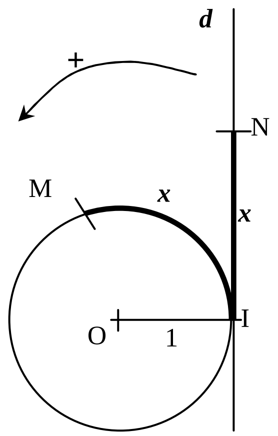
FICHE n°15
Trigonométrie

I. Se repérer sur le cercle trigonométrique (2nde)

L'idée



On enroule la droite ***d*** autour d'un cercle de centre O et de rayon 1 comme ci-dessus.
A chaque point N d'abscisse ***x*** sur la droite d correspond alors un seul point M(***x***) tel que la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{IM}}$ soit égale à ***x***.
On peut enrouler la droite dans deux sens différents.
Le sens contraire des aiguilles d'une montre est appelé ***sens direct***.

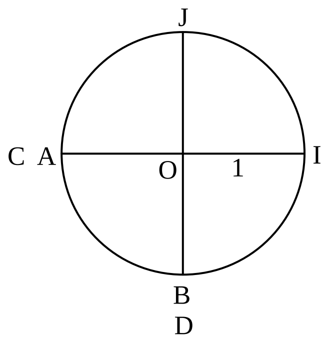
Définition On appelle ***cercle trigonométrique*** un cercle de rayon 1 gradué par l'enroulement de la droite ***d*** dans le sens direct.

Remarque Comme il est de rayon 1, le périmètre d'un cercle trigonométrique est 2π.

EXERCICE TYPE 1 **Placer un point sur le cercle trigonométrique**

Placer sur le cercle trigonométrique les points J, A, B, C et D repérés respectivement par les réels :
$\frac{\pi}{2}$; π ; $-\frac{\pi}{2}$; 7π et $\frac{3\pi}{2}$.

Solution



Remarque - propriété Comme un « tour » de cercle trigonométrique mesure 2π,

pour tout entier ***k***, les points M(***x***) et M(***x***+2***k***π) sont confondus.

2***k***π représente ***k*** tours entiers du cercle trigonométrique…

II. *Mesurer un angle en radian*

<u>*Définition*</u> Sur le cercle trigonométrique, le point M tel que la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$ soit égale à 1 permet de définir le radian comme la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ ainsi obtenu.

<u>*Autrement dit*</u> La mesure en radian d'un angle $\widehat{IOM}$ correspond à la longueur de l'arc de cercle associé $\overset{\frown}{IM}$.

<u>*Propriété*</u> La mesure d'un angle ainsi défini en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés.

<u>***EXERCICE TYPE 2***</u> **Conversion degrés / radians**

1. Convertir $\frac{2\pi}{5}$ en degrés.
2. Convertir 105° en radians.

<u>*Solution*</u> Il suffit de représenter la situation de proportionnalité.

1.

Radians	$\boldsymbol{\pi}$	$\frac{2\pi}{5}$
Degrés	**180**	$\frac{2}{5}\times 180 = \mathbf{72°}$

2.

Radians	$\boldsymbol{\pi}$	$\frac{105}{180}\pi = \boldsymbol{\frac{7}{12}\pi}$
Degrés	**180**	105

<u>*Valeurs remarquables*</u> *(à savoir)*

Radians	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
Degrés	180	90	60	45	30

<u>*Définition*</u> La ***mesure principale*** d'un angle en radians est sa mesure dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

<u>***EXERCICE TYPE 3***</u> **Trouver la mesure principale d'un angle**

Déterminer la mesure principale des angles de mesures respectives $\frac{55\pi}{6}$ et $-\frac{17\pi}{3}$.

<u>*Solution*</u> ¤ *On calcule une valeur approchée de la fraction :*

$\frac{55}{6} \approx 9{,}2$ | $-\frac{17}{3} \approx -5{,}7$

¤ *On en déduit un encadrement de la mesure de l'angle :*

$9\pi < \frac{55\pi}{6} < \mathbf{10\pi}$ | $\mathbf{-6\pi} < -\frac{17\pi}{3} < -7\pi$

¤ *On soustrait ou ajoute un <u>nombre **pair** de tours</u> pour obtenir* $-\pi < \ldots \leq 0$ ou $0 \leq \ldots \leq \pi$:

$\boldsymbol{-\pi} < \frac{55\pi}{6} - 10\pi \leq \mathbf{0}$ | $\mathbf{0} \leq -\frac{17\pi}{3} + 6\pi \leq \boldsymbol{\pi}$

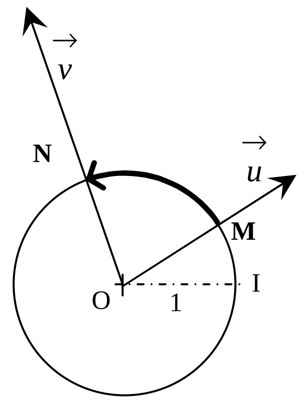
¤ *On calcule alors la mesure principale de l'angle :*

$\frac{55\pi}{6} - 10\pi = \frac{55\pi}{6} - \frac{60\pi}{6} = \boldsymbol{-\frac{5\pi}{6}}$ | $-\frac{17\pi}{3} + 6\pi = -\frac{17\pi}{3} + \frac{18\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

<u>*Remarque*</u> On note parfois : $\frac{55\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ ou encore $\frac{55\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6}\ \mathrm{mod}(2\pi)$

« modulo 2π »

III. *Angles orientés de vecteurs*



<u>*Définition*</u> Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Le couple $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est appelé ***angle orienté de vecteurs***.

<u>*Définition*</u> En représentant ces deux vecteurs depuis le point O, centre du cercle trigonométrique, la ***mesure de l'angle orienté*** $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est défini comme la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ orienté dans le sens direct.

<u>*Remarque*</u> Cette définition permet de relier la mesure d'un angle orienté de vecteurs aux mesures d'angles en radians comme exposé précédemment. On a en particulier les premières propriétés suivantes :

<u>*Propriétés*</u>

¤ La ***mesure principale*** d'un angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est celle comprise dans l'intervalle]–π ; π].

¤ $(\vec{u}\ ;\ \vec{u}) \equiv 0\ [2\pi]$ *(angle nul)*

¤ $(\vec{u}\ ;\ -\vec{u}) \equiv (\vec{u}\ ;\ -\vec{u}) \equiv \pi\ [2\pi]$ *(angle plat)*

¤ $(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) \equiv (\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ [2\pi]$ *(opposés par le sommet)*

¤ $(\vec{v}\ ;\ \vec{u}) \equiv -(\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ [2\pi]$ *(sens contraire)*

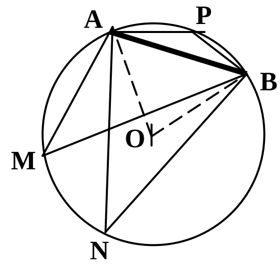
¤ $(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \equiv (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$ *(supplémentaires)*

¤ Si k et k' sont de même signe, alors $(k\vec{u}\ ;\ k'\vec{v}) \equiv (\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ [2\pi]$

<u>*Propriétés géométriques*</u> ¤ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des ***vecteurs colinéaires*** si, et seulement si, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \equiv 0$ **mod π**

¤ $(OM) \perp (ON)$ si, et seulement si, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ **mod π**

<u>*Interception d'une corde*</u>



¤ $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{NA}\ ;\ \overrightarrow{NB}) \equiv (\overrightarrow{PA}\ ;\ \overrightarrow{PB}) + \pi\ [2\pi]$

¤ $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}) \equiv 2\,(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$

<u>RELATION DE CHASLES</u> (admise)

$$\boxed{(\vec{u}\ ;\ \vec{w}) \equiv (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + (\vec{v}\ ;\ \vec{w})\ [2\pi]}$$

<u>EXERCICE TYPE 4</u> **Une situation géométrique**

On considère un triangle ABC tel que AB = 7 cm ; $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}) = \frac{7\pi}{12}$.

Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC})$, puis construire le triangle ABC.

On introduit ce vecteur pour pouvoir utiliser les données du problème…

<u>*Solution*</u>

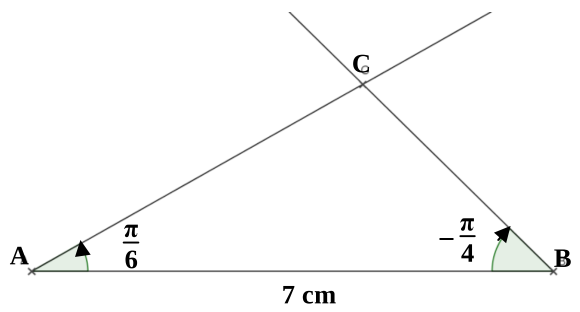
$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BC})$ *d'après la relation de Chasles*

$$= (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) + \pi + (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{\pi}{6} + \pi + \frac{7\pi}{12}$$

$$= \frac{2\pi}{12} + \frac{12\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}$$

$$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = \frac{21\pi}{12} = \frac{7\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}\ \mathrm{mod}(2\pi)$$

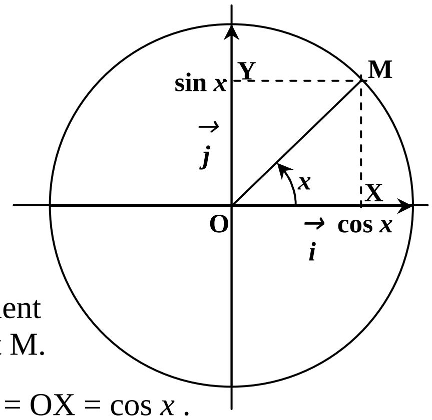


IV. *Cosinus et sinus : définitions et propriétés*

Dans ce paragraphe, on munit le plan d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

- ***orthonormé***, c'est-à-dire dont les axes sont perpendiculaires et où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ indiquent une même unité ;

- ***direct***, c'est-à-dire tel que $(\vec{i}, \vec{j}) = +\dfrac{\pi}{2}$



<u>*Définition*</u> Soit x un réel et M le point associé sur le cercle trigonométrique.
¤ le ***cosinus de x***, noté ***cos x***, est l'abscisse du point M ;
¤ le ***sinus de x***, noté ***sin x***, est l'ordonnée du point M ;

<u>*Remarque*</u> Cette définition est cohérente avec celle donnée au collège qui reste valable. En effet, notons X et Y les points situés respectivement sur les axes des abscisses et des ordonnées correspondant au point M.

Avec la définition du collège, on a : ¤ $\cos \widehat{XOM} = \dfrac{OX}{OM} = \dfrac{OX}{1} = OX = \cos x$.

¤ $\sin \widehat{XOM} = \dfrac{OY}{OM} = \dfrac{OY}{1} = OY = \sin x$.

<u>*Propriétés*</u> Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$:

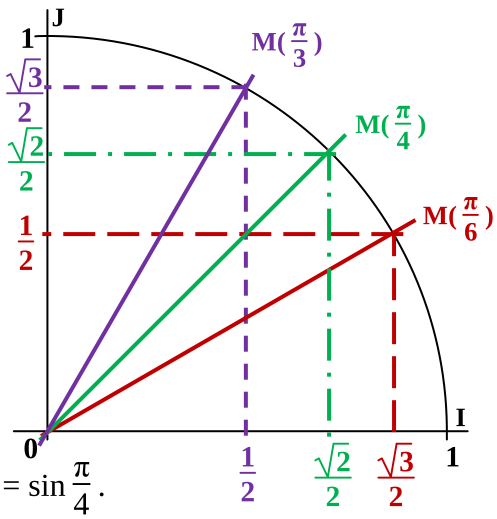
2*kπ* = *k* tours

Théorème de Pythagore dans le triangle XOM…

$-1 \leq \cos x \leq 1$	$\cos(x+2k\pi) = \cos x$	
$-1 \leq \sin x \leq 1$	$\sin(x+2k\pi) = \sin x$	$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

<u>*Valeurs remarquables*</u> *(à savoir)*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



<u>*preuves*</u> *:* ¤ Pour $\frac{\pi}{4}$, le triangle OXM est isocèle en X d'où : $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$.

Par ailleurs, on sait que $(\cos\frac{\pi}{4})^2 + (\sin\frac{\pi}{4})^2 = 1$, soit $(\cos\frac{\pi}{4})^2 = \frac{1}{2}$.

Enfin comme $\cos\frac{\pi}{4} > 0$, on a donc : $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc aussi $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

¤ Pour $\frac{\pi}{3}$, le triangle OIM est équilatéral (puisque OM = OI et que $\widehat{IOM} = 60°$…).

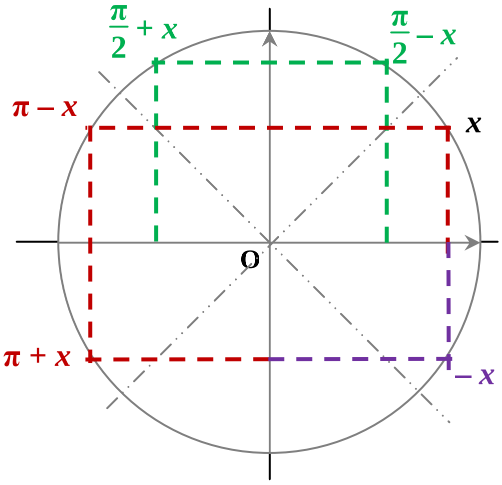
On sait alors que le point X, pied de la hauteur issu de M est le milieu de [AI], donc $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Comme $(\cos\frac{\pi}{3})^2 + (\sin\frac{\pi}{3})^2 = 1$, on a alors $(\frac{1}{2})^2 + (\sin\frac{\pi}{3})^2 = 1$, …*calculs*… d'où $\sin\frac{\pi}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Etant donné que $\frac{\pi}{3} \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, $\sin\frac{\pi}{3} \geq 0$. On a donc finalement : $\sin\frac{\pi}{3} = +\frac{\sqrt{3}}{2}$

¤ Pour $\frac{\pi}{6}$, même raisonnement que pour $\frac{\pi}{3}$, à partir du triangle équilatéral JOM…

V. *Angles associés dans le cercle trigonométrique*



Pour n'importe quelle mesure x de l'angle !

<u>Propriétés</u> *(à savoir)* ***Angles associés***

$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$	
$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

<u>preuves</u> : En utilisant symétries axiales et centrales dans le cercle trigonométrique…

<u>EXERCICE TYPE 5</u> **Déterminer le cosinus et le sinus d'angles associés**

1. Déterminer les valeurs de $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

2. a. Montrer qu'il existe un nombre réel θ tel que $\cos(\theta) = -0{,}8$ et $\sin(\theta) = 0{,}6$.

b. Déterminer les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.

<u>Solution</u>

1. ¤ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

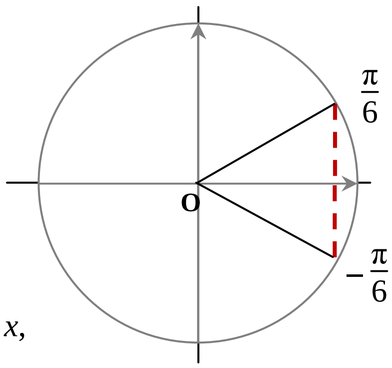
¤ $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

¤ $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. a. Pour qu'il existe un tel nombre réel θ, il suffit de vérifier que $M(-0{,}8 ; 0{,}6)$ soit bien un point du cercle trigonométrique : $OM^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = (-0{,}8)^2 + 0{,}6^2 = 0{,}64 + 0{,}36 = 1$.
Il existe donc un tel nombre réel θ…

b. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = -0{,}8$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta = -0{,}6$

<u>EXERCICE TYPE 6</u> **Résoudre une équation du type $\cos x = \cos a$**



Résoudre <u>dans ℝ</u> l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Solution</u> On sait que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Autrement dit, l'équation à résoudre est $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$.

A partir du cercle trigonométrique et de la relation *cos* $(-x)$ = *cos* x,

on peut conclure que les solutions de l'équation $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$ sont :

¤ soit $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ¤ soit $x = -\frac{\pi}{6} + 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

On note : $\mathbf{S} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2p\pi \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \ ,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

<u>Remarque</u> Cette équation a donc une infinité de solutions dans ℝ mais n'a que deux solutions dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ (mesures principales…).