IVAN-MAKOSSO

PAR SEYNI "JOSEPH"

L'Enfant Intelligent

Mathématiques

1ère

ACTIVITES NUMERIQUES

C,D & E

Résumé de cours, Exercices et solutions

SEYFI "Joseph"

L'Enfant Intelligent

Mathématiques

1ère

Résumé de cours
Exercices et solutions

Série C.D.E

ACTIVITES NUMERIQUES

Avant-propos

Ce nouveau fascicule de Mathématiques, édition 2020 est un véritable guide, une feuille de route, un chef-d'œuvre pour les élèves de la Première qui s'en serviront.

Il est élaboré par un professionnel de l'enseignement général. **Conçu pour que l'élève de** Première **soit capable d'affronter correctement les évaluations**. Adapté au nouveau programme, ce document répond aux normes d'évaluation de la pédagogie par objectif (P.P.O).

La science progressant par erreurs corrigées, nous sommes très ouverts à vos critiques et contributions afin de nous aider à soigner les prochaines productions.

Olinga MOUELET

EQUATIONS, INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

EQUATIONS, INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

Ivan Makosso

Polynômes du second degré

Cas général

On donne les nombres réels a, b et c (a différent de zéro). On considère le polynôme $\mathrm{P}(x)$ définit par :

$\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$

On se propose de rechercher les racines de $\mathrm{P}(x)$ et d'étudier le signe de ce polynôme.

Forme canonique du polynôme $\mathrm{P}(x)$

$\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ car : $a \neq 0$

$\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ car : $\Delta = b^2 - 4ac$

Δ est appelé le discriminant de $\mathrm{P}(x)$.

Recherche des racines de $\mathrm{P}(x)$ et étude de son signe

1er cas : $\Delta > 0$

On a : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

La forme factorisée s'écrit alors : $\mathrm{P}(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Signe du polynôme $\mathrm{P}(x)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\mathrm{P}(x)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

2ème cas : $\Delta = 0$

On a : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

La forme factorisée est : $\mathrm{P}(x) = a(x - x_0)^2$

Signe du polynôme $P(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	signe contraire ($-a$)	0	signe de a

3ème cas : $\Delta < 0$

Racines et factorisation du polynôme $P(x)$.

On a : $P(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$

De plus : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ et $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$

Donc : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$

Par conséquent :

- $P(x)$ n'admet pas de racine ;
- Pour tout nombre réel x. $P(x)$ est du signe de a.
- On ne peut écrire $P(x)$ comme produit de polynômes du 1er degré.

Remarque :

On retiendra que : $ax^2 + bx + c$ est un signal de a sauf dans l'intervalle de ses racines.

Méthode :

Pour résoudre une équation du second degré (E) :$P(x) = 0$, on peut utiliser :

- Une forme factorisée de $P(x)$;
- Une forme canonique de $P(x)$;
- Une racine évidente de $P(x)$;
- Le discriminant de (E).

Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $\Delta > 0$, on a : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Posons $S = x_1 - x_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Propriété :

Si x_1 et x_2 sont les solutions d'une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

Déterminons des nombres x et y connaissant leur somme S et leur produit P.

Pour cela, résolvons le système :

$$(\Sigma) : \begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \quad ; \quad (\Sigma') : \begin{cases} y = S - x \\ x^2 - Sx + P = 0 \end{cases}$$

On appelle résolvante du système, l'équation (E) : $x^2 - Sx + P = 0$.

Résoudre l'équation (E) suivant le signe de son discriminant $S^2 - 4P$ et conclure.

Méthode :

Pour déterminer des nombres réels dont on connait la somme S et le produit P.

- On vérifie que : $S^2 - 4P > 0$;
- On ressort l'équation du second degré (E) : $x^2 - Sx + P = 0$;
- Les nombres réels recherchés sont les solutions de l'équation (E).

Equation du second degré avec paramètre

Méthode :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type (E) : $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c dépendent d'un paramètre ;

On peut procéder de la manière suivante :

- On étudie éventuellement les cas où l'équation (E) n'est pas du second degré ($a = 0$) ;
- On étudie éventuellement les cas où l'équation (E) est du second degré ($a \neq 0$) ;
- On calcule le discriminant Δ.
- On étudie le signe de Δ suivant les valeurs du paramètre ;
- On détermine dans chaque cas le nombre de solutions et on calcule ces solutions.

Equations et inéquations irrationnelles

Equations et inéquations du type $\sqrt{P(x)} = Q(x)$; $\sqrt{P(x)} < Q(x)$.

$\sqrt{b} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b = a^2 \end{cases}$; $\sqrt{b} < a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b < a^2 \end{cases}$

Plus généralement

L'équation irrationnelle du type $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ a le même ensemble de solution que le système :

$$\Leftrightarrow : \begin{cases} P(x) \geq 0 & (1) \\ Q(x) \geq 0 & (2) \\ P(x) = (Q(x))^2 & (3) \end{cases}$$

Résolutions d'inéquations irrationnelles

Inéquations du type : $\sqrt{P(x)} > k$ ou $\sqrt{P(x)} < k$

	$(I_1) : \sqrt{P(x)} > k$	$(I_1) : \sqrt{P(x)} < k$
Pour $k < 0$	(I_1) a le même ensemble de solution que l'inéquation $P(x) > k^2$	(I_2) a le même ensemble de solutions que le système : $0 \leq P(x) < k^2$
Pour $k > 0$	(I_1) a le même ensemble de solution que l'inéquation $P(x) \geq 0$	(I_2) n'a pas de solution.

EXERCICES : EQUATIONS, INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux :

1) Soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$; si $a > 0$ alors l'équation (E) admet toujours au moins une solution ;
2) Le discriminant réduit est égal à la moitié du discriminant ;
3) Le déterminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c$ est le nombre $b^2 + 4ac$.

4) Si x_1 et x_2 sont deux racines de l'équation $(E) : ax^2 + bx + c = 0$, alors on peut écrire $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
5) Si x_1 et x_2 sont deux racines de l'équation $(E) : ax^2 + bx + c = 0$, alors on peut écrire :
   a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
   b) $x_1 \times x_2 = -\frac{c}{a}$
6) **S** et **P** sont deux réels donnés. Le système $\begin{cases} x + y = 0 \\ x.y = 0 \end{cases}$ admet toujours des solutions.
7) Sans faire de calculs, on peut dire que l'équation $x^2 - x - 5 = 0$ admet deux solutions.
8) Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ admet deux solutions ; la plus petite est : $-\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
9) Le réel a est racine du polynôme, P si et seulement si on peut mettre en facteur $(x - a)P(x)$
10) Le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours le signe de a, sauf lorsque $\Delta > 0$ et lorsque x est entre les racines.

Exercice 2:Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation bicarrée a); puis factorise si possible b)

a) $(E) : x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
b) $(E) : x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(3x + 2)^2 = 4(2x - 5)^2$
b) $\sqrt{2}x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1 = 0$

Exercice 4: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante $(I) : x^4 - 5x^2 + 6 \leq 0$

Exercice 5: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$
b) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-5}{x-1}$

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) tel que :

$(E) : \sqrt{(x+1)(3-x)} = 3x - 1$

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) tel que :

$(I) : \sqrt{-2x^2+5x+3} < 2x+1$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sqrt{x+2} = 4$

b) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{4x+4} = \sqrt{7}$

Exercice 9

1) Etudier le signe de $x^2 - 4x$ suivant les valeurs de x

2) Résoudre l'équation $|x^2 - 4x| - 2x + 5 = 0$.

Exercice 10 :Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $5x - 4\sqrt{x} - 9 = 0$

Exercice 11 :Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ xy=\frac{1}{6} \end{cases}$

Exercice 12 : Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=2 \\ xy=35 \end{cases}$

Exercice 13 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\frac{2x+3}{5x-2} \geq 0$

b) $\frac{x-1}{x+1} > 2x$

Exercice 14: On donne l'équation $2x^3 + 4x^2 - 7x + 1 = 0$

1) Vérifier qu'elle admet 1 pour racine.

2) Déterminer deux réels a et b tels que les polynômes $2x^3 + 4x^2 - 7x + 1$ et $2(x-1)(x^2+ax+b)$ soient égaux.

3) Résoudre complètement l'équation donnée.

Exercice 15: Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs du paramètre m, les équations suivantes :

a) $x^2 - (m+1)x + m = 0$

b) $(m^2-4)x^2 - 2(m+2)x + (m-1) = 0$

Exercice 16: On considère le polynôme : $P(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 8$

Il a trois racines a, b et c sans calculer les racines, déterminer $a+b+c$; abc ; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Exercice 17

1) Résoudre l'équation (E): $3x^2 - 5x - 2 = 0$

2) En déduire les solutions de l'équation : (E'): $3x^4 - 5x^2 - 2 = 0$

Exercice 18

m désigne un nombre réel, résoudre dans $\mathbb{R}$ et suivant les valeurs du paramètre m l'équation :

$(E_m) : (1-m)x^2 - 2mx - (m+2) = 0$

SOLUTIONS: EQUATIONS, INEQUATIONS DU 2nd DEGRE

Solution 1: Répondre par vrai ou faux :

1) Faux
2) Faux
3) Faux, il s'agit du discriminant
4) Faux
5)
   a) Vrai
   b) faux
6) Faux
7) Vrai
8) Faux : Si $a < 0$ la plus petite est $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
   Si $a > 0$ la plus petite est $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,
9) Vrai
10) Vrai.

Solution 2: Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation bicarrée

a) (E) : $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

On pose $x = x^2$, alors l'équation devient :

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2$; $\Delta > 0$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{5^2}}{2(1)} = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} \Rightarrow x_1 = -1$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{5^2}}{2(1)} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$

On a : $x^2 = x$

Pour $x = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} \Rightarrow$ la racine de -1 n'existe pas.

Pour $x = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

d'où $S = \{-2 ; 2\}$

b) (E) : $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

On pose $x = x^2$,

On a : $x^4 - 3x^2 - 4 = x^2 - 3x - 4$

$= (x + 1)(x - 4)$

$= (x^2 + 1)(x^2 - 4)$

$= (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$

d'où $x^2 - 3x - 4 = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$

Solution 3: Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(3x + 2)^2 = 4(2x - 5)^2 \Leftrightarrow (3x + 2)^2 - 4(2x - 5)^2 = 0$

or on a la forme $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

alors $[(3x + 2) - 2(2x - 5)][(3x + 2) + 2(2x - 5)] = 0$

$[3x + 2 - 4x + 10][3x + 2 + 4x - 10] = 0$

$(-x + 12)(7x - 8) = 0$

On a : $-x + 12 = 0$ ou $7x - 8 = 0$

$-x = -12$ ou $7x = 8$

$x = 12$ ou $x = \frac{8}{7}$

$S = \left\{\frac{8}{7} ; 12\right\}$

b) $\sqrt{2}x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left[(1 - \sqrt{2})\right]^2 - 4(\sqrt{2})(-1) = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{2}-\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1+\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{2}-\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

$S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right\}$

Solution 4: Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $x^4 - 5x^2 + 6 \leq 0$

On pose $x = x^2$,

On a : $x^4 - 5x^2 + 6 = x^2 - 5x + 6$

$= (x - 2)(x - 3)$

Les racines du polynôme $x^4 - 5x^2 + 6$ sont donc : $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-2		+		+	0	−	0	+		+	
x^2-3		+	0	−		−		−	0	+	
x^4-5x^2+6		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

d'où $S = \{[-\sqrt{3}\,;-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}\,;\sqrt{3}]\}$

Solution 5

a) Les racines de cette équation sont naturellement cherchées dans l'ensemble de définition.

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;2\}$

Après réduction au même dénominateur, on a :

$\frac{-x^2+5x}{2(x-2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow -x^2+5x = 0 \Leftrightarrow x(-x+5) = 0$

$x = 0$ ou $-x+5 = 0$

$-x = -5$

$x = 5$

d'où $S = \{0\,;5\}$

b) Le domaine de définition :

avec $(x+1)(x-1) \neq 0$ alors $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$

$\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-5}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)(x-1) = (2x-5)(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2 - x - x + 1 = 2x^2 + 2x - 5x - 5$

$x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - 2x + 5x + 5 = 0$

$-x^2 + x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-1)(6) = 1 + 24 = 25 = 5^2\,; \Delta > 0$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{5^2}}{2(-1)} = \frac{-1-5}{-2} = \frac{-6}{-2} \Rightarrow x_1 = 3$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{5^2}}{2(-1)} = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$

$S = \{-2\,;3\}$

Solution 6: Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :

(E) : $\sqrt{(x+1)(3-x)} = 3x - 1$

- Ensemble de validité de (E) est l'ensemble des solutions que le système répond : $(x+1)(3-x) \geq 0$ (1)

Dans l'ensemble de validité, l'équation (E) a le même ensemble de solutions que le système ci-dessous :

$$\begin{cases} 3x - 1 \geq 0 & (2) \\ (x+1)(3-x) = (3x-1)^2 & (3) \end{cases}$$

- L'équation (E) a donc le même ensemble de solutions que le système (Σ)

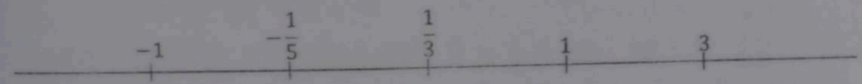
$$(\Sigma)\begin{cases} (x+1)(3-x) \geq 0 & (1) \\ 3x - 1 \geq 0 & (2) \\ (x+1)(3-x) = (3x-1)^2 & (3) \end{cases}$$

- Résolvons le système :

(1) a pour ensemble de solutions : $[-1\,;3]$

(2) a pour ensemble de solutions : $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

(3) a pour ensemble de solutions : $\left\{-\frac{1}{5}\,;1\right\}$



L'ensemble des solutions de (E), est $\{1\}$

Solution 7: Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) :

(I) : $\sqrt{-2x^2 + 5x + 3} < 2x + 1$

- L'ensemble de validité de (I) est l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$-2x^2 + 5x + 3 \geq 0$ (1)

Dans l'ensemble de validité, l'inéquation (I) a le même ensemble de solutions que le système ci-dessous :

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 & (2) \\ -2x^2 + 5x + 3 < (2x+1)^2 & (3) \end{cases}$$

- L'inéquation (I) a donc le même ensemble de solutions que le système (Σ)

$$(\Sigma)\begin{cases} -2x^2+5x+3 \geq 0 & (1) \\ 2x+1 \geq 0 & (2) \\ -2x^2+5x+3 < (2x+1)^2 & (3) \end{cases}$$

- Résolvons ce système :

(1) a pour ensemble de solutions : $\left[-\frac{1}{2} ; 3\right]$

(2) a pour ensemble de solutions : $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

(3) a pour ensemble de solutions : $\left[-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{2}{3} ; +\infty\right[$

d'où $S = \left[\frac{2}{3} ; 3\right]$

Solution 8: Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sqrt{x+2} = 4$

Pour $x \geq -2$, on a : $\sqrt{x+2} = 4 \Leftrightarrow x+2 = 4^2 \Rightarrow x = 4^2 - 2$

$\Rightarrow x = 16 - 2$

$\Rightarrow x = 14$

$S = \{14\}$

b) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{4x+4} = \sqrt{7}$

Pour $2x+3 \geq 0$ et $4x+4 \geq 0$, c'est-à-dire :

$2x \geq -3$ $\quad$ $4x \geq -4$

$x \geq -\frac{3}{2}$ $\quad$ $x \geq -\frac{4}{4}$

$x \geq -\frac{3}{2}$ et $x \geq -1$

L'équation équivaut à :

$2x+3-4x+4+2\sqrt{(2x+3)(4x+4)} = 7$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+3)(4x+4)} = -3x \Leftrightarrow \begin{cases}(2x+3)(4x+4) = 9x^2 \\ -3x \geq 0\end{cases}$

Or l'équation $(2x+3)(4x+4) = 9x^2$ s'écrit :

$x^2 - 20x - 12 = 0$, on a : $x_1 = 10 - \sqrt{112}$

d'où $S = \{10 - \sqrt{112}\}$

Solution 9

1) Etudions le signe de $x^2 - 4x$ suivant les valeurs de x

On a : $x^2 - 4x = x(x-4)$

Le polynôme $x \longmapsto x^2 - 4x$

admet donc deux racines $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 - 4x$		+	0	−	0	+	

2) Résolvons l'équation $|x^2 - 4x| - 2x + 5 = 0$.

Rappelons que $|x| <^{+x, si\ x\geq 0}_{-x, si\ x\leq 0}$

1er cas : $x^2 - 4x \geq 0$ d'après 1, $x \in]-\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty[$

L'équation devient $x^2 - 4x - 2x + 5 = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

Après résolution, on a : $x_1 = 5$ et $x_2 = 1$

2ème cas : $x^2 - 4x \leq 0$ d'après 1, $x \in [0 ; 4]$

On a : $-x^2 + 4x - 2x + 5 = 0$

$-x^2 + 2x + 5 = 0$

Après résolution, on a : $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{5}$

d'où $S = \{5 ; 1 + \sqrt{6}\}$

Solution 10: Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

On pose $t = x^2$ alors $x^4 - 13x^2 + 36 = t^2 - 13t + 36 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4(1)(36) = 169 - 144 = 25 > 0$

$t_1 = \frac{13-\sqrt{25}}{2} = 4$; $t_2 = \frac{13+\sqrt{25}}{2} = 9$

Si $t_1 = 4$; on a : $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Si $t_2 = 9$; on a : $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

d'où $S = \{-2 ; -3 ; 2 ; 3\}$

b) $5x - 4\sqrt{x} - 9 = 0$

On pose $X = \sqrt{x} \Rightarrow X^2 = x$

alors $5x - 4\sqrt{x} - 9 = 0$ devient $5X^2 - 4\sqrt{X^2} - 9 = 0$

$5X^2 - 4\sqrt{X^2} - 9 = 0 \Rightarrow 5X^2 - 4X - 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(5)(-9) = 49 = 7^2$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{7^2}}{2(5)} = \frac{-4-7}{10} = \frac{-11}{10}$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{7^2}}{2(5)} = \frac{-4+7}{10} = \frac{3}{10}$

d'où $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

Solution 11: Résolvons dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 7 \\ P = 10 \end{cases}$

soient x et y sont les racines de l'équation :

$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9 > 0$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$

d'où $S = \{(5\,;2)\,;(2\,;5)\}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ xy = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = 5 \\ xy = \frac{1}{6} \end{cases}$

Posons $S = x + y$ et $P = xy$, on a : $\begin{cases} \frac{S}{P} = 5 & (1) \\ P = \frac{1}{6} & (2) \end{cases}$

(2) dans (1), on a : $\frac{S}{\frac{1}{6}} = 5 \Leftrightarrow S = \frac{5}{6}$

On a : $P = \frac{1}{6}$ et $S = \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = \frac{1}{6} \end{cases}$

x et y sont les racines de l'équation $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$ de discriminant $\frac{1}{36}$ et de racines $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

$S = \left\{\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\right)\,;\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\right)\right\}$

Solution 13: Résolvons dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 20 \\ \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{5}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 20 \\ \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} = \frac{5}{2} \end{cases}$

Posons $S = x + y$ et $P = xy$,

Le système devient : $\begin{cases} S^2 - 2P = 20 & (1) \\ \frac{S^2-2P}{P} = \frac{5}{2} & (2) \end{cases}$

(2) : $\frac{S^2-2P}{P} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{20}{P} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 40 = 5P \Leftrightarrow P = \frac{40}{5} \Leftrightarrow P = 8$

(1) : $S^2 - 2P = 20 \Leftrightarrow S^2 - 2(8) = 20$

$\Leftrightarrow S^2 = 20 + 16 \Leftrightarrow S^2 = 36$

$S = \sqrt{36} \Leftrightarrow S = \pm 6$

- Si $S = -6$, on a : $\begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 8 \end{cases}$

Alors $x^2 + 6x + 8 = 0$ de racines $x_1 = -2$ et $y = -4$

$S = \{(-2\,;-4)\,;(-4\,;-2)\}$

- Si $S = 6$, on a : $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$

Alors $x^2 - 6x + 8 = 0$ de racines $x_2 = 2$ et $y = 4$

$S = \{(2\,;4)\,;(4\,;2)\}$

$\boxed{S = \{(-2\,;-4)\,;(-4\,;-2)\,;(2\,;4)\,;(4\,;2)\}}$

b) $\begin{cases} x-y=2 \\ xy=35 \end{cases}$

Notons $y' = -y \Rightarrow y = -y'$; on a : $\begin{cases} x+y'=2 \\ xy'=-35 \end{cases}$

Posons $S = x + y' = 2$ et $P = xy' = -35$

On a $x^2 - 2x - 35 = 0$ de racines $x = -5$ et $y' = 7$

d'où $S = \{(-5\,;\,7)\,;\,(7\,;\,-5)\}$

Solution 13: Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\frac{2x+3}{5x-2} \geq 0$

Pour tout $x \neq 0$, alors $5x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{2}{5}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$

L'inéquation $(2x+3)(5x-2) \geq 0$

On a : $2x + 3 \geq 0$ ou $5x - 2 \geq 0$

$2x \geq -3 \qquad 5x \geq 2$

$x \geq -\frac{3}{2} \qquad x \geq \frac{2}{5}$

d'où $S = \left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right] \cup \left]\frac{2}{5}\,;\,+\infty\right[$

b) $\frac{x-1}{x+1} > 2x$

$\frac{x-1}{x+1} - 2x > 0$ si et seulement si $x \neq -1$

$\frac{x-1}{x+1} - 2x > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-2x(x+1)}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2-x-1}{x+1} > 0$

avec $-2x^2 - x - 1 > 0$; $\Delta = -7 < 0$ donc $-2x^2 - x - 1 > 0$ est du signe de -2.

alors $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

donc $S =]-\infty\,;\,-1[$

Solution 14: On a : $2x^3 + 4x^2 - 7x + 1 = 0$

1) Vérifions qu'elle admet 1 pour racine.

$2(1)^3 + 4(1)^2 - 7(1) + 1 = 0$

$2 + 4 - 7 + 1 = 0$

$0 = 0$ Vrai

donc 1 est racine.

2) Déterminons deux réels a et b

$2(x-1)(x^2 + ax + b) = 2(x^3 + ax^2 + xb - ax - b)$

$2(x-1)(x^2 + ax + b) = 2x^3 + 2ax^2 + 2xb - 2x^2 - 2ax - 2b$

$2(x-1)(x^2 + ax + b) = 2x^3 + (2a-2)x^2 + (2b-2a)x - 2b$

$2x^3 + 4x^2 - 7x + 1 = 2x^3 + (2a-2)x^2 + (2b-2a)x - 2b$

Par identification :

$\begin{cases} 2a-2=4 \\ 2b-2a=-7 \\ -2b=1 \end{cases}$ qui donne $b = -\frac{1}{2}$ et $a = 3$

3) Résolvons complètement l'équation donnée.

On a : $2(x-1)\left(x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) = 0$

ce qui met en évidence ses racines :

$x_1 = 1\,;\, x_2 = \frac{-3-\sqrt{11}}{2}\,;\, x_3 = \frac{-3+\sqrt{11}}{2}$

Solution 15: Résolvons dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs du paramètre m

a) $x^2 - (m+1)x + m = 0$

$\Delta = (m+1)^2 - 4m = m^2 + 2m + 1 - 4m = m^2 - 2m + 1$

$= (m-1)^2 \geq 0$

2 solutions distinctes

$x_1 = \frac{m+1-\sqrt{(m-1)^2}}{2} = \frac{m+1-m+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x_2 = \frac{m+1+\sqrt{(m-1)^2}}{2} = \frac{m+1+m-1}{2} = \frac{2m}{2} = m$

Si $m = 1$, l'équation admet une solution double 1.

b) $(m^2-4)x^2 - 2(m+2)x + (m-1) = 0$

Si $m^2 - 4 = 0$, l'équation est du premier degré

$m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+2) = 0$

$m - 2 = 0$ ou $m + 2 = 0$

$m = 2$ ou $\qquad m = -2$

- Dans le cas où $m = -2$, on a : $-3 = 0$ impossible
- Dans le cas où $m = 2$, on a : $-8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$
- Si $m^2 - 4 \neq 0$, l'équation est du second degré.

$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2-4)(m-1) = (m+2) + (-m^2+4m)$
$\Delta' = m(m+2)(-m+4)$
Pour $x \in]-\infty\,;-2[\cup]0\,;4[\,;\ \Delta' > 0$ et l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{m+2-\sqrt{m(m+2)(-m+4)}}{m^2-4}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{m+2+\sqrt{m(m+2)(-m+4)}}{m^2-4}$$

Signe de Δ'

x	$-\infty$	-2		0		4	$+\infty$
m	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$m+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-m+4$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
Δ'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Pour $\Delta' = 0$, c'est-à-dire $m = 0$ ou $m = 4\ (m \neq 2)$, l'équation a une solution double.

Si $m = 0$, la solution est $-\frac{1}{2}$

Si $m = 4$, la solution est $\frac{1}{2}$

Pour $\Delta' < 0$, c'est-à-dire $m \in]-2;0[\cup]4\,;+\infty[$, il n'y a pas de solution.

Solution 16

Déterminons $a+b+c\,;abc\,;\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$
$\quad = x^3 - x^2(a+b+c) + x(ab+ac+bc) - abc$
$P(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 8$
Par identification, on a :

$$\begin{cases} -(a+b+c) = -4 \\ ab+ac+bc = -5 \\ -abc = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 4 \\ abc = -8 \\ ab+ac+bc = -5 \end{cases}$$

$$\frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{-5}{-8} \Rightarrow \frac{ab}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{bc}{abc} = \frac{5}{8}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8}$$

Enfin, $a+b+c = 4$
$abc = -8$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{5}{8}$

Solution 17

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)
(E): $3x^2 - 5x - 2 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49 = 7^2$
$\Delta > 0$ donc (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{7^2}}{2(3)} = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{7^2}}{2(3)} = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

2) Déduisons les solutions de l'équation (E') :
(E') : $3x^4 - 5x^2 - 2 = 0$
$3(x^2)^2 - 5x^2 - 2 = 0$

Posons $\mathrm{x} = x^2$
(E') devient $3\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} - 2 = 0$
$\Rightarrow \mathrm{x} = -\frac{1}{3}$ ou $= 2$
Si $\mathrm{x} = -\frac{1}{3}$; on a : $x^2 = -\frac{1}{3}$ pas des solutions car $-\frac{1}{3} < 0$
Si $\mathrm{x} = 2$; on a : $x^2 = 2 \Rightarrow \mathrm{x} = -\sqrt{2}\,;\ \mathrm{x} = +\sqrt{2}$
d'où $S = \{-\sqrt{2}\,;\ \sqrt{2}\}$

Solution 18: Résolvons dans $\mathbb{R}$
Soit (E_m) : $(1-m)x^2 - 2mx - (m+2) = 0$

1er cas : $m = 1$

On a : (E_1) : $(1-1)x^2 - 2(1)x - (1+2) = 0$

$$-2x - 3 = 0$$
$$-2x = 3$$
$$x = -\frac{3}{2}$$
$$S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

2ème cas : $m \neq 1$

(E_1) : $(1-1)x^2 - 2(1)x - (1+2) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(1-m)[-(m+2)] = 4(-m+2)$

Pour $m \in]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;2[$

L'équation (E_m) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{m-\sqrt{m+2}}{1-m}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{m+\sqrt{m+2}}{1-m}$

Pour $m \in = 2$

L'équation (E_2) admet une solution unique : -2

Pour $m \in]2\,;\,+\infty\,;[$

L'équation (E_m) n'admet pas de solution

Signe de discriminant

m	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$-m+2$	+	+	0	−
Δ	+	+	0	−

SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

Propriétés

Un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ admet un seul compte solution si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

On appelle système de deux équations linéaires à deux inconnues tous système qui peut si mettre sous la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels connus.

Résoudre un seul système, c'est déterminer tout les couples réels (x, y) vérifiant simultanément les deux équations.

Système de trois équations à trois inconnues

On considère le système : $(\sum)$: $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

où : x, y et z sont les inconnues

$(\sum)$ est appelé système de trois équations du premier degré (ou système linéaire) à trois inconnues.

Résoudre $(\sum)$, c'est déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient les trois équations.

Nous allons étudier deux méthodes de résolutions d'un tel système : par substitution et par le Pivot de Gauss.

Méthode

Pour résoudre un système de trois équations dans $\mathbb{R}^3$, on peut procéder comme suit :

- On élimine une des inconnues dans deux de trois équations ; pour cela :

- dans une des trois équations, on exprime une des inconnues en fonction des deux autres ;
- dans chacune des deux autres équations, on substitue cette inconnue par son expression ainsi trouvé ; on obtient deux nouvelles équations qui ne comportent plus que deux inconnues.

- On élimine une deuxième inconnue dans une des nouvelles obtenues ; pour cela :
  - dans une des nouvelles équations, on exprime une deux inconnues en fonction de l'autre.
  - dans l'autre nouvelle équation, on substitue cette inconnue par son expression ainsi trouvée.

On obtient un système triangulaire qu'il est aisé de résoudre.

Système d'inéquation à deux inconnues

- Résolution d'une inéquation linéaire à deux inconnues

Pour résoudre l'inéquation $ax + by + c \leq 0$ ou $ax + by + c \geq 0$, on étudie le signe de l'expression de $f(x,y) = ax + by + c$ puis on prend la zone répondant à la question.

Théorème :

Toute droite D d'un plan $\mathcal{P}$ dont une équation est $ax + by + c = 0$ partage ce plan en deux demi-plans ouverts :

- L'un est l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que $ax + by + c > 0$
- L'autre est l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que $ax + by + c < 0$.

Remarque

Pour déterminer pratiquement le signe d'une fonction polynôme $f : (x,y) \longmapsto ax + by + c$, il suffit de connaître le signe de $f(x_0,y_0)$; (x_0,y_0) étant le couple de coordonnées d'un point non élément de D. En général, si $0 \in D$ (la droite), on utilise le signe de $f(0,0)$.

EXERCICES : SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

Exercice 1: Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants :

a) $I = \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$

b) $II = \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ -x + \frac{3}{2}y = \frac{2}{3} \end{cases}$

Exercice 2 : Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x + (\sqrt{2} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{2} + 1)x + y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 12y = 4 \\ 7x - 21y = 7 \end{cases}$

Exercice 3: Résoudre le système (S)

$(S) \begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

Exercice 4 : Résoudre le système (S)

$(S) \begin{cases} 2x - y - 2z = 6 \\ x + y - z = 1 \\ x - 5y - z = 9 \end{cases}$

Exercice 5 : Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y+3} = 14 \\ \frac{5}{x-1} + \frac{4}{y+3} = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5xy + 3x = 44 \\ 2xy - 5x = -1 \end{cases}$

Exercice 6 : Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 5x + 8y - 5z = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

Exercice 7 : Résoudre graphiquement le système

$\begin{cases} 2x - 5y + 12 \geq 0 \\ x + 6y - 11 > 0 \\ 3x + y - 16 < 0 \end{cases}$

Exercice 8

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S)

$(S) \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$

2. Résoudre le système (S)

$(S) \begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \\ 2x + 3y + 7z = 10 \end{cases}$

Exercice 9: Résoudre le système suivant de trois équations:

$\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} \\ 2x - 3y + z = 3 \end{cases}$

Exercice 10: Résoudre suivant les valeurs du paramètre m, le système suivant:

$\begin{cases} mx + 3y = \sqrt{3} \\ x + my = 1 \end{cases}$

Exercice 11: Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x + 7y + 5z = 6 \\ x + 4y + z = 5 \\ 4x - y + 3z = 1 \end{cases}$

Exercice 12: Résoudre dans $\mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}$ le système

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4x - 3y - 5z = 2 \end{cases}$

Exercice 13: Résoudre le système (S)

$(S) : \begin{cases} \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{y-1} = 5 \\ \frac{3}{x+2} + \frac{4}{y-1} = -1 \end{cases}$

Exercice 14: Résoudre le système

$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 1 \\ x + z = -8 \end{cases}$

Exercice 15: m étant un nombre réel, résoudre suivant les valeurs du paramètre m le système :

$\begin{cases} -2x + m^2 y = m \\ x - my = 1 - m \end{cases}$

Exercice 16: Résoudre le système

$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$

Exercice 17: Résoudre le système

$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x + 2y = -5 \\ 5x + 8y = 1 \end{cases}$

Exercice 18: Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

SOLUTIONS : SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

Solution 1: Résolvons les systèmes

a) $I = \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$

$\det I = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2x4 - 3x3 = 8 - 9 = -1 \neq 0$

donc le système a une solution unique.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases} \begin{matrix} x - 3 \\ x\, 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 9y = -3 \\ 6x + 8y = 12 \end{cases}$$

$-y = 9$

$y = -9$

Remplaçons

y dans $2x + 3y = 1$

$2x + 3(-9) = 1$

$2x - 27 = 1$

$2x = 1 + 27$

$x = 14$

$\boxed{S = \{(14 ; -9)\}}$

b) $II = \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ -x + \frac{3}{2}y = \frac{2}{3} \end{cases}$

$\det I = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}x\frac{3}{2} - (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$;

donc le système a soit une infinité de solution soit n'a pas de solutions.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ -x + \frac{3}{2}y = \frac{2}{3} \end{cases} \Big| x\frac{-1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = -\frac{2}{9} \end{cases} \Longrightarrow ; \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$$

ne peut pas être à la fois égal à 1 et à $-\frac{2}{9}$; donc le système n'a pas de solution $S = \emptyset$.

Solution 2: Résolvons dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations

a) $\begin{cases} x + (\sqrt{2} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{2} + 1)x + y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$

$\det = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} + 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 2 + 1$

$= \sqrt{2} - 1 \neq 0$

donc le système a une solution unique.

$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} - 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2 = -\sqrt{2} + 2$

$x = \frac{D_n}{D} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2}$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} + 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - \sqrt{2} - 1 = 1 - \sqrt{2}$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = -1$

d'où $\boxed{S = \{(\sqrt{2} ; -1)\}}$

b) $\begin{cases} 4x - 12y = 4 \\ 7x - 21y = 7 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 7 & -21 \end{vmatrix} = 4(-21) - (7)(-12) = -84 + 84 = 0$;

donc le système a soit une infinité de solution soit n'a pas de solutions.

$$\begin{cases} 4x - 12y = 4 \\ 7x - 21y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x - 3y) = 4 \\ 7(x - 3y) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = \frac{4}{4} \\ x - 3 = \frac{7}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

Le système équivaut à $x - 3y = 1$, il admet donc une infinité de solutions.

Solution 3: Résolvons le système (S)

$$(S)\begin{cases} x+y-2z=7 & (E_1) \\ 2x-y+z=0 & (E_2) \\ 3x+y+z=8 & (E_3) \end{cases}$$

On déduit de l'équation (E_3) que $z=-3x-y+8$. On remplace z par $-3x-y+8$ dans les équations (E_1) et (E_2).
On obtient :

$$(S_1)\begin{cases} 7x+3y=23 \\ -x-2y=-8 \\ z=-3x-y+8 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} 7x+3y=23 \\ -x-2y=-8 \end{cases}$ a un unique couple solution : $(2\,;3)$.

On en déduit que : $z=-3(2)-3+8=-1$

d'où $\boxed{S=\{(2\,;3\,;\,-1)\}}$

Solution 4: Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ le système (S)

$$(S)\begin{cases} 2x-y-2z=6 & (E_1) \\ x+y-z=1 & (E_2) \\ x-5y-z=9 & (E_3) \end{cases}$$

On déduit de l'équation (E_1) que $y=2x-2z-6$. On remplace y par $2x-2z-6$ dans les équations (E_2) et (E_3).
On obtient :

$$(S_2):\Leftrightarrow\begin{cases} y=2x-2z-6 \\ 3x-3z=7 \\ -9x+9z=-21 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} 3x-3z=7 \\ -9x+9z=-21 \end{cases}$ a pour solution tous les couples $(x\,;y)$ de nombres réels tels que : $3x-3z=7$.
On donne à l'une des inconnues une valeur arbitraire, par exemple : $z\lambda=\lambda$.

On en déduit : $(S_2)\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{7}{3}+\lambda \\ y=-\frac{4}{3} \\ z=\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

Donc, l'ensemble des triplets solutions de S est :
$S=\left\{\left(\frac{7}{3}+\lambda\,;-\frac{4}{3}\,;\lambda\right)\right\}$

Solution 5: Résolvons dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} \frac{3}{x-1}+\frac{2}{y+3}=14 \\ \frac{5}{x-1}+\frac{4}{y+3}=5 \end{cases}$

Posons $X=\frac{1}{x-1}$ et $Y=\frac{1}{y+3}$, Le système dévient :

$\begin{cases} 3X-2Y=14 \\ 5X-4Y=5 \end{cases}$

or $\det=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=3(-4)-(5)(-2)=-12+10=-2\neq 0$;

donc ce système a une solution unique.
Ce système donne après résolution par une quelconque des méthodes vues $X=3$ et $Y=\frac{5}{2}$, ainsi :

$\frac{1}{x-1}=3\Rightarrow x=\frac{4}{3}$; $\frac{1}{y+3}=\frac{5}{2}\Rightarrow y=-\frac{13}{5}$

$S=\left\{\left(\frac{4}{3}\,;-\frac{13}{5}\right)\right\}$

b) $\begin{cases} 5xy+3x=44 \\ 2xy-5x=-1 \end{cases}$

Posons $Y=xy$ et $X=x$, Le système dévient :

$\begin{cases} 3X+5Y=44 \\ -5X+2Y=-1 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}=3(2)-5(-5)=6+25=31\neq 0$;

donc il y a une solution unique. Cette solution est $x = 3$ et $y = 7$, ainsi :

$x = 3\,;\, xy = 7 \Rightarrow 3y = 7 \Rightarrow \frac{7}{3}$

$S = \left\{\left(3\ ;\ -\frac{7}{3}\right)\right\}$

Solution 6 : Résolvons les systèmes d'équations suivants dans $\mathbb{R}^3$

a) $\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 5x + 8y - 5z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 - 4z \\ 5x + 8y = 9 + 5z \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1(8) - 5(-3) = 8 + 15 = 23 \neq 0\,;$

Il admet donc un couple $(x\,,y)$ solution et un seul.

On trouve $(x\,,y) = \left(\frac{-17z+35}{23}\,;\frac{25z+4}{23}\right)$ d'où :

$S = \left\{\left(\frac{-17z+35}{23}\,;\frac{25z+4}{23}\right)\right\}$ avec $z \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0\,;$

Pour tout réel z, il existe donc un couple unique de solution $(x\,,y)$. $x = \frac{D=\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 2-z & -1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{5}{2} - z$ et $y = \frac{D=\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2}$.

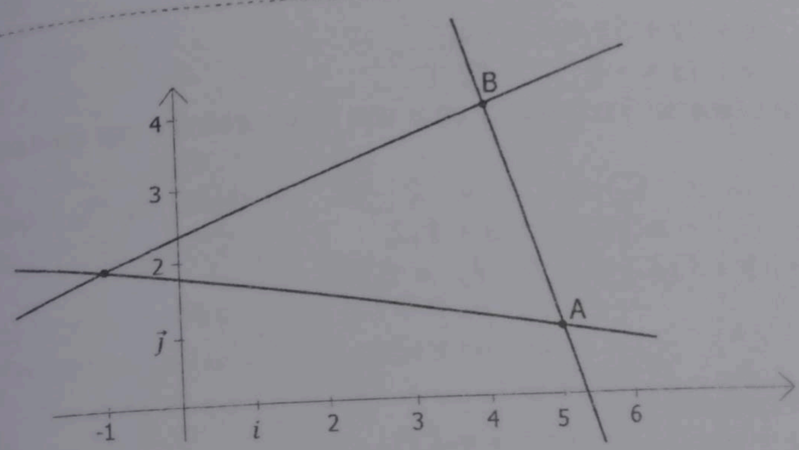
Le système devient : $\begin{cases} x = \frac{5}{2} - z \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$; $S = \left\{\left(\frac{5}{2} - z\,;\frac{1}{2}\right)\right\}$ avec $z \in \mathbb{R}$.

Solution 7: Résolvons graphiquement le système

$\begin{cases} 2x - 5y + 12 \geq 0 \\ x + 6y - 11 > 0 \\ 3x + y - 16 < 0 \end{cases}$

Traçons les droites $(\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{D}')$, $(\mathfrak{D}'')$ d'équations respectives : $2x - 5y + 12 = 0\,;\, x + 6y - 11 = 0$ et $3x + y - 16 = 0$.

Le point O $(0\,,0)$ n'appartient à aucune de ces droites.



Solution 8

1. Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ le système (S)

$(S)\begin{cases} x + y - 2z = 1 & (E_1) \\ x - 2y + z = 1 & (E_2) \\ -2x + y + z = 1 & (E_3) \end{cases}$

On obtient :

$(S_2)\begin{cases} x + y - 2z = 1 & (E_1) \\ 3y - 3z = 0 & (E_1) - (E_2) \\ 3y - 3z = 2 & 2(E_1) + (E_3) \end{cases}$

Le système $\begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 3y - 3z = 2 \end{cases}$ n'a pas de solution ; donc, le système (S_2) n'a pas de solution.

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système (S)

$(S)\begin{cases} x + 2y + 5z = 4 & (E_1) \\ x + y + 2z = 6 & (E_2) \\ 2x + 3y + 7z = 10 & (E_3) \end{cases}$

On obtient :

$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 4 & (E_1) \\ y + 3z = -2 & (E_2') = (E_1) - (E_2) \\ y + 3z = -2 & (E_3') = 2(E_1) - (E_3) \end{cases}$

$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 4 & (E_1) \\ y + 3z = -2 & (E_2') \end{cases}$

On donne à l'une des inconnues, y ou z, une valeur arbitraire, par exemple : $z = \lambda$.

On en déduit de (E_2') que : $y = -2 - 3\lambda$; on déduit de (E_1) que : $x = 4 - 2(-2 - 3\lambda) + 5\lambda = 8 + 11\lambda$.

d'où $S = \{(8 + 11\lambda ; -2 - 3\lambda ; \lambda) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solution 9

Résolvons le système $\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} \\ 2x - 3y + z = 3 \end{cases}$

Posons $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = t$ étant une constante.

On a :

$\frac{x}{4} = t \Rightarrow x = 4t$; $\frac{y}{3} = t \Rightarrow y = 3t$ et $\frac{z}{2} = t \Rightarrow z = 2t$

Remplaçons x, y et z par leur valeur dans l'équation $2x - 3y + z = 3$.

On a : $2(4t) - 3(3t) + 2t = 3$

$$8t - 9t + 2t = 3$$
$$10t - 9t = 3$$
$$t = 3$$

On trouve alors $x = 4 \times 3 = 12 \Rightarrow x = 12$

$$y = 3 \times 3 = 9 \Rightarrow y = 9$$
$$z = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow z = 6$$

$S = \{(12 ; 9 ; 6)\}$

Solution 10

Résolvons suivant les valeurs du paramètre m, le système suivant :

$\begin{cases} mx + 3y = \sqrt{3} \\ x + my = 1 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3 = (m - \sqrt{3})(m + \sqrt{3})$

- Si $D \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq \sqrt{3}$ et $m \neq -\sqrt{3}$, le système admet une solution unique (x, y) déterminée par :

$x = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix}}{D} = \frac{\sqrt{3}m - 3}{m^2 - 3} = \frac{\sqrt{3}(m - \sqrt{3})}{(m - \sqrt{3})(m + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + m}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} m & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{m - \sqrt{3}}{m^2 - 3} = \frac{1}{m + \sqrt{3}}$

$S = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + m} ; \frac{1}{m + \sqrt{3}}\right)\right\}$

- Si $D = 0$, c'est-à-dire $m = \sqrt{3}$ et $m = -\sqrt{3}$

Premier cas : si $m = \sqrt{3}$, le système devient :

$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y = \sqrt{3} \\ x + \sqrt{3}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}(x + \sqrt{3}y) = \sqrt{3} \\ x + \sqrt{3}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 1 \\ x + \sqrt{3}y = 1 \end{cases}$

Le système équivaut donc à $x + \sqrt{3}y = 1$ d'où le système admet une infinité de solution.

L'ensemble $S = \{(1 - \sqrt{3}y ; y)\ y \in \mathbb{R}\}$

deuxième cas : si $m = -\sqrt{3}$, le système devient :

$\begin{cases} -\sqrt{3}x + 3y = \sqrt{3} \\ x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}(x - \sqrt{3}y) = \sqrt{3} \\ x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3}y = -1 \\ x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases}$

$x - \sqrt{3}y = 1$ ne pourra être égale à la fois à -1 et 1, le système n'admet pas de solution $S = \phi$.

Solution 11

Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

d'où en reportant dans les premières lignes, la valeur $z = 2x$, on a :

$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 7x + 2y = 2 \\ z = 2x \end{cases}$

On ressort alors le système constitué des deux premières lignes, on obtient finalement $x = 0$; $y = 1$ et $z = 0$

d'où $S = \{(0\,;\,1\,;0)\}$

b) $\begin{cases} 6x + 7y + 5z = 6 \\ x + 4y + z = 5 \\ 4x - y + 3z = 1 \end{cases}$

Nous allons utiliser la méthode de substitution, tirons $x = -4y - z + 5$ et substituons dans les deux autres équations :

$\begin{cases} 4(-y - z + 5) - y + 3z = 1 \\ 6(-4y - z + 5) + 7y + 5z = 6 \end{cases}$ soit après résolution :

$\begin{cases} -17y - z = -19 \\ -17y - z = -24 \end{cases}$; ce nouveau système n'admet pas de solution, il en est de même du système proposé $S = \phi$.

Solution 12 : Résolvons dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & L_1 \\ 2x + y - z = 0 & L_2 \\ 4x - 3y - 5z = 2 & L_3 \end{cases}$ équivaut à : $\begin{cases} z = 2x + y & L_1 \\ 7x + y = 1 & L_2 \\ 14x + 2y = 2 & L_3 \end{cases}$

En tirant z et L_1, puis en le substituant dans L_2 et L_3, en tirant y de L'_2 et en le substituant, on obtient :

$\begin{cases} z = 2x + y & L''_1 \\ y = -7x + 1 & L''_2 \\ 2 = 2 & L''_3 \end{cases}$

$\begin{cases} z = 2x + y \\ y = -7x + 1 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} y = -7x + 1 \\ z = 2x + y \end{cases}$ la valeur de x n'étant pas déterminé, tout triplet de la forme $(x\,; -7x + 1\,; -5x + 1)$ où x est quelconque est solution.

Solution 13: Résolvons le système (S)

$(S) : \begin{cases} \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{y-1} = 5 \\ \frac{3}{x+2} + \frac{4}{y-1} = -1 \end{cases}$

Ensemble de validité du système

$(x\,;\,y) \in V_\Sigma \Leftrightarrow x \neq -2$ et $y \neq 1$

Posons $X = \frac{1}{x+2}$ et $Y = \frac{1}{y-1}$

On obtient le système (Σ') : $\begin{cases} -X + 2Y = 5 \\ 3X + 4Y = -1 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0$, le système admet une solution unique $\{-1\,;2\}$.

La solution de (S) : s'obtient en résolvant le système :

$\begin{cases} \frac{1}{x+2} = -1 & (E_1) \\ \frac{1}{y-1} = 2 & (E_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

$S = \left\{\left(-3\,;\,\frac{3}{2}\right)\right\}$

Solution 14 : Résolvons le système :

$\begin{cases} x + y = 5 & (E_1) \\ y + z = 1 & (E_2) \\ x + z = -8 & (E_3) \end{cases}$

Remplaçons (E_1) par $\frac{1}{2}(E_1 + E_2 + E_3)$

On obtient le système équivalent (S) : $\begin{cases} x + y + z = -1 & (E'_1) \\ y + z = 1 & (E_2) \\ x + z = -8 & (E_3) \end{cases}$

Remplaçons successivement (E_2) par $[-E_2 + E'_1]$; (E_3) par $[-E_2 + E'_1]$.

On obtient le système équivalent S'' : $\begin{cases} x + y + z = -1 & (E'_1) \\ x = -2 & (E'_2) \\ y = 7 & (E'_3) \end{cases}$

On a : $x + y + z = -1$

$-2 + 7 + z = -1$

$z = -1 - 5$

$z = -6$

$S = \{(-2\,;\,7\,;\,-6)\}$

Solution 15

Résolvons suivant les valeurs du paramètre m le système :

$$\begin{cases} -2x + m^2 y = m \\ x - my = 1 - m \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -2 & m^2 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = 2m - m^2 = m(2-m)$$

Pour $m \neq 2$ et $m = 0$

Le système admet une solution unique, son expression en fonction de m est $\left\{\left(-m\,;\,-\frac{1}{m}\right)\right\}$

Pour $m = 0$

Le système s'écrit S : $\begin{cases} -2x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Pour $m = 2$

Le système s'écrit S_2 : $\begin{cases} -2x + 4y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

Il est équivaut à : $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

Ce système a une infinité de solution dont la représentation graphique est la droite d'équation : $x - 2y = -1$.

Solution 16 : Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & (E_1) \\ 3x - 2y = -1 & (E_2) \\ x + y = -2 & (E_3) \end{cases}$$

$(E_3) : x + y = -2 \Rightarrow y = -2 - x$

(E_3) dans (E_1) et (E_2)

$$\begin{cases} 2x - 3(-2-x) = 1 \\ 3x - 2(-2-x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 + 3x = 1 \\ 3x + 4 + 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 1 - 6 \\ 5x = -1 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{5} \\ x = \frac{-5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

or $y = -2 - x = -2 - (-1) = -2 + 1 = -1$

$y = -1$

d'où $S = \{(-1\,;\,-1)\}$

Solution 17 : Résolvons le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 & (E_1) \\ 3x + 2y = -5 & (E_2) \\ 5x + 8y = 1 & (E_3) \end{cases}$$

$$S_1 : \begin{cases} 3x + 2y = -5 & (E_2) \\ 5x - 8y = 1 & (E_3) \end{cases}$$

$$S'_1 : \begin{cases} y = 2 & (E'_2) \\ x = -3 & (E'_3) \end{cases}$$

S est donc équivalent à S' $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 4 & (E_1) \\ y = 2 & (E'_2) \\ x = -3 & (E'_3) \end{cases}$

$S = \{(-3\,;2\,;\,-1)\}$

Solution 18 : Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 & (E_1) \\ -x + y - 2z = 3 & (E_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 - z \\ -x + y = 3 + 2z \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$$

Posons $z = \lambda$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 - \lambda \\ -x + y = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 3+2\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda + 3 + 2\lambda = \lambda + 4$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda + 4}{3}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 1 & 3+2\lambda \end{vmatrix} = -3 - 2\lambda - 1 + \lambda = -4 - \lambda$$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4-\lambda}{3}$

$2x - y + z = 1$

$2\left(\frac{\lambda+4}{3}\right) - \left(\frac{-4-\lambda}{3}\right) + z = 1$

$z = 1 - \frac{2\lambda+8}{3} + \frac{4-\lambda}{3}$

$= \frac{3}{3} - \frac{2\lambda+8}{3} + \frac{4-\lambda}{3}$

$= \frac{3-2\lambda-8-4-\lambda}{3}$

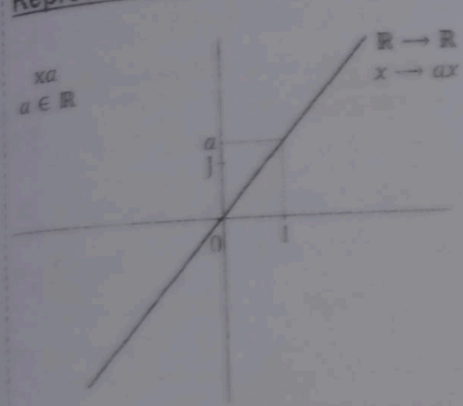
$= \frac{-3\lambda-9}{3}$

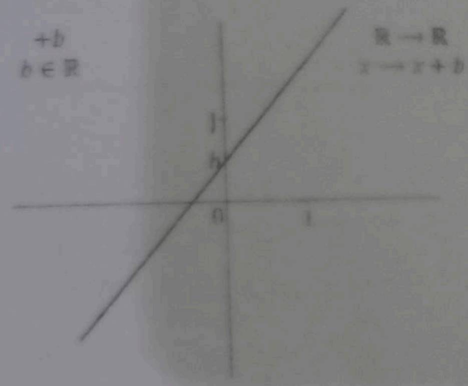
$z = -\lambda - 3$

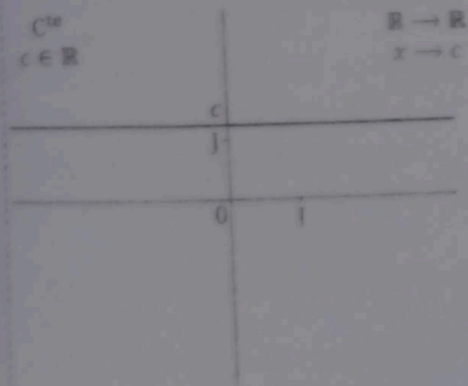
$S = \left\{\left(\frac{\lambda+4}{3} ; \frac{4-\lambda}{3} ; -\lambda - 3\right)\right\}$

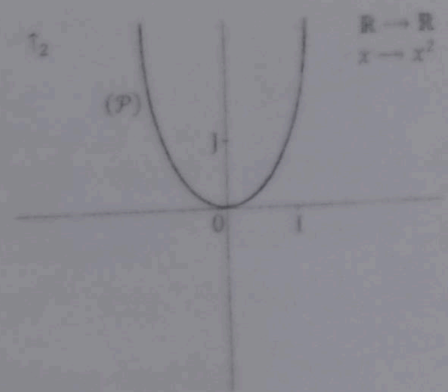
REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DES FONCTIONS

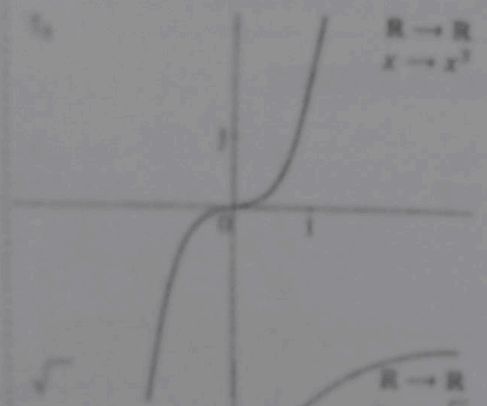
Représentations graphiques des fonctions de référence

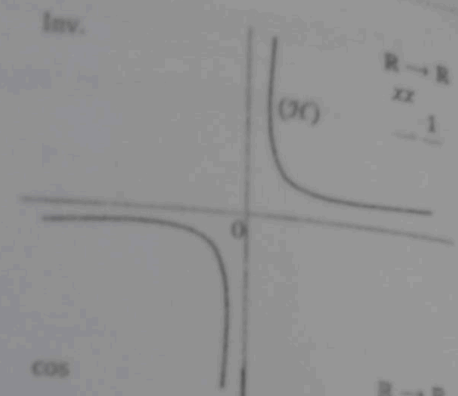


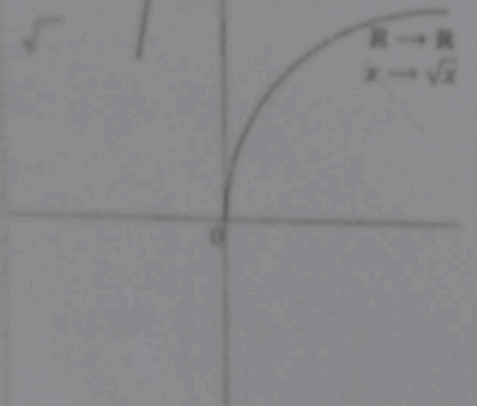


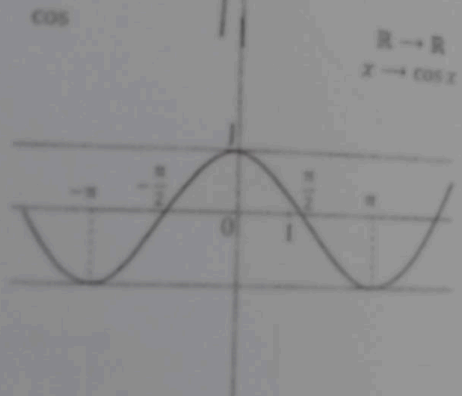


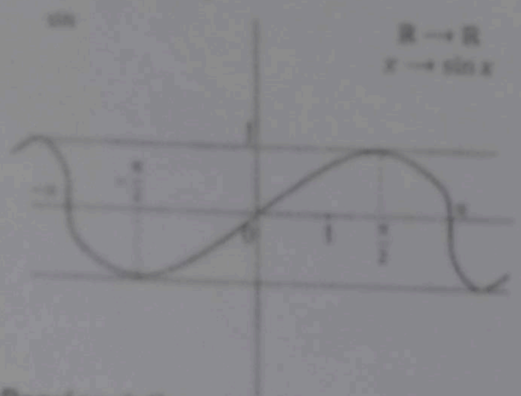












Représentations graphiques des fonctions

- Caractérisation analytique d'une translation.

Le plan est muni d'un repère

$\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ est un vecteur du plan.

$t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$

$M(x, y)$ et $M'(x', y')$ sont des points du plan.

- Caractérisation vectorielle de $t_{\vec{u}}$

$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

- Caractérisation analytique de $t_{\vec{u}}$

$$\boxed{M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}}$$

Représentation graphique de la fonction : $x \longmapsto f(x-\alpha) + \beta$

Propriété :

Le plan est muni du repère (O, i, j), f est une fonction de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto f(x-\alpha) + \beta$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\alpha\overrightarrow{OI} + \beta\overrightarrow{OJ}$.

Représentations graphiques des fonctions polynômes du second degré

Propriété :

Toute fonction polynôme du second degré g peut être définie par la formule explicite : $g(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad [\alpha \in \mathbb{R}; \beta \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}^*]$.

Dans le plan muni du repère (O, i, j), sa représentation graphique est l'image par la translation de vecteur $\alpha\overrightarrow{OI} + \beta\overrightarrow{OJ}$, de la parabole d'équation $y = ax^2$

Représentations graphiques des fonctions homographiques

Définition :

α et β étant des nombres réels et k un nombre réel différent de zéro.

On appelle fraction homographique, toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{k}{x-\alpha} + \beta$.

Propriété :

g est la fonction homographique définie par :

$g(x) = \frac{k}{x-\alpha} + \beta \quad [\alpha \in \mathbb{R}; \beta \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{R}^*]$

Dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, sa représentation graphique est l'image par la translation de vecteur $\alpha\overrightarrow{OI} + \beta\overrightarrow{OJ}$, de l'hyperbole d'équation $y = \frac{k}{x}$.

Représentations graphiques des fonctions et symétries

- Caractérisation analytique de symétrie

Caractérisation de S_{OI}

$$M' = S_{(OI)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Caractérisation de S_{OJ}

$$M' = S_{(OJ)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Caractérisation de S_O

$$M' = S_{(O)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

EXERCICES :
REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DES FONCTIONS

Exercice 1

Préciser la parité des fonctions f, g et h définies sur $]-1\,;1[$ par :

$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$ et $h(x) = x + 1$

Exercice 2

Réponds par vrai ou faux

1) La fonction $f: \begin{matrix} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{matrix}$ est paire

2) La fonction $f: \begin{matrix} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{matrix}$ est impaire

3) Si a est une période de f, alors pour $x \in D_f$, alors $2a$ n'est pas une période de f.

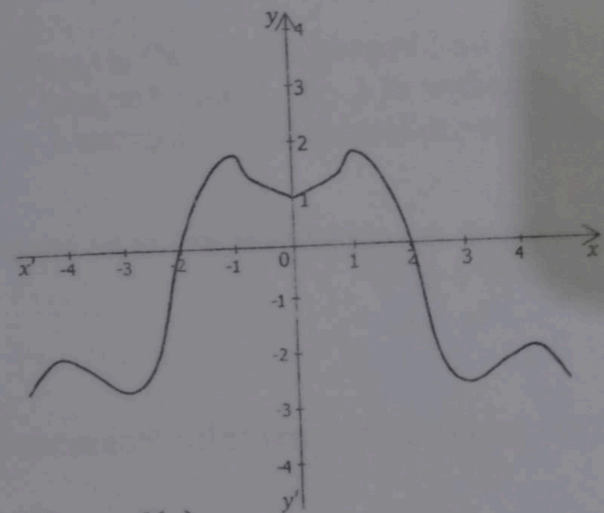
Exercice 3

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \frac{x^2+6x+2}{2x^2+12x+9}$. Montrer que le graphe de f admet comme axe de symétrie la droite (D) d'équation $x = -3$.

Exercice 4

On choisi la représentation de l'application f de $[-3\,;3]$ dans $\mathbb{R}$.



g : définie par $g(x) = -f(x)$
h : définie par $h(x) = f(-x)$
k : définie par $k(x) = -f(-x)$
I : définie par $I(x) = |f(x)|$

Exercice 5: Etudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-1}$

b) $g(x) = x^2 - \frac{1}{x-1}$

Exercice 6: Etudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{x-4}{3x+4}$

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Exercice 7: On donne la droite D : $y = 2x - 2$
Déterminer l'image $M'(x', y')$ de $M(x, y)$ par la symétrie orthogonale d'axe D. Sachant que $M(4,1)$.

Exercice 8 : Le plan est reporté à un repère orthonormé. On donne les points $A(1\,;-1)$ et $B(-2\,;3)$.
a) Déterminer les coordonnées de B' de B dans la symétrie de centre A.
b) Trouver la symétrie centrale qui transforme B' en $k(2\,;1)$.

Exercice 9 :Soit un repère orthogonal d'axe (x, x') et (y, y') sécantes en 0. Par la translation de vecteur $\vec{u}(4, -3)$, l'image d'un point M de coordonnées (x, y) est le point M' de coordonnées (x', y'). Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Exercice 10: Dans chacun des cas suivants, trouver les nombres a, α et β tels que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
a) $f(x) = -5x^2 - 10x + 2$
b) $f(x) = 3x^2 + 8x - 1$

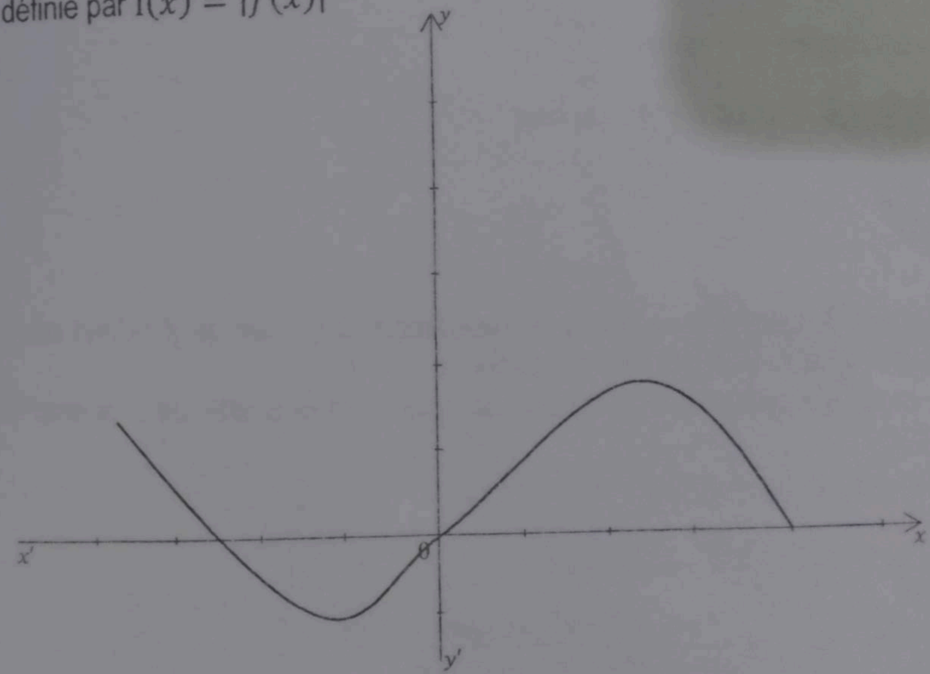
Exercice 11: Etudier la partie de chacune des fonctions suivantes :
a) $-x^3 + 6x$
b) $5x^3 - x$

Exercice 12: Soient les points $A(-1\,;2)$; $B(2\,;-3)$; $C(1\,;3)$ et $D(-2\,;-1)$ et t la translation de vecteur $2\overrightarrow{OI} - 5\overrightarrow{OJ}$.
a) Calcule les coordonnées des images des points par la translation t.
b) Calcule les coordonnées des points qui ont pour images par t les points A, b, c et D.

Exercice 13
$f(x)$ à $f(x) + a$, soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
a) Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ dessiner la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction f.

b) Dessiner la représentation graphique $\mathcal{P}_1$ de la fonction g définie par $g(x) = f(x) + 3$. Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}_1$?

Exercice 14 : On considère la représentation graphique de l'application f de $[-4\,;5]$ dans $\mathbb{R}$.
Tracer sur le même repère la représentation graphique des fonctions.
g : définie par $g(x) = f(-x)$
h : définie par $h(x) = -f(x)$
k : définie par $k(x) = -f(-x)$
I : définie par $I(x) = |f(x)|$



SOLUTIONS REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DES FONCTIONS

Solution 1
Précisons la parité des fonctions f, g et h
$* f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
Pour tout x définie sur $]-1\,;1[$

$f(-x) = \frac{1}{1-(-x)^2} = \frac{1}{1-x^2} = f(x)$

avec $f(-x) = f(x)$, donc f est paire.

* $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$

Pour tout $x \in]-1\,;1[$

$g(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = \frac{-x}{1-x^2} = -g(x)$

avec $g(-x) = -g(x)$, donc g est impaire.

* $h(x) = x + 1$

Pour tout $x \in]-1\,;1[$

$h(-x) = -x + 1$

h est ni paire, ni impaire.

Solution 2: Répond par vrai ou faux

1) Faux

2) Vrai

3) Vrai

Solution 3: Démontrons que la représentation graphique de f admet comme axe de symétrie la droite (D) d'équation $x = -3$.

La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie à la courbe de f si pour tout $x \in D_f$,

$(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-6-3\sqrt{2}}{2}\,;\frac{-6+3\sqrt{2}}{2}\right\}$ et

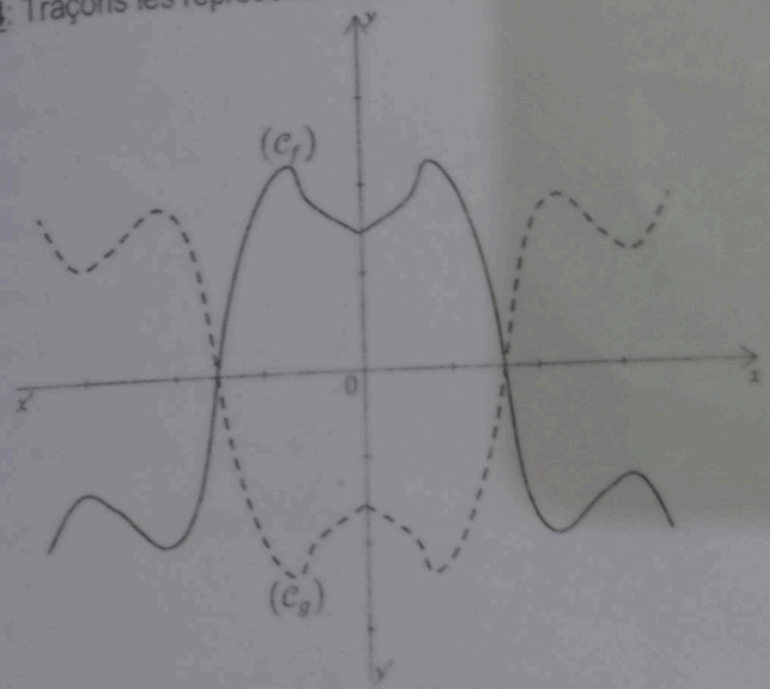
$$f(-6-x) = \frac{(-6-x)^2+6(-6-x)+2}{2(-6-x)^2+12(-6-x)+9}$$

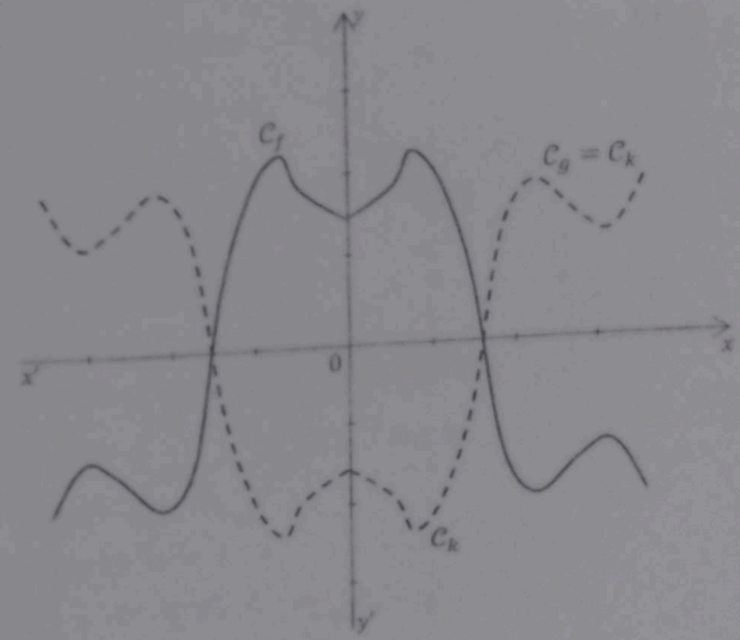
$$= \frac{x^2+6x+2}{2x^2+12x+9} = f(x)$$

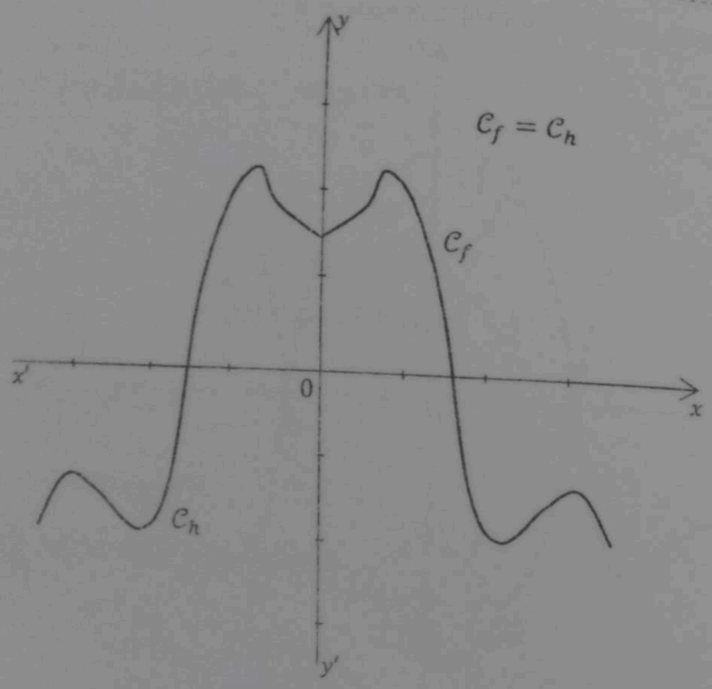
d'où $f(-6-x) = f(x)$.

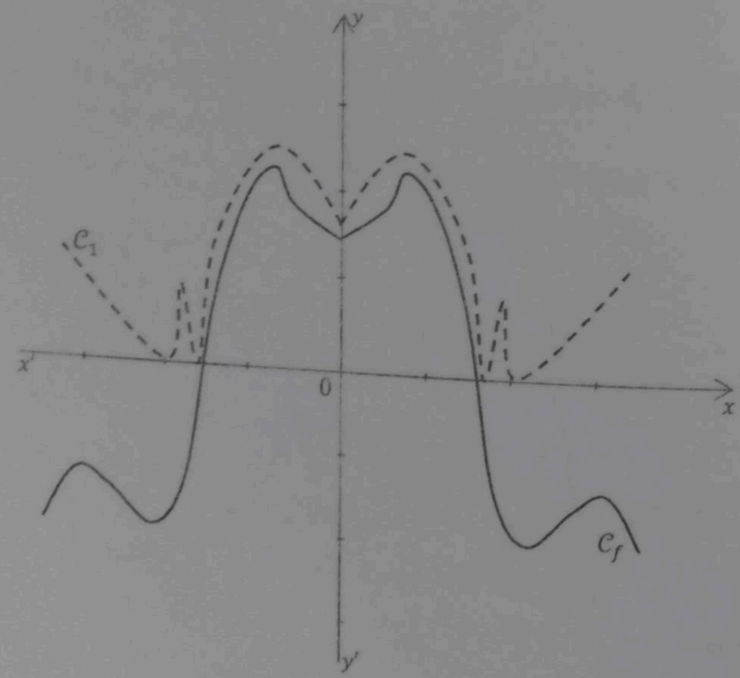
Nous avons montré que $f(2a - x) = f(x)$; donc $x = -3$ est axe de symétrie de la courbe f.

Solution 4: Traçons les représentations suivantes :









Solution 5: Etudions la parité des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-1}$

f est défini sur $x \in]-1\,;1[$

alors $f(-x) = \frac{(-x)^2-4(-x)+4}{-x-1} = \frac{x^2+4x+4}{-x-1}$

f est ni paire, ni impaire.

b) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x-1}$

Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$

$f(-x) = (-x)^2 - \frac{1}{-x-1} = x^2 - \frac{1}{-x-1}$

Donc f est ni paire, ni impaire.

Solution 6: Etudions la parité de f

a) $f(x) = \frac{x-4}{3x+4}$

Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$

$f(-x) = \frac{-x-4}{3(-x)+4} = \frac{-x-4}{-3x+4}$

f est ni paire, ni impaire.

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$

$f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 12(-x) - 8$

$f(-x) = -x^3 - 6x^2 - 12x - 8$

f est ni paire, ni impaire.

Solution 7 : Déterminons l'image $\mathrm{M}(x, y)$

Soit $\vec{u}$ le vecteur directeur de D ; $\vec{u}(1,2)$; $\mathrm{M}'(x', y')$

$\overrightarrow{\mathrm{MM}'}.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - 4 \\ y' - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x' - 4 + 2y' - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x' + 2y' - 6 = 0$

Soit I le milieu de $[\mathrm{MM}']$, $\mathrm{I} \in \mathrm{D} \Leftrightarrow \frac{y'+1}{2} = \frac{2x'+4}{2} - 2$

$\Leftrightarrow y' + 1 = 2x' + 8 - 4 \Leftrightarrow 2x' - y' + 3 = 0$

On a :

$$\begin{cases} x' + 2y' - 6 = 0 \\ 2x' - y' + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 2y' = 6 \\ 2x' - y' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x' = 0 \text{ et } y' = 3$$

Donc $\boxed{M(0,3)}$

Solution 8

a) Déterminons les coordonnées de B'

Si $B' = S(B)$, alors A est le milieu du segment $[BB']$

Donc $x_A = \frac{x_B + x_{B'}}{2}$ et $y_A = \frac{y_B + y_{B'}}{2}$;

$x_{B'} = 2x_A - x_B = 4$ et $y_{B'} = 2y_A - y_B = -5$

On trouve $B'(4\,;-5)$

b) Trouvons la symétrie centrale qui transforme B' en K.

Le centre L de cette symétrie est le milieu de (B', K) ; d'où $x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ et $y_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$

$\boxed{L(3\,;-2)}$

Solution 9: Exprimons x' et y' en fonction de x et y.

On a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$; $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$

Nous savons que deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées donc

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 4 \\ y' - y = -3 \end{cases}$ par la suite $x' = x + 4$ et $y' = y - 3$

Solution 10: Trouvons les nombres a, α et β

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

$\quad = a(x^2 - 2x\alpha + \alpha^2) + \beta$

$f(x) = ax^2 - 2ax\alpha + a\alpha^2 + \beta$

a) $f(x) = -5x^2 - 10x + 2$

Par identification

$$\begin{cases} a = -5 \\ 2a\alpha = -10 \\ a\alpha^2 + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ \alpha = \frac{-10}{2(-5)} = 1 \\ \beta = 2 - (-5)(1)^2 = 2 + 5 = 7 \end{cases}$$

d'où $a = -5$; $\alpha = 1$ et $\beta = 7$

b) $f(x) = 3x^2 + 8x - 1$

Par identification

$$\begin{cases} a = 3 \\ 2a\alpha = 8 \\ a\alpha^2 + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \alpha = \frac{8}{-2(3)} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3} \\ \beta = -1 - (3)\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = -1 - 16 = -17 \end{cases}$$

d'où $a = 3$; $\alpha = -\frac{4}{3}$ et $\beta = -17$

Solution 11: Etudions les parités

a) $-x^3 + 6x$

Pour tout $x \in D_f$

$f(-x) = -(-x)^3 + 6(-x) = -(-x^3 - 6x) = -f(x)$

d'où $f(-x) = -f(x)$, f est impaire.

b) $5x^3 - x$

Pour tout $x \in D_f$

$f(-x) = 5(-x)^3 - (-x) = -5x^3 + x = -(5x^3 - x) = -f(x)$

$f(-x) = -f(x)$, f est impaire.

Solution 12

a) Calculons les coordonnées des images

Soient x et y les coordonnées de A' on a :

$AA' = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 2 = -5 \end{cases}$ par la suite $x = 1$ et $y = -3$

d'où $A'(1\,;-3)$

b) Calculons les coordonnées des points

A est l'image de L $\Leftrightarrow \overrightarrow{LA} = \vec{u}$

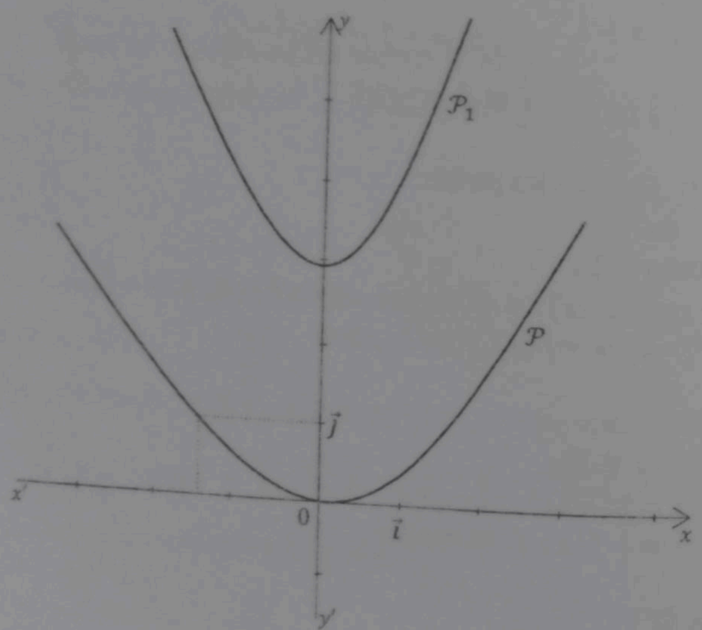
On a : $\begin{cases} -1 - x = 2 \\ 2 - y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}$

d'où $L = (-3\,;7)$

de façon analogue, on a :

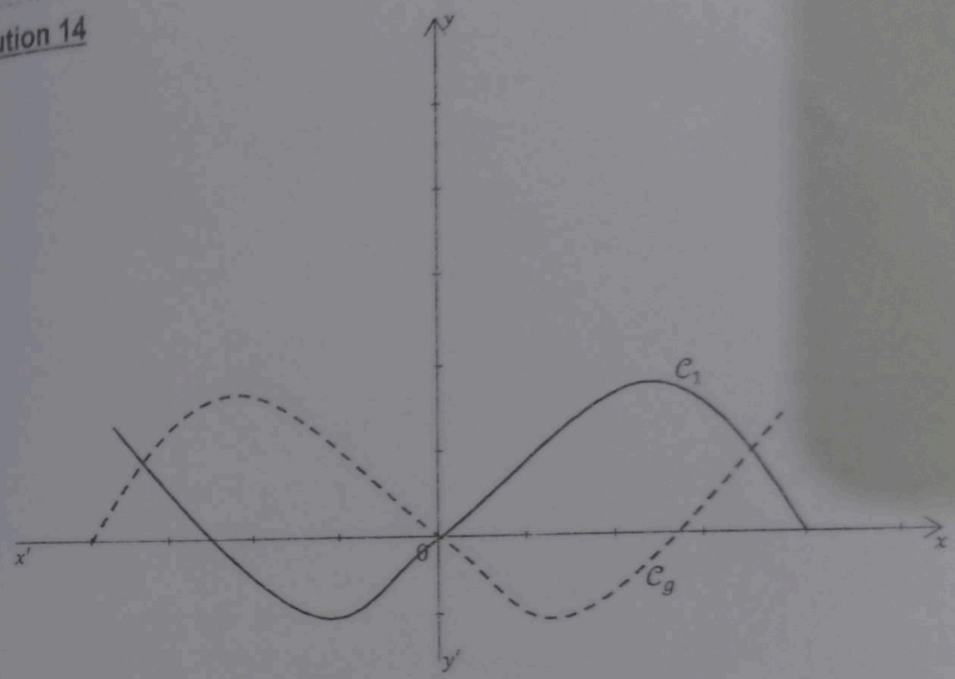
$M(0\,;-2)$; $N(-1\,;8)$ et $K(-4\,;4)$

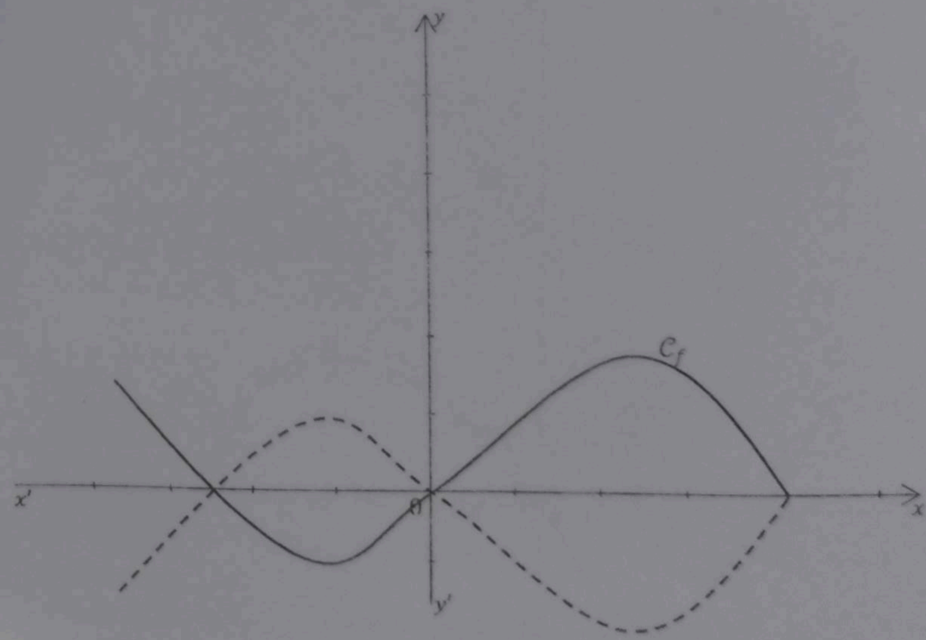
Solution 13

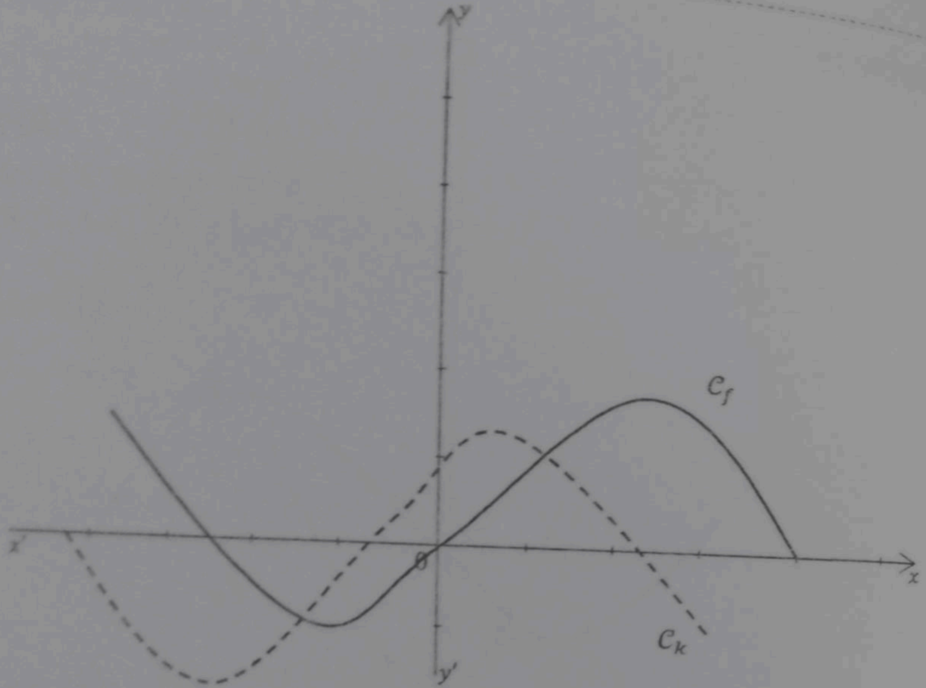


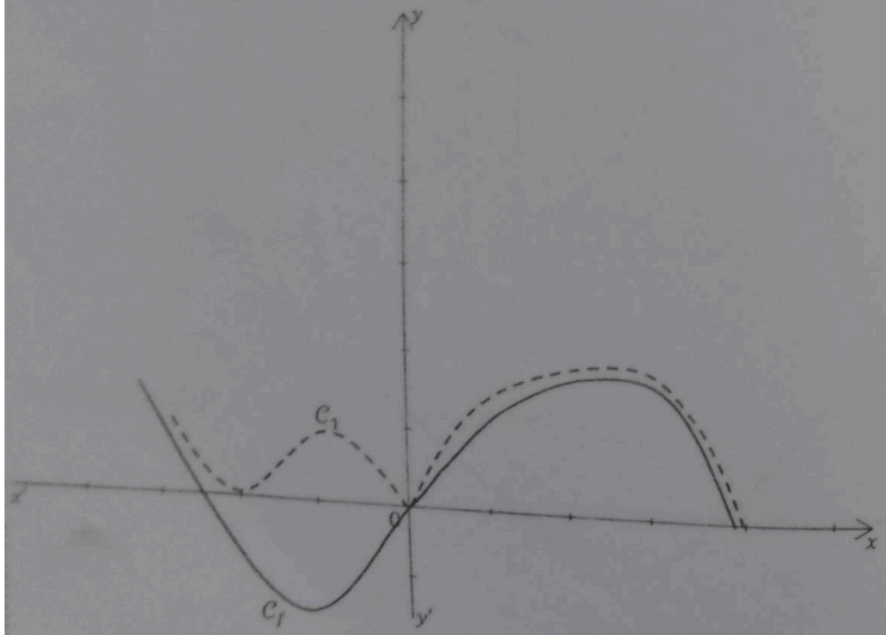
On passe de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}_1$ par la translation de vecteur $3\vec{j}$.

Solution 14









LIMITES ET CONTINUITES

1. Limites et continuités en a

Notion de limite :

On dit que le nombre réel l est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0, ou que le nombre réel l est la limite de la fonction f en x

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Propriété – définition :

Lorsqu'une fonction f est définie en a et admet une limite en a, alors cette limite est égale à $f(a)$.

On dit que la fonction $f(x)$ est continue en a. On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f$ est continue a.

Propriété : critère de continuité en a

Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires, est continue en tout élément de son ensemble de définition.

Propriété : la fonction n'est pas défini en a

a est un réel,

k un intervalle ouvert contenant a

f une fonction définie sur $k \setminus \{a\}$ et non définie en a

Si g est une fonction continue en a qui coïncide avec f sur $k \setminus \{a\}$ alors f admet une limite en a égale à $g(x)$.

Méthode : Pour calculer la limite en a de certaines fonctions f du type $\frac{g}{h}$.

g et f étant des fonctions qui s'annulent en a, on peut procéder comme suit :

- On détermine l'ensemble de définition de la fonction f ;
- On transforme l'écriture de $g(x)$ et celle de $h(x)$ pour faire apparaître le facteur $(x - a)$;
- On simplifie par $(x - a)$ pour obtenir une nouvelle écriture de $f(x)$:

Pour tout élément x de D_f, $f(x) = \frac{\mathcal{P}(x)}{\varphi(x)}$

On étudie la limite en a de $\frac{\mathcal{P}(x)}{\varphi(x)}$.

Opérations et limites en a

Propriétés

f et g sont des fonctions a, l, l' des nombres réels.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow l$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow l'$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = l + l'$; $\lim\limits_{x\to a}(f x g)(x) = l \times l'$

Si de plus $l' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(z) = \frac{l}{l'}$

Propriétés

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient une fonction f, continue en a, par une fonction g, continue en a et telle que $g(a)$ soit différent de zéro, est une fonction continue en a.

Propriété : comparaison

Soit f une fonction :

- S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]A\ ;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Propriété :

Soit f une fonction :

- S'il existe deux fonctions g, h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]A\ ;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Propriété :

Soient f et g deux fonctions telles que $f \leq g$ sur un intervalle $]A\ ;+\infty[$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l'$, alors $l \leq l'$

Limites de $x \longmapsto f(ax+b)$

Propriété

Soit f est une fonction, x_0 un nombre réel et $x \longmapsto ax+b$ une fonction affine non constante. La fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite en $ax_0 + b$

On a alors : $\lim\limits_{x\to x_0} f(ax+b) = \lim\limits_{x\to ax_0+b} f(x)$

Propriété

Continuité en x_0 de fonctions élémentaires, les fonctions suivantes sont continues en tout élément x_0 de leur ensemble de définition.

$x \longmapsto |x|$; $x \longmapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*)$; $x \longmapsto \cos x$;

$x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*)$; $x \longmapsto \sin x$

Limites à gauche, limites à droite

- Etude de limite en a

  a et l sont des nombres réels, f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a sauf éventuellement en a.

- Dans le cas où f n'est pas définie en a :

  f admet une limite l en a si et seulement si

  f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite égales à l.

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$

- Dans le cas où f est définie en a :

  f admet une limite l en a si et seulement si

  f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(a)$.

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Propriété :

La fonction valeur absolue est continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

EXERCICES LIMITES ET CONTINUITES

Exercice 1 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+E(x)}$ où E désigne la fonction partie entière.
Calcule la limite f en $+\infty$

Exercice 2 : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$
Calcule la limite f en 0

Exercice 3

a) Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^4}$
Calcule sa limite en 0 et $-\infty$

b) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + x$
Calcule sa limite en $-\infty$ et $+\infty$

c) Soit h la fonction définie par $h(x) = x + 3$
Calcule sa limite en 2.

Exercice 4

a) Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^5$
Calcule sa limite en $-\infty$

b) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 1$
Calcule sa limite en $-\infty$

Exercice 5 :
Soient f et g les fonctions telles que $f(x) = 3x$ et $g(x) = 5(x+3)$
Calcule les limites de f et g en 2.

Exercice 6: Calcule les limites en 3 de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-3}$

Exercice 7 : Calcule les limites en $+\infty$ de f et g
$f(x) = \frac{5}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x^3-2x+1}{x^2-2x}$

Exercice 8

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction
$f(x) \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$
2. Déterminer la limite en 2 de la fonction
$f(x) \mapsto \frac{x^4-4}{x^2+2x-8}$

Exercice 9 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
Calcule sa continuité en 0

Exercice 10 : Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
Calcule sa continuité de g en 1.

Exercice 11 :
Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{2x+3}, \text{si } x \le 0 \\ f(x) = x^2 + x + a, \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Etudier la continuité de f en 0

Exercice 12 : Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 4, \text{si } x \le 2 \\ f(x) = 3x + 2\ ;\ \text{si } x > 2 \end{cases}$$
Etudier la continuité de f en 2.

Exercice 13 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+E(x)}{x}$
où E désigne la fonction partie entière.
1) Démontrer que :
$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[, 2 \le f(x) \le \frac{2x+1}{x}$
2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14

Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

a) $f(x) = \frac{x^3+4}{1-2x}$

b) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{1-3x^2}$

Exercice 15

a) Calcule la limite de $x_0 = 4$ de la fonction f.

$f(x) = \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$

b) Calcule la limite de $x_0 = 2$ de la fonction f.

$f(x) = \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4+1}-3}$

Exercice 16

On pose $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+4x}$

Déterminer lorsqu'elles existent les limites de f en -4 et en 0.

Exercice 17: On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{Pour } x < 0, f(x) = \frac{2x-3}{x^2+3} \\ \text{Pour } x > 0, f(x) = \frac{2x^2+x+3}{x^2+5x-2} \end{cases} \quad f(0) = 0$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 0 de f. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 18

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{Pour } x \neq 3 \text{ et } x \neq -3, f(x) = \frac{x^2-9}{|x|-3} \\ f(-3) = f(3) = 0 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f.

f est-elle continue en -3 et en 3 ?

SOLUTIONS LIMITES ET CONTINUITES

Solution 1

Soit $f(x) = \frac{1}{1+E(x)}$

Calculons la limite de f en $+\infty$

On a : $D_f =]-\infty\,;\,-1[\cup[0\,;\,+\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x)+1$

donc $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$

or $\lim_{x\to+\infty} 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

on en déduit que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution 2: Soit $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$

Calculons la limite de f en 0

On a : $D_f = \mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, -1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq +1$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, |f(x)| \leq x^2$

or $\lim_{x\to0} x^2 = 0$

on en déduit que : $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

Solution 3

a) Soit $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^4}$

Calculons sa limite en 0 et $-\infty$

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right) = +\infty$

b) Soit $g(x) = x^2 + x$

Calculons sa limite en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2+x) = \lim_{x\to-\infty} x(x+1) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2+x) = \lim_{x\to+\infty} x(x+1) = +\infty$

c) Soit $h(x) = x + 3$

Calculons sa limite en 2.

$\lim\limits_{x \to 2} h(x) = \lim\limits_{x \to 2}(x + 3) = 2 + 3 = 5$

Solution 4

a) Soit $f(x) = -3x^5$

Calculons sa limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^5) = -3(-\infty) = +\infty$

b) Soit $g(x) = x^2 + 1$

Calculons sa limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$

Solution 5

Soient $f(x) = 3x$ et $g(x) = 5(x + 3)$

Calculons les limites de f et g en 2.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x) = 3 \times 2 = 6$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 5(x + 3) = 5(2 + 3) = 25$

Solution 6 :Calculons la limite en 3 de f

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3}\right)$

On a : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) = 0$

Or $\begin{cases} f(x) < 0, \text{si } x < 3 \\ f(x) > 0, \text{si } x > 3 \end{cases}$

On a : $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ donc, f n'a pas de limite en 3.

Solution 7 : Calculons les limites en $+\infty$ de f et g

$f(x) = \frac{5}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x^3-2x+1}{x^2-2x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{x^2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-2x+1}{x^2-2x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Solution 8

1. Déterminons la limite en $+\infty$ de f

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; on ne peut donc conclure directement.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} + x \neq 0$

On peut donc écrire : $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = +\infty$

2. Déterminons en 2 la limite de f

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to +2} \frac{x^2-4}{x^2+2x-8}$

On a : $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 2x - 8) = 0$; on ne peut donc conclure directement.

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-4 ; 2\}$; $\frac{x^2-4}{x^2+2x-8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{(x+2)}{(x+4)}$

Or $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+2}{x+4} = \frac{2}{3}$

Solution 9

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Calculons sa continuité en 0

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Deux cas sont à envisager.

1er cas : $0 < x < \frac{\pi}{2}$

D'après la question : $0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$

Donc : $0 < 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

On en déduit que : $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

2ème cas : $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

On a $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, donc, après le cas précédent :

$\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1$

On en déduit que : $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ et $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[\cup \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$; $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Solution 10 : Soit $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Calculons sa continuité de g en 1.

$g(1) = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ F.I.

$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)}$

$g(1) = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{1}{2}$

Comme $\lim\limits_{x\to 1} g(1) = \frac{1}{2}$ donc g est continue en 1.

Solution 11

Soit $f : \begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{2x+3}, \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 + x + a, \text{si } x > 0 \end{cases}$

Etudions la continuité de f en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right) = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + x + a)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = a$

Or $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; donc f n'est pas continue.

Solution 12

Soit $f : \begin{cases} f(x) = x^2 + 4, \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = 3x + 2 ; \text{si } x > 2 \end{cases}$

Etudions la continuité de f en 2.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 + 4) = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 8$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x + 2) = 3\text{x}2 + 2 = 6 + 3 = 8$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 8$

Comme $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; donc f est pas continue en 2.

Solution 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+\mathrm{E}(x)}{x}$

1) Démontrons que :

$\forall\, x \in]0 ; +\infty[, 2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x}$

Or $\mathrm{E}(x) \leq x \leq \mathrm{E}(x) + 1$

$\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(x) \leq x + \mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(x) + 1 + \mathrm{E}(x)$

$2\mathrm{E}(x) \leq x + \mathrm{E}(x) \leq 2\mathrm{E}(x) + 1$

$\frac{2\mathrm{E}(x)}{x} \leq \frac{x + \mathrm{E}(x)}{x} \leq \frac{2\mathrm{E}(x) + 1}{x}$

d'où $2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x}$

2) Déduisons la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} 2 = 2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

D'après le théorème de gendarme, on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$

Solution 14 : Calculons les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3+4}{1-2x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{-2x}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+4}{1-2x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{(x-2)^2}{1-3x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-4x+4}{1-3x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{-3x^2}\right) - \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{(x-2)^2}{1-3x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{-3x^2}\right) = -\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

Solution 15

a) Calculons la limite de $x_0 = 4$

$$\lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4} \left(\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}\right)$$
$$= \lim_{x\to4} \frac{(x-\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4} \frac{x\sqrt{x}-2x-(x+4\sqrt{x}+4)}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to4} \frac{x-3\sqrt{x}+4}{x-4}$$

On a : $\lim\limits_{x\to4} (x-3\sqrt{x}+4) = -6$ et $\lim\limits_{x\to4} (x-4) = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = +\infty$

b) Calculons la limite de $x_0 = 2$

$f(x) = \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4+1}-3}$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \left(\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4+1}-3}\right) = \lim_{x\to2} \frac{(x-\sqrt{x}-2)(x+\sqrt{x}-2)(\sqrt{4+1}-3)}{(\sqrt{4+1}-3)(\sqrt{4+1}+3)(x+\sqrt{x}-2)}$$
$$= \lim_{x\to2} \frac{(x+1)(\sqrt{4+1}-3)}{4(x+\sqrt{x}+2)} = \frac{2\times6}{4\times4} = \frac{3}{4}$$

$\lim\limits_{x\to2} f(x) = \frac{3}{4}$

Solution 16 : Déterminons lorsqu'elles existent les limites de f en -4 et en 0.

$\lim\limits_{x\to-4} f(x) = \lim\limits_{x\to-4} \left(\frac{x^2+2}{x^2+4x}\right) = \lim\limits_{x\to-4} \frac{x^2+2}{x(x+4)} = \frac{16+2}{-4(-4+4)} = \frac{18}{0}$

$\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \left(\frac{x^2+2}{x^2+4x}\right) = \frac{2}{0}$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

Solution 17

Soit $f : \begin{cases} \text{Pour } x < 0, f(x) = \frac{2x-3}{x^2+3} \\ \text{Pour } x > 0, f(x) = \frac{2x^2+x+3}{x^2+5x-2} \end{cases} \quad f(0) = 0$

Calculons la limite à gauche et la limite à droite de f en 0.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{2x-3}{x^2+3} = -\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{2x^2+x+3}{x^2+5x-2} = -\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\frac{3}{2}$

La fonction f admet une limite en 0 car

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0) = 0$

Solution 18

Soit $f : \begin{cases} \text{Pour } x \neq 3 \; et \; x \neq -3, f(x) = \frac{x^2-9}{|x|-3} \\ f(-3) = f(3) = 0 \end{cases}$

Déterminons l'ensemble de définition de f.

f est définie si $|x| - 3 \neq 0$ et $x \neq 0$

Or $|x| \begin{cases} +x \\ -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ -x - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$ et $x \neq 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;0\,;3\}$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2-9}{-x-3} = \lim\limits_{x\to-3} \frac{(x-3)(x+3)}{-(x+3)} = \lim\limits_{x\to-3} -(x-3) =$

$-(3-3) = 3$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)} = \lim\limits_{x\to-3} (x-3) = 6$

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = 6$

f n'est pas continue.

DERIVATION

Dérivation en x_0

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert k et x_0 un élément de k.

On dit que f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie en x_0.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.

Remarque : on peut également poser : $h = x - x_0$; lorsque x tend vers x_0, h tend vers 0.

On a alors : $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$

Interprétation graphique

Une équation de (T) est donc $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

N.B : Lorsque $f'(x_0) = 0$; la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété

Si une fonction est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Définition :

Soit f une fonction définie en x_0.

- On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme finie $]a\,;\,x_0]$ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à gauche en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en x_0.
- On dit que f est dérivable à droite en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme finie $[x_0\,;\,b[$ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à droite en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0.

Propriété

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

Fonction dérivée

Définition :

Soit f une fonction

- L'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable est appelé ensemble de dérivabilité de f.
- La fonction $x \longmapsto f(x)$ est appelée dérivée de f.

Calculs de dérivées

Fonction sinus et cosinus

Propriétés

- La fonction sinus est dérivable en 0 et a pour nombre dérivé 1.

  On a : $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- La fonction cosinus est dérivable en 0 et a pour nombre dérivé 1. On a : $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Propriétés

- La fonction $x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \cos x$.
- La fonction $x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto -\sin x$.

Propriété : Dérivée de la somme de deux fonction dérivables
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert k.
La fonction $u + v$ est dérivable sur k et on a : $(u + v)' = u' + v'$

Propriété : Dérivée du produit de deux fonction dérivables
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert k.
La fonction uv est dérivable sur k et on a : $(uv)' = u'v + v'u$

Propriété : Dérivée de la puissance d'une fonction dérivable
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert k et n un nombre entier supérieur ou égal à 2.
La fonction u^n est dérivable sur k et on a : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Propriété : Dérivée de l'inverse d'une fonction dérivable
Soit v une fonction dérivable sur un intervalle ouvert k tel que, pour tout x élément de k, $v(x) \neq 0$.
La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur k, on a : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{v\prime}{v^2}$

Propriété : Dérivée du quotient de deux fonctions dérivables
Soient v et u deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert k tel que, pour tout x élément de k, $v(x) \neq 0$.
La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur k, on a : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v\prime u}{v^2}$

Propriété : Dérivée de la racine carrée d'une fonction dérivable
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert k tel que, pour tout x élément de k, $u(x) \neq 0$.
La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur k, on a : $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u\prime}{2\sqrt{u}}$

Propriété : Dérivée de la fonction $x \longmapsto u(ax + b)$
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert k, $x \longmapsto ax + b (a \neq 0)$ une fonction affine et tel k'. L'image réciproque de k par cette fonction affine.
La fonction $x \longmapsto u(ax + b)$ est dérivable sur k' et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto u(ax + b)$.

Propriété : Extremum relatif d'une fonction :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a\,;b[$ et x_0 un élément de $]a\,;b[$.
Si f' s'annule et change de signe en x_0, alors f admet un extremum relatif en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

f admet un maximum relatif M en x_0

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

f admet un minimum relatif m en x_0

EXERCICES : DERIVATION

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2x+1}$.
Etudie la dérivabilité de f en -1

Exercice 2

Soit g la fonction définie par $g(x) = |x|$
Etudie la dérivabilité de f en 0

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$
Donne son équation de la tangente au point $x_0 = 2$.

Exercice 4

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 ; si\ x \in]-\infty ; 1] \\ g(x) = \frac{1}{x} ; si\ x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$$

et (C_g) sa courbe représentative.
Donne la dérivabilité de g en $x_0 = 1$.

Exercice 5

Soit h la fonction définie par $\begin{cases} h(x) = x^2 - 1 ; si\ x \in]-\infty ; 1] \\ h(x) = 2 - \frac{2}{x} ; si\ x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$

et (C_g) sa courbe représentative. Donne la dérivabilité de h en $x_0 = 1$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x-1}$
Donne la dérivabilité de f.

Exercice 7

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 ; si\ x < 0 \\ f(x) = x^2 + 1 ; si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.
b) f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 8

Donne une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de f, en son point d'abscisse x_0.
a) $f : x \longmapsto x^2 - x, si\ x_0 = 1$
b) $f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}, x_0 = 2$

Exercice 9 : Calculer le nombre dérivé de la fonction f en x_0.
a) $f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}, x_0 = 2$
b) $f : x \longmapsto 2\sqrt{x} - 1, x_0 = 3$

Exercice 10

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On se propose de dénombrer l'inégalité : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (1).
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2) En déduire l'inégalité (1).

Exercice 11 : Calculer les dérivées des fonctions f et g tels que :
$f(x) = \frac{4x-1}{x-2}$ et $g(x) = \frac{2x^2+7x+4}{x+3}$

Exercice 12 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - 2x ; si\ x < 0 \\ f(x) = 2x + 3 + \sqrt{x} ; si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer une équation de la demi-tangente à gauche de 0.

Exercice 13 : Répondre par vrai ou faux :

1) Si une fonction admet une limite en x_0 alors elle est dérivable en x_0.
2) Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative admet au point $M_0(x_0 ; y_0)$ une tangente dont une équation est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exercice 14 : Répondre par vrai ou faux :

1) f et g sont dérivables :
   a) $(f+g)' = f' + g'$
   b) $(fg)' = f'g'$
2) Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercice 15 : Déterminer la dérivée f' de f des fonctions :

1) $f(x) = \frac{1-3x}{x+4}$
2) $f(x) = \frac{3x(x^2+4)}{(x-5)^4}$

Exercice 16 : Déterminer la dérivée f' de f des fonctions :

1) $f(x) = 2\cos^2 x - 3\cos x + 1$
2) $f(x) = \sin^5 x + \cos^3 x$

Exercice 17 : Déterminer la dérivée f' de f des fonctions :

1) $f(x) = x^2\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$
2) $f(x) = x - \sqrt{2x+3}$

Exercice 18

Trouver les extrema de la fonction définie par :

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 2$

SOLUTIONS : DERIVATION

Solution 1

Soit $f(x) = \frac{x}{2x+1}$

Etudions la dérivabilité de f en -1

On a : $\forall x \in D_f \setminus \{-1\}, \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{-1}{2x+1}$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = 1$

Donc, f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 1$.

Solution 2

Soit g la fonction définie par $g(x) = |x|$

Etudions la dérivabilité de g en 0

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$

Deux cas sont à envisage :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$.

Donc, g n'est dérivable en 0.

Solution 3

Soit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

Donnons son équation de la tangente au point $x_0 = 2$.

Or $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\right)' = -x + 1$

$f'(2) = -2 + 1 = -1 \Rightarrow f'(2) = -1$

$f(2) = -\frac{1}{2}(2)^2 + 2 + \frac{1}{2} = -2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}$

alors $y = -1(x-2) + \frac{1}{2}$

$y = -x + 2 + \frac{1}{2} = -x + \frac{4+1}{2}$

$y = -x + \frac{5}{2}$

Solution 4

Soit $g : \begin{cases} g(x) = x^2 ; si\ x \in]-\infty ; 1] \\ g(x) = \frac{1}{x} ; si\ x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$

Donnons la dérivabilité de g en $x_0 = 1$.

On a : $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}(x+1) = 2$

On a : $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1$

d'où f n'est dérivable en $x_0 = 1$.

Solution 5

Soit h : $\begin{cases} h(x) = x^2 - 1 ; si\ x \in]-\infty ; 1] \\ h(x) = 2 - \frac{2}{x} ; si\ x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$

Donnons la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.

On a : $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}(x+1) = 2$

$\lim\limits_{x\to1^+} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{2-\frac{2}{x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{2}{x}\right) = 2$

d'où h est dérivable en $x_0 = 2$.

Solution 6 : Donnons la dérivabilité de f tel que :

$f(x) = \sqrt{2x-1}$

On a : $D_f = \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

f n'est dérivable en $\frac{1}{2}$ car il est n'existe pas d'intervalle ouvert k tel que f est définie sur k et $\frac{1}{2} \in k$.

Soit x_0 un nombre réel strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

On a : $\forall x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[\setminus \{0\}$.

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x_0-1}}{x-x_0} = \frac{(2x-1)(2x_0-1)}{(x-x_0)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x_0-1})} = \frac{2}{(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x_0-1})}$

Donc, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{\sqrt{2x_0-1}}$

La fonction f est dérivable en tout élément x_0 de $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ et

$f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2x_0-1}}$

f est donc dérivable sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ et sa dérivée f' définie par :

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

Solution 7 : Soit f la fonction définie par :

$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 ; si\ x < 0 \\ f(x) = x^2 + 1 ; si\ x \geq 0 \end{cases}$

a) Démontrons que la courbe représentative de la fonction f admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{2x+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{2x}{x} = 2$

(Cf) admet une demi-tangente au point d'abscisse 0.

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^2+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^2}{x} = 0$

(Cf) admet une demi-tangente au point d'abscisse 0.

b) Comme $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}$

donc f n'est pas dérivable en 0.

Solution 8 : Donnons une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de f, en son point d'abscisse x_0.

a) $f : x \longmapsto x^2 - x, si\ x_0 = 1$

$\begin{matrix} f(x) = x^2 - x \\ f'(x) = 2x - x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(1) = 1^2 - 1 = 0 \\ f'(1) = 2(1) - 1 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(1) = 0 \\ f'(1) = 1 \end{matrix}$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = 1(x-1) + 0$

d'où $y = x - 1$

b) $f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}, x_0 = 2$

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $\quad \Rightarrow \quad f(2) = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3 \quad \Rightarrow f(2) = 3$

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(2) = -\frac{2}{(2-1)^2} = -\frac{2}{1^2} = -2 \quad \Rightarrow f'(2) = -2$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(x-1) + f(1)$

$y = -2(x-1) + 3$

$y = -2x + 2 + 3$

$y = -2x + 5$

Solution 9

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en x_0.

a) $f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}, x_0 = 2$

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} = f'(2) = -\frac{2}{(2-1)^2} = -\frac{2}{1^2} = -2$

d'où $f'(2) = -2$

ou encore

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{\frac{x+1}{x-1}-3}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{\frac{x+1-3x+3}{x-1}}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{-2x+4}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to2}\frac{-2}{(x-1)} = -2$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -2$$

b) $f : x \longmapsto 2\sqrt{x} - 1, x_0 = 3$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{2\sqrt{x}-1-2\sqrt{3}+1}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Solution 10

1) Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n[(1+x)^{n-1} - 1]$

$x > 0 \Rightarrow 1 + x > 1$

$\Rightarrow (1+x)^{n-1} > 1$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

De plus, $f'(0) = 0$, on en déduit le tableau de variation ci-contre.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) Déduisons l'égalité (1).

f admet 0 pour minimum sur $\mathbb{R}_+$, ce qui peut s'écrire : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Solution 11 : Calculons les dérivées des fonctions f et g tels que :

$f'(x) = \frac{4x-1}{x-2}$

$f'(x) = \frac{(4x-1)'(x-2)-(x-2)'(4x-1)}{(x-2)^2}$

$= \frac{4(x-2)-(4x-1)}{(x-2)^2}$

$= \frac{4x-8-4x+1}{(x-2)^2}$

$\boxed{f'(x) = \frac{-7}{(x-2)^2}}$

$g(x) = \frac{2x^2+7x+4}{x+3}$

$g'(x) = \frac{(2x^2+7x+4)'(x+3)-(x+3)'(2x^2+7x+4)}{(x+3)^2}$

$$= \frac{(4x+4)(x+3)-(2x^2+7x+4)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{2x^2+12x+7x+21-2x^2-7x-4}{(x+3)^2}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{4x^2+12x+17}{(x+3)^2}}$$

Solution 12 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - 2x \,;\, si\ x < 0 \\ f(x) = 2x + 3 + \sqrt{x} \,;\, si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1) Déterminons l'ensemble de définition de f.

f_1 est définie si $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$Ef_1 =]-\infty\,;0[$

f_2 est définie si $x \geq 0$

$Ef_2 = [0\,;+\infty[$

$Ef = Ef_1 \cup Ef_2 =]-\infty\,;1[\cup [1\,;+\infty[$

d'où $Ef =]-\infty\,;0[\cup [0\,;+\infty[$

$\boxed{Ef =]-\infty\,;+\infty[}$

2) Déterminons une équation de la demi-tangente à gauche de 0

$f(x) = 3 - 2x \Rightarrow f(0) = 3$

$f'(x) = -2$

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$\boxed{y = -2x + 3}$

Solution 13 : Répondre par vrai ou faux :

1) Faux

2) Vrai

Solution 14 : Répondre par vrai ou faux :

1)

a) Vrai

b) Faux

2) Faux

Solution 15 : Déterminons la dérivée f' de f :

1) $f(x) = \frac{1-3x}{x+4}$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$$f'(x) = \frac{(1-3x)'(x+4)-(x+4)'(1-3x)}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{-3(x+4)-(1-3x)}{(x+4)^2} = \frac{-3x-12-1+3x}{(x+4)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-13}{(x+4)^2}}$$

2) $f(x) = \frac{3x(x^2+4)}{(x-5)^4}$

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

$$f'(x) = \left[\frac{3x(x^2+4)}{(x-5)^4}\right]' = \frac{(9x^2+12)(x+5)^4-4(x-5)^3(3x^3+12x)}{(x-5)^8}$$

$$= \frac{(9x^2+12)(x+5)^4-4(x-5)^3(3x^3+12x)}{(x-5)^8}$$

Solution 16

Déterminons la dérivée f' de f

1) $f(x) = 2\cos^2 x - 3\cos x + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = -4\sin x \cos x + 3\sin x$

2) $f(x) = \sin^5 x + \cos^3 x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = 5\sin^4 x \cos x + 3\cos^2 x \sin x$

Solution 17

Déterminons la dérivée f' de f

1) $f(x) = x^2\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

x^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $+\frac{2}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}x^2 + \frac{2}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\boxed{f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}$

2) $f(x) = x - \sqrt{2x+3}$

Il faut que $2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$; donc f est dérivable sur $\left[-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

$f'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

$\boxed{f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x+3}}}$

Solution 18

Trouvons les extrema de la fonction définie par :

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 2$

On a : $f'(x) = 3x - 8x + 1$, f est définie pour tout réel.

f' est un polynôme du second degré. On a donc $\Delta = 52 = 4x13$

Les racines carrées de f' sont : $x_1 = \frac{8-2\sqrt{13}}{6} = \frac{4-\sqrt{13}}{3}$ et $x_1 = \frac{4+\sqrt{13}}{3}$

d'où le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

f' s'annule et change de signe en x_1 et x_2.

f admet donc deux extrema locaux en x_1 et x_2.

f est croissante sur $]-\infty; x_1]$, décroissante sur $[x_1; x_3]$ et croissante sur $[x_2 ; +\infty[$;

f admet donc un maximum local en x_1 et minimum x_2.

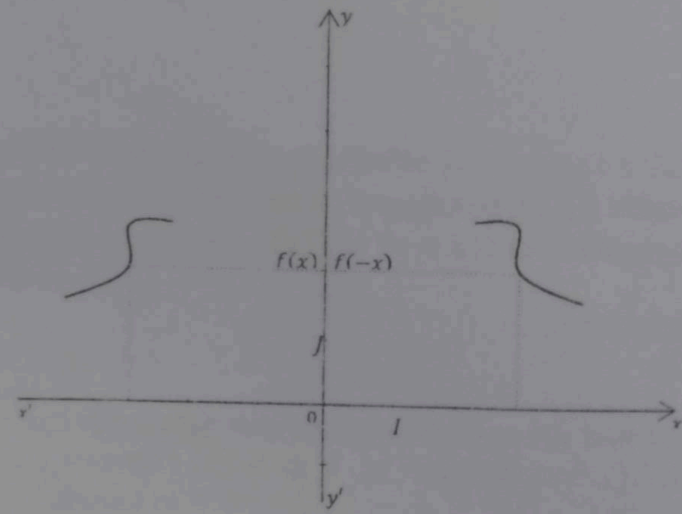
FONCTIONS

Généralités sur les fonctions

Définition : Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.

On dit que la fonction f est paire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f.

On a : $f(-x) = f(x)$.

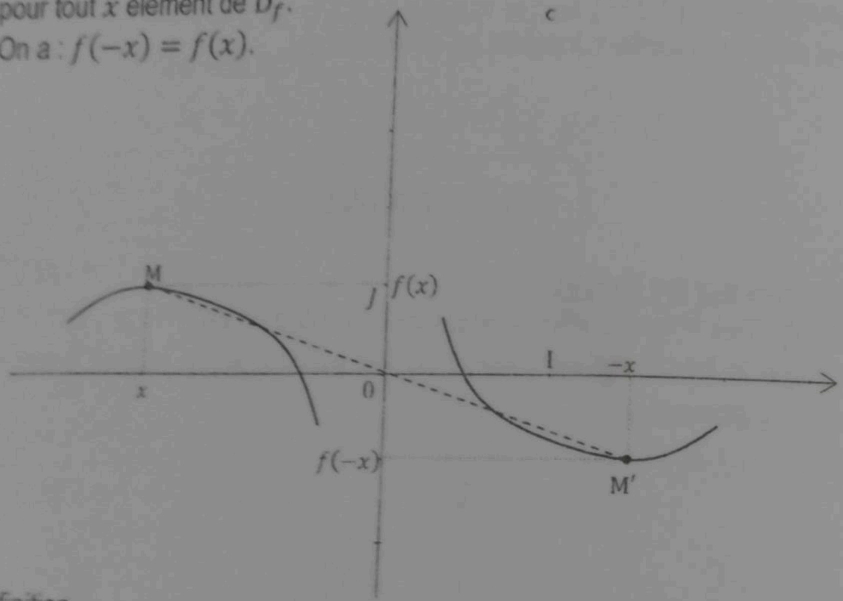


Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.

On dit que la fonction f est impaire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f.

On a : $f(-x) = f(x)$.



Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et P un nombre réel non nul.

On dit que la fonction f est périodique P, si pour tout x élément de D_f, $x - p$ et $x + p$ appartient à D_f et $f(x + p) = f(x)$.

Elément de symétrie

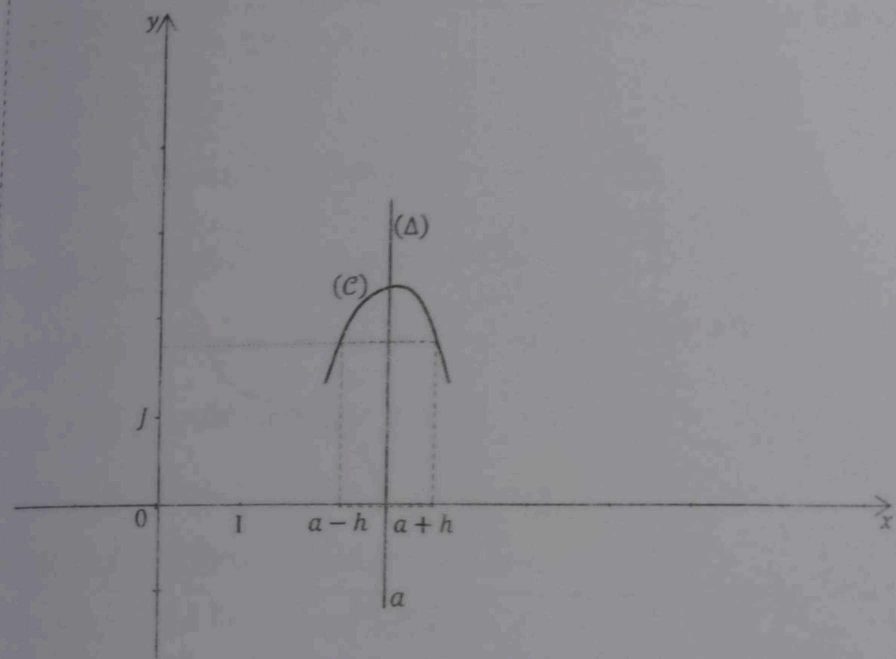
Axe de symétrie

Méthode

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal $(0, I, J)$. Pour démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C), on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- Démontrer que, dans le repère $(0', \overrightarrow{0I}, \overrightarrow{0J})$ avec $0'\binom{a}{0}$, (C) est la représentation graphique d'une fonction paire.
- Démontrer que pour tout nombre réel h tel que $a + h \in D_f$.

$a - h \in D_f$ et $f(a - h) = f(a + h)$



Autre méthode

- Démontrer que : $\begin{cases} x = \mathrm{x} - a \\ y = \mathrm{y} \end{cases}$
- Vérifier si la fonction est paire.
- Conclure.

Centre de symétrie

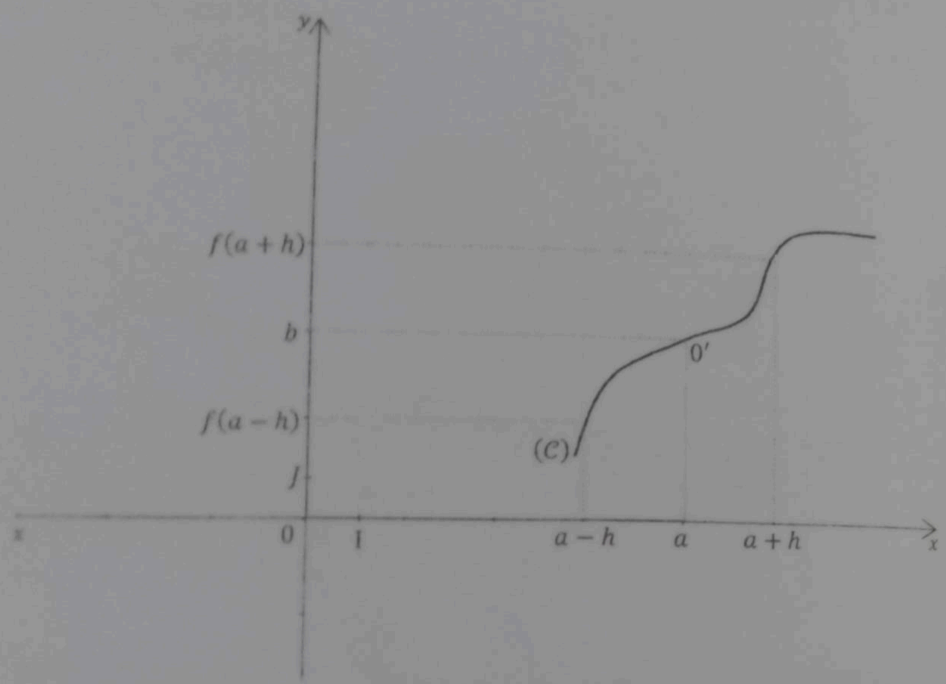
Méthode :

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal $(0, I, J)$. Pour démontrer que le point $0'\binom{a}{b}$ est un centre de symétrie de (C), on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- Démontrer que, dans le repère $(0', \overrightarrow{0I}, \overrightarrow{0J})$, (C) est la représentation graphique d'une fonction impaire.

- Démontrer que pour tout nombre réel h tel que $a+h \in D_f$.

$a-h \in D_f$ et $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2} = b$



Définition

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative.

- Lorsque f a une limite finie l en $+\infty$ ou en $-\infty$; on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe (C).
- Lorsque f a une limite infinie à droite ou à gauche en x_0. On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe (C).

Définition

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative.

- Lorsqu'il existe une fonction affine $x \longmapsto ax+b$, telle que la fonction $x \longmapsto f(x)-(ax+b)$ a pour limite 0 en $+\infty$ ou en $-\infty$; on dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à la courbe (C).

EXERCICES : ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 1 : Donne la parité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$.

Exercice 2 : Etudier la fonction $f : x \longmapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

Exercice 3 : Etudier la fonction $g : x \longmapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$

Exercice 4 : Etudier la fonction $h : x \longmapsto -x^3 - x$

Exercice 5 : Etudier la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$

Exercice 6: Etudier la fonction $f : x \longmapsto \sin x$

Exercice 7: Etudier la fonction $f : x \longmapsto \cos x$

Exercice 8 : Réponds par vrai ou faux

1) Le point d'inflexion est celui pour lequel la dérivée seconde d'une fonction s'annule.
2) Au point d'inflexion, la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.

Exercice 9 : Réponds par vrai ou faux

1) Une des particularités de la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ est qu'elle présente un point d'inflexion
2) Les courbes des fonctions de type $f(x) = \sqrt{ax+b}(a \neq 0)$ sont des branches de parabole d'axe $(0x)$.

Exercice 10: Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{c+x}$ $(a, b$ et c sont des nombres réels). On désigne par C_f sa représentation graphique.

1) Déterminer les nombres a, b et c pour que :
   - C_f admettre les asymptotes d'équations respectives $x = -2$ et $y = 1$.

2) Construire $\mathcal{C}_f$.

3) En s'aidant de $\mathcal{C}_f$, construire la représentation graphique de la fonction rationnelle g définie par $g(x) = \frac{-ax+b}{c-x}$ où $(a, b$ et c sont des nombres à déterminer à la question 1).

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

A) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudier la fonction g sans tracer sa courbe
2) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

B)

1) Etudier les limites de la fonction f aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

En déduire le sens de variation de la fonction f

3) Construire le tableau de variation de f

Exercice 12

Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction : $f \longmapsto \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

SOLUTIONS : ETUDE DE FONCTIONS

Solution 1

Donnons la parité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$

Soit $x \in D_f$ et $-x \in D_f$

$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1$

$= 3x^4 - 2x^2 + 1$

$f(-x) = f(x)$, donc f est paire.

b) $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$

Soit $x \in D_f$ et $-x \in D_f$

$f(-x) = \frac{-x}{(-x-1)(-x+1)} = \frac{-x}{[-(x+1)][-(x-1)]} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$

$f(-x) = -f(x)$, d'où f est impaire.

Solution 2 : Etudions la fonction $f : x \longmapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

Ensemble de définition

f est une fonction polynôme : elle est donc définie et continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

$\boxed{E_f =]-\infty ; +\infty[}$

Dérivée et sens de variation

La fonction f est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction.

$f' : x \longmapsto -x + 2$

On a : $f'(2) = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 2$; donc f est croissante sur $]-\infty ; 2[$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2$; donc f est décroissante sur $]2 ; +\infty[$.

Etude aux bornes de l'ensemble de définition

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$

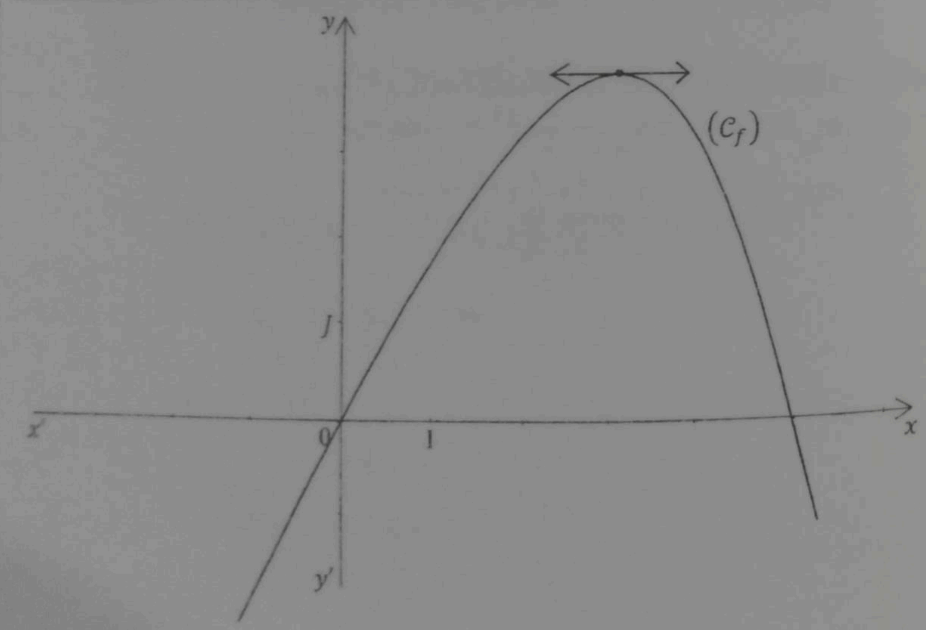
Tableau de variation

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

Tableau de valeurs

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$

Courbe représentative



Solution 3 : Etudions la fonction $g : x \longmapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$

On a : $g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$

Ensemble de définition

La fonction g est un polynôme : elle est donc définie et continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

$\boxed{E_f =]-\infty\,;+\infty[}$

Etude aux bornes de l'ensemble de définition

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{3} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3} = +\infty$

Dérivée et sens de variation

La fonction g est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $g : x \longmapsto x^2 - 2x$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}\,;\, g'(x) = x(x-2)$

Ainsi, $\forall x \in]-\infty\,;0[\,\cup\,]2\,;+\infty[, g'(x) > 0$, donc, g est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

$\forall x \in]0\,;2[, g'(x) < 0$; donc g est décroissante sur l'intervalle $]0\,;2[$.

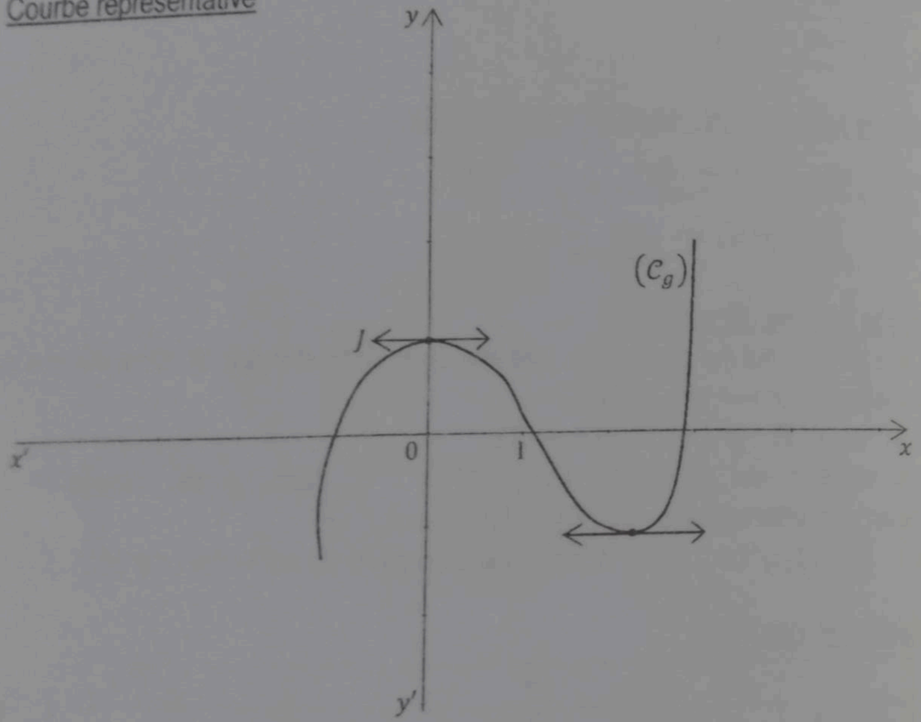
Tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de valeurs

x	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1

Courbe représentative



Solution 4

Etudions la fonction $h: x \longmapsto -x^3 - x$

Ensemble de définition

$E_f =]-\infty\,;\,+\infty[$ car f est une fonction polynôme.

Ensemble d'étude

On remarque que : $\forall \in \mathbb{R}, h(-x) = h(x)$

Donc h est une fonction impaire et l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative. On peut restreindre de cette fonction à $\mathbb{R}$.

Dérivée et sens de variation

La fonction h est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $h : x \mapsto -3x^2 - 1$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+$; $h'(x) < 0$; donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

Etude aux bornes de $[0\,;\,+\infty[$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$ et

$h(0) = 0$

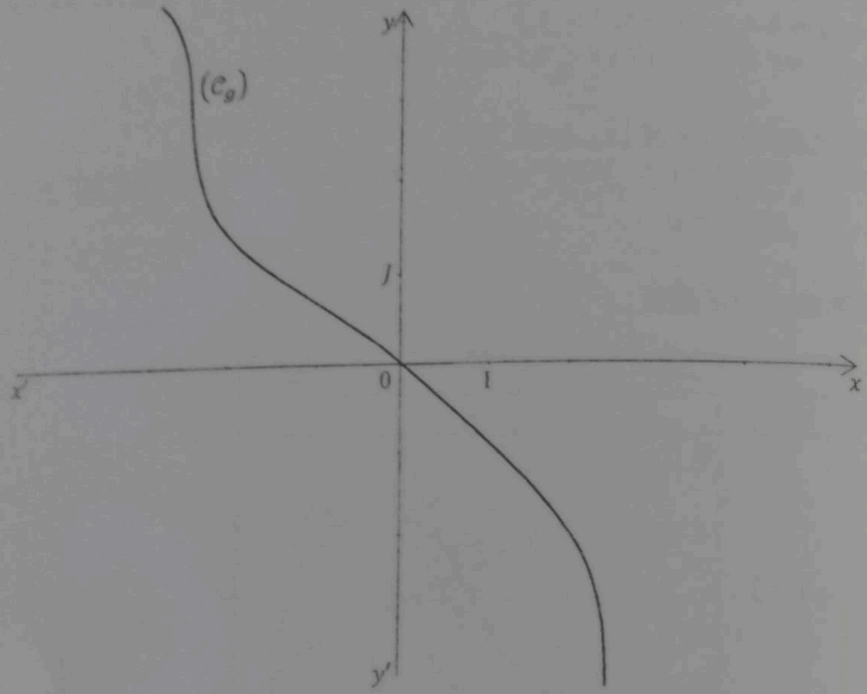
Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Tableau de valeurs

x	0	1	2
$g(x)$	0	-2	-10

Courbe représentative



Solution 5

Etudions la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$

Ensemble de définition

On a : $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Dérivée et sens de variation

La fonction g est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur D_g et sa dérivée est la fonction

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+1-4}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$
$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

On a : $g'(1) = g'(-3) = 0$

$\forall x \in]-\infty\,;-3[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $g'(x) > 0$ donc ; g est croissante sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

$\forall x \in]-3\,;-1[\,\cup\,]1\,;1[$, $g'(x) < 0$ donc ; g est décroissante sur $]-3\,;-1[$ et sur $]-1\,;1[$.

Etude aux bornes de l'ensemble de définition

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, de plus :

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1} = 0$

Donc, la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de g.

$\lim_{x\to-1^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty$

Donc, la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de g.

$\lim_{x\to-1^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty$

Donc, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe représentative de g.

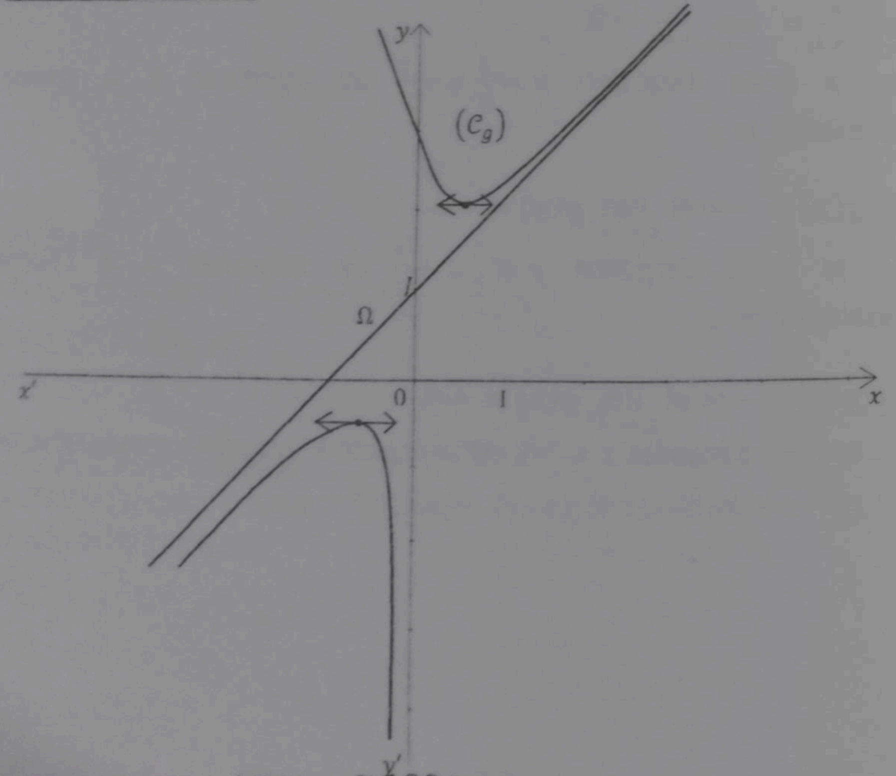
Tableau de variation

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de valeurs

x	-5	-3	-2	0	1	3
$f(x)$	$-1,5$	-1	$-1,5$	$3,5$	3	$3,5$

Courbe représentative



Solution 6 : Etudions la fonction $f : x \longmapsto \sin x$
On a $f(x) = \sin x$

Ensemble de définition
La fonction sinus est définie et continue en tout élément de $\mathbb{R}$.
$E_f =]-\infty\,;+\infty[$

Ensemble d'étude
La fonction sinus est périodique, de période 2π ; donc il suffit de l'étude sur $[-\pi\,;\pi]$.
La fonction sinus est impaire ; donc on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0\,;\pi]$.

Dérivée et sens de variation
La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus. On en déduit que la fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

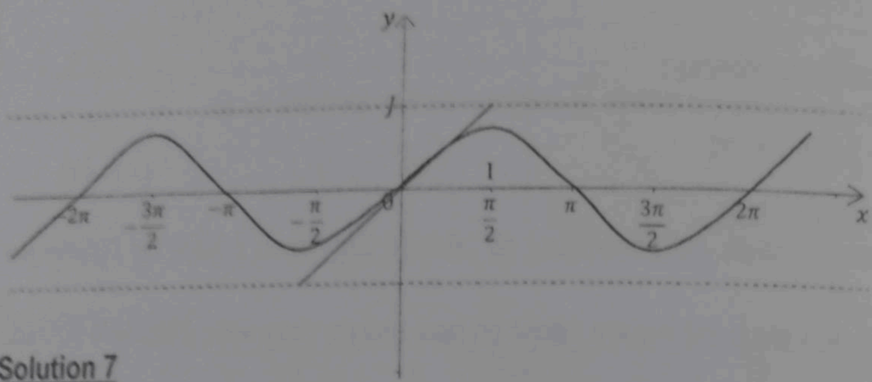
Tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Tableau de valeurs

x	-5	-3	-2	0	1	3
$f(x)$	$-1,5$	-1	$-1,5$	$3,5$	3	$3,5$

Courbe représentative

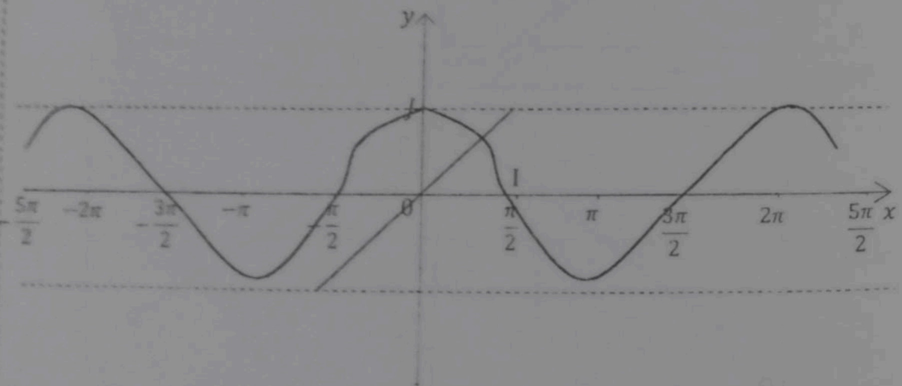


Solution 7

Etudions la fonction $f : x \longmapsto \cos x$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction cosinus est l'image de la courbe représentative de la fonction sinus par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$.



Solution 8

Réponds par vrai ou faux

1) Vrai
2) Vrai

Solution 9

Réponds par vrai ou faux

1) Vrai
2) Vrai

Solution 10

1) La droite $x = -2$ est asymptote signifie que $\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$, or $\lim_{x \to -c} f(x) = \infty$ d'où $-c = -2$ et $c = 2$

- La droite d'équation $y = 1$ est asymptote signifie que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$; or $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ d'où $a = 1$.
- Pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \frac{a(c+x)-(ax+b)}{(c+x)^2} = \frac{ac-b}{(c+x)^2}$

  On a : $f'(-1) = -1$ c'est-à-dire $\frac{ac-b}{(c+x)^2} = -1$ d'où $b = 3$.

2) Construction de $\mathcal{C}$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x) = \frac{x+3}{x+2}$; $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

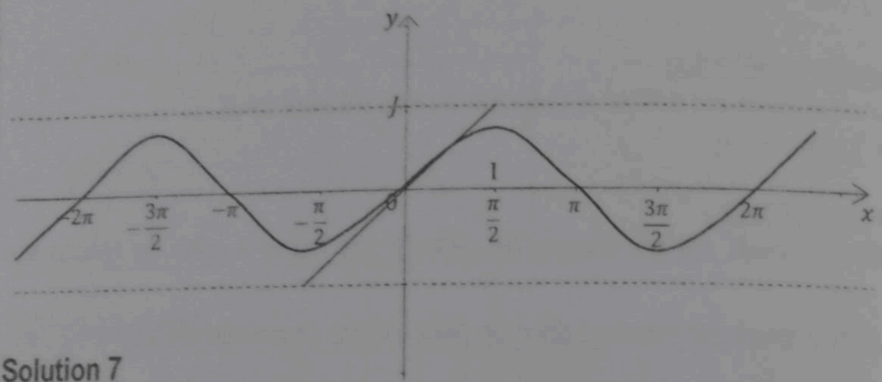
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$f'(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2} < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,; -2[$ et sur $]-2\,; +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Courbe représentative

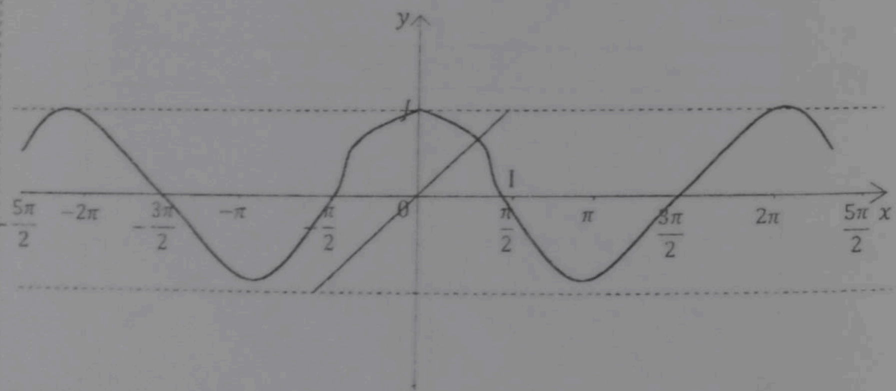


Solution 7

Etudions la fonction $f : x \longmapsto \cos x$

On a $\forall\, x \in \mathbb{R}, \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction cosinus est l'image de la courbe représentative de la fonction sinus par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$.



Solution 8

Réponds par vrai ou faux

1) Vrai

2) Vrai

Solution 9

Réponds par vrai ou faux

1) Vrai

2) Vrai

Solution 10

1) La droite $x = -2$ est asymptote signifie que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$, or $\lim\limits_{x \to -c} f(x) = \infty$ d'où $-c = -2$ et $c = 2$

- La droite d'équation $y = 1$ est asymptote signifie que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$; or $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ d'où $a = 1$.
- Pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \frac{a(c+x)-(ax+b)}{(c+x)^2} = \frac{ac-b}{(c+x)^2}$

  On a : $f'(-1) = -1$ c'est-à-dire $\frac{ac-b}{(c+x)^2} = -1$ d'où $b = 3$.

2) Construction de $\mathcal{C}$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x) = \frac{x+3}{x+2}$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

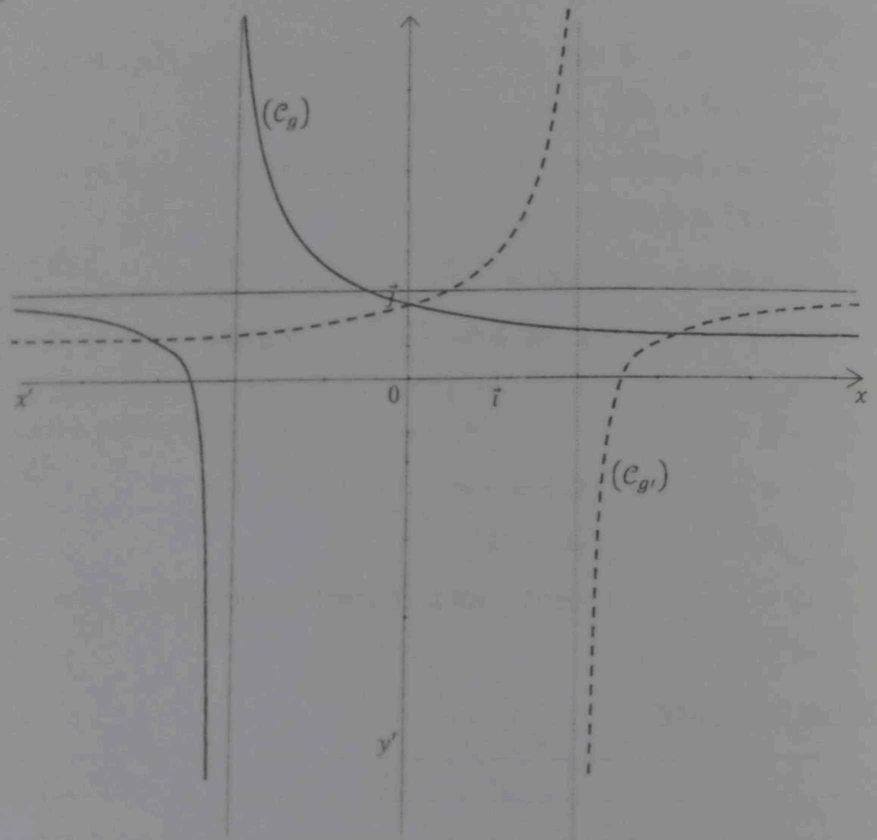
$f'(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2} < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-2[$ et sur $]-2\,;\,+\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1

$\mathcal{C}_g$ se déduit $(\mathcal{C}_f)$ par symétrie par rapport à l'axe (OJ).
Ainsi, les droites d'équation $x = 2$ et $y = 1$ sont asymptotes à $(\mathcal{C}_g)$

3)



Solution 11

Soit $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

A) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudions la fonction g sans tracer sa courbe
g définie sur $\mathbb{R}$ et n'est ni paire, ni impaire
$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
g est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme et $g'(x) = 3x^2 - 3$;
$g'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$
L'étude du signe de $g'(x)$ est immédiate, ce que permet de dresser le tableau de variation de g.
$g(-1) = -2$; $g(1) = -6$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

2) Déterminons le signe de g sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [1\,;\,+\infty[, g(x) > 0$, donc g est croissante
$\forall x \in]-1\,;\,1], g(x) > 0$, donc g est décroissante

B)
1) Etudions les limites de la fonction f aux bornes E_f

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Pour les autres limites, nous allons nous servir du tableau de signe de $x^2 - 1$ suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{1}{0} = +\infty$; $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{1}{0} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \frac{3}{0} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{3}{0} = +\infty$

Les droites d'équation $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes véritables verticales de la courbe $(\mathcal{C})$ de f.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, $f'(x)$

$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-(x^3+2x^2)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}$ or $g(x) = x^3 - 3x - 4$ donc

$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x)$ est du signe de $xg(x)$ le signe de $g(x)$ a été étudié dans la partie A.

On peut alors à l'aide d'un tableau, déterminer le signe de $f'(x)$

Alors f est croissante sur $[0 ; 1[$ et $]1 ; \alpha]$

x	$-\infty$	-1		0		1		α		$+\infty$
x	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$	$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

3) Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$	0	-	‖	-	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$f(0) = 0$ et $f(\alpha) \approx 5{,}3$ sachant que $\alpha \approx 2{,}2$.

Solution 12

Traçons la courbe $\mathcal{C}$

f est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et paire.

On étudie donc f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

f est dérivable de $f'(x) = -\sin x - \sin 2x = -\sin x[1 + 2\cos x]$

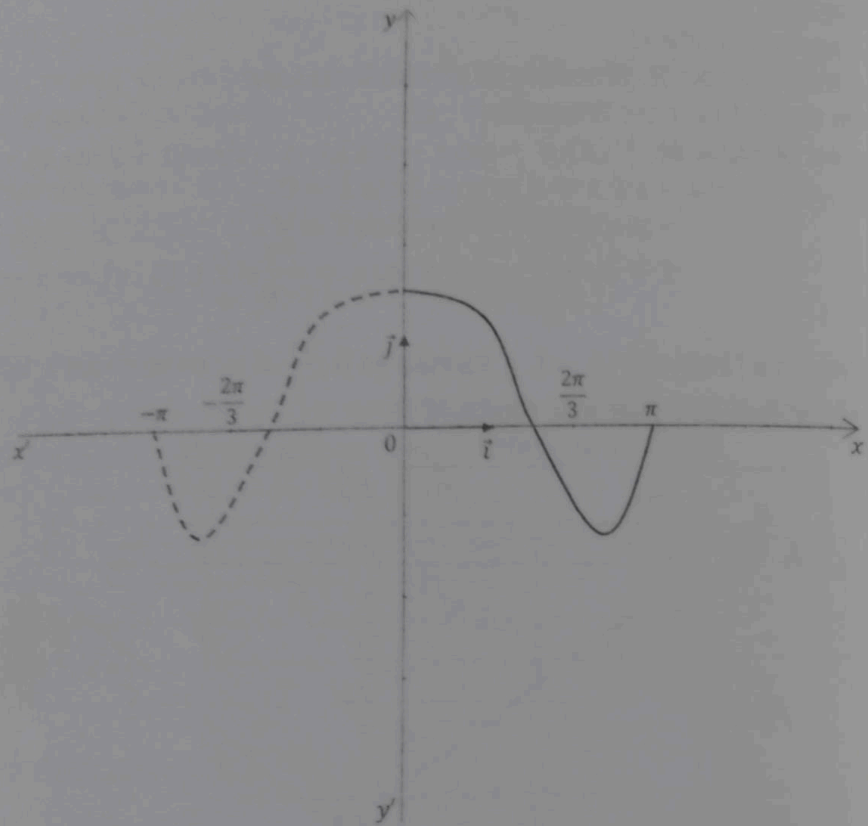
$f'(x) = 0 \Longrightarrow -\sin x = 0$ ou $1 + 2\cos x = 0$

$-\sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$

$1 + 2\cos x = 0 \Longrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ et $x \in [0 ; \pi] \Longrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

Donc, sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, f s'annule en 0 ; $\frac{2\pi}{3}$ et π ; on en déduit le tableau de variation de f puis de la courbe $(\mathcal{C})$.

x	$-\infty$		$\frac{2\pi}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	-	0	$+$	0
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$-\frac{1}{2}$



SUITES NUMERIQUES

Généralités

Définition :

On appelle une suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite numérique d'ensemble de définition E.

On note cette suite : $(u_n)_{n \in E}$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la suite $(u_n)_{n \in E}$ est notée plus simplement (u_n).

On note u_n l'image de n par u ; c'est le terme d'indice n aussi appelé terme général de la suite.

Remarque : l'ensemble de définition d'une suite numérique est l'ensemble des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à un nombre entier naturel donné.

Etude d'une suite numérique

Définition :

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique :

- (u_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout n élément de E, on a : $u_n \geq m$;
- (u_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout n élément de E, on a : $u_n \leq M$;
- (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque : Une suite est positive (respectivement négative) si elle est minorée (respectivement minorée) par 0.

Propriété : Sens de variation

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique

- Si pour tout n élément E $u_n \leq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si pour tout n élément E $u_n \geq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si pour tout n élément E $u_n = u_{n+1}$, alors les suites (u_n) est constante.

Notion de convergence

Définition :

- Une suite est convergente si elle a une limite finie.
- Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Propriétés

Soit (u_n) une suite numérique définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.

Si f a une limite en $+\infty$, alors u_n a une limite et on a :
$\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmétiques

Définition

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
(u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout n élément de E, on a : $u_{n+1} = u_n + r$
Le nombre réel r est appelé raison de la suite (u_n).

Remarque :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

Propriété :
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$.
- On déduit de la propriété précédente que, pour tous nombres entiers naturels n et k, on a : $u_n = u_k + (n-k)r$.
  En particulier, si (u_n) a pour premier terme u_1, le terme général est : $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- Soit $(u_n)_{n \in E}$ la suite de terme général $an + b$, où a et b sont deux nombres réels donnés.
  On a : $u_{n+1} = a(n+1) + b = (an+b) + a = u_{n+a}$.
  Donc, (u_n) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b.

Méthode
Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut utiliser l'un des procédés suivants.
- Etablir que la différence de deux termes consécutifs est un nombre réel indépendant de n : $u_n - u_{n-1} = r$.

- Ecrire u_n sous la forme $u_n = an + b$, où a et b sont deux nombres réels indépendants de n.

Suite géométrique

Définition :
Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite géométrique s'il existe un nombre réel q, tel que, pour tout n élément de E, on a : $u_{n+1} = qu_n$.
Le nombre réel q est appelé raison de la suite (u_n)

Propriété :
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q
Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = u_0 q^n$.

Remarque :
- On déduit de la propriété précédente que, pour tous les nombres entiers naturels n et k, on a : $u_n = u_k q^{n-k}$.
  En particulier, si une suite (u_n) a pour premier terme u_1. Le terme général est : $u_n = u_1 q^{n-1}$.
- Soit $(u_n)_{n \in E}$ la suite de terme général aq^n, où a et q sont deux nombres réels donnés :
  On a : $u_{n+1} = aq^{n+1} = q(aq^n) = qu_n$
  Donc, (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.

Méthode
Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on peut utiliser l'un des procédés suivants :
- Etablir que le quotient de deux termes consécutifs est un nombre réel indépendant de n : $\frac{u_n}{u_{n+1}} = q$.
- Ecrire u_n sous la forme $u_n = aq^n$, où a et b sont deux nombres réels indépendants de n.

Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit S la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme a et de raison q.

- Si $q \neq 1$, alors $S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$
- Si $q = 1$, alors $S = na$

Limite de la suite géométrique (q^n)

Soit q un nombre réel strictement positif.

- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n = 0$

Remarque

Lorsque $q < 0$, les termes de la suite (q^n) sont alternativement positifs et négatifs :

- Si $-1 < q < 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

EXERCICES : SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

Réponds par vrai ou faux

1) Toute suite est monotone
2) Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = -\infty$ est convergente si (u_n) est strictement croissante.
3) a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b = \frac{a+c}{2}$.

Exercice 2

1) La suite arithmétique de raison -1 est strictement positive décroissante.
2) Soit (u_n) une suite géométrique $u_n^2 = (u_{n+1})(u_{n-1})$.

Exercice 3

Calculons les 3 premiers termes de la suite ci-dessous définie de manière explicite : $u_n = \frac{2n+1}{n+6}$

Exercice 4

On donne la suite (u_n) définie par :

$u_n = n^2 + 2n - 2$

Etudier le sens de variation de cette suite.

Exercice 5

(u_n) est la suite numérique définie par :

$u_n = \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}$

Démontrer que (u_n) est convergente.

Exercice 6

(v_n) est la suite numérique définie par :

$v_n = \frac{1}{3n+1}$

Démontrer que (v_n) est convergente

Exercice 7

(u_n) est la suite numérique définie par :

$u_n = 3n + 1$

Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Exercice 8

(v_n) est la suite numérique définie par :

$v_n = n - 1$

Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Exercice 9
(v_n) est la suite numérique définie par :
$v_n = 3^n$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Exercice 10
(v_n) est la suite numérique définie par :
$v_n = n^2$
(v_n) est-elle une suite géométrique ?

Exercice 11
Trouver deux réels x et y tels que la suite $3, x, y$ et 24 soit :
1) Une suite arithmétique ;
2) Une suite géométrique.

Exercice 12
1) Démontrer que la suite définie par $u_n = \frac{3}{2}n$ est une suite arithmétique.
2) Quel est le sens de variation de (u_n) ?

Exercice 13
Soit u la suite définie par $u_n = 2^{n-2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que u est une suite géométrique.

Exercice 14
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0, u_{n+1} = -5u_{n+6}$.
Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_{n-1}$
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 15
On considère la suite géométrique décroissante dont on connaît deux termes :
$\begin{cases} u_0 u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases}$

1) Calculer ces deux réels
2) Quelle est la raison de la suite .
3) On pose $z_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calculer z_n en fonction de n.

Exercice 16
Soit (u_n) une suite géométrique décroissante telle que $u_0 u_3 = 128$ et $u_0 + u_3 = 36$.
1)
   a. Démontrer que tous les termes de cette suite sont strictement positifs
   b. Calculer u_0 et u_3
   c. Déterminer la raison q de cette suite.
2) Calculer en fonction de n la somme, S_n des n premiers termes de cette suite. En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 17
Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_{n+1}$ et soit la suite v telle que pour tout entier naturel n, $v_n = u_{n+1}$
1) Prouver que la suite u_n n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2)
   a. Démontrer que la suite v est géométrique
   b. En déduire les expressions de v_n puis de la suite u_n en fonction de l'entier naturel n.
3) Déterminer en fonction de l'entier n, les sommes, S et S' telles que : $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

SOLUTIONS : SUITES NUMERIQUES

Solution 1
Réponds par vrai ou faux
1) Faux
2) Faux
3) Vrai

Solution 2

1) Vrai

2) Vrai

Solution 3

Calculons les 3 premiers termes

On a : $u_n = \frac{2n+1}{n+6}$

Pour $n = 0 \Rightarrow u_0 = \frac{2(0)+1}{0+6} = \frac{1}{6} \Rightarrow u_0 = \frac{1}{6}$

Pour $n = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{2(1)+1}{1+6} = \frac{3}{7} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{7}$

Pour $n = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{2(2)+1}{2+6} = \frac{5}{8} \Rightarrow u_2 = \frac{5}{8}$

Solution 4

Soit (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 2n - 2$

Etudions le sens de variation de (u_n)

avec $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1) - 2$

on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 + 2(n+1) - 2 - (n^2 + 2n - 2) \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - 2 - n^2 - 2n + 2 \\ &= n^2 - n^2 + 2n + 2n - 2n + 1 + 2 - 2 + 2 \\ &= 2n + 3 \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = 2n + 3$

$\forall x \in \mathbb{N}$ alors $2n + 3 > 0$

d'où (u_n) est une suite croissante.

Solution 5

(u_n) est la suite numérique définie par :

$u_n = \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}$

Démontrons que (u_n) est convergente.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{n}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{5}{n^2}\right)$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$ donc (u_n) est une suite convergente qui converge vers 0.

Solution 6

Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$v_n = \frac{1}{3n+1}$

Démontrons que (v_n) est convergente.

$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3n+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3n}\right) = 0$

donc (v_n) est une suite convergente qui converge vers 0.

Solution 7

Soit (u_n) est la suite numérique définie par :

$u_n = 3n + 1$

Démontrons que (u_n) est une suite arithmétique.

$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1)$

car $u_{n+1} = 3(n+1) + 1$

alors $u_{n+1} - u_n = 3n + 3 + 1 - 3n - 1$

$u_{n+1} - u_n = 3$

$u_{n+1} = u_n + 3$

Pour $n = 0$ alors $u_1 = u_0 + 3$ et

$u_0 = 3(0) + 1 = 1$

$u_0 = 1$

d'où (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 3$.

Solution 8

Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$v_n = n - 1$

Démontrons que (u_n) est une suite arithmétique

Or $v_{n+1} = (n+1) - 1 = n$

$v_{n+1} = n$

et $v_{n+1} - v_n = n - (n-1)$

$v_{n+1} - v_n = n - n + 1$

$v_{n+1} - v_n = 1$
$v_{n+1} = v_n + 1$

d'où (v_n) est une suite arithmétique de premier terme v_0 et de raison r.
Précisons la raison et le premier terme.
$n = 0$; $v_0 = 0 - 1$, alors $v_0 = -1$ premier terme et raison $r = 1$.

Solution 9
Soit (v_n) la suite numérique définie par :
$v_n = 3^n$
Démontrons que (v_n) est une suite géométrique
$v_{n+1} = 3^{n+1}$
$v_{n+1} = 3^n \times 3$
or $v_n = 3^n$
$v_{n+1} = 3v_n$
d'où (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison ????= 3.

Solution 10 : Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = n^2$
Vérifions si la suite (v_n) est géométrique ?
On a : $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - n^2$
$= n^2 + 2n + 1 - n^2$
$= n^2 - n^2 + 2n + 1$
$v_{n+1} - v_n = 2n + 1$
La suite (v_n) n'est pas une suite géométrique.

Solution 11
1) Trouvons deux réels x et y
Soit r la raison de la suite ; par définition d'une suite arithmétique, on a :
$x = 3 + r$
$y = 3 + r + r = 3 + 2r$
$24 = 3 + 2r + r = 3 + 3r$
La troisième équation donne $r = 7$. On en déduit que $x = 10$ et $y = 17$.

2) Trouvons deux réels x et y

Soit q la raison de la suite ; par définition d'une suite géométrique, on a :
$x = 3q$
$y = 3q \times q = 3q^2$
$24 = 3q^2 \times q = 3q^3$
La troisième équation donne $q^3 = 8$; donc c'est-à-dire :
$3q^3 = 24$
$q^3 = \frac{24}{3} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q^3 = 2^3$
$q = 2$
$x = 3q = 3(2) = 6 \Rightarrow x = 6$
$y = 3(2)^2 = 3(4) = 12 \Rightarrow y = 12$
d'où $x = 6$ et $y = 12$

Solution 12
1) Démontrons que la suite définie par (u_n) est arithmétique.
Nous allons calculer la différence $u_{n+1} - u_n$
Or $u_{n+1} = 3\frac{(n+1)}{2} = \frac{3n+3}{2} = \frac{3n}{2} + \frac{3}{2}$
$u_{n+1} - u_n = \frac{3n}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3n}{2} = \frac{3}{2}$
$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2}$ donc $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}$
d'où (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.

2) Le sens de variation de (u_n)
La raison $r = \frac{3}{2} > 0$ donc (u_n) est croissante.

Solution 13
Démontrons que u est une suite géométrique
On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1-2}}{2^{n-2}} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-2}} = 2^{n-1-(n-2)} = 2^{n-1-n+2} = 2^1$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^1 = 2$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$; ceci démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2.

Solution 14

Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

On a : $u_{n+1} = v_{n+1} + 1$

Il en résulte que $v_{n+1} + 1 = -5(v_n + 1) + 6 = -5v_n - 5 + 6$

$$v_{n+1} + 1 = -5v_n + 1$$
$$v_{n+1} = -5v_n + 1 - 1$$
$$v_{n+1} = -5v_n$$

On en déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison -5.

On a : $v_0 = 1$ d'où $v_n = (-5)^n$. Il en résulte que $u_n = 1 + (-5)^n$.

Solution 15

Soit : $\begin{cases} u_0u_3 = 32 \\ u_0+u_3 = 18 \end{cases}$

1) Calculer ces deux réels

Le produit u_0u_3 vaut $P = 32$ et la somme $u_0+u_3 = S = 18$.

u_0 et u_3 sont donc des solutions de l'équation du second degré $x^2 - 5x + P = 0$; soit : $x^2 - 18x + 32 = 0$.

On trouve 2 et 16 comme solutions.

Puisque la suite est décroissante, on a forcément $u_0 = 16$ et $u_3 = 2$.

2) La raison de la suite :

On a : $u_3 = u_0q^3$

$$q^3 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

donc la raison de la suite est $q = \frac{1}{2}$.

3) Calculons z_n en fonction de n.

On a : z_n somme de $n + 1$ premiers termes de la suite ; donc

$$z_n = u_0\frac{1-q^{n-1}}{1-q} = \left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right]x16$$

Soit $z_n = 2^5\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

Soit encore $z_n = 2^5 - 2^{-n+4}$

Solution 16

Soit (u_n) une suite géométrique décroissante.

On a : $u_0u_3 = 128$ et $u_0 + u_3 = 36$.

1)

a) Démontrons que tous les termes de cette suite sont strictement positifs

On a : $u_0 > u_3$ car (u_{11}) est décroissante

d'où $2u_0 > u_0+u_3$, c'est-à-dire $u_0 > 18$, donc $u_0 > 0$ comme $u_0u_3 = 128$, on déduit que $u_3 > 0$. (u_{11}) étant une suite géométrique, $u_3 = q^3u_0q$ étant la raison de la suite ; or u_0 et u_3 sont strictement positif.

D'où $q^3 > 0$ c'est-à-dire $q > 0$ de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^nu_0$ et $u_0 > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

b) Calculons u_0 et u_3

u_0 et u_3 sont solutions de l'équation $x^2 - 36x + 128 = 0$

avec $u_0 > u_3$

d'où $u_0 = 32$ et $u_3 = 4$

c) Déterminons la raison q de cette suite.

$u_3 = q^3u_0 \Leftrightarrow q^3 = \frac{u_3}{u_0} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

d'où $= \frac{1}{2}$ (car $q > 0$).

Calculons en fonction de 2 et la limite de S_n à l'infini.

$$S_n = u_0\frac{1-q^3}{1-q} = 32x\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}} = 64\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

d'où $S_n = 64\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n = 64$

Solution 17

Soit u suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_{n+1}$ et

v la suite définie par $v_n = u_{n+1}$

1) Prouvons que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

$u_0 = 1$
$u_1 = 2u_0 + 1 = 3$
$u_2 = 2u_1 + 1 = 7$
$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$; donc u n'est pas une suite arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$; donc u n'est pas une suite géométrique.

2)
a. Démontrons que la suite v est géométrique
On a : $v_n = u_{n+1}$
$v_n = u_n + 1 + 1$
$= 2u_n + 2$
$= 2(u_n + 1)$ or $v_n = u_{n+1}$
$v_{n+1} = 2v_n$.
Donc v est une suite géométrique de raison 2 et son premier terme $v_0 = 2$.

b. Déduisons les expressions de v_n puis de la suite u_n en fonction de n.
Pour tout entier naturel n
$v_n = v_0 \times 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$
$v_n = 2^{n+1}$
$u_n = v_n - 1$ soit $v_n = 2^{n+1} - 1$

3) Déterminons en fonction n
Les sommes, S et S'
S est la somme de $n+1$ terme consécutifs de la suite géométrique v de raison 2 et dont le premier terme est v_0. Donc $S = \frac{v_0(2^{n+1}-1)}{1-2} = \frac{v_0(2^{n+1}-1)}{-1}$
d'où $S = 2(2^{n+1} - 1)$

$S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
$S' = v_0 - 1 + v_1 - 1 + \cdots + v_n - 1$
$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + (n+1)(-1)$

$S' = 2(2^{n+1} - 1) - n - 1$
donc $S' = 2^{n+1} - n - 3$

Production et Distribution

GBES

GROUPE BETHLEHEM EPHRATA SERVICES
E-mail : gbesfi2@gmail.com

☎ (+242) 04 485 99 85 - 06 680 18 80

Congo - Brazzaville

28061981 Inf2 2018

Production et Distribution

GBES

Congo - Brazzaville