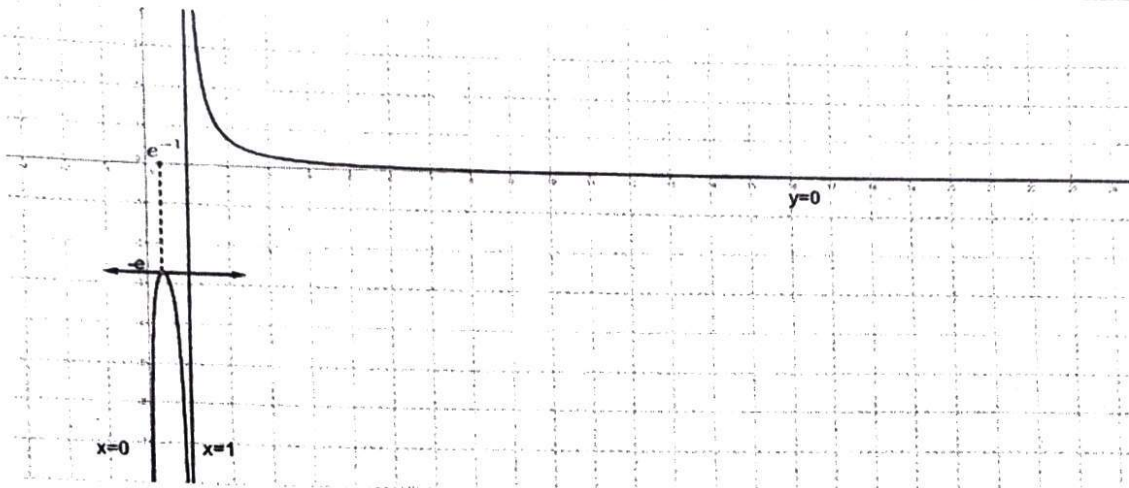
b. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$f'(x) = \frac{-(1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times x)}{x^2 \ln^2 x} = \frac{-(\ln x + 1)}{x^2 \ln^2 x}$$

|         |           |          |           |           |
|---------|-----------|----------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $e^{-1}$ | 1         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0        | -         | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $-e$     | $+\infty$ | 0         |

$$f(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1} \ln e^{-1}} = -e$$

c. Construire la courbe (C) :



2. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose  $U_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln(\ln n) = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} - \ln(\ln n)$

a. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \frac{1}{n \ln n}$  :

Pour  $n \geq 2$  alors  $f$  est décroissante sur  $[n; n+1]$ .

$$n \leq t \leq n+1 \Rightarrow f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \Rightarrow \int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \frac{1}{n \ln n}$$

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t) dt$ . En déduire le sens de variation de  $(U_n)$  :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k \ln k} - \ln(\ln(n+1)) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} + \ln(\ln n) = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n))$$

$$= \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - [\ln(\ln t)]_n^{n+1} = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dt = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

$$\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t) dt \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0. \text{ D'où } (U_n) \text{ est décroissante.}$$

c. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $U_{n+1} - U_n \geq f(n+1) - f(n)$ . En déduire que  $U_n \geq -\ln(\ln 2)$  :

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq \frac{1}{n \ln n} \Rightarrow \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \Rightarrow -f(n) \leq -\int_n^{n+1} f(t) dt \Rightarrow f(n+1) - f(n) \leq f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt$$

$$\Rightarrow f(n+1) - f(n) \leq U_{n+1} - U_n$$

Donc on a, en faisant la somme membre à membre :

$$U_3 - U_2 \geq f(3) - f(2)$$

$$U_4 - U_3 \geq f(4) - f(3)$$

$$U_5 - U_4 \geq f(5) - f(4)$$

$$\dots$$

$$U_n - U_{n-1} \geq f(n) - f(n-1)$$

$$U_n - U_2 \geq f(n) - f(2) \Rightarrow U_n \geq f(n) - f(2) + U_2 \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{2 \ln 2} - \ln \ln 2 \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{n \ln n} - \ln(\ln 2)$$

d. Déduire de ce qui précède que la suite  $(U_n)$  est convergente vers une limite  $L$  telle que  $-\ln(\ln 2) \leq L \leq \frac{1}{2 \ln 2} - \ln(\ln 2)$  :  $(U_n)$  est décroissante et minorée donc elle converge.

$$-\ln(\ln 2) \leq U_n \leq U_2 \Rightarrow -\ln(\ln 2) \leq L \leq \frac{1}{2 \ln 2} - \ln(\ln 2).$$

**Exercice N°3 :**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x}$ . On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)e^{-x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)e^{-x} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3)e^{-x} = -\infty.$$

La courbe  $(C)$  de  $f$  admet BP de direction  $(Oy)$  en  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 \frac{x^3}{e^x} - 3 \frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = 2 \times 0 - 3 \times 0 + 0 = 0$$

D'où  $y=0$  AH en  $+\infty$ .

b. Montrer que la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point 1 :

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 6x)e^x - (2x^3 - 3x^2 + 1)e^x}{e^{2x}} = \frac{(-2x^3 + 9x^2 - 6x - 1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-2x^3 + 9x^2 - 6x - 1}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^3 + 9x^2 - 6x - 1 = 0$ , le nombre 1 est solution de cette équation ; pour déterminer les autres solutions on fait recours au tableau suivant :

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
|   | -2 | 9  | -6 | -1 |
| 1 |    | -2 | 7  | 1  |
|   | -2 | 7  | 1  | 0  |

$$\Rightarrow -2x^3 + 9x^2 - 6x - 1 = (x - 1)(-2x^2 + 7x + 1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } -2x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } -2x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = 57 \Rightarrow x_1 = \frac{7 + \sqrt{57}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{7 - \sqrt{57}}{4}$$

D'où la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontales aux points d'abscisses 1 ;  $\frac{7 + \sqrt{57}}{4}$  et  $\frac{7 - \sqrt{57}}{4}$

2. a. Dresser le tableau de variation de f :

| x                       | $-\infty$ | $\frac{7 - \sqrt{57}}{4}$ | 1 | $\frac{7 + \sqrt{57}}{4}$ | $+\infty$ |   |
|-------------------------|-----------|---------------------------|---|---------------------------|-----------|---|
| x - 1                   |           | -                         | 0 | +                         |           |   |
| $-2x^2 + 7x + 1$        |           | -                         | 0 | +                         | +         |   |
| $-2x^3 + 9x^2 - 6x - 1$ |           | +                         | 0 | -                         | 0         | - |

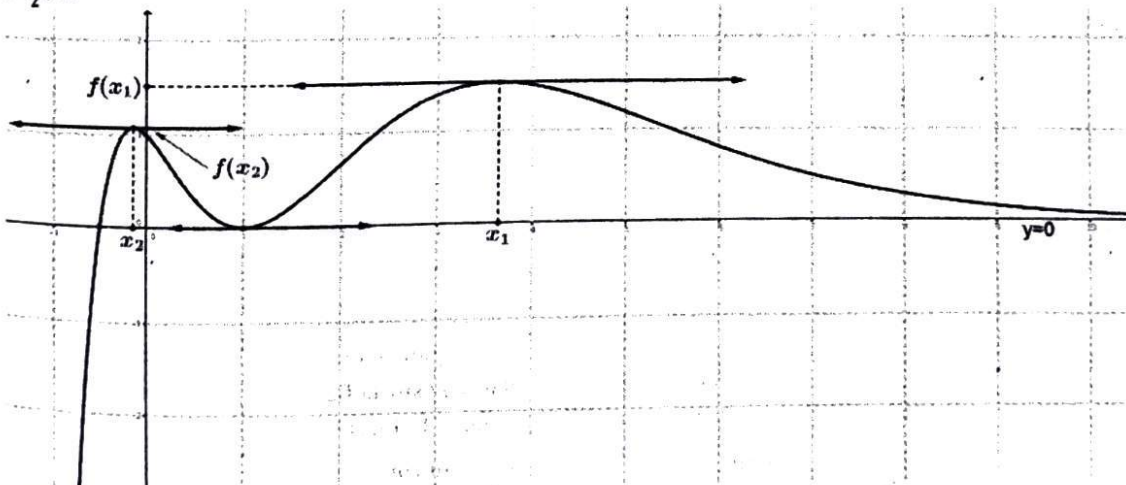
Tableau de variation de f :

| x     | $-\infty$ | $\frac{7 - \sqrt{57}}{4}$ | 1                                       | $\frac{7 + \sqrt{57}}{4}$ | $+\infty$                               |   |
|-------|-----------|---------------------------|---|---------------------------|---|---|
| f'(x) |           | +                         | 0                                       | -                         | 0                                       | - |
| f(x)  |           |                           | $f\left(\frac{7 - \sqrt{57}}{4}\right)$ |                           | $f\left(\frac{7 + \sqrt{57}}{4}\right)$ |   |

b. Tracer la courbe (C) :

•  $f(0)=1$ , donc (C) coupe l'axe des ordonnées au point (0 ; 1)

•  $f(x)=0 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (2x + 1)(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$  ou  $x = 1$ , donc (C) coupe l'axe des abscisses aux points  $(-\frac{1}{2}; 0)$  et  $(1; 0)$ .



3. Pour tout entier naturel n, on pose :  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ .

a. Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique  $(I_n)$  :

l'intégrale  $(I_n)$  existe car la fonction  $f_n(x) = x^n e^{-x}$  est continue sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est positive et décroissante. Que peut-on en conclure ?

$\forall x \in [0; 1]; x^n e^{-x} \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 x^n e^{-x} dx \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$ . D'où  $(I_n)$  est positive.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \int_0^1 (x-1)x^n e^{-x} dx \leq 0$  car  $x-1 \leq 0$  sur  $[0; 1]$ .

D'où  $(I_n)$  est décroissante.

Comme  $(I_n)$  décroissante et est minorée alors elle est convergente.

c. Donner un encadrement du nombre  $(I_n)$  qui permet de calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ . Calculer cette limite :

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow x^n e^{-1} \leq x^n e^{-x} \leq x^n \Rightarrow \int_0^1 x^n e^{-1} dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

4. a. Calculer  $I_0$  :

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

b. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout  $n$ ,  $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$  :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = x^n \\ v(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases} \Rightarrow I_n = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} (-e^{-x}) dx = \frac{1}{n+1} e^{-1} + \frac{1}{n+1} I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

c. Calculer l'aire sous la courbe (C) délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$  :

Soit  $A$  cette aire :

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 1)e^{-x} dx = 2 \int_0^1 x^3 e^{-x} dx - 3 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 e^{-x} dx = 2I_3 - 3I_2 + I_0$$

$$I_1 = -\frac{1}{e} + I_0 = -\frac{1}{e} + \frac{e-1}{e} = \frac{e-2}{e}; I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{1}{e} + \frac{2e-4}{e} = \frac{2e-5}{e} \text{ et } I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{1}{e} + \frac{2e-5}{e} = \frac{6e-16}{e}$$

$$\text{D'où } A = 2I_3 - 3I_2 + I_0 = \frac{12e-32}{e} - \frac{6e-15}{e} + \frac{e-1}{e} = \frac{7e-18}{e}$$

#### Exercice N°4 :

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de côté  $a$ , ( $a > 0$ ).

Soient E et F les symétriques respectifs des points C et B par rapport à (AD). Soit G le point tel que le triangle DBG soit équilatéral direct. Soient I et J les milieux respectifs des segments [DB] et [DF].

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure :

b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme D en G et F en B. Préciser l'angle et le centre de  $r_1$  :

$s_{AD}: \begin{cases} D \rightarrow D \\ B \rightarrow F \end{cases} \Rightarrow DF = DB$ ; DBG est équilatéral  $\Rightarrow DF = GB$ . D'où  $DF = GB$ .

$\begin{cases} DF = GB \\ DF \neq GB \end{cases} \Rightarrow$  il existe une unique rotation  $r_1: \begin{cases} D \rightarrow G \\ F \rightarrow B \end{cases}$

L'angle de  $r_1: (\overline{DF}; \overline{GB}) = (\overline{GC}; \overline{GB}) = \frac{\pi}{6}$  et le centre de  $r_1$  est  $\Omega_1 = \text{med}[DG] \cap \text{med}[FB]$ .

c. Soit la rotation  $r_2: \begin{cases} G \rightarrow E \\ B \rightarrow A \end{cases}$ . Préciser l'angle et le centre de  $r_2$  :

L'angle de  $r_2: (\overline{GB}; \overline{EA}) = (\overline{GB}; \overline{BD}) = \frac{\pi}{3}$  et le centre de  $r_2$  est  $\Omega_2 = \text{med}[EG] \cap \text{med}[AB]$ .

d. On pose  $r = r_2 \circ r_1$ . Déterminer  $r(D)$  et  $r(F)$ . Caractériser  $r$  :

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r \text{ est une rotation d'angle } \frac{\pi}{2}$$

$$r(D) = r_2 \circ r_1(D) = r_2(G) = E \text{ et } r(F) = r_2 \circ r_1(F) = r_2(B) = A$$

Or  $\begin{cases} JF = JA \\ (\overline{JF}; \overline{JA}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow r_{(J; \frac{\pi}{2})}(F) = A \Rightarrow r = r_{(J; \frac{\pi}{2})}$ . D'où le centre de  $r$  est J.

2. On considère l'homothétie  $h$  de centre B et de rapport  $k = \frac{1}{2}$ . On note  $s = \text{hor}$ .

a. Montrer que  $s$  est une similitude directe. Préciser le rapport et un angle de  $s$  :

$h = h_{(B; \frac{1}{2})}$  et  $s$  est la composée d'une homothétie et d'une rotation alors  $s$  est similitude d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport  $\frac{1}{2}$ .

b. Soit  $\Omega$  le centre de  $s$ . Montrer que  $\Omega$  appartient à deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  que l'on déterminera :

$s = \text{hor}(E) = h(F) = A \Rightarrow (\overline{\Omega E}; \overline{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}$  et  $s = \text{hor}(A) = h(D) = I \Rightarrow (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega I}) = \frac{\pi}{2}$ . D'où  $\Omega \in C_{[AE]} \cap C_{[AI]}$  autre que A.

c. Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\Omega$  soit le barycentre du système  $\{(E; \alpha); (I; \beta)\}$ . Placer  $\Omega$  sur la figure :

$\text{sos}(E) = I \Rightarrow h_{(\Omega; \frac{1}{4})}(E) = I \Rightarrow \overline{\Omega I} = -\frac{1}{4} \overline{\Omega E} \Rightarrow 4 \overline{\Omega I} + \overline{\Omega E} = 0 \Rightarrow \Omega$  est le barycentre du système  $\{(E; 1); (I; 4)\}$

3. On considère l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tels que  $MA + ME = 2a$  où  $a$  est la longueur du côté du carré ABCD.  $M \in \Gamma \Leftrightarrow MA + ME = 2a$  où  $a$  est la longueur du côté du carré ABCD

a. Montrer que  $\Gamma$  est une ellipse passant par D :

$\Gamma$  est une ellipse de foyers A et E car  $AE = a\sqrt{2} < 2a$ .

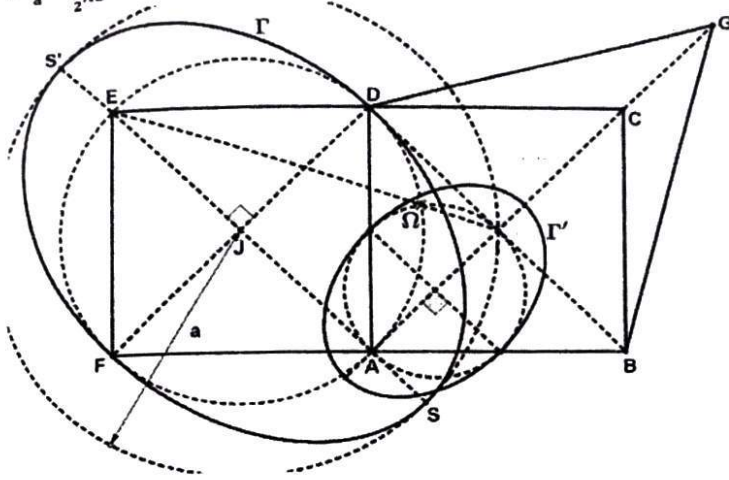
On a  $DA = DE = a + a = 2a$ . D'où  $D \in \Gamma$ .

b. Préciser les sommets, les longueurs des axes de  $\Gamma$  et calculer son excentricité  $e$  :  
Les sommets sont D ; F ; S et S' tels que JS=a=JS' et {S; S'}  $\in C_{(J;a)} \cap (AE)$ .

$$e = \frac{c}{a} = \frac{JE}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c. Déterminer  $\Gamma' = s(\Gamma)$  puis construire  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  :  
 $\Gamma'$  est l'ellipse de foyers s(A)=I et s(E)=A.

$$e' = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}JE}{\frac{1}{2}AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



## Bac 2011 session normale Énoncé

### Exercice N°1 :

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z + 1$  où  $\theta \in [0; 2\pi[$ .

1. Calculer  $P(1)$  puis déterminer les solutions  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $P(z)=0$  sachant que  $z_0$  est réel et  $\text{Im}(z_1) \geq 0$  si  $\sin\theta \geq 0$ .

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $M_0$  ;  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$ . Déterminer, lorsque  $\theta$  décrit  $[0; 2\pi[$ , le lieu géométrique  $\Gamma_1$  des points  $M_1$  et  $M_2$ .

3. Soit le point G barycentre du système  $S = \{(M_0; 1), (M_1; 1), (M_2; -3)\}$ .

a. Démontrer que si  $\theta$  décrit  $[0; 2\pi[$ , alors le lieu géométrique  $\Gamma$  de G est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne.

b. Déterminer dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , les coordonnées du centre et les sommets, puis calculer l'excentricité de l'ellipse  $\Gamma$ .

Construire  $\Gamma$  dans ce repère.

4. On suppose dans cette question que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

a. Déterminer les coordonnées des points  $M_0$  ;  $M_1$  ;  $M_2$  et G. Placer ces points sur la figure précédente.

Quelle la particularité de G dans ce cas ?

b. Déterminer puis construire l'ensemble  $\Gamma'$  des points M du plan tels que :  $MM_0^2 + MM_1^2 - 3MM_2^2 = 6$ .

### Exercice N°2 :

Soit f la fonction numérique définie par :  $\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de  $x_0 = 0$ , interpréter graphiquement.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Construire la courbe (C).

2. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose  $\begin{cases} f_n(x) = x^n(1 - \ln x); x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

Soit  $(C_n)$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a. Pour tout  $n \geq 2$ , étudier la dérivabilité de  $f_n$  à droite de  $x_0 = 0$ , interpréter graphiquement.

b. Dresser le tableau de variation de  $f_n$ .

3. a. Montrer que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par trois points communs que l'on déterminera.

b. Étudier la position relative de  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$ .

4. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose  $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

a. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale  $U_n$ .

b. Justifier sans calcul, que la suite  $(U_n)$  est positive et décroissante.

c. Donner l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

**Exercice N°3 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement.
- b. Vérifier que  $f$  est impaire, puis dresser son tableau de variation.
- c. Tracer la courbe représentative (C) de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 1cm.
- d. Calculer l'aire  $A$  du domaine plan limité par (C) l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=0$  et  $x=\ln 3$ .

2. On considère la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_0 = \ln 3$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :  $U_n = \int_0^{\ln 3} [f(x)]^n dx$ .

- a. Calculer  $U_1$
- b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- c. Vérifier que pour tout  $x \geq 0$ , on a :  $1 - f(x) = (f(x))^2$ . Montrer que pour tout  $n \geq 0$  :  $U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

d. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  ;

$$\begin{cases} U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \\ U_{2n+1} = \ln \frac{5}{3} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \end{cases}$$

e. Pour tout entier  $n \geq 1$ ; on pose  $S_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \frac{1}{2n} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} \left(\frac{4}{5}\right)^p$ .

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Exercice N°4 :**

Dans le plan orienté on considère le triangle ABC équilatéral direct de centre G et de côté  $a$ , ( $a > 0$ ).

Soit I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale).
- b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme I en A et B en J.
- c. Déterminer un angle de  $r_1$  et préciser son centre.
2. On considère la rotation  $r_2$  de centre I et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .
  - a. Déterminer  $r_2(C)$  et  $r_2(J)$ .
  - b. En déduire l'image de la droite (AC) par  $r_2$  puis la construire.
3. Soit l'homothétie de centre G et de rapport  $k = -\frac{1}{2}$ . On pose  $s = r_1 \circ h$ .
  - a. Quelle est l'image du triangle ABC par  $h$  ?
  - b. Montrer que  $s$  est une similitude directe et donner son rapport et son angle.
  - c. Déterminer  $s(A)$ . Que peut-on conclure.
  - d. Donner la forme réduite de  $s$
4. On pose  $s^1 = s$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $s^{n+1} = s \circ s^n$ .
  - a. Caractériser  $s^3$ .
  - b. Soit  $p = 10^{2011}$ . Montrer que  $s^{p-1}$  est une homothétie de rapport négatif.
5. Pour tout point M du plan, on pose  $r_1(M) = M_1$  ;  $r_2(M) = M_2$  et  $s(M) = M'$ .
  - a. Déterminer  $M_1$  et  $M_2$  dans chacune des positions suivantes de M : M est en I ; en K ou en A.
  - b. Montrer que, pour tout M distinct de A, le triangle AMM' est rectangle.
  - c. Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tels que M,  $M_1$  et  $M_2$  soient alignés. (on pourra considérer les triangles IMM<sub>2</sub> et KMM<sub>1</sub> et l'angle  $(\overrightarrow{MK}; \overrightarrow{MI})$ ).
6. On suppose dans cette question que M est situé sur le cercle de diamètre [AC], M est distinct du point A. Montrer que :
  - a. La droite  $(M_1M_2)$  passe par un point fixe que l'on déterminera.
  - b. La droite  $(MM')$  passe par un point fixe que l'on déterminera.
  - c. L'angle  $(\overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{MM'})$  a une mesure constante  $\alpha$  modulo  $\pi$  que l'on déterminera.

## Solution

### Exercice N°1 :

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$  où  $\theta \in [0; 2\pi[$ .

1. Calculer  $P(1)$  puis déterminer les solutions  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $P(z)=0$  sachant que  $z_0$  est réel et  $\text{Im}(z_1) \geq 0$  si  $\sin\theta \geq 0$  :

$$P(z) = 1^3 - (1+2\cos\theta)1^2 + (1+2\cos\theta) \times 1 - 1 = 1 - 1 - 2\cos\theta + 1 + 2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$$

|   |   |          |         |    |
|---|---|----------|---------|----|
|   | 1 | -1-2cosθ | 1+2cosθ | -1 |
| 1 |   | 1        | -2cosθ  | 1  |
|   | 1 | -2cosθ   | 1       | 0  |
|   |   | a        | b       |    |

$$\Rightarrow P(z) = (z-1)(z^2 - (2\cos\theta)z + 1)$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-1)(z^2 - (2\cos\theta)z + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z-1 = 0 \\ z^2 - (2\cos\theta)z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$*z-1 = 0 \Rightarrow z_0 = 1$$

$$*z^2 - (2\cos\theta)z + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2\cos\theta)^2 - 4 = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2 \Rightarrow z_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $M_0$  ;  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$ . Déterminer, lorsque  $\theta$  décrit  $[0; 2\pi[$ , le lieu géométrique  $\Gamma_1$  des points  $M_1$  et  $M_2$  :

$M_1(x_1; y_1)$  le point d'affixe  $z_1$  et  $M_2(x_2; y_2)$  le point d'affixe  $z_2$  alors  $\begin{cases} x_1 = \cos\theta \\ y_1 = \sin\theta \end{cases}$  et  $\begin{cases} x_2 = \cos\theta \\ y_2 = -\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = \cos^2\theta \\ y_1^2 = \sin^2\theta \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_2^2 = \cos^2\theta \\ y_2^2 = \sin^2\theta \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \text{ et } x_2^2 + y_2^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 1$  et  $x_2^2 + y_2^2 = 1$ . D'où  $\Gamma_1$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

3. Soit le point  $G$  barycentre du système  $S = \{(M_0; 1), (M_1; 1), (M_2; -3)\}$ .

a. Démontrer que si  $\theta$  décrit  $[0; 2\pi[$ , alors le lieu géométrique  $\Gamma$  de  $G$  est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne :

$$z_G = \frac{z_0 + z_1 - 3z_2}{-1} = \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta - 3\cos\theta + 3i\sin\theta}{-1} = -1 + 2\cos\theta - 4i\sin\theta \Rightarrow G(-1 + 2\cos\theta; -4\sin\theta)$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = -4\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \cos\theta \\ \frac{y}{4} = -\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

D'où  $\Gamma$  est l'ellipse d'équation cartésienne la suivante dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  :  $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

b. Déterminer dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , les coordonnées du centre et les sommets, puis calculer l'excentricité de l'ellipse  $\Gamma$ .  
Construire  $\Gamma$  dans ce repère :

Soit dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  le point  $\Omega(-1; 0)$ . On pose  $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases}$  alors dans le repère  $(\Omega; \vec{u}; \vec{v})$  l'équation réduite de  $\Gamma$  est la

suivante  $\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{4^2} = 1$ . Dans ce repère les sommets de  $\Gamma$  sont les sommets sont  $A(0; 4)$  ;  $A'(0; -4)$  ;  $B(2; 0)$  et  $B'(-2; 0)$ .

Dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  : les sommets sont  $A(-1; 4)$  ;  $A'(-1; -4)$  ;  $B(1; 0)$  et  $B'(-3; 0)$  et l'excentricité est  $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  où

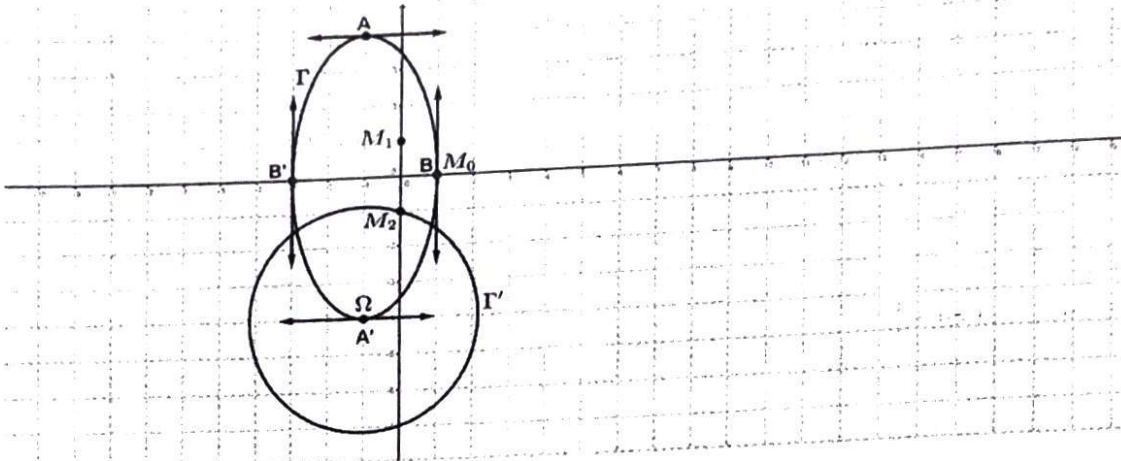
$$c = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

4. On suppose dans cette question que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

a. Déterminer les coordonnées des points  $M_0$  ;  $M_1$  ;  $M_2$  et  $G$ . Placer ces points sur la figure précédente.  
Quelle la particularité de  $G$  dans ce cas ?

$M_0(1; 0)$  ;  $M_1(0; 1)$  ;  $M_2(0; -1)$  et  $G(-1; -4)$  alors on constate que  $G$  est un sommet de  $\Gamma$ .

b. Déterminer puis construire l'ensemble  $\Gamma'$  des points  $M$  du plan tels que :  $MM_0^2 + MM_1^2 - 3MM_2^2 = 6$  ;  
 $MM_0^2 + MM_1^2 - 3MM_2^2 = 6 \Rightarrow -MG^2 + GM_0^2 + GM_1^2 - 3GM_2^2 = 6 \Rightarrow -MG^2 + 20 + 26 - 30 = 6 \Rightarrow MG^2 = 10$   
D'où  $\Gamma'$  est le cercle de centre  $G$  passant par  $M_2$  car  $M_2 \in \Gamma'$  puisque  $M_2G^2 = 10$ .



**Exercice N°2 :**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit  $(C)$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; i; j)$ .

1. a. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  à droite de  $x_0 = 0$ , interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x(1 - \ln x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 = f(0)$$

D'où  $f$  est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x) = -(-\infty) = +\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0 et la courbe de  $(C)$  admet une demi-tangente verticale à droite de 0.

b. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$f'(x) = 1(1 - \ln x) + x \left(-\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

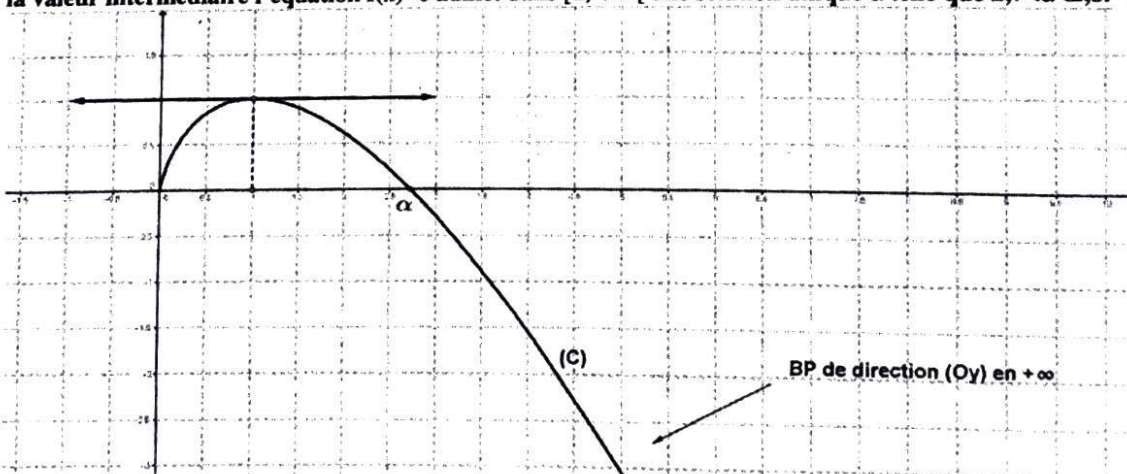
|         |   |     |             |
|---------|---|-----|-------------|
| $x$     | 0 | 1   | $+\infty$   |
| $f'(x)$ |   | +   | -           |
| $f(x)$  | 0 | ↗ 1 | ↘ $-\infty$ |

c. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Construire la courbe  $(C)$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$$

$(C)$  admet BP de direction  $(Oy)$  en  $+\infty$ .

Sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  la fonction  $f$  est continue et décroissante de plus  $f(2,7) \approx 0,01$  et  $f(2,8) \approx -0,08$ , alors d'après le théorème de la valeur intermédiaire l'équation  $f(x)=0$  admet dans  $[1; +\infty[$  une solution unique  $\alpha$  telle que  $2,7 < \alpha < 2,8$ .



2. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose  $\begin{cases} f_n(x) = x^n(1 - \ln x), x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

Soit  $(C_n)$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a. Pour tout  $n \geq 2$ , étudier la dérivabilité de  $f_n$  à droite de  $x_0 = 0$ , interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^n(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{n-1} - x^{n-1} \ln x) = 0 - 0 = 0 = f_n'(0)$$

Donc pour  $n \geq 2$ ,  $f_n$  est dérivable en 0 et la courbe de  $(C_n)$  admet une demi-tangente horizontale à droite de 0.

b. Dresser le tableau de variation de  $f_n$  :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1 - \ln x) - x^n \times \frac{1}{x} = nx^{n-1}(1 - \ln x) - x^{n-1} = x^{n-1}(n - 1 - n \ln x)$$

$$f_n'(x) = 0 \Rightarrow x^{n-1}(n - 1 - n \ln x) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } n - 1 - n \ln x = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x = e^{\frac{n-1}{n}}$$

$$f_n\left(e^{\frac{n-1}{n}}\right) = \left(e^{\frac{n-1}{n}}\right)^n \left(1 - \ln e^{\frac{n-1}{n}}\right) = \frac{e^{n-1}}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n(1 - \ln x) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

|           |   |                     |           |
|-----------|---|---------------------|-----------|
| x         | 0 | $e^{\frac{n-1}{n}}$ | $+\infty$ |
| $f_n'(x)$ | 0 | +                   | 0         |
| $f_n$     | 0 | $\frac{e^{n-1}}{n}$ | $-\infty$ |

3. a. Montrer que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par trois points communs que l'on déterminera :

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) \Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0 \Rightarrow x^{n+1}(1 - \ln x) - x^n(1 - \ln x) = 0 \Rightarrow x^n(x - 1)(1 - \ln x) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=e$$

D'où toutes les courbes  $(C_n)$  passent par les trois points :  $(0; 0)$ ;  $(1; 1)$  et  $(e; 0)$ .

b. Etudier la position relative de  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$  :

|                       |                       |                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| x                     | 0                     | 1                     | e                     | $+\infty$             |
| $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ | 0                     | -                     | 0                     | +                     |
| P. relative           | $\frac{C_n}{C_{n+1}}$ | $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ | $\frac{C_n}{C_{n+1}}$ | $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ |
|                       | $C_n \cap C_{n+1}$    | $C_n \cap C_{n+1}$    | $C_n \cap C_{n+1}$    |                       |

4. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose  $U_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 f_n(x) dx$ .

a. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale  $U_n$  :

$U_n$  est l'aire du domaine limité par  $(C_n)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=\frac{1}{e}$ .

b. Justifier sans calcul, que la suite  $(U_n)$  est positive et décroissante :

$$n \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{n-1}{n} \Rightarrow 1 \leq e^{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow f_n(x) > 0 \text{ sur } \left[\frac{1}{e}; 1\right] \Rightarrow \int_{\frac{1}{e}}^1 f_n(x) dx \geq 0$$

D'où  $(U_n)$  est positive.

$$U_{n+1} - U_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 f_{n+1}(x) dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 f_n(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx \leq 0$$

D'où  $(U_n)$  est positive.

c. Donner l'expression de  $U_n$  en fonction de n et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

$$U_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 x^n(1 - \ln x) dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = x^n \\ v(x) = (1 - \ln x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v'(x) = -\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow U_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1 - \ln x)\right]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^n}{n+1} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1 - \ln x)\right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_{\frac{1}{e}}^1$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{2}{e^{n+1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \left(1 - \frac{2}{e^{n+1}}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{2}{e^{n+1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \left(1 - \frac{2}{e^{n+1}}\right)\right] = 0$$

**Exercice N°3 :**

On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{2x} - 1)e^{-x}}{(e^{2x} + 1)e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - e^{-2x})e^x}{(1 + e^{-2x})e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1. \text{ Donc } y = 1 \text{ AH en } +\infty.$$

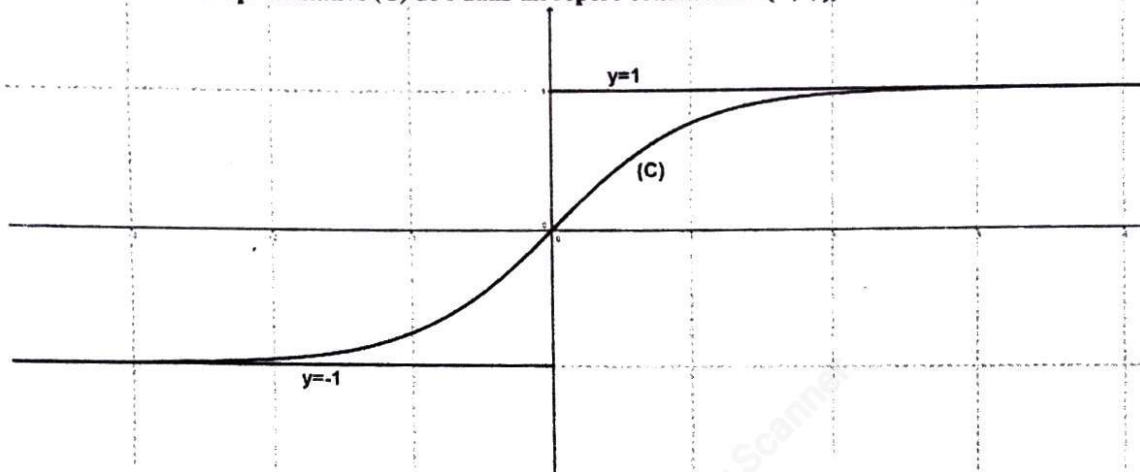
b. Vérifier que  $f$  est impaire, puis dresser son tableau de variation :

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x). \text{ Donc } f \text{ est impaire.}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

|       |           |           |
|-------|-----------|-----------|
| x     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| f'(x) | +         |           |
| f(x)  | -1        | 1         |

c. Tracer la courbe représentative (C) de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 1cm :



d. Calculer l'aire  $A$  du domaine plan limité par (C) l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=0$  et  $x=\ln 3$  :

$$A = \int_0^{\ln 3} f(x) dx = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = [\ln(e^x + e^{-x})]_0^{\ln 3} = \ln\left(\frac{10}{3}\right) - \ln 2 = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \text{ cm}^2$$

2. On considère la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_0 = \ln 3$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :  $U_n = \int_0^{\ln 3} [f(x)]^n dx$ .

a. Calculer  $U_1$  :

$$U_1 = \int_0^{\ln 3} f(x) dx = A = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

$$f \text{ est croissante sur } [0; \ln 3]. \quad 0 \leq t \leq \ln 3 \Rightarrow f(0) \leq f(t) \leq f(\ln 3) \Rightarrow 0 \leq f(t) \leq \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 0 \leq [f(x)]^n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow 0 \leq \int_0^{\ln 3} [f(x)]^n dx \leq \int_0^{\ln 3} \left(\frac{4}{5}\right)^n dx \Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3 = 0 \text{ puisque } -1 < \frac{4}{5} < 1.$$

c. Vérifier que pour tout  $x \geq 0$ , on a :  $1 - f(x) = (f(x))^2$ . Montrer que pour tout  $n \geq 0$  :  $U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$  :

$$1 - f(x) = 1 - \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = (f(x))^2$$

$$U_{n+2} - U_n = \int_0^{\ln 3} [f(x)]^{n+2} dx - \int_0^{\ln 3} [f(x)]^n dx = \int_0^{\ln 3} ([f(x)]^{n+2} - [f(x)]^n) dx = \int_0^{\ln 3} [f(x)]^n ((f(x))^2 - 1) dx \\ = \int_0^{\ln 3} -f'(x) [f(x)]^n dx = - \left[ \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} \right]_0^{\ln 3} = - \frac{1}{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

d. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ;

$$\begin{cases} U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \\ U_{2n+1} = \ln \frac{5}{3} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \end{cases}$$

On a :  $n \geq 0 : U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$$U_{2n} - U_{2n-2} = \frac{-1}{2n-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n-1}$$

$$U_{2n-2} - U_{2n-4} = \frac{-1}{2n-3} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n-3}$$

$$U_{2n-4} - U_{2n-6} = \frac{-1}{2n-5} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n-5}$$

.....

$$U_4 - U_2 = \frac{-1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$U_2 - U_0 = \frac{-1}{1} \left(\frac{4}{5}\right)^1$$

---


$$\Rightarrow U_{2n} - U_0 = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \Rightarrow U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \text{ car } U_0 = \ln 3.$$

$$U_{2n+1} - U_{2n-1} = \frac{-1}{2n-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n}$$

$$U_{2n-1} - U_{2n-3} = \frac{-1}{2n-3} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n-2}$$

$$U_{2n-3} - U_{2n-5} = \frac{-1}{2n-5} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n-4}$$

.....

$$U_5 - U_3 = \frac{-1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^4$$

$$U_3 - U_1 = \frac{-1}{1} \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

---


$$\Rightarrow U_{2n+1} - U_1 = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \Rightarrow U_{2n+1} = \ln \frac{5}{3} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \text{ car } U_1 = \ln \frac{5}{3}.$$

e. Pour tout entier  $n \geq 1$ ; on pose  $S_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \frac{1}{2n} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} \left(\frac{4}{5}\right)^p$

$$S_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \frac{1}{2n} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} \left(\frac{4}{5}\right)^p = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$$

$$= \ln 3 - U_{2n} + \ln \frac{5}{3} - U_{2n+1} = \ln 5 - U_{2n} - U_{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 5 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = 0$$

**Exercice N°4 :**

Dans le plan orienté on considère le triangle ABC équilatéral direct de centre G et de côté a, (a>0). Soit I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale).

b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme I en A et B en J.

$$\begin{cases} IB = AJ \\ \overrightarrow{AI} \neq \overrightarrow{IB} \end{cases} \Rightarrow \text{il existe une unique rotation } r_1 : \begin{cases} I \rightarrow A \\ B \rightarrow J \end{cases}$$

c. Déterminer un angle de  $r_1$  et préciser son centre :

$$\text{L'angle de } r_1 : \alpha = (\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{AJ}) = (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Le centre de  $r_1$  est  $\Omega = \text{med}[IA] \cap \text{med}[JB] = \{K\}$ .

2. On considère la rotation  $r_2$  de centre I et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

a. Déterminer  $r_2(C)$  et  $r_2(J)$  :

$$r_2(C) = J \text{ et } r_2(J) = K$$

b. En déduire l'image de la droite (AC) par  $r_2$  puis la construire :

$$r_2(AC) = (JK) \text{ car } r_2(C) = J \text{ et } (AC, KJ) = \frac{\pi}{3}[\pi]$$

3. Soit l'homothétie de centre G et de rapport  $k = -\frac{1}{2}$ . On pose  $s = r_1 \circ h$ .

a. Quelle est l'image du triangle ABC par h ?

$$h : \begin{cases} A \rightarrow I \\ B \rightarrow J \\ C \rightarrow K \end{cases}$$

b. Montrer que s est une similitude directe et donner son rapport et son angle :

$h = h_{(G, -\frac{1}{2})}$  et s est la composée d'une homothétie et d'une rotation alors s est similitude de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle

$$-\pi + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

c. Déterminer s(A). Que peut-on conclure :

$$s(A) = r_1 \circ h(A) = r_1(I) = A, A \text{ est invariant. D'où } A \text{ est le centre de } s.$$

d. Donner la forme réduite de s :

$$s = r \circ h \text{ où } r = r_{(A, -\frac{\pi}{3})} \text{ et } h = h_{(A, \frac{1}{2})}$$

4. On pose  $s^1 = s$  et pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $s^{n+1} = s \circ s^n$ .

a. Caractériser  $s^3$  :

$$\begin{cases} 3 \times (-\frac{\pi}{3}) = -\pi = \pi[2\pi] \\ (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow s^3 = h_{(A, -\frac{1}{8})}$$

b. Soit  $p = 10^{2011}$ . Montrer que  $s^{p-1}$  est une homothétie de rapport négatif :

$$p = 10^{2011} \Rightarrow p-1 = 10^{2011} - 1 \Rightarrow \frac{p-1}{10-1} = \frac{10^{2011}-1}{10-1} = 1+10+10^2 + \dots + 10^{2010}$$

$$\Rightarrow p-1 = 9(1+10+10^2 + \dots + 10^{2010}) = 3 \times 3(2k+1)$$

$$\Rightarrow (p-1) \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times 3(2k+1) \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -3\pi(2k+1) = -6k\pi - 3\pi = \pi[2\pi].$$

Donc  $s^{p-1}$  est une homothétie de rapport négatif.

5. Pour tout point M du plan, on pose  $r_1(M) = M_1$  ;  $r_2(M) = M_2$  et  $s(M) = M'$ .

a. Déterminer  $M_1$  et  $M_2$  dans chacune des positions suivantes de M : M est en I ; en K ou en A.

- M est en I  $\Rightarrow r_1(I) = A$  et  $r_2(I) = I \Rightarrow M_1 = A$  et  $M_2 = I$ .
- M est en K  $\Rightarrow r_1(K) = K$  et  $r_2(K) = B \Rightarrow M_1 = K$  et  $M_2 = B$ .

b. Montrer que pour tout M distinct de A, le triangle AMM' est rectangle :

$$s(M) = M' \Rightarrow h_{(A, \frac{1}{2})} \text{ or } r_{(A, -\frac{\pi}{3})}(M) = M' \Rightarrow h_{(A, \frac{1}{2})}(N) = M' \text{ avec } r_{(A, -\frac{\pi}{3})}(M) = N \Rightarrow \begin{cases} \text{AMN est équilatéral indirect} \\ M' \text{ est le milieu de } [AN] \end{cases}$$

$\Rightarrow M'$  est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle AMN. D'où le triangle AMM' est rectangle en M' indirect.

c. Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tels que M,  $M_1$  et  $M_2$  soient alignés. (on pourra considérer les triangles  $IMM_2$  et  $KMM_1$  et l'angle  $(\overline{MK}; \overline{MI})$  :

$$(\overline{MM_1}; \overline{MM_2}) = (\overline{MM_1}; \overline{MK}) + (\overline{MK}; \overline{MI}) + (\overline{MI}; \overline{MM_2}) = \frac{\pi}{6} + (\overline{MK}; \overline{MI}) - \frac{\pi}{3} = (\overline{MK}; \overline{MI}) - \frac{\pi}{6}$$

$$M, M_1 \text{ et } M_2 \text{ soient alignés} \Leftrightarrow (\overline{MM_1}; \overline{MM_2}) = 0[\pi] \Leftrightarrow (\overline{MK}; \overline{MI}) - \frac{\pi}{6} = 0[\pi] \Leftrightarrow (\overline{MK}; \overline{MI}) = \frac{\pi}{6}[\pi].$$

Or  $(\overline{CK}; \overline{CI}) = (\overline{AK}; \overline{AI}) = \frac{\pi}{6}$ . D'où  $\Gamma$  est le cercle de diamètre [AC] privé de I et K.

6. On suppose dans cette question que M est situé sur le cercle de diamètre [AC], M est distinct du point A. Montrer que :

a. La droite  $(M_1M_2)$  passe par un point fixe que l'on déterminera :

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow M, M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow (M_1M_2) = (MM_2).$$

$$r_{(I, \frac{\pi}{3})}(M) = M_2 \Rightarrow (\overline{MM_2}; \overline{MI}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \dots \dots (1) \text{ et de la cocyclicité des points } I; A; M \text{ et } C \text{ on a :}$$

$$(\overline{MI}; \overline{MA}) = (\overline{CI}; \overline{CA})[\pi] = -\frac{\pi}{3}[\pi] \dots \dots (2). \text{ Donc de (1) et (2) } (\overline{MM_2}; \overline{MI}) + (\overline{MI}; \overline{MA}) = 0[\pi] \Rightarrow (\overline{MM_2}; \overline{MA}) = 0[\pi]$$

$$\Rightarrow A \in (MM_2) \Rightarrow A \in (M_1M_2).$$

D'où  $(M_1M_2)$  passe par le point fixe A.

b. La droite  $(MM')$  passe par un point fixe que l'on déterminera :

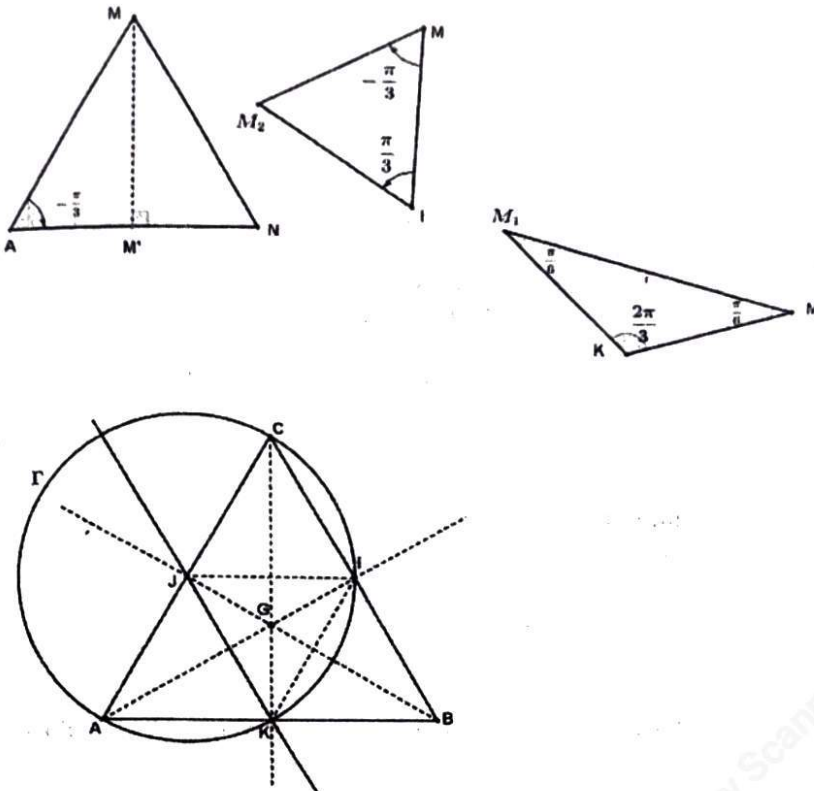
$$\text{On a : } s_{(A, -\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2})}(M) = M' \Rightarrow (\overline{MM'}; \overline{MA}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi] \dots \dots (1) \text{ et de la cocyclicité des points } K; A; M \text{ et } C \text{ on a :}$$

$$(\overline{MA}; \overline{MK}) = (\overline{CA}; \overline{CK})[\pi] = \frac{\pi}{6}[\pi] \dots \dots (2). \text{ Donc de (1) et (2) } (\overline{MM'}; \overline{MA}) + (\overline{MA}; \overline{MK}) = 0[\pi] \Rightarrow (\overline{MM'}; \overline{MK}) = 0[\pi]$$

$$\Rightarrow K \in (MM').$$

c. L'angle  $(\overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{MM'})$  a une mesure constante  $\alpha$  modulo  $\pi$  que l'on déterminera :

$$(\overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{MM'}) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CK})[\pi] = \frac{\pi}{6}[\pi]$$



## Bac 2011 session complémentaire Énoncé

### Exercice N°1 :

Dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , on pose :  $P(z) = z^3 - (6-2i)z^2 + (10-8i)z - 4+8i$ .

1. a. Calculer  $P(2)$ .
- b. Résoudre l'équation  $P(z)=0$ .
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points A ; B et C images des solutions de l'équation  $P(z)=0$  avec  $|z_A| < |z_B| < |z_C|$ . Placer les points A, B et C. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle et que le quadrilatère OACB est un parallélogramme.
3. Soit  $s$  la transformation qui associe à tout point M d'affixe  $z$  le point M' d'affixe  $z' = \frac{1+i}{2}z - i$ .
  - a. Justifier que  $s$  est une similitude directe du plan.
  - b. Déterminer les éléments caractéristiques de  $s$ .
  - c. Vérifier que  $s(C)=B$ .

### Exercice N°2 :

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$ .

- a. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- b. Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- c. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$  telle que  $0,6 < \alpha < 0,7$ .

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$ .

- a. Calculer  $f'(x)$  et vérifier que  $f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$ .
- b. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- c. Tracer la courbe représentative  $(C)$  de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$  et  $\|\vec{j}\| = 5\text{cm}$ .
3. On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :  $u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$ . On ne cherche pas à calculer l'intégrale  $u_n$ .
  - a. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  ;  $0 \leq u_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
  - b. Déterminer un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  ;  $0 \leq u_n \leq 10^{-5}$ .

**Exercice N°3 :**

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de sens direct de centre O.

Les points E, F, G et H les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

- Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale).
- Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  telle que  $r(D) = H$  et  $r(H) = O$ . Déterminer le centre I et un angle de la rotation  $r$ .
  - Montrer que  $r(A) = F$ , puis construire les points B' et C' images respectives de B et C par  $r$ .
- Soit  $h$  l'homothétie de centre D et de rapport  $k = \frac{1}{2}$ . On pose  $s = r \circ h$ .
  - Justifier que  $s$  est une similitude directe. Déterminer le rapport et l'angle de  $s$ .
  - Déterminer l'image du carré ABCD par la similitude  $s$  ?
- Soit  $\Omega$  le centre de  $s$ .
  - Montrer que le point  $\Omega$  appartient aux cercles de diamètres [AO], [BG], [CD] et [DH].
  - On considère les cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  passant par  $\Omega$  et de centres respectifs A et O. Soit T l'intersection de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  autre que  $\Omega$ . Démontrer que  $s(\Gamma) = \Gamma'$ . En déduire que les points  $\Omega$ , A, O et T sont cocycliques.
  - Soit M un point de  $\Gamma$  distinct de  $\Omega$  et de T. On pose  $s(M) = M'$ . Démontrer que les points M, M' et T sont alignés.
  - Soit A' et O' les points diamétralement opposés à  $\Omega$  respectivement sur les cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ . J et K les milieux respectifs des segments [MM'] et [A'O'].  
Déterminer la nature du triangle  $\Omega JK$ . En déduire le lieu géométrique du point J lorsque M décrit  $\Gamma$  privé de  $\Omega$  et de T.

**Exercice N°4 :**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = x \ln(x+1)$ .

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement.
- Montrer que la fonction  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]-1; 0]$  et strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  à droite de  $x_0 = 0$ , interpréter graphiquement.
  - Dresser le tableau de variation de  $f$  et construire la courbe (C).
- Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x \neq -1$ ;  $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$ .
  - A l'aide d'une intégration par parties, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .
- Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose :  $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$ .
  - Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique  $(u_n)$ .
  - Calculer  $u_1$  et en donner une interprétation graphique.
  - Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. La suite  $(u_n)$  converge-t-elle ? Justifier.
  - Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ . En déduire la limite de la suite numérique  $(u_n)$ .
- Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose :  $v_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx$ .
  - Vérifier que :  $u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} v_n$ .
  - Démontrer que :  $\frac{1}{2(n+2)} \leq v_n \leq \frac{1}{n+2}$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
- Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $v_n = (-1)^n \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln 2 \right)$ .
- En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) = \ln 2$ .

## Solution

**Exercice N°1 :**

Dans l'ensemble des nombres complexes  $C$ , on pose :  $P(z) = z^3 - (6-2i)z^2 + (10-8i)z - 4+8i$ .

1. a. Calculer  $P(2)$  :

$$P(2) = 2^3 - (6-2i)2^2 + (10-8i) \times 2 - 4+8i = 8 - 24 + 8i + 20 - 16i - 4 + 8i = 28 - 28 - 16i + 16i = 0$$

b. Résoudre l'équation  $P(z)=0$  :

Déterminons les réels  $a$ ,  $b$  tels que  $P(z) = (z-2)(z^2+az+c)$

|   |   |       |       |       |
|---|---|-------|-------|-------|
|   | 1 | -6+2i | 10-8i | -4+8i |
| 2 |   | 2     | -8+4i | 4-8i  |
|   | 1 | -4+2i | 2-4i  | 0     |
|   |   | a     | b     |       |

$$\Rightarrow P(z) = (z-2)(z^2+(-4+2i)z+2-4i)$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-2)(z^2+(-4+2i)z+2-4i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z-2 = 0 \\ z^2+(-4+2i)z+2-4i = 0 \end{cases}$$

$$\bullet z-2 = 0 \Rightarrow z_0 = 2$$

$$\bullet z^2+(-4+2i)z+2-4i=0$$

$\Delta = (-4 + 2i)^2 - 4(2 - 4i) = 4 \Rightarrow z_1 = \frac{4-2i+2}{2} = 3 - i$  et  $z_2 = \frac{4-2i-2}{2} = 1 - i$ .

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est  $(2; 3 - i; 1 - i)$ .

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points A ; B et C images des solutions de l'équation  $P(z)=0$  avec  $|z_A| < |z_B| < |z_C|$ . Placer les points A, B et C. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle et que le quadrilatère OACB est un parallélogramme :

$|z_A| = |1 - i| = \sqrt{2}$  ;  $|z_B| = |2| = 2$  et  $|z_C| = |3 - i| = \sqrt{10}$ . Donc  $z_A = 1 - i$  ;  $z_B = 2$  et  $z_C = 3 - i$ .

$AB = |z_A - z_B| = |1 - i - 2| = |-1 - i| = \sqrt{2}$  ;  $BC = |z_C - z_B| = |3 - i - 2| = |1 - i| = \sqrt{2}$  et  $AC = |z_A - z_C| = |1 - i - 3 + i| = |-2| = 2$ .

Comme  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  alors le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

$z_{\vec{OB}} = z_B - z_O = z_B = 2$  et  $z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = 3 - i - 1 + i = 2$ . Comme  $z_{\vec{OB}} = z_{\vec{AC}}$  alors OACB est un parallélogramme (puisqu'il existe par trois points alignés entre ces points).

3. Soit s la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe  $z' = \frac{1+i}{2}z - i$ .

a. Justifier que s est une similitude directe du plan :

Comme l'expression de s est de la forme  $z' = az + b$  où  $a \neq 0$  alors s est une similitude directe du plan.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de s :

Le rapport de s :  $k = \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ;

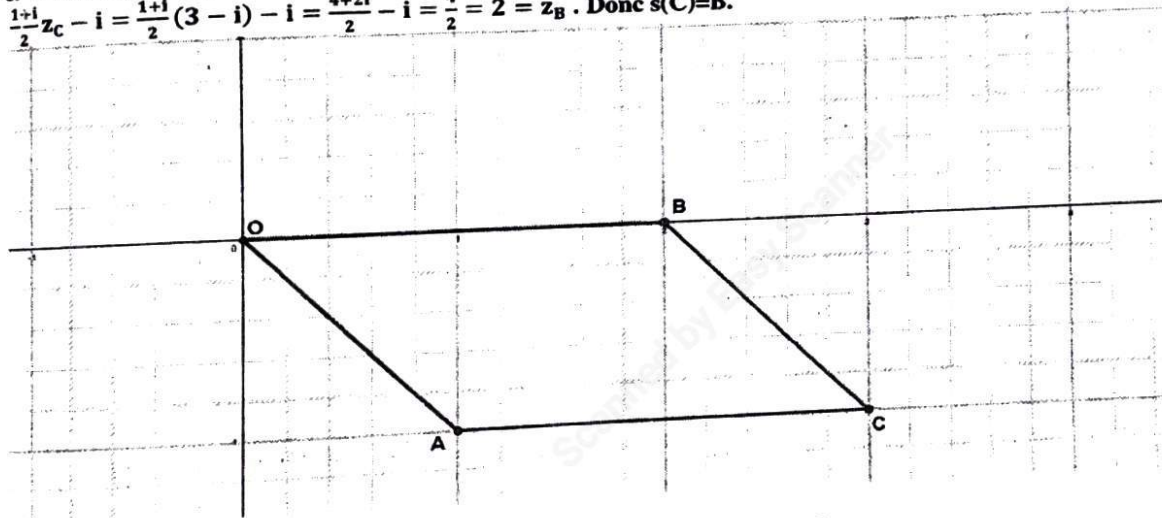
Un angle de s :  $\alpha = \arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = \arg(1+i) - \arg 2 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

Le centre de s est d'affixe :  $\omega = \frac{-i}{1-\frac{1+i}{2}} = \frac{-2i}{2-1-i} = \frac{-2i}{1-i} = \frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2i(1+i)}{2} = -i(1+i) = 1 - i = z_A$ .

D'où le centre de s est A.

c. Vérifier que  $s(C)=B$  :

$\frac{1+i}{2}z_C - i = \frac{1+i}{2}(3-i) - i = \frac{4+2i}{2} - i = 2 = z_B$ . Donc  $s(C)=B$ .



**Exercice N°2 :**

1. On considère la fonction g définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$ .

a. Dresser le tableau de variation de g :

$D_g = \mathbb{R}$

La fonction g est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $G'(x) = -3x^2 - 2x - 2$ ;  $\Delta = (-2)^2 - 4(-3)(-2) = -20 < 0$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| x       | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         |           |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $-\infty$ |

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - x^2 - 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - x^2 - 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$ .

b. Montrer que g réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  :

D'après le tableau de variation, g est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ , alors elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

c. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$  telle que  $0,6 < \alpha < 0,7$  :

Comme g est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , donc l'équation  $g(x)=0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

$f(0,6) \approx 0,224 > 0$  |  $\Rightarrow$  d'après le théorème de la valeur intermédiaire  $0,6 < \alpha < 0,7$ .

$f(0,7) \approx -0,233 < 0$  |  $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$ .

2. On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$ .

a. Calculer  $f'(x)$  et vérifier que  $f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$  :

$$f'(x) = 2 \frac{(1-x)(x^2+2)e^{-x} - 2x \cdot x e^{-x}}{(x^2+2)^2} = 2 \frac{(-x^3 - x^2 - 2x + 2)e^{-x}}{(x^2+2)^2} = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$$

b. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$ .

On déduit le signe de  $g$  de son tableau de variation :

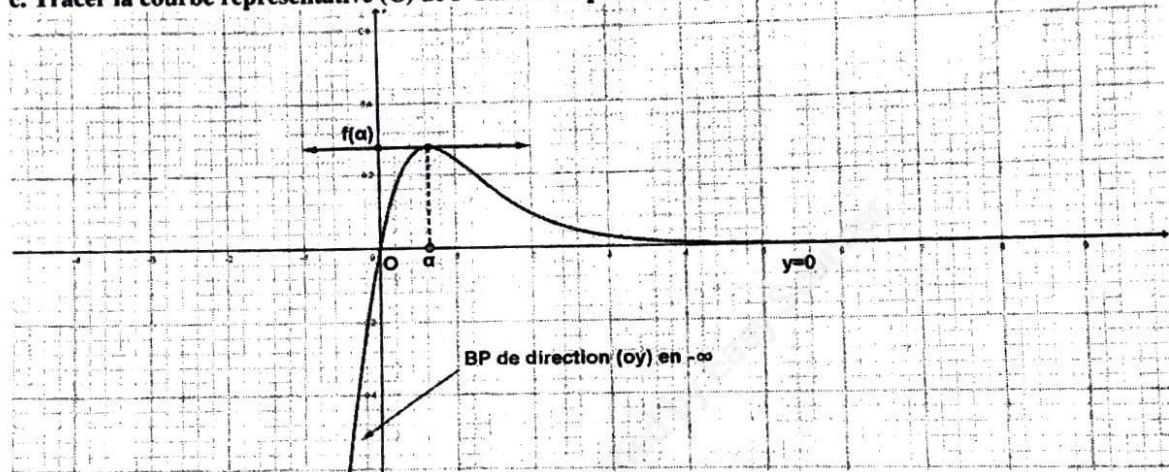
|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +           | -         |
| $f(x)$  |           | $f(\alpha)$ | 0         |

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^{-x}}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{-2}{1+\frac{2}{x^2}} = +\infty \times (-2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^{-x}}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \times 0 = 0$$

c. Tracer la courbe représentative (C) de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$  et  $\|\vec{j}\| = 5\text{cm}$  :



3. On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :  $u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$ . On ne cherche pas à calculer l'intégrale  $u_n$ .

a. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  ;  $0 \leq u_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :

$$\text{On a : } n \leq t \leq n+1 \Rightarrow 0 \leq \frac{t}{t^2+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{te^{-t}}{t^2+1} \leq e^{-t} \Rightarrow 0 \leq \int_n^{n+1} \frac{te^{-t}}{t^2+1} dt \leq \int_n^{n+1} e^{-t} dt \Rightarrow 0 \leq u_n \leq [-e^{-t}]_n^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq -e^{-(n+1)} + e^{-n} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}$$

D'où  $\forall n \geq 1$  ;  $0 \leq u_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n} = 0$  alors d'après TG  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

b. Déterminer un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  ;  $0 \leq u_n \leq 10^{-5}$  :

$$\text{On a } \forall n \geq 1 ; 0 \leq u_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n} ; \text{ soit } 0 \leq u_n \leq 10^{-5} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n} \leq 10^{-5} \Rightarrow e^{-n} \leq \frac{10^{-5}}{1 - \frac{1}{e}} \Rightarrow -n \leq \ln\left(\frac{10^{-5}}{1 - \frac{1}{e}}\right)$$

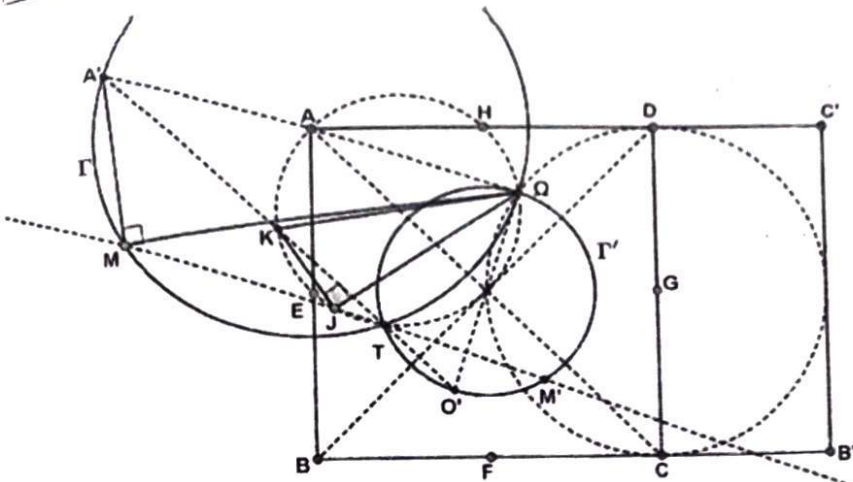
$$\Rightarrow n \geq -\ln\left(\frac{10^{-5}}{1 - \frac{1}{e}}\right) \Rightarrow n \geq 12. \text{ D'où } n_0 = 12.$$

**Exercice N°3 :**

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de sens direct de centre O.

Les points E, F, G et H les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale) :



2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  telle que  $r(D) = H$  et  $r(H) = O$  :

On a :  $\begin{cases} \overline{DH} = \overline{HO} \\ \overline{DH} \neq \overline{HO} \end{cases}$  alors il existe une unique rotation  $r$  telle que :  $r(D) = H$  et  $r(H) = O$ .

b. Déterminer le centre  $I$  et un angle de la rotation  $r$  :

• Le centre  $I$  de  $r$  est l'intersection des médiatrices des segments  $[DH]$  et  $[HO]$  alors  $I = D^*O$ .

Comme le triangle  $DHO$  est rectangle en  $H$ , d'où le cercle circonscrit à ce triangle a pour centre milieu de  $[DO]$ . Ce point est le centre de la rotation  $r$ .

• Un angle de la rotation  $r$  est  $(\overline{DH}; \overline{HO}) = (\overline{HD}; \overline{HO}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$ .

c. Montrer que  $r(A) = F$ , puis construire les points  $B'$  et  $C'$  images respectives de  $B$  et  $C$  par  $r$  :

On a :  $A = \text{bar}\{(H; 2); (D; -1)\} \Rightarrow r(A) = \text{bar}\{(r(H); 2); (r(D); -1)\} \Rightarrow r(A) = \text{bar}\{(O; 2); (H; -1)\} = F$

Donc l'image du carré direct  $DABC$  par  $r$  est le carré direct  $HFC'B'$ . D'où la construction des points  $B'$  et  $C'$

3. Soit  $h$  l'homothétie de centre  $D$  et de rapport  $k = \frac{1}{2}$ . On pose  $s = r \circ h$ .

a. Justifier que  $s$  est une similitude directe. Déterminer le rapport et l'angle de  $s$  :

Par définition  $s$  est une similitude directe.

• Rapport de  $s$  :  $k_s = k = \frac{1}{2}$ , l'angle de  $s$  est celui de  $\alpha_s = \frac{\pi}{2}$ . Donc  $s = s_{(\Omega; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2})}$ ;  $\Omega$  le centre de  $s$  à déterminer.

b. Déterminer l'image du carré  $ABCD$  par la similitude  $s$  ?

$s(A) = r \circ h(A) = r(H) = O$ ;  $s(B) = r \circ h(B) = r(O) = G$ ;  $s(C) = r \circ h(C) = r(G) = D$ ;  $s(D) = r \circ h(D) = r(D) = H$ .

Donc l'image du carré direct  $D$  par  $s$  est le carré direct  $OGDH$ .

4. Soit  $\Omega$  le centre de  $s$ .

a. Montrer que le point  $\Omega$  appartient aux cercles de diamètres  $[AO]$ ,  $[BG]$ ,  $[CD]$  et  $[DH]$  :

$$\begin{cases} s(\Omega) = \Omega \Rightarrow (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega O}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \Omega \in C_{[AO]} \\ s(A) = O \end{cases}$$

De même  $\Omega \in C_{[BG]}$ ;  $\Omega \in C_{[CD]}$  et  $\Omega \in C_{[DH]}$

b. On considère les cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  passant par  $\Omega$  et de centres respectifs  $A$  et  $O$ . Soit  $T$  l'intersection de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  autre que  $\Omega$ . Démontrer que  $s(\Gamma) = \Gamma'$ . En déduire que les points  $\Omega$ ,  $A$ ,  $O$  et  $T$  sont cocycliques :

$$s(C_{(A; \Omega)}) = C_{(s(A); s(\Omega))} = C_{(O; \Omega)} \Rightarrow s(\Gamma) = \Gamma'$$

On a :  $(AO)$  est une médiatrice de  $[OT]$ .

D'autre part la réflexion d'axe  $(AO)$  nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} S_{(AO)}(\Omega) = T \\ S_{(AO)}(A) = O \Rightarrow (\overline{\Omega A}; \overline{\Omega O}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] = (\overline{TA}; \overline{TO}). \end{cases}$$

D'où les points  $\Omega$ ;  $A$ ;  $O$  et  $T$  sont cocycliques.

c. Soit  $M$  un point de  $\Gamma$  distinct de  $\Omega$  et de  $T$ . On pose  $s(M) = M'$ . Démontrer que les points  $M$ ,  $M'$  et  $T$  sont alignés :

$$2(\overline{TM}; \overline{TM'}) = 2(\overline{TM}; \overline{TO}) + 2(\overline{TO}; \overline{TM'}) [2\pi] = 2(\overline{AM}; \overline{AO}) + 2(\overline{OM}; \overline{OM'}) [2\pi]$$

$$\text{Or } \begin{cases} s(\Omega) = \Omega \\ s(M) = M' \Rightarrow (\overline{OM}; \overline{OM'}) = (\overline{AM}; \overline{AM'}) [2\pi] \\ s(A) = O \end{cases}$$

$$\text{Donc } 2(\overline{TM}; \overline{TM'}) = 2(\overline{AM}; \overline{AO}) + 2(\overline{OM}; \overline{OM'}) [2\pi] = 2(\overline{AM}; \overline{AO}) + 2(\overline{AM}; \overline{AM'}) [2\pi] = 0 [2\pi]$$

Donc les points  $M$ ,  $M'$  et  $T$  sont alignés.

d. Soit  $A'$  et  $O'$  les points diamétralement opposés à  $\Omega$  respectivement sur les cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .  $J$  et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[MM']$  et  $[A'O']$ .

Déterminer la nature du triangle  $\Omega JK$ . En déduire le lieu géométrique du point  $J$  lorsque  $M$  décrit  $\Gamma$  privé de  $\Omega$  et de  $T$  :

Comme :  $A' = \text{bar}\{(A; 2); (\Omega; -1)\} \Rightarrow s(A') = \text{bar}\{(s(A); 2); (s(\Omega); -1)\} \Rightarrow s(A') = \text{bar}\{(O; 2); (\Omega; -1)\} = O'$ .  
 D'où les triangles  $\Omega A' M$  et  $\Omega O' M'$  sont semblables.

Donc il existe une similitude  $s_M$  de centre  $\Omega$  telle que :  $s_M(A') = M$  ;  $s_M(O') = M'$  ce qui nous permet d'écrire :

$$s_M([A'O']) = [M'M'] = J$$

Soit  $s'$  la similitude de centre  $\Omega$  qui transforme  $A'$  en  $K$ .

$$\text{On a : } s'(M) = s'(s_M(A')) = s_M(s'(A')) = s_M(K) = J.$$

$$\begin{cases} s'(\Omega) = \Omega \\ s'(A') = K \\ s'(M) = J \end{cases} \text{ . Comme } \Omega A' M \text{ est rectangle en } A' \text{ alors } \Omega K J \text{ est rectangle en } K.$$

Lorsque  $M$  décrit  $\Gamma$  privée de  $\Omega$  et  $T$  ;  $J$  décrit le cercle de diamètre  $\Omega J$  privée de  $T$  et  $\Omega$ .

**Exercice N°4 :**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = x \ln(x+1)$ .

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \ln(x+1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t-1) \ln t = -1 \times (-\infty) = +\infty. \text{ (En posant } t = x+1 \text{).}$$

Donc  $x = -1$  est AV de  $(C)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t-1) \ln t = +\infty \times (+\infty) = +\infty. \text{ (En posant } t = x+1 \text{).}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t. \text{ (En posant } t = x+1 \text{).}$$

Donc  $(C)$  admet BP de direction  $(Oy)$  au voisinage de  $+\infty$ .

b. Montrer que la fonction  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $] -1; 0[$  et strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  :

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

|                            |    |   |           |
|----------------------------|----|---|-----------|
| $x$                        | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $\ln(x+1)$                 |    | - | 0         |
| $\frac{x}{x+1}$            |    | - | 0         |
| $\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$ |    | - | 0         |

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

|         |    |   |           |
|---------|----|---|-----------|
| $x$     | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |    | - | 0         |
| $f(x)$  |    | - | +         |

2. a. Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x \neq -1$ ;  $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$  :

|    |   |    |   |
|----|---|----|---|
|    | 1 | 0  | 0 |
| -1 |   | -1 | 1 |
|    | 1 | -1 | 1 |
|    | a | b  | c |

$$\text{Donc pour tout } x \neq -1; \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

b. A l'aide d'une intégration par parties, calculer, en unités d'aires, l'aire  $A$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$  :

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x \ln(x+1) dx.$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \left[ \frac{x^2}{2} \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4} \text{ ua.}$$

3. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose :  $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$ .

a. Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique  $(u_n)$  :

Comme  $g(x) = x^n \ln(x+1)$  est continue sur  $[0; 1]$  alors l'intégrale  $u_n$  existe ce qui prouve la définition de la suite  $(u_n)$ .

b. Calculer  $u_1$  et en donner une interprétation graphique :

$$u_1 = \int_0^1 x \ln(x+1) dx = A = \frac{1}{4}$$

c. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. La suite  $(u_n)$  converge-t-elle ? Justifier :

$$\bullet u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx = \int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1) dx$$

or pour  $x \in [0; 1]$ ,  $x^n \ln(x+1) \geq 0$  et

$x-1 \leq 0$ , alors  $\int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ . Donc  $(u_n)$  est décroissante.

$\int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \geq 0 \Rightarrow u_n \geq 0$ . Donc  $(u_n)$  est minorée.

$(u_n)$  converge car elle est décroissante et minorée.

d. Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ . En déduire la limite de la suite numérique  $(u_n)$  :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2 \Rightarrow \forall n \geq 1; 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2 dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln 2 \right]_0^1 \Rightarrow \forall n \geq 1; 0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$  alors d'après TG  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

4. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose :  $v_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx$ .

a. Vérifier que :  $u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} v_n$  :

On a,  $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$  alors on pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} v_n$$

$$\text{Donc } \forall n \geq 1, u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} v_n$$

b. Démontrer que :  $\frac{1}{2(n+2)} \leq v_n \leq \frac{1}{n+2}$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)$  :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \Rightarrow \forall n \geq 1; \frac{x^{n+1}}{2} \leq \frac{x^{n+1}}{x+1} \leq x^{n+1} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{x^{n+2}}{2(n+2)} \right]_0^1 \leq v_n \leq \left[ \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 \Rightarrow \forall n \geq 1; \frac{1}{2(n+2)} \leq v_n \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \text{ alors d'après TG } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

c. Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $v_n = (-1)^n \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln 2 \right)$  :

$$\text{On a } \sum_{k=0}^n (-x)^k = 1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-1)^n x^n = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (-x)^k - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \Leftrightarrow (-1)^n \left[ 1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-1)^n x^n - \frac{1}{1+x} \right] = \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx = (-1)^n \int_0^1 \left[ 1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-1)^n x^n - \frac{1}{1+x} \right] dx = (-1)^n \left[ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ln(x+1) \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, v_n = (-1)^n \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln 2 \right).$$

d. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) = \ln 2$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln 2 \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) = \ln 2.$$

## Bac 2010 session normale

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^x - x - 1$ .

a. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b. En déduire que pour tout réel  $x$  :  $e^x \geq x + 1$ .

2. a. Montrer que pour tout réel  $x > -1$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ .

b. Montrer que pour tout réel  $x < 1$ ,  $\ln(1-x) \leq -x$ .

3. On considère la suite  $(S_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , par son terme général :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

c'est-à-dire  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .

a. En utilisant la question 2, montrer que pour  $n \geq 1$  :  $S_n \geq \ln(n+1)$ .

b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

4. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on pose :  $U_n = S_n - \ln n$ .

a. Montrer que pour tout entier naturel  $n > 1$  :  $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(U_n)$ .

b. En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente vers un réel  $\gamma$ , puis vérifier que  $0 < \gamma < 1$ . ( $\gamma$  est appelée la constante d'Euler).

#### Exercice N°2 :

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (6\cos\theta + i)z^2 + (4 + 5\cos^2\theta + 6i\cos\theta)z - (4 + 5\cos^2\theta)i$  où  $\theta \in [0; 2\pi[$ .

1. a. Vérifier que  $z_0 = i$  est une solution de l'équation  $P(z) = 0$ . Déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$ .

b. Déterminer les deux autres solutions  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $P(z) = 0$  sachant que si  $\sin\theta \geq 0$ ,  $\operatorname{Im}z_1 \geq 0$ .

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $M_0$ ;  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_0$ ;  $z_1$  et  $z_2$ . Soit  $G$  le centre de gravité du triangle  $M_0M_1M_2$ .

a. Démontrer que si  $\theta$  décrit l'intervalle  $[0; 2\pi[$ , alors l'affixe du point  $G$  est  $z_G = 2\cos\theta + \frac{1}{3}i$ .

b. Déterminer puis construire le lieu géométrique  $\Gamma$  du point  $G$ .

3. a. Démontrer que si  $\theta$  décrit l'intervalle  $[0; 2\pi[$ , alors le lieu géométrique  $\Gamma'$  des points  $M_1$  et  $M_2$  est une ellipse dont on déterminera une équation cartésienne.

b. Déterminer le centre et les sommets, puis calculer l'excentricité de l'ellipse  $\Gamma'$ . Construire  $\Gamma'$  dans le repère précédent.

#### Exercice N°3 :

1. On considère la fonction  $u$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $u(x) = x - 2 + \ln x$ .

a. Dresser le tableau de variation de la fonction  $u$ .

b. Montrer que  $u$  réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur un intervalle que l'on déterminera.

c. Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  puis vérifier que  $1 \leq \alpha \leq 2$ .

d. En déduire le signe de  $u(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

2. Soit  $f$  la fonction numérique définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 \ln x, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 1cm.

a. Démontrer que  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 0$ .

b. Démontrer que  $f$  est dérivable à droite de  $x_0 = 0$ . Préciser  $f'_d(0)$  et interpréter graphiquement.

c. Montrer que tout réel  $x$  strictement positif, on a :  $f(x) = xu\left(\frac{1}{x}\right)$ ; où  $u$  est la fonction définie à la question 1. En déduire le signe de  $f(x)$ .

d. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ . Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\beta$  et vérifier que  $1 \leq \beta \leq 2$ .

e. Tracer la courbe  $(C)$ .

3. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on pose  $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\beta} f(x) dx$ .

a. Exprimer  $I_n$  en fonction de  $\beta$  et de  $n$ . (On pourra utiliser une intégration par parties).

b. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et donner une interprétation géométrique de cette limite.

#### Exercice N°4 :

Dans le plan orienté on considère un carré  $ABCD$  de côté  $a$ , ( $a > 0$ ). Soient  $I, J, K$  et  $L$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ . Le point  $E$  est le symétrique de  $C$  par rapport à  $D$  et  $F$  celui de  $B$  par rapport à  $A$ .

1. Faire une figure illustrant les données précédentes.

2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme  $D$  en  $F$  et  $C$  en  $E$ . Préciser son angle et son centre.

b. Déterminer deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  telles que  $r = s_{\Delta_1} \circ s_{AC}$  et  $r = s_{AB} \circ s_{\Delta_2}$ .

c. Déterminer la nature de la composée  $\sigma = s_{AB} \circ s_{AD} \circ s_{AC}$  puis la caractériser.

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude  $s_1$  qui transforme  $D$  en  $L$  et  $C$  en  $D$ . Préciser son angle et son rapport.

b. Soit  $R$  le centre de la similitude  $s_1$ . Vérifier que le point  $R$  est commun aux cercles de diamètres  $[DL]$  et  $[CD]$  puis le préciser. Vérifier que  $R$  est le point d'intersection des droites  $(CL)$  et  $(DI)$ .

c. On considère l'homothétie  $h$  de centre  $C$  et de rapport  $\frac{1}{2}$ . Soit  $f = \text{hor}$ . Préciser la nature de  $f$  et déterminer  $f(D)$  et  $f(C)$ . Que peut-on remarquer ?

d. Donner la forme réduite de la similitude  $s_1$ .

4. On considère la similitude directe  $s_2$  qui transforme  $F$  en  $B$  et  $B$  en  $C$ .

a. Déterminer l'angle et le centre de  $s_2$ .

b. Soit  $Q$  le centre de  $s_2$ . Vérifier que  $Q$  est le point d'intersection des droites  $(CL)$  et  $(BK)$ .

5. Soient les points :  $P$  intersection des droites  $(AJ)$  et  $(BK)$ ;  $S$  intersection de  $(AJ)$  et  $(DI)$ .

a. Démontrer que :  $Q = \text{bar}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1); (D, 3)\}$ .

b. Donner des expressions semblables pour les points  $P, R$  et  $S$ .

c. Démontrer que  $PQRS$  est un carré puis calculer son aire en fonction de  $a$ .

6. Soit  $\Gamma$  l'ensemble des similitudes directes de centre  $O$  (centre du carré  $ABCD$ ), et qui transforme  $ABCD$  au carré  $PQRS$ .

a. Prouver que ces similitudes sont de même rapport puis le déterminer.

b. Soit  $g$  une similitude de l'ensemble  $\Gamma$  dont l'angle  $\theta \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ . Donner les valeurs exactes de chacun des nombres  $\sin\theta$  et  $\cos\theta$ .

c. Donner en fonction de  $\theta$  les angles possibles des autres éléments de l'ensemble  $\Gamma$ .

## Solution

### Exercice N°1 :

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^x - x - 1$ .

a. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$$D_f = ]-\infty; +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) = 0 - (+\infty) - 1 = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

b. En déduire que pour tout réel  $x$  :  $e^x \geq x + 1$  :

D'après le tableau de variation de  $f$  on a : pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq x + 1$ .

2. a. Montrer que pour tout réel  $x > -1$ ,  $\ln(1+x) \leq x$  :

$$\forall x > -1, e^x \geq x + 1 \Rightarrow \forall x > -1, x \geq \ln(x + 1)$$

b. Montrer que pour tout réel  $x < 1$ ,  $\ln(1-x) \leq -x$  ;

$$\forall x < 1, e^{-x} \geq -x + 1 \Rightarrow \forall x < 1, -x \geq \ln(1-x)$$

3. On considère la suite  $(S_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , par son terme général :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$\text{c'est-à-dire } S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

a. En utilisant la question 2, montrer que pour  $n \geq 1$  :  $S_n \geq \ln(n+1)$  :

$$\text{En posant } x = \frac{1}{k}, \text{ pour tout entier } k \geq 1 \text{ et d'après ma question 2, alors } \frac{1}{k} \geq \ln\left(\frac{1}{k} + 1\right) \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \Rightarrow S_n \geq \ln(n+1).$$

b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \text{ (D'après la comparaison des limites)}$$

4. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose :  $U_n = S_n - \ln n$ .

a. Montrer que  $\forall n > 1$  :  $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(U_n)$  :

$$U_n - U_{n-1} = S_n - \ln n - S_{n-1} + \ln(n-1) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$\text{D'après 3, on a : } \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq 0 \Rightarrow U_n - U_{n-1} \leq 0.$$

D'où  $(U_n)$  est décroissante.

b. En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente vers un réel  $\gamma$ , puis vérifier que  $0 < \gamma < 1$  :

$$\text{D'après 3. a, } S_n \geq \ln(n+1) \Rightarrow S_n \geq \ln(n+1) > \ln(n) \Rightarrow S_n - \ln(n) > 0 \Rightarrow U_n > 0.$$

La suite  $(U_n)$  est décroissante et minorée alors elle est convergente vers un réel  $\gamma$ .

$$0 < U_n < U_2 < U_1 \Rightarrow 0 < U_n < 1 \text{ car } U_1 = 1 \Rightarrow 0 < \gamma < 1.$$

### Exercice N°2 :

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (6\cos\theta + i)z^2 + (4+5\cos^2\theta + 6i\cos\theta)z - (4+5\cos^2\theta)i$  où  $\theta \in [0; 2\pi[$ .

1. a. Vérifier que  $z_0 = i$  est une solution de l'équation  $P(z) = 0$ . Déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$  :

$$i^3 - (6\cos\theta + i)i^2 + (4+5\cos^2\theta + 6i\cos\theta)i - (4+5\cos^2\theta)i = -i + 6\cos\theta + i + 4i + 5i\cos^2\theta - 6\cos\theta - 4i - 5i\cos^2\theta = 0.$$

D'où  $i$  est une solution de l'équation  $P(z) = 0$ .

Déterminons les réels  $a, b$  tels que  $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$ .

|     |                    |                                  |                        |
|-----|--------------------|----------------------------------|------------------------|
| $1$ | $-6\cos\theta - i$ | $4+5\cos^2\theta + 6i\cos\theta$ | $-4i - 5i\cos^2\theta$ |
| $i$ | $i$                | $-6i\cos\theta$                  | $4i + 5i\cos^2\theta$  |
| $1$ | $-6\cos\theta$     | $4+5\cos^2\theta$                | $0$                    |
|     | $a$                | $b$                              |                        |

$$\Rightarrow P(z) = (z - i)(z^2 - 6\cos\theta z + 4 + 5\cos^2\theta)$$

b. Déterminer les deux autres solutions  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $P(z) = 0$  sachant que si  $\sin\theta \geq 0$ ,  $\text{Im}z_1 \geq 0$  :

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z - i)(z^2 - 6\cos\theta z + 4 + 5\cos^2\theta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z - i = 0 \\ z^2 - 6\cos\theta z + 4 + 5\cos^2\theta = 0 \end{cases}$$

$$*z - i = 0 \Rightarrow z = z_0 = i.$$

$$*z^2 - 6\cos\theta z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$$

$$\Delta' = (-3\cos\theta)^2 - 4 - 5\cos^2\theta = -4 + 4\cos^2\theta = -4(1 - \cos^2\theta) = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$$

$$\Rightarrow z_1 = 3\cos\theta + 2i\sin\theta \text{ et } z_2 = 3\cos\theta - 2i\sin\theta.$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $M_0$ ;  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_0$ ;  $z_1$  et  $z_2$ . Soit  $G$  le centre de gravité du triangle  $M_0M_1M_2$ .

a. Démontrer que si  $\theta$  décrit l'intervalle  $[0; 2\pi[$ , alors l'affixe du point  $G$  est  $z_G = 2\cos\theta + \frac{1}{3}i$ :

$$\text{On a } M_0(z_0); M_1(z_1) \text{ et } M_2(z_2) \Rightarrow z_G = \frac{z_0 + z_1 + z_2}{3} = \frac{1 + 3\cos\theta + 2i\sin\theta + 3\cos\theta - 2i\sin\theta}{3} = 2\cos\theta + \frac{1}{3}i.$$

b. Déterminer puis construire le lieu géométrique  $\Gamma$  du point  $G$ :

$$x_G = 2\cos\theta \Rightarrow -2 \leq x_G \leq 2 \text{ (car } -1 \leq \cos\theta \leq 1) \text{ et } y_G = \frac{1}{3}. \text{ D'où } G \text{ décrit le segment } [AB] \text{ où } A(-2; \frac{1}{3}) \text{ et } B(2; \frac{1}{3}).$$

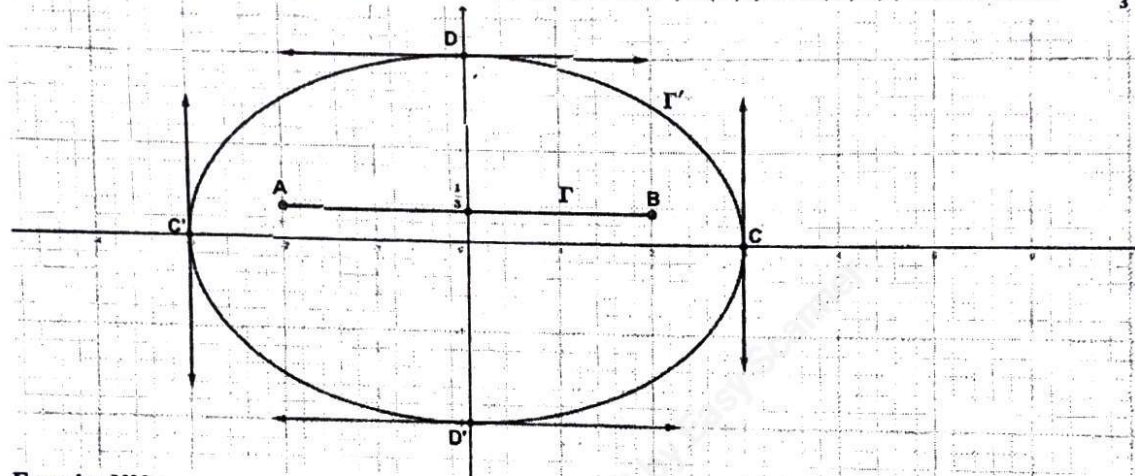
3. a. Démontrer que si  $\theta$  décrit l'intervalle  $[0; 2\pi[$ , alors le lieu géométrique  $\Gamma'$  des points  $M_1$  et  $M_2$  est une ellipse dont on déterminera une équation cartésienne:

$$M_1(3\cos\theta; 2\sin\theta) \text{ soit } M_1(x; y) \text{ alors : } \begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \cos\theta \\ \frac{y}{2} = 2\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{3^2} = \cos^2\theta \\ \frac{y^2}{2^2} = \sin^2\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

D'où  $\Gamma'$  est une ellipse.

b. Déterminer le centre et les sommets, puis calculer l'excentricité de l'ellipse  $\Gamma'$ . Construire  $\Gamma'$  dans le repère précédent:

$$\text{Le centre de } \Gamma' \text{ est } O(0; 0); \text{ Les sommets sont } C(3; 0); C'(-3; 0); D(0; 2) \text{ et } D'(0; -2); \text{ Excentricité } e = \frac{\sqrt{3^2 - 2^2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



### Exercice N°3 :

1. On considère la fonction  $u$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $u(x) = x - 2 + \ln x$ .

a. Dresser le tableau de variation de la fonction  $u$  :

$$D_u = ]0; +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2 + \ln x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}) = +\infty \times 1 = +\infty.$$

$$u'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $u'(x)$ |   | +         |
| $u(x)$  |   | $+\infty$ |

$-\infty$

b. Montrer que  $u$  réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur un intervalle que l'on déterminera :

$f$  est continue et strictement croissante de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$  alors elle réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

c. Montrer que l'équation  $u(x)=0$  admet une unique solution  $\alpha$  puis vérifier que  $1 \leq \alpha \leq 2$  :

Comme  $u$  est bijective de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$  alors l'équation  $u(x)=0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]0; +\infty[$ .

$$u(1) = -1$$

$$u(2) \approx 0,7 \Rightarrow \text{d'après le théorème de la valeur intermédiaire } 1 < \alpha < 2.$$

d. En déduire le signe de  $u(x)$  sur  $]0; +\infty[$  :

|        |   |          |           |
|--------|---|----------|-----------|
| $x$    | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $u(x)$ | - | 0        | +         |

2. Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $\begin{cases} f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 \ln x, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 1cm.

a. Démontrer que  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{-3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 \ln x \right) = 0 = f(0)$$

Donc  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 0$ .

b. Démontrer que  $f$  est dérivable à droite de  $x_0 = 0$ . Préciser  $f'_d(0)$  et interpréter graphiquement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{-3}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x \right) = 1.$$

D'où  $f$  est dérivable à droite de  $x_0 = 0$  et  $f'_d(0) = 1$ . La courbe (C) admet à droite de 0 une demi-tangente  $T_0$  de coefficient directeur 1.

c. Montrer que tout réel  $x$  strictement positif, on a :  $f(x) = xu\left(\frac{1}{x}\right)$  ; où  $u$  est la fonction définie à la question 1. En déduire le signe de  $f'(x)$  :

$$\text{Pour } x > 0, f(x) = \frac{-3}{2}x + 1 - \frac{1}{2}(2x \ln x + x) = -2x + 1 - x \ln x = x \left( -2 + \frac{1}{x} - \ln x \right) = xu\left(\frac{1}{x}\right)$$

d. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ . Montrer que l'équation  $f(x)=0$  admet dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\beta$  et vérifier que  $1 \leq \beta \leq 2$  :

• Signe de  $f'(x)$  :

$$x > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{x} < \alpha \Rightarrow u\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \Rightarrow xu\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 ; x < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{x} > \alpha \Rightarrow u\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow xu\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$$

$$x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{x} = \alpha \Rightarrow u\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow xu\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

• Limite de  $f$  en  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{-3}{4} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln x \right) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

|         |   |                                  |           |
|---------|---|----------------------------------|-----------|
| $x$     | 0 | $\frac{1}{\alpha}$               | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | 0 | +                                | 0         |
| $f(x)$  |   | $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ |           |
|         | 0 |                                  | $-\infty$ |

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 0$$

•  $f\left(\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]\right) = ]-\infty; f\left(\frac{1}{\alpha}\right)]$ ,  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$  et  $0 \in ]-\infty; f\left(\frac{1}{\alpha}\right)]$ , alors l'équation  $f(x)=0$  admet dans  $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$  une unique solution.

•  $f\left(\left]0; \frac{1}{\alpha}\right]\right) = \left]0; f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]$ ,  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\left]0; \frac{1}{\alpha}\right]$  et  $0 \notin ]-\infty; f\left(\frac{1}{\alpha}\right)]$ , alors l'équation  $f(x)=0$  n'admet pas dans  $\left]0; \frac{1}{\alpha}\right]$  une solution. D'où l'équation  $f(x)=0$  admet dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\beta$ .

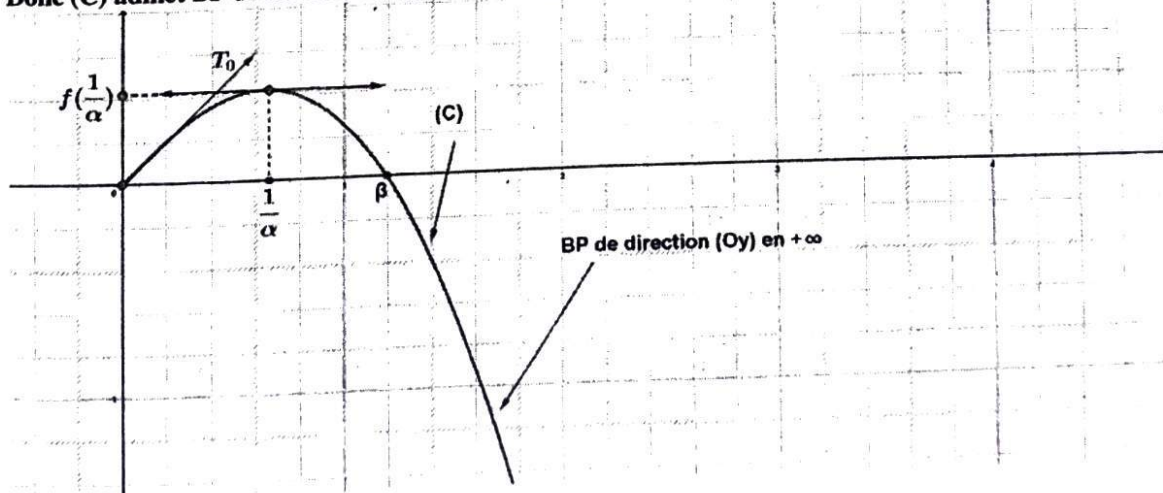
$$f(1) = 0,25 \quad \left| \Rightarrow \text{d'après le théorème de la valeur intermédiaire } 1 < \beta < 2. \right.$$

$$f(2) \approx -2,4$$

e. Tracer la courbe (C) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-3}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x \right) = -\infty.$$

Donc (C) admet BP de direction (Oy) au voisinage de  $+\infty$ .



3. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on pose  $I_n = \int_1^\beta f(x) dx$ .

a. Exprimer  $I_n$  en fonction de  $\beta$  et de  $n$ . (On pourra utiliser une intégration par parties) :

$$I_n = \int_1^\beta f(x) dx = \int_1^\beta \left( -\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 \ln x \right) dx = -\frac{1}{4} [x^3]_1^\beta + \frac{1}{2} [x^2]_1^\beta - \frac{1}{2} \int_1^\beta x^2 \ln x dx$$

$$= -\frac{\beta^3}{4} + \frac{1}{4n^3} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2} \int_1^\beta x^2 \ln x dx$$

Calculons  $\int_1^\beta x^2 \ln x dx$  ?

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^\beta x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} [x^3 \ln x]_1^\beta - \frac{1}{3} \int_1^\beta x^2 dx = \frac{1}{3} [x^3 \ln x]_1^\beta - \frac{1}{9} [x^3]_1^\beta = \frac{\beta^3}{3} \ln \beta + \frac{\ln n}{3n^3} - \frac{\beta^3}{9} + \frac{1}{9n^3}$$

D'où  $I_n = -\frac{\beta^3}{4} + \frac{1}{4n^3} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2n^2} - \frac{\beta^3}{6} \ln \beta - \frac{\ln n}{6n^3} + \frac{\beta^3}{18} - \frac{1}{18n^3} = \frac{-7\beta^3 + 18\beta^2}{18} - \frac{\beta^3}{6} \ln \beta + \frac{1}{4n^3} - \frac{1}{2n^2} - \frac{\ln n}{6n^3} - \frac{1}{18n^3}$

b. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et donner une interprétation géométrique de cette limite :

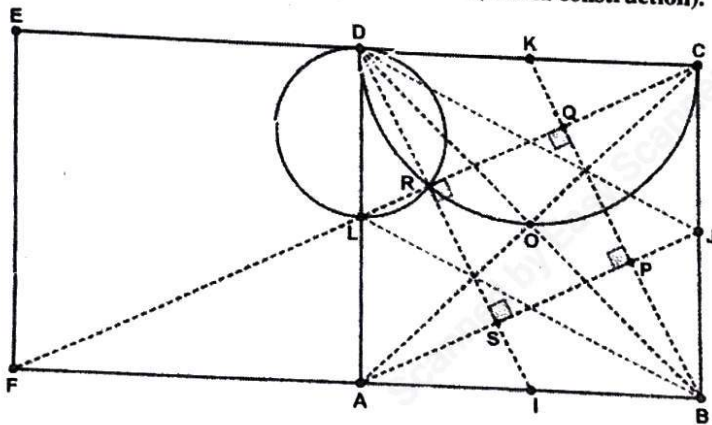
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{-7\beta^3 + 18\beta^2}{18} - \frac{\beta^3}{6} \ln \beta + \frac{1}{4n^3} - \frac{1}{2n^2} - \frac{\ln n}{6n^3} - \frac{1}{18n^3} \right) = \frac{-7\beta^3 + 18\beta^2}{18} - \frac{\beta^3}{6} \ln \beta$$

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$  alors  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ . D'où  $I_n \rightarrow \int_0^\beta f(x) dx$ , c'est l'aire du domaine délimité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=0$  et  $x=\beta$ .

**Exercice N°4 :**

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de côté  $a$ , ( $a > 0$ ). Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Le point E est le symétrique de C par rapport à D et F celui de B par rapport à A.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes ; (voir la construction).



2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme D en F et C en E. Préciser son angle et son centre/

$$\begin{cases} \overline{DC} = \overline{FE} = a \\ \overline{DC} \neq \overline{FE} \end{cases} \text{ alors il existe une unique } r : \begin{cases} D \rightarrow F \\ C \rightarrow E \end{cases}$$

• L'angle de  $r$  :  $(\overline{DC}; \overline{FE}) = (\overline{ED}; \overline{FE}) = (\overline{ED}; \overline{EF}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$ .

• Le centre de  $r = \text{med}[DC] \cap \text{med}[CE] = \{A\}$ .

D'où  $r = r_{(A; \frac{\pi}{2})}$

b. Déterminer deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  telles que  $r = s_{\Delta_1} \circ s_{AC}$  et  $r = s_{AB} \circ s_{\Delta_2}$  :

$r(D) = F \Rightarrow s_{\Delta_1} \circ s_{AC}(D) = F \Rightarrow s_{\Delta_1}(B) = F \Rightarrow \Delta_1 = \text{med}[BF] = (AD)$ . D'où  $r = s_{AD} \circ s_{AC}$

$r^{-1}(F) = D \Rightarrow s_{\Delta_2} \circ s_{AB}(F) = D \Rightarrow s_{\Delta_2}(F) = D \Rightarrow \Delta_2 = \text{med}[DF] = (AE)$ . D'où  $r = s_{AB} \circ s_{AE}$

c. Déterminer la nature de la composée  $\sigma = s_{AB} \circ s_{AD} \circ s_{AC}$  puis la caractériser :

$\sigma = s_{AB} \circ s_{AD} \circ s_{AC} = s_{AB} \circ r = s_{AB} \circ s_{AD} \circ s_{AB} \circ s_{AE} = s_{AE}$   
D'où  $\sigma$  est la réflexion d'axe (AE).

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude  $s_1$  qui transforme D en L et C en D. Préciser son angle et son rapport :

$D \neq L$  et  $C \neq D$  alors il existe une unique similitude directe  $s_1 : \begin{cases} D \rightarrow L \\ C \rightarrow D \end{cases}$

• L'angle de  $s_1$  :  $(\overline{DC}; \overline{LD}) = (\overline{DC}; \overline{DL}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$ .

• Le rapport de  $s_1 = \frac{LD}{DC} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$ .

b. Soit R le centre de la similitude  $s_1$ . Vérifier que le point R est commun aux cercles de diamètres [DL] et [CD] puis le préciser. Vérifier que R est le point d'intersection des droites (CL) et (DI) :

• On a  $s_1 : \begin{cases} R \rightarrow R \\ D \rightarrow L \Rightarrow (\overline{RD}; \overline{RL}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R \in C_{[DL]} \text{ et } (\overline{RD}; \overline{RL}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R \in C_{[CD]} \\ C \rightarrow D \end{cases}$

D'où Le point R est l'intersection autre que D de  $C_{[DL]}$  et  $C_{[CD]}$ .

•  $(\overline{RC}; \overline{RL}) = (\overline{RC}; \overline{RD}) + (\overline{RD}; \overline{RL}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow R \in (CL)$ .

• On a  $s_1(CL) = (DI)$  (car (CL) et (DI) sont perpendiculaires) et comme  $R \in (CL)$  alors  $s_1(R) = R \in (DI)$ .

D'où Le point R est l'intersection des droites (CL) et (DI).

$r_{(O; \frac{\pi}{2})} : \begin{cases} C \rightarrow D \\ L \rightarrow I \end{cases}$

c. On considère l'homothétie h de centre C et de rapport  $\frac{1}{2}$ . Soit f = hor. Préciser la nature de f et déterminer f(D) et f(C). Que peut-on remarquer ?

f est une similitude directe car c'est la composée d'une homothétie et d'une rotation.

$r = r_{(A; \frac{\pi}{2})}$  et  $h = h_{(C; \frac{1}{2})}$  et

$f(D) = \text{hor}(D) = h(F) = L$  et  $f(C) = \text{hor}(C) = h(E) = D$ .

Donc  $f = s_1$  car :  $\begin{cases} D \rightarrow L \\ C \rightarrow D \end{cases}$

d. Donner la forme réduite de la similitude  $s_1$  :

$s_1 = h_1 \circ r_1 = r_1 \circ h_1$  avec  $h_1 = h_{(R; \frac{1}{2})}$  et  $r_1 = r_{(R; \frac{\pi}{2})}$

4. On considère la similitude directe  $s_2$  qui transforme F en B et B en C.

a. Déterminer l'angle et le centre de  $s_2$  :

$s_2 : \begin{cases} F \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{cases}$

• L'angle de  $s_2 : (\overline{FB}; \overline{BC}) = (\overline{BF}; \overline{BC}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$ .

• Le rapport de  $s_2 = \frac{BC}{BF} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ .

b. Soit Q le centre de  $s_2$ . Vérifier que Q est le point d'intersection des droites (CL) et (BK) :

•  $s_2 = s_{(Q; \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})}$  et  $s_2 : \begin{cases} F \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\overline{QF}; \overline{QB}) = \frac{\pi}{2} \\ (\overline{QB}; \overline{QC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow (\overline{QF}; \overline{QB}) + (\overline{QB}; \overline{QC}) = \pi \Rightarrow (\overline{QF}; \overline{QC}) = \pi$

$\Rightarrow Q \in (FC) \Rightarrow Q \in (CL)$

•  $s_2(CL) = (BK) \Rightarrow Q \in (BK)$  puis que  $Q \in (CL)$ .

Donc  $Q \in (CL) \cap (BK)$ .

5. Soient les points : P intersection des droites (AJ) et (BK) ; S intersection de (AJ) et (DI).

a. Démontrer que :  $Q = \text{bar}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1); (D, 3)\}$  :

Soit  $Q = \text{bar}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1); (D, 3)\}$ . Montrons que  $H=Q$ .

•  $H = \text{bar} \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{bar} \begin{bmatrix} B & C & D & B & C & D \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{bar} \begin{bmatrix} B & C & D \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$= \text{bar} \begin{bmatrix} B & K \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow H \in (BK)$

•  $H = \text{bar} \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{bar} \begin{bmatrix} A & A & C & D & C & D \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{bar} \begin{bmatrix} C & A & D \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \text{bar} \begin{bmatrix} C & L \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow H \in (CL)$

$\left. \begin{array}{l} H \in (BK) \\ H \in (CL) \end{array} \right\} \Rightarrow H=Q$ . D'où  $Q = \text{bar}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1); (D, 3)\}$

b. Donner des expressions semblables pour les points P, R et S :  
 $P = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 3); (D, -1)\}$  ;  $R = \text{bar}\{(A, 3); (B, -1); (C, 2); (D, 1)\}$  ;  $S = \text{bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, -1); (D, 2)\}$

c. Démontrer que PQRS est un carré puis calculer son aire en fonction de a :

Le quadrilatère PQRS est un rectangle, il suffit alors de vérifier que deux côtés consécutifs sont égaux.

$\overline{KQ} = \frac{1}{5}\overline{KB}$  et  $\overline{PQ} = -\frac{2}{5}\overline{KB} \Rightarrow \overline{PQ} = -2\overline{KQ} \Rightarrow PQ = 2KQ = \frac{2}{5}KB$ , or  $KB = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

D'où  $RS = SP = PQ = QR = \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{5} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ . Donc PQRS est un carré.

6. Soit  $\Gamma$  l'ensemble des similitudes directes de centre  $O$  (centre du carré  $ABCD$ ), et qui transforme  $ABCD$  au carré  $PQRS$ .

a. Prouver que ces similitudes sont de même rapport puis le déterminer :

Soit  $s_{(O)}$  un élément de  $\Gamma$  alors le rapport de est  $\frac{\text{côté PQRS}}{\text{côté ABCD}} = \frac{a\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b. Soit  $g$  une similitude de l'ensemble  $\Gamma$  dont l'angle  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Donner les valeurs exactes de chacun des nombres  $\sin\theta$  et  $\cos\theta$  :

$g : \begin{matrix} A \rightarrow S \\ B \rightarrow P \end{matrix}$  avec  $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{SP}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AJ})$  alors  $\sin\theta = \frac{BJ}{AJ} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$  et  $\cos\theta = \frac{AB}{AJ} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

c. Donner en fonction de  $\theta$  les angles possibles des autres éléments de l'ensemble  $\Gamma$  :

Soit  $\sigma$  un élément de  $\Gamma$  et soit  $\sigma(A) = S$ . On peut rencontrer l'un des cas suivants :

- $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OS}) = \theta [2\pi]$
- $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OS}) + \frac{\pi}{2} = \theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OQ}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OS}) + \pi = \theta + \pi [2\pi]$
- $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OR}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OS}) + \frac{3\pi}{2} = \theta + \frac{3\pi}{2} [2\pi]$

## Bac 2010 session complémentaire

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Pour tout réel  $t$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on pose :  $G_0(t) = \int_0^t e^x dx$  et  $G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$ .

1. a. Démontrer que  $G_n(x)$  existe pour tout entier naturel et donner l'expression  $G_0(t)$  et  $G_1(t)$  en fonction de  $t$ .

b. Démontrer que pour tout réel  $t \geq 0$  on a :  $\frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2 e^t$ .

c. Démontrer que pour tout réel  $t \leq 0$  on a :  $\frac{1}{2}t^2 e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2$ .

d. En déduire le calcul de la limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)}$ .

2. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on pose :  $I_n = G_n(1) = \int_0^1 x^n e^x dx$ .

a. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on a :  $G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$ . En déduire  $I_n$  en fonction de  $I_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .

b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?

c. Donner un encadrement de  $I_n$  qui permet de calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et calculer cette limite.

#### Exercice N°2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 + (-6 + 16i)z + 12 - 4i$$

1. a. Calculer  $P(1+i)$ .

b. Déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z-1-i)(z^2+az+b)$ .

c. Déterminer les solutions de l'équation  $P(z)=0$ .

2. a. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  images des solutions de l'équation  $p(z)=0$  sachant que  $|z_A| < |z_B| < |z_C|$ . Déterminer la nature du triangle  $ABC$ .

b. Montrer qu'il existe une similitude  $s$  de centre  $A$  qui transforme  $C$  en  $B$ .

c. Déterminer l'expression complexe de  $s$ . Déterminer le rapport et un angle de  $s$ .

3. On considère la transformation  $f$  à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{1-i}{2}z + i$ . Pour tout entier  $n$ , on pose  $f^1 = f$  et  $f^n = f \circ f^{n-1}$ . On définit une suite de points  $(M_n)$  par  $M_0 = C$  et  $M_n = f^n(M_0)$ .

a. Reconnaître la transformation  $f$  et déterminer ses éléments caractéristiques.

b. Déterminer la nature du triangle  $AM_nM_{n+1}$

c. Calculer en fonction de  $n$  la somme :  $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$

d. Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et l'interpréter.

#### Exercice N°3 :

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct  $ABC$  de côté  $a$ , ( $a > 0$ ). Soient  $I$ ,  $J$  et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$ .

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.

2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme  $I$  en  $C$  et  $B$  en  $J$ .

b. Préciser l'angle et le centre  $\Omega$  de  $r_1$ .

3. Soit  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{CK}$ . On pose  $r_2 = t \circ r_1$ .

a. Déterminer la nature de la composée  $r_2 = t \circ r_1$ . Préciser  $r_2(I)$  et  $r_2(B)$ . Caractériser  $r_2$ .

b. Déterminer une droite  $\Delta$  telle que  $s_{\Delta} \circ r_2 = s_{AJ}$ . En déduire une autre décomposition de  $r_2$ .

4. On considère les similitudes directes  $s_1$  et  $s_2$  de centres respectifs A et C telles que  $s_1(B) = K$  et  $s_2(K) = B$ .
- Déterminer un angle et le rapport de chacune des similitudes directes  $s_1$  et  $s_2$ .
  - Déterminer la nature de la composée  $f = s_1 \circ s_2$  et la caractériser.
5. Dans cette question, M est un point variable du plan. On pose  $r_1(M) = M_1$  et  $r_2(M) = M_2$ .
- Démontrer que si M est distinct de J et de  $\Omega$  alors on a :  $(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) [2\pi]$ .
  - En déduire le lieu géométrique du point M lorsque les points M,  $M_1$  et  $M_2$  sont alignés.
  - Démontrer que pour toute position du point M dans le plan, la distance  $M_1M_2$  reste constante et la préciser et que la droite  $(M_1M_2)$  possède une direction fixe à préciser.

**Exercice N°4 :**

I- On considère la fonction numérique g définie par :  $g(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x+1}$ .

- Vérifier que pour tout réel  $x > -1$ , on a :  $g(x) > 0$ .
- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel  $x > -1$  on a :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ .
- Déterminer la primitive G de la fonction g sur l'intervalle  $I = ]-1; +\infty[$  et qui vérifie  $G(0) = 1$ .

II- On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle  $I = ]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 + x + 1 + \ln(x+1)$ . Soit (C) sa courbe représentative dans repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 1cm.

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Donner une interprétation graphique.
- Dresser le tableau de variation de f.
  - Montrer que f réalise une bijection de  $I = ]-1; +\infty[$  sur un intervalle J que l'on déterminera.
  - Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ . Vérifier que  $-0,53 < \alpha < -0,52$ .
- Montrer que pour tout  $x > 0$  on a :  $f(x) \geq x + 1$ . Interprétation graphique.
  - Montrer que les courbes (C) et (C'), représentant respectivement la fonction f et sa réciproque  $f^{-1}$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , se coupent en un unique point dont l'abscisse  $\beta$  vérifie  $-0,81 < \beta < -0,80$ .
- Démontrer que  $(f^{-1})'(\beta) = \frac{\beta+1}{2\beta^2+3\beta+2}$ .
- Déterminer tous les points de la courbe (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation  $y = 2x$ .
  - Discuter suivant les valeurs du paramètre k le nombre de solution de l'équation  $x^2 - x + 1 + \ln(x+1) = k$ .
  - Construire les courbes (C) et (C').
- Soit A l'aire du domaine plan limité par les courbes (C) et (C') et les axes des coordonnées.
  - Montrer que  $A = \alpha^2 + \int_{\beta}^{\alpha} (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)) dx$
  - Calculer A en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ . (On pourra utiliser une intégration par parties).

## Solution

**Exercice N°1 :**

Pour tout réel t et pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on pose :  $G_0(t) = \int_0^t e^x dx$  et  $G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$ .

- Démontrer que  $G_n(x)$  existe pour tout entier naturel et donner l'expression  $G_0(t)$  et  $G_1(t)$  en fonction de t :

$$G_0(t) = \int_0^t e^x dx = [e^x]_0^t = e^t - 1.$$

$$G_1(t) = \int_0^t x e^x dx ?$$

$$\begin{cases} u(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_1(t) = [xe^x]_0^t - \int_0^t e^x dx = [xe^x]_0^t - [e^x]_0^t = te^t - e^t + 1.$$

- Démontrer que pour tout réel  $t \geq 0$  on a :  $\frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2 e^t$  :

$$\text{Si } t \geq 0; 0 \leq x \leq t \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e^t \Rightarrow x \leq xe^x \leq xe^t \Rightarrow \int_0^t x dx \leq \int_0^t x e^x dx \leq \int_0^t x e^t dx \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t \leq G_1(t) \leq e^t \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2 e^t.$$

- Démontrer que pour tout réel  $t \leq 0$  on a :  $\frac{1}{2}t^2 e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2$  :

$$\text{Si } t \leq 0; \text{ on a } G_1(t) = \int_0^t x e^x dx = - \int_t^0 x e^x dx ?$$

$$\text{Comme } t \leq x \leq 0 \Rightarrow e^t \leq e^x \leq 1 \Rightarrow x \leq xe^x \leq xe^t \Rightarrow \int_t^0 x dx \leq \int_t^0 x e^x dx \leq \int_t^0 x e^t dx \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x^2\right]_t^0 \leq -G_1(t) \leq e^t \left[\frac{1}{2}x^2\right]_t^0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}t^2 \leq -G_1(t) \leq -\frac{1}{2}t^2 e^t \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2.$$

- En déduire le calcul de la limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)}$  :

$$\text{Si } t \geq 0 \text{ alors } \frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2 e^t \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 \leq te^t - e^t + 1 \leq \frac{1}{2}t^2 e^t \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}t^2}{t(e^t - 1)} \leq \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} \leq \frac{\frac{1}{2}t^2 e^t}{t(e^t - 1)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}t}{e^t - 1} \leq \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} \leq \frac{\frac{1}{2}te^t}{e^t - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{e^t - 1} < \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} < \frac{1}{2} \times \frac{1}{e^t - 1} \dots \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^t - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^t - 1} \times e^t = 1, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} = \frac{1}{2}$$

• Si  $t \leq 0$  alors  $\frac{1}{2}t^2 e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 e^t \leq te^t - e^t + 1 \leq \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}t^2 e^t}{t(e^t - 1)} \leq \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} \leq \frac{\frac{1}{2}t^2}{t(e^t - 1)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}te^t}{e^t - 1} \leq \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} \leq \frac{\frac{1}{2}t}{e^t - 1}$   
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{e^t - 1} \times e^t \leq \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{e^t - 1}$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^t - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^t - 1} = 1$ , alors  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} = \frac{1}{2}$

D'où  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} = \frac{1}{2}$

2. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on pose :  $I_n = G_n(1) = \int_0^1 x^n e^x dx$ .

a. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  on a :  $G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$ . En déduire  $I_n$  en fonction de  $I_{n-1}$  pour  $n \geq 1$  :

On a :  $G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$ .  
 $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v(x) = x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = nx^{n-1} \end{cases} \Rightarrow G_n(t) = [x^n e^x]_0^t - n \int_0^t x^{n-1} e^x dx = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$

$G_n(1) = e - nG_{n-1}(1) \Rightarrow I_n = e - nI_{n-1}$   
 b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq x^{n-1} \Rightarrow 0 \leq x^n e^x \leq x^{n-1} e^x \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 x^{n-1} e^x dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq I_{n-1}$

D'où  $(I_n)$  est décroissante et positive.  
 $(I_n)$  est convergente car elle est décroissante et minorée.

c. Donner un encadrement de  $I_n$  qui permet de calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et calculer cette limite :

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e \Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e x^n \Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 e x^n dx \Rightarrow \frac{1}{n+1} [x^{n+1}]_0^1 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} [e x^{n+1}]_0^1$   
 $\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

**Exercice N°2 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 + (-6 + 16i)z + 12 - 4i$

1. a. Calculer  $P(1+i)$  :  
 $P(1+i) = (1+i)^3 - (4+6i)(1+i)^2 + (-6+16i)(1+i) + 12 - 4i = -2 + 2i - 8i + 12 - 22 + 10i + 12 - 4i = 0$

b. Déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z-1-i)(z^2 + az + b)$  :

Déterminons les réels  $a, b$  tels que  $P(z) = (z-1-i)(z^2 + az + b)$ .

|     |   |       |        |        |
|-----|---|-------|--------|--------|
|     | 1 | -4-6i | -6+16i | 12-4i  |
| 1+i |   | 1+i   | 2-8i   | -12+4i |
|     | 1 | -3-5i | -4+8i  | 0      |
|     |   | a     | b      |        |

$\Rightarrow P(z) = (z-1-i)(z^2 - (3+5i)z - 4 + 8i)$

c. Déterminer les solutions de l'équation  $P(z) = 0$  :

$P(z) = 0 \Rightarrow (z-1-i)(z^2 - (3+5i)z - 4 + 8i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z-1-i = 0 \\ z^2 - (3+5i)z - 4 + 8i = 0 \end{cases}$

$z-1-i = 0 \Rightarrow z_0 = 1+i$

$z^2 + (-4+2i)z - 4 + 8i = 0$

$\Delta = (-3+5i)^2 - 4(-4+8i) = 9 - 25 + 30i + 16 - 32i = -2i = (1-i)^2$

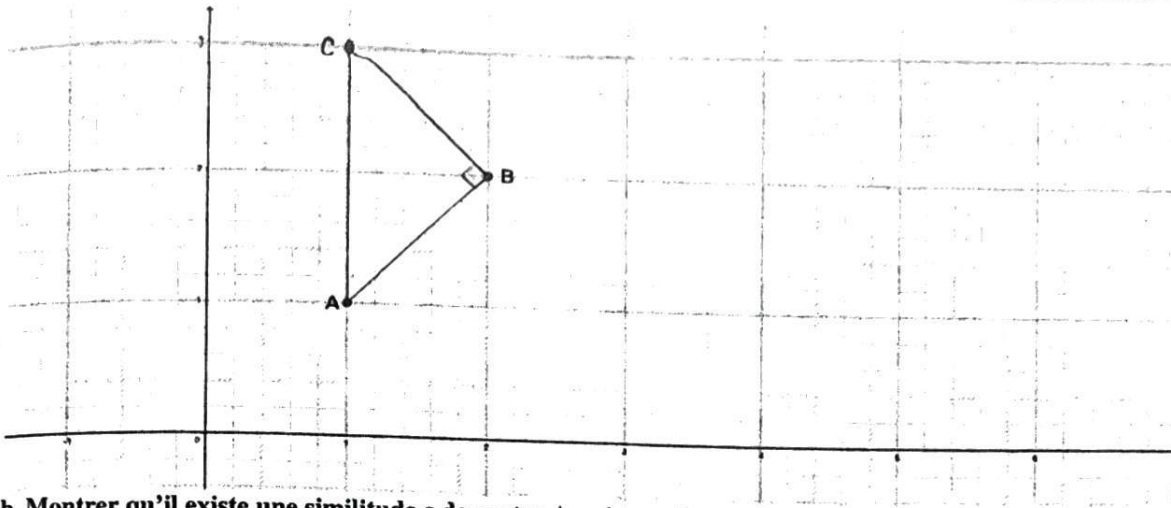
$\Rightarrow z_1 = \frac{3+5i+1-i}{2} = 2+2i$  et  $z_2 = \frac{3+5i-1+i}{2} = 1+3i$ .

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est  $\{1+i; 2+2i; 1+3i\}$ .

2. a. Placer les points A, B et C images des solutions de l'équation  $p(z)=0$  sachant que  $|z_A| < |z_B| < |z_C|$ . Déterminer la nature du triangle ABC :

$|1+i| = \sqrt{2}; |2+2i| = 2\sqrt{2}$  et  $|1+3i| = \sqrt{10} \Rightarrow z_A = 1+i; z_B = 2+2i$  et  $z_C = 1+3i$ .

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1+i-2-2i}{1+3i-2-2i} = \frac{-1-i}{-1+i} = i$ . D'où le triangle ABC est rectangle isocèle en B.



b. Montrer qu'il existe une similitude  $s$  de centre  $A$  qui transforme  $C$  en  $B$  :

Les points  $A, B$  et  $C$  sont distincts deux à deux, alors il existe une unique similitude directe  $s$  de centre  $A$  qui transforme  $C$  en  $B$ .

c. Déterminer l'expression complexe de  $s$ . Déterminer le rapport et un angle de  $s$ .

L'angle de  $s$  :  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{2+2i-1-i}{1+3i-1-i}\right) = \arg\left(\frac{1+i}{2i}\right) = \arg(1+i) - \arg(2i) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

Le rapport de  $s$  :  $\frac{AB}{AC} = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{|1+i|}{|2i|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Comme  $s = S_{(A; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\pi}{4})}$  alors  $z' - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}(z - z_A) \Rightarrow z' = 1 + i + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)(z - 1 - i)$

$\Rightarrow z' = 1 + i + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)(z - 1 - i) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)z + i \Rightarrow z' = \frac{1-i}{2}z + i$

3. On considère la transformation  $f$  à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{1-i}{2}z + i$ . Pour tout entier  $n$ , on pose  $f^1 = f$  et  $f^n = f \circ f^{n-1}$ . On définit une suite de points  $(M_n)$  par  $M_0 = C$  et  $M_n = f^n(M_0)$ .

a. Reconnaitre la transformation  $f$  et déterminer ses éléments caractéristiques :

$f = S_{(A; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\pi}{4})}$

b. Déterminer la nature du triangle  $AM_nM_{n+1}$  :

$M_{n+1} = f^{n+1}(M_0) = f \circ f^n(M_0) = f(M_n)$  or  $f$  de centre  $A$  transforme  $C$  en  $B$ .  $ABC$  est rectangle isocèle en  $B$   
 $f$  transforme  $M_n$  en  $M_{n+1}$

Alors le triangle  $AM_nM_{n+1}$  est rectangle isocèle en  $M_{n+1}$ .

c. Calculer en fonction de  $n$  la somme :  $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$  :

On pose  $u_n = M_nM_{n+1}$ .

$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{M_nM_{n+1}}{M_{n-1}M_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  alors  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .  $S_n$  est la somme des  $(n+1)$  premiers termes de la suite

$\Rightarrow S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

d. Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et l'interpréter :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1.$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  est la limite de la ligne brisée :  $M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$ .

**Exercice N°3 :**

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct  $ABC$  de côté  $a$ , ( $a > 0$ ). Soient  $I, J$  et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[AB], [BC]$  et  $[CA]$ .

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure : (voir la construction).

2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme  $I$  en  $C$  et  $B$  en  $J$  :

$|IB| = |CJ| = \frac{a}{2}$  alors il existe une unique rotation  $r_1$  :  $\begin{cases} I \rightarrow C \\ B \rightarrow J \end{cases}$   
 $\overrightarrow{IB} \neq \overrightarrow{CJ}$

b. Préciser l'angle et le centre  $\Omega$  de  $r_1$  :

L'angle de  $r_1$  :  $(\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{CJ}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3}$ .

Le centre de  $r_1 : \Omega \in \text{med}[IC] \cap \text{med}[BJ]$ .

3. Soit  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{CK}$ . On pose  $r_2 = \text{tor}_1$  :

a. Déterminer la nature de la composée  $r_2 = \text{tor}_1$ . Préciser  $r_2(I)$  et  $r_2(B)$ . Caractériser  $r_2$  :

$r_2$  est une rotation car c'est la composée d'une rotation d'une translation.

• L'angle de  $r_2$  est  $-\frac{\pi}{3}$  l'angle de la rotation  $r_1$ .

$r_2(I) = \text{tor}_1(I) = t(C) = K$  et  $r_2(B) = \text{tor}_1(B) = t(J) = I$

• Le centre de  $r_2 \in \text{med}[IK] \cap \text{med}[IB]$ . D'où le centre de  $r_2$  est  $J$  et  $r_2 = r_{(J; -\frac{\pi}{3})}$ .

b. Déterminer une droite  $\Delta$  telle que  $s_{\Delta} \circ r_2 = s_{AJ}$ . En déduire une autre décomposition de  $r_2$  :

$$s_{\Delta} \circ r_2 = s_{AJ} \Rightarrow r_2 = s_{\Delta} \circ s_{AJ} \cdot \begin{cases} r_2(I) = s_{\Delta} \circ s_{AJ}(I) \Rightarrow K = s_{\Delta}(K) \\ r_2(J) = s_{\Delta} \circ s_{AJ}(J) \Rightarrow J = s_{\Delta}(J) \end{cases} \Rightarrow \Delta = (JK).$$

$$\Rightarrow r_2 = s_{JK} \circ s_{AJ}$$

4. On considère les similitudes directes  $s_1$  et  $s_2$  de centres respectifs  $A$  et  $C$  telles que  $s_1(B) = K$  et  $s_2(K) = B$ .

a. Déterminer un angle et le rapport de chacune des similitudes directes  $s_1$  et  $s_2$  :

•  $s_1 : \begin{cases} A \rightarrow A \\ B \rightarrow K \end{cases}$  alors l'angle de  $s_1 : (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AK}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ ; le rapport de  $s_1 : \frac{AK}{AB} = \frac{AK}{2AK} = \frac{1}{2}$ . D'où  $s_1 = s_{(A; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3})}$

•  $s_2 : \begin{cases} C \rightarrow C \\ K \rightarrow B \end{cases}$  alors l'angle de  $s_2 : (\overrightarrow{CK}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$ ; le rapport de  $s_2 : \frac{CB}{CK} = \frac{2CK}{CK} = 2$ . D'où  $s_2 = s_{(C; 2; \frac{\pi}{3})}$

b. Déterminer la nature de la composée  $f = s_1 \circ s_2$  et la caractériser :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times 2 = 2 \\ \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow f = s_1 \circ s_2 = r_{(B; \frac{2\pi}{3})}$$

5. Dans cette question,  $M$  est un point variable du plan. On pose  $r_1(M) = M_1$  et  $r_2(M) = M_2$ .

a. Démontrer que si  $M$  est distinct de  $J$  et de  $\Omega$  alors on a :  $(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) [2\pi]$  :

$$(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM_1}) + (\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) + (\overrightarrow{MM_2}; \overrightarrow{MJ}) = \frac{\pi}{3} + (\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) - \frac{\pi}{3} = (\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) [2\pi]$$

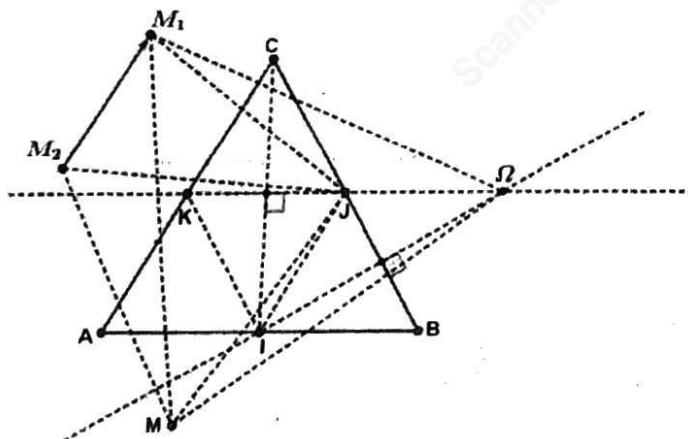
b. En déduire le lieu géométrique du point  $M$  lorsque les points  $M, M_1$  et  $M_2$  sont alignés :

Les points  $M, M_1$  et  $M_2$  sont alignés  $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) = 0 [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MJ}) = 0 [\pi] \Leftrightarrow M \in (\Omega J) \setminus \{\Omega; J\}$

c. Démontrer que pour toute position du point  $M$  dans le plan, la distance  $M_1M_2$  reste constante et la préciser et que la droite  $(M_1M_2)$  possède une direction fixe à préciser :

On a  $r_2 = \text{tor}_1 \Rightarrow t = r_1 \circ r_2^{-1}$ .

$$\begin{cases} t(M_2) = r_1 \circ r_2^{-1}(M_2) = r_1(M) = M_1 \\ t(K) = r_1 \circ r_2^{-1}(K) = r_1(I) = C \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{KC} \Rightarrow \begin{cases} (M_2M_1) // (AC) \\ M_2M_1 = KC \end{cases}$$



**Exercice N°4 :**

I- On considère la fonction numérique  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ .

1. Vérifier que pour tout réel  $x > -1$ , on a :  $g(x) > 0$  :

Étudions le signe de  $2x^2 + 3x + 2$ .

$$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 < 0.$$

|                 |      |           |
|-----------------|------|-----------|
| $x$             | $-1$ | $+\infty$ |
| $2x^2 + 3x + 2$ |      | +         |
| $x + 1$         |      | +         |
| $g(x)$          |      | +         |

D'où d'après le tableau de variation  $x > -1$ , on a :  $g(x) > 0$ .

2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel  $x > -1$  on a :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$  :

|    |   |    |    |
|----|---|----|----|
|    | 2 | 3  | 2  |
| -1 |   | -2 | -1 |
|    | 2 | 1  | 1  |
|    | a | b  | c  |

$\Rightarrow g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1}$

3. Déterminer la primitive G de la fonction g sur l'intervalle  $I = ]-1; +\infty[$  et qui vérifie  $G(0) = 1$  :

$G(x) = x^2 + x + \ln(x+1) + K$  or  $G(0) = 1 \Rightarrow 0^2 + 0 + \ln(0+1) + K = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow G(x) = x^2 + x + \ln(x+1) + 1$ .

II- On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle  $I = ]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 + x + 1 + \ln(x+1)$ . Soit (C) sa courbe représentative dans repère orthonormé (O ; i ; j) d'unité 1cm.

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Donner une interprétation graphique :

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + x + 1 + \ln(x+1)) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 1 + \ln x) = 1 - 1 + 1 + (-\infty) = -\infty$   
Donc  $x = -1$  AV.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1 + \ln(x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 + \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$

(C) admet BP de direction (Oy) au voisinage de  $+\infty$ .

b. Dresser le tableau de variation de f :

$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} = g(x) > 0$ .

|       |    |           |
|-------|----|-----------|
| x     | -1 | $+\infty$ |
| f'(x) |    | +         |
| f(x)  |    | $+\infty$ |

2. a. Montrer que f réalise une bijection de  $I = ]-1; +\infty[$  sur un intervalle J que l'on déterminera :

f est continue et strictement croissante de  $]-1; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$  alors elle réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

b. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ . Vérifier que  $-0,53 < \alpha < -0,52$  :

Comme u est bijective de  $]-1; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]-1; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .

$f(-0,53) \approx -0,004$  ;  $f(-0,52) \approx 0,01$   $\Rightarrow$  d'après le théorème de la valeur intermédiaire que  $-0,53 < \alpha < -0,52$ .

3. a. Montrer que pour tout  $x > 0$  on a :  $f(x) \geq x + 1$ . Interprétation graphique :

$f(x) = x^2 + x + 1 + \ln(x+1) \Rightarrow f(x) - (x+1) = x^2 + \ln(x+1) > 0$ , pour  $x > 0$ .

Graphiquement (C) est au-dessus de droite (d) :  $y = x + 1$  pour  $x > 0$ .

b. Montrer que les courbe (C) et (C'), représentant respectivement la fonction f et sa réciproque  $f^{-1}$  dans le repère (O ; i ; j), se coupent en un unique point dont l'abscisse  $\beta$  vérifie  $-0,81 < \beta < -0,80$  :

$(C) \cap (C') = \{A(x; y)\}$  et vérifie  $f(x) = f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$  et  $f^{-1}(y) = x \Rightarrow y = x \Rightarrow x^2 + x + 1 + \ln(x+1) = x$   
 $\Rightarrow x^2 + 1 + \ln(x+1) = 0$ . On pose  $h(x) = x^2 + 1 + \ln(x+1)$ , Etudions le signe de h en fonction de x.

$h'(x) = 2x + \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x+1}$

|                 |    |           |
|-----------------|----|-----------|
| x               | -1 | $+\infty$ |
| $2x^2 + 2x + 2$ |    | +         |
| x+1             |    | +         |
| h'(x)           |    | +         |

$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 1 + \ln(x+1)) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 1 + \ln x) = 1 - 1 + 1 + (-\infty) = -\infty$ .

Donc  $x = -1$  AV.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1 + \ln(x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} \right) = +\infty$ .

Tableau de variation h :

|       |    |           |
|-------|----|-----------|
| x     | -1 | $+\infty$ |
| h'(x) |    | +         |
| h(x)  |    | $+\infty$ |

D'après le tableau de variation de  $h$ , l'équation  $h(x)=0$  admet dans  $]-1; +\infty[$  une unique solution  $\beta$ .

$h(-0,80) \approx 0,03$  | d'après le théorème de la valeur intermédiaire que  $-0,81 < \alpha < -0,80$ .

c. Démontrer que  $(f^{-1})'(\beta) = \frac{\beta+1}{2\beta^2+3\beta+2}$  :

$$f(\beta) = \beta \text{ et } f^{-1}(\beta) = \beta. \quad (f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))} = \frac{1}{f'(\beta)} = \frac{1}{\frac{2\beta^2+3\beta+2}{\beta+1}} = \frac{\beta+1}{2\beta^2+3\beta+2}$$

4. a. Déterminer tous les points de la courbe (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation  $y=2x$  :

$$h'(x) = 2 \Rightarrow \frac{2x^2+3x+2}{x+1} = 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 2x + 2 \Rightarrow 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc il existe deux points  $B(0; f(0)) \Rightarrow B(0; 1)$  et  $D(-\frac{1}{2}; f(-\frac{1}{2})) \Rightarrow D(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4} - \ln 2)$ .

$T_B : y=2x+b$  or  $B \in T_B \Rightarrow y=2x+1$  et  $T_D : y=2x+b'$  or  $D \in T_D \Rightarrow \frac{3}{4} - \ln 2 = 2(-\frac{1}{2}) + b' \Rightarrow b' = \frac{7}{4} - \ln 2 \Rightarrow T_D : y=2x + \frac{7}{4} - \ln 2$ .

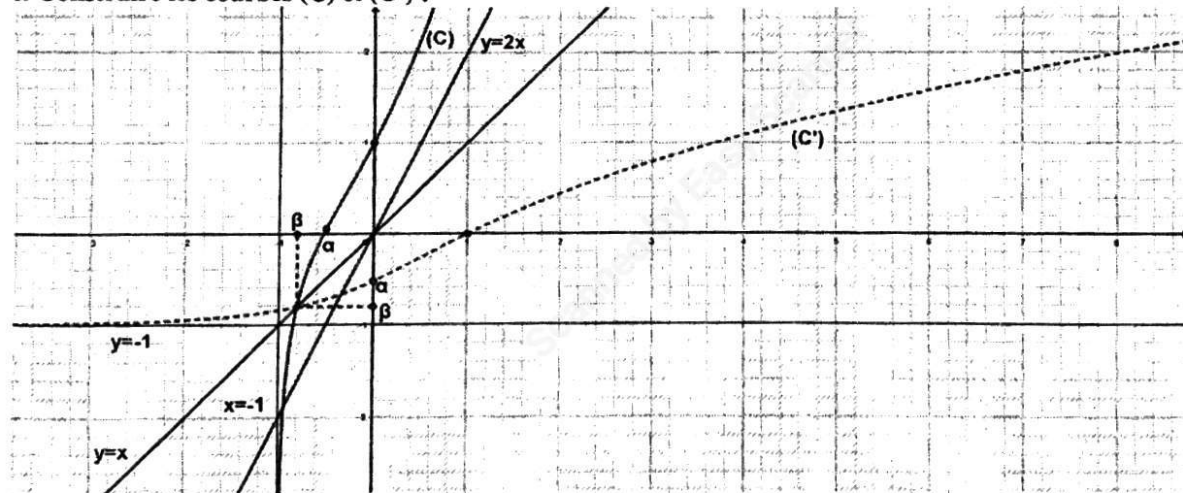
b. Discuter suivant les valeurs du paramètre  $k$  le nombre de solution de l'équation  $x^2 - x + 1 + \ln(x+1) = k$  :

$$x^2 - x + 1 + \ln(x+1) = k \Leftrightarrow x^2 + x + 1 + \ln(x+1) = 2x + k \Leftrightarrow f(x) = 2x + k$$

Posons  $F(x) = f(x) - (2x+1)$  et  $G(x) = f(x) - (2x + \frac{7}{4} - \ln 2)$ . On peut facilement montrer que l'équation  $F(x)=0$  admet dans  $]-1; +\infty[$  deux solutions  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \sigma$  avec  $-0,69 < \sigma < -0,68$  et que l'équation  $G(x)=0$  admet dans  $]-1; +\infty[$  deux solutions  $x_3 = -\frac{1}{2}$  et  $x_4 = \lambda$  avec  $0,3 < \lambda < 0,4$ .

| k                   | $-\infty$ | 1 | $\frac{7}{4} - \ln 2$ | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|---|-----------------------|-----------|
| nombre de solutions | 1         | 2 | 2                     | 1         |

c. Construire les courbes (C) et (C') :



5. Soit A l'aire du domaine plan limité par les courbes (C) et (C') et les axes des coordonnées.

a. Montrer que  $A = \alpha^2 + \int_{\beta}^{\alpha} (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)) dx$  :

(C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite  $y=x$  (1<sup>ère</sup> bissectrice), on a alors :

$$\begin{aligned} A &= \beta^2 + \int_{\beta}^{\alpha} (-f(x)) dx = \beta^2 - 2 \int_{\beta}^{\alpha} (-f(x)) dx = \beta^2 + \int_{\beta}^{\alpha} (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)) dx \\ &= \beta^2 + \int_{\beta}^{\alpha} (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)) dx + \int_{\beta}^{\alpha} 2x dx = \beta^2 + \int_{\beta}^{\alpha} (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)) dx + [x^2]_{\beta}^{\alpha} \\ &= \beta^2 + \int_{\beta}^{\alpha} (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)) dx + \alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 + \int_{\beta}^{\alpha} (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)) dx \end{aligned}$$

b. Calculer A en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ . (On pourra utiliser une intégration par parties) :

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 + \int_{\beta}^{\alpha} (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)) dx = \alpha^2 + \int_{\beta}^{\alpha} (2x^2 + 2) dx + 2 \int_{\beta}^{\alpha} \ln(x+1) dx \\ &= \alpha^2 + \left[ \frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_{\beta}^{\alpha} + 2 \int_{\beta}^{\alpha} \ln(x+1) dx = \alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 + 2\alpha - \frac{2}{3}\beta^3 - 2\beta + 2 \int_{\beta}^{\alpha} \ln(x+1) dx \end{aligned}$$

Calculons  $\int_{\beta}^{\alpha} \ln(x+1) dx$  ?

$$\begin{aligned} \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x+1) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = \frac{1}{x+1} \end{cases} \\ \Rightarrow \int_{\beta}^{\alpha} \ln(x+1) dx &= [(x+1)\ln(x+1)]_{\beta}^{\alpha} - \int_{\beta}^{\alpha} 1 dx = [(x+1)\ln(x+1)]_{\beta}^{\alpha} - [x]_{\beta}^{\alpha} \\ &= (\alpha+1)\ln(\alpha+1) - (\beta+1)\ln(\beta+1) - \alpha + \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 + 2\alpha - \frac{2}{3}\beta^3 - 2\beta + 2(\alpha+1)\ln(\alpha+1) - 2(\beta+1)\ln(\beta+1) - 2\alpha + 2\beta$$

$$= \alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 - \frac{2}{3}R^3 + 2(\alpha + 1)\ln(\alpha + 1) - 2(R + 1)\ln(R + 1)$$

## Bac 2009 session normale

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Soit l'équation  $E_\theta : z^2 - 2(1 + i\sin\theta)z + 2i\sin\theta = 0$  avec  $\theta \in [0; 2\pi[$

1. a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes chacune des équations  $E_{\frac{\pi}{2}}$  et  $E_\pi$ .
- b. Déterminer les solutions  $z'$  et  $z''$  de l'équation  $E_\theta$  sachant que  $\operatorname{Re}(z') \geq \operatorname{Re}(z'')$  si  $\cos\theta \geq 0$ .
2. Soient  $M'$  et  $M''$  les points d'affixes respectives  $z'$  et  $z''$ .
  - a. Démontrer que si  $\theta$  décrit  $[0; 2\pi[$  alors le lieu géométrique  $\Gamma$  des points  $M'$  et  $M''$  est un cercle à déterminer.
  - b. Démontrer que si  $M'$  et  $M''$  sont distincts alors la droite  $(M'M'')$  a une direction fixe indépendante de  $\theta$ .
  - c. Construire le cercle  $\Gamma$  et placer les points  $M'$  et  $M''$  pour  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .
3. Soit  $G$  le point défini par  $G = \overline{\text{bar}}\{(M', 3); (M'', 2)\}$ .
  - a. Déterminer  $z_G$  l'affixe de  $G$  en fonction de  $\theta$ .
  - b. Démontrer que si  $\theta$  décrit  $[0; 2\pi[$  alors le lieu géométrique  $\Gamma'$  de  $G$  est une ellipse dont on déterminera une équation cartésienne.
  - c. Déterminer le centre et les sommets et calculer l'excentricité de l'ellipse  $\Gamma'$ . Construire  $\Gamma'$  dans le repère précédent.

#### Exercice N°2 :

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 \ln(x + 1)$ .

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , d'unité 2cm.

1. a. Calculer  $f'(x)$  et montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]-1; +\infty[$ .
- b. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse  $x_0 = 0$  et étudier leur position relative. Interpréter graphiquement.
- c. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. a. Démontrer que  $f$  admet une fonction réciproque que l'on notera  $g$ . Soit  $(C')$  sa courbe représentative dans le repère précédent.
- b. Montrer que les courbes  $(C)$  et  $(C')$  se coupent en trois points dont un seul est d'abscisse strictement négative  $a$ . Vérifier que  $-0,8 < a < -0,7$ .
- c. Construire les courbes  $(C)$  et  $(C')$ .
3. a. Déterminer les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que pour tout réel  $x$  de  $]-1; +\infty[$  ;  $\frac{x^3}{x+1} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$ .
- b. En utilisant une intégration par parties, calculer en fonction de  $a$ , l'aire du domaine plan des points  $M(x; y)$  délimité par les courbes  $(C)$  et  $(C')$  où  $a \leq x \leq 0$ .

#### Exercice N°3 :

A tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  on associe la fonction  $f_n$  définie par :  $f_n(x) = x^n e^{-x}$ .

Soit  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Étudier les variations de  $f_1$  telle que  $f_1(x) = xe^{-x}$  et représenter sa courbe  $C_1$ .
- b. Calculer l'aire du domaine délimité par  $C_1$ , l'axe des abscisses et les droites  $x=0$  et  $x=1$ .
2. a. Démontrer que toutes les courbes  $C_n$  passent par deux points fixes que l'on déterminera.
- b. Étudier la position relative des courbes  $C_n$  et  $C_{n+1}$  en fonction de la parité de  $n$ .
3. Pour tout entier naturel non nul ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) on pose  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .
  - a. Vérifier que  $I_1 = 1 - 2e^{-1}$ .
  - b. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$ .
  - c. Démontrer que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
3. Pour tout entier naturel non nul ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) on pose  $J_n = \frac{e}{n!} I_n$ .
  - a. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{(n+1)!}$ .
  - b. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $J_n = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$ .
  - c. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$ .

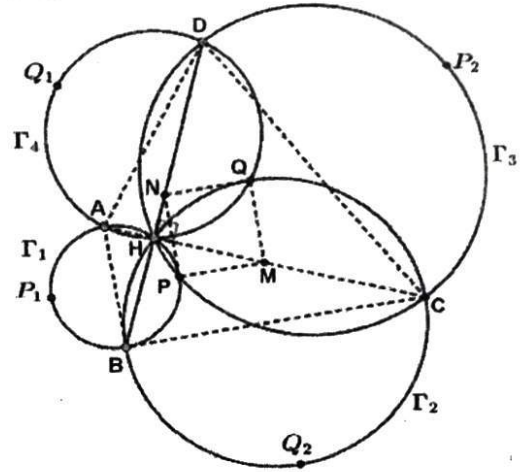
#### Exercice N°4 :

Dans le plan orienté on considère quatre points  $A, B, C$  et  $D$ , deux à deux distincts tels que :  $AC = BD$ .

$(\overline{AC}; \overline{BD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Soient les points  $M$  milieu de  $[AC]$ ,  $N$  milieu de  $[BD]$  et  $H$  le point d'intersection de  $(AC)$  et  $(BD)$ .

On considère les cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  de diamètre respectifs  $[AB], [BC], [CD]$  et  $[DA]$  ( On pourra s'aider de la figure ci-jointe, on ne demande pas de la reproduire).

1. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme A en B et C en D. Préciser son angle et montrer que son centre P appartient aux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ .
- b. Soit  $r_2$  la rotation qui transforme A en D et C en B. Préciser son angle et montrer que son centre Q appartient aux cercles  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ .
- c. Démontrer que le quadrilatère PMQN est un carré.
2. Soit  $P_1$  et  $P_2$  les points diamétralement opposés à P respectivement sur les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ . Soit  $Q_1$  et  $Q_2$  les points diamétralement opposés à Q respectivement sur les cercles  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ .
- a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme A en  $P_1$  et C en  $P_2$ . Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.
- b. Déterminer  $s_1(M)$  en déduire que les points  $P_1, P_2, Q$  et H sont alignés.
3. On considère la similitude directe  $s_2$  de centre Q, de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .
- a. Déterminer les images des points  $Q_1, Q_2$  et P par  $s_2$ .
- b. En déduire que les points  $Q_1, Q_2, P$  et H sont alignés.
4. On pose  $\sigma = s_1 \circ s_2$ .
- a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $\sigma$ .
- b. Démontrer que  $P_1P_2 = Q_1Q_2$  et  $(\overrightarrow{P_1P_2}; \overrightarrow{Q_1Q_2}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .
5. Soit r la rotation qui transforme  $P_1$  en  $Q_1$  et  $P_2$  en  $Q_2$ .
- a. Reconnaitre le centre de la rotation r.
- b. Démontrer la cocyclicité des points M, H,  $P_2$  et  $Q_2$ .
- c. Quelles sont les cocyclicités semblables que l'on peut remarquer ?
- d. Démontrer que  $P_2A^2 + P_2C^2 = Q_2A^2 + Q_2C^2$ .
- e. Quelles sont les relations semblables que l'on peut remarquer ?



## Solution

### Exercice N°1 :

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit l'équation  $E_\theta : z^2 - 2(1 + i\sin\theta)z + 2i\sin\theta = 0$  avec  $\theta \in [0; 2\pi[$ .

1. a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes chacune des équations  $E_{\frac{\pi}{2}}$  et  $E_\pi$  :

$$E_{\frac{\pi}{2}} : z^2 - 2(1 + i)z + 2i = 0.$$

$$\Delta' = (-(1 + i))^2 - 2i = 0 \Rightarrow z_0 = 1 + i.$$

$$E_\pi : z^2 - 2z = 0.$$

$$z^2 - 2z = 0 \Rightarrow z(z - 2) = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \text{ et } z_2 = 2.$$

- b. Déterminer les solutions  $z'$  et  $z''$  de l'équation  $E_\theta$  sachant que  $\text{Re}(z') \geq \text{Re}(z'')$  si  $\cos\theta \geq 0$  :

$$E_\theta : z^2 - 2(1 + i\sin\theta)z + 2i\sin\theta = 0.$$

$$\Delta' = (-(1 + i\sin\theta))^2 - 2i\sin\theta = 1 - \sin^2\theta + 2i\sin\theta - 2i\sin\theta = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta.$$

$$\Rightarrow z' = 1 + i\sin\theta + \cos\theta \text{ et } z'' = 1 + i\sin\theta - \cos\theta.$$

2. Soient  $M'$  et  $M''$  les points d'affixes respectives  $z'$  et  $z''$ .

- a. Démontrer que si  $\theta$  décrit  $[0; 2\pi[$  alors le lieu géométrique  $\Gamma$  des points  $M'$  et  $M''$  est un cercle à déterminer :

$$z' = 1 + i\sin\theta + \cos\theta \Rightarrow z' - 1 = i\sin\theta + \cos\theta = e^{i\theta} \text{ et } z'' = 1 + i\sin\theta - \cos\theta \Rightarrow z'' - 1 = i\sin\theta - \cos\theta = e^{i(\pi - \theta)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z' - 1| = 1 \\ \arg(z' - 1) = \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM' = 1 \\ (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = \theta \end{cases} \text{ où } \theta \in [0; 2\pi[ \text{ et } \begin{cases} |z'' - 1| = 1 \\ \arg(z'' - 1) = \pi - \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM'' = 1 \\ (\vec{u}; \overrightarrow{AM''}) = \pi - \theta \end{cases} \text{ où } \pi - \theta \in ]-\pi; \pi]$$

D'où  $\Gamma$  est le cercle de centre A d'affixe 1 et de rayon 1.

- b. Démontrer que si  $M'$  et  $M''$  sont distincts alors la droite  $(M'M'')$  a une direction fixe indépendante de  $\theta$  :

$$\overrightarrow{M'M''} = 1 + i\sin\theta - \cos\theta - 1 - i\sin\theta - \cos\theta = -2\cos\theta \in \mathbb{R}. \text{ D'où la direction est fixe, c'est celle de l'axe des réels.}$$

- c. Construire le cercle  $\Gamma$  et placer les points  $M'$  et  $M''$  pour  $\theta = \frac{\pi}{6}$  :

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ alors } (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{6} \text{ et } (\vec{u}; \overrightarrow{AM''}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}. \text{ ( Voir la figure ci-après).}$$

3. Soit G le point défini par  $G = \text{bar}\{(M', 3); (M'', 2)\}$ .

- a. Déterminer  $z_G$  l'affixe de G en fonction de  $\theta$  :

$$z_G = \frac{3z_M' + 2z_M''}{5} = \frac{3(1 + i\sin\theta + \cos\theta) + 2(1 + i\sin\theta - \cos\theta)}{5} = 1 + \frac{\cos\theta}{5} + i\sin\theta.$$

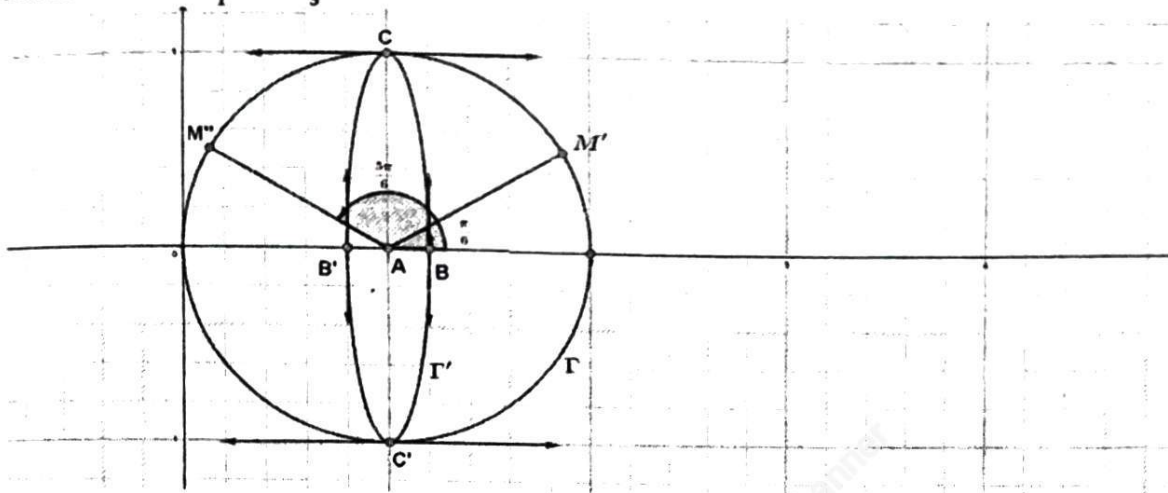
b. Démontrer que si  $\theta$  décrit  $[0; 2\pi[$  alors le lieu géométrique  $\Gamma'$  de  $G$  est une ellipse dont on déterminera une équation cartésienne :

Soit  $G(x; y)$  alors  $\begin{cases} x = 1 + \frac{\cos\theta}{5} \\ y = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(x-1) = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow (5(x-1))^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{(\frac{1}{5})^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ . D'où  $\Gamma'$  est une ellipse.  $y = \sqrt{1 - (5(x-1))^2}$

c. Déterminer le centre et les sommets et calculer l'excentricité de l'ellipse  $\Gamma'$ . Construire  $\Gamma'$  dans le repère précédent : Dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , le centre de  $\Gamma'$  est  $A(1; 0)$ . Les sommets sont  $B(\frac{6}{5}; 0)$ ;  $B'(\frac{4}{5}; 0)$ ;  $C(1; 1)$  et  $C'(1; -1)$ ;

Excentricité  $e = \frac{\sqrt{1^2 - (\frac{1}{5})^2}}{1} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$



**Exercice N°2 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 \cdot \ln(x+1)$ .

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , d'unité 2cm.

1. a. Calculer  $f'(x)$  et montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]-1; +\infty[$  :

$f(x) = 2x \ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}$

|                   |    |   |           |
|-------------------|----|---|-----------|
| $x$               | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $2x$              |    | - | +         |
| $\ln(x+1)$        |    | - | +         |
| $2x \ln(x+1)$     |    | + | +         |
| $x^2$             |    | + | +         |
| $\frac{x^2}{x+1}$ |    | + | +         |
| $sf'(x)$          |    | + | +         |

$\Rightarrow \forall x \in ]-1; +\infty[, f'(x) \geq 0$ . D'où fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]-1; +\infty[$ .

b. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse  $x_0 = 0$  et étudier leur position relative.

Interpréter graphiquement :

$T : y = f'(0)(x-0) + f(0) \Rightarrow T : y=0$ .

$f(x) - y = f(x) - x^2 \ln(x+1)$ .

|            |                 |              |                 |
|------------|-----------------|--------------|-----------------|
| $x$        | -1              | 0            | $+\infty$       |
| $x^2$      |                 | +            | +               |
| $\ln(x+1)$ |                 | -            | +               |
| $f(x)$     |                 | -            | +               |
| PR         | $\frac{T}{(C)}$ | $(C) \cap T$ | $\frac{(C)}{T}$ |

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x) = +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 \ln(x+1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t-1)^2 \ln(t) = 1(-\infty) = -\infty$ . (En posant  $t = x+1$ ).

|       |    |   |    |
|-------|----|---|----|
| x     | -1 | 0 | +∞ |
| f'(x) |    | 0 |    |
| f(x)  |    |   | +∞ |

-∞

2. a. Démontrer que f admet une fonction réciproque que l'on notera g. Soit (C') sa courbe représentative dans le repère précédent :

Comme f est continue et strictement croissante, alors elle réalise une bijection de ]-1; +∞[ sur ℝ. D'où f admet une fonction réciproque notée g.

b. Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en trois points dont un seul est d'abscisse strictement négative α. Vérifier que -0,8 < α < -0,7 :

$$f(x) = x \Rightarrow x^2 \ln(x+1) = x \Rightarrow x^2 \ln(x+1) - x = 0 \Rightarrow x(-1 + x \ln(x+1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -1 + x \ln(x+1) = 0 \end{cases}$$

On pose  $h(x) = -1 + x \ln(x+1) \Rightarrow h'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

|                 |    |   |    |
|-----------------|----|---|----|
| x               | -1 | 0 | +∞ |
| ln(x+1)         |    | - | 0  |
| x               |    | - | 0  |
| $\frac{x}{x+1}$ |    | - | 0  |
| h'(x)           |    | - | 0  |

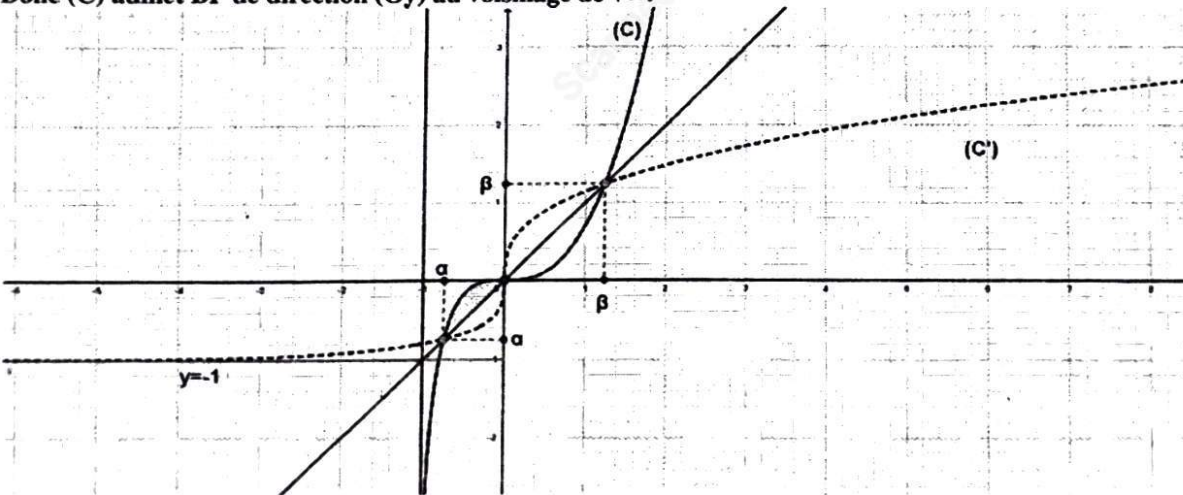
|       |    |   |    |   |    |
|-------|----|---|----|---|----|
| x     | -1 | α | 0  | β | +∞ |
| h'(x) |    |   | 0  |   |    |
| h(x)  | +∞ | 0 | -1 | 0 | +∞ |

Le tableau de variation de h montre que l'équation  $h(x)=0$  admet deux solutions α et β telle que α < 0. Comme  $h(-0,7) \approx -0,1 < 0$  et  $h(-0,8) \approx 0,2 > 0$  alors  $-0,8 < α < -0,7$ ; (α est strictement négatif) et  $h(1,2) \approx -0,05 < 0$  et  $h(1,3) \approx 0,08 > 0$  alors  $1,2 < β < 1,3$ .

c. Construire les courbes (C) et (C') :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty.$$

Donc (C) admet BP de direction (Oy) au voisinage de +∞.



3. a. Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout réel x de ]-1; +∞[ ;  $\frac{x^3}{x+1} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$ .

|    |   |    |   |    |
|----|---|----|---|----|
|    | 1 | 0  | 0 | 0  |
| -1 |   | -1 | 1 | -1 |
|    | 1 | -1 | 1 | -1 |
|    | a | b  | c | d  |

Donc pour tout réel x de ]-1; +∞[ ;  $\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$ .

b. En utilisant une intégration par parties, calculer en fonction de  $\alpha$ , l'aire du domaine plan des points  $M(x; y)$  délimité par les courbes  $(C)$  et  $(C')$  où  $\alpha \leq x \leq 0$  :

Soit  $A$  cette aire alors  $A = 4 \times 1 \text{ cm}^2$  avec  $I = 2 \int_{\alpha}^0 (f(x) - x) dx$ .

$$I = 2 \int_{\alpha}^0 (f(x) - x) dx = 2 \int_{\alpha}^0 f(x) dx - \int_{\alpha}^0 2x dx = 2 \int_{\alpha}^0 x^2 \ln(x+1) dx - \int_{\alpha}^0 2x dx$$

On pose  $\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{1}{3}x^3 \\ v'(x) = \frac{1}{x+1} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{2}{3} [x^3 \ln(x+1)]_{\alpha}^0 - \frac{2}{3} \int_{\alpha}^0 \frac{x^3}{x+1} dx - [x^2]_{\alpha}^0 = \frac{2}{3} [x^3 \ln(x+1)]_{\alpha}^0 - \frac{2}{3} \int_{\alpha}^0 \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right) dx - [x^2]_{\alpha}^0 \\ &= \frac{2}{3} [x^3 \ln(x+1)]_{\alpha}^0 - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1) \right]_{\alpha}^0 - [x^2]_{\alpha}^0 \\ &= -\frac{2}{3} \alpha^3 \ln(\alpha+1) + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} \alpha^3 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \alpha - \ln(\alpha+1) \right) + \alpha^2 = -\frac{2}{3} \alpha^3 \ln(\alpha+1) + \frac{2}{9} \alpha^3 - \frac{1}{3} \alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha - \frac{2}{3} \ln(\alpha+1) + \alpha^2 \\ &= -\frac{2}{3} (\alpha^3 + 1) \ln(\alpha+1) + \frac{2}{9} \alpha^3 + \frac{2}{3} \alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha \end{aligned}$$

Or  $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \alpha^2 \ln(\alpha+1) = \alpha \Rightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha}$

$$\Rightarrow I = -\frac{2}{3} \frac{\alpha^3+1}{\alpha} + \frac{2}{9} \alpha^3 + \frac{2}{3} \alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha = -\frac{2}{3\alpha} + \frac{2}{9} \alpha^3 + \frac{2}{3} \alpha. \text{ D'où } I = \left( -\frac{8}{3\alpha} + \frac{8}{9} \alpha^3 + \frac{8}{3} \alpha \right) \text{ cm}^2$$

**Exercice N°3 :**

A tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  on associe la fonction  $f_n$  définie par :  $f_n(x) = x^n e^{-x}$ .

Soit  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Etudier les variations de  $f_1$  telle que  $f_1(x) = x e^{-x}$  et représenter sa courbe  $C_1$  :

$D_{f_1} = ]-\infty; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty(+\infty) = -\infty.$$

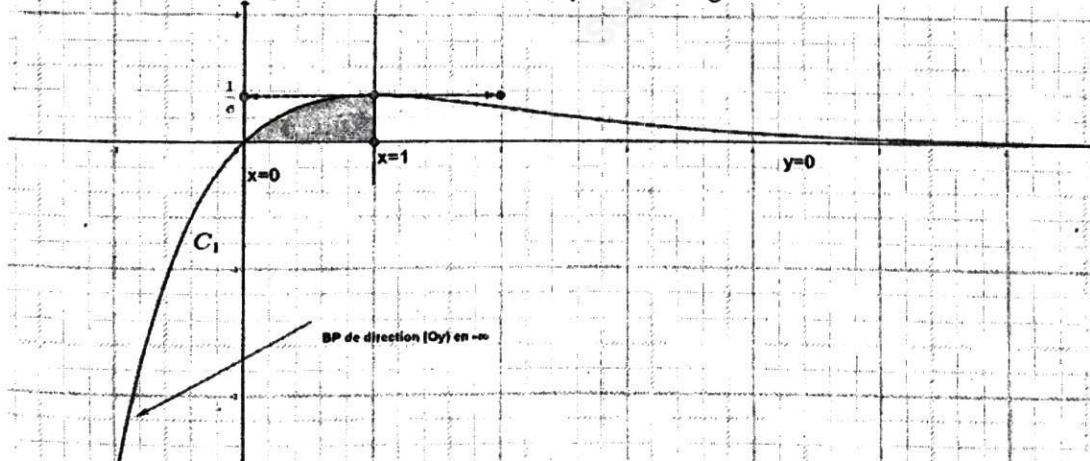
$$f_1'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

|           |           |               |           |
|-----------|-----------|---------------|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $1$           | $+\infty$ |
| $f_1'(x)$ | $+$       | $0$           | $-$       |
| $f_1(x)$  | $-\infty$ | $\frac{1}{e}$ | $0$       |

$y=0$  est AH de  $C_1$  au voisinage de  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty.$$

Donc  $C_1$  la courbe de  $f_1$  admet BP de direction  $(Oy)$  au voisinage de  $-\infty$ .



b. Calculer l'aire du domaine délimité par  $C_1$ , l'axe des abscisses et les droites  $x=0$  et  $x=1$  :

L'aire  $A$  est égale à :  $A = \int_0^1 x e^{-x} dx$ .

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = \left(1 - \frac{2}{e}\right) \text{ (ua)}.$$

2. a. Démontrer que toutes les courbes  $C_n$  passent par deux points fixes que l'on déterminera :

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) \Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} e^{-x} - x^n e^{-x} = x^n (x-1) e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} x^n = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

D'où toutes les courbes  $C_n$  passent par deux points fixes :  $\Omega(0;0)$  et  $A(1; \frac{1}{e})$

b. Etudier la position relative des courbes  $C_n$  et  $C_{n+1}$  en fonction de la parité de  $n$  :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^n(x-1)e^{-x}$$

On distingue deux cas :

•  $n$  pair :

|                       |                       |                       |                       |           |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------|
| $x$                   | $-\infty$             | $0$                   | $1$                   | $+\infty$ |
| $x^n$                 |                       | $+$                   | $0$                   | $+$       |
| $x-1$                 |                       | $-$                   | $0$                   | $+$       |
| $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ |                       | $-$                   | $0$                   | $+$       |
| Position relative     | $\frac{C_n}{C_{n+1}}$ | $\frac{C_n}{C_{n+1}}$ | $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ |           |
|                       |                       | $C_n \cap C_{n+1}$    | $C_n \cap C_{n+1}$    |           |

•  $n$  impair :

|                       |                       |                       |                       |           |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------|
| $x$                   | $-\infty$             | $0$                   | $1$                   | $+\infty$ |
| $x^n$                 |                       | $-$                   | $0$                   | $+$       |
| $x-1$                 |                       | $-$                   | $0$                   | $+$       |
| $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ |                       | $+$                   | $0$                   | $+$       |
| Position relative     | $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ | $\frac{C_n}{C_{n+1}}$ | $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ |           |
|                       |                       | $C_n \cap C_{n+1}$    | $C_n \cap C_{n+1}$    |           |

3. Pour tout entier naturel non nul ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) on pose  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

a. Vérifier que  $I_1 = 1 - 2e^{-1}$  :

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$$

b. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$  :

$$I_{n+1} = \int_0^1 f_{n+1}(x) dx = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx.$$

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = (n+1)x^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx = -e^{-1} + (n+1)I_n.$$

D'où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$ .

c. Démontrer que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} [x^{n+1}]_0^1 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

3. Pour tout entier naturel non nul ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) on pose  $J_n = \frac{e}{n!} I_n$ .

a. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{(n+1)!}$  :

$$J_{n+1} - J_n = \frac{e}{(n+1)!} I_{n+1} - \frac{e}{n!} I_n = \frac{e}{(n+1)!} (-e^{-1} + (n+1)I_n) - \frac{e}{n!} I_n = \frac{-1}{(n+1)!}.$$

D'où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{(n+1)!}$ .

b. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $J_n = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$  :

$$J_2 - J_1 = \frac{-1}{2!}$$

$$J_3 - J_2 = \frac{-1}{3!}$$

$$J_4 - J_3 = \frac{-1}{4!}$$

$$\dots$$

$$J_n - J_{n-1} = \frac{-1}{n!}$$

$$\Rightarrow J_n - J_1 = -\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \Rightarrow J_n = J_1 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \Rightarrow J_n = e - 2 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$\Rightarrow J_n = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}\right) - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \Rightarrow J_n = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right).$$

c. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n!} I_n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( e - \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$

**Exercice N°4 :**

Dans le plan orienté on considère quatre points A, B, C et D, deux à deux distincts tels que :  $AC = BD$ ,  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Soient les points M milieu de [AC], N milieu de [BD] et H le point d'intersection de (AC) et (BD).

On considère les cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  de diamètre respectifs [AB], [BC], [CD] et [DA] ( On pourra s'aider de la figure ci-jointe, on ne demande pas de la reproduire).

1. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme A en B et C en D. Préciser son angle et montrer que son centre P appartient aux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  :

$$\begin{cases} AC = BD \\ \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD} \end{cases} \text{ alors il existe une unique rotation } r_1: \begin{cases} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \end{cases}$$

• L'angle de  $r_1$  :  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}$ .

• Le centre P de  $r_1$  :  $\begin{cases} (\overrightarrow{PA}; \overrightarrow{PB}) = \frac{\pi}{2} \\ (\overrightarrow{PC}; \overrightarrow{PD}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_3$

b. Soit  $r_2$  la rotation qui transforme A en D et C en B. Préciser son angle et montrer que son centre Q appartient aux cercles  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  :

$$\begin{cases} AC = BD \\ \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{DB} \end{cases} \text{ alors il existe une unique rotation } r_2: \begin{cases} A \rightarrow D \\ C \rightarrow B \end{cases}$$

• L'angle de  $r_2$  :  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$ .

• Le centre Q de  $r_2$  :  $\begin{cases} (\overrightarrow{QA}; \overrightarrow{QD}) = -\frac{\pi}{2} \\ (\overrightarrow{QC}; \overrightarrow{QB}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow Q \in \Gamma_2 \cap \Gamma_4$

c. Démontrer que le quadrilatère PMQN est un carré :

Par conservation du milieu on a :  $\begin{cases} r_1(M) = N \Rightarrow \text{le triangle PMN est rectangle isocèle en P} \\ r_2(M) = N \Rightarrow \text{le triangle QMN est rectangle isocèle en Q} \end{cases} \Rightarrow \text{PMQN est un carré}$

2. Soit  $P_1$  et  $P_2$  les points diamétralement opposés à P respectivement sur les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ . Soit  $Q_1$  et  $Q_2$  les points diamétralement opposés à Q respectivement sur les cercles  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ .

a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme A en  $P_1$  et C en  $P_2$ . Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude :

Comme  $A \neq C$  et  $P_1 \neq P_2$  alors qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme A en  $P_1$  et C en  $P_2$ .

Les quadrilatères  $PAP_1B$  et  $PCP_2D$  sont des carrés directs alors on a :

$$(\overrightarrow{PA}; \overrightarrow{PP_1}) = (\overrightarrow{PC}; \overrightarrow{PP_2}) = \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{PP_1}{PA} = \frac{PP_2}{PC} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}. \text{ D'où } s_1 = S(P; \sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$$

b. Déterminer  $s_1(M)$  en déduire que les points  $P_1, P_2, Q$  et H sont alignés :

$$s_1(M) = Q \text{ car } \begin{cases} \frac{PM}{PQ} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} \\ (\overrightarrow{PM}; \overrightarrow{PQ}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

On a d'une part :  $\begin{cases} s_1(M) = Q \\ M = A * C \end{cases} \Rightarrow Q = P_1 * P_2 \Rightarrow Q, P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont alignés.}$

D'autre part :

$$(\overrightarrow{HP_1}; \overrightarrow{HP_2}) = (\overrightarrow{HP_1}; \overrightarrow{HP}) + (\overrightarrow{HP}; \overrightarrow{HP_2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$\Rightarrow H, P_1$  et  $P_2$  sont alignés.

D'où les points  $P_1, P_2, Q$  et H sont alignés.

3. On considère la similitude directe  $s_2$  de centre Q, de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

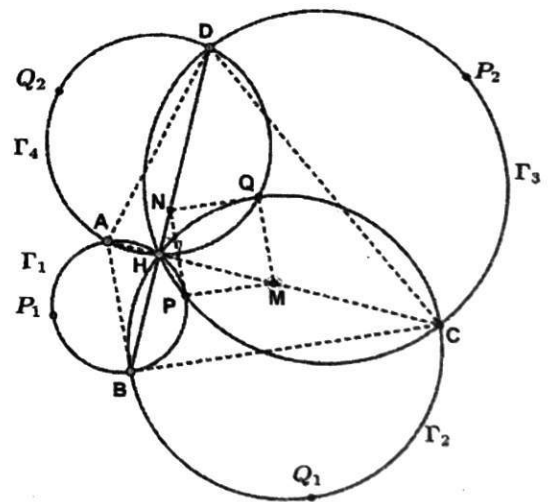
a. Déterminer les images des points  $Q_1, Q_2$  et P par  $s_2$  :

$$(\overrightarrow{QQ_1}; \overrightarrow{QC}) = (\overrightarrow{QQ_2}; \overrightarrow{QA}) = (\overrightarrow{QP}; \overrightarrow{QM}) = \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{QA}{QQ_2} = \frac{QC}{QQ_1} = \frac{QM}{QP} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où  $s_2: \begin{cases} Q_1 \rightarrow C \\ Q_2 \rightarrow A \\ P \rightarrow M \end{cases}$

b. En déduire que les points  $Q_1, Q_2, P$  et H sont alignés :

On a d'une part :  $\begin{cases} s_2^{-1}(M) = P \\ M = A * C \end{cases} \Rightarrow P = Q_1 * Q_2 \Rightarrow A, Q_1 \text{ et } Q_2 \text{ sont alignés.}$



- c. Montrer que le point  $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$  est un centre de symétrie de la courbe  $C_0$  puis construire  $C_0$ .
2. a. Vérifier que pour tout réel :  $f_1(x) = f_0(-x)$ . En déduire une transformation géométrique simple qui permet de construire  $C_1$  à partir de  $C_0$ .
- b. Vérifier que pour tout réel :  $f_1(x) = 1 - f_0(x)$ . En déduire une transformation géométrique simple qui permet de construire  $C_1$  à partir de  $C_0$ .
- c. Construire  $C_1$  à partir de  $C_0$  dans le repère précédent.
3. On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .
- a. Calculer  $U_0$  et  $U_1$  :
- b. Prouver que pour tout entier naturel  $n > 1$  on a :  $0 < U_n < \frac{1}{n-1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .
4. On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $V_n = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$  et  $V_0 = 1$ . Soit  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ .
- a. Vérifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $U_{n+1} + U_n = |V_n|$ .
- b. Prouver que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $|S_n - U_0| = |U_{n+1}|$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Exercice N°3 :**

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et de côté  $a$ . Soit G le centre de gravité de ce triangle et soit D le symétrique de A par rapport à C.

- Faire une figure illustrant les données précédentes. Elle sera complétée au fur et à mesure.
- a. prouver qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme A en C et B en D.
- Préciser un angle de  $r$  et déterminer son centre E puis le placer sur la figure.
- Prouver que les points A, B, D et E sont cocycliques, préciser le centre et le rayon de ce cercle puis le construire.
- Soit  $s$  la similitude directe de centre B et transforme D en C.
  - Déterminer un angle et le rapport de  $s$ .
  - Déterminer l'image du triangle BDE par  $s$ .
- On pose  $f = r \circ s$  et  $g = s \circ r$ .
  - Préciser et construire  $f(B)$ ,  $f(E)$ ,  $g(B)$  et  $g(A)$ .
  - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$  et  $g$ .
  - Démontrer que les cercles de diamètres respectifs  $[AG]$ ,  $[BC]$ ,  $[CE]$  et  $[DB]$  ont un point commun. Quelle est la particularité de ce point.

**Exercice N°4 :**

On considère la fonction numérique définie par :  $f(x) = 2x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right)$  et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- a. Vérifier que l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}^*$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , interpréter graphiquement.
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une notée D est oblique. Etudier la position relative de (C) et D.
- a. Calculer  $f'(x)$  puis vérifier que  $f'(x) = \frac{2(x-1)}{x} \varphi(x)$  où  $\varphi$  est une fonction strictement positive pour tout  $x \neq 0$  à déterminer.
- Dresse le tableau de variation de  $f$ .
- Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet trois solutions distinctes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  dont on donnera un encadrement d'amplitude  $5 \times 10^{-1}$ .
- Construire (C).
- On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe et les droites d'équations respectives :  $y = 2x - 3$ ,  $x = 2$  et  $x = 1 + \sqrt{3}$ .
  - Vérifier que pour tout réel  $x$  on a :  $\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{1+(x-1)^2}$ .
  - Calculer  $A = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx$ .
  - En posant  $x = 1 + \tan t$  pour tout  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  ; calculer  $B = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2}{1+(x-1)^2} dx$ .
  - Déduire de ce qui précède le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire.

## Solution

**Exercice N°1 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soit la transformation ponctuelle  $f_\omega$  qui associe à tout point M d'affixe  $z$  le point M' d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \left(\frac{1}{2} + \omega i\right)z + 1 - 2\omega i$  ;  $\omega \in \mathbb{C}$ .

- Reconnaitre et caractériser la transformation  $f_\omega$  pour les valeurs suivantes du nombre complexe  $\omega$  :

a.  $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ; b.  $\omega = -\frac{1}{2}i$  ; c.  $\omega = 1 + \frac{1}{2}i$  ; d.  $\omega = 2i$  :

• Pour  $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$  :  $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 1 - \sqrt{3}i$ . Comme  $\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$  alors  $f_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$  est la rotation d'angle  $\arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$  et de centre

$$\frac{1-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dots$$

• Pour  $\omega = -\frac{1}{2}i$  :  $z' = z \cdot f_{-\frac{1}{2}i}$  est l'identité du plan.

• Pour  $\omega = 1 + \frac{1}{2}i$  :  $z' = iz + 2 - 2i$ . Comme  $|i| = 1$  alors  $f_{1+\frac{1}{2}i}$  est la rotation d'angle  $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$  et de centre d'affixe  $\frac{2-2i}{1-i} = 2$ .

• Pour  $\omega = 2i$  :  $z' = -\frac{3}{2}z + 5$ .  $f_{2i}$  est l'homothétie de rapport  $-\frac{3}{2}$  et de centre d'affixe  $\frac{5}{1+\frac{3}{2}} = 2$ .

2. Dans la suite de l'exercice on considère  $\omega \in \mathbb{R}$  et on pose  $\theta = \arg\left(\frac{1}{2} + \omega i\right)$  avec  $\theta \in ]-\pi; \pi]$ . On considère les points  $A(2; 0)$  et  $M_0(3; 0)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $M_{n+1} = f_\omega(M_n)$  et on désigne par  $z_n$  l'affixe de  $M_n$ .

a. Vérifier que  $z_1 = \frac{5}{2} + \omega i$  puis calculer  $z_2$  en fonction de  $\omega$  :

$$z_1 = f(z_0) = f(3) = \left(\frac{1}{2} + \omega i\right)3 + 1 - 2\omega i = \frac{5}{2} + \omega i.$$

$$z_2 = f(z_1) = f\left(\frac{5}{2} + \omega i\right) = \left(\frac{1}{2} + \omega i\right)\left(\frac{5}{2} + \omega i\right) + 1 - 2\omega i = \frac{9}{2} - \omega^2 + \omega i.$$

b. Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $z_n = 2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$  :

Démontrons par récurrence cette proposition.

• Initialisation :  $z_0 = 3 = 2 + 1 = 2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^0 e^{i \cdot 0 \cdot \theta}$

• Transmission : Montrons que pour  $n$  donné, si  $z_n = 2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$  alors  $z_{n+1} = 2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$ .

$$z_{n+1} = f(z_n) = \left(\frac{1}{2} + \omega i\right)z_n + 1 - 2\omega i = \left(\frac{1}{2} + \omega i\right)\left(2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}\right) + 1 - 2\omega i.$$

$$= 1 + 2\omega i + \left(\frac{1}{2} + \omega i\right)\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta} + 1 - 2\omega i = 2 + \left(\frac{1}{2} + \omega i\right)\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$$

$$\text{Or } \theta = \arg\left(\frac{1}{2} + \omega i\right) \Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\left|\frac{1}{2} + \omega i\right|} \Rightarrow \left|\frac{1}{2} + \omega i\right| = \frac{1}{2\cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{2} + \omega i = \frac{1}{2\cos\theta} e^{i\theta}$$

$$\text{D'où } z_{n+1} = 2 + \left(\frac{1}{2} + \omega i\right)\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta} = 2 + \frac{1}{2\cos\theta} e^{i\theta} \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta} \Rightarrow z_{n+1} = 2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$$

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $z_n = 2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$ .

c. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $V_n = |z_n - 2|$ . Montrer que la suite  $(V_n)$  est géométrique puis déterminer les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles  $(V_n)$  est convergente :

$$V_n = |z_n - 2| = \left|2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta} - 2\right| = \left|\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}\right| = \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n \text{ car } \cos\theta > 0.$$

Donc  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{2\cos\theta}$ .

$$(V_n) \text{ est convergente} \Leftrightarrow -1 < |q| \leq 1 \Leftrightarrow -1 < \left|\frac{1}{2\cos\theta}\right| \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2\cos\theta} \leq 1 \Leftrightarrow \cos\theta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right].$$

c. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $d_n = \|M_n M_{n+1}\|$ . Montrer que  $d_n = V_{n+1}$  puis calculer en fonction de  $n$  la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n d_k, \text{ en donner une interprétation :}$$

$$d_n = \|M_n M_{n+1}\| = |z_{n+1} - z_n| = \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n \left|\frac{1}{2\cos\theta} e^{i\theta} - 1\right| = \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^{n+1} |e^{i\theta} - 2\cos\theta| = \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^{n+1} = V_{n+1}$$

$$\text{Car } |e^{i\theta} - 2\cos\theta| = |-\cos\theta + i\sin\theta| = 1.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n d_k = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_{n+1} = V_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2\cos\theta}} = \frac{1}{2\cos\theta} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2\cos\theta}}$$

$S_n$  est la longueur de la ligne brisée reliant les points  $M_0; M_1; M_2; \dots; M_n$

### Exercice N°2 :

On considère la fonction numérique  $f_n$  définie par :  $f_n(x) = \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}$  où  $n$  est un entier naturel. Soit  $C_n$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Dresser le tableau de variation de  $f_0$  où  $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  :

•  $D_{f_0} = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$ .

• Les limites aux bornes du domaine de définition de  $f_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t} = 1 \text{ (En posant } t = e^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{0}{1+0} = 0$$

• Dérivée et tableau de variation.

$$f_0'(x) = \frac{(1+e^x)e^x - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| x         | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'_0(x)$ | +         |           |
| $f_0(x)$  | 1         |           |

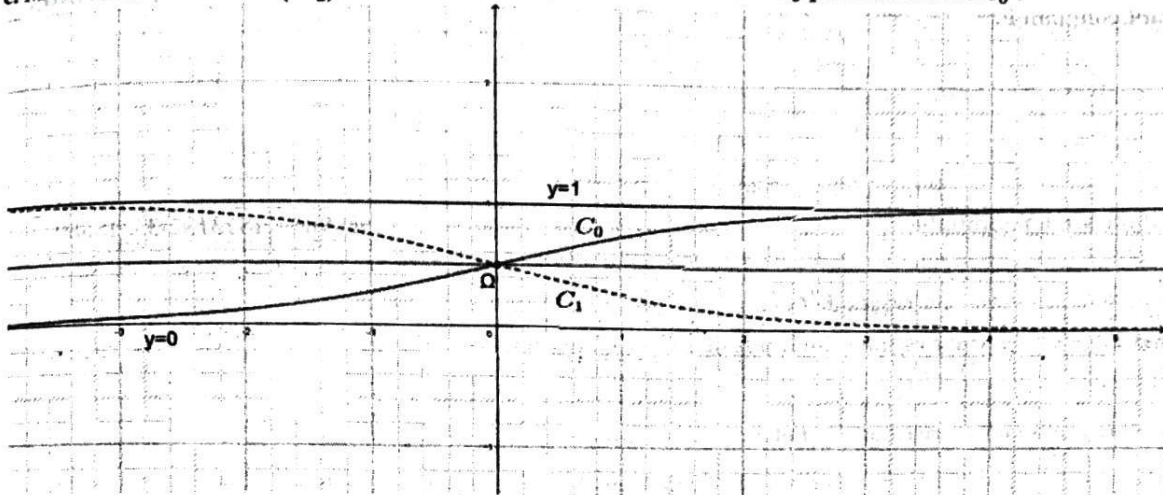
0  $\nearrow$

b. Montrer que  $C_0$  admet deux asymptotes horizontales que l'on déterminera :

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0$ , alors  $C_0$  deux asymptotes horizontales d'équations respectives :

$y=1$  et  $y=0$ .

c. Montrer que le point  $\Omega(0; \frac{1}{2})$  est un centre de symétrie de la courbe  $C_0$  puis construire  $C_0$  :



Vérifions que  $f_0(2 \times 0 - x) + f_0(x) = 2 \times \frac{1}{2}$  c'est-à-dire  $f_0(-x) + f_0(x) = 1$  ?

$$f_0(-x) + f_0(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} = 1. \text{ D'où } \Omega(0; \frac{1}{2}) \text{ est un centre de symétrie de la courbe } C_0.$$

2. a. Vérifier que pour tout réel :  $f_1(x) = f_0(-x)$ . En déduire une transformation géométrique simple qui permet de construire  $C_1$  à partir de  $C_0$  :

$$f_0(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \text{ et } f_1(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \Rightarrow f_1(x) = f_0(-x).$$

$C_1$  est l'image de  $C_0$  par la réflexion d'axe (Oy).

b. Vérifier que pour tout réel :  $f_1(x) = 1 - f_0(x)$ . En déduire une transformation géométrique simple qui permet de construire  $C_1$  à partir de  $C_0$  :

$$1 - f_0(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} = f_1(x). \text{ D'où } f_1(x) = 1 - f_0(x).$$

$C_1$  est l'image de  $C_0$  par la réflexion d'axe  $y = \frac{1}{2}$ .

c. Construire  $C_1$  à partir de  $C_0$  dans le repère précédent : (voir la figure précédente)

3. On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

a. Calculer  $U_0$  et  $U_1$  :

$$U_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

$$U_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 (1 - f_0(x)) dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 f_0(x) dx = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

b. Prouver que pour tout entier naturel  $n > 1$  on a :  $0 < U_n < \frac{1}{n-1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

$$\forall x \in [0; 1] ; 1 + e^x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+e^x} < 1 \Rightarrow 0 < f_n(x) < e^{(1-n)x} \Rightarrow 0 < \int_0^1 f_n(x) dx < \int_0^1 e^{(1-n)x} dx$$

$$\Rightarrow 0 < U_n < \left[ \frac{1}{1-n} e^{(1-n)x} \right]_0^1 \Rightarrow 0 < U_n < \frac{1}{1-n} e^{n-1} - \frac{1}{1-n} \Rightarrow 0 < U_n < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1} e^{n-1} \Rightarrow 0 < U_n < \frac{1}{n-1}.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ .

4. On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $V_n = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$  et  $V_0 = 1$ . Soit  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ .

a. Vérifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $U_{n+1} + U_n = |V_n|$  :

$$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 f_{n+1}(x) dx + \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x} dx.$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{(1-n)x}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{(1+e^x)e^{-nx}}{1+e^x} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[ \frac{-1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right) = |V_n|.$$

D'où pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $U_{n+1} + U_n = |V_n|$ .

b. Prouver que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $|S_n - U_0| = |U_{n+1}|$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  :

Comme :  $\begin{cases} V_n > 0 ; \text{ si } n \text{ est pair} \\ V_n < 0 ; \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$  alors on a :

$$\begin{aligned} V_0 &= U_1 + U_0 \\ V_1 &= -U_2 - U_1 \\ V_2 &= U_3 + U_2 \end{aligned}$$

$$V_n = \begin{cases} U_{n+1} + U_n ; \text{ si } n \text{ est pair} \\ -U_{n+1} - U_n ; \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_n = \begin{cases} U_0 + U_{n+1} ; \text{ si } n \text{ est pair} \\ U_0 - U_{n+1} ; \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \Rightarrow S_n - U_0 = U_{n+1} \text{ ou } S_n - U_0 = -U_{n+1} . \text{ D'où } |S_n - U_0| = |U_{n+1}|.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = U_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

### Exercice N°3 :

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et de côté  $a$ . Soit G le centre de gravité de ce triangle et soit D le symétrique de A par rapport à C.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes. Elle sera complétée au fur et à mesure : ( voir la construction).

2. a. prouver qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme A en C et B en D :

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{AB} \neq \overline{CD} \end{cases} \text{ alors il existe une unique rotation } r : \begin{cases} A \rightarrow C \\ B \rightarrow D \end{cases}$$

b. Préciser un angle de  $r$  et déterminer son centre E puis le placer sur la figure :

$$\bullet \text{ L'angle de } r : (\overline{AB} ; \overline{CD}) = (\overline{AB} ; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\bullet \text{ Le centre E de } r \text{ est tel que : } \begin{cases} EA = EC \\ (\overline{EA} ; \overline{EC}) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow EAC \text{ est équilatéral de sens direct.}$$

3. Prouver que les points A, B, D et E sont cocycliques, préciser le centre et le rayon de ce cercle puis le construire :

$$\bullet \text{ On a d'une part : } (\overline{EB} ; \overline{ED}) = \frac{\pi}{3} \text{ et d'autre part : } (\overline{AB} ; \overline{AD}) = (\overline{AB} ; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} . \text{ D'où points A, B, D et E sont cocycliques.}$$

• Il suffit aussi de remarquer que  $CA = AB = CD = CE$  pour vérifier la cocyclicité des points A, B, D et E.

Le centre de ce cercle est le point C.

4. Soit  $s$  la similitude directe de centre B et transforme D en C.

a. Déterminer un angle et le rapport de  $s$  :

$$\bullet \text{ Un angle de } s : (\overline{BD} ; \overline{BC}) = (\overline{BD} ; \overline{BA}) + (\overline{BA} ; \overline{BC}) = \frac{1}{2}(\overline{CD} ; \overline{CA}) + (\overline{BA} ; \overline{BC}) = \frac{1}{2} \times \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\bullet \text{ Le rapport de } s \text{ est : } \frac{BC}{BD} = \frac{BC}{BD} \text{ or } \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{D'où } s = s_{\left(A; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\pi}{6}\right)}$$

b. Déterminer l'image du triangle BDE par  $s$  :

$\text{sos}(B) = s(B) = B$  ;  $\text{sos}(D) = s(C) = G$  or le triangle BDE est un triangle équilatéral de sens direct alors son image est le triangle équilatéral de sens direct BGG' où  $G' = \text{sos}(E)$  le symétrique de G par rapport à (AB).

5. On pose  $f = \text{ros}$  et  $g = \text{sor}$ .

a. Préciser et construire  $f(B)$ ,  $f(E)$ ,  $g(B)$  et  $g(A)$  :

$$f(B) = \text{ros}(B) = r(B) = D ; f(E) = \text{ros}(E) = r(A) = C.$$

$$g(B) = \text{sor}(B) = s(D) = C ; g(A) = \text{sor}(A) = s(C) = G.$$

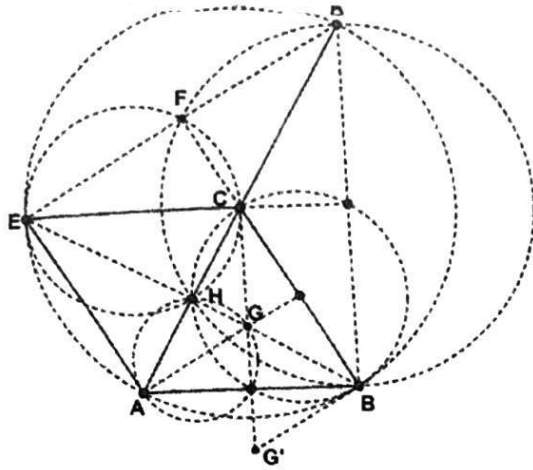
b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$  et  $g$  :

• Pour le cas de  $f$  :  $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$  et  $1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (car  $r$  est une similitude de rapport 1 et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ ) alors  $f$  est une similitude de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre F intersection des cercles de diamètres respectifs [BD] et [CE].

Pour le cas de  $g$  :  $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$  et  $1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (car  $r$  est une similitude de rapport 1 et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ ) alors  $g$  est une similitude de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre H intersection des cercles de diamètres respectifs [BC] et [AG], c'est le point H milieu de [AC].

c. Démontrer que les cercles de diamètres respectifs [AG], [BC], [CE] et [DB] ont un point commun. Quelle est la particularité de ce point :

Les triangles FAG, FBC, FCE et FDB sont rectangles en F alors les cercles [AG], [BC], [CE] et [DB] de diamètres respectifs [AG], [BC], [CE] et [DB] ont le point commun F.



**Exercice N°4 :**

On considère la fonction numérique définie par :  $f(x) = 2x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right)$  et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a. Vérifier que l'ensemble de définition de f est  $\mathbb{R}^*$  :

|                            |           |   |           |
|----------------------------|-----------|---|-----------|
| x                          | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $x^2 - 2x + 2$             | +         |   | +         |
| $x^2$                      | +         | 0 | +         |
| $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}$ | +         |   | +         |

Donc  $D_f = \mathbb{R}^*$

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , interpréter graphiquement :

c. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 3) + \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) = -3 + (+\infty) = +\infty$$

D'où  $x = 1$  est AV de (C).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) = -\infty + 0 = -\infty$$

d. Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une notée D est oblique. Etudier la position relative de (C) et D :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 3)) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) = 0$$

D :  $y = 2x - 3$  est une asymptote oblique de (C) et comme  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  alors  $x = 0$  est AV de (C).

Position relative de (C) et D :  $f(x) - y = f(x) - (2x - 3) = \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right)$  or  $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2} = \frac{x^2 - 2(x-1)}{x^2}$

• Si  $x=1$  alors  $x-1=0 \Rightarrow x^2 - 2(x-1) = x^2 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2} = 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) = 0$ . D'où D coupe (c) au point d'abscisse 1.

• Si  $x > 1$  alors  $x-1 > 0 \Rightarrow x^2 - 2(x-1) < x^2 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) < 0$ . D'où D est au dessus de (C).

• Si  $x < 1$  et  $x \neq 0$  alors  $x-1 < 0 \Rightarrow x^2 - 2(x-1) > x^2 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) > 0$ . D'où D est en dessous de (C).

|             |           |          |         |           |
|-------------|-----------|----------|---------|-----------|
| x           | $-\infty$ | 0        | 1       | $+\infty$ |
| $f(x) - y$  | +         | +        | 0       | -         |
| P. relative | (C)<br>D  | (C)<br>D | D ∩ (C) | (C)<br>D  |

9-2020

3 a Calculer  $f'(x)$  puis vérifier que  $f'(x) = \frac{2(x-1)}{x} \varphi(x)$  où  $\varphi$  est une fonction strictement positif pour tout  $x \neq 0$  à déterminer :

$$f'(x) = 2 + \frac{\frac{x^2-2x+2}{x^2}}{x^2-2x+2} = 2 + \frac{(2x-2)x^2-2x(x^2-2x+2)}{x^4} \times \frac{x^2}{x^2-2x+2} = 2 \left( 1 + \frac{x-2}{x(x^2-2x+2)} \right)$$

$$= \frac{2(x^3-2x^2+3x-2)}{x(x^2-2x+2)} = \frac{2(x-1)(x^2-x+2)}{x(x^2-2x+2)} = \frac{2(x-1)}{x} \varphi(x) \text{ où } \varphi(x) = \frac{x^2-x+2}{x^2-2x+2}$$

b. Dresse le tableau de variation de f :

Or  $\varphi(x) > 0$  car  $x^2 - x + 2 > 0$  et  $x^2 - 2x + 2 > 0$ . D'où le signe de  $f'(x)$  est celui de  $\frac{x-1}{x}$ .

| x               | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|---|---|-----------|
| $\frac{x-1}{x}$ | -         | - | 0 | +         |
| $\frac{x-1}{x}$ | +         | - | 0 | +         |

D'où le tableau de variation de f :

| x       | $-\infty$ | 0         | 1  | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|----|-----------|
| $f'(x)$ | +         | -         | 0  | +         |
| f(x)    | $+\infty$ | $+\infty$ | -1 | $+\infty$ |

$f(1) = -1$ .

c. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet trois solutions distinctes  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  dont on donnera un encadrement d'amplitude  $5 \times 10^{-1}$  :

La fonction f est continue sur  $]-\infty; 0[$  et  $0; +\infty[$  et comme  $f(]-\infty; 0]) = ]-\infty; +[$  ;  $f(]0; 1]) = [-1; +\infty[$  et

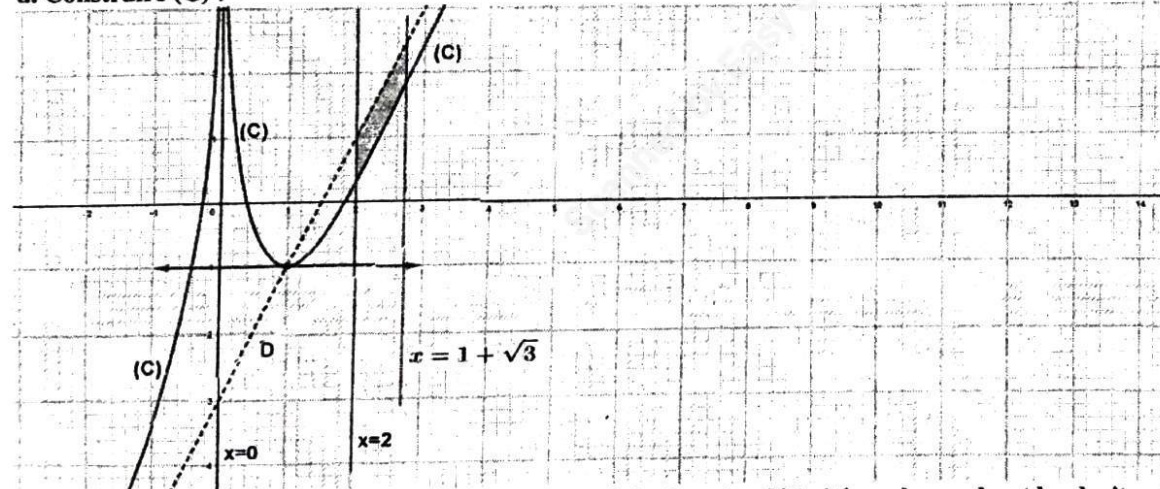
$f(]1; +\infty]) = [-1; +\infty[$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet trois solutions distinctes  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  telles que  $\alpha < 0$  ;  $0 < \beta < 1$  et  $\gamma > 1$ .

•  $f(-0,5) < 0 \Rightarrow -0,5 < \alpha < 0$ .

•  $f(0,5) > 0 \Rightarrow 0,5 < \beta < 1$ .

•  $f(1,5) < 0$  et  $f(2) > 0 \Rightarrow 1,5 < \gamma < 2$ .

d. Construire (C) :



3. On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe et les droites d'équations respectives :  $y = 2x-3$ ,  $x = 2$  et  $x = 1 + \sqrt{3}$ .

a. Vérifier que pour tout réel x on a :  $\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{1+(x-1)^2}$  :

$$\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{1+(x-1)^2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2-2}{x^2-2x+2} = \frac{2x-4}{x^2-2x+2}$$

D'où  $\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{1+(x-1)^2}$ .

b. Calculer  $A = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx$  :

$$A = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx = [\ln(x^2 - 2x + 2)]_2^{1+\sqrt{3}} = \ln(1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2 - 2\sqrt{3} + 2) - \ln(4 - 4 + 2) = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2.$$

c. En posant  $x = 1 + \tan t$  pour tout  $t \in [0; \frac{\pi}{2}[$  ; calculer  $B = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2}{1+(x-1)^2} dx$  :

$$x = 1 + \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt \text{ et } x-1 = \tan t$$

$$\text{Pour } x=2 \text{ alors } 2=1+\tan t \Rightarrow \tan t=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \text{ et pour } x=1+\sqrt{3} \text{ alors } 1+\sqrt{3}=1+\tan t \Rightarrow \tan t=\sqrt{3} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$$

$$B = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2}{1+(x-1)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{1+\tan^2 t} \times (1 + \tan^2 t) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2 dt = [2t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$$

d. Déduire de ce qui précède le calcul de l'aire  $S$  exprimée en unité d'aire :

$$S = \int_2^{1+\sqrt{3}} (f(x) - (2x - 3)) dx = \int_2^{1+\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{2x-4}{x(x^2-2x+2)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \left[ x \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) \right]_2^{1+\sqrt{3}} - \int_2^{1+\sqrt{3}} x \cdot \frac{2x-4}{x(x^2-2x+2)} dx = \left[ x \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) \right]_2^{1+\sqrt{3}} - \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-2x+2} dx \\ &= \left[ x \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right) \right]_2^{1+\sqrt{3}} - \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx + \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2}{1+(x-1)^2} dx = \left( (1+\sqrt{3}) \ln\left(\frac{4}{(1+\sqrt{3})^2}\right) - \ln 2 + \frac{\pi}{6} \right) \text{ (ua)} \end{aligned}$$

## Bac 2008 session normale

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + \frac{1}{e^{x+1}}$ . On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ) d'unité 2cm.

1. a. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- b. Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle que l'on déterminera.
2. Démontrer et interpréter géométriquement chacune des relations suivantes :

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 1)) = 0$  ;

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$  ;

c.  $\forall x \in \mathbb{R} ; x \leq f(x) \leq x + 1$  ;

d.  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(-x) + f(x) = 1$  ;

e.  $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$ .

3. Construite la courbe (C).

#### Exercice N°2 :

Pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $U_n = \int_1^e x^3 (\ln x)^n dx$ .

1. a. Démontrer en utilisant une intégration par parties que :  $U_1 = \frac{3e^4 + 1}{16}$ .

b. Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?

2. a. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout  $n \geq 2$  on a :  $4U_n + nU_{n-1} = e^4$ .

b. En déduire le calcul de  $U_2$  et  $U_3$ .

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\frac{e^4}{n+5} \leq U_n \leq \frac{e^4}{n+4}$ .

b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nU_n)$ .

#### Exercice N°3 :

Dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , on pose  $P(z) = z^3 - (5 + 6i)z^2 + (-4 + 14i)z + 8 - 8i$ .

1. a. Calculer  $P(1)$ .

b. Résoudre l'équation  $P(z) = 0$ .

2. Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ;  $\vec{u}$  ;  $\vec{v}$ ), on considère quatre points A, B, C et G tels que  $z_A =$

$2i$ ,  $z_B = 1$  et  $G = \text{bar}\{(A;2); (B;-2); (C;-1)\}$  et  $z_G = 6$ .

a. Calculer  $z_C$  du point C et montrer que le triangle ABC est rectangle en A. Placer les points A, B, C et G sur la figure.

b. Déterminer puis construire les deux ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des points M du plan tels que :

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -10$  et  $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = -5$

c. Que peut-on dire à propos de la position relative des deux ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ?

#### Exercice N°4 :

1. On considère la fonction  $u$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $u(x) = \frac{1}{\ln x}$ . Dresser le tableau de variation de  $u$ .

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = e^{u(x)} = e^{\frac{1}{\ln x}}$ . Démontrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$  et dresser son tableau de variation.

3. Pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $F_n(x) = \int_x^{x+n} f(t) dt = \int_x^{x+n} e^{\frac{1}{\ln t}} dt$  où  $x \in ]1; +\infty[$ .

a. Montrer que  $\forall x \in ]1; +\infty[ ; nf(x+n) \leq F_n(x) \leq nf(x)$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$ .

b. Montrer que  $\forall x > 0 ; e^x > 1 + x$ . En déduire que :  $\forall t > 1 ; 0 < \ln t < t - 1$ .

c. Montrer que  $\forall x \in ]1; +\infty[ ; F_n(x) - n > \ln\left(\frac{x+n-1}{x-1}\right)$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_n(x)$ .

d. Dresser le tableau de variation de  $F_n$ .

e. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction  $F_1$  dans un repère orthonormé (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ), (cas  $n=1$ ).

**Exercice N°5 :**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABE direct rectangle isocèle en A. Soit F et G les points tels que le quadrilatère AEFG soit un carré direct. Les points I, O et C sont les milieux respectifs des segments [AB], [BE] et [EA].

Le point J est symétrique de I par rapport à O.

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes (On pourra prendre (AB) horizontale).

b. Démontrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme A en B et E en A.

c. Déterminer l'angle est le centre de  $r$ .

d. Déterminer  $r(J)$ .

2. a. Démontrer qu'il existe une unique similitude directe  $s$  qui transforme C en A et A en B.

b. Déterminer l'angle est le rapport de  $s$ .

c. Montrer que  $s(E) = G$  et déterminer l'image du carré COJE par la similitude directe  $s$ .

3. Soit  $\Omega$  le centre de la similitude  $s$ .

a. Montrer que  $\Omega$  appartient aux cercles de diamètres [JF] ; [EG] ; [CA] et [AB].

b. Démontrer que les deux cercles de diamètres [JF] et [AB] sont tangents en  $\Omega$ .

4. On considère les deux cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  passant par  $\Omega$  et de centres respectifs A et B. Soit D l'intersection de ces deux cercles autre que  $\Omega$ .

a. Démontrer que  $s(\Gamma) = \Gamma'$ . En déduire que les points  $\Omega$ , A, B et D sont cocycliques.

b. Soit M un point de  $\Gamma$  distinct de  $\Omega$  et de D. On pose  $s(M) = M'$ . Démontrer que les points M, M' et D sont alignés.

## Solution

**Exercice N°1 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + \frac{1}{e^x + 1}$ . On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ) d'unité 2cm.

1. a. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

•  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

• Limites aux bornes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{1}{e^x + 1} \right) = +\infty + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \frac{1}{0 + 1} \right) = -\infty + 1 = -\infty.$$

• Tableau de variation :

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x + 1)^2} > 0$$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| x       | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

b. Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle que l'on déterminera :

Sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f$  est continue et strictement croissante alors elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Démontrer et interpréter géométriquement chacune des relations suivantes :

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 1)) = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \frac{1}{e^x + 1} - x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{e^x + 1} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

Donc la droite (d) :  $y = x + 1$  est une asymptote oblique de (C) au voisinage de  $-\infty$ .

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{1}{e^x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^x + 1} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc la droite (d') :  $y = x$  est une asymptote oblique de (C) au voisinage de  $+\infty$ .

c.  $\forall x \in \mathbb{R} ; x \leq f(x) \leq x + 1$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) - x = \frac{1}{e^x + 1} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} ; x \leq f(x).$$

$$f(x) - (x + 1) = \frac{1}{e^x + 1} - 1 = \frac{-e^x}{e^x + 1} \leq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \leq x + 1.$$

D'où  $\forall x \in \mathbb{R} ; x \leq f(x) \leq x + 1$  par conséquent (C) est au dessus de (d') et est en dessous de (d).

d.  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(-x) + f(x) = 1$  :

$$f(-x) + f(x) = -x + \frac{1}{e^{-x} + 1} + x + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x} + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1.$$

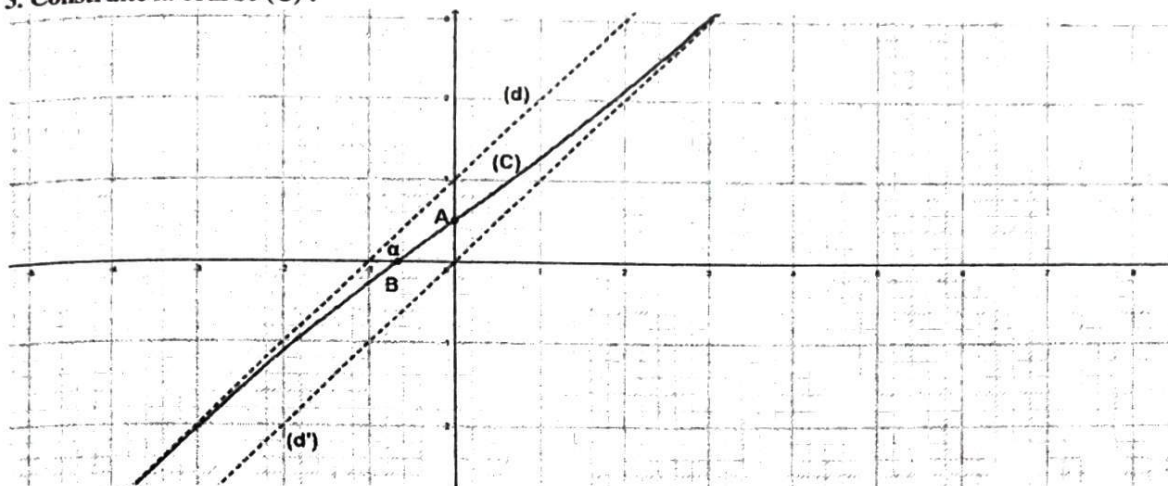
D'où le point  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  est un centre de symétrie de (C).

e.  $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$  :

Par le calcul  $f(-0,6) > 0$  et  $f(-0,7) < 0 \Rightarrow f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$ .

Donc (C) coupe l'axe des abscisses au point B d'abscisse  $\alpha$  telle que  $-0.7 < \alpha < -0.6$ .

3. Construite la courbe (C) :



**Exercice N°2 :**

Pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $U_n = \int_1^e x^3 (\ln x)^n dx$ .

1. a. Démontrer en utilisant une intégration par parties que  $U_1 = \frac{3e^4+1}{16}$  :

$$U_1 = \int_1^e x^3 \ln x dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = x^3 \\ v(x) = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{1}{4}x^4 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_1 = \left[ \frac{1}{4}x^4 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^4 \times \frac{1}{x} dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4}x^4 \right]_1^e = \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16} = \frac{3e^4+1}{16}$$

Donc  $U_1 = \frac{3e^4+1}{16}$ .

b. Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?

$$\bullet U_{n+1} - U_n = U_n = \int_1^e x^3 (\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e x^3 (\ln x)^n dx = \int_1^e x^3 (\ln x)^n (\ln x - 1) dx.$$

$$\text{On a } 1 \leq x \leq e \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \ln x - 1 \leq 0 \Rightarrow x^3 (\ln x)^n (\ln x - 1) \leq 0 \Rightarrow \int_1^e x^3 (\ln x)^n (\ln x - 1) dx \leq 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0. \text{ D'où } (U_n) \text{ est décroissante.}$$

$$\bullet 1 \leq x \leq e \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^3 (\ln x)^n \Rightarrow 0 \leq \int_1^e x^3 (\ln x)^n dx \Rightarrow U_n \geq 0.$$

D'où  $(U_n)$  est positive.

• On peut en déduire que  $(U_n)$  est convergente car elle est décroissante et minorée par 0.

2. a. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout  $n \geq 2$  on a :  $4U_n + nU_{n-1} = e^4$  :

$$\text{On a } U_n = \int_1^e x^3 (\ln x)^n dx.$$

$$\begin{cases} u'(x) = x^3 \\ v(x) = (\ln x)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{1}{4}x^4 \\ v'(x) = n \frac{1}{x} (\ln x)^{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_n = \left[ \frac{1}{4}x^4 (\ln x)^n \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^4 \times n \frac{1}{x} (\ln x)^{n-1} dx = \frac{e^4}{4} - \frac{n}{4} \int_1^e x^3 (\ln x)^{n-1} dx = \frac{e^4}{4} - \frac{n}{4} U_{n-1}$$

$$U_n = \frac{e^4}{4} - \frac{n}{4} U_{n-1} \Rightarrow 4U_n + nU_{n-1} = e^4.$$

b. En déduire le calcul de  $U_2$  et  $U_3$  :

$$4U_2 + 2U_1 = e^4 \Rightarrow U_2 = \frac{e^4 - 2U_1}{4} = \frac{e^4 - \frac{3e^4+1}{8}}{4} = \frac{\frac{8e^4 - 3e^4 - 1}{8}}{4} = \frac{5e^4 - 1}{32}$$

$$4U_3 + 3U_2 = e^4 \Rightarrow U_3 = \frac{e^4 - 3U_2}{4} = \frac{e^4 - \frac{15e^4 - 3}{32}}{4} = \frac{\frac{32e^4 - 15e^4 + 3}{32}}{4} = \frac{17e^4 + 3}{128}$$

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\frac{e^4}{n+5} \leq U_n \leq \frac{e^4}{n+4}$  :

$$\bullet U_n \leq U_{n-1} \text{ car } (U_n) \text{ est décroissante} \Rightarrow nU_n \leq nU_{n-1} \Rightarrow 4U_n + nU_n \leq 4U_n + nU_{n-1} \Rightarrow (n+4)U_n \leq e^4 \Rightarrow U_n \leq \frac{e^4}{n+4} \dots(1)$$

$$\bullet \text{ On a : } 4U_{n+1} + (n+1)U_n = e^4.$$

$$U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow 4U_{n+1} \leq 4U_n \Rightarrow 4U_{n+1} + (n+1)U_n \leq 4U_n + (n+1)U_n \Rightarrow e^4 \leq (n+5)U_n \Rightarrow \frac{e^4}{n+5} \leq U_n \dots(2)$$

$$\text{D'où de (1) et (2) on a : } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ on a : } \frac{e^4}{n+5} \leq U_n \leq \frac{e^4}{n+4}.$$

b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nU_n)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^4}{n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^4}{n+4} = 0 \text{ alors d'après TG } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0.$$

$$\frac{e^4}{n+5} \leq U_n \leq \frac{e^4}{n+4} \Rightarrow \frac{ne^4}{n+5} \leq nU_n \leq \frac{ne^4}{n+4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^4}{n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^4}{n+4} = ne^4 \text{ alors d'après TG } \lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n = ne^4.$$

Exercice N°3 :

Dans l'ensemble des nombres complexes  $C$ , on pose  $P(z) = z^3 - (5+6i)z^2 + (-4+14i)z + 8-8i$ .

1. a. Calculer  $P(1)$  :

$$P(1) = 1^3 - (5+6i) \times 1^2 + (-4+14i) \times 1 + 8-8i = 1-5-6i-4+14i+8-8i = 0$$

b. Résoudre l'équation  $P(z)=0$  :

Déterminer d'abord deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z-1)(z^2+az+b)$ .

|   |   |       |        |       |
|---|---|-------|--------|-------|
|   | 1 | -5-6i | -4+14i | 8-8i  |
| 1 |   | 1     | -4-6i  | -8+8i |
|   | 1 | -4-6i | -8+8i  | 0     |
|   |   | a     | b      |       |

$$\Rightarrow P(z) = (z-1)(z^2 - (4+6i)z - 8+8i)$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-1)(z^2 - (4+6i)z - 8+8i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z-1=0 \\ z^2 - (4+6i)z - 8+8i=0 \end{cases}$$

$$\bullet z-1=0 \Rightarrow z_0 = 1.$$

$$\bullet z^2 - (4+6i)z - 8+8i = 0$$

$$\Delta' = \frac{-(4+6i)^2 - 4(-8+8i)}{4} = \frac{-16-48i-36-32i+32-32i}{4} = \frac{-20-76i}{4} = -5-19i$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{4+6i + \sqrt{-5-19i}}{2} = 4+4i \text{ et } z_2 = \frac{4+6i - \sqrt{-5-19i}}{2} = 2i.$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est  $\{1; 4+4i; 2i\}$ .

2. Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère quatre points  $A, B, C$  et  $G$  tels que  $z_A = 2i, z_B = 1$  et  $G = \overline{(A;2); (B;-2); (C;-1)}$  et  $z_G = 6$ .

a. Calculer  $z_C$  du point  $C$  et montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ . Placer les points  $A, B, C$  et  $G$  sur la figure :

$$z_G = \frac{2z_A - 2z_B - z_C}{2-2-1} = 6 \Rightarrow 2z_A - 2z_B - z_C = -6 \Rightarrow z_C = 2z_A - 2z_B + 6 = 4i - 2 + 6 = 4+4i.$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4+4i-2i}{1-2i} = \frac{4+2i}{1-2i} = \frac{(4+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{4+8i+2i-4}{1+4} = \frac{10i}{5} = 2i \Rightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Donc le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

b. Déterminer puis construire les deux ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des points  $M$  du plan tels que :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -10 \text{ et } M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = -5.$$

$$\bullet M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -10 :$$

$$2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -MG^2 + 2GA^2 - 2GB^2 - GC^2$$

$$GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |2i - 6|^2 = 36 + 4 = 40; GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |1 - 6|^2 = |-5|^2 = 25.$$

$$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |4+4i - 6|^2 = |-2+4i|^2 = 4 + 16 = 20.$$

$$2GA^2 - 2GB^2 - GC^2 = 2 \times 40 - 2 \times 25 - 20 = 10.$$

$$2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -10 \Leftrightarrow -MG^2 + 10 = -10 \Leftrightarrow MG^2 = 20 = GC^2 \Leftrightarrow MG = CG.$$

D'où  $\Gamma_1$  est le cercle de centre  $G$  passant par  $C$ .

$$MA^2 - MB^2 = -5 \Leftrightarrow 2\vec{IM} \cdot \vec{AB} = -5 \Leftrightarrow \vec{IM} \cdot \vec{AB} = -\frac{5}{2} \text{ où } I = A \cdot B \Rightarrow \Gamma_2 \text{ est la droite perpendiculaire à } (AB).$$

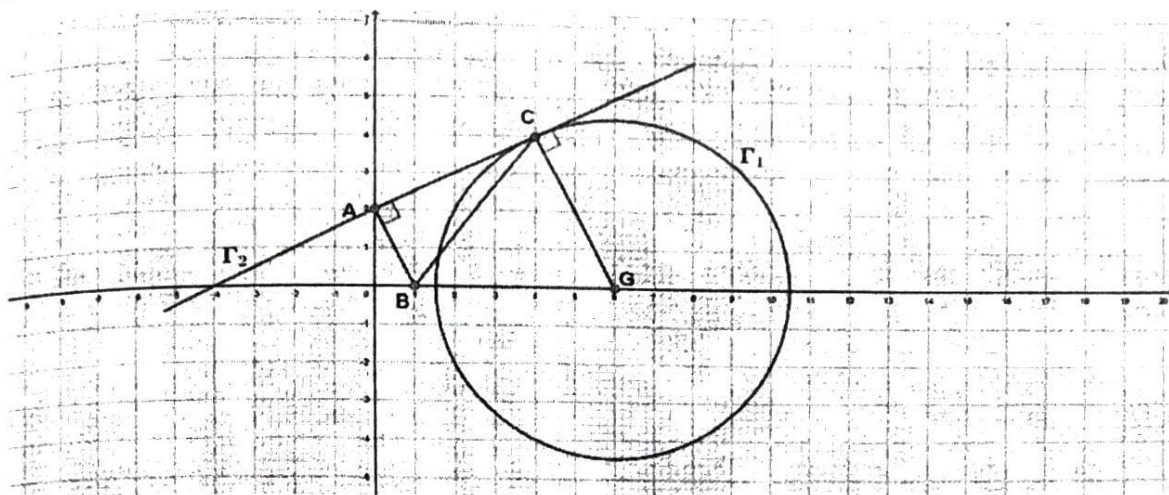
$$\text{Or } \vec{IC} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{7}{2} - 6 = -\frac{5}{2} \Rightarrow \Gamma_2 \text{ est la droite perpendiculaire à } (AB) \text{ passant par } C.$$

D'où  $\Gamma_2 = (AC)$ .

c. Que peut-on dire à propos de la position relative des deux ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ?

$$\vec{CA} \cdot \vec{CG} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 2-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6-4 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -8 + 8 = 0 \Rightarrow (AC) \text{ et } (CG) \text{ sont perpendiculaires.}$$

D'où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont tangentes au point  $C$ .



**Exercice N°4 :**

1. On considère la fonction  $u$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $u(x) = \frac{1}{\ln x}$ . Dresser le tableau de variation de  $u$  :

•  $D_u = ]1; +\infty[$ .

• Les limites aux bornes de  $D_u$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

• Dérivée et tableau de variation :

$$u'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{-1}{x \ln^2 x} < 0.$$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 1         | $+\infty$ |
| $u'(x)$ |           | -         |
| $u(x)$  | $+\infty$ | 0         |

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = e^{u(x)} = e^{\frac{1}{\ln x}}$ .

Démontrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$  et dresser son tableau de variation :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} < 0 \text{ car } u'(x) < 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{u(x)} = e^0 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{u(x)} = +\infty.$$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 1         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 1         |

3. Pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $F_n(x) = \int_x^{x+n} f(t) dt = \int_x^{x+n} e^{\frac{1}{\ln t}} dt$  où  $x \in ]1; +\infty[$ .

a. Montrer que  $\forall x \in ]1; +\infty[; nf(x+n) \leq F_n(x) \leq nf(x)$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$  :

$$x \in ]1; +\infty[; \text{ on a } x \leq t \leq x+n \Rightarrow f(x+n) \leq f(t) \leq f(x) \Rightarrow \int_x^{x+n} f(x+n) dt \leq \int_x^{x+n} f(t) dt \leq \int_x^{x+n} f(x) dt$$

$$\Rightarrow [f(x+n)]_x^{x+n} \leq F_n(x) \leq [f(x)]_x^{x+n} \Rightarrow nf(x+n) \leq F_n(x) \leq nf(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} nf(x+n) = n \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = n \times 1 = n \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} nf(x) = n \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = n \times 1 = n. \text{ Donc d'après TG } \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = n.$$

b. Montrer que  $\forall x > 0; e^x > 1 + x$ . En déduire que :  $\forall t > 1; 0 < \ln t < t - 1$  :

$$\text{Soit } g(x) = e^x - 1 - x.$$

$$g'(x) = e^x - 1 > 0 \text{ pour } x > 0.$$

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |   | +         |
| $g(x)$  | 0 |           |

$$\text{Donc d'après e tableau } \forall x > 0; g(x) > 0 \Rightarrow e^x - 1 - x > 0 \Rightarrow e^x > 1 + x.$$

$$\text{On pose } t=1+x \Leftrightarrow x = t-1 \Rightarrow e^{t-1} > 1 + t - 1 \Rightarrow e^{t-1} > t \Rightarrow t-1 > \ln t > 0.$$

D'où  $\forall t > 1; 0 < \ln t < t - 1$ .

c. Montrer que  $\forall x \in ]1; +\infty[; F_n(x) - n > \ln\left(\frac{x+n-1}{x-1}\right)$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_n(x)$  :

$$\forall t > 1; 0 < \ln t < t - 1 \Rightarrow \frac{1}{t-1} < \frac{1}{\ln t} \Rightarrow e^{\frac{1}{\ln t}} > e^{\frac{1}{t-1}} > 1 + \frac{1}{t-1} \Rightarrow e^{\frac{1}{\ln t}} > 1 + \frac{1}{t-1} \Rightarrow \int_x^{x+n} e^{\frac{1}{\ln t}} dt > \int_x^{x+n} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt$$

$$\Rightarrow F_n(x) > [t + \ln(t-1)]_x^{x+n} \Rightarrow F_n(x) > x+n + \ln(x+n-1) - x - \ln(x-1) \Rightarrow F_n(x) > n + \ln\left(\frac{x+n-1}{x-1}\right)$$

D'où  $\forall x \in ]1; +\infty[; F_n(x) - n > \ln\left(\frac{x+n-1}{x-1}\right)$ .

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+n-1}{x-1}\right) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+n-1}{x-1} = +\infty$ . D'où  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_n(x) = +\infty$ .

d. Dresser le tableau de variation de  $F_n$  :

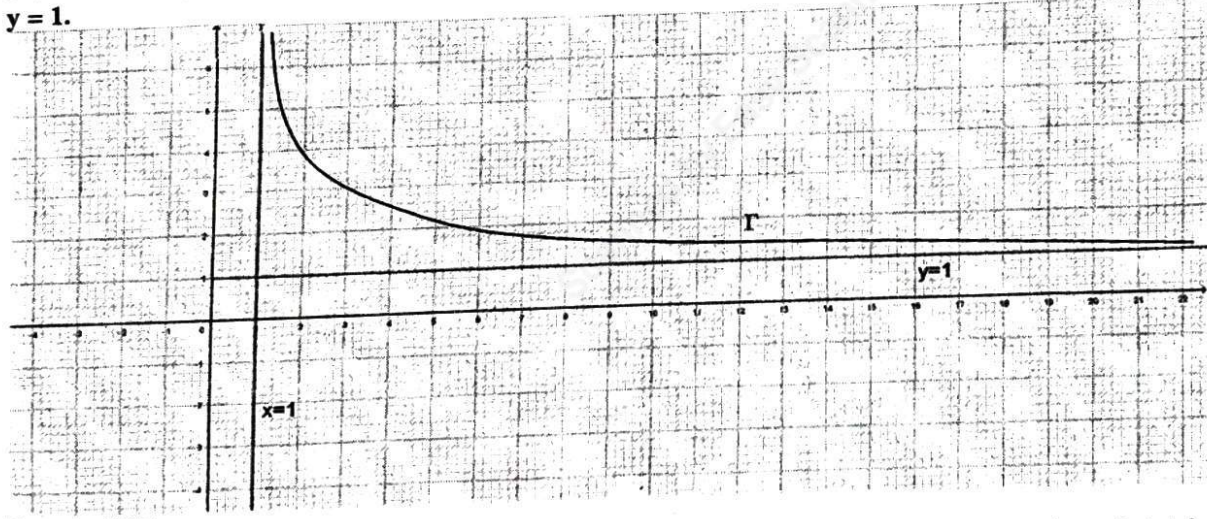
$F'_n(x) = f(x+n) - f(x) < 0$  car  $f$  est décroissante.

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| x         | 1         | $+\infty$ |
| $F'_n(x)$ |           | -         |
| $F_n(x)$  | $+\infty$ | $n$       |

e. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction  $F_1$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , (cas  $n=1$ ) :

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| x         | 1         | $+\infty$ |
| $F'_1(x)$ |           | -         |
| $F_1(x)$  | $+\infty$ | 1         |

L'allure  $\Gamma$  de  $F_1(x)$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 1$  et une autre asymptote horizontale en  $+\infty$  d'équation  $y = 1$ .



**Exercice N°5 :**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABE direct rectangle isocèle en A. Soit F et G les points tels que le quadrilatère AEFG soit un carré direct. Les points I, O et C sont les milieux respectifs des segments [AB], [BE] et [EA]. Le point J est symétrique de I par rapport à O.

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes (On pourra prendre (AB) horizontale) : (voir la construction)

b. Démontrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et E en A :

$$\begin{cases} \overline{AE} = \overline{BA} \\ \overline{AE} \neq \overline{BA} \end{cases} \text{ alors il existe une unique rotation } r : \begin{cases} A \rightarrow B \\ E \rightarrow A \end{cases}$$

c. Déterminer l'angle et le centre de r :

- L'angle  $\alpha$  de r est tel que :  $\alpha = (\overline{AE}; \overline{BA}) = (\overline{AE}; \overline{AG}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .
- Le centre de r est le point d'intersection de Med[AB] et Med[AE] c'est-à-dire le point O. D'où  $r = r_{(O; \frac{\pi}{2})}$

d. Déterminer r(J) :

$$\begin{cases} OJ = OC \\ (\overline{OJ}; \overline{OC}) \end{cases} \Leftrightarrow r(J) = C.$$

2. a. Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme C en A et A en B :

$C \neq A$  et  $A \neq B$  alors qu'il existe une unique similitude directe s :  $\begin{cases} C \rightarrow A \\ A \rightarrow B \end{cases}$

b. Déterminer l'angle est le rapport de  $s$  :

• L'angle  $\beta$  de  $r$  est tel que :  $\alpha = (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

• Le rapport de  $s$  est :  $\frac{AB}{CA} = 2$ .

c. Montrer que  $s(E) = G$  et déterminer l'image du carré COJE par la similitude directe  $s$  :

•  $E$  est la symétrique de  $A$  par rapport à  $C$  alors  $s(E)$  est la symétrique de  $s(A) = B$  par rapport à  $s(C) = A$ . Donc  $s(E) = G$

• L'image du carré COJE par  $s$  est le carré AEFG.

3. Soit  $\Omega$  le centre de la similitude  $s$ .

a. Montrer que  $\Omega$  appartient aux cercles de diamètres  $[JF]$  ;  $[EG]$  ;  $[CA]$  et  $[AB]$  :

•  $s(C) = A \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega C}; \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \Omega \in C_{[CA]}$

•  $s(A) = B \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \Omega \in C_{[AB]}$

•  $s(E) = G \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega E}; \overrightarrow{\Omega G}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \Omega \in C_{[EG]}$

•  $s(J) = F \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega J}; \overrightarrow{\Omega F}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \Omega \in C_{[JF]}$

b. Démontrer que les deux cercles de diamètres  $[JF]$  et  $[AB]$  sont tangents en  $\Omega$  :

$\text{cos } \angle(\Omega, -4) \Rightarrow \text{cos}(C) = s(A) = B$ .  $h(C) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = -4\overrightarrow{\Omega B} \Rightarrow \Omega \in (BC)$ .

Les points  $B$ ,  $C$  et  $F$  sont alignés  $\Rightarrow$  Les points  $\Omega$ ,  $B$  et  $F$  sont alignés.

Soit  $I' = F^*J$  ; on a  $(AB) \parallel (FJ)$ . Soit  $h_1$  l'homothétie de centre  $\Omega$  et qui transforme  $B$  en  $F$  alors :

$h_1(A) = J$  car  $\overrightarrow{\Omega F} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega B}$  et  $\overrightarrow{\Omega J} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega A}$  ; c'est-à-dire  $\frac{\overrightarrow{\Omega F}}{\overrightarrow{\Omega B}} = \frac{\overrightarrow{\Omega J}}{\overrightarrow{\Omega A}} = k$  ( $k$  rapport de  $h_1$ ).

Donc  $h_1$  transforme le cercle de diamètre  $[AB]$  en le cercle de diamètre  $[JF] \Rightarrow h_1(I) = I' \Rightarrow$  Les points  $I$  ;  $\Omega$  et  $I'$  sont alignés et comme  $\Omega \in C_{[JF]}$  alors  $\Omega \in C_{[AB]}$  et  $\Omega \in C_{[JF]}$  sont tangents en  $\Omega$ .

4. On considère les deux cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  passant par  $\Omega$  et de centres respectifs  $A$  et  $B$ . Soit  $D$  l'intersection de ces deux cercles autre que  $\Omega$ .

a. Démontrer que  $s(\Gamma) = \Gamma'$ . En déduire que les points  $\Omega$ ,  $A$ ,  $B$  et  $D$  sont cocycliques :

• L'image de  $\Gamma$  par  $s$  est le cercle  $s(\Gamma)$  et passant par  $s(\Omega)$ , donc c'est le cercle  $\Gamma'$  et passant par  $\Omega$ . Donc  $s(\Gamma) = \Gamma'$ .

•  $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{D\Omega}) + (\overrightarrow{D\Omega}; \overrightarrow{DB})$ .

Or  $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{D\Omega}) = (\overrightarrow{\Omega D}; \overrightarrow{\Omega A})$  car le triangle  $\Omega AD$  est isocèle en  $A$ .

$(\overrightarrow{D\Omega}; \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega D})$  car le triangle  $\Omega DB$  est isocèle en  $B$ .

Donc :  $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{D\Omega}) + (\overrightarrow{D\Omega}; \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{\Omega D}; \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega D})$   
 $= (\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{\Omega A}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] = \frac{\pi}{2} - \pi = (\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}) + \pi$

D'où la cocyclicité des points  $\Omega$ ,  $A$ ,  $B$  et  $D$ .

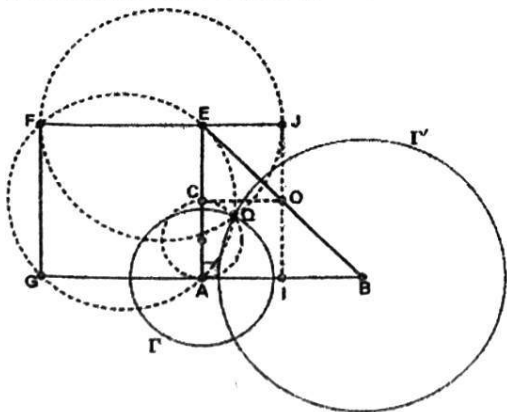
b. Soit  $M$  un point de  $\Gamma$  distinct de  $\Omega$  et de  $D$ . On pose  $s(M) = M'$ . Démontrer que les points  $M$ ,  $M'$  et  $D$  sont alignés :

$(\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{DM'}) = (\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{D\Omega}) + (\overrightarrow{D\Omega}; \overrightarrow{DM'})$   
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A\Omega}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{B\Omega}; \overrightarrow{BM'}) [\pi]$   
 $= \frac{1}{2}((\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A\Omega}) + (\overrightarrow{B\Omega}; \overrightarrow{BM'})) [\pi]$

$s : \begin{cases} A \rightarrow B \\ \Omega \rightarrow \Omega \\ M \rightarrow M' \end{cases} \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega B}; \overrightarrow{BM'}) = (\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{AM})$ .

$\Rightarrow (\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{DM'}) = \frac{1}{2}((\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A\Omega}) + (\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{AM})) [\pi] = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM}) [\pi] = 0 [\pi]$ .

D'où les points  $M$ ,  $M'$  et  $D$  sont alignés.



4. Soit  $M_n$  le point de  $(\Gamma_n)$  en lequel la tangente est horizontale. Les points  $M_n$  sont situés sur la courbe  $(\Gamma)$  (voir figure ci-dessus), donner une équation cartésienne de  $(\Gamma)$ .

**Exercice N°4 :**

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de sens direct de côté  $a$ , ( $a > 0$ ). Les points E, F, G et H sont définis respectivement par  $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ,  $\overline{BF} = \frac{1}{3}\overline{BC}$ ,  $\overline{CG} = \frac{1}{3}\overline{CD}$  et  $\overline{DH} = \frac{1}{3}\overline{DA}$ .

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. (On prendra (AB) horizontale).

2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  telle que  $r(A) = B$  et  $r(E) = F$ .

b. Déterminer un angle et le centre de  $r$ .

c. Montrer que EFGH est un carré et calculer son aire en fonction de  $a$ .

3. Soit  $s$  la similitude directe de centre O qui transforme A en E.

a. Montrer que  $s(B) = F$  puis déterminer  $s(C)$  et  $s(D)$ .

b. Calculer le rapport de  $s$ .

c. Soit  $\alpha$  une mesure de l'angle de  $s$  déterminer la valeur exacte de  $\cos \alpha$ .

4. Soit I, J, K et L les points définis par :

I L'intersection des segments [AG] et [BH].

J L'intersection des segments [BH] et [CE].

K L'intersection des segments [CE] et [DF].

L L'intersection des segments [DF] et [AG].

a. Montrer que IJKL est un carré.

b. montrer que  $K = \text{bar} \{(D, 4); (F, 9)\} = \text{bar} \{(C, 7); (E, 6)\}$ .

c. En déduire l'aire du carré IJKL en fonction de  $a$ .

**Exercice N°5 :**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC direct de côté  $a$ , ( $a > 0$ ). Soit D et E les images respectives de A et B par la symétrie de centre C. soit I le milieu du segment [BC].

1. Faire une figure (qui sera compléter au fur et à mesure) illustrant les données précédentes.

2. a. Montre qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  de centre B et qui transforme D et A.

b. Déterminer l'angle et le centre de  $s_1$ .

c. Soit M un point de la droite (DE) distinct de D et E. Déterminer le lieu géométrique du point M' image de M par  $s_1$ .

Construire M' à partir d'une position donnée de M sur (DE) puis démontrer que les points M, M', B et E sont cocycliques quelque soit la position de M sur (DE).

3. Soit  $s_2$  la similitude directe qui transforme I en B et E en D.

a. Déterminer l'angle et le rapport de  $s_2$ .

b. Déterminer le centre de  $s_2$ .

4. On pose  $f = s_1 \circ s_2$ .

a. Montrer que  $f$  est une similitude directe puis donner son angle et son rapport.

b. Montrer que le centre de  $f$  est l'intersection du cercle de diamètre [BE] avec un deuxième cercle  $\Gamma$  que l'on déterminera. Construire ce centre.

## Solution

**Exercice N°1 :**

Dans l'ensemble des nombres complexes C, on pose :  $P(z) = z^3 - (4 - 8i)z^2 + (-16 + 20i)z + 24 + 8i$ .

1. a. Calculer  $P(2i)$  :

$$P(2i) = (2i)^3 - (4 - 8i)(2i)^2 + (-16 + 20i)(2i) + 24 + 8i = -8i + 16 + 32i - 32i - 40 + 24 + 8i = 0$$

b. Déterminer les complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que pour tout complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z - 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$  puis résoudre l'équation

$P(z) = 0$  :

|    |   |          |         |        |
|----|---|----------|---------|--------|
|    | 1 | -4+8i    | -16+20i | 24+8i  |
| 2i |   | 2i       | 12-8i   | -24-8i |
| 1  |   | -4-6i    | -4+12i  | 0      |
|    |   | $\alpha$ | $\beta$ |        |

$$\Rightarrow P(z) = (z - 2i)(z^2 - (4 + 6i)z - 4 + 12i)$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z - 2i)(z^2 - (4 + 6i)z - 4 + 12i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z - 2i = 0 \\ z^2 - (4 + 6i)z - 4 + 12i = 0 \end{cases}$$

$$z - 2i = 0 \Rightarrow z_0 = 2i.$$

$$z^2 - (4 + 6i)z - 4 + 12i = 0$$

$$\Delta' = (-(2 + 3i))^2 - 1(-4 + 12i) = 4 - 9 + 12i + 4 - 12i = -1 = i^2$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{2+3i+i}{1} = 2 + 4i \text{ et } z_2 = \frac{2+3i-i}{1} = 2 + 2i.$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est  $\{2i; 2 + 4i; 2 + 2i\}$ .

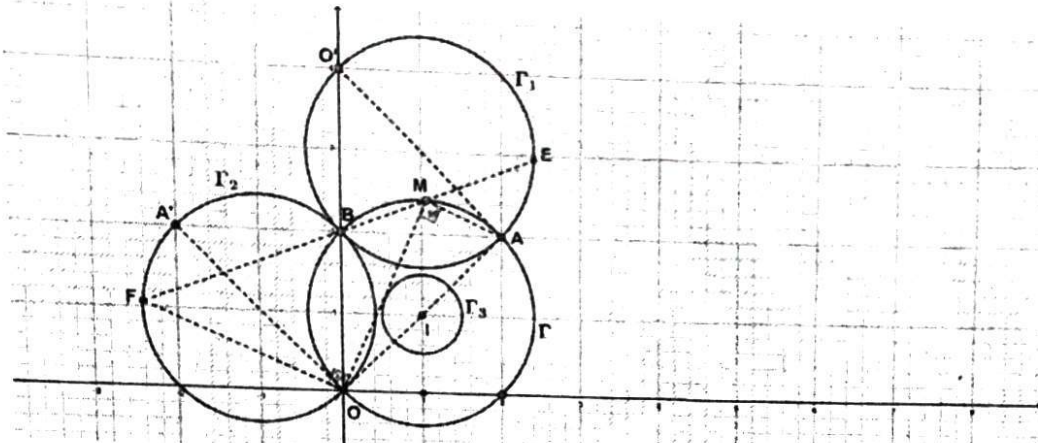
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on considère les points A et B d'affixes respectives  $z_A = 2 + 2i$  et  $z_B = 2i$  et le cercle  $\Gamma$  de diamètre  $[OA]$ . Soit M un point variable appartenant au cercle  $\Gamma$  et distinct des points O et A. On considère les deux triangles AEM et OMF directs, isocèles et rectangles respectivement en A et en O. On note G le centre de gravité du triangle OAM et on appelle e, f, g et m les affixes respectives des points E, F, G et M.

a. Construire une figure et démontrer que, quelque soit le point M choisi sur le cercle  $\Gamma$ , on a :  $|m - 1 - i| = \sqrt{2}$  :

$$\text{Soit } I = O^*A \text{ alors } IM = \frac{OA}{2}$$

$$z_I = \frac{z_A + z_O}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i \text{ et } \frac{OA}{2} = \frac{|z_A|}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$IM = \frac{OA}{2} \Rightarrow |m - 1 - i| = \sqrt{2}.$$



b. Ecrire en fonction de m chacun des nombres complexes e, f et G :

• Le triangle AEM est direct, isocèle et rectangle en A  $\Leftrightarrow$  la rotation de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  transforme M en E

$$\Leftrightarrow e - 2 - 2i = e^{-\frac{\pi}{2}}(m - 2 - 2i) \Leftrightarrow e - 2 - 2i = -i(m - 2 - 2i) \Leftrightarrow ie = m - 2 - 2i - 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow ie = m - 4 \Leftrightarrow e = -im + 4i.$$

• Le triangle OMF est direct, isocèle et rectangle en O  $\Leftrightarrow$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  transforme M en F

$$\Leftrightarrow f = e^{\frac{\pi}{2}}m \Leftrightarrow f = im.$$

• G le centre de gravité du triangle OAM  $\Leftrightarrow z_G = \frac{z_O + z_M + z_A}{3} \Leftrightarrow g = \frac{m + 2 + 2i}{3} = \frac{1}{3}m + \frac{2+2i}{3}$ .

c. Démontrer que le milieu H du segment  $[EF]$  est un point de  $\Gamma$  indépendant de la position du point M sur  $\Gamma$  :

$$z_H = \frac{e+f}{2} = \frac{-im+4i+im}{2} = 2i = z_B \Rightarrow H = B.$$

$$|z_B - 1 - i| = |2i - 1 - i| = |-1 + i| = \sqrt{2} \Rightarrow H \in \Gamma.$$

Donc H est un point fixe de  $\Gamma$  indépendant de la position du point M sur  $\Gamma$ .

d. Déterminer et représenter les lieux géométriques des points E, F et G lorsque M décrit  $\Gamma$  :

• Le lieu géométrique  $\Gamma_1$  de E est le cercle image de  $\Gamma$  par la rotation de A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ . Le diamètre de  $\Gamma_1$  est  $[AO']$  où O' est le point tel que le triangle AOO' est isocèle rectangle en A et indirect.

• Le lieu géométrique  $\Gamma_2$  de F est le cercle image de  $\Gamma$  par la rotation de O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Le diamètre de  $\Gamma_2$  est  $[A'O]$  où A' est le point tel que le triangle OAA' est isocèle rectangle en O et direct.

• Le lieu géométrique  $\Gamma_3$  de G est le cercle image de  $\Gamma$  par l'homothétie de rapport  $\frac{1}{3}$  et de centre le point d'affixe

$$\frac{2+2i}{1-\frac{1}{3}} = 1+i = z_I \text{ où } I \text{ le centre de } \Gamma. \text{ Donc } \Gamma_3 \text{ est le cercle de centre } I \text{ et de rapport } \frac{1}{3}IA.$$

e. Préciser la position de M pour laquelle la droite  $(EF)$  est tangente au cercle  $\Gamma$ . Déterminer alors l'affixe du point E :

Comme  $B \in (EF)$  et  $B \in \Gamma$  alors  $(EF)$  est tangente à  $\Gamma \Leftrightarrow E \neq F$  et  $(EF) \perp (IB) \Leftrightarrow \frac{f-e}{1+i-2i} \in i\mathbb{R}$ .

$$\frac{f-e}{1+i-2i} = \frac{2im-4i}{1-i} = \frac{(2im-4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = (im-2i)(1+i) = (i(x+yi)-2i)(1+i) = (-y+xi-2i)(1+i) \text{ où } M(x;y)$$

$$\frac{f-e}{1+i-2i} \in i\mathbb{R} \Rightarrow -x-y+2 = 0 \Rightarrow y = -x+2.$$

Or la droite d'équation  $y = -x+2$  coupe  $\Gamma$  en deux points B et le point d'affixe 2, or pour M d'affixe 2 on a  $E=F=B$ .

Donc B est la position de M pour laquelle la droite  $(EF)$  est tangente au cercle  $\Gamma$ .

D'où  $e = -i(2i) + 4i = 2 + 4i$ .

**Exercice N°2 :**

1. Soit  $(U_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a. En posant  $x = \tan t$ , où  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , montrer que  $U_0 = \frac{\pi}{4}$  :

En posant  $x = \tan t$ , où  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \frac{1}{1+\tan^2 t} dt$ ; si  $x=0$  alors  $t=0$  et si  $x=1$  alors  $t = \frac{\pi}{4}$ .

$$\Rightarrow U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dt = [t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

b. Montrer que  $(U_n)$  est positive et décroissante en déduire qu'elle est convergente :

$$\forall x \in [0; 1]; \frac{1}{1+x^2} > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{x^{2n}}{1+x^2} > 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0 \text{ et } \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx > 0 \Rightarrow U_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*; U_n > 0.$$

$$\forall x \in [0; 1]; 0 \leq x^{2n+2} \leq x^{2n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n. \text{ D'où est décroissante.}$$

$(U_n)$  est convergente car elle est décroissante et minorée.

c. Prouver que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}$  en déduire  $U_1$  et  $U_2$  :

$$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2} + x^{2n}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2+1)}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^{2n} dx = \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

$$U_1 + U_0 = 1 \Rightarrow U_1 = 1 - U_0 = 1 - \frac{\pi}{4} \text{ et } U_2 + U_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow U_2 = \frac{1}{3} - U_1 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

d. Donner un encadrement de  $U_n$  qui permet de calculer la limite de  $U_n$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}; U_n > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} + U_n \geq U_n > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

2. Soit  $(V_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} V_0 = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx \\ V_n = \int_0^1 (2n+1)x^{2n} \ln(1+x^2) dx; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a. En utilisant une intégration par parties démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 0$  on a :  $V_n = \ln 2 - 2U_{n+1}$  :

$$V_0 = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx.$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$V_0 = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = [x \ln(1+x^2)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \ln 2 - 2U_1.$$

$$V_n = \int_0^1 (2n+1)x^{2n} \ln(1+x^2) dx; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \\ v'(x) = (2n+1)x^{2n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x^{2n+1} \end{cases}$$

$$V_n = \int_0^1 (2n+1)x^{2n} \ln(1+x^2) dx = [x^{2n+1} \ln(1+x^2)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx = \ln 2 - 2U_{n+1}$$

b. En déduire la valeur exacte de  $\int_0^1 \ln(x^2+1) dx$  :

$$\int_0^1 \ln(x^2+1) dx = V_0 = \ln 2 - 2U_1 = \ln 2 - 2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

c. Déduire de ce qui précède les variations de  $(V_n)$  et la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$  :

Comme  $(U_n)$  est décroissante et  $V_n = \ln 2 - 2U_{n+1}$  alors  $(V_n)$  est croissante.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 2U_{n+1}) = \ln 2 - 2 \times 0 = \ln 2.$$

**Exercice N°3 :**

1. Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*_+$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ . Dresser le tableau de variation de  $f$  et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  :

•  $D_f = ]0; +\infty[$ .

• Limites aux bornes de  $D_f$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty \times (-\infty) = -\infty.$$

• Tableau de variation :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

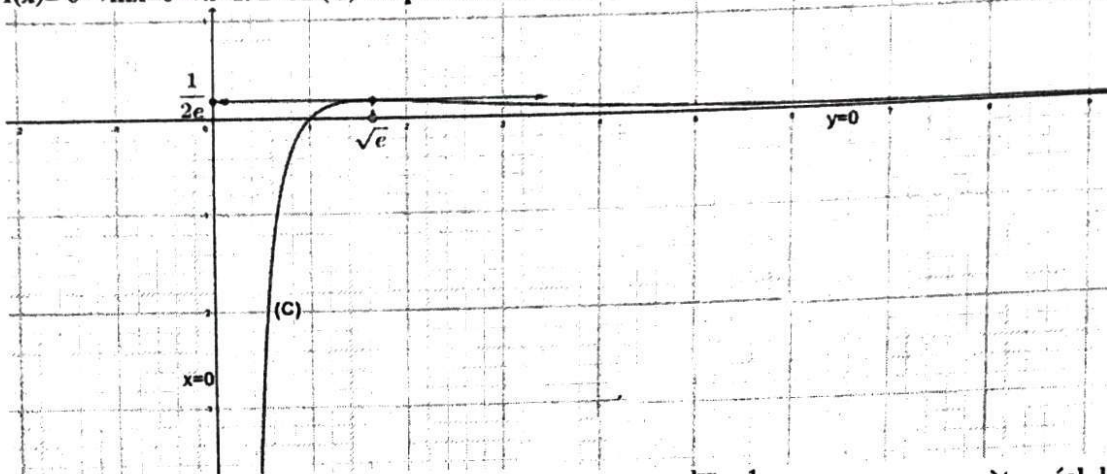
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \text{ et } f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$$

|      |           |                |           |
|------|-----------|----------------|-----------|
| x    | 0         | $\sqrt{e}$     | $+\infty$ |
| r(x) |           | +              | -         |
| f(x) | $-\infty$ | $\frac{1}{2e}$ | 0         |

• Représentation graphique :

La courbe (C) de f admet AV d'équation  $x=0$  et AH d'équation  $y=0$  au voisinage de  $+\infty$ .

$f(x)=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$ . D'où (C) coupe l'axe des abscisses au point (1;0).



2. Soit  $f_k$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$ , par :  $f_k(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}kx$  où  $k$  est un paramètre réel,  $k \in [0; 1]$  et soit  $(C_k)$  sa courbe représentative dans le repère  $(O; i; j)$ .

a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_k(x)$ . En déduire les équations des asymptotes éventuelle de  $(C_k)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x}{x^2} - kx \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0^+} (-kx) = -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^2} - kx \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ -\infty & \text{si } k \in ]0; 1] \end{cases}$$

Si  $k = 0$  alors  $(C_k)$  admet deux asymptotes :  $x=0$  AV et  $y=0$  AH de  $(C_k)$  voisinage de  $+\infty$ .

Si  $k \in ]0; 1]$  alors  $(C_k)$  admet deux asymptotes :  $x = 0$  AV et  $y = -kx$  car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_k(x) + kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^2} - kx + kx \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0.$$

b. Montrer que l'équation  $1 - kx^3 - 2\ln x = 0$  admet, dans  $\mathbb{R}^+$ , une unique solution  $\alpha_k$  et que  $1 \leq \alpha_k \leq \sqrt{e}$  :  
On pose  $g_k(x) = 1 - kx^3 - 2\ln x$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - kx^3 - 2\ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( \frac{1}{x^3} - k - 2 \frac{\ln x}{x^3} \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g_k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - kx^3 - 2\ln x) = +\infty.$$

$$g'_k(x) = -3kx^2 - \frac{2}{x} < 0$$

|           |           |            |           |
|-----------|-----------|------------|-----------|
| x         | 0         | $\alpha_k$ | $+\infty$ |
| $g'_k(x)$ |           | -          |           |
| $g_k(x)$  | $+\infty$ | 0          | $-\infty$ |

D'après le tableau de variation de  $g_k(x)$  et sa continuité sur  $]0; +\infty[$  l'équation  $g_k(x) = 1 - kx^3 - 2\ln x = 0$  admet une solution unique  $\alpha_k$ . On  $g_k(1) = 1 - k > 0$  et  $g_k(\sqrt{e}) < 0$ , donc  $1 < \alpha_k < \sqrt{e}$ .

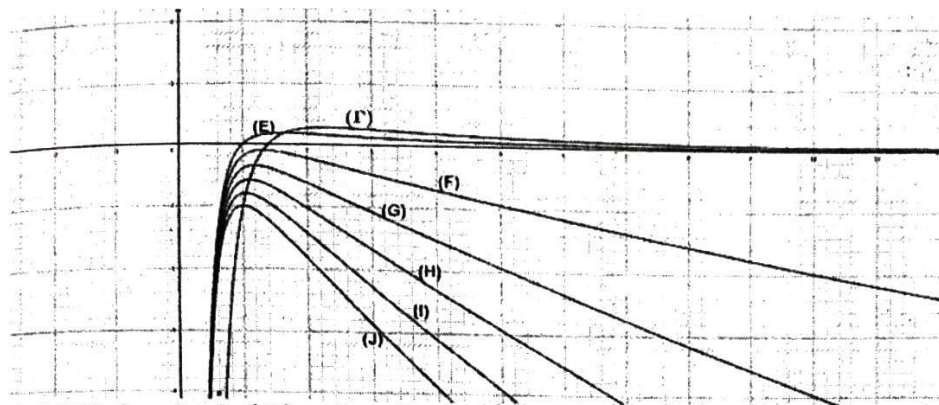
c. Calculer  $f'_k(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f_k$  :

$$f'_k(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} - k = \frac{1 - kx^3 - 2\ln x}{x^3} \text{ pour } k \in ]0; 1].$$

|           |           |            |           |
|-----------|-----------|------------|-----------|
| x         | 0         | $\alpha_k$ | $+\infty$ |
| $f'_k(x)$ |           | +          | -         |
| $f_k(x)$  | $-\infty$ | $f_k(x)$   | $-\infty$ |

3. a. Étudier les positions relatives des courbes  $(C_k)$  et  $(C_{k'})$  où  $k$  et  $k'$  sont deux réels avec  $0 \leq k < k' \leq 1$  :  
 $0 \leq k < k' \leq 1 \Rightarrow -k' < -k \Rightarrow -k'x < -kx$  ;  $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$   $\Rightarrow f_{k'}(x) < f_k(x)$  ;  $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ .  
 D'où  $(C_k)$  est au-dessus de  $(C_{k'})$  sur  $]0; +\infty[$ .

b. Sur la figure ci-dessous on a représenté les courbes  $(C_k)$  pour  $k \in \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$ . Reconnaitre celle qui représente  $(C_0)$ ,  $(C_{0,2})$  et  $(C_{0,8})$  :  
 $(C_0) = (E)$  ;  $(C_{0,2}) = (F)$  ;  $(C_{0,8}) = (I)$ .



4. Soit  $M_k$  le point de  $(C_k)$  en lequel la tangente est horizontale. Les points  $M_k$  sont situés sur la courbe  $(\Gamma)$  (voir figure ci-dessus), donner une équation cartésienne de  $(\Gamma)$  :

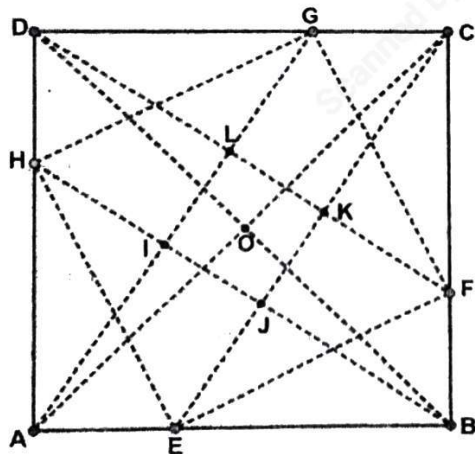
$$M_k(x; y) \text{ avec } x = \alpha_k \text{ et } y = f_k(\alpha_k) = \frac{\ln \alpha_k}{(\alpha_k)^2} - k \alpha_k \text{ or } 1 - k(\alpha_k)^3 - 2 \ln \alpha_k = 0 \Rightarrow k = \frac{1 - 2 \ln \alpha_k}{(\alpha_k)^3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\ln \alpha_k}{(\alpha_k)^2} - \left( \frac{1 - 2 \ln \alpha_k}{(\alpha_k)^3} \right) \alpha_k = \frac{-1 + 3 \ln \alpha_k}{(\alpha_k)^2} = \frac{-1 + 3 \ln x}{x^2}. \text{ Donc l'équation cartésienne de } (\Gamma) : y = \frac{-1 + 3 \ln x}{x^2}.$$

**Exercice N°4 :**

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de sens direct de côté  $a$ , ( $a > 0$ ). Les points E, F, G et H sont définis respectivement par  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DA}$ .

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. (On prendra (AB) horizontale).



2. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  telle que  $r(A) = B$  et  $r(E) = F$  :

$$AE = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} AB = BF$$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$  alors il existe une unique rotation  $r$  telle que  $r(A) = B$  et  $r(E) = F$ .

b. Déterminer un angle et le centre de  $r$  :

$$\text{L'angle de } r \text{ est : } (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{BF}) = (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Soit O le centre de  $r$ .  $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow$  Le point O est le centre de  $r$ .

c. Montrer que EFGH est un carré et calculer son aire en fonction de  $a$  :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$$

$$\vec{EF} = \vec{HC} \dots (1)$$

$$EF^2 = EB^2 + BF^2 = \frac{4}{9}AB^2 + \frac{1}{9}CB^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 = \frac{5}{9}a^2 \text{ et } EH^2 = EA^2 + AH^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AD^2 = \frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2 = \frac{5}{9}a^2$$

$$\Rightarrow EF = EH \dots (2)$$

$$\vec{EF} \cdot \vec{EH} = (\vec{EB} + \vec{BF})(\vec{EA} + \vec{AH}) = \left(\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}\right) \left(-\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD}\right) = -\frac{2}{9}AB^2 + \frac{4}{9}\vec{AB} \cdot \vec{AD} - \frac{1}{9}\vec{AD} \cdot \vec{AB} + \frac{2}{9}AD^2 = 0.$$

$$\Rightarrow (EF) \perp (EH) \dots (3)$$

D'où de (1) ; (2) et (3) le quadrilatère EFGH est un carré.

L'aire du carré EFGH est égale à :  $EF^2 = a^2$

3. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en E.

a. Montrer que s(B) = F puis déterminer s(C) et s(D) :

$$r: \begin{cases} O \rightarrow O \\ A \rightarrow B \Rightarrow (\vec{OB}; \vec{OA}) = (\vec{OE}; \vec{OA}) = \text{l'angle de } s \text{ et } \frac{OF}{OB} = \frac{OE}{OA} = \text{rapport de } s. \\ E \rightarrow F \end{cases}$$

D'où s(B) = F.

Les quadrilatères ABCD et EFGH sont des carrés directs et comme s(A) = E et s(B) = F alors s(C) = G et s(D) = H.

b. Calculer le rapport de s :

$$\text{On a } s: ABCD \rightarrow EFGH; \text{ le carré du rapport de } s \text{ est : } \frac{\text{aire}(ABCD)}{\text{aire}(EFGH)} = \frac{\frac{5}{2}a^2}{a^2} = \frac{5}{2}. \text{ D'où le rapport de } s \text{ est : } \frac{\sqrt{5}}{2}$$

c. Soit  $\alpha$  une mesure de l'angle de s déterminer la valeur exacte de  $\cos \alpha$  :

$$s: \begin{cases} A \rightarrow E \\ B \rightarrow F \end{cases} \Rightarrow \text{l'angle de } s \text{ est : } \alpha = (\vec{AB}; \vec{EF}) = (\vec{EB}; \vec{EF}); \text{ or le triangle } EBF \text{ est rectangle en } B; \text{ d'où } \cos \alpha = \frac{BF}{EF} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{2}{\sqrt{5}}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

4. Soit I, J, K et L les points définis par :

I L'intersection des segments [AG] et [BH] ; J L'intersection des segments [BH] et [CE].

K L'intersection des segments [CE] et [DF] ; L L'intersection des segments [DF] et [AG].

a. Montrer que IJKL est un carré :

$$r: \begin{cases} [AG] \rightarrow [AG] \\ [BH] \rightarrow [CE] \\ [CE] \rightarrow [DF] \\ [DF] \rightarrow [AG] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \rightarrow J \\ J \rightarrow K \\ K \rightarrow L \\ L \rightarrow I \end{cases} \text{ D'où le quadrilatère IJKL est un carré.}$$

b. Montrer que  $K = \text{bar} \{(D, 4); (F, 9)\} = \text{bar} \{(C, 7); (E, 6)\}$  :

Soit  $M = \text{bar} \{(D, 4); (F, 9)\}$  ; on a  $M \in (DF)$  ; or

$$M = \text{bar} \{(D, 4); (F, 9)\} = \text{bar} \{(D, 4); (B, 6); (C, 3)\} = \{(A, 4); (B, -4); (C, 4); (B, 6); (C, 3)\} \\ = \text{bar} \{(A, 4); (B, 2); (C, 7)\} = \text{bar} \{(E, 6); (C, 7)\} \Rightarrow M \in (EC).$$

D'où  $M=K = \text{bar} \{(D, 4); (F, 9)\} = \text{bar} \{(C, 7); (E, 6)\}$ .

c. En déduire l'aire du carré IJKL en fonction de a :

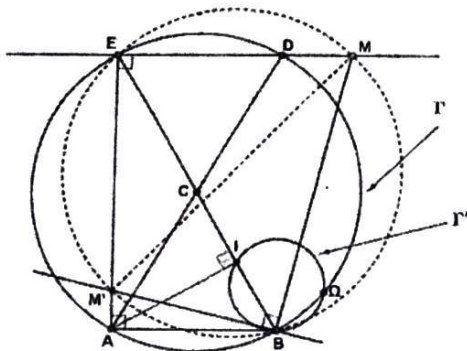
$$\text{On a } \vec{CK} = \frac{6}{13}\vec{CE}; \text{ or } r^{-1} \text{ conserve le barycentre } \Rightarrow J = \text{bar} \{(C, 4); (E, 9)\} \Rightarrow \vec{CJ} = \frac{9}{13}\vec{CE} \Rightarrow \vec{KJ} = \frac{3}{13}\vec{CE} \Rightarrow KJ = \frac{3}{13}CE.$$

$$\text{Or l'aire de IJKL est } KJ^2 \text{ où } KJ^2 = \frac{9}{169}CE^2 = \frac{9}{169}\left(\frac{4a^2}{9} + a^2\right) = \frac{a^2}{13}. \text{ Donc l'aire de IJKL est égale à } \frac{a^2}{13}.$$

**Exercice N°5 :**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC direct de côté a, (a>0). Soit D et E les images respectives de A et B par la symétrie de centre C. soit I le milieu du segment [BC].

1. Faire une figure (qui sera complétée au fur et à mesure) illustrant les données précédentes :



2. a. Montre qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  de centre B et qui transforme D et A :

Comme  $B \neq D$  et  $B \neq A$  alors qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  de centre B et qui transforme D en A.

b. Déterminer l'angle et le centre de  $s_1$  :

L'angle de  $s_1$  est  $(\vec{BD}; \vec{BA})$ . Or les segments [AD] et [BE] ont même milieu et ont même longueur 2a, donc ABDE est un rectangle direct, d'où  $(\vec{BD}; \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}$ . Donc l'angle de  $s_1$  est  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\frac{BA}{BD} = \frac{a}{\sqrt{(2a)^2 - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c. Soit M un point de la droite (DE) distinct de D et E. Déterminer le lieu géométrique du point M' image de M par  $s_1$ . Construire M' à partir d'une position donnée de M sur (DE) puis démontrer que les points M, M', B et E sont cocycliques quelque soit la position de M sur (DE) :

$s_1 : D \rightarrow A$  et l'angle  $s_1$  de est  $\frac{\pi}{2}$  alors l'image de (DE) est la perpendiculaire à (DE) passant par A, c'est la droite (AE).

Donc le lieu géométrique de M' est la droite (AE) privée des points A et E' =  $s_1(E)$  ; M' est le point d'intersection de (AE) et la perpendiculaire à (BM) en B.

Comme les triangles BMM' et EMM' sont rectangles de même hypoténuse [MM'] ; donc les points B ; E ; M et M' sont cocycliques.

3. Soit  $s_2$  la similitude directe qui transforme I en B et E en D.

a. Déterminer l'angle et le rapport de  $s_2$  :

$$\text{L'angle de } s_2 : (\overline{IE}; \overline{BD}) = (\overline{BC}; \overline{BD}) = (\overline{BC}; \overline{BA}) + (\overline{BA}; \overline{BD}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Le rapport de } s_2 : \frac{BD}{IE} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b. Déterminer le centre de  $s_2$  :

$$\text{On a } \begin{cases} s_2(I) = B ; (\overline{AI}; \overline{AB}) = -\frac{\pi}{6} \\ \frac{AB}{AI} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} s_2(E) = D ; (\overline{AE}; \overline{AD}) = -\frac{\pi}{6} \\ \frac{AD}{AE} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Donc le centre de  $s_2$  est le point A.

4. On pose  $f = s_1 \circ s_2$ .

a. Montrer que f est une similitude directe puis donner son angle et son rapport :

f est la composée de deux similitudes directes ; son angle est la somme des deux angles :  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$  ; son rapport est le produit des

$$\text{deux rapports : } \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$$

b. Montrer que le centre de f est l'intersection du cercle de diamètre [BE] avec un deuxième cercle  $\Gamma$  que l'on déterminera.

Construire ce centre :

• D'une part : On a  $f(E) = s_1 \circ s_2(E) = s_1(D) = A \Rightarrow (\overline{\Omega E}; \overline{\Omega A}) = \frac{\pi}{3}$  or  $(\overline{DE}; \overline{DA}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (\overline{\Omega E}; \overline{\Omega A}) = (\overline{DE}; \overline{DA})$  où  $\Omega$  est le centre de f.

Donc les points  $\Omega$  ; A ; D et E sont cocycliques. D'où  $\Omega$  appartient au cercle  $\Gamma$  de diamètre [AD] qui est le cercle de diamètre [BE].

• D'autre part : On a  $f(I) = s_1 \circ s_2(I) = s_1(B) = B \Rightarrow (\overline{\Omega I}; \overline{\Omega B}) = \frac{\pi}{3}$  or  $(\overline{BI}; \overline{BA}) = (\overline{IB}; \overline{AB}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (\overline{\Omega I}; \overline{\Omega B}) = (\overline{IB}; \overline{AB})$

Donc  $\Omega$  appartient au cercle  $\Gamma'$  passant par I et B et tangent à la droite (AB) en B.

• Le point  $\Omega \in \Gamma \cap \Gamma'$ .

## Bac 2007 session normale

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

On considère le triangle direct ABC d'angle aigus et de centre de gravité G. On considère les trois segments [AA'], [BB'] et [CC'] tels que :

$$AA' = BC \text{ et } (\overline{BC}; \overline{AA'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] ; BB' = CA \text{ et } (\overline{CA}; \overline{BB'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{et } CC' = AB \text{ et } (\overline{AB}; \overline{CC'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On note a, b, c, a', b' et c' les affixes respectives des points A, B, C, A', B' et C'. On considère la rotation vectorielle  $\varphi$  d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

L'objet de cet exercice est l'étude de la configuration précédente en utilisant deux méthodes.

A. Dans cette partie on se propose de démontrer, par deux méthodes, que les triangles ABC et A'B'C' sont de même centre de gravité.

#### 1. Méthode 1 : Utilisation des nombres complexes

a. Montrer que  $a' = a - ib + ic$ .

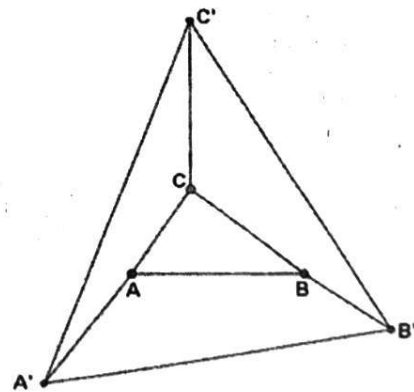
b. Ecrire b' et c' en fonction de a, b et c.

c. En déduire que les triangles ABC et A'B'C' sont de même centre de gravité.

#### 2. Méthode 2 : Utilisation d'une rotation vectorielle

a. Vérifier que  $\varphi(\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'}) = \vec{0}$ .

b. En déduire que  $\overline{GA'} + \overline{GB'} + \overline{GC'} = \vec{0}$ .



- c. En déduire que les triangles ABC et A'B'C' sont de même centre de gravité.  
 B. L'objet de cette partie est de construire le triangle ABC connaissant le triangle A'BC'.

**1. Méthode 1 : Utilisation des nombres complexes**

a. Démontrer que  $\frac{c-b}{c-a} = i$ , en déduire la nature du triangle A'B'C'.

b. En déduire les deux résultats similaires au résultat précédent.

**2. Méthode 2 : Utilisation d'une rotation vectorielle**

a. Démontrer que  $\varphi(\overrightarrow{CB'}) = \overrightarrow{CA'}$ , en déduire la nature du triangle A'B'C'.

b. En déduire les deux résultats similaires au résultat précédent.

3. Construire, en justifiant, le triangle ABC à partir d'un triangle A'B'C' donné d'angles aigus.

**Exercice N°2 :**

Dans le plan orienté, on considère le losange direct ABCD de centre I tel que  $IB = 2IC = 2a$ .

On considère  $\Gamma_1$  le cercle de centre C et de rayon  $CI=a$  et par  $\Gamma_2$  le cercle de centre B et de rayon  $BI=2a$ .

1. a. Faire une figure (on pourra prendre (BD) horizontale).

b. Placer sur la figure précédente les points E et F tels que  $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$ .

2. On considère l'ensemble  $\Gamma_3$  des points M du plan tels que  $\frac{MB}{MC} = 2$ .

a. Vérifier que les points I, E et F appartiennent à  $\Gamma_3$ .

b. Déterminer puis construire l'ensemble  $\Gamma_3$ .

3. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme C en B et A en I. Déterminer l'angle et le centre  $\Omega$  de cette rotation.

Placer  $\Omega$  sur la figure.

4. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme C et B et A en D.

b. Montrer que  $s(I) = I$ .

c. Donner les éléments caractéristiques de s.

d. Montrer que  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$ .

5. On pose  $f = h \circ r$ , où h est l'homothétie de centre B et de rapport 2, et r la rotation définie en 3.

a. Montrer que  $f = s$ .

b. Donner la forme réduite de s.

6. Soit  $s'$  une similitude directe qui transforme  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$ .

a. Montrer que toutes les similitudes  $s'$  sont de même rapport k' que l'on déterminera.

b. Déterminer le lieu géométrique des centres des similitudes  $s'$ .

c. Dans le cas où  $s'$  est une homothétie, donner les positions possibles du centre et les valeurs du rapport de cette homothétie.

**Problème :**

**Partie A**

Soit f la fonction de variable réelle x définie par :  $f(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|$  ;  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ .

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ) d'unité 2cm.

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement ces limites.

b. Déterminer  $f'(x)$  où f' est la fonction dérivée de f.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2. a. Pour tout x appartenant à  $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ , montrer que  $f(x) + f(1-x) = 0$ .

b. Tracer (C) dans le repère (O;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ).

3. Pour  $k \in \mathbb{R}^*$ , on définit sur  $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ , la fonction  $f_k(x) = \ln \left| \frac{kx}{x-1} \right|$ .

Soit  $(C_k)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ) d'unité 2cm.

a. Montrer que le point  $\Omega \left( \frac{1}{2}; \ln|k| \right)$  est un centre de symétrie de  $(C_k)$ .

b. Montrer que  $(C_k)$  est l'image de (C) par une transformation simple que l'on déterminera.

c. Que peut-on dire des courbes  $(C_k)$  et  $(C_{-k})$  ?

d. En déduire que si  $|k| \neq |k'|$ , alors  $(C_k)$  et  $(C_{k'})$  n'ont pas de points communs.

e. Dresser, en utilisant 1), le tableau de variation de  $f_e$  (le cas où  $k = e$ ), et construire sa courbe.

4. Soit h la restriction de f sur l'intervalle  $I = ]0; 1[$ . Ce qui signifie  $h(x) = \ln \left( \frac{x}{1-x} \right)$ .

a. Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b. Soit  $h^{-1}$  la fonction réciproque de h. Dresser le tableau de variation de  $h^{-1}$ . Explicité  $h^{-1}(x)$ .

c. Montrer que l'équation  $h(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$ . Vérifier que  $0,5 < \alpha < 1$ .

**Partie B**

Soit g la fonction de variable réelle x définie par :  $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$  ;  $x \in \mathbb{R}$ .

1. a. Donner l'expression de  $\log(g(x))$ , pour tout réelle x ; où h est la fonction définie au A 4). Interpréter.

b. Déterminer  $g'(x)$  où g' est la fonction dérivée de g puis déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = a \frac{e^x}{e^x+1} + b \left( \frac{e^x}{e^x+1} \right)^2$$

c. Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = g'(x) - 2g(x)g'(x)$ .



B. L'objet de cette partie est de construire le triangle ABC connaissant le triangle A'B'C'.

1. Méthode 1 : Utilisation des nombres complexes

a. Démontrer que  $\frac{c-b'}{c-a'} = i$ , en déduire la nature du triangle A'B'C' :

$$\frac{c-b'}{c-a'} = \frac{c-b+ic-ia}{c-a+ib-ic} = \frac{(c-b+ic-ia)i}{(c-a+ib-ic)i} = \frac{(c-b+ic-ia)i}{ic-ia-b+c} = i.$$

$\frac{c-b'}{c-a'} = i \Leftrightarrow (\overrightarrow{CA'}; \overrightarrow{CB'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $CA' = CB'$ . Donc le triangle A'B'C' est rectangle isocèle en C.

b. En déduire les deux résultats similaires au résultat précédent :

De même manière on peut vérifier que  $\frac{a-c'}{a-b'} = \frac{b-a'}{b-c'} = i$ . Donc les triangles B'C'A et A'C'B sont rectangles isocèles respectivement en A et en B.

2. Méthode 2 : Utilisation d'une rotation vectorielle

a. Démontrer que  $\varphi(\overrightarrow{CB'}) = \overrightarrow{CA'}$ , en déduire la nature du triangle A'B'C' :

$$\varphi(\overrightarrow{CB'}) = \varphi(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}) = \varphi(\overrightarrow{CB}) + \varphi(\overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA'}. \text{ D'où } \varphi(\overrightarrow{CB'}) = \overrightarrow{CA'}.$$

Il résulte :  $\left\{ \begin{array}{l} CA' = CB' \\ (\overrightarrow{CA'}; \overrightarrow{CB'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$  c'est-à-dire que CA'B' est un triangle direct rectangle et isocèle en C.

b. En déduire les deux résultats similaires au résultat précédent :

Par analogie avec le résultat précédent on trouve que  $\varphi(\overrightarrow{BA'}) = \overrightarrow{BC'}$  et  $\varphi(\overrightarrow{AC'}) = \overrightarrow{AB'}$  et par conséquent les triangles BC'A' et AB'C' sont directs rectangles et isocèles respectivement en B et en A.

3. Construire, en justifiant, le triangle ABC à partir d'un triangle A'B'C' donné d'angles aigus :

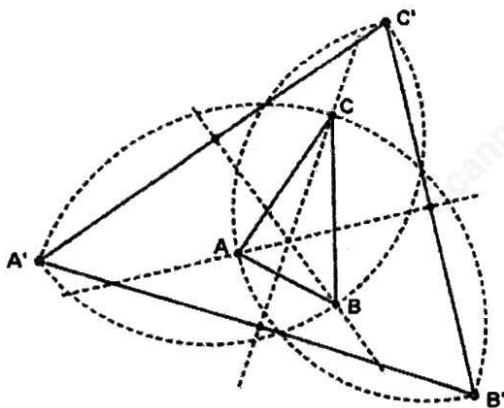
Il suffit de procéder comme suit :

A partir d'un triangle A'B'C' construire le point A tel que B'C'A est direct, rectangle et isocèle en A.

$AB'C'$  est un triangle direct rectangle et isocèle en A  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB' = AC' \\ (\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{AC'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right. \Leftrightarrow A$  appartient l'intersection de la med  $[B'C']$

Et le cercle de diamètre  $[B'C']$ .

Cette construction est valable aussi pour B et C.

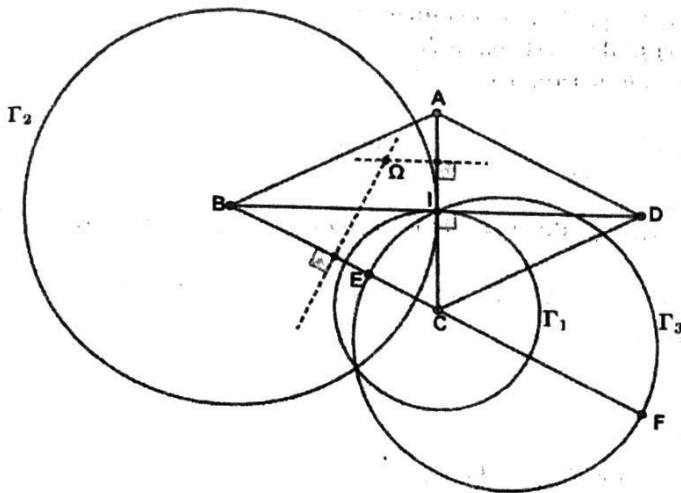


Exercice N°2 :

Dans le plan orienté, on considère le losange direct ABCD de centre I tel que  $IB = 2IC = 2a$ .

On considère  $\Gamma_1$  le cercle de centre C et de rayon  $CI=a$  et par  $\Gamma_2$  le cercle de centre B et de rayon  $BI=2a$ .

1. a. Faire une figure (on pourra prendre (BD) horizontale) :



b. Placer sur la figure précédente les points E et F tels que  $\vec{EB} + 2\vec{EC} = \vec{0}$  et  $\vec{FB} - 2\vec{FC} = \vec{0}$  :

$E = \text{bar}\{(B, 1); (C, 2)\} \Rightarrow \vec{BE} = \frac{2}{3}\vec{BC}$  et  $F = \text{bar}\{(B, 1); (C, -2)\} \Rightarrow \vec{BF} = 2\vec{BC}$ .

D'où la construction de E et F (voir la figure précédente).

2. On considère l'ensemble  $\Gamma_3$  des points M du plan tels que  $\frac{MB}{MC} = 2$ .

a. Vérifier que les points I, E et F appartiennent à  $\Gamma_3$  :

$\begin{cases} CI = a \\ BI = 2a \end{cases} \Rightarrow \frac{BI}{CI} = 2 \Rightarrow I \in \Gamma_3$

$\vec{EB} + 2\vec{EC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{EB} = -2\vec{EC} \Rightarrow EB = 2EC \Rightarrow \frac{EB}{EC} = 2 \Rightarrow E \in \Gamma_3$

$\vec{FB} - 2\vec{FC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{FB} = 2\vec{FC} \Rightarrow FB = 2FC \Rightarrow \frac{FB}{FC} = 2 \Rightarrow F \in \Gamma_3$ .

Donc les points I, E et F appartiennent à  $\Gamma_3$ .

b. Déterminer puis construire l'ensemble  $\Gamma_3$  :

$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 2 \Leftrightarrow MB^2 - 4MC^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{MB} - 2\vec{MC})(\vec{MB} + 2\vec{MC}) = 0 \Leftrightarrow -\vec{MF} \cdot 3\vec{ME} = 0 \Leftrightarrow \vec{MF} \cdot \vec{ME} = 0$ .

D'où  $\Gamma_3 = C_{[EF]}$

3. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme C en B et A en I. Déterminer l'angle et le centre  $\Omega$  de cette rotation. Placer  $\Omega$  sur la figure :

• On a  $CA = BI \neq 0$  et  $\vec{CA} \neq \vec{BI}$  d'où l'existence d'une unique rotation r qui transforme C en B et A en I.

• L'angle de r est :  $(\vec{CA}; \vec{BI}) = (\vec{IA}; \vec{ID}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

• Le centre de r est le point d'intersection des médianes [BC] et [AI].

4. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme C et B et A en D :

On a  $CA \neq 0$  et  $BD \neq 0$ , d'où l'existence d'une unique similitude directe s qui transforme C et B et A en D.

b. Montrer que  $s(I) = I$  :

Comme  $I = A * C$  et  $I = B * D$  et la conservation du milieu par une similitude directe alors  $s(I) = I$ .

c. Donner les éléments caractéristiques de s :

• L'angle de s :  $(\vec{CA}; \vec{BD}) = (\vec{IA}; \vec{ID}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

• Le rapport de s :  $\frac{BD}{AC} = \frac{BI}{CI} = 2$ .

Donc  $s = S_{(I; 2; -\frac{\pi}{2})}$

d. Montrer que  $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$  :

D'après les propriétés des similitudes on a :  $s(\Gamma_1) = C_{(s(C)=B; 2a)} = \Gamma_2$

5. On pose  $f = h \circ r$ , où h est l'homothétie de centre B et de rapport 2, et r la rotation définie en 3.

a. Montrer que  $f = s$  :

f est une similitude directe car c'est la composée d'une homothétie et d'une rotation.

En plus, on a :  $\begin{cases} f(C) = h(r(C)) = h(B) = B \\ f(A) = h(r(A)) = h(I) = D \end{cases}$

La similitude directe qui transforme C et B et A en D est unique. Donc  $f = s$ .

b. Donner la forme réduite de s :

Il s'agit de déterminer une homothétie h' et une rotation r' de même centre telle que  $s = h' \circ r' = r' \circ h'$ .

Cette écriture est vérifiée pour  $h' = h_{(I; 2)}$  et  $r' = r_{(I; -\frac{\pi}{2})}$ .

6. Soit  $s'$  une similitude directe qui transforme  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$ .

a. Montrer que toutes les similitudes  $s'$  sont de même rapport  $k'$  que l'on déterminera :

Comme le rayon de  $\Gamma_1$  est  $a$ , celui de  $\Gamma_2$  est  $2a$ . Donc le rapport  $k'$  de  $s'$  est égal à 2.

D'où toutes les similitudes directes transformant  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$  ont même rapport  $k' = 2$ .

b. Déterminer le lieu géométrique des centres des similitudes  $s'$  :

Soit  $s'$  une similitude de centre  $M$  vérifiant  $s'(\Gamma_1) = \Gamma_2 \Leftrightarrow s' : \begin{cases} C \rightarrow B \\ M \rightarrow M \end{cases} \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 2 \Leftrightarrow M \in \Gamma_3$ .

D'où le lieu géométrique des centres des similitudes  $s'$  est  $\Gamma_3$ .

c. Dans le cas où  $s'$  est une homothétie, donner les positions possibles du centre et les valeurs du rapport de cette homothétie :

$s'$  est une homothétie  $\Leftrightarrow (\overline{MC}; \overline{MB}) = \pi[2\pi]$  où  $(\overline{MC}; \overline{MB}) = 0[2\pi] \Leftrightarrow M = E$  ou  $M = F$  et par conséquent si :

•  $M = E$  et  $h(C) = B \Leftrightarrow \overline{EB} = -2\overline{EC}$ . D'où le rapport de  $s'$  est  $-2$ .

•  $M = F$  et  $h(C) = B \Leftrightarrow \overline{FB} = 2\overline{FC}$ . D'où le rapport de  $s'$  est  $-2$ .

**Problème :**

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction de variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| ; x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ .

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 2cm.

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement ces limites :

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| = -\infty$ , car  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{x-1} \right| = 0^+$ . Donc  $x = 0$  AV de  $(C)$ .

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| = +\infty$ , car  $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x}{x-1} \right| = +\infty$ . Donc  $x = 1$  AV de  $(C)$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| = 0$ , car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{x}{x-1} \right| = 1$ . Donc  $y = 0$  AH de  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| = 0$ , car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{x-1} \right| = 1$ . Donc  $y = 0$  AH de  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .

b. Déterminer  $f'(x)$  où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$  :

$$f'(x) = \frac{-1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

Le signe de la dérivée est celui de  $\frac{-1}{x(x-1)}$ .

Tableau de variation de  $f$  :

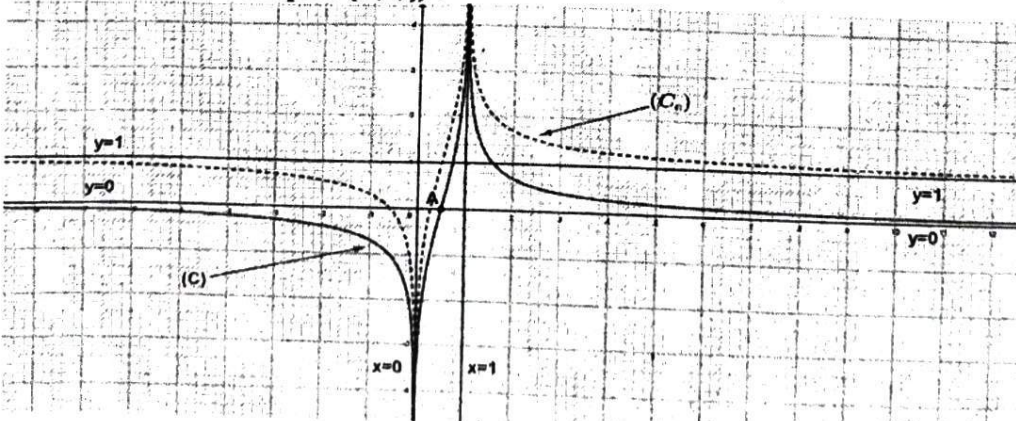
|         |           |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$       | $1$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | +         | -         | +         |
| $f(x)$  | 0         | $+\infty$ | $+\infty$ | 0         |

2. a. Pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ , montrer que  $f(x) + f(1-x) = 0$  :

$f(x) + f(1-x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + \ln \left| \frac{1-x}{-x} \right| = \ln \left( \frac{x}{x-1} \times \frac{1-x}{-x} \right) = \ln 1 = 0$ .

$f(x) + f(1-x) = 0 \Rightarrow f(x) + f(2 \times \frac{1}{2} - x) = 2 \times 0$ . D'où le point  $A(\frac{1}{2}; 0)$  est un centre de symétrie de  $(C)$ .

b. Tracer  $(C)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  :



3. Pour  $k \in \mathbb{R}^*$ , on définit sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , la fonction  $f_k(x) = \ln \left| \frac{kx}{x-1} \right|$ .  
Soit  $(C_k)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 2cm.

a. Montrer que le point  $\Omega \left( \frac{1}{2}; \ln|k| \right)$  est un centre de symétrie de  $(C_k)$  :

On a  $\begin{cases} x \neq 0 \Rightarrow 1-x \neq 1 \\ x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}; \left( 2 \times \frac{1}{2} - x \right) \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

$$f_k \left( 2 \times \frac{1}{2} - x \right) + f_k(x) = f_k(1-x) + f_k(x) = \ln \left| \frac{k(1-x)}{-x} \right| + \ln \left| \frac{kx}{x-1} \right| = \ln|k^2| = 2\ln|k|.$$

D'où le point  $\Omega \left( \frac{1}{2}; \ln|k| \right)$  est un centre de symétrie de  $(C_k)$ .

b. Montrer que  $(C_k)$  est l'image de  $(C)$  par une transformation simple que l'on déterminera :  
Soient  $M(x; y) \in (C)$  et  $M_k(x_k; y_k) \in (C_k)$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y_k = f_k(x_k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y_k = \ln \left| \frac{kx_k}{x_k-1} \right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y_k = \ln|k| + \ln \left| \frac{x_k}{x_k-1} \right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y_k = \ln|k| + \ln \left| \frac{x_k}{x_k-1} \right| \end{cases} \Rightarrow \text{en posant } x_k = x \text{ alors on obtient}$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y_k = \ln|k| + \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y_k = \ln|k| + f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y_k = \ln|k| + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k = x \\ y_k = \ln|k| + y \end{cases}$$

D'où  $(C_k)$  est l'image de  $(C)$  par  $t_{\vec{u}}$  où  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ \ln|k| \end{pmatrix}$

c. Que peut-on dire des courbes  $(C_k)$  et  $(C_{-k})$  ?

$$f_{-k}(x) = \ln \left| \frac{-kx}{x-1} \right| = \ln \left| \frac{-kx}{x-1} \right| = f_k(x). \text{ D'où les courbes } (C_k) \text{ et } (C_{-k}) \text{ sont confondues.}$$

d. En déduire que si  $|k| \neq |k'|$ , alors  $(C_k)$  et  $(C_{k'})$  n'ont pas de points communs :

$$f_{k'}(x) = f_k(x) \Leftrightarrow \ln \left| \frac{k'x}{x-1} \right| = \ln \left| \frac{kx}{x-1} \right| \Leftrightarrow \ln|k'| + \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| = \ln|k| + \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| \Leftrightarrow \ln|k'| = \ln|k|$$

Donc si  $|k| \neq |k'|$ , les courbes  $(C_k)$  et  $(C_{k'})$  n'ont pas de points communs.

e. Dresser, en utilisant 1), le tableau de variation de  $f_e$  (le cas où  $k = e$ ), et construire sa courbe :

$$\begin{cases} x_k = x \\ y_k = \ln|e| + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k = x \\ y_k = 1 + y \end{cases}$$

$$(C_e) = t_{\vec{u}}(C).$$

Tableau de variation de  $f_e$  :

|           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x         | $-\infty$ | 0         | 1         | $+\infty$ |
| $f_e'(x)$ | -         | +         | -         | -         |
| $f_e(x)$  | 1         | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

4. Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]0; 1[$ . Ce qui signifie  $h(x) = \ln \left( \frac{x}{1-x} \right)$ .

a. Montrer que  $h$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera :

La fonction  $h$  est continue et strictement croissante, alors elle réalise une bijection de  $]0; 1[$  sur l'intervalle  $]-\infty; +\infty[$ .

b. Soit  $h^{-1}$  la fonction réciproque de  $h$ . Dresser le tableau de variation de  $h^{-1}$ . Explicité  $h^{-1}(x)$  :

Tableau de variation de  $h^{-1}$  :

|                |           |           |
|----------------|-----------|-----------|
| x              | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $(h^{-1})'(x)$ | +         | +         |
| $h^{-1}(x)$    | 0         | 1         |

$$\forall x \in \mathbb{R}; h^{-1}(x) = y \text{ où } y \in ]0; 1[ \Leftrightarrow h(y) = x \Leftrightarrow \ln \left( \frac{y}{1-y} \right) = x \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = e^x \Leftrightarrow e^x - ye^x = y \Leftrightarrow (e^x + 1) = e^x \Leftrightarrow y = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$\text{D'où } x \in \mathbb{R}; h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$


c. Montrer que l'équation  $h(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$ . Vérifier que  $0,5 < \alpha < 1$  :

$$h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0. \text{ Posons } u(x) = h(x) - x. \text{ Cette fonction est dérivable sur } ]0; 1[.$$

$$u'(x) = h'(x) - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1}{x(1-x)} - 1 = \frac{1-x+x^2}{x(1-x)} > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) = +\infty$$

|       |   |    |
|-------|---|----|
| x     | 0 | 1  |
| u'(x) |   | +  |
| u(x)  |   | +∞ |

-∞ 

La fonction  $u$  est continue et strictement croissante alors elle réalise une bijection de  $]0; 1[$  sur  $\mathbb{R}$ . D'où l'équation  $u(x) = 0$  admet dans  $]0; 1[$  une unique solution  $\alpha$  c'est-à-dire l'équation  $h(x) = x$  admet dans  $]0; 1[$  une unique solution  $\alpha$  et comme  $u(0,5) < 0$  et  $u(1) > 0$  alors d'après le théorème de la valeur intermédiaire  $0,5 < \alpha < 1$ .

## Partie B

Soit  $g$  la fonction de variable réelle  $x$  définie par :  $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .

1. a. Donner l'expression de  $h \circ g(x)$ , pour tout réel  $x$ , où  $h$  est la fonction définie au A. 4. Interpréter :

$$\forall x \in \mathbb{R}; g(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \Rightarrow h \circ g(x) = h \circ h^{-1}(x) = x.$$

D'où  $g$  est la fonction réciproque de  $h$ .

b. Déterminer  $g'(x)$  où  $g'$  est la fonction dérivée de  $g$  puis déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que ;

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = a \frac{e^x}{e^x + 1} + b \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right)^2 ;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{e^x + 1} - \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right)^2$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right)^2$$

c. Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = g'(x) - 2g(x)g'(x)$  :

$$\text{De la question b, } g'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right)^2 \Rightarrow g'(x) = g(x) - (g(x))^2 \Rightarrow g''(x) = g'(x) - 2g(x)g'(x).$$

2. Pour tout entier naturel non nul, on pose  $I_n = \int_0^\alpha g^n(x) dx$  où  $\alpha$  est le nombre trouvé en A. 4. c.

a. Calculer  $I_1$  :

$$I_1 = \int_0^\alpha g(x) dx = \int_0^\alpha \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^\alpha = \ln(e^\alpha + 1) - \ln 2 = \ln \left( \frac{e^\alpha + 1}{2} \right)$$

b. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2^n} - \alpha^n \right)$  :

$$\text{D 1.b) on a : } g'(x) = g(x) - (g(x))^2 \Rightarrow g^{n-1}(x) g'(x) = g^n(x) - g^{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha g^{n-1}(x) g'(x) dx = \int_0^\alpha g^n(x) dx - \int_0^\alpha g^{n+1}(x) dx \Rightarrow I_n - I_{n+1} = \left[ \frac{1}{n} g^n(x) \right]_0^\alpha = \frac{1}{n} g^n(\alpha) - \frac{1}{n} g^n(2)$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2^n} - \alpha^n \right) \text{ car } g(\alpha) = \alpha \text{ et } g(0) = \frac{1}{2}.$$

c. Montrer que  $(I_n)$  est décroissante et positive, que peut-on en déduire ?

•  $\forall x \in \mathbb{R}; g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}; g^n(x) > 0 \Rightarrow \int_0^\alpha g^n(x) dx > 0 \Rightarrow I_n > 0$ . D'où la suite  $(I_n)$  est positive.

• On a :  $\frac{1}{2} < \alpha \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \alpha^n \Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$ . D'où la suite  $(I_n)$  est décroissante.

$(I_n)$  est convergente car elle est décroissante et minorée.

3. a. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{\alpha}{2^n} \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$  :

Comme  $g$  est croissante sur  $[0; \alpha]$  on a :  $0 \leq t \leq \alpha \Rightarrow g(0) \leq g(t) \leq g(\alpha) \Rightarrow \frac{1}{2} \leq g(t) \leq \alpha$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{1}{2^n} \leq g^n(t) \leq \alpha^n \Rightarrow \int_0^\alpha \frac{1}{2^n} dt \leq \int_0^\alpha g^n(t) dt \leq \int_0^\alpha \alpha^n dt \Rightarrow \frac{\alpha}{2^n} \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$$

b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  :

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{n+1} = 0; \text{ alors d'après TG } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

4. a. Montrer que  $I_n = -\ln(2(1-\alpha)) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^k} - \alpha^k \right)$  :

En utilisant la formule de récurrence trouvée en 2. b) et en additionnant membre à membre on a :

$$I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{2^{n-1}} - \alpha^{n-1} \right)$$

$$I_{n-1} - I_{n-2} = \frac{1}{n-2} \left( \frac{1}{2^{n-2}} - \alpha^{n-2} \right)$$

$$I_{n-2} - I_{n-3} = \frac{1}{n-3} \left( \frac{1}{2^{n-3}} - \alpha^{n-3} \right)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$I_2 - I_1 = \frac{1}{1} \left( \frac{1}{2^1} - \alpha^1 \right)$$

$$I_n - I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^k} - \alpha^k \right) \Rightarrow I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^k} - \alpha^k \right) = \ln \left( \frac{e^\alpha + 1}{2} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^k} - \alpha^k \right)$$

$$\text{Or } h(\alpha) = \alpha \Rightarrow \alpha = \ln \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha} \Leftrightarrow \ln \left( \frac{e^\alpha + 1}{2} \right) = \ln \left( \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha} + 1}{2} \right) = \ln \left( \frac{1}{2(1-\alpha)} \right) = -\ln(2(1-\alpha))$$

$$\text{D'où } I_n = -\ln(2(1-\alpha)) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^k} - \alpha^k \right)$$

b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^k} - \alpha^k \right)$  :

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \text{ alors éduire } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^k} - \alpha^k \right) = \ln(2(1-\alpha)).$$

## Bac 2007 session complémentaire

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Dans le plan orienté P, on considère le carré direct ABCD de centre O et de côté a, (a>0). On note E le symétrique de C par rapport à D.

1. a. Construire le carré puis déterminer l'ensemble des points M du plan P dans chacun des cas suivants :

$$M \in \Gamma_1: \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = a.$$

$$M \in \Gamma_2: MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$$

$$M \in \Gamma_3: (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD})(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0.$$

$$M \in \Gamma_4: \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{ME}\| = \|\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\|.$$

b. Que peut-on dire à propos de ces quatre ensembles ?

2. Pour tout réel k, on définit l'application  $f_k$  du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MC}.$$

a. Pour quelles valeurs de k l'application  $f_k$  est une translation? Déterminer alors son vecteur.

b. On suppose que  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Montrer que  $f_k$  admet un unique point invariant  $\Omega_k$ . Reconnaître alors  $f_k$  et donner ses éléments caractéristiques en fonction de k.

c. Déterminer et construire le lieu géométrique des points  $\Omega_k$  lorsque k décrit  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

d. Pour  $k = \frac{1}{2}$ ; déterminer et construire le lieu géométrique du point G centre de gravité du triangle DMM' lorsque M décrit le cercle  $\Gamma$  de diamètre [CE].

#### Exercice N°2 :

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de sens direct, de centre O. Les points E, F, G et H les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. a. Faire une figure (on pourra prendre (AB) horizontale).

b. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en O, et I en K.

c. Déterminer l'angle et le centre de cette rotation.

2. a. Vérifier que  $r = S_{OJ} \circ S_{LI} = S_{DA} \circ S_{LK}$ .

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g telle que :  $g = S_{OJ} \circ S_{LI} \circ S_{LK}$ .

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme O en I et C en B.

b. Déterminer le rapport et l'angle de  $s_1$ .

- e. Vérifier que  $s_1(A) = A$ .
4. Soit  $s_2$  la similitude directe qui transforme A en O et B en D.
- Déterminer le rapport et l'angle de  $s_2$ .
  - Montrer que le centre T de  $s_2$  appartient au cercle  $(C_1)$  de centre C et de rayon CD et au cercle  $(C_2)$  de diamètre [AB]. Placer T.
5. On pose  $h = s_2 \circ s_1^{-1}$ ; pour tout point M du plan on pose  $s_1(M) = M'$  et  $s_2(M) = M''$ .
- En utilisant h, montrer que le milieu F du segment  $[M'M'']$  est un point fixe que l'on déterminera. En déduire que le quadrilatère  $AM'OM''$  est un parallélogramme.
  - Montrer que  $s_2(O) = L$ .
  - En déduire que les points A, F, T et L sont cocycliques.
6. a. Déterminer la position des points M' et M'' dans chacun des cas suivants :  $M = A$ ,  $M = F$ ,  $M = T$  et  $M = L$ .
- b. On suppose que M est distinct des points A, L, F et T. Montrer que  $(\overline{MM'}; \overline{MF}) = -\frac{\pi}{4} + (\overline{MA}; \overline{MF})[\pi]$ .
- c. En déduire l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan tels que les points M, M' et M'' soient alignés. Tracer  $\Gamma$ .

Problème :

Partie A

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $f_n(x) = x - n \ln x$ .

Soit  $C_n$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 2cm.

1. Dans cette question on suppose que  $n = 1$ , et pour tout x de  $\mathbb{R}_+^*$  on a :  $f_1(x) = x - \ln x$ .

a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x)$ . Donner une interprétation graphique.

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - x)$ . Donner une interprétation graphique.

c. Dresser le tableau de variation de  $f_1$ .

d. Tracer  $C_1$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

2. Dans cette question, on suppose que  $n \geq 1$ .

a. Dresser le tableau de variation de  $f_n$ .

b. Déterminer les points communs à toutes les courbes  $C_n$ , puis étudier les positions relatives de  $C_n$  et  $C_{n+1}$ .

c. Montrer que toutes les tangentes aux  $C_n$  au point  $x_0 = e$  passent par un point commun que l'on déterminera.

3. On considère les points  $M_0$ ;  $M_1$  et  $M_n$ , de même abscisse x, et appartenant respectivement aux courbes  $C_0$ ;  $C_1$  et  $C_n$ .

a. Vérifier que pour tout  $x > 0$  on a :  $f_n(x) - f_0(x) = n(f_1(x) - f_0(x))$ .

b. En déduire que  $\overline{M_0M_n} = n\overline{M_0M_1}$ .

c. Tracer  $C_0$  dans le repère précédent et donner une méthode géométrique simple pour la construction de  $C_n$ , point par point, à partir de  $C_0$  et  $C_1$ . Construire alors la courbe  $C_2$  dans ce repère.

Partie B

Soit g la fonction de variable réelle x définie par :  $\begin{cases} g(x) = \frac{f_0(x)}{f_1(x)} = \frac{x}{x - \ln x}; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

Soit  $\Gamma$  la courbe de g dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Déduire de A.1.c) que le domaine de définition de g est  $D_g = [0; +\infty[$ .

b. Montrer que la fonction g est continue sur  $D_g$ .

2. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . Donner une interprétation graphique.

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$ . Donner une interprétation graphique.

3. a. Calculer  $g'(x)$  pour  $x > 0$ .

b. Dresser le tableau de variation de g puis construire sa courbe  $\Gamma$ .

4. A partir d'un encadrement de g(x) sur l'intervalle  $[1; e]$ ; démontrer que :  $\forall x \in [1; e]$  on a  $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$ .

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite numérique  $(U_n)$  par :  $U_n = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx$  pour  $n > 0$  et  $U_0 = \int_1^e dx$ .

a. Calculer  $U_0$  et  $U_1$ .

b. Montrer que  $(U_n)$  est positive et décroissante. Que peut-on en conclure ?

c. Montrer que pour tout entier naturel  $n > 1$  on a,  $0 \leq U_n \leq \frac{e-1}{e^n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

6. On pose  $I = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e \frac{x}{x - \ln x} dx$  et pour tout entier naturel n :  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ .

a. Montrer que  $S_n = \int_1^e \frac{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\ln x}{x}} dx$ .

b. Montrer que  $I - S_n = \int_1^e \frac{x}{1 - \ln x} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} dx$ .

c. En utilisant B. 4), montrer que :  $0 \leq I - S_n \leq \frac{1}{e^{n-1}}$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I$  :

d. Montrer que  $S_n \leq I \leq S_n + \frac{1}{e^{n-1}}$ .

e. Pour quelles valeurs de  $n$  :  $S_n$  est une valeur approchée de 1 à  $10^{-2}$  ?

## Solution

### Exercice N°1 :

Dans le plan orienté P, on considère le carré direct ABCD de centre O et de côté a, ( $a > 0$ ). On note E le symétrique de C par rapport à D.

1. a. Construire le carré puis déterminer l'ensemble des points M du plan P dans chacun des cas suivants : (voir la figure).

$$M \in \Gamma_1 : \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = a :$$

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = a \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MB}\| = a \text{ car } D = \text{bar} \{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\} \Leftrightarrow MD = a = DA.$$

$$\text{Donc } \Gamma_1 = C_{(D; DA)}.$$

$$M \in \Gamma_2 : MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2 :$$

$$M \in \Gamma_2 : MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2 \Leftrightarrow MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = a^2 \Leftrightarrow MD^2 = a^2 \text{ car } DA^2 - DB^2 + DC^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow MD = a = DA.$$

$$\text{Donc } \Gamma_1 = \Gamma_2.$$

$$M \in \Gamma_3 : (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD})(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 :$$

On a  $C = \text{bar} \{(A, 1); (B, -1); (D, -1)\}$  et

$$E = \text{bar} \{(A, 2); (B, -2); (C, -1)\} = \text{bar} \{(A, 2); (B, -2); (C, 2); (C, -1)\} = \text{bar} \{(A, 2); (B, -2); (C, 1)\}$$

$$\text{Donc } M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD})(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \times \overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \times \overrightarrow{ME} = 0.$$

$$\text{D'où } \Gamma_3 = C_{(CD)} = \Gamma_1 = \Gamma_2$$

$$M \in \Gamma_4 : \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{ME}\| = \|\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\| :$$

$$\text{Donc } M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{ME}\| = \|\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{CD}\| \Leftrightarrow MD = DC.$$

$$\text{D'où } \Gamma_4 = C_{(D; DC)} = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3.$$

b. Que peut-on dire à propos de ces quatre ensembles ?

$$\text{On a donc } \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4.$$

2. Pour tout réel  $k$ , on définit l'application  $f_k$  du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MC}$ .

a. Pour quelles valeurs de  $k$  l'application  $f_k$  est une translation? Déterminer alors son vecteur :

$$f_k \text{ est une translation ssi le vecteur } \overrightarrow{MM'} \text{ est constant } \Leftrightarrow 1 - 1 + 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \text{ car } k=1.$$

$$\text{Donc } f_1 = t_{\overrightarrow{BA}}$$

b. On suppose que  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Montrer que  $f_k$  admet un unique point invariant  $\Omega_k$ . Reconnaitre alors  $f_k$  et donner ses éléments caractéristiques en fonction de  $k$  :

$$k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; M \text{ est invariant par } f_k \Leftrightarrow M' = M \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}; \text{ or il existe un unique point } \Omega_k$$

$$\text{tel que } \Omega_k = \text{bar} \{(A, 1); (B, -1); (C, 1-k)\}. \text{ Donc } (1-k)\overrightarrow{M\Omega_k} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Omega_k} = \vec{0} \Leftrightarrow M = \Omega_k$$

$$\text{Donc } f_k \text{ admet un unique point invariant } \Omega_k \text{ tel que } \Omega_k = \text{bar} \{(A, 1); (B, -1); (C, 1-k)\}.$$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{M\Omega_k} \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Omega_k} + \overrightarrow{\Omega_k M'} = (1-k)\overrightarrow{M\Omega_k} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega_k M'} = k\overrightarrow{\Omega_k M}$$

$$\Leftrightarrow M' = h_{(\Omega_k; k)}(M)$$

c. Déterminer et construire le lieu géométrique des points  $\Omega_k$  lorsque  $k$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  :

$$\Omega_k = \text{bar} \{(A, 1); (B, -1); (C, 1-k)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{C\Omega_k} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{BA}. \text{ D'où } \Omega_k \text{ appartient à la parallèle à (AB) passant par C privée de C et D.}$$

d. Pour  $k = \frac{1}{2}$ ; déterminer et construire le lieu géométrique du point G centre de gravité du triangle DMM' lorsque M décrit le cercle  $\Gamma$  de diamètre [CE] :

$$k = \frac{1}{2} \Rightarrow \Omega_1 = \text{bar} \{(A, 1); (B, -1); (C, \frac{1}{2})\} \Leftrightarrow \overrightarrow{C\Omega_1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \Omega_1 = E.$$

$$M' = h_{(E; \frac{1}{2})}(M).$$

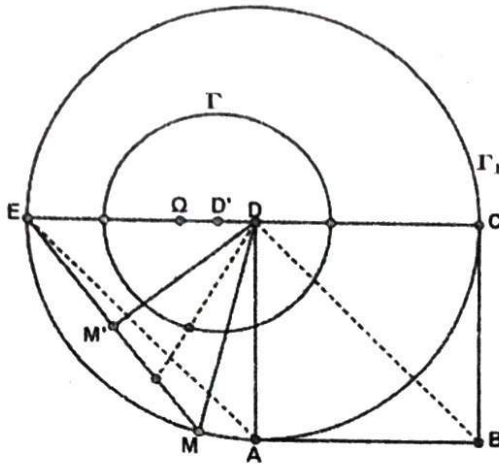
$$\text{Soit } I = M * M'; \overrightarrow{EM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EM} \Leftrightarrow \overrightarrow{EI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EM} \Leftrightarrow I = h_{(E; \frac{3}{4})}(M) = h_1(M). \text{ Or } \overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI} \Leftrightarrow G = h_{(D; \frac{2}{3})}(I) = h_2(I).$$

$$\Leftrightarrow G = h_2 \circ h_1(M).$$

D'où le lieu géométrique des points G est le cercle  $\Gamma$  image de  $\Gamma_1$  par l'homothétie  $h_2 \circ h_1$ .

$$h_2 \circ h_1 = h_{(\Omega; \frac{1}{2})} \text{ où } \Omega = \text{bar} \{(D, 1 - \frac{2}{3}); (E, \frac{2}{3} - \frac{1}{2})\} = \text{bar} \{(D, \frac{1}{3}); (E, \frac{1}{6})\} = \text{bar} \{(D, 2); (E, 1)\}.$$

$$\Gamma = C_{(D'; \frac{1}{2})} \text{ avec } D' = h_2 \circ h_1(D).$$

**Exercice N°2 :**

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de sens direct, de centre O. Les points I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. a. Faire une figure (on pourra prendre (AB) horizontale) : ( Voir la construction ci-après).

b. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme A en O et I en K :

On a  $AI = OK = \frac{a}{2} \neq 0$  et  $\overrightarrow{AI} \neq \overrightarrow{OK}$  d'où l'existence d'une unique rotation  $r$  qui transforme A en O et I en K.

c. Déterminer l'angle et le centre de cette rotation :

• L'angle de  $r$  est :  $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{OK}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

• Le centre de  $r$  est le point d'intersection de  $\text{med}[AO]$  et de  $\text{med}[IK]$ , c'est le point L. D'où  $r = r_{(L; \frac{\pi}{2})}$

2. a. Vérifier que  $r = S_{OJ} \circ S_{LI} = S_{DA} \circ S_{LK}$  :

$S_{OJ} \circ S_{LI} = r_{(L; 2(\overrightarrow{LI}; \overrightarrow{OJ}))} = r_{(L; \frac{\pi}{2})} = r$  et  $S_{DA} \circ S_{LK} = r_{(L; 2(\overrightarrow{LK}; \overrightarrow{DA}))} = r_{(L; \frac{\pi}{2})} = r$ .

D'où  $r = S_{OJ} \circ S_{LI} = S_{DA} \circ S_{LK}$ .

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $g$  telle que :  $g = S_{OJ} \circ S_{LI} \circ S_{LK}$  :

$g = S_{OJ} \circ S_{LI} \circ S_{LK} = r \circ S_{LK} = S_{DA} \circ S_{LK} \circ S_{LK} = S_{DA}$

D'où  $g$  est la réflexion d'axe (AD).

3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme O en I et C en B :

On a  $OC \neq 0$  et  $IB \neq 0$ , d'où l'existence d'une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme O en I et C en B.

b. Déterminer le rapport et l'angle de  $s_1$  :

• Le rapport de  $s_1$  :  $\frac{IB}{OC} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}AC} = \frac{AB}{AC} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

• L'angle de  $s_1$  :  $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AI}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

c. Vérifier que  $s_1(A) = A$  :

On a :  $\begin{cases} \frac{AI}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AI}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow A$  est le centre de la similitude directe de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$  qui transforme O en I, cette

similitude directe est  $s_1$ . D'où  $s_1(A) = A$ .

4. Soit  $s_2$  la similitude directe qui transforme A en O et B en D.

a. Déterminer le rapport et l'angle de  $s_2$  :

• Le rapport de  $s_2$  :  $\frac{OD}{AB} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

• L'angle de  $s_2$  :  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OD}) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$ .

b. Montrer que le centre T de  $s_2$  appartient au cercle  $(C_1)$  de centre C et de rayon CD et au cercle  $(C_2)$  de diamètre [AB]. Placer T :

•  $2(\overrightarrow{TB}; \overrightarrow{TD}) = 2 \times \frac{3\pi}{4} [2\pi] = \frac{3\pi}{2} [2\pi] = -\frac{\pi}{2} [2\pi] = (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$ .

D'où T appartient au cercle  $(C_1)$  de centre C et de rayon CD.

•  $2(\overrightarrow{TA}; \overrightarrow{TO}) = 2 \times \frac{3\pi}{4} [2\pi] = \frac{3\pi}{2} [2\pi] = -\frac{\pi}{2} [2\pi] = (\overrightarrow{TA}; \overrightarrow{IO})$ .

• T est le deuxième point d'intersection de  $(C_1)$  et  $(C_2)$  autre que B.

D'où T appartient au cercle de centre I passant par A et O c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

5. On pose  $h = s_2 \circ s_1^{-1}$  ; pour tout point M du plan on pose  $s_1(M) = M'$  et  $s_2(M) = M''$ .

a. En utilisant  $h$ , montrer que le milieu  $F$  du segment  $[M'M'']$  est un point fixe que l'on déterminera. En déduire que le quadrilatère  $AM'OM''$  est un parallélogramme :  
 $h$  est la composée de deux similitudes directes dont le produit des deux rapports est 1 et la somme des deux angles est  $\pi$  d'où  $h$  est une symétrie centrale.

$h(M') = s_2 \circ s_1^{-1}(M') = s_2(M) = M''$ . Donc le centre de  $h$  est le point  $F$  milieu de  $[M'M'']$ , ce point est fixe car c'est le milieu de  $[AO]$  puisque  $h(A) = s_2 \circ s_1^{-1}(A) = s_2(A) = O$ .  
 $F = A^*O$  et  $F = M'M'' \Rightarrow$  Les diagonales  $[M'M'']$  et  $[AO]$  du quadrilatère  $AM'OM''$  ont même milieu  $F$ , donc  $AM'OM''$  est un parallélogramme.

b. Montrer que  $s_2(O) = L$  :

On a  $h(I) = L \Leftrightarrow s_2 \circ s_1^{-1}(I) = L \Leftrightarrow s_2(O) = L$ .

c. En déduire que les points  $A, F, T$  et  $L$  sont cocycliques :

$$2(\overline{TA}; \overline{TL}) = 2(\overline{TA}; \overline{TO}) + 2(\overline{TO}; \overline{TL}) = -\frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{3\pi}{2} [2\pi] = \pi [2\pi] = 2(\overline{FA}; \overline{FL}).$$

Donc les points  $A, F, T$  et  $L$  sont cocycliques.

6. a. Déterminer la position des points  $M'$  et  $M''$  dans chacun des cas suivants :  $M = A, M = F, M = T$  et  $M = L$  :

- Si  $M = A$  alors  $\begin{cases} M' = A \\ M'' = O \end{cases}$
- Si  $M = F$  alors  $\begin{cases} M' = B' = A + I \\ M'' = A' = O + L \end{cases}$
- Si  $M = T$  alors  $\begin{cases} M' = C' = s_F(T) \\ M'' = T \end{cases}$
- Si  $M = L$  alors  $\begin{cases} M' = F \\ M'' = F \end{cases}$

b. On suppose que  $M$  est distinct des points  $A, L, F$  et  $T$ . Montrer que  $(\overline{MM'}; \overline{MF}) = -\frac{\pi}{4} + (\overline{MA}; \overline{MF})[\pi]$  :

$$\text{On a } s_1(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM' = \frac{\sqrt{2}}{2} AM \\ (\overline{AM}; \overline{AM'}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

Le triangle  $AMM'$  est rectangle isocèle en  $M'$  car :

$$MM'^2 = AM^2 + AM'^2 - 2AM \cdot AM' \cos(\overline{AM}; \overline{AM'}) = AM^2 + AM'^2 - 2AM \cdot AM' \times \frac{AM'}{AM} = AM^2 - AM'^2$$

C'est-à-dire  $AM^2 = MM'^2 + AM'^2$ .

Alors d'une part et comme le triangle  $AMM'$  est rectangle isocèle en  $M'$  on a  $(\overline{MM'}; \overline{MA}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

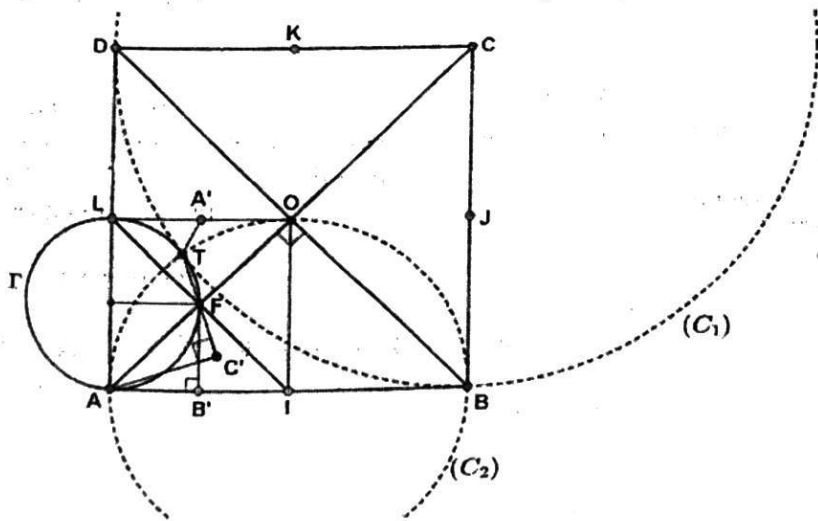
D'autre part  $(\overline{MM'}; \overline{MF}) = (\overline{MM'}; \overline{MA}) + (\overline{MA}; \overline{MF}) = -\frac{\pi}{4} + (\overline{MA}; \overline{MF})[\pi]$ .

c. En déduire l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  du plan tels que les points  $M, M'$  et  $M''$  soient alignés. Tracer  $\Gamma$  :

$M, M'$  et  $F$  sont alignés car  $F = M'M''$ .

Donc  $M, M'$  et  $M''$  sont alignés  $\Leftrightarrow (\overline{MM'}; \overline{MF}) = 0[\pi] \Leftrightarrow (\overline{MA}; \overline{MF}) = \frac{\pi}{4} [\pi] \Leftrightarrow (\overline{MA}; \overline{MF}) = (\overline{LA}; \overline{LF})[\pi]$ .

D'où  $M, M'$  et  $M''$  soient alignés  $\Leftrightarrow M$  appartient au cercle  $\Gamma$  circonscrit au triangle  $ALF$ . C'est le cercle de diamètre  $[AL]$ .



**Problème :**

**Partie A**

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $f_n(x) = x - n \ln x$ .  
 Soit  $C_n$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 2cm.

1. Dans cette question on suppose que  $n = 1$ , et pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+^*$  on a :  $f_1(x) = x - \ln x$ .

a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x)$ . Donner une interprétation graphique :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$ . D'où la droite d'équation  $x = 0$  est AV de  $C_1$ .

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - x)$ . Donner une interprétation graphique :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \times 1 = +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty$ . D'où  $C_1$  admet BP de direction la droite  $\Delta: y = x$  en  $+\infty$ .

c. Dresser le tableau de variation de  $f_1$  :

$f'_1(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ . Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $x - 1$ .

|           |           |   |           |
|-----------|-----------|---|-----------|
| x         | 0         | 1 | $+\infty$ |
| $f'_1(x)$ |           | - | 0         |
| $f_1(x)$  | $+\infty$ |   | $+\infty$ |

1

d. Tracer  $C_1$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  : (voir la figure ci-après)

2. Dans cette question, on suppose que  $n \geq 1$ .

a. Dresser le tableau de variation de  $f_n$  :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - n \ln x) = 0 - n(-\infty) = +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - n \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - n \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \times 1 = +\infty$ .

$f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$

|           |           |   |           |
|-----------|-----------|---|-----------|
| x         | 0         | n | $+\infty$ |
| $f'_n(x)$ |           | - | 0         |
| $f_n(x)$  | $+\infty$ |   | $+\infty$ |

$n(1 - \ln n)$

20

b. Déterminer les points communs à toutes les courbes  $C_n$ , puis étudier les positions relatives de  $C_n$  et  $C_{n+1}$  :

• Points communs :

$f_{n+1}(x) = f_n(x) \Rightarrow x - (n+1)\ln x = x - n \ln x \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

On a  $f_n(1) = 1$ . D'où le point  $A(1; 1)$  est le seul point commun à toutes les courbes  $C_n$ .

• Position relative :

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - (n+1)\ln x - x + n \ln x = -\ln x$ .

|                       |                       |   |                       |
|-----------------------|-----------------------|---|-----------------------|
| x                     | 0                     | 1 | $+\infty$             |
| $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ |                       | - | 0                     |
| P. relative           | $\frac{C_n}{C_{n+1}}$ |   | $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ |

$C_n \cap C_{n+1}$

sc. Montrer que toutes les tangentes aux  $C_n$  au point  $x_0 = e$  passent par un point commun que l'on déterminera :

Soit  $T_n$  la tangente à  $C_n$  au point  $x_0 = e$  alors on a :

$T_n : y = f'_n(e)(x - e) + f(e)$  or  $f(e) = e - n$  et  $f'_n(e) = \frac{e-n}{e}$

$\Rightarrow y = \frac{e-n}{e}(x - e) + e - n \Leftrightarrow y = \frac{e-n}{e}x - e + n + e - n \Leftrightarrow T_n : y = \frac{e-n}{e}x$ . Donc  $T_n$  passe par le Point O l'origine du repère.

3. On considère les points  $M_0$  ;  $M_1$  et  $M_n$ , de même abscisse  $x$ , et appartenant respectivement aux courbes  $C_0$  ;  $C_1$  et  $C_n$ .

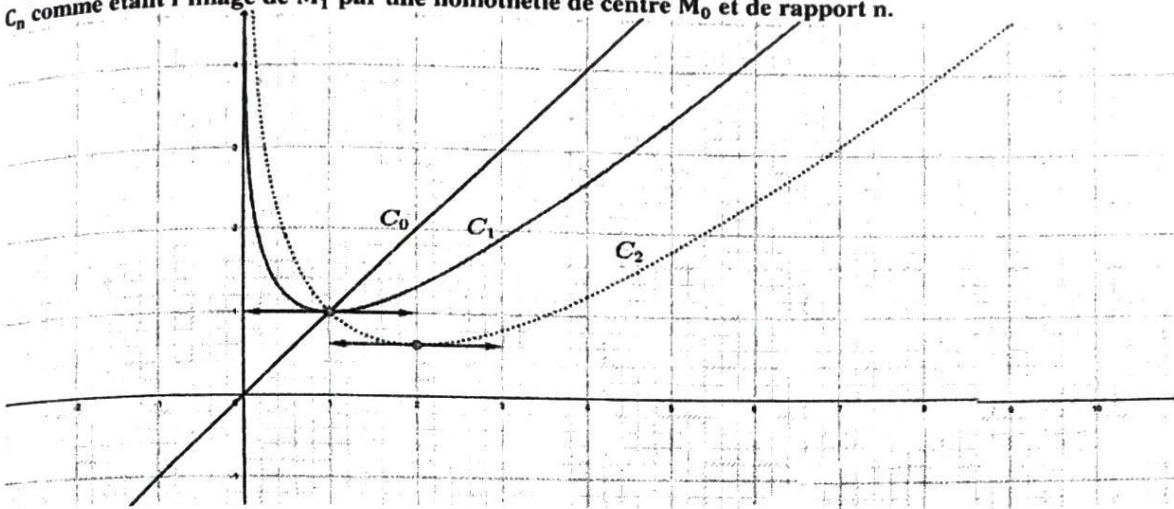
a. Vérifier que pour out  $x > 0$  on a :  $f_n(x) - f_0(x) = n(f_1(x) - f_0(x))$  :

$f_n(x) - f_0(x) = x - n \ln x - x = -n \ln x = n(x - \ln x - x) = n(f_1(x) - f_0(x))$

b. En déduire que  $\overline{M_0 M_n} = n \overline{M_0 M_1}$  :

$\overline{M_0 M_n} = (x - x)\vec{i} + (f_n(x) - f_0(x))\vec{j} = (x - x)\vec{i} + n(f_1(x) - f_0(x))\vec{j} = n((x - x)\vec{i} + (f_1(x) - f_0(x))\vec{j}) = n \overline{M_0 M_1}$

c. Tracer  $C_0$  dans le repère précédent et donner une méthode géométrique simple pour la construction de  $C_n$ , point par point, à partir de  $C_0$  et  $C_1$ . Construire alors la courbe  $C_2$  dans ce repère :  
 $M_0M_n = nM_0M_1 \Leftrightarrow M_n = h_{(M_0;n)}(M_1)$ . Donc à partir d'un point  $M_0$  de  $C_0$  et un point  $M_1$  de  $C_1$  on peut construire le point  $M_n$  de  $C_n$  comme étant l'image de  $M_1$  par une homothétie de centre  $M_0$  et de rapport  $n$ .



Partie B

Soit  $g$  la fonction de variable réelle  $x$  définie par : 
$$\begin{cases} g(x) = \frac{f_0(x)}{f_1(x)} = \frac{x}{x - \ln x} ; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Soit  $\Gamma$  la courbe de  $g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Déduire de A.1.c) que le domaine de définition de  $g$  est  $D_g = ]0; +\infty[$  :

On a  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; f_1(x) \geq 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in ]0; +\infty[ ; x - \ln x \neq 0$  de plus  $g(0) = 0$ . Doù  $D_g = ]0; +\infty[$ .

b. Montrer que la fonction  $g$  est continue sur  $D_g$  :

• Pour  $x \in ]0; +\infty[$  représente le rapport de deux fonctions :  $f_0(x) = x$  et  $f_1(x) = x - \ln x$  qui sont continues sur  $]0; +\infty[$ , donc  $g$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - \ln x} = 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0 = 0 = g(0)$ , donc  $g$  est continue à droite en 0.

D'où  $g$  est continue sur  $D_g = ]0; +\infty[$ .

2. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . Donner une interprétation graphique :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1. \text{ Donc } y = 1 \text{ AH de } \Gamma \text{ au voisinage de } +\infty.$$

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$ . Donner une interprétation graphique :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - \ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0 = g'_d(0). \text{ Donc la courbe } \Gamma \text{ admet à droite de 0 une demi tangente horizontale}$$

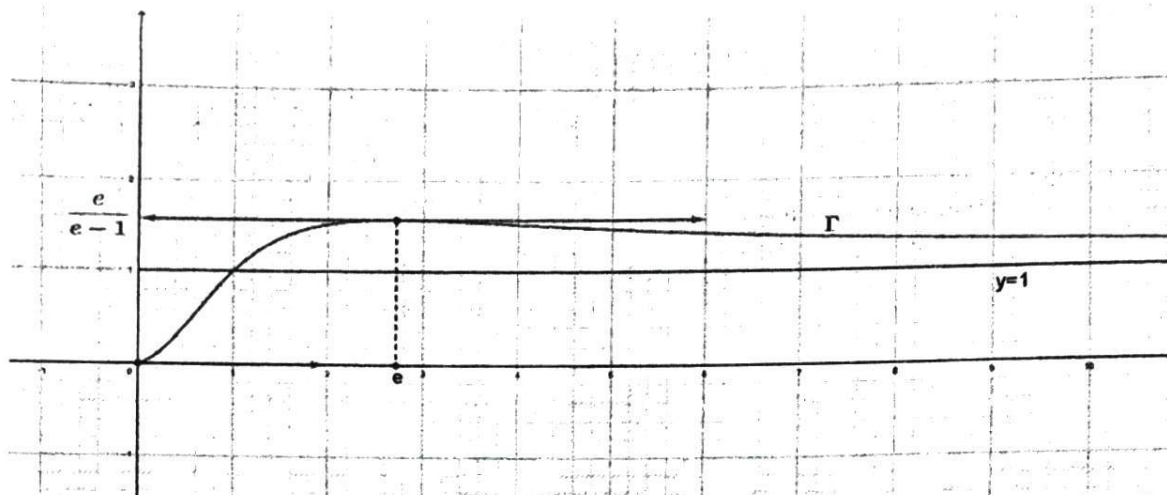
3. a. Calculer  $g'(x)$  pour  $x > 0$  :

$$g'(x) = \frac{x - \ln x - (1 - \frac{1}{x})x}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

b. Dresser le tableau de variation de  $g$  puis construire sa courbe  $\Gamma$  :

Le signe de  $g'(x)$  est celui de  $(1 - \ln x)$ .

|         |   |                 |           |
|---------|---|-----------------|-----------|
| $x$     | 0 | $e$             | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | 0 | +               | 0 -       |
| $g(x)$  |   | $\frac{e}{e-1}$ |           |
|         | 0 |                 | 1         |



4. A partir d'un encadrement de  $g(x)$  sur l'intervalle  $[1; e]$  ; démontrer que :  $\forall x \in [1; e]$  on a  $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$  :

$$1 \leq x \leq e \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq \frac{e}{e-1} \Rightarrow \frac{e-1}{e} \leq \frac{1}{g(x)} \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{e} \leq \frac{x-\ln x}{x} \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{e} \leq 1 - \frac{\ln x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{e} \leq -\frac{\ln x}{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$$

5. Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la suite numérique  $(U_n)$  par :  $U_n = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx$  pour  $n > 0$  et  $U_0 = \int_1^e dx$ .

a. Calculer  $U_0$  et  $U_1$  :

$$U_0 = \int_1^e dx = [x]_1^e = e - 1 \text{ et } U_n = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \left[ \frac{1}{2} \ln^2(x) \right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

b. Montrer que  $(U_n)$  est positive et décroissante. Que peut-on en conclure ?

$$\forall x \in [1; e] \Rightarrow \ln x \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n \geq 0 \Rightarrow \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx \geq 0 \Rightarrow U_n \geq 0.$$

$$U_{n+1} - U_n = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} dx - \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx = \int_1^e \left( \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n \right) dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx$$

$$\text{Or } \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} - 1 < 0 \Rightarrow \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx < 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0.$$

Donc  $(U_n)$  est décroissante.

La suite  $(U_n)$  est convergente car elle est décroissante et minorée.

c. Montrer que pour tout entier naturel  $n > 1$  on a  $0 \leq U_n \leq \frac{e-1}{e^n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

$$\forall x \in [1; e] \text{ on a } : 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n \leq \frac{1}{e^n} \Rightarrow 0 \leq \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx \leq \int_1^e \frac{1}{e^n} dx \Rightarrow 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e^n} [x]_1^e \Rightarrow 0 \leq U_n \leq \frac{e-1}{e^n}.$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e-1}{e^n} = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0.$$

6. On pose  $I = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e \frac{x}{x-\ln x} dx$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ .

a. Montrer que  $S_n = \int_1^e \frac{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)} dx$  :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = \int_1^e 1 dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx + \dots + \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx$$

$$= \int_1^e \left( 1 + \frac{\ln x}{x} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n \right) dx = \int_1^e \frac{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)} dx$$

$$\text{Car si } q \neq 1 \text{ alors } 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

b. Montrer que  $I - S_n = \int_1^e \frac{x}{1 - \ln x} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} dx$  :

$$I - S_n = \int_1^e g(x) dx - \int_1^e \frac{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)} dx = \int_1^e \frac{x}{x - \ln x} dx - \int_1^e \frac{x - x \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{x - \ln x} dx = \int_1^e \frac{x - x \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{x - \ln x} dx = \int_1^e \frac{x}{1 - \ln x} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} dx.$$

c. En utilisant B. 4), montrer que :  $0 \leq I - S_n \leq \frac{1}{e^{n-1}}$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I$  :

$$\forall x \in [1; e] \text{ on a } 1 \leq g(x) \leq \frac{e}{e-1} \text{ et } 0 \leq \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{e^{n+1}} \Rightarrow 0 \leq g(x) \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq g(x) \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} dx \leq \frac{1}{(e-1)e^n} \int_1^e 1 dx \Rightarrow 0 \leq \int_1^e \frac{x}{x - \ln x} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} dx \leq \frac{e-1}{(e-1)e^n} \Rightarrow 0 \leq I - S_n \leq \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{e^{n-1}}$$

$$\text{D'où } 0 \leq I - S_n \leq \frac{1}{e^{n-1}}.$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{n-1}} = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - S_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I.$$

d. Montrer que  $S_n \leq I \leq S_n + \frac{1}{e^{n-1}}$  :

$$\bullet 0 \leq I - S_n \Leftrightarrow S_n \leq I \dots\dots\dots(1)$$

$$\bullet I - S_n \leq \frac{1}{e^{n-1}} \Leftrightarrow I \leq S_n + \frac{1}{e^{n-1}} \dots\dots\dots(2)$$

De (1) et (2) on a  $S_n \leq I \leq S_n + \frac{1}{e^{n-1}}$ .

e. Pour quelles valeurs de  $n$  ;  $S_n$  est une valeur approchée de  $I$  à  $10^{-2}$  ?

$$S_n \text{ est une valeur approchée de } I \text{ à } 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{n-1}} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow e^{n-1} \geq 10^2 \Leftrightarrow n-1 \geq \ln(10^2) \Leftrightarrow n \geq 1 + 2\ln 10.$$

Donc à partir de  $n = E(1 + 2\ln 10)$ .

## Bac 2006 session normale

### Énoncé

#### Exercice N°1 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on considère la parabole  $(P)$  de foyer  $F(0,2)$  et de directrice la droite  $(D)$  d'équation :  $y = 4$ . On désigne par  $(\Delta)$  la droite parallèle à  $(D)$  et passant par le point  $F$ .

1. Soit  $M$  un point de  $(P)$  d'ordonnée inférieure strictement à 2 et  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(\Delta)$ .

a. Montrer que :  $MF - MH = 2$ .

b. En déduire que le cercle de centre  $M$  et de rayon  $MH$  est tangent au cercle de diamètre  $[AB]$  où  $A$  et  $B$  sont les points d'intersection de  $(P)$  avec la droite  $(\Delta)$ .

2. a. Trouver une équation de  $(P)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  puis tracer  $(P)$ .

b. Soit  $(D_m)$  une droite variable d'équation  $y = mx + 2$  où  $m$  est un paramètre réel. La droite  $(D_m)$  coupe  $(P)$  en  $S$  et  $T$ . Montrer que, le milieu  $I$  de  $[ST]$ , appartient à une conique fixe  $(P')$  dont on donnera une équation dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

3. Soit l'ellipse  $(E)$  d'excentricité  $e = \frac{1}{3}$ , de foyer  $F(0,2)$  et de directrice associée la droite  $(D)$ .

a. Justifier que  $(P)$  et  $(E)$  n'ont aucun point commun.

b. Trouver une équation de  $(E)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

c. Déterminer les sommets de  $(E)$ , son deuxième foyer  $F'$  et sa deuxième directrice  $(D')$ .

d. Tracer  $F'$ ,  $(D')$  et  $(E)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

#### Exercice N°2 :

Dans le plan orienté, on considère le carré direct  $ABCD$  de centre  $O$ . On désigne par  $I, J$  et  $K$  les milieux respectifs de  $[AB], [AD]$  et  $[BC]$ .

1. Montrer qu'il existe un seul antidéplacement  $f$  qui transforme  $D$  en  $A$  et  $J$  en  $I$ . Vérifier que  $f = S_{DB} \circ t_{\vec{JK}}$  où  $t_{\vec{JK}}$  est la translation de vecteur  $\vec{JK}$  et  $S_{DB}$  est la réflexion d'axe  $(BD)$ .

2. Caractériser l'antidéplacement  $f$  :

a. En décomposant convenablement la translation  $t_{\vec{JK}}$ .

b. En exploitant l'écriture complexe de  $f$  dans le repère orthonormé direct  $(A; \vec{A1}; \vec{A2})$ .

3. Montrer que  $f(A) = B$ .

4. On pose  $g = S_{AI} \circ f$ . Montrer que  $g$  est un déplacement que l'on caractérisera.

5. Soit  $S$  la similitude directe qui transforme  $D$  en  $O$  et  $C$  en  $I$ .

a. Donner le rapport et un angle de  $S$ .

b. Préciser  $S[(BC)]$  et  $S[(BD)]$ , et en déduire  $S(B)$ .

c. Montrer que  $S(A) = J$ .

d. Soit  $\Omega$  le centre de  $S$ . Montrer que les points  $\Omega, I, B$  et  $C$  sont cocycliques.

6. a. Donner la nature de  $SoS$  et préciser ses éléments caractéristiques.

b. En déduire que  $\Omega$  est le barycentre des deux points  $(B,1)$  et  $(J,4)$  puis construire  $\Omega$ .

7. Soit  $E$  le point du plan défini par :  $\vec{BE} = 2\vec{BA}$  et soit  $S'$  la similitude directe de centre  $B$  qui transforme  $C$  en  $E$ . Caractériser  $SoS'$  et montrer que  $\Omega E = 2\Omega D$  et que  $(\Omega E) \perp (\Omega D)$ .

#### Problème :

##### Partie A

Soit  $f$  la fonction de variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^{2x}+1} & x \geq 0 \\ \frac{-\ln(1-x)}{2x} & x < 0 \end{cases}$

Soit  $(C_1)$  sa courbe dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 2cm.

1. Etudier la continuité de  $f$  en 0.

2. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $] 0, +\infty[$ . Donner la valeur de la dérivée à droite de 0.

3.  $h$  est un réel strictement négatif. On définit sur  $] -\infty, 0[$  la fonction  $u$  par :  $u(x) = \left[ \frac{\ln(1-h)+h}{h^2} \right] x^2 - \ln(1-x) - x$ .

a. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel  $c$  appartenant à  $]h, 1[$  tel que :

$$\frac{\ln(1-h)+h}{h^2} = \frac{1}{2(c-1)}$$

- b. Prouver que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1-h) + h}{h^2} = -\frac{1}{2}$ .
- c. Prouver que  $f$  est dérivable à gauche en 0 et donner la valeur de la dérivée à gauche en 0.
- d.  $f$  est-elle dérivable en 0 ?
4. a. Calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$ . En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .
- b. Calculer  $f'(x)$  pour  $x < 0$ .
- c. Pour  $x \leq 0$ , on pose :  $v(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$ . Etablir le tableau de variation de la fonction  $v$  puis déterminer de signe de  $f'(x)$  pour  $x < 0$ .
- d. Dresser le tableau de variation de  $f$  en y précisant les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
5. Tracer la courbe  $(C_f)$  dans le repère précédent  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## Partie B

1. Justifier que  $f$  possède des primitives sur  $[0, +\infty[$ .
2. Soit la fonction  $G$  définie sur  $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $G(x) = \int_0^{\ln(\tan x)} f(t) dt$ .
- a. Calculer  $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et  $G'(x)$  pour  $x$  de  $I$ .
- b. Prouver que :  $\forall x \in I, G(x) = x - \frac{\pi}{4}$ .
- c. Soit  $\beta$  un réel positif, justifier l'existence d'un unique réel  $\alpha$  de  $I$  tel que :  $\beta = \ln(\tan \alpha)$ .
- d. On suppose que si  $\beta$  tend vers  $+\infty$  alors  $\alpha$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ . calculer en  $cm^2$ , l'aire  $A(\beta)$  de la partie du plan délimité par la Courbe  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \beta$  puis calculer  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} A(\beta)$ .

## Partie C

- Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .
1. a. Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.
- b. Tracer dans le repère précédent  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_{g^{-1}})$  représentative de  $g^{-1}$ .
- c. Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$ .
2. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on considère les fonctions  $h_n$  et  $k_n$  définies sur  $] -\infty, 0[$  par :
- $$h_n(x) = \int_1^{f(x)} t(\ln t)^n dt \text{ et } k_n(x) = \int_1^{f(x)} t^n \ln t dt.$$
- a. Calculer  $h_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x)$ .
- b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :
- $$h_{n+1}(x) = \frac{1}{2} [f(x)]^2 [\ln(f(x))]^{n+1} - \frac{n+1}{2} h_n(x) \text{ et } k_n(x) = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} \ln(f(x)) - \frac{1}{(n+1)^2} [[f(x)]^{n+1} - 1].$$
- c. Montrer, par récurrence sur  $n$ , que la fonction  $h_n$  admet en  $-\infty$  une limite finie non nulle  $L_n$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $L_{n+1} = (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n+1}}$ .
- d. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} k_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2}$ .

## Partie D

Dans cette partie on se propose de calculer la limite de la suite  $(S_n)$  définie ci-dessous.

Pour tout  $n \geq 1$ , posons  $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$  et  $S_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} u_i = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ .

On définit la fonction  $\Phi$ , dérivable sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  et dont la fonction dérivée est continue sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  par :

$$\Phi(t) = \frac{t^2}{\sin t} \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \Phi(t) = -1.$$

1. Sans calculer  $\Phi'(t)$ , justifier l'existence d'un réel  $M$  tel que :  $|\Phi'(t)| \leq M, \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
2. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t) \sin((2n+1)t) dt$ .
- a. En intégrant par parties, montrer que :  $I_n = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(t) \cos((2n+1)t) dt$ .
- b. Montrer alors que :  $|I_n| \leq \frac{1}{2n+1} \left(1 + \frac{\pi}{2} M\right)$  et en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .
3. Soit  $x$  un réel de  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  et soit  $n$  un entier naturel non nul.
- a. Exprimer la somme  $\sum_{k=1}^n e^{i(2kx)}$ , en fonction de  $n$  et  $x$  (où  $i$  est le nombre complexe vérifiant  $i^2 = -1$ ).
- b. En déduire que :  $\sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin x} - \frac{1}{2}$ .
4. a. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left(\frac{t^2}{n} - t\right) \cos(2kt) dt = \frac{1}{4k^2}$ .

d. En déduire que  $S_n = 21n + \frac{\pi^2}{6}$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

## Solution

### Exercice N°1 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on considère la parabole (P) de foyer  $F(0,2)$  et de directrice la droite (D) d'équation :  $y = 4$ . On désigne par ( $\Delta$ ) la droite parallèle à (D) et passant par le point F.

1. Soit M un point de (P) d'ordonnée inférieure strictement à 2 et H le projeté orthogonal de M sur ( $\Delta$ ).

a. Montrer que :  $MF - MH = 2$  :

Soit H' le projeté orthogonal de M sur (D). Alors  $M \in (P) \Leftrightarrow MF = MH'$

Or  $MH' = MH + HH' = MH + 2$  (les points M, H et H' sont alignés). Donc  $MF = MH' \Leftrightarrow MF = MH + 2 \Leftrightarrow MF - MH = 2$ .

b. En déduire que le cercle de centre M et de rayon MH est tangent au cercle de diamètre [AB] où A et B sont les points d'intersection de (P) avec la droite ( $\Delta$ ) :

Le cercle de diamètre [AB] a pour rayon  $r = 2$ . Le cercle de centre M passant par H a pour rayon  $r' = MH$ .

M est le centre du cercle  $C_{(M; r')}$  et f est le centre du cercle de diamètre [AB].

On a :  $MF - MH = 2 \Leftrightarrow MF = MH + 2 \Leftrightarrow MF = r' + r$ . Donc  $C_{(M; r')}$  et  $C_{[AB]}$  sont tangents

2. a. Trouver une équation de (P) dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  puis tracer (P) :

$$MF = MH' \Leftrightarrow MF^2 = MH'^2 \Leftrightarrow (0 - x)^2 + (2 - y)^2 = (x - x)^2 + (4 - y)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4 - 4y + y^2 = 16 - 8y + y^2 \Leftrightarrow x^2 = 12 - 4y \Leftrightarrow x^2 = -4(y - 3).$$

b. Soit ( $D_m$ ) une droite variable d'équation  $y = mx + 2$  où m est un paramètre réel. La droite ( $D_m$ ) coupe (P) en S et T. Montrer que, le milieu I de [ST], appartient à une conique fixe (P') dont on donnera une équation dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  :

$$(P) : y = \frac{12 - x^2}{4} \text{ et } (D_m) : y = mx + 2.$$

$$\frac{12 - x^2}{4} = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 4 = 0 ; \Delta = 16m^2 + 16 > 0.$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4m + \sqrt{16m^2 + 16}}{2} = -2m + 2\sqrt{m^2 + 1} \text{ et } x_2 = \frac{-4m - \sqrt{16m^2 + 16}}{2} = -2m - 2\sqrt{m^2 + 1}.$$

$$\text{Donc } y_1 = -2m^2 + 2m\sqrt{m^2 + 1} + 2 \text{ et } y_2 = -2m^2 - 2m\sqrt{m^2 + 1} + 2.$$

$$I = S^*T \Rightarrow I(-2m ; -2m^2 + 2) \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}x_1^2 + 2.$$

Donc I appartient à une parabole (P') d'équation  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

3. Soit l'ellipse (E) d'excentricité  $e = \frac{1}{3}$ , de foyer  $F(0,2)$  et de directrice associée la droite (D).

a. Justifier que (P) et (E) n'ont aucun point commun :

$$M \in (P) \cap (E) \Leftrightarrow \begin{cases} MF = MH' \\ MF = \frac{1}{3}MH' \end{cases} \text{ où } H' \text{ le projeté orthogonal de M sur (D).}$$

$$\Leftrightarrow MH' = \frac{1}{3}MH' \Leftrightarrow \frac{2}{3}MH' = 0 \Leftrightarrow MH' = 0 \text{ (impossible car } M \notin (D))$$

Donc (P) et (E) n'ont aucun point commun.

b. Trouver une équation de (E) dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  :

$$MF = \frac{1}{3}MH' \Leftrightarrow MF^2 = \frac{1}{9}MH'^2 \Leftrightarrow (0 - x)^2 + (2 - y)^2 = \frac{1}{9}(x - x)^2 + \frac{1}{9}(4 - y)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4 - 4y + y^2 = \frac{1}{9}(16 - 8y + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 36 - 36y + 9y^2 = 16 - 8y + y^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 8(y - \frac{7}{4})^2 - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + \frac{16}{9}(y - \frac{7}{4})^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{(y - \frac{7}{4})^2}{(\frac{3}{4})^2} = 1.$$

c. Déterminer les sommets de (E), son deuxième foyer F' et sa deuxième directrice (D') :

$$\bullet x = 0 \Rightarrow (y - \frac{7}{4})^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \text{ ou } y = 1, \text{ alors les sommets de l'axe focal sont } A_1(0; \frac{5}{2}) \text{ et } A_2(0; 1).$$

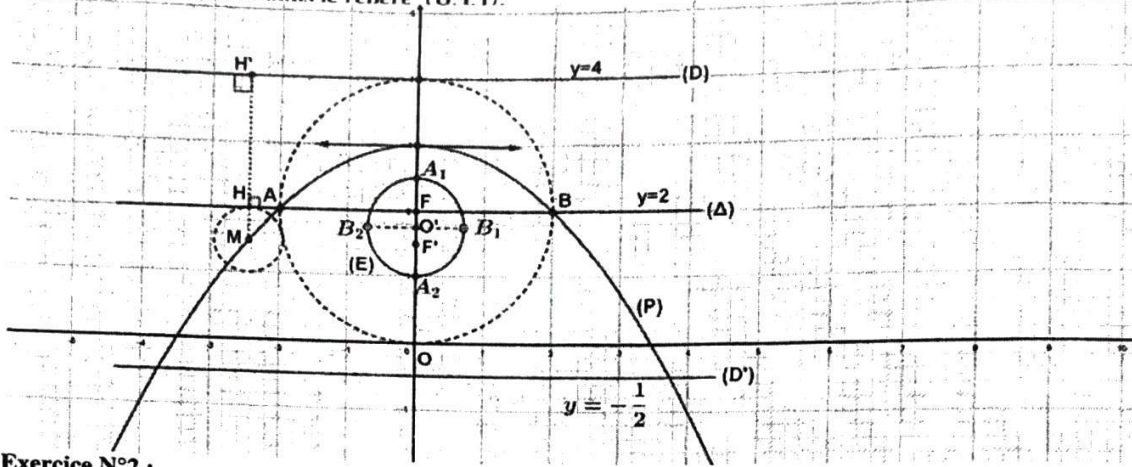
$$\bullet y = \frac{7}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ alors les sommets de l'axe non focal sont } B_1(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{7}{4}) \text{ et } B_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{7}{4}).$$

$$\text{E centre de (E) est le point } O' = A_1 * A_2 \Rightarrow O'(\frac{7}{4}).$$

$$\bullet \text{ Le deuxième foyer } F' : \frac{x_{F'} + 0}{2} = 0 \Rightarrow x_{F'} = 0 \text{ et } \frac{y_{F'} + 2}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow y_{F'} = \frac{3}{2}. \text{ D'où } F'(0; \frac{3}{2}).$$

$$\bullet \text{ La deuxième directrice (D') } = s_0 \cdot (D) \Rightarrow (D') : y = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{1 - 2x^2}$$

d. Tracer  $F'$ ,  $(D')$  et  $(E)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ :



**Exercice N°2 :**

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O. On désigne par I, J et K les milieux respectifs de [AB], [AD] et [BC].

1. Montrer qu'il existe un seul antidéplacement  $f$  qui transforme D en A et J en I. Vérifier que  $f = S_{DB} \circ t_{\vec{JK}}$  où  $t_{\vec{JK}}$  est la translation de vecteur  $\vec{JK}$  et  $S_{DB}$  est la réflexion d'axe (BD) :

$f: \begin{cases} D \rightarrow A \\ J \rightarrow I \end{cases}$  ;  $AI = DJ = \frac{1}{2} AB$  alors il existe un unique antidéplacement  $f$  qui transforme D en A et J en I.

D'une part  $S_{DB} \circ t_{\vec{JK}}$  est un antidéplacement car c'est la composée d'un déplacement avec un antidéplacement.

D'autre part  $S_{DB} \circ t_{\vec{JK}}(D) = S_{DB}(C) = A$  et  $S_{DB} \circ t_{\vec{JK}}(J) = S_{DB}(K) = I$ .

D'où  $f = S_{DB} \circ t_{\vec{JK}}$

2. Caractériser l'antidéplacement  $f$ .

a. En décomposant convenablement la translation  $t_{\vec{JK}}$  :

$$t_{\vec{JK}} = t_{\vec{JI}} \circ t_{\vec{IK}} = t_{\vec{JI}} \circ t_{\vec{IK}} = t_{\vec{IK}} \circ t_{\vec{JI}}$$

$$\Rightarrow f = S_{DB} \circ t_{\vec{JK}} = S_{DB} \circ t_{\vec{IK}} \circ t_{\vec{JI}} = S_{DB} \circ S_{DB} \circ S_{JI} \circ t_{\vec{JI}} = S_{JI} \circ t_{\vec{JI}}$$

D'où  $f$  est la symétrie glissante d'axe (JI) et de vecteur  $\vec{JI}$ .

b. En exploitant l'écriture complexe de  $f$  dans le repère orthonormé direct  $(A; \vec{A}_1; \vec{A}_2)$  :

L'écriture complexe de  $f$  est de la forme  $z' = az + b$  avec  $a, b \in \mathbb{C}$  où  $|a| = 1$ .

$$z_A = 0 ; z_D = 2i ; z_I = 1 \text{ et } z_J = i.$$

$$\begin{cases} 0 = -2ia + b \\ 1 = -ia + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -i \\ b = 2 \end{cases} \text{ D'où l'écriture complexe de } f \text{ est } z' = -i\bar{z} + 2.$$

$f(M) = M'$  et  $f \circ f(M) = M''$

$$f \circ f : z'' = -i\bar{z}' + 2 = -i(-i\bar{z} + 2) + 2 = -i(iz + 2) + 2 = z + 2 - 2i \Rightarrow z'' = z + 2 - 2i.$$

$f \circ f$  est une translation de vecteur  $z_2 \vec{u} = 2 - 2i \Rightarrow z_2 \vec{u} = 1 - i$  où  $\vec{u}$  est le vecteur de la symétrie glissante  $f$ .

$$N \in \Delta : z_1 = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{0 + 2i}{2} = i. (\Delta \text{ est l'axe de } f)$$

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\Delta$ .

$$\Delta : y = -x + d \text{ or } N(0; 1) \in \Delta \Rightarrow d = 1. \text{ D'où } \Delta : y = -x + 1.$$

3. Montrer que  $f(A) = B$  :

$$f(A) = S_{DB} \circ t_{\vec{JK}}(A) = S_{DB}(B) = B.$$

4. On pose  $g = S_{A_1} \circ f$ . Montrer que  $g$  est un déplacement que l'on caractérisera :  $g$  est un déplacement car c'est la composée de deux antidéplacements.

Caractérisation de  $g$  :

$$g = S_{A_1} \circ f = S_{A_1} \circ S_{DB} \circ t_{\vec{JK}} = r_{(B; \frac{\pi}{2})} \circ t_{\vec{JK}} \Rightarrow g \text{ est une rotation d'angle } \frac{\pi}{2}, \text{ or } g(O) = O. \text{ D'où } g = r_{(O; \frac{\pi}{2})}$$

5. Soit  $S$  la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

a. Donner le rapport et un angle de  $S$  :

$$S : \begin{cases} D \rightarrow O \\ C \rightarrow I \end{cases}$$

Le rapport  $k$  de  $S$  est :  $k = \frac{OI}{DC} = \frac{OI}{2OI} = \frac{1}{2}$  et l'angle  $\alpha$  de  $S$  est  $\alpha = (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

b. Préciser  $S[(BC)]$  et  $S[(BD)]$ , et en déduire  $S(B)$  :

- $S[(BC)]$  est la perpendiculaire à (BC) passant par I. Donc  $S[(BC)] = (AB)$ .
- $S[(BD)]$  est la perpendiculaire à (BD) passant par O. Donc  $S[(BD)] = (AC)$ .
- $\{B\} = (BC) \cap (BD) \Rightarrow S(B) = S(BC) \cap S(BD) = (AB) \cap (AC) = A$ . D'où  $S(B) = A$ .

c. Montrer que  $\mathcal{C}(A) = J$ .

$\mathcal{C}(A) = (AC) \cap (AD) \Rightarrow S(A) = S(AC) \cap S(AD) = (IJ) \cap (JK) = J$ . D'où  $S(A) = J$ .

d. Soit  $\Omega$  le centre de  $S$ . Montrer que les points  $\Omega, I, B$  et  $C$  sont cocycliques :

$S: \begin{cases} \Omega \rightarrow \Omega \\ C \rightarrow I \end{cases} \Rightarrow (\overline{\Omega C}; \overline{\Omega I}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] = (\overline{BC}; \overline{BI})[\pi]$ . Donc les points  $\Omega, I, B$  et  $C$  sont cocycliques.

6. a. Donner la nature de SoS et préciser ses éléments caractéristiques :

$SoS = s_{(\Omega; \frac{1}{4}; \pi)} = h_{(\Omega; -\frac{1}{4})}$

b. En déduire que  $\Omega$  est le barycentre des deux points  $(B,1)$  et  $(J,4)$  puis construire  $\Omega$  :

$SoS(B) = S(A) = J \Leftrightarrow h_{(\Omega; -\frac{1}{4})}(B) = J \Leftrightarrow \overline{\Omega J} = -\frac{1}{4}\overline{\Omega B} \Leftrightarrow \overline{\Omega B} + 4\overline{\Omega J} = \vec{0}$ . Donc  $\Omega = \text{bar} \{(B, 1) \text{ et } (J, 4)\}$ .

7. Soit  $E$  le point du plan défini par :  $\overline{BE} = 2\overline{BA}$  et soit  $S'$  la similitude directe de centre  $B$  qui transforme  $C$  en  $E$ . Caractériser  $SoS'$  et montrer que  $\overline{\Omega E} = 2\overline{\Omega D}$  et que  $(\overline{\Omega E}) \perp (\overline{\Omega D})$  :

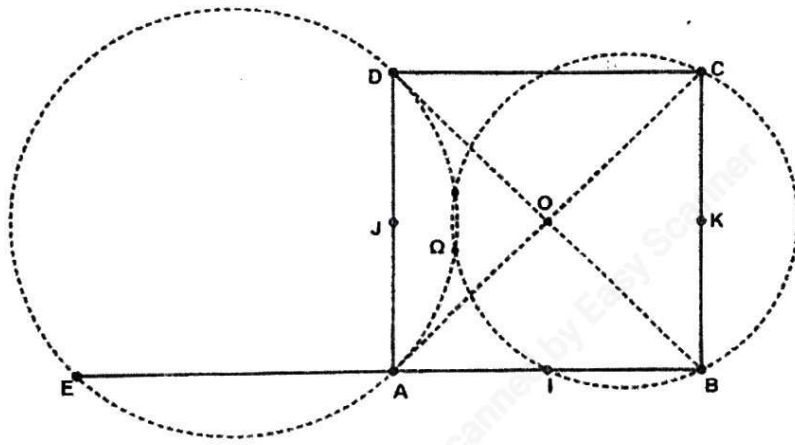
$S' = s_{(B; C \rightarrow E)} : \begin{cases} B \rightarrow B \\ C \rightarrow E \end{cases}$

Le rapport  $k'$  de  $S'$  est :  $k' = \frac{BE}{BC} = \frac{2BC}{BC} = 2$  et l'angle  $\beta$  de  $S'$  est  $\beta = (\overline{BC}; \overline{BE}) = (\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

$\Rightarrow SoS' = s_{(\Omega'; 1; 0)} \Rightarrow SoS'$  est translation.

$SoS'(B) = S(B) = A \Rightarrow SoS = t_{\overline{BA}}$ .

$SoS'(C) = S(E)$   
 $SoS'(C) = t_{\overline{BA}}(C) = D \Rightarrow S(E) = D \Rightarrow \begin{cases} \frac{\Omega D}{\Omega E} = \frac{1}{2} \\ (\overline{\Omega E}; \overline{\Omega D}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{\Omega E} = 2\overline{\Omega D} \\ (\overline{\Omega E}) \perp (\overline{\Omega D}) \end{cases}$



**Problème :**

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction de variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^{2x}+1} & x \geq 0 \\ \frac{-\ln(1-x)}{2x} & x < 0 \end{cases}$

Soit  $(C_1)$  sa courbe dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 2cm.

1. Etudier la continuité de  $f$  en 0 :

$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2} = f(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\ln(1-x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{-x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} = f(0)$

Donc  $f$  est continue en 0.

2. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ . Donner la valeur de la dérivée à droite de 0 :

$f$  est le rapport de fonctions dérivables sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$  alors  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ .

$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^{2x}+1} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x - e^{2x} - 1}{2x(e^{2x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{2(e^{2x}+1)} + \frac{e^x}{2(e^{2x}+1)} \times \frac{1 - e^x}{x} \right]$   
 $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = f'_d(0) \Rightarrow f$  est dérivable à droite en 0.

Donc  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

3.  $h$  est un réel strictement négatif. On définit sur  $]-\infty, 0[$  la fonction  $u$  par :  $u(x) = \left[ \frac{\ln(1-h)+h}{h^2} \right] x^2 - \ln(1-x) - x$ .

a. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel  $c$  appartenant à  $]h, 1[$  tel que :

$\frac{\ln(1-h)+h}{h^2} = \frac{1}{2(c-1)}$  :

$u(h) = 0$  ;  $u(0) = 0$  ;  $u$  est continue sur  $]h, 0[$  et non constante, alors il existe  $c \in ]h, 0[$  tel que  $u'(c) = 0$ .

$$u'(c) = 0 \Rightarrow 2 \left[ \frac{\ln(1-h)+h}{h^2} \right] c + \frac{1}{1-c} - 1 = 0 \Rightarrow 2 \left[ \frac{\ln(1-h)+h}{h^2} \right] c = 1 - \frac{1}{1-c} \Rightarrow \frac{\ln(1-h)+h}{h^2} = \frac{1}{2(c-1)}$$

b. Prouver que  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-h)+h}{h^2} = -\frac{1}{2}$  :

$$h \rightarrow 0^- \Rightarrow c \rightarrow 0^- ; \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-h)+h}{h^2} = \lim_{c \rightarrow 0^-} \frac{1}{2(c-1)} = -\frac{1}{2}$$

c. Prouver que f est dérivable à gauche en 0 et donner la valeur de la dérivée à gauche en 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\ln(1-x) - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{-\ln(1-x)}{2x^2} - \frac{1}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{-\ln(1-x) - x}{2x^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} \right) = -\frac{1}{2} \times \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} = f'_g(0) \Rightarrow f \text{ est dérivable à gauche en } 0. \end{aligned}$$

d. f est-elle dérivable en 0 ?

On a  $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ , donc f n'est pas dérivable en 0.

4. a. Calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$ . En déduire le sens de variation de f sur  $[0, +\infty[$  :

$$\forall x > 0 ; f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}+1) - 2e^{2x} \times e^x}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} < 0.$$

f est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

b. Calculer  $f'(x)$  pour  $x < 0$  :

$$\forall x < 0 ; f'(x) = \frac{\frac{2x}{1-x} + 2\ln(1-x)}{4x^2} = \frac{1}{2x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{2x^2} = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{2x^2(1-x)}$$

c. Pour  $x \leq 0$ , on pose :  $v(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$ . Etablir le tableau de variation de la fonction v puis déterminer de signe de  $f'(x)$  pour  $x < 0$  :

$$v'(x) = 1 - \ln(1-x) - 1 = -\ln(1-x) < 0.$$

$$v(0) = 0.$$

Tableau de variation de v :

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| x       | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $v'(x)$ |           | - |           |
| v(x)    |           | 0 |           |

Signe de u :

|      |           |   |           |
|------|-----------|---|-----------|
| x    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| v(x) | +         | 0 | -         |

d. Dresser le tableau de variation de f en y précisant les limites de f en  $+\infty$  et en  $-\infty$  :

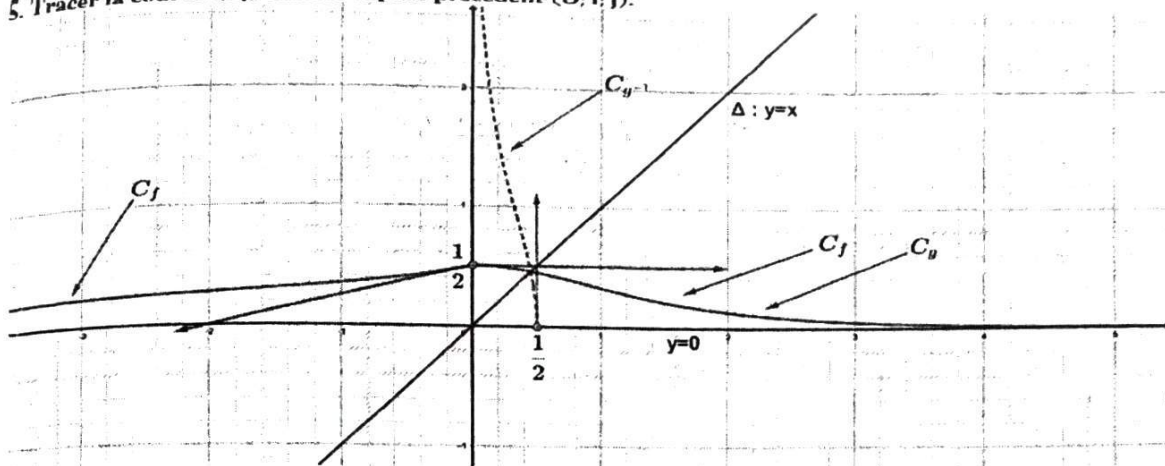
Le signe de  $f'(x)$  est celui de v(x)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\ln(1-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1-x}{2x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln t}{t} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{2x} = 0 \times \left( -\frac{1}{2} \right) = 0.$$

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| x       | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $v'(x)$ | 0         | + | -         |
| v(x)    |           | 0 |           |

5. Tracer la courbe  $(C_f)$  dans le repère précédent  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .



Partie B

1. Justifier que  $f$  possède des primitives sur  $[0, +\infty[$  :

$f$  est continue sur  $[0, +\infty[$  alors  $f$  admet des primitives sur  $[0, +\infty[$ .

2. Soit la fonction  $G$  définie sur  $I = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$  par  $G(x) = \int_0^{\ln(\tan x)} f(t) dt$ .

a. Calculer  $G(\frac{\pi}{4})$  et  $G'(x)$  pour  $x$  de  $I$  :

•  $G(\frac{\pi}{4}) = \int_0^{\ln(\tan \frac{\pi}{4})} f(t) dt = \int_0^{\ln(1)} f(t) dt = \int_0^0 f(t) dt = 0$ .

•  $\forall x \in I; G'(x) = (\ln(\tan x))' f(\ln(\tan x)) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} \times \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = 1$ .

b. Prouver que :  $\forall x \in I, G(x) = x - \frac{\pi}{4}$  :

$G(x) = x + C$  et  $G(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow C = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \forall x \in I, G(x) = x - \frac{\pi}{4}$ .

c. Soit  $\beta$  un réel positif, justifier l'existence d'un unique réel  $\alpha$  de  $I$  tel que :  $\beta = \ln(\tan \alpha)$  :

On pose  $w(t) = \ln(\tan t)$  ;  $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ .

$w'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} > 0 ; \forall x \in I$ .

|         |                 |           |
|---------|-----------------|-----------|
| $x$     | $\frac{\pi}{4}$ | $+\infty$ |
| $w'(x)$ |                 | -         |
| $w(x)$  |                 | $+\infty$ |
|         | 0               |           |

•  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} w(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\tan x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ .

$w(\frac{\pi}{4}) = \ln(\tan \frac{\pi}{4}) = \ln 1 = 0$ .

$w$  réalise une bijection de  $I$  sur  $[0, +\infty[$ , donc pour tout il existe  $\beta \in \mathbb{R}_+$ , il existe un unique réel  $\alpha \in I, \beta = w(\alpha)$ .

Donc  $\beta = \ln(\tan \alpha)$ .

d. On suppose que si  $\beta$  tend vers  $+\infty$  alors  $\alpha$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ . calculer en  $cm^2$ , l'aire  $A(\beta)$  de la partie du plan délimité par la

Courbe  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \beta$  puis calculer  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} A(\beta)$  :

$A(\beta) = \int_0^\beta f(t) dt = G(\alpha) = (\alpha - \frac{\pi}{4}) 4 cm^2$

$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} A(\beta) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha - \frac{\pi}{4}) 4 cm^2 = (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) 4 cm^2 = \pi cm^2$ .

Partie C

Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .

1. a. Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera :

$g$  est continue et strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$  (voir le tableau de variation de  $f$ ) alors  $g$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $]0, \frac{1}{2}[$ .

b. Tracer dans le repère précédent  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_{g^{-1}})$  représentative de  $g^{-1}$  :

$(C_{g^{-1}})$  est la symétrique de  $(C_g)$  par rapport à la droite d'équation  $\Delta : y=x$  ( voir la figure précédente).

c. Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$  :

$$g(y) = x \Leftrightarrow g^{-1}(x) = y \text{ où } x \in ]0, \frac{1}{2}] \text{ et } y \in [0, +\infty[.$$

$$g(y) = x \Leftrightarrow \frac{e^y}{e^{2y+1}} = x \Leftrightarrow xe^{2y} + x = e^y \Leftrightarrow xe^{2y} - e^y + x = 0 \Leftrightarrow xz^2 - z + x = 0 \text{ (en posant } z=e^y)$$

$$\Delta = 1 - 4x^2 \Rightarrow z_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x} \text{ et } z_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x} \Rightarrow y_1 = \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}\right) \text{ et } y_2 = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}\right)$$

$$\text{Or } 0 < 1 - 4x^2 \leq 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}\right) \leq 0 \text{ et } \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}\right) \geq 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in ]0, \frac{1}{2}] ; g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}\right).$$

2. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on considère les fonctions  $h_n$  et  $k_n$  définies sur  $] -\infty, 0[$  par :

$$h_n(x) = \int_1^{f(x)} t(\ln t)^n dt \text{ et } k_n(x) = \int_1^{f(x)} t^n \ln t dt.$$

a. Calculer  $h_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x)$  :

$$h_1(x) = \int_1^{f(x)} t \ln t dt ?$$

$$\begin{cases} u'(t) = t \\ v(t) = \ln t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_1(x) &= \left[ \frac{1}{2}t^2 \ln t \right]_1^{f(x)} - \int_1^{f(x)} \frac{1}{2}t^2 \times \frac{1}{t} dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 \ln t \right]_1^{f(x)} - \int_1^{f(x)} \frac{1}{2}t dt \\ &= \left[ \frac{1}{2}t^2 \ln t \right]_1^{f(x)} - \left[ \frac{1}{4}t^2 \right]_1^{f(x)} = \frac{1}{2}(f(x))^2 \ln f(x) - \frac{1}{4}(f(x))^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2}(f(x))^2 \ln f(x) - \frac{1}{4}(f(x))^2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))^2 \ln f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln t = 0.$$

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2 [\ln(f(x))]^{n+1} - \frac{n+1}{2} h_n(x) \text{ et } k_n(x) = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} \ln(f(x)) - \frac{1}{(n+1)^2} [[f(x)]^{n+1} - 1] :$$

$$h_{n+1}(x) = \int_1^{f(x)} t(\ln t)^{n+1} dt ?$$

$$\begin{cases} u'(t) = t \\ v(t) = (\ln t)^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ v'(t) = (n+1) \frac{1}{t} (\ln t)^n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_{n+1}(x) &= \left[ \frac{1}{2}t^2 (\ln t)^{n+1} \right]_1^{f(x)} - \frac{(n+1)}{2} \int_1^{f(x)} t^2 \times \frac{1}{t} (\ln t)^n dt = \frac{1}{2}[f(x)]^2 [\ln(f(x))]^{n+1} - \frac{(n+1)}{2} \int_1^{f(x)} t (\ln t)^n dt \\ &= \frac{1}{2}[f(x)]^2 [\ln(f(x))]^{n+1} - \frac{n+1}{2} h_n(x). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } h_{n+1}(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2 [\ln(f(x))]^{n+1} - \frac{n+1}{2} h_n(x).$$

$$k_n(x) = \int_1^{f(x)} t^n \ln t dt ?$$

$$\begin{cases} u'(t) = t^n \\ v(t) = \ln t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k_n(x) &= \left[ \frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t \right]_1^{f(x)} - \frac{1}{n+1} \int_1^{f(x)} t^{n+1} \times \frac{1}{t} dt = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} \ln(f(x)) - \frac{1}{n+1} \int_1^{f(x)} t^n dt \\ &= \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} \ln(f(x)) - \frac{1}{n+1} \left[ \frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_1^{f(x)} = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} \ln(f(x)) - \frac{1}{(n+1)^2} [f(x)^{n+1} - 1] \end{aligned}$$

$$\text{Donc } k_n(x) = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} \ln(f(x)) - \frac{1}{(n+1)^2} [f(x)^{n+1} - 1].$$

c. Montrer, par récurrence sur  $n$ , que la fonction  $h_n$  admet en  $-\infty$  une limite finie non nulle  $L_n$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$L_{n+1} = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}} :$$

• Montrons par récurrence sur  $n$ , que la fonction  $h_n$  admet en  $-\infty$  une limite finie non nulle.

**Initialisation :**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) = \frac{1}{4} = I_1 = L_1.$$

**Transmission :**

Montrons que si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_n(x) = I_n = L_n \neq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_{n+1}(x) = I_{n+1} = L_{n+1} \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h_{n+1}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} [f(x)]^2 [\ln(f(x))]^{n+1} - \frac{n+1}{2} h_n(x) \right) = -\frac{n+1}{2} I_n = I_{n+1} = L_{n+1} \neq 0.$$

**Conclusion :**

$h_n(x)$  admet une limite  $L_n \neq 0$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .

Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $L_{n+1} = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$ .

$$I_2 = -\frac{2}{2} I_1$$

$$I_3 = -\frac{3}{2} I_2$$

$$I_4 = -\frac{4}{2} I_3$$

$$\dots$$

$$I_n = -\frac{n}{2} I_{n-1}$$

$$I_n = (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n-1}} I_1 = (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^{n+1}} \text{ car } I_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

d. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} k_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2}$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} \ln(f(x)) - \frac{1}{(n+1)^2} [[f(x)]^{n+1} - 1] \right) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ([f(x)]^{n+1} \ln(f(x))) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^{n+1} \ln t)$ .

**Partie D**

Dans cette partie on se propose de calculer la limite de la suite  $(S_n)$  définie ci-dessous.

Pour tout  $n \geq 1$ , posons  $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$  et  $S_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} u_i = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ .

On définit la fonction  $\Phi$ , dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et dont la fonction dérivée est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par :

$$\Phi(t) = \frac{t^2}{\sin t} \quad t \in ]0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \Phi(0) = -1.$$

1. Sans calculer  $\Phi'(t)$ , justifier l'existence d'un réel  $M$  tel que :  $|\Phi'(t)| \leq M, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  :

$\Phi'$  est continue sur l'intervalle fermé alors  $\Phi'$  est bornée, d'où il existe un réel  $M$  tel que  $|\Phi'(t)| \leq M; \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

2. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t) \sin((2n+1)t) dt$ .

a. En intégrant par parties, montrer que :  $I_n = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(t) \cos((2n+1)t) dt$  :

$$\begin{cases} u'(t) = \sin((2n+1)t) \\ v(t) = \Phi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t) \\ v'(t) = \Phi'(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{1}{2n+1} [\Phi(t) \cos((2n+1)t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(t) \cos((2n+1)t) dt = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(t) \cos((2n+1)t) dt$$

b. Montrer alors que :  $|I_n| \leq \frac{1}{2n+1} (1 + \frac{\pi}{2} M)$  et en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  :

$$\begin{aligned} |I_n| &\leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(t) \cos((2n+1)t) dt \right| \leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\Phi'(t) \cos((2n+1)t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\Phi'(t)| |\cos((2n+1)t)| dt \end{aligned}$$

Or  $|\Phi'(t)| \leq M; \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $|\cos((2n+1)t)| \leq 1$  pour tout réel  $t$ .

$$\Rightarrow |I_n| \leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \times 1 dt \leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M dt \leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \times \frac{\pi}{2} M$$

D'où  $|I_n| \leq \frac{1}{2n+1} (1 + \frac{\pi}{2} M)$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} (1 + \frac{\pi}{2} M) = 0.$$

3. Soit  $x$  un réel de  $]0, \frac{\pi}{2}]$  et soit  $n$  un entier naturel non nul.

a. Exprimer la somme  $\sum_{k=1}^n e^{i(2kx)}$ , en fonction de  $n$  et  $x$  (où  $i$  est le nombre complexe vérifiant  $i^2 = -1$ ) :

$$\sum_{k=1}^n e^{i(2kx)} = e^{i(2x)} \frac{1 - (e^{i(2x)})^n}{1 - e^{i(2x)}} = \frac{e^{i(2x)} - e^{i(2(n+1)x)}}{1 - e^{i(2x)}} \text{ or } e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n e^{i(2kx)} = \frac{2i \sin(-nx) e^{i(n+2)x}}{2i \sin(x) e^{ix}} = \frac{\sin(nx)}{\sin x} e^{i(n+1)x}$$

b. En déduire que :  $\sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin x} - \frac{1}{2}$  ;

$$\sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n e^{i(2kx)} \right) = \frac{\sin(nx)}{\sin x} \times \cos(n+1)x = \frac{\sin(2n+1)x + \sin(-x)}{2\sin x} = \frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin x} - \frac{1}{2}$$

4. a. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{t^2}{\pi} - t \right) \cos(2kt) dt = \frac{1}{4k^2}$  :

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(2kt) \\ v(t) = \frac{t^2}{\pi} - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = \frac{1}{2k} \sin(2kt) \\ v'(t) = \frac{2t}{\pi} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{t^2}{\pi} - t \right) \cos(2kt) dt = \left[ \frac{1}{2k} \left( \frac{t^2}{\pi} - t \right) \sin(2kt) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2t}{\pi} - 1 \right) \sin(2kt) dt$$

Calculons  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2t}{\pi} - 1 \right) \sin(2kt) dt$ .

$$\begin{cases} u'(t) = \sin(2kt) \\ v(t) = \frac{2t}{\pi} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{2k} \cos(2kt) \\ v'(t) = \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2t}{\pi} - 1 \right) \sin(2kt) dt = \left[ -\frac{1}{2k} \left( \frac{2t}{\pi} - 1 \right) \cos(2kt) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{t^2}{\pi} - t \right) \cos(2kt) dt = \left[ \frac{1}{2k} \left( \frac{t^2}{\pi} - t \right) \sin(2kt) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2k} \left( \left[ -\frac{1}{2k} \left( \frac{2t}{\pi} - 1 \right) \cos(2kt) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt) dt \right)$$

$$= \frac{1}{4k^2} - \frac{1}{k^2\pi} \left[ \frac{1}{2k} \sin(2kt) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4k^2}$$

Donc  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{t^2}{\pi} - t \right) \cos(2kt) dt = \frac{1}{4k^2}$ .

b. En déduire que  $S_n = 2I_n + \frac{\pi^2}{6}$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{t^2}{\pi} - t \right) \cos(2kt) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} S_n \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{t^2}{\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(2kt) dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{t^2}{\pi} - t \right) \left( \frac{\sin((2n+1)t)}{2\sin t} - \frac{1}{2} \right) dt = \frac{1}{4} S_n \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left( \frac{t^2}{\pi} - t \right)}{2\sin t} \sin((2n+1)t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{t^2}{\pi} - t \right) dt = \frac{1}{4} S_n$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left( \frac{t^2}{\pi} - t \right)}{2\sin t} \sin((2n+1)t) dt - \frac{1}{2} \left[ \frac{t^3}{3\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} S_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} I_n - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 - 3\pi^2}{24} = \frac{1}{4} S_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} I_n + \frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{4} S_n \Leftrightarrow S_n = 2I_n + \frac{\pi^2}{6}$$

D'où  $S_n = 2I_n + \frac{\pi^2}{6}$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2I_n + \frac{\pi^2}{6} \right) = 2 \times 0 + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

## Bac 2006 session complémentaire Énoncé

### Exercice N°1 :

Dans tout l'exercice :

- Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct (O;  $\vec{u}$ ;  $\vec{v}$ ) ;
- a est un nombre réel strictement positif ;
- A est le point de coordonnée (a,0) ;
- (D) est la droite d'équation  $x = a$  ;
- f est une fonction réelle strictement positive de variable réelle t, définie sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ .

Pour chaque valeur du paramètre t, on note  $s_t$  l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point  $M_t = s_t(M)$  d'affixe  $z_t$  telle que  $z_t = f(t)(\cos t + i \sin t)z$ .

1. a. Quelle est la nature de l'application  $s_t$  ? Donner ses éléments caractéristiques.

b. Donner les équations analytiques qui définissent  $s_t$  et celles qui définissent  $s_t^{-1}$  par rapport à (O;  $\vec{u}$ ;  $\vec{v}$ ) ( $s_t^{-1}$  est l'application réciproque de  $s_t$ ).

2. Dans cette question, on pose  $f(t) = \frac{1}{\cos t}$  pour tout  $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ .

- a. Montrer que si  $M \neq O$  alors  $\forall t \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  le triangle  $OMM_t$  est rectangle en  $M$ .
- b. Le point  $M$  étant fixe, quel est l'ensemble  $\Gamma(M)$  décrit par  $M_t$  lorsque  $t$  décrit  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .
- c. Montrer que l'image de la droite  $(D)$  par  $s_t$  est une droite  $(D_t)$  dont on donnera une équation cartésienne dépendant seulement de  $a$  et de  $\tan(t)$ .
3. Dans cette question, on pose  $f(t) = \cos t$  pour tout  $t \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .
- a. Montrer que si  $M \neq O$  alors  $\forall t \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  le triangle  $OMM_t$  est rectangle en  $M_t$ .
- b. Le point  $M$  étant fixe, quel est l'ensemble  $\Gamma'(M)$  décrit par  $M_t$  lorsque  $t$  décrit  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .
4. On suppose toujours que  $f(t) = \cos t$  avec  $t \neq 0$ . On note  $A_t = s_t(A)$ .
- a. Donner une mesure de l'angle  $(\overline{AM}; \overline{A_tM_t})$ .
- b. Soit  $H_t$  le point d'intersection des droites  $(AM)$  et  $(A_tM_t)$ . Montrer que les points  $O, H_t, A$  et  $A_t$  sont cocycliques.
- c. Montrer que les points  $O, H_t, M$  et  $M_t$  sont cocycliques. Quelle est la projection orthogonale de  $O$  sur la droite  $(AM)$  ?
- d. Soit  $(D_t)$  l'image de la droite  $(D)$  par  $s_t$ . Montrer que lorsque  $t$  varie,  $(D_t)$  passe par un point fixe.

**Exercice N°2 :**

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :  $(E_n) : (iz)^n = (z + 2i)^n$  où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

1. a. Déterminer et écrire sous forme trigonométrique les solutions  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $(E_2)$  où  $z_1$  est la solution telle que  $\operatorname{Re}(z_1) < 0$ .

b. Posons  $u = -\frac{\sqrt{2}}{2}z_1$ . Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N}, (u)^p + (\bar{u})^p = 2\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$  (où  $\bar{u}$  est le conjugué de  $u$ ).

c. On considère l'application  $f$  définie de l'ensemble des nombres complexes sur lui-même par :

$$f(z) = \sum_{p=0}^n C_n^p z^p \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right). \text{ Montrer que } f(z) = \frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n]$$

d. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $f(z) = 0$ .

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  les deux points  $A(-2i)$  et  $M(z)$  où  $z$  est un nombre complexe.

a. Montrer que si  $z$  est solution de  $(E_n)$  alors  $OM = AM$ .

b. En déduire que toute solution de  $(E_n)$  peut s'écrire sous la forme  $a-i$  où  $a$  est un réel.

3. a. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $(E_n)$ .

b. Montrer que les solutions de  $(E_n)$  peuvent s'écrire sous la forme :  $z_n = -i + \cotan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{n}\right)$  où  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

**Problème :****Partie A**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .

1. a. Déterminer l'ensemble  $D$  de définition de  $f$ .

b. Montrer que  $f$  est une fonction impaire.

c. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

d. Tracer la courbe représentative  $(C)$  de  $f$  dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 4 cm.

2. a. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $D$  sur  $\mathbb{R}$ .

b. Soit  $g$  la réciproque de  $f$ . Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

c. Tracer la courbe représentative  $(C')$  de  $g$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

3. Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre les deux courbes  $(C)$  et  $(C')$  et située dans le carré défini par :  $-1 \leq x \leq 1$  et  $-1 \leq y \leq 1$ .

**Partie B**

Pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $x \geq 0$ , on pose :  $I_n(x) = \int_0^x [g(t)]^n dt$  et on convient que  $[g(t)]^0 = 1$ .

1. a. Justifier l'existence de  $I_n(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall x \geq 0$ .

b. Calculer  $I_0(x)$  et  $I_1(x)$ .

c. Montrer que  $\forall p \geq 1$  et  $\forall x \geq 0$ , on a :  $0 \leq I_{2p}(x) \leq x[g(x)]^{2p}$ .

d. Déduire que  $\forall x \geq 0$ , la suite  $(I_n(x))$  est convergente et calculer sa limite.

2. a. Vérifier que  $\forall t \in \mathbb{R}$ , on a :  $[g(t)]^2 = 1 - g'(t)$ .

b. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall x \geq 0$ , on a :  $I_{n+2}(x) = I_n(x) - \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1}$ .

c. Déduire alors que  $\forall p \geq 1$  et  $\forall x \geq 0$ , on a :  $I_{2p}(x) = x - \left[ (g(x)) + \frac{1}{3}(g(x))^3 + \frac{1}{5}(g(x))^5 + \dots + \frac{1}{2p-1}(g(x))^{2p-1} \right]$ .

d. En déduire  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2p-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1} \right]$ .

## Partie C

Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $] -1, 1[$  par :  $h(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt$ .

1. a. Justifier la définition de  $h$  sur  $] -1, 1[$ .

b. Montrer que  $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ,  $\frac{t^2}{1-t^2} = a + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t}$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels à déterminer.

c. En déduire que  $\forall x \in ] -1, 1[$ ,  $h(x) = -x + f(x)$  où  $f$  est la fonction définie dans la partie A.

2. Etudier  $h$  et construire sa courbe représentative ( $C''$ ) dans un nouveau repère orthonormé.

3. a. Montrer que  $\forall x > 0$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln k$ .

b. En déduire que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln k$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln(n!)$ .

c. En déduire  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ;  $\ln(n!) \geq (n + \frac{1}{2}) \ln(n + \frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2} \ln 2$ .

4. Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2}) \ln(n) + n$ .

a. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n - U_{n+1} = (2n + 1) f(\frac{1}{2n+1}) - 1$ .

b. Montrer que  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n \geq \frac{1}{2} \ln 2$ .

c. En déduire alors que  $(U_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

## Solution

### Exercice N°1 :

Dans tout l'exercice :

- Le plan complexe  $(P)$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ;
- $a$  est un nombre réel strictement positif ;
- $A$  est le point de coordonnées  $(a, 0)$  ;
- $(D)$  est la droite d'équation  $x = a$  ;
- $f$  est une fonction réelle strictement positive de variable réelle  $t$ , définie sur  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

Pour chaque valeur du paramètre  $t$ , on note  $s_t$  l'application de  $(P)$  dans  $(P)$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  fait correspondre le point  $M_t = s_t(M)$  d'affixe  $z_t$  telle que  $z_t = f(t)(\cos t + isin t)z$ .

1. a. Quelle est la nature de l'application  $s_t$  ? Donner ses éléments caractéristiques :

$s_t : z_t = f(t)e^{it}z$ . Donc  $s_t$  est une similitude directe de centre  $O$ , de rapport  $f(t)$  et d'angle  $t$ .

b. Donner les équations analytiques qui définissent  $s_t$  et celles qui définissent  $s_t^{-1}$  par rapport à  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ( $s_t^{-1}$  est l'application réciproque de  $s_t$ ) :

$s_t : z_t = f(t)e^{it}z$  avec  $z = x+iy$  et  $z_t = x_t+iy_t$  où  $x; y; x_t$  et  $y_t$  des réels

$$\Leftrightarrow x_t+iy_t = f(t)(\cos t + isin t)(x+iy) \Leftrightarrow \begin{cases} x_t = f(t)(x \cos t - y \sin t) \\ y_t = f(t)(y \cos t + x \sin t) \end{cases}$$

$s_t^{-1}$  est une similitude directe de centre  $O$  de rapport  $\frac{1}{f(t)}$  et d'angle  $(-t)$ .

Donc  $s_t^{-1}$  admet une écriture complexe de la forme  $z'_t = \frac{1}{f(t)}e^{-it}z$  avec  $z = x+iy$  où  $x; y; x_t$  et  $y_t$  des réels

$$\Leftrightarrow x_t+iy_t = \frac{1}{f(t)}(\cos(-t) + isin(-t))(x+iy) \Leftrightarrow x_t+iy_t = \frac{1}{f(t)}(\cos t - isin t)(x+iy)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_t = \frac{1}{f(t)}(x \cos t + y \sin t) \\ y_t = \frac{1}{f(t)}(y \cos t - x \sin t) \end{cases}$$

2. Dans cette question, on pose  $f(t) = \frac{1}{\cos t}$  pour tout  $t \in ] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

a. Montrer que si  $M \neq O$  alors  $\forall t \in ] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  le triangle  $OMM_t$  est rectangle en  $M$  :

$$\begin{aligned} (\overline{MO}; \overline{MM_t}) &= \arg\left(\frac{z_t - z}{-z}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{z - z_t}{z}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{z - f(t)e^{it}z}{z}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{z(1 - f(t)e^{it})}{z}\right) [2\pi] \\ &= \arg(1 - f(t)e^{it}) [2\pi] = \arg\left(1 - \frac{1}{\cos t} e^{it}\right) [2\pi] = \arg\left(1 - \frac{1}{\cos t} (\cos t + isin t)\right) [2\pi] \\ &= \arg(1 - 1 - itant) [2\pi] \\ &= \arg(-itant) = \frac{\pi}{2} [\pi]. \end{aligned}$$

Donc le triangle  $OMM_t$  est rectangle en  $M$ .

b. Le point  $M$  étant fixe, quel est l'ensemble  $\Gamma(M)$  décrit par  $M_t$  lorsque  $t$  décrit  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  :

Si  $M$  est fixe alors  $M_t$  décrit la droite perpendiculaire en  $M$  à  $(OM)$ . D'où  $\Gamma(M)$  est la droite perpendiculaire en  $M$  à  $(OM)$ .

c. Montrer que l'image de la droite (D) par  $s_t$  est une droite  $(D_t)$  dont on donnera une équation cartésienne dépendant seulement de  $a$  et de  $\tan(t)$  :

$$M \in (D) \Rightarrow M(a; y) \Rightarrow M_t = s_t(M) \text{ a pour coordonnées } \Leftrightarrow \begin{cases} x_t = \frac{1}{\cos t} (a \cos t - y \sin t) \\ y_t = \frac{1}{\cos t} (y \cos t + a \sin t) \end{cases} \Rightarrow x_t + y_t \tan t = a - a \tan^2 t$$

Donc l'image de la droite (D) par  $s_t$  est une droite  $(D_t)$  d'équation  $x_t + y_t \tan t = a - a \tan^2 t$ .

3. Dans cette question, on pose  $f(t) = \cos t$  pour tout  $t \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

a. Montrer que si  $M \neq O$  alors  $\forall t \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  le triangle  $OMM_t$  est rectangle en  $M_t$  :

$$\begin{aligned} (\overline{M_t O}; \overline{M_t M}) &= \arg\left(\frac{z_t - z_t}{-z_t}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{z_t - z}{z_t}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{\cos t e^{it} z - z}{\cos t e^{it} z}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{z(\cos t e^{it} - 1)}{\cos t e^{it} z}\right) [2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{\cos t e^{it} - 1}{\cos t e^{it}}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{\cos t (\cos t + i \sin t) - 1}{\cos t (\cos t + i \sin t)}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{\cos^2 t + i \cos t \sin t - 1}{\cos^2 t + i \cos t \sin t}\right) [2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{\cos^2 t + i \cos t \sin t - \cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t + i \cos t \sin t}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{i \cos t \sin t - \sin^2 t}{\cos^2 t + i \cos t \sin t}\right) [2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{i \sin t (\cos t + i \sin t)}{\cos t (\cos t + i \sin t)}\right) [2\pi] = \arg(it \sin t) [2\pi] = \frac{\pi}{2} [\pi]. \end{aligned}$$

Donc le triangle  $OMM_t$  est rectangle en  $M_t$ .

b. Le point  $M$  étant fixe, quel est l'ensemble  $\Gamma'(M)$  décrit par  $M_t$  lorsque  $t$  décrit  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  :

Si  $M$  est fixe, on a  $M \neq O$  ;  $(\overline{M_t O}; \overline{M_t M}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$ , alors  $M_t$  décrit le cercle de diamètre  $[OM]$  privé de  $O$  et  $M$ .

D'où  $\Gamma'(M)$  est le cercle de diamètre  $[OM]$  privé de  $O$  et  $M$ .

4. On suppose toujours que  $f(t) = \cos t$  avec  $t \neq 0$ . On note  $A_t = s_t(A)$ .

a. Donner une mesure de l'angle  $(\overline{AM}; \overline{A_t M_t})$  :

$$(\overline{AM}; \overline{A_t M_t}) = \arg\left(\frac{z_t - z_{A_t}}{z - z_A}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{\cos t e^{it} z - \cos t e^{it} a}{z - a}\right) [2\pi] = \arg(\cos t e^{it}) [2\pi] = t [2\pi].$$

b. Soit  $H_t$  le point d'intersection des droites  $(AM)$  et  $(A_t M_t)$ . Montrer que les points  $O, H_t, A$  et  $A_t$  sont cocycliques :

On a d'une part :  $(\overline{H_t A}; \overline{H_t A_t}) = (\overline{AM}; \overline{A_t M_t}) [\pi] = t [\pi]$ .

D'autre part :  $(\overline{OA}; \overline{OA_t}) = t [2\pi]$ .

$$(\overline{H_t A}; \overline{H_t A_t}) = (\overline{AM}; \overline{A_t M_t}) [\pi] = t [\pi] \Rightarrow (\overline{H_t M}; \overline{H_t M_t}) = (\overline{OA}; \overline{OA_t}) [\pi].$$

D'où les points  $O, H_t, A$  et  $A_t$  sont cocycliques.

c. Montrer que les points  $O, H_t, M$  et  $M_t$  sont cocycliques. Quelle est la projection orthogonale de  $O$  sur la droite  $(AM)$  ?

On a d'une part :  $(\overline{H_t M}; \overline{H_t M_t}) = (\overline{AM}; \overline{A_t M_t}) [\pi] = t [\pi]$ .

D'autre part :  $(\overline{OM}; \overline{OM_t}) = t [2\pi]$ .

$$(\overline{H_t M}; \overline{H_t M_t}) = (\overline{AM}; \overline{A_t M_t}) [\pi] = t [\pi] \Rightarrow (\overline{H_t M}; \overline{H_t M_t}) = (\overline{OM}; \overline{OM_t}) [\pi].$$

D'où les points  $O, H_t, M$  et  $M_t$  sont cocycliques.

Les points  $O, H_t, M$  et  $M_t$  sont cocycliques  $\Rightarrow (\overline{M_t O}; \overline{M_t M}) = (\overline{H_t O}; \overline{H_t M}) [\pi]$ , or le triangle  $H_t OM$  est rectangle en  $H_t$  alors le projeté orthogonal de  $O$  sur la droite  $(AM)$  est le point  $H_t$ .

d. Soit  $(D_t)$  l'image de la droite (D) par  $s_t$ . Montrer que lorsque  $t$  varie,  $(D_t)$  passe par un point fixe :

Le projeté orthogonal de  $O$  sur  $\Delta$  est le point d'intersection de  $\Delta$  et  $(D_t)$ , donc  $A$  est le point d'intersection de  $\Delta$  et  $(D_t)$ , d'où  $(D_t)$  passe par le point fixe  $A$  lorsque  $t$  varie.

### Exercice N°2 :

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :  $(E_n) : (iz)^n = (z + 2i)^n$  où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

1. a. Déterminer et écrire sous forme trigonométrique les solutions  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation  $(E_2)$  où  $z_1$  est la solution telle que  $\operatorname{Re}(z_1) < 0$  :

$$(E_2) : (iz)^2 = (z + 2i)^2 \Leftrightarrow -z^2 = z^2 + 4iz - 4 \Leftrightarrow 2z^2 + 4iz - 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2iz - 2 = 0.$$

$$\Delta = i^2 - 1(-2) = 1 \Rightarrow z_1 = -1 - i; z_2 = 1 - i \Rightarrow z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right); z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

b. Posons  $u = -\frac{\sqrt{2}}{2} z_1$ . Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N}, (u)^p + (\bar{u})^p = 2 \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$  (où  $\bar{u}$  est le conjugué de  $u$ ) :

$$u = -\frac{\sqrt{2}}{2} z_1 = u = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -e^{i\frac{5\pi}{4}} = -e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$(u)^p + (\bar{u})^p = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^p + \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^p = e^{i\frac{p\pi}{4}} + e^{-i\frac{p\pi}{4}} = \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{p\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{p\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$$

c. On considère l'application  $f$  définie de l'ensemble des nombres complexes sur lui-même par :

$$f(z) = \sum_{p=0}^n C_n^p z^p \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right). \text{ Montrer que } f(z) = \frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n] :$$

$$\frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{p=0}^n C_n^p u^p z^p + \sum_{p=0}^n C_n^p (\bar{u})^p z^p \right] = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n C_n^p (u^p + (\bar{u})^p) z^p = \sum_{p=0}^n C_n^p z^p \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) = f(z)$$

D'où  $f(z) = \frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n]$ .

d. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $f(z) = 0$  :

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n] = 0 \Leftrightarrow (1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n = 0 \Leftrightarrow (1+uz)^n = -(1+\bar{u}z)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+uz)^n}{(1+\bar{u}z)^n} = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{1+uz}{1+\bar{u}z}\right)^n = -1 \Leftrightarrow Z^n = -1 \text{ avec Soit } Z = \frac{1+uz}{1+\bar{u}z} \Leftrightarrow Z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}} \text{ où } k \text{ un entier } 0 \leq k \leq n-1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+uz}{1+\bar{u}z} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}} - 1}{u - \bar{u}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}}} \text{ où } k \text{ un entier } 0 \leq k \leq n-1.$$

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  les deux points  $A(-2i)$  et  $M(z)$  où  $z$  est un nombre complexe.

a. Montrer que si  $z$  est solution de  $(E_n)$  alors  $OM = AM$  :

$$z \text{ est solution de } (E_n) \Leftrightarrow (iz)^n = (z+2i)^n \Leftrightarrow |(iz)^n| = |(z+2i)^n| \Leftrightarrow |iz|^n = |z+2i|^n \Leftrightarrow |i|^n |z|^n = |z+2i|^n \Leftrightarrow |z|^n = |z+2i|^n$$

$$\Leftrightarrow |z|^n = |z+2i|^n \Leftrightarrow |z| = |z+2i| \Leftrightarrow |z-0| = |z-(-2i)| \Leftrightarrow OM = AM.$$

b. En déduire que toute solution de  $(E_n)$  peut s'écrire sous la forme  $a-i$  où  $a$  est un réel :

$$z \text{ est solution de } (E_n) \Rightarrow M \in \text{med}[OA] \Rightarrow \text{Im}(z) = -1 \text{ (la médiatrice de } [OA] \text{ est la droite d'équation } y = -1) \Rightarrow z = a-i \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

3. a. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $(E_n)$  :

$$(iz)^n = (z+2i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{iz}{z+2i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{iz}{z+2i}\right)^n = -1 \Leftrightarrow T^n = 1 \text{ avec Soit } T = \frac{iz}{z+2i} \Leftrightarrow T = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ où } k \text{ un entier } 0 \leq k \leq n-1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{iz}{z+2i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z = \frac{2ie^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \text{ où } k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}.$$

b. Montrer que les solutions de  $(E_n)$  peuvent s'écrire sous la forme :  $z_n = -i + \cotan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{n}\right)$  où  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  :

$$\text{On a : } z_n = \frac{2ie^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{2ie^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 + ie^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{2e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{2\cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{e^{i\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right)}}{\cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\text{Or } \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \text{ et } \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \Rightarrow \cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\Rightarrow z_n = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right)}{-\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right)} = -i - \cotan\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right) = -i + \cotan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{n}\right) \text{ où } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

**Problème :**

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .

1. a. Déterminer l'ensemble  $D$  de définition de  $f$  :

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in ]-1; 1[. \text{ Donc } D = ]-1; 1[.$$

b. Montrer que  $f$  est une fonction impaire :

$$\forall x \in D; -x \in D.$$

$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x). \text{ Donc } f \text{ est impaire.}$$

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

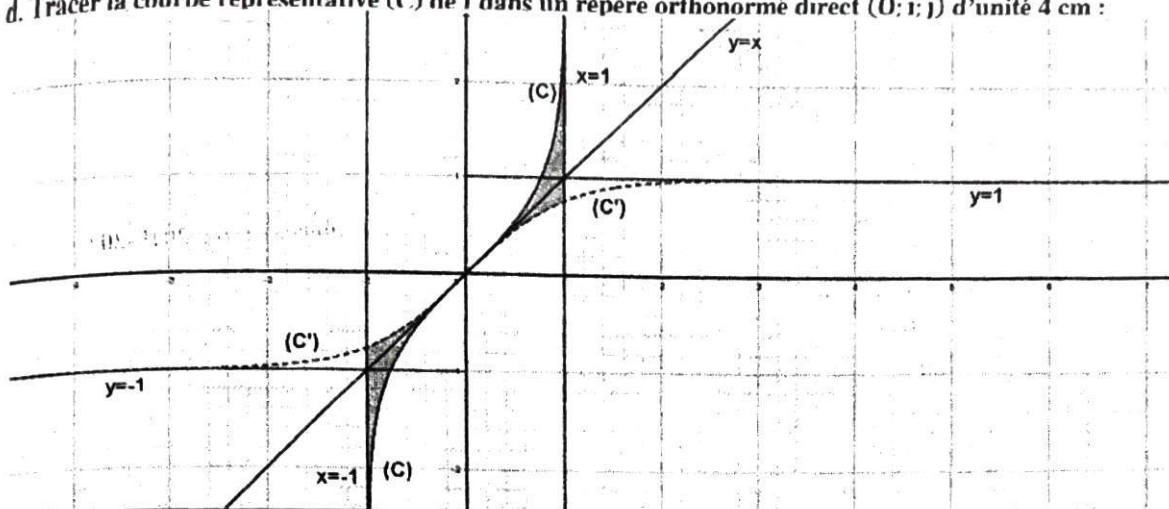
$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\infty. \text{ car } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1+x}{1-x} = 0^+.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = +\infty. \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{1+x} = 0^+.$$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | -1        | 1         |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

d. Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé direct (O; i; j) d'unité 4 cm :



|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| x       | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | +         |
| $g(x)$  |           | 1         |

-1

2. a. Montrer que f réalise une bijection de D sur  $\mathbb{R}$  :

f est continue et strictement croissante sur  $D = ]-1; 1[$  donc f réalise une bijection de  $]-1; 1[$  sur  $\mathbb{R}$ .

b. Soit g la réciproque de f. Montrer que pour tout réel x,  $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  :

$$g(y) = x \Leftrightarrow g^{-1}(x) = y \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in ]-1; 1[.$$

$$g(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+y}{1-y} \right) = x \Leftrightarrow \ln \left( \frac{1+y}{1-y} \right) = 2x \Leftrightarrow \frac{1+y}{1-y} = e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y \Leftrightarrow (e^{2x} + 1)y = e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Leftrightarrow g^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

D'où  $\forall x \in \mathbb{R}; g^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

c. Tracer la courbe représentative (C') de g dans le repère (O; i; j) (voir la figure précédente).

3. Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre les deux courbes (C) et (C') et située dans le carré défini par :  $-1 \leq x \leq 1$  et  $-1 \leq y \leq 1$  :

Soit A l'aire demandée. Alors on a :

$$A = 16 \text{cm}^2 \left( 4 \int_0^1 [x - g(x)] dx \right) = 64 \text{cm}^2 \int_0^1 [x - g(x)] dx$$

$$\int_0^1 \left[ x - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right] dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 - \ln(e^x + e^{-x}) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \ln(e + e^{-1}) + \ln 2$$

$$= \ln \sqrt{e} - \ln e^{-1}(e^2 + 1) + \ln 2 = \ln \sqrt{e} + \ln \left( \frac{e}{e^2 + 1} \right) + \ln 2.$$

$$= \ln \left( \frac{2e\sqrt{e}}{e^2 + 1} \right).$$

D'où  $A = 64 \ln \left( \frac{2e\sqrt{e}}{e^2 + 1} \right) \text{cm}^2$

**Partie B**

Pour tout entier naturel n et pour tout  $x \geq 0$ , on pose :  $I_n(x) = \int_0^x [g(t)]^n dt$  et on convient que  $[g(t)]^0 = 1$ .

1. a. Justifier l'existence de  $I_n(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall x \geq 0$  :

La fonction  $t \rightarrow [g(t)]^n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $I_n(x) = \int_0^x [g(t)]^n dt$  existe  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall x \geq 0$ .

b. Calculer  $I_0(x)$  et  $I_1(x)$  :

$$I_0(x) = \int_0^x [g(t)]^0 dt = \int_0^x 1 dt = [t]_0^x = x.$$

$$I_1(x) = \int_0^x [g(t)]^1 dt = \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt = [\ln(e^t + e^{-t})]_0^x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 = \ln \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right).$$

c. Montrer que  $\forall p \geq 1$  et  $\forall x \geq 0$ , on a :  $0 \leq I_{2p}(x) \leq x[g(x)]^{2p}$  :

$$\forall p \geq 1 \text{ et } \forall x \geq 0; \text{ on a } 0 \leq t \leq x \text{ et } g \text{ est croissante } \Rightarrow g(0) \leq g(t) \leq g(x) \Leftrightarrow 0 \leq (g(t))^{2p} \leq (g(x))^{2p}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^x [g(t)]^{2p} dt \leq \int_0^x [g(x)]^{2p} dt \Leftrightarrow 0 \leq I_{2p}(x) \leq x[g(x)]^{2p}$$

d. Dédurre que  $\forall x \geq 0$ , la suite  $(I_n(x))$  est convergente et calculer sa limite :

$$\forall t \geq 0; g(t) \in [0; 1[ \Rightarrow 0 \leq [g(t)]^{n+1} \leq [g(t)]^n < 1 \Rightarrow \forall x \geq 0; 0 \leq \int_0^x [g(t)]^{n+1} dt \leq \int_0^x [g(t)]^n dt < 1 \Rightarrow 0 \leq I_{n+1}(x) \leq I_n(x).$$

Donc  $(I_n(x))$  est décroissante et minorée.

$(I_n(x))$  est convergente car elle est décroissante et minorée.

$\forall x \geq 0; g(x) \in [0; 1[ \Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} [g(x)]^{2p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} [g(x)]^n = 0$  alors d'après TG  $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_{2p}(x) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = 0$ .

2. a. Vérifier que  $\forall t \in \mathbb{R}$ , on a :  $[g(t)]^2 = 1 - g'(x)$  :

$$g'(t) = \frac{(e^t + e^{-t})(e^t + e^{-t}) - (e^t - e^{-t})(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2}$$

$$= 1 - \frac{(e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2} = 1 - [g(t)]^2$$

Donc  $[g(t)]^2 = 1 - g'(x)$ .

b. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall x \geq 0$ , on a :  $I_{n+2}(x) = I_n(x) - \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1}$  :

$$I_{n+2}(x) = \int_0^x [g(t)]^{n+2} dt = \int_0^x [g(t)]^2 [g(t)]^n dt = \int_0^x (1 - g'(x)) [g(t)]^n dt = \int_0^x [g(t)]^n dt - \int_0^x g'(x) [g(t)]^n dt$$

$$= I_n(x) - \frac{1}{n+1} [g(t)]_{0}^x = I_n(x) - \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1}.$$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall x \geq 0$ , on a :  $I_{n+2}(x) = I_n(x) - \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1}$ .

c. Dédurre alors que  $\forall p \geq 1$  et  $\forall x \geq 0$ , on a :  $I_{2p}(x) = x - \left[ (g(x)) + \frac{1}{3}(g(x))^3 + \frac{1}{5}(g(x))^5 + \dots + \frac{1}{2p-1}(g(x))^{2p-1} \right]$  :

$$I_2(x) = I_0(x) - \frac{1}{1} [g(x)]^1$$

$$I_4(x) = I_2(x) - \frac{1}{3} [g(x)]^3$$

$$I_6(x) = I_4(x) - \frac{1}{5} [g(x)]^5$$

$$\dots$$

$$I_{2p}(x) = I_{2p-2}(x) - \frac{1}{2p-1} [g(x)]^{2p-1}$$

$$I_{2p}(x) = I_0(x) - \left[ (g(x)) + \frac{1}{3}(g(x))^3 + \frac{1}{5}(g(x))^5 + \dots + \frac{1}{2p-1}(g(x))^{2p-1} \right]$$

$$= x - \left[ (g(x)) + \frac{1}{3}(g(x))^3 + \frac{1}{5}(g(x))^5 + \dots + \frac{1}{2p-1}(g(x))^{2p-1} \right]$$

d. En déduire  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2p-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1} \right]$  :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln \sqrt{2} \Rightarrow g(\ln \sqrt{2}) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow I_{2p}(\ln \sqrt{2}) = \ln \sqrt{2} - \left[ (g(\ln \sqrt{2})) + \frac{1}{3}(g(\ln \sqrt{2}))^3 + \frac{1}{5}(g(\ln \sqrt{2}))^5 + \dots + \frac{1}{2p-1}(g(\ln \sqrt{2}))^{2p-1} \right]$$

$$= \ln \sqrt{2} - \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2p-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2p-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1} = \ln \sqrt{2} - I_{2p}(\ln \sqrt{2}).$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2p-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1} \right] = \lim_{p \rightarrow +\infty} [\ln \sqrt{2} - I_{2p}(\ln \sqrt{2})]$$

$$= \ln \sqrt{2} - \lim_{p \rightarrow +\infty} I_{2p}(\ln \sqrt{2})$$

$$= \ln \sqrt{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\ln \sqrt{2})$$

$$= \ln \sqrt{2}$$

Partie C

Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $] -1, 1[$  par :  $h(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt$ .

1. a. Justifier la définition de  $h$  sur  $] -1, 1[$  :

La fonction  $t \mapsto \frac{t^2}{1-t^2}$  est continue sur  $] -1, 1[$ , donc  $h$  est bien définie sur  $] -1, 1[$ .

b. Montrer que  $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ,  $\frac{t^2}{1-t^2} = a + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t}$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels à déterminer :

$$\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{t^2 - 1 + 1}{1-t^2} = -1 + \frac{1}{1-t^2} = 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{(1+t) + (1-t) + 1}{1-t^2} \right] = 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1+t}{1-t^2} + \frac{1-t}{1-t^2} \right] = 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1+t}{1-t^2} + \frac{1-t}{1-t^2} \right] = 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right] = -1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+t}$$

$$\frac{t^2}{1-t^2} = -1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} \Rightarrow a = -1; b = \frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{2}.$$

c. En déduire que  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $h(x) = -x + f(x)$  où  $f$  est la fonction définie dans la partie A :

$$h(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt = \int_0^x \left( -1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t} \right) dt = \left[ -t - \frac{1}{2} \ln(1-t) + -\frac{1}{2} \ln(1+t) \right]_0^x = \left[ -t + \frac{1}{2} (\ln(1+t) - \ln(1-t)) \right]_0^x$$

$$= \left[ -t + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) \right]_0^x = -x + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

Donc  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $h(x) = -x + f(x)$ .

2. Etudier  $h$  et construire sa courbe représentative ( $C''$ ) dans un nouveau repère orthonormé :

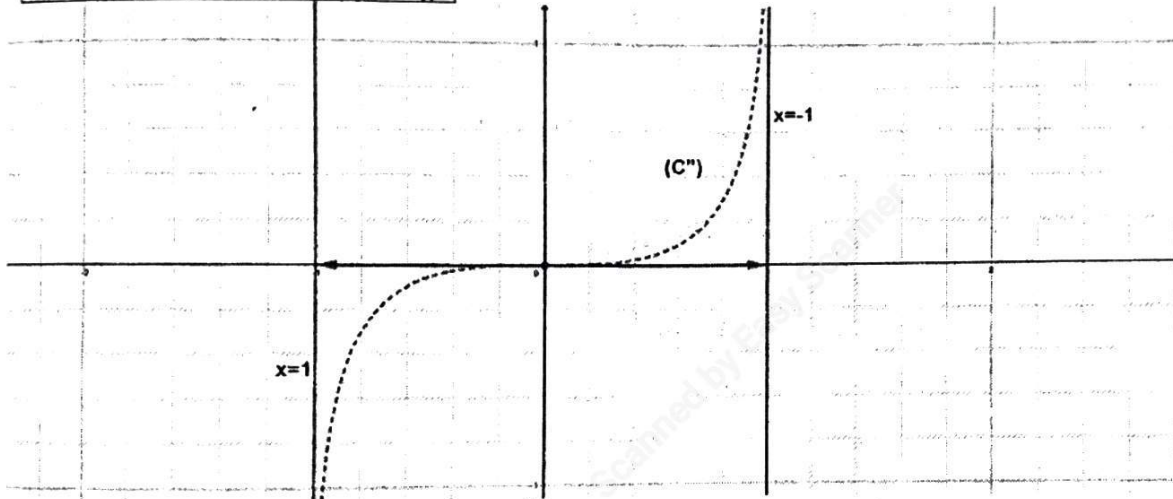
$$h'(x) = -1 + f'(x) = -1 + \frac{1}{1-x^2} = \frac{x^2}{1-x^2} \geq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x + f(x)) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + f(x)) = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

|       |    |       |         |
|-------|----|-------|---------|
| x     | -1 | 0     | 1       |
| h'(x) |    | + 0 + |         |
| h(x)  |    |       | +\infty |

-\infty \swarrow \quad \searrow \nearrow +\infty



3. a. Montrer que  $\forall x > 0$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln k$  :

$$x > 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ on pose : } u(x) = \ln x - \frac{x}{k} + 1 - \ln k \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{k} = \frac{k-x}{kx}$$

|       |   |       |         |
|-------|---|-------|---------|
| x     | 0 | k     | +\infty |
| u'(x) |   | + 0 - |         |
| u(x)  |   | 0     |         |

$$u(k) = \ln k - \frac{k}{k} + 1 - \ln k = 0.$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* ; u(x) \leq 0 \Rightarrow \ln x - \frac{x}{k} + 1 - \ln k \leq 0 \Rightarrow \ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln k.$$

D'où  $\forall x > 0$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln k$

b. En déduire que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln k$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln(n!)$  :

$$\forall x > 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ on a : } \ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln k \Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left( \frac{x}{k} - 1 + \ln k \right) dx$$

$$\Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \left[ \frac{x^2}{2k} - x + (\ln k)x \right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{2k} - k - \frac{1}{2} + (\ln k) \left( k + \frac{1}{2} \right) - \frac{(k-\frac{1}{2})^2}{2k} + k - \frac{1}{2} - (\ln k) \left( k - \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq 1 - 1 + \ln k \Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln k.$$

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ on a : } \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln k.$$

$$\text{Si } k=1; \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \ln x \, dx \leq \ln 1$$

$$\text{Si } k=2; \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{2}} \ln x \, dx \leq \ln 2$$

$$\text{Si } k=3; \int_{\frac{3}{5}}^{\frac{7}{2}} \ln x \, dx \leq \ln 3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{Si } k=n; \int_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \ln x \, dx \leq \ln n$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \ln x \, dx + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{2}} \ln x \, dx + \int_{\frac{3}{5}}^{\frac{7}{2}} \ln x \, dx + \dots + \int_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \ln x \, dx \leq \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \ln x \, dx \leq \ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \ln x \, dx \leq \ln(n!).$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \ln x \, dx \leq \ln(n!).$$

$$\text{c. En déduire } \forall n \in \mathbb{N}^*; \ln(n!) \geq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2} \ln 2 :$$

$$\text{On a } : \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \ln x \, dx \leq \ln(n!).$$

$$\text{Or } \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \ln x \, dx = [x \ln x - x]_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - n - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*; \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2} \ln 2 \leq \ln(n!).$$

$$4. \text{ Soit } (U_n)_{n \geq 1} \text{ la suite définie sur } \mathbb{N}^* \text{ par : } U_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n.$$

$$\text{a. Montrer que } \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n - U_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 1 :$$

$$\begin{aligned} U_n - U_{n+1} &= \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n - \ln((n+1)!) + \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) - n - 1. \\ &= -\ln(n+1) + \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) - 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1 \\ &= (2n+1) \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Or } f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n - U_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 1.$$

$$\text{b. Montrer que } \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq \frac{1}{2} \ln 2 :$$

$$\text{On a } \ln(n!) \geq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2} \ln 2 \text{ et } \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \geq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n$$

$$\Rightarrow \ln(n!) \geq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n \geq \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$\text{c. En déduire alors que } (U_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente :}$$

$$U_n - U_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 1 = (2n+1) \left(f\left(\frac{1}{2n+1}\right) - \frac{1}{2n+1}\right) = (2n+1)h\left(\frac{1}{2n+1}\right) \geq 0 \text{ car } h(x) \geq 0, \forall x \geq 0.$$

$$\begin{cases} U_n \geq \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow (U_n)_{n \geq 1} \text{ est minorée} \\ U_n - U_{n+1} \geq 0 \Rightarrow (U_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante} \end{cases} \Rightarrow (U_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente.}$$

# Bac 2005 session normale

## Énoncé

### Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. On pose  $P(z) = z^3 - (5 + 7i)z^2 + (-6 + 26i)z + 24 - 24i$  où  $z$  est un nombre complexe.

a. Montrer que l'équation  $P(z)=0$  admet une solution imaginaire pure.

b. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $P(z)=0$ .

2. Soient  $A$ ;  $B$  et  $C$  les images des solutions de l'équation  $P(z)=0$  avec  $|z_A| < |z_B| < |z_C|$ .

a. Placer les points  $A$ ;  $B$  et  $C$  et montrer que  $O$ ;  $A$ ;  $B$  et  $C$  sont cocycliques.

b. Calculer l'affixe de  $G = \text{bar}\{(O; 5); (A; -3); (C; 4)\}$  et vérifier que  $G$  est le milieu de  $[AB]$ .

c. Déterminer puis représenter l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $\frac{z-2}{z-4i}$  imaginaire pur.

3. Pour tout point  $M$  du plan on pose  $\varphi(M) = 5MO^2 - 3MA^2 + 4MC^2$  et soit  $\Gamma_k$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $\varphi(M) = k$  où  $k$  un réel.

a. Discuter, suivant les valeurs de  $k$  la nature de  $\Gamma_k$ .

b. Reconnaître et construire  $\Gamma_{60}$ .

4. Soit  $f$  l'application qui associe à chaque point  $M(x; y)$  d'affixe  $z$  le point  $M'(x'; y')$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{3z-\bar{z}}{4}$ . ( $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$ ) et soit  $\Gamma$  le cercle d'équation  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ .

a. Ecrire  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

b. Donner une équation cartésienne de l'ensemble  $\Gamma'$  image du cercle  $\Gamma$  par l'application  $f$ .

c. Montrer que  $\Gamma'$  est une ellipse dont on déterminera le centre, les sommets et l'excentricité.

5. Représenter  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sur la figure précédente.

### Exercice N°2 :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $f_n$  la fonction numérique définie pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{x^n}$ , on désigne par  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 5 cm.

1. Dresser le tableau de variation de  $f_n$ .

2. a. Montrer que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par un point fixe  $A$ , dont on déterminera les coordonnées et que ces courbes  $(C_n)$  admettent la même tangente en  $A$ .

b. Étudier la position relative de  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$ .

c. Soit  $M_n$  le point de  $(C_n)$  en lequel la tangente est horizontale. Montrer que tous les points  $M_n$  sont situés sur une branche d'une courbe dont on donnera une équation.

3. Tracer  $(C_3)$ .

4. Dans cette question on pose :  $f = f_3$  et pour tout  $n \geq 2$  :  $S_n = \sum_{k=2}^n f(k) = \frac{\ln 2}{2^3} + \frac{\ln 3}{3^3} + \dots + \frac{\ln n}{n^3}$ .

a. Montrer que pour tout  $k \geq 2$  on a :  $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$ .

b. Montrer que pour tout  $n \geq 2$  on a :  $S_n - \frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^3}$ .

c. En déduire que pour tout  $n \geq 2$  on a :  $\int_2^n f(x) dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln 2}{8}$ .

d. Calculer  $\int_2^n f(x) dx$ , en déduire que la suite  $(S_n)$  est convergente.

e. On pose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lambda$ , montrer que  $\frac{\ln(2\sqrt{e})}{8} < \lambda < \frac{\ln(4\sqrt{e})}{8}$ .

### Problème :

Dans le plan orienté, on considère un carré direct  $ABCD$  de côté  $a$ .

Soit  $M$  un point variable du segment  $[AC]$ . Soient  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et  $H$  les projetés orthogonaux respectifs de  $M$  sur  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ . Dans tout le problème,  $M$  est distinct de  $A$  et de  $C$ .

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

#### Partie A

Dans cette partie on se propose de démontrer par deux méthodes que lorsque  $M$  varie sur  $[AC]$ , les droites  $(DM)$ ,  $(CE)$  et  $(AF)$  d'une part et les droites  $(BM)$ ,  $(CH)$  et  $(AG)$  d'autre part restent concourantes.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre  $AB=8$ cm et la droite  $(AB)$  horizontale).

2. Utilisation d'homothéties

Pour une position donnée de  $M$  sur  $[AC]$ , on désigne par  $P$  le point d'intersection des droites  $(AF)$  et  $(CE)$ . On considère deux homothéties  $h_1$  et  $h_2$  de même centre  $P$  telles que  $h_1$  transforme  $A$  en  $F$  et  $h_2$  transforme  $C$  en  $E$ .

- Déterminer l'image de la droite (AD) par  $h_1$ ;
- Déterminer l'image de la droite (BC) par  $h_2$ ;
- Déterminer l'image de la droite (AD) par  $h_2 \circ h_1$ ;
- Déterminer l'image de la droite (DC) par  $h_1 \circ h_2$ ;
- En déduire que, quelque soit la position de M sur [AC], les droites (DM), (CE) et (AF) restent concourantes.

3. Utilisation d'une rotation vectorielle

On considère la rotation vectorielle  $\varphi$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

- Prouver que  $\varphi(\overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AF}$ . En déduire que les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.
- Trouver  $\varphi(\overrightarrow{DF})$  et  $\varphi(\overrightarrow{DM})$ . En déduire que, quelque soit la position de M sur [AC], les droites (DM), (CE) et (AF) restent concourantes.
- Déduire de ce qui précède, en utilisant une réflexion appropriée, que quelque soit la position de M sur [AC], les droites (BM), (CH) et (AG) restent concourantes.

#### Partie B

Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  les cercles de diamètres respectifs [FM], [ME], [GA] et [CH].

On se propose dans cette partie, de démontrer que lorsque M varie sur [AC], les cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  restent concourantes.

- Pour une position donnée de M sur [AC], on désigne par  $\Omega$  le point d'intersection de (DM) et (EF).
  - Prouver qu'il existe une unique similitude directe  $s$  de centre  $\Omega$  qui transforme M en F.
- Déterminer l'angle de  $s$  et montrer que  $s(E) = M$ .
- Déterminer l'image du carré AEMH par la similitude  $s$ .
- En déduire que lorsque le point M varie sur [AC], les cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  restent concourantes.
- Sur la figure précédente, déduire un ensemble de quatre autres cercles qui possèdent la même propriété.

#### Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier un ensemble de carrés.

- Sur une nouvelle figure placer les points  $O_1, O_2, I$  et J milieux respectifs des segments [CM], [AM], [BM] et [DM]. Montrer que le quadrilatère  $O_1O_2I$  est un carré et que son aire est constante quelque soit la position de M sur [AC].
- Déterminer le lieu géométrique du point J lorsque M varie sur [AC].
- On considère les deux points S et T tels que le quadrilatère SGTH soit un carré direct.
  - Montrer que lorsque M varie sur [AC], alors le point S reste fixe puis le placer sur la figure.
  - Déterminer et représenter le lieu géométrique du point T lorsque M varie sur [AC].
- On pose  $AE = x$  avec  $0 < x < a$ . Soit  $f(x)$  l'aire de la partie délimitée par les deux carrés  $O_1O_2I$  et SGTH.
  - Calculer l'aire du carré SGTH en fonction de  $x$  et  $a$ .
  - En déduire  $f(x)$  en fonction de  $x$  et  $a$ .
  - Quelle est la position du point M pour laquelle la surface commune  $f(x)$  est minimale ?

#### Partie D

Dans cette partie on considère que le point M est fixé au centre du carré ABCD. On se propose d'étudier deux tangentes communes à deux coniques : la parabole  $\mathcal{P}$  de sommet H et de directrice (CD) et l'ellipse  $\mathcal{E}$  de foyers A et B et de longueur du grand axe  $a\sqrt{2}$ .

- Faire une nouvelle figure, déterminer le foyer de  $\mathcal{P}$  et montrer que B appartient à  $\mathcal{P}$ .
  - Montrer que M est un sommet de l'ellipse  $\mathcal{E}$ . Construire les autres sommets et justifier la construction.
- Montrer que la droite (FH) est une tangente commune à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{E}$ .
- Soit  $(\Delta)$  la droite passant par F et orthogonale à (AF) et  $(\Delta')$  la passant par B et orthogonale à (BD) et soit N le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ .
  - Montrer que  $(\Delta)$  est une tangente à  $\mathcal{P}$  et déterminer leur point de contact.
  - Montrer que  $(\Delta)$  est la tangente à  $\mathcal{E}$  en N.
  - Représenter  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{P}$  sur la figure.

## Solution

### Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. On pose  $P(z) = z^3 - (5 + 7i)z^2 + (-6 + 26i)z + 24 - 24i$  où  $z$  est un nombre complexe.

a. Montrer que l'équation  $P(z)=0$  admet une solution imaginaire pure :

soit  $z_0 = \alpha i$  une solution imaginaire pure de  $P(z)$  :

$$(\alpha i)^3 - (5 + 7i)(\alpha i)^2 + (-6 + 26i)(\alpha i) + 24 - 24i = 0 \Rightarrow -\alpha^3 i + 5\alpha^2 + 7i\alpha^2 - 26\alpha - 6\alpha i + 24 - 24i = 0$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 - 26\alpha + 24 + (-\alpha^3 + 7\alpha^2 - 6\alpha - 24)i = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5\alpha^2 - 26\alpha + 24 = 0 & (1) \\ -\alpha^3 + 7\alpha^2 - 6\alpha - 24 = 0 & (2) \end{cases}$$

Réolvons l'équation  $5\alpha^2 - 26\alpha + 24 = 0$

$$\Delta = 676 - 480 = 196 \Rightarrow \alpha = \frac{26+14}{10} = 4 \text{ ou } \alpha = \frac{26-14}{10} = 1, 2$$

La valeur 4 est solution de la deuxième équation tandis que 1,2 ne l'est pas. D'où  $4i$  est une solution imaginaire pure  $P(z)$ .

b. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation  $P(z)=0$  :

Déterminons les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  :

$$P(z) = (z - 4i)(z^2 + az + b) :$$

|      |           |            |             |
|------|-----------|------------|-------------|
| 1    | $-5 - 7i$ | $-6 + 26i$ | $24 - 24i$  |
| $4i$ | $4i$      | $12 - 20i$ | $-24 + 24i$ |
| 1    | $-5 - 3i$ | $6 + 6i$   | 0           |
|      | $a$       | $b$        |             |

Donc  $a = -5 - 3i$  et  $b = 6 + 6i$

D'où  $P(z) = (z - 4i)(z^2 - (5 + 3i)z + 6 + 6i)$ .

$$P(z)=0 \Leftrightarrow (z - 4i)(z^2 - (5 + 3i)z + 6 + 6i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z - 4i = 0 \\ z^2 - (5 + 3i)z + 6 + 6i = 0 \end{cases}$$

$$\bullet z - 4i = 0 \Rightarrow z_0 = 4i.$$

$$\bullet z^2 - (5 + 3i)z + 6 + 6i = 0$$

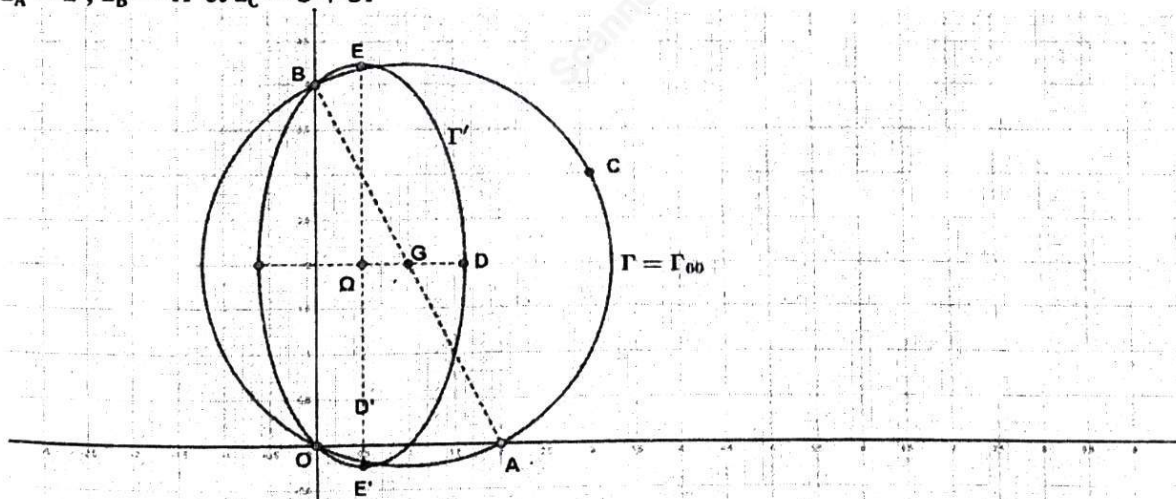
$$\Delta = (-(5 + 3i))^2 - 4 \times 1 \times (6 + 6i) = 25 - 9 + 2 \times 5 \times 3i - 24 - 24i = -8 + 6i = 1 - 9 + 3i = (1 + 3i)^2$$

$$z_1 = \frac{5+3i+1+3i}{2} = 3 + 3i \text{ et } z_2 = \frac{5+3i-1-3i}{2} = 2. \text{ Donc } S = \{4i; 2; 3 + 3i\}$$

2. Soient  $A$  ;  $B$  et  $C$  les images des solutions de l'équation  $P(z)=0$  avec  $|z_A| < |z_B| < |z_C|$ .

a. Placer les points  $A$  ;  $B$  et  $C$  et montrer que  $O$  ;  $A$  ;  $B$  et  $C$  sont cocycliques :

$$z_A = 2 ; z_B = 4i \text{ et } z_C = 3 + 3i$$



Remarquons que Le triangle  $OAB$  est rectangle d'hypoténuse  $[AB]$ .

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{2-3-3i}{4i-3-3i} = \frac{-1-3i}{-3+i} = i \Rightarrow ABC \text{ rectangle d'hypoténuse } [AB].$$

Comme les deux triangles  $OAB$  et  $ABC$  sont rectangle de même hypoténuse alors les points  $O$  ;  $A$  ;  $B$  et  $C$  sont cocycliques.

b. Calculer l'affixe de  $G = \text{bar}\{(O; 5); (A; -3); (C; 4)\}$  et vérifier que  $G$  est le milieu de  $[AB]$  :

$$z_G = \frac{5z_O - 3z_A + 4z_C}{6} = \frac{-6+12+12i}{6} = 1 + 2i \text{ et } \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i = z_G.$$

Donc  $G$  est le milieu de  $[AB]$ .

c. Déterminer puis représenter l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $\frac{z-2}{z-4i}$  imaginaire pur :

$$\text{On a : } \frac{z-2}{z-4i} = \frac{z-z_A}{z-z_B}$$

$$\frac{z-2}{z-4i} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{z-z_A}{z-z_B} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \begin{cases} z-z_A = 0 \\ \text{ou} \\ \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = z_A \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$$

Donc  $\mathcal{C}$  est le cercle de diamètre  $[AB]$  privé de  $B$ .

3. Pour tout point  $M$  du plan on pose  $\varphi(M) = 5MO^2 - 3MA^2 + 4MC^2$  et soit  $\Gamma_k$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $\varphi(M) = k$  où  $k$  un réel.

a. Discuter, suivant les valeurs de  $k$  la nature de  $\Gamma_k$  :

$$\varphi(M) = 5MO^2 - 3MA^2 + 4MC^2 = 6MG^2 + 5GO^2 - 3GA^2 + 4GC^2$$

$$\text{Or } GO^2 = 1 + 4 = 5; GA^2 = 1 + 4 = 5 \text{ et } GC^2 = 1 + 4 = 5$$

$$\Rightarrow \varphi(M) = 6MG^2 + 5 \times 5 - 3 \times 5 + 4 \times 5 = 6MG^2 + 30$$

$$\varphi(M) = k \Rightarrow 6MG^2 + 30 = k \Rightarrow 6MG^2 = k - 30 \Rightarrow MG^2 = \frac{k}{6} - 5.$$

• Si  $k = 30$  alors l'ensemble des points  $M$  est  $G$  ;

• Si  $k > 30$  alors  $\Gamma_k$  est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $\sqrt{\frac{k}{6} - 5}$  ;

• Si  $k < 30$  alors  $\Gamma_k$  est l'ensemble vide.

b. Reconnaître et construire  $\Gamma_{60}$  :

$\Gamma_{60} : MG^2 = \frac{60}{6} - 5 = 5 \Rightarrow MG = \sqrt{5}$ . Donc  $\Gamma_{60}$  est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $\sqrt{5}$ , c'est le cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit aux points  $O$  ;  $A$  ;  $B$  et  $C$ .

4. Soit  $f$  l'application qui associe à chaque point  $M(x; y)$  d'affixe  $z$  le point  $M'(x'; y')$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{3z-\bar{z}}{4}$ . ( $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$ ) et soit  $\Gamma$  le cercle d'équation  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ .

a. Ecrire  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$  :

$$z' = \frac{3z-\bar{z}}{4} \Rightarrow x' + iy' = \frac{3x+3yi-x+yi}{4} = \frac{2x+4yi}{4} = \frac{1}{2}x + yi \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$$

b. Donner une équation cartésienne de l'ensemble  $\Gamma'$  image du cercle  $\Gamma$  par l'application  $f$  :

$$\Gamma : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \Leftrightarrow \Gamma' : (2x'-1)^2 + (y'-2)^2 = 5 \Leftrightarrow 4\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 + (y'-2)^2 = 5.$$

Donc  $\Gamma'$  admet une équation de la forme  $\Gamma' : 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 5$ .

c. Montrer que  $\Gamma'$  est une ellipse dont on déterminera le centre, les sommets et l'excentricité :

L'équation de  $\Gamma' : 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 5$ .

Soit  $\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y - 2 \end{cases}$  et  $\Omega\left(\frac{1}{2}; 2\right)$  alors dans le repère  $(\Omega; \vec{u}; \vec{v})$   $\Gamma'$  a pour équation  $4X^2 + Y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ .

Donc  $\Gamma'$  est l'ellipse de centre  $\Omega$  de sommets  $D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$  ;  $D'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 2\right)$  ;  $E\left(\frac{1}{2}; 2 + \sqrt{5}\right)$  et  $E'\left(\frac{1}{2}; 2 - \sqrt{5}\right)$ . D'excentricité

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{\frac{5-5}{4}}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. Représenter  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sur la figure précédente : (voir la représentation précédente).

**Exercice N°2 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $f_n$  la fonction numérique définie pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{x^n}$ , on désigne par  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 5 cm.

1. Dresser le tableau de variation de  $f_n$  :

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1}(1 - n \ln x)}{x^{2n}}$$

$$1 - n \ln x = 0 \Rightarrow n \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{n} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{n}} \text{ et } f_n\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{\frac{1}{n}}{e} = \frac{1}{ne}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty(-\infty) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

|           |   |                   |           |
|-----------|---|-------------------|-----------|
| $x$       | 0 | $e^{\frac{1}{n}}$ | $+\infty$ |
| $f'_n(x)$ |   | +                 | -         |
| $f_n(x)$  |   | $\frac{1}{ne}$    | 0         |

2. a. Montrer que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par un point fixe A, dont on déterminera les coordonnées et que ces courbes  $(C_n)$  admettent la même tangente en A :

$$(C_n) \cap (C_{n+1}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f_n(x) \\ y = f_{n+1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow f_{n+1}(x) = f_n(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^{n+1}} = \frac{\ln x}{x^n} \Leftrightarrow x^{n+1} = x^n \Leftrightarrow (x-1)x^n = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$f_n(1) = 0$ . Donc toutes les courbes  $(C_n)$  passent par un point fixe A(1 ; 0).

$$f'_n(1) = \frac{1^{n-1}(1-n \ln 1)}{1^{2n}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\ln x}{x^{n+1}}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{n+1}} = 1 \times 1 = 1.$$

$\Rightarrow \begin{cases} f_n(1) = f_{n+1}(1) = 0 \\ f'_n(1) = f'_{n+1}(1) = 1 \end{cases}$ . Donc les courbes  $(C_n)$  admettent la même tangente T en A telle que T :  $y = x - 1$ .

b. Etudier la position relative de  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$  :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{n+1}} - \frac{\ln x}{x^n} = \left( \frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^n} \right) \ln x = \frac{(1-x)\ln x}{x^{n+1}}$$

|           |   |                           |                           |
|-----------|---|---------------------------|---------------------------|
| x         | 0 | 1                         | $+\infty$                 |
| $f'_n(x)$ |   | -                         | 0                         |
| $f_n(x)$  |   | $\frac{(C_n)}{(C_{n+1})}$ | $\frac{(C_n)}{(C_{n+1})}$ |
|           |   | $(C_n) \cap (C_{n+1})$    |                           |

c. Soit  $M_n$  le point de  $(C_n)$  en lequel la tangente est horizontale. Montrer que tous les points  $M_n$  sont situés sur une branche d'une courbe dont on donnera une équation :

$M_n \left( e^{\frac{1}{n}} ; \frac{1}{ne} \right)$  on pose  $x = e^{\frac{1}{n}}$  et  $y = \frac{1}{ne} \Rightarrow x^n = e \Rightarrow y = \frac{1}{nx^n}$ .

Donc les points  $M_n$  sont situés sur une branche de la courbe d'équation  $y = \frac{1}{nx^n}$ .

3. Tracer  $(C_3)$  :

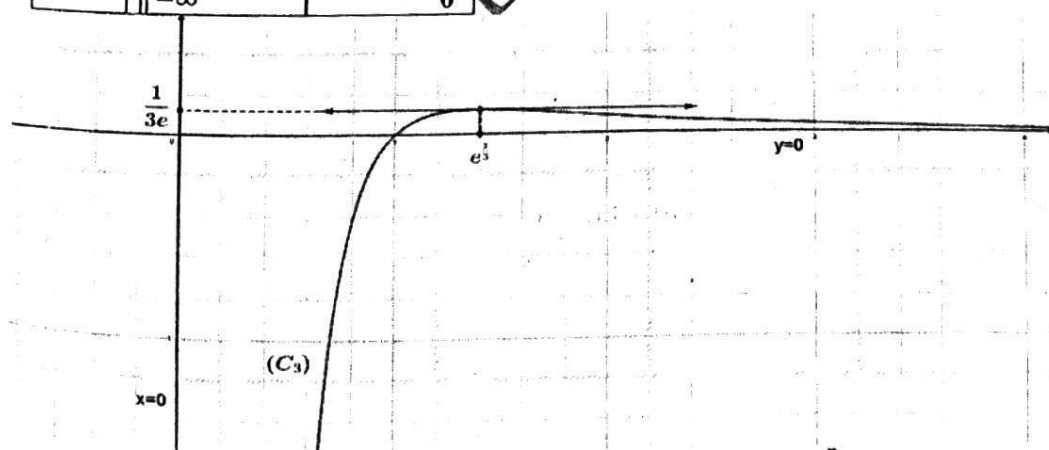
$$f'_3(x) = \frac{\ln x}{x^3}$$

$$f'_3(x) = \frac{x^2(1-3\ln x)}{x^6}$$

$$f'_3(x) = \frac{x^2(1-3\ln x)}{x^6} \Rightarrow x = \frac{1}{3e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = 0.$$

|           |   |                   |           |
|-----------|---|-------------------|-----------|
| x         | 0 | $e^{\frac{1}{3}}$ | $+\infty$ |
| $f'_3(x)$ |   | +                 | 0         |
| $f_3(x)$  |   | $\frac{1}{3e}$    | 0         |



4. Dans cette question on pose :  $f = f_3$  et pour tout  $n \geq 2$  :  $S_n = \sum_{k=2}^n f(k) = \frac{\ln 2}{2^3} + \frac{\ln 3}{3^3} + \dots + \frac{\ln n}{n^3}$ .

a. Montrer que pour tout  $k \geq 2$  on a :  $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$  :  
 $f$  est décroissante sur  $\left[ e^{\frac{1}{3}} ; +\infty \right]$  ;  $\forall k \geq 2$  ;  $[k ; k+1] \subset \left[ e^{\frac{1}{3}} ; +\infty \right] \Rightarrow \forall x \in [k ; k+1] ; f(k) \leq f(x) \leq f(k+1)$   
 $\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k+1) dx \Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$ .

b. Montrer que pour tout  $n \geq 2$  on a :  $S_n - \frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^3}$ ,

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x) dx \leq f(2)$$

$$f(4) \leq \int_3^4 f(x) dx \leq f(3)$$

$$f(5) \leq \int_4^5 f(x) dx \leq f(4)$$

.....

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1)$$

$$S_n - f(2) \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - f(n) \Leftrightarrow S_n - \frac{\ln 2}{2^3} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^3}$$

$$\text{Donc } n \geq 2 \text{ on a : } S_n - \frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^3}.$$

c. En déduire que pour tout  $n \geq 2$  on a :  $\int_2^n f(x) dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln 2}{8}$  :

$$\text{On a : } n \geq 2 ; S_n - \frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^3} \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x) dx - S_n \leq -\frac{\ln n}{n^3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{8} - \int_2^n f(x) dx \leq -S_n \leq -\frac{\ln n}{n^3} - \int_2^n f(x) dx \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{8} - \int_2^n f(x) dx \leq -S_n \leq -\frac{\ln n}{n^3} - \int_2^n f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln 2}{8}.$$

D'où on a  $\forall n \geq 2 ; \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln 2}{8}$ .

d. Calculer  $\int_2^n f(x) dx$ , en déduire que la suite  $(S_n)$  est convergente :

$$\int_2^n f(x) dx = \int_2^n \frac{\ln(x)}{x^3} dx = \int_2^n \frac{1}{x^3} \times \ln(x) dx$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{2x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_2^n f(x) dx = \left[ \frac{-1}{2x^2} \ln x \right]_2^n + \int_2^n \frac{1}{2x^3} dx = \left[ \frac{-1}{2x^2} \ln x \right]_2^n - \left[ \frac{1}{4x^2} \right]_2^n = -\frac{\ln n}{2n^2} + \frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{16} = -\frac{\ln n}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1+2\ln 2}{16}$$

$$\bullet S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln 2}{8} \Rightarrow S_n \leq -\frac{\ln n}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1+2\ln 2}{16} + \frac{\ln 2}{8} \leq \frac{1+2\ln 2}{16} + \frac{\ln 2}{8} \leq \frac{1+3\ln 2}{16}$$

$$\bullet S_{n+1} - S_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3} \geq 0$$

$(S_n)$  est convergente car elle est croissante et majorée.

e. On pose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lambda$ , montrer que  $\frac{\ln(2\sqrt{e})}{8} < \lambda < \frac{\ln(4\sqrt{e})}{8}$  :

$$\text{On a d'une part : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln n}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1+2\ln 2}{16} \right) = \frac{1+2\ln 2}{16}$$

$$\text{D'autre part : } \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln 2}{8}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln n}{n^3} \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln 2}{8} \right) \Rightarrow \frac{1+2\ln 2}{16} \leq \lambda \leq \frac{1+2\ln 2}{16} + \frac{\ln 2}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{2\ln(e^{\frac{1}{2}}) + 2\ln 2}{16} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \frac{2\ln(e^{\frac{1}{2}}) + 2\ln 2}{16} + \frac{\ln 2}{8} \Rightarrow \frac{2\ln(\sqrt{e}) + 2\ln 2}{16} \leq \lambda \leq \frac{2\ln(\sqrt{e}) + 2\ln 2}{16} + \frac{\ln 2}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(\sqrt{e}) + \ln 2}{8} \leq \lambda \leq \frac{\ln(\sqrt{e}) + 2\ln 2}{8} + \frac{\ln 2}{8} \Rightarrow \frac{\ln(\sqrt{e}) + \ln 2}{8} < \lambda < \frac{\ln(\sqrt{e}) + \ln 2}{8} + \frac{\ln 2}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(2\sqrt{e})}{8} < \lambda < \frac{\ln(\sqrt{e}) + 2\ln 2}{8} \Rightarrow \frac{\ln(2\sqrt{e})}{8} < \lambda < \frac{\ln(\sqrt{e}) + \ln 4}{8} \Rightarrow \frac{\ln(2\sqrt{e})}{8} < \lambda < \frac{\ln(4\sqrt{e})}{8}$$

**Problème :**

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de côté a.

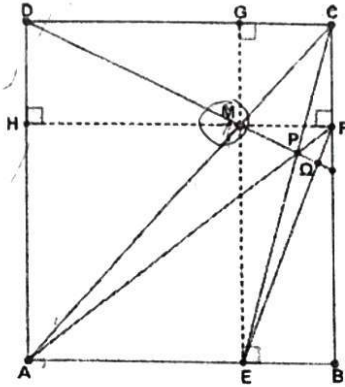
Soit M un point variable du segment [AC]. Soient E, F, G et H les projetés orthogonaux respectifs de M sur [AB], [BC], [CD] et [DA]. Dans tout le problème, M est distinct de A et de C.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

#### Partie A

Dans cette partie on se propose de démontrer par deux méthodes que lorsque M varie sur [AC], les droites (DM), (CE) et (AF) d'une part et les droites (BM), (CH) et (AG) d'autre part restent concurrentes.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complètera au fur et à mesure. (On pourra prendre  $AB=8\text{cm}$  et la droite  $(AB)$  horizontale) :



## 2. Utilisation d'homothéties

Pour une position donnée de  $M$  sur  $[AC]$ , on désigne par  $P$  le point d'intersection des droites  $(AF)$  et  $(CE)$ . On considère deux homothéties  $h_1$  et  $h_2$  de même centre  $P$  telles que  $h_1$  transforme  $A$  en  $F$  et  $h_2$  transforme  $C$  en  $E$ .

a. Déterminer l'image de la droite  $(AD)$  par  $h_1$  :

$h_1(AD)$  est la droite passant par  $F$  et parallèle à  $(AD)$  donc :  $h_1(AD) = (BC)$ .

b. Déterminer l'image de la droite  $(BC)$  par  $h_2$  :

$h_2(BC)$  est la droite passant par  $E$  et parallèle à  $(BC)$  donc :  $h_2(BC) = (EG)$ .

c. Déterminer l'image de la droite  $(AD)$  par  $h_2 \circ h_1$  :

$h_2 \circ h_1(AD) = h_2(BC) = (EG)$ .

d. Déterminer l'image de la droite  $(DC)$  par  $h_1 \circ h_2$  :

$h_1 \circ h_2(DC) = h_1(AB) = (FH)$ .

e. En déduire que, quelque soit la position de  $M$  sur  $[AC]$ , les droites  $(DM)$ ,  $(CE)$  et  $(AF)$  restent concourantes :

$h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$  (car  $h_1$  et  $h_2$  ont même centre).

Donc  $h_1 \circ h_2 : \begin{cases} (AD) \rightarrow (EG) \\ (DC) \rightarrow (FH) \end{cases} \Rightarrow h_1 \circ h_2((AD) \cap (DC)) = (EG) \cap (FH) \Rightarrow h_1 \circ h_2(D) = M$  ; or  $h_1 \circ h_2$  est une homothétie de centre  $P$ , alors  $P \in (DM)$ .

Conclusion : les droites  $(DM)$  ;  $(CE)$  et  $(AF)$  sont concourantes  $\forall M \in [AC]$ .

## 3. Utilisation d'une rotation vectorielle

On considère la rotation vectorielle  $\varphi$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

a. Prouver que  $\varphi(\overline{DE}) = \overline{AF}$ . En déduire que les droites  $(DE)$  et  $(AF)$  sont perpendiculaires :

$$\overline{DE} = \overline{DA} + \overline{AE} \Rightarrow \varphi(\overline{DE}) = \varphi(\overline{DA}) + \varphi(\overline{AE}) = \overline{DC} + \overline{AH} = \overline{AB} + \overline{AH} = \overline{AF}.$$

$$\varphi(\overline{DE}) = \overline{AF} \Leftrightarrow \begin{cases} DE = AF \\ (\overline{DE}; \overline{AF}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow (DE) \perp (AF).$$

b. Trouver  $\varphi(\overline{DF})$  et  $\varphi(\overline{DM})$ . En déduire que, quelque soit la position de  $M$  sur  $[AC]$ , les droites  $(DM)$ ,  $(CE)$  et  $(AF)$  restent concourantes :

$$\varphi(\overline{DF}) = \varphi(\overline{DC} + \overline{CF}) = \varphi(\overline{DC}) + \varphi(\overline{CF}) = \varphi(\overline{AB}) + \varphi(\overline{GM}) = \overline{AD} + \overline{GC} = \overline{EG} + \overline{GC} = \overline{EC}. \text{ Donc } \varphi(\overline{DF}) = \overline{EC}.$$

$$\varphi(\overline{DM}) = \varphi(\overline{DG} + \overline{GM}) = \varphi(\overline{DG}) + \varphi(\overline{GM}) = \varphi(\overline{AE}) + \overline{GC} = \overline{AH} + \overline{GC} = \overline{EM} + \overline{MF} = \overline{EF}. \text{ Donc } \varphi(\overline{DM}) = \overline{EF}.$$

Donc on a :  $\varphi(\overline{DF}) = \overline{EC} \Rightarrow (DF) \perp (EC)$  et  $\varphi(\overline{DM}) = \overline{EF} \Rightarrow (DM) \perp (EF)$ .

•  $(AF) \perp (DE) \Rightarrow (FA)$  est la hauteur issue de  $F$  dans le triangle  $DEF$ .

•  $(EC) \perp (DF) \Rightarrow (EC)$  est la hauteur issue de  $E$  dans le triangle  $DEF$ .

•  $(DM) \perp (EF) \Rightarrow (FA)$  est la hauteur issue de  $D$  dans le triangle  $DEF$ .

Donc pour tout  $M$  de  $[AC]$  les droites  $(FA)$  ;  $(EC)$  et  $(DM)$  sont les hauteurs issues de  $F$  ;  $E$  et  $D$  du triangle  $DEF$  ; alors  $(FA)$  ;

$(EC)$  et  $(DM)$  sont concourantes en un seul point qui est l'orthocentre du triangle  $DEF$ .

4. Déduire de ce qui précède, en utilisant une réflexion appropriée, que quelque soit la position de  $M$  sur  $[AC]$ , les droites  $(BM)$ ,  $(CH)$  et  $(AG)$  restent concourantes :

On considère la réflexion  $s_{AC}$  ; on a :

$$s_{AC} : \begin{cases} (DM) \rightarrow (BM) \\ (CE) \rightarrow (CH) \\ (AF) \rightarrow (AG) \end{cases} \Rightarrow (DM) ; (CE) \text{ et } (AF) \text{ sont concourantes. Donc } (BM) ; (CH) \text{ et } (AG) \text{ sont concourantes.}$$

## Partie B

Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  les cercles de diamètres respectifs  $[FM]$ ,  $[ME]$ ,  $[GA]$  et  $[CH]$ .

On se propose dans cette partie, de démontrer que lorsque  $M$  varie sur  $[AC]$ , les cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  restent concourantes.

1. Pour une position donnée de  $M$  sur  $[AC]$ , on désigne par  $\Omega$  le point d'intersection de  $(DM)$  et  $(EF)$ .

- a. Prouver qu'il existe une unique similitude directe  $s$  de centre  $\Omega$  qui transforme  $M$  en  $F$  :  
 $\Omega \neq M$  et  $\Omega \neq F$  ; donc il existe une unique similitude directe  $s$  de centre  $\Omega$  qui transforme  $M$  en  $F$ .  
 b. Déterminer l'angle de  $s$  et montrer que  $s(E) = M$  :

L'angle de  $s$  :  $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega F}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

$s$  :  $\begin{cases} (EF) \rightarrow (DM) \\ (EM) \rightarrow (FM) \end{cases} \Rightarrow s((EF) \cap (EM)) = (DM) \cap (FM) \Rightarrow s(E) = M$ .

2. Déterminer l'image du carré AEMH par la similitude  $s$  :

L'image du carré (AEMH) est le carré (GMFC) car :  $s$  :  $\begin{cases} A \rightarrow G \\ E \rightarrow M \\ M \rightarrow F \\ H \rightarrow C \end{cases}$

3. En déduire que lorsque le point  $M$  varie sur  $[AC]$ , les cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  restent concourantes :

•  $s(M) = F \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega F}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \Omega \in \Gamma_1$ .

•  $s(E) = M \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega E}; \overrightarrow{\Omega M}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \Omega \in \Gamma_2$ .

•  $s(A) = G \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega G}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \Omega \in \Gamma_3$ .

•  $s(H) = C \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega H}; \overrightarrow{\Omega C}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \Omega \in \Gamma_4$ .

Donc  $\forall M \in [AC]$  ; les cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  restent concourantes en  $\Omega$ .

4. Sur la figure précédente, déduire un ensemble de quatre autres cercles qui possèdent la même propriété :

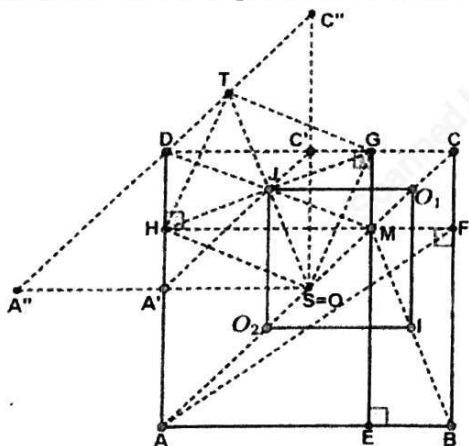
$s_{AC}$  :  $\begin{cases} [FM] \rightarrow [GM] \\ [ME] \rightarrow [MH] \\ [GA] \rightarrow [FA] \\ [CH] \rightarrow [CE] \end{cases}$

Donc les cercles de diamètres  $[GM]$  ;  $[MH]$  ;  $[FA]$  et  $[CE]$  restent concourants quelque soit la position de  $M$  sur  $[AC]$ .

**Partie C**

Dans cette partie on se propose d'étudier un ensemble de carrés.

1. Sur une nouvelle figure placer les points  $O_1, O_2, I$  et  $J$  milieux respectifs des segments  $[CM], [AM], [BM]$  et  $[DM]$ . Montrer que le quadrilatère  $O_1JO_2I$  est un carré et que son aire est constante quelque soit la position de  $M$  sur  $[AC]$  :



$h_{(M; \frac{1}{2})}$  :  $\begin{cases} A \rightarrow O_2 \\ B \rightarrow I \\ C \rightarrow O_1 \\ D \rightarrow J \end{cases}$  On a ABCD un carré alors  $O_1JO_2I$  est un carré.

De plus  $Aire(O_1JO_2I) = \frac{1}{4} \times Aire(ABCD) = \frac{a^2}{4}$ . Donc l'aire du carré  $O_1JO_2I$  est constante.

2. Déterminer le lieu géométrique du point  $J$  lorsque  $M$  varie sur  $[AC]$  :

$h_{(D; \frac{1}{2})}$  :  $M \rightarrow J$  ; donc si  $M$  décrit  $[AC]$ , alors le lieu géométrique du point  $J$  est le segment  $[A'C']$ , avec  $A' = [D*A]$  et  $C' = [D*C]$ .

3. On considère les deux points  $S$  et  $T$  tels que le quadrilatère SGTH soit un carré direct.

a. Montrer que lorsque  $M$  varie sur  $[AC]$ , alors le point  $S$  reste fixe puis le placer sur la figure :

Soit  $O = [A*C]$ . La rotation  $r_{(O; \frac{\pi}{2})}$  transforme  $G$  en  $H$  et la rotation  $r_{(S; \frac{\pi}{2})}$  transforme  $G$  en  $H$  alors  $S = O$ .

b. Déterminer et représenter le lieu géométrique du point  $T$  lorsque  $M$  varie sur  $[AC]$  :

Soit  $A'' = s_{A'}(S)$  et  $C'' = s_{C'}(S)$  ; alors le lieu géométrique de  $T$  est le segment  $[A''C'']$ .

4. On pose  $AE = x$  avec  $0 < x < a$ . Soit  $f(x)$  l'aire de la partie délimitée par les deux carrés  $O_1JO_2I$  et SGTH.

a. Calculer l'aire du carré SGTH en fonction de  $x$  et  $a$  :

$$HG^2 = HM^2 + GM^2 = x^2 + (a-x)^2$$

$$\text{Aire (SGTH)} = SG^2 = \left(\frac{HG}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{HG^2}{2} = \frac{x^2 + (a-x)^2}{2} = \frac{2x^2 - 2ax + a^2}{2}$$

b. En déduire f(x) en fonction de x et a :

$$f(x) = \text{Aire (JSG)} = \frac{1}{4} \text{Aire (SGTH)} = \frac{2x^2 - 2ax + a^2}{8}$$

c. Quelle est la position du point M pour laquelle la surface commune f(x) est minimale ?

$$f'(x) = \frac{4x - 2a}{8} = \frac{2x - a}{8}$$

|       |                 |                  |                 |
|-------|-----------------|------------------|-----------------|
| x     | 0               | $\frac{a}{2}$    | a               |
| f'(x) |                 | -                | 0               |
| f(x)  | $\frac{a^2}{8}$ | $\frac{a^2}{16}$ | $\frac{a^2}{8}$ |

f est minimale lorsque  $x = \frac{a}{2}$  c'est-à-dire  $M = A^*C$ .

**Partie D**

Dans cette partie on considère que le point M est fixé au centre du carré ABCD. On se propose d'étudier deux tangentes communes à deux coniques : la parabole  $\mathcal{P}$  de sommet H et de directrice (CD) et l'ellipse  $\mathcal{E}$  de foyers A et B et de longueur du grand axe  $a\sqrt{2}$ .

1. a. Faire une nouvelle figure, déterminer le foyer de  $\mathcal{P}$  et montrer que B appartient à  $\mathcal{P}$  :

Le foyer de  $\mathcal{P}$  est le point A tel que :  $BA = BC = d(B; (CD)) \Rightarrow B \in \mathcal{P}$ .

b. Montrer que M est un sommet de l'ellipse  $\mathcal{E}$ . Construire les autres sommets et justifier la construction :

On a  $MA + MB = 2MA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow B \in \mathcal{E}$  ; or  $(ME) \perp (AB)$  alors M est un sommet de  $\mathcal{E}$ .

Le 2<sup>ème</sup> sommet du petit axe est le symétrique de M par rapport à (AB).

Les sommets de l'axe focale sont les points d'intersection de la droite (AB) avec le cercle de centre  $E = A^*B$  et de rayon  $MA = \frac{a}{\sqrt{2}}$  (voir la figure).

2. Montrer que la droite (FH) est une tangente commune à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{E}$  :

(FH) = médiatrice [AD]  $\Rightarrow$  (FH) est tangente à  $\mathcal{P}$  en H.

(FH) passe par M et parallèle à (AB)  $\Rightarrow$  (FH) est tangente à  $\mathcal{E}$  en M. Donc (FH) est une tangente commune à  $\mathcal{P}$  et à  $\mathcal{E}$ .

3. Soit  $(\Delta)$  la droite passant par F et orthogonale à (AF) et  $(\Delta')$  la passant par B et orthogonale à (BD) et soit N le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ .

a. Montrer que  $(\Delta)$  est une tangente à  $\mathcal{P}$  et déterminer leur point de contact :

Soit A' le symétrique de A par rapport à  $(\Delta)$  ;  $(A' \in (DC)) \Rightarrow (\Delta) = \text{med}[AA']$ .

Soit  $A_0$  le point d'intersection de  $(\Delta)$  avec la perpendiculaire en A' à (DC) on a :  $A_0 \in \mathcal{P}$ , alors  $(\Delta)$  est tangente à  $\mathcal{P}$  en  $A_0$ .

b. Montrer que  $(\Delta)$  est la tangente à  $\mathcal{E}$  en N :

$ABA'C$  est un parallélogramme  $\Rightarrow (BA') \parallel (AC)$ .

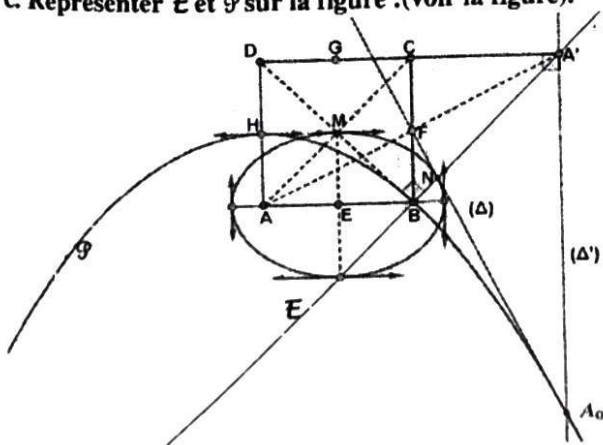
D'autre part  $(BN) \perp (DB)$  et  $(AC) \perp (DB) \Rightarrow (BN) \parallel (AC) \Rightarrow (BA') \parallel (BN) \Leftrightarrow N \in (BA')$ .

De plus on a :  $BA' = AC = a\sqrt{2}$  or  $BA' = NB + NA'$  et  $NA' = NA$  ; donc  $NA + NB = a\sqrt{2} \Rightarrow N \in \mathcal{E}$ .

Encore :  $\widehat{A'NF} = \widehat{FNA}$  car  $(\Delta) = \text{med}[AA']$ .

$A_0NB = FNA$  car  $(\Delta)$  est la bissectrice interne de l'angle  $(\overline{NA}; \overline{NB}) \Rightarrow (\Delta)$  est tangente à  $\mathcal{E}$  en N.

c. Représenter  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{P}$  sur la figure : (voir la figure).



**Bac 2005 session complémentaire****Énoncé****Exercice N°1 :**

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue  $z : z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$  où  $\theta$  est un paramètre réel appartenant à  $[0, 2\pi[$ .

1. a. Résoudre l'équation (E) et on note  $z_1$  et  $z_2$  ces deux solutions.
- b. Discuter suivant les valeurs du paramètre  $\theta$ , le module et un argument de  $z_1$  et de  $z_2$ .
2. On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  et soient les points  $M_1$  et  $M_2$  les deux points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ .
  - a. Montrer que lorsque  $\theta$  décrit  $[0, 2\pi[$  alors les points  $M_1$  et  $M_2$  décrivent un cercle  $\Gamma$  de centre  $A(1,0)$  dont on déterminera le rayon, et que la droite  $(M_1M_2)$  passe par un point fixe que l'on déterminera.
  - b. Représenter  $M_1$  et  $M_2$  sur  $\Gamma$ , dans le cas où  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n \geq 2$ , on considère l'équation  $(E_n)$  d'inconnue le complexe  $z : (z - 1)^n - e^{2i\theta} = 0$  où  $\theta$  est un paramètre réel appartenant à  $[0, 2\pi[$ .
  - a. Déterminer les nombres  $(z_k)$  solutions de l'équations  $(E_n)$ .
  - b. Montrer que  $z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = n$ .
  - c. Montrer que les points  $M_k$  d'affixes  $z_k$  appartiennent au cercle  $\Gamma$ .
  - d. On pose  $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n$ . Calculer  $S_n$  en fonction de  $\theta$  et  $n$ , puis montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2\pi$ , interpréter cette limite.

**Exercice N°2 :**

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct ABC rectangle et isocèle en A de côté a. Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. Le point D l'image du point K par la réflexion d'axe (AC).

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.
- b. Soit la rotation  $r$  de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , déterminer  $r(B)$  et  $r(J)$ . En déduire que (BJ) et (CD) sont perpendiculaires.
- c. Soit la similitude directe  $s$  de centre A, d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport  $\frac{1}{2}$ , déterminer  $s(B)$  et  $s(C)$ . En déduire que (BC) et (DJ) sont perpendiculaires.
- d. Déduire de ce qui précède que J est l'orthocentre du triangle BCD.
2. Soit F le point d'intersection des droites (BJ) et (CD). Montrer que les points A, D, F et J sont cocycliques et que les points A, B, C et F le sont aussi.
3. On considère le cercle  $\Gamma_1$  circonscrit au triangle ABC. Pour tout point M du plan, on pose  $s(M) = M'$ . Déterminer le lieu géométrique du point M' lorsque M décrit  $\Gamma_1$ .
4. Pour tout point M du plan distinct de A, on désigne par N le milieu du segment [MM'].
  - a. Calculer  $\frac{AN}{AM}$  et montrer que l'angle  $(\overline{AM}; \overline{AN})$  a une mesure constante  $\alpha$  lorsque M varie.
  - b. Vérifier que  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .
  - c. En déduire que le point N est l'image du point M par une similitude directe  $\sigma$  que l'on caractérisera.
  - d. Déterminer et construire, sur la figure précédente, le lieu géométrique  $\Gamma$  de N lorsque M décrit  $\Gamma_1$ .

**Problème :****Partie A**

Pour tout entier naturel non nul  $n$  et pour tout réel  $x$  on pose :  $S_n(x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$ .

1. a. Donner une primitive de la fonction  $S_n$  sur  $\mathbb{R}$ .
- b. Démontrer que pour tout  $x \neq -1$  et  $n \geq 2$  on a :  $S_{n-1}(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x} \dots \dots \dots [1]$
2. a. En déduire que :  $\forall x > -1, \forall n \geq 2 ; \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \dots \dots \dots [2]$
- b. Déduire de [2] que  $\forall x > 0 ; x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \dots \dots \dots [3]$   
 $\forall x \in ]-1, 0[ ; x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 \dots \dots \dots [4]$
- c. En utilisant [3] et [4] démontrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

**Partie B**

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases} ; x \in ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$

1. a. Montrer que  $f$  est continue au point d'abscisse  $x_0 = 0$ .
- b. Montrer que  $f$  est dérivable en  $x_0 = 0$  puis calculer  $f'(0)$  (On pourra utiliser A. 2. c)

2. Soit la fonction numérique  $u$  définie par :  $u(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$ .

a. Etudier les variations de  $u$  et montrer que :  $\forall x > -1, u(x) \leq 0$ .

b. Vérifier que  $\forall x \in ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[ , f'(x) = \frac{u(x)}{x^2(x+1)}$ .

c. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

### Partie C

On considère la fonction numérique  $g$  définie par :  $\begin{cases} g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) ; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Montrer que  $g$  est définie sur  $D = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$ .

b. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  à droite du point d'abscisse  $x_0 = 0$ .

2. a. Calculer  $g'(x)$  puis vérifier que  $g$  est croissante sur  $D$ .

b. Du tableau de variation de  $f$ , déduire celui de  $g$ .

c. Construire la courbe  $(C)$ .

3. On considère la transformation  $\sigma$  du plan dans lui-même qui associe à tout point  $M(x,y)$  le point  $M(x',y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = y \end{cases}$$

On pose  $\sigma(C) = (C')$  et soit  $h$  la fonction numérique dont la courbe représentative est  $(C')$ , dans le repère précédent.

a. Déterminer l'expression de  $h(x)$  et vérifier que  $h(x) = g(-x-1)$ .

b. Du tableau de variation de  $g$  déduire celui de  $h$ .

c. Vérifier que  $\sigma$  est la réflexion d'axe  $\Delta$  d'équation  $x = \frac{-1}{2}$ . Déduire la construction de  $(C')$  à partir de  $(C)$  dans le repère précédent.

4. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$  on pose  $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ;  $V_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ .

a. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$  :  $g(n) \leq 1 \leq h(n)$ , en déduire que  $U_n \leq e \leq V_n$ .

b. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$  :  $1 \leq \frac{e}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{n}$ , en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

c. Montrer que les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont adjacentes.

## Solution

### Exercice N°1 :

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue  $z$  :  $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$  où  $\theta$  est un paramètre réel appartenant à  $[0, 2\pi[$ .

1. a. Résoudre l'équation (E) et on note  $z_1$  et  $z_2$  ces deux solutions :

$$z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0 \text{ où } \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\Delta = (-1)^2 - 1(1 - e^{2i\theta}) = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2 \Rightarrow z_1 = 1 + e^{i\theta} \text{ et } z_2 = 1 - e^{i\theta}$$

$$\text{Donc } S = \{1 + e^{i\theta} ; 1 - e^{i\theta}\}$$

b. Discuter suivant les valeurs du paramètre  $\theta$ , le module et un argument de  $z_1$  et de  $z_2$  :

$$z_1 = 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } z_2 = 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\bullet \text{ Si } \theta = \pi \text{ alors } z_1 = 0 \text{ sinon } \begin{cases} |z_1| = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \arg z_1 = \frac{\theta}{2} [2\pi] \text{ pour } 0 \leq \theta < \pi \\ |z_1| = -2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \arg z_1 = \frac{\theta}{2} + \pi [2\pi] \text{ pour } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } \theta = 0 \text{ alors } z_2 = 0 \text{ sinon } |z_2| = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \arg z_2 = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

2. On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  et soient les points  $M_1$  et  $M_2$  les deux points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ .

a. Montrer que lorsque  $\theta$  décrit  $[0, 2\pi[$  alors les points  $M_1$  et  $M_2$  décrivent un cercle  $\Gamma$  de centre  $A(1,0)$  dont on déterminera le rayon, et que la droite  $(M_1 M_2)$  passe par un point fixe que l'on déterminera :

Soient  $M_1(z_1)$  ;  $M_2(z_2)$  et  $A(1)$ .

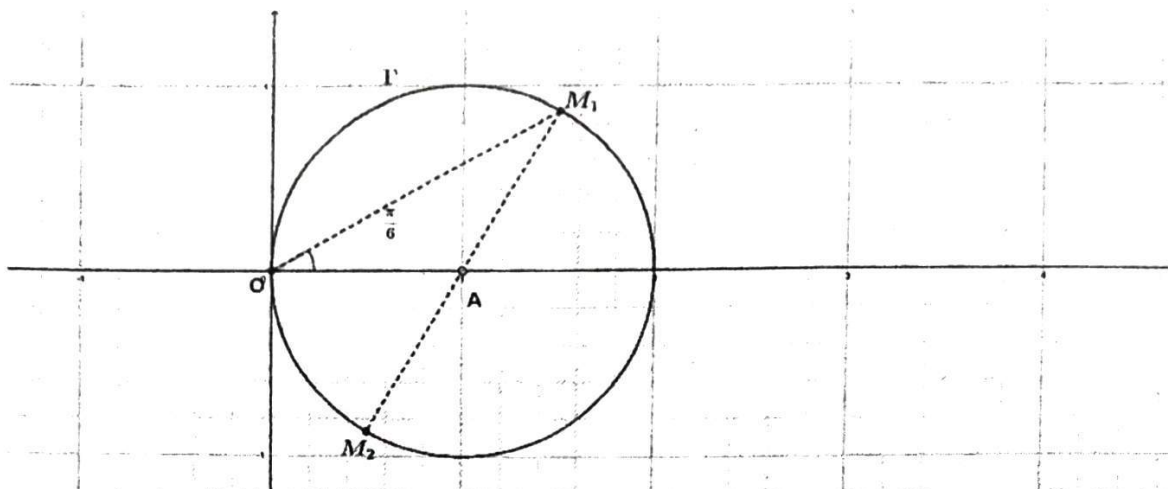
$$z_1 = 1 + e^{i\theta} \Rightarrow z_1 - 1 = e^{i\theta} \Rightarrow |z_1 - 1| = |e^{i\theta}| \Rightarrow AM_1 = 1 \text{ et } z_2 = 1 - e^{i\theta} \Rightarrow z_2 - 1 = -e^{i\theta} \Rightarrow |z_2 - 1| = |-e^{i\theta}| \Rightarrow AM_2 = 1.$$

Donc lorsque  $\theta$  décrit  $[0, 2\pi[$  alors les points  $M_1$  et  $M_2$  décrivent le cercle  $\Gamma$  de centre  $A(1,0)$  et de rayon 1.

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1 + e^{i\theta} + 1 - e^{i\theta}}{2} = 1 = z_A \Rightarrow A = M_1 * M_2. \text{ Donc la droite } (M_1 M_2) \text{ passe par le point fixe } A.$$

b. Représenter  $M_1$  et  $M_2$  sur  $\Gamma$ , dans le cas où  $\theta = \frac{\pi}{3}$  :

Si  $\theta = \frac{\pi}{3}$  alors  $M_1 \in \Gamma$  et  $\arg z_1 = (\vec{u}; \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$  ;  $M_2$  est diamétralement opposé à  $M_1$  sur le cercle  $\Gamma$ . (voir la figure)



3. Pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n \geq 2$ , on considère l'équation  $(E_n)$  d'inconnue le complexe  $z$  :  $(z-1)^n - e^{2i\theta} = 0$  où  $\theta$  est un paramètre réel appartenant à  $[0, 2\pi[$ .

a. Déterminer les nombres  $(z_k)$  solutions de l'équations  $(E_n)$  :

$$(z-1)^n - e^{2i\theta} = 0 \Leftrightarrow (z-1)^n = e^{2i\theta} \Leftrightarrow t^n = e^{2i\theta} \text{ (en posant } t = z-1) \Leftrightarrow (re^{i\alpha})^n = e^{2i\theta} \text{ (avec } t = re^{i\alpha} \text{ où } r \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow r^n e^{in\alpha} = e^{2i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n\alpha = 2\theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ n\alpha = 2\theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \alpha = \frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \end{cases} \text{ où } 0 \leq k \leq n-1.$$

$$\Rightarrow t = z-1 = e^{i\frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}} \Rightarrow z_k = 1 + e^{i\frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}} \text{ où } k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}.$$

b. Montrer que  $z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = n$  :

$$z_k = 1 + e^{i\frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}} = 1 + e^{i\frac{2\theta}{n}} \times e^{i\frac{2\pi k}{n}} = 1 + e^{i\frac{2\theta}{n}} \times \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$$

$$\begin{aligned} z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} &= \left(1 + e^{i\frac{2\theta}{n}} \times 1\right) + \left(1 + e^{i\frac{2\theta}{n}} \times e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) + \left(1 + e^{i\frac{2\theta}{n}} \times e^{i\frac{4\pi}{n}}\right) + \left(1 + e^{i\frac{2\theta}{n}} \times e^{i\frac{6\pi}{n}}\right) + \dots + \left(1 + e^{i\frac{2\theta}{n}} \times e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}\right) \\ &= n + \left(1 + e^{i\frac{2\theta}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + e^{i\frac{6\pi}{n}} \dots + e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}\right) e^{i\frac{2\theta}{n}} \\ &= n + \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} e^{i\frac{2\theta}{n}} \\ &= n + \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} e^{i\frac{2\theta}{n}} \\ &= n + \frac{1 - 1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} e^{i\frac{2\theta}{n}} \\ &= n \end{aligned}$$

D'où  $z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = n$ .

c. Montrer que les points  $M_k$  d'affixes  $z_k$  appartiennent au cercle  $\Gamma$  :

$$M_k(z_k); z_k = 1 + e^{i\frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}} \Rightarrow z_k - 1 = e^{i\frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}} \Rightarrow |z_k - 1| = \left|e^{i\frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}}\right| \Rightarrow AM_k = 1$$

Donc les points  $M_k$  appartiennent au cercle  $\Gamma$ .

d. On pose  $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n$ . Calculer  $S_n$  en fonction de  $\theta$  et  $n$ , puis montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2\pi$ , interpréter cette limite :

$$\begin{aligned} M_{k-1}M_k &= \left|1 + e^{i\frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}} - 1 - e^{i\frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi(k-1)}{n}}\right| = \left|e^{i\frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}} - e^{i\frac{2\theta}{n} + \frac{2\pi(k-1)}{n}}\right| = \left|e^{i\frac{2\theta}{n}} \left(e^{i\frac{2\pi k}{n}} - e^{i\frac{2\pi(k-1)}{n}}\right)\right| \\ &= \left|e^{i\frac{2\theta}{n}}\right| \left|e^{i\frac{2\pi k}{n}} - e^{i\frac{2\pi(k-1)}{n}}\right| = \left|e^{i\frac{2\pi k}{n}} - e^{i\frac{2\pi(k-1)}{n}}\right| = \left|e^{i\frac{2\pi k}{n}} \left(1 - e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right)\right| = \left|e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right| \left|1 - e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right| \\ &= \left|1 - e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right| = \left|2i \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) e^{-i\frac{\pi}{n}}\right| = |2i| \left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| \left|e^{-i\frac{\pi}{n}}\right| = 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

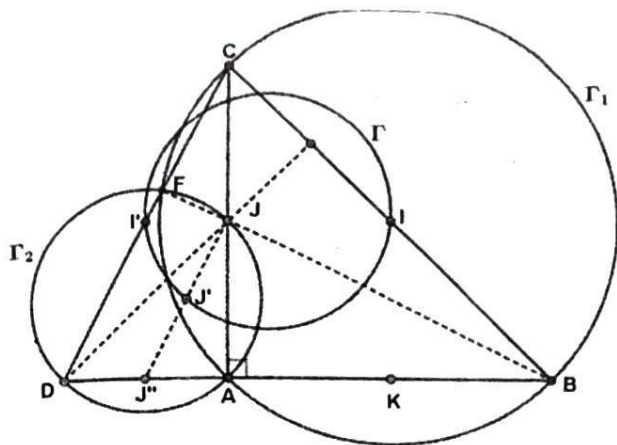
$$S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n = 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \dots + 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\pi \frac{\sin(x)}{x} = 2\pi \times 1 = 2\pi.$$

### Exercice N°2 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct ABC rectangle et isocèle en A de côté  $a$ . Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. Le point D l'image du point K par la réflexion d'axe (AC).

1. a. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complètera au fur et à mesure :



b. Soit la rotation  $r$  de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , déterminer  $r(B)$  et  $r(J)$ . En déduire que  $(BJ)$  et  $(CD)$  sont perpendiculaires :

$$r(B) = C \text{ car } \begin{cases} AC = AB \\ (\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ et } r(J) = D \text{ car } \begin{cases} AD = AJ \\ (\overline{AJ}; \overline{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow r(B) = C \text{ et } r(J) = D \Rightarrow (CD) \perp (BJ).$$

c. Soit la similitude directe  $s$  de centre  $A$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport  $\frac{1}{2}$ , déterminer  $s(B)$  et  $s(C)$ . En déduire que  $(BC)$  et  $(DJ)$  sont perpendiculaires :

$$s(B) = J \text{ car } \begin{cases} \frac{AJ}{AB} = \frac{1}{2} \\ (\overline{AB}; \overline{AJ}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ et } s(C) = D \text{ car } \begin{cases} \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \\ (\overline{AC}; \overline{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$s(B) = J \text{ et } s(C) = D \Rightarrow (DJ) \perp (BC).$$

d. Déduire de ce qui précède que  $J$  est l'orthocentre du triangle  $BCD$  :

•  $(BJ) \perp (CD) \Rightarrow (BJ)$  est la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $BCD$ .

•  $(DJ) \perp (BC) \Rightarrow (DJ)$  est la hauteur issue de  $D$  dans le triangle  $BCD$ .

On en déduit que  $J$  appartient à deux hauteurs du triangle  $(BCD)$ . D'où  $J$  est l'orthocentre du triangle  $BCD$ .

2. Soit  $F$  le point d'intersection des droites  $(BJ)$  et  $(CD)$ . Montrer que les points  $A, D, F$  et  $J$  sont cocycliques et que les points  $A, B, C$  et  $F$  le sont aussi :

• Les triangles  $AJD$  et  $JFD$  sont rectangles en  $A$  et  $F$  respectivement et de même hypoténuse  $[JD]$  donc les points  $A, J, F$  et  $D$  sont cocycliques.

• Les triangles  $ABC$  et  $FBC$  sont rectangles en  $A$  et  $F$  respectivement et de même hypoténuse  $[BC]$  donc les points  $A, B, C$  et  $F$  sont cocycliques.

3. On considère le cercle  $\Gamma_1$  circonscrit au triangle  $ABC$ . Pour tout point  $M$  du plan, on pose  $s(M) = M'$ . Déterminer le lieu géométrique du point  $M'$  lorsque  $M$  décrit  $\Gamma_1$  :

$$I = B * C \Rightarrow S(I) = s(B * C) \Rightarrow s(I) = J * D.$$

$\Gamma_1$  est le cercle de diamètre  $[BC] \Rightarrow \Gamma_2 = s(\Gamma_1)$  est le cercle de diamètre  $[JD]$ .

Donc le lieu géométrique du point  $M'$  est le cercle de diamètre  $[JD]$  lorsque  $M$  décrit  $\Gamma_1$ .

4. Pour tout point  $M$  du plan distinct de  $A$ , on désigne par  $N$  le milieu du segment  $[MM']$ .

a. Calculer  $\frac{AN}{AM}$  et montrer que l'angle  $(\overline{AM}; \overline{AN})$  a une mesure constante  $\alpha$  lorsque  $M$  varie :

Le triangle  $AMM'$  est rectangle en  $A$  alors d'après Pythagore on a :

$$MM'^2 = AM^2 + AM'^2 = AM^2 + \frac{1}{4}AM^2 = \frac{5}{4}AM^2 \Leftrightarrow AN = \frac{\sqrt{5}}{4}AM \Leftrightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

D'après Alkhashi on a :

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \times AN \cos(\overline{AM}; \overline{AN}) \Rightarrow \frac{5}{16}AM^2 = AM^2 + \frac{5}{16}AM^2 - 2AM \times \frac{\sqrt{5}}{4}AM \cos(\overline{AM}; \overline{AN})$$

$$\Rightarrow \frac{5}{16}AM^2 = AM^2 + \frac{5}{16}AM^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}AM^2 \cos(\overline{AM}; \overline{AN}) \Rightarrow \frac{5}{16} = 1 + \frac{5}{16} - \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(\overline{AM}; \overline{AN}) \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(\overline{AM}; \overline{AN}) = 1 + \frac{5}{16} - \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(\overline{AM}; \overline{AN}) = 1 \Rightarrow \cos(\overline{AM}; \overline{AN}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Donc la mesure de l'angle  $(\overline{AM}; \overline{AN})$  est constante.

b. Vérifier que  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  :

$$\text{On a } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ donc } \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

c. En déduire que le point  $N$  est l'image du point  $M$  par une similitude directe  $\sigma$  que l'on caractérisera :

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AN}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{4} \\ (\overline{AM}; \overline{AN}) = \alpha[2\pi] \end{array} \right.$  Donc N est l'image de M par la similitude directe  $\sigma$  de centre A ; de rapport  $\frac{\sqrt{5}}{4}$  et d'angle  $\alpha$

d. Déterminer et construire, sur la figure précédente, le lieu géométrique  $\Gamma$  de N lorsque M décrit  $\Gamma_1$  :  
Le lieu géométrique  $\Gamma$  de N lorsque M décrit  $\Gamma_1$  est le cercle passant par les points I ;  $I' = C^*D$  et  $J' = J^*J''$  avec  $J'' = A^*D$ .  
( Voir figure précédente)

**Problème :**

**Partie A**

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on pose :  $S_n(x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$ .

1. a. Donner une primitive de la fonction  $S_n$  sur  $\mathbb{R}$  :

$T_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$  est une primitive de  $S_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

b. Démontrer que pour tout  $x \neq -1$  et  $n \geq 2$  on a :  $S_{n-1}(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x} \dots \dots \dots [1]$  :

$$S_{n-1}(x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = 1 + (-x)^1 + (-x)^2 + \dots + (-x)^n$$

$$= \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 - (-x)} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

2. a. En déduire que :  $\forall x > -1, \forall n \geq 2 ; \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \dots \dots \dots [2]$  :

$$S_{n-1}(x) = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t} = \frac{(-1)^n t^n}{1+t} + S_{n-1}(t) = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

$$\Rightarrow \forall x > -1, \forall n \geq 2 ; \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1 - t + t^2 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1}) dt + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = \left[ t - \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n \right]_0^x + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

b. Déduire de [2] que  $\forall x > 0 ; x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \dots \dots \dots [3]$

$$\forall x \in ]-1, 0[ ; x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 \dots \dots \dots [4]$$

$\forall x > 0$ , on a :

• Si  $n = 3 ; \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + (-1)^3 \int_0^x \frac{t^3}{1+t} dt = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \int_0^x \frac{t^3}{1+t} dt$

$$\Rightarrow \ln(1+x) - \left( x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) = - \int_0^x \frac{t^3}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 ; \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \dots (*)$$

• Si  $n = 2 ; \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + (-1)^2 \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt$

$$\Rightarrow \ln(1+x) - \left( x - \frac{1}{2}x^2 \right) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 ; x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \dots (**)$$

De (\*) et (\*\*) on déduit que  $\forall x > 0 ; x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \dots [3]$ .

$\forall x \in ]-1, 0[$ , on a :

• Si  $n = 2 ; \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + (-1)^2 \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt$

$$\Rightarrow \ln(1+x) - \left( x - \frac{1}{2}x^2 \right) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in ]-1, 0[ ; \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 \dots (***)$$

• Si  $n = 3 ; \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + (-1)^3 \int_0^x \frac{t^3}{1+t} dt = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \int_0^x \frac{t^3}{1+t} dt$

$$\Rightarrow \ln(1+x) - \left( x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) = - \int_0^x \frac{t^3}{1+t} dt \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in ]-1, 0[ ; x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \leq \ln(1+x) \dots (****)$$

De (\*\*\*) et (\*\*\*\*) on déduit que  $\forall x \in ]-1, 0[ ; x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 \dots [4]$ .

c. En utilisant [3] et [4] démontrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$  :

$$\bullet \text{ Si } x > 0 ; x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x ; \text{ donc d'après TG } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \forall x \in ]-1, 0[ ; x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}; \text{ donc d'après TG } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Partie B

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & ; x \in ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[ \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. a. Montrer que  $f$  est continue au point d'abscisse  $x_0 = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0). \text{ Donc } f \text{ est continue au point d'abscisse } x_0 = 0.$$

b. Montrer que  $f$  est dérivable en  $x_0 = 0$  puis calculer  $f'(0)$  (On pourra utiliser A. 2. c) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} = f'(0).$$

Donc  $f$  est dérivable en  $x_0 = 0$  et  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ .

2. Soit la fonction numérique  $u$  définie par :  $u(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$ .

a. Etudier les variations de  $u$  et montrer que :  $\forall x > -1, u(x) \leq 0$  :

$$u'(x) = 1 - \ln(x+1) + 1 = -\ln(x+1).$$

|         |    |   |           |
|---------|----|---|-----------|
| $x$     | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $u'(x)$ | +  | 0 | -         |
| $u(x)$  |    | 0 |           |

$\Rightarrow$  d'après le tableau de variation de  $u$  on a :  $\forall x > -1, u(x) \leq u(0) \Rightarrow \forall x > -1, u(x) \leq 0$ .

Donc  $\forall x > -1, u(x) \leq 0$ .

b. Vérifier que  $\forall x \in ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[, f'(x) = \frac{u(x)}{x^2(x+1)}$  :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \times x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{u(x)}{x^2(x+1)}.$$

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  :

Le signe  $f'(x)$  est celui de  $u(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x} \times \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -1(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 0 \times 1 = 0.$$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | -1        | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 0         |

Partie C

On considère la fonction numérique  $g$  définie par :  $\begin{cases} g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a. Montrer que  $g$  est définie sur  $D = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$  :

|                 |           |    |   |           |
|-----------------|-----------|----|---|-----------|
| $x$             | $-\infty$ | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $1+x$           | -         | 0  | + | +         |
| $x$             | -         | -  | 0 | +         |
| $\frac{1+x}{x}$ | +         | 0  | - | +         |

$$x \in D_g \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[. \text{ Donc } g \text{ est définie sur } D = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$$

h. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  à droite du point d'abscisse  $x_0 = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0 = g'_d(0).$$

Donc  $g$  est continue à droite du point d'abscisse  $x_0 = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left( \frac{1+x}{x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{x} = +\infty.$$

Donc  $g$  n'est pas dérivabilité à droite du point d'abscisse  $x_0 = 0$ .

2. a. Calculer  $g'(x)$  puis vérifier que  $g$  est croissante sur  $D$  :

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} f' \left( \frac{1}{x} \right) > 0. \text{ Donc } g \text{ est décroissante sur } D.$$

b. Du tableau de variation de  $f$ , déduire celui de  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f \left( \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f \left( \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = +\infty.$$

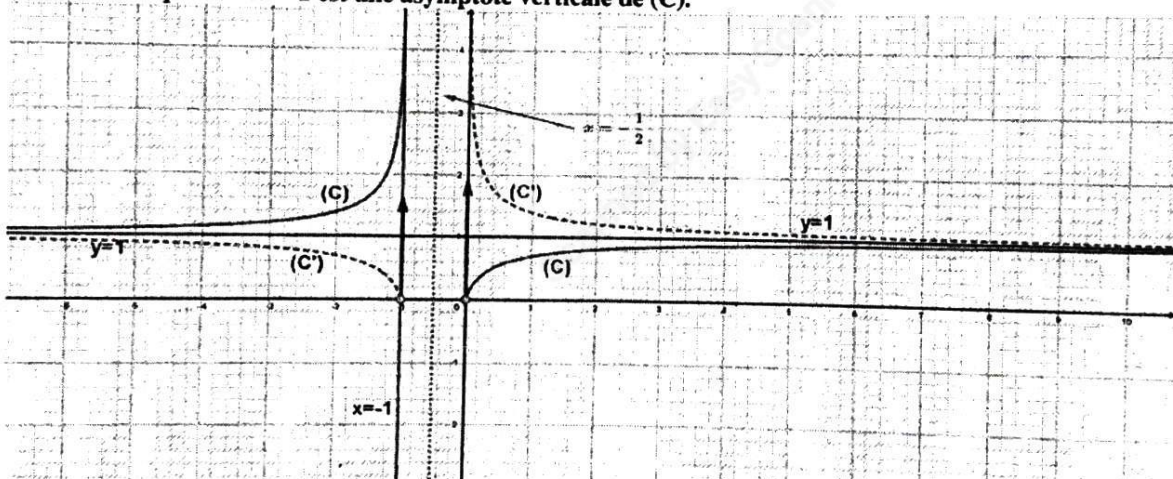
|         |           |           |     |           |
|---------|-----------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$      | $0$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $+$       |           |     | $+$       |
| $g(x)$  |           | $+\infty$ |     | $1$       |

c. Construire la courbe  $(C)$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = +\infty \Rightarrow (C) \text{ admet une demi tangente verticale orientée vers le haut.}$$

La droite d'équation  $y=1$  est une asymptote horizontale de  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$ .

La droite d'équation  $x=-1$  est une asymptote verticale de  $(C)$ .



3. On considère la transformation  $\sigma$  du plan dans lui-même qui associe à tout point  $M(x,y)$  le point  $M(x',y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = y \end{cases}$$

On pose  $\sigma(C) = (C')$  et soit  $h$  la fonction numérique dont la courbe représentative est  $(C')$ , dans le repère précédent.

a. Déterminer l'expression de  $h(x)$  et vérifier que  $h(x) = g(-x-1)$  :

$$(C) : y = g(x) = x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right) \Rightarrow y' = (-x' - 1) \ln \left( \frac{1-x'-1}{-x'-1} \right) = (-x' - 1) \ln \left( \frac{-x'}{-x'-1} \right) = -(x' + 1) \ln \left( \frac{x'}{x'+1} \right) = (x' + 1) \ln \left( \frac{x'+1}{x'} \right) \Rightarrow y' = h(x'). \text{ Donc } h(x) = (x + 1) \ln \left( \frac{x+1}{x} \right)$$

$$\text{Or } g(-x-1) = (-x-1) \ln \left( \frac{1-x-1}{-x-1} \right) = (-x-1) \ln \left( \frac{x}{-x-1} \right) = (x+1) \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) = h(x).$$

D'où  $h(x) = g(-x-1)$ .

b. Du tableau de variation de  $g$  déduire celui de  $h$  :

$$h'(x) = -g'(-x-1) < 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(-x-1) = \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(-x-1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(-x-1) = \lim_{t \rightarrow -1^-} g(t) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(-x-1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0.$$

|       |           |    |           |           |
|-------|-----------|----|-----------|-----------|
| x     | $-\infty$ | -1 | 0         | $+\infty$ |
| h'(x) | -         |    |           | -         |
| h(x)  | 1         |    | $+\infty$ | 1         |

c. Vérifier que  $\sigma$  est la réflexion d'axe  $\Delta$  d'équation  $x = \frac{-1}{2}$ . Déduire la construction de (C') à partir de (C) dans le repère précédent :

On pose  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ;  $\begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow z' = -\bar{z} - 1$  c'est l'écriture complexe de  $\sigma$ .

M est invariant  $\Leftrightarrow M' = M \Leftrightarrow z' = z \Rightarrow z = -\bar{z} - 1 \Rightarrow z + \bar{z} = -1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$ .

Donc L'ensemble des points invariants par  $\sigma$  est la droite  $\Delta$  d'équation  $x = \frac{-1}{2}$ .

$\sigma$  est un antidéplacement d'après son écriture complexe.

Donc  $\sigma$  est la réflexion d'axe  $\Delta$  d'équation  $x = \frac{-1}{2} \Rightarrow (C')$  est l'image de (C) par la réflexion d'axe  $\Delta$  (voir la figure).

4. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$  on pose  $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ;  $V_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ .

a. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$  :  $g(n) \leq 1 \leq h(n)$ , en déduire que  $U_n \leq e \leq V_n$  :

D'après le tableau de variation de  $g$  on a :  $\forall n \geq 2, g(n) \leq 1$  et d'après celui de  $h$  on a :  $\forall n \geq 2, h(n) \geq 1$ .

Donc  $\forall n \geq 2, g(n) \leq 1 \leq h(n) \Rightarrow n \ln \left(\frac{1+n}{n}\right) \leq 1 \leq (n+1) \ln \left(\frac{n+1}{n}\right) \Rightarrow n \ln \left(\frac{1+n}{n}\right) \leq \ln e \leq (n+1) \ln \left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\Rightarrow \ln \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \leq \ln e \leq \ln \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow U_n \leq e \leq V_n$ .

b. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$  :  $1 \leq \frac{e}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{n}$ , en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

$\forall n \geq 2, U_n \leq e \leq V_n \Rightarrow 1 \leq e \leq \frac{V_n}{U_n} \Rightarrow 1 \leq e \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow 1 \leq \frac{e}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{n}$ .

Donc  $\forall n \geq 2, 1 \leq \frac{e}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{n}$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{U_n} = 1$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e$ .

c. Montrer que les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont adjacentes :

•  $(U_n)$  est croissante et  $(V_n)$  est décroissante car  $U_n = e^{g(n)}$  et  $V_n = e^{h(n)}$

•  $(U_n)$  est majorée et  $(V_n)$  est minorée car  $U_2 \leq U_n \leq e \leq V_n \leq V_2$

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - 1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ .

Donc les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont adjacentes.

U<sup>y</sup>

Fin

Bonne compréhension

et

Bonne réussite

