Collection
Mon cahier d'habiletés

MATHS

Tle D

LIVRE DU PROFESSEUR

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Fixations
- Renforcements / Approfondissements
- Situations d'évaluations
- Devoirs de niveaux

JD Éditions
04 B.P. 206 Abidjan 04
Côte d'Ivoire

SOMMAIRE

1 LIMITE ET CONTINUITÉ

Résumé de cours suivi d'exercice de fixation

I- Limite

Limites de référence

Exercices de fixation

Exercice 1

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{1}{x-3} = +\infty$, 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1}{x-3} = -\infty$.

Exercice 2

1) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{(x+1)^3} = +\infty$, 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{1}{(x-5)^2} = +\infty$

Exercice 3

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$, 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^4-5x+8}{x^3-4} = 0$, 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{sinx} = 1$.

Limite d'une restriction

Propriété

Exercice de fixation

Exercice 1

Calcule chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$, 2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{1}{4}$, 3) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{|x|-2}{2x+4} = -\frac{1}{2}$,

Lien entre limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction en un point

Propriétés

Exercice de fixation

Exercice 1

On considère la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \; si \; x < 1 \\ x+1 \; si \; x \geq 1 \end{cases}$

Etudie la limite de f en 1.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$, donc f n'admet pas de limite en 1.

Limites et opération sur les fonctions

Propriétés

Exercices de fixation

Exercice 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$.

1) On ne peut conclure pour la limite de $g(x) + h(x)$ (**Vrai**).

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) + h(x) = 0$ (**faux**).

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + h(x) = c$ (**faux**)

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + h(x) = -\infty$(**faux**).

Exercice 2

On donne : $f(x) = x^2 + 2x + 5$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Calcule la limite de $f + g$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f + g)(x) = +\infty$

Exercice 3

On donne : $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$ et $g(x) = x - 8$

Calcule la limite de $f + g$ en -3.

$\lim\limits_{x \to -3} (f + g)(x) = -\dfrac{25}{2}$

2) Limite du produit de deux fonctions

Propriété

Exercices de fixation

Exercice 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$

1) On ne peut conclure pour la limite de $f(x) \times g(x)$ (**vrai**)..

2) On ne peut conclure pour la limite de $f(x) \times h(x)$ (**faux**).

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times h(x) = 0$ (**vrai**).

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \times h(x)$ est toujours égale à $+\infty$ (**faux**).

Exercice 2

Calcule la limite de $f(x) \times g(x)$ en $+\infty$.

$f(x) = x^2 + 2x + 5$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$.

Exercice 3

On donne : $f(x) = \dfrac{x+1}{x-4}$ et $g(x) = x - 8$

Calcule la limite de $f \times g$ en 2.

$\lim\limits_{x \to 2} (f \times g)(x) = 9$.

3) Limite du quotient de deux fonctions

Propriétés

Exercices de fixation

Exercice 1

1) (vrai) .

2) (Vrai).

3) (**vrai**).

4) (**faux**).

Exercice 2

On donne : $f(x) = \dfrac{x+1}{x-4}$ et $g(x) = x - 8$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f}{g}(x) = \frac{2}{21}$.

Exercice 3

On donne : $f(x) = -1 + \cos x$ et $g(x) = \sin x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f}{g}(x) = 0$

Exercice 4

On donne : $f(x) = 1 - \cos^2 x$ et $g(x) = x \tan x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f}{g}(x) = 0$

4) Limite d'une fonction composée

Propriété

Exercice

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5$, 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 4\pi x}{x^2} = 8\pi^2$

Conséquences

Exercices de fixation

Exercice 1

1) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x^2+x+2} = \sqrt{2}$, 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+2} = +\infty$,

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+2} = +\infty$

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x \to -3} |7x-1| = 22$, 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} |7x-1| = +\infty$,

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} |7x-1| = +\infty$

5) Limite par comparaison

Propriété

Exercices de fixation

Exercice 1

1) Pour tout x élément $\mathbb{R}$, $x - 1 < x + \sin x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ sachant que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Pour tout $x > 0$, $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+E(x))$ sachant que pour tout x élément $\mathbb{R}$, $E(x) \leq x$.

Pour tout x élément $\mathbb{R}$, $E(x) \leq x$, $3x + E(x) \leq 4x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(4x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x+E(x)) = -\infty$.

5) Calcul de limite avec expression conjuguée.

Exercice

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$

5) Calcul de limite en utilisant la définition d'un nombre dérivé.

Exercice

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} = \frac{1}{4}$, 2)**Erreur !**$\frac{sinx-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6) Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Propriétés

Exercice de fixation

Exercice

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{1}{x-1} = +\infty$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{1}{x-1} = -\infty$.

II) Continuité

1) Continuité en un point

Exercices de fixation

Exercice 1

Les fonctions continues en tout point de l'intervalle I donné sont : a) f , b) g

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Etudie la continuité de f en 0.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$, donc f est continue en 0.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ } si \text{ } x > -1 \\ 2x-5 \text{ } si \text{ } x \leq -1 \end{cases}$

Etudie la continuité de f en -1.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -7$. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$, donc f n'est continue en -1.

Prolongement par continuité

Propriété et définition

Exercices de fixation

Exercice 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

1) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$, donc on peut prolonger f par continuité en 2

2) Le prolongement est la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ } si \text{ } x \neq 2 \\ 2 \text{ } si \text{ } x = 2 \end{cases}$

Exercice 2

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

1) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$.

2) Le prolongement est la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ } si \text{ } x \neq 0 \\ 1 \text{ } si \text{ } x = 0 \end{cases}$

2) Continuité sur un intervalle

Définition

Exercice de fixation

Exercice

1) (vrai).

2) (faux).

2) (vrai).

Propriété
Exercices de fixation

Exercice
Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = \cos x$.
1) h est une fonction rationnelle qui est continue sur son ensemble de définition.
Pour tout x élément $\mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \neq 0$, donc $D_h = \mathbb{R}$
2) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$, donc k est continue sur $\mathbb{R}$
3) f est continue sur $\mathbb{R}$ et g est continue sur $\mathbb{R}$, donc p est continue sur $\mathbb{R}$.

Composée de deux fonctions
Propriété
Exercice de fixation

Exercice
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1) (vrai)
2) (vrai).
3) (faux).

Image d'un intervalle

Propriété
Exercice de fixation

Exercice 1
$f([0 ,1]) = [4 , 7]$.

Exercice 2
$f(]-1 ,3]) =]5 , 19]$

Exercice 3
$f([7 ,13]) = [- 10 , 0]$.

Exercice 4
1) f est décroissante sur $[-3 ,-1]$ donc $f([-3 ,-1]) = [1 , 9]$.
2) f est croissante sur $[1 ,4]$ donc $f([1 ,4]) = [1 , 16]$.

Exercice 5
Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

1) L'image de l'intervalle [2 ,4] est [0 ,4].
2) L'image de l'intervalle [0 ,+∞[est[0 ,+∞[.
3) L'image de l'intervalle]-∞ ,2[est]-∞ ,4[

Théorème des valeurs intermédiaires
Exercice de fixation
Exercice
1) (vrai)
2) (faux).
3) (vrai)

Propriété
Exercice de fixation
Exercice
On a : $f(1) = -3$ et $f(2) = 1$. $f(1)\times f(2) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$, admet au moins une solution unique dans [1 , 2].

Méthode de dichotomie, Méthode de balayage
Exercice 1
On a : $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x + 1$
1) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 6x + 1$. La fonction f est décroissante sur [3 , 4].
Et $f(3) = 4$, $f(4) = -11$. $f(3)\times f(4) < 0$.
L'équation $f(x) = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle [3 , 4].
2) $3{,}3 < \alpha < 3{,}4$ par la méthode de dichotomie.

Exercice 2
On a : $f(x) = -2x^3 + x^2 + x + 1$
1) Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -6x^2 + 2x + 1$. La fonction f est décroissante sur [1 , 2].
Et $f(1) = 1$, $f(2) = -9$. $f(1)\times f(2) < 0$.
L'équation $f(x) = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle [3 , 4].
2) $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$ par la méthode de balayage.

Fonction continue et strictement monotone

Application injective

Propriétés
Exercice de fixation

Exercice 1
Les fonctions g et h sont injectives.

Exercice 2
$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a^2 = b^2$, comme $a > 0$ et $b>0$ on a : $a = b$. donc f est injective.

Exercice 3
Soit f une application d'un intervalle I dans un intervalle J.
Démontre que si f est strictement monotone alors f est injective.
Par l'absurde.
Supposons f strictement monotone et non injective, On a : il existe a et b tels que $a \neq b$ et $f(a) = f(b)$ ce qui est absurde car f étant strictement monotone, si $a \neq b$, soit $a < b$ soit $b < a$ alors $f(a) < f(b)$ ou $f(b) < f(a)$ nécessairement.

Application surjective
Exercice de fixation

Exercice 1
Seule h est surjective.

Exercice 2
Soit y $\in \mathbb{R}^+$, y > 0, $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{y}$ est un antécédent de y, donc f est surjective.

Exercice 3
Si $J = f\,(\mathrm{I})$ alors pour tout y $\in$ J, il existe $x \in$ I tel que $f(x)$ = y.

Application bijective
Définition
Exercice de fixation
Exercice
Pour tout x élément de $]1\,,+\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$
f est strictement monotone sur $]1\,,+\infty[$ et $f(]1\,,+\infty[) =]0\,,+\infty[$
f est donc une bijection de $]1\,,+\infty[$ sur $]0\,,+\infty[$.

III) Fonction puissance d'exposant rationnel

1) Fonction racine n-ième
Définition
Exercice de fixation

Exercice
la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.
Or fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

2) Fonction puissances d'exposant rationnels

Exercice de fixation

Exercice
Ecris sous la forme d'une puissance rationnelle

1) $\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{10}{21}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, 2) $\left(5^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{25}} = 5^{\frac{2}{5}}$, 3) $\frac{7^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}}$, 4) $2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{1}{15}}$

EXERCICE DE RENFORCEMENT /APPROFONDISSEMENT

Exercice 1

1- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2- a) Pour tout $x > 1$, $f(x) = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} - 3x$

$= x\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - 3x$ car $x > 0$

$= x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - 3\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - 3\right)$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - 3 = -2$

Exercice 2
Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - \frac{x}{2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - \frac{1}{2}\right)$

$= +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}$

$= -1$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-4} - 5x = \lim\limits_{x \to -\infty} x(-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} - 5)$

$= +\infty$

Exercice 3

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+5x-3} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}$

$= \frac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}-2x-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{5}{x}}-2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

$= -6$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{9x^2-x+7} + 3x = \frac{-1+\frac{7}{x}}{-\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}-3}$

$= \frac{1}{6}$

Exercice 4

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+3}$

$= \frac{1}{5}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}}$,

$= \frac{-2}{\sqrt{3}}$

Exercice 5

En utilisant une méthode algébrique, détermine dans chacun des cas suivants l'image de

l'intervalle K par *f*.

1- $f([1, 2].) = [0, 1]$.

2- $f([0, +\infty[) =]-\infty, 8[$.

3- $f(]\frac{3}{2}, 5[) =]\frac{15}{7}, +\infty[$.

Exercice 6

f est une fonction de R vers R définie par : $f(x) = \sqrt{x-3}$ et (C) sa cour représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

2- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, La courbe de f admet une branche parabolique de direction celle (OI).

Exercice 7

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x^2$. On note (C) la courbe représentative f dans le plan muni d'un repère orthonormé de (O, I, J).

1- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

2- (C) admet une branche parabolique de direction (OJ).

Exercice 8

f est une fonction de $]-5, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$

1- Pour tout x élément de $]-5, +\infty[$ $f'(x) = \frac{13}{(x+5)^2}$.

$f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $]-5, +\infty[$

2- Démontre que f est continue et strictement croissante sur $]-5, +\infty[$ donc f réalise une bijection de l'intervalle $]-5, +\infty[$ vers un intervalle K tel que K $=\mathbb{R}$.

3- Pour tout x et $\mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{5x+9}{2-x}$.

4- $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ >}} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = -5$ est asymptote verticale à la courbe (C) de f.

5- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe (C) de f.

Exercice 9

On considère la fonction f définie de [-5 , 5] vers [-517 , 3] par :

$f(x) = (x-3)^3 - 5$.

1. $f'(x) = 3(x-3)^2$, $f(-5) = -517$, $f(5) = 3$. f est croissante donc

$f([-5 , 5]) = [-517 , 3]$.
f est continue et strictement croissante sur $[-5 , 5]$. f réalise une bijection de $[-5 , 5]$ vers $[-517 , 3]$.
2. a) f est une bijection de $[-5 , 5]$ vers $[-517 , 3]$ et $f(-5) \times f(5) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-5 , 5]$.
b) Justifie que $f(4{,}7) = -0{,}09$ et $f(4{,}7l) = 0{,}0002$. $f(4{,}7)$ et $f(4{,}7l)$ sont de signes contraires donc $4{,}7 < \alpha < 4{,}71$
3- f est une bijection de $[-5 , 5]$ vers $[-517 , 3]$ et $-1 \in [-517 , 3]$ donc l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-5 , 5]$.

Exercice 10

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1+|x|}{|x|-1}, = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{-x+1}{-x-1} = -\infty$ donc on ne peut pas prolonger f par continuité en -1 et en 1.

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} = -\infty$, on ne peut pas prolonger f par continuité en 1.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin2x}{x} = 1$ donc on peut prolonger f par continuité en 1. Soit g ce prolongement/

La fonction g est telle que : $\begin{cases} g(x) = f(x) si\ x \in]0,1[\\ g(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, calcule les limites de la fonction f en 1, en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}$ $= \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}$ $= \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}+2x}$ $= -\frac{1}{2}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2}{1-\frac{1}{x}} = -3$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2}{1-\frac{1}{x}} = -1$	a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$ $= \lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{(x+1)^2}$ $= \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{4}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Exercice 12

On a : $f(x) - 2x = -\frac{10x+3}{x^2+5}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - 2x = 0$

Exercice 13

1- • (D_1) est asymptote à (C) , $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$

• (D_2) est asymptote à (C) , $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$

• (D_3) est asymptote à (C) , $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x - 2 = 0$ et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x - 2 = 0$

2- Etudie en utilisant le graphique, le signe de $f(x) - (x + 2)$ sur l'intervalle [-3 , 3].

$f(x) - (x + 2) > 0$ si $x \in]-1\,,\,1[$

$f(x) - (x + 2) < 0$ si $x \in [-3\,,\,-1[\cup]1\,,\,3]$

Situation d'évaluation

Exercice 1

1) Cela revient à résoudre l'inéquation $f(\mathrm{t}) < 15$

$\frac{\boldsymbol{210}}{\boldsymbol{t}} + 10 < 15$, soit $\mathrm{t} > \frac{210}{5}$ soit $\mathrm{t} > 42$, en 42 minutes.

2) $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\boldsymbol{210}}{\boldsymbol{t}} + 10 = 10$. La température de l'objet se stabilisera à 10.

2 PROBABILITÉ

RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

I. PROBABILITÉ CONDTIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

1. Définition

Exercice de fixation

1) Calculons $P_R(G)$.

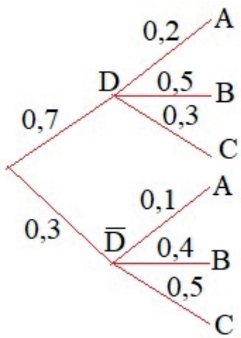
$P_R(G) = \frac{P(R\cup G)}{P(R)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$.

2. Arbre pondéré

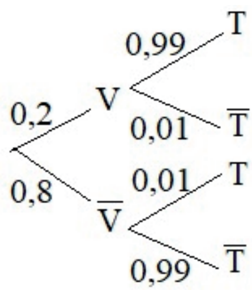
Exercices de fixation

1) Calculons $P(D \cup B)$.

$P(D \cup B) = 0,7\times0,5 = 0,35$.



2) 1. Construisons l'arbre pondéré



2. Déterminons la probabilité

$$P(A) = P_{\overline{V}}(T) = 0,01$$

$P(B) = P(V \cup \overline{T}) = 0,2\times0,01 = 0,002$.

3. Formule des probabilités totales

Exercices de fixation

1) $P(G) = P(R \cap G) + P(\overline{R} \cap G)$

$= 0{,}4\times0{,}75 + 0{,}6\times0{,}3$

$= 0{,}3 + 0{,}18$

$= 0{,}48.$

2) $P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T)$

$= 0{,}2\times0{,}99 + 0{,}8\times0{,}01$

$= 0{,}198 + 0{,}008$

$= 0{,}206.$

3) $P(C) = P_A(C)\times P(A) + P_B(C)\times P(B)$

4. Évènements indépendants

Exercices de fixation

1) 1. $P(A)\times P(B) = 0{,}2\times0{,}15 = 0{,}3$

$P(A)\times P(B) = P(A \cap B)$.

Donc A et B sont indépendants.

2. $P(A)\times P(B) = 0{,}5\times0{,}1 = 0{,}05$

$P(A)\times P(B) \neq P(A \cap B)$, donc A et B ne sont pas indépendants.

2) $C = \overline{A \cup B}$

$\mathrm{P}(C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\times P(B)$

$= 1 - 0{,}2 - 0{,}1 - 0{,}2\times0{,}1$

$= 0{,}72.$

II. VARIABLE ALÉATOIRE

1. Définition

Exercice de fixation

1) $L1 \rightarrow Vrai;\quad L2 \rightarrow Faux;\quad L3 \rightarrow Vrai.$

Notation

Exercice de fixation

1) a) $(X = 1) = \{2; 4; 6\}$.

b) $(X = 0) = \{1; 3\}$.

c) $(X < 1) = \{1; 3; 5\}$.

d) $(X > 2) = \{\quad\}$.

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

2.1- Définition

Exercice de fixation

1) $X(\Omega) = \{-2; 0; 1\}$.

$P(X = -2) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$;

$P(X = 0) = P(\{1:3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et

$P(X = 1) = P(\{2; 4; 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

x_i	-2	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

2.2- Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Exercice de fixation

1) $E(X) = -2\times0{,}1 + 1\times0{,}5 + 6\times0{,}07 + 9\times0{,}06 + 10\times0{,}08 + 14\times0{,}19$.

$E(X) = 4{,}72$.

2.3- Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Exercice de fixation

1) Calculons $V(X)$et $\sigma(X)$.

- $V(X) = (-2)^2\times0{,}1 + 1^2\times0{,}5 + 6^2\times0{,}07 + 9^2\times0{,}06 + 10^2\times0{,}08 + 14^2\times0{,}19 - 4{,}72^2$;
  $V(X) = 31{,}2416$.
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{31{,}2416} \simeq 5{,}589$.

2.4- Fonction de répartition

Exercice de fixation

1) Soit F cette fonction.

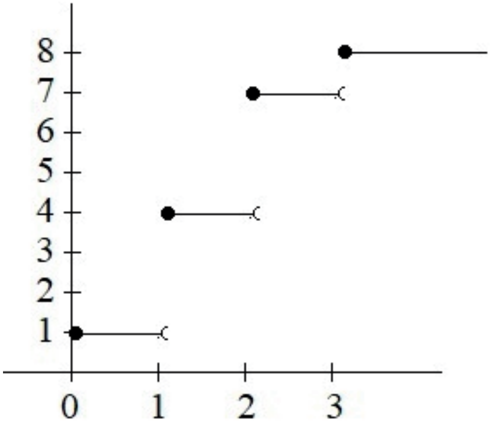
$F(X) = P(X < 0) = 0,\ si\ \ X < 0.$

$F(X) = P(X < 1) = \frac{1}{8},\ si\ 0 \leq\ X < 1.$

$F(X) = P(X < 2) = \frac{4}{8},\ si\ 1 \leq\ X < 2.$

$F(X) = P(X < 3) = \frac{7}{8},\ si\ 2 \leq\ X < 3.$

$F(X) = 1, \qquad si \geq 3.$



III. LOI BINOMIALE B(n, p).

1. Epreuve de Bernoulli
2. Schéma de Bernoulli
3. Loi binomiale
   Définition
   Propriété

Exercices de fixation

1) Soit X le nombre de réponses ''Oui''.
   $X \longmapsto \mathcal{B}\left(10; \frac{9}{11}\right)$.
   Donc $P(X = 6) = C_{10}^{6}\left(\frac{9}{11}\right)^{6}\left(\frac{2}{11}\right)^{4} \simeq 0{,}17$.

2) À chaque tir, il y a 2 résultats : la cible est atteinte→ $succès$ ou non→ $échec$. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli. Cette épreuve est répétée 3 fois et à chaque fois, la probabilité de succès est 0,7.
   Dons X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$et $p = 0{,}7$.

1. Calculons l'espérance de X.

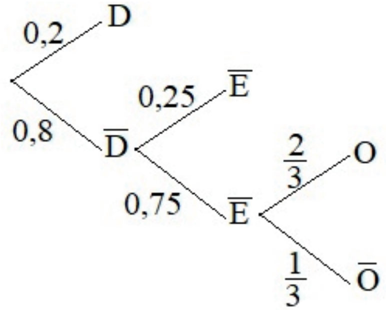
1) 1. $E(X) = np = 3\times 0{,}7 = 2{,}1$.
   2. Calculons la variance et l'écart-type de X.

- $V(X) = nP(1 - P) = 3\times 0{,}7\times 0{,}3 = 0{,}21$.
- $\sigma(X) = \sqrt{0{,}21} \simeq 0{,}458$.

2) P = $C_{10}^{6}(\frac{9}{11})^{6}(\frac{2}{11})^{4}$

EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

1) 1. Arbre de choix

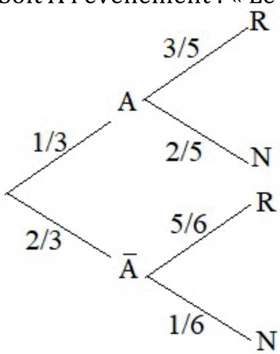


2. a) C'est $p(\overline{D} \cap E \cap \overline{D}\ ) = 0{,}8 \times 0{,}75 \times \frac{1}{3} = 0{,}2$.

   b) C'est $p(\overline{D} \cap E \cap O) = 0{,}8 \times 0{,}75 \times \frac{2}{3} = 0{,}4$.

3. C'est $p(D) + p(\overline{D} \cap E \cap O) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$.

2) Soit A l'événement : « Le chiffre obtenu est 2 ou 6. »



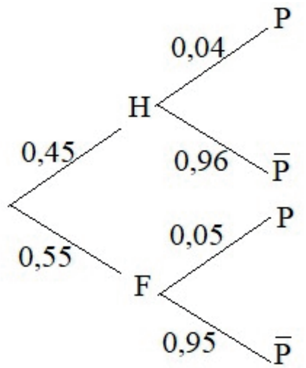
La probabilité cherchée est.

$$p(N) = p(A \cap N) + p(\overline{A}\ \cap N)$$

$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{45}$.

$p_N(A) = \frac{p(A \cap N)}{p(N)} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{45}{11} = \frac{6}{11}$.

3)



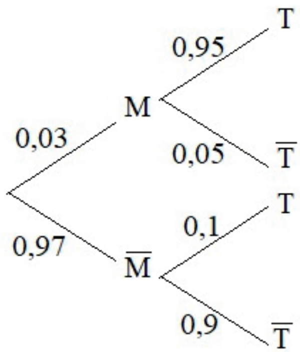
1. $p(A) = p(H \cap P) + p(F \cap P)$

$= 0{,}45 \times 0{,}04 + 0{,}55 \times 0{,}05$

$= 0{,}0455.$

2. $p(H/p) = \frac{p(H \cap p)}{p(p)} = \frac{0{,}45 \times 0{,}04}{0{,}0455} \simeq 0{,}39.$

4)



1. a) $p(M \cap T) = 0{,}03 \times 0{,}95$

$= 0{,}0285.$

b) $p(\bar{M} \cap T) = 0{,}97 \times 0{,}1$

$= 0{,}097.$

c) $p(T) = p(M \cap T) + p(M \cap \bar{T})$

$= 0{,}0285 + 0{,}97$

$= 0{,}1255.$

2. $p(M/T) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)}$

$= \frac{0{,}0285}{0{,}1255} \simeq 0{,}227.$

3. $p(\overline{M}/T) = \frac{p(\overline{M}\cap T)}{p(T)}$

$p(\overline{M}/T) = \frac{0{,}097}{0{,}1255} \simeq 0{,}7729.$

4. $p(M/\overline{T}) = \frac{p(M\cap\overline{T})}{p(T)}$

$p(M/\overline{T}) = \frac{0{,}03\times0{,}05}{1-0{,}1255} \simeq 0{,}0017.$

5. $p(\overline{M}/\overline{T}) = \frac{p(\overline{M}\cap\overline{T})}{p(T)}$

$p(\overline{M}/\overline{T}) = \frac{0{,}97\times0{,}9}{1-0{,}1255} \simeq 0{,}998.$

5) 1. Lorsqu'on prélève une règle, il y a 2 possibilités : soit elle est en panne , soit ne l'est pas.

À chaque prélèvement, la probabilité d'être en panne est la même à 0,1. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8 \ \ et \ \ p = 0{,}1$.

2. Calculons la probabilité de chacun des événements.

- $p(A) = p(X = 0) = 0{,}9^8 \simeq 0{,}43.$
- $p(B) = p(X = 2) = C_8^2 0,,1^2\times0{,}9^6.$
  $p(B) \simeq 0{,}1488.$
- $p(C) = 1 - p(X = 0) \simeq 0{,}57.$

3. $E(X) = np = 8\times0{,}1 = 0{,}8.$

En moyenne, une règle sur 8 est une panne lors du contrôle.

6) 1. Soit A cet événement.

$$p(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{C_3^1\times C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}$$

$p(A) = \frac{9}{100} + \frac{1}{100} + \frac{36}{100} = \frac{46}{100} = 0{,}46.$

2. a) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}.$

k	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	0,03	0,24	0,46	0,24	0,03

b) Soit Y le gain.

$Y(\Omega) = \{-1500;\ -900;\ -300;\ 300;\ 900\}.$

k	−1500	−900	−300	300	900
$p(X = k)$	0,03	0,24	0,46	0,24	0,03

$$E(Y) = -300$$

$E(Y) \neq 0$. Donc le jeu n'est pas équitable.

3. La probabilité d'un succès est : $p = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

Soit X le nombre de fois où 2 boules blanches sont tirées.

$X \longmapsto \mathcal{B}(10; 0{,}3)$.

La probabilité demandée est :

$$p(X \geq 2) = 1 - \big(p(X = 0)\big) + p(X = 1)$$
$$= 1 - (0{,}7^{10} + C_{10}^1 0{,}3 \times 0{,}7^9)$$

$\simeq 0{,}85$.

7) 1. a) Il faut tirer une boule blanche de U_1 puis une blanche de U_2, ou bien une boule noire de U_1 puis une noire de U_2.

$p(A) = \frac{n}{n+5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{n+2}{n+3}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty}$; p$(A) = \frac{3}{4}$.

2. Il faut tirer une boule noire de U_1 puis une blanche de U_2.

$p(B) = \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{4(n+3)}$.

3. a) Tant que n ne dépasse pas 10, le joueur ne gagne rien ou gagne un montant inférieur ou égal à sa mise. Donc il n'a pas intérêt à jouer.

b) $X(\Omega) = (-20; n - 20; 2n - 20)$.

$$p(X = -20) = \frac{n}{n+3} \times \frac{1}{4} = \frac{n}{4(n+3)}$$

$$p(X = n - 20) = \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{n+2}{n+4}$$

$p(X = 2n - 20) = p(B)$.

k	-20	$n - 20$	$2n - 20$
$p(X = k)$	$\frac{n}{4(n+3)}$	$\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$	$\frac{6}{4(n+3)}$

c) $E(X) = \frac{1}{4(n+3)}[-20n + 3(n-2)(n+2) + 6(2n-20)]$

$E(X) = \frac{3n^2 - 62n - 240}{4(n+3)}$.

d) $E(X) > 0 \Leftrightarrow 3n^2 - 62n - 240 > 0$;

$$\Delta = 6724 = 82^2$$

$E(X) > 0 \Leftrightarrow n > 24$.

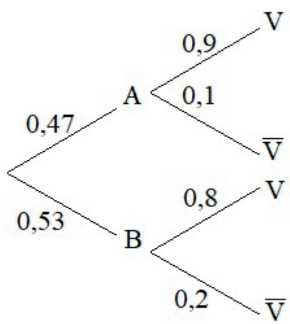
Donc le jeu est favorable au joueur dès que $n = 25$, c'est-à-dire que lorsque U_1 contient au moins 25 boules blanches.

8) $X \longmapsto \mathcal{B}(0{,}01;10)$

1. $p(X=0)=(1-0{,}01)^{10}\simeq 0{,}9$.
2. $p(X=5)=C_{10}^{5}0{,}01^{5}\times 0{,}99^{5}$
$\simeq 6\times 10^{-8}$.
3. $P(E)=1-p(X=0)\simeq 0{,}1$.
4. a) $p(X=3)=C_{10}^{3}0{,}01^{3}\times 0{,}99^{7}$
$\simeq 0{,}00011$.
b) $p(X\leq 3)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)$.
$p(X\leq 3)\simeq 0{,}99$.
La probabilité qu'il y ait au plus 3 ordinateurs e panne est d'environ 0,99.
c) $E(X)=n\times p=0{,}01\times 10=0{,}1$.
En moyenne, il y a 0,1 ordinateur en panne sur les 50.

SITUATIONS D'ÉVALUATION

1. Construction de l'arbre de probabilité



$p(V)=p(A\cap V)+p(B\cap V)=P(A)\times P_A(V)+P(B)\times P_B(V)$
$p(V)=0{,}47\times 0{,}9+0{,}53\times 0{,}8=0{,}847$.

b) $p_V(A)=\frac{p(A\cap V)}{p(V)}$
$p_V(A)=\frac{0{,}47\times 0{,}9}{0{,}847}=\frac{423}{847}$.
$p(A)=p(A\cap V)+p(B\cap \overline{V})$
$p(A)=0{,}47\times 0{,}9+0{,}53\times 0{,}2=0{,}529$.

3 DÉRIVABILITÉ

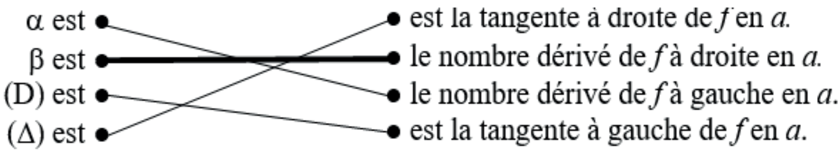
RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

I. DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION EN a.

1. Définition

Exercices de fixation

1)



2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} ; \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 0} ; \frac{x^2-x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 0} ; x = 1.$

$f_1'(1) = 1.$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} ; \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} ; \frac{-x^2+x}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} ; -x = -1;$ $f_g'(1) = -1.$

2. Propriété

Exercices de fixation

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{2x}{x} = 2.$

$f_g'(0) = 2.$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x = 0.$

$f_f'(0) = 0.$

$f_g'(0) \neq f_f'(0)$; donc f n'est pas dérivable en 0.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{g(x)-g(2)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{-x^2+2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} -x = -2.$

$g_g'(2) = -2.$

g'_d : $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} \frac{f(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} \frac{x^2-2x}{x} = \lim\limits_{x\to 2} \quad x = 2.$

$g'_d(x) = 2.$

$g'_g(2) \neq g'_f(2)$; donc g n'est pas dérivable en 2.

3. Tangente verticale

Propriété

Exercice de fixation

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty.$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{\sqrt{-x}}{x}$$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} -\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

$= -\infty.$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$et$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$; donc f admet une tangente

verticale en 0.

Demi-tangente

Exercice de fixation

1) 1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{x-x^2}}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^2}{(x-1)\left(\sqrt{1-x^2}\right)}.$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\infty.$

f admet une demi-tangente dirigée vers le haut.

2. $D_f = [-1; 1]$

$$\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$$

$= \lim_{x \to -1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$= +\infty$.

f admet en -1, une demi-tangente dirigée vers le haut.

4. Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Exercice de fixation

1) D'après l'exercice précédent, f n'est pas dérivable à droite de – 1 et f n'est pas dérivable à gauche de 1. En définitive, f est dérivable sur $]-1; 1[$.

5. Tableau récapitulatif

Exercice de fixation

1) 1. $f'(x) = 3x^2$.
   2. $f'(x) = \frac{-4}{x^5}$.
   3. $f'(x) = 0$.

6. Dérivées et opérations

Exercice de fixation

1) 1. $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
   2. $f'(x) = 12x^2$.
   3. $f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$$= \frac{-3(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}.$$

   4. $f'(x) = \frac{-2sinxcosx}{cos^4x}$.

$f'(x) = \frac{-2sinx}{Cos^3x}$.

7. Sens de variation

Propriété

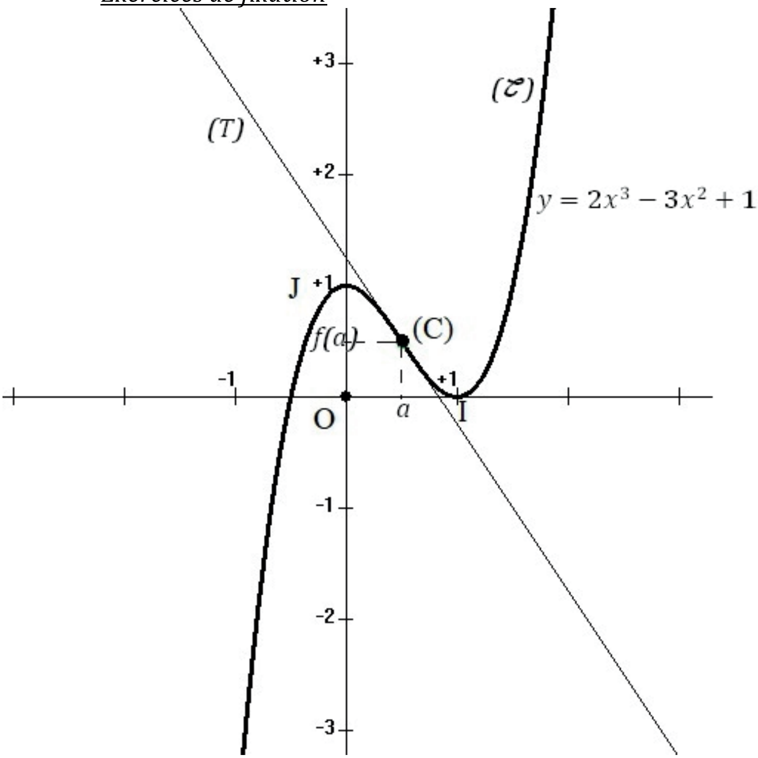
Exercice de fixation

1) 1. $f'(x) = 2x$; $f'(x) > 0, \forall x \in]0; +\infty[$, donc f est croissante sur $]0; +\infty[$.
   2. $f'(x) = -x^2$; $f'(x) < 0, \forall x \in 3$, donc f est décroissante sur 3.

3. $f'(x) = 10x^4 + 3$; $f'(x) > 0, \forall x \in 3$, f est croissante sur 3.

8. Dérivées successives
Définition
Exercice de fixation
1) 1. $f'(x) = 4x^3 + 6x$; $f''(x) = 12x^2 + 6$.
2. $f'(x) = 3x^2 + 8x + 2$; $f''(x) = 6x + 8$; $f'''(x) = 6$; $f''''(x) = 0$
3. $f'(x) = cosx$; $f''(x) = -sinx$; $f'''(x) = -cosx$; $f''''(x) = sinx$.
4. $f'(x) = -sinx$; $f''(x) = -cosx$; $f'''(x) = sinx$; $f''''(x) = cosx$.

9. Point d'inflexion
Propriété
Exercices de fixation



1) $f'(x) = 6x^2 - 6x$
$f''(x) = 12x - 6 = 6(2x - 1)$.

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

$\forall x \in \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[,\ f''(x) < 0.$

$\forall x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[,\ f''(x) > 0.$

f''n'annule en changeant de signe, donc le point de coordonnées $\left[\frac{1}{2} ; \frac{29}{a}\right]$
est un point d'inflexion.

2) $f'(x) = 4x^3$; $f''(x) = 12x^2$; $f''(x) > 0$, donc$f$ n'a pas de point d'inflexion.

II. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE.

1. Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $f'(x) = 4\times 2(2x-1)^3$
$= 8(2x-1)^3.$
2. $f'(x) = -2sin(2x-3).$
3. $f'(x) = 3x\left(1 + tan^2(3x^2+5)\right)$
4. $f'(x) = \frac{9\times 3}{(x+2)^2}\left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^2$
$= \frac{27}{(x+2)^2}\left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^2.$

2. Nombre dérivé de la réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. f est une bijection sur 3.
$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$; $f^{-1}(1) = 1$;
$f'(x) = 3x^2$
$f'(1) = 3$; $f'(1) \neq 0$;
donc f est décroissante en 1 et $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}.$

2. $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$f'(0) = 1$$
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{1}$$
$= 1.$

III. INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS

Propriétés

Exercice de fixation

1) $f(x) = cosx$; $f'(x) = -sinx$

$\forall x \in [a; b]$; $|f'(x)| \leq 1$, donc $|f(b) - f(a)| < |b - a|$

$|cosb - cosa| < |b - a|$.

EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

1) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $|f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{100}}$; $|f'(x)| < \frac{1}{2\times 10}$

$\left|\sqrt{101} - \sqrt{100}\right| < \frac{1}{20}|101 - 100|$; $\left|\sqrt{101} - \sqrt{100}\right| < \frac{1}{20}$

$-\frac{1}{20} + 10 < \sqrt{101} < \frac{1}{20} + 10$; $-9{,}95 < \sqrt{101} < 10{,}05$

$10 < \sqrt{101} < 10{,}05$.

2) 1. $g'(x) = 1 + tan^2x$; 2. $g''(x) = 2(1 + tan^2x)tanx$

$g'(x) > 0$; $\forall x \in \left\{0; \frac{\pi}{4}\right\}$; $g'(0) = 1$

$g(0) \leq g'(x) \leq g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

$1 \leq g'(x) \leq 2$;

$[0; \pi]$. $1(x - 0) \leq tanx \leq 2(x - 0)$.

3) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$; $f''(x) \leq 0$; $|f'(x)| \leq f'(0)$

$\frac{1}{\sqrt{6}} \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{\sqrt{6}} < f(x) - 1 < \frac{1}{2}$.

$$\frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} = \frac{x}{\sqrt{6}} < f(x) - 1 < \frac{x}{2}$$

$$1 + \frac{x}{\sqrt{6}} < f(x) < 1 + \frac{x}{2}$$

$1 + \frac{x}{\sqrt{6}} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}$
$f''(x)$	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ $\searrow$ 1

4) 1. a) $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1

b) h est strictement décroissante.

2. a) $f(x) = h(x) - x$;

$$f'(x) = h'(x) - 1 < 0$$

$h(x) = x$ admet une solution unique α.

5) 1. $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $f''(x) = \frac{+2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$f^n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

2. $g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$; $g''(x) = \frac{+2}{(1+x)^3}$.

$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(1+x)^{n+1}}$.

6) 1. $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f'(0) = -3 = b$

$f(0) = 1$; $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + 1$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 3$.

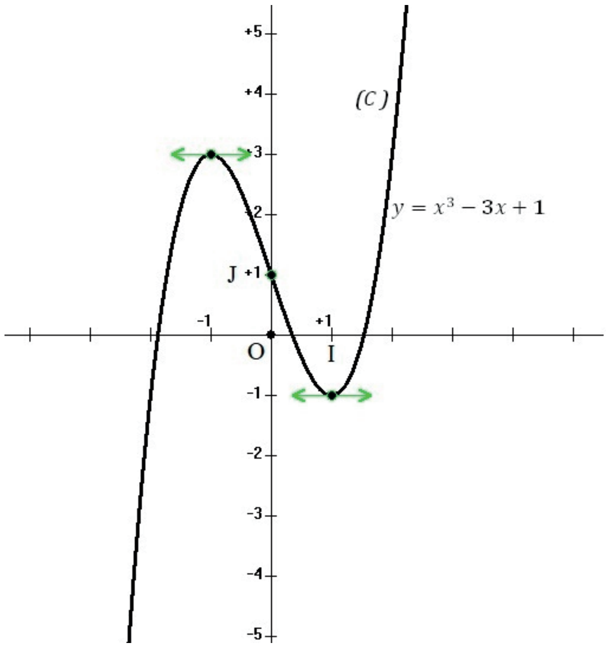
$f'(1) = f'(-1)$; $3 + 2a - 3 = 3 - 2a - 3$

$4a = 0$; $a = 0$.

2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+3$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



7) 1. $f'(x) = \frac{a-4}{(2x+1)^2}$; $f(0) = a - 4 = -5 \Longrightarrow a = -1$;
$f(x) = \frac{-x+2}{2x+1}$.
2. $f'(x) = \frac{-5}{(2x+1)^2}$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$-2 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow -2$

8) 1. $f(-3) = 1$;$9 - 3a + b = -4$

$$-3a + b = -13 \begin{cases} -3a + b = 13 \\ a + b = 15 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x-1) - (x^2 + ax + b)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + ax - a - x^2 - ax - b}{(x-1)^2}$$

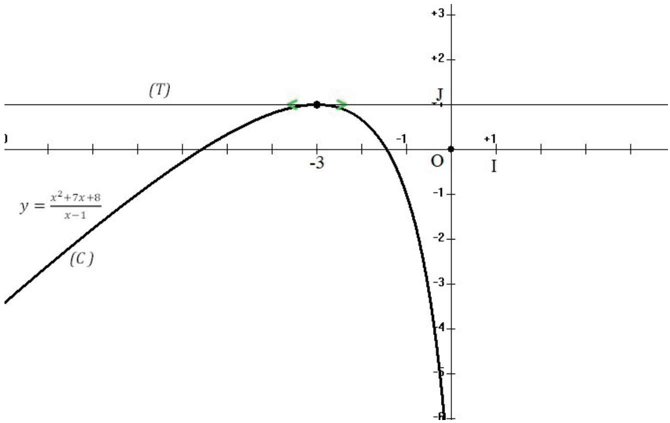
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - a - b}{(x-1)^2}$$

$$f(-3) = \frac{9 + 6 - a - b}{16} = 0$$

$a + b = 15f(x) = \frac{x^2+7x+8}{x-1}$.

2. Tableau de variation

3. Tracé de la courbe.



9) 1. a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0; 2\}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$.

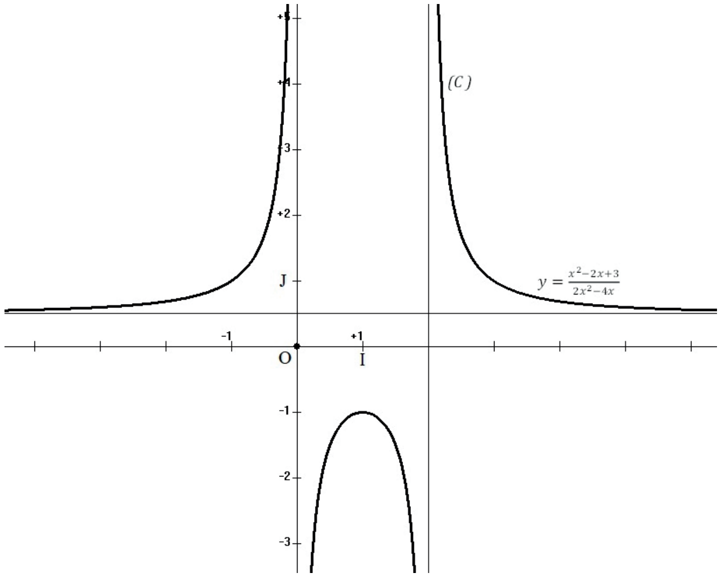
2. Calculons $f'(x)$.

$f'(x) = \frac{-12(x-1)}{(2x^2-4x)^2}$.

3. Tableau de variation.

x	0			1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↗ $\frac{1}{2}$		$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$\frac{1}{2}$ ↘ $+\infty$

4. Représentation graphique.



10) 1. a) $D_f = \mathcal{3}\backslash\{2\}$.

$\forall x \in]-\infty; -3[\,;\ f(x) = -x + 3 + \frac{1}{x-2}$.

$\forall x \in]3; +\infty[\,;\ f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$.

b) Calculons les limites.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$;

$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$;

$c)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x-3) = 0\ ;\ y = x - 3\ \ asymptote$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x+3) = 0\ ;\ y = -x + 3\ \ asymptote.$

2. a)

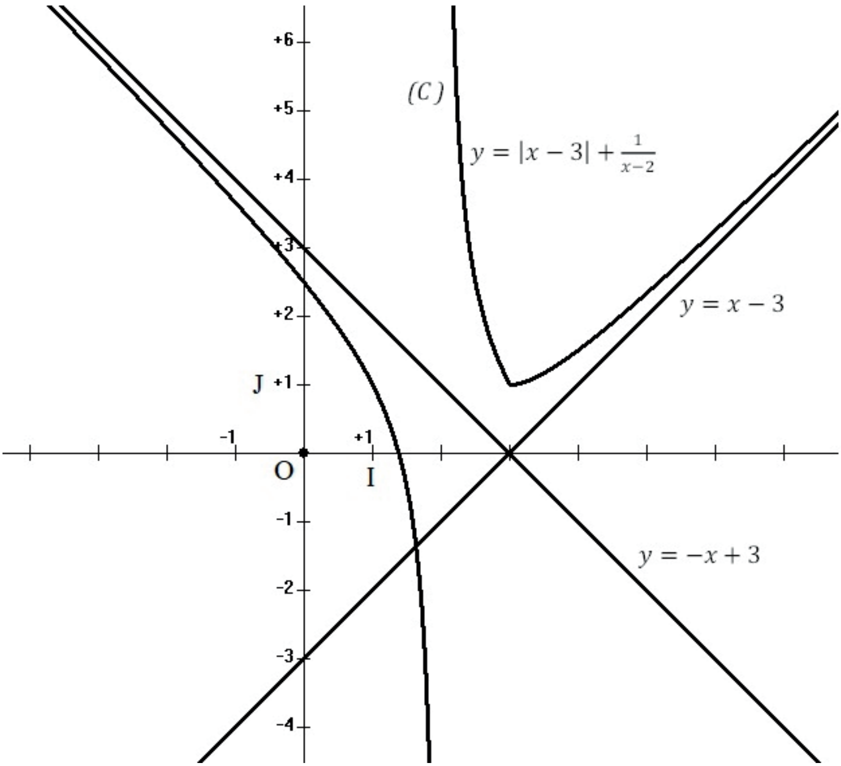
$\forall x \in]-\infty; -3[,\ f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-2)^2}$.

$\forall x \in]-3;\ +\infty[,\ f'(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

3. Tableau de variation.

x	$-\infty$		-2			3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. Construisons la courbe (C).



11) 1. a) $D_f = 3\backslash\{2\}$.

b) $\lim\limits_{x\to --\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to \mp\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

2. a) $\forall x \in \left]-\infty; 2\right[$; $f(x) = x - 3 - \frac{1}{x-2}$;

$\forall x \in \,]2;+\infty[\,;\ f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$;

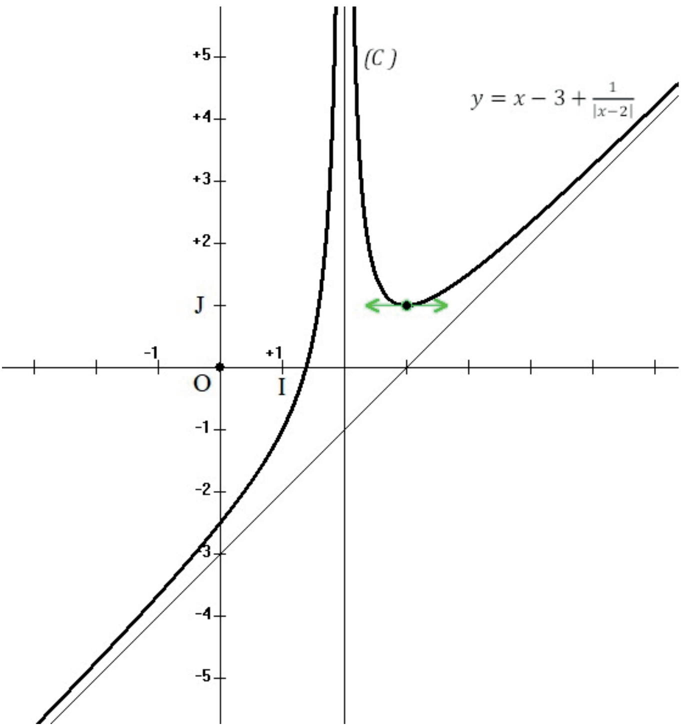
$\forall x \in \,]-\infty;2[\,;\ f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$;

$\forall x \in \,]2;+\infty[\,;\ f'(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$.

b) Tableau de variation.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Construisons la courbe (C).



SITUATIONS D'ÉVALUATION

1) $g(\theta) = 24B + MH$sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$= \frac{10}{Cos\ \theta} + 6 - \frac{5\ sin}{cos\theta}$$

$$= \frac{10 + 6cos\theta - 5sin\theta}{cos\theta}$$

$$= 6 + \frac{-5\ sinx + 10}{cosx}$$

$$= 6 + \frac{10 - 5sinx}{cosx}$$

$g'(x) = \frac{5(2sin\theta - 1)}{cos^2\theta}$.

2) $B(x) = 3x - x^2 + 81x$

$$B(x) = -x^2 + 84x$$

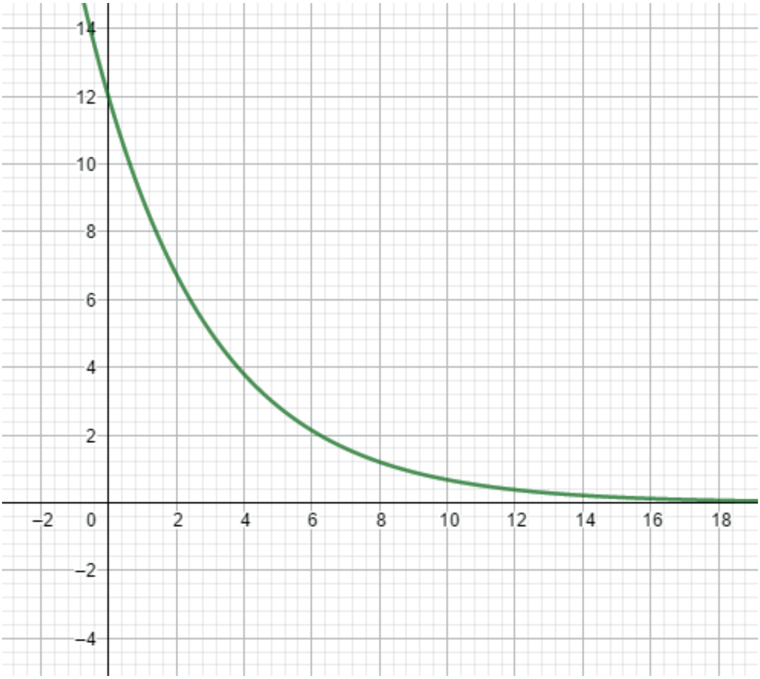
$$B'(x) = -2x + 84$$

$B'(x) = 0\ ;\ x = \frac{84}{2} = 42.$

x	0		42		84
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$		↗		↘	

Le bénéfice est maximal si $X = 42$.

3) f(x) est égal plutôt à $12 \times (0{,}75)^x$



14
12
10
8
6
4
2
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
−2
−4

4 PRIMITIVES

RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

I. DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition

Exercices de fixation

1) $g'(x) = 2x - 3$, donc g est une primitive de f sur 3.

2) $F'(x) = 2x$; $G'(x) = 2x + 5$; $H'(x) = 2x + 5$; $Q'(x) = 2x + 5$.
$P'(x) = 2x + 5 - \frac{1}{x^2}$.
Les primitives de f sont G ; H et Q.

Propriété 1

Exercices de fixation

1)

$f(x) = x^3 - 1$ $\qquad$ $v(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

2) $\boxed{Vrai}$

Propriété 2

Exercice de fixation

1) $F'(x) = x^2 - x$; d'autres primitives de f.
$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$; $H(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2$.

Propriété 3

Exercices de fixation

1) 1. $\boxed{Faux}$
2. $\boxed{Vrai}$

2) 1. $G(x) = x^2 - x + c$
$G(0) = 5$, donc c = 5.
$G(x) = x^2 - x + 5$.
2. $H(x) = x^2 - x + K$
$H(1) = K = \frac{3}{2}$.
$H(x) = x^2 - x + \frac{3}{2}$.

II. PRIMITIVES DE FONCTIONS USUELLES

Exercices de fixation

1) a) $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + c$;

b) $F(x) = \frac{x^4}{4} + c$;

c) $F(x) = \frac{1}{4x^4} + K$;

d) $F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$.

2) a) $F(x) = 2\sqrt{x} + c$;

b) $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$;

c) $F(x) = Cos\ x + c$;

d) $F(x) = -Sinx + c$.

III. PROPRIÉTÉS

Propriété 1

Exercices de fixation

1) a) $F(x) = \frac{x^2}{2} + cosx$;

b) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}$;

c) $F(x) = cosx - sinx + c$.

2) a) $F(x) = 7cosx$;

b) $F(x) = \frac{4}{3}x^2 + c$;

c) $F(x) = -\frac{5}{x} + c$.

d) $F(x) = \frac{18}{4}x^4 + c$

$= \frac{9}{2}x^4 + c$.

3) a) $F(x) = \frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x + c$;

b) $F(x) = 3x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + c$;

c) $F(x) = 4cosx - \frac{1}{3x}$.

Propriété 2

Exercice de fixation

1) a) $F(x) = cos(2x) + c$;

b) $F(x) = \frac{4}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$;

c) $F(x) = -\frac{1}{3x+1} + c$.

IV. TABLEAU RÉCAPITULATIF DES PRIMITIVES

Exercice de fixation

1) a) $F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x + 6)^4$;

b) $F(x) = -\frac{1}{(x^2+3x+3)^2}$;

c) $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + x + 1} + c$;

d) $F(x) = \frac{1}{4}cos^4x + c$.

EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

1) a) $F(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + c$;

b) $F(x) = -x^5 + x^3 + 8x + c$.

2) a) $F(x) = \frac{1}{3}(x^4 + 1)^3 + c$

b) $F(x) = \frac{4}{3} \times \frac{-1}{(3x-2)^2} + c$.

3) a) $F(x) = \frac{2}{x^2+x-2} + c$

b) $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{sinx} + c$.

4) $F(x) = cosx(1 - sin^2x) - \frac{1}{2}cosx$

$F(x) = cosx - cosxsin^2x - \frac{1}{2}cosx$.

$$F(x) = sinx - \frac{sin^3x}{3} - \frac{1}{2}sinx$$

$$F(x) = \frac{1}{2}sinx - \frac{sin^3x}{3} + c$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + c = 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + c = 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{12} + c = 0$$

$-c = \frac{2\sqrt{2}}{12}$; $c = -\frac{\sqrt{2}}{6}$.

5) 1. $f(0) = -1$; $f(0) = b + c = -1$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} 2x^3 - 4x^2 + 2x & 2x - 3 \\ \hline -3x^2 + 6x - 1 & \\ -3x^2 + 6x + 3 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

$f(x) = 2x - 3 + \frac{2}{(x-1)^2}$.

2. $F(x) = x^2 - 3x - \frac{2}{x-1} + c$

$$F(0) = 0 + 2 + c = 0$$

$c = -2$.

$F(x) = x^2 - 3x - \frac{2}{x-1} - 2$.

6) 1. $D_f =]-\infty; 3]$

2. $F'(x) = (2ax + b)\sqrt{3-x} + (ax^2 + 6x + c)\times\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$

$a = \frac{5}{2}$; $b = \frac{8}{3}$; $c = \frac{16}{3}$.

7) 1. $f(x) = \frac{a(x+3)+b}{(x+3)^3}$

$$= \frac{ax + 3a + b}{(x+3)^3}$$

$$a = 2 \ ; \quad 6 + b = 3$$

$b = -3$.

$f(x) = \frac{2}{(x+3)^2} - \frac{3}{(x+3)^3}$.

2. $F(x) = -\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{(x+3)^2} + c$.

3. $F(-4) = -\frac{2}{-1} + \frac{3}{2} + c = 0$

$+2 + \frac{3}{2} + c = 0$;

$$\frac{7}{2} + c = 0$$

$c = -\frac{7}{2}$.

$F(x) = -\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2(x+3)^2} - \frac{7}{2}$.

8) 1. $Sin^2x = (1 - cos^2x)sinx = sinx - sinxcos^2x$

2. $H(x) = -cosx + \frac{cos^3x}{3} + c$.

3. $H(\pi) = -cos\pi + \frac{(-1)^3}{3} + c$

$$= -1 - \frac{1}{3} + c$$

$$= \frac{-4}{3} + c = \frac{2}{3}$$

$$c = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$$

$c = 2.$

$H(\pi) = -cos\pi + \frac{(-1)^3}{3} + 2.$

SITUATIONS D'ÉVALUATION

1) On sait que la consommation est de 25 litres pour 100 km lorsque le car roule à 60 km/h.

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{300}{v^2}$$

$= \frac{v^2-900}{v^2}$.

Le minimum est atteint pour $v = 30$.

La voiture consommera 20 litres pour 100 km en roulant à 30 km/h.

Le coût minimum de carburant sera de 180 000 F pour le voyage.

5 FONCTION LOGARITHME

RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Définition

Exercice de fixation

1) 1. $\boxed{Faux}$
   2. $\boxed{Vrai}$
   3. $\boxed{Faux}$.

Propriété fondamentale

Exercices de fixation

1) a) $ln2 + ln5 = ln10$
   b) $ln\left(3 - \sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right) = ln(9 - 5)$
   $= ln4.$
   c) $ln14 + ln\frac{2}{7} = ln\left(14\times\frac{2}{7}\right)$
   $= ln4.$

2) a) $ln(2\times3) = ln2 + ln3$
   b) $ln4\times\sqrt{5} = ln4 + ln\sqrt{5}$
   c) $ln(5\pi) = ln5 + ln\pi.$

Propriété

Exercices de fixation

1) a) $ln(72) = 2ln3 + 3ln2.$
   b) $\ln\frac{32}{343} = 5ln2 - 3ln7$
   c) $ln(625) = 4ln5$
   d) $ln(0{,}8) = 3ln2 - ln10.$
   e) $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{18}}\right) = -\frac{1}{2}(ln2 + 2ln3)$
   f) $\ln(e^2) + [lne]^2 + 2\ln(e^3) = 9.$

2) $A = -ln3.$
   $B = ln2.$
   $C = ln2.$

II. ÉTUDE DE LA FONCTION ln

1. Conséquence de la dérivée

Exercice de fixation

1) 1. $2 < 5$, donc $ln2 < ln5$;

2. $ln\sqrt{3} > ln\frac{\pi}{2}$.
3. $ln17 > ln8\sqrt{2}$.

2. Limites de fonction ln

Exercices de fixation

1) La courbe de la fonction ln admet pour branche parabolique (OI).

2) 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - lnx = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \left(1 - \frac{lnx}{x}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

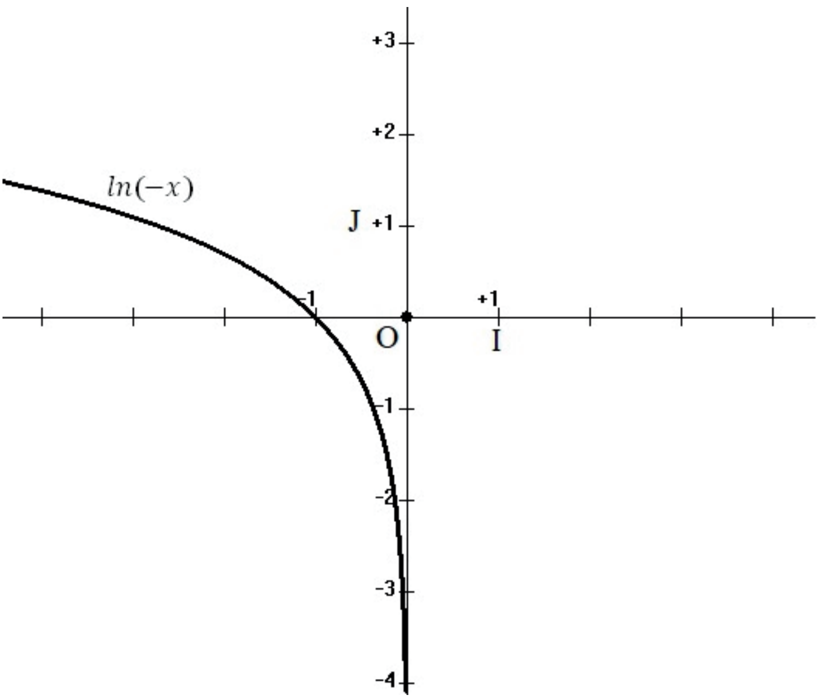
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} \times \frac{lnx}{x} = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$.

3. Courbe représentative

Exercice de fixation

1) Construisons la courbe représentative de la fonction $f(x) = ln(-x)$.



III. FONCTION DE TYPE : lnou ou ino$|u|$

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $f'(x) = \frac{3}{3x-2}$.

   2. $f'(x) = \frac{2-2x}{3x-x^2}$.

   3. $f'(x) = \frac{cosx}{sinx}$.

2) 1. $f'(x) = \frac{1}{x}$.

   2. $f'(x) = \frac{2-2x}{2x-x^2}$.

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $F(x) = ln(2x+3)$.

   2. $F(x) = ln(x^2+x+1)$.

2) 1. $F(x) = ln(cosx) + c$.

   2. $F(x) = ln(sinx) + c$.

IV. FONCTION LOGARITHME DE BASE a(a$\in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$)

Définition

Exercice de fixation

1) 1. $\boxed{Vrai}$

   2. $\boxed{Vrai}$

   3. $\boxed{Faux}$.

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $Log_2(4) + log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{ln4}{ln2} + \frac{ln\left(\frac{1}{2}\right)}{ln2}$

   $= \frac{ln2}{ln2} = 1$.

   2. $Log_3(9) - log_3(27) = log_3\frac{9}{27} = log_3\frac{1}{3}$

   $= -log_3(3)$

   $= -1$.

Logarithme décimal

Définition

Exercices de fixation

1) 1. $\boxed{Vrai}$

   2. $\boxed{Vrai}$

   3. $\boxed{Vrai}$

4. $\boxed{Faux}$
5. $\boxed{Faux}$.

2) Il suffit de remplacer log$x$ par $\frac{lnx}{ln10}$

EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

1) Cochons.

$a =$	$ln9$ ☐	$ln\frac{12}{27}$ $\boxed{X}$	$ln\left(\frac{10}{9}\right)$ ☐
f s'annule pour	e et e^3 $\boxed{X}$	0 et e^3 ☐	1 et 3 ☐
f' s'annule pour	$\frac{1}{4}$ ☐	e^2 $\boxed{X}$	aucun nombre réel ☐
Une primitive de g sur $[0; 1]$ est	$x \mapsto 3ln(2-x)$ $\boxed{X}$	$x \mapsto 3ln(x-2)$ ☐	$x \mapsto -3ln(2-x)$ ☐
La limite en 0 de k est	1 $\boxed{X}$	0 ☐	$+\infty$ ☐
$h'(x) =$	lnx ☐	$-1 + lnx$ ☐	$1 + lnx$ $\boxed{X}$

2) 1. $D_g = \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = 0$;
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x) = 0$ donc g est contigüe en O.
3. a) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{g(x)-g(-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{ln(-x)}{x+1} = -1.$
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{g(x)-g(-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1) = 0.$

b) $g'_d(-1) \neq g_g(-1)$, donc g n'est pas dérivable en –1 mais admet deux demi-tangentes en –1.

3) 1. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $y = 0$ asymptote.

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 + lnx) \times \frac{1}{x} =- \infty.$

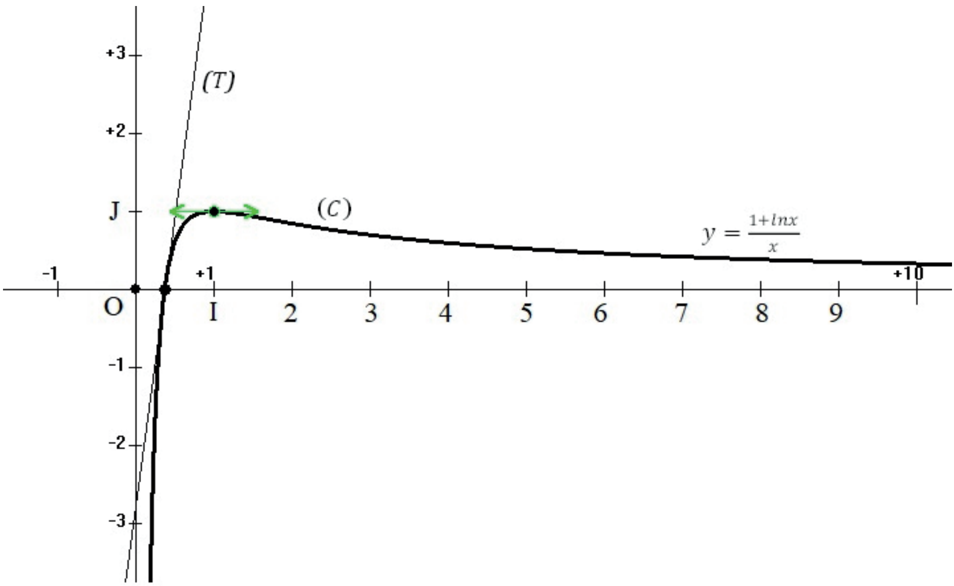
$$y = \frac{1}{e^{-2}}(x - e^{-1})$$

$y = e^2(x - e^{-1})$.

2. a) $f'(x) = \frac{1-1-lnx}{x^2} = -\frac{lnx}{x^2}$.

   b) Tableau de variation

x	0	1	$-\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	▨	$-$
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗	1	↘ 0



4) 1. $\lim_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$et $f(0) = 1$; donc f est continue en 0.

2. a) $g'(x) = \frac{x^2}{x+1} - x^2$; $\forall x \in [0; +\infty[$, $g'(x) < 0$; $g(0) = 0$.

$$\forall x \in [0; +\infty[, g(x) < g(0) ; ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

   b) $h(x) = ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$, .

$h'(x) = \frac{x^2}{x+1}$; $\forall x \in [0;+\infty[$, h est croissante sur $]0;+\infty[$;

$h(0) = 0$, $ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$.

c) $\forall x \in [0;+\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$$-\frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Pour $x \neq 0$, $-\frac{1}{2} \leq \frac{ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$.

$\left|\frac{ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{2}\right| < \frac{x}{2}$et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$;

donc $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$; $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\frac{ln(1+x)}{x} - 1}{x} = -\frac{1}{2}$.

f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

3. a) $h'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$; h est décroissante et $h(0) = 0$;
$h(x) \leq 0$.

b) $\frac{\frac{x}{x+1} - ln(1+x)}{x^2} = f'(x)$, donc $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$; f est décroissante.

c)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$
$f(x)$	1 ↘	0

4. a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $y = 0$ est asymptote.

$$y = -\frac{1}{2}(x) + 1$$

$y = -\frac{1}{2}x + 1$.

5) 1. a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 4} f(x) = +\infty$.

b) $f'(x) = -2 - \frac{15}{(x-4)(x+1)}$; f est décroissante sur $]4;+\infty[$.

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (2x+5) = 0$; donc $y = -2x + 5$ est asymptote.

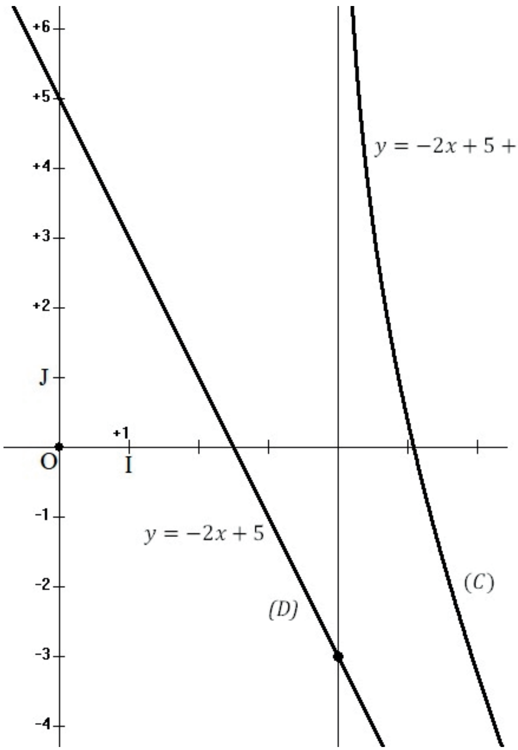
d) $f(x) - (-2x + 5) = 3ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$; ≥ 0.

(C)est au-dessus de (D).

Tableau de variation

x	4	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

2. Représentation de la courbe (C) et de la droite (D).



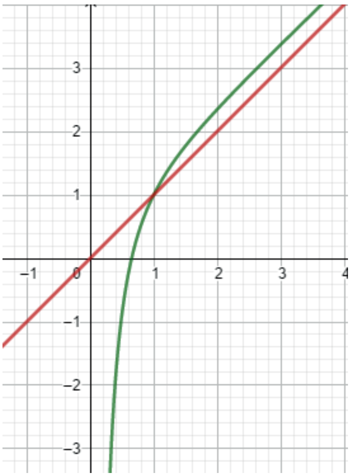
3. a) $G'(x) = ln(1 + x) + 1 - 1 = ln(1 + x)$.

b) $H'(x) = ln(x-4)$.
c) $f(x) = -2x + 5 + 3ln(x+1) - 3ln(x-4)$.
$F(x) = -x^2 + 5x + 3G(x) - 3H(x)$.
$F(x) = -x^2 + 5x + 3(x+1)ln(x+1) + (x-4)ln(x-4)$.
4. a) f est continue et strictement décroissante ; donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0.
b) $x_0 =$ 2,5

6) 1. Pour tout x élément de]0 ; +∞[, g'(x) = $\frac{2x^2-1}{x}$.
g est décroissant sur]0 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ [et croissant sur]$\frac{\sqrt{2}}{2}$; +∞[
donc g admet un minimum qui est atteint en $\frac{\sqrt{2}}{2}$
g($\frac{\sqrt{2}}{2}$) $= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} ln2$
2. a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ = - ∞ ; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ = + ∞
b) f(x) – x = $\frac{lnx}{x}$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x$ = 0 donc la droite d'équation y = x est asymptote à (C) en + ∞.
c) Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $f'(x)$ = 1 + $\frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times lnx}{x^2}$
Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $f'(x)$ = $\frac{x^2+1-lnx}{x^2}$
Pour tout x élément de]0 ; +∞[, $f'(x)$ = $\frac{g(x)}{x^2}$
d)
g est strictement positif sur]0 ; +∞[donc f est strictement croissante sur]0 ; +∞[.

x	0		+ ∞
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-∞	$\nearrow$	+ ∞

e)



7) 1. D_f =]-∞ ; 0[∪]3, +∞[

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x^2-3x)}{x} = \frac{\ln(x^2)}{x} + \ln(1-\frac{3}{x}) \times \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).

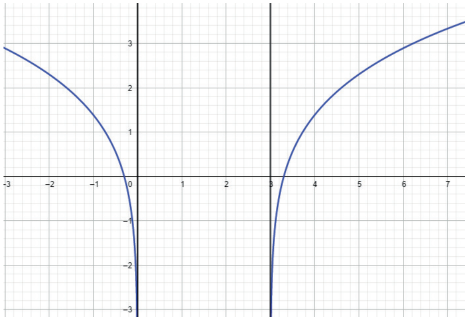
4. Pour tout x élément de]-∞ ; 0[∪]3, +∞[,

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$$

5.

x	- ∞	0		3	+∞
$f'(x)$	-			+	
$f(x)$	+∞ ↘	-∞		-∞ ↗	+∞

6.



8) 1. $D_f = \mathbb{R}$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x^2+x+1)}{x} = \frac{\ln(x^2)}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI).

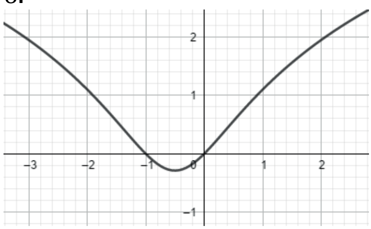
4. Pour tout x élément de $]-\infty\,;0[\cup]3,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

5.

x	$-\infty$				$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\frac{1}{2}$	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$		$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$		$+\infty$

6.



Situation d'évaluation

Exercice

Donne une réponse argumentée à la préoccupation de tes camarades.

(Supprimer tous ce qui vient après cette phrase)

pH = - log(5×10^{-7}) = -6,3

La solution est acide car pH < 7.

6 NOMBRES COMPLEXES

RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

I. FORME ALGEBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Propriété et définition
2. Forme algébrique d'un nombre complexe

2.1- Définition d'un nombre complexe

Exercices de fixation

1) Entourons la partie imaginaire du nombre complexe.
$c) \rightarrow -4$.

2) Déterminons la partie réelle te la partie imaginaire
$Re(z_1) = 0$et$Im(z_1) = 1$
$Re(z_2) = 7$et$Im(z_2) = -9$
$Re(z_3) = \frac{2}{3}$et $Im(z_3) = -\frac{5}{3}$.

3) 1. Pour cela, on a : $3 - x = 0$, c'est-à-dire $x = 3$;
2. Pour cela, on a : $2x - 1 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{2}$.

Dans le document la partie qui suit doit être déplacée. C'est une erreur.

2.2- Egalité de deux nombres complexes

Exercice de fixation

1) $z = 2 + i \Leftrightarrow 2 + (x - 1)i = 2 + i$
$\Leftrightarrow x - 1 = 1$
$\Leftrightarrow x = 2$.

3. Calcul dans C

3.1- Opposé d'un nombre complexe

Exercice de fixation

1) $-z_1 = -17 + 9i$; $-z_2 = i\sqrt{2}$; $-z_3 = 5 + 6i$.

3.2- Somme de deux nombres complexes

Exercices de fixation

1) 1. $z_1 + z_2 = 5 + 3i$;
2. $z_1 + z_2 = 1 - 5i$.
3. $z_1 + z_2 = -8 - 18i$.

1) 1. $z_1 + z_2 = -1 - i$;
2. $z_1 + z_2 = -9 + 5i$;
3. $z_1 + z_2 = 6 + 16i$.

3.3- Produit de deux nombres complexes

Exercice de fixation

1) 1. $z_1 \times z_2 = (4 + i)(5 + 2i) = 18 + 13i$;
2. $z_1 \times z_2 = (-4 + 3i)(-4 - 3i) = 7$;
3. $z_1 \times z_2 = (-2 - 4i)(-5 - 6i) = -14 + 32i$.

3.4- Inverse d'un nombre complexe

Exercices de fixation

1) 1. $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
2. $\frac{1}{-4+3i} = \frac{-4}{25} - \frac{3}{25}i$
3. $\frac{1}{-8+8i} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16}i$.

2) 1. $\frac{z}{z'} = \frac{3-5i}{2-i} = \frac{(3-5i)(2+i)}{5} = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$.
2. $\frac{z}{z'} = \frac{3+2i}{i} = (3 + 2i)(-i) = 2 - 3i$
3. $\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.5- Puissance d'un nombre complexe

Définition

Exercice de fixation

1) $(2 + 3i)^2 = 5 - 12i$

$$(2 + 3i)^{-2} = \frac{1}{(2 + 3i)^2} = \frac{1}{-5 + 12i} = \frac{-5}{169} - \frac{12}{169}i$$

$$(1 + i)^4 = -4$$

$(1 + i)^{-4} = \frac{1}{(1+i)^4} = -\frac{1}{4}$.

Propriété

Exercice de fixation

1) $i^{403} = i^{400+3} = -i$
$i^{2020} = 1^{4\times 505} = 1$
$i^{2022} = i^{2020+2} = -1$
$i^{2001} = i^{2000+1} = i$.

3.6- Produit nul

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $z \times z' \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$et $z' \neq 0$.

2. $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ et $z' = 0$;

Or $z' \neq 0$, donc $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

4. Module d'un nombre complexe

4.1- Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Exercices de fixation

1) $\overline{0} = 0$

$\overline{1 + i} = 1 - i$

$\overline{1 - i} = 1 + i$

$\overline{7} = 7$

$\overline{-19} = -19$

$\overline{3 - 4i} = 3 + 4i$

$\overline{-38 + 6i} = -38 - 6i$

$\overline{2i} = -2i$.

2) Posons $z = a + ib,\ a \in \mathbb{R}\ et\ \ b \in \mathbb{R}$.

On a : $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2$

$z\bar{z} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$.

Donc $z\bar{z} \in \mathbb{R}^+$.

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $z + \bar{z} = 6$; $z - \bar{z} = 4i$ et $z\bar{z} = 9 + 4 = 13$.

2. $z + \bar{z} = 14$; $z - \bar{z} = 2i$ et $z\bar{z} = 49 + 1 = 50$.

Propriété

Exercice de fixation

1) $\overline{z + z'} = 2 - 3i - 1 - 5i = 1 - 8i$

$\overline{zz'} = (2 - 3i)(-1 - 5i) = -17 - 7i$

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{2-3i}{-1-5i} = \frac{(2-3i)(-1+5i)}{1+25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

4.2- Module d'un nombre complexe

Définition

Exercices de fixation

1) $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$

$|6 - 8i| = \sqrt{36 + 64} = 10$

$\left|\sqrt{2} + \sqrt{7}i = \sqrt{2 + 7}\right| = 3$.

2) 1. Si $z = z'$, alors $z\bar{z} = z'\overline{z'}$ et alors $|z| = |z'|$
Si $z = -z'$, alors $z\bar{z} = (-z')(-\overline{z'}) = z'\overline{z'}$ et alors $|z| = |z'|$
Conclusion : $z = z'$ ou $z = -z' \Longrightarrow |z| = |z'|$.
2. $|1| = 1$et $|i| = 1$, on a : $|1| = |i|$ mais $1 \neq i$ et $1 \neq -i$.
Donc l'implication $|z| = |z'| \Longrightarrow z = z'$ ou $z = -z'$ est fausse.
Conclusion générale : l'équivalence est fausse.

Propriété

Exercices de fixation

1) $1 - i = \overline{1 + i}$, donc $|1 - i| = |1 + i|$.

2) Calculons.
- $|\bar{z}| = |z| = 2$
- $|-\bar{z}| = |\bar{z}| = 2$
- $|zz'| = |z| \times |z'| = 6$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{3}$.

4.3- Affixe, point-image

Propriété et définition

Exercices de fixation

1) 1. $z_A = -7 + 5i$
2. $z_B = 3i$
3. $z_{\overrightarrow{u}} = -3 + 9i$.

2) 1. Le point image $A(1; 1)$.
2. Le point image est $B(0; -3)$.
3. Le point image est $C(7; 0)$.
4 Le vecteur image est $\overrightarrow{u}(1; 1)$.

Définition

Exercices de fixation

1) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -2 + 3i - (1 + i) = -3 + 2i$.
$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 4 + 3i - (-2 + 3i) = 6$.

2) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \Leftrightarrow z_B = z_{\overrightarrow{AB}} + z_A = 1 + i + (-4 + 3i)$.
Donc $z_B = -3 + 4i$ et $B(-3; 4)$.

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $\boxed{Vrai}$
2. $\boxed{Vrai}$
3. $\boxed{Faux}$.

2) 1. $z \quad = \frac{z_P+z_Q}{2} = \frac{1-i+4+5i}{2} = \frac{5}{2} + 2i.$
2. $z_{\vec{w}+\vec{y}} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{y}} = 1 - 2i + 3 + 4i = 4 + 2i.$
3. $PQ = \left|z_Q - z_P\right| = |4 + 5i - 1 + i| = |3 + 6i| = 3\sqrt{5}.$

3) 1. $z_{3\vec{w}} = 6 + 9i.$
2. $z_{2\vec{w}-3\vec{y}} = -8 + 21i.$

II. FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Argument d'un nombre complexe non nul

Exercice de fixation

1)

$$arg(1) = 0$$
$$arg(2) = \frac{\pi}{2}$$
$$arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$
$$arg(-1) = \pi$$
$$arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$
$$arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$
$$arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Propriété

Exercice de fixation

1) $arg(zz') = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{12}.$

$arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\pi}{4}.$

$arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{12}.$

$arg\left(\frac{z'}{z'}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12}.$

$arg(z^2) = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$

$arg\left(\frac{z^2}{z'}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}.$

Propriété

Exercice de fixation

Exercice

- Tout nombre complexe non nul est parfaitement déterminé par la donnée de son module et de son argument. $\boxed{Vrai}$
- Si les arguments de deux nombres complexes non nuls sont égaux, alors ces deux nombres complexes sont égaux $\boxed{Faux}$

2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

2.1- Propriété et définition

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $|1+i\sqrt{3}|=2$

$Cos\theta=\frac{1}{2}$et $sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$.

2. $|\sqrt{3}-3i|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$Cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$et $sin\theta=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}$.

3. $|-\sqrt{2}-i\sqrt{6}|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$Cos\theta=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$et $sin\theta=\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow\theta=-\frac{2\pi}{3}$.

$1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\ (\cos-\frac{2\pi}{3}+\sin-\frac{2\pi}{3})$

2.2- Forme algébrique – forme trigonométrique

Point Méthode 1

Exercices de fixation

1)

- $|z_1|=\sqrt{2}$; $cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$et $sin\theta_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow\theta_1=-\frac{\pi}{4}$.

  Donc $z_1=\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
- $z_2=2\left(cos\frac{\pi}{2}+isin\ \frac{\pi}{2}\right)$.
- $z_3=2\left(cos\frac{\pi}{6}+isin\ \frac{\pi}{6}\right)$.
- $z_4=2\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\ \frac{2\pi}{3}\right)$.

2) Écrivons chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

- $z_1=(2+2i)(1-i)$.

  $2+2i=2(1+i)=2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)$et

$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Donc $z_1 = 4(\cos 0 + i\sin 0)$.

- $z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2i}$

  $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$et $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

  Donc $z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

- $z_3 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}$

  $\sqrt{6}-i\sqrt{2} = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$et

  $2(1-i) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Donc $z_3 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Point Méthode 2

Exercice de fixation

1) Écrivons chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique.
   - $\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$.
   - $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$.
   - $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

2.3- Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition

Exercices de fixation

1) C'est parce que le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.

2) 1. $2e^{i\theta}$ 3. $7e^{-i\theta}$

3) 1. $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

   2. $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   3. $3+i\sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $\frac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

2. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3. $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \times e^{i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\frac{13\pi}{12}}$. .

4. $(1-i)(-\sqrt{3}+i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$..

2.4- Formule de Moivre

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

3. $\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3 = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ecriture de cos(nx) et sin(nx) en fonction de cosx et sinx.

Exercice de fixation

1) 1. $\cos 3x + i\sin 3x = (\cos x + i\sin x)^3$

$= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$.

Donc $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$.

2. $\cos 2x + \cos 3x = 2\cos^2 x - 1 + \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$.

2.5- Formules d'Euler

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-\frac{i\pi}{3}}}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$.

2. $\frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-\frac{i\pi}{6}}}{2i} = \sin\frac{\pi}{6}$.

3. $e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\cos\frac{3\pi}{4}$.

2) Écrivons sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants :

1. $e^{i\theta} + 1 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 + e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} = \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

$= \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$, avec $\cos\frac{\theta}{2} > 0$car $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2. $e^{i\theta} - 1 = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$= \left(2cos\frac{\theta}{2}\right)\left(cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + isin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right).$

$3. e^{-i\theta} + 1 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)e^{-i\frac{\theta}{2}}$

$= \left(2cos\frac{\theta}{2}\right)\left(cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + isin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right).$

Linéarisation

Méthode

Exercice de fixation

1) 1. $sin^3x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} +$
$3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x})$

$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right)$$

$$= -\frac{1}{8i}(2isin3x - 3x2isinx)$$

$= -\frac{1}{4}(sin3x - 3sinx).$

2. $cos^3x = \frac{1}{4}(\cos 3x + cosx).$
3. $sin^2xcos^2x = \frac{1}{5}(1 - cos4x).$
4. $cos^4x = \frac{1}{5}(3 + 4cos2x + cos4x).$
5. $sin^5x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5sin3x + 10sinx).$

2.6- Racine n^{ième} d'un nombre complexe

Propriété

Point méthode

Exercice de fixation

1) Soit $z = x + iy$. On a : $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$et $|z| = x^2 + y^2$.

1. $z^2 = i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les racines carrées de i sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $z^2 = 3 - 4i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Les racines carrées de i sont $2 - i$et $-2 + i$.

3. $z^2 = \sqrt{3} + i$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les racines carrées de i sont $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$et $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Équation du second degré.

Point méthode

Exercice de fixation

1) 1. $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$

$= \left(i\sqrt{3}\right)^2$

$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$;

$z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

$S_{\forall} = \left\{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

2. $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$

$$\Delta = (3i - 4)^2 - 4(1 - 7i)$$
$$= 7 - 24i$$

Soit $S = x + iy$.

$$S^2 = \Delta \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = -24 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = \pm 3 \\ xy = -12. \end{cases}$$

On prend $S = 4 - 3i$.

$z_1 = \frac{-7+24i-4+3i}{2} = -\frac{11}{2} + \frac{27}{2}i$

$z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{27}{2}i$.

$S = \left\{-\frac{11}{2} + \frac{27}{2}i; -\frac{3}{2} + \frac{27}{2}i\right\}$..

3. $iz^2 - i\sqrt{3}z + 1$

$$\Delta = -3 - 4i$$

Soit $S = x + iy$.

$$S^2 = \Delta \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ xy = -2. \end{cases}$$

$S = 2 - i$.

$z_1 = \frac{i\sqrt{3}-2+i}{2i} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i$;

$z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - i$.

$S = \left\{\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i; \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\right\}$.

Propriété

<u>Exercices de fixation</u>

1) Soit $z = re^{i\theta}$, $r \in 3_+^*$et $\theta \in 3$.

1. $z^3 = 1$.

$\Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = e^{i0}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi, \ \ k \in 9. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = k\frac{2\pi}{3}, \ \ k \in \{0: 1; 2\}. \end{cases}$$

Les racines cubiques de 1 sont : 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

2. $z^3 = 1 - i$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 2\sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}, \ \ k \in \{0: 1; 2\}. \end{cases}$$

Les racines cubiques sont :

$2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}};\ \ 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\ \ et\ \ 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3. $z^3 = -2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}, \quad k \in \{0{:}\,1;2\}. \end{cases}$$

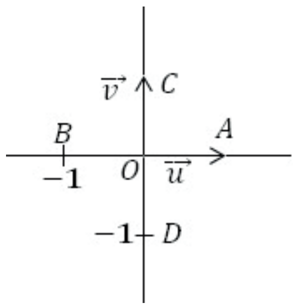
$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}};\ \ z_1 = 2e^{i\pi}\ \ et\ \ z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$

4. $z^3 = -\sqrt{3} + i$.

$$\begin{cases} r^3 = 2 \\ \theta = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}, \quad k \in \{0{:}\,1;2\}. \end{cases}$$

$z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{18}};\ \ z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{18}}\ \ et\ \ z_2 = \sqrt[3]{2}e^{-i\frac{7\pi}{18}}.$

2) Soit $z = re^{i\theta},\ \ r \in ℝ_+^*\ \ et\ \ \theta \in ℝ$, une racine 4ième de 1.
$z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 = r^{i4\theta} = r^{i0} \Leftrightarrow z \in \{1;\ -1;i;\ -i\}$.
Les racines quatrièmes de 1 sont : 1 ; –1 ; $i\ et - i$.
Soit A, B, C et D les points images respectifs de $1;\ -1; i\ et - i$.



Propriété

Exercice de fixation

1) 1. a) $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Donc $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1$.

b) $j\times\bar{j} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$

c) $1 + j + \bar{j} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

d) $j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - 2\times\frac{1}{2}\times i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}.$

2. $j^{2019} = j^{3\times673} = (j^3)^{673} = (1)^{673} = 1.$

III. NOMBRE COMPLEXE ET CONFIGURATION DU PLAN

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $|z-i|=2 \Leftrightarrow AM=2, avec\ z_A=2.$

C'est le cercle de centre A et de rayon 2.

2. $|z-1+2i|=|z+2-i| \Leftrightarrow |z-(1-2i)|=|z-(-2+i)|$

$\Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B|$avec$z_A=1-2i$

et $z_B=-2+i$.

C'est la médiatrice du segment [AB].

2) . $\left.\begin{aligned} AB &= |1+2i-1| = |2i| = 2 \\ AC &= \left|1+\sqrt{3}+i-1\right| = \left|\sqrt{3}-i\right| = 2 \\ BC &= \left|1+\sqrt{3}+i-1-2i\right| = \left|\sqrt{3}-i\right| = 2 \end{aligned}\right\} AB=AC=BC.$

Donc le triangle ABC est équilatéral.

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right)=arg\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}.$

Donc le triangle ABC est de sens indirect.

EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

1) 1. Voir figure ci-contre.

2. $z_{\overrightarrow{EF}}=z_F-z_E=3+i.$

$z_{\overrightarrow{FH}}=\frac{3}{2}-5i.$

$z_{\overrightarrow{HE}}=-\frac{9}{2}+4i.$

$z_{2\overrightarrow{FE}}=-6-2i.$

3. $z_I=\frac{z_E+z_F}{2}$

$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i.$

2) Écrivons sous forme trigonométrique les nombres complexes.

1.

- $ab=6\left(cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}\right).$
- $ab^2=18\left(cos\frac{5\pi}{12}+isin\frac{5\pi}{12}\right).$
- $a^2b=12\left(cos\frac{7\pi}{12}+isin\frac{7\pi}{12}\right).$
- $\frac{b}{a^2}=\frac{2}{9}\left(cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$

2.

- $ab=6\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=3+3i\sqrt{3}.$

- $\frac{a}{b} = \frac{a^2b}{ab^2} = \frac{2}{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$
  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}i.$

3) 1.
- $|u| = \sqrt{2}$et $\arg u = \frac{\pi}{4}$.
- $|v| = 2$et $\arg v = -\frac{\pi}{6}$.

  2. a)
- $uv = (1+i)(\sqrt{3}-i)$
  $= \sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3}-1)i.$
- $uv = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}\right)$.

  b) $\overline{uv} = \overline{\sqrt{3}+1} + i(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}\right)$.

  Donc $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$et $sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4) a) $(cosx + isinx)^4 = cos4x + isin4x$, donc
$cos4x = cos^4x - 6cos^2xsin^2x + sin^4x.$
b) $cos5x + cos6x = (cos^5x - 10cos^3xsin^2x + 5cosxsin^4x) +$
$(cos^6x - 15cos^4xsin^2x + 15cos^2sin^4x + sin^6x).$
c) $sinx - sin2x + sin3x - sin4x = sinx - 2sinxcosx + 3cos^2xsinx$
$-3sin^3x + 4cos^4xsinx - 4cosxsin^3x.$

5) 1.
- $cos^5x = \frac{1}{16}(cos5x + 5cos3x + 10cosx)$
- $cos^2xsin^2x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$
  $= \frac{1}{16}(-sin5x + sin3x + 2sinx).$
- $cos^5x - sin^4x = \frac{1}{16}(cos5x + 5cos3x + 10cosx) -$
  $\frac{1}{8}(cos4x - 4cos2x + 3).$
  $$= \frac{1}{16}(cos5x - 2cos4x + 5cos3x - 8cos2x + 10cosx - 6)$$

2. Les racines carrées de $2i$ sont : $1 + i$et $-1 - i$.
Les racines carrées de $3 + 4i$ sont : $2 + i$et $-2 - i$.
Les racines carrées de $8 - 6i$ sont : $3 + i$et $-3 - i$.
Les racines carrées de $5 - 12i$ sont : $3 + 2i$et $-3 + 2i$.
Les racines carrées de $-7 + 24i$ sont : $3 - 4i$ et $-3 - 4i$.

6) 1. $\Delta = 2^{2\theta+2}cos^2\theta - 4\times 2^{2\theta}$
$= 4\times 2^{2\theta}(cos^2\theta - 1)$
$= \left(2^{\theta+1}isin\theta\right)^2.$
$z_1 = \frac{2^{\theta+1}cos\theta - 2^{\theta+1}isin\theta}{2}$
$= 2^{\theta}(cos\theta - isin\theta).$
$z_2 = 2^{\theta}(cos\theta + isin\theta)$
$S = \{2^{\theta}(cos\theta - isin\theta); 2^{\theta}(cos\theta + isin\theta)\}.$
2. On a : $|z_1| = |z_2|$; donc $OA = OB$ et donc OAB est isocèle en O.
OAB est équilatéral si $Mes(\widehat{AOB}) = \frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire $2\theta = \frac{\pi}{3}$ ou encore
$\theta = \frac{\pi}{6}.$

7) 1. $x \in \mathbb{R}$, et $x^3 - x^2 - (1+i)x - 2 + 2i = 0$
$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$et $-x + 2 = 0$;
$x = 2.$
$z^3 - z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = (z-2)(z^2 + z + 1 - i)$
$\Delta = -3 + 4i = (1+2i)^2$; $z_1 = i;$ $z_2 = -1 - i.$
$S = \{2; i; -1-i\}.$
2. a) A faire par le lecteur.
b) Soit $z_A = 2$; $z_B = i$ et $z_C = -1 - i.$
$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{2-i}{-1-2i} = i.$
Donc $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = |i| \Longrightarrow AB = AC$et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) = arg(i) = \frac{1}{2}.$
Donc ABC est rectangle et isocèle en B.

8) 1. $(z^2+1)(z^2-4) = z^4 - 4z^2 - 4$
$= z^4 - 3z^2 - 4.$
2. $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$
$(z^2+1)(z^2-4) = 0$
$z^2 = -1$ *ou* $z^2 = 4.$
$z = i$ *ou* $z = -i$ *ou* $z = 2$ *ou* $z = -2.$
$S = \{i; -i\}; 2; -2.$
3. Nous laissons le soin au lecteur
$A(2;0),$ $B(0;1),$ $C(-2;0)$ *et* $D(0;-1).$
On a : $\overrightarrow{AC}(-4;0)$ *et* $\overrightarrow{BD}(0;-2)$
donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -4\times 0 + 0\times(-2) = 0.$
$\overrightarrow{CB}(2;1)$ *et* $\overrightarrow{DA}(2;1)$, donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.$
Donc ABCD est un losange.

9) Soit $z_0 = ia$ cette solution.

$$(ia)^3 + (1-5i)(ia)^2 - 2(5+i)(ai) + 8i = 0$$
$$-ia^3 - a^2 + 5a^2 i - 10ai + 2a + 8i = 0$$
$$-a^2 + 2a + i(-a^3 + 5a^2 - 10a + 8) = 0$$

$-a^2 + 2a = 0$et$-a^3 + 5a^2 - 10a + 8 = 0$

$a = 0$ *ou* $a = 2$ mais seule 2 vérifie la 2ème équation.

Donc $z_0 = 2i$.

$z^3 + (1-5i)z^2 - 2(5+i)z + 8i = 0$

$(z-2i)(z^2 + (1-3i)z - 4) = 0$

$\Delta = +8 - 6i$; $z_1 = -2 + 2i$; $z_2 = 1 + i$

$S = 3 - i$

$S = \{2i;\ -2+2i;\ 1+i\}$.

10) 1. Les racines cubiques de 1 sont $1; j$ *et* $\bar{j}$, avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $(2-i)^3 = (2-i)(2-i)^2 = (2-i)(3-4i) = 2 - 11i$.

3. $2 - i$ est une racine cubique de $2 - 11i$. Les autres sont :

$(2-i)j = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + i\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)$et $(2-i)j = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + i\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)$.

11) 1. $a = \frac{9}{2}(\sqrt{3} - 3i) = 9\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 9\sqrt{3}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

2. $\left(re^{i\theta}\right)^5 = a \Leftrightarrow r^5 e^{i5\theta} = 9\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow r^5 - 9\sqrt{3}$et $5\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathcal{9}$.

$\Leftrightarrow r = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}$et $\theta = -\frac{\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5},\ k = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Les racines 5èmes sont : $\sqrt[5]{9\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{15}}$; $\sqrt[5]{9\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\sqrt[5]{9\sqrt{3}}e^{i\frac{11\pi}{15}}$; $\sqrt[5]{9\sqrt{3}}e^{i\frac{13\pi}{5}}$; $\sqrt[5]{9\sqrt{3}}e^{i\frac{7\pi}{15}}$.

12) 1. Soit (E) cet ensemble.

$M \in (E) \Leftrightarrow z \in \mathcal{3}$.

En posant $z = x + iy$, on a : $z = \frac{2(x^2+y^2-2x-y)}{x^2+(y-1)^2} + \frac{2(x+2y-2)}{x^2+(y-1)^2}i$.

D'où $M \in (E) \Leftrightarrow z \in \mathcal{3} \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$.

Donc (E) est la droite d'équation $x + 2y - 2 = 0$, privée du point $A(0;1)$

2. Soit (F) cet ensemble.

$M \in (F) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Donc (F) est le cercle de centre $\Omega\left(1; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$ privé du point $A(0;1)$.

13) 1. $f(b) = 1 + 2i$

$\frac{ib}{b+i} = 1 + 2i$

$ib = (1 + 2i)(b + i)$

$b = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$

2. $f(z) - i = \frac{1}{z+i}$

D'où $f(z) - i = \frac{1}{r}\left(cos(-\alpha) + isin(-\alpha)\right)$.

3. a) $|f(z) - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|z+i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z + i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z - z_A| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

(C) est le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $Arg(f(x) - i) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow Arg\left(\frac{1}{z+i}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow Arg(z + i) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow Arg(z - z_A) = -\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow Mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}\right) = -\frac{\pi}{4}.$

(F)est la demi-droite [AB) privée de A, telle que

$Mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}\right) = -\frac{\pi}{4}.$

c) $|f(b) - i| = |1 + i| = \sqrt{2}$et $(f(b) - i) = arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}.$

Donc $B \in (C)$et $B \in (F)$.

14) Posons $z = x + iy$.

$|1 + iz| = |1 - iz|$

$\Leftrightarrow |(1 - y) + ix| = |(1 + y) - ix|$

$\Leftrightarrow (1 - y)^2 + x^2 = (1 + y)^2 + x^2$

$\Leftrightarrow 1 - 2y + y^2 = 1 + 2y + y^2.$

$\Leftrightarrow 4y = 0$

$\Leftrightarrow y = 0.$

Donc $z \in \mathbb{R}$.

15) 1. $2e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\pi} = -2.$

2. $\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{3e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{2}{3}e^{i\pi} = \frac{2}{3}.$

3. $\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{2}{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}i.$

16) 1. $\frac{tan\theta - i}{tan\theta + i} = \frac{sin\theta - icos\theta}{sin\theta - icos\theta} = \frac{Cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) - isin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)}$

$= \frac{cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)} = cos(2\theta) + isin(2\theta).$

2. $\frac{1}{1+itan\theta} = \frac{cos\theta}{cos\theta+isin\theta} = (cos\theta)(cos\theta - isin\theta)$
$= (cos\theta)\big(cos(-\theta) + isin(-\theta)\big)$.

3. $e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{i\theta}\left(1 + e^{i\theta}\right) = e^{i\theta} \times e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$
$= \left(2cos\frac{\theta}{2}\right)\left(cos\frac{3\theta}{2} + isin\frac{3\theta}{2}\right)$.

4. $\frac{1+itan\theta}{1-isin\theta} = \frac{cos\theta+isin\theta}{cos\theta-isin\theta} = \frac{cos\theta+isin\theta}{cos(-\theta)+isin(-\theta)} = cos(2\theta) + isin(2\theta)$.

17) $81 = 9^2 = 3^4$, donc 3 est une racine $4^{\text{ème}}$ de 81.
Les autres sont : $3i$; -3 et $-3i$.

18) 1. Déterminons les racines $\text{n}^{\text{ième}}$.

- Pour -8 : $z_n = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.
- Pour $1+i$: $z_n = \sqrt[n]{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

2. a) $(9+i)^2 = 80 + 18i$.

b) En posant $Z = z^3$, on a : $Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$.

$\Delta = 80 + 18i = (9+i)^2$; $Z_1 = -8$ et $Z_2 = 1 + i$.

Les racines cubiques de -8 sont : $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{i\pi}$.

Les racines cubiques de $1+i$ sont : $\sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $\sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$.

$S = \left\{2e^{-i\frac{\pi}{3}},\ 2e^{i\frac{\pi}{3}},\ 2e^{i\pi},\ \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}},\ \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}},\ \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right\}$.

19) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n = 2^n\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2^n\left(cos\frac{n\pi}{3} + isin\frac{n\pi}{3}\right)$.

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n \in 3^+ \Leftrightarrow cos\frac{n\pi}{3} \geq 0 \text{et} sin\frac{n\pi}{3} = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{n\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{et } \frac{n\pi}{3} = k\pi,\ k \in 9$.

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{2n}{3} \leq \frac{n}{3} \leq \frac{1}{2} + \frac{2n}{3} \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 1$.

Donc $n \in \{-1; 0; 1\}$.

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n = 2^n\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n \in 3^+$ si et seulement si $n = 6k$, $k \in \angle$, car dans ce cas,
$e^{i\frac{n\pi}{3}} = e^{i\frac{6k\pi}{3}} = e^{i2k\pi} = 1$.

20) Posons $z = x + iy$.

- $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.
- $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} + \frac{2y}{(1-x)^2+y^2}i$.

D'où $\frac{1+z}{1-z} \in i3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

- *Conclusion*: $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i3$.

21) 1. a) $|z|^2 = \left(Re(z)\right)^2 + \left(Im(z)\right)^2$, donc $\left(Re(z)\right)^2 = |z|^2$.

$|Re(z)| \leq |z|$

Or $|Re(z)| = Re(z)$.

Donc Re(z).$\in |z|$.

b) Re(z).$= |z|$lorsque $Im(z) = 0 \;\; et$ $\text{Re}(z) \geq 0$.

2. a) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$

$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$

$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}$

$= |z|$.

22) 1. Z = R + jLω + $\frac{1}{jC\omega}$

= R + j(Lω - $\frac{1}{C\omega}$)

La partie réelle est R et la partie imaginaire est

2. X = Lω - $\frac{1}{C\omega}$

3. On trouve $\sqrt{R^2 + (\text{L}\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

4. proposer des valeurs

23) Soit z un nombre complexe et $z_0, z_{1,} + \cdots + z_{n-1}$ ses n racines n-ième .

$$z_0, z_{1,} + \cdots + z_{n-1}$$

$$= \sqrt[n]{|z|}\left(e^{i\frac{\theta}{n}} + e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}\right) + \cdots + e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$+ \cdots + e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta}{n}}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \cdots + e^{ik\frac{2\pi}{n}} + \cdots + e^{(n-1)\frac{2\pi}{n}}\right)$$

$$= \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta}{n}} \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}}$$

$$= 0\text{car}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n = 1 - e^{i2\pi} = 1 - 1 = 0.$$

24) 1. Z = $\frac{jRL\omega}{R+jL\omega}$

= $\frac{RL^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} + j\,\frac{R^2L\omega}{R^2+L^2\omega^2}$

T = $\frac{1-jR\omega}{1^2+R^2\omega^2}$

SITUATIONS D'ÉVALUATION

Il suffit de construire les points images des racines 6èmes de l'unité.

7 FONCTIONS EXPONENTIELLES

RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

1. Définition

Exercice de fixation

1) $L1 \to \boxed{Vrai}$; $L2 \to \boxed{Faux}$; $L3 \to \boxed{Vrai}$; $L4 \to \boxed{Vrai}$
$L5 \to \boxed{Faux}$; $L6 \to \boxed{Faux}$; $L7 \to \boxed{Vrai}$.

2. Propriété fondamentale

Exercice de fixation

1) a) $e^7 \times e^{-4} = e^3$
b) $e^2 \times e^3 = e^5$.
c) $e^3 \times e^{-4} = e^{-1}$.
d) $e^{-5} \times e^{-3} = e^{-8}$.

Propriété

Exercices de fixation

1) a) $\frac{e^7}{e^3} = e^{7-3} = e^4$.
b) $(e^{-5})^6 \times e^3 = e^{-30} \times e^3 = e^{-27}$.
c) $\frac{e^7 \times e^{-4}}{e^3} = \frac{e^3}{e^3} = 1$.

2) a) $\frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} = e^6 + 1$.
b) $(e^{-2})^{-3} \times (e^{-4})^2 = e^6 \times e^{-8} = e^{-2}$.

II. ÉTUDE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. Dérivée

Propriété

Exercices de fixation

1) a) … e^a … $= \cdots e^b$ …$\Leftrightarrow$ $\alpha = \beta$
b) …$e^\alpha > e^\beta$ … $\Leftrightarrow$ …$\alpha < \beta$ …
c) …$e^\alpha > e^\beta$ … $\Leftrightarrow$ $\alpha > \beta$.
e) …$\alpha < 0$ … $\Leftrightarrow$ $e^\alpha < 1$.
f) $\alpha > 0$ $\Leftrightarrow$ …$e^\alpha > 1$…

2) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1) $e^{3x} = e^{x+1}$; 2) $e^{2x-1} = -7$; 3) $e^{x^2-7} = e^{-6x}$; 4) $e^{x^2-8} = 1$.

1. $e^{3x} = e^{x+1}$

$3x = x + 1$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$.
$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. $e^{2x-1} = -7$
Impossible car $e^{2x-1} > 0$et $-7 < 0$.
$S = \emptyset$.

3. $e^{x^2-7} = e^{-6x}$
$x^2 - 7 = -6x$
$x^2 + 6x - 7 = 0$
$(x-1)(x+7) = 0$
$x = 1$ou $x = -7$.
$S = \{1; -7\}$.

4. $e^{x^2-8} = 1$
$e^{x^2-8} = e^0$
$x^2 - 8 = 0$
$x^2 = 8$
$x = 2\sqrt{2}$ou $x = -2\sqrt{2}$.
$S = \{2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\}$.

3) Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
1) $e^{2x-3} \geq e^{5x}$; 2) $e^x < 1$; 3) $e^{2x-1} > \sqrt{e}$; 4) $e^{x(x-1)} \leq e^{3x+2}$

1. $e^{2x-3} \geq e^{5x}$
$2x - 3 \geq 5x$
$-3x \geq 3$
$x \leq 1$
$S =]-\infty; 1]$.

2. $e^x < 1$
$e^x < e^0$
$x < 0$.
$S =]-\infty; 0[$.

3. $e^{2x-1} > \sqrt{e}$
$e^{2x-1} > e^{\frac{1}{2}}$
$2x - 1 > \frac{1}{2}$

$2x > \frac{3}{2}$
$x > \frac{3}{4}$.
$S = \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

4. $e^{x(x-1)} \leq e^{3x+2}$
$x^2 - x \leq 3x + 2$
$x^2 - 4x - 2 \leq 0$
$\Delta = 24$;
$x_1 =$ et$x_2 = 2 + \sqrt{6}$
$S = [2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6}]$.

2. Limite de fonction exp
Propriété
Exercices de fixation

1) 1. $\lim_{x\to+\infty}(e^x - x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
2. $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = 0$.
3. $\lim_{x\to-\infty}(e^x + x) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$et $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.

2) Calcule les limites suivantes :
1) $\lim_{x\to-\infty} e^{-5x}$; 2) $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x} + e^{-2x})$; 3) $\lim_{x\to-\infty}(e^{2x} + e^x + 1)$;
4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-1}$.

1. $\lim_{x\to-\infty} e^{-5x} = +\infty$, car $\lim_{x\to-\infty} -5x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^X = +\infty$.

2. $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x} + e^{-2x}) = +\infty$, car $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.

3. $\lim_{x\to-\infty}(e^{2x} + e^x + 1) = 1$, car $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et
$\lim_{x\to-\infty} 1 = 1$.

4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{2x-1} = +\infty$, car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}$.

3) Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+3}{e^x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)e^x$, 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x}$; 4) .

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+3}{e^x+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+3e^{-x}}{1+4e^{-x}} = 1$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}(3xe^x - e^x) = 0$, car
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

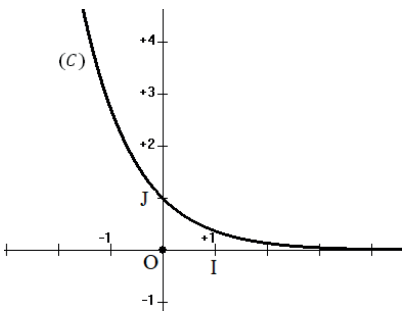
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} \times \frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{2}$, car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{7x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{7x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \times \frac{e^x+1}{7} = \frac{2}{7}$, car
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+1}{7} = \frac{2}{7}$.

3. Courbe représentative

<u>Exercice de fixation</u>

1) Construisons la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^{-x}$.



III. FONCTION DE TYPE e^u

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $f'(x) = 2e^{2x+1}$.

2 $g'(x) = 2xe^{x^2}$.

3. $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$.

Primitive de u'e^{u}

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $F : x \longmapsto e^{4x-2}$.

2. $G : x \longmapsto e^{x^2}$.

3. $H : x \longmapsto \frac{1}{2}e^{x^2+4x+1}$.

IV. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a (a>0)

Définition

Exercice de fixation

1) 1. $f(x) = e^{xln2}$.

2. $g(x) = e^{xln\left(\frac{1}{2}\right)} = e^{-xln2}$.

3. $h(x) = \frac{3^x}{5^x} = \frac{e^{xln3}}{e^{xln5}}$.

Propriété

Exercice de fixation

1) $2^{x+1} = 4$

$$ln(2^{x+1}) = ln4$$
$$(x+1)ln2 = ln4$$
$$x + 1 = \frac{ln4}{ln2} = \frac{2ln2}{ln2} = 2$$

$x = +1$; $S = \{+1\}$.

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $2^{2+x} \times 2^{-2x} = 2^{2+x-2x} = 2^{2-x}$.

2. $\frac{2^x}{5^x} = \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

V. FONCTION PUISSANCE

Définition

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $\lim\limits_{x \to +\infty}(e^x - x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$, car $x^2 \to +\infty$ et $\frac{e^x}{x^2} \to +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty}(e^x - lnx) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{lnx}{e^x}\right) = +\infty$, car $e^x \to +\infty$ et $\frac{lnx}{e^x} \to 0$.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}lnx = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}ln\left(\sqrt{x}\right)^2 = \lim\limits_{x \to 0} 2\sqrt{x}ln\sqrt{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} 2XlnX = 0$, avec $X = \sqrt{x}$.

EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

1) 1. $\begin{cases} e^7 - 2e^y = 1 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 3 \\ e^y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ln3 \\ y = 0 \end{cases} S = \{ln3; 0\}$.

2. $\begin{cases} e^x + 3e^y = 1 \\ e^x - 5e^y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8e^x = 26 \\ 8e^y = -6 \;\; (impo) \end{cases} S = \emptyset$.

3. $\begin{cases} 5e^x - 3e^y = 7 \\ 7e^x + 6e^y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{25}{17} \\ e^y = \frac{2}{17} \;\; (impo) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ln\left(\frac{25}{17}\right) \\ y = ln\left(\frac{2}{17}\right) \end{cases}$

$S = \left\{\left(ln\left(\frac{25}{17}\right);\ ln\left(\frac{2}{17}\right)\right)\right\}$.

2) 1. a) $P(1) = 2 - 5 + 1 + 2 = 0$.

b) $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 3x - 2)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 ou 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Delta = 25$; $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 2$.

$S = \left\{1; -\frac{1}{2}; 2\right\}$.

2. a) $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^3 - 5(e^x)^2 + e^x + 2 = 0$.

En posant $X = e^x$, on a : $2X^3 - 5X^2 + X + 2 = 0$.

D'après la question 1), on a : $X = 1$ ou $X = -\frac{1}{2}$ou $X = 2$.

Par suite, $e^x = 1$ ou $e^x = -\frac{1}{2}$ou $e^x = 2$.

$x = 0$ impossible ou $X = ln2$.

$S = \{0; ln2\}$.

b) $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 \leq 0$

$2(e^x)^3 - 5(e^x)^2 + e^x + 2 \leq 0$

$2X^3 - 5X^2 + X + 2 \leq 0$, avec $X = e^x$.

$(X - 1)(2X + 1)(X - 2) \leq 0$.

X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		2	$+\infty$
$X-1$	–		–	0	+		+
$2X-1$	–	0	+		+		+
$X-2$	–		–		–	0	+
P	–	0	+	0	–	0	+

Comme $X = e^x$, on a : $X > 0$.
D'où $X \in [1; 2]$.
Par suite, $1 \leq e^x \leq 2$
$0 \leq x \leq ln2$.
$S = [0; ln2]$.

3) 1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}/\ e^x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$
car$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

2. a) $*\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-3}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-3e^{-x}}{1-e^{-x}} = 1$car $e^{-x} \to 0$.

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C)en $+\infty$.

$*\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-3}{e^x-1} = 3$car $e^x \to 0$.

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à (C)en $-\infty$.

b) $*\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{X-3}{X-1} = +\infty,\ \ avec\ \ X = e^x$.

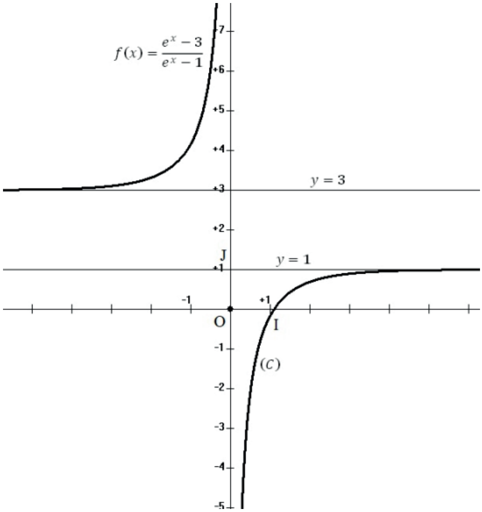
$*\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{X-3}{X-1} = -\infty,\ \ avec\ \ X = e^x$.

$*$ La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C).

3. a) $*\ \forall x \in 3^*, f'(x) = \frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x-3)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x(e^x-1-e^x+3)}{(e^x-1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$.

$*\ \forall x \in 3^*, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

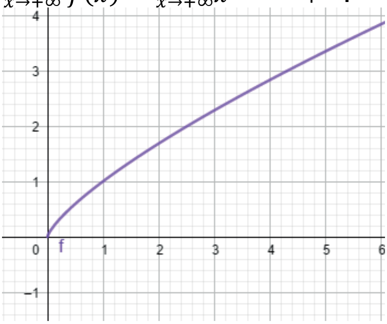
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	
$f(x)$	3	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	1



4) 1. * $D_f =]0;+\infty[$
* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 0{,}75x^{-0{,}25}$.
* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) => 0$, donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$0 \nearrow +\infty$

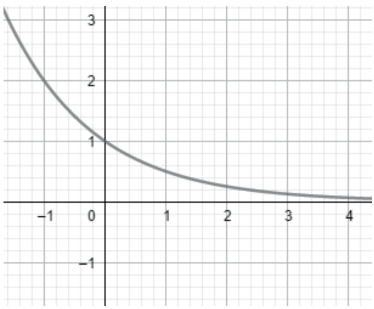
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{0{,}75} = +\infty$.



2. $f(x) = e^{x\ln 0,5}$.
* $D_f = \mathbb{R}$.
* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
* $\forall x \in 3,\ (0{,}5)^x \ln 0{,}5$.
* $\forall x \in 3,\ (0{,}5)^x > 0 \ et \ \ln 0{,}5 < 0$.

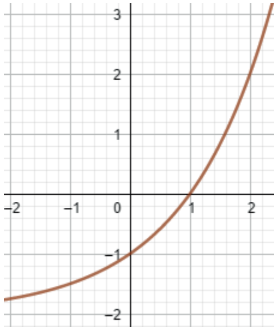
Donc $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur 3.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	0



3. $f(x) = e^{x\ln 2} - 2$.
* $D_f = 3$.
* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
* $\forall x \in 3,\ f'(x) = 2^x \ln 2$.
* $\forall x \in 3,\ f'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur 3.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-2	$+\infty$



5) <u>Partie A</u> :

1. $P(x) = 0.$
$2e^{2x} - 5e^{x} + 2 = 0.$
$2X^2 - 5X + 2 = 0$, avec $X = e^x$.
$\Delta = 9$; $X_1 = \frac{1}{2}$et $X_2 = 2.$
Par suite, $e^x = \frac{1}{2}$ou $e^x = 2.$
D'où $x = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln2$ou $x = ln2.$
$S = \{-ln2; ln2\}.$

2.

X	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$2X^2 - 5X + 2$	+		0	−	0	+

$2X^2 - 5X + 2 > 0 \Leftrightarrow X \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup]2; +\infty[.$

$2X^2 - 5X + 2 < 0 \Leftrightarrow X \in \left]\frac{1}{2}; 2\right[.$

Donc $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -ln2[\cup]ln2; +\infty[.$
$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-ln2;\ ln2[.$

<u>Partie B</u> :

1. $D_f = 3^*$.
2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
   b) $\underset{\substack{x\to 0 \\ <}}{lim} f(x) = -\infty$et $\underset{\substack{x\to 0 \\ >}}{lim} f(x) = +\infty.$
   La droite d'équation $x = 0$est asymptote verticale à (C).
3. a) $\forall x \in D_f,\ f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2(e^{2x}-2e^x+1)-e^x}{(e^x-1)^2}$

$= \frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2} = \frac{P(x)}{(e^x-1)^2}.$

   b) $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \frac{P(x)}{(e^x-1)^2}$et $(e^x - 1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $P(x)$.
   D'après la question A.2, $\forall x \in]-\infty; -ln2[\cup]ln2; +\infty[$

$f'(x) > 0$,
$\forall x \in]-ln2; ln2[\setminus\{0\}, f'(x) < 0$.

c)

x	$-\infty$		$-ln2$		0		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-1-2ln2$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$1+2ln2$	↗	$+\infty$

4. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - (2x+1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0$.

D'où le résultat.

b) $f(x) - (2x+1) = \frac{1}{e^x-1}$ avec $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

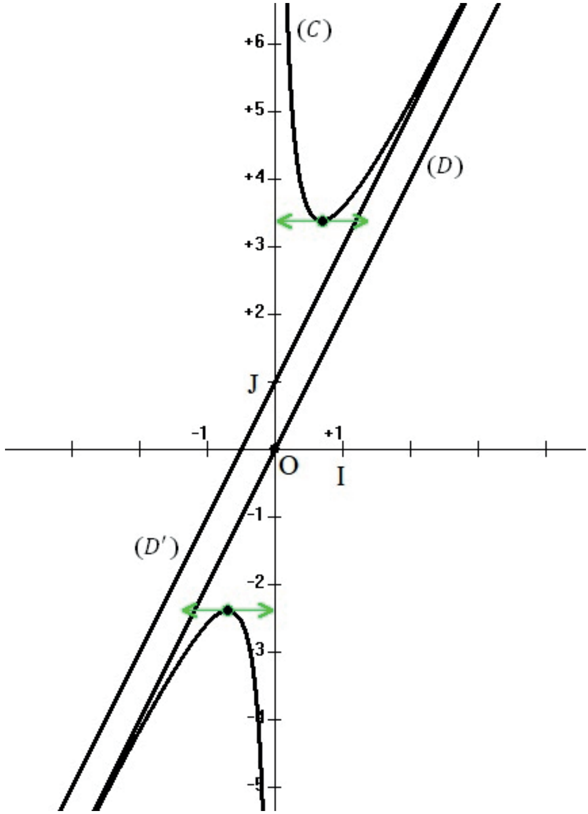
Donc (C) est au-dessus de (D) sur $]0; +\infty[$ et au-dessous de (D) sur $]-\infty; 0[$.

5. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x-1}\right) = 0$. D'où le résultat.

b) $f(x) - 2x = 1 + \frac{1}{e^x-1} = \frac{e^x}{e^x-1}$.

(C)est au-dessus de (D') sur $]0; +\infty[$ et au-dessus de (D') sur $]-\infty; 0[$.

6. Construisons (D), (D') et (C).



Partie C :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{e^x - 1} = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$.

2. a) $x \longmapsto x^2 + ln|e^x - 1| + c,\ c \in 3$.

   b) $F(-1) = 1 \Leftrightarrow 1 + ln|e^{-1} - 1| + c = 1$

$\Leftrightarrow c = ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$.

$F\colon\ x \longmapsto x^2 + ln(1 - e^x) + ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$.

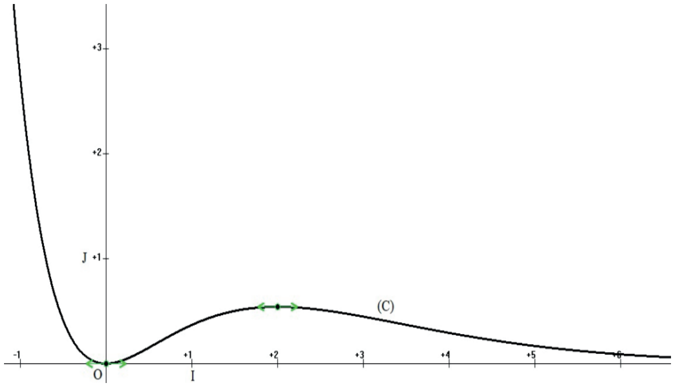
6) Partie A :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$
$= (2x - x^2)e^{-x}$.

2. $\forall x \in 3,\ e^{-x} > 0$.
Donc $f'(x)$ a le même signe que $2x - x^2 = x(2 - x)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

3. Traçons la courbe (C)



<u>Partie B</u> :

1. Posons $u(x) = x$et $v'(x) = e^{-x}$.
   On a : $u'(x) = 1$et $v(x) = -e^{-x}$.

$J = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx.$

$$J = -e^{-x} - [e^{-x}]_0^1$$

$J = 1 - 2e^{-1}.$

2. $\forall x \in 3,\ f'(x) + f(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} + x^2e^{-x}.$

$f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}.$

3. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2e^{-x}dx.$

Posons : $u(x) = x^2$et $v'(x) = e^{-x}$.

On a : $u'(x) = 2x$et $v(x) = -e^{-x}$.

$\int_0^1 f(x)dx = [-x^2e^{-x}]_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}dx$

$= -e^{-1} + 2J$

$= 2J - f(1).$

<u>Partie C</u> :

1. $f(\alpha) = f(2)$

$\Leftrightarrow \alpha^2e^{-\alpha} = 4e^{-2}$

$\Leftrightarrow \left(\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = (2e^{-1})^2$

$\Leftrightarrow -\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}} = 2e^{-1}$, car $\alpha < 0$

$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{2}{e}e^{\frac{\alpha}{2}}$

$\Leftrightarrow \alpha = g(\alpha)$.

2. a) $\forall x \in \mathcal{I}, g'(x) = -\frac{1}{e}e^{\frac{x}{2}}$.

$\forall x \in \mathcal{I}, g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur 3.

$$\forall x \in I, \qquad 1- \leq g(x) \leq 0$$
$$g(0) \leq g(x) \leq g(-1)$$

$1 < -\frac{2}{e} \leq g(x) \leq -\frac{2}{e}e^{-\frac{1}{2}} < 0$.

$\forall x \in I,\ g(x) \in I$.

Donc $g(I) \subset I$.

b) $\forall x \in I,\ g'(x) = -\frac{1}{e}e^{\frac{x}{2}}$.

$$\forall x \in I, -1 \leq x \leq 0$$
$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 0$$
$$e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{x}{2}} \leq 1$$

$-\frac{1}{e} \leq -\frac{1}{e}e^{\frac{x}{2}} \leq -\frac{1}{e}e^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{e}$.

$|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

3. g est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ |g'(x)| < \frac{1}{e}$. De plus, $\alpha \in I$.

D'après le théorème des accroissements finis, on a :

$\forall x \in I,\ |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{e}|x - \alpha|$.

4. a) $\forall x \in \angle, u_n \in I$. D'où, d'après la question précédente, on a :

$$\left.\begin{array}{r} |u_1 - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}|u_0 - \alpha| \\ |u_2 - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}|u_1 - \alpha| \\ |u_3 - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}|u_2 - \alpha| \\ . \\ . \\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}|u_{n-1} - \alpha| \end{array}\right\} \mathit{Produit\ membre\ à\ membre}.$$

$$\overline{\qquad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n |u_0 - \alpha| \qquad}$$

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}|u_0 - \alpha|$.

b) $-1 \leq \alpha \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq -\alpha \leq 1 \Longrightarrow \leq -\frac{1}{2} - \alpha \leq \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2} \leq\leq \frac{1}{2} \Longrightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow \frac{1}{e^n}|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{e^n} \Longrightarrow \frac{1}{e^n}|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$.

c) u_n est une valeur approchée à 10^{-6} près si $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$.

Pour avoir $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$, il suffit que $\frac{1}{2e^n} \leq 10^{-6}$.

$$\frac{1}{2e^n} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow 2e^n \geq 10^6$$
$$\Leftrightarrow e^n \geq \frac{10^6}{2}$$
$$\Leftrightarrow n \geq ln\left(\frac{10^6}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow n \geq 13{,}12$.
Le plus petit entier naturel cherché est 14.
Ainsi, u_{14} est une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

SITUATIONS D'ÉVALUATION

1) 1. $f(0) = 5$.
Le nombre de magasins de sa marque existant en l'an 2010 est 5.
2. $\forall x \in [-10; 20]$,$f'(x) = e^{0,2x-1} + 0{,}2\times e^{0,2x-1}$
$= (1 + 0{,}2x)e^{0,2x-1}$.
$1 + 0{,}2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$et $1 + 0{,}2x < 0 \Leftrightarrow x < -5$.

x	-10	-5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
(x)	$\searrow$	$5 - 5e^{-2}$	$\nearrow$ M

M = $f(20) \simeq 406{,}7$.

f est continue et strictement croissante sur $[0; 20]$, donc f est une bijection de $[0; 20]$ sur $f([0; 20]) = [5; 407]$.
Or $80 \in [5; 407]$, donc il existe un unique nombre réel α dans $[0; 20]$ tel que $f(\alpha) = 80$.
En utilisant la méthode de balayage, on obtient $13 < \alpha < 14$.
C'est à partir de 2014 que la chaîne possédera 80 boutiques.

3. Ce chiffre d'affaires est : $C = \left(\frac{1}{20-15}\int_{15}^{20} f(x)dx\right)\times 1640000\times 300$.
Àl'aide d'une intégration par parties, on a :
$\frac{1}{5}\int_{15}^{20} f(x)d = \frac{1}{5}[5(x-5)e^{0,2x-1}]_{15}^{20}$.
D'où $C \simeq 111877106486\ F$.à

8 NOMBRE COMPLEXE ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

I. NOMBRE COMPLEXE ET CONFIGURATION DU PLAN

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $z_{\overrightarrow{AB}} = 3i + 2 - 2i - 1$
$= i + 1.$
2. $AB = \sqrt{2}.$
3. $mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$

Propriété

Exercice de fixation

1) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2-2i+1-i}{2i+1-i}$
$= \frac{3-3i}{1+i}$
$= 3\frac{(1-i)}{1+i}$
$= 3\frac{(1-i)^2}{2}$
$= -\frac{3}{2}\times 2i$
$= -3i.$
$mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$

Propriété

Exercice de fixation

$$a = -3i, b = 1 - i, c = 2 + i$$
$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{2+i+3i}{1-i+3i} = \frac{2+4i}{1+2i} = 2$$
Donc les points A, B et C sont alignés.

Propriété

Exercice de fixation

1) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{3-3i}{1+i}$
$= -3i$
$\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$ donc $(AB) \perp (AC)$.

2) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{3-i}{1+3i} = -i$

$\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$ donc $(AB) \perp (AC)$.

Propriété

Exercice de fixation

3) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-1-i}{-3+3i}$

$= \frac{1}{3} i \frac{(i-1)}{i-1}$

$= \frac{1}{3} i.$

$\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$ donc $(AB) \perp (AC)$.

Propriété

Exercice de fixation

1) $\frac{c-a}{c-b} = \frac{3-3i}{1+i}$

$\frac{d-a}{d-b} = \frac{2}{4i}$

$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{3-3i}{1+i} \times \frac{4i}{2}$

$= 6.$

$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ appartient à $\mathbb{R}^*$, donc A, B, C et D sont cocycliques.

II. ÉCRITURES COMPLEXES DES SYMÉTRIES

Propriété

Exercice de fixation

1) $L1 \rightarrow \boxed{Faux}$

$L2 \rightarrow \boxed{Faux}$

$L3 \rightarrow \boxed{Vrai}$

$L4 \rightarrow \boxed{Faux}$

$L5 \rightarrow \boxed{Vrai}$.

Propriété

Exercices de fixation

1) $z' = -z + 2 + 2i$.

2) $2z = 3 - 2i$; $z = \frac{3}{2} - i$; l'écriture complexe de f est de la forme $z' = -z + 2a$; donc f est une symétrie centrale de centre Ω d'affixe $\frac{3}{2} - i$.

III. ÉCRITURES COMPLEXES DES TRANSLATIONS

Propriété

Exercices de fixation

1) $z' = z + 3 - i$

2) $z' = z + 7 - 5i$

C'est la translation de vecteur $\vec{u}$ (7 ; -5).

IV. ÉCRITUES COMPLEXES DES ROTATIONS

Propriété

Exercices de fixation

3) $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

$z' = iz.$

4) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}z + 3i.$;

donc f est une rotation.

On centre est Ω d'affixe $\frac{(6-6\sqrt{3})i+6}{5-2\sqrt{3}}$.

Son angle est $-\frac{\pi}{6}$.

V. ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE HOMOTHÉTIE

Propriété

Exercices de fixation

1) $z' = -\frac{3}{2}z.$

2) L'écriture complexe de f est de la forme $z' = 7z + 3 - i$, donc f est une homothétie de rapport 7 ; son centre a pour affixe $\frac{3-i}{1-7}$ soit $\frac{3-i}{-6}$.

VI. SIMILITUDE DIRECTE

Définition

Exercice de fixation

1) $L1 \rightarrow \boxed{Faux}$

$L2 \rightarrow \boxed{Vrai}$

$L3 \rightarrow \boxed{Faux}$

$L4 \rightarrow \boxed{Vrai}$

$L5 \rightarrow \boxed{Vrai}$

$L6 \rightarrow \boxed{Vrai}$.

Propriétés

Écriture complexe d'une similitude directe

Propriétés

Exercice de fixation

1) $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(2 - i)$

$= 2e^{i\frac{\pi}{3}}z + \sqrt{3}(2 - i)$

$\omega = \frac{\sqrt{3}(2-i)}{1+i\sqrt{3}}$

$= \frac{2\sqrt{3}-3}{4} - \frac{\sqrt{3}+6i}{4}i.$

C'est une similitude directe de centre **Ω**,

d'affixe $\frac{2\sqrt{3}-3}{4} - \frac{\sqrt{3}+6i}{4}i$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport 2.

2) $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 1 - i - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times(1 - i)$

$= \sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z + (1 - i)(-1 - 1 - i)$

$= (1 + i)z - i - 1.$

Propriété

Exercice de fixation

1) $Ac = \frac{1}{2}$

$= \frac{5}{2}$

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $A \neq B$; $A \neq C$ et $B \neq C$, donc il existe une similitude directe de centre A qui transforme B en C.

2. $-z' = az + b$

$\begin{cases} 1 + i = a(1 + i) + b \\ 2 + i = a + b \end{cases}$

$ai = -1$

$a = i$

$b = 1 + i - i(1 + i) = 2.$

$z' = iz + 2.$

Propriété

Exercice de fixation

1) $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z + b$

$= \left(1 + \sqrt{3}i\right)z + b$

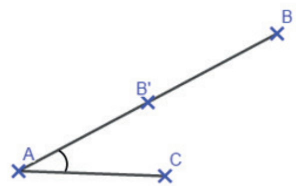
$j = \left(1 + \sqrt{3}i\right)i + b$

$b = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - i + \sqrt{3}$

$b = + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) i$

$z' = \left(1 + \sqrt{3}i\right)z + \frac{1}{2} + \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) i.$

2)



Propriété

Exercices de fixation

1) $A \neq C$ et $B \neq D$, donc il existe une unique similitude directe qui transforme A en B et C en D.

Autre méthode

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe qui applique A sur B et C sur D.

$$\begin{cases} 1 + i = ia + b \\ 2i = \left(1 + i\sqrt{3}\right)a + b \end{cases}$$

$a = \frac{i-1}{1+i\left(\sqrt{3}-1\right)}$

$a = \frac{i-1}{1+2i}$

$a = \frac{(i-1)(1-2i)}{4}$

$= \frac{i+2-1+2i}{4}$

$= \frac{1+3i}{2}.$

$b = 1 + i - ia$

$= 1 + i - \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}$

$b = \frac{5}{2} + \frac{i}{2}.$

$z' = \frac{1+3i}{2}z + \frac{5}{2} + \frac{i}{2}.$

EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

1) 1. $z' = iz + i - i\times i$
$\quad = iz + i + 1.$
2. $i(-4-i) + 1 + i = -4i + 1 + 1 + i$
$\quad = 2 - 3i$;
donc $r(B) = C$.
3.

r

A	A
B	C

Donc ABC est rectangle et isocèle en A.

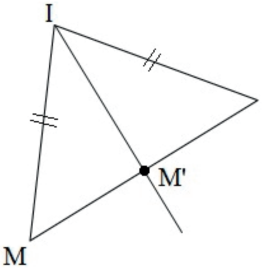
2) $\left|(1- i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i\right| = 6$
$\left|(1- i\sqrt{3})\right| \times \left|z - \frac{\sqrt{3}+i}{(1- i\sqrt{3})}\right| = 6$
$\left|z - i\right| = 3$
C'est le cercle de centre J(0 ; 1) et de rayon 3.

3) 1. $2i = a\times 2i + b$
$1 - i = -a + b$
$a = \frac{3i-1}{1+2i}$
$a = 1 + 2i.$

$b = 2i - (1+i)\times 2i$
$b = 2i - 2i + 2$
$b = 2.$

$z' = (1+i)z + 2$
$S\left(I;\ \sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}\right).$

2. Construisons le point M' image de M par S



3. Le triangle MM'I est rectangle et isocèle en M'.
4.
$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y \end{cases}$$
$x = x' + y' - 2$
$y = -x' + 2.$
$-x' + 2 = -2(x' + y' - 2) + 2$
$= -2x'-2y'+6$
$y' = \frac{-x'+4}{2}$
$y = -\frac{1}{2}x + 2.$
5. $IM = 5$; $M \in$ □$(I, 5)$.
$(\Gamma) = C(I; 5\sqrt{2})$. À CONSTRUIRE.

4) 1. a) $z' = +z + 6 - 4i$
b) $z' = +z + (-8 + 12i)$.
2. a) $z' = -5z$.
b) $z' = 3z + (2 - i)(1 - 3)$
$= 3z - 4 + 2i$.
3. a) $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$.
b) $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}i\right)z + (1 - i)\left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
c) $z' = -z$.
4. Laissé aux soins du lecteur.

5) 1. $S\left(-\frac{3}{13} + \frac{6\sqrt{3}}{13}i; \frac{\pi}{3}; 4\right)$.
2. $z' = (2 + 2i\sqrt{3})(1 + i) + 3$
$= 2 + 2i + 2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3$
$= 5 - 2\sqrt{3} + (2 + 2\sqrt{3})i$.
3. $z' = (2 + i\sqrt{3})(3 - \sqrt{3}i)$
$= 6 - 2\sqrt{3}i - 3i - 3$
$= 3 - (3 + 2\sqrt{3})i$.
O', $z' = 3$; $A \in (D)$; $A' \in (D')$.

$(D') = (O'A')$.

6) 1. $\begin{cases} 5 + i = ia + b \\ 1 + i = -a + b \end{cases}$

$a\{1 + i = 4$

$a = \frac{4}{1+i}$

$a = 2(1 - i)$.

$b = 1 + i + 2 - 3 - 2i$

$b = 3 - i$.

$z' = 2(1 - i)z + 3 - i$.

2. $s = \left(\Omega; 2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$..

3. a) $\omega = \frac{3-i}{1-2+2i}$

$\omega = \frac{(3-i)(-1-2i)}{5}$

$\omega = \frac{1}{5} - i$.

b) $z_F = 2(1 - i)(-1 + i) + 3 - i$

$= 2(-1 + i + i + 1) + 3 - i$

$= 3 + 2i$.

$\frac{f-a}{e-a} = \frac{3+i-i}{-1+i-i}$=-3

A	C
B	D
E	F

Rectangle

7) 1. a) $\left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i\right| = 6$

$2\left|z - \frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right| = 6$

$|z - i| = 3$.

b) $(\Gamma)(I(0,1); 3)$.

2. a) $\begin{cases} 0 = ai + b \\ -4i = a\sqrt{3} + b \end{cases}$

$z' = \left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i$.

b) $S\left(\frac{\sqrt{3}}{3-i};\ 2;\ -\frac{\pi}{3}\right)$.

$S' = \mathcal{E}(0; 6)$.

3. À CONSTRUIRE

4. a) Voir figure. (à construire)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \Omega\text{C} = 2\Omega\text{B} \\ \Omega D = 2\Omega B \end{array}\right\} \Omega C = \Omega D \\ De\ plus\ Mes\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{donc } \Omega\text{CB est équilatéral.}$$

8) 1. $P(i\sqrt{3}) = 0$; $P(-i\sqrt{3}) = 0$

$$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$$
$$\underline{z^4 + 3z^2}$$
$$-9z^3 \qquad -6z^3$$
$$-$$

$$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$$

2. $z^2 - 6z + 2i$

$\Delta = 36 - 4\times 21$

$= 36 - 84$

$= -48$

$= \left(i\sqrt{48}\right)^2 = \left(i4\sqrt{3}\right)$

$z_1 = \frac{6-i4\sqrt{3}}{2} = 3 - 2i\sqrt{3}$

$z_2 = 3 + 2i\sqrt{3}$

$S_{\forall} = \{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}; 3 - 2i\sqrt{3}; 3 + 2i\sqrt{3}\}$.

SITUATIONS D'ÉVALUATION

1) 1. $z' = \frac{(1+i)}{2} z$.

2. Laissé aux soins du lecteur

9 SUITES NUMÉRIQUES

RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

I. RAPPEL SUR LES SUITES ARITHMÉTIQUES ET LES SUITES GEOMÉTRIQUES

Exercices de fixation

1) $U_{n+1} = U_n + 7$.

2) $V_{n+1} = 7V_n$.

3) $u_n = (n-2)(-3) + 9$;
$u_n = -3n + 15$.

4) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} \times 32$;
$u_n = 32\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$.

5) $u_n = -3n + 15$;
$u_4 = 3$;
$u_{16} = -33$.
$S = 13\times\frac{3+(-33)}{2}$.
$S_n = 13\times-15$
$= -195$.

6) $S_n = 32\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}}$
$= 64\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right)$.

II. LES SUITES CROISSANTES, SUITES DÉCROISSANTES

Définition

Exercice de fixation

1) $L1 \rightarrow \boxed{Vrai}$
$L2 \rightarrow \boxed{Vrai}$
$L3 \rightarrow \boxed{Faux}$.

III. SUITES MAJORÉES, MINORÉES

Définition

Exercice de fixation

1) $L1 \rightarrow \boxed{Faux}$
$L2 \rightarrow \boxed{Vrai}$
$L3 \rightarrow \boxed{Vrai}$
$L4 \rightarrow \boxed{Faux}$.

IV. SUITES CONVERGENTES ET SUITES DIVERGENTES

Définition

Propriété

Exercices de fixation

1) $L1 \rightarrow \boxed{Vrai}$
$L2 \rightarrow \boxed{Vrai}$
$L3 \rightarrow \boxed{Vrai}$.

2) $L1 \rightarrow \boxed{Faux}$
$L2 \rightarrow \boxed{Vrai}$.

Propriété

Exercice de fixation

1) $L1 \rightarrow \boxed{Vrai}$
$L2 \rightarrow \boxed{Vrai}$
$L3 \rightarrow \boxed{Vrai}$
$L4 \rightarrow \boxed{Vrai}$
$L5 \rightarrow \boxed{Faux}$.

Propriété

Exercices de fixation

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$; $u_n = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} nsin\frac{1}{n} = 1$.

2) 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 1$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0$.

Propriété

Exercice de fixation

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 4.$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 2.$

Limites d'une suite géométrique

Propriété

Exercice de fixation

Exercice

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0.$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = +\infty.$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} w_n = 0.$

Limite et comparaison

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty.$
2. $n + sin(n) \geq n - 1.$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (n - 1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(n + sin(n)\big) = +\infty.$

Propriété : Théorème des gendarmes

Exercice de fixation

1) 1. $\frac{-1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$
$lim \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$

2. $-\frac{1}{n} \leq \frac{sin(x)}{x} \leq \frac{1}{n}$
$\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{sin(n)}{n} = 0.$

Propriété

Exercice de fixation

1) $L1 \to A.$
$L2 \to C.$
$L3 \to C.$
$L4 \to C.$
$L5 \to A.$

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} nlnn = +\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{lnn}{n^{0,1}} = 0$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\times(0,5)^n = 0$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^4}{(1,05)^n} = +\infty$.

2) 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\frac{2^n}{n^2}\right) = -\infty$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - lnn) = +\infty$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^2} = +\infty$.

EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

1) 1. $u_0 \geq 0$; supposons $u_n \geq 0$; $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+3}$ strictement positif.

2. a) $u_1 = \frac{1}{3}$.

b) $u_2 = \frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{2}{3}+3} = \frac{5}{3}\times\frac{3}{11}$

$= \frac{5}{11}$.

$u_1 \leq u_2$

$u_{n-1} \leq u_n$.

Démontrons que $u_n \leq u_{n+1}$.

$f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$. f est croissante.

$f(u_{n-1}) \leq f(u_n)$.

$u_n \leq u_{n+1}$ donc u_n est croissante.

2) 1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

$= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3$

$= \frac{1}{3}(u_n - 3)$.

$v_{n+1} \leq \frac{1}{3}v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique.

$v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times(-1)$.

$^{lim}\ v_n = 0$.

2. $u_n = 3 + v_n$

$= 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0.$

3) 1. $u_n = \frac{3}{2}n - 5.$

2. Représentation sur la droite (OI), les cinq premiers termes de la suite (u_n).

3. $u_{20} = 25.$

$S_{0,20} = 21 \times \frac{-5+25}{2}$

$= 201.$

4) $u_{n+1} - u_n = u_v - u_{n-1} =$ Constante.

$u_{n+1} = u_n + constante.$

5) 1. a) $u_0 > 0$; supposons $u_0 > 0$, $u_{n+1} > 0$.

b) $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2+3u_n}{2u_n}$

$= \frac{2}{2u_n} + \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{u_n} + \frac{3}{2}$

$= v_n + \frac{3}{2}.$

2. a) $v_n = \frac{S_n}{2} + 1.$

b) $S_n = (n-1)\frac{\left(1+\frac{3n}{2}+1\right)}{2}$

$= (n+1)\left(1 + \frac{3n}{2}\right)$

$= \frac{(n+1)(3n+4)}{4}.$

c) $limv_n = -\infty$; donc $limu_n = 0.$

6) 1. $u_1 = \frac{2u_0+v_0}{3}$

$= \frac{4+8}{3}$

$u_1 = 4.$

$v_1 = \frac{2+24}{4}$

$v_1 = \frac{13}{2}.$

2. a) $d_{n+1} = \frac{8u_n+4v_n-3u_n-9v_n}{12}$

$= \frac{5u_n-5v_n}{12}$

$d_0 = f6$

$9v_n - 4v_n = 5v_n$

$3u_n - 8u_n = 5u_n$
$d_{n+1} = \frac{5}{12}d_n.$
$d_n = 6\left(\frac{5}{12}\right)^n$

d) $limd_n = 0.$

3. a) $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+v_n}{2} - u_n$
$= \frac{d_n}{3}.$

(u_n) est croissante dans (v_n) disons.

b) $\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \frac{d_n}{3} \\ u_n = \frac{6}{3}\times i\frac{12}{7}\left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n\right) + 2 \end{cases}$

$v_n - u_n > 0 \quad v_0 > v_n > u_n > u_0$

$u_n - u_0 = \frac{d_0}{3} + \frac{d_1}{3} + \cdots + \frac{d_{n-1}}{3}$
$= \frac{1}{3}\left(d_0\times\frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n}{1-\frac{5}{12}}\right).$

$v_{n+1} - v_n = \frac{dn_{+3v_n}}{4} - v_n$
$= \frac{u_n-v_n}{4} - (v_n - u_n)$
$= \frac{d_n}{4}.$

$u_1 - u_0 = \frac{d_0}{3}$
$u_2 - u_1 = \frac{d_0}{3}$
. . .
$u_n - u_{n+1} = d_{n-1}.$

7) 1. $v_0 = ln\left(\frac{3}{2}u_0\right)$
$= ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\right)$
$= -ln2.$

2. $v_{n+1} = ln\left(\frac{3}{2}u_{n+1}\right)$
$= ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}u_n\right)$
$= ln\left[\left(\frac{3}{2}u_n\right)^2\right]$
$= 2v_n.$

3. $v_n = 2^n\times ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$v_n = ln\frac{3}{2} + lnu_n$
$lnu_n = v_n - ln\frac{3}{2}$
$u_n = e^{v_n - ln\frac{3}{2}}$

$$u_n = e^{2^n ln\left(\frac{1}{2}\right) - ln\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}e^{2^n ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$limu_n = 0$

$S_n = v_0 \frac{(1-2^n)}{1-2} = ln2(1-2^n).$

$T_n = \frac{2}{3}e^{2^0 \times ln\left(\frac{1}{2}\right)} \times \frac{2}{3}e^{2ln\frac{1}{2}} \times \ldots \times \frac{2}{3}e^{2^n ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}.$

8) $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$

$f'(x) = \frac{3}{x^2}$; f croissante.

$f(2) = \frac{5}{2}$

$f(3) = \frac{9}{3} = 3$

$f([2;3]) = \left[\frac{5}{2};3\right]$,

Donc $f([2;3]) =\subset [2;3]$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}-1} \\ &= \frac{\frac{4u_n-3}{u_n}-3}{\frac{4u_n-3}{u_n}-1} \\ &= \frac{u_n-3}{u_n} \times \frac{u_n}{3(u_n-1)} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n-3}{u_n-1}\right) \end{aligned}$$

$v_{nf_1} = \frac{1}{3}v_n.$

$limv_n = 0,\ limu_n = 3.$

9) 1. $u_1 = 3u_0 - 0 + 3$

$u_1 = 3$

$$\begin{aligned} u_2 &= 3u_1 - 2 + 3 \\ &= 9 - 2 + 3 \\ &= 10. \end{aligned}$$

$u_1 > 1$

$u_2 > 2.$

Supposons $u_n > n$

$3u_n > 3n$

$3u_n - 2n > n$

$3u_n - 2n + 1 > n + 3 > n$

$u_{n+1} \geq n$

$limn = +\infty.$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty.$

$v_n = u_{n-n+1}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - n - 1 + 1 \\ &= 3u_n - 2n + 3 - n \\ &= 3u_n - 3n + 3 \end{aligned}$$

$= 3(u_n - n + 1).$

$v_{n+1} = 3v_n.$

Puis $q = 3$.

$v_n = 3^n v_0\ ;\quad v_0 = 1.$

$v_n = 3^n.$

$u_n = v_n + m - 1$

$u_n = 3^n + n - 1.$

SITUATION D'ÉVALUATION

1) $w_n = \frac{1}{v_n}$

$$v_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n} - 1$$

$$= \frac{1+u_n-3+u_n}{3-u_n}$$

$$= \frac{2(u_n-1)}{3-u_n}.$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}}$$

$$= \frac{3-3u_n+2u_n}{2(u_n-1)}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{v_n}$$

$$w_{n+1} = -\frac{3}{2} + w_n$$

$$v_n = -\frac{2}{3n}$$

$$u_n = -\frac{2}{3n} + 1$$

$$\lim_n u_n = 1$$

Pour un grand nombre de croisement toutes les souris seront de race pure.

10 CALCUL INTÉGRAL

RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

I. PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION

Exercices de fixation

1) $F(a)$ $\boxed{X}$ $G(b)$ $\boxed{X}$ $[F(t)]_a^b$ $\boxed{X}$

2) 1. $\int_2^5 (2t-1)dt = [t^2 - t]_2^5$
$= 18.$

2. $\int_1^2 \frac{1}{t}dt = ln2.$

3. $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$

II. PROPRIÉTÉ DE L'INTÉGRALE

a) Propriété (linéarité)

Propriété

Exercices de fixation

1) Cochons.

- $\alpha \int_a^b f(t)dt - \beta \int_a^b g(t)dt$ $\boxed{X}$

2) 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a + sinx)dx = \left[\frac{x^2}{2} - cosx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= \frac{\pi^2}{8} + 1.$

2. $\int_0^2 (7t + 5t^2)dt = \left[\frac{7}{2}t^2 + \frac{5}{3}t^3\right]_0^2$
$= 14 + \frac{40}{3}.$

b) Relation de Chasles

Propriété

Exercices de fixation

1) $\int_{-2}^3 2(t)dt = \int_{-2}^3 -2t\,dt + \int_0^3 2t\,dt$
$= [-t^2]_{-1}^0 + [t^2]_0^3$
$= 4 + 9$
$= 13.$

2) $\int_{-2}^3 |x-1|dx = \int_{-2}^3 (-2x+2)dx + \int_1^3 (2x-2)dx$
$= [-x^2 + 2x]_{-2}^1 + [-x^2 + 2x]_1^3$
$= 3 + 5 + 3 + 1$
$= 12.$

III. INTÉGRALE ET INÉGALITÉ

Propriété

Exercices de fixation

1) $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

$0 < \int_1^2 \frac{1}{x} dx < \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} fx$

$0 < ln2 < \left[2\sqrt{x}\right]_1^2$

$0 < ln2 < 2\sqrt{2} - 2.$

2) a) $\forall x \in \left[0: \frac{\pi}{2}\right]$, sin x$\geq$ 0, donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx \geq 0.$

b) $\forall x \in [0:1], -x^3 \leq 0$; $\int_0^1 -x^3 dx \leq 0.$

c) $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}: \pi\right], cosx \leq 0$; $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cosx\, dx \leq 0.$

IV. INÉGALITÉ DE LA MOYENNE

Propriété

Exercice de fixation

1) $|sinx| \leq 1$; $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinxdx)\right| \leq 1\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$

$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinxdx)\right| \leq \frac{\pi}{2}.$

Définition

Exercice de fixation

1) 1. $\frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$

2. $\frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^x = \frac{1}{2}[e^x]_{-1}^1$

$= \frac{1}{2}(e - e^{-1}).$

3. $\frac{1}{1}\int_1^2 lnx = ln2.$

V. TECHNIQUE DE L'INTÉGRATION PAR PARTIES

Propriété

Exercices de fixation

1) $u(x) = x$ $\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = sinx$ $\qquad v(x) = -cosx.$

$\int_0^{\pi} xsinxdx = [-xcosx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -cosxdx$

$= [sinx\,]_0^{\pi} = 0.$

2) $u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v'(x) = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$; $\quad v(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$.

$$\int_0^1 x\sqrt{2x+1}dx = \left[\frac{x}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{3}3^{\frac{3}{2}} - \left[\frac{1}{6} \times \frac{2}{5}(2x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{3} - \frac{1}{15}\left(3^{\frac{5}{2}} - 1\right)$$

$$= \sqrt{3} - \frac{3}{5}\sqrt{3} + \frac{1}{15}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{15}.$$

3) $u(x) = lnx$ $\quad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x$ $\quad v(x) = \frac{x}{2}$.

$$\int_0^2 xlnxdx = \left[\frac{xln(x)}{x}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{2}dx.$$

VI. TECHNIQUE DU CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE

Méthode

Exercices de fixation

1) $t = x + 1$

$dt = dx$; $x = t - 1$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^4 \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt$$

$$= \int_1^4 \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}\left(t^{\frac{3}{2}}\right)\right]_1^4 - \left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \frac{2\times 8}{3} - \frac{2}{3} - 4 + 2$$

$$= \frac{14}{3} - 4 + 2$$

$$= \frac{8}{3}.$$

2) $t = 2x - 3$; $dt = 2dx$

$$\int_0^2 (2x-3)^6 dx = \int_{-3} \frac{1}{2}t^4 dt = \left[\frac{1}{2} \times \frac{t^5}{5}\right]_{-3}^1$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{(-3)^5}{10}$$

$$= +\frac{122}{5}.$$

VII. FONCTION DU TYPE $\int_a^x f(t)dt$

Propriété

Exercice de fixation

1) $g(x) = [lnx]_1^x$

$g(x)lnx$; g s'annule en 1.

VIII. INTÉGRALE DE FONCTION PAIRE, IMPAIRE OU PÉRIODIQUE

Propriété

Exercice de fixation

1) $x \longmapsto sinx$ est périodique de période 2π.

$\int_0^{2\pi} sinxdx = \int_{0+2\pi}^{2\pi+2\pi} sinxdx = \int_{2\pi}^{4\pi} sinxdx$

$\int_{\pi}^{3\pi} cosxdx = \int_{+\pi-2\pi}^{3\pi-2\pi} cosdx = \int_{-\pi}^{\pi} cosxdx.$

Propriété

Exercice de fixation

1) 1. $Sin(-x) = sin(x)$

$x \longmapsto sinx$ impossible.$\int_{-\pi}^{\pi} sindx = 0.$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} cosxdx = 2\int_0^{\pi} cosxdx$ car $x \longmapsto cosx$ est paire.

IX. CALCUL D'AIRES

Propriété

Exercices de fixation

1) $\forall x \in [1;2]$; $f(x) \geq 0.$

$\mathcal{A} = \left(\int_1^2 f(x)dx\right) \times$ UA ; $UA = 6\ cm^2.$

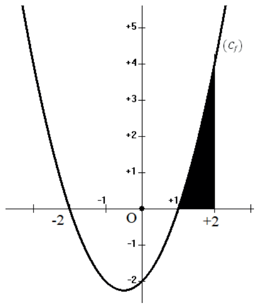
$= \left[\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2$

$= \left(\frac{8}{3} + 2 - 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) \times 6\ \ cm^2$

$= \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{2}\right) \times 6\ \ cm^2$

$= \frac{14}{6} - \frac{3}{6}$

$= 11\ cm^2.$



2) $\forall x \in [-1;0],\ f(x) < 0.$

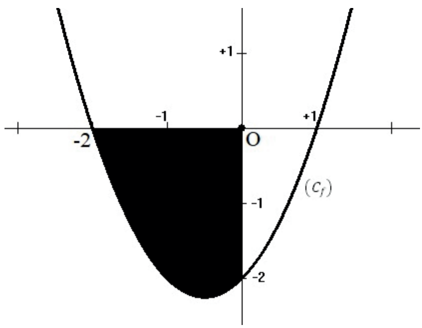
$\mathcal{A} = \left(\int_{-2}^{0} f(x)dx\right) \times \text{UA}$;

$= \left[\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{0} \times UA$; $UA = 4\ cm^2.$

$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) \times 4\ \ cm^2$

$= \frac{-8+18}{3} \times 4\ \ cm^2$

$= \frac{40}{3}\ cm^2.$



3) $\mathcal{A} = \left(\int_{0}^{3} g(x) - f(x)dx\right) \times \text{UA}$;

$\mathcal{A} = 4\int_{0}^{3}(-2x^2 + 6x)dx$

$= 4\left[-2\frac{3}{3} + 3x^2\right]_{0}^{3}$;

$= 4[-18 + 25]$

$= 28\ \ cm^2.$

EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

1) $u(x) = x; \quad u'(x) = 1.$

$v'(x) = (1-x)^n \; ; \quad v(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$

$I_n = \left[\frac{-x(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \int \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}dx$

$= -\left[\frac{+(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]_0^1$

$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$

2) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a+b)dt$

$= (a+b)[t]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{2}(a+b)$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-b)\cos(2\omega t)dt$

$= (a-b)[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$ car $\omega \neq 0$.

$= 0$ si ω est entier.

$I = J = \frac{\pi}{4}(a+b)$

3) $\int_1^3 \frac{|x-2|}{x^3-4x}dx = \int_1^2 \frac{-1}{x(x+2)} + \int_2^3 \frac{1}{x(x+1)}$

$= \left[-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+2)}\right]_1^2 + \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}\right]_1^2$

$= -\frac{1}{2}ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}ln\frac{15}{8}.$

4) $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$

$u(x) = x^n, \;\; u'(x) = nx^{n-1}$

$v'(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} \; ; v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}.$

$I_n = \left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\, 1 - x^{\frac{3}{2}}dx$

$= \frac{2n}{2}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$

$= \frac{2n}{2}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} - \frac{2n}{2}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$

$= \frac{2n}{2}(I_{n-1} - I_n)$

$I_n\left(\frac{2n+3}{3}\right) = I_{n-1} \times \frac{2n}{2}$

$I_n = I_{n-1}\left(\frac{2n}{2x+3}\right)$

$I_0 = \left[-\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$I_0 = \frac{2}{3}$.

$I_1 = \frac{2}{5} I_0$

$I_2 = \frac{4}{7} I_1$

$I_3 = \frac{6}{9} I_2$

. . .

$I_{n-1} = \frac{2(n-1)I_0}{2n+1}$

$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$

$I_n = \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{6}{9} \times \ldots \times \frac{2n}{2n+3} \times \left(\frac{2}{3}\right)$

$I_n = \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \ldots \times 2n}{5 \times 7 \times 9 \times \ldots \times (2n+3)}$.

5) 1. $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

2. $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1}$

$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}$

3. $La\ fonction\ x \longmapsto cos^n t - \ cos^{n+1} t$

est positive sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$,

$cos^n t - \ cos^{n+1} t = cos^n t(1 - cost)$

$cos^n t - \ cos^{n+1} t > 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+1} t\, dt > 0$

(I_n) est décroissante.

$I_{2p+2} < I_{2p+1} < I_{2p}$

$\frac{I_{2p+2}}{I_{2n}} < \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} < 1$

$corriger\ dans\ l'$énoncé

6) 1. $I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$; $I_1 = e - e + 1 = 1$.

2. $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$.

3. $J = I_3 + 2I_2 - 2I_1 + I_0$.

7) 1. f croissante et continu sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

2. a) $D_g = \mathbb{R}$, $D_h = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

b) $h(0) = 0$.

c) $h'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$

$= (1 + tan^2 x) \times \frac{1}{1 + tan^2 x}$

$h'(x) = 1$.

d) $h(x) = a + c$ et $h(0) = 0$ donc
$h(x) = x$; $g°f = I_d$, donc $g = f^{-1}$.
e) I $= f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

8) 1. $F'(x) = \frac{e^x}{x}$; $]0; +\infty[$; F est croissante.
$\frac{e^x}{x} \geq 0, \forall x \in]0; +\infty[$; $\int_0^x \frac{e^t}{t} dx \geq 0$; $F(x) > 0$,
$f(x) = F(x) - h(x)$
$= \int_1^x \frac{e^t}{t} dx - \int_1^x \frac{1}{t} dx = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dx$; $\forall t \in$
$]0; +\infty[, e^t > 1$.
$f(x) > 0, \ \forall x \in]0; +\infty[$, .
$\frac{e^t}{t} > e^{\frac{1}{2}}$; $F(x) \geq \frac{1}{2}x$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

9) $cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$
$= (e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{3ix} \times e^{-3ix} +$
$e^{-4ix})\frac{1}{16}$;
$= \frac{1}{16}(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 6 + 4(e^{2ix} + e^{-2ix})$
$= \frac{1}{16}(2cos4x + 8cos2x + 6)$.
$\int_0^{2\pi} cos^4 x dx = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} cos^4 x + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} cos2x + \frac{6}{16}(2\pi)$
$= \frac{1}{8}\left[\frac{sin4x}{4}\right]_0^{2\pi}$
$= \frac{3\pi}{8}$.

10) 1. a) $J + K = 2\pi$.
$J - K = \int_0^{2\pi} cos2xdx$
$= \left[\frac{1}{2}sin(2\pi)\right]_0^{2\pi}$
$= 0$.
b) $J = \pi$
$K = \pi$.

11) 1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $g'(x) = \sqrt{x+1} + (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
$= \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$
$= \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$.

2. $I = 2\left[\sqrt{x+1}\right]_0^1$
$= 2(\sqrt{2} - 1)$

$$= 2\sqrt{2} - 2.$$

12) $\frac{1}{x^2-1} = a + \frac{bx}{x-1} + \frac{ca}{x+1}$

$a = -1.$

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x-1)}{x} + b + \frac{c(x-1)}{x+1}$

$\frac{1}{2} = b$

$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a(x+1)}{x} + \frac{b(x+1)}{(x-1)} + c$

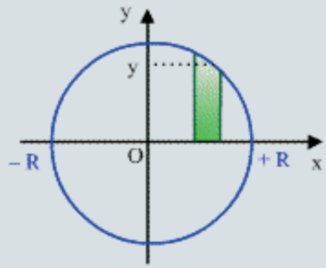
$\frac{1}{2} = c.$

$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

Le reste est facile et laissé aux soins du lecteur

SITUATION D'ÉVALUATION

volume de la sphère.



$$V = \int_{-R}^{+R} \pi y^2 dx = 2\int_{0}^{-R} \pi y^2 dx$$

or comme $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, il vient :

$$V = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)dx = 2\pi[R^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^R$$

$$= 2\pi[R^3 - \frac{R^3}{3}]$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

11 STATISTIQUE

Généralité
Exercices de fixation

	Chimie	Expérimentale	Génétique	Sociale	Total
A	71	24	37	42	174
B	37	4	12	21	74
CDE	36	11	16	25	88
Autres	23	2	9	100	134
	167	41	74	188	470

Nuage de points
Exercice de fixation

Série marginale des types de BAC

Type de BAC	A	B	CDE	Autres
Effectif	174	74	88	134

Série marginale des options

Options	Chimie	Expérimentale	Génétique	Sociale
Effectif	167	41	74	188

Ajustement par la méthode des moindres carrés

Exercice de fixation

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

1) 1. $Cov(X ; Y) = 6,5$
 2. $V(X) = 2,89$; $V(Y) = 14,98$
 3. $r = 0,98$
 4. a) $Y = 2,23X + 9,2$
 b) $X = 0,43Y - 3,39$
 5. $x = 7$, $y = 24,81$

Exercice de renforcement

Exercice 1

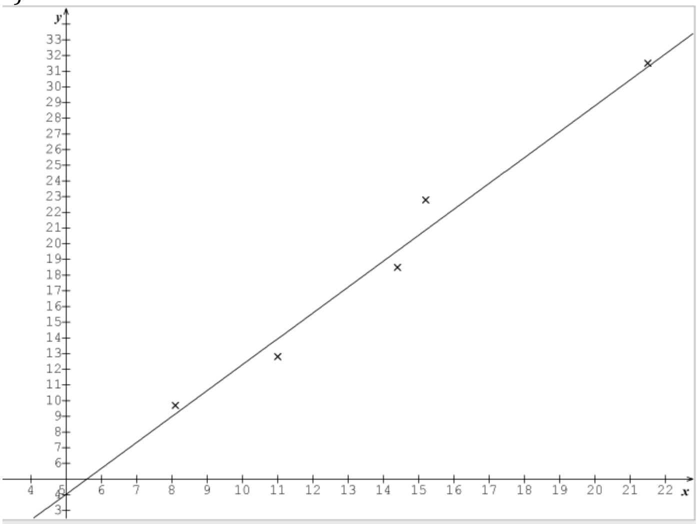
Ages (en années	15	20	26	34	37	43	44	50	52
Salaires	600	750	740	990	820	820	1075	995	910

Coefficient : r = 0,78

Exercice 2

X	8,1	11	14,4	15,2	21,5
Y	9,7	12,8	18,5	22,8	31,5

1)



2)

$\overline{X}$ = 14,04 et $\overline{Y}$ = 18,96

3) r = 0,98 Cov(X ;Y) = 34,31

Y = 1,65X- 4,22

4) Y = 34,06

Exercice 3

	1	2	3	Total
[0,100]	71	24	37	132
[100,200]	37	4	12	53
[200,300]	36	11	16	63
	145	41	68	254

1)

Série marginale du nombre d'enfants

Nombre d'enfants	1	2	3
Effectifs	145	41	68

2)
Série marginale des dépenses

Dépenses	[0,100]	[100,200]	[200,300]
Effectifs	132	53	63

3) a) Ménage d'un enfant : 145
b) 53 ménages

Exercice 4

X	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Y	13	12	14	16	α

1) y = 9x + 0,6

$\bar{X} = 1,6$ $\bar{Y} = 9\times1,6 + 0,6 = 15$. $\frac{13+12+14+16+\alpha}{5} = 15$ soit $\frac{55+\alpha}{5} = 15$

$\alpha = 20$

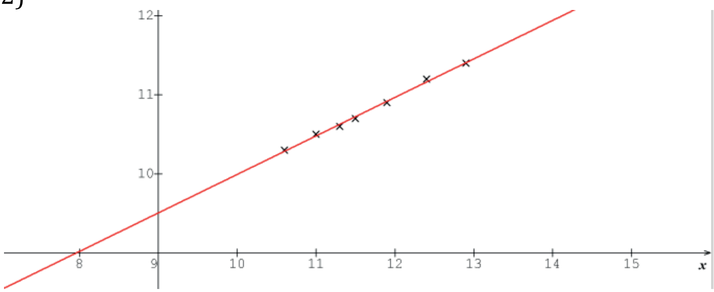
2) Cov(X ; Y) = 0,72, $\sigma(X) = 0,282843$ et $\sigma(Y) = 2,282843$ et r = 0,9

Exercice 5

1)

ti	10,6	11	11,3	11,5	11,9	12,4	12,9
zi	10,3	10,5	10,6	10,7	10,9	11,2	11,4

2)



3) z = 0,5t + 5,1
y = $e^{5,1}x^{0,5}$
Y = 23196

Exercice 6

t_i : année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
x_i : Nombre de spectacles présentés par une troupe théâtrale à Abidjan	48	53	57	62	68	73	77
y_i : Nombre de sachets de gnamankoudji de 50F vendus dans un restaurant d'Adjamé	7 000	7 450	8 000	8 500	9 050	9 550	10 000

1) Au soin du lecteur
2) G(62,57 ; 8507,14)
3) r = 0,99
4) Cov(X, Y) = 10038,8
V(X) = 97,39
V(Y) = 1036731,24
a = 103,08 et b = 2057,25
Donc y = 103,08x + 2057,25

Exercice 7
1) Au soin du lecteur

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13
y_i	198	881	1 256	1 489	1 804	1 983	2 104	2 247	2 312	2 468	2 541	2 639

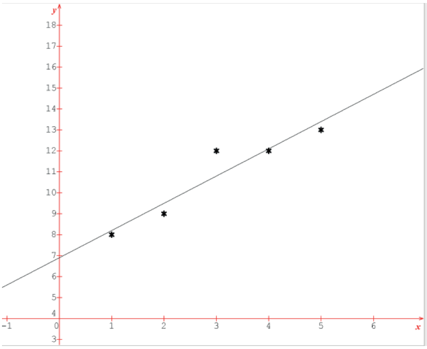
2)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13
$X'=\ln x$	0	0,69	1,1	1,38	1,6	1,79	1,95	2,08	2,2	2,3	2,4	2,56
y_i	198	881	1 256	1 489	1 804	1 983	2 104	2 247	2 312	2 468	2 541	2 639

3) r = 0,99
4) Cov(X, Y) = 520,489
V(X)= 0,53
Y = 971,83X’ + 203,05
5) Y = 971,83lnx + 203,05

Exercice 8

1.



2. G(3 ; 10,8)

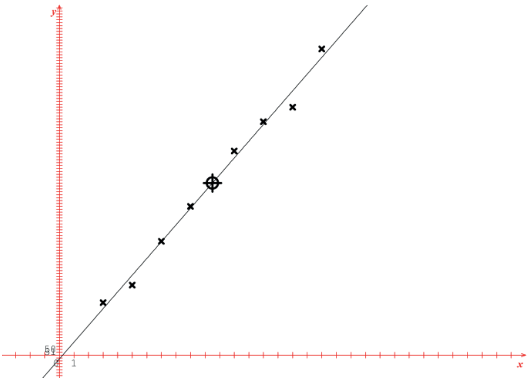
3) $\sigma(X) = 1{,}41$ et $\sigma(Y) = 1{,}93$

4) $Cov(X, Y) = 2{,}6$

5) $r = 0{,}95$

6) $y = 1{,}3x + 6{,}9$

Exercice 9



2) a) G(10,5 ; 109)

b) Voir figure

3. a) Vérification correcte

$Cov(X, Y) = 145$

$V(X) = \frac{101}{4}$

$A = \frac{580}{101}$ et $B = \frac{4919}{101}$

$Y = Ax + B$

c) $r = 0{,}99$

d) $y = 24\times\frac{580}{101} + \frac{4919}{101}$

$y = 186{,}52$

Exercice 10

Y / X	2	3	4	Total
20	0	8	30	38
25	5	20	7	32
30	25	3	2	30
total	30	31	39	100

1. 7 voiture de 25 chevaux ont une durée de pneumatique de 4 milles kilomètres

2. a)

Y	2	3	4
Fréquence	0,30	0 ,31	0,39

X	20	25	30
Fréquence	0,38	0,32	0,30

b) Points à représenter

(20 ; 2) ; (20 ; 3) ; (20 ; 4)

(25 ; 2) ; (25 ; 3) ; (25 ; 4)

(30 ; 2) ; (30 ; 3) ; (30 ; 4)

c) Laissé aux soins du lecteur.

3.a) $\bar{X} = \frac{20\times38+25\times32+30\times30}{100}$ = 24,6

$\bar{Y} = \frac{2\times30+3\times31+4\times39}{100}$ = 3,09

b) V(X) = 16,84 ; V(Y) = 0,68

c) Cov(X ; Y) = - 2,614

d) $y = -0{,}16x + 6{,}9$
e) $x = -3{,}8y + 36{,}4$

4. $r = -0{,}77$

Situation d'évaluation

Cov (X, Y) = 1025,42 $\sigma(X)$ = 3,45 ; σ(Y) =310,039

$Y = 86x+1014{,}85$

$86x+1014{,}85 > 3\,000$

$X > 23{,}08$ soit $X > 24$ ce qui correspond à fin décembre 2019.

12 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

I. DÉFINITION

Exercices de fixation

1) Toute équation dont l'inconnu est une fonction de 3 vers 3 et dans laquelle apparaissent l'inconnue et les dérivées successives de l'inconnue s'appelle équation différentielle.

2) $y' + 4 = 0$ $\qquad$ $y'' + y' + y = 5$

3)

1. $f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 2e^{-x} + 3 = 3$, donc f est solution.
2. $f'(x) - f(x) = e^{x} - e^{x} = 0$ et $0 \neq e^{x}$; donc f n'est pas solution.
3. $f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} - 7$ et $f''(x) = e^{-3x}$, donc f est solution.
4. $xf'(x) - lnx = x\times\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times lnx - lnx$
   $= lnx - lnx$
   $= 0$; donc f est solution.

II. FONCTION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE *y' = ay* (*a* EST UN NOMBRE RÉEL)

Propriété

Exercices de fixation

1) $x \longmapsto ke^{3x}, k \in \mathbb{R}$

2) $x \longmapsto ke^{-2x}, k \in \mathbb{R}$

Propriété

Exercices de fixation

1) * Les solutions sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{2x}, k \in 3$.
   * $f(a) = -1 \Leftrightarrow ke^{0} = 1 \Leftrightarrow k = 1$.

   Donc f : $x \longmapsto e^{2x}$.

2) * Les solutions sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{\frac{1}{3}x}, k \in 3$
* $g(6) = 2 \Leftrightarrow ke^3 = 2 \Leftrightarrow k = 2e^{-3}$.
Donc $g: x \longmapsto 2e^{\frac{1}{3}\times -3}$.

III. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE *y' = ay + b* et *b* réels et *a* $\neq 0$).

Propriété

Exercices de fixation

1)

$$x \longmapsto ke^{2x} - \frac{5}{2}, k \in \mathbb{R}$$

2)

$$x \longmapsto ke^{4x} + 6, k \in \mathbb{R}$$

Propriété

Exercices de fixation

1) * Les solutions sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{2x} - 2$.
* $f(1) = 1 \Leftrightarrow ke^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow ke^2 = 3 \Leftrightarrow k = 3e^{-2}$.
Donc $f: x \longmapsto 3e^{2x-2} - 2$.

2) * Les solutions sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{\frac{1}{3}x} - 6$
* $h(0) = 2 \Leftrightarrow ke^0 - 6 = 2 \Leftrightarrow k - 6 = 2 \Leftrightarrow k = 8$.
$h: x \longmapsto 8e^{\frac{1}{3}x} - 6$.

IV. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE y" = 0.

Propriété

Exercices de fixation

1)

$$x \longmapsto kx + e, \mathbb{R} \ et \ e \in \mathbb{R}$$

2) Soit $f: x \longmapsto x + 8$.
On a : $f'(x) = 1$ et $f''(x) = 0$.
Donc, f est solution de l'équation $y'' = 0$.

Propriété

Exercices de fixation

1) $p(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
$p(1) = 2 \Leftrightarrow a + b = 2$.
$p'(x) = a$ et $p(0) = 1 \Leftrightarrow a = 1$. Par suite, $b = 1$.

Donc $p: x \longmapsto x+1$.

2) Les solutions sont les fonctions : $x \longmapsto ax+b,\ a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
$u(0)=5 \Leftrightarrow b=5$.
$u(2)=9 \Leftrightarrow 2a+b=9$, d'où $a=2$.
$u:\ x \longmapsto 2x+5$.

V. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE y'' = $\omega^2 y$

$(\Omega\ nombre\ réel\ non\ nul)$

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $(E):\ y''=y$. Les solutions sont les fonctions :
$x \longmapsto Ae^{x}+Be^{-x}$, , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
2. $(E):\ y'=4y$. Les solutions sont les fonctions :
$x \longmapsto Ae^{2x}+Be^{-2x}$, $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$..
3. $(E):\ y''=9y$. Les solutions sont les fonctions :
$x \longmapsto Ae^{3x}+Be^{-3x}$, $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

2) 1. $(E):\ y''=\frac{1}{4}y$. Les solutions sont les fonctions :
$x \longmapsto Ae^{\frac{1}{2}x}+Be^{-\frac{1}{2}x}$, $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$..
2. $(E):\ y''=\frac{9}{16}y$. Les solutions sont les fonctions :
$x \longmapsto Ae^{\frac{3}{4}x}+Be^{-\frac{3}{4}x}$, $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$..
3. $(E):\ y''=7y$. Les solutions sont les fonctions :
$x \longmapsto Ae^{+x\sqrt{7}}+Be^{-x\sqrt{7}}$, $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $(E):\ y''=4y$. Les solutions sont :
$f:\ x \longmapsto Ae^{2x}+Be^{-2x}$, $f(0)=1 \Leftrightarrow$A +B = 1 ;
$f'(x)=2Ae^{2x}-2Be^{-2x}$
$f'(0)=2 \Leftrightarrow 2Ae^{0}-2Be^{-0}=4$.
D'où $A=\frac{3}{2}$ et $B=-\frac{1}{2}$.
$f:\ x \longmapsto \frac{3}{2}e^{2x}-1e^{-2x}$.
2. $(E):\ y''=y$.
$y(x)=Ae^{x}+Be^{-x}$
$y(0)=1 \Leftrightarrow A+B=1$.
$y'(x)=Ae^{x}-Be^{-x}$
$y'(0)=3 \Leftrightarrow A-B=3$.
D'où $A=2$ et $B=1$.
$y:\ x \longmapsto 2e^{2x}+e^{-x}$.

2) 1. $(E) : f'' = \frac{1}{9}f$.

$f : x \longmapsto Ae^{\frac{1}{3}x} + Be^{-\frac{1}{3}x}$

$f(3) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}Ae - \frac{1}{3}Be^{-1} = 3$

$\Leftrightarrow Ae - Be^{-1} = 9.$

D'où $A = 5e^{-1}$ et $B = -8e$.

$f : x \longmapsto \frac{5}{2}e^{\frac{1}{3}x-1} - \frac{8}{3}e^{-\frac{1}{3}x+1}$.

2. $(E) : f'' = \frac{9}{4}f$.

$f(x) = Ae^{\frac{3}{2}x} + Be^{-\frac{3}{2}x}$

$f(2) = 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2}Ae^{3} - \frac{3}{2}Be^{-3} = 6$

$\Leftrightarrow Ae^{+3} - Be^{-3} = 4.$

D'où $A = \frac{5}{2}e^{-3}$ et $B = -\frac{3}{2}e^{3}$.

$f : x \longmapsto \frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}x-3} - \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x+3}$.

VI. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $f'' = -\omega^2 f$ (ω nombre réel non nul)

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $f'' = -f$; solutions : $x \longmapsto Acosx + Bsinx$; , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

2. $f'' = -4f$; solutions : $x \longmapsto Acos2x + Bsin2x$; , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

3. $f'' = -9f$; solutions : $x \longmapsto Acos3x + Bsin3x$; , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$..

2) 1. $f'' = -\frac{1}{4}f$; solutions : $x \longmapsto Acos\left(\frac{1}{2}x\right) + Bsin\left(\frac{1}{2}x\right)$; , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

2. $f'' = -\frac{9}{16}f$; solutions : $x \longmapsto Acos\left(\frac{3}{4}x\right) + Bsin\left(\frac{3}{4}x\right)$; , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

3. $f'' = -7f$; solutions :$x \longmapsto Acos(x\sqrt{7}) + Bsin(x\sqrt{7})$; , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

Propriété

Exercices de fixation

1) 1. $(E) : f'' = -4f$; solutions : $x \longmapsto Acos2x + Bsin2x$; , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow Acos\pi + Bsin\pi = 1$

$\Leftrightarrow A = 1.$

$f'(x) = -2Asin2x + 2Bcos\,2x.$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow -2Asin\pi + 2Bcos\pi = 2.$

$\Leftrightarrow B = -1.$

$f : x \longmapsto -cos2x - sin2x.$

2. $(E) : f'' = -f$; solutions : $x \longmapsto Acosx + Bsinx$; , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow Acos\frac{\pi}{2} + Bsin\frac{\pi}{2} = 1$

$\Leftrightarrow B = 1.$

$f'(x) = -Asinx + Bcos\,x.$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow -Asin\frac{\pi}{2} + Bcos\frac{\pi}{2} = 4.$

$\Leftrightarrow A = -4.$

$f : x \longmapsto -4cosx + sinx.$

2) 1. $(E) : f'' = -\frac{1}{9}f$; solutions : $x \longmapsto Acos\frac{\pi}{3} + Bsin\frac{\pi}{3}$; , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

$f(\pi) = 1 \Leftrightarrow Acos\frac{\pi}{3} + Bsin\frac{\pi}{3} = 1$

$\Leftrightarrow A + B\sqrt{3} = 2.$

$f'(x) = -\frac{1}{3}Asin\frac{x}{3} + \frac{1}{3}Bcos\frac{x}{3}$

$f'(\pi) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}Asin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}Bcos\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}.$

$\Leftrightarrow -A\sqrt{3} + B = 4.$

D'où $A = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ et $B = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$

$f : x \longmapsto \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)cos\frac{x}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)sin\frac{x}{3}.$

2. $(E) : f'' = -\frac{9}{16}f$; solutions :$x \longmapsto Acos\frac{3}{4}x + Bsin\frac{3}{4}x$; , $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow Acos\frac{\pi}{4} + Bsin\frac{\pi}{4} = 1$

$\Leftrightarrow A + B = \sqrt{2}.$

$f'(x) = -\frac{3}{4}Asin\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}Bcos\frac{3}{4}x.$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}Asin\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}Bcos\frac{\pi}{4} = 6.$

$\Leftrightarrow -A + B = 8\sqrt{2}.$

D'où $A = -\frac{7}{2}\sqrt{2}$ et $B = \frac{9}{2}\sqrt{2}.$

$f : x \longmapsto -\frac{7}{2}\sqrt{2}cos\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}\sqrt{2}sin\frac{3}{4}x.$

EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

1) 1. $3f'' + 12f = 0 \Leftrightarrow f'' = -4f$.
   Les solutions : $x \longmapsto Acos2x + Bsin2x,\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$.
   2. $f(x) = Acos2x + Bsin2x$, donc $f'(x) = -2Asin2x + 2Bcos2x$.
   3. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow Acos\frac{\pi}{2} + Bsin\frac{\pi}{2} = 2 \Leftrightarrow B = 2$.
   $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow -2Asin\frac{\pi}{2} + 2Bcos\frac{\pi}{2} = -1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$.
   C'est la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{2}cos2x + 2sin2x$.

2) 1. a) * Solutions : $x \longmapsto ke^{x},\quad k \in 3$.
   * On a : $f'(x) = e^{x} = f(x)$, donc f est solution de (E_1').
   b) g est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = g(x) + 1$.
   si et seulement si $e^{x} = e^{x} + k + 1$.
   si et seulement si $k = -1$.
   $g\ :\ x \longmapsto e^{x} - 1$.
   2. Une solution de (E_2) est : $x \longmapsto e^{x} - b$.
   3. Une solution de (E) est : $x \longmapsto e^{ax} - \frac{b}{a}$ si $a \neq 0$ et $x \longmapsto bx$, si $a = 0$.

3) 1. $4y'' + 9y = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{9}{4}y$.
   Solutions : $t \longmapsto A\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + Bsin\left(\frac{3}{2}t\right),\ A \in 3,\ B \in 3.$.
   2. a) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.
   b) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow A\cos\frac{\pi}{4} + Bsin\frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow A + B = \sqrt{2}$.
   $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}Asin\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}Bcos\frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow -A + B = 0$, car
   $f'(x) = -\frac{3}{2}Asin\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{3}{2}Bcos\left(\frac{3}{2}t\right)$.
   D'où $A = B = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Par conséquent, $f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}sin\left(\frac{3}{2}t\right)$.
   3. $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}sin\left(\frac{3}{2}t\right)$
   $= cos\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{3}{2}t\right) + sin\left(\frac{\pi}{4}\right)sin\left(\frac{3}{2}t\right)$
   $= cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$.

4) 1. $g'(x) - 2g(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}$.
   Donc g est solution de (E).
   2. Les solutions sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{2x},\ k \in 3$.
   3. f est solution de (E) si et seulement si $f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$;
   si et seulement si $f'(x) - 2f(x) = g'^{(x)} - 2g(x)$,
   car $g' - 2g = e^{2x}$;

si et seulement si $f'(x) - g'(x) - 2f(x) + 2g(x) = 0$;
si et seulement si $(f' - g')(x) - 2(f - g)(x) = 0$;
si et seulement si $(f - g)$ est solution de (G).

4. Les solutions sont les fonctions :
   $x \longmapsto ke^{2x} + xe^{2x}, k \in$ 3.
5. Soit F cette solution.
   $F(1) = 0 \Leftrightarrow ke^2 + e^2 = 0 \Leftrightarrow k = -1.$
   Donc F : $x \longmapsto (x - 1)e^{2x}$.

SITUATION D'ÉVALUATION

1) 1. Les solutions sont les fonctions : $t \longmapsto ke^{-tln3}$, $k \in$ 3.
2. $d\theta = -ln(3)\theta dt \Leftrightarrow \theta' = -\big(ln(3)\big)\theta$, donc θ est solution de l'équation différentielle $y' = -yln3$.
   D'après la question 1, on a $\theta(t) = ke^{-tln3}$.
   $\theta(0) = 100 - 10 \Leftrightarrow k \times e^0 = 90 \Leftrightarrow k = 90.$
   Donc $\theta(t) = 90e^{-tln3}$.
3. $\theta(t) < 15 \Leftrightarrow 90e^{-tln3} < 15 \Leftrightarrow e^{-tln3} < \frac{1}{6}$.
   $\Leftrightarrow -tln3 < ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow t > \frac{ln\left(\frac{1}{6}\right)}{-ln3}$.
   Or $-\frac{ln\left(\frac{1}{6}\right)}{ln3} \simeq 1{,}63$, donc la température passera au-dessous de 15°C après 1 mn 37 s.

CORRIGÉS
DEVOIR SURVEILLÉ

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1

V

F

F

V

V

Exercice 2

1) Ecrire $P_F(H)$ au lieu de $P_H(F)$, alors la réponse est $P_F(H) = 0,7$

2) $P(A \cup B) = 0,9$

3) a = - 12

Exercice 3

1. $P = \frac{C_3^2 \times C_3^2}{C_5^2 \times C_5^2} + \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2 \times C_5^2} + \frac{C_2^2 \times C_2^2}{C_5^2 \times C_5^2}$

$= \frac{9+36+1}{100}$

$= \frac{46}{100}$

$= 0,46$

2.

a) loi de X

X	0	1	2	3	4
P(X = x_i	0,03	0,24	0,46	0,24	0,03

b) $E(x) = 0 \times 0,03 + 0,24 + 2 \times 0,46 + 3 \times 0,24 + 4 \times 0,03$

$E(X) = 0,24 + 0,92 + 0,72 + 0,12$

$E(X) = 2$

Il peut espérer gagner 200 F

Exercice 4

1. $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - x \quad si \ x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[\\ f(x) = \sqrt{2x - x^2} - x \quad si \quad x \in [0; 2] \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1 = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{\frac{2}{x} - 1} - 1 = +\infty$

Donc f admet une demi-tangente dirigée vers le haut en 0.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} -\sqrt{\frac{x}{2-x}} - 1 = -\infty$$

Donc f admet une demi-tangente dirigée vers le haut en 2.

2. a) $si\ x > 2,\ f(x) = \sqrt{x^2-2x} - x = \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ = -1, donc la droite d'équation y = - 1 est asymptote à la courbe de représentative de *f*.

b) $\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$

$$f(x) - (-2x+1) = \sqrt{x^2-2x} + x - 1 = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} - 1$$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (-2x+1) = 0$

donc la droite d'équation y = -2x + 1 est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

3. a) $\forall x \in]-\infty; 0[, x - 1 < \sqrt{x^2-2x}$ car x< 0 et $\sqrt{x^2-2x} > 0$.

b) $\forall x \in]2; +\infty[$, $x - 1 - \sqrt{x^2-2x} > 0$ car $(x-1)^2 - (x^2-2x) = 1$.

c) $1 - x - \sqrt{2x-x^2} \geq 0$ si x >1, $1 - x - \sqrt{2x-x^2} \leq 0$

si x < 1, on a : $1 - x \geq \sqrt{2x-x^2}$

$2x^2 - 4x + 1 \geq 0$

x	0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		1
$2x^2 - 4x + 1$	1	+	0	-	-1

x	0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		2
$1 - x - \sqrt{2x-x^2}$	1	+	0	-	-1

S = $]0 ; \frac{2-\sqrt{2}}{2}]$

4. a) et 4.b). $\begin{cases} f'(x) = \frac{x-1-\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}} & si\ x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ f(x) = \frac{1-x-\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}} & si\ \ x \in]0; 2[\end{cases}$

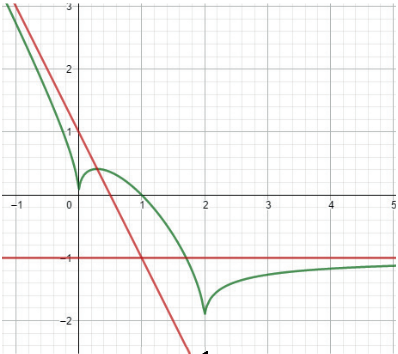
5.D'après la question 3, on a :

f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]\frac{2-\sqrt{2}}{2} ; 2[$

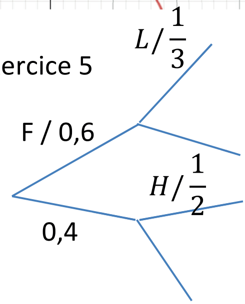
f est croissante sur $]0 ; \frac{2-\sqrt{2}}{2}[$ et sur $]2; +\infty[$

x	$-\infty$		0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	||	+	0	-	||	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\frac{2-\sqrt{2}}{2})$	↘	-2	↗	1

6.



Exercice 5



P(L) = P(L∩F) + P(L∩H) = $0{,}6\times\frac{1}{3} + 0{,}4\times\frac{1}{2} = 0{,}4$

$P_L(F) = \frac{P(L\cap F)}{P(L)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$

Exercice 6

Soit B le bénéfice qui est égal au prix de vente moins le coût de production.

En tenant compte des unités on a :

$B(x) = 2x - (x^2 - 60x)$

$B(X) = 58x - x^2$

$B'(x) = 50 - 2x$

Le bénéfice est maximal pour x = 25 et 25 $\in$ [0 ; 40].

DEVOIR SURVEILLÉ 3

EXERCICE 1 (2 points)

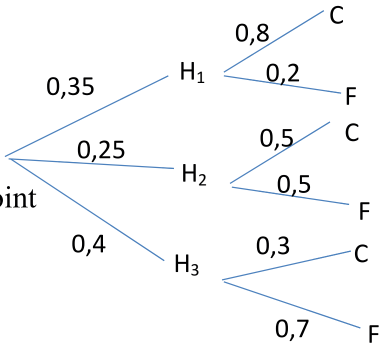
1.b) ; 2. d) ; 3.b) ; 4. d) …….. …………. 0, 5 point × 4

EXERCICE 2 (2 points)

1. F ; 2.F ; 3.F; 4.F…….. ………………… 0, 5 point × 4

EXERCICE 3 (4 points)

1. a)



1 point …….. …………………

b)	$P(C\cap H_3) = 0{,}4 \times 0{,}3$	0,25 point
	$P(C\cap H) = 0{,}12$	0,25 point
c)	$P(C) = P(C\cap H_1) + P(C\cap H_2) + P(C\cap H_3)$	0,25 point
	$P(C) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}3$	0,25 point
	$P(C) = 0{,}525$	0,25 point
d)	$P_C(H_1) = \dfrac{P(C\cap H_1)}{P(C)}$	0,25 point
	$P_C(H_1) = 0{,}533$	0,25 point
2.a)	Justification correcte de X suit une loi binomiale	0,25 point
	Les paramètres sont : $n = 10$ et $p = 0{,}525$	0,25 point
b)	$P(X = 5) = C_{10}^{5} \times p^5 \times (1-p)^5$	0,25 point
	$P(X = 5) = C_{10}^{5} \times (0{,}525)^5 \times (0{,}475)^5$	0,25 point
	$P(X = 5) = 0{,}243$	0,25 point

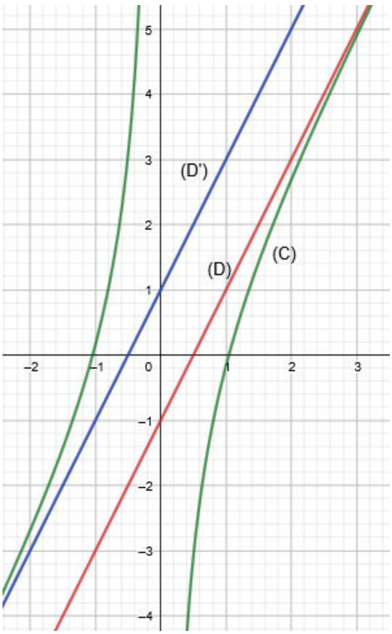
EXERCICE 4 (3 points)

1.	z = $\frac{2iz}{z-i}$	0,25 point
	z = 0 ou z = 3i	0,25 point × 2
2.	$z_{B'} = 4i$; $z_{C'} = -1 + i$	0,25 point × 2
3.a)	Justification correcte de : z' – 2i = $\frac{-2}{z-i}$	0,75 point
b)	Traduction de M∈ C (A ; 1) équivaut à $\lvert z - i \rvert = 1$	0,25 point
	Justification correcte de $\lvert z' - 2i \rvert = 2$	0,25 point
	M'appartient au cercle de centre B d'affixe 2i et de rayon 2	0,25 point× 2

EXERCICE 5 (5 points)

1.	D_f est symétrique par rapport à 0 ……………………… ……… Justification correcte de $f(-x) = -f(x)$ ………………………. <u>Interprétation graphique</u> Le point O est centre de symétrie de la courbe (C_f) …………….	0,25 point 0,25 point 0,25 point
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$	0,25 point
	La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe (C_f).	0,25 point
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	0,25 point
3.a)	Justification correcte de $f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{e^x - 1}$	0,5 point
b)	Démonstration correcte de (D_1) est une asymptote à(C_f) en $+\infty$	0,25 point
c)	Signe correcte de $f(x) - (2x - 1)$ ……………………………. La courbe (C_f) est au-dessous de la droite (D_1) sur $]0; +\infty[$ …..	0,25 point 0,25 point

<table>
<tr><td>4.a)</td><td>Justification correcte de $f'(x) = 2 + \frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$</td><td>0,5 point</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Justification correcte de : $\forall\, x \in\ ]0;+\infty[\ f'(x) > 0$ ……………
f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ ……………………………</td><td>0,25 point
0,25 point</td></tr>
<tr><td>c)</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$-\infty \nearrow +\infty$</td></tr>
</table></td><td>0,25 point</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Voir feuille annexe
Asymptotes…………………………………………………………
Courbe (C_f) …………………………………………………………</td><td>0.25×2 point
0.5 point</td></tr>
</table>



EXERCICE 6 (4 points)

<table>
<tr><td>1.</td><td>x le nombre de sachets et B(x) le bénéfice. Le nombre recherché est l'abscisse du point où B atteint son maximum sur l'intervalle [1 ; 3].
<u>Calculons la dérivée de B</u>
$B'(x) = -x + 1 + \frac{2}{x} = \frac{-x^2 + x + 2}{x}$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td><u>Déterminons le signe de $B'(x)$sur [1 ; 3]</u>
<table><tr><td>x</td><td>1   2   3</td></tr><tr><td>$B'(x)$</td><td>+   0   −</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>3.</td><td><u>Dressons le tableau de variation de $B(x)$ sur [1 ; 3]</u>
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$B'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td></tr><tr><td>$B(x)$</td><td>$\frac{5}{2}$ ↗</td><td>2+2ln2</td><td>↘ $\frac{1}{2}$+2ln3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>4.</td><td><u>Exploitation du tableau de variation de la fonction B</u>
B atteint son maximum au point d'abscisse 2.
Le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour atteindre un bénéfice maximal est 2 000.</td></tr>
</table>

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
Pour le compte de JD Éditions.
Tél. : 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions