UNIVERSITE GASTON BERGER DE SAINT-LOUIS

UFR DES SCIENCES APPLIQUEES ET TECHNOLOGIE

SECTION MATHEMATIQUES APPLIQUEES

CE MANUEL EST PRESENTE PAR BABACAR DJITTE, ETUDIANT EN MATHEMATIQUES APPLIQUEES A L'UNIVERSITE GASTON BERGER DE SAINT-LOUIS

Adresse mail : babacar.djitte@outlook.com

« *LE MONDE S'EXPRIME EN MATHEMATIQUE* »

ANNEE SCOLAIRE 2014-2015

EXERCICES DE TS1-TS3

Limites-continuité-dérivabilité-primitives

Exercice 1

1) Etudier les variations de la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x^3-3ax+1$.
   En déduire suivant les valeurs de a le nombre de solution de l'équation $f(x)=0$
2) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ à valeur dans $[0;1]$; montrer que f possède un point fixe c'est à dire qu'il existe un réel $\alpha \in [0;1]$ tel que : $f(\alpha)=\alpha$.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes en identifiant la limite demandée à un taux de variation.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{12\sin x-6}{6x-\pi}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{\sin 3\pi x}{1-2\cos \pi x}$; c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x-1}{4x-\pi}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12\sin x}{\pi x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin \pi x}$

Exercice 3

1) soit la fonction $g : \mapsto \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & si \quad x\neq 0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$

   a) justifier la continuité de f et montrer que f est dérivable en 0
   b) calculer f'(0) .

2) Donner pour chaque fonction la dérivée sur un ensemble que l' on précisera

   a) $h(x)=x^2(2x-4)^2$; $f(x)=x^3\sqrt{3x-1}$; $g(x)=\dfrac{\sin x}{2x^2+1}$; $q(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$

   b) $v(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{2x^2+4}}$; $w(x)=\cos(x^2+1)$; ; $\sin^2(3x+4\pi)$

Exercice4

1) Soit les fonctions φ et ϕ définis par $k(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ $\varphi(x)=\cos x$ et $\phi(x)=\sin x$

Montrer que φ et ϕ sont indéfiniment dérivables et que :

$\varphi^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ et $\phi^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

2) soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ sur l'intervalle $]2;+\infty[$

Calculer $f'(x); f''(x); f'''(x)$; conjecturer $f^{(n)}(x)$ et démontrer la par récurrence ;

3) Même question pour $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ sur l'intervalle : $]1;+\infty[$

Exercice 5 : Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{5+4x^2}{1+x^2}$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

1) Montrer que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et calculer $f'(x)$

2) soit φ la fonction définie par $\varphi(x)=\dfrac{5+4\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$ sur l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right[$

a) écrire φ comme la composée de deux fonctions dérivable et calculer $\varphi'(x)$

b) Déduisez en le sens de variation de φ sur $\left]-\pi;\pi\right[$.

Exercice6

Soit f la fonction définie par $f(x)=\cos^2(x)$ sur IR .

1) Montrer que f est dérivable ; calculer $f'(x)$ et majorer $|f'(x)|$ $sur\ I=\left[-\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{12}\right]$

2) Montrer que quelque soit appartenant à I ; $\left|\cos^2 x-\cos^2 y\right|\leq\dfrac{1}{2}|x-y|$

Exercice 7

Soit g la fonction définie par $g(x)=\sqrt{x+1}$ sur l'intervalle $\left]-1;+\infty\right[$

1) Montrer que g est dérivable sur $\left]-1;+\infty\right[$ et calculer $g'(x)$ puis encadrer $g'(x)$ sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

2) Déduisez en que appartenant à $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ on a : $1+\dfrac{x}{6}\leq g(x)\leq 1+\dfrac{x}{2}$.

Exercice 8

On admet qu'il existe une fonction f dérivable qui vérifie sur IR : $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left[f(x)\right]^2}$ dont la courbe représentative (C) passe par l'origine 3du repère.

1) déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en 0.

2) Montrer que (C) n'admet pas une tangente parallèle à la droite (Δ) : $y=2x$

3) Justifier l'existence de la dérivée seconde f'' et montrer que $f''(x)=-2\left(f(x)\right)^3 f(x)$.

Exercice 9

Soit w une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left[1;+\infty\right[$ vérifiant la relation :

$w(1)=0$ et $w'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$

1) Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[1;+\infty\right[$

2) On définie la fonction g sur l'intervalle par $g(x)=1-\dfrac{1}{x}$

Comparer w' et g' puis w et g sur $\left[1;+\infty\right[$

3) Montrer alors que w est majorée sur $\left[1;+\infty\right[$ et admet une limite l en $+\infty$; vérifiant : $0\leq l\leq 1$

Exercice 10

Déterminer une primitive F de la fonction f sur intervalle I à préciser dans les cas suivants :

a) $f(x)=9x^4-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; b) $f(x)=9x^2\left(4-x^3\right)^8$; c) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$; e) $f(x)=\dfrac{x^4-x^3+2x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)^2}$ (trouver a et b $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{bx}{\left(x^2+1\right)^2}$)

f) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; g) $f(x)=\cos^3 x-\cos 2x$; h) $f(x)=9\cos^4 x+\sin x\cos x$

Exercice 11

Soit f et w deux fonctions définies sur l'intervalle I= $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ par :

$f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ et $w(x)=\dfrac{1}{\cos^4 x}$

1) vérifier que $f'(x)=\dfrac{3}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}$
2) En déduire sur I une primitive de la fonction w.

Exercice 12

Soit f est une fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

1) Montre que f admet une primitive F sur IR de la forme F(x) = $\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$
2) Trouver toutes les primitives de f sur IR.

Exercice 13

Soit une fonction définie dans IR par $f(x)=\cos x-\dfrac{4}{3}\cos^3 x$

1) Déterminer f' et f''. Vérifier que pour tout x de IR ; $f''(x)=-9f(x)$
2) En déduire toutes les primitives de f sur IR
3) Trouver les primitives sur IR qui s'annule en $\dfrac{\pi}{6}$.

Etude de fonctions numériques

Problème 1

1) Soit la fonction polynôme P définie sur IR $P(x)=4x^3+3x^2-2$
   a) Etudier les variations de P .
   b) Montrer que sur l'intervalle $[0;+\infty[$, l'équation (E) : admet une solution unique α .
   c) Montrer que sur l'intervalle $]-\infty;0[$, l'équation (E) : n'admet pas de solution.
2) Soit l'intervalle $I=]-1;+\infty[$, on considère la fonction f définie sur I par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^3+1}$

   On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 4cm)
   a) En utilisant les résultats du 1) étudier les variations de f .
   b) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.
   c) Etudier les positions relatives de (C) et de (T) sur I.
3) a) Vérifier et justifier la proposition suivante : $\alpha \in]0,60\ ;\ 0,61[$

   b) Démontrer que : $f(\alpha)=\dfrac{2}{3\alpha^2}$ et déduire que : $f(\alpha)\in]1,7\ ;\ 1,9[$
4) Représenter (C) ; (T) et les droites asymptotes à (C).

Problème 2

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases} -x+1+\dfrac{2}{x+1} & si\ \ x\leq 0 \\ 3+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & si\ \ x>0 \end{cases}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer le domaine D_f et étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2) Etudier les asymptotes de (C).
3) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et établir le tableau de variation de f .
4) Montrer que l'équation $f(x)=3x$ admet une solution λ tel que : $1<\lambda<2$.
5) Soit g la restriction de f à $[0;+\infty[$; et (Γ) sa courbe représentative
   Montrer que g est une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
   Calculer $g(1)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}\right)$.
6) Construire (C) et (Γ).

Problème 3

Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$

1) Justifier le choix de l'intervalle $I = [0;\pi]$ comme intervalle d'étude
2) Démontrer que, pour tout nombre réel x : $g'(x) = 4\cos 2x(1 - 2\sin 2x)$.
3) Résolvez dans I l'équation : $g'(x) = 0$ Puis en déduire le tableau de variation de g.
4) Démontrer la droite $(D) : x = \dfrac{\pi}{4}$ est axe de symétrie de la courbe (Π) de g.
5) Construire la courbe (Π) de g.

Problème 4 Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (4cm en abscisses et 2cm en ordonnés

1 a) Déterminer le domaine D_h et étudier la continuité et la dérivabilité de h en particulier en $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$; interpréter graphiquement les résultats. Calculer $h'(x)$

2) Démontrer les équivalences suivantes :

   a) $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right]$; $\sqrt{4x^2 - 1} - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{5}}{10}\right]$

   b) Déduisez en le signe de $h'(x)$.

3) Déterminer les limites aux bornes de D_h et établir le tableau de variation de h.
4) Etudier les asymptotes éventuelles de (C).Construire (C)
5) Soit g la restriction de h à $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right]$; Montrer que g admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.
6) tracer (Γ) la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère que (C).

Problème 5

On considère la fonction f définie de IR dans IR par $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

1) a) Justifier que pour tout réel $x \in$ IR, il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\alpha$

   b) On pose $g(\alpha) = f(\tan\alpha) = (f o \tan)(\alpha)$. Déterminer $g(\alpha)$ sous la forme la plus s

2) Montrer que g est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser. Déduisez en que f est une bijection de IR sur l'intervalle J.

3) a) Soit la fonction $\varphi : \alpha \mapsto \tan\alpha - g(\alpha)$. Apres étude de φ ; montrer que l'équation $g(\alpha) = \tan\alpha$ $\left(\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ admet une solution unique dont on donnera une valeur approchée

b) Déduisez en la résolution de l'équation : $f(x)=x$ .Donner une valeur approchée de la solution à 10^{-1} *pres*

Problème 6

On considère la fonction f définie sur I=$[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ et par (C) sa courbe

1) Etudier les variations de f sur I et montrer que (C) admet une droite asymptote
2) Soit F la primitive de f sur I tel que $F(0)=0$. on ne cherche pas à exprimer $F(x)$
   a) Pour quoi peut-on affirmer l'existence de F sur I ?
   b) Quelles sont variation de F sur I ?
3) On définit sur I les fonctions H et K par : $H(x)=F(x)-x$ et $K(x)=F(x)-\dfrac{2}{3}x$.
   a) Etudier les variations de H et K sur I.
   b) En déduire que pour tout $x\geq 0$, on a : $\dfrac{2}{3}\leq F(x)\leq x$
   c) En déduire la limite de F en $+\infty$
4) Démontrer que l'équation : $F(x)=\pi$ admet une solution unique δ Vérifiant : $\pi\leq\delta\leq\dfrac{3}{2}\pi$

Exercice 7

Soit a un réel non nul ; f_a la fonction de IR vers IR définie par $\forall\, x\in IR\;\; f_a(x)=x+\dfrac{a}{\pi}\sin\pi x$

a) Comparer $f_a(x)$ et $f_a(x+2k)$ k ∈ Z . Comparer $f_a(x)$ et $f_a(-x)$
b) Etudier suivant les valeurs de a la variation de f_a sur l'intervalle $[0;1]$
c) Démontrer que si $|a|\leq 1$ alors f_a est une bijection de IR sur IR et que sa restriction à $[-1;1]$ est une bijection de cet intervalle sur lui-même.
d) Lorsque $|a|\leq 1$; préciser les points en lesquels f_a^{-1} bijective bijection réciproque de f_a est dérivable.

Exercice 8 Soit $f(x)=2\cos x-\cos 2x$

1) Expliquer pourquoi on peut prendre pour domaine d'étude $[0;\pi]$
2) Etudier les variations de f sur $[0;\pi]$
3) Soit g la restriction de f sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$
   a) Montrer est g bijective de $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$ vers J à préciser.
   b) Etudier les variations de g^{-1} et tracer sa courbe.
4) a) Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$; $g^{-1}\left(\dfrac{-1}{2}\right)$; $(g^{-1})'(\sqrt{2})$; $(g^{-1})'\left(\dfrac{-1}{2}\right)$; $(g^{-1})'(1)$

   b) Calculer $\cos(g^{-1}(t))$ et $\sin(g^{-1}(t))$ en fonction de t.

Exercice 9

1) Etudier la fonction $f\;:x\rightarrow\sqrt{1+x}$ sur $\left[\dfrac{-1}{2};1\right]$
2) Monter en calculant f'' que la dérivée f' est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{-1}{2};1\right]$

3) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis montrer que pour tout $a \in [0;1]$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{1+a}} a \leq \sqrt{1+a} - 1 \leq \frac{1}{2} a$

4) Montrer de même que pour $\frac{-1}{2} \leq a \leq 0$; $\quad \frac{-1}{2} a \leq 1 - \sqrt{1+a} \leq \frac{-1}{2} \frac{a}{\sqrt{1+a}}$

5) En déduire que pour $\frac{-1}{2} \leq a \leq 1$; $\quad 1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$

Exercice 10

1) En utilisant les inégalités des accroissements finis montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $-x \leq \sin x \leq x$

2) a) f et g deux fonction définies sur IR.
   Montrer que si pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \leq g'(x)$ alors $f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$

   b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, on a $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 + \frac{x^2}{2}$

   c) Montrer que les inégalités obtenues en b) sont vraies point tout réel x.

3) On sait que $\cos x \leq 1$, on conservera donc les inégalités $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$

   Appliquer suffisamment de fois le processus précèdent pour montrer que

   - Pour tout réel x $\quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

<u>Exercice 11</u>

A) Soit $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$ et $\varphi(x) = \frac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}$

1) Etudier les variations de f et montrer que (C_f) admet un centre de symétrie.

2) Déterminer l'ensemble de définition de φ et calculer $\varphi(\pi - t)$.

   Expliquer pourquoi on peut prendre pour domaine d'étude $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3) Donner les variations de f' sur $[-1;1]$. Préciser l'image de $[-1;1]$ par f'.

4) Montrer que $\varphi'(t) = f'(\sin t)\cos t$

5) a) Montrer l'existence et l'unicité d'une racine unique α de $\varphi'(t) = 0$ sur $\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

   b) Montrer que $\sin\alpha = -2 + \sqrt{3}$ et en déduire la valeur exacte de $\varphi(\alpha)$.

6) Etudier les variation de φ et tracer (C_φ) sur un $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (unité10cm)

7) Montrer que $\varphi(t) = t$ admet une solution unique x_0 dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

8) Montrer que x_0 est la seule solution de $\varphi(t) = t$ sur IR.

9) Soit $u_0 = 0$ et $\forall n \in IN$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$. a) Placer les 4 premiers termes de cette suite.

   b) Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN$, $u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

   c) Montrer que $u_{n+1} - x_0$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires.

d) Montrer que $|u_{n+1}-x_0|\le\frac{2}{3}|u_n-x_0|$ en déduire que la convergence de u_n

Exercice 4

1) On considère la fonction g définie de IR vers IR par $g(x)=2x+1-\frac{2}{\pi}\operatorname{cotan}\pi x$
   a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g
   b) $\forall\ n\in IN$ et $\forall x\in\left]n;n+1\right[$; on désigne par g_n la restriction de g à l'intervalle $\left]n;n+1\right[$; Démontrer que, $\forall\ n\in IN$ et $\forall x\in\left]n;n+1\right[$: $g_n(x)=g_0(x-n)+2n$
   c) Etudier les variations de g_0 puis celles de g_n pour $n\in IN^*$
   d) Démontrer que g_n est bijective de $\left]n;n+1\right[$ vers un intervalle à préciser. En déduire le nombre de solution de l'équation $g(x)=0$ dans $\left]n;n+1\right[$
2) On considère la fonction f définie de IR vers IR par $f(x)=\frac{1}{4}\left[1-(2x+1)\cos\pi x\right]$
   a) Démontrer que, pour tout réel x non entier ; on a : $f'(x)=\left(\frac{\pi}{4}\sin\pi x\right)g(x)$
   b) En utilisant la question 1) établir pour tout $n\in IN$ le tableau de variation de f sur $\left]n;n+1\right[$

   <u>NB</u> : On distinguera les cas où n pair et n impair et on ne cherchera pas à calculer l'extremum de f sur cet intervalle.
   c) Démontrer que pour tout réel x, on a : $-\frac{1}{2}x\le f(x)\le\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
   d) Tracer la partie de la courbe (C_f) de f correspondante à $x\in[0;5]$

Fonction logarithme népérien

<u>Exercice 1</u>:

Soit a et b deux réels positifs $0<a<b$. Soit la fonction f telle que

$$f(x)=\frac{\ln(ax+1)}{\ln(ax+1)}$$

1) Pour quelle valeur de x, f est-elle définie ?
2) Calculer la dérivée $f'(x)$
3) On pose : $g(x)\ =\ a(bx+1)\ln(bx+1)-b(ax+1)\ln(ax+1)$
   a) Calculer $g'(x)$,
   b) En déduire que f est strictement croissante
   c) Démontrer que : $\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln\left(\frac{b}{a}+1\right)<(\ln 2)^2$.

<u>Exercice2</u>

1) Determiner les primitives des fonctions

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}\ sur\ ]0;+\infty]\ ;\ g(x)=\tan x\ sur\ \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ ;\ h(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin-\cos x}\ sur\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$$

2) Déterminer trois nombres réels a; b et c tels que: $\forall x\in IR\setminus\{-1\}$

$f(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x+1)^2}=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$. Déduisez en une primitive de f sur $]-1;+\infty[$

3) Soit g la fonction : $x\mapsto\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+3x+1}$. Determiner trois nombres reels a; b et c tels que

$\forall x\in IR\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$ $g(x)=a+\dfrac{b}{2x+1}+\dfrac{c}{x+1}$. Déduisez en une primitive sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

4) Determiner le domaine de definition de h et k puis trouver trios réels a; b et c tells que

a) $k(x)=\dfrac{x^4+6x^2+1}{4x(x^2+1)}=ax+\dfrac{b}{x}+\dfrac{cx}{x^2+1}$ .Déterminer une primitives de k sur $]0;+\infty[$

b) $h(x)=\dfrac{5x^2-x+4}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{c}{x-1}$ .Donner une primitives de h sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $x\mapsto\ln(\cos x)$

a) Etudier la parité de f .

b) Etudier les variations de f ainsi que ses limites aux bornes de $\left]-\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) Tracer la courbe (C) représentative de f .

2) a) Résolvons dans IR l'équation : $\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$

b) Soit g la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right[$ par : $x\mapsto\ln\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)$ et (Γ) sa courbe représentative. Montrer que (Γ) se déduit de (C) par une transformation simple que vous préciserez. Tracez la courbe (Γ)

Exercice 4

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$

1) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=-x+1-2\ln x$

a) Calculer h (1) puis étudier les variations de h (On ne demande pas de calculer les limites)

b) En déduire le signe de h(x) suivant les valeurs de x.

2) a) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine.

b) Calculer f '(x) et en déduire les variations de f .

c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 2cm).

4) a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet un solution unique α sur $]0;+\infty[$.

b) montrer que 0,5< α <0,6 puis donner en justifiant, une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 5:

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

C la courbe représentative de f sur un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). (Unité graphique 3cm)

1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2) Calculer la dérivée f' et étudier son signe puis en déduire le sens de variation de f , on précisera l'abscisse du minimum de f

3) Soit D la droite d'équation : $y = x$

a) Démontrer que la droite D est asymptote à la courbe C en $+\infty$

b) Etudier la position de C par rapport à D.

c) Construire la courbe C et ses asymptotes.

4) a) Montrer que pour tout réel u de $[0;1]$ $1-u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$

b) En déduire que pour tout réel t de $[0;1]$ $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$

c) En déduire que pour tout réel x de $[1;+\infty[$ $0 \leq x + \frac{1}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$

Exercice 6

Soit m un réel strictement positif et $f_m(x) = \ln(mx) + \frac{m}{\ln x}$.

On désigne par C_m la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé (O $\vec{i}$; $\vec{j}$)

1) a) Déterminer l'ensemble de définition (D_m) de f_m et étudier les branches infinies de C_m

b) Déterminer la dérivée de f_m et démontrer que l'ensemble des extremums de C_m, lorsque m décrit $]0;+\infty[$, est la courbe (Γ) d'équation : $y = 2\ln(x|\ln x|)$.

c) Etudier la fonction $h(x) = 2\ln(x|\ln x|)$ et tracer (Γ)

Dans la suite du problème on suppose m = 1.

2) a) Etudier la fonction f_1 et tracer C_1

b) On désigne par g la restriction de f_1 à $[e;+\infty[$. Démontrer que g admet une fonction réciproque

g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. Tracer la courbe de g^{-1}

3) a) Démontrer que (C_1) admet un point d'inflexion dont l'abscisse α est solution l'équation:

$(\ln x)^3 - \ln x - 2 = 0$

c) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près

Exercice7

Soit φ la fonction définie de IR vers IR par : $\varphi(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

1) a) Etudier la variation de φ

b) Tracer C, courbe représentative de φ dans un repère (O $\vec{i}$; $\vec{j}$)

2) Soit ψ la restriction de φ à $]-1;1[$

a) Démontrer ψ admet une fonction réciproque ψ^{-1}. En préciser l'ensemble de définition.

b) Déterminer ψ^{-1}.

3) a) Soit x et $\frac{1}{x}$ éléments de l'ensemble de définition de φ . Calculer $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $\varphi(x)$

b) Déterminer ($\psi^{-1} \circ \varphi$).

Exercice 8:

Soit α un élément de $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et f_λ la fonction définie par $f_\lambda(x) = \ln\left(4x^2 - 4x\sin\lambda + 1\right)$.

On désigne par C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé $(O\vec{i};\vec{j})$

1) a) Déterminer, suivant les valeurs de λ l'ensemble de définition de

b) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}\sin\lambda$ est un axe de symétrie de C_λ

c) Démontrer que C_λ et $C_{-\lambda}$ sont symétriques par rapport à $(O\vec{j})$

2) a) Etudier f_λ pour $\lambda = \frac{\pi}{2}$ et tracer sur le même graphique les courbes $C_{\frac{\pi}{2}}$ et $C_{\frac{-\pi}{2}}$

b) Démontrer que pour $\lambda = \frac{-\pi}{2}$ l'équation $f_\lambda(x) = x$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 9

Dans ce problème on étudie la famille de fonctions f_λ définies par

$f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$ Où λ est un réel non nul

C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé $(O\vec{i};\vec{j})$ et D la droite d'équation $y = x$

1) Donner le domaine de définition de f_λ (on distinguera deux cas $\lambda>0$ et $\lambda<0$)

2) a) Existe-t-il un lien entre les deux courbes C_λ et $C_{-\lambda}$?

b) Soit (Γ) la courbe représentative graphique de la fonction logarithme népérien.

Trouver, lorsque $\lambda>0$ une translation qui transforme (Γ) en C_λ

3) On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$

a) On suppose $\lambda < 0$. Etudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes de son domaine.

En déduire le nombre de points d'intersection de C_λ et D.

b) On suppose $\lambda>0$. Etudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes de son domaine.

Etablir que la plus grande valeur prise par φ_λ(x), quand x décrit le domaine de φ_λ est

$m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \ln\lambda$

c) Etudier quand λ décrit $]0;+\infty[$, les variations de m, en déduire son signe.

d) Combien, lorsque λ est positif, C_λ et D ont-elles de points communs ?

Exercice 10

1) Montrer que : $\forall x > 0; on\ a\ : \frac{1}{x+1} \le \ln\left(\frac{1}{x}+1\right) \le \frac{1}{x}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]$

2) Soit $f(x)=\frac{x}{x^2-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$;

a) Montrer que f est impaire et étudier les variation de f

b) Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé

3) Calculer la dérivée de la fonction $g: x \mapsto (x+1)\ln(x+1)-(x-1)\ln(x-1)$

a) Calculer la dérivée de la fonction g

b) En déduire la primitive de f qui s' annule en $\sqrt{2}$

Exercice 11

Partie I Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{x^2}{2}-1-2\ln(x+1)$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations
2. **a.** Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse0.

   b. Etudier le comportement de la fonction f aux bornes de D_f.

   Interpréter géométriquement les résultats.

   c. Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ unité 2cm.
3. **a.** Montrer que l'équation $\frac{1}{2}x^2-1=2\ln(x+1)$ admet 2 solutions exactement, dont l'une notée α appartient à l'intervalle $]2;3[$

   b. Montrer que $\alpha=\sqrt{2+4\ln(1+\alpha)}$
4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$

   a. Montrer que g est une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

   b. Etudier la dérivabilité et le sens de variation de g^{-1}, bijection réciproque de g.

   c. Tracer la courbe (φ) de g^{-1}dans le même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie II On considère la fonction h définie sur $[2;+\infty[$ par :

$$h(x)=\sqrt{2+4\ln(1+x)}$$

1. Montrer que quel que soit x appartenant à $[2;+\infty[$ on a : $h(x)>2 \quad et\ 0\le h'(x)\le\frac{1}{3}$
2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=2 \quad et \quad u_{n+1}=h(u_n),\ \forall\, n\in\mathbb{N}$

   a. Montrer par récurrence que $\forall\, n\in\mathbb{N}, u_n\ge 2$.

   b. α est le réel définie à la question 3 de la partie I . Montrer que

   $\forall\, n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{3}|u_n-\alpha|$

   c. Montrer que pour entier naturel $n\in\mathbb{N}$: $|u_n-\alpha|\le\frac{1}{3^n}$

   d. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. En déduire une valeur approchée de α à $10^{-2}\ prés$.

Fonctions exponentielle et puissance

Exercice 1 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)$

1) **a)** Etudier les variations de f et démontrer que pour tout $x\in IR,\ f(x)\geq 0$.

b) Déterminer les asymptotes de C_f et tracer C_f (On pourra montrer en $+\infty$ que

$$f(x)=x-\ln 2+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$$

2) **a)** Démontrer que pour tout réel x : $\left|f'(x)\right|<1$ et $f''(x)=1-\left(f'(x)\right)^{2}$.

b) Démontrer que si $x\in\left]-1;+1\right[$ il existe un unique réel y tel que $f'(y)=x$.

c) Exprimer y en fonction de x.

Exercice 2

On note f_n la fonction définie sur $\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-2,+\infty\right[$ par

$$f_n(x)=\frac{e^{1+x}}{(x+2)^{n}} \quad \text{avec } n\in\mathbb{N}^{*}$$

1°) a) Calculer les limites de f_n eu - ∞ (Pour la limité en+ ∞, poser X = x+2)

b) Etudier suivant la parité de n la limite de f en -2

2°) a) Calculer $f_n'(x)$ et étudier son signe suivant la parité de n.

d) Dresser le tableau de variation de f_n.

3°) a)Démontrer que toutes les courbes C_n de f_n passent par un $\hat{m}$ point fixe A dont on déterminera les coordonnées

b) Déterminer une inéquation de la tangente (T_n) à (C_n) en A

4°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat

b) Démontrer que $\forall$ n $\neq 0$ et $\forall x\neq -2$ *on a* $f'_n(x)=f_n(x)-nf_{n+1}(x)$

c) En déduire les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2)

d) Représenter graphiquement (C_1) et (C_2)

Exercice 3

$\forall\, a\in\mathbb{R},\ f_a(x)=\ e^{-x}+ax$ et (C_a) sa représentation graphique.

1. Etudier les variations de f_a, quel est l'ensemble A des réels a pour lesquelles f_a présente un extremum ?

2. Pour tout élément a de A on désigne par I_a le point de (C_a)correspondant à l'extremum. déterminer les coordonnées de I_a en fonction de a

3. Démontrer que l'ensemble E des points I_a, lorsque a décrit A est représentation graphique d'une fonction g que l'on déterminera. Etudier g et construire E.

Exercice 4

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.
2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis préciser $f'(x)$

4) a. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$.

5) a. Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x e^x - e^x + 1$.

b. En déduire le signe de $g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f(limites comprises).

Exercice 5

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité : 5cm).

Partie A

On considère la fonction f_1 définie sur$[0; +\infty[$ par

$$f_1(x) = xe^{-x^2}$$

et on appelle C_1 sa courbe représentative.

1. Calculer $f_1{}'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_1
2. Calculez la limite de $f_1$en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$) Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.
4. On apelle D la droite d'équation $y = x$. Déterminez la position de C_1 par rapport à D.
5. Tracez C_1 et D.

Partie B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_3(x) = x^3 e^{-x^2}$$

et on appelle C_3 la courbe représentative.

1. Montrez que pour tout réel positif x, $f_3'(x)$ a même signe que $(3 - 2x^2)$. En déduire le sens de variation de f_3.
2. Déterminez les positions relatives de C_3 et C_1 .
3. Tracer C_3 dans le même repère que C_1 (on admettra que C_3 a la même asymptote que C_1 en $+\infty$).

Partie C

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n e^{-x^2}$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans le repère$(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $\alpha_n = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On appelle S_n le point de C_n d'abscisse α_n. Montrer que, pour tout n, C_n passe par S_2. Placer S_1 , S_2 et S_3 sur la figure.
2. Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$$g(x) = e^{\frac{x}{2}\left(-1+ln\frac{x}{2}\right)}$$

   a. Étudier le sens de variation de g.

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$

En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2

Suites numériques

Exercice 1

1. Calculer les limites des suites suivantes définies par .

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \;; \qquad V_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \;; \qquad w_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \;;$$

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \;; \qquad K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \;; \qquad B_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_n - 2u_{n-1} = 2n+3$, pour tout entier naturel n non nul.

1) Montrer qu'il existe un réel b indépendant de n tel que : $v_n = u_n + 2n + b$ soit le terme général d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2) En déduire que $u_n = 2^{n+3} - 2n - 7$

3) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. CalculerS_n en fonction de n ; déterminer $\lim_{x\to\infty} S_n$ et calculer la plus petite valeur de n pour laquelle S_n soit supérieure à 2005.

4) On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer T_n en fonction de n et $\lim_{x\to\infty} T_n$

Exercice 3

1. Soit (u_n) la suite définie par :$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$.
   a. Calculer u_1 , u_2 et u_3. On exprimera les termes sous forme de fractions irréductibles.
   b. Comparer les quatre premiers termes de la suite (u_n) avec les quatre premiers termes de la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{n}{n+1}$.
   c. A l' aide d' un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tous entier naturel on a l' égalité : $u_n = w_n$
2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier non nul par $v_n = ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$
   a. Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -ln4$
   b. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. exprimer S_n en fonction de n et calculer la limite de S_n.

Exercice 4

Soit un réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$, on pose pour tout entier naturel n non nul,;

$$S_n(\theta) = ln\left(2cos\frac{\theta}{3} - 1\right) + ln\left(2cos\frac{\theta}{3^2} - 1\right) + \cdots + ln\left(2cos\frac{\theta}{3^n} - 1\right)$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel k non nul, $\left(2cos\frac{\theta}{2^k} - 1\right) > 0$ et que la suite (S_n) est bien définie .
2. Montrer que pour tout réel α , on a : $cos3\alpha = (2cos2\alpha - 1)cos\alpha$
3. Déduisez-en que $S_n(\theta) = ln\left(cos\frac{\theta}{2}\right) - ln\left(cos\frac{\theta}{2\times 3^n}\right)$
4. Déterminer la limite notée $S(\theta)$ de la suite $(S_n(\theta))$.

Exercice 5

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

La suite (u_n) est définie par : $u_n = cos\theta$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ.
   (On rappelle que $cos2x = 2cos^2x - 1$)
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n = 2cos\frac{\theta}{2^n}$
3. Soit(v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{\theta}{2^n}$. Déterminer la limite de (v_n)
4. En déduire que (u_n) est convergente .Quelle est sa limite

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 9}$

1. Etudier les variations de f et montrer que la restriction de f à l' intervalle $I = [3; +\infty[$ admet une bijection réciproque notée g dont on précisera son domaine de définition
2. On considère une suite la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_n = g(u_{n-1})$

On se propose de calculer de trois façons différentes la limite de la suite (u_n)

   a. Etudier les variations de g puis montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, u_n > 3 \;\; et \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{g(u_n) - g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}} > 0$$

   b. Déterminer le signe $u_1 - u_0$ puis montrer que la suite (u_n) est monotone et en déduire sa limite.

3. a. En appliquant l' inégalité des accroissement finies à la fonction g dans un intervalle approprié, montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{g(u_n)-3}{u_n - 3} < \frac{1}{2}$ en déduire que pour $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - 3 < \frac{1}{2^{n-1}}$
   Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
   b. Déterminer une valeur possible de n pour que la $u_n - 3 < 10^{-3}$
4. Pour tout entier naturel on pose: $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 3}$
   a. Montrer que la suite (lnv_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer alors u_n en fonction de n et déterminer la limite de ma suite (u_n).

Calcul intégral

Exercice 1

1) Calculer les intégrales en faisant un changement de variable.

a) $I=\int_1^2 t^2\sqrt{a+t}\,dt$, avec $a>0$; b) $I=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$ c) $I=\int_1^4 t\sqrt{1+t^2}\,dt$; d) $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

Exercice 2

Calculer en utilisant une ou des intégrations par parties.

a) $I=\int_0^{\pi}x^2\cos x\,dx$; b) $I=\int_1^x\frac{\ln t}{t^2}dt$; c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{t}{\cos^2 t}dt$ d) $I=\int_1^x(1+t)\ln t\,dt$; e) $I=\int_1^e x^2\ln x\,dx$

f) $I=\int_0^2(x^2-x+1)e^{2x}dx$;g) $I=\int_1^x\ln(t+\sqrt{t^2+1})dt$ h) $I=\int_0^{\pi}2t\cos^2 t\sin t\,dt$; i) $I=\int_{-\pi}^{\pi}e^{x^2}\sin x\,dx$

Exercice 3

On considère les intégrales : $I=\int_0^{\pi}\cos^4x\,dx$ et $J=\int_0^{\pi}\sin^4x\,dx$.

1) Montrer que I peut s'écrire : $I=\int_0^{\pi}\cos x(\cos x-\cos x\sin^2x)dx$.

2) A l'aide d'une intégrale par parties, montrer que : $I=\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx-\frac{1}{3}J$.

3) Montrer de même que : $J=\int_0^{\pi}\cos^2x\,dx-\frac{1}{3}I$.

4) Montrer que : $I+J=\frac{3\pi}{4}$ et $J-I=0$. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 4

1) Calculer, à l'aide d'une aire connue, l'intégrale :$I=\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}$

2) En déduire la valeur de: $J = \int_{-3}^{3}\left(x + \sqrt{9 - x^2}\right)dx$ et $L = \int_{0}^{3}\left(\sqrt{9 - x^2} - 3\right)dx$

3) Soit $M = \int_{0}^{3} \frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}dx$. Calculer $M + L$ et en déduire que $M = -L$.

Exercice 5

1) On pose, pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b) Prouver que, pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq I^n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$.

En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

c) Montrer en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel non nul: $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$

2) On considère la suite (a_n), définie sur IN^* par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul : $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 6

Pour tout $n \geq 1$ on pose : $I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}dt$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

2) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$

3) En déduire par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$: $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!} + I_n$.

4) Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!}A$.

(On pourra déterminer A en majorant sur l'intervalle $[0; 1]$la fonction :$t: \to (1 - t)^n e^{\frac{t}{2}}$).

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de : $u_n = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!}$.

Exercice 7

N désigne un entier strictement positif fixé. On se propose de calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|.$$

Pour ceci on commence par étudier le signe de sin(nt) sur l'intervalle $[0; \pi]$

1) Soit un entier k≥0 et soit l'intervalle $J_k = \left[k\frac{\pi}{n}, (k+1)\frac{\pi}{n}\right]$.

a) t désignant un élément de J_k, donner un encadrement du réel nt.

b) En déduire que sin(nt) garde un signe constant lorsque t décrit J_k. Préciser ce signe lorsque $k = 2l$, puis lorsque $k = 2l + 1$ avec $l \in IN$.

c) Calculer $\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} |\sin(nt)|dt$.

2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|$.

Exercice 8

Soit $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx,\ n \in IN$

1) Calculer I_0. Trouver une formule de récurrence entre I_n et I_{n-1}
2) Calculer I_n en fonction de n. Etudier la limite de la suite (I_n)

Exercice 9

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sin x} & \text{si } 0 \prec x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que, pour tout n de IN, la fonction f_n est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
2) On pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx, \quad (n \in IN)$

   Pour $n \geq 2$, calculer $I_n - I_{n-2}$
3) Montrer que pour $n \geq 1$, $I_{2p} = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}\right)$

   Pour $p \geq 0$, calculer I_{2p+1} en fonction de p.

Exercice 10

Soit $u_n = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}, (n \in IN^*)$ et soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x^k$

1) Montrer que l'on a : $\int_0^1 f(x)dx = u_n$
2) Montrer que pour tout $x \neq -1$ l'on a : $f(x) + \frac{x^{2n}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$
3) En déduire que : $u_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx = \ln 2$
4) Montrer que l'on a : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^{2n}dx$
5) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 11

1) F est la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

a. Etudier les limites aux bornes. Interpréter graphiquement les résultats.

b. Etudier la variation de f puis tracer sa courbe dans RON.

2) k étant un réel strictement positif, Calculer : $\int_1^k ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx \ puis \ \int_1^k f(x)dx$

3) Dans cette question m désigne un réel strictement positif.

a. Montrer successivement que : $\frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{m}$; $\int_m^{m+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{m} - f(m)$ *et* $0 \leq f(m) \leq \frac{1}{m(m+1)}$

4) a. montrer qu' il existe deux réels a *et* b à déterminer tels que pour tout réel x non nul et différent de 1 on a : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

b. Pour tout $n \in n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)} = \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$

-En utilisant la question **a.** , simplifier l'écriture de S_n.

-En déduire que la suite (S_n) est convergente et préciser sa limite

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$$U_n = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n-1) + f(2n) = \sum_{i=n}^{2n} f(i)$$

a. Montrer que : $0 \leq U_n \leq S_n$. En déduire la limite de la suite (U_n)

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; (V_n) est la suite définie par :

$$V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i}$$

-Vérifier que : $f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n-1) + f(2n) = V_n - ln2 - ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

-Déduire que la suite (V_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 12

Soit a un réel fixé, strictement positif.

1) Par une intégration par parties, démontrer que $\int_0^a te^t dt = ae^a - \int_0^a e^t dt$.

En déduire $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t dt$

2) Soit $n \in IN^*$ et $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t dt$. Démontrer que $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

3) Démontrer par récurrence $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + ... + \frac{a^n}{n!} + I_n$ et que $0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}(e^a - 1)$

4) Soit $U_n = \frac{a^n}{n!}$. Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$ En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

5) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + ... + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$

Equations différentielles

Exercice 1:

Résoudre chacun des cas suivants et donner la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données.

a) $y'-2y=0$ avec $y(0)=1$
b) $3y'+7y=0$ avec $y(2)=5$
c) $y''-9y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=-1$
d) $y''+y=0$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=1$
e) $y''-2y'+y=0$ avec $y(0)=y'(0)=1$
f) $y''-4y'+3y=0$ avec $y(0)=6$ et $y'(0)=10$
g) $y''+y'+y=0$ avec $y(0)=y'(0)=1$
h) $25y''-20y'+4y=0$ avec $y(0)=y(0)=1$

Exercice 2

Chercher les intégrales particulières de ces équations sous la forme indiquée

a) $y''+9y=\cos x$: *b*) $y''+2y'+3y=\cos x$. $f(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x$

c) $y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$ $f(x)=e^{-x}(\lambda\cos x+\mu\sin x)$

d) $y''+y'-2y=8\sin 2x$ $f(x)=\lambda\cos 2x+\mu\sin 2x$

e) $y''+2y'-3y=xe^{-x}$ *et* $y''+y'+y=xe^{-x}$ $P(x)e^{-x}$, où $P(x)$ est un polynôme.

f) $y''+2y'-3y=xe^{x}$ $Q(x)e^{x}$, où $Q(x)$ est un polynôme

Exercice 3

Soit (E) l'équation différentielle: $y''+4y'+8y=20\sin 2x-10\cos 2x$

1. Résolvez l'équation $y''+4y'+8y=0$ (E')
2. Déterminer les coefficients a et b tels que la fonction g définie par $g(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$ est solution de (E)
3. Démontrer que f est la solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E')
4. Donner toutes les solutions de (E)

Exercice 4 : On considère la fonction définie par $f(x)=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle : $y'+y=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}$.

2. a) On pose $h(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}$ Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]0;+\infty[$

b) En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 5 : Dans cet exercice on cherche à calculer l'intégrale

$I=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[\sin 2x+e^{-x}\cos(x-\frac{\pi}{4})]dx$ à l'aide d'une équation différentielle.

1. Résoudre l'équation : $y''+2y'+2y=0$ (E_1)

2. Résolution de l'équation différentielle (E): $y''-2y'+2y=4\cos 2x-2\sin 2x$

a. Déterminer deux réels a et b pour que la fonction définie par $\forall x\in\mathbb{R}$ $g(x)=a\sin x+b\cos x$ soit solution de (E)

b. f désignant une fonction numérique, on désigne par h la fonction h = f-g. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si h est solution de (E_1).

3. a. Vérifier que la solution de (E) telle que $f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(0)=2$ est

$$f(x)=\sin 2x+e^{-x}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

b. Trouver l'ensemble des primitives F de f . En déduire la valeur de I.

Exercice6

1. Résolvez l'équation différentielle : $y'' + 16y = 0$
2. Trouver la solution f de cette équation vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$
3. Trouver deux réels positifs ω et φ tels que $f(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{8}\right]$

Exercice 7

On considère sur [0 ;+∞[, et satisfait l'équation différentielle : $y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y)$ (E)

1. Démontrer l'équivalence suivante : Une fonction f, dérivable, strictement positive sur [0; +∞[, vérifie, pour tout t de [0; +∞[, est solution de (E) si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de [0 ;+∞[, : $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle : $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$

3. En déduire qu'il existe un réel k tel que, pour tout t de [0 ;+∞[: $f(t) = exp\left[3 + ke^{\frac{t}{20}}\right]$.

Exercice 8

On l'ensemble E des fonctions f dérivables et ne s'annulent sur ℝ telles que:

$$f'(x) + 2f(x) = f^2(x)$$

1. Si $f \in E$, Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ est dérivable sur ℝ et qu' elle est solution d' une équation différentielle de la forme :$y' + ay = b$, où a et b sont des réels à déterminer.
2. Déduisez en que les fonctions de (E) sont de la forme : $f(x) = \frac{2}{1+ke^{2x}}$; $k \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 9

1. On considère l'équation différentielle (E): $x^2y'' - xy' + y = 0$.
   - **a.** Soit z une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, Démontrer que xz est solution de (E) si et seulement si z est solution de l' équation différentielle (E'): $xz' = a$ $(a \in \mathbb{R})$.
   - **b.** Résoudre sur $]0; +\infty[$, les équations (E') puis (E).
2. A l' aide d' un raisonnement analogue résoudre dans $]-\infty; 0[$ l' équation différentielle $xy' - x - y = 0$.

Exercice 10

On considère l'équation différentielle $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$ (E)

a. Démontrer que f est solution de (E) sur $]1; +\infty[$ si et seulement si f'' est dérivable sur I et est solution de l' équation différentielle (E'): $y' = y$.

b. Démontrer que si f'' est dérivable sur $]1; +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle (E') alors $f'(x) = f(x) + ax + b$; $(a, b \in \mathbb{R})$.

Quel relation doit liées a et b pour que f soit solution de l'équation différentielle (E) ?

c. Résoudre (E) sur $]1; +\infty[$.

Exercice 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, résoudre dans ℝ, l' équation différentielle: $y' - \frac{1}{n}y = 0$ (E)
2. On considère l' équation différentielle: $y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n+1}$ (E')
   - **a.** Déterminer les réels a et b pour que $g(x) = ax + b$ soit une solution de (E')
   - **b.** Démontrer que pour que h soit solution de (E') il faut et il suffit que $h - g$ soit solution de (E). Déduire les solutions de (E) .Déterminer f vérifiant $f(0) = 0$.

Probabilité et variables aléatoires

EXERCICE : 1

Deux lignes téléphoniques. L_1et L_2 aboutissent à un standard. Soit A l'événement « la ligne L_1 est occupée » Soit B l'événement « la ligne L_2 est occupée »
On donne les probabilités suivant : P(A) = 0,7 ; P (B) = 0,5 ; $P(A \cap B) = 0{,}3$.
Calculer les probabilités des événements suivant :
1. E « la ligne L1 est libre »
2. F : « une ligne au moins est occupée ».
3. G : « les deux lignes sont libres » .
4. H : « une ligne seulement est occupée ».
5. I : « une ligne au moins est libre ».

EXERCICE: 2

Les faces d'un dé cubique sont numérotées de 1 à 6. On lance trois fois de suite le dé.
1. Combien y a-t-il de triplets résultats possibles ?
2. Tous les triplets sont équiprobables. Quelles sont les probabilités des événements suivants :
(a) Le premier lancer donne un 6.
(b) On a obtenu trois fois le chiffre 6
(c) Il y' a exactement un 6 sur les trois lancers
(d) On a jamais obtenu le chiffre 6

Exercice : 3
On considère l'équation du second degré $x^2 + bx + c = 0$. Les coefficients b et c sont déterminés par le jet d'un même dé deux fois de suite.
1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire, puis calculer son cardinal.
2. Déterminer les probabilités des événements suivants:
A: « l'équation $x^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes ».
B: « l'équation $x^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles confondues ».
C: « l'équation $x^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solutions réelles ».

Exercice : 4 On considère deux jeux de 32 cartes. On les notes 1 et 2.
1. On tire au hasard une carte dans chacun des jeux 1et 2. Décrire l'univers des possibles. On note A l'événement « obtenir 2 as ». et B l'événement « obtenir au moins un as ». Calculer P(A) et P(B).
2. On mélange les cartes des deux jeux et on tire successivement et sans remise deux cartes au hasard parmi les 64. Décrire l'univers des possibles et calculer P(A) et P(B).

EXERCICE: 5 DANS UNE COURSE, 18 CHEVAUX SONT PARTANTS.

1. Quelle est la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ?
2. Le tiercé gagnant est par exemple le suivant : premier le 9 , puis le 17 et enfin le 13.
Quelle est la probabilité de gagner dans le désordre ?

EXERCICE: 6

Une boite contient 5 jetons Portant les lettres A, B, C, D et E. On forme un mot de 5 lettres en tirant successivement ces 5 jetons (par « mot », on désigne un groupe de cinq lettres ayant ou non un sens).

1. Combien y' a t-il de mots en tout ?
2. Tous les mots sont équitables. Quelles sont les probabilités que le mot formé :
   (a) commence par une voyelle ?
   (c) finisse par une voyelle ?

(b) commence et finisse par une voyelle ? (d) commence ou finisse par une voyelle ?

3. Quelle est la probabilité que le mot formé ne commence pas par DB (dans cet ordre) ?

Exercice : 7

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

1. On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir:

a. 3 boules blanches et 2 boules noires?

b. des boules de couleurs différentes ?

2. On tire successivement 5 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir:

a. 3 boules blanches et deux noires dans cet ordre?

b. 3 boules blanches et deux noires dans un ordre quelconque?

Exercice : 8

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en extrait successivement n boules avec remise, n étant un entier supérieur ou égal à 2. On considère les événements suivants:

A: « on obtient des boules des deux couleurs ».

B: « on obtient au plus une boule blanche ».

1. a. Calculer la probabilité de l'événement: « toutes les boules sont de la même couleur ».

b. Calculer la probabilité de l'événement: « on obtient exactement une boule blanche ».

c. En déduire les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$ et $p(B)$.

2. Montrer que $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ si et seulement si $2^{n+1} = n + 1$.

Exercice : 9

Un sac contient n billes rouges et $2n$ billes noires ($n \geq 1$), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée.

1. On tire simultanément 3 billes du sac.

a. Quelle est la probabilité p_n pour que, parmi ces trois billes, il y'ait une seule rouge?

Calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n = p$.

b. Calculer la probabilité q_n pour que, parmi ces trois billes, il y'ait au moins une rouge?

Calculer $\lim_{n\to+\infty} q_n = q$.

2. On effectue maintenant 3 tirages successifs d'une seule bille en remettant dans le sac la bille tirée avant d'effectuer le tirage suivant.

a. Montrer que la probabilité d'obtenir une seule bille rouge est égal à p.

b. Montrer de même que la probabilité de tirer au moins une bille rouge est égale à q.

Exercice : 10

Dans le tiroir de son armoire, Abdou possède 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes vertes et 2 paires de chaussettes rouges. Ces chaussettes sont mélangées dans le plus grand désordre et indiscernables au toucher.

Au moment où il s'habille, survient une panne d'électricité. Abdou, qui est pressé et n'a ni lampe de poche, ni boite d'allumettes, prend au hasard deux chaussettes dans le tiroir.

1°) Quelle est la probabilité pour qu'il ait tiré deux chaussettes de même couleur ?

Exercice 11 :

Une entreprise de la place fabrique des ordinateurs. La fabrication comporte deux phases. La première phase fait apparaitre un défaut a dans 2% des cas et la seconde phase fait apparaitre un défaut b dans 10% des cas.

Un ordinateur en fin de fabrication est prélevé au hasard; on définit alors les événements:
A: « l'ordinateur présente le défaut a » ;
B: « l'ordinateur présente le défaut b ».
1. Dans cette question on suppose que la probabilité pour que l'ordinateur présente les deux défauts est égale à 0,01. Les événements *A* et *B* sont ils indépendants?
2. Dans cette question, on suppose que les événements *A* et *B* sont indépendants. Calculer la probabilité de l'événement *C*: « l'ordinateur présente un et un seul des deux défauts ».

Exercice 12 :
On suppose qu'un individu venant se faire consulter dans un hôpital donné a une probabilité de 30% d'être atteint d'une maladie difficile à diagnostiquer. Chaque individu subit un test. On sait que:

- si un individu n'est pas malade, 9 fois sur 10 la réponse au test est négative;
- s'il est malade, 8 fois sur 10 la réponse est positive.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un individu ait un test positif ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu soit malade et qu'il ait un test positif ?
3. Si le test est positif, quelle est la probabilité pour que l'individu soit malade ?

Exercice 13 :
Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma. On note p(A|B) la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.
1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :
G = "le client achète une tablette gagnante"
U = "le client gagne exactement une place de cinéma"
D = "le client gagne exactement deux places de cinéma"
a) Donner p(G), p(U|G) et p(D|G)
b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

Exercice14 :

Le sang humain est classé en 4 groupes distincts : A, B, AB et O. Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (noté Rh^+), s'il ne possède pas ce facteur il est dit de Rhésus négatif (noté Rh^-). Sur une population P, les groupes sanguins se répartissent d'après le tableau suivant :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe, la proportion d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se repartit d'après le tableau suivant :

Groupe	A	B	AB	O
Rh^+	82%	81%	83%	80%
Rh^-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant du sang du groupe O et de Rhésus négatif est appelé donneur universel.

1 .a. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang du groupe O ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel ?

c. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang de Rhésus négatif ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard parmi ceux possédant le facteur Rhésus négatif soit du groupe O ?

Exercice 15 :

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. On suppose de plus que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades. Le but du problème est de savoir si le vaccin est efficace. On choisit un individu au hasard dans cette population et on note :M = "l'individu est malade" et V = "l'individu est vacciné".

1. Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilités.
2. Calculer p(M). En déduire la proportion des malades dans la population.
3. Calculer la probabilité que l'individu soit malade sachant qu'il n'est pas vacciné.
4. En déduire que $p(M|\overline{V}) > p(M|V)$. Ce vaccin est-il efficace ?

Exercice 16 :

On dispose de deux urnes U_1et U_2. U_1 contient deux boules rouges, une blanche et deux noires. U_2 contient trois blanches et une noire. On lance un dé cubique parfaitement équilibré. Si sur la face supérieure apparait 1 ou 2, on extrait au hasard une boule de U_1 ; dans le cas contraire on extrait au hasard une boule de U_2.

1. Sachant que l'on a tiré une blanche, quelle est la probabilité qu'elle soit issue de U_1?

2. Sachant que l'on a tiré une blanche, quelle est la probabilité qu'elle soit issue de U_2 ?

Exercice 17

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de son passage hebdomadaire, pour l'entretien des machines.

Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien. Pour un certain type de machines, le technicien constate:

- qu'il doit intervenir la première semaine;
- que s'il est intervenu la n$^{\text{ième}}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la (n+1)$^{\text{ième}}$ semaine est égale à $\frac{3}{4}$.
- que s'il n'est pas intervenu la n$^{\text{ième}}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la (n+1)$^{\text{ième}}$ semaine est égale à $\frac{1}{10}$.

On désigne par E_n l'événement: « le technicien intervient la n$^{\text{ième}}$ semaine » et par p_n la probabilité de cet événement.

1. Déterminer les nombres $p(E_1)$, $p(E_{n+1} / E_n)$ et $p(E_{n+1}/\overline{E_n})$ puis en fonction de p_n: $p(E_{n+1} \cap E_n)$ et $p(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$.

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{13}{20}p_n + \frac{1}{10}$.

3. On pose: $q_n = p_n - \frac{2}{7}$.

a. Montrer que la suite (q_n) est une suite géométrique.

b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

c. Pour quelles valeurs de n, la probabilité que le technicien intervienne la $n^{ième}$ semaine est-elle inferieure à $\frac{3}{10}$?

Exercice 18

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a 2 élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'événement "l'élève fait partie du club photo" et T l'événement "l'élève fait partie du club théâtre".
Montrer que les événements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. On appelle T_1 l'événement "le premier élève appartient au club théâtre. Calculer $p(T_1)$.

b. On appelle T_2 l'événement "l'élève pris en photo appartient au club théâtre".

Calculer $p(T_2/ T_1)$, puis $p(T_2/\overline{T_1})$.En déduire : $p(T_1 \cap T_2)$ et $p(T_2 \cap \overline{T_1})$.

c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est $\frac{1}{5}$.

3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à le nombre de fois qu'un élève du club de théâtre est photographie pendant quatre semaines.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique et la variance deX

Exercice 19

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a 2 élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'événement "l'élève fait partie du club photo" et T l'événement "l'élève fait partie du club théâtre".
Montrer que les événements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. On appelle T_1 l'événement "le premier élève appartient au club théâtre. Calculer $p(T_1)$.

b. On appelle T_2 l'événement "l'élève pris en photo appartient au club théâtre".

Calculer $p(T_2/ T_1)$, puis $p(T_2/\overline{T_1})$.En déduire : $p(T_1 \cap T_2)$ et $p(T_2 \cap \overline{T_1})$.

c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est $\frac{1}{5}$.

3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à le nombre de fois qu'un élève du club de théâtre est photographie pendant quatre semaines.
4.Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique et la variance deX

Exercice21

On dispose de deux dés tétraédriques notés A et B. les quatre faces de chacun d'eux sont notées 1 à 4. Lorsque l'on jette un dé, on note le numéro de la face cachée du dé (on suppose que le dé ne peut tomber que sur une face). Pour le dé a, les quatre numéros sont tous de la même probabilité d'être cachée. Pour le dé B, la probabilité P_i de noter le numéro i est proportionnelle à i.

1) Calculer les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 pour les quatre faces de B.
2) On lance les deux dés. On note i le numéro de caché du dé A et j le numéro caché du dé B On suppose les lancers indépendants ; on note P (i, j) la probabilité de noter i pour le dé A et j pour le dé B.
   a) Montrer que $P(1,1) = P(2,1) = P(3,1) = P(4,1) = \frac{1}{40}$
   b) Déterminer les probabilités P (i, j) pour tous les nombres entiers i et j compris entre 1et 4.
3) On appelle Z la variable aléatoire définie par : Z (i, j) est le plus grand des nombres i et j.
   Exemple : Z (1, 2) = 2, Z (2, 1) = 2 Z (1,1) = 1.
   a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   b) Déterminer la loi de probabilité de Z et espérance mathématique E (Z).

Exercice22

Dans une classe de10 élèves, 2 élèves ont triches pendant un devoir.

1. Un professeur choisit n élèves dans cette classe. Calculer la valeur minimale de n pour que la probabilité d'avoir au moins un tricheur parmi ces élèves soit $\geq 0{,}9$.
2. Chacun des deux tricheurs portent le n°1, chaque autre élève porte le n°0. On choisit 3 élèves dans cette classe soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros portés par ces élèves. Déterminer
   a. la loi de probabilité de X et l'espérance mathématique.
   b. Définir et représenter la fonction de répartition.

Exercice 23 (Bac D 92)

Un porte-monnaie contient 2 pièces de 50^F et n pièces de 100^F.

1. Un enfant choisit une pièce au hasard et le remet dans le porte-monnaie. Quelle est la probabilité pour qu'il ait tire 1 pièce de 100^F.
2. L'enfant prend 2 pièces au hasard puis les remet. Quelle est la probabilité pour qu'il ait tire 2 pièces de 100^F.
3. L'enfant prend 4 pièces au hasard puis les remet. Quelle valeur faut il donner à n pour que la probabilité qu'il ait tire exactement 300^F soit $\frac{1}{11}$
3. On suppose que n = 10. L'enfant tire simultanément 4 pièces. Soit X la variable aléatoire égale à la somme tirée. Déterminer la loi de probabilité de X et l'espérance mathématique.

Exercice 24 (Bac D 93)

Une épreuve consiste à tirer une boule d'un sac contenant 5 boules d'un sac de 0 é 4. Soit P_n la probabilité de tire la boule numéro n. Les réels P_n sont les termes d'une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{20}$.

1. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4. (résultats sous forme décimale)
2. X la variable aléatoire qui prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 avec les probabilités P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4. Calculer E(X) et σ_X .
3. On procède à 5 tirages successifs avec remise d'une boule. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 fois une boule de numéro impair.

Exercice 25 (Bac D 94)
Un test est composé e cinq questions aux quelles on doit répondre par « OUI » ou « NON ». Chaque réponse exacte est notée +4, chaque réponse fausse est notée -2. Un candidat répond à chacune des questions. On définit deux variables aléatoires X et Y :
X : le nombre de réponse exacte. Y : après avoir fait la somme S des 5 notes partielles, on prend le plus grand entre S ou 0. Y= Sup(S, 0), Y ne peut donc être <0.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. En déduire la loi de probabilité de Y.

Exercice 26 (Bac D 95)
Un sac contient quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4 et quatre jetons noirs numérotés de1 à4
1. Un joueur tire au hasard et simultanément 2 jetons du sac. On convient de la règle suivante : * S'il tire 2 jetons numérotés 1, il gagne 600^F.
* S'il tire 2 jetons de même couleur, il gagne 200^F.
* Dans tous les autres cas il perd 200^F.
Déterminer la probabilité pour qu'il tire :
a. 2 jetons de numéro 1. **b.** 2 jetons de même couleur. **c.** il perd 200^F.
2. Apres le premier tirage, le joueur remet les deux jetons dans le sac et procède à un deuxième tirage de 2 jetons, en convenant de la même règle.
Soit X la variable aléatoire qui à deux tirages successifs associe « le gain » du joueur (positif ou négatif).
a. Déterminer la loi de probabilité de X
b. En déduire la probabilité pour que le gain du joueur soit au moins égal à 400^F.

Exercice 27(Bac D 97)
Dans un jeu de 32 cartes on a 4 « couleurs » : Pique, Trèfle, Carreau et cœur. Chaque « couleurs comprend 8 cartes dont un As.
1. On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A « les 3 cartes sont des As », **B** « il y'a au moins 2 ''couleurs '' parmi ces 3 cartes »
C « Il n'y a pas d'As parmi les 3 cartes »
2. On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes. Le nombre de cœurs tires définit une variable aléatoire X. Déterminer
a. les valeurs prises par X. **b.** la loi de probabilité de X et E(X)

Calculs barycentriques et cocyclicité dans le plan

Exercice 1
Dans le plan on considère un triangle équilatéral ABC de coté a de centre de gravité G et A' le milieu du segment [BC]

1. Soit le vecteur $\vec{u} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ où M un point du plan. Exprimez alors $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$. Déterminer et construire l'ensemble (Ψ) des points M du plan tels que :
$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$$
2. Soit D le barycentre du système $(A, -1), (B, 1)$ et $(C, 1)$. Placer le point D. Déterminez et construisez l'ensemble (Φ)des points M du plan tels que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2$

Exercice 2

Un plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé A tout point C du plan de coordonnées (p ; q), on associe l'isobarycentre G des points A(q ; 0), B(0 ; q) et C(p ; q).

1) Calculer les coordonnées de G en fonction de p et q. Quel est l'ensemble (D) lorsque le point C décrit $\mathcal{P}$.
2) Soit G_0 un point de (D) d'abscisse λ. Déterminer l'ensemble (Δ) des points C qui G_0 pour point associé. En déduire que l'application qui transforme C en G est la composée de deux applications simples.
3) Un point C étant fixé, Démontrer que l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(p^2 + q^2)$ est un cercle (Γ) contenant O. Quel l'ensemble des centres des cercles (Γ) lorsque le point C décrit $\mathcal{P}$?

Exercice2

Dans le plan on considère le triangle équilatéral ABC. On pose $AB = a \ (a > 0)$

Soit I le point du plan tel que : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB}$

1) Exprimer $IA^2; IB^2; IC^2$ en fonction de a.
2) Trouver le triplet $(\alpha;\beta;\gamma)$ de réels tels que le point I soit barycentre du système $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$
3) Soit k un réel donné ;
   a. Déterminer l'ensemble (Ω_k) des points du plan tels que : $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$
   b. Peut- on trouver le réel k_0 tel que B∈ (Ω_{k_0}) ?
   c. Démontrer alors que (Ω_{k_0}) est un cercle tangent aux droites (AB) et (AC).

Exercice3

ABC est un triangle non rectangle, O est le centre de son cercle circonscrit ($\mathcal{C}$) et H son orthocentre. Les droites (AH) et (BC) se coupent en Q ; les droites (BH) et (AC) se coupent en R ; les droites (CH) et (AB) se coupent en P.

1) a. Montrer que les points A ; B ; Q et R sont cocycliques ; En déduire que : $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{RA};\overrightarrow{RQ})[\pi]$

   b. On note T un point quelconque de la droite tangente en C au cercle ($\mathcal{C}$) .

   Montrer que : $(\overrightarrow{RA};\overrightarrow{RQ}) = (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CT})[\pi]$

   En déduire que les droites (RQ) et (CT) sont parallèles

   c. Montrer que les droites (RQ) et (OC) sont perpendiculaires
2) En utilisant la cocyclicité des points A, C, P et Q d' une part et Q, C, R et H d' autre part, montrer que : $(\overrightarrow{QP};\overrightarrow{QA}) = (\overrightarrow{QA};\overrightarrow{QR})[\pi]$

   En déduire que (AH) est une des bissectrices du triangle QRP.

Exercice 4

ABC est un triangle, on pose BC = a, AC = b, et AB = c ; A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB] ; G l'isobarycentre du triangle ABC.

1) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2-\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

2) En calculant de deux façons différentes : $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2$, établir que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MG^2-\frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètres [AA'] et [BC] montrer que lorsqu' ils existent ; ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c.

Exercice 5

ABC est un triangle et on désigne par G son centre de gravité. Soit φ *et* f les applications définies par :

$$\varphi : P \to IR \qquad M \mapsto \varphi(M)=\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\overrightarrow{MA}$$

$$f : P \to IR \qquad M \mapsto f(M)=MA^2+MB^2+MC^2$$

1) Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\varphi(M)=3MG^2+\varphi(G) \quad \text{et} \quad \varphi(G)=-\frac{1}{2}f(G)$$

2) Calculer $f(G)$ en fonction de AB, AC et BC et en déduire l'expression de $\varphi(M)$ en fonction de MG, AB, AC et BC.

Dans le cas particulier ou le triangle est équilatéral de coté a, déterminer l'ensemble des points M tels que : $\frac{a^2}{4}\le\varphi(M)\le\frac{a^2}{2}$.

Exercice 6: A et B sont deux points du plan ; Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

1) $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

4) $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$

5) $\left|\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)\right|=\frac{\pi}{6}[2\pi]$

6) $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right) = 0\ [2\pi]$

7) $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right) = \pi\ [2\pi]$

Exercice 7:

Soit (δ) et (ζ) deux cercles sécants en deux points A et B . On choisit un point C sur (δ) et un point D sur (ζ), ces points étant distincts de A et B .Un point P décrit le cercle (δ) .La droite (PA) coupe le cercle (ζ) en un point Q ; lorsque P est en A ,on considère que la droite (PA) est la tangente en A à (δ)

1. Montrer que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{QD})(\pi)$.En déduire que (PC) et (QD) sont sécantes en un point R si et seulement si C, B et D ne sont pas alignés.

2. On suppose B, C et D non alignés. Montrer que $(\overrightarrow{RC},\overrightarrow{RD})=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})(\pi)$

En déduire l'ensemble décrit par R quand P décrit (δ).

Exercice 8

ABC est un triangle ;H le projeté orthogonal de A sur (BC) ; P et Q sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur les droites (AB) et (AC).

1) Montrer que : $\left(\overrightarrow{HA};\overrightarrow{HB}\right)=\left(\overrightarrow{CQ};\overrightarrow{CB}\right)[\pi]$ puis que $\left(\overrightarrow{HA};\overrightarrow{HQ}\right)=\left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PQ}\right)[\pi]$

2) Déduisez en que les points B ;P ;C ;Q sont cocycliques .

Isométries du plan et Applications affines

Exercice 1

Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ on appelle O le centre de gravité du triangle. Les points I ; J ; K sont tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{5}{3}\overrightarrow{CA}$

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que I soit barycentre de (A ;a) et (B ;b).
2) En utilisant la rotation de centre O qui transforme A en B ; démontrer que O est le centre de gravité du triangle IJK.

Exercice 2

ABCD est un carré de centre de O tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de rot.

Exercice 3

Dans le plan orienté ; on considère un triangle équilatéral ABC tel que une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.On appelle (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC. La médiatrice de [BC] coupe (Γ) en A et D, on appelle A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1) Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.
2) On désigne par $s_{(BD)} o\, s_{(CD)}$; $s_{(CA)} o\, s_{(AB)}$ les symétries orthogonales par rapport à (BD) ; (CD) ; (CA) ; (AB) respectivement.
3) Quelle est la nature des applications suivantes : $s_{(BD)} o\, s_{(CD)}$; $s_{(CA)} o\, s_{(AB)}$? on précisera les éléments caractéristiques.
4) Soit (Δ) la droite parallèle à (DC) menée par A et $s_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale par rapport à (Δ). Démontrer que : $s_{(BD)} o\, s_{(CD)} = s_{(DC)} o\, s_{(DA)}$ et $s_{(CA)} o\, s_{(AB)} = s_{(DA)} o\, s_{(\Delta)}$
5) Retrouver les résultats du1) en utilisant l'application t définie par : t = $s_{(BD)} o\, s_{(CD)} o\, s_{(CA)} o\, s_{(AB)}$ que l'on caractérisera.

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$.on appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;on note I le milieu de [BC]

1) Construire le point J = R(I).
2) On pose F_1= RoT et F_2 = TOR
   Déterminer F_1(J) et F_2(I) puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de F_1 et F_2.
3) Soit M un point du plan $M_1 = F_1(M)$ et $M_2 = F_2(M)$;Quelle est la nature du triangle BCM_1M_2 ?

Exercice 5

Soit Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$ et A (2 ;0) , B(2 ;2) , C(0 ;D)

S_1 et S_2 sont les orthogonales par rapport à (AC) et (OA) et la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$
Reconnaître S_1oS_2 ; puis ToS_2oS_1

Exercice 6

1) O est un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul, soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ h est l'homothétie de centre O et de rapport k. Quelle est la nature de l'application tohot ?
Préciser les éléments servant à la définir

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit M(x, y) et M'(x',y') l' application S définie par $\begin{cases} x' = x + 2y - 2 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$

montrer que S est une symétrie, préciser ses éléments caractéristiques

Exercice 7

Soit ABC un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB < AC. On appelle (Ψ) le cercle circonscrit au triangle ABC et le point O son centre. Soit E le milieu de [BC] et P le point [AC] tel que AB = CP. La droite (OE) coupe (Ψ) en I et J tel que J et A soient sur le même AC arc du (Ψ).

1) a) Faire une figure.
   b) Quel est l'ensemble des points M du plan (Ᵽ) tels que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$?
   c) Quel est l'ensemble des points M de (Ᵽ) tels que: $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et MB < MC ?
2) a) Justifier qu'il existe une unique rotation R tel que R(A) = P et R(B) = C. Déterminer son centre.
   b) Démontrer que son centre est un point de (Ψ) que l'on précisera
   c) Quelle est la nature du triangle JAP ?
3) Déterminer l'image de B par RoS_B où S_B est la symétrie centrale de centre B. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de RoS_B.

Exercice 8

On considère dans le plan orienté (Ᵽ) ; deux points A et B. Soit :
R_A la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

Pour tout point M du plan (Ᵽ) ; on pose $M'=R_A(M)$ et $M''= R_B(M)$.

1) De l'étude de $R_B o (R_A)^{-1}$ déduisez en que pour tout point M du plan (Ᵽ) le milieu du segment [M'M''] est un point fixe J dont on démontrera qu' il appartient au cercle de diamètre [AB] .
2) Le but du problème est de déterminer l'ensemble des M de (Ᵽ) pour les quels M ; M' ; M'' sont alignés.

a) Pour tout point M distinct de A et B, démontrer que : $\left(\overrightarrow{MM'};\overrightarrow{MM''}\right) = \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) - \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
b) Déduisez en l'ensemble des points M du plan (Ᵽ) pour les quels M ; M' ; M'' sont alignés.
   Indication : On pourra calculer dans le triangle BMM'' : $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MM''}\right) + \left(\overrightarrow{M''M};\overrightarrow{M''B}\right)$.

Exercice 9

Soit A, B, C trois points non alignés du plan et C' le point défini par $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$; on désigne par f l'application affine du plan définie par f(A) = A ;f(B) =B et f(C) = C'

1) Montrer que f est une application bijective. Déterminer l'ensemble des points invariant par f. f est – elle une isométrie ? Montrer que les droites parallèles à (AB) sont globalement invariantes par f
2) Le point G est l'isobarycentre de A, B, C ; montrer que G' = f(G) appartient à (BC)
3) M est un point du plan. Donner une construction géométrique de M'= f(M).

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ Soit le vecteur $\vec{u}\left(-\frac{3}{2};2\right)$ et f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M associe le point M' telle que : $\overrightarrow{OM'}=\left(\vec{u}.\overrightarrow{OM}\right)\vec{i}+\left(\vec{i}.\overrightarrow{OM}\right)\vec{u}$

1) Donner l'expression analytique de f. En déduire que f est une application affine
2) Déterminer deux points A et B tel que f(A) = A et $\overrightarrow{Of(B)}=-4\overrightarrow{OB}$; en déduire que f est une affinité orthogonale dont on précisera l' axe et le rapport .
3) Exprimer analytiquement f dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$

Nombres complexes

Exercice 1

Soit $x, y\ et\ z$ trois complexes

1) Montrer que si $x+y+z=a$; $yz+zx+xy=b$; $xyz=c$ alors ; $x; y; z$ sont solutions de l' équation : $Z^3-aZ^2+bZ-c=0$
2) Supposons que $x, y\ et\ z$ sont de module 1 vérifiant le système $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xyz=1 \end{cases}$ (I)
   a) montrer que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$
   b) En déduire les solutions du système (I)

Exercice 2

1) Soit $x\in\mathbb{R}\ et\ u\in\mathbb{C}$ de module 1. Montrer que $|x-u|=|1-xu|$; sans utiliser la forme algébrique et interpréter géométriquement le résultat.
2) Montrer que si $u\ et\ v$ sont de module 1 alors $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel ; sans utiliser la forme algébrique de $u\ et\ v$; que peut- on dire de $\frac{u+v}{1-uv}$?

Exercice 3

Soit $z\ ,\ z'\in\mathbb{C}$

a) Prouver que $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$ donner une interprétation géométrique.

b) Soit u une racine carrée de zz', prouver que $|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|$

Exercice 4

1) Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivantes

a) $Z_1=1+\cos\alpha-i\sin\alpha\quad et\ \frac{1}{Z_1}$; b) $Z_2=1+i\tan\alpha$; $\frac{Z_2}{\overline{Z_2}}\quad et\quad\frac{1}{Z_2}$

c) $Z_3=\frac{\cos x-i\sin x}{\sin x-i\cos x}$ d) $Z_4=\frac{\cos x\sin x+i\sin x}{1+i\tan x}$; e) $Z_5=\frac{1+\cos x-i\sin x}{\sin x-i(1+\cos x)}$

Exercice 5

On se propose d'étudier une méthode de factorisation de $\cos a+\cos b$

1) a) Montrer que : $(\cos a+\cos b)^2+(\sin a-\sin b)^2=2[1+\cos(a-b)]$

b) Déduisez- en que : $\left|e^{ia}+e^{ib}\right|^2=4\cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right)$

2) a) En utilisant la formule d' Euler pour $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$; Démontrer que :

$$e^{ia}+e^{ib}=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a-b}{2}}$$

c) Retrouver les factorisations de $\cos a+\cos b$ *et de* $\sin a+\sin b$

Exercice 6

Prouver les égalités suivantes en utilisant les nombres complexes

1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x\cos^n x}$ et $\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{\cos^k x}=\frac{\cos^{n+1}x-\cos(n+1)x}{\sin x\cos^n x}$

2) Généraliser au calcul de : $\sum_{k=0}^{n}a^k\cos kx$ *et* $\sum_{k=0}^{n}a^k\sin kx$

Exercice 7

Soit le nombre complexe $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1) Montrer que $\forall x,y,z\in\mathbb{R} : x+jy+j^2z=0\Leftrightarrow x=y=z$

2) Calculer $(x+y+z)(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz)$

3) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que
$x^3+y^3+z^3=3xyz \quad (x,y,z\in\mathbb{R})$

Exercice 8

Soit l'équation (E) : $z^5=1$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) On notera $z_k \ (0\le k\le 4)$ les solutions

2) Montrer que : $\sum_{k=0}^{k=4}z_k=0$; En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1}{2}$

3) Démontrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de : $4x^2+2x-1=0$. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

4) Soit l' équation (E') dans $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}:(z-1)^5=(z+1)^5$

a) Démontrer que si z_0 est solution alors : $\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right|=1$; En déduire que les solutions de (E') sont imaginaires pures ;

b) Résoudre (E').

Exercice 9

1) Montrer que dans $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}:a^n=b^n\Leftrightarrow\exists k\in\{0;1;\ldots;n\}\, tel\ que : a=e^{\frac{2ik\pi}{n}}b$ (E)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}:27(z-1)^6-(z+1)^6$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$: $(z-1)^n = (z+1)^n$

Exercice 10

Soit l'équation (E) : $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0;\ z \in \mathbb{C}$

1) Démontrer que si si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de
1) a) Déterminer les nombres $a\ et\ b\ tels\ que$:

$$(E) \Leftrightarrow z^2\left[\left(z-\frac{1}{z}\right)^2 + a\left(z-\frac{1}{z}\right) + b\right] = 0$$

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 + aX + b = 0$
   c) En déduire les solutions de (E)
2) Démontrer que les images de ces solutions appartiennent a un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 11

Soit Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots\dots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

Montrer que $S_n = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$; Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right) n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 12

1) a) $\alpha \in IR$. Résoudre dans C : $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$
   b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation
   $z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1 = 0$ dans laquelle $n \in IN^*$.

2) Etant donné des nombres complexes $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$. On note $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = z_0 . z_1 \text{--} z_{n-1}$. $\forall n \in IN^*$.

$\forall \alpha \in IR$, $\forall z \in C$ on pose $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1$

a) Démontrer que pour tout z, n et α ; $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$

b) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que $\prod_{k=0}^{n-1}\left[\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = \dfrac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$

c) $\forall \alpha \in]0,\pi[\ et\ \forall n \in IN^* - \{1\}\ on\ pose\ A_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ Montrer que

$$\forall n \neq 0\ on\ a\ 2^{n-1} A_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$$ et Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} A_n(\alpha)$

En déduire que $\forall n \in IN^* - \{1\}$, $\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}.----.\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 13

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère l'équation

$(E): z^4-(2-i)z^3-3iz^2+(4-i)z+1+3i=0$

1) Quel est le terme constant du polynôme P de la variable complexe $P(z)=(z-z)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$où $z_1;z_2;z_3;z_4$ sont des nombres complexes donnés ?

2) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle notée z_1 et une solution imaginaire pour notée z_2

b) Vérifier $z_2=2+i$ est une solution de (E) Déterminer alors la solution restante z_4 de (E)

c) Montrer que $z=\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_4}\times\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ est un nombre réel

3) Soient $M_1;M_2;M_3\ et\ M_4$ les points du plan d'affixes respectives $z_1;z_2;z_3;z_4$

a) Montrer que ces 4 points sont cocycliques.

b) Déterminer la mesure de l'angle orienté ($\overrightarrow{M_2M_1},\overrightarrow{M_2M_3}$)

c) En déduire l'affixe z_0 du centre du cercle passant par les points $M_1;M_2;M_3\ et\ M_4$.

Exercice 14

Soit A le point d'affixe $2i$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z différent de A, associe le point le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\dfrac{2iz-5}{z-2i}$

1) Démontrer que f admet deux points invariants
2) Démontrer que f est bijectives et déterminer son application réciproque
3) Démontrer l'axe des ordonnées privé du point A est globalement invariant par f
4) a) Démontrer que : $|z'-2i||z-2i|=9$

   b) En déduire l'image par f du cercle (C) de centre A et de rayon R

   c) Déterminer R pour que (C) soit globalement invariant par f .

Exercice 15

Soit le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les trois nombres complexes non nuls a, b et c deux à deux distincts tels que $|a|=|b|=|c|$. On note A, B et C les points d'affixes respectifs a' b et c et H le point d'affixe a+b+c.

1) a) Soit $w=\bar{b}c-b\bar{c}$. Exprimer $\bar{w}$ en fonction de w et en déduire que w est un imaginaire pur ou nul.

   b) Montre à l'aide du a) que $(b+c)(\bar{b}+\bar{c})\ et\ \dfrac{b+c}{b-c}$ sont des imaginaires purs ou nuls.

2) a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}\ et\ \overrightarrow{CB}$.

   b) Utiliser 2) a) et 1) b) pour démontrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

   c) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC (expliquer sans faire de calculs supplémentaires)

Exercice 16

Soit $a\ et\ b$ deux nombres complexes non nuls A et B leurs images respectives

1) a) Démontrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a\bar{b}$ est un réel

b) Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un réel si et seulement si les points O, A, et B son alignés ou si $OA = OB$

2) On suppose dans cette question que les points O, A, et B son alignés et que les nombres complexes a et b sont de module 1. Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un réel strictement positif

3) Application : Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectifs z_1 et z_2 tels que les points $O; M_1$ et M_2 ne sont pas alignés

a) Calculer en fonction de z_1 et z_2 l'affixe Z du barycentre I du système $\{(M_1;|z_1|),(M_2;|z_2|)\}$

b) Démontrer que $\frac{Z^2}{z_1 z_2}$ est un nombre réel

c) En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$.

Similitudes directes dans le plan

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : AB = 2AC et

Soit ($\mathscr{C}_B$) et($\mathscr{C}_C$) les cercles qui passent par A de centres respectifs B et C.

1) Démontrer que la similitude directe de centre A qui transforme B en C ; transforme aussi ($\mathscr{C}_B$) en ($\mathscr{C}_C$).

2) Soit S la similitude directe qui transforme ($\mathscr{C}_B$) en ($\mathscr{C}_C$)

a) Quelle est la valeur du rapport de la similitude S ?

b) On désigne par I le centre de S. Quelle est la valeur du rapport $\frac{IB}{IC}$?

c) Quelle est l'ensemble ($\mathscr{G}$) des centres I des similitudes directes transformant ($\mathscr{C}_B$) en ($\mathscr{C}_C$). Représenter cet ensemble.

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère le triangle MPQ tel que :

$\left(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit Ω le symétrique de M par rapport au milieu de [PQ] et soit H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle MPQ. S la similitude de centre M qui transforme H en P.

1) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
2) a) Montrer que S(Q) = Ω
   b) En déduire l'image de la droite (PQ) par S.

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B ; on donne AB = 6cm

1) Déterminer et construire l'ensemble
   a) ($\mathscr{C}$) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB}=3$
   b) puis l'ensemble ($\mathscr{H}$) des points M tels que : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$
2) a) Placer le point C image de B par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$
   b) On désigne par S la similitude directe transformant A en B et C en D. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
   c) On note Ω le centre de S. Exprimer ΩB en fonction de ΩA et donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)$
   d) En déduire la position de Ω et le placé sur la figure.
   e) Démontrer que les points Ω ; A ; C sont cocycliques.

Exercice 4

Soit ($\mathscr{P}$) le plan orienté ; ($\mathscr{D}$) une droite de ($\mathscr{P}$) ; O un point de ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{C}$) le cercle de centre O. ($\mathscr{C}$) coupe la droite ($\mathscr{D}$) en A et B.

Soit H le milieu de [OB] et le point I appartenant à ($\mathscr{C}$) tel que : $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit K et I les symétriques de H et I par rapport à O respectivement.

1) Montrer les triangles KAJ et HIA sont directement semblables. (on pourra utiliser le triangle HBI)
2) Soit S la similitude directe transformant K, A, J en H, I, A respectivement. Déterminer son angle α et son rapport λ.
3) Prouver que les trois cercles de diamètres $[KH]$; $[IA]$ et $[JA]$ passent par le centre Ω de la similitude.
4) Déterminer l'image de O par la similitude S.

Exercice 5

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$. I le point de concours des bissectrices de ce triangle. Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

1) Déterminer la similitude f de centre C transformant A en B
2) Montrer que hof est une rotation R de centre C.
3) Montrer que R se décompose en produit de deux réflexions sous la forme R= $S_{(CI)}$ o $S_{(CA)}$
4) Soit R' la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; Déterminer de même la droite (D) tel que R'= $S_{(CA)}$ o $S_{(D)}$.

5) Montrer alors que RoR' est une rotation de centre I dont on déterminera l'angle.
6) On note A' l'image de A par R. Montrer IA= IA' et déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}\right)$
7) Déduisez en le parallélisme des droites (AB) et (IA')
8) La droite (CI) coupe (AB) en D
   a) Déterminer h(B) et h(D)
   b) Déduisez en que $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{DB}$
9) Les droites (IB) et (A'D) se coupent en E. Soit h' l'homothétie de centre E transformant A' en D ; Montrer que h' transforme I en B. Quel est alors le rapport de l'homothétie h' ?
10) a) Démontre que la composée d'une homothétie de rapport k et d'une homothétie de rapport $-\frac{1}{k}$ est une symétrie centrale
   b) Quelle est la nature de h'oh ?
   c) Déterminer h'oh (B) ; et déduisez en que le centre de h'oh est le milieu F de [BD].
11) Soit C' l'image de C par h'oh ; En utilisant le point C' montrer que les points C ; E et F sont alignés.

Exercice 7

Soit O et A deux points du plan orienté, distants de a(a>0). Soit S la similitude de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On construit la suite (A_n) de la façon suivante :

$A_0 = A$ et $\forall\ n \in$ IN; $A_{n+1} = S(A_n)$.

1) Construisez les points A_n pour n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.
2) a) Démontrer que la suite $(A_n A_{n+1})$ est une suite géométrique
   b) Soit S_n la somme des longueurs $A_p A_{p+1}$; p variant dans IN de 0 à n ($S_n = \sum_{p=1}^{n} A_p A_{p+1}$).
   Calculer S_n en fonction de l'entier naturel n et du réel a.
   c) Démontrer que la suite (S_n) est croissante et convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice 8

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a , b c et d telles que : a =1 ; $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}$

1) a) Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d.
   b) Représenter les points A. B, C et D.
   c) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
2) Montrer que les points D, A et C sont alignés.
3) Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.
4) On note E et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points E, C et G sont alignés.

Exercice 9

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère l'application F qui a tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = u^2 z + u + 1$ où u désigne un nombre complexe.

1) Déterminer l'ensemble des complexes u pour les quels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
2) Déterminer l'ensemble des complexes u pour les quels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ (radians) ;caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
3) Déterminer l'ensemble des complexes u pour les quels F est une homothétie de rapport -2 ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
4) caractériser F lorsque u = 1-i

Exercice 10

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique un cm) la suite des points $M_n(z_n)$ telle que $z_0 = 5+4i$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n + 1 - \frac{1}{2}i$ n$\in IN$.

1. a. Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .

b. Quelle est la nature de la transformation plane qui à M fait correspondre M_{n+1} ? Préciser ces éléments caractéristiques.

2. On pose $Z_n = z_n - z_{n-1}$ $\in IN^*$. Montrer que $Z_{n+1} = \frac{1}{2}iZ_n$ n$\in IN$

3. On pose $d_n = |Z_n|$ et $L_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$.

a. Déduire de 2.la nature de la suite (d_n).Exprimer alors d_n et L_n en fonction de n.

b. Déterminer la plus petite valeur n telle que $L_n \geq 12cm$.

c. Calculer $\lim_{x \longrightarrow +\infty} L_n$.

Exercice11

Le plan est rapporte au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .On appelle T l'application du plan dans lui-même qui au point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que : $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -x+y-1 \end{cases}$

1. On appelle z l'affixe du point M et z' celle de M'image de M par T. Ecrire z' en fonction de z
2. Montrer que T est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques, on notera son centre Ω et ω l'affixe de Ω .3. Montrer que pour $M \neq \Omega$ on a : $\frac{z'-z}{\omega - z} = i$ .En déduire une construction géométrique de M'=T(M).
4. Donner une équation cartésienne de la droite (D'), image de (D) :2x-y+1=0 par T.
5. Soit A le point d'affixe -1+i et soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$.

Pour M un point du plan, on pose M'=T(M) , M''= RoT(M) et on appelle g l'application du plan dans lui-même qui au point M associe le point G barycentre des points pondérés (M,1) , (M',-2) et (M'',-1).Ecrire une expression complexe de g .En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice12

Soit k un réel strictement positif

A tout point M d'affixe z on fait correspondre par la transformation t_k le point M' d'affixe z' tel que : $z' = kiz + 1 + k^2$

1) Quelle est la nature de la transformation t_k ? Préciser ses éléments caractéristiques

2) Si on désigne par Ω_k le centre de la similitude t_k, déterminer l'ensemble des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}^+$

3) Soit k et k' deux réels strictement positifs ; démontrer que $t_k \circ t_{k'}$ si et seulement si k = k'

Quelle est la nature de la transformation $t_k \circ t_k$?

Exercice13

ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ le plan est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$; E le milieu de $[AD]$ et F le symétrique de B par rapport à la symétrie centrale de centre C . Les droites (AB) et (FD) sont sécantes en I

1) Déterminer les affixes des points A, B, C, D, E, F et I.

2) r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; h est l'homothétie de centre I et de rapport 2 ; f est la composée de r suivie de h c'est à dire f = hor.

3) Démontrer f est une similitude dont on déterminera l'écriture complexe.

4) Montrer que l'image de ABE par f est le triangle BFA

5) Démontrer que f admet un unique point invariant Ω d'affixe ϖ à déterminer. Montrer que Ω est le point d'intersection des droites (AF) et (EF).

Exercice 14 : Dan le plan euclidien orienté, on considère un rectangle direct ABCD de centre I tel que et $AB = 3a$ *et* $BC = a\sqrt{3}$ où a est un réel strictement positif donné.

1) Déterminer la nature du triangle BCI

2) Soit E le point sur le segment $[BD]$ tel que $BE = \frac{3}{4}BD$ Donner le rapport k et l'angle θ de la similitude directe s telle que $s(B) = I$ et $S(E) = C$.

3) On suppose dans la suite que $a = 1$ et on pose : $\vec{u} = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{AD}\overrightarrow{AD}$ et on munit ensuite le plan du repère orthonormé direct $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$

a) Déterminer les affixes de B et I .

b) En déduire l'écriture complexe de la similitude s .

4) Déterminer l'affixe de Ω centre de la similitude s et celle du point $A' = s(A)$.

5) Soit la suite de points M_n d'affixes z_n définie par $M_0 = A$ et $\forall\, n \in I\mathbb{N}$ $M_{n+1} = s(M_n)$

a) Démontrer que la suite (α_n) définie par : $\alpha_n = z_{n+1} - z_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme α_0 et la raison q_0.

b) Exprimer en fonction de n la longueur de la ligne polygonale $L_n = M_oM_1M_2M_3...M_{3n}$ et déterminer la limite de cette longueur quand n tend vers $+\infty$

Courbes paramétrées

Exercice 1 : Soit (C) la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = \tan t + 2\sin t \end{cases} -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

1) Comparer les points $M(-t)$ et $M(t)$. Qu'en déduisez –vous pour la (C)
2) Etudier les variations de x et y et tracer la courbe (C)
3) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 2 : (Spiral logarithmique)

Soit $(\mathfrak{I})$ la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = e^t\cos t \\ y(t) = e^t\sin t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

1) a) Etudier les variations de x et y pour $t \in [0;\pi]$
   b) construirez la partie correspondante, notée C de la courbe $(\mathfrak{I})$
2) Quelle transformation passe t- on de M(t) à M(t+ π) et à M(t- π) . Déduisez-en la partie de la courbe de $(\mathfrak{I}')$constituée des points M(t) pour $t \in [-2\pi; 2\pi]$.
3) a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}(t)$de la tangente à $(\mathfrak{I})$au point M(t).
   b) Déduisez en que l'angle $(\overrightarrow{OM}(t); \vec{u}(t))$ est indépendant du point M(t).

Exercice 3 (Courbe de Lissajous)

Soit $(\mathcal{g})$ la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad t \in IR$$

1) Déterminer l'intervalle d'étude utile.
2) Etudier les variations de x et y
3) Montrer que la courbe est inscrite dans un carré de coté 2
4) Déterminer les points de contact avec ce carré et les tangentes en ces points.
5) Tracer la courbe $(\mathcal{g})$.

Exercice 4 (cycloïde)

Soit $(\mathcal{H})(\mathcal{H})$ la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \cos t) \\ y(t) = R(1 - \sin t) \end{cases} \quad t \in IR$$

1) Comparer les coordonnées des points $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ et montrer que ces points ce correspondent dans une translation.
2) Déduisez en l'intervalle d'étude utile
3) Etudier les variations des fonctions x et y et calculer le vecteur dérivée $\vec{V}(t)$

4) On suppose ici que t est non nul, montrer que la droite $(OM(t))$ admet un vecteur directeur $\vec{u}(t) = \frac{1}{t}[(1 - cost)\vec{\imath} + (sint)\vec{\jmath}\,]$. Déterminer les limites des coordonnées de $\vec{u}(t)$ et déduisez en la tangente en O à la courbe $(\mathcal{H})$
5) Construirez la courbe$(\mathcal{H})$.

Exercice 9

Soit $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath}\,)$ un repère orthonormé. Un point A sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées sont tels que $AB = 1$. On note M le projeté orthogonal de O sur$[AB]$.

On se propose de déterminer le lieu géométrique (C) de M lorsque A et B se déplacent, chacun sur son axe.

1. On note$(x; y)$ les coordonnées de M et t une mesure de l'angle$(\overrightarrow{AB}, -\vec{\imath}\,)$.
Montrer que (C) est l'ensemble des points $M(t)$de coordonnées
$$\begin{cases} x = f(t) = sin^2 t.cost \\ y = g(t) = cos^2 t.sint \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
2. Pour tout réel t, comparer la position des points
$M(t)$ à $M(t + 2\pi)$, $M(t)$ à $M(-t), puis\ M(t)$ à $M(t) et\ \ M(t)$ à $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
En déduire qu'il suffit de faire l'étude pour $t \in \left[O; \frac{\pi}{2}\right]$et de construire la partie de courbe (C)correspondante.
Indiquer les transformations qui permettent de compléter la courbe.
3. Etudier les variations des fonctions f et g sur$\left[O; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Tracer la courbe (C) en précisant les points où la tangente est parallèle à l'un des axes, ainsi que les tangentes à l'origine.

Exercice10 (France-Métropolitaine-Juin99)

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct (O; u , v).
On prend 4 cm comme unité sur les deux axes.
On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m , d'affixe z, associe le point M d affixe
$$\frac{1}{2}z^2 - z$$
L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (G) décrite par M lorsque m décrit le cercle (C) de centre O et de rayon 1.
Soit t un réel de $I = [-\pi ; \pi]$ et m le point de (C) d'affixe $z = e^{it}$.
1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées:
$$x(t) = \frac{cos2t}{2} - cost \ \ et\ y(t) = \frac{sin2t}{2} - sint, \quad t \in \mathrm{I}$$
Ces relations constituent une représentation paramétrique de (G).
2. Comparer $x(t)$ et $x(-t)$ d'une part, $y(t)$ et $y(-t)$ d'autre part.

En déduire que (G) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que $x'(t) = (cost - 1)(1 + 2cost)$. Etudier les variations de x sur $J = [0 ; \pi]$.
4. Montrer que $y'(t) = (cost - 1)(1 + 2cost)$. Etudier les variations de y sur J.
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et de y sur J .
6. Placer les points de (G) correspondant aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$, et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour t = 0 la tangente à (G) est horizontale).
Tracer la partie de (G) obtenue lorsque t décrit J puis tracer (G) complètement.

Courbes planes et coniques

Exercice 1

Le plan P est du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Donner la nature, les éléments caractéristique et représenter graphiquement chacune des courbes dont une équation est :
   a) $2x^2 + 2y^2 = 8$
   b) $x^2 + 4y^2 = 16$
   c) $4x^2 + y^2 = 16$
   d) $4x^2 - y^2 = 16$
   e) $x^2 - 4y^2 = -1$
   f) $4x - y^2 = 0$
2) Donner l'équation réduite, la nature et les éléments caractéristiques puis représenter graphiquement les courbes dans les cas suivants
   a) $3x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 7 = 0$
   b) $y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$
   c) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$
   d) $3x^2 + x - y - 4 = 0$

Exercice 2

Le plan P est du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par m un nombre réel et par (E_m) l'ensemble des points M(x ;y) du plan vérifiant l' équation :

$$(m-1)x^2 + 3my^2 + 2(m-1)x + m + 3 = 0$$

1) Déterminer la valeur de m pour que (E_m) soit une parabole. ; Tracer cette parabole, préciser son foyer et sa directrice.
2) Pour quelle valeur de m (E_m) est –il un cercle ? préciser dans ce cas son centre et son rayon.
3) Dans cette question m est un réel non nul et différent de 1. Soit O' le point de coordonnées (-1 ;0). On note (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$.
   a) Montrer que l'équation de (E_m) est : $(m-1)X^2 + 3mY^2 + 4 = 0$
   b) Déduisez – en fonction de m, la nature de (E_m).

Exercice 3

Le plan P est du repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$..On considère les points d'affixes $A(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\,)\ M(z)\ et\ N\left(\frac{1}{z}\right),\ z\neq 0\ et\ z=re^{i\theta};\ \theta\in\mathbb{R}$

1) P désigne l'isobarycentre du système M et N. Exprimer les coordonnées de P en fonction de r et θ
2) Montrer que lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon OA alors P décrit une un courbe (E)dont on donnera l' équation
3) Tracer cette courbe et préciser ses sommets
4) Soit f l'affinité orthogonal de rapport $k(k>0)$ et d'axe $(O,\vec{v})$. Dé terminer k pour que l'image de la courbe (E) soit un cercle (G) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 4

Le plan P est du repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$.. Soit M(z) on associe le point M'(z') définie par $z'=z-\frac{1}{z}$ avec $z\neq 0\ et\ z=re^{i\theta};\ \theta\in\mathbb{R},\ r>0$

1) Calculer les coordonnées de x' et y' en fonction de r et θ
2) Montrer que lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon $r=2$ alors M' décrit une ellipse (E). Déterminer les sommets et les foyers de (E), puis représenter (E).

Exercice 5 :

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle$\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) d'inconnue complexe z : (E)$(\cos^2\theta)z^2-4(\cos\theta)z+5-\cos^2\theta=0$.

1. Résoudre (E) dans C. Préciser pour quelle valeur de θ l'équation admet une racine double. Donner la valeur de cette racine double.
2. Soit P le plan complexe rapporte à un repère orthonormal. On appelle M' et M'' les points de P dont les affixes respectifs sont les nombres z' et z'' solutions de (E)

Montrer que, lorsque θ varie M' et M'' se déplacent sur une hyperbole (H).
Déterminer le centre, les sommets et les asymptotes de (H). Tracer (H).

3. Montrer que lorsque θdécrit l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. l'ensemble (F) décrit par les points M' et M'' est une branche de (H).

Exercice 6

Soit AOB un triangle équilatéral du plan oriente tel que :$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$
On note H le milieu de [AB], I celui de [OB] et (Δ) la médiatrice de [AB]. On note s la similitude plane directe de centre O transformant le point A en I.
M désigne un point quelconque du plan et M' son image par s.

1. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.
b. Construire le point C du plan tel que s(C) = A. (On justifiera la construction).
c. Exprimer AM' en fonction de CM.

2. On note M'' l'image de M par la réflexion d'axe (Δ). On se propose de déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que A est équidistant de M' et M''.
a. montrer que AM''=BM.
b. Montrer que M appartient à (Γ) si et seulement si CM = 2BM.
c. Déterminer la nature de (Γ) puis construire (Γ).

Exercice7

Le plan P est du repère orthonormé direct$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère l'ensemble (C) des points M de P de coordonnées (x,y) vérifiant l'équation :$57x^2+14\sqrt{3}xy+43y^2 = 576$

On pose $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath}$ $\;et\;$ $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{\imath}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$

1. Montrer que $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère RON.

2. On Pose X et Y les coordonnées de M dans $(O,\vec{u},\vec{v})$. Donner l'équation cartésienne de (C) dans ce repère. Reconnaitre et représenter (C).

Exercice 8

Le plan P est du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère l'ensemble (E) des points M de P de coordonnées (x,y) vérifiant l'équation :

$$25(x^2+y^2) = (3x-16)^2 \quad (1)$$

1. En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que (E) est une conique de foyer O et de directrice (Δ) d'équation $x = \frac{16}{3}$. Donner la nature et l'excentricité de (E). Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle$(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

a. Déduire de (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.

b. Démontrer que $OM = \frac{16}{5+3cos\theta}$.

3. On suppose que $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.. La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en M'.

a. Démontrer que $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.

b. Démontrer que $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$

Exercice 9

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ tels que :$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{cost} \\ y(t) = 3tant \end{cases}$ $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1) a) Comment $M(-t)$ se déduit de $M(t)$? En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie et déterminer le domaine d'étude utile.

c) Etudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

2) a) Démontrer que (Γ) est contenu dans une hyperbole (H) donner on donnera l' équation et les éléments caractéristiques. On notera (D) et (D') les asymptotes, A et A' les sommets de (H)

b) Construire (H) et préciser la partie de(H) correspondant à (Γ)

3) Soit $M(t_0)$ un point de (Γ). La tangent (Δ) à (Γ) en $M(t_0)$ coupe les asymptotes (D) et (D') en A_0 et B_0

a) Démontrer que la tangente (Δ) à (Γ) en $M(t_0)$ a pour équation :

$(\Delta)\ :\ 3x-2(\sin t_0)y-6\cos t_0$

b) Donner les coordonnées de A_0 et B_0 en fonction de t_0

c) Vérifier que $M(t_0)$ est le milieu du segment $[A_0B_0]$

4) Soit $F_1(0;3)$ *et* $F_2(0;-3)$ dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ .On considère l'ensemble(E) des points M du plan vérifiant : $MF_1 + MF_2 = 10$ et f l' affinité orthogonale de base $(x'x)$ et de rapport k.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E) puis représenter (E)

b) Déterminer la valeur de k pour que l'image de (E) soit un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 10

1. Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y \\ y' = -\sqrt{3}x + y \end{cases}$

Donner l'écriture complexe de f. Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques .

2. Soit (ε) l' ellipse d' équation cartésienne : $4x^2 + y^2 = 4$. Déterminer une équation cartésienne de (ε') image de(ε) par f.

3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de(ε').

4. Tracer (ε) et (ε') dans un même repère.

Exercice11

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+3}{x\sqrt{3}}$ et (γ) sa courbe représentative.

1. Etudier f et tracer (γ) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2. On pose $\vec{u} = \sqrt{3}\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ *et* $\vec{v} = \vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}$

a. Déterminer une équation de (γ) dans le repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b. En déduire que (γ) est une hyperbole et déterminer les coordonnées de ses foyers dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice12

Le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit (Ψ) l'ensemble d'équation :

$$x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$$

1. Soit θ un nombre réel et repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ image de $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ par la rotation de centre O et d'angle θ. On désigne par (X,Y) les coordonnées de M dans ce repére. Déterminer θ pour que l'équation de (Ψ)dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ soit de la forme :

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$$

2. En déduire la nature de (Ψ) et ses éléments caractéristiques. Tracer .

Exercice13

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, ayant comme unité 1cm.

1. Soit (C) la courbe dont une représentation paramétrique est:

$$x = f(t) = \frac{t^2+2}{2} \quad et \quad y = g(t) = \frac{t^3+2t}{2}$$

t parcourant l'ensemble IR des réels.

a. Montrer que (C) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

b. Etudier conjointement les variations de f et de g sur l'ensemble des réels positifs.
c. Préciser la tangente au point de paramètre $t = 0$. Tracer la courbe (C).

2. Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 4x$.
a. Tracer (P) dans le même repère que (C) .
b. Vérifier qu'une paramétrisation de (P) est : $x(t) = t^2; y(t) = 2t), t \in \mathbb{R}$
c. Soit $D(t)$ la tangente à (P) au point $M(t)$ de coordonnées($x(t)$; $y(t)$).
Soit T(t) la droite perpendiculaire à D(t) au point $M(t)$.
Montrer qu'une équation cartésienne de $T(t)$ est : $y = -tx + t3 + 2t$.

d. Pour t réel non nul, T(t) coupe l'axe des abscisses en un point A(t) et l'axe des ordonnées en un point B(t). On appelle I(t) le milieu du segment formé par ces deux points. Exprimer en fonction de *t* les coordonnées de I(t).
Quel est l'ensemble des points I(t) lorsque t parcourt l'ensemble des réels non nuls?

Produit scalaire-produit vectoriel dans l'espace

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ de l'espace

1) Donner une équation du plan P passant par $A(-1; 3; 2)$, $B(0; -1; 2)$ et C(3 ;1 ;-1).

2) Donner une équation de la sphère de diamètre $[DE]$ avec $D(-1; 3; -2)$, $E(2; 5; 3)$.

3) Démontrer que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 11 = 0$ définit un sphère dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2

Dans l'espace munie d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, soient P le plan d'équation $x - 4y + 7 = 0$ et Q le plan d'équation : $x + 2y - z + 1 = 0$

1) Montrer que ces plans sont sécants.

2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite (D) d'intersection.

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$

(D) est la droite passe par $A(1\,;-3\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{U}(2\,;1\,;3)$.

(P) est le plan d'équation : $2x-y+5z+4=0$.

1. La droite (D) et le plan (P) sont- ils parallèles ?

2. Trouver les coordonnées du point d'intersection de $(D)\ et\ (P)$.

3. Donner une équation de la sphère (Ω) de centre A et passant par l'origine O

4. Quelle est l'équation de la tangente (T) passant par O de ce sphère ?

5. Déterminer l'intersection de la sphère (Ω) et du plan (P).

Exercice 4

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on donne les points $A\ (2\,;\ 1\,;\ 3)$, $B(-3;-l;7)\ et\ C(3;2;4)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \qquad t\in IR \\ z=4+t \end{cases}$$

a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

a) Montrer que H est le barycentre de $(A\,;-2\,),(B\,;-1)\ et\ (C\,;\ 2)$.

b) Déterminer la nature de l'ensembleΨ_1, des points M de l'espace tels que :

$(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})$

En préciser les éléments caractéristiques.

c) Déterminer la nature de l'ensemble Ψ_2 des points M de l'espace tels que :

$\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}$

En préciser les éléments caractéristiques.

d) Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Ψ_1 et Ψ_2.

e) Le point $S\ (-8\,;\ 1\,;3)$appartient-il à l'intersection des ensembles Ψ_1 etΨ_2

Exercice 5

Soit le repère orthonormé direct$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de l'espace. On considère les points $A(0;1;3)$, $B(-1;2;5)$ et $C(3;1;-4)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; En déduire l'aire du triangle ABC.

2) Déterminer l'équation du plan (ABC)

3) Vérifier que le point $H(1;3;0)$ appartient au plan (ABC)

4) Soit D le point définie par $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

5) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$

Exercice 6

Soit le repère orthonormé direct$\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$ de l'espace. On considère les trois vecteurs $\vec{u}(\,x, y,\ z\,)$; $\vec{v}(\,x', y',\ z')\ et\ \vec{w}(\,x", y", z")$

1) Etablir l'égalité suivante $\vec{u}\wedge(\,\vec{v}\wedge\vec{w}\,) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$

2) Montrer que : $(\vec{u}\wedge\vec{v})\,.\,\vec{w} = \vec{u}.(\,\vec{v}\wedge\vec{w}\,)$

3) Calculer les vecteurs$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge(\,\vec{v}\wedge\vec{w}\,)$. Qu'en déduit – on pour la multiplication vectorielle ?

Exercice 7

Soit le repère orthonormé direct$\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$ de l'espace. On considère les points $A(a, 0{,}0)$; $B(0, b, 0)$ et $C(0{,}0, c)$.

1) Placer les points $A, B\ et\ C$ dans le repère $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$ puis calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et en déduire que l'aire S du triangle ABC est $S = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}$

2) Calculer. $\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}$. En déduire que le volume V du tétraèdre OABC est

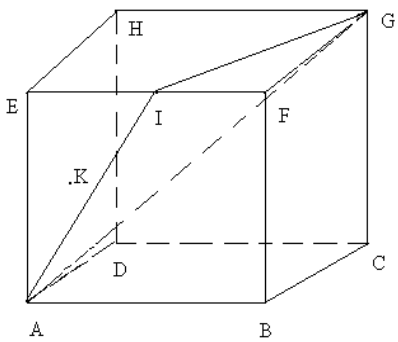
$$V = \frac{abc}{6}$$

3) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{OA}\wedge\left(\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = \vec{0}$$

Exercice 8

Soit le cube suivant $ABCDEFGH$;
L'espace est orienté dans le repère orthonormé direct. $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)$;
I est le milieu du segment$[EF]$, k le centre du carré



1) **a.** Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$

b. Déduisez- en l'aire du triangle IGA

2) Calculer le volume du tétraèdre $ABIG$

En déduire la distance du point B au plan (AIG)

Exercice 9

L'espace est orienté dans le repère orthonormé direct . On considère les points $A(1;0;0)$; $B(1;-1;1)$ et $C(-2;0;1)$.soit G le barycentre de $(A;2), (B;-2) et\ (C;1)$.

Soit $M(x,y,z)$ et $\overrightarrow{V_M} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

1) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{V_M}$

2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{V_M}$

3) Déterminer le point M vérifiant simultanément : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{V_M} = 0$

Exercice 10

L'espace est orienté dans le repère orthonormé direct. $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$.

1) Soit G l'isobarycentre des points A ; B et C

a) Donner les coordonnées du point G.

b) Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC)

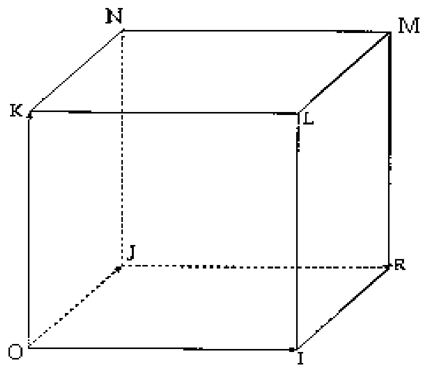
2) On considère les points $A'(2,0,0)$; $B'(0,2,0)$ et $C'(0,0,2)$. Ces 3 points définissent un plan noté $(A'B'C')$
   a) Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$ et en déduire qu'une équation cartésienne du plan $(A'B'C')$ est :$3x + 3y + 2z - 6 = 0$
   b) Montrer que le point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à la droite (AC) si et seulement si, il existe un nombre réel k tel que $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$
   c) Calculer alors les coordonnées du point K commun à la droite (AC) et au plan $(A'B'C')$
3) a) Vérifier que le point L commun à la droite (BC) et au plan $(A'B'C')$ à pour coordonnées $L(0\ ;4\ ;-3)$
   b) Montrer que les droites (AB) ; $(A'B')$ et (KL) sont parallèles
   c) caractériser l'intersection des plans $(A'B'C')$ et (ABC) à l'aide des points définies définis précédemment.

Exercice 11

L'espace est rapporté à un repère orthonormé de sens direct. $\left(O;\ \overrightarrow{OI}\ ;\overrightarrow{OJ}\ ;\overrightarrow{OK}\right)$
On considère le cube de sommets O, I, R, J, N, K, L, M. La figure ci-dessous représente ce cube. On note A le milieu de [I L] et B le point défini par :
$\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On appelle (P) le plan passant par les points O, A et B.

1. a. Déterminez les coordonnées des points A et B.
b. Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$
c. Calculer alors l'aire S du triangle OAB .

2. Le point $C\left(1;\frac{1}{2};1\right)$ appartient-il à (P) ?
Justifiez votre réponse



On considère le tétraèdre OABK.
a. Calculer le volume de ce tétraèdre.
b. Calculez alors la distance du point K au plan (P).

Transformations dans l'espace

Exercice1 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube. Déterminer les coordonnées des points dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ des images des points C, F, G et H par chacun des transformations suivantes

1. translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$
2. translation de vecteur $\overrightarrow{BH}$
3. homothétie de centre A et de rapport -2
4. homothétie de centre Fet de rapport $\frac{1}{2}$

Exercice 2

1) Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$. Pour tout réel k on définit l'application f_k de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tels que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{MD}$. Préciser suivant la valeur de k, la nature de l'application f_k et les éléments permettant de la définir

2) Soit les points $A(1; -2;\ 1)$; $B(-1; 2\ ; 0)$ et $A'(0; 1; 1)$ et $B'(4; -3; -1)$.

Démontrer qu'il existe une homothétie h dont on précisera le centre Φ et le rapport$k$, telle que : $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$. Déterminer l'image du point O par h.

Exercice 3

1) Soit Ω une sphère de centre O et de rayon r et $A \in \Omega$. Déterminer le lieu de symétrique de A par rapport aux points de la sphère.

2) Déterminer les plans et axes de symétrie du cube $ABCDEFGH$ de centre O.

3) Déterminer les plans et axes de symétries du pyramide régulier dont la base $ABCD$ est un carré de centre I.

Exercice 4

1) Soit (Π) le plan d'équation : $2x - y + z = 1$. Déterminer l'expression analytique de la réflexion S_Π

2) soit f l'application de l'espace dans lui – même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y - z + 12) \end{cases}$$

Démontrer que f est un demi-tour dont on précisera l'axe de la rotation(Δ).

Exercice 5 :

Soit (Π) le plan d'équation : $2x + y - z = 3$. et (Δ) la droite orthogonale à (Π)passant par O.

1) Déterminer l'expression analytique de la réflexion S_Π de plan (Π).

2) Déterminer l'expression analytique du demi-tour S_Δ de la droite(Δ).

3) Déterminer l'expression analytique de la composée $S_\Delta o S_\Pi$.

Exercice 6 :

Soit la f transformation de l'espace définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y - 2z + 4 \\ y' = -8x + 5y - 4z + 8 \\ z' = -4x + 2y - z + 4 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble (P)des points invariants par f
2. Montrer que pour M d'image M'le milieu de $[MM']$est dans (P) et (MM') est parallèle à une direction fixe.
3. En déduire une description simple de f

Exercice 7 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. On définit les trois points :$A(3, \sqrt{6}, 3)$; $B(3, -\sqrt{6}, 3)$ et $C(4,0,0)$.

a. Montrer que les points $O, A\ et\ B$ ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan (P) contenant $O, A\ et\ B$

b. Calculer les distances : OA , $OB\ et\ AB$. En déduire la nature du triangleOAB

c. Les points O, A, B et C sont-ils coplanaires

d. Soit G l'isobarycentre des points O, A , B et C c'est à dire,

e. Calculer les coordonnées de G.

2. Montrer que la droite (CG)est perpendiculaire au plan(P).

3. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite (CG)avec le plan(P).

4. Montrer que la transformation de l'espace définie par les formules :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$ est une isométrie.

Quels sont ses points fixes ? Déterminer les images des points O, A , B et C . Que remarque-t-on ?

Exercice 8 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube. O est son centre. I est le milieu de [AB], J le centre de gravité de la face DCGH.

1) Montrer que (ABG) est le plan médiateur des segments [ED] et [FG] .

2) On note $S_1; S_2 et\ S_3$ les réflexions dont les plans respectifs sont (ABG) , (BCH) et (IOJ). Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube.

3) On considère l'application f telle que $f = S_1 o S_2$.

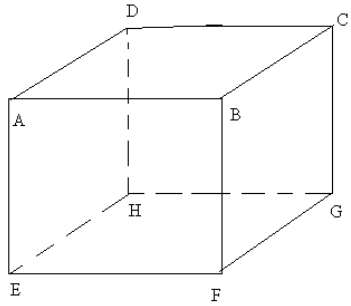
a) Prouver que f est une rotation d'axe (BH) ;

b) En orientant le plan (ACF) par $\overrightarrow{BH}$, déterminer la restriction de f à ce plan. En déduire l'angle de f.

4) Soit r le demi-tour d'axe (OI) et l'application $g = rof$

a) En écrivant $r$comme la composée de 2 réflexions Judicieusement choisie, déterminer la nature de g.

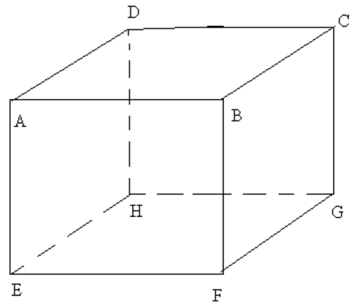
b) Déterminer les éléments caractéristiques de g



Exercice 9

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace, (δ) la droite de vecteur directeur $\vec{\imath}$, passant par $H(O; O; 2) et$ r la rotation d'axe (δ) telle que $r(O) = A$ avec $A(0; -2; 2)$, t la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. Préciser la nature de tor et ses élément caractéristiques.

Exercice 10



Soit ABCDEFGH un cube (Voir figure ci-contre).
On désigne par O son centre ,par I le milieu de [AB] et
Par J le centre de gravité de la face DCGH.

1.a) Montrer que (ABG) est le plan médiateur des segments [ED] et [FC].

b) On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions dont les plans respectifs sont (ABG) , (BCH) et (IOJ).
Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube ABCDEFGH.

2. On considère l'application f telle que $f = S_1 o\, S_2$

a) Prouver que f est une rotation d'axe (BH).

b) En orientant le plan (ACF) par $\overrightarrow{BH}$ déterminer la restriction de f à ce plan ; en déduire l'angle de f.

3. Soit r le demi-tour d'axe (OI) et g l'application rof. En écrivant r comme la composée de deux réflexions judicieusement choisies. Déterminer la nature de g et ses éléments caractéristiques.

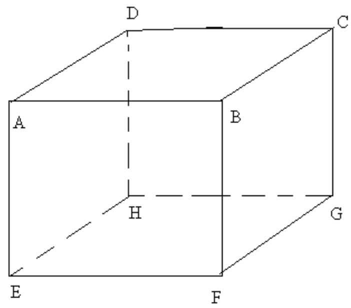
Exercice 11

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le centre de la face EFGH. On considère le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace. Soit S et S' les réflexions de plans respectifs (ACE) et (CFH).

1) Déterminer l'expression analytique des réflexions S et S'.

2) Démontrer que les plans (ACE) et (CFH) sont perpendiculaires. En déduire l'expression analytique du demi- tour d' axe (CI).

Exercice 12



Soit ABCDEFGH un cube (Voir figure ci-contre).
S_1 réflexion de base le plan (EADH)
S_2 réflexion de base le plan(HDCG)
S_3 réflexion de base le plan (BCGF)
S_4 Réflexion de base le plan (ABFE)

1. **a.** Montrer que $r = S_2 oS_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.
   b. Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $r' = S_4\, oS_3$
2. On note s la réflexion de base le plan $(BDHF)$
   a. Déterminer les réflexions s′ et s″ telles que $r = sos' \; et \; r' = s''os$.
   b. En déduire que $t = r'or$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HF}$

Exercice 13

1. Dans l'espace, on donne deux points A et B distincts.
   a. Montrer que toute rotation R de l'espace transformant A en B a son axe (D) inclus dans le plan médiateur de [AB].
   b. Réciproquement, soit (D) une droite du plan médiateur de [AB]. Montrer qu'il existe une rotation et une seule d'axe (D) transformant A en B. On pourra introduire le projeté orthogonal K de A sur (D).

2. Soit OABC un tétraèdre régulier dont tous les côtés ont la même longueur c'est-à-dire OA = OB = OC = BC = AB = AC.

a. Montrer qu'il existe une rotation R_1 et une seule d'axe (OC) transformant A en B.

b. Montrer que le projet´e orthogonal K de A sur (OC) est le milieu de [OC]. En déduire que ; $KA = AB\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. Déterminer le cosinus de l'angle de la rotation R_1.

Exercice 14

On considère un cube ABCDEFGH d'arrête a. On note I et J les centres de gravités respectifs des triangles CFH et AFH et O le centre de la face EFGH.

1. a) Quelle est la nature du triangle CFH ?

b) Prouver que les points A,G et I appartiennent au plan médiateur de [CF] et au plan médiateur de [CH].

c) En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I.

2. Montrer que la droite (CE) est orthogonale au plan (AFH) et passe par J.

3. Montrer que les points A, J, I et C sont cocycliques et que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{JI}$

Démontrer que $\widehat{IOJ}$ est indépendant de a. (On pourra calculer tan $\widehat{AOO'}$ avec O ′ milieu de [AC])

4. Soit S_1 la réflexion de plan (CFH) et S_2 la réflexion de plan (AFH).

On pose $R = S_2\, o S_1$ et (P) est le plan (ACG).

a) Montrer que $\overrightarrow{OH}$ est un vecteur normal à (P).

b) On oriente (P) par $\overrightarrow{OH}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de R.

5. Soit $r$la restriction de R au plan (P) et h l'homothétie de (P) qui transforme I en C et J en A. Donner la nature et les éléments géométriques caractéristiques de r ◦ h.

Exercice 15

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère direct de l'espace, f est l'application de l'espace dans lui-même définie par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z \end{cases}$

1) Démontrer que f est une rotation ; préciser son axe et une mesure de son angle.

2) On considère les 4 points $A(2,0,0)$; $B\left(-1, -\sqrt{3}, 0\right)$; $C\left(-1, \sqrt{3}, 0\right)$ et $D(0,0,4)$.

On pose $\mathcal{M} = \{A; B; C; D\}$

a) Démontrer que ABC est un triangle équilatéral de centre gravité O.

b) Vérifier que l'application f laisse globalement invariant $\mathcal{M}$.

Arithmétiques

Exercice1

1. Démontrer que la somme de 3 entiers relatifs est divisible par 3.
2. a. Comment choisir l'entier relatif n pour que n divise $n + 3$.
   b. Comment choisir l'entier relatif n pour que $2n - 3$ divise $n + 5$.
   c. Déterminer les entiers relatifs $n \; et \; m$ tels que $n^2 - m^2 = 9$.
3. a. Ecrire la liste des diviseurs de 56 dans $\mathbb{Z}$.
   b. Déterminer $n \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{Z}$ tesque $(2m + 1)m = 56$.

Exercice 2

1. Soit $\in \mathbb{N}^*$, Quel est le reste de la division euclidienne de :
   a. $(n + 1)^2 \; par \; n + 4$; b. $7n + 16 \; par \; 2n + 3$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^* \; et \; A = n(n^2 + 5)$, démontrer que A est divisible par 3
3. Le reste de la division de 557 par b est 89. Quelles sont les valeurs possibles de b et du quotient.
4. Montrer que tout entier non divisible par 5 a un carré de la forme $5p + 1$ ou $5p - 1$; $p \in \mathbb{Z}$.
5. Déterminer les restes de la division euclidienne de 3^n par 11. En déduire le reste de la division euclidienne de 3^{37} par 11.
6. Montrer que $n^5 - n$ est un multiple de 30 , $\forall \; n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que :
   a) $x + 5 \equiv 3[8]$; b) $3x \equiv 5[8]$
2. Déterminer le reste de la division euclidienne par :
   a) $3 \; de \; 2^n$; b) $7 \; de \; 247^{349}$
3. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n^2 - 3n + 6$ soit divisible par5.
4. Démontrer que : $1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003}$ est divisible par 5.

Exercice 4

1. Démontrer qu'un nombre est divisible par 10 s'il se termine par 0.
2. Démontrer qu'un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

3. Déterminer un critère de divisibilité par 11.
4. Déterminer les entiers naturels $a\ et\ b$ tels que $A = 6a9b$ soit divisible par 45.
5. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5.
6. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(n^3 - n)$ est un multiple de 6.

Exercice 5

1. Ecrire en base 8 le nombre 1320; puis en base 10 le nombre $\overline{10100111001}^2$
2. Ecrire en base 2 le nombre $87\ \ et$ le nombre $\overline{127}^8$.
3. Ecrire en base 16 le nombre $\ 64202\ et$ Ecrire en base 10 le nombre $\overline{F0A5}^{16}$.
4. Ecrire en base b $(b > 1)$le nombre $(b + 1)^2$(on distinguera b=2 et b> 2).

Exercice 6

1. Les nombres 133 et 547 sont-ils premiers ?
2. $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, A = n^2-2n-3. Existe-t-il des valeurs de n tels que A soit premier ?
3. Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 648 , $924\ et\ \ 21175$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p > 3$, un nombre premier ; montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 12.

Exercice 7

1. Calculer le $ppcm$ de $a = 792\ et\ b = 1638$ puis$ppcm(44100{,}36036)$.
2. Calculer a et b sachant que $ab\ = \ 1512\ et\ ppcm(a, b)\ = \ 252$.
3. $n \in \mathbb{N}^*$. $a\ = \ n^2\ + \ 3n\ b\ = \ (2n + 1)(n + 3)$ Calculer $ppcm(a, b)$.
4. $m\ = \ ppcm(a, b)\ d\ = \ pgcd(a, b)$ Déterminer a et b tels que $m - 2d\ = \ 11$.
5. $a\ = \ 7m\ + \ 5\ b\ = \ 5m\ + \ 4$. Déterminer m tel que $ppcm(a, b)\ = \ 3276$.

Exercice 8

1. Déterminer $PGCD(138\,807\ ;\ 52\,089)$ puis $PGCD(138\,807\ ;\ 52\,089)$.
2. $a\ = \ 145\ et\ b\ = \ 55$. Déterminer un couple(u,v) tel que $au\ + \ bv\ = \ a \wedge b$.
3. Montrer que $2n\ + \ 1$ et $3n\ + \ 1$ sont premiers entre eux
4. Montrer que 99 et 56 sont premiers entre eux et déterminer $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $99u\ + \ 56v\ = \ 1$
5. a, b et c sont des entiers naturels non nuls. a et b sont premiers entre eux, a et c sont aussi premiers entre eux. Démontrer que a et bc sont premiers entre eux.
6. $n \in \mathbb{N}$. $a\ = \ n(2n + 1)(7n + 1)$. Démontrer que 6 divise a.
7. a. Déterminer dans $\mathbb{Z}^2$ l'ensemble des solutions de l'équation $7x\ = \ 11y$.
   b. Vérifier que $(x_0, y_0)\ = \ (13{,}8)$ est solution de (E) : $7x - 11y\ = \ 3$.
   c. En déduire dans $\mathbb{Z}^2$ l'ensemble des solutions de (E).

8. $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que 60 divise a = $(n^2-1)n^2(n^2+1)$.

9 . Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ (E) : $17x - 11y\ = \ 5$.

Exercice 9

1. Soit $a = \frac{n+7}{n+2}$

a. Déterminer n tel que $a \in \mathbb{N}$.
b. Déterminer n tel que a soit irréductible.

2. n est un entier supérieur ou égal à 2, $b = n^5 - n$.
a. Démontrer que $n^3 - n$ divise b.
b. Démontrer que 30 divise b.
c. Montrer que pour tout entier n (pas de récurrence), $n^7 - n$ est divisible par 42.

Exercice10 :

1) a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le $PGCD(584; 22)$. En déduire le $PPMC(584; 22)$.
b. Vérifier que le couple $(1; -26)$ est solution particulière de l'équation (E) et puis résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation(E) : $584x + 22y = 12$ (E)
2) a. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat que $4^{28} = 1[29]$.
b. Démontrer en utilisant les propriétés des congruences que :
$4^{28} = 1[3]$; $4^{28} = 1[5]$ et $16^{14} = 1[17]$.
c. En déduire 4 diviseurs premiers de $4^{28} - 1$

Exercice11 :

1. On considère l'équation (E) : 109x - 226y = 1 où x et y sont des entiers relatifs.
a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme (141 + 226k, 68 + 109k), où k appartient à Z.
En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que 109d = 1+ 226e.
(On précisera les valeurs des entiers d et e.)
2. Démontrer que 227 est un nombre premier.
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que a ≤ 226.
On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.
à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.
a. Vérifier que g[f(0)] = 0.
On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat : Si *p* est un nombre premier et *a* un entier non divisible par *p* alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo *p*.
b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul *a* de A, $a^{226} \equiv 1$ [modulo 227] .
c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul *a* de A, $g[f(a)] = a$.
Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?

Exercice 12

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.
1. a. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation
(E) : $8x - 5y = 3$.
b. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).
c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.
2. Soit n un nombre entier naturel.
a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $23k \equiv 1$(modulo 7).

Quel est le reste dans la division euclidienne de 22009 par 7 ?

Exercice 13

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :

$a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1. Montrer, après factorisation, que *a* et *b* sont des entiers naturels divisibles par *n-4*.

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note *d* le PGCD de α et β.

a. Établir une relation entre α et β indépendante de *n*.

b. Démontrer que *d* est un diviseur de 5.

c. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si *n* - 2 est multiple de 5.

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4.a. Déterminer, suivant les valeurs de *n* et en fonction de *n* le PGCD de *a* et *b*.

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Lycée EL Hadji Omar Lamine badji annee 2007
TS1

DEVOIR 1
DUREE ;4H

Exercice :1

1° Ecrire sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe $a = 16(1-i)$.

2° Pour λ nombre réel quelconque, on pose : $z_\lambda = 1 + i + 2\sqrt{2}e^{i\lambda} = x_\lambda + iy_\lambda$.

a. Calculer les réels x_λ et y_λ en fonction de λ.

b. Déterminer l'ensemble (C) des points M_λ de coordonnées (x_λ, y_λ) quand λ décrit $[0, 2\pi[$.

3° Montrer que les solutions de l'équation : $(z-(1+i))^3 = a$ sont les affixes de points de (C)

Exercice 2

Le plan affine (P) est muni d'un repère orthonormal direct ; on note $(O, \vec{u}, \vec{v})$ l'ensemble des nombres complexes non nuls ; (P*) le plan (P) privé de 0 .

Soit l'application f de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

On note F l'application de P* dans P qui à tout point m de P* d'affixe z fait correspondre le point M d'affixe : Z = f (z).

1 a) Déterminer l'ensemble des points invariants par F .

b) soit M(Z) un point de P* non invariant par F . Montrer que M est l'image par F de deux points de P* .Vérifier que M est le milieu de$[m_1 m_2]$.

c) Placer A (1+i), et B$\left(\frac{-1}{1+i}\right)$, en déduire la construction de l'image par F .

2) –dans cette question on cherche l'image de l'axe privé de 0.

Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

a) Etudier les variations de g .

b) En déduire l'image par F de l'ensemble des points de l'axe réel de P* .

3)–Recherche de l'image du cercle de centre 0 de rayon 1 .

a) Soit z un nombre complexe non nul distinct de i et –i d'image Z par f ,

Exprimer $\frac{Z+i}{Z-i}$ en fonction de $\frac{z+i}{z-i}$ En déduire une relation entre $\left(\overrightarrow{mU}, \overrightarrow{mU'}\right)$ et$\left(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MU'}\right)$, où U et U' sont respectivement U(i) et U'(-i)

b) Soit (G) le cercle de diamètre $[UU']$.

- Montrer que l'image M de tout point m de (G) est un point de $[UU']$.
- Soit M un point de $[UU']$, vérifier que M est l'image de deux points de (G).

quelle est donc l'image par f de (G) ?

4) – Recherche de l'image d'un cercle (G') de centre o et rayon$r \neq 1$.

Soit m un point de (G') d'affixe z.

a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z en fonction du module r et d'un argument de z.

b) En déduire que m est un point d'une courbe E, dont on donnera l'équation cartésienne.

Exercice 8

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on donne les points A d'affixe $2i$, B d'affixe 2 et I milieu de [AB] (on prendra 2 cm pour unité). On considère la fonction *f* qui, à tout point M distinct de A, d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe *z'* telle que :$z' = \frac{2z}{z-2i}$

1. *a)* Montrer que *f* admet comme points invariants le point O et un deuxième point dont on précisera l'affixe.

b) Déterminer les images par *f* des points B et I.

2. Soit M un point quelconque distinct de A et de O. Établir que :

$$OM' = 2\frac{MO}{MA} \quad et \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{MO}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + 2k\pi \, , k \in \mathbb{Z}$$

3. Soit (Δ) la médiatrice de [OA].

Montrer que les transformés par *f* des points de(Δ)appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera.

4. Soit $(\mathscr{g})$ le cercle de diamètre [OA], privé du point A. Montrer que les transformés par *f* des points de $(\mathscr{g})$ appartiennent à une droite (D) que l'on précisera.

5. Tracer (Δ),$(\mathscr{g})$,□□ (C), (D) sur une même figure.

Proposition du lycée El hadji OMAR LAMINE BADJI

DUREE 4HEURES

EPREUVE TS1

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), unité graphique : 0,5cm.

On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
2. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

- Calculer a' . On vérifiera que a' est un nombre réel.
- Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

En déduire que O est un point de la droite (BB').

- On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3. On se propose désormais de montrer que la distance MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

- Calculer la distance OA + OB + OC.
- Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
- On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.

On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + c\,j| = 22.$$

- On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$$

Montrer que MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

EXERCICE 2 (5 points)

1. On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k, 68 + 109k)$, où k appartient à Z.
En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$.
(On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.
On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.
à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1$ [modulo 227] .
c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$.
Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?

EXERCICE 3 *(5 points)*
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
1. On considère l'événement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».
a) Montrer que la probabilité p(A) de l'événement A peut s'écrire :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$$

b) Déterminer la limite de p(A) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On considère l'événement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
Vérifier que la probabilité p(B) de l'événement B peut s'écrire

$$p(\mathrm{B}) = \frac{6}{4(n+3)}$$

3. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2.
– Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs ;
– Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
– Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.
a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.
Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de X.
d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

EXERCICE 4 *(5 points)* commun à tous les candidats
Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.
On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m, d'affixe z, associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$

L'objet de cet exercice est de tracer la courbe Γ décrite par M lorsque m décrit le cercle C de centre O et de rayon 1.
Soit t un réel de $[-\pi; +\pi]$ et m le point d'affixe $z = e^{it}$

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases} \qquad t \in [-\pi; +\pi]$$

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe Γ.
2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part et $y(t)$ et $y(-t)$ d'autre part.
En déduire que Γ admet un axe de symétrie que l'on précisera .
3. Montrer que $x'(t)=\sin t\,(1-2\cos t)$.
Étudier les variations de x sur $[0 ; \pi]$
4. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$
Étudier les variations de y sur $[0 ; \pi]$.
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et de y sur $[0 ; \pi]$.
6. Placer les points de Γ correspondant aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à Γ est horizontale). Tracer la partie de Γ obtenue lorsque t décrit $[0 ; \pi]$, puis tracer Γ complètement.

Lycée de Richard-Toll **Mr. Fall**
Année scolaire 05-06
Classe de TS_1

Devoir surveillé N1
Second semestre
Durée 4h

Exercice1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$, unité 2cm. On considère l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que $\left|z-1-i\right| = \frac{1}{4}\left|z+i\bar{z}-8(1+i)\right|$ (1)

1. **a.** Montrer que l'ensemble des points d'affixes z tels que **:**
   $z+i\bar{z}-8(1+i)=0$ est une droite (Δ)
   b. En interprétant géométriquement l'équation (1) démontrer que (E) est une conique de foyer F d'affixe $1+i$, de directrice la droite (Δ) et d'excentricité $\frac{1}{2}$
2. **a.** Préciser l'axe focale (D) de (E).
   b. Vérifier que les points A et A' d'affixe respectives $2+2i$ *et* $-2-2i$ sont des sommets de (E).
   c. Placer ces éléments sur une figure et construire géométriquement les sommets de (E) situés sur l'axe focal.
   d. Donner l'allure de (E) en précisant les tangentes aux sommets.

Exercice2

Une urne contient 5 jetons blancs (un carré, trois ronds et un triangle), quatre jetons noirs (trois carrés et un triangle) et trois jetons rouge (un carré et deux ronds).

On tire simultanément trois jetons de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.

2. Déterminer le nombre de tirages comportant :
   a. trois jetons de couleurs différentes.
   b. trois jetons de formes différentes.
   c. trois jetons de même forme.
   d. trois jetons de même couleur.
   e. trois jetons de même forme et de même couleur.
   f. trois jetons de formes différentes et de couleurs différentes.
   g. un jeton d'une couleur et deux d'une autre.
   h. exactement deux jetons noirs et un carré.

Problème

Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$,(unité 10cm)

A. **1.** Etudier les variations de f_n sur $[0;+\infty[$

Pour $n \geq 2$, étudier la position relative de (C_n) et de (C_{n-1}) et vérifier que le point $A_n(n;\ f_n(n))$ de (C_n) est aussi sur (C_{n-1}).

2. Construisez sur un même graphique les courbes (C_1), (C_2) et (C_3).

B. **1.** Soit (U_n) la suite définie par $U_n = f_n(n)$.

En utilisant les résultats de la partie **A.** montrer que (U_n) est décroissante.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$

a. Montrer que pour tout t de $[0\,;1]$, $\ln(1+t) \leq t - \dfrac{t^2}{4}$

b. Déduisez en que, pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

3. **a.** Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$

b. Déduisez en que, pour tout n, $n \geq 2$ $\quad U_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+....+\frac{1}{2}+1\right)}$

4. **a.** Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $\ln n \leq 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n-2} + \dfrac{1}{n-1}$

b. Déduisez en que, pour tout $n \geq 2$ $\quad U_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$. Quelle est la limite de la suite (U_n)

C. Pour a fixé, positif, et pour tout entier n, $n \geq 1$, on pose : $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!}dt$

1. Calculer $I_1(a)$.

2. Montrer que pour $n \geq 1$, pour tout $t \geq 0$, $\quad 0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{t^n}{n!}$

Déduisez en un encadrement de $I_n(a)$.

3. Montrer que pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$. Donner alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quant n tend vers $+\infty$.

4. Trouver lorsque $n \geq 2$, une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ et déduisez en que pour tout

$n \geq 2 \qquad I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + ... + \frac{a^n}{n!}\right)$

L'égalité est-elle valable pour $n = 1$

Bonne chance

L.D.Z & L.O.L.B DE ZIGUINCHOR
ANNEE SCOLAIRE : 07/08
1er SEMESTRE
CLASSE : TS1

M. AMOUZOU & FALL

DEVOIR DE MATHEMATIQUES (4 HEURES)

EXERCICE 1 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos\alpha$.

NB : On préciser la partie réelle et la partie imaginaire des solutions.

EXERCICE 2 :

Pour un examen dix examinateurs ont préparé chacun deux sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans des enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus les sujets choisis par le premier candidats ne seront plus disponibles pour le deuxième.

On note A_1 l'événement : « les deux sujets obtenus par le premier candidat provienne du même examinateur » et A_2 « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ».

1) Montrer que la probabilité de l'événement A_1 est égale à $\frac{1}{19}$.

2) a) Calculer directement la probabilité conditionnelle $P(A_2 / A_1)$.

b) Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un

même examinateur est $\frac{1}{323}$

3) a) Calculer $P\left(A_2 / \overline{A_1}\right)$.

b) En remarquant que $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup \left(A_2 \cap \overline{A_1}\right)$, calculer $P(A_2)$ puis en déduire que

$P(A_2 \cup A_1) = \frac{33}{323}$

4) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les deux valeurs 0, 1 ou 2.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 3 :

ABCD est un trapèze non rectangle tel que la droite (AB) est parallèle à la droite (CD). On désigne par I, J et O les milieux respectifs de [AB], [CD] et [IJ].

1. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points du plan tels que :
$\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\|$.
2. Les médiatrices des côtés [AD] et [BC] se coupent en G.
Démontrer que : $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.
3. Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 0$.
   a) Justifier que (E_2) est non vide.
   b) Démontrer que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM} = k$ (où k est une constante réelle).
   c) En déduire que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{GM} = 0$.
   d) Déterminer et construire (E_2).

PROBLEME : Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x - \dfrac{x^n - 1}{n} \quad si\ x > 0 \\ f_n(0) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

(ln$x$ désigne le logarithme népérien de x).

On désigne par $(\boldsymbol{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2 cm).

Partie A :

1) Etudier la continuité de f_n à droite en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0 (on distinguera deux cas suivant les valeurs de n).
Interpréter géométriquement les résultats.
3) Etudier le sens de variation de f_n. Préciser la nature de la branche infinie.
Construire $(\boldsymbol{C}_1)$ et $(\boldsymbol{C}_2)$.

Partie B :

1) Montrer que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle]0 ; 1[.
2) a) Etudier le sens de variation de f_2', fonction dérivée de f_2 sur]0 ; 1] et dresser son tableau de variation.
b) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], on a : $\left| f_2'(x) \right| \le \dfrac{2}{e}$.
3) On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}.$$
a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \in [0 ; 1]$.
b) α étant le nombre réel défini à la question B 1), démontrer que pour entier naturel n, on a :
$$|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{2}{e}|u_n - \alpha|.$$

c) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n |1-\alpha|$.

d) Etudier la convergence de la suite (u_n).

Lycée El Hadji Omar Lamine Badji **2007/08**
TS1

Devoir N° 1 de mathématiques du second semestre

Durée : 2 heures

Problème

I. On considère l'équation différentielle (E) : $y''+2y'+y=-2e^{-x}$

1. Montrer que la fonction U telle que $U(x)=-x^2e^{-x}$ est solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle : $y''+2y'+y=0$
3. En déduire la solution générale de (E)
4. Déterminer la solution f de (E) satisfaisant aux conditions initiale :
$$f(0)=1 \ \ et \ \ f'(0)=0$$

II. On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x)=x\ln|x|-x+1 & si \quad x<0 \\ g(x)=e^{-x}\left(-x^2+x+1\right) & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm)

1. a. Déterminer D_g domaine de définition de g. Calculer les limites aux bornes de D_g.
   b. Etudier les branches infinies.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
3. a. Calculer $g'(x)$ pour $x<0$ puis pour $x>0$
   b. Etudier les variations de g puis dresser le tableau de variation.
4. a. Résoudre l'équation $g(x)=0$ pour $x \in [0;+\infty[$
   b. Montrer que $g(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $]-\infty;0[$
   Prouver que $-4<x_0<-3$
   c. En déduire le nombre de points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
5. Tracer (C). (on construira les demi tangentes aux points d'abscisse 0).

III. 1. a. En remarquant que $f(x)=e^{-x}\left(-x^2+x+1\right)$ est solution de (E). Montrer que :
$$\forall\, x \in IR,\ f(x)=-2e^{-x}-2f'(x)-f''(x).$$
b. En déduire une primitive G de g sur $[0;+\infty[$
c. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$

Lycée EL Hadji Omar Lamine Badji Année 2010/2011
TS1

Devoir de Mathématiques n° 2

Durée : 4 heures

Exercice 1(4pts)

α étant un réel appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et z un nombre complexe, on pose :

$$f(z) = z^4 + (2\cos 2\alpha \cos^2 \alpha) z^2 + \cos^4 \alpha.$$

1) Montrer que si z_0 est une solution de l'équation f(z) = 0, alors son opposé et son conjugué le sont aussi.
2) Résoudre l'équation f(z) = 0 pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$
3) On suppose α donné et appartenant à $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et on pose $z^2 = x\cos^2\alpha$
   a) Que devient alors l'équation f(z) = 0 ?
   b) Résoudre l'équation d'inconnue x ainsi obtenue et donner les solutions sous forme exponentielle.
   c) En déduire les solutions de l'équation f(z) = 0 sous forme exponentielle.

Exercice 3(5pts)

Soient les point I(i) , J(-i) et f l'application de $\mathbb{C} - \{i\}$ vers $\mathbb{C} - \{i\}$ définie par : $f(z) = \frac{iz - 1}{z - i}$

1) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f
   b) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, on a : $f(z) = i - \frac{2}{z - i}$
   c) Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$?
   d) Montrer l'axe des imaginaires privé de I(i) est globalement invariant par f.
2) Soient A et B les points d'affixes respectives i et – i et M un point d'affixe z distinct des points A et B.
   b) Vérifier que : $\arg[f(z)] = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right)[2\pi]$
   c) En utilisant la question 2)a), déterminer l'ensemble des points M tels que f(z) soit un nombre réel.
   d) En utilisant la question 2)a), déterminer l'ensemble des points M tels que f(z) soit un nombre imaginaire pur.
   e) Retrouver les résultats des questions 2)b) et 2)c) par la méthode analytique.
3) a) Vérifier que f est bijective.
   b) Vérifier que, pour tout réel $\theta \neq \frac{\pi}{2}[2\pi]$: $f\left(e^{i\theta}\right) = -\cot an\theta$
   c) Quel est l'ensemble des points M' d'affixe f(z) lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 3 :(5pts)

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a 2 élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'événement "l'élève fait partie du club photo" et T l'événement "l'élève fait partie du club théâtre".
Montrer que les événements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. On appelle T_1 l'événement "le premier élève appartient au club théâtre. Calculer p(T_1).

b. On appelle T_2 l'événement "l'élève pris en photo appartient au club théâtre".

Calculer p(T_2/ T_1) , puis p($T_2/\overline{T_1}$).

En déduire : p($T_1 \cap T_2$) et p($T_2 \cap \overline{T_1}$).

c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est $\frac{1}{5}$.

3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à le nombre de fois qu'un élève du club de théâtre est photographie pendant quatre semaines.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique et la variance deX.

Probléme . 8pts

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité : 5cm).

Partie A

On considère la fonction f_1 définie sur$[0;+\infty[$ par

$$f_1(x) = xe^{-x^2}$$

et on appelle C_1 sa courbe représentative.

6. Calculer $f_1{}'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_1
7. Calculez la limite de $f_1$en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$) Interpréter graphiquement ce résultat.
8. Dresser le tableau de variation de f_1.
9. On apelle D la droite d'équation $y = x$. Déterminez la position de C_1 par rapport à D.
10. Tracez C_1 et D.

Partie B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f_3(x) = x^3e^{-x^2}$$

et on appelle C_3 la courbe représentative.

4. Montrez que pour tout réel positif x, $f_3'(x)$ a même signe que $(3-2x^2)$. En déduire le sens de variation de f_3.
5. Déterminez les positions relatives de C_3 et C_1 .
6. Tracer C_3 dans le même repère que C_1 (on admettra que C_3 a la même asymptote que C_1 en $+\infty$).

Partie C

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n e^{-x^2}$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans le repère$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $\alpha_n = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On appelle S_n le point de C_n d'abscisse α_n. Montrer que, pour tout n, C_n passe par S_2. Placer S_1 , S_2 *et* S_3 sur la figure.
4. Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$$g(x) = e^{\frac{x}{2}\left(-1+ln\frac{x}{2}\right)}$$

   a. Étudier le sens de variation de g.
   b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$
   En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2.

L.O.L.B DE ZIGUINCHOR
ANNEE SCOLAIRE : 07/08
2e SEMESTRE
CLASSE : TS1

M. FALL

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
(4 HEURES)

Exercice 1 (3 pts)

Soit le repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace. On considère les points $A(a,0,0)$; $B(0,b,0)$ *et* $C(0,0,c)$

1) Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ puis calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que l'aire S du triangle ABC est $S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

2) Calculer $(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}$. En déduire que le volume V du tétraèdre OABC est $V = \frac{1}{6}abc$

3) Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC) puis calculer la distance du point $\Omega(a,b,c)$ au plan (ABC). En déduire l'équation de la sphère de centre Ω tangente au plan (ABC)

Exercice 2 : (5pts)

Dan le plan euclidien orienté, on considère un rectangle direct ABCD de centre I tel que et $AB = 3a$ *et* $BC = a\sqrt{3}$ où a est un réel strictement positif donné.

1) Déterminer la nature du triangle BCI

2) Soit E le point sur le segment $[BD]$ tel que $BE=\frac{3}{4}BD$ Donner le rapport k et l'angle θ

de la similitude directe s telle que $s(B)=I$ et $S(E)=C$.

3) On suppose dans la suite que $a=1$ et on pose : $\vec{u}=\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\frac{1}{AD}\overrightarrow{AD}$ et on munit

ensuite le plan du repère orthonormal direct $(A;\vec{u},\vec{v})$

a) Déterminer les affixes de B , I .
b) En déduire l'écriture complexe de la similitude s.

4) Déterminer l'affixe de Ω centre de la similitude s et celle du point $A'=s(A)$.

5) Soit la suite de points M_n d'affixes z_n définie par $M_0=A$ et $\forall n\in\mathbb{N}$; $M_{n+1}=s(M_n)$

a) Démontrer que la suite (α_n) définie par : $\alpha_n=z_{n+1}-z_n$ est une suite géométrique dont on

Précisera le premier terme α_0 et la raison q_0.

b) Exprimer en fonction de n la longueur de la ligne polygonale $L_n=M_oM_1M_2M_3...M_{3n}$ et déterminer la limite de cette longueur quand n tend vers $+\infty$

Exercice 3 (6pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; Soit (Γ) l'ensemble des points $M(t)$

de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ tels que : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{2}{\cos t} \\ y(t)=3\sin t \end{cases}$ $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

5) **a)** Comment $M(-t)$ se déduit de $M(t)$? En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie et déterminer le domaine d'étude utile.

b) Etudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

6) **a)** Démontrer que (Γ) est contenu dans une hyperbole (H) donner on donnera l' équation et les éléments caractéristiques. On notera (D) et (D') les asymptotes, A et A' les sommets de (H)

b) Construire (H) et préciser la partie de(H) correspondant à (Γ)

7) Soit $M(t_0)$ un point de (Γ). La tangent (Δ) à (Γ) en $M(t_0)$ coupe les asymptotes (D) et (D') en A_0 et B_0

a) Démontrer que la tangente (Δ) à (Γ) en $M(t_0)$ a pour équation :

(Δ) : $3x-2(\sin t_0)y-6\cos t_0$

b) Donner les coordonnées de A_0 et B_0 en fonction de t_0

c) Vérifier que $M\left(t_0\right)$ est le milieu du segment $\left[A_0B_0\right]$

8) Soit $F_1\left(0;3\right)\, et\, F_2\left(0;-3\right)$ dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ .On considère l'ensemble(E) des points M du plan vérifiant : $MF_1+MF_2=10$ et f l' affinité orthogonale de base ($x'x$) et de rapport k.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E) puis représenter (E)
b) Déterminer la valeur de k pour que l'image de (E) soit un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon

Problème (7pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

3) **a)** Etudier les variations de f et démontrer que pour tout $x\in IR,\ f(x)\geq 0$.

b) Déterminer les asymptotes de C_f et tracer C_f (On pourra montrer en $+\infty$ que

$$f(x)=x-\ln 2+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$$

4) **a)** Démontrer que pour tout réel x : $\left|f'(x)\right|<1\ et\ f''(x)=1-\left(f'(x)\right)^2$.

b) Démontrer que si $x\in\left]-1;+1\right[$ il existe un unique réel y et un seul tel que $f'(y)=x$.

c) Exprimer y en fonction de x.

3) Soit $n\in IN,\ y\in IR^+\ et\ I_n(y)=\int_0^y\left[f'(x)\right]^n dx$

a) Justifier l'existence de $I_n(y)$

b) Calculer $I_0\left(y\right)\, et\, I_1\left(y\right)$

c) En utilisant $\left[f'(x)\right]^2=1-f''(x)$ démontrer que pour tout $n\geq 2\ on\ a$:

$$I_n(y)=I_{n-2}(y)-\frac{1}{n-1}\left[f'(x)\right]^n$$

a) En déduire que pour tout $p\in IN^*$ $I_p(y)=y-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k-1}\left[f'(u)\right]^{2k-1}$ puis

$$I_{2p-1}(y)=\ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k}\left[f'(y)\right]^{2k}$$

b) Démontrer que, pour tout $n\in IN$: $0\leq\int_0^y\left(f'(u)\right)^{2p}du\leq y\left[f'(y)\right]y^{2p}$

c) En déduire y étant fixé que la suite de terme général $\int_0^y\left(f'(u)\right)^{2p}du$ est convergente. Préciser sa limite.

<u>**LYCEE MIXTE MAURICE DELAFOSSE**</u> **11 FEVRIER 2010**
Classe : Terminales S

COMPOSITION DU PREMIER SEMESTRE *(durée 4h)*

Exercice 1 Soit $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$ *et* $z = \dfrac{z_1}{z_2}$

1) Mettre $z_1 ; z_2$ *et* z sous forme trigonométrique
2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{12}$
3) a) Résoudre dans IR l'équation (E) : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$

   b) Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 2 Soit $(E): z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = 0$

1) Montrer que (E) admet une solution réelle
2) Résoudre dans C l'équation (E).
3) Dans le plan complexe on donne les points A, B et C d'affixes respectifs $a = -1;\ b = -2 + i\ \ et\ \ c = i$
   a) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{b-a}{c-a}$
   b) En déduire la nature du triangle ABC
4) Déterminer l'affixe du point D image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
5) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle de centre I et de rayon r à préciser.

Problème Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x} & si\ \ x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^3 - 5x}{x^2 + 3} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1cm)

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) a) Etudier les limites de f en $-\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation : y=-2x+$\dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$

c) Etudier sur] $-\infty$;0[la position de (C) par rapport à la droite (D).

3) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

b) Déterminer les réels a,b,c et d tels que pour tout x de [0 ; $+\infty$ [$f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2+3}$

c) En déduire l'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$ et sa position par rapport à la courbe de f.

4 a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

5) a) Pour $x \in \left]-\infty;0\right[$ calculer $f'(x)$ et préciser son signe.

b) Montrer que pour tout x de]0 ; $+\infty$ [$f'(x) = \dfrac{(x^2-1)(x^2+15)}{(x^2+3)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour x de]0 ; $+\infty$ [.

c) Dresser le tableau de variation de f.

6) a) Résoudre dans] 1 ; $+\infty$ [l'équation f(x)=0.

b) Tracer la courbe (C) de f

7) Soit g la restriction de f à l'intervalle] $-\infty$; 0[

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b) g^{-1} est-elle dérivable sur J ? Justifier.

c) Calculer g (-1) puis $(g^{-1})'(1+\sqrt{2})$.

d) Expliciter g^{-1}(x).

e) Tracer la courbe (C') de g^{-1} dans le repère précédent.