



OUVRAGE COLLABORATIF

100% GRATUIT

MATHEMATIQUES en 2^{nde} C

Cours • Exercices

Conformes au nouveau programme en vigueur
au Cameroun



Document libre et gratuit. Ne peut être vendu

Groupe WhatsApp
LES GRANDS PROFS DE MATHS

3^{EME} EDITION

AVANT PROPOS

Dans un contexte où l'insertion dans le monde de l'emploi est devenue de plus en plus difficile, beaucoup d'Etats ont compris qu'en ce qui concerne le système éducatif, il faut mettre l'apprenant au centre de la construction du savoir ; il faut une école soucieuse d'outiller les apprenants afin qu'ils puissent faire face à des situations de vie réelle, complexes et diversifiées. À la place d'une école coupée de la société, il faut une école intégrée, soucieuse du développement durable, et qui prend en compte les cultures et les savoirs locaux. C'est ainsi que dès 2014, le Cameroun a emboité le pas à d'autres pays africains et a ouvert les portes à l'APC qui remplacera progressivement l'APO jusqu'en classe de terminale en 2020. Pour le gouvernement, c'est un outil majeur pour atteindre l'émergence en 2035. Un groupe de jeune enseignant soucieux de l'éducation en Afrique en générale et au Cameroun en particulier a donc décidé de ne pas rester spectateur et de jouer les premiers rôles dans ce processus.

Cet ouvrage et toute la collection de la 6^{ème} en Tle est l'œuvre d'un groupe d'enseignant dynamique et rompu à la tâche. Ils sont réunis dans un forum whatsapp dénommé « Grangprofs de maths (GPM) ». Cette 3^{ème} édition est le fruit de l'un de ces objectifs majeurs ; une conséquence de trois mois et demi de travail dont la partie intense s'étend du 27/07/2020 au 05/10/2020 (date de la rentrée scolaire au Cameroun.)

Destinés exclusivement à l'usage de l'enseignant, les documents de cette édition n'ont pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme mais d'être le complémentaire de ces derniers. Chaque leçon de cette édition respecte les dernières mises à jour qu'ont connu l'APC qui est encore jeune et en mutation au Cameroun. Ainsi, dans toutes les leçons de cette 3^{ème} édition, il existe une bonne corrélation entre la situation problème et une partie de l'activité d'apprentissage donc l'objectif est non seulement d'installer les ressources de la leçon, mais aussi de résoudre le problème posé dans la situation problème.

Cette édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner à tous les chefs d'ateliers qui ont travaillé inlassablement pour mener ce projet à bon port ; aux administrateurs, surtout *M. Pouokam Léopold Lucien* qui a su remobilisé les troupes quand le déroulement des travaux a connu un coup à cause de la rentrée scolaire ; difficile de ne pas mentionner l'un des pédagogues dont la contribution pour la fusion des documents a été capitale, il s'agit de *M. Ngandi Michel*. Nous ne saurons terminer sans féliciter les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet, y ont consacré leur précieux temps et leur savoir-faire non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 185 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours produits.

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que les éventuelles coquilles que pourrait contenir un document de cette collection, rencontreront l'indulgence compréhension des utilisateurs. Toutefois, toutes éventuelles suggestions ou critiques constructives peuvent être envoyés via l'une des adresses mails suivantes : leopouokam@gmail.com ou gkppedro@yahoo.fr.

Tous les enseignants ou passionnés de mathématiques désirant faire partie de la famille << GPM >> et disponibles à participer aux futurs projets du groupe peuvent écrire via Whatsapp à l'un des administrateurs ci-dessous : M. GUELA KAMDEM Pierre (697 473 953/ 678 009 612), M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien (696 090 236/ 651 993 749), M. TACHAGO WABO Wilfried Anderson (699 494 671) et *BITHA NGA OWONA Delphine Salomé*. (677199648).

NB : toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Les auteurs.

Liste des enseignants ayant participé au projet dans l'atelier 2nd C sous la coordination de M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien.

<i>CHAPITRES</i>	<i>NOMS ET PRENOMS</i>	<i>Numéros de téléphones</i>
<i>CALCUL DANS R</i>	<i>Kamdjom Nengou Yoel S</i>	<i>690524656</i>
<i>Equations, Inéquations</i>	<i>Geula kamdem pierre</i>	<i>697473953 / 678009612</i>
<i>Systèmes d'équations et d'inéquations linéaire dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$</i>	<i>Geula kamdem pierre</i>	<i>697473953 / 678009612</i>
<i>Généralités sur les fonctions (Étude de fonctions usuelles)</i>	<i>Tsopmo Mouafo wilfried</i>	<i>690303392</i>
<i>Notion de groupe</i>	<i>Kouomogne k. laurant et Nouwou Noubissi Sagnia</i>	<i>658899406 / 67996828</i>
<i>Vecteurs du plan</i>	<i>Balla Adalbert B.</i>	<i>696114441</i>
<i>Angles orientés et trigonométrie</i>	<i>Bitha Nga Owona Delphine Salome</i>	<i>677199648</i>
<i>Angles inscrits polygones réguliers</i>	<i>Happi Noubissi Cedric Gael</i>	<i>698570618</i>
<i>Produit scalaire de deux vecteurs du plan</i>	<i>Ngo'o Mbang Servais</i>	<i>675379667</i>
<i>Droites et Cercles du plan</i>	<i>Tchoffo Hugues Martial</i>	<i>697872953</i>
<i>Transformations planes</i>	<i>Tchoffo Hugues Martial</i>	<i>697872953</i>
<i>Statistiques</i>	<i>Nkaldjop Rene</i>	<i>696738770</i>
<i>Géométrie dans l'espace</i>	<i>Ndong Mba Alphonse</i>	<i>+24165625582</i>

<i>CHAPITRES</i>	<i>Module</i>	<i>Pages</i>
<i>Calcul dans \mathbb{R}</i>	<i>MODULE 17 : relation et opération dans l'ensemble des nombres réels.</i>	5
<i>Equations, Inéquations</i>		20
<i>Systèmes d'équations et d'inéquations linéaire dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$</i>		31
<i>Généralités sur les fonctions (Étude de fonctions usuelles)</i>		40
<i>Notion de groupe</i>		55
<i>Angles orientés et trigonométrie</i>	<i>MODULE 19: CONFIGURATION ET TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DU PLAN</i>	62
<i>Angles inscrits polygones réguliers</i>		71
<i>Vecteurs du plan</i>		80
<i>Transformations planes</i>		96
<i>Produit scalaire de deux vecteurs du plan</i>		111
<i>Droites et Cercles du plan</i>		124
<i>Géométrie dans l'espace</i>	<i>MODULE 20: GEOMETRIE DANS L'ESPACE</i>	136
<i>Statistiques</i>	<i>MODULE 18: ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES</i>	147

*MODULE 17 RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES
DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS*

CHAPITRE I : CALCUL DANS IR

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Approfondir les notions d'ensemble des nombres réels ainsi que ses sous-ensembles.
- Consolider chez l'apprenant les notions d'addition, de soustraction, de multiplication et de division des nombres réels.
- Connaître les règles de comparaison d'un nombre réel.
- Maîtriser la notion de valeur absolue d'un nombre réel.
- Savoir calculer les valeurs approchées et l'écriture scientifique ainsi que l'arrondi d'un nombre réel.

MOTIVATION

La maîtrise des opérations fondamentales que sont la multiplication, la division, l'addition et la soustraction est de nature à doter à l'apprenant les outils fondamentaux qu'ils auront besoins au quotidien pour résoudre les problèmes de la vie active faisant intervenir les calculs.

LECON 1: IR ET SES SOUS-ENSEMBLES IN, Z, ID, Q Durée: 100 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Reconnaître les entiers naturels, les entiers relatifs, les nombres décimaux, les nombres rationnels et les nombres réels.
- Justifier qu'un nombre est rationnel ou irrationnel.

PREREQUIS

- 1- Définition d'un ensemble
- 2- Donner la signification de chacun des ensembles suivants **IN**, **Z**, **ID**, **Q**, puis donner 04 chiffres qui appartiennent à : **IN** ; **Z** mais qui n'appartient pas à **IN** ; **ID** mais qui n'appartient pas à **Z** ; **Q**.

SITUATION PROBLEME :

ABCD est un carré de cote 1m. Peut-on écrire la longueur de l'une de ses diagonales comme étant une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

- 1) Calculer la longueur AC de la situation problème.

2) On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ et $\frac{a}{b}$ irréductible.

a) Donner la formule générale des nombres entiers naturels pairs.

b) Montrer que a^2 est pair.

c) Recopier et compléter ce tableau.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^2													

d) En déduire de ce tableau le lien qui existe entre la parité de a^2 et a.

e) Montrer que b est pair puis en déduire que l'hypothèse << $\frac{a}{b}$ irréductible >> est contredite.

f) Donner une réponse à la situation problème.

SOLUTION

1) D'après la propriété de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow AC^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}.$$

2) a) Formule générale des nombres entiers naturels pair : $N = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que a^2 est pair.

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 = 2k \text{ avec } k = b^2 \in \mathbb{N}.$$

C-	a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

d- Nous déduisons de ce tableau que si a^2 est pair alors a est pair. Par contre si a^2 impair alors a impair.

e- Montrons que b est pair.

Comme $a^2 = 2b^2$, alors $b^2 = \frac{a^2}{2}$. Mais a est pair, c'est à dire $a = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$.

Donc, $b^2 = \frac{(2k')^2}{2} = \frac{4k'^2}{2} = 2k'^2$. D'où b^2 est pair ; par conséquent b est pair c'est-à-dire $b = 2k''$ avec $k'' \in \mathbb{N}$.

Nous en déduisons que $\frac{a}{b} = \frac{2k'}{2k''}$, Nous constatons que cette fraction est simplifiable par 2 par conséquent l'hypothèse << $\frac{a}{b}$ irréductible >> est contredite.

d- D'après ce qui précède, la longueur de l'une des diagonales qui est AC ou BD est $\sqrt{2}$ donc n'est pas une fraction irréductible (réponse de la SP).

ACTIVITÉ 2

Soit $x = 1,020202020202\dots02$

1) Quelle est la période et la longueur de la période de sa partie décimale.

2) Quelle est le 14-eme chiffre de x.

3) Quelle équation obtient-ont en multipliant x par 10^p ou p représente la longueur de la période de la partie décimale.

4) Quelle est la valeur de $10^p x - x$. En déduire que $x = \frac{a}{b}$, où a et b les entiers naturels non nuls à déterminer.

SOLUTION

- 1) La période est 02 et la longueur de la période de sa partie décimale est 2.
- 2) Le 14-eme chiffre de x est 0
- 3) En multipliant x par 10^p avec $p=2$ on obtient l'équation $10^2x = 102,0202020202 \dots 02$.
- 4) $10^2x - x = 102,0202020202 \dots 02 - 1,020202020202 \dots 02 = 101 \Rightarrow \underline{10^2x - x = 101}$
 $\Rightarrow x(100 - 1) = 101$
 $\Rightarrow x = \frac{101}{99}$.

RESUME:

- ❖ \mathbb{Q} est l'ensemble des nombres rationnels. Ces nombres s'écrivent sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Un nombre rationnel peut se reconnaître par sa partie décimale finie et également par sa partie décimale infinie et périodique. Exemple $1,0202020202 \dots 02$; $4,556556556556 \dots 556$. Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, on dit qu'ils sont irrationnels car ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'un quotient d'entier relatif. Exemple $\sqrt{2}$, π , $\sqrt{3}$ etc.
- ❖ **Remarque : soit $k \in \mathbb{IN}$, \sqrt{k} est un nombre rationnel si et seulement si $\sqrt{k} = \frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible. Dans le cas contraire \sqrt{k} est irrationnel.**
- ❖ \mathbb{ID} ensemble des nombres décimaux relatifs se reconnaissent par sa partie décimale finie. Un nombre décimal est sous la forme fractionnelle irréductible lorsque le dénominateur est sous la forme $2^n \times 5^m$ avec n et m des entiers relatifs. Exemple : $0,988$; $-33,3$; $\frac{3}{10}$. Par contre $\frac{3}{7}$ n'est pas un nombre décimal, car son dénominateur n'est pas sous la forme $2^n \times 5^m$.

Remarque : l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres irrationnels réunis constituent l'ensemble des nombres réels. Ce nouvel ensemble est noté \mathbb{IR} . D'où le schéma d'inclusion suivant :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

EXERCICE D'APPLICATION

- 1) Résoudre l'équation : $(x-3)(x+5)(2x-5)(3x+5) = 0$ successivement dans les ensembles \mathbb{IN} , \mathbb{Z} , \mathbb{ID} , \mathbb{Q} , \mathbb{IR} .
- 2) Déterminer parmi les sous-ensembles \mathbb{IN} , \mathbb{Z} , \mathbb{ID} , \mathbb{Q} , \mathbb{IR} le plus petit ensemble contenant chacun des nombres suivants : $A = \frac{\sqrt{144}}{3}$, $B = \frac{\pi}{314}$ et $C = \frac{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)}{4000}$
- 3) Démontrer que le nombre $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

LECON 2 : OPERATION DANS IR**Durée : 50min****MOTIVATION**

Des notions de partage, de rabais des prix, de taux d'intérêt, etc., sont de plus en plus récurrent dans la vie active. Cependant, cette leçon nous aidera à résoudre les problèmes liés à ces situations.

PREREQUIS

Sans utiliser la calculatrice compléter les expressions suivantes :

- 1) $-1,5 + (\dots) + 3,9 = -11$; b) $17 - (\dots) + 2 = -23$; c) $-3(\dots) - 12 = 0$
 2) $\sqrt{2} + (\dots)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (\dots)$; c) $-\sqrt{2} - (\dots) = \sqrt{2}$

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

➤ Savoir manipuler l'addition, la soustraction, la multiplication et la division dans une opération tout en respectant les règles de priorité.

SITUATION PROBLEME :

Madame KAYO vient de commencer son commerce d'huile de palme. Elle dispose un récipient qu'elle a rempli au plein. Le premier jour elle vend le $\frac{1}{3}$, le deuxième jour elle vend le $\frac{5}{6}$ du reste. Le troisième jour elle augmente dans le récipient $\frac{2}{9}$ de ce qu'elle possédait au départ le premier jour. Ensuite, 4 clients se présentent et veulent chacun $\frac{1}{12}$ de ce que madame Kayo possédait au premier jour. Mme Kayo pourrait-elle satisfaire ses clients ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE.

- 1) Donnez l'expression de l'opération à effectuer pour trouver la fraction d'huile contenue dans le récipient juste avant que les clients de Mme KAYO n'arrivent.
- 2) En déduire la fraction d'huile maximale que Mme KAYO pourrait vendre équitablement à chacun des 4 clients.
- 3) Pourrait-elle satisfaire ses clients ?

SOLUTION

- 1) Evaluons les fractions d'huiles restantes dans le récipient les trois premiers jours.
 - Premier jour : $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
 - Deuxième jour : $(\frac{2}{3}) - (\frac{2}{3}) \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \times (1 - \frac{5}{6})$. D'où la fraction contenue dans le récipient d'huile juste avant que les clients de Mme KAYO n'arrivent au troisième jour est de : $\frac{2}{3} \times (1 - \frac{5}{6}) + \frac{2}{9}$.
- 2) la fraction d'huile maximale que Mme KAYO pourrait vendre équitablement à chacun des 4 clients est de : $(\frac{2}{3} \times (1 - \frac{5}{6}) + \frac{2}{9}) \div 4 = \frac{1}{12}$.
- 3) Oui.

ACTIVITÉ 2

1) Effectuer les opérations : $A = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{3} - \frac{7}{2}\right) \div \left(1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right)$; $B = (2\sqrt{3} + \sqrt{5})^3$ $C = \frac{2\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}-2)^2}$

Donner le résultat de C sans radical au dénominateur.

2) Ecrire sous forme d'un quotient sans radicale aux dénominateurs les nombres suivants :

$$D = \frac{1}{2\sqrt{3}} ; \quad E = \frac{12}{3+\sqrt{3}} ; \quad F = \frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

RESUME

❖ Règle de calcul dans IR

- a, b, et c sont quatre nombres réels quelconque :
 - $a+b = b+a$ et $ab = ba$ on dit que l'addition et la multiplication sont commutatives dans IR.
 - $(a+b)+c = a+(b+c)$ et $(ab)c = a(bc)$ on dit que l'addition et la multiplication sont associatives dans IR.
- $\forall a, c \in \mathbb{R}; \forall b, d \in \mathbb{R}^* \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$
- $\forall c, d \in \mathbb{R}^* ; \frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{d}} = \frac{1}{c} \times \frac{d}{1} = \frac{d}{c}$
- $\forall k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{I} : k \times \frac{a}{b} = \frac{k \times a}{b}$
- Opération avec les Radicales
 - $\forall a \in \mathbb{R}^* \quad (\sqrt{a})^2 = |a|$
 - $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$
 - $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} ; \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

EXERCICE APPLICATION

1- Calculer les nombres ci-contre et donner le résultat sous forme de nombre rationnels irréductibles :

$$A = \left(\frac{5}{3} - \frac{9}{5}\right) \div \left(4 - \frac{2}{3}\right) ; \quad B = \left(\frac{6}{6-\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\right) \times \frac{7}{4}$$

2- Démontrer que pour tout réel $x < 1$: $\frac{1}{\sqrt{1-x}+1} = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

LEÇON 3 : COMPARAISON DANS IR

Durée : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

➤ Comparer deux nombres réels en se servant des propriétés de comparaisons.

SITUATION PROBLÈME

On donne deux triangles ABC rectangle en A et DEF rectangle en D tels que : $AC = 7$; $AB = 6$ et $\alpha = \widehat{ABC}$; $DF = 7 + \sqrt{3}$; $DE = 6 + \sqrt{3}$ et $\beta = \widehat{DEF}$ les distances en cm. Peut-on dire que $\tan \beta$ est supérieure à $\tan \alpha$?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

- 1- Calculer $\tan \beta$ puis $\tan \alpha$
- 2- Exprimer la différence $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c}$ en fonction de $a - b$ avec a, b et c des réels positif non nuls.
- 3- Donne une règle qui vous permet de comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$
- 4- Répond à la question de la situation problème.

SOLUTION

$$1- \tan \alpha = \frac{7}{6} \text{ et } \tan \beta = \frac{7+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}}$$

Exprimons la différence $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c}$ en fonction de $a - b$ avec a, b et c des réels positif non nuls.

$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{a(b+c) - b(a+c)}{b(b+c)} = \frac{ab+ac-ba-bc}{b^2+bc} = \frac{ac-bc}{b^2+bc} = \frac{c(a-b)}{b^2+bc}$$

- 2- Donnons une règle qui nous permet de comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$.

Or, la différence $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{c(a-b)}{b^2+bc}$. Donc la règle est ceci : comparer a et b .

Si $a > b$ alors $a-b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

Si $a < b$, $a-b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

Si $a = b$, $a-b = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+c}$

- 3- Réponse de la situation problème.

Or, $\tan \alpha = \frac{7}{6}$; $\tan \beta = \frac{7+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}}$. Ceci nous demande de comparer $\frac{7}{6}$ et $\frac{7+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}}$. Nous constatons de ce qui précède

que $a = 7$; $b = 6$ et $c = \sqrt{3}$. D'après la règle précédente $7 > 6$ d'où $\frac{7}{6} > \frac{7+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}}$. En conclusion $\tan \alpha > \tan \beta$.

RESUME

❖ Règle de comparaison de deux nombres réels :

➤ Pour comparer deux nombres réels a et b on peut étudier le signe de leur différence $a - b$:

- $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$
- $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$
- $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$

➤ Si a et b sont deux réels strictement positifs alors on peut comparer leur carré, leur racine carré ou leur inverse :

- $\left(\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow (a \leq b)$
- $(a^2 \leq b^2) \Leftrightarrow (a \leq b)$

❖ PROPRIÉTÉ

- a et b étant positifs si $(\sqrt{a} \leq \sqrt{b})$ alors $(a \leq b)$
- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$
- si $(a \leq b \text{ et } c > 0)$ alors $(ac \leq bc)$
- si $((a \leq b) \text{ et } c < 0)$ alors $(ac \geq bc)$

❖ Encadrement d'un nombre réel

➤ Encadrement d'un produit : soit a, b, c et d des réels positifs tels que : $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.

- $ac \leq xy \leq bd$;
- soit e un réel si $e > 0$ alors $ae \leq ex \leq be$; par contre si $e < 0$ alors $be \leq xe \leq ae$.

➤ Encadrement d'une somme : soient $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$

- $a+c \leq x+y \leq b+d$:

NB : pour encadrer $x-y$, on encadre d'abord $(-y)$ puis $x + (-y)$ Exemple : on donne $-7 \leq x \leq 8$ et $\sqrt{7} \leq y \leq 4$, encadrer $x + y$ et $x-y$.

Encadrement de $x + y$ est : $-7 + \sqrt{7} \leq x + y \leq 12$;

Encadrement de $x - y$: $-4 \leq -y \leq -\sqrt{7} \Rightarrow -7 + (-4) \leq x - y \leq 4 - \sqrt{7} \Rightarrow$

$-11 \leq x - y \leq 4 - \sqrt{7}$

- Encadrement de l'inverse : Soit $a \leq x \leq b$ équivaut à $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$
- Encadrement d'un carré et racine carré : Soient a et b les réels positifs tous non nuls
 - $a \leq x \leq b$ équivaut à $a^2 \leq x^2 \leq b^2$
 - $a \leq x \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{b}$

Encadrement d'un quotient : pour encadrer $\frac{x}{y}$ on encadre d'abord $\frac{1}{y}$ puis $x \times \frac{1}{y}$

❖ INTERVALLES

Notation et vocabulaire :

Désormais les flèche \leftarrow et \rightarrow utilisées dans la notation des intervalles pourront être remplacées respectivement par les symboles $-\infty$ et $+\infty$ encore appelés << moins l'infini >> et << plus l'infini >>.

Notation utilisées	$[a ; \rightarrow [$	$] \leftarrow ; b]$	$] \leftarrow ; a[$	$] \leftarrow ; \rightarrow [$
Autres Notation	$[a ; +\infty[$	$] -\infty ; b]$	$] -\infty ; a[$	$] -\infty ; +\infty[$

Définition 1 : soit I un intervalle de \mathbb{R} on dit que I est un intervalle si et seulement si pour tout $x, y \in I$, $[x ; y] \subset I$.

Contre-exemple : $\mathbb{R}^* \setminus n$ n'est pas un intervalle, car l'intervalle $[-5 ; 4]$ n'est pas une partie dans \mathbb{R}^* .

Appartenance de x a un intervalle	Inégalités vérifiées par x
$x \in [a; +\infty[$	$x \geq a$
$x \in]a; +\infty[$	$x > a$
$x \in]-\infty; b]$	$x \leq b$
$x \in]-\infty; b[$	$x < b$
$x \in]a; b[$	$a < x < b$
$x \in]a; b]$	$a < x \leq b$
$x \in [a; b]$	$a \leq x \leq b$
$x \in [a; b[$	$a \leq x < b$
$x \in [a; a]$	$\{a\}$

Pour les intervalles de la forme $[a; b]$; $[a; b[$; $]a; b]$ et $]a; b[$,

- Le centre est $C = \frac{b+a}{2}$
- L'amplitude b-a
- Le rayon $\frac{b-a}{2}$

REMARQUE

- L'intersection de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à la fois aux deux intervalles
 - La réunion de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un ou l'autre de ses intervalles.
- Exemple : $I = [1; 2]$ $J = [0; 3]$ $I \cap J = [1; 2]$ et $I \cup J = [0; 3]$

EXERCICE D'APPLICATION

- Classe les quatre nombres suivant en ordre croissant en expliquant la procédure : $\frac{11}{4}$; $\frac{22}{15}$; $\frac{12}{5}$; $\frac{17}{10}$
 - Démontrer que pour tout réel a strictement positif et distinct de 1 on a $\frac{\sqrt{a}+1}{a-1} = \frac{1}{\sqrt{a}-1}$.
- Comparer $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$
- Soient a et b deux réels tels que $1 < a < 2$ et $-5 < b < -4$ donner un encadrement de a+b ; ab et $\frac{ab}{a+b}$
 - Dans chacun des ca ci- dessous, déterminer l'ensemble des nombres réels x tels que :
 - $\begin{cases} x < 7 \\ x \geq -3 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} -3 < x < 7 \\ 1 \leq x < -3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 2x - 3 < 7 \\ 3x - 4 \geq 2x - 3 \end{cases}$

LEÇON 4 : VALEUR ABSOLUE DANS IR

Durée: 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

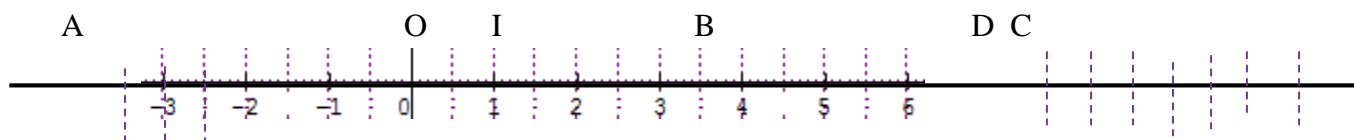
Se servir de la notion de valeur absolue d'un nombre pour résoudre les problèmes comme la distance de deux points, calcul des écarts (écart- moyen en statistiques par exemple), l'altitude d'un objet.

SITUATION PROBLEME

Trois voitures partent du même point de départ au même moment sur une route plate, droite, de même direction et même sens. La première est à 95 m du point de départ, la seconde à 45 m du point de départ et la troisième garde un écart de 45 m par rapport au premier. Laquelle Entre la deuxième et la troisième voiture est en train de rouler plus vite que l'autre ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

- 1) On considère la droite réelle muni du repère (O ; I), placer les points A, B, C, D d'abscisse respectives -5, 3,5 ; 7 et 6,9
- 2) Calculer les distance AB ; DB, OC, OD graphiquement. Calculer $3,5 - (-5)$, puis compare avec AB
- 3) Enoncer une règle qui permet de calculer les distances précédentes et vérifier les résultats précédents numériquement.
- 4) Donner une Réponse à la question de la situation problème

SOLUTION

- 1) Graphiquement, $AB = 8,5$; $DB = 3,4$; $AC = 12$. $3,5 - (-5) = 8,5$ nous constatons que $AB = 3,5 - (-5)$
- 2) La règle est la suivante : pour tous points A (x_A) et B (x_B) ($x_A \leq x_B$), appartenant au repère (O ; I) $AB = BA = x_B - x_A$. Numériquement, $AB = 3,5 - (-5) = 8,5$; $DB = 6,9 - 3,5 = 3,4$; $AC = 7 - (-5) = 12$
- 3) Pour répondre à la situation problème, supposons que le point de départ est l'origine du repère (O ; I). La première voiture est à un point A(95) ; la deuxième a un point B(45) ; et la troisième a un point C tel que $AC = 45m$. Or $AB = 95 - 45 = 50$. Ceci montre que $AC < AB$. D'où la deuxième voiture est plus éloignée de la première que la troisième. Donc la troisième est en train de rouler plus vite que la deuxième.

RESUME

Définition.: On appelle distance entre deux nombres réels a et b note $d(a ; b)$ la distance sur la droite numérique entre les points d'abscisses a et b. $d(A ; B) = AB = b - a$ avec $b \geq a$.

On appelle valeur absolue de x , le réel note $|x|$ égale à la distance à l'origine du point d'abscisse x sur une droite graduée. $|x|=d(0; x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Propriétés :

- $|a| \geq 0$; $|a| = |-a|$; $\sqrt{a^2} = |a|$; $(|a|)^2 = a^2$ ($|a|=0$ équivaut à $a=0$) ;
- Pour tout réel a et b :
- $|ab| = |a| \times |b|$; si b est non nul alors $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- $|a| = |b|$ équivaut à $(a=b \text{ ou } a=-b)$;
- $|a+b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire)

Exemple

Ecrivons sans barres de la valeur absolue les nombres suivants : $|2+\sqrt{3}|$ et $|2-\pi|$.

- $|2+\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}$, car $2+\sqrt{3} > 0$.
- $|2-\pi| = -(2-\pi)$, car $2 < \pi$.
 $= \pi - 2$

Déterminons l'ensemble des nombres réels x et a tels que : a) $|x|=5$; b) $|a|=-1$

- $|x|=5 \Leftrightarrow x=5$ ou $x=-5$.
L'ensemble cherche est $\{-5; 5\}$.
- $|a|=-1$. L'ensemble cherche est \emptyset car $|a|>0$.

Méthode : pour supprimer les barres de valeurs absolues à une expression littérale ou numérique, on détermine d'abord le signe de l'expression entre les barres de valeur absolue.

EXERCICE D'APPLICATION

- 1) Développer et réduire $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2$ et $(\sqrt{7} - \pi)^2$. En déduire la valeur exacte de $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}}$ et de $\sqrt{\pi^2 + 7 - 2\pi\sqrt{7}}$
- 2) Ecrire sans les barres de la valeur absolue les nombres réels suivants :

$$a) \left| \frac{2}{1-\sqrt{3}} \right| ; b) \left| \frac{3-\sqrt{12}}{1-7\sqrt{3}} \right| ; c) \left| \frac{3}{21-7\sqrt{3}} \right|$$

LEÇON 5

PUISSANCE DANS IR

Durée : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Réduire l'écriture des nombres élevés en écriture de puissance.

SITUATION PROBLÈME :

Une caravane de marchands nomades est composée de 16 ânes qui transportent chacun 16 petits sacs, chaque petit sac contient chacun 16 sachets contenant chacun 16 fruits rare. Cette caravane vend 4096 fruits dans chaque village. Après combien de village elle aura épuisé ses fruits ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

- Exprimer sous la forme d'une puissance de 16 le nombre N de fruits que transporte cette caravane puis exprimer sous forme d'une puissance de 4 le chiffre 4096.
- Compléter la ou les cases vides par des nombres entiers naturels :

$$N = (4^{\square})^{\square} = 2^{\square} \times 8^{\square} = 4^{\square}$$

a-

$$b) \frac{2^6}{2^3} = \dots ; \frac{3^{102}}{3^{109}} = \dots$$

- Répondre à la question de la situation problème.
- Comparer $\sqrt{4^{16}}$ et N puis en déduire que $\sqrt{4^{17}} = 2N$.

SOLUTION :

$$1) N = 16^4 ; 4096 = 4^6$$

$$2) a) N = (4^2)^4 = 2^7 \times 8^3 = 4^8 ; b) \frac{2^6}{2^3} = 2^{6-3} = 2^3 = 8 ; \frac{3^{112}}{3^{109}} = 3^{102-109} = 3^3 = 27$$

$$3) \text{ Réponse à la situation problème : } \frac{4^8}{4^6} = 4^2 = 16 \text{ donc Elle épuisera ses fruits après 16 villages.}$$

$$4) \text{ Comparer } \sqrt{4^{16}} \text{ et } N = 4^8. \text{ Or } (\sqrt{4^{16}})^2 = 4^{16} \text{ et } N^2 = 4^{16} \text{ d'où } (\sqrt{4^{16}})^2 = N^2 \text{ donc } \sqrt{4^{16}} = N. \text{ nous en déduisons que } 2\sqrt{4^{16}} = 2N \Rightarrow \sqrt{4} \times \sqrt{4^{16}} = 2N \Rightarrow \sqrt{4^{17}} = 2N$$

RESUME

Définition : Soit a un nombre réel, n un nombre entier naturel non nul. On appelle puissance n^{ième} de a, le nombre noté aⁿ et défini par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

- si $a \neq 0$, alors on note $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Propriété : a et b sont deux réels quelconques, m et n deux nombres entiers relatifs non nuls. On a :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}; (a^n)^m = a^{n \times m}; (ab)^n = a^n \times b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ si } b \neq 0; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ si } a \neq 0;$$

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}; \quad \text{pour } a > 0 \quad \sqrt{a^{2n}} = a^n \text{ et } \sqrt{a^{2n+1}} = a^n \sqrt{a}$$

Exemple : $(-3)^4 = 3^4 = 81$ car 4 est pair, cependant $(-2)^5 = -2^5 = -32$ car 5 impairs

$$\sqrt{3^{12}} = 3^6; \sqrt{5^{19}} = \sqrt{5^{2 \times 9 + 1}} = 5^9 \sqrt{5}$$

EXERCICE D'APPLICATION

- 1- Ecrire en fonction de puissances de 2 et de 3 respectivement $\sqrt{2^{2018}}$ et $\sqrt{3^{2019}}$
- 2- On pose $a = 5^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$ $b = 10^3 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$ calculer ab^{-1}

LEÇON 6 : CALCUL APPROCHÉ**Durée : 100 min****MOTIVATION**

Le calcul des valeurs approchées et incertitude d'un nombre réel est aussi bien utilisé dans d'autres disciplines. Cette leçon aidera l'apprenant à pallier à cette difficulté.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Déterminer une valeur approchée d'une grandeur.
- Déterminer l'incertitude d'un encadrement

SITUATION PROBLÈME

Monsieur Kayo travaille dans un laboratoire. Il vient de recevoir un morceau de métal d'un volume de $V = 21,5 \text{ cm}^3$ à 0,1 près, qui pèse $m = 300 \text{ g}$ à 0,2 près. Dans l'optique de déterminer la nature du métal, il souhaite déterminer une valeur approchée de la masse volumique du métal ainsi que son incertitude. Aide-le à résoudre son problème. Masse volumique : $\rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}}$.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

Sachant que $3,14 < \pi < 3,15$

- 1- Déterminer les réels y et ε tels que $y - \varepsilon = 3,14$ et $y + \varepsilon = 3,15$
- 2- Montrer que : $-0,005 < \pi - 3,145 < 0,005$
- 3- En déduire que $|\pi - 3,145| < 0,005$

On dit que 3,145 est une valeur approchée du réel π avec une incertitude de 0,005 ou encore à 0,005 près.

SOLUTION

- 1- Déterminons- y et ε . $y - \varepsilon = 3,14$ et $y + \varepsilon = 3,15 \Rightarrow y = 3,14 + \varepsilon$ et $y = 3,15 - \varepsilon \Rightarrow 3,14 + \varepsilon = 3,15 - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon + \varepsilon = 3,15 - 3,14 \Rightarrow 2\varepsilon = 0,01 \Rightarrow \varepsilon = 0,005$ et $y = 3,145$.
- 2- Montrons que : $-0,005 < \pi - 3,145 < 0,005$. Or, $3,14 < \pi < 3,15 \Rightarrow 3,145 - 0,005 < \pi < 3,145 + 0,005$
 $\Leftrightarrow -0,005 < \pi - 3,145 < 0,005$.
- 3- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si $-a < b < a$ alors $|b| < a$. nous déduisons que comme $-0,005 < \pi - 3,145 < 0,005$, alors
 $|\pi - 3,145| < 0,005$.

ACTIVITÉ 2

- 1) Un volume V a une valeur de $21,5 \text{ cm}^3$ à 0,1 près. Donner un encadrement de V .
- 2) Un objet a une masse $m = 300 \text{ g}$ à 0,2 près. Donner un encadrement de m .
- 3) En déduire un encadrement de ρ tel que Masse volumique : $\rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}}$.
- 4) Déterminer les réels y et ε tel que $|\rho - y| \leq \varepsilon$. Donner une réponse à la situation problème.
- 5) Ecrire les nombres ci-dessous sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre réel et n un entier relatif.
 3145 ; $0,0005$; 1500 ; $44,44$.

SOLUTION

- 1) Encadrement de V . $21,5 - 0,1 \leq V \leq 21,5 + 0,1 \Rightarrow 21,4 \leq V \leq 21,6$.

- 2) Encadrement de m . $300-0,2 \leq m \leq 300+0,2 \Rightarrow 299,8 \leq m \leq 300,2$
- 3) Encadrement de ρ . $\rho = \frac{m}{v}$; $\frac{1}{21,6} \leq \frac{1}{v} \leq \frac{1}{21,4} \Rightarrow$; $\frac{299,8}{21,6} \leq \frac{m}{v} \leq \frac{300,2}{21,4} \Rightarrow \mathbf{13,9 \leq \rho \leq 14}$
- 4) Déterminons les réels y et ε tel que $|\rho - y| \leq \varepsilon$. $|\rho - y| \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq \rho - y \leq \varepsilon \Rightarrow \mathbf{y - \varepsilon \leq \rho \leq y + \varepsilon}$ par identification, $\mathbf{y - \varepsilon = 13,9}$ et $\mathbf{y + \varepsilon = 14}$. En résolvant on trouve ainsi $y = 13,95$ $\varepsilon = 0,05$. D'où a la situation problème la valeur approchée de ρ est $13,95 \text{ kg / cm}^3$ à $0,05$ près.
- 5) $3145 = 3,145 \times 10^3$; $0,0005 = 5 \times 10^{-4}$; $1500 = 1,5 \times 10^3$; $44,44 = 4,444 \times 10^1$

RESUME

Définition : Soit x un réel donnée et $\varepsilon > 0$ on dit que le réel y est une valeur approchée de x à ε près si et seulement si $|x - y| \leq \varepsilon$ ou bien si $y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$. ε Est l'incertitude de la valeur approchée de x : soit $x - y$ à ε près.

Exemple $3,145$ est une valeur approchée de π à 5×10^{-3} près $|\pi - 3,145| \leq 5 \times 10^{-3}$

$X = \pi$ $y = 3,145$ $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$

- ❖ Encadrement d'un nombre réel : on appelle encadrement d'un nombre réel x tout intervalle borné contenant x . l'amplitude de l'encadrement est la distance des extrémités de cette encadrement. Exemple $\sqrt{5} = 2,2360679775 \dots$ $[2 ; 3]$ est un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude $3-2=1$. $[2, 2 ; 2,9]$ est un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude $2,9-2,2=0,7$

- ❖ **Approximation décimale d'ordre n** :

Soit n un réel et deux nombre décimaux suivants : $\frac{p}{10^n}$ et $\frac{p+1}{10^n}$ sont respectivement appelle approximation décimale d'ordre n par défaut et par excès de x si et seulement si : $\frac{p}{10^n} \leq x \leq \frac{p+1}{10^n}$ Exemple $3,14 < \pi < 3,15$ $3,14$ est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de π et $3,15$ est d'ordre 2 par excès.

- ❖ **Arrondis d'ordre n**

Soit x un nombre réel. Un arrondi d'ordre n de x est l'approximation décimale d'ordre n la plus proche de x .

- ❖ **Troncature d'ordre n - règle d'arrondis**

On obtient la troncature d'ordre n d'un nombre en supprimant tous les chiffres décimaux situés Après le nième chiffre décimal. Exemple $x = 2,563$. 2 est la troncature d'ordre 0. $2,5$ est la troncature d'ordre 1 de x .

- ❖ **Règle d'arrondi**

Si le chiffre qui suit directement le dernier chiffre de la troncature d'ordre n est $0, 1, 2, 3, 4$,

Alors l'arrondi d'ordre n est la troncature d'ordre n de ce nombre.

Si le chiffre qui suit directement le dernier chiffre de la troncature d'ordre n est $5, 6, 7, 8, 9$ alors l'arrondi d'ordre n est la troncature d'ordre n additionner de 10^{-n} .

Exemple on donne $x = 3,3246$ l'arrondi d'ordre 2 de x est $3,32$. L'arrondi d'ordre 3 de x est $3,324 + 10^{-3} = 3,325$.

- ❖ **Notation scientifique ordre de grandeur**

L'écriture scientifique d'un nombre x s'écrit sous la forme $a \times 10^p$ ou a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule, et p un nombre appartenant à \mathbb{Z} . Cependant, l'ordre de grandeur de x est $n \times 10^p$ ou n est l'arrondi d'ordre 0 de a .

EXEMPLE

Nombre x	Ecriture scientifique de x	Ordre de grandeur
188,5	$1,885 \times 10^2$	2×10^2
10670	$1,067 \times 10^4$	1×10^4
0,00043	$4,3 \times 10^{-4}$	4×10^{-4}

EXERCICE D'APPLICATION

- 1- On mesure à l'aide d'une balance la masse d'un objet $m = 800\text{g}$ à 2×10^{-2} près
On donne pour cela l'intensité de la pesanteur $g = 10 \text{ N/Kg}$
 - a- Déterminer un encadrement de sa masse puis pour celui de son poids. Sachant que $p = mg$
 - b- En déduire une valeur approchée de son poids et son incertitude.
- 2- Ecrire les nombres suivants en notation scientifique.
 $A = 35 \times 10^6 + 3 \times 10^6 + 2,94 \times 10^6$; $D = \frac{250 \times 10^6}{2 \times 10^{-8}}$
- 3- Donner une troncature décimale et un arrondi d'ordre 3 des valeurs suivantes
 $A = 3,54267$; $B = \sqrt{11}$; $C = 1,3030399999999995$.

CHAPITRE 2 : EQUATION ET INEQUATION

LEÇON 1 : Équations et inéquations dont la résolution se ramène à celle d'équations et d'inéquations du premier degré dans \mathbb{R} . Durée : 100 min

MOTIVATION :

La résolution de nombreux problèmes dans la vie se ramène à la résolution des équations ou inéquations de premier degré, voire de second degré dans \mathbb{R} . Ce chapitre donne des techniques pour pouvoir le faire aisément.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Résoudre les équations et les inéquations se ramenant à celles de premier degré.
- Résoudre les équations et inéquations rationnelles, puis avec valeur absolue.

PRÉREQUIS

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$2x = 1 ; 5x - 3 = 7 ; 3x - 5 \geq 2 + x$$

Solution

$$2x = 1 \quad \text{équivalent à}$$

$$2x = 1,$$

$$x = \frac{1}{2},$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$5x - 3 = 7 \quad \text{équivalent à}$$

$$5x = 7 + 3,$$

$$5x = 10,$$

$$S = \{2\}$$

$$3x - 5 \geq 2 + x \quad \text{équivalent à}$$

$$3x - x \geq 2 + 5,$$

$$2x \geq 7,$$

$$x \geq \frac{7}{2}$$

$$S = \left[\frac{7}{2}; +\infty \right[$$

SITUATION PROBLÈME :

Votre père a oublié le code de sa carte bancaire. Aidez-le à le retrouver sachant que ce nombre est l'unique nombre entier naturel pair vérifiant l'inégalité :

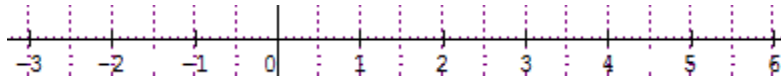
$$|x - 4563.5| < 1.5.$$

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

(NB : l'enseignant pourra faire photocopier cette activité au préalable par les apprenants pour gagner quelques précieuses minutes, il veillera à ce que les élèves collent dans le cahier au lieu indiqué.)

A- On se propose de résoudre : $|x - 2| = 3$ et $|x - 2| \leq 3$.

a) $|x - 2|$ représente la distance d'un point d'abscisse x à d'un point d'abscisse 2. Soit la droite graduée ci-dessous :



Déterminer deux nombres réels x et y tels que la distance du point d'abscisse 2 au point d'abscisse x ou y soit égale 3.

b) recopie et complète :

$|x - 2| = 3$ Équivaut à $x - 2 = 3$ ou $x - 3 = \dots$ d'où $x = \dots$ ou $x = \dots$. Comparer le résultat à la question a).

c) Déterminer trois nombres réels x, y et z tels que que la distance du point d'abscisse 2 aux points d'abscisse x, y et z soit inférieure ou égale 3. Peut-on compter tous les nombres vérifiant cette condition ?

d) Déterminer graphiquement la plus petite et la plus grande valeur de x telles que la distance du point d'abscisse 2 au point d'abscisse x soit inférieure ou à égale 3.

e) En déduire la solution de l'inéquation $|x - 2| \leq 3$.

f) Recopie et complète :

$|x - 2| \leq 3$ Équivaut à $\dots \leq x - 2 \leq 3$,

$$\dots \leq x \leq \dots$$

$s = [\dots; \dots]$. Comparer le résultat à f).

g-1) Résoudre dans \mathbb{R} : $|x - 4563.5| < 1.5$.

g-2) Y'a-t-il un nombre entier naturel pair parmi les nombres solutions ? Si oui quelle est sa valeur ?

B-1) On se propose de déterminer le signe de $S(x) = 5x - 10$ et $P(x) = -2x - 8$.

a) Résoudre les équations $S(x) = 0$ et $P(x) = 0$.

b) En choisissant trois nombres dans chacun des intervalles ci-dessous et en remplaçant dans $S(x)$ et $P(x)$, recopier et compléter les tableaux ci-dessous par les signes + ou - :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$S(x) = 5x - 10$...	0	...

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$P(x) = -2x - 8$...	0	...

2) On se propose de résoudre : (E) : $\frac{5x+3}{-2x+4} = 6$ et (I) : $\frac{5x+3}{-2x+4} \geq 6$.

a) Déterminer la condition d'existence de $\frac{5x+3}{-2x+4}$.

b) Annuler le second terme de (E) en ajoutant -6 de chaque côté de l'égalité puis réduire le côté gauche de l'égalité au même dénominateur.

c) En déduire la valeur de x qui annule le numérateur. Cette valeur est la solution de (E) si elle est différente de la valeur qui annule le dénominateur.

d) Recopier et compléter le tableau de signe ci-contre et en déduire la solution de (I).

x	$-\infty$	$\frac{17}{21}$	2	$+\infty$
$17x-21$...	0
$-2x+4$	0	...
$\frac{17x-21}{-2x+4}$...	0

SOLUTION :

A- a) $x = -1$ ou $x = 5$

b) $|x - 2| = 3$ équivaut à $x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$ d'où $x = -1$ ou $x = 5$.

c) $x = 0$; $y = 1$; $z = 3$. Non, on ne peut pas compter.

d) L'abscisse de la plus petite est -1 et celle de la plus grande est 5 .

e) $S = [-1; 5]$.

f)

$$|x - 2| \leq 3 \text{ Équivaut à } -3 \leq x - 2 \leq 3,$$

$$-1 \leq x \leq 5,$$

$$S = [-1; 5].$$

g-1) $|x - 4563.5| < 1.5$ équivaut à : $-1.5 < x - 4563.5 < 1.5$,

$$-1.5 + 4563.5 < x < 1.5 + 4563.5,$$

$$4562 < x < 4565,$$

$$S =]4562; 4565[$$

g-2) oui, ce nombre est 4564.

B- 1-a) $S(x) = 0$ équivaut à $5x - 10 = 0$,

$$5x = 10,$$

$$x = 2.$$

$P(x) = 0$ équivaut à $-2x - 8 = 0$,

$$-2x = 8,$$

$$x = -4.$$

1-b)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$S(x) = 5x - 10$		0	+

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$P(x) = -2x - 8$	+	0	-

2-a) $\frac{5x+3}{-2x+4}$ existe si et seulement si $-2x + 4 \neq 0$,

$$-2x \neq -4,$$

$$x \neq 2.$$

2-b) $\frac{5x+3}{-2x+4} = 6$ équivaut à $\frac{5x+3}{-2x+4} - 6 = 6 - 6$,

$$\frac{5x+3}{-2x+4} - 6 = 0,$$

$$\frac{17x-21}{-2x+4} = 0.$$

2-c) $17x - 21 = 0$ équivaut à $17x = 21$,

$$x = \frac{21}{17}$$

2-d)

$$\frac{5x+3}{-2x+4} \geq 6 \text{ Équivaut à } \frac{17x-21}{-2x+4} \geq 0, \text{ d'où } S = \left[\frac{21}{17}; 2 \right[.$$

x	$-\infty$	$\frac{21}{17}$	2	$+\infty$
$17x-21$	-	0	+	+
$-2x+4$	+	+	0	-
$\frac{17x-21}{-2x+4}$	-	0	+	-

RÉSUMÉ :

- Le tableau de signe du polynôme $P(x) = ax + b$ est donné par le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$P(x) = ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

- Equations et inéquations du type $\frac{ax+b}{cx+d} = e$ ($\frac{ax+b}{cx+d} \geq e$).

-Avant de commencer à résoudre, il faut déterminer l'ensemble de définition, c'est à dire des valeurs de x pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou la valeur interdite, c'est à dire les valeurs de x qui annulent le dénominateur.

-Après avoir déterminé l'ensemble de définition, comme le second terme n'est pas nul, il faut donc l'annuler. On réduit ensuite au même dénominateur de façon à n'avoir qu'une seule fraction.

- On déduit enfin l'ensemble solution après avoir établi le tableau de signe s'il s'agit d'une inéquation. S'il s'agit d'une équation, la solution est la valeur qui annule le numérateur.

- Equations ou inéquations du type

$$|ax + b| = c \quad (|ax + b| < c, |ax + b| > c), \text{ avec } a \neq 0.$$

- $|ax + b| = c$ est équivalente à : $ax + b = c$ ou $ax + b = -c$.

Remarque: 1- Si c est négatif alors $s = \emptyset$

$$2- \text{ Si } c = 0 \text{ alors } S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$$

- $|ax + b| < c$ est équivalente à $-c < ax + b < c$.

Par la suite, on a : $-c - b < ax < c - b$.

$$\text{Après, } \frac{-c-b}{a} < x < \frac{c-b}{a}.$$

$$\text{Et enfin, } S = \left] \frac{-c-b}{a}; \frac{c-b}{a} \right[.$$

Remarque : 1- Si l'inégalité est large ($|ax + b| \leq c$) alors $S = \left[\frac{-c-b}{a}; \frac{c-b}{a} \right]$.

2- Si c est négatif alors $|ax + b| < c$ a pour solution $s = \emptyset$.

3- Si $c = 0$ alors $|ax + b| \leq 0$ a pour solution $s = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$ tandis que $|ax + b| < 0$ a pour solution $s = \emptyset$.

- $|ax + b| > c$

1) Si c est négatif alors $S = \mathbb{R}$.

2) Si $c=0$, $|ax + b| \geq 0$ a pour solution $S = \mathbb{R}$.

3) Sinon $|ax + b| > c$ équivaut à $ax + b > c$ ou $ax + b < -c$, d'où l'ensemble solution est la réunion de deux intervalles.

EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice 1 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

- a)** $\frac{5x-6}{x-2} = 0$, **b)** $\frac{-2x+5}{3x-2} = 3$, **c)** $\frac{10x-4}{4x-2} \leq 0$, **d)** $\frac{4x-7}{-2x-5} > 5$, **e)** $\frac{5x-1}{3x-2} \geq -2$, **f)** $|2x - 5| = 10$, **g)** $|-4x - 8| = 0$, **h)**
 $|2x - 5| = -3$, **i)** $|5x + 4| \leq 6$, **j)** $|3x - 4| < 2$, **k)** $|2x - 1| \leq 0$,
l) $|3x + 2| < 0$, **m)** $|5x + 3| > 2$, **n)** $|3x - 4| > -2$,
o) $|-3x - 1| > 0$, **p)** $|6x - 18| \geq 0$, **q)** $-2x + 5 \geq 0$

Exercice 2 :

À 9 heures du matin Paul part de A vers B en bicyclette (vitesse 15 km/h) . A 10 heures moins le quart, Pauline en fait autant de B vers A (vitesse 20 km/h). Ils se rencontrent à mi-chemin pour pique-niquer. Quelle heure est-il alors ?

TAF : Utiliser le livre de l'élève (excellence en mathématiques).

LEÇON 2 : Résolution des problèmes se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du premier degré dans \mathbb{R} .
Durée : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- Résoudre des problèmes dont la résolution se ramène à celle d'équations ou inéquations du premier degré dans \mathbb{R} .

PRÉREQUIS :

Soit x un nombre, exprime en fonction de x :

Le double de ce nombre, le quintuple de ce nombre et le tiers de ce nombre.

Solution :

Le double de x : $2x$

Le quintuple de x : $5x$

Le tiers de x : $\frac{1}{3}x$

SITUATION PROBLÈME :

Dans une classe de 2ndC, le cinquième des élèves est né en 2003, le quart en 2002, le tiers en 2004, le sixième en 2005 et le reste soit 3 élèves en 2001. Combien d'élèves sont nés en 2003 ?

Activité :

Dans une classe de 2ndC, le cinquième des élèves est né en 2003, le quart en 2002, le tiers en 2004, le sixième en 2005 et le reste soit 3 élèves en 2001. On désigne par x le nombre d'élève de cette classe.

- 1) Exprimer en fonction de x le nombre d'élève née en 2002, 2003, 2004 et 2005.
- 2) En déduire l'effectif total de cette classe.
- 3) Déterminer le nombre d'élève née en 2003.

Solution :

- 1) x étant le nombre d'élèves de cette classe, on a :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	Total
Effectif	3	$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{6}x$	$3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x$

- 2) Comme x est l'effectif total de cette classe, on a : $x = 3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x$,

$$\text{D'où } x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x = 3,$$

$$\text{Par la suite } \frac{1}{20}x = 3,$$

$$\text{Et enfin, on trouve } x = 60.$$

- 3) En 2003, le nombre d'élève est de : $\frac{1}{5} \times 60 = 12$ élèves.

RÉSUMÉ :

La résolution d'un problème du premier degré se fait en cinq étapes :

- 1) Choix de l'inconnue.
- 2) Mise en équation ou inéquation du problème.
- 3) Résolution de l'équation ou de l'inéquation.
- 4) Vérification du résultat.
- 5) Interprétation du résultat et conclusion.

EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice 1 :

Un théâtre propose deux tarifs pour la prochaine saison :

- Tarif A : 19€ la place «plein tarif» ;
- Tarif B : 75 € l'abonnement pour la saison qui permet de voir chaque spectacle pour 6 €.

À partir de combien de places achetées Pierre a-t-il intérêt à choisir le tarif B plutôt que le tarif A ?

Exercice 2 : Dans un service de pédiatrie qui compte 24 personnes, il y a 2 fois plus de femmes que d'hommes. Quel est le nombre d'hommes dans ce service ?

Exercice 3 : Un gâteau nécessite les ingrédients suivants : 3 fois plus de farine que de sucre, trois fois plus de sucre que de beurre, et deux fois plus de chocolat que de sucre. Calculer le poids de chaque ingrédient pour un gâteau de 750 g.

Exercice 4 :

Quel nombre doit-on placer à l'intérieur du triangle pour obtenir 10 à l'arrivée ?



Exercice 5 :

Une mère de soixante-quatre ans a une fille de 14 ans. Dans combien d'année l'âge de la fille sera la moitié de l'âge de sa mère ?

TAF

Utiliser le livre de l'élève pour compléter la liste des devoirs à faire à la maison.

LEÇON 3 : Equations et inéquations de second degré dans \mathbb{R} .

Durée : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- Mettre sous la forme canonique un polynôme de second degré.
- Factoriser un polynôme de second degré et résoudre une équation et une inéquation du second degré dans \mathbb{R} .

PRÉREQUIS :

Factorise : $25x^2 - 64$; $8x^2 - 98$; $(x - 2)^2 - 25$.

Solution :

$$25x^2 - 64 = (5x)^2 - 8^2 = (5x - 8)(5x + 8)$$

$$8x^2 - 98 = 2(4x^2 - 49) = 2((2x)^2 - 7^2) = 2(4x - 7)(4x + 7)$$

$$(x - 2)^2 - 25 = (x - 2)^2 - 5^2 = (x - 2 - 5)(x - 2 + 5) = (x - 7)(x + 3).$$

SITUATION PROBLÈME :

Que vaut la longueur d'un champ rectangulaire dont le périmètre vaut 116m et l'aire 705m² ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

Activité 1 :

1) Démontrer que : $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$; $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$

2) En suivant le même modèle, recopier et compléter :

$$x^2 - 8x = (\dots - \dots)^2 - \dots ; \quad x^2 + 5x = (\dots + \dots)^2 - \dots$$

On appelle cette égalité, le début du développement d'un carré.

3) On considère le polynôme suivant : $p(x) = 3x^2 + 7x - 10$. Recopier et compléter :

$$p(x) = 3x^2 + 7x - 10$$

$$= 3(x^2 + \dots x - \dots)$$

$$= 3[(x + \dots)^2 - \dots - \dots] \quad \text{Utiliser 2)}$$

$$= 3[(x + \dots)^2 - \dots].$$

Cette dernière égalité s'appelle la forme canonique de $p(x)$

4) En déduire la forme factorisée de $p(x)$.

5) Résoudre l'équation $p(x) = 0$.

6) Soit le polynôme $k(x) = 3x^2 + 5x - 8$, après avoir mis sous la forme canonique et factorisée $k(x)$, résoudre l'équation $k(x)=0$.

Activité 2 :

On considère les polynômes suivants : $T(x) = 2x^2 + 2x - 12$, $R(x) = -4x^2 + 3x + 1$, $F(x) = 3x^2 - 24x + 48$, $S(x) = -2x^2 + 2x - 5$ et $V(x) = -4x^2 + 16x - 16$

- Calculer $T(-3)$ et $V(2)$. On dit que -3 et 2 sont les solutions des équations $T(x) = 0$ et $V(x) = 0$ respectivement.
- Mettre ces polynômes sous la forme factorisée.
- En choisissant trois nombres dans chacun des intervalles ci-dessous et en remplaçant dans $T(x)$, $R(x)$, $F(x)$, $S(x)$ et $V(x)$, recopier et compléter les tableaux ci-dessous par les signes + ou - :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$R(x) = -4x^2 + 3x + 1$...	0	0	...

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$T(x) = 2x^2 + 2x - 12$...	0	0	...

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$F(x) = 3x^2 - 24x + 48$...	0	...

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$V(x)$...	0	...

x	$-\infty$	$+\infty$
$S(x)$...	

- En déduire les solutions des inéquations $T(x) < 0 (> 0; \leq 0; \geq 0)$. De même pour $R(x)$, $F(x)$, $S(x)$ et $V(x)$.

SOLUTION :**Activité 1 :**

- Démontrons que : $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$; $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$

$$(x + 3)^2 - 9 = x^2 + 6x + 9 - 9 = x^2 + 6x$$

$$(x - 2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4 = x^2 - 4x$$

- $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$;

$$x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

- On considère le polynôme suivant : $p(x) = 3x^2 + 7x - 10$. Recopier et compléter :

$$p(x) = 3x^2 + 7x - 10$$

$$= 3\left(x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{10}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} - \frac{10}{3}\right] \quad \text{d'après 2)}$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{169}{36}\right].$$

- En déduire la forme factorisée de $p(x)$.

$$p(x) = 3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{169}{36}\right]$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{13}{6}\right)^2\right]$$

$$= 3\left(x + \frac{7}{6} - \frac{13}{6}\right)\left(x + \frac{7}{6} + \frac{13}{6}\right)$$

$$= 3(x - 1) \left(x + \frac{10}{3}\right).$$

5) Résoudre l'équation $p(x) = 0$.

$$p(x) = 0 \text{ équivaut à } 3(x - 1) \left(x + \frac{10}{3}\right) = 0$$

$$(x - 1) = 0 \text{ ou } \left(x + \frac{10}{3}\right) = 0$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -\frac{10}{3}$$

$$S = \left\{1; -\frac{10}{3}\right\}.$$

6) $k(x) = 3x^2 + 5x - 8$

$$= 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{8}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{8}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{121}{36}\right]$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{11}{6}\right)^2\right]$$

$$= 3\left(x + \frac{5}{6} - \frac{11}{6}\right)\left(x + \frac{5}{6} + \frac{11}{6}\right)$$

$$= 3(x - 1)\left(x + \frac{8}{3}\right).$$

$$k(x) = 0 \text{ équivaut à } 3(x - 1)\left(x + \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$(x - 1) = 0 \text{ ou } \left(x + \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -\frac{8}{3}$$

$$S = \left\{1; -\frac{8}{3}\right\}.$$

Activité 2 :

On considère les polynômes suivants : $T(x) = 2x^2 + 2x - 12$, $R(x) = -4x^2 + 3x + 1$,

$$F(x) = 3x^2 - 24x + 48, S(x) = -2x^2 + 2x - 5 \text{ et } V(x) = -4x^2 + 16x - 16.$$

1) $T(-3) = 2(-3)^2 + 2(-3) - 12 = 18 - 6 - 12 = 0$.

$$V(2) = -4(2)^2 + 16(2) - 16 = -16 + 32 - 16 = 0.$$

2) Mettre ces polynômes sous la forme factorisée.

$$T(x) = 2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2).$$

$$R(x) = -4x^2 + 3x + 1 = -4(x - 1)\left(x + \frac{1}{4}\right).$$

$$F(x) = 3x^2 - 24x + 48 = 3(x - 4)(x - 4).$$

$$S(x) = -2x^2 + 2x - 5 \text{ n'est pas factorisable.}$$

$$V(x) = -4x^2 + 16x - 16 = -4(x - 2)(x - 2).$$

3)

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$T(x)=2x^2+2x-12$	+	\emptyset	-	\emptyset +

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$R(x)=-4x^2+3x+1$	-	\emptyset +	\emptyset -	

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$F(x)=3x^2-24x+48$	+	\emptyset +	

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$V(x)$	-	\emptyset -	

x	$-\infty$	$+\infty$
$S(x)$	-	

RÉSUMÉ:

- On appelle trinôme de second degré, tout polynôme de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.
- On appelle équation de second degré, toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.
- Un nombre "s" est solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $as^2 + bs + c = 0$.
- On appelle forme canonique de $P(x) = ax^2 + bx + c$, l'expression de $P(x)$ sous la forme $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]$.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ alors $P(x)$ n'est pas factorisable et son tableau de signe est donné par :

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$

Signe de a

- Si $b^2 - 4ac > 0$ alors $P(x)$ est factorisable, l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions x_1, x_2 (en supposant $x_1 < x_2$). Le tableau de signe de $p(x)$ est donné par :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$...	0	0	...

signe de a

signe contraire de a

- Si $b^2 - 4ac \geq 0$ alors $P(x)$ est factorisable, l'équation $P(x) = 0$ admet une solution x_0 ; Le tableau de signe de $p(x)$ est donné par :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$...	0	...

signe de a

- Pour résoudre une inéquation de second degré, on dresse d'abord le tableau de signe du polynôme associé puis on en déduit la solution de l'inéquation.

EXERCICES D'APPLICATIONS ET DEVOIR À FAIRE À LA MAISON :**Exercice1 :**

- 1) Déterminer la forme canonique, puis factorise si possible chacun des polynômes suivants :
 $T(x) = 3x^2 - 3x - 18, R(x) = -2x^2 + 5x + 12, F(x) = 3x^2 - 24x + 45,$
 $S(x) = -3x^2 + 5x - 7$ et $V(x) = -6x^2 + 60x - 150$.
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations $T(x) < 0 (> 0; \leq 0; \geq 0)$. De même pour $R(x), F(x), S(x)$ et $V(x)$.
- 3)
- 4) Utiliser le livre de l'élève.

CHAPITRE 3 : SYSTÈMES d'ÉQUATIONS et d'INÉQUATIONS DANS \mathbb{R}^2 .

MOTIVATION

Régulièrement, on est appelé à résoudre des problèmes d'optimisation. On peut faire appel à une technique mathématique permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts ; ce chapitre installe les bases de la résolution.

LEÇON 1 : Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. DURÉE : 100 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Résoudre un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en utilisant la méthode par substitution ou par combinaison linéaire.
- Vérifier qu'un couple de réels est solution ou pas d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

PRÉREQUIS :

Utilise ton brouillon pour résoudre les équations suivantes : $3x + 5 = 6$; $2(x - 3) + 5 = 1 + 2(x - 1)$;
 $-5w + 2 = 5(-w - 2) + 3$.

Solution

$$3x + 5 = 6 \text{ équivaut à } 3x = 6 - 5$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$2(x - 3) + 5 = 1 + 2(x - 1) \text{ équivaut à } 2x - 6 + 5 = 1 + 2x - 2$$

$$2x - 2x = 1 - 2 + 6 - 5$$

$$0 = 0$$

$$S = \mathbb{R}$$

$$-5w + 2 = 5(-w - 2) + 3. \text{ équivaut à } -5w + 2 = -5w - 10 + 3$$

$$-5w + 5w = -10 + 3 - 2$$

$$0 = -9$$

$$S = \emptyset$$

SITUATION PROBLÈME :

Paul achète 3 cahiers et 7 crayons à 875 F. dans la même boutique, Jean achète 4 cahiers et 3 crayons à ensemble 850 F ; Quel est le prix d'un cahier ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

Activité 1 : On considère le système (S) $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$

Dans chacune des équations, remplacer x par 2 et y par -3 respectivement. Que remarques-tu ? **On dit d'une part que (2; -3) est une solution de chacune des équations et d'autre part la solution de (S).**

Activité 2 :

On considère le système $\begin{cases} 3x + 7y = 875 \\ 4x + 3y = 850 \end{cases}$.

Paul remarque : « Je sais résoudre une équation du premier degré à une inconnue donc si je peux écrire une inconnue en fonction de l'autre, je pourrai obtenir une équation du premier degré à une inconnue. ».

- Écris toutes les possibilités qu'a **Paul** pour exprimer une inconnue en fonction de l'autre.
- En utilisant une des expressions trouvées, comment doit s'y prendre **Paul** pour obtenir une équation du premier degré à une inconnue ?
- Choisis une des expressions que tu as trouvées à la question **a.** et détermine une des deux inconnues.
- Utilise maintenant la valeur déterminée à la question précédente pour trouver la valeur de la deuxième inconnue.
- Teste le couple de valeurs $(x ; y)$ trouvé et conclus.

Cette méthode de résolution s'appelle la méthode par substitution.

Activité 3 :

On considère le système suivant : $\begin{cases} 3x + 7y = 875 \\ 4x + 3y = 850 \end{cases}$.

a. Jean remarque : après avoir multiplié la première équation par -4 , la deuxième par 3 et qu'en additionnant les deux premiers membres des équations, on réussit à « éliminer les termes en x » dans le calcul.

- Qu'obtiens-tu après ces opérations ?
 - Déduis-en une équation d'inconnue y et résous-la.
- b. Jean** se dit maintenant que pour trouver x , il suffirait de pouvoir « éliminer y »!
- Comment devraient être les coefficients de y dans les deux équations pour « éliminer les termes en y » de la même façon qu'à la question précédente ?
 - Que peux-tu faire à chacune des équations pour y parvenir ?
 - Transforme les équations pour obtenir une équation du premier degré d'inconnue x en procédant de la même façon qu'à la question **b.**

• Résous cette équation.

c. Teste le couple trouvé et conclus.

Cette méthode de résolution s'appelle la méthode par combinaisons.

Solution :

Activité 1 :

$$(S) \begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$$

Pour $x = 2$ et $y = -3$, on a : $5(2) + 2(-3) = 4$

$$10 - 6 = 4$$

$$4 = 4$$

De même, on a : $-2(2) + (-3) = -7$

$$-4 - 3 = -7$$

$$-7 = -7$$

Activité 2 :

$$\begin{cases} 3x + 7y = 875 & (E_1) \\ 4x + 3y = 850 & (E_2) \end{cases}$$

a) De E_1 , on a : $3x = 875 - 7y$ d'où $x = \frac{875}{3} - \frac{7y}{3}$ (E_3)

De E_1 , on a : $7y = 875 - 3x$ d'où $y = \frac{875}{7} - \frac{3x}{7}$. (E_4)

De E_2 , on a : $4x = 850 - 3y$ d'où $x = \frac{850}{4} - \frac{3y}{4}$. (E_5)

De E_2 , on a : $3y = 850 - 4x$ d'où $y = \frac{850}{3} - \frac{4x}{3}$. (E_6)

b)

c) (E_3) dans (E_2) donne : $4\left(\frac{875}{3} - \frac{7y}{3}\right) + 3y = 850$

$$\frac{3500}{3} - \frac{28y}{3} + 3y = 850$$

$$-\frac{28y}{3} + 3y = 850 - \frac{3500}{3}$$

$$\frac{-19}{3}y = \frac{-950}{3}$$

$$y = 50$$

d) De la relation $x = \frac{875}{3} - \frac{7y}{3}$, nous avons :

$$x = \frac{875}{3} - \frac{7 \times 50}{3}$$

$$x = \frac{875}{3} - \frac{350}{3}$$

$$x = 175$$

- e) Les valeurs de x et y trouvés sont solution du système, d'où $S = \{(175; 50)\}$

Activité 3

a)
$$\begin{cases} -4 \times (3x + 7y = 875 \\ 3 \times (4x + 3y = 850) \end{cases}$$

D'où
$$\begin{cases} -12x - 28y = -3500 \\ 12x + 9y = 2550 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$-19y = -950,$$

Ce qui donne $y = 50$.

- b) Les coefficients de y doivent être opposés ; il suffit de multiplier la première et la deuxième équation par -3 et 7 respectivement. On a :

$$\begin{cases} -3 \times (3x + 7y = 875 \\ 7 \times (4x + 3y = 850) \end{cases}$$

D'où
$$\begin{cases} -9x - 21y = -2625 \\ 28x + 21y = 5950 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$19y = 3325,$$

Ce qui donne $y = 175$.

- c) Les valeurs de x et y trouvés sont solution du système, d'où $S = \{(175; 50)\}$.

RÉSUMÉ:

- Un système d'équations linéaires de deux équations à deux inconnues, est une expression de la forme (S)
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 où $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$.
- Un couple $(x; y)$ est solution de (S) s'il vérifie simultanément les deux équations.
- pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, on peut utiliser la méthode par substitution ou par combinaison linéaire.
- (S) peut admettre un unique couple solution, une infinité de solution ou aucune solution (dans ce cas, on écrit, $S = \emptyset$ ou $S = \{ \}$).

EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice 1 :

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 0.5x - y = 6 \\ x - 2y = 12 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Une salle de spectacle propose deux sortes de spectacles : pièces de théâtre ou concert. Toutes les places sont au même prix mais le tarif n'est pas le même s'il s'agit d'une pièce de théâtre ou s'il s'agit d'un concert.

Alexandre réserve 2 places pour une pièce de théâtre et 4 places pour un concert, il paie 170 €.

Bérénice réserve 3 places pour une pièce de théâtre et 2 places pour un concert, elle paie 135 €.

Quels sont les tarifs respectifs pour une pièce de théâtre ou pour un concert ?

Résolution graphique des systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

LEÇON 2 :
DURÉE : 100 min

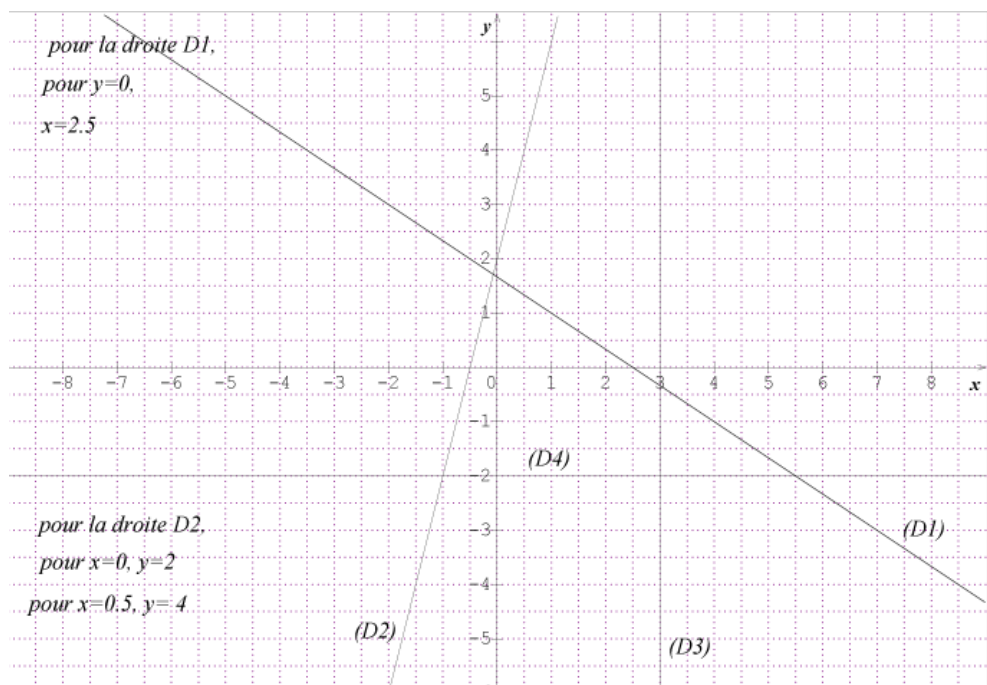
OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Résoudre graphiquement une inéquation ou un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Résoudre graphiquement un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

PRÉREQUIS

Utilise ton brouillon pour représenter graphiquement les droites dont voici les équations cartésiennes :

(D1) : $2x + 3y - 5 = 0$, (D2) : $y = 4x + 2$, (D3) : $x = 3$ et (D4) : $y = -2$



SITUATION PROBLÈME :

La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a des temps morts dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide d'utiliser ces temps morts pour fabriquer deux nouveaux modèles de bureaux, M_1 et M_2 . Les temps de réalisation pour chacun de ces modèles dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessous. Ces temps représentent le nombre d'heures nécessaires à un homme pour effectuer le travail. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun de ces modèles sont de 300 FCFA pour M_1 et de 200 FCFA pour M_2 .

	M_1	M_2	Temps libre
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

La direction désire déterminer combien de bureaux de chaque modèle elle doit fabriquer pour maximiser son profit. Comment résoudre ce problème ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

Considérons le problème ci-dessus et posons x le nombre de bureaux du modèle M_1 et y le nombre de bureaux du modèle M_2 . Les temps libres de chaque département imposent des contraintes qu'il faut respecter.

- Déterminer la contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de sciage.
- Déterminer la contrainte imposée par les temps libres à l'atelier d'assemblage.
- Déterminer la contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de sablage.
- En déduire que la compagnie fera un profit positif si et seulement si x et y sont solution du système :
$$\begin{cases} x+2y \leq 20 \\ 2x+y \leq 22 \\ x+y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$
- Représenter dans un repère orthonormé les droites (D1), (D2) et (D3) d'équations respectives : $x + 2y - 20 = 0$, $2x + y - 22 = 0$ et $x + y - 12 = 0$. Chaque droite divise le plan en deux parties.

NB : Choisir convenablement les unités graphiques.

- Choisir par ses coordonnées un point dans le demi-plan contenant le point (0,0), reporte les coordonnées dans l'inéquation : $x + 2y - 20 \leq 0$. L'inégalité obtenue est-elle juste ? si oui, hachurer le demi-plan contenant (0,0) et délimité par la droite (D1), sinon hachurer le demi-plan opposé. La partie hachurée est la solution de l'inéquation $x + 2y - 20 \leq 0$.
- Effectuer les mêmes opérations pour les inéquations : $2x + y - 22 \leq 0$ et $x + y - 12 \leq 0$.
- En déduire la résolution graphique du système :
$$\begin{cases} x+2y \leq 20 \\ 2x+y \leq 22 \\ x+y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$
- Résoudre par combinaison linéaire :
$$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ x + y = 12 \end{cases} .$$
- Comparer les coordonnées du couple solution de (S) avec les coordonnées du point de rencontre des droites (D_1): $x + 2y = 20$ et (D_2): $x + y = 12$.
- Soit P le profit de l'entreprise, exprimer P en fonction de x et y puis en déduire x et y pour que le profit soit maximal.

SOLUTION :

Posons x le nombre de bureaux du modèle M_1 et y le nombre de bureaux du modèle M_2 . Les temps libres de chaque département imposent des contraintes qu'il faut respecter.

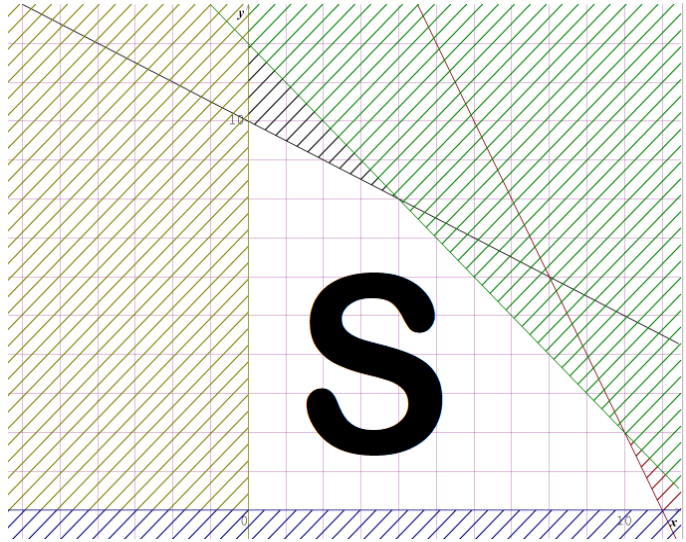
- La contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de sciage : $x + 2y \leq 20$
- La contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de d'assemblage : $2x + y \leq 22$

c) La contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de sablage : $x + y \leq 12$

d) On ajoute à ces contraintes des contraintes de non-négativité puisque le nombre de bureaux ne peut être négatif, on a donc : $x \geq 0$ et $y \geq 0$. D'où le système

$$\begin{cases} x+2y \leq 20 \\ 2x+y \leq 22 \\ x+y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

e, f, g, h) Graphiquement la partie du plan solution du système est constituée des points de coordonnées entières de la zone non hachurée représentée sur la figure ci-dessous (bords inclus) :



i) On trouve $x = 4$ et $y = 8$.

j) Ces droites se rencontrent au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

k) P étant le profit, on a : $P = 300x + 200y$.

Pour que P soit maximal, x et y doivent être les coordonnées de l'un des points de la figure ci-dessous car x et y sont des nombres entières. Pour x et y représentant les coordonnées du point $A \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$, P est maximal.

$$P = 300 \times 10 + 200 \times 2 = 3400 \text{ Frs}$$

RÉSUMÉ:

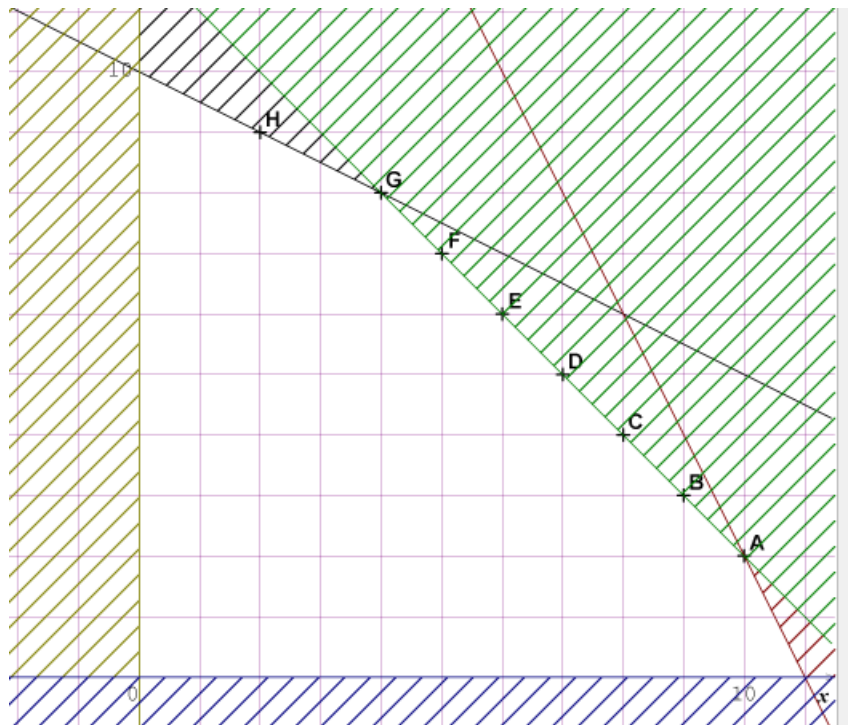
➤ Pour résoudre graphiquement un système d'équation de la forme : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, on

trace dans un repère orthonormée les droites d'équations : $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$

1. Si les deux droites sont sécantes, alors les coordonnées du point d'intersection représentent l'ensemble solution.
2. Si les deux droites sont parallèles, alors le système n'admet pas de solution.
3. Si les deux droites sont confondues, alors le système admet une infinité de solution qui est l'ensemble de tous les points se trouvant sur l'une des droites.

➤ Pour résoudre graphiquement une inéquation de 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$(ax + by + c > 0)$, on représente d'abord dans un repère orthonormé la droite d'équation $ax + by + c = 0$, cette droite divise le plan en deux demi-plans. On hachure ensuite le demi-plan contenant un point dont les coordonnées rendent vraies l'inéquation. Cette partie hachurée est la solution de l'inéquation.



➤ Pour résoudre graphiquement un système d'inéquation de premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on résout chaque inéquation.

1. S'il existe une partie du plan hachurée autant de fois que le nombre d'inéquations constituant le système, cette partie est la solution du système.
2. Sinon le système d'inéquation n'admet pas de solution.

EXERCICES D'APPLICATIONS

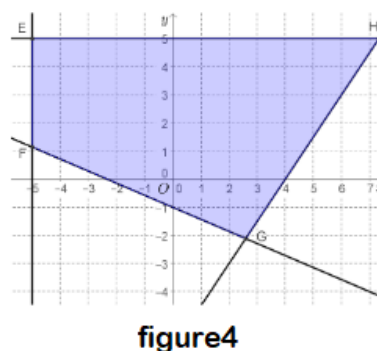
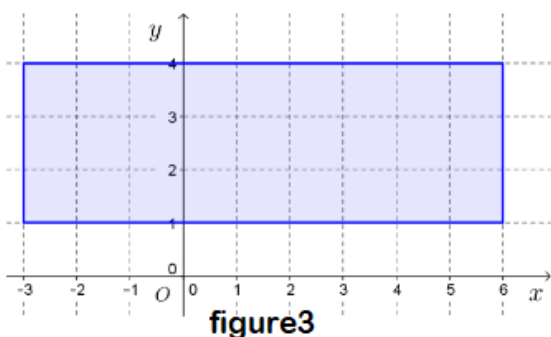
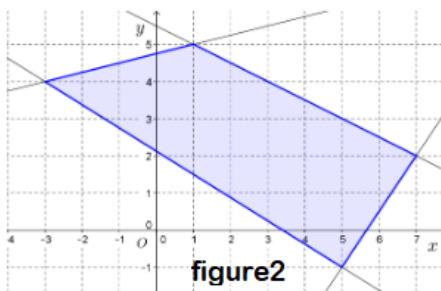
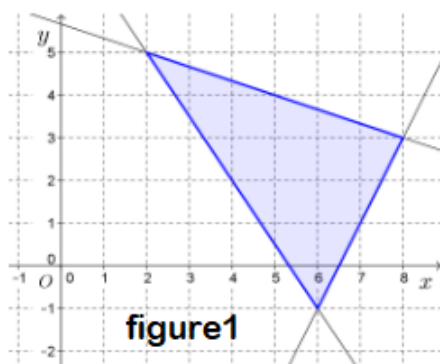
Exercice1 :

Résolvez graphiquement les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 < 0 \\ x - y + 4 > 0 \\ x + 3y - 4 < 0 \end{cases}, \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ -2 \leq y \leq 4 \\ x + y - 5 \leq 0 \end{cases}, \begin{cases} 3x - 7 - 4y \geq 0 \\ 2x + 5y \leq 9 \\ y + 2 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Exercice2 :

Pour chacun des graphiques suivants trouvez un système d'inéquations correspondant :



Déterminez également les coordonnées des points E, F, G et H.(figure 4).

Exercice3:

Pour avoir plus d'argent de poche, José fait des gardes d'enfants chez le couple Dupont et chez le couple Durand. Une garde est payée 6 € l'heure et dure 5 heures chez le couple Dupont, tandis qu'elle est payée 10 € l'heure mais ne dure qu'une heure et demie chez le couple Durand. José ne dispose que de 28 heures par mois pour effectuer ces gardes et ne veut pas en faire plus de 14 par mois. Combien de gardes doit-il faire chez chacun des deux couples en un mois pour obtenir un revenu maximal ? Quel est ce revenu maximal ?

Exercice4 :

Un atelier de couture fabrique deux modèles de robes avec le même tissu. L'un exige 1,2 m de tissu et 12 h de travail par robe, l'autre 3 m de tissu et 6 h de travail par robe. L'atelier dispose de 36 m de ce tissu et ne compte pas investir plus de 120 heures de travail pour la fabrication de ces robes. La vente d'une robe du premier modèle rapporte un bénéfice de 150 € et celle d'une robe du deuxième modèle 120 €. Combien de robes de chaque modèle faut-il produire pour obtenir un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Utiliser le livre de l'élève pour compléter.

CHAPITRE 4 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

INTERET : présenter une situation telle que l'évolution du COVID-19 au Cameroun au cours des trois derniers mois.

LECON 1 : Notion de fonction.

Durée : 50 min

MOTIVATION : Effectuer des tests d'ADN pour reconnaître le père biologique de chaque enfant dans un groupe de personnes (pères-enfants) choisit convenablement.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Reconnaître et définir une fonction
- Déterminer algébriquement l'image d'un élément
- Montrer l'égalité entre deux fonctions sur un ensemble.

PRE-REQUIS :

- Calculer la valeur numérique d'une expression littérale.
- Résoudre les équations du second degré.

SITUATION PROBLEME :

Pour faciliter la paie des ouvriers de son chantier, Mr YKSE aimerait mettre en place une formule pour la rémunération. Pour un ouvrier qui fait un nombre n d'heures de travail à raison de a FCFA l'heure augmenter de 1000FCFA comme prime, aidez Mr YKSE à mettre en place la formule qui à chaque ouvrier du chantier donne le montant de son salaire en francs CFA.

Activité d'apprentissage :

Deux véhicules A et B se déplacent le long d'une route. Les deux véhicules effectuent des mouvements uniformément variés. Les distances parcourues des véhicules A et B par rapport au temps noté t sont données respectivement par ; $f(t) = \frac{5}{2}t^2$ et $g(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2$. Ces distances sont exprimées en mètre et le temps t en secondes.

- 1- Quelle est la distance parcourue en mètres par les véhicules A et B en 2,5s ; 4s ; $\sqrt{3}$ s ? dans quel ensemble sont prises les valeurs de t ?
- 2- Quel est le temps mis par le véhicule A pour parcourir 22,5m ? quel est le temps mis par le véhicule B pour parcourir 8m ?
- 3- Calculer les distances parcourues par les véhicules A et B en $\sqrt{2}$ s et conclure.

4- Résoudre la situation problème.

Solution :

1- Distances parcourues par les véhicules A et B 2,5s ; 4s ; $\sqrt{3}$ s :

• Véhicule A :

Pour $t = 2,5s$; $d = \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{8} = 15,625 \text{ m}$.

Pour $t = 4s$; $d = \frac{5}{2} (4)^2 = 40 \text{ m}$

Pour $t = \sqrt{3}s$; $d = \frac{5}{2} (\sqrt{3})^2 = 7,5 \text{ m}$

• Véhicule B :

Pour $t = 2,5s$; $d = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 = 9,375 \text{ m}$.

Pour $t = 4s$; $d = \frac{3}{2} (4)^2 + 2 = 26 \text{ m}$.

Pour $t = \sqrt{3}s$; $d = \frac{3}{2} (\sqrt{3})^2 + 2 = 6,5 \text{ m}$.

Les valeurs de t sont prises dans $[0, +\infty[= \mathbb{R}_+$.

2- Temps mis par le véhicule A pour parcourir 22,5m :

Il suffit de résoudre l'équation : $\frac{5}{2}t^2 = 22,5 \Leftrightarrow 5t^2 = 45 \Leftrightarrow t = \pm 3$. Seule la valeur $t = 3s$ est le temps cherché.

Temps mis par le véhicule B pour parcourir 8 m ;

Il suffit de résoudre l'équation $8 = \frac{3}{2}t^2 + 2 \Leftrightarrow 3t^2 = 12 \Leftrightarrow t = 2s$.

3- Pour $t = 2s$, on a $d = f(2) = \frac{5}{2}2^2 = 10\text{m} = g(2)$. On dit que les deux véhicules se rencontrent après 2s et 10m de parcourt.

4- L'expression cherchée est $na + 1000$.

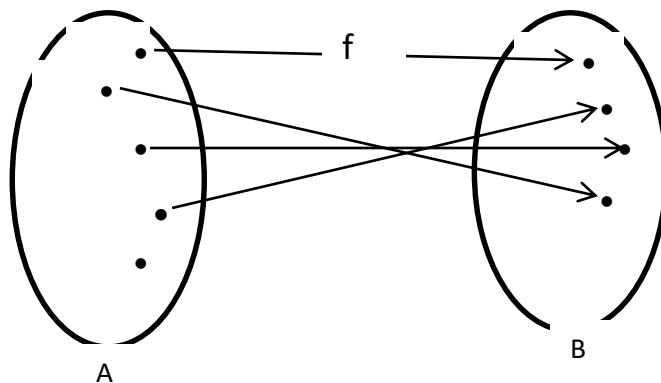
Résumé

1.1 Fonction.

• **Définition :**

Soient A et B deux ensembles non vides.

On appelle fonction de A vers B toute correspondance qui à chaque élément de A associe un ou aucun élément de l'ensemble B.



- **Notation et vocabulaire :**

- Si f est une fonction de A vers B qui à tout x associe $f(x)$. on écrit : $f : A \rightarrow B$

$$x \mapsto f(x)$$
- A est appelé ensemble de départ et B est appelé ensemble d'arrivée.
- x est la variable et $f(x)$ est l'image de x par f .
- si $y = f(x)$ alors x est l'antécédent de y par f .

- **Définition :**

On appelle ensemble de définition d'une fonction f de A vers B notée D_f , l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f .

- **Remarque :**

- Si l'ensemble d'arrivée est une partie de l'ensemble des nombres réels, on dit que f est une fonction numérique.
- Si l'ensemble de départ d'une fonction numérique est une partie de l'ensemble des nombres réels, on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.
- Si tous les éléments de A ont chacun une et une seule image, on dit que f est une **application**.

1.2- Fonctions égales sur un intervalle

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

On dit que les fonctions f et g sont égales sur I (ou qu'elles coïncident sur I), lorsque pour tout élément x de I , $f(x) = g(x)$.

Exercice d'application :

- Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes et préciser celle(s) qui sont des applications :

$$f: x \mapsto 1 - x; \quad g: \mapsto \frac{1}{1+x}; \quad h: \mapsto \sqrt{-6x}$$

- Pour chacun des cas suivants, déterminer D_f et D_g puis l'ensemble sur lequel ces fonctions coïncident.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$; $g(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ et $g(x) = x - 1$

LECON 2 Étude graphique de fonction. DUREE : 50 min

MOTIVATION

De nombreuses situations ont un lien avec des fonctions qui parfois sont faciles à interpréter grâce à leurs représentations graphiques. C'est le cas de la situation du covid-19 au Cameroun ou en Afrique.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

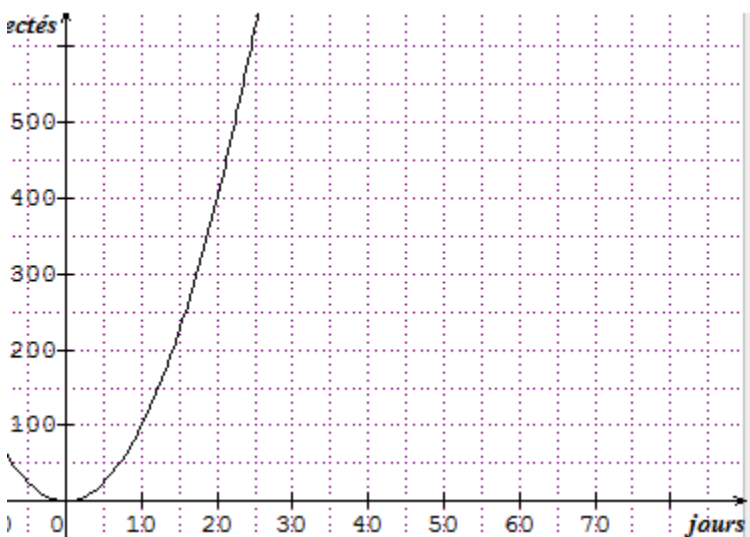
- Reconnaître la représentation graphique d'une fonction.
- Déterminer graphiquement l'image d'un nombre.
- Déterminer graphiquement l'image directe et réciproque d'un ensemble.

PRE-REQUIS :

- Lire et placer les coordonnées d'un point dans un repère du plan.

SITUATION PROBLEME :

Le schéma ci-dessous donne le nombre de personnes infectées au covid_19 dans une région du pays en 80 jours. Quel est le nombre d'infectés en 10 jours, 25 jours ? Dans quel intervalle se trouve l'ensemble des personnes infectées entre le 10^{ème} et le 20^{ème} jour ?



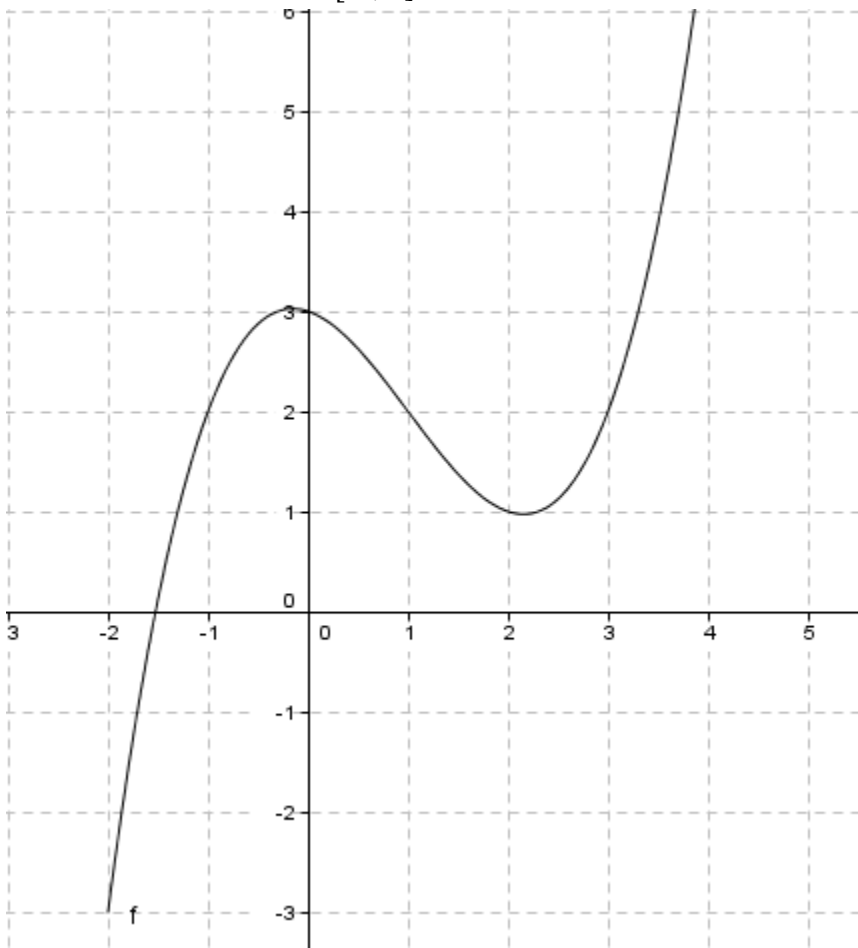
Activité d'apprentissage :

On considère le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$							

- 1- Compléter le tableau ci-dessous.

- 2- Placer dans un repère orthonormé les points de coordonnées $(x, y=f(x))$ et relier les par une courbe.
- 3- Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , le schéma ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[-2, 4]$



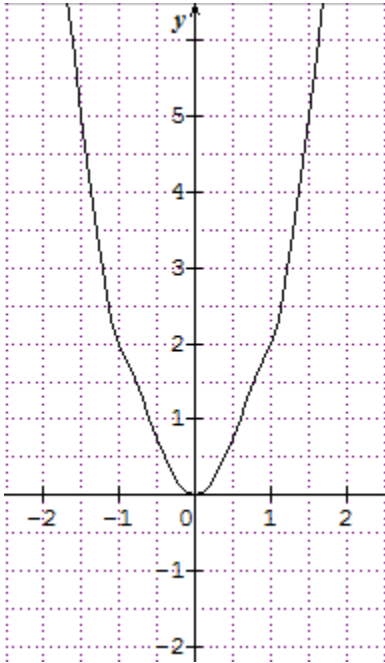
- a- Déterminer graphiquement $f(2)$, $f(3)$ et $f([2, 3])$,
- b- Déterminer graphiquement les antécédents de -3 et 2 . Quel est l'intervalle ou la réunion d'intervalles qui a pour image $[-3, 2]$.
- 4- Résoudre la situation problème.

Solution :

1- compléter le tableau

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

2-



3- a- $f(2) = 1$; $f(3) = 2$; $f([2, 3]) = [1, 2]$.

c- l'antécédent de -3 est : -2. Les antécédents de 2 sont : -1 et 1.

d- $f([-3, 2]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

4- Solution de la situation problème :

Le nombre d'infectés en 10 jours est 100.

Le nombre d'infectés en 25 jours est 650.

L'intervalle des personnes infectées entre le 10^{ème} et le 20^{ème} jour est : [100 ; 400].**RESUME :****2.1 Représentation graphique - image et antécédent d'un nombre.**Le plan est muni d'un repère. f est une fonction numérique d'une variable réelle, d'ensemble de définition Df .

- On appelle représentation graphique de f ou courbe représentative de f , l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix}\right)$ où x est un élément de Df .
- On note habituellement (C_f) la représentation graphique de f .

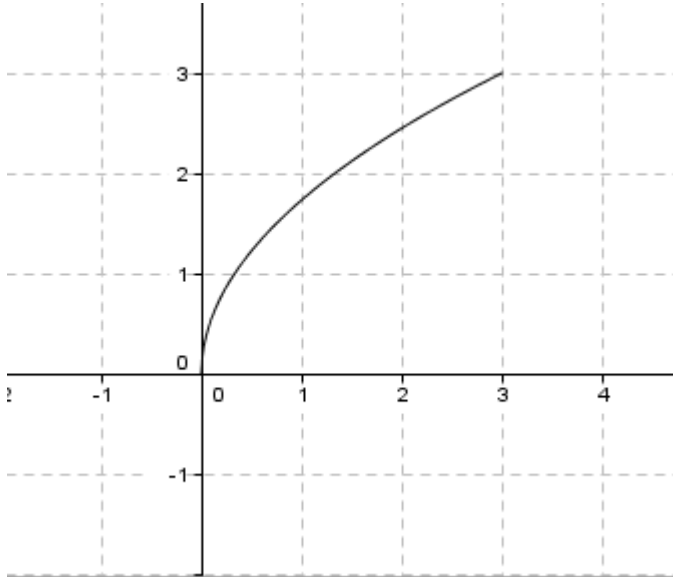
On a : $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix}\right) \in (C_f) \Leftrightarrow x \in Df \text{ et } y = f(x)$.

Quand f est une fonction déterminée par une formule explicite, on dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe (C_f) .• **Remarque :**

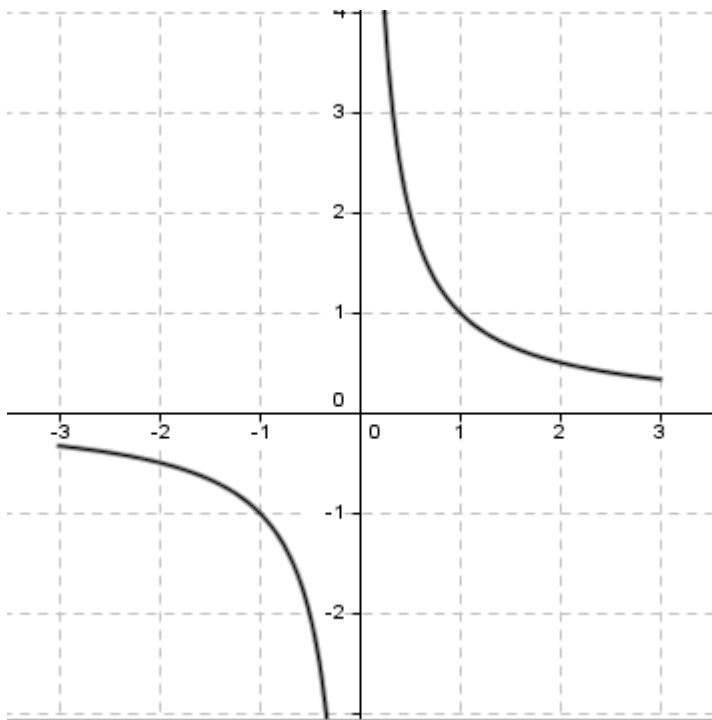
Les représentations graphiques de fonctions égales sur un ensemble coïncident sur cet ensemble.

2.2- Représentation graphique des fonctions : $x \mapsto \sqrt{3x}$; $x \mapsto \frac{3}{x}$; $x \mapsto 3x^3$

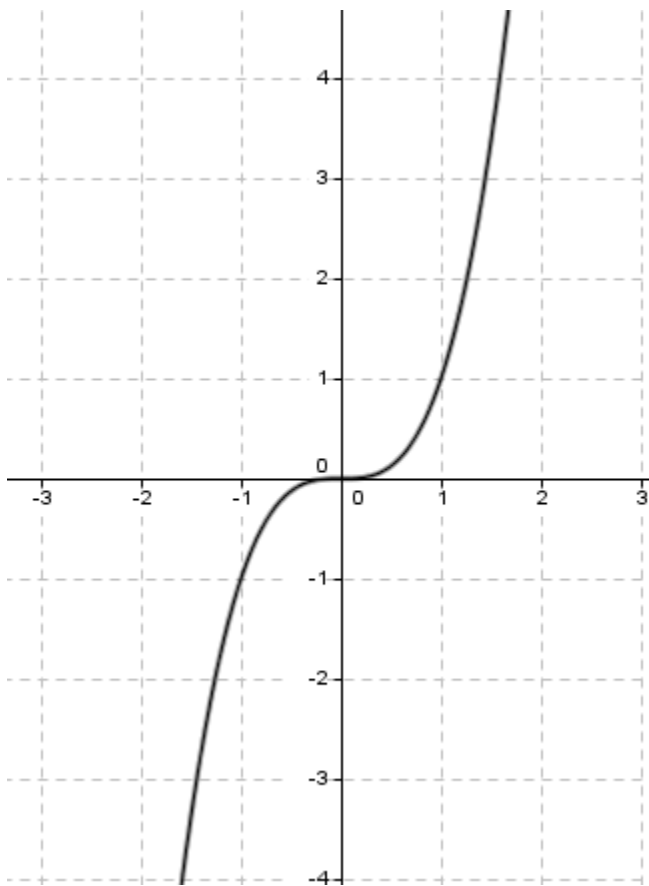
- **Fonction racine carrée** : $f: x \mapsto \sqrt{3x}$



- **Fonction inverse** : $g: x \mapsto \frac{1}{x}$



- **Fonction cubique** $h: x \mapsto x^3$



2-3- Image directe et réciproque d'un ensemble.

Soit f une fonction de A vers B et E une partie de A et F une partie de B .

- On appelle image directe de E par f , l'ensemble des images par f de tous les éléments de E . On le note $f(E)$.
- On appelle image réciproque de F par f , l'ensemble F' des antécédents par f de tous les éléments de F .

2-4- Résolution graphique des équations et inéquations à l'aide des courbes représentatives des fonctions.

Pour résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = g(x)$, on peut procéder de la manière suivante :

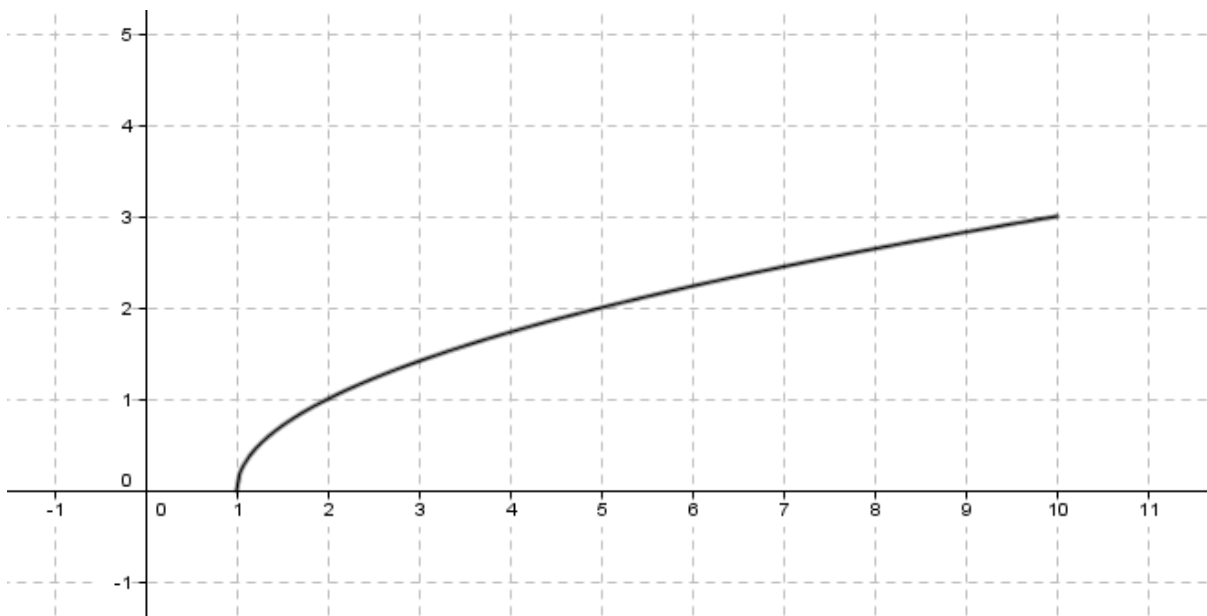
- Disposer des courbes (C_f) et (C_g) d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$;
- L'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de (C_g) est l'ensemble des solutions de l'équation.

Pour résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x) < g(x)$, on peut procéder comme suit :

- Disposer des courbes (C_f) et (C_g) d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$;
- L'ensemble des abscisses des points de (C_f) situés au-dessous de (C_g) est l'ensemble des solutions de l'inéquation.

EXERCICES D'APPLICATION :

- I- Le plan est muni du repère (O, I, J) . la représentation ci-dessous est celle de la fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$ dans l'intervalle $[1, 10]$.



1- Quel est le point de (C_f) qui a pour abscisse 2 ?

2- Les points $A\left(\frac{3}{-2}\right)$; $B\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)$ appartiennent-ils à (C_f) ?

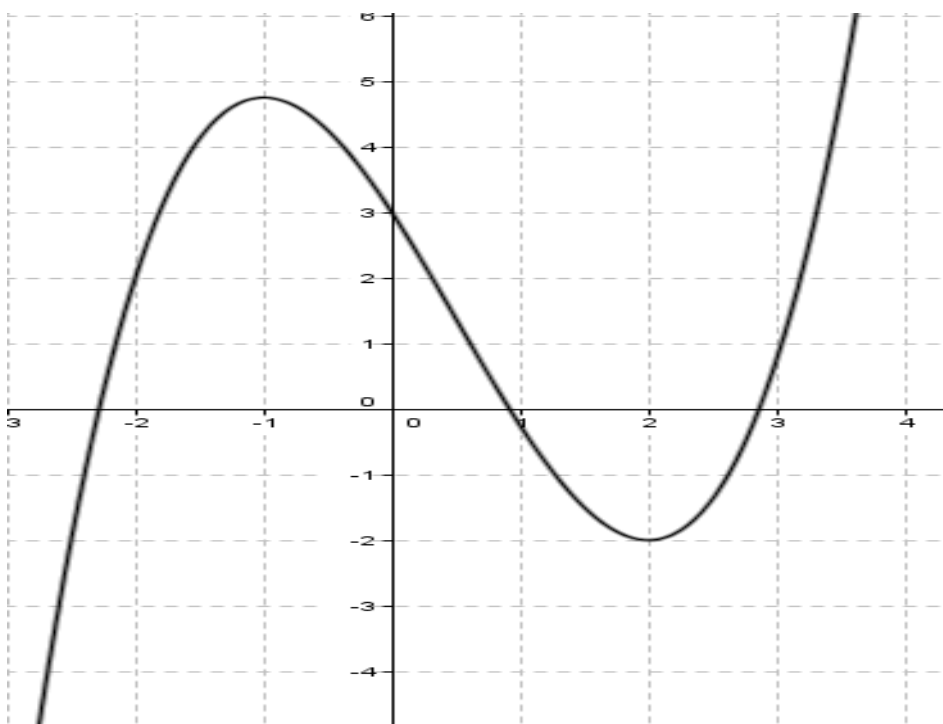
II- Dans un repère orthonormée (O, I, J) du plan, représenter sur l'intervalle I chacune des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto 3x^2, I = [-4, 4] ; g: x \mapsto \frac{3}{x}, I = [-4, 4] ; f: x \mapsto \sqrt{4x}, I = [0, 4]$$

III- On considère ci-dessous la représentation graphique d'une fonction numérique sur l'intervalle $[-3, 4]$.

1- Déterminer l'image directe de chacun des intervalles suivants : $[0, 2]$; $[2, 3]$.

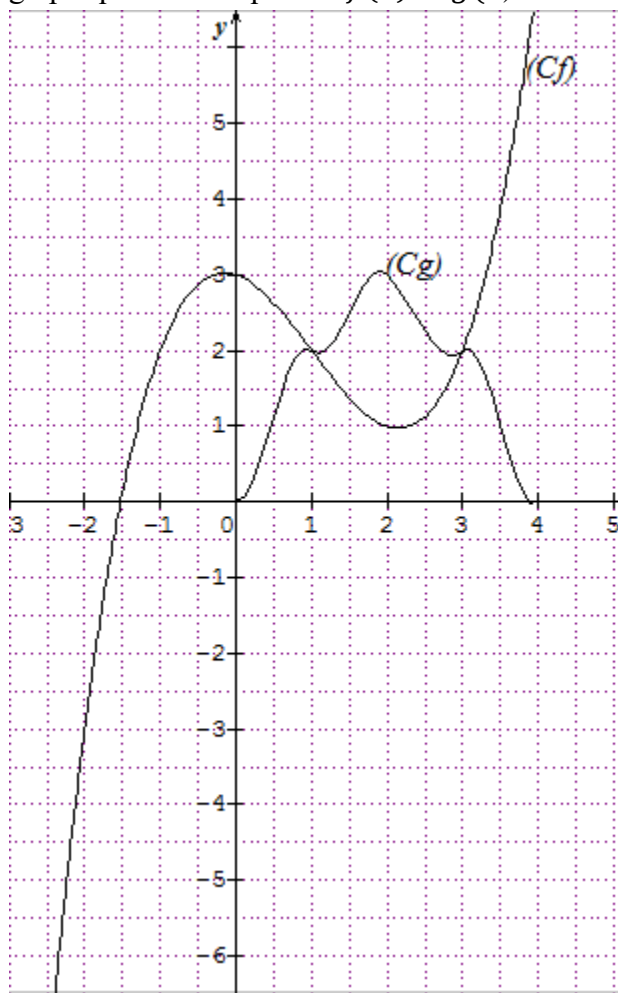
2- Déterminer l'image réciproque de chacun des intervalles suivants : $[-2, 0]$; $[0, 2]$.



Le plan est muni du repère (O, I, J).

On considère les fonctions f et g de représentation graphique (C_f) et (C_g) respectivement ci-dessous.

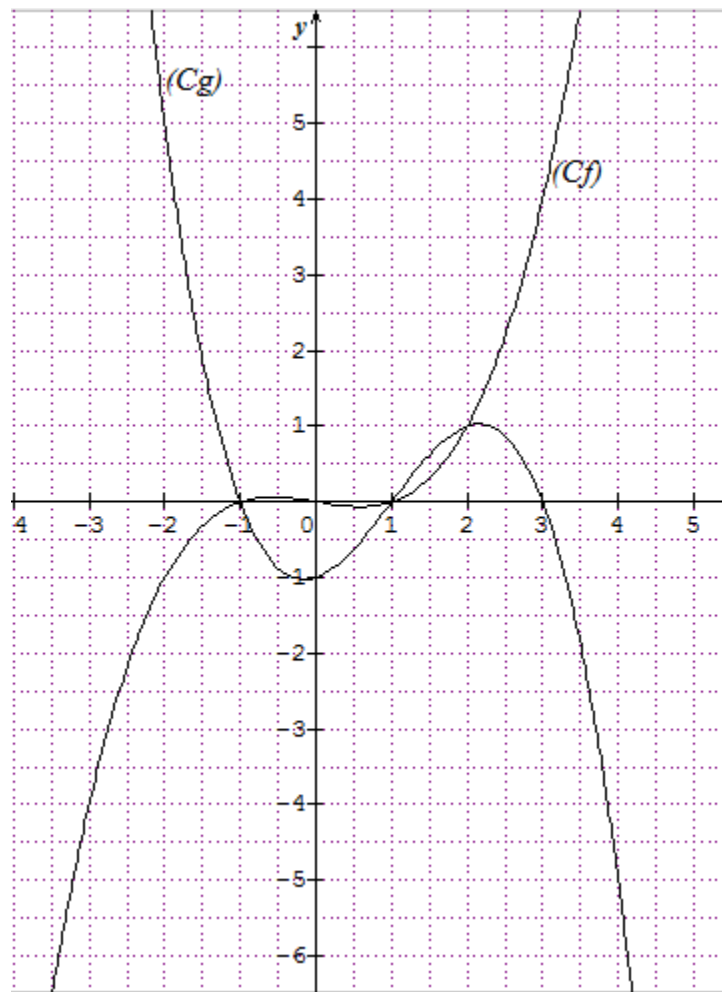
- 1- Déterminer graphiquement les domaines de définition D_f et D_g respectivement de f et g .
- 2- Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses. (ou encore résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 0$).
- 3- Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses. (ou encore résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$).
- 4- Déterminer les abscisses des points d'intersection des courbe (C_g) et (C_f) . (ou encore résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$).



- 5- Déterminer l'intervalle où la courbe (C_f) est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$
- 6- Déterminer l'intervalle où la courbe (C_f) est en dessous de (C_g) .

IV- Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On considère les fonctions f et g de représentation graphique (C_f) et (C_g) sur $[-4 ; 5]$ respectivement ci-dessous.



- 1- Résoudre graphiquement les équations $g(x) = 0$; $g(x) = -1$; $f(x) = 0$ et $g(x) = f(x)$.
- 2- Résoudre graphiquement les inéquations suivantes : $g(x) < 0$; $g(x) < f(x)$; $g(x) \geq 1$.

LECON 3 Variations d'une fonction.**Durée : 50 min****MOTIVATION**

Dans toutes entreprises, il est important de faire un bilan après une période donnée. Dans ce bilan il y a toujours un point sur lequel on s'attarde beaucoup qui est celui des recettes et dépenses (augmentation ou baisse des recettes et dépenses).

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

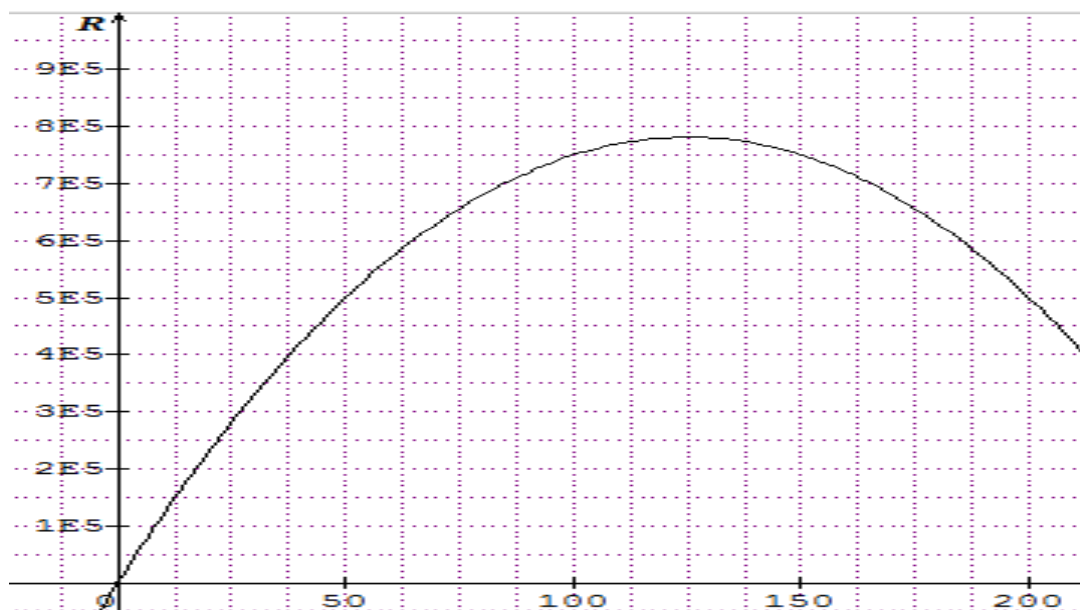
- Déterminer algébriquement et graphiquement le point le plus haut (maximum) et le point le plus bas (minimum) d'une courbe dans un intervalle précis.
- Déterminer le taux d'accroissement d'une fonction.
- Donner algébriquement et graphiquement le sens des variations d'une fonction.

PRE-REQUIS :

- Lire et placer les coordonnées d'un point dans un repère du plan.
- Etudier le signe d'une expression dans un intervalle donné.
- Utiliser les propriétés de comparaison dans \mathbb{R} .

SITUATION PROBLEME :

Une entreprise de la place souhaite faire un bilan sur ses recettes (R) annuelle correspondant à un prix (P) d'abonnement. Comment se comporte ces recettes pour les prix de 0 à 200 ?



LECON 2 : Structure de groupe**Durée : 100min****OBJECTIFS PEDAGOGIQUES**

- Montrer qu'une loi de composition interne :
 - est associative ;
 - est commutative ;
 - admet un élément neutre.
- Montrer qu'un élément admet un symétrique par rapport à une loi.
- Montrer qu'un ensemble muni d'une loi de composition interne est un groupe.

PRÉ-REQUIS

Répondre par vrai ou faux :

- a) Pour trois réels $x, y, et z$, $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = 1 \times x = x$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} / xy = 1.$

Correction

- a) Vrai b) Vrai c) Faux

SITUATION PROBLÈME

Sagnia est toujours fascinée de constater que dans le tableau 2, le produit de deux éléments de l'ensemble $E = \{-1; 0; 1\}$ est toujours un élément de E. Il se souvient que dans \mathbb{R} le produit de deux éléments est aussi un élément de \mathbb{R} et aussi que les propriétés (a), (b) et (c) des prérequis y sont également vérifiées, mais elle veut savoir si dans l'ensemble E, la multiplication garde les mêmes propriétés que dans \mathbb{R} ; Si oui, elle aimerait savoir comment on appelle les ensembles vérifiant ces propriétés.

\times	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1
Tableau 2			

Aidez-le à trouver des réponses à ces questions.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

- 1) Vérifier que pour tout $x, y et z$ éléments de $E = \{-1; 0; 1\}$; $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$. (On dit que la multiplication est associative dans E).
- 2) Montrer $1 \in E$ et vérifier que pour tout $x \in E$, $x \times 1 = 1 \times x = x$.

(On dit que 1 est un élément neutre pour la multiplication dans E).

3) Pour tout élément x non nul de E, existe-il toujours un élément y de E tel que $x \times y = 1$.

(Si oui, on dit que chaque élément non nul x de E admet un symétrique y dans E ; On note $y = x^{-1}$).

Fort des trois propriétés vérifiées dans les questions 1), 2) et 3), on dit que $(E^* ; \times)$ est un groupe où E^* désigne l'ensemble E privé de 0.

4) Montre que $(\mathbb{Z}; +)$ est un groupe.

5) Vérifier que pour tous x et y éléments de E ; $x \times y = y \times x$. (On dit que la loi \times est commutative dans E).

Solution

1) Vérifier que pour tout x, y et z éléments de $E = \{-1; 0; 1\}$; $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.

Pour $x = -1, y = 0$ et $z = 1$ on a : $-1 \times (0 \times 1) = 0 = (-1 \times 0) \times 1$.

Pour $x = -1, y = 1$ et $z = 1$ on a : $-1 \times (1 \times 1) = -1 = (-1 \times 1) \times 1$.

Etc. (On dit que la multiplication est associative dans E).

2) Montrer $1 \in E$ et vérifier que pour tout $x \in E$, $x \times 1 = 1 \times x = x$.

$1 \in E$ (Évident).

On a : $0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$; $1 \times 1 = 1 \times 1 = 1$ et $-1 \times 1 = 1 \times (-1) = -1$.

(On dit que 1 est un élément neutre pour la multiplication dans E).

3) Pour tout élément x non nul de E, existe-il toujours un élément y de E tel que $x \times y = 1$.

Oui. Par exemple pour $x = -1$ prendre $y = -1$.

(Si oui, on dit que chaque élément non nul x de E admet un symétrique y dans E ; On note $y = x^{-1}$).

Fort des trois propriétés vérifiées dans les questions 1), 2) et 3), on dit que $(E^* ; \times)$ est un groupe où E^* désigne l'ensemble E privé de 0.

4) Montre que $(\mathbb{Z}; +)$ est un groupe.

Soit x, y et z trois éléments de \mathbb{Z} . On a :

$x + (y + z) = (x + y) + z$. (Associativité)

$0 \in \mathbb{Z}$ et $x + 0 = 0 + x = x$ (0 est l'élément neutre)

$x + (-x) = 0$ ($-x$ est le symétrique de x)

Donc $(\mathbb{Z}; +)$ est un groupe.

5) Vérifier que pour tous x et y éléments de E ; $x \times y = y \times x$.

Evident (il suffit d'observer la symétrie du tableau). (On dit que la loi \times est commutative dans E).

RÉSUMÉ

Soit G un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne (LCI) dans G .

- On dit que $*$ est **associative dans G** si pour tous éléments a, b et c de G on a : $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- On dit que $*$ admet **un élément neutre dans G** s'il existe un élément e de G tel que pour tout élément x de G , on a : $x * e = x$ et $e * x = x$.
- On dit qu'un élément x de G **admet un symétrique dans G** s'il existe $y \in G$ tel que $x * y = e$ et $y * x = e$; où e est l'élément neutre de la loi $*$ dans G .
Le symétrique x est noté x^{-1} .
- On dit que $*$ est **commutative dans G** si pour tous éléments x et y de G , on a : $x * y = y * x$.

Remarques :

Soit G un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne dans G .

On dit que $(G, *)$ est **un groupe** si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- La loi $*$ est associative dans G
- La loi $*$ admet un élément neutre dans G
- Tout élément de G admet un symétrique par rapport à la loi $*$.

Le couple $(G, *)$ se lit « **G muni de la loi $*$** ».

Si dans le groupe $(G, *)$, la loi $*$ est commutative, on dira que le groupe $(G, *)$ est un **groupe commutatif ou abélien**.

EXERCICES D'APPLICATIONS

1) Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e . Montrer que e est unique.

2) Montrer que (\mathbb{Q}^*, \times) est un groupe abélien.

3) On muni sur $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'une addition $(+)$ définie par :

$$(x; y) + (x'; y') = (x + x'; y + y').$$

a) Montrer que $+$ est une loi de composition dans G .

b) Montrer que G est un groupe commutatif.

*MODULE 19 : CONFIGURATION ET TRANSFORMATIONS
ELEMENTAIRES DU PLAN*

CHAPITRE 6 : ANGLE ORIENTÉ ET TRIGONOMETRIE

MOTIVATION

Aujourd'hui, les angles orientés et la trigonométrie, sont fréquemment utilisées dans toutes les disciplines d'ingénierie, de physique et des mathématiques. Par exemple les notions sur les angles sont utilisées pour la construction des bâtiments.

LEÇON 1 : ANGLES ORIENTÉS

Durée : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir un angle orienté,
- Placer un angle orienté sur un cercle trigonométrique,
- Définir et déterminer la mesure principale, de tout angle.
- Orienter un plan.

PRÉREQUIS

Placer un angle sur un cercle à l'aide d'outils géométrique, convertir un angle en radian.

SITUATION PROBLÈME :

Deux élèves athlètes du lycée Bilingue Buea concourent l'un contre l'autre pour remporter le premier prix lors de la finale de la compétition olympiques du lycée. Les élèves de seconde sont chargés de mesurer la distance parcourue par chacun des concurrents sous forme d'angle. Partis du même point de départ, les deux concurrents ont parcouru des angles de 90° et 270° . Étant donné que le circuit de course est circulaire, que peut-on déduire de la position des deux athlètes sur un cercle ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

Soit un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2 cm.

- a.) i. En considérant que 180° équivaut à π radians, déterminez 90° et en 270° en radians.
- ii. Après avoir placé 90° et 270° sur un cercle trigonométrique, que pouvez conclure sur la position des deux élèves sur le cercle.

b.) Angle principal :

i. Sur le même cercle trigonométrique, placez l'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Commentez sur la position de l'angle θ par rapport à celle l'angle $\frac{3\pi}{2}$ sur le cercle.

ii. On pose $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Pouvez-vous trouver deux autres angles β et γ qui ont la même position que θ et α sur le cercle trigonométrique ?

iii. Que représente θ pour les angles α , β et γ ?

iv. Soit l'expression $A = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Trouvez les trois valeurs de k pour que A soit respectivement égale aux angles α , β et γ .

Résolution de l'activité d'apprentissage

a.) i. En considérant que 180° équivaut à π radians, déterminez 90° et en 270° en radians.

$$180^\circ \rightarrow \pi$$

$$90^\circ \rightarrow x$$

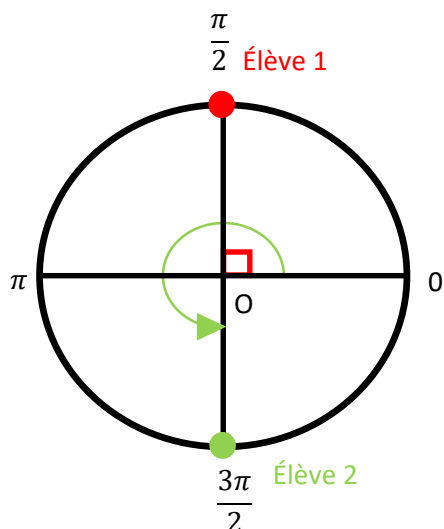
En faisant le produit des extrêmes et des moyens on trouve $x = \frac{\pi}{2}$;

$$180^\circ \rightarrow \pi$$

$$270^\circ \rightarrow x$$

En faisant le produit des extrêmes et des moyens on trouve $x = \frac{3\pi}{2}$

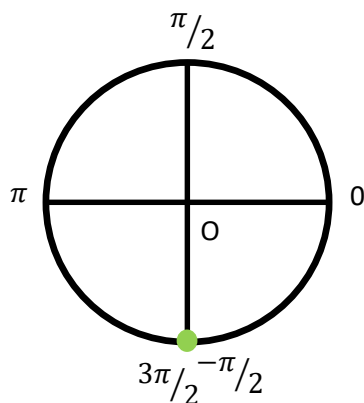
ii. Après avoir placé 90° et 270° sur un cercle trigonométrique, que pouvez conclure sur la position des deux élèves sur le cercle.



Les deux élèves sont diamétralement opposés sur le cercle.

b.) Angle principal :

i. Sur le même cercle trigonométrique, placez l'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Commentez sur la position de l'angle θ par rapport à celle l'angle $\frac{3\pi}{2}$ sur le cercle.



On note que les angles $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ occupent la même position sur le cercle trigonométrique.

ii. Posons $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ radians. Pouvez-vous trouver deux autres angles β et γ qui ont la même position que θ et α sur le cercle trigonométrique ?

Les angles $\beta = -\frac{5\pi}{2}$ et $\gamma = \frac{7\pi}{2}$ occupent aussi la même position que les angles α et θ sur le cercle.

iii. Que représente θ pour les angles α , β et γ ?

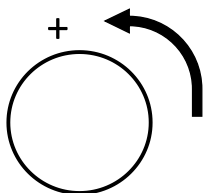
L'angle θ est appelé angle principal des angles α , β et γ .

iv. Soit l'expression $A = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Trouvez les trois valeurs de k pour que A soit respectivement égale aux angles α , β et γ

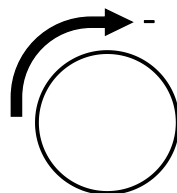
Pour trouver les valeurs de k recherchée, on peut remplacer k aléatoirement dans l'expression de A par des nombres entiers relatifs, jusqu'à l'obtention des valeurs des angles α , β et γ . Ainsi, on trouve que pour $k = -1$, $k = 1$ et $k = 2$, l'expression A est respectivement égale aux angles α , β et γ .

RÉSUMÉ

Il existe deux façons et deux seulement de parcourir un cercle. On convient d'appeler **sens positif** ou **sens direct** le sens inverse du déplacement des aiguilles d'une montre.



Sens positif ou sens direct



Sens négatif ou sens indirect

Orienter un cercle c'est choisir le sens de parcours pour ce cercle. On dit qu'un plan est orienté si tous ses cercles sont orientés dans le même sens.

Une unité de longueur étant choisie, on appelle **cercle trigonométrie** du plan orienté tout cercle orienté dans le sens positif de rayon 1. Sa circonférence est 2π

Dans un repère orthonormé $O ; I ; J$ on a $OI = OJ = 1$ et mes $(\vec{OI}; \vec{IJ}) = \frac{\pi}{2}$

Soit X un angle α est **la mesure principale** de X si $\alpha \in [-\pi ; \pi]$ alors, et qu'il existe un entier relatif k tel que $X = \alpha + 2k\pi$

Bon à savoir : Pour tout réel x , il existe un unique réel α de $]-\pi ; \pi[$ tel que :

$$x = \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De plus, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que : $\text{mes}(\vec{OI}; \vec{IM}) = \alpha$.

On appelle le point M , **image** du réel x sur le cercle trigonométrique

✚ Deux angles orientés ont la même mesure si et seulement si, ils ont la même mesure principale.

Exemple : comparer $\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{13\pi}{3}$

APPLICATION

Trouver la mesure principale de $\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{2019\pi}{4}$ puis placer leur image sur un cercle trigonométrique.

Résolution de l'application

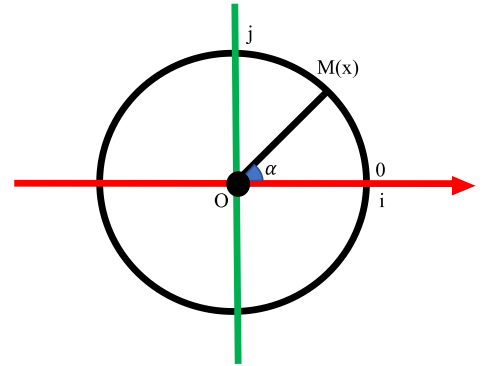
1. Trouver la mesure principale de $\frac{7\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{7\pi}{3} &= \frac{(1+6)\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} + 2\pi. \end{aligned}$$

Donc la mesure principale de $\frac{7\pi}{3}$ est l'angle $\frac{\pi}{3}$.

2. Trouver la mesure principale de $\frac{2019\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{2019\pi}{4} &= \frac{(2020-1)\pi}{4} \\ &= \frac{2020\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



$$= -\frac{\pi}{4} + 505\pi$$

Donc la mesure principale de $\frac{2019\pi}{4}$ est l'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Consigne : Représentez ces angles sur le cercle trigonométrique, comme montré par l'enseignant durant l'activité d'apprentissage.

EXERCICES Dans le livre au programme.

LEÇON 2 : TRIGONOMETRIE

Durée : 100 min

Objectifs pédagogiques

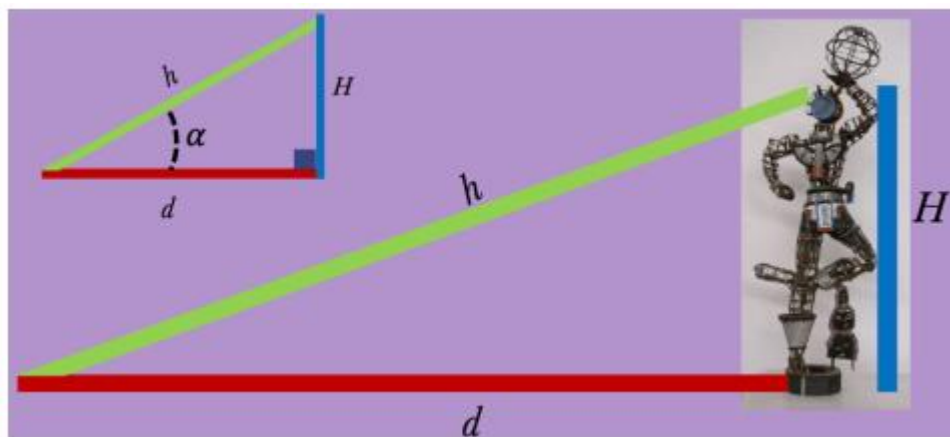
A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Connaître la définition du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle orienté,
- Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer le cosinus et le sinus d'angles de vecteurs,
- Calculer des rapports trigonométriques d'angles remarquables,
- Connaître et utiliser les formules donnant le cosinus et le sinus d'une somme ou d'une différence

Prérequis

Notions sur la propriété de Pythagore, rapports trigonométriques d'un angle dans le triangle rectangle.

Situation problème



La première utilisation des fonctions trigonométrique apparait au 8e avant Jésus christ, pour la construction des temples et des autels. Ces fonctions, à savoir cosinus, sinus et tangente sont utilisées pour déterminer le rapport des côtés d'un triangle rectangle. Le maire d'Ebolawa veut ériger un

monument dans le centre-ville, pour la culture des populations qui y vivent. Il souhaite que ce monument puisse s'apercevoir sur une distance $d = 4$ km du centre-ville. Pour construire cet autel, les ingénieurs utilisent une maquette de la statue de la liberté de la ville de Douala. On définit par H la hauteur du monument et h la distance entre le sommet du monument et point maximal duquel on peut voir l'autel. Les segments d , h et H , forment un triangle rectangle comme illustré sur la figure ci-contre. Soient (r_1 , r_2 et r_3) les rapports des côtés du triangle rectangle, existe-t-il une relation entre ces trois quotients ?

Activité d'apprentissage :

Cas particulier : Les côtés du triangle mesurent $d = 4.0 \text{ km}$ et $h = 5.0 \text{ km}$.

- A. En utilisant la propriété de Pythagore, montrez que $H = 3.0 \text{ km}$.
- B. Les rapports des côtés du triangle sont définis par $r_1 = \frac{d}{h}$, $r_2 = \frac{H}{h}$, $r_3 = \frac{H}{d}$. Calculez les valeurs numérique (aux dixièmes près) des rapports r_1 , r_2 et r_3 .
- C. Comparer la valeur de r_3 et celle du quotient $\frac{r_2}{r_1}$. Que pouvez conclure ?

En général : Les fonctions trigonométriques sont définies comme les rapports des côtés d'un triangle rectangle, calculé à la question précédente. Le cosinus, le sinus et la tangente sont respectivement définis tels que $\cos \alpha = r_1$, $\sin \alpha = r_2$, $\tan \alpha = r_3$, ou α est l'angle formé par les segments d et h .

Calculez le rapport $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ en fonction de d , h et H , puis le comparer à $\tan \alpha$. Que pouvez-vous conclure ?

Résolution de l'activité

Cas particulier : Les côtés du triangle mesurent $d = 4.0 \text{ km}$ et $h = 5.0 \text{ km}$.

- A. En utilisant la propriété de Pythagore, montrez que $H = 3.0 \text{ km}$.

$$h^2 = d^2 + H^2, \quad \text{donc} \quad H = \sqrt{h^2 - d^2} = 3 \text{ km}$$

- B. Les rapports des côtés du triangle sont définis par $r_1 = \frac{d}{h}$, $r_2 = \frac{H}{h}$, $r_3 = \frac{H}{d}$. Calculez les valeurs numérique (aux centièmes près) des rapports r_1 , r_2 et r_3 .

$$r_1 = \frac{d}{h} = \frac{4}{5} = 0.80, \quad r_2 = \frac{H}{h} = 0.60, \quad r_3 = \frac{H}{d} = 0.75.$$

- C. Comparer la valeur de r_3 et celle du quotient $\frac{r_2}{r_1}$. Que pouvez conclure ?

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{0.60}{0.80} = 0.75.$$

On constate que $\frac{r_2}{r_1} = r_3$

En général : Les fonctions trigonométriques sont définies comme les rapports des côtés d'un triangle rectangle, calculé à la question précédente. Le cosinus, le sinus et la tangente sont respectivement définis comme, $\cos \alpha = r_1$, $\sin \alpha = r_2$, $\tan \alpha = r_3$, ou α est l'angle formé par les segments d et h .

Calculez le rapport $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ en fonction de d , h et H , puis le comparer à $\tan \alpha$. Que pouvez-vous conclure ?

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{r_2}{r_1} = r_3, \quad \text{or} \quad \tan \alpha = r_3. \quad \text{En conclusion} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

RESUME

Soit α un angle et M son point image sur le cercle trigonométrique.

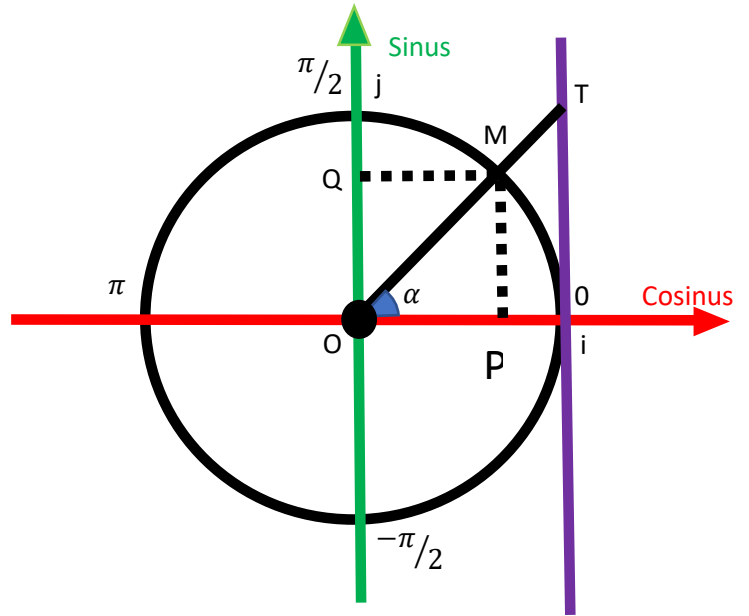
Nous avons

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \overline{OP} , \\ \sin \alpha &= \overline{OQ} , \\ \tan \alpha &= \overline{IT} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} . \end{aligned}$$

En considérant le triangle OPM est rectangle, nous avons ; $OM^2 = OP^2 + OQ^2$. Or :

$$OM = 1, \quad OP = \cos \alpha, \quad \text{et} \quad OQ = \sin \alpha.$$

D'où $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

**APPLICATION**

1- Démontrons sous la condition d'existence que

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Résolution de l'application

Démontrons sous la condition d'existence que $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}, \text{ or } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \text{ Donc}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Propriété :

- i. Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha > 0$ et $\tan \alpha > 0$
- ii. Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, alors $\cos \alpha < 0$, $\sin \alpha > 0$ et $\tan \alpha < 0$

Angles opposés et angles supplémentaires

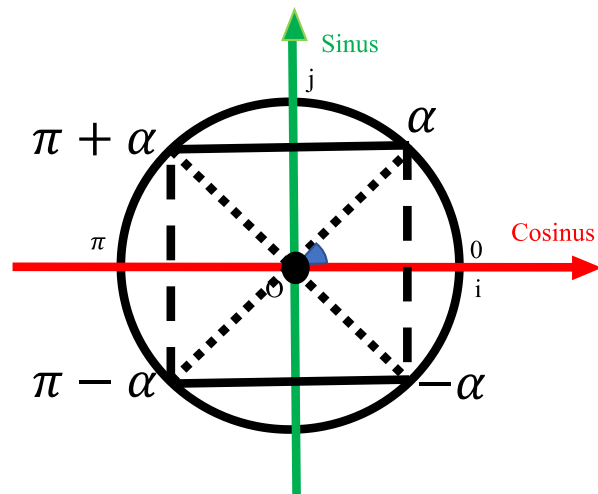
Soit α un angle nous avons :

A partir de cette figure, nous pouvons donc dire :

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$



Application :

En remarquant que $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, calculer $\cos \frac{4\pi}{3}$ et $\sin \frac{4\pi}{3}$

Résolution de l'application :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\cos\frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\sin\frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Chapitre 7 : ANGLÉS INSCRITS ET POLYGONES RÉGULIERS

LEÇON 1 : ANGLÉS INSCRITS

Durée : 100 min

Objectifs pédagogiques :

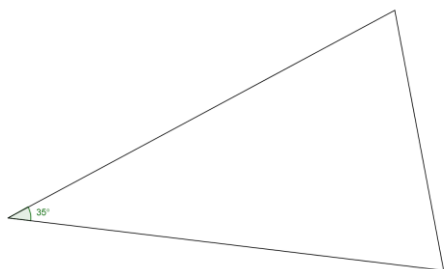
- Reconnaître un angle inscrit dans un cercle ;
- Déterminer la mesure d'un angle inscrit défini par une corde et un point ;
- Reconnaître un angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente et déterminer sa mesure.

Prérequis :

- Qu'est-ce qu'une corde d'un cercle ?
- Qu'est-ce qu'un angle au centre d'un cercle ?
- Qu'est-ce qu'un angle inscrit dans un cercle ?

Situation problème :

Pour confectionner le col (dit vol « v ») d'un vêtement, Mme Bella utilise une pièce de tissu de forme triangulaire dont la mesure de l'angle à un sommet est 35° . Elle souhaite couper un morceau de tissu de forme triangulaire suivant la base du sommet précédent de sorte que l'angle au sommet ayant la même base avec le morceau de tissu initial soit 70° (c'est-à-dire le double de l'angle initial 35°). Aide Mme Bella à réaliser son col.



Activité d'apprentissage :

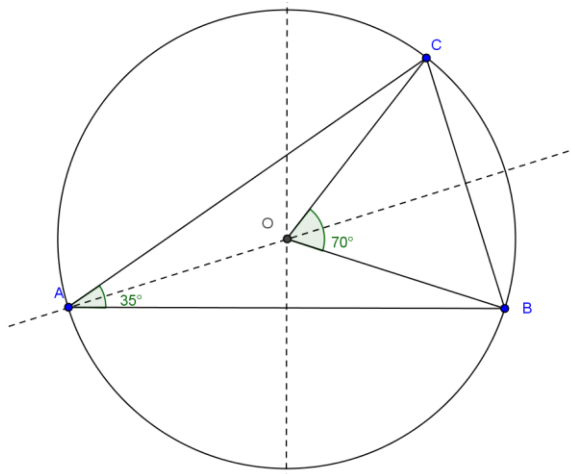
On considère un triangle ABC quelconque, tel que $mes \hat{A} = 35^\circ$.

- Dessiner ABC et construire le cercle circonscrit à ABC .

- b) On appelle O le centre du cercle circonscrit. À l'aide d'un rapporteur donner la mesure de l'angle \widehat{BOC} .
- c) Justifier que $mes \widehat{BOC} = 2 mes \widehat{BAC}$.
- d) Donner à Mme Bella la procédure à suivre pour réaliser son col.

Correction de l'activité d'apprentissage :

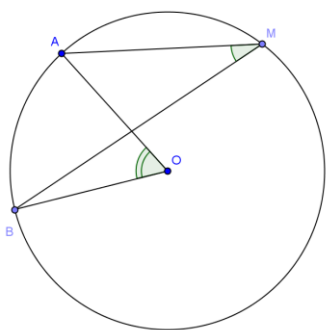
- a) Construction du cercle à partir du point de concours des médiatrices des côtés du triangle.
- b) $mes \widehat{BOC} = 70^\circ$.
- c) Justification : l'angle \widehat{BOC} est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit \widehat{BAC} .
- d) Pour confectionner ce col, Mme Bella doit :
Construire les médiatrices de deux des côtés de la pièce de tissu et à partir de leur point d'intersection O , couper le tissu suivant l'angle \widehat{BOC} .



Résumé :

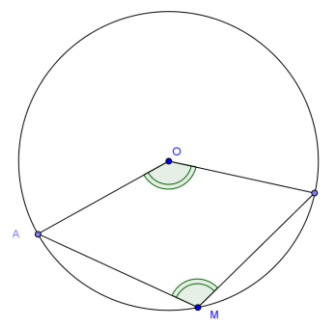
1.1 Définitions

- Une corde $[AB]$ d'un cercle (C) qui n'est pas un diamètre partage ce cercle en deux arcs : un petit arc noté \widehat{AB} et un grand arc noté \overline{AB} .
- Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés sont des supports des cordes de ce cercle.
- Un angle au centre d'un cercle est un angle dont le sommet est le centre de ce cercle.
- Tout point M du cercle (C) distinct de A et B de (C) définit avec la corde $[AB]$ l'angle inscrit \widehat{AMB} .



Si M est sur l'arc \widehat{AB} , alors \widehat{AMB} est aigu et intercepte l'arc \widehat{AB} et on a :

$$mes \widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes \widehat{AOB}$$



Si M est sur l'arc \overline{AB} , alors \widehat{AMB} est obtus et intercepte l'arc \widehat{AB} et on a :

$$mes \widehat{AMB} = 180^\circ - \frac{1}{2} mes \widehat{AOB}$$

Dans les deux cas, l'angle \widehat{AOB} est l'angle au centre associé à l'angle inscrit \widehat{AMB} . Ces deux angles interceptent la corde $[AB]$.

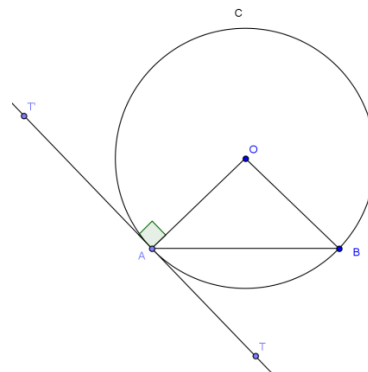
1.2 Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente

Propriété :

Soit $[AB]$ une corde d'un cercle (C) , qui n'est pas un diamètre, $[AT)$ le demi tangent en A à (C) contenue dans le demi plan de frontière (AB) ne contenant pas O , $[AT')$ l'autre demi-tangente en A .

$$\text{On a : } \text{mes } \widehat{TAB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB}$$

$$\text{et } \text{mes } \widehat{T'AB} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{AOB}$$

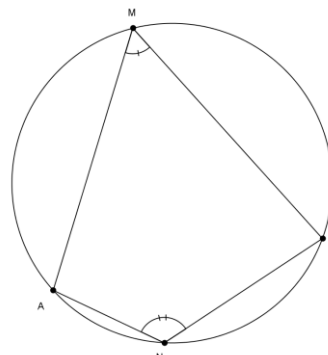
**1.3 Propriété des angles inscrits**

P1) Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont même mesure.

P2) Des angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont même mesure.

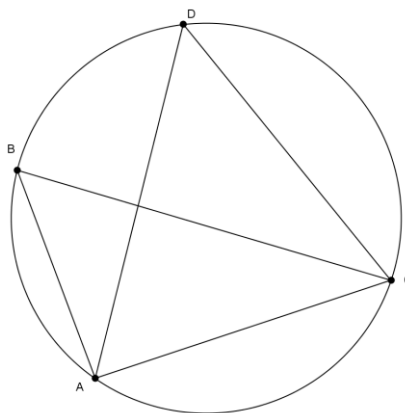
P3) La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.

P4) Si M est un point de l'arc \widehat{AB} et N est un point de l'arc \widehat{AB} alors les angles \widehat{AMB} et \widehat{ANB} sont supplémentaires.

**Exercices d'application :****Exercice1 :**

Sur la figure ci-contre, $\text{mes } \widehat{ACB} = 40^\circ$, et $\text{mes } \widehat{ADC} = 50^\circ$.

En utilisant les données de la figure, montrer que ABC est un triangle rectangle.

**Exercice2 :**

ABC est un triangle équilatéral et M est un point de l'arc \widehat{BC} du cercle circonscrit au triangle ABC . Déterminer les mesures des angles \widehat{AMB} , \widehat{AMC} et \widehat{BMC} .

LEÇON 2 : QUADRILATÈRES INSCRIPTIBLES

Durée : 100 min

Objectifs pédagogiques :

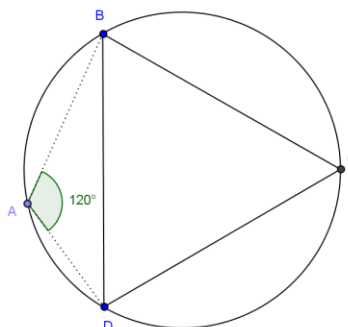
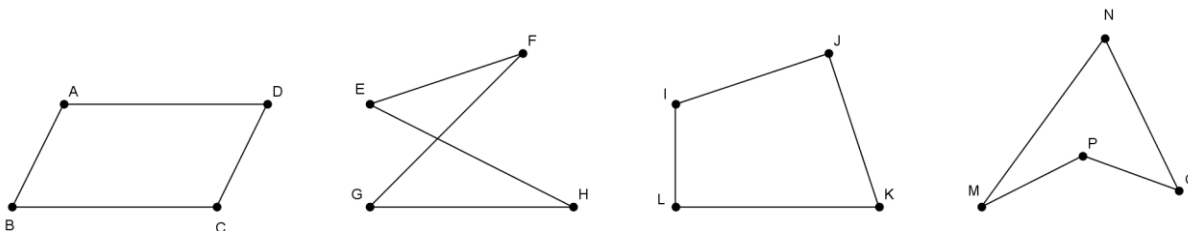
- Reconnaître un quadrilatère croisé ou convexe inscrit dans un cercle ;
- Justifier qu'un quadrilatère est inscrit dans un cercle.

Prérequis :

- 1) Qu'est-ce qu'un quadrilatère ? Citez-en trois ?
- 2) Quand dit-on que deux angles sont supplémentaires ?

Situation problème :

Amélie joue avec un boomerang (objet qui une fois lancé, effectue une trajectoire qu'on suppose circulaire) dans la cour. Elle a placé trois points B, C et D dans la cour tels que BCD est un triangle équilatéral. Amélie est représentée par un point A extérieur au triangle et tel que $\text{mes } \widehat{BAD} = 120^\circ$. En lançant le boomerang de sa position, Amélie peut-elle le faire passer par ces trois points en un lancer ?

*Activité d'apprentissage 1:*

- a) Pour chacun des quadrilatères ci-dessus, nommer les sommets opposés et les diagonales.
- b) Pour chaque diagonale donner la position des deux autres sommets du quadrilatère par rapport à celle-ci.

Correction de l'activité d'apprentissage 1 :

- a) Les sommets opposés sont les suivants : A et C ; B et D ; E et G ; F et H ; I et K ; J et L ; N et P ; M et O.
Les diagonales sont les segments suivants : [AC] et [BD] ; [EG] et [FH] ; [IK] et [JL] ; [NP] et [MO].

- b) Pour ABCD et IJKL les autres sommets sont situés de part et d'autre du demi-plan de frontière le support de la diagonale.
 Pour EFGH les autres sommets sont situés dans le même demi-plan de frontière le support de la diagonale.
 Pour MNOP, N et P sont situés dans le même demi-plan de frontière (MO), et M et O n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière (NP).

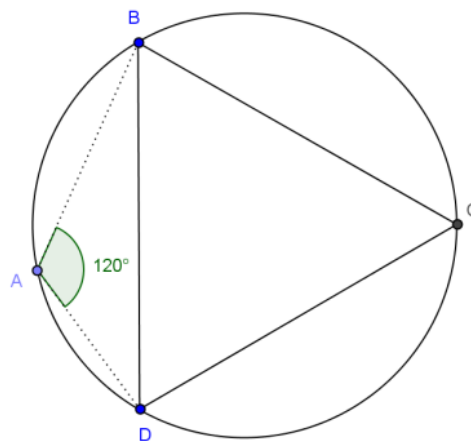
Activité d'apprentissage 2 :

BCD est un triangle équilatéral, et A un point du plan tel que $mes \widehat{BAD} = 120^\circ$.

- Faire une figure.
- Construire le cercle circonscrit au triangle BCD . Passe-t-il par A ?
- Que peut-on dire des angles \widehat{BAD} et \widehat{BCD} ? Justifier votre réponse.
- En est-il de même pour les angles \widehat{ABC} et \widehat{ADC} ?
- En lançant son boomerang depuis sa position A , Amélie pourra-t-elle le faire passer par les points B , C et D ?

Correction de l'activité d'apprentissage 2 :

- Figure.
- Oui le cercle circonscrit passe par A .
- Les angles \widehat{BAD} et \widehat{BCD} sont supplémentaires car la somme de leurs mesures vaut 180° .
- Oui, il en est de même pour les angles \widehat{ABC} et \widehat{ADC} . Ils sont inscrits dans le cercle et leurs sommets respectifs sont situés sur les cordes \widehat{AC} et \widehat{AC} .
- Oui, en lançant le boomerang depuis sa position, Amélie peut le faire passer par ces trois points, car il existe un cercle qui passe par les points $ABCD$.



Résumé :

2.1 Définition : Un quadrilatère est dit *convexe* lorsqu'il contient toutes ses diagonales.

Il est dit *croisé* si deux de ses côtés opposés se coupent en un point.

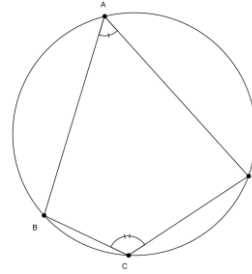
Exemples : 1) Les carrés, rectangles, trapèzes, losanges, parallélogrammes sont des quadrilatères convexes.

2) Si $ABCD$ est un quadrilatère convexe alors $ABDC$ et $ACBD$ sont des quadrilatères croisés.

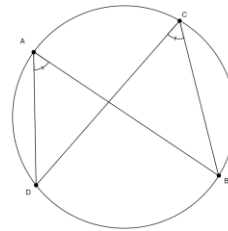
3) Dans l'activité 1, le quadrilatère $MNOP$ est un quadrilatère non convexe et non croisé.

2.2 Propriétés :

P1) Un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si
Deux de ses angles opposés sont supplémentaires.



P2) Un quadrilatère croisé est inscriptible si et seulement si
deux de ses angles opposés ont même mesure.



Remarque : Les quadrilatères non convexes et non croisés ne sont pas inscriptibles.

LEÇON 3 : POLYGONES RÉGULIERS

Durée : 50 min

Objectif pédagogique :

- Construire des polygones réguliers d'au plus 12 côtés.

Prérequis :

- 1) Qu'est-ce qu'un polygone régulier ?
- 2) Citer quelques polygones réguliers.

Situation problème :

M. Abessolo possède un récipient ayant la forme d'un prisme dont la base est un octogone de côté 20 cm et de hauteur 30 cm. Il demande à sa fille Dorine, élève en seconde C de l'aider à déterminer le volume du récipient. Comment va-t-elle procéder ? (On rappelle que le volume d'un prisme est égal à l'aire de base multipliée par la hauteur).

Activité d'apprentissage :

- 1) Construire un carré $ACEG$ de centre O et le cercle (C) circonscrit à ce carré.
- 2) Construire les médiatrices des côtés $[AC]$ et $[CE]$. Elles coupent respectivement les arcs \widehat{AC} , \widehat{CE} , \widehat{EG} et \widehat{GA} en B , D , F et H . Placer ces points sur le cercle et justifier que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA$.
- 3) Quelle est la nature du polygone $ABCDEFGH$?
- 4) On suppose que $AB = 20$ cm. Calculer l'aire de $ABCDEFGH$.
- 5) En déduire le volume du récipient de M. Abessolo.

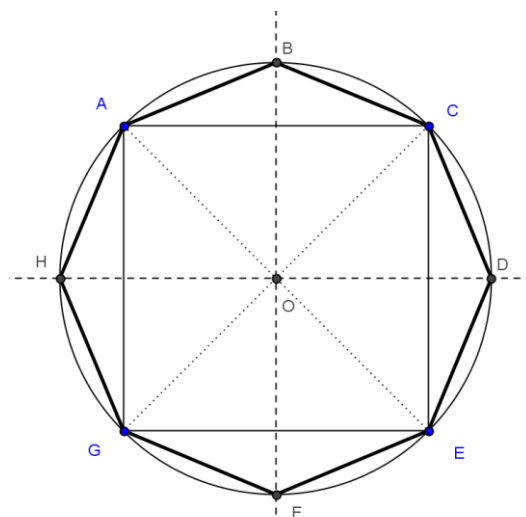
Correction de l'activité d'apprentissage :

- 1) Construction
- 2) Les triangles AOB , BOC , COD , DOE , EOF , FOG , GOH et HOA sont tous isocèles et d'angle au sommet principal O de mesure 45° . Et tous les côtés issus du sommet principal ont la même longueur, celle du rayon du cercle. Donc les côtés opposés à l'angle principal ont tous la même mesure.
- 3) $ABCDEFGH$ est un octogone régulier.
- 4) Calcul de l'aire de $ABCDEFGH$.

$$A = 8 \times \frac{20 \times \frac{10}{\tan \frac{45}{2}}}{2} \approx 1931,3708 \text{ cm}^2$$

- 5) Calcul du volume du récipient.

$$V = A \times h = 57941,125 \text{ cm}^3 \approx 57,941 \text{ l.}$$

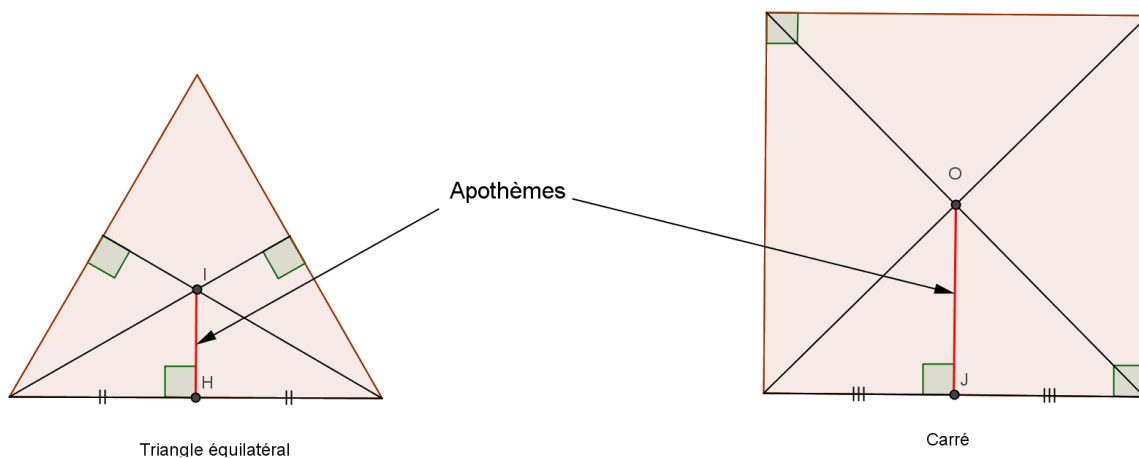


Résumé :**3.1 Définition :**

Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les sommets appartiennent à un même cercle. Ce cercle est appelé cercle circonscrit et son centre est le centre du polygone.

L'apothème d'un polygone régulier est la distance du centre de ce polygone à l'un de ses côtés.

Exemples : Le triangle équilatéral et le carré sont des polygones réguliers. Par contre, le rectangle, le losange et le trapèze ne sont pas des polygones réguliers.

**Remarques :**

- 1) Tous les angles au sommet d'un polygone régulier ont la même mesure.
- 2) Pour un polygone convexe à n côtés, la mesure de l'angle au centre interceptant l'un de ses côtés est égale à $\frac{360^\circ}{n}$.

Vocabulaire :

Nombre de cotés	Nom du polygone régulier
3	Triangle équilatéral
4	Carré
5	Pentagone régulier
6	Hexagone régulier
7	Heptagone régulier
8	Octogone régulier
9	Ennéagone (ou nonagone) régulier
10	Décagone régulier
11	Hendécagone régulier
12	Dodécagone régulier

3.2 Construction des polygones réguliers

Méthode : Pour construire un polygone régulier à n côtés, on peut procéder comme suit :

- Calculer la mesure des angles au centre : $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$;
- Tracer un cercle (C) de centre O et de rayon r ;

- Placer les points A et B sur (C) tels que $\text{mes } \widehat{AOB} = \alpha$;
- Utiliser le compas pour placer sur (C) les points consécutifs distants de AB.

Exemple : Construction d'un pentagone régulier. (Par l'enseignant)

Exercice d'application :

Construire un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 4 cm. Calculer son apothème, son périmètre et son aire.

CHAPITRE 8 : VECTEURS DU PLAN

INTÉRÊT

Les vecteurs jouent un rôle essentiel, non seulement en mathématiques et en informatique mais en mécanique du point (étude des mouvements d'un point matériel) et en physique. La trajectoire des planètes se modélise dans un langage vectoriel.

MOTIVATION

Imaginons que nous ayons un point O qui ne bouge pas et un objet qui bouge (désignons l'objet par A) à côté de ce point O. Le physicien veut savoir comment il bouge. Il va s'intéresser dans un premier temps à la distance entre le point O et l'objet A mais aussi dans un second temps la direction de la droite (OA) et le sens dans lesquels sont donnés les points O et A. Du coup, il va parler du vecteur \overrightarrow{OA} et l'étudier.

LECON 1 : OPERATIONS SUR LES VECTEURS

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

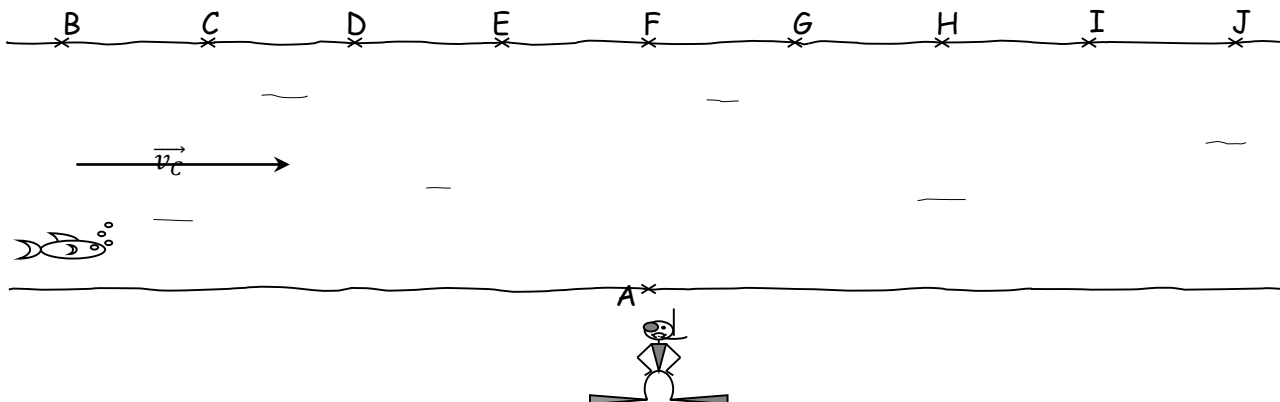
- ✓ Décrire un vecteur géométrique ;
- ✓ Déterminer le type de vecteur (déterminer si un vecteur est nul ou encore si deux vecteurs sont colinéaires, non colinéaires, orthogonaux, équipollents (égaux) ou opposés) ;
- ✓ Déterminer l'addition et la résultante de deux vecteurs ;
- ✓ Décrire une combinaison linéaire de vecteurs.

PRÉ REQUIS

- Construire un représentant du vecteur $k\vec{u}$ connaissant \vec{u} et k.
- Utiliser une égalité vectorielle pour justifier: le parallélisme de deux droites, l'alignement de trois points.
- Définir la colinéarité de deux vecteurs.

Situation problème : traversée d'un fleuve à la nage

Un nageur veut traverser un fleuve.



Il part du point A et nage perpendiculairement à la rive, à une vitesse V_N de 2 km/h. La vitesse du courant est de 3 km/h. Elle est représentée par le vecteur \vec{V}_C sur le schéma ci-dessus.

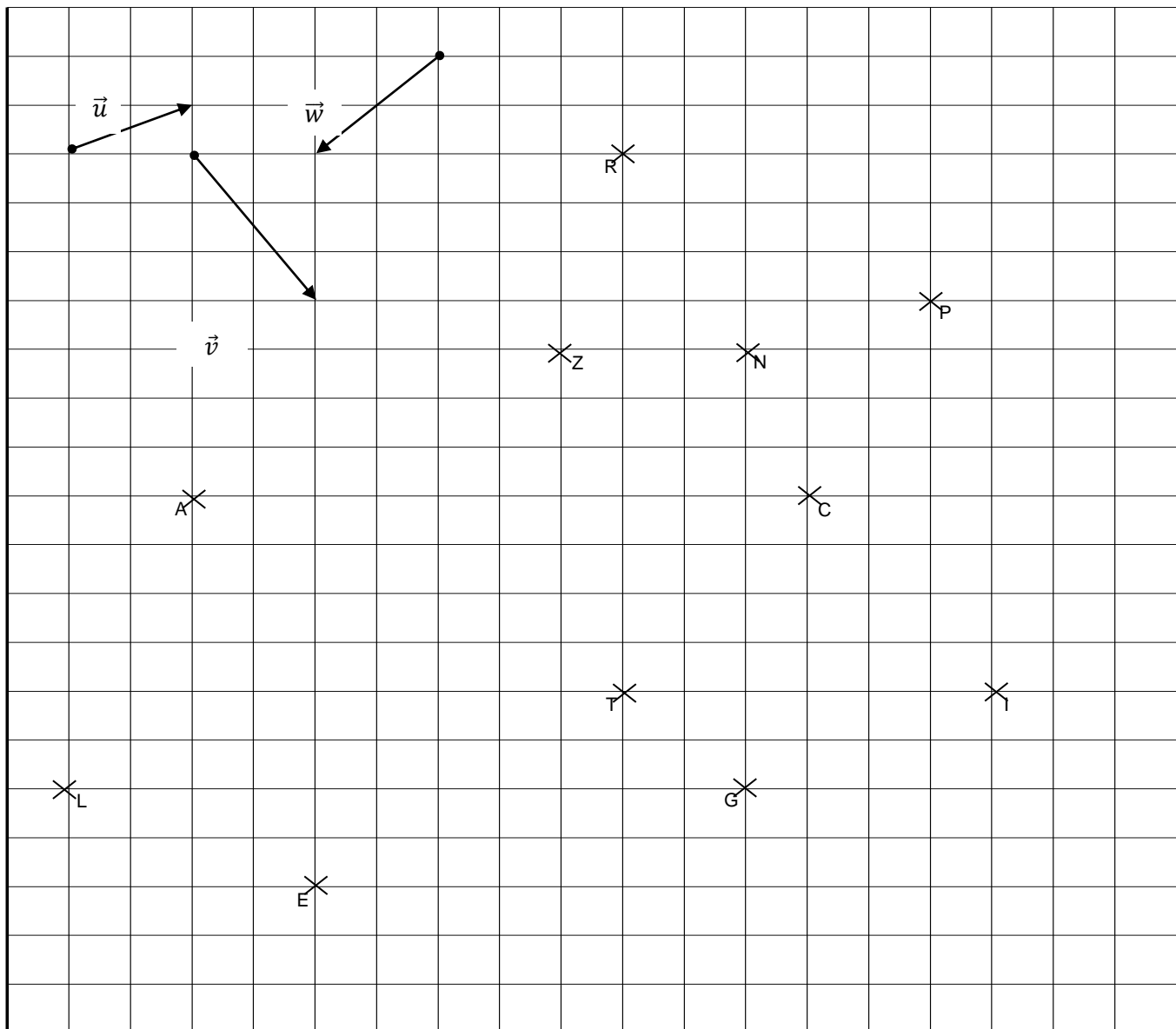
- 1) En quel point arrive le nageur ?
- 2) Si le nageur double sa vitesse, où atteint-il l'autre rive ?

ACTIVITÉS D'APPRENTISSAGE

Activité 1 :

Construire les points B, D, F, H, J, M, Q, S et U vérifiant les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{u} + \vec{v} ; \overrightarrow{GH} = \frac{5}{3}\vec{v} ; \overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PN} ; \overrightarrow{CD} = \vec{w} - \vec{v} ; \overrightarrow{IJ} = -\vec{w} - \vec{v} + \vec{u} ; \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{NP} + \vec{u} + \vec{v} \\ \overrightarrow{EF} &= 2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \qquad \qquad \qquad \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AZ} + 2\overrightarrow{NZ} \qquad \qquad \qquad \overrightarrow{TU} = 2\vec{u} + \overrightarrow{RN} \end{aligned}$$



Activité 2

1. Placer les points D, E et F définis par :

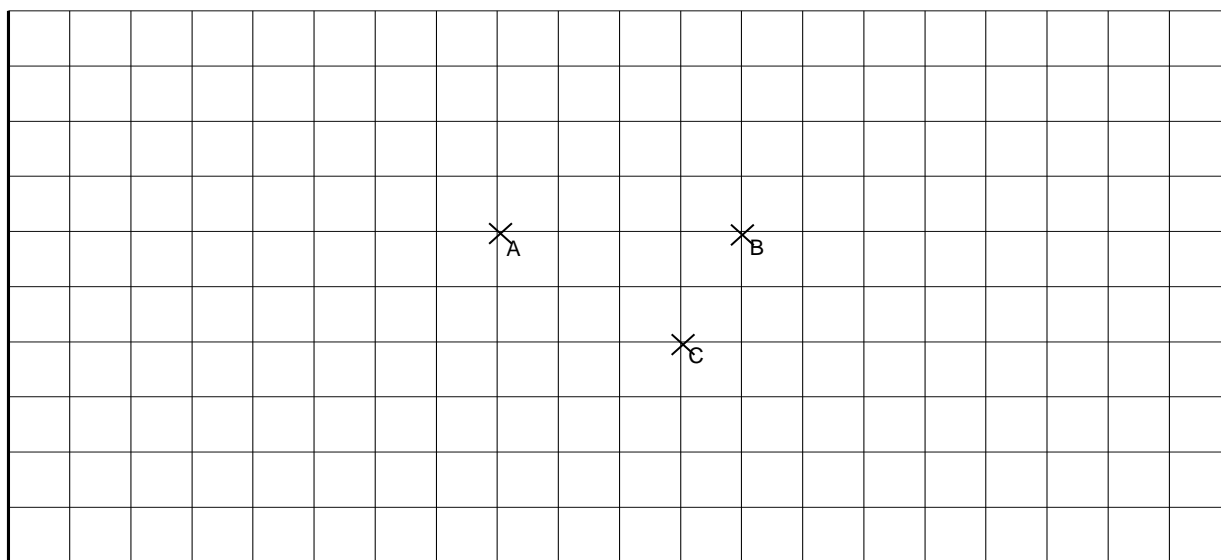
- $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA}$

- $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$

- $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{BA} + \frac{8}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{9}{4}\overrightarrow{AB}$

2. Exprimer les deux premières expressions en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

3. Montrer que EBCF est un parallélogramme.



Activité 3

Ecrire les vecteurs suivants en fonction de \vec{u} et de \vec{v}

$\overrightarrow{BP} =$

$\overrightarrow{OC} =$

$\overrightarrow{EP} =$

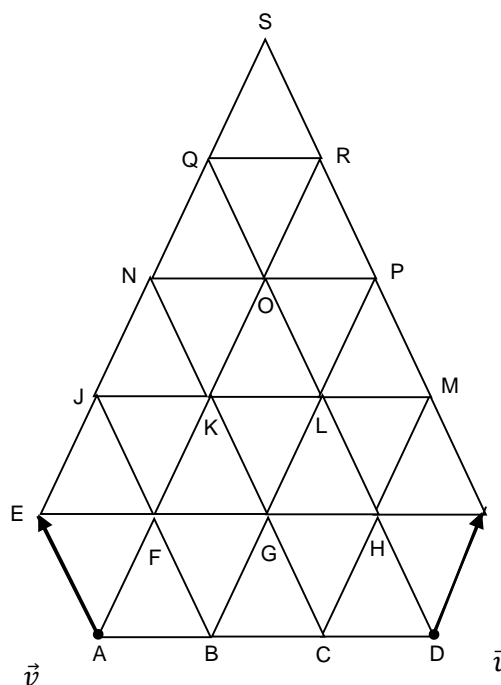
$\overrightarrow{MA} =$

$\overrightarrow{CQ} =$

$\overrightarrow{SL} + \overrightarrow{FK} =$

$\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{PK} =$

$\overrightarrow{BF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EN} =$



$$\overrightarrow{DI} - \overrightarrow{RO} =$$

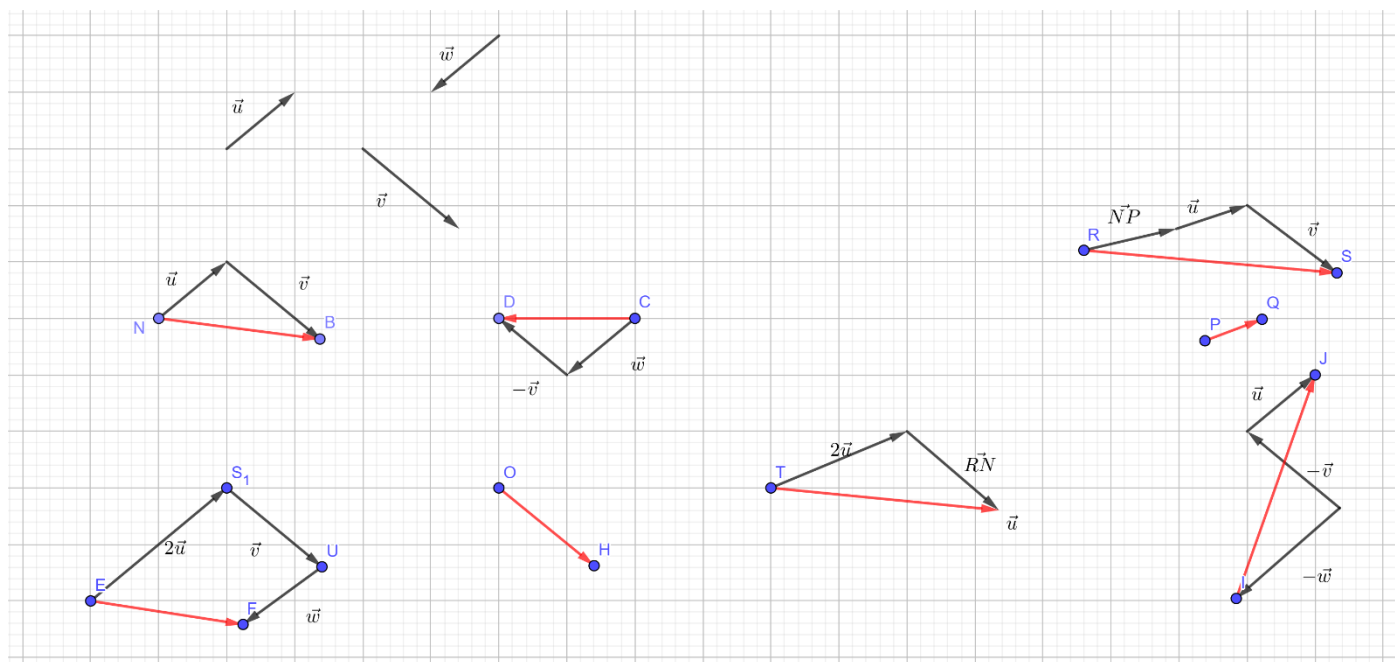
$$\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{RJ} =$$

Solutions

Activité 1 :

Construisons les points B, D, F, H, J, M, Q, S et U vérifiant les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{u} + \vec{v}; & \overrightarrow{GH} &= \frac{5}{3}\vec{v}; & \overrightarrow{PQ} &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{PN}; & \overrightarrow{CD} &= \vec{w} - \vec{v}; & \overrightarrow{IJ} &= -\vec{w} - \vec{v} + \vec{u}; & \overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{NP} + \vec{u} + \vec{v} \\ \overrightarrow{EF} &= 2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}; & \overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{AZ} + 2\overrightarrow{NZ}; & \overrightarrow{TU} &= 2\vec{u} + \overrightarrow{RN} \end{aligned}$$



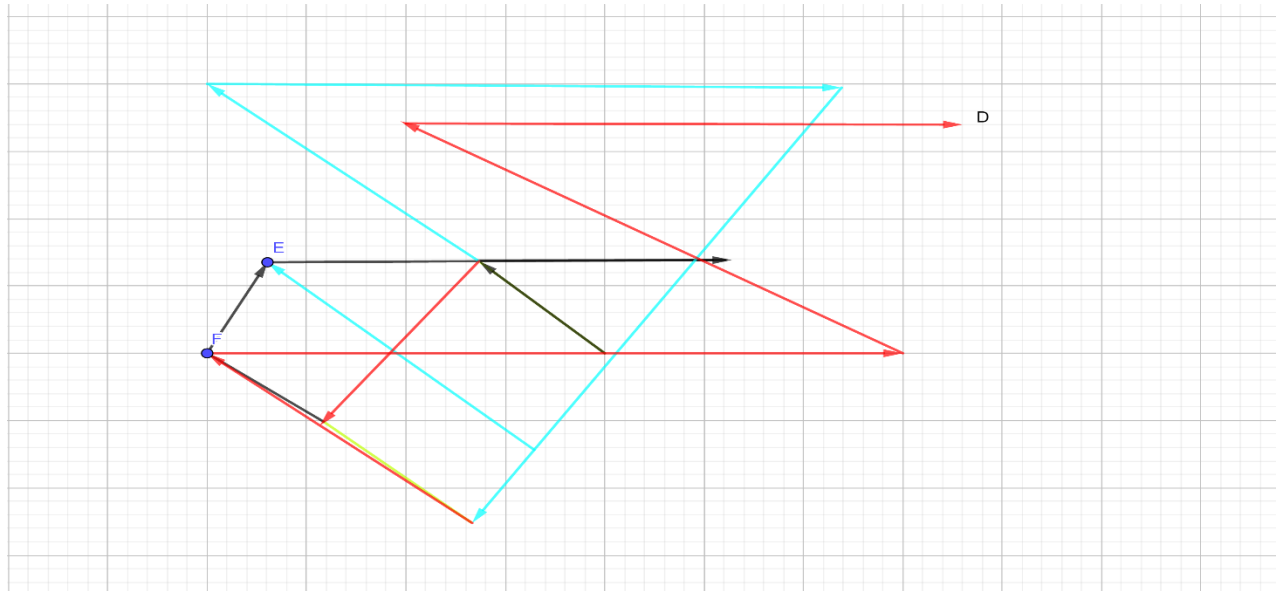
Activité 2 :

1. Plaçons les points D, E et F définis par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= -2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA} \\ &= 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{AC} \\ &= 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{AC} \\ &= -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{BA} + \frac{8}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{21}{4}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \frac{11}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$



2. Exprimer les deux premières expressions en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} (Voir question précédente)
 3. Montrer que EBCF est un parallélogramme.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Activité 3

Ecrire les vecteurs suivants en fonction de \vec{u} et de \vec{v}

$$\overrightarrow{BP} = 3\vec{u}$$

$$\overrightarrow{OC} = -\vec{u} - 2\vec{v}$$

$$\overrightarrow{EP} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$$

$$\overrightarrow{MA} = -4\vec{u} - 2\vec{v}$$

$$\overrightarrow{CQ} = \vec{u} + 3\vec{v}$$

$$\overrightarrow{SL} + \overrightarrow{FK} = -\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{u} = -2\vec{v}$$

$$\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{PK} = 2\vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{u} + \vec{v} = -3\vec{v}$$

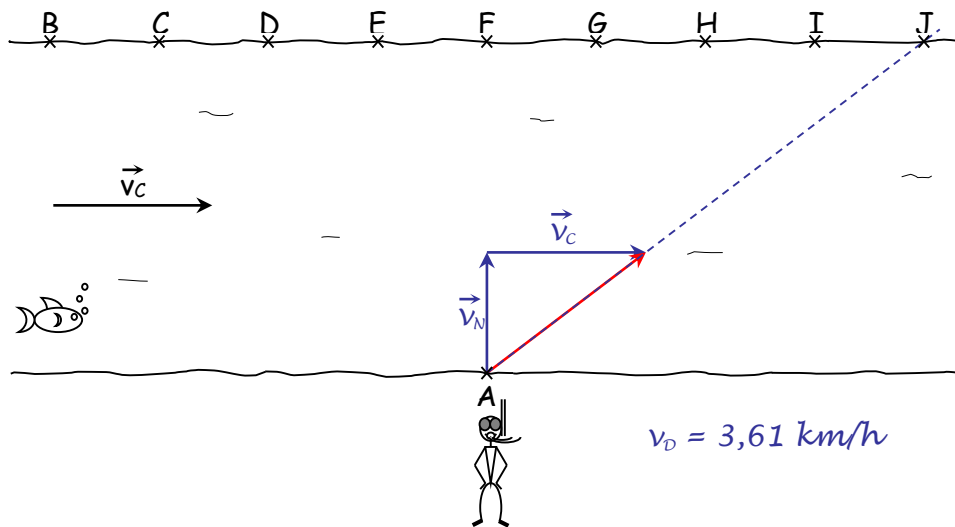
$$\overrightarrow{BF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EN} = \vec{v} - \frac{1}{2}(2\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{DI} - \overrightarrow{RO} = \vec{u} - (-\vec{u}) = 2\vec{u}$$

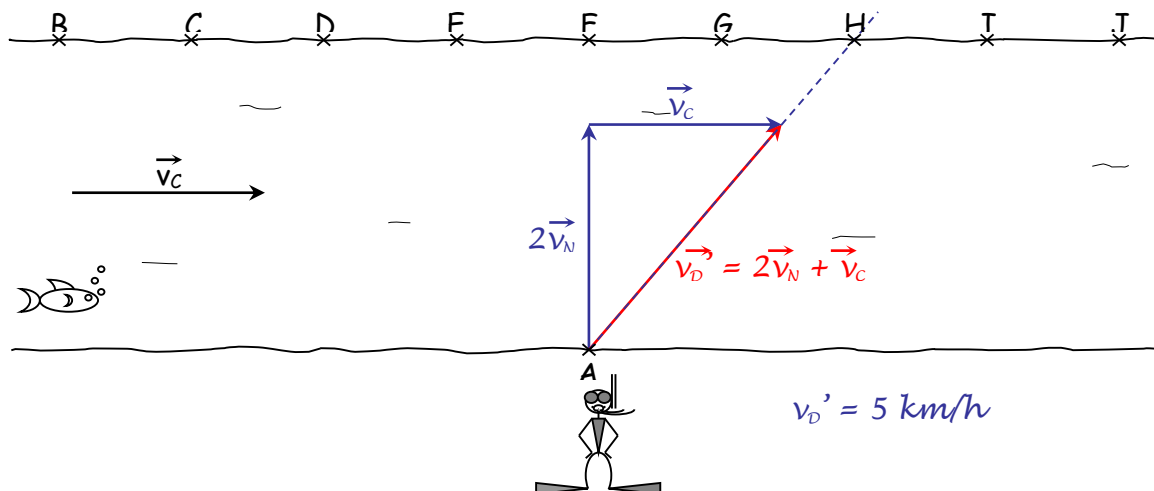
$$\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{RJ} = \vec{u} - 2\vec{v} + 2(-3\vec{u} + \vec{v}) = -5\vec{u}$$

Solution de la situation problème : la traversée d'un fleuve à la nage

1) En quel point arrive le nageur ?



2) Si le nageur double sa vitesse, où atteint-il l'autre rive ?



RESUME

1. REPRESENTATION DES VECTEURS DU PLAN

1.1 Définition

On ne saurait donner une définition rigoureuse d'un vecteur du plan. A notre niveau, disons juste qu'un vecteur est un **déplacement** : Pour préciser ce déplacement, c'est à dire pour définir une **translation**, il faut choisir

une **direction de droite** (inclinaison), un **sens** et une **longueur**. Ces trois choix déterminent **le vecteur de la translation**. Un vecteur est représenté par une "flèche" que l'on peut tracer n'importe où. **Un vecteur n'a pas d'emplacement précis (n'a pas de point d'attache), c'est un objet "baladeur"**.

Le déplacement de A vers B est le même que celui de D vers E ou de H vers I. On appelle ce déplacement un **vecteur** défini par :

- une direction : celle de la droite (AB);
- un sens : celui de A vers B ;
- une norme : qui est égale à la longueur AB.

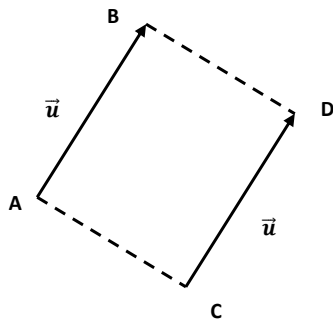
Il ne faut pas confondre sens et direction : par exemple \overrightarrow{IH} et \overrightarrow{AB} ont la même direction (car les droites (AB) et (IH) sont parallèles) mais n'ont pas le même sens.

Les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DE} et \overrightarrow{HI} sont donc les représentants d'un même vecteur car ils ont même sens, même direction et même norme : on peut donc désigner ce vecteur par un nom unique, par exemple \vec{d} .

La norme du vecteur \overrightarrow{AB} est égale à la longueur AB. Pour désigner la norme de \vec{d} , on utilise $\|\vec{d}\|$.

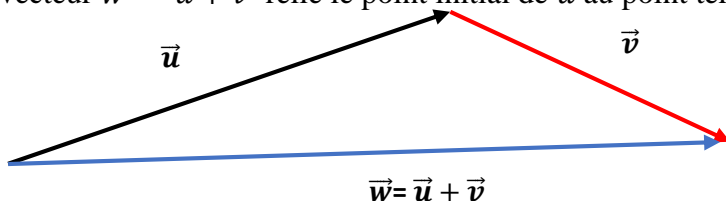
On a $\|\vec{d}\| = AB = DE = HI$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.



1.2. Addition et soustraction de vecteurs

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs quelconques du plan. La somme $\vec{u} + \vec{v}$ de deux vecteurs est définie comme suit : on met les deux vecteurs « bout à bout » de sorte que le point terminal de \vec{u} coïncide avec le point initial de \vec{v} . Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ relie le point initial de \vec{u} au point terminal de \vec{v} .



Propriété : Relation de CHASLES

Quels que soient les points A, B et C, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

*** La relation de CHASLES peut s'utiliser dans les deux sens. Cette égalité n'est surtout pas vraie pour les normes de vecteurs.**

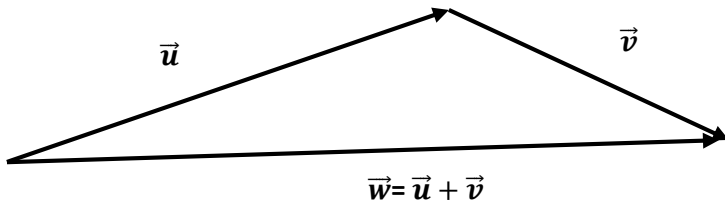
Propriété : Inégalité triangulaire

Quels que soient les points A, B et C, alors, $\|\vec{AB} + \vec{BC}\| \leq \|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\|$.

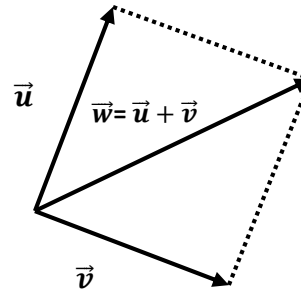
CONSTRUCTIONS :

Il y a deux façons d'obtenir la somme de deux vecteurs :

1) En les représentant bout à bout :

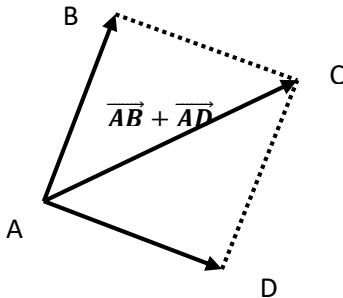


2) En les représentant à partir de la même origine :

**Propriété : Vecteurs et parallélogramme**

Pour quatre points ABCD non alignés :

- ❖ Si ABCD est un parallélogramme, alors on a : $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$
- ❖ Si on a : $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$, alors ABCD est un parallélogramme.

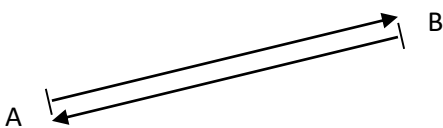
**CAS PARTICULIERS :**

Je pars de A, je vais en B et je retourne en A : la relation de CHASLES le confirme : $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$
Que peut-on dire de ce vecteur ? Quelle est sa norme ? Quelle est sa direction ? Quel est son sens ?

a) On appelle ce vecteur de norme nulle le **vecteur nul** et on le note $\vec{0}$.

Plus généralement si on considère un vecteur \vec{u} on peut toujours trouver un vecteur de même direction, de même norme et de sens opposé : quand on l'ajoute à \vec{u} on obtient le vecteur nul.

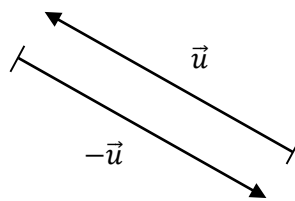
b) **Vecteurs opposés** (même direction, même longueur, sens contraires) :



D'après la relation de CHASLES on a :

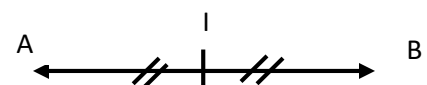
$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

NOTATION



$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$$

PROPRIÉTÉ : Vecteur et milieu



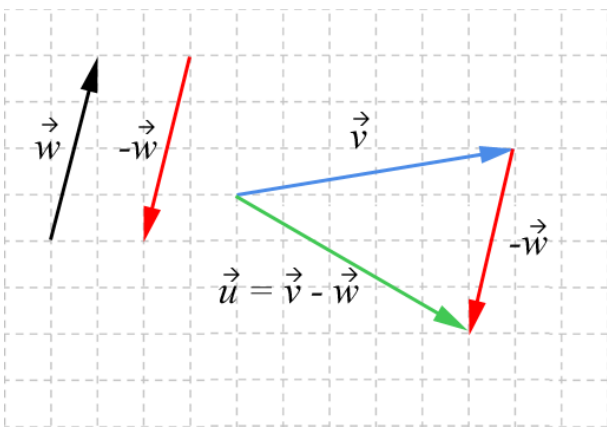
- Si le point I est le milieu du segment [AB]
alors on a : $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ et $\vec{AI} = \vec{IB}$
- Si on a : $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ ou bien : $\vec{AI} = \vec{IB}$ alors le point I est le milieu du segment [AB].

c) **Somme de vecteurs égaux** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{AB}$; $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u}$ (Les additions de vecteurs se rédigent comme les additions de nombres)

❖ Les quatre propriétés de l'addition

- i) L'addition de vecteurs est **commutative**. Cela signifie que, si \vec{v} et \vec{w} sont des vecteurs, alors $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- ii) L'addition de vecteurs est aussi **associative**. Cela veut dire que, si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont des vecteurs, alors $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- iii) L'addition a un **élément neutre** : le vecteur nul. En effet : $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- iv) Enfin, si \vec{v} est un vecteur, alors $-\vec{v}$ est le vecteur ayant la même direction et la même intensité que \vec{v} , mais de sens opposé. Donc $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

La différence $\vec{v} - \vec{w}$ de deux vecteurs est définie comme $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$

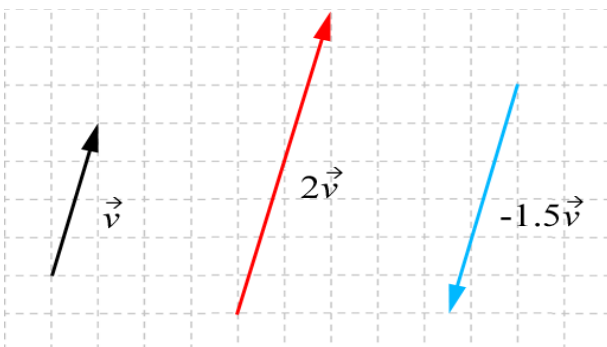


1.3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Quand on manipule des vecteurs, on utilise le mot « scalaire » à la place de « nombre réel ». Les scalaires sont souvent désignés par une lettre grecque.

Si λ est un scalaire et \vec{v} un vecteur, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est défini comme suit :

- Si $\lambda > 0$, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est le vecteur dont l'intensité a λ fois l'intensité de \vec{v} et dont le sens est le même que \vec{v} .
- Si $\lambda < 0$, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est le vecteur dont l'intensité a $|\lambda|$ fois l'intensité de \vec{v} et dont le sens est l'opposé de celui de \vec{v} .
- Si $\lambda = 0$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$, alors le produit $\lambda\vec{v}$ est le vecteur nul.



❖ *Propriétés du produit*

$$\lambda (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w}$$

$$(\lambda + \mu) \vec{v} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}$$

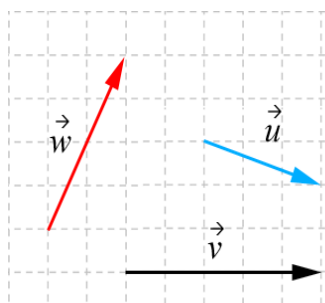
$$\lambda(\mu \vec{v}) = (\lambda\mu) \vec{v}$$

$$1\vec{v} = \vec{v}$$

$$0\vec{v} = \vec{0}$$

EXERCICES D'APPLICATION**Exercice 1 :**

Utilisez les vecteurs de la figure ci-dessous pour dessiner, les vecteurs suivants :



- a. $\vec{v} + \vec{w}$
- b. $\vec{u} + \vec{v}$
- c. $3\vec{v}$
- d. $4\vec{w}$
- e. $\vec{v} - \vec{w}$
- f. $\vec{u} - \vec{v}$
- g. $3(\vec{v} + \vec{u}) - 2\vec{w}$
- h. $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$

Exercice 2 :

Soient A, B, C, D et E cinq points quelconques du plan. Simplifiez au maximum les expressions suivantes, en utilisant les relations de Chasles :

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}; \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \vec{c} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$$

$$\vec{d} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB} \quad ; \quad \vec{e} = 87\overrightarrow{AC} + 82\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{AD}$$

Exercice 3 :

Soient trois points A, B et C non alignés. Soit le point G défini par la relation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Démontrez que pour tout point M du plan, on a la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

2. COMBINAISON LINÉAIRE DE VECTEURS**2.1 Définition**

Nous avons remarqué que \vec{v} et $\lambda\vec{v}$ avaient la même direction. Inversement, si deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} ont la même direction, alors on peut imaginer qu'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Par exemple, s'ils

ont le même sens, alors le vecteur $\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ a le même sens que \vec{v} , la même direction que \vec{v} , la même norme que \vec{v} donc, $\vec{u} = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ ce qui confirme notre supposition.

On dit que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction (deux vecteurs colinéaires partagent la même ligne. Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur).

Théorème :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

☛* Vous ferez bien attention à parler de vecteurs colinéaires et non pas de vecteurs parallèles ! Deux droites peuvent être parallèles si elles ont tous leurs points ou aucun point en commun. On ne peut pas dire la même chose des vecteurs car les vecteurs n'ont pas de points ! Ce sont des déplacements, pas des ensembles de points comme les droites. Mais montrer que deux vecteurs sont colinéaires, nous aide à montrer que deux droites sont parallèles ou que trois points sont alignés.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 :

Soit ABCD un carré. On a : $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{DA}$ et $\vec{v} = \vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$. Montrer que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Exercice 2 :

Dans le parallélogramme ABCD, on définit les relations vectorielles suivantes :

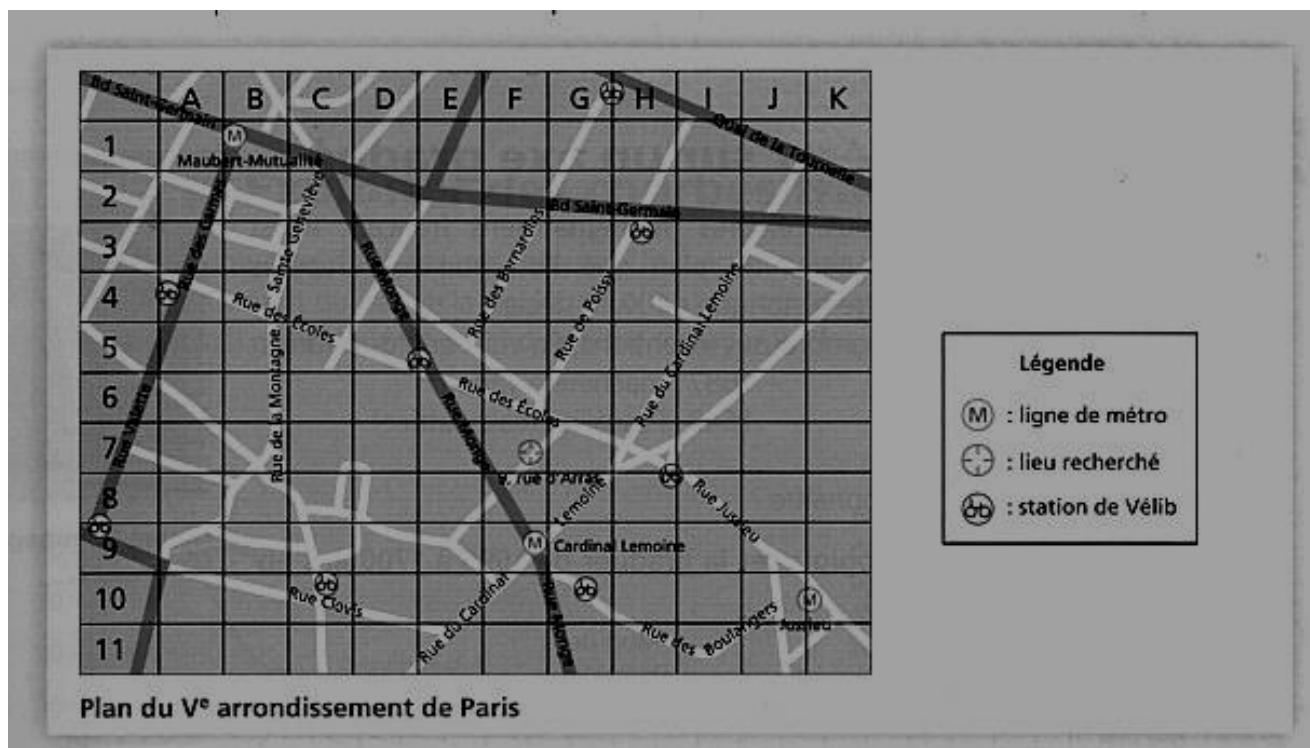
$\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB}$; $\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{DA}$. Montrer que les points C, E et F sont alignés.

LECON 2 : BASES DU PLAN**Durée : 50 min****OBJECTIFS PEDAGOGIQUES**

- ✓ Démontrer qu'un couple de vecteurs est une base du plan ;
- ✓ Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base ;
- ✓ Déterminer la norme d'un vecteur ;
- ✓ Calculer le déterminant de deux vecteurs relativement à une base.

PRÉ REQUIS

- Tracer un repère orthogonal, orthonormé (ou orthonormal).
- Placer dans un repère orthogonal un point de coordonnées données.
- Déterminer graphiquement les coordonnées d'un point.
- Calculer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} connaissant les coordonnées de A et B.

SITUATION PROBLÈME :

L'un de vos camarades de classe doit effectuer sa période de formation en milieu professionnel chez « Balson élec ». Cette entreprise est située au 9 rue d'Arras, dans le V^e arrondissement de Paris ; pour cela, votre camarade souhaite se rendre sur son lieu de stage en transport en commun. Il cherche sur un plan de Paris où se situe l'entreprise et quelle station de métro emprunter.

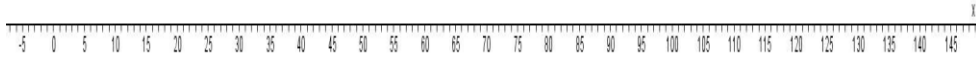
ACTIVITÉS D'APPRENTISSAGE**Activité 1 :**

L'échelle du bruit s'étend de 0 dB (seuil d'audibilité) à 120 dB (seuil de la douleur). La plupart des sons de la vie courante sont compris entre 30 et 90 décibels. On trouve des niveaux supérieurs à 90 dB essentiellement dans la vie professionnelle (industrie, armée, artisanat...) et dans certaines activités de loisirs (chasse, musique, sports mécaniques). Les discothèques et salles de concert ont, quant à elles, un niveau sonore maximal autorisé de 105 dB. Certaines sources (avions, fusées, canons) émettent des niveaux supérieurs à 120 dB et pouvant aller jusqu'à 200 dB. Dans le tableau ci-dessous, sont reportés les niveaux sonores, en décibels (dB), de différentes sources.

Sur un axe, vous classerez ces sources de la plus faible à la plus forte.

Source sonore	Sirène de pompier	Scooter	Conversation animée	Silence (dans la nature)	Formule 1
Niveau sonore (en dB)	110	81	60	20	135

1) Placez les sources sur la droite graduée suivante :



2) Le niveau maximal d'exposition est un niveau déterminé par la loi et les règlements, à partir duquel on estime qu'une exposition prolongée peut endommager l'audition. En France, ce niveau est de 80 dB. Placer ce niveau sur la droite graduée précédente.

3) Le seuil de la douleur est 120 dB. Placez ce seuil sur la droite graduée. Hachurez la partie de droite qui correspond à un niveau sonore supérieur à ce seuil.

Activité 2 :

Déterminer si les couples de vecteurs ci-dessous sont colinéaires :

- $\vec{u}(-2; -10)$ et $\vec{v}(4; 20)$
- $\vec{u}(-6; 9)$ et $\vec{v}(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2})$
- $\vec{u}(-\frac{4}{3}; 4)$ et $\vec{v}(3; -9)$
- $\vec{u}(0; 5)$ et $\vec{v}(-5; 0)$

Activité 3 :

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points : $A(3; -5)$; $B(-2; 0)$; $C(147; 13)$; $D(-53; 187)$

Etablir que les droites (AB) et (CD) sont parallèles

Activité 4 :

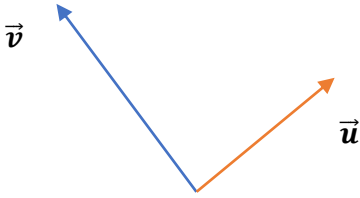
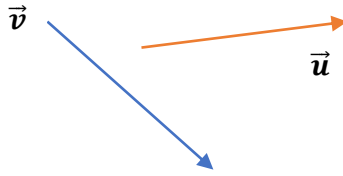
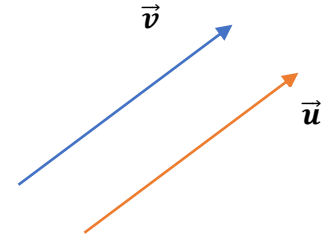
Soit le vecteur \vec{v} ayant comme point initial P et comme point terminal Q . Écrivez \vec{v} sous la forme $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$

et sous la forme $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

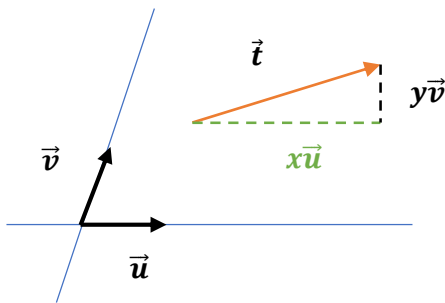
- a) $P(0; 0)$; $Q(3; 4)$ b) $P(3; 2)$; $Q(5; 6)$ c) $P(-2; -1)$; $Q(6; -2)$ d) $P(-3; 7)$; $Q(0; 0)$

RESUME**1. BASE DU PLAN VECTORIEL****1.1 Définition**

Deux vecteurs forment une **base** du plan vectoriel si, et seulement si, ils ne sont pas colinéaires.

Exemple :Base (\vec{u}, \vec{v}) Base (\vec{u}, \vec{v}) Ceci n'est pas une base (\vec{u}, \vec{v}) **1.2. Coordonnées d'un vecteur dans une base****Théorème :**

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires : ils forment une base du plan vectoriel. Alors on peut exprimer n'importe quel vecteur \vec{t} sous la forme $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec x et y des réels. Les nombres x et y sont appelés les COORDONNÉES de \vec{t} dans la base (\vec{u}, \vec{v}) .



❁ Il est important d'exprimer chaque vecteur d'un problème donné en fonction de deux vecteurs de base intelligemment choisis.

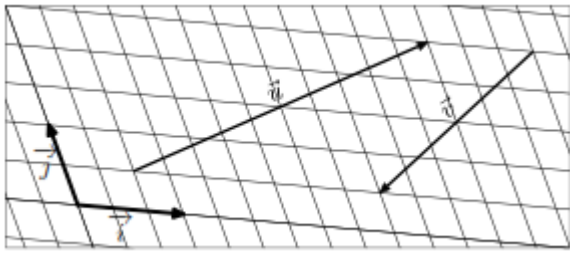
❖ Propriétés

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ deux vecteurs et λ un scalaire. Alors :

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}; \quad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}; \quad \lambda\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

Exercice d'application

Dans le plan, on considère les deux vecteurs \vec{i} et \vec{j} non-colinéaires représentés ci-dessous :

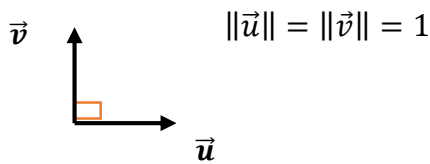


La représentation des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est également représentée ci-dessus.

- 1) Dans la base vectorielle $(\vec{i}; \vec{j})$, donner les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .
- 2) Déterminer les coordonnées du vecteur somme $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
- 3) Déterminer les coordonnées du vecteur \vec{t} réalisant l'égalité suivante : $\vec{v} = \vec{w} + \vec{t}$

1.3 Base orthonormée

Une **base est orthonormée** si et seulement si ses vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.



1.4 Norme d'un vecteur

Si \vec{v} est un vecteur, on utilise le symbole $\|\vec{v}\|$ pour représenter la norme de \vec{v} . Puisque $\|\vec{v}\|$ sera la longueur du vecteur, la norme doit avoir les cinq propriétés suivantes :

Soit \vec{v} un vecteur et λ un scalaire, alors :

- (a) $\|\vec{v}\| \geq 0$
- (b) $\|\vec{v}\| = 0$ si et seulement si $\vec{v} = \vec{0}$
- (c) $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$
- (d) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$
- (e) $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ (**inégalité du triangle**)

Un vecteur \vec{v} pour lequel la norme $\|\vec{v}\| = 1$ est qualifié de **vecteur unité** (ou unitaire).

Dans le plan muni d'une base orthonormée, on a : $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

1.5 Déterminant de deux vecteurs

Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de composantes $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dans une base $(\vec{i}; \vec{j})$

Le déterminant de $(\vec{u}; \vec{v})$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ est le réel $xy' - yx'$

Notation: $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

- Pour tout vecteur \vec{u} , $\mathbf{det}(\vec{u} ; \vec{u}) = \mathbf{0}$
- Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , $\mathbf{det}(\vec{u} ; \vec{v}) = -\mathbf{det}(\vec{v} ; \vec{u})$
- \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\mathbf{det}(\vec{u} ; \vec{v}) = \mathbf{0}$.

EXERCICES D'APPLICATION

Voir livre de l'élève.

CHAPITRE 9 : TRANSFORMATIONS DU PLAN

UTILISATION DES PROPRIÉTÉS DE LA SYMÉTRIE LEÇON 1 : ORTHOGONALE, DE LA SYMÉTRIE CENTRALE ET DE LA TRANSLATION DANS LES ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES Durée : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de

- Énoncé les propriétés de la symétrie centrale, de la symétrie orthogonale, de la translation et utiliser ces propriétés pour résoudre les problèmes de constructions, l'alignement des points, la recherche des lieux géométriques et la détermination de la composée de ces applications ;
- Déterminer l'expression analytique d'une symétrie centrale et d'une translation .

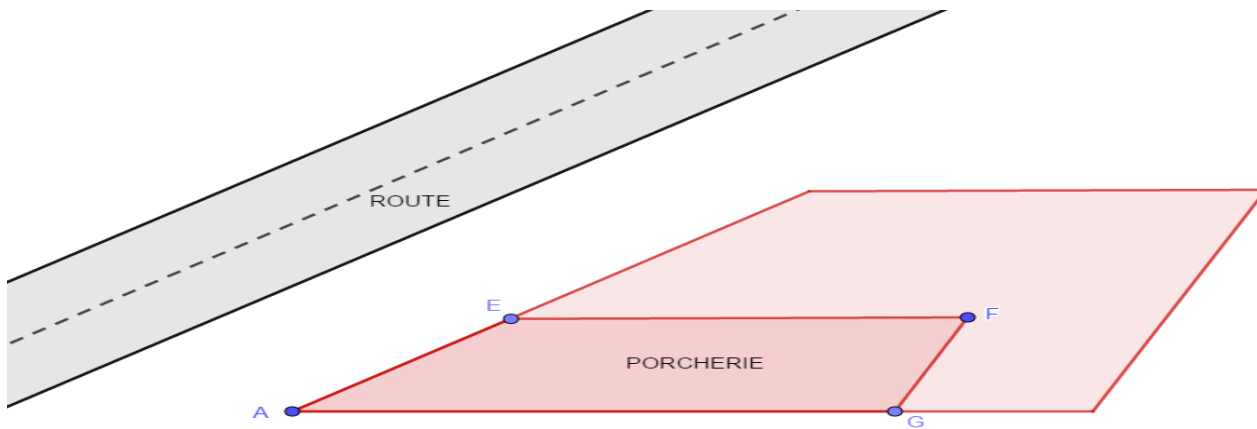
MOTIVATION :

Les symétries et les translations nous permettent de déterminer la position de certains objets en les déplaçant dans un sens et suivant une direction bien précise.

PRÉREQUIS

- Construire une droite parallèle à une autre
- Construire l'image d'un point, d'une droite par une symétrie centrale
- Construire l'image d'un point, d'une droite par une symétrie axiale suivant les directions de l'axe (verticale, horizontale, oblique) ;
- Écrire l'expression vectoriel liant un point, son symétrique et le centre de symétrie.

SITUATION PROBLÈME :



Mme TALA vient d'acheter un terrain en bordure de la route comme l'indique le schéma ci-dessus. Elle désire utiliser la parcelle délimitée par les points A, E, F et G pour construire une porcherie. Elle voudrait aussi utiliser une parcelle identique à celle réservée pour la porcherie pour construire un poulailler et désire que celle-ci soit située à $\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$

Par souci de rapprochement, elle décide pour la construction de sa maison d'acheter un autre terrain de l'autre côté de la route avec une superficie égale à celle réservée pour la construction de sa porcherie et voudrait que celle-ci soit située à égale distance de la route que sa porcherie. Ne disposant plus assez d'argent pour faire appel à un Topographe pour les délimitations, Mme TALLA reste confuse sur les positions exactes de son poulailler et de sa maison et sollicite de ce fait votre aide.

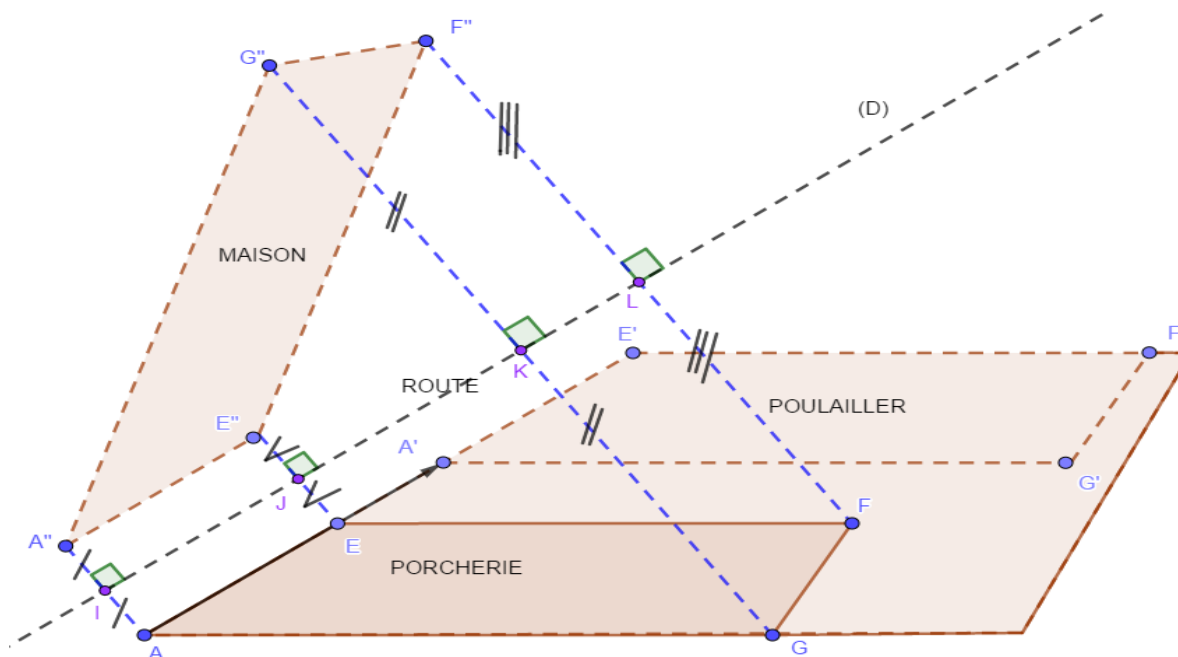
ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

En considérant les informations de la situation problème, on désigne par (D) la droite passant par le milieu de la route (ligne en pointiller).

- 1) Construisez les points A', E', F', et G' tel que $\overrightarrow{AA'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EE'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FF'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$, et $\overrightarrow{GG'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$.
 - 2) Comparez les distances AE et A'E', EF et E'F', FG et F'G', GA et G'A'.
 - 3) Construisez le symétrique A'', E'', F'', et G'' des points A, E, F, G par la symétrie orthogonale d'axe (D) puis comparez les distances AE et A''E'', EF et E''F'', FG et F''G'', GA et G''A''.
 - 4) Soient I, J, K, L milieux respectifs de [AA''], [EE''], [GG''] et [FF'']
 - a) que peut-on dire des points A, I, A'' ; E, J, E'' ; F, K, F'' et G, L, G''.
 - b) comparez les vecteurs \overrightarrow{AI} et $\overrightarrow{IA''}$; \overrightarrow{AJ} et $\overrightarrow{JE''}$
 - 5) soit H le projeté orthogonale de F sur (AG). On donne : AG= 8m ; EF= 7 FH= 2m
- Calculez la surface de la porcherie puis déduisez celle du poulailler et de la parcelle à acheter pour la construction de la maison de Mme Talla
- 6) Répondez à la préoccupation de Mme Talla.

Solution

1)



$$2) AE = A'E' ; EF = E'F' ; FG = F'G' ; GA = G'A'.$$

$$3) AE = A''E'' ; EF = E''F'' ; FG = F''G'' ; GA = G''A''.$$

4) a) Les points A, I, A'' sont alignés.

Idem pour les points E, J, E'' ; F, K, F'' et G, L, G''

$$b) \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IA''} ; \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{A''I}$$

$$5) A_{(AEFG)} = A_{(A'E'F'G')} = A_{(A''E''F''G'')} = \frac{(AG+EF) \times FH}{2} = \frac{(8+7) \times 2}{2} = 15m^2$$

6) La parcelle utiliser pour la construction du poulailler doit être le translaté de celle de la porcherie avec pour vecteur de translation $\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$; la parcelle achetée pour la construction de sa maison doit être la symétrie de celle AEFG par rapport à (D).

RÉSUMÉ :

I- Symétrie centrale, symétrie orthogonale

a) Définitions

Soit O, M et M' trois points du plan.

On appelle **symétrie centrale de centre O** notée S_O l'application du plan dans le plan qui à un point M du plan associe le point M' tel que O est le milieu du segment [MM'].

$$M' = S_O(M) \text{ équivaut à } \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$$

Soit (D) Une droite du plan.

On appelle symétrie **orthogonale ou symétrie axiale** d'axe (D) notée $S_{(D)}$ l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' tel que

- ❖ Si $M \in (D)$ alors $M = M'$
- ❖ Si $M \notin (D)$ alors (D) est la médiatrice du segment $[MM']$

b) propriétés

(P1) les symétries conservent la nature géométrique des configurations planes et les longueurs ;

(P2) Les symétries conservent l'alignement des points, les milieux des segments, le parallélisme des droites et le contact entre deux configurations planes.

(P3) Par toute symétrie centrale

- L'image d'une droite parallèle est une droite parallèle à la droite initiale.
- L'image d'un angle orienté est un angle orienté de même mesure.

(P4) L'image d'un angle orienté par toute symétrie orthogonale est un angle orienté de mesure opposée à l'angle initial.

REMARQUES

(R1) L'image d'une droite par une symétrie orthogonale n'est pas toujours comme dans le cas de la symétrie centrale parallèle à la droite initiale.

(R2) L'image d'une droite par une symétrie orthogonale est parallèle à la droite initiale si elle est parallèle à l'axe de la symétrie.

(R3) Tous points de l'axe (D) d'une symétrie orthogonale est sa propre image par $S_{(D)}$. On dit que l'axe (D) est l'ensemble des points invariants par $S_{(D)}$.

(R4) Le seul point qui est sa propre image par S_o est O. On dit que O est l'unique point invariant de S_o

c) Expression analytique d'une symétrie

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit $H\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ trois points du plan tels que $S_H(M) = M'$

$$\text{Alors, } \overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x \\ b-y \end{pmatrix}$$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{cases} x' - a = a - x \\ y' - b = b - y \end{cases}$$

C'est-à-dire dire $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$ Ce système est appelé expression analytique de la symétrie centrale donc le centre à pour coordonnées (a, b)

II- Translation

a) Définition.

On appelle translation de vecteur \vec{u} notée $t_{\vec{u}}$ l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

b) propriétés

(P1) Une application f du plan dans le plan est une translation si et seulement si pour tout points A et B du plan tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$, On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ (c'est la propriété caractéristique des translations).

(P2) Les translations concernent l'alignement des points, les milieux des segments, le parallélisme des droites et le contact entre deux configuration planes ;

(P3) L'image d'un angle orienté par une translation est un angle orienté de même mesure.

c) Remarque

Par une translation t , pour tout point M' du plan, il existe un unique point M tel que M' soit l'image de M par t . On dit qu'une translation est une transformation du plan c'est-à-dire une bijection.

L'application qui permet de ramener M' sur M s'appelle bijection réciproque de la translation et se note t^{-1} .

Ainsi, si $t = t_{\vec{u}}$ alors $t^{-1} = t_{-\vec{u}}$

III- Composition de deux symétries centrales, de deux symétries orthogonales et de deux translations

Activités

(A1) Soit A, A' et M trois points distincts du plan non nécessairement alignés ; S_A la symétrie centrale de centre A et $S_{A'}$ la symétrie centrale de centre A'.

a) Construire le point N tel que $N = S_A(M)$ et M' tel que $M' = S_{A'}(N)$

b) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{MM'}$

c) Déduire la nature et les éléments caractéristiques $S_{A'} \circ S_A$.

d) que devient $S_{A'} \circ S_A$ si $A = A'$?

(A2) Soit (D) et (D') deux droites parallèles, O un point de (D) et O' le projeté orthogonal de O sur (D'), M un point quelconque du plan n'appartenant pas à (D) et (D')

a) Construire le point N tel que $N = S_{(D)}(M)$ et M' tel que $M' = S_{(D')}(N)$;

- b) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{MM'}$;
- c) Dédurre la nature et les éléments caractéristiques $\mathcal{S}_{(D')} \circ \mathcal{S}_{(D)}$.
- d) que devient $\mathcal{S}_{(D')} \circ \mathcal{S}_{(D)}$ si (D) et (D') sont confondues ?

(A3) Soit $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations de vecteur \vec{u} et \vec{v} respectivement ; M, N et M' trois points du plan non nécessairement aligné

- 1) On suppose que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires
- a) Construire le point N tel que $N = t_{\vec{u}}(M)$ et M' tel que $M' = t_{\vec{v}}(N)$
- b) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u} + \vec{v}$
- c) Répondre a) en supposant que $\vec{u} = -\vec{v}$
- 2) Répondre aux questions a) et b) en supposant maintenant que \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaire.

Résumé :

La composée de deux symétries centrales S_A et $S_{A'}$, notée $S_{A'} \circ S_A$ avec $A \neq A'$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AA'}$ notée $t_{2\overrightarrow{AA'}}$

Ainsi, pour tout point M du plan, si $N = S_A(M)$ et $M' = S_{A'}(N)$

Alors $M' = S_{A'} \circ S_A(M) = t_{2\overrightarrow{AA'}}(M)$

Si $A = A'$ alors $S_{A'} \circ S_A(M) = M$. On dit que $S_{A'} \circ S_A = Id$ (identité du plan)

La composée de deux symétries orthogonales $\mathcal{S}_{(D)}$ et $\mathcal{S}_{(D')}$ notée $\mathcal{S}_{(D')} \circ \mathcal{S}_{(D)}$ avec (D) et (D') distinct et parallèle est une translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$ notée $t_{2\overrightarrow{OO'}}$ où O est un point de (D) et O' le projeté orthogonale de O sur (D')

Ainsi, pour tout point M du plan, si $N = \mathcal{S}_{(D)}(M)$ et $M' = \mathcal{S}_{(D')}(N)$

Alors $M' = \mathcal{S}_{(D')} \circ \mathcal{S}_{(D)}(M) = t_{2\overrightarrow{OO'}}(M)$ où O est un point de (D) et O' le projeté orthogonale de O sur (D')

Si les droites (D) et (D') sont confondues alors $\mathcal{S}_{(D')} \circ \mathcal{S}_{(D)}(M) = M$. On dit que $\mathcal{S}_{(D')} \circ \mathcal{S}_{(D)}(M) = Id$ (identité du plan)

La composée de deux translations $t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{u}}$ est une translation de vecteur de translation $\vec{u} + \vec{v}$.

Ainsi, pour tout point M du plan si $N = t_{\vec{u}}(M)$ et $M' = t_{\vec{v}}(N)$ alors $M' = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}(M)$.

Si $\vec{u} = -\vec{v}$ Alors $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}(M) = M$ On dit que $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = Id$ (identité du plan)

On appelle application identité du plan notée Id ou Id_p , l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe le même point.

Pour tout point M du plan, $Id_p(M) = M$.

Exemple : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = Id_p(M) = M$; $S_A \circ S_A(M) = Id_p(M)$.

Exercice d'application

Voir livre de l'élève

LEÇON 2 : Propriétés des homothéties

Durée : 100 min

Objectifs pédagogiques

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Utiliser les propriétés d'une homothétie pour démontrer une propriété ou construire une configuration ;
- Déterminer par une homothétie les images des dessins ;
- Déterminer une homothétie connaissant ses propriétés ;
- Caractériser vectoriellement une homothétie et établir son expression analytique.

Motivation :

Les homothétie nous permettes de réduire ou d'agrandir les dimensions des objets et des surfaces au quels nous faisons face au quotidien.

Contrôle de prérequis

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 3\text{cm}$.

Construire le point C, D et E tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$,

Situation problème :

Mr Nana est propriétaire d'une très grande parcelle de terre. Il utilise une partie de forme rectangulaire de 60m de long et 30m de large pour sa plantation de cacao. Satisfait de ses ventes, il décide de crée un nouveau champ juste en face de la face principale du premier de façon à crée une passerelle entre les deux champs. Il aimerait que la surface de sa nouvelle plantation soit égale aux $\frac{25}{9}$ de la surface de la première mais reste confus sur les dimensions qui lui permettrons de crée ce nouveau champ. Il sollicite de ce fait votre aide.

Activité d'apprentissage :

En considérant les informations de la situation problème, Le rectangle ci-dessous désigne la première plantation

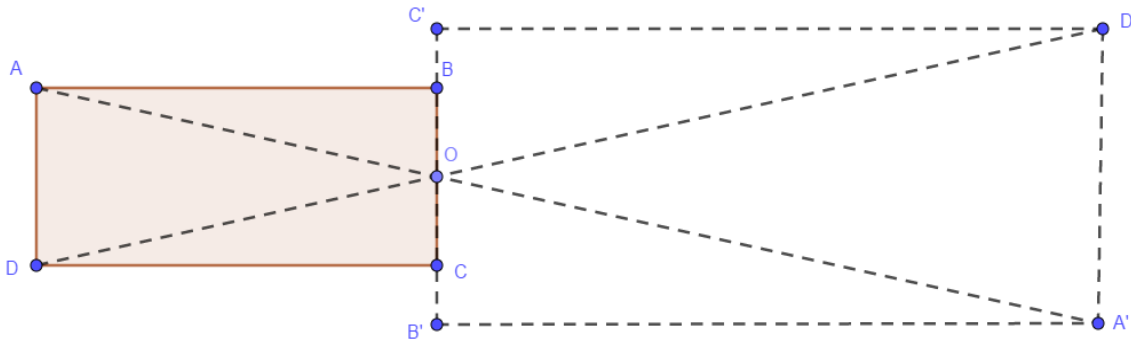


de Mr Nana. Echelle 1cm pour 10m

Le côté BC représente la face principale du champ

- 1) Placer le point O milieu du segment [BC].
- 2) Construire les points A', B', C' et D' tel que : $\overrightarrow{OA'} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$,
 $\overrightarrow{OC'} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD'} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{OD}$.
- 3) Que peut-on dire des points A, O et A' d'une part et des points B, O et B' d'autre part ?
- 4) Justifier que $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ et en déduire que $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.
- 5) Justifier que $\overrightarrow{B'C'} = -\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ et en déduire que $\overrightarrow{B'C'} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$
- 6) Donner la nature du quadrilatère A'B'C'D'.
- 7) Calculer les aires **A1**, **A2** des rectangles ABCD et A'B'C'D' puis comparer.
- 8) Répondre à la préoccupation de Mr Nana.

Solution de l'activité d'apprentissage



- 3) Les points A, O et A' sont alignés ; les points B, O et B' sont alignés.
- 4) $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{3}\overrightarrow{OB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AO} - \frac{5}{3}\overrightarrow{OB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$
- 5) $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'O} + \overrightarrow{OC'} = -\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{5}{3}\overrightarrow{OC} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{BO} - \frac{5}{3}\overrightarrow{OC} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$

6) A'B'C'D' est un parallélogramme

$$7) A_1 = A_{(ABCD)} = \mathbf{AB} \times \mathbf{BC} = \mathbf{60} \times \mathbf{30} = \mathbf{1800m^2}$$

$$A_2 = A_{(A'B'C'D')} = \mathbf{A'B'} \times \mathbf{B'C'}$$

$$= \left(-\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{25}{9} \mathbf{60} \times \mathbf{30} = \mathbf{50000m^2}$$

$$\text{Comparaison : } A_2 = \frac{25}{9} A_1$$

7) Les dimensions qui permettront à Mr NANA d'avoir sa seconde plantation A'B'C'D' sont :

$$\overrightarrow{A'B'} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{B'C'} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$$

Résumé

a) Définition.

Soit Ω un point du plan et k un nombre réel non nul.

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k notée $h_{(\Omega,k)}$ l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$. On note $h_{(\Omega,k)}(M) = M'$ pour dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k

b) Remarques.

(R1) Lorsque le rapport k de l'homothétie est égal à un, ($k = 1$) l'homothétie est l'identité. Notée Id_p

(R2) Lorsque $k > 1$ le point M est entre Ω et M'

(R3) Lorsque k est compris entre 0 et 1, M' est entre Ω et M

(R4) Lorsque $k < -1$ ou k compris entre -1 et 0, le point Ω est entre M' et M

(R5) Lorsque $k = -1$ l'homothétie est la symétrie centrale de centre Ω

(R6) Par une homothétie h , pour tout point M' du plan, il existe un unique point M tel que M' soit l'image de M par h . On dit qu'une homothétie est une transformation du plan c'est-à-dire une bijection.

L'application qui permet de ramener M' sur M s'appelle bijection réciproque de l'homothétie et se note h^{-1} .

Ainsi, si $h = h_{(\Omega,k)}$ alors $h^{-1} = h_{(\Omega, \frac{1}{k})}$

c) Propriétés.

(P1) Une application h de rapport k est une homothétie si et seulement si pour tous points M et N d'image respective M' et N' on a $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$;

(P2) Par une homothétie, un point, son image et le centre de l'homothétie sont toujours alignés ;

(P3) Si $\mathcal{C}(\mathbf{O}, \mathbf{R})$ désigne le cercle de centre \mathbf{O} et de rayon \mathbf{R} , son image par l'homothétie de centre Ω et de rapport k ($h_{(\Omega,k)}$) est un autre cercle \mathcal{C}' de centre $h_{(\Omega,k)}(\mathbf{O})$ et de rayon $|k|\mathbf{R}$ noté $\mathcal{C}'(h_{(\Omega,k)}(\mathbf{O}), |k|\mathbf{R})$;

(P4) L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à la première ;

(P5) Une homothétie conserve le parallélisme. C'est-à-dire l'image de deux droites parallèles est encore deux droites parallèles ;

(P6) Propriétés de conservations

- Une homothétie conserve la perpendicularité. C'est-à-dire l'image de deux droites perpendiculaires est encore deux droites perpendiculaires ;
 - Une homothétie conserve le milieu. C'est-à-dire l'image du milieu d'un segment $[MN]$ est le milieu du segment $[M'N']$;
 - Une homothétie conserve l'orientation des angles et leurs mesures ;
- (P7) Une homothétie multiplie les distances par la valeur absolue du rapport ; les aires par le carré du rapport

(P8) Le centre d'une homothétie est le seul point invariant par l'homothétie. C'est-à-dire

$$h_{(\Omega,k)}(\Omega) = \Omega$$

d) Expression analytique d'une homothétie.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ On considère les points $\Omega\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$, $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$, k un nombre réel non nul, et $h_{(\Omega,k)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

On a $M' = h_{(\Omega,k)}(M)$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$.

$$\text{si et seulement si } \begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x' = kx - ka + a \\ y' = ky - kb + b \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x' = kx + (1 - k)a \\ y' = ky + (1 - k)b \end{cases} \text{ Ce système est appelé expression analytique de}$$

$h_{(\Omega,k)}$.

Exercices d'application

Confère livre au programme

LEÇON 3 : Rotation et configurations planes Durée : 100 min

Objectifs pédagogiques

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Utiliser les propriétés d'une rotation pour faire des démonstrations en géométrie ;
- Utiliser les propriétés d'une rotation pour construire l'image des dessins.

Motivation :

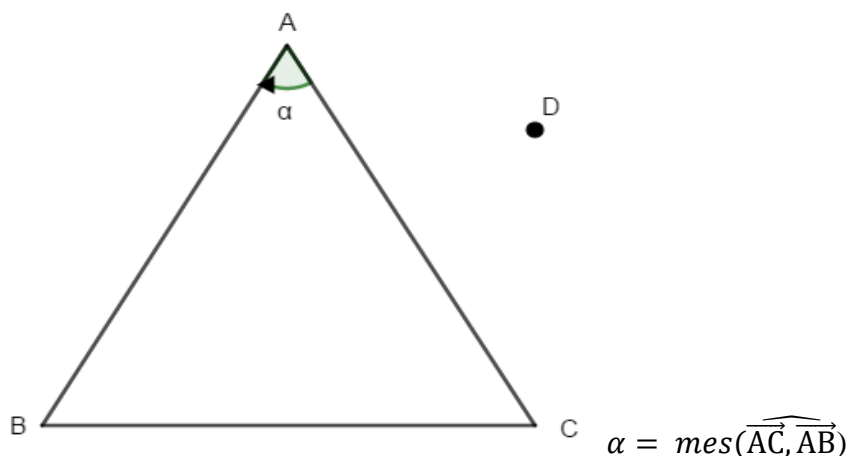
En géométrie plane, les rotations permettent de faire tourner les objets géométriques autour des points fixe suivant des angles donc le sens est bien défini.

Contrôle de prérequis

Soit Ω et M deux points du plan et $\alpha \in]-\pi, \pi]$ donné, construire le point M' tel que $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \widehat{(\Omega M, \Omega M')} = \alpha \end{cases}$

Activité d'apprentissage :

Soit ABC un triangle équilatéral et α la mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}$ et D un point du plan.



1) Donner la valeur de α ;

2) Construire les points B' , C' images respectives des points A , B , C et D tel que

$$\begin{cases} AB' = AB \\ \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'})} = \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} AC' = AC \\ \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'})} = \alpha \end{cases} ;$$

3) Donner la nature du triangle A, B', C' ;

4) Donner la nature de la transformation géométrique qui permet de passer du triangle A, B, C au triangle A, B', C' puis déterminer l'image du point A par cette transformation.

5) Construire les point D' et D'' tel que $D' = S_{(AC)}(D)$ et $D'' = S_{(AB)}(D')$ puis déduire que

$$D'' = S_{(AB)} \circ S_{(AC)}(D);$$

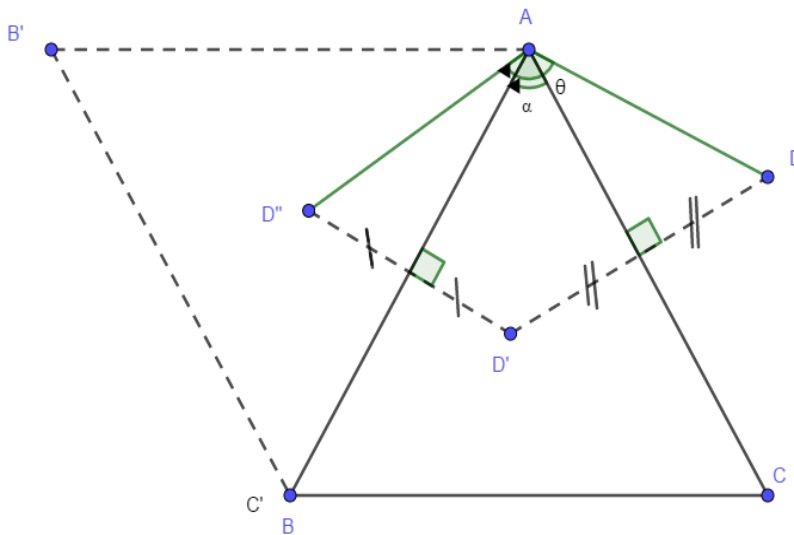
6) Montrer que $mes(\widehat{AD, AD'}) = 2 mes(\widehat{AC, AD'})$, $mes(\widehat{AD', AD''}) = 2 mes(\widehat{AD', AB})$ puis en déduire une relation entre $\theta = mes(\widehat{AD, AD''})$ et α ;

7) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$.

Solution de l'activité d'apprentissage

1) $\alpha = -\frac{\pi}{3} \text{ rad} = -60$

2)



3) A'B'C' est un triangle équilatéral

4) A'B'C' est l'image de ABC par la rotation de centre A et d'angle α ; A est sa propre image par cette rotation.

$$5) D'' = S_{(AB)}(D') = S_{(AB)}(S_{(AC)}(D)) = S_{(AB)} \circ S_{(AC)}(D)$$

$$6) mes(\widehat{AD, AD'}) = mes(\widehat{AD, AC}) + mes(\widehat{AC, AD'}) = 2 mes(\widehat{AC, AD'})$$

$$mes(\widehat{AD', AD''}) = mes(\widehat{AD', AB}) + mes(\widehat{AC', AD''}) = 2 mes(\widehat{AD', AB})$$

$$\theta = mes(\widehat{AD, AD''}) = mes(\widehat{AD, AD'}) + mes(\widehat{AD', AD''})$$

$$= 2 mes(\widehat{AC, AD'}) + 2 mes(\widehat{AD', AB})$$

$$= 2 (mes(\widehat{AC, AD'}) + mes(\widehat{AD', AB}))$$

$$= 2 \alpha$$

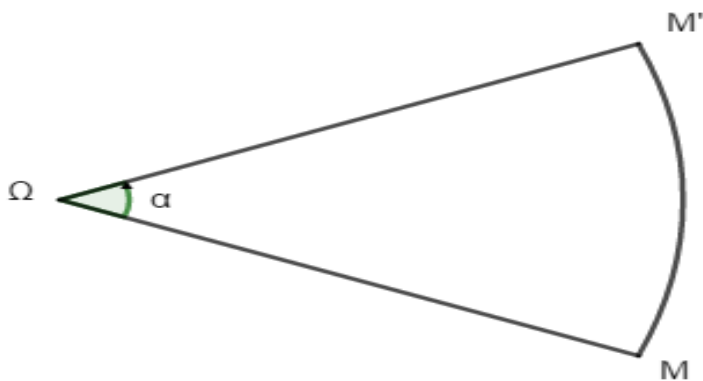
7) $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ est la rotation de centre A et d'angle 2α

Résumé :

a) Définition

Soit Ω un point du plan et α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

On appelle rotation de centre Ω et d'angle α notée $R(\Omega, \alpha)$ l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$



b) Propriétés des rotations

(P1) Soit R une rotation d'angle de mesure α , M et N deux points quelconques du plan d'images M' et N' par R . Alors $\begin{cases} MN = M'N' \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha \end{cases}$ C'est la propriété fondamentale d'une rotation d'angle α

(P2) Toutes rotation transforme

- Une droite en une droite, une demi-droite en une demi-droite.
- Un segment en un segment de même longueur.
- Un cercle en un cercle de même rayon.

(P3) Propriétés de conservation

- Toutes rotation conserve la distance, les aires et les volumes.
- Toutes rotation conserve le milieu d'un segment. C'est-à-dire l'image du milieu d'un segment par une rotation est le milieu du segment image ;
- Toutes rotation conserve les angles orientés. C'est-à-dire l'image d'un angle orienté par une rotation est un angle orienté de même mesure ;
- Toutes rotation conserve le parallélisme des droites. C'est-à-dire l'image de deux droite parallèle par une rotation est encore deux droite parallèle ;
- Toutes rotation conserve la perpendicularité. C'est-à-dire l'image de deux droites perpendiculaires par une rotation est encore deux droites perpendiculaires.

c) Remarques

(R1) Par une rotation R , pour tout point M' du plan, il existe un unique point M tel que M' soit l'image de M par R . On dit que la rotation est une transformation du plan c'est-à-dire une bijection.

L'application qui permet de ramener M' sur M s'appelle bijection réciproque de la rotation et se note r^{-1} .

Ainsi, si $r = R(\Omega, \alpha)$ alors $r^{-1} = R(\Omega, -\alpha)$

(R2) Si (D) et (D') sont deux droites sécantes, l'application $S_{(D)}$ suivie de $S_{(D')}$ notée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est une rotation donc le centre est le point d'intersection des deux droites et donc l'angle est deux fois l'angle entre les deux droites.

Exercices confère livre au programme.

CHAPITRE 10 *PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS DU PLAN*

MOTIVATION

La connaissance du produit scalaire de deux vecteurs peut permettre non seulement de déterminer une longueur mais aussi de déterminer la mesure d'un angle.

LEÇON₁ : PRÉSENTATION DU PRODUIT SCALAIRE Durée : 100min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- Calculer le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leurs normes et leur angle ou à partir des projetés orthogonaux.
- Calculer la norme d'un vecteur en utilisant le produit scalaire.
- Manipuler les règles de calcul avec le produit scalaire.

SITUATION PROBLÈME

Ondoua et son ami Job, qui sont tous deux en classe de troisième discutent du cours sur les vecteurs qu'ils viennent de faire en classe. Ondoua fait remarquer à son ami que le professeur n'a cité que la somme et la multiplication par un réel comme opérations dans l'ensemble des vecteurs. Les deux amis se demandent s'il n'existe pas une multiplication des vecteurs. Perplexe, ils viennent vous poser la question.

Prérequis

1. Qui peut nous rappeler la propriété de Pythagore ?
2. ABC est un triangle rectangle en B tel que $AC = 9$ et $BC = 4$, détermine la longueur du côté AB.
3. Construis deux vecteurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} ; représente les vecteurs : $3\vec{u}$; $-2\vec{v}$ et $\vec{u} + 2\vec{v}$

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

ABC est un triangle :

1. On suppose ABC rectangle en B, que vaut

$$AC^2 - (BC^2 + BA^2)$$

$$\mathbf{R : } AC^2 - (BC^2 + BA^2) = 0$$

2. On suppose maintenant que ABC n'est pas rectangle

a. Comparer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et \overrightarrow{AC}

$$\mathbf{R : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

b. Utiliser l'identité remarquable pour calculer

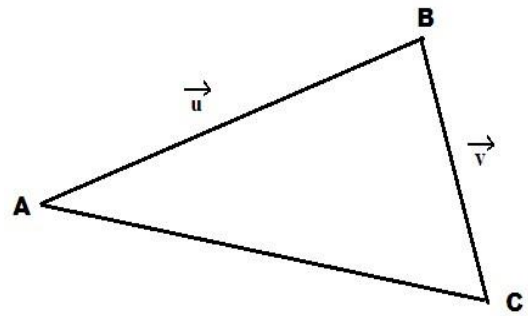
$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2$ et en déduire la valeur de $AC^2 - (BC^2 + BA^2)$.

$$\mathbf{R : } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{AB})^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{BC})^2$$

$$AC^2 - (BC^2 + BA^2) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

c. En posant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ montrer que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$



RESUME

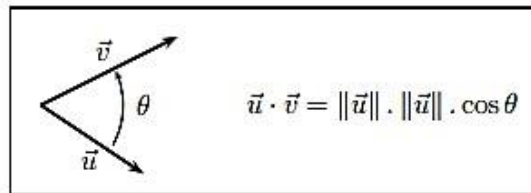
1. **Définition 1 :** Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on appelle produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et qui est tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

2. **Autres définitions Définition 2 :**

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$



Si A, B et C sont trois points du plan, alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Définition 3 : Projection orthogonale

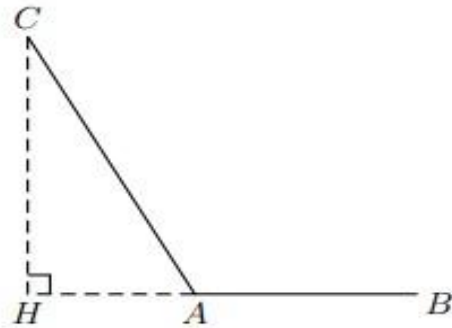
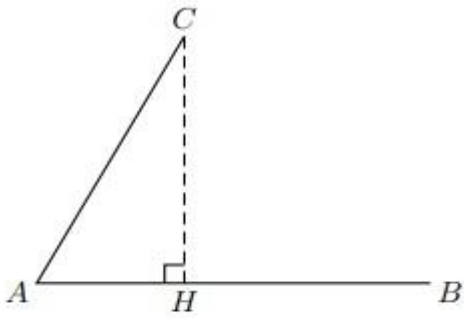
Soit deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} et H la projection orthogonale du point C sur la droite (AB).

□ Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} ont le même sens on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

□ Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} sont de sens contraire on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$



3. Propriétés du produit scalaire

P1 : Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , sont colinéaires de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

P2 : Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

P3 : Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Attention au produit scalaire, on n'a pas $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

P4 : Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} pour tout nombre réel k , on a :

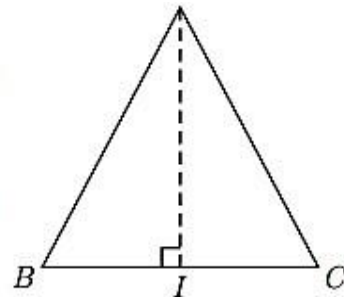
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
- $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

Exercices d'application

Exercice 0

ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que $AB = 2,5$ cm et $BC = 3$ cm. I est le milieu de $[BC]$.

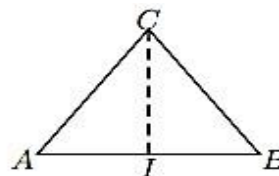
Exprimer le produit scalaire $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$ de deux manières différentes, et en déduire la valeur de l'angle \widehat{ABC} à 0,1 degré près.



Exercice 1

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm. I est le milieu de $[AB]$.

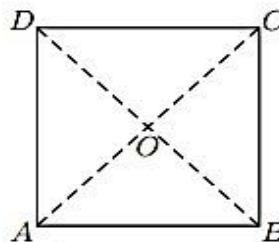
Calculer les produits scalaires : a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$ c) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BI}$

**Exercice 2**

$ABCD$ est un carré de côté 2 cm de centre O .

Calculer les produits scalaires :

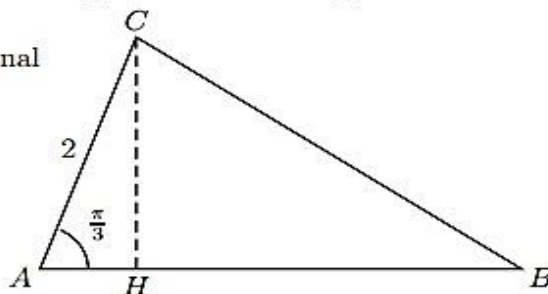
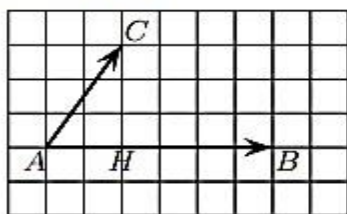
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{DC}$

**Exercice 3**

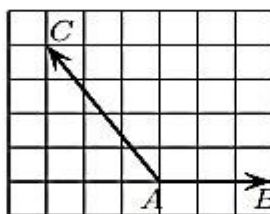
Dans le triangle ABC ci-contre, H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .

On donne de plus $AC = 2$, $AB = 4$, et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

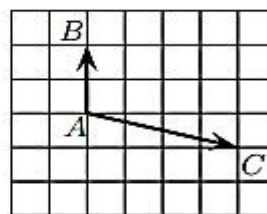
- Calculer AH .
- Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
- Que remarque-t-on ?

**Exercice 4**

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots$$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots$$

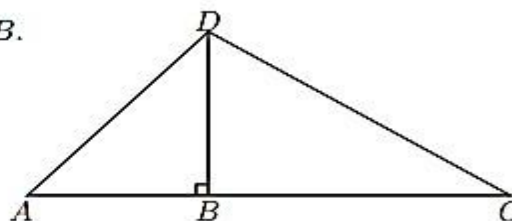


$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots$$

Exercice 5 ABD est un triangle rectangle isocèle en B .

L'angle \widehat{BCD} mesure 30° et $AB = 3$.

- Calculer les longueurs AD , CD et BC .
- Déterminer les produits scalaires suivants :
 - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
 - $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$
 - $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$

**Résolution de la situation problème**

Le produit scalaire est une sorte de multiplication dans l'ensemble des vecteurs, mais il faut bien remarquer que ce n'est pas une opération interne car on l'applique à deux vecteurs pour obtenir comme résultat un nombre réel.

LEÇON 2 : PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

Durée : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- Déterminer l'expression du produit scalaire ou d'une norme dans une base orthonormée.
- Justifier en prenant un repère orthonormé convenable que deux droites sont perpendiculaires ou non.

SITUATION PROBLÈME

Après avoir vu dans la **leçon 1** la définition du produit scalaire, un de vos camarades aimerait savoir que devient cette définition lorsqu'on est dans un repère.

PRÉREQUIS

1. Qui nous rappelle les trois définitions du produit scalaire ?
2. Qui peut nous rappeler les propriétés du produit scalaire que nous avons vu lors de la dernière leçon ?

. ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

On considère la figure ci-contre :

- a. Calculer le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} \mathbf{R} : Avec les projetés orthogonaux on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

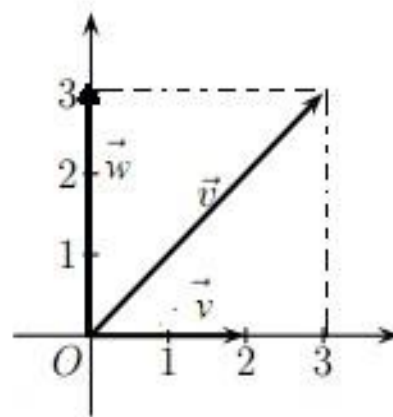
- b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$

\mathbf{R} : $\vec{u}(3,3)$ et $\vec{v}(2,0)$

- c. Calculer $xx'+yy'$ et conclure,

\mathbf{R} : $3 \times 2 + 3 \times 0 = 6$

- d. Faire de même pour \vec{v} et \vec{w} ,



RESUME

1. Norme et carré scalaire d'un vecteur

Définition et notation : Pour tout vecteur \vec{u} , \vec{u}^2 est le carré scalaire du vecteur \vec{u} .

On note $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

2. Expression du produit scalaire relativement à une base orthonormée

Dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , si on a les vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Ainsi, pour tout vecteur $\vec{u}(x, y)$ on a $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

4. Exercices d'application

Exercice 1 : Dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, dans chacun des cas suivants, et en déduire une valeur de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) à 0, 1 degré près. a) $\vec{u}(1; -2)$ et $\vec{v}(6; 5)$ b) $\vec{u}(-2; 4)$ et $\vec{v}(3; \frac{1}{2})$

Exercice 2 : On se place dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Dans chacun des cas, d' déterminer la valeur de m pour que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} soient orthogonaux. a) $\vec{u}(m; 5)$ et $\vec{v}(1; -4)$ b) $\vec{u}(2m; 1)$ et $\vec{v}(3; 2)$.

Exercice 3 Le plan est rapporté à un RON $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(1; -1)$, $B(3; 3)$, $C(-4; 4)$, $D(2; 1)$, $E(17; 12)$ et $F(5; -12)$.

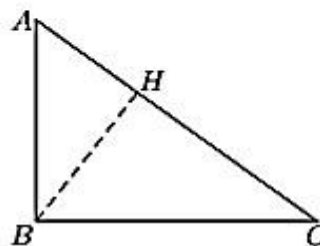
1. Montrer que $(AB) \perp (CD)$.
2. Montrer que $(AB) \parallel (EF)$.

Exercice 4 ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 3$ cm et $BC = 4$ cm.

On appelle H le projeté orthogonal de B sur (AC) .

Calculer la longueur AH

(on pourra utiliser le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$).



LEÇON 3 : LE THÉOREME D'AL KASHI Durée : 50min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

- Caractériser un triangle rectangle par des relations métriques ;
- Calculer la mesure d'un angle d'un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés ;
- Calculer la longueur d'une médiane d'un triangle.
- Calculer l'aire d'un triangle ou le rayon de son cercle circonscrit.

SITUATION PROBLEME

Dans une discussion, votre petit frère très curieux, qui vient de voir la propriété de Pythagore en classe vous pose la question suivante : « Comment peut-on faire pour déterminer la longueur du troisième côté d'un triangle en fonction des deux autres lorsque le triangle n'est pas rectangle ? »

I. Relations métriques dans un triangle rectangle

1. Activité

ABC est un triangle comme sur la figure ci-contre. H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

- i. On suppose ABC rectangle en A ; Exprime $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ en utilisant successivement le projeté orthogonal de A sur (BC) et le projeté orthogonal de C sur (AB).

Conclure que $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$

R : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overline{BH} \cdot \overline{BC} = \overline{BA} \cdot \overline{BA}$

- ii. Suppose que $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$ et montre que $HA^2 + HB^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$ puis conclut que $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$

R : dans le triangle ABC rectangle en H on a : $HA^2 + HB^2 = AB^2$

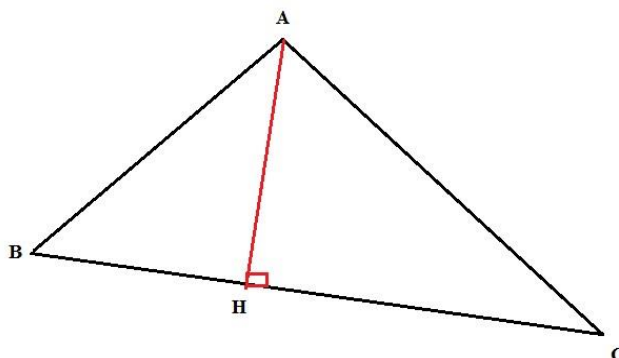
$$AH^2 = \overline{BH} \times \overline{BC} - HB^2$$

iii. Suppose maintenant que $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

- Justifie que $\overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2HA^2$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) &= \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) + \overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \\ &= (\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AH}) + (\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AH}) + (\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}) \end{aligned}$$

R :



$$= -2HA^2.$$

➤ Démontre ensuite que $\overline{HB} \times \overline{HC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} - AH^2$ et en déduire que ABC est rectangle en A

. RESUME

ABC est un triangle, H est le projeté orthogonal de A sur (BC). Les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) ABC est rectangle en A
- (ii) $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- (iii) $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$
- (iv) $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$

EXERCICE D'APPLICATION

Soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC). Démontrer que si ABC est rectangle en A

alors : $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$

Résolution

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2}, \text{ or } BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$$

$$\text{Donc } \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{BC^2}{\overline{BH} \times \overline{BC} \cdot AC^2}, \text{ De plus } \overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC}$$

$$\text{Ainsi } \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{BC^2}{\overline{BH} \times \overline{BC} \cdot (\overline{AH} + \overline{HC})^2}; \text{ On développe, puis on aboutit au résultat en factorisant.}$$

II. Relation d'Al Kashi

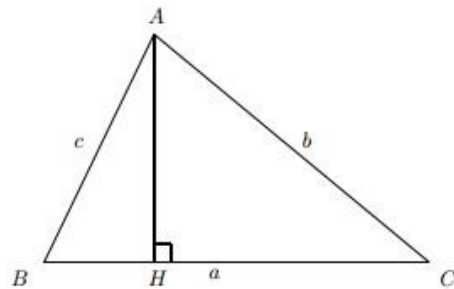
1. Activité

ABC est un triangle rectangle quelconque

- i. Montre que $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$
- ii. Utilise cette égalité, en élevant au carré les deux membres, pour montrer que :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

- iii. Fais une conjecture sur les expressions de b^2 et c^2 .



2. Résumé

Soit ABC un triangle quelconque, comme sur la figure précédente, posons $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$$

De même on aura :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\hat{B}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2bac\cos\hat{C}$$

Remarques :

- Cette relation est une généralisation de la propriété de Pythagore
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = cb\cos\hat{A}$; donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$. On retrouve la définition d'entrée

3. Exercice d'application

Soit ABC un triangle tel que $AC = 7$, $AB = 4$ et $mes\hat{A} = 120^\circ$ i.
Calculer BC

- ii. Déterminer les mesures des angles \hat{B} et \hat{C}

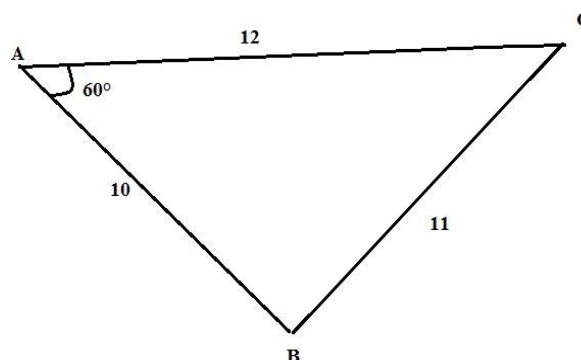
LEÇON 4 : LE THÉOREME DE LA MEDIANE Durée : 50min

OBJECTIF PEDAGOGIQUE

Calculer la longueur d'une médiane d'un triangle.

SITUATION PROBLEME

Le terrain de M. Kepsu est représenté par la figure ci-contre. Il voudrait construire un mur en partant du sommet B pour le diviser en deux parties d'égales aires. Pour évaluer sa dépense, il voudrait déterminer la longueur de ce mur, mais ne dispose d'aucun instrument de mesure. Comment peut-il procéder ?



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

ABC un triangle quelconque, $[AA']$ est la médiane relative à $[BC]$.

i. Que peux-tu dire de $\vec{A'B}$ et $\vec{A'C}$?

R : $\vec{A'B}$ et $\vec{A'C}$ sont opposés

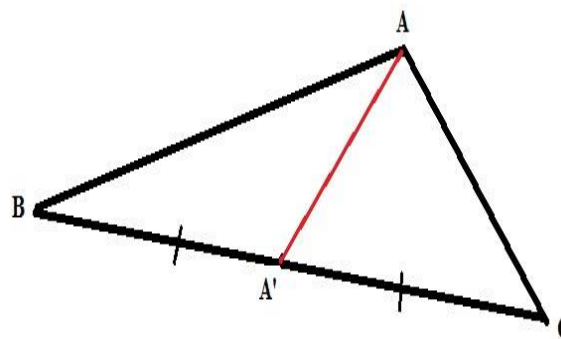
ii. Exprime BC^2 en fonction de AB^2 et AC^2

iii. Utilise la relation de CHASLES pour développer $\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2$ en introduisant le point A' et

Conclure que $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$

iv. En remarquant que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ en déduire que

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$



Résumé

Soit ABC un triangle quelconque et $[AA']$ la médiane relative à $[BC]$. On a :

$$(i) \quad AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$(ii) \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4} \quad ;$$

Exercices d'application

Soit ABC un triangle tel que $AC = AB = 4$ et $BC = 3$. Détermine les longueurs des médianes du triangle ABC.

Résolution de la situation problème

Ce mur correspond à la médiane issue de B. d'après le théorème de la médiane, on a :

$$BA^2 + BC^2 = 2BB'^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$\begin{aligned} BB'^2 &= \frac{1}{2} \left(BA^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(10^2 + 11^2 - \frac{12^2}{2} \right) \end{aligned}$$

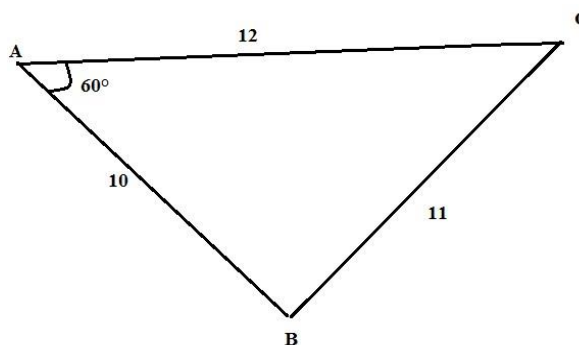
LEÇON 5 : LE THÉOREME DES SINUS Durée : 50 min

OBJECTIF PEDAGOGIQUE

- Calculer l'aire d'un triangle connaissant les longueurs de ses cotés et la mesure d'un de ses angles

SITUATION PROBLEME

Le terrain de M. Noah est représenté par la figure ci-contre. Il voudrait le vendre mais n'arrive pas à déterminer son aire. peux-tu l'aider à calculer l'aire de ce terrain ?

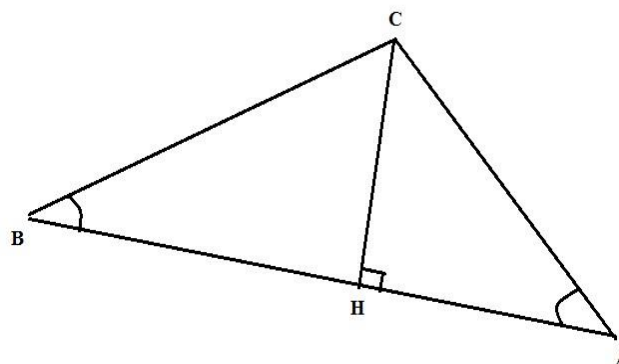


ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On considère le triangle ABC ci-contre.

On pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$,
 $\hat{C} = \gamma$.

Soit H le pied de la hauteur issue de C.



- i. En utilisant le triangle AHC rectangle en H, montrer que : $CH = b \sin \alpha$
- ii. En utilisant le triangle BHC rectangle en H, montrer que : $CH = a \sin \beta$

iii. iii. Montrer alors que : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$

iv. Soit K la hauteur issue de A, utilise la démarche précédente pour prouver que : $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

v. En déduire que $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

vi. On $A =$ aire de ABC vérifier que $A = \frac{bc \sin \alpha}{2}$ et en déduire que $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{bc}{2A}$

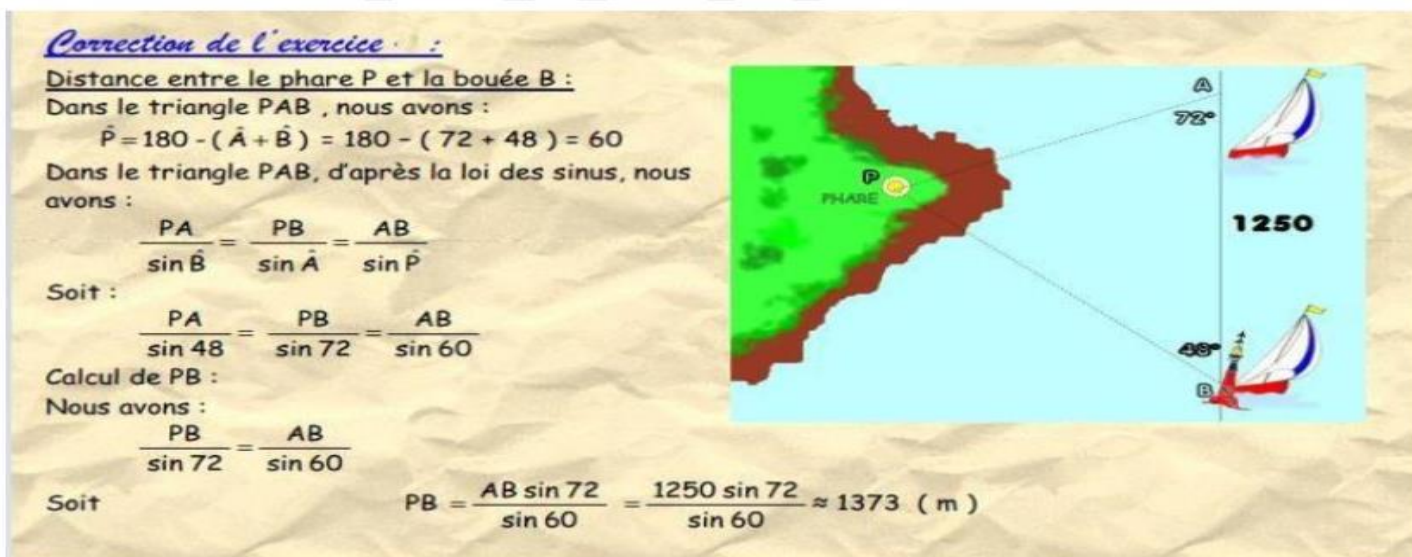
2. Résumé

En utilisant le triangle ABC et les notations de l'activité 1, on a :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\triangleright \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2A}$$

Exercices d'application



Résolution de la situation problème

On a :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{abc}{2A} \Leftrightarrow A = \frac{abc \sin \alpha}{2a}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{10 \times 11 \times 12 \times \sin 60^\circ}{2 \times 11}$$

CHAPITRE 11 : DROITES ET CERCLES DANS LE PLAN

LEÇON 1 : DROITES DANS LE PLAN

Objectifs pédagogiques

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Déterminer l'équation cartésienne, l'équation réduite et l'équations paramétriques d'une droite dans le plan ;
- Déterminer un vecteur normal et un vecteur directeur d'une droite connaissant son équation cartésienne, son équation réduite ou son équations paramétriques ;
- Donner un point et un vecteur non nul d'une droite connaissant son équation cartésienne, son équation réduite ou son équations paramétriques ;
- Déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir de l'une de ses représentations paramétriques et réciproquement ;
- Déterminer la position relative de deux droites dont on connaît les équations cartésiennes ou les représentations paramétriques.

Motivation

En géométrie plane, les droites sont des objets géométriques jouent un rôle privilégié. Ce cours nous permet d'approfondir leur étude déjà initié dans les classes précédentes.

prérequis

- Interpréter l'expression $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec A, B, et M les points du plan et $t \in \mathbb{R}^*$
- Calculer le déterminant de deux vecteurs

Activité d'apprentissage :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, considérons les points $A\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$

1) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) ;

2) Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point de droite (AB)

a) Que peut-on dire des points A, B et M ?

b) Que peut-on dire des vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} ?

3) On considère l'expression $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$

a) Qu'el non donne-t-on à cette expression ;

b) En remplaçant les points A, B et M par leurs coordonnées respectives, donner le système d'équation obtenu en résolvant l'expression précédente puis donner un nom à ce système ;

4) On considère la droite (D) d'équation cartésienne $-2x - 3y + 1 = 0$

a) Déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal (D) ;

b) Exprimer y en fonction de x , donner un nom à la nouvelle expression obtenue puis déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal de cette expression.

Solution de l'activité d'apprentissage

1) Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point du plan appartenant à la droite (AB)

Alors $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$

C'est-à-dire $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

C'est-à-dire $\begin{vmatrix} x-4 & -2 \\ y+1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

C'est-à-dire $4(x-4) + 2(y+1) = 0$

C'est-à-dire $4x + 2y - 14 = 0$

Donc (AB) : $4x + 2y - 14 = 0$

2) a) Les points A, B et M sont alignés

b) Les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires

3) a) Equation vectoriel de la droite (AB)

b) $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y+1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = 4t - 1 \end{cases}$ Ce système s'appelle système d'équation paramétrique de la droite (AB)

4) a) Un vecteur directeur de (D) est $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; un vecteur normal de (D) est $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ Cette expression s'appelle équation réduite de la droite (D) ; ici, un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et un vecteur normal est $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

Résumé :

I-1 Equation cartésienne, équation réduite et équation paramétrique d'une droite.

Une droite dans le plan est entièrement déterminée par deux points distincts A et B, ainsi, si (D) est une droite du plan, A et B deux points de (D), si M est un point du plan appartenant à (D) alors les points A, B et M sont alignés. On dit alors que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont **colinéaires**. C'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$

L'équation $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$ s'appelle équation vectorielle de la droite (D).

Si M, A et B sont les points du plan de coordonnées respectifs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

L'équation précédente devient $\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.

Ce qui donne $\begin{cases} x = t(x_B - x_A) + x_A \\ y = t(y_B - y_A) + y_A \end{cases}$. **Ce système s'appelle système d'équation (représentation) paramétrique de la droite (D).**

Pour déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par les points A et B de coordonnées respectifs $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, on désigne par M un point du plan appartenant à la droite (D). Alors, les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont **colinéaires**. Ainsi, $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Ou encore } (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$$

$$\text{Ou bien } (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - (y_B - y_A)x_A + (x_B - x_A)y_A = 0$$

Ou enfin $(y_B - y_A)x + (x_A - x_B)y + ((y_A - y_B)x_A + (x_B - x_A)y_A) = 0$, qui est une équation cartésienne de la droite (D).

En posant $a = (y_B - y_A)$, $b = (x_A - x_B)$ et $c = ((y_A - y_B)x_A + (x_B - x_A)y_A)$; a, b et c sont éléments de \mathbb{R} et On obtient $ax + by + c = 0$ (*)

(*) est la forme générale de l'équation cartésienne d'une droite (D) dans le plan.

En exprimant y en fonction de x dans (*) on obtient l'équation $y = mx + p$ (**) avec

$$m = -\frac{a}{b} \text{ et } p = -\frac{c}{b}$$

(**) est l'équation réduite de la droite (D)

EXERCICE D'APPLICATION

Voir livre de l'élève.

I-2 Vecteur directeur et vecteur normal

I-2-1 Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit (D) une droite du plan.

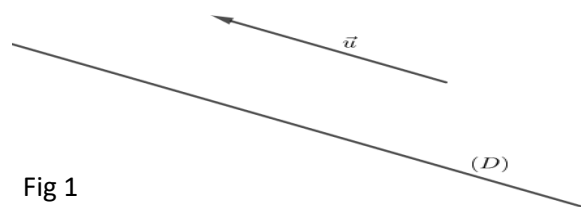


Fig 1

On appelle **vecteur directeur à (D)** tout vecteur non nul \vec{u} qui possède la même direction que (D).

Dans la figure 1, \vec{u} est un vecteur directeur de la droite (D) car il a la même direction que la droite (D).

On appelle **vecteur normal à (D)** tout vecteur non nul \vec{n} dont la direction est perpendiculaire à celle de (D).

Dans la figure ci-contre \vec{n} est un vecteur normal à (D).

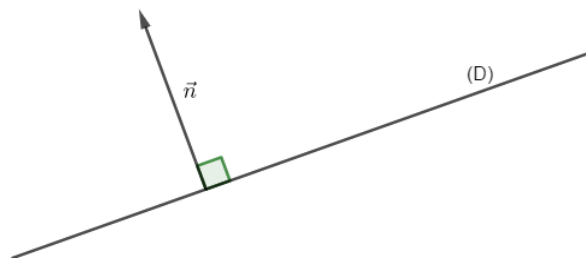


Fig 2

Si (D) est définie par son équation cartésienne sous la forme $ax + by + c = 0$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$ alors,

- ❖ Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
- ❖ Un vecteur normal de (D) est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Si (D) est définie par son équation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$ et

$(a, b) \neq (0, 0)$ alors (D) est la droite passant par un point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Si (D) est définie par son équation paramétrique.

Si la droite (D) est définie par son équation réduite sous la forme $y = mx + p$ alors :

- ❖ Le réel m s'appelle le coefficient directeur de la droite (D)
- ❖ Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et un vecteur normal de (D) est $\vec{n} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice d'application

Le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit (D) est la droite passant les points $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer une équation cartésienne, une équation réduite et une équation paramétrique de la droite (D)
- 2) Déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite (D)
- 3) donner le coefficient directeur de la droite (D)

I-2-2 Propriétés

(P1) Si (D) et (D') sont deux droites ayant respectivement \vec{u} et \vec{u}' pour vecteurs directeurs alors :

- ❖ $(D) // (D') \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{u}' sont colinéaires
- ❖ $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}'$

(P2) pour tout points A et tout vecteur \vec{u} non nul, Il existe une et une seul droite passant par A et dirigée par \vec{u} .

(P3) Si (D) une droite de vecteur directeur \vec{u} et A un point de (D), alors Pour tout point M du plan, on a :

$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et \vec{u} sont colinéaires.

(P4) Si (D) et (D') sont deux droites ayant respectivement \vec{n} et \vec{n}' pour vecteurs normaux alors :

❖ $(D) // (D') \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{u}' sont colinéaires

❖ $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}'$

(P5) pour tout point A et tout vecteur \vec{n} non nul, il existe une et une seule droite passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

(P6) Si (D) est une droite, \vec{n} un vecteur normal à (D) et A un point de (D) , alors pour tout point M du plan, on a : $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et \vec{n} sont orthogonaux

(P7) Si (D) et (D') sont deux droites de coefficient directeur respectifs m et m' alors :

❖ $(D) // (D') \Leftrightarrow m = m'$

❖ Si le repère est orthonormé alors $(D) \perp (D') \Leftrightarrow mm' = -1$

Remarques

(R1) toute droite admet une infinité d'équation cartésienne.

En effet, si (D) est une droite admettant $ax + by + c = 0$ pour équation cartésienne, pour tout nombre réel k non nul, $kax + kby + kc = 0$ est une autre équation cartésienne de (D) .

(R2) Une droite (D) dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, peut-être déterminer connaissant :

❖ Un point A et un de ses vecteurs directeurs \vec{u} . Dans ce cas pour tout point M du plan, on a : $M \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.

❖ Un point A et un de ses vecteurs normaux \vec{n} . Dans ce cas, si le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est orthonormé alors pour tout point M du plan, on a : $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

I-2-3 Déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir de l'une de ses représentations paramétriques et réciproquement.

Activité

Le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Soit (D) la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$

a) Exprimer t en fonction de x puis en fonction de y

b) En déduire une relation entre x et y

2) Soit (D') la droite d'équation cartésienne $2x - 3y + 1 = 0$

a) Donner un vecteur directeur de (D')

b) Déterminer les coordonnées d'un point de (D')

c) Ecrire une équation paramétrique de la droite (D')

Résumé

i) Déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir de l'une de ses représentations paramétriques

Pour déterminer l'équation cartésienne d'une droite dont on connaît une de ses représentations paramétriques, on procède de la manière suivante :

- ❖ Exprimer t en fonction de x ou en fonction de y dans une des équations du système puis remplacer t par l'expression précédemment obtenue dans l'autre équation du système.
- ❖ Exprimer t en fonction de x dans la première équation du système puis exprimer t en fonction de y dans la seconde équation du système et procéder par égalité.
- ❖ Déterminer un point $A\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ et un vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ de la droite. Comme l'équation de la droite est sous la forme $bx - ay + c = 0$ on détermine c en utilisant le fait que $A\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ est un point de la droite.

Exercice d'application

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$. Déterminons une équation cartésienne de (D)

Méthode 1

La première équation nous permet d'écrire $t = 2 - x$. En remplaçant t par cette valeur dans la seconde équation on obtient : $y = 3(2 - x) - 1$ c'est-à-dire $y = -3x + 5$

C'est-à-dire $3x + y - 5 = 0$

Méthode 2

La première équation nous permet d'écrire $t = 2 - x$; La deuxième équation nous permet d'écrire $t = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$. Par égalité on a $2 - x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$ C'est-à-dire $3x + y - 5 = 0$.

Méthode 3

Un vecteur directeur de la droite (D) est $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$; $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ est un point de (D). Une équation cartésienne de (D) est $3x + y + c = 0$. Comme $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ est un point de (D) alors ses coordonnées vérifient l'équation de (D) C'est-à-dire $3(2) + (-1) + c = 0$ donc $c = -5$

Donc (D) : $3x + y - 5 = 0$.

ii) Déterminer une équation paramétrique d'une droite à partir de l'une de ses équations cartésiennes.

Pour déterminer l'équation paramétrique d'une droite dont on connaît une de ses équations cartésiennes, on procède de la manière suivante :

- ❖ On pose $x = t$ et on exprime y en fonction de t

- ❖ On détermine un vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et un point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. On obtient alors l'équation paramétrique de (D) de la forme $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$

Exercice d'application

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $2x - y + 1 = 0$. Déterminons une représentation paramétrique de (D).

Méthode 1

On pose $x = t$ et on a $2t - y + 1 = 0$ d'où $y = 2t + 1$. On obtient le système

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}^* \text{ qui est une représentation paramétrique de (D).}$$

Méthode 2

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) ; le point $A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un point de (D).

Une équation paramétrique (D) est $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$

Exercice d'application

Voir livre de l'élève.

LEÇON 2 : CERCLES DANS LE PLAN

Objectifs pédagogiques : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Déterminer une équation cartésienne d'un cercle défini par un de ses diamètre ou par son centre et son rayon dans un repère orthonormé ;
- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;
- Déterminer l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ du plan tels que :
 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$;
- Déterminer par leur coordonnées les éventuels points d'intersections d'un cercle et d'une droite du plan d'équations données.

Motivation : La modélisation de certains problèmes de la vie se ramène à l'étude et la détermination des équations d'un cercle. Ce cours nous permet d'approfondir leur étude déjà initié dans les classes précédentes.

Contrôle de prérequis

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, considérons les points $A\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} -5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

- Calculer la distance AB $AB = \sqrt{(-5 + 1)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$
- Calculer le produit scalaire $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} -5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = (-1) \times (-5) + (-2) \times 1 = 3$

Activité d'apprentissage:

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, considérons les points $A\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et I avec I milieu du segment $[AB]$

- 1) Calculer la distance IM en fonction de x et y
- 2) On pose $r = \sqrt{5}cm$ et $\mathcal{T} = \left\{ M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), IM = r \right\}$
 - a) Que représente \mathcal{T}
 - b) Donner l'équation cartésiennes de \mathcal{T}
- 3) On pose $\mathcal{T}' = \left\{ M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \right\}$
 - a) Donner une équation de \mathcal{T}'
 - b) Que représente \mathcal{T}' ?

Solution de l'activité d'apprentissage

$$1) I \begin{pmatrix} \frac{x_A - x_B}{2} \\ \frac{y_A - y_B}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } IM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$$

2) a) \mathcal{C} est l'ensemble des points M situés à $\sqrt{5}cm$ de I ; c'est le cercle de centre I et de rayon

$$r = \sqrt{5}cm$$

$$b) IM = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = r \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

$$3) a) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-x \\ -1-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-x \\ 3-y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-x) \times (2-x) + (-1-y) \times (3-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

b) On remarque que \mathcal{C}' et \mathcal{C} ont la même équation cartésienne. Donc \mathcal{C}' est le cercle de centre I et de rayon $r = \sqrt{5}cm$. Comme I est le milieu du segment $[AB]$ on déduit que \mathcal{C}' est le cercle de diamètre $[AB]$

Résumé :

2-1 Définition

Un cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble noté $\mathcal{C}(O, r)$ de tous les points M du plan tels que $OM = r$

Un cercle est parfaitement déterminé par la donnée de son centre et de son rayon

Si $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $O \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont deux points du plan, alors

$$OM = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad (**)$$

(*) est l'équation réduite du cercle (\mathcal{C}) de centre $O \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon r

(**) Est l'équation cartésienne du cercle (\mathcal{C}) de centre $O \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon r

En divisant chaque membre de la relation (*) par r on obtient : $\left(\frac{x-a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1$. Ainsi, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel

$$\text{que } \begin{cases} \frac{x-a}{r} = \cos t \\ \frac{y-b}{r} = \sin t \end{cases}$$

C'est-à-dire $\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Ce système est le système d'équation paramétrique du cercle (C) de centre $O \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon r

2-2 Remarques

(R1) Le cercle (\mathcal{C}) de diamètre $[AB]$ est $\left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \right\}$;

(R2) Un cercle à une équation cartésienne de la forme

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ Mais toutes équation de cette forme n'est pas toujours une équation du cercle.

En effet, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$ est de cette forme mais n'est pas une équation du cercle car : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = 0$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + 6 = 0 \text{ Forme canonique}$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = -1 \text{ Absurde}$$

2-3 Intersection d'une droite et d'un cercle

Activité

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ Est repère orthonormé.

On considère le cercle (\mathcal{C}) d'équation $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

1) Déterminer les éléments caractéristiques de (\mathcal{C}).

2) soit (D) : $ax - by + c = 0$ Une droite du plan et d la distance entre le centre de (\mathcal{C}) et (D).

a) Déterminer $\left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \cap (D) \right\}$ dans les cas suivants : i) $d > 2$, ii) $d = 2$, iii) $d < 2$

b) Dans les cas B et C donner un système d'équation permettant de déterminer $(\mathcal{C}) \cap (D)$

3) Soit (D') la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t - 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$

a) En remplaçant x et y dans l'équation du cercle (\mathcal{C}) par leur expression en fonction de t , déduire la ou les valeurs de x et y .

b) En déduire $(\mathcal{C}) \cap (D')$

Solution de l'activité

1) (\mathcal{C}) est le cercle de centre $\omega \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de rayon $r = \sqrt{10}$

2) a) i) $\left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \cap (D) \right\} = \emptyset$;

ii) $\left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \cap (D) \right\} = \{A\}$;

iii) $\left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{C}) \cap (D) \right\} = \{C, D\}$.

$$\text{b) } \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \\ ax - by + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
3) ((2t + 3) - 2)^2 + ((t - 1) - 1)^2 = 10 &\Rightarrow (2t + 1)^2 + (t - 2)^2 = 10 \\
&\Rightarrow 4t^2 + 4t + 1 + t^2 - 4t + 4 = 10 \\
&\Rightarrow 5t^2 = 5 \\
&\Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = -1
\end{aligned}$$

Pour $t = 1$, $x = 5$ et $y = 0$; donc $A\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}')$.

Pour $t = -1$, $x = 1$ et $y = -2$; donc $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}')$.

$$b) (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}') = \{A, B\}$$

Résumé :

Soit $C(O, r)$ un cercle du plan ; (D) une droite de ce plan et d la distance entre le centre de (C) et (D) .

Si $d > r$ (C) et (D) n'ont aucun point commun. On dit que (C) et (D) sont disjoints c'est-à-dire $(C) \cap (D) = \emptyset$.

Si $d = r$ (C) et (D) ont un seul point commun. On dit que (C) et (D) sont tangents.

Si $d < r$ (C) et (D) ont deux points distincts en commun. On dit que (C) et (D) sont sécants.

Remarques

(R1) Si (D) est défini par son équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ et (C) par son équation paramétrique de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ou par son équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ pour déterminer $(C) \cap (D)$ On résout le système

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ ax - by + c = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \\ ax - by + c = 0 \end{cases}$$

(R2) Si (D) est défini par une représentation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$ et (C) par son équation paramétrique de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ou par son équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, alors pour déterminer $(\mathcal{C}) \cap (D)$,

- ❖ On remplace x et y dans l'équation du cercle par leur expression en fonction du paramètre
- ❖ On détermine la valeur du paramètre et on déduit les coordonnées des points d'intersection

Exercice application

Voir livre de l'élève .

Module 20 : GEOMETRIE DE L'ESPACE

CHAPITRE 12 : GEOMETRIE DE L'ESPACE

INTÉRÊT

Ce chapitre consistera à étudier les positions relatives de droites, de plans et étude du parallélisme.

MOTIVATIONS

Dans notre quotidien nous rencontrons certains phénomènes liés au domaine de la mathématique. En ce qui concerne les bâtiments à fortiori les coins de mure d'une de ce bâtiment représentent des droites, le croisement de ces droites constitue un plan.

LEÇON 1 : Position relative de droites et de plans de l'espace Durée : 100min

MOTIVATION :

- Un fil tendu entre deux poteaux électriques, l'arête rectiligne d'une règle ou d'une équerre donnent une idée de la notion physique de droites de l'espace.
- La surface d'un tableau ou d'un mur, la face d'un solide de l'espace donnent une idée de la notion physique de plans de l'espace.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

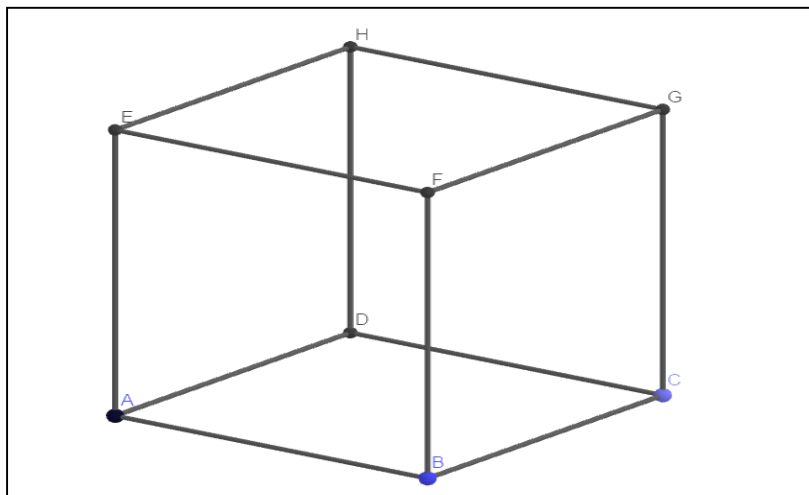
Être capable de déterminer :

- Les positions relatives d'une droite et d'un plan ;
- Les positions relatives de deux plans ;
- Les positions relatives de deux droites.

PRÉREQUIS :

Soit ABCDEFGH un cube ci-contre.

1. Combien de faces y'a-t-il sur ce cube ? Citer-les.
2. Combien d'arrêt y'a-t-il sur ce dessin ? Citer-les.

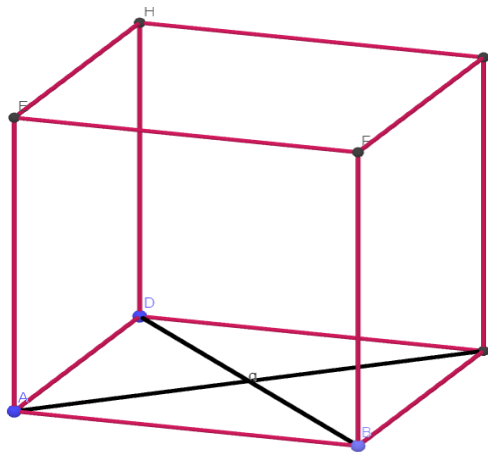


Solution :

1. Sur ce dessin nous avons 6 faces : ABCD ; DCGH ; ABFE ; ADHE ; EFGH ; BFGC.
2. En ce qui concerne les arrêts, nous avons 12 arrêts : AB ; CD ; DC ; GH ; AB ; FE ; AD ; HE ; EF ; GH ; BF et GC.

SITUATION PROBLÈME

OBAME est un étudiant en première année de mathématiques supérieures. Il est confronté à un problème qui est de trouver les dimensions du plan d'une maison dont il est chef de chantier. Aider OBAME à résoudre ce problème en répondant aux questions ci-dessous afin de déterminer ces dimensions du plan de construction de la maison. Ce plan de cette maison a la forme d'un cube nommé ABCDEFGH d'arrêt a (a réel strictement positif).

**ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :****ACTIVITÉ 1**

1. Placer le point O, centre du carré ABCD.
2. a. Montrer que la droite (BC) est parallèle au plan (AED).
 - b. Que peut-on dire de la droite (BC) et du plan (EFG) ?
 - c. Les plans (AED) et (EFG) sont-ils parallèles ?
3. a. En considérant le plan (ACG), montré que les droites (EG) et (DB) ne sont pas coplanaires.
 - b. Que peut-on dire des plans (ABC) et (EFG) ?

Solution

1. a. Voir figure.
2. a. ABCD est un carré, donc (BC) et (AD) sont parallèles. La droite (AD) est contenue dans le plan (AED), donc la droite (BC) est parallèle au plan (AED).

- b. De même, en raisonnant avec la droite (FG), on démontre que la droite (BC) est parallèle au plan (EFG).
- c. Non, ils sont sécants selon la droite (EH).
3. a. Le plan (ACG) contient la droite (EG). Le point d'intersection de la droite (DB) et du plan (ACG) est le point O. Or, le point O n'appartient pas à la droite (EG), donc les droites (EG) et (DB) sont non coplanaires.
- b. Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.

ACTIVITÉ 2

Répondre par « vrai », « faux » aux affirmations suivantes. Pour tous les plans (P) et (P') et toutes les droites (D) et (D') de l'espace :

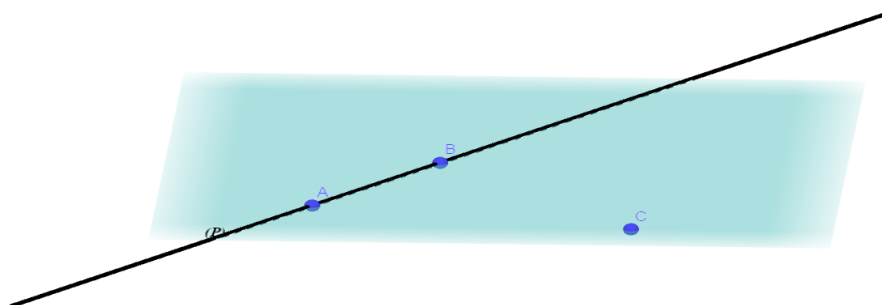
- a. Si (P) et (P') ont trois points communs distincts, alors (P) et (P') sont confondus. **Faux**
- b. Si (P) et (P') sont parallèles, alors toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre. **Faux**
- c. Si (P) et (P') sont parallèles à une même droite, alors (P) et (P') sont parallèles. **Faux**
- d. Si (D) et (D') n'ont pas de point commun, alors (D) et (D') sont strictement parallèles. **Faux**
- e. Si (D) et (D') coplanaires n'ont pas de point commun, alors (D) et (D') sont strictement parallèles. **Vrai**
- f. Si (D) et (D') sont parallèles à un même plan, alors elles sont parallèles. **Faux**

RÉSUMÉ :

1. POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET PLANS

a. Règles d'incidence

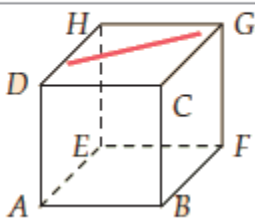
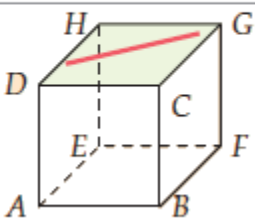
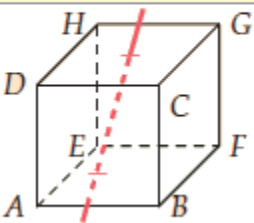
- ✓ Deux points distincts de l'espace déterminent une droite unique.
- ✓ Trois points non alignés de l'espace déterminent un plan unique.
- ✓ Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un même plan P alors, la droite (AB) est contenue dans le plan P.
- ✓ Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de la géométrie plane.



b. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit P un plan et D une droite de l'espace. Trois cas peuvent se présenter :

- ✓ la droite D est incluse dans le plan P ;
- ✓ la droite D et le plan P sont sécants;
- ✓ la droite D et le plan P n'ont aucun point commun.

(d) est strictement parallèle à (ABF)	(d) est incluse dans (HDC)	(d) est sécante à (ABC)
		

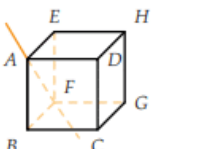
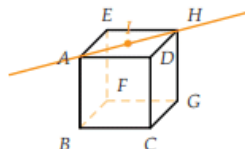
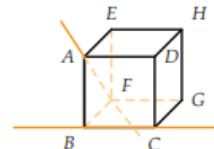
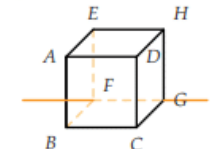
c. Positions relatives de deux droites

Droites coplanaires

Deux droites sont coplanaires lorsqu'elles sont contenues dans le même plan.

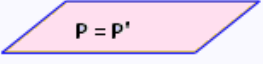
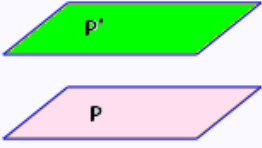
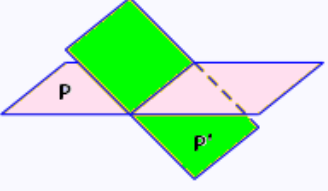
Soit D un plan et Δ deux droites de l'espace. Quatre cas peuvent se présenter :

- ✓ les droites D et Δ sont confondues;
- ✓ les droites D et Δ sont strictement parallèles;
- ✓ les droites D et Δ sont sécantes;
- ✓ les droites D et Δ ne sont pas coplanaires.

Droites coplanaires (dans un même plan)		Droites non coplanaires		
Droites sécantes	Droites strictement parallèles	Droites confondues		
 <p>(AD) et (AF) sont sécantes en A</p>	 <p>I centre de ADHE (AH) et (AI) sont confondues</p>	 <p>(BC) et (AF) sont non coplanaires</p>		
		 <p>(AD) et (FG) sont strictement parallèles</p>		

d. Positions relatives de deux plans

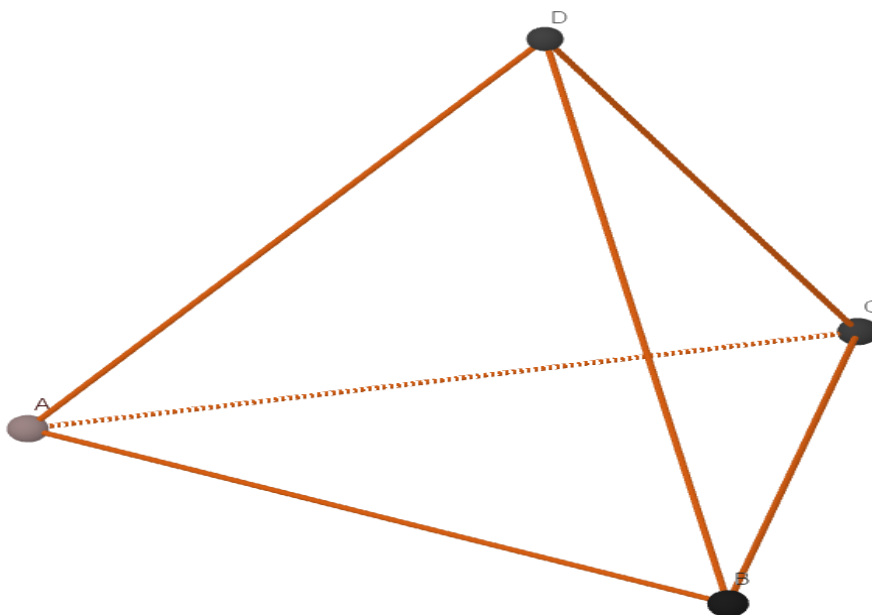
Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

plans parallèles		plans non parallèles
confondus	strictement parallèles	sécants en une droite
		

EXERCICE D'APPLICATION :

ABCD est un tétraèdre. I est un point du segment $[BC]$ distinct de B et de C. J est un point du segment $[AD]$ distinct d'A et de D. Dans chacun des cas suivants, montrer que les plans sont sécants et déterminer leur intersection.

- (DIJ) et (BCD).
- (DIJ) et (ABD).
- (DIJ) et (ABC).



LEÇON 2 :**ÉTUDE DU PARALLÉLISME****Durée : 100min****MOTIVATION :**

- Les poteaux électriques reliés par un câble sont régulièrement espacés. Elles donnent une idée de la notion physique de droites parallèles de l'espace.
- La surface d'un tableau et du mur opposé à cette surface donne ainsi une idée de la notion physique de plans de l'espace.

OBJECTIF PÉDAGOGIQUE :

Être capable de montrer que :

- Deux droites de l'espace sont parallèles ;
- Une droite et un plan de l'espace sont parallèles ;
- Deux plans de l'espace sont parallèles.

PRÉREQUIS :

En reprenant la figure du prérequis de la leçon 1 :

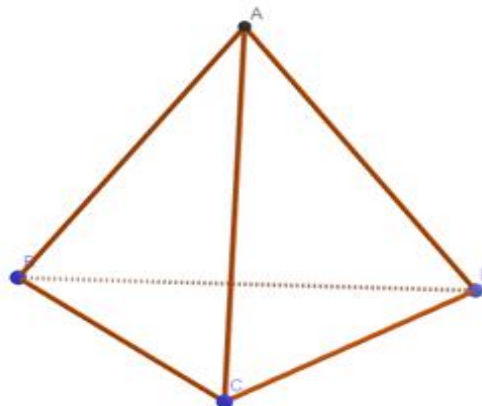
Combien de droites sont parallèles à la droite (EF) ?

Solution :

Trois droites sont parallèles à (EF) : (HG) ; (AB) et (DC).

SITUATION PROBLÈME

La toiture de la cathédrale saint Hilaire de Franceville a la forme d'un tétraèdre ABCD (voir figure ci-dessous) de sommet A. ZAMBO est un étudiant en faculté d'ingénierie, pour des raisons pratiques, il fait ses stages dans ladite cathédrale. Mais ZAMBO est confronté à une situation à laquelle tu es invité à lui aider en répondant aux questions de l'activité d'apprentissage.



Activité d'apprentissage :

L'élève prendra soin de placer les points P, Q et R tels que $p \in [AB]$ et $AP = \frac{1}{2}AB$; $Q \in [AC]$ et $AQ = \frac{2}{3}AC$; $R \in [AD]$ et $AR = \frac{3}{4}AD$.

S est le point d'intersection des droites (PQ) et (BC), T, celui des droites (QR) et (CD), et U, celui des droites (PR) et (BD).

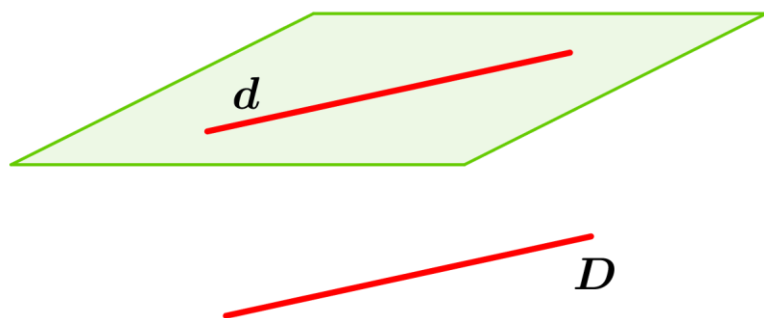
1. Les droites (AC) et (BD) sont-elles sécantes ?
2. Montrer que le point S appartient au plan (BCD) et au plan (PQR).
3. On admet que les points T et U appartiennent aux plans (BCD) et (PQR). Montrer que les points S, T et U sont alignés.

Solution d'activité d'apprentissage :

1. Non, car elles ne sont pas coplanaires :
 $(BD) \subset (BCD)$
 $(AC) \subset (BCD) = \{C\}$
 $C \subset (BD)$
2. Le point S appartient à la droite (BC), contenue dans le plan (BCD), donc S appartient au plan (BCD).
 De même, S appartient à la droite (PQ), contenue dans le plan (PQR), donc S appartient au plan (PQR).
3. Les plans (BCD) et (PQR) sont sécants (non strictement parallèles et non confondus). Ces trois points appartiennent à la droite d'intersection des plans (BCD) et (PQR). Donc les points S, T et U sont alignés.

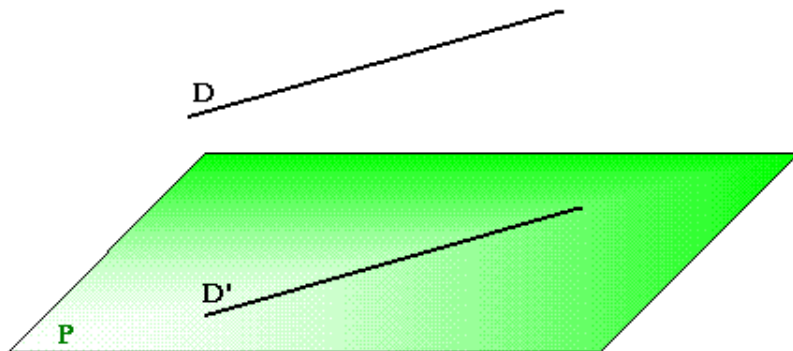
RÉSUMÉ :**1. Droites parallèles**

- ✓ Par un point A donné dans l'espace, il passe une et une seule droite D parallèle à une droite donnée d.
- ✓ Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- ✓ Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

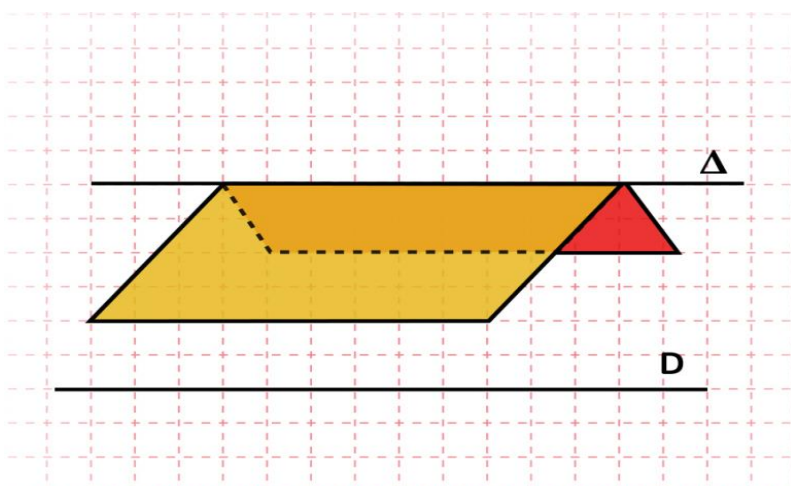
**2. Droites parallèles à un plan**

Propriété 1 :

Si une droite Δ est parallèle à une droite D incluse dans un plan P , alors Δ est parallèle à P .

**Propriété 2 :**

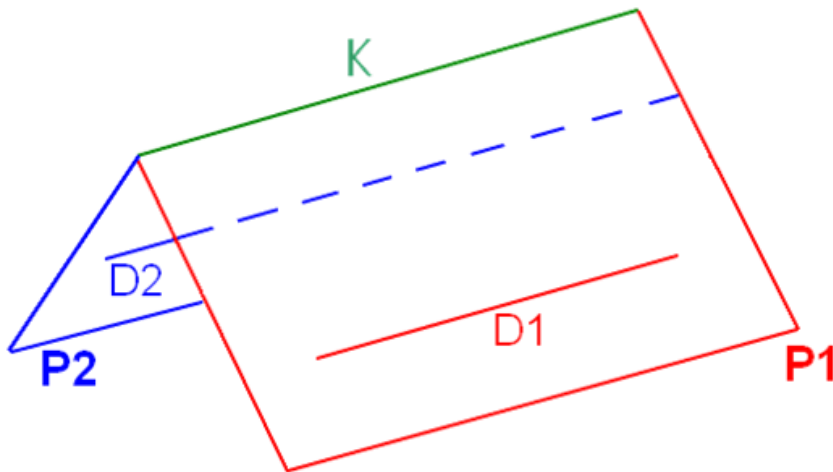
Si une droite D est parallèle à deux plans sécants P_1 et P_2 , alors elle est parallèle à leur intersection.

**THÉORÈME DU TOIT**

Soit D_1 et D_2 deux droites parallèles.

Soit P_1 un plan contenant la droite D_1 et P_2 un plan contenant la droite D_2 .

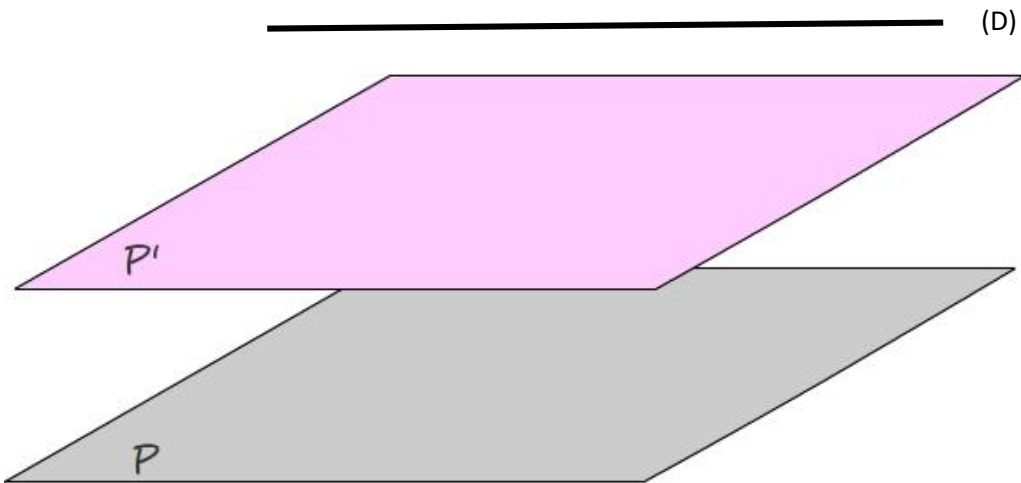
Si P_1 et P_2 sont sécants, alors leur droite d'intersection est parallèle à D_1 et D_2 .



3. Plans parallèles

Propriété 1 :

Soit P_1 et P_2 deux plans parallèles. Alors, toute droite D parallèle à P_1 est parallèle à P_2 .

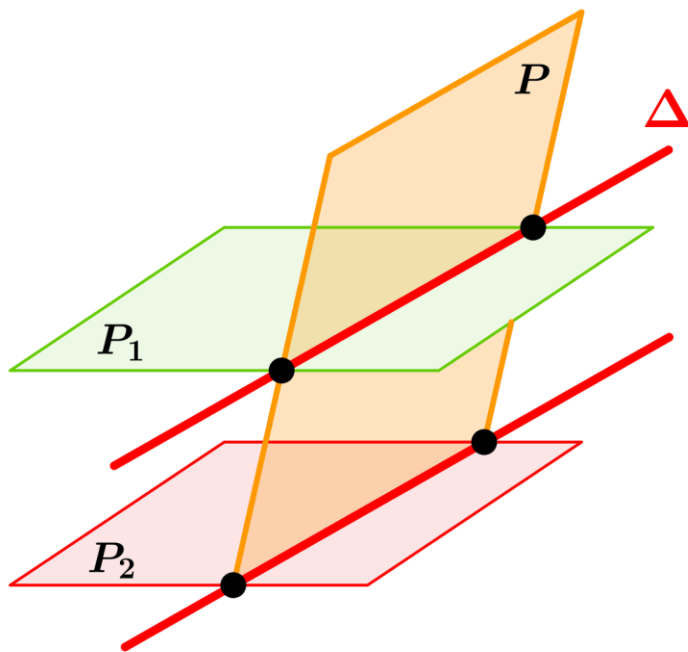


Propriété 2 :

Deux droites sécantes parallèles à un même plan P déterminent un plan Q parallèle au plan P .

Propriété 3 :

Si P_1 et P_2 sont deux plans parallèles, alors tout plan P qui coupe le plan P_1 , coupe le plan P_2 et les droites d'intersection sont parallèles.



EXERCICE D'APPLICATION

La base $ABCD$ d'un prisme droit est composée d'un carré $AA'CD$ et d'un triangle isocèle $A'BC$. I , J et K sont des points respectifs des arêtes $[AE]$, $[BF]$ et $[CG]$. Déterminer la section de ce prisme par le plan (IJK) .

MODULE 18(C-E) : ORGANISATION ET GESTION DES DONNÉES
DURÉE : 12 heures

Chapitre 13 : STATISTIQUES

MOTIVATION : Pour fonctionner efficacement dans le monde professionnel, les grandes entreprises traitent par jour d'importantes données d'informations chiffrées qu'elles stockent dans des bases de données dont la maîtrise et la manipulation nécessitent des connaissances dans la gestion des données.

LEÇON 1 : SÉRIES STATISTIQUES QUALITATIVES Durée : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- ✚ Identifier une série statistique qualitative ;
- ✚ Regrouper les données relatives à une série statistique qualitative dans un tableau statistique ;
- ✚ Déterminer la fréquence de chaque modalité ;
- ✚ Déterminer le mode d'une série statistique qualitative ;
- ✚ Représenter graphiquement une série statistique qualitative

PRÉREQUIS

Regroupement des données dans un tableau statistique et calcul de la fréquence de chaque modalité.

SITUATION PROBLÈME

Monsieur Ali enseignant dans un collège de la place, pour démontrer la notion de série qualitative décide d'effectuer une étude basée sur la région d'origine de ses différents élèves. Ainsi, après avoir interrogé les différents élèves les régions recensées sont les suivantes : Centre (CE), Nord (N), Ouest (O), Est (E), Sud (S), Nord-Ouest (NO), Sud-Ouest (SO), Littoral(L). Lors du dépouillement pour déterminer le nombre d'élèves par région les résultats sont les suivants :

CE ; CE ; S ; SO ; CE ; L ; L ; L ; E ; S ; S ; E ; O ; N ; N ; L ; CE ; L ; N ; N ; O ; O ; L ; CE ; CE ; CE ; SO ; SO ; NO ; NO ; CE ; CE ; L ; L ; CE ; L ; L ; SO ; NO ; L ; O ; S ; S ; CE ; L ; SO ; CE ; CE ; SO ; L ; L

Il leur demande de déterminer le caractère étudié ainsi que sa nature et de classer cette série dans un tableau statistique.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

On considère le tableau statistique suivant :

Régions (x_i)	CE	L	SO	NO	E	N	O	S	Total
Effectifs (n_i)	13	14	5	3	2	4	4	5	
ECC									
ECD									
Fréquence (f_i)									
Fréquence en % (f_i)									

1. Donne le caractère étudié et sa nature .
2. Reproduire et compléter le tableau ci – dessus
3. Quelle est le mode de cette série statistique ?

Résolution

1. Caractère étudié : les **régions** des élèves ; nature du caractère : **qualitative nominale**
2. Recopier et compléter le tableau

Régions (x_i)	CE	L	SO	NO	E	N	O	S	Total
Effectifs (n_i)	13	14	5	3	2	4	4	5	50
ECC	13	27	32	35	37	41	45	50	
ECD	50	37	23	18	15	13	9	5	
Fréquence (f_i)	0.26	0.28	0.1	0.06	0.04	0.08	0.08	0.1	1
Fréquence en % (f_i)	26	28	10	6	4	8	8	10	100

3. Le mode de la série statistique est : (**L**) pour la région du **Littoral**

Résumé:

- ✚ Une série statistique qualitative : est celle dont les différentes modalités ne sont pas numériques ou sont des catégories.

Exemple : le nom, la profession, la couleur

- ✚ Une série statistique qualitative a deux natures qui sont :

Qualitative nominale : lorsque les différentes modalités ne peuvent être ordonnées.

Exemple : les couleurs des yeux : vert, rouge, bleu...

- **Qualitative ordinale :** lorsque les différentes modalités peuvent être ordonnées.

Exemple : la mention des élèves dans un examen : passable, Assez-bien, bien...

- ✚ On appelle fréquence de la modalité (x_i), le quotient de son effectif (n_i) par son effectif total (N). Ainsi, si f_i représente la fréquence de la modalité « i » alors on a : $f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$ pour les fréquences en pourcentage et $f_i = \frac{n_i}{N}$ fréquences décimales ou simples

- ✚ On appelle mode d'une série statistique qualitative la modalité ayant le plus grand effectif ou la plus grande fréquence ou la bande la plus élevée ou l'angle au centre le plus grand.

NB : Une série statistique peut avoir plusieurs modes, lorsqu'elle a deux modes on dit qu'elle est **Bimodale** et lorsqu'elle a trois modes on dit qu'elle est **Tri-modale** ; ...

✚ Un **diagramme circulaire**, est un cercle sur lequel on représente les différentes modalités en fonctions de leur fréquence. Pour une modalité x_i de fréquence f_i , la mesure de l'angle correspond à α_i et est donné par la formule : $\alpha_i = \frac{f_i}{100} \times 360^\circ$. Dans d'autre cas on peut également utiliser les effectifs de la modalités $\alpha_i = \frac{n_i}{N} \times 360^\circ$

NB : Dans le cas d'un diagramme semi-circulaire on utilise **180°**

✚ La moyenne notée \bar{x} est donnée par la formule : $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_p}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p x_i$

EXERCICE D'APPLICATION

On considère le tableau suivant représentant le personnel en fonction de leur grade de travail d'une société de construction de la place.

Modalités(x_i)	Ouvriers	Techniciens	Ingénieurs	Directeurs	Total
Effectifs(n_i)	12	5	4	2	23
ECC					
ECD					
Angles					
Fréquence(f_i)					
Fréquence(f_i) en %					

1. Quelle est la population étudiée ?
2. Quelle est son caractère ?
3. Quelle est sa nature justifier votre réponse ?
4. Recopier et compléter le tableau
5. Quel est le mode de cette série statistique
6. Construire le diagramme circulaire de cette série statistique.

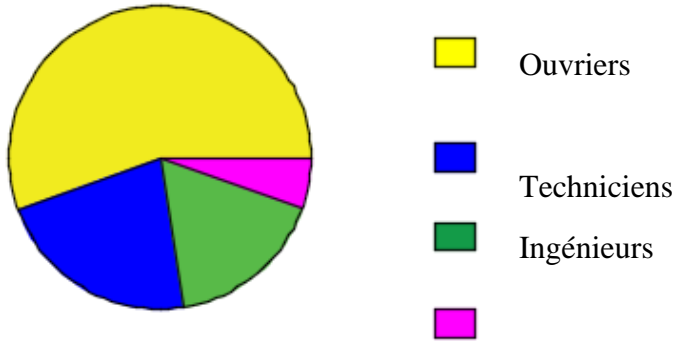
Résolution

1. Population étudiée **le personnel de la société**
2. Le caractère étudié est : **le grade de travail**
3. Nature du caractère **qualitatif ordinal** car on peut ordonner les différentes modalités.

Modalités(x_i)	Ouvriers	Techniciens	Ingénieurs	Directeurs	Total
Effectifs(n_i)	12	5	4	2	23
ECC	12	17	21	23	
ECD	23	11	6	2	
Angles	187.2	79.2	61.2	32.4	360°
Fréquence(f_i)	0.52	0.22	0.17	0.09	1
Fréquence(f_i) en %	52	22	17	9	100

4. Le mode est : **Ouvriers**

5. Construction du diagramme circulaire



LEÇON 2 : SÉRIES STATISTIQUES QUANTITATIVES DISCRETES*Durée : 100 min***OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:**

- ✚ Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants ;
- ✚ Calculer et interpréter les caractéristiques de position et de dispersion ;
- ✚ Regrouper les données représentant une série statistique discrète dans un tableau statistique ;
- ✚ Représenter à l'aide d'un diagramme une série statistique discrète.

PRÉREQUIS :

1. Calculer la moyenne et fréquence d'une série statistique discrète ;
2. Regrouper les données dans un tableau statistique

SITUATION PROBLÈME :

A la fin d'un match de football de champions League opposant deux grands clubs d'Europe, les spécialistes ont effectué une analyse sur le nombre de fois que chaque joueur a eu à tirer au goal adverse et il en ressort, le résultat suivant : 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 12 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7 ; 12.

1. Représenter ses données sous forme d'un tableau statistique
2. Calculer le nombre de tire moyen effectué durant ce match
3. Combien de joueurs y a-t-il dans ce match ?

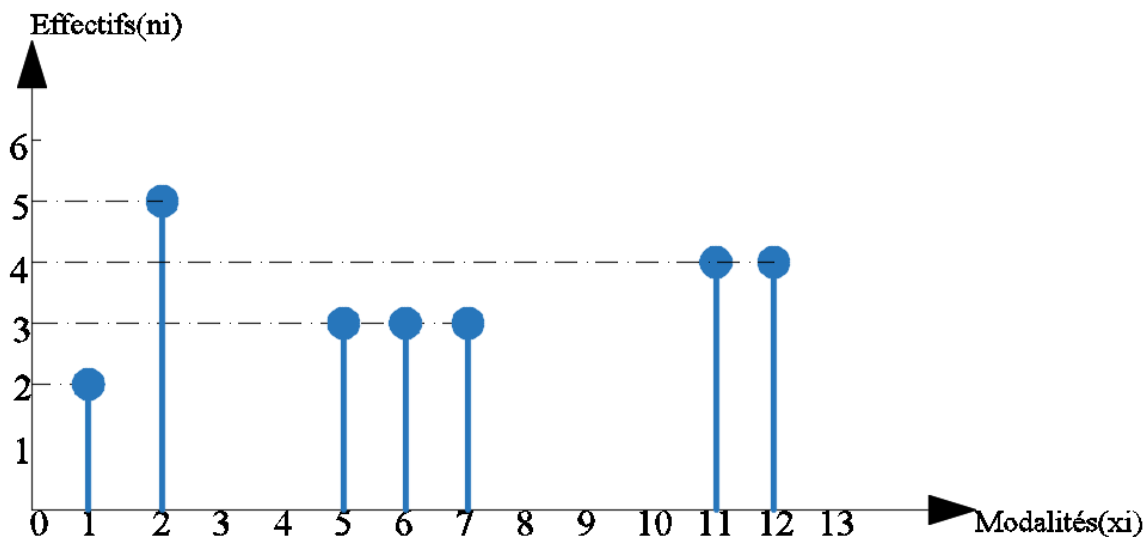
ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

On considère le tableau de statistique suivant :

$Tirs(x_i)$	1	2	5	6	7	11	12	Total
$Effectifs(n_i)$	2	5	3	3	3	4	4	
ECC								
ECD								
Angles								
$n_i x_i$								
$n_i x_i^2$								
$n_i x_i - \bar{x} $								

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessus
2. Calculer sa moyenne, son écart type, sa variance et son écart moyen
3. Représenter graphiquement cette série à l'aide d'un diagramme en bâton

Résolution



$Tirs(x_i)$	1	2	5	6	7	11	12	Total
$Effectifs(n_i)$	2	5	3	3	3	4	4	24
ECC	2	7	10	13	16	20	24	
ECD	24	22	17	14	11	8	4	
Angles	30	75	45	45	45	60	60	360
$n_i x_i$	2	10	15	18	21	44	48	158
x_i^2	1	4	25	36	49	121	144	
$n_i x_i^2$	2	20	75	108	147	484	576	1412
$n_i x_i - \bar{x} $	11.16	22.9	4.74	1.74	1.26	17.68	21.68	81.16

1. Calculons :

✚ La moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i x_i$ AN: $\bar{x} = \frac{158}{24}$ donc ce qui nous donne $\bar{x} = 6.58$

✚ La variance : $V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$ donc en AN : on aura : $V = \frac{1412}{24} - 6.58^2$;
donc notre variance donne : $V = 15.54$

✚ L'écart-type : $\sigma = \sqrt{15.54} \Rightarrow \sigma = 3.94$

✚ L'écart-moyen : $e_m = \frac{\sum_{i=1}^p n_i |x_i - \bar{x}|^2}{N}$ AN: $e_m = \frac{81.16}{24} \Rightarrow e_m = 3.38$

RESUME :

1. Définitions de quelques notions

D1 : Un caractère est dit **Quantitatif** s'il peut s'exprimer par des nombres ou si ses différentes modalités sont des valeurs numériques.

D2 : Un caractère est dit **Quantitatif Discret** si ses différentes modalités sont des valeurs numériques isolées.

Exemples : Les notes de mathématiques ; l'âge des élèves d'une classe.

D3 : l'effectif total d'une population (N) ou d'un échantillon représente l'ensemble des individus qui la compose. $N = \sum_{i=1}^p n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p$ ce qui se lit : (somme des n_i , i allant de 1 à P).

D4 : Un échantillon est une partie de la population étudiée.

D5 : Un caractère ou une variable : est une propriété commune aux individus d'une population.

2. Caractéristiques de position

Les caractéristiques de position ou indicateurs de tendance centrale d'une série statistique permettent de situer le niveau global d'une série statistique. Ainsi nous distinguons entre autres:

- **Le Mode** : c'est la valeur du caractère la plus fréquente ou c'est la modalité qui correspond à l'effectif le plus élevé de la série statistique.
- **La Médiane** : c'est le nombre réel **Me** tel que le nombre d'individus supérieur ou égale à **Me** et le nombre d'individus inférieur ou égale à **Me** soient tous deux au moins égales à $N/2$.
- **La moyenne** : si la valeur x_1 est prise n_1 fois par le caractère, la valeur x_2 est prise n_2 fois, ..., alors la moyenne est définie par la formule suivante :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_n x_n}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i x_i$$

NB : Graphiquement, pour déterminer la médiane il faut construire le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants le point de rencontre des deux est la médiane.

La moyenne ou la médiane d'une série statistique permet de la situer dans un niveau global mais, ne donne pas d'informations sur sa répartition. Ainsi, pour caractériser une série statistique en plus de ses caractéristiques de position il faut également les caractéristiques de dispersion

3. Caractéristiques de dispersion

- **L'étendue** : est l'écart entre les valeurs extrêmes de la série statistique.
- **La variance** : est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

$$V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{N}$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \text{ Formule de Koenig}$$

- **L'écart-moyen** : est le nombre réel positif noté e_m et défini par la formule suivante :

$$e_m = \frac{\sum_{i=1}^p n_i |x_i - \bar{x}|^2}{N}$$

- **L'écart-type** : est la racine carrée positive de la variance notée : $\sigma = \sqrt{V}$

4. Représentation graphique

Pour représenter graphiquement une série statistique à caractère quantitatif discret on peut la représenter à l'aide d'un diagramme à bâton ou diagramme circulaire.

Exercice d'application 1

On considère le tableau statistique suivant représentant les notes de mathématiques des élèves d'une classe de 2nde C lors de la première évaluation :

Notes(x_i)	6	8	10	12	15	18	Total
Effectifs(n_i)	1	5	3	4	2	2	

- Calculer la moyenne de cette série
- Dresser le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants
- Déterminer la médiane par deux méthodes différentes
- Calculer la variance et en déduire l'écart-type
- Dresser le diagramme en bâton de cette série statistique

Résolution de l'exercice d'application 1

- Calculons la moyenne

Notes(x_i)	6	8	10	12	15	18	Total
Effectifs(n_i)	1	5	3	4	2	4	19
ECC	1	6	9	13	15	19	
ECD	19	18	13	10	6	4	
$n_i x_i$	6	40	30	48	30	72	226
x_i^2	36	64	100	144	225	324	
$n_i x_i^2$	36	320	300	576	450	1296	2918

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i x_i = \frac{226}{19} = 11,89.$$

- Polygone des effectifs cumulés croissant et décroissant

Exercice d'application 2

On considère le tableau statistique suivant représentant les notes de mathématiques des élèves d'une classe de 2nde C lors de la première évaluation :

Notes(x_i)	6	8	10	12	15	18	Total
Effectifs(n_i)	1	5	3	4	2	2	

- Calculer la moyenne de cette série
- Dresser le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants
- Déterminer la médiane par deux méthodes différentes
- Calculer la variance et en déduire l'écart-type
- Dresser le diagramme en bâton de cette série statistique

Résolution de l'exercice d'application 2

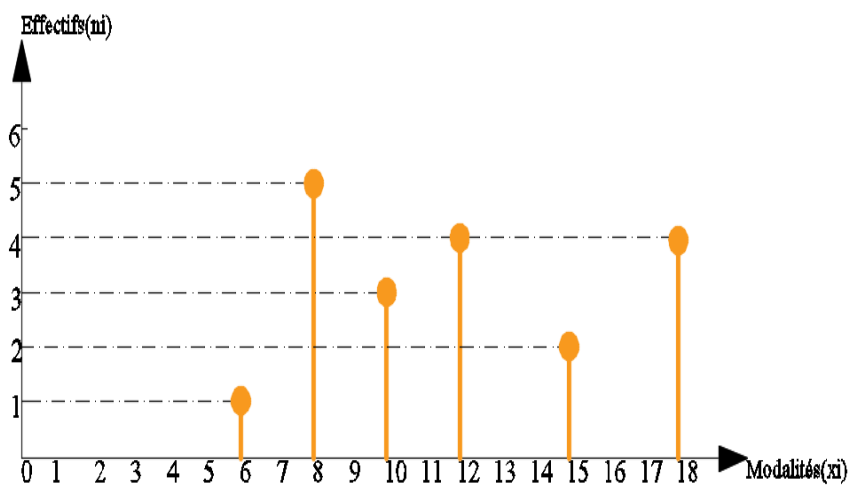
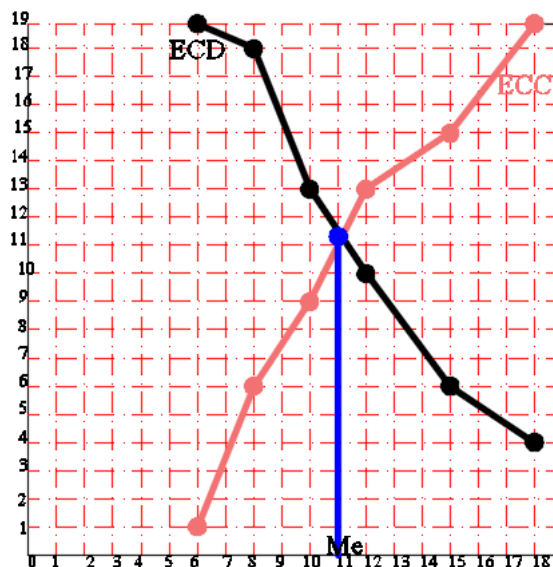
- Calculons la moyenne

Notes(x_i)	6	8	10	12	15	18	Total
Effectifs(n_i)	1	5	3	4	2	4	19
ECC	1	6	9	13	15	19	
ECD	19	18	13	10	6	4	
$n_i x_i$	6	40	30	48	30	72	226
x_i^2	36	64	100	144	225	324	
$n_i x_i^2$	36	320	300	576	450	1296	2918

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i x_i \\ &= \frac{226}{19} \\ &= 11,89.\end{aligned}$$

Donc, la moyenne, $\bar{x} = 11,89$.

d. Polygone des effectifs cumulés croissant et décroissant



J. Diagramme en bâton de cette série statistique

e. La médiane de façons différentes :

- Premièrement, nous l'avons trouvé graphiquement en faisant la rencontre entre le polygone des effectifs cumulés croissant et décroissant qui nous a donné : **Me = 11**
- Deuxièmement, nous savons que la médiane divise la série en deux parts égales donc Me est compris entre 10 et 12 donc $Me = \frac{10+12}{2} \Rightarrow \mathbf{Me = 11}$

f. Calculons la variance et déduisons l'écart-type

$$\begin{aligned}V &= \frac{\sum_{i=1}^p n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \\ &= \frac{2918}{19} - 11,89^2 \\ &= 12,21 ;\end{aligned}$$

donc, l'écart-type : $\sigma = \sqrt{12,21} \approx 3,49$.

LEÇON 3 : SÉRIES STATISTIQUES QUANTITATIVES Durée : 100min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

- ✚ Collecter et organiser dans des intervalles des données d'une série statistique à caractère quantitatif.
- ✚ Calculer l'amplitude, le centre et la densité d'une série statistique.
- ✚ Calculer et interpréter les caractéristiques de position et de dispersion.
- ✚ Représenter graphiquement une série quantitative continue par un histogramme.

PRÉREQUIS

- 1- Regrouper les données dans un tableau statistique
- 2- Calculer la moyenne, les fréquences et effectifs cumulés

SITUATION DE VIE

On n'a interrogé les élèves de 2nde C sur leur taille en centimètre respective pour illustrer la notion de série quantitative continue. Les résultats sont les suivants : 139 ; 146 ; 167 ; 145 ; 164 ; 157 ; 127 ; 173 ; 146 ; 150 ; 140 ; 137 ; 143 ; 134 ; 175 ; 146 ; 143 ; 144 ; 137 ; 164 ; 134 ; 150 ; 125 ; 149 ; 120 ; 143 ; 157 ; 150 ; 152 ; 145 ; 139 ; 146 ; 157 ; 144 ; 165 ; 134 ; 129 ; 135 ; 143 ; 144 ; 145 ; 140 ; 139 ; 152 ; 155 ; 134 ; 131 ; 161 ; 133 ; 147.

Etablir un relevé des tailles en regroupant celles-ci en 10 classes d'amplitude 6

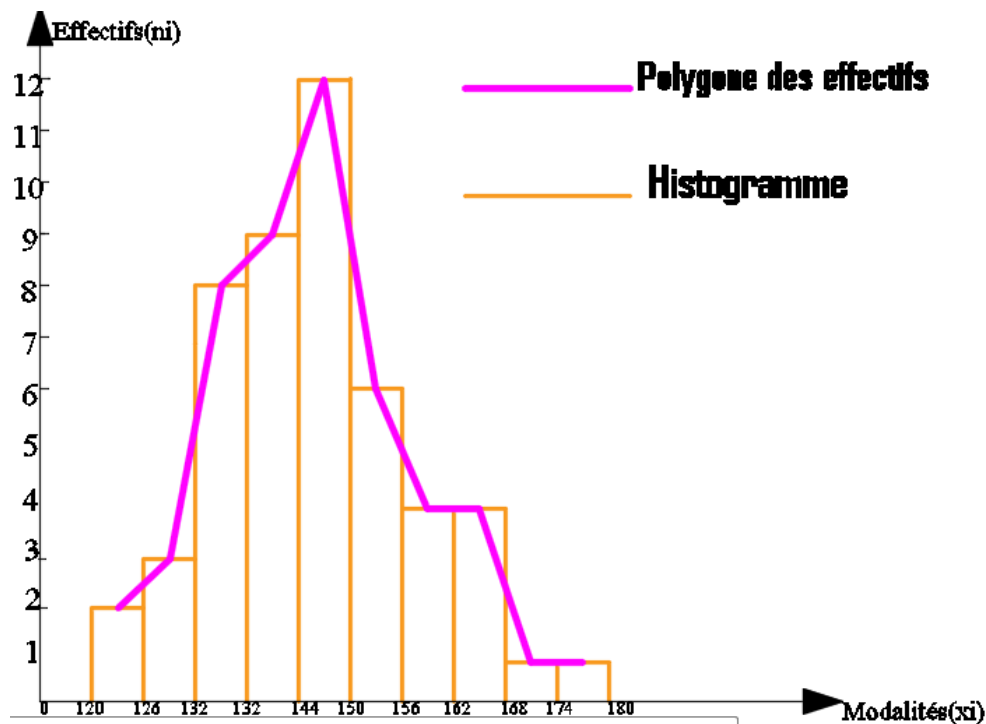
Activité d'apprentissage :

On considère le tableau statistique suivant :

Tailles(x_i)	Effectifs(n_i)	Centre(c_i)	C_i^2	$n_i C_i$	$n_i C_i^2$	Fréquence(f_i)
[120; 126[2					
[126; 132[3					
[132; 138[8					
[138; 144[9					
[144; 150[12					
[150; 156[6					
[156; 162[4					
[162; 168[4					
[168; 174[1					
[174; 180[1					
Total	50					

1. Recopier et compléter le tableau
2. Calculer sa moyenne, variance et son écart-type

3. Représenter graphiquement cette série à l'aide d'un histogramme et déterminer son polygone des effectifs



4. Déterminer sa classe modale et son mode

Résolution

1. Recopier et compléter le tableau

Tailles(x_i)	Effectifs(n_i)	Centre(c_i)	C_i^2	$n_i C_i$	$n_i C_i^2$	Fréquence(f_i)
[120; 126[2	123	15 129	246	30 258	4
[126; 132[3	129	16 641	387	49 923	6
[132; 138[8	135	18 225	1080	145 800	16
[138; 144[9	141	19 881	1269	178 929	18
[144; 150[12	147	21 609	1764	259 308	24
[150; 156[6	153	23 409	918	140 454	12
[156; 162[4	159	25 281	636	101 124	8
[162; 168[4	165	27 225	660	108 900	8
[168; 174[1	171	29 241	171	29 241	2
[174; 180[1	177	31 329	177	31 329	2
Total	50			7 308	1 075 226	100

2. Calculons :

- **La moyenne** : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i c_i = \frac{7\,308}{50} \Rightarrow \bar{x} = 146.16\text{cm}$
- **La variance** : $V = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i c_i^2 \right) - \bar{x}^2 = \frac{1}{N} (1\,075\,226) - (146.16)^2 \Rightarrow V = 142.5744$
- **L'écart-type** : $\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = \sqrt{142.5744} \Rightarrow \sigma = 11.94\text{cm}$

3. Représentation graphique

4. La classe modale est : [144; 150[; le mode de cette série statistique est 147.

Résumé

1- Définition et Notation

D1- Un caractère est dit **Quantitatif Continu** si ses différentes modalités sont des classes.

D2- une classe est un intervalle semi-fermé $[a ; b [$ (où a et b sont des nombres réels)

D3- le centre de la classe $[a ; b [$ noté c_i est le nombre réel $c_i = \frac{a+b}{2}$

D4- l'amplitude de la classe $[a ; b [$ notée a_i est le nombre $a_i = b - a$

D5- la densité d'une classe est le quotient de son effectif f_i par son amplitude. Elle est notée d_i et on a $d_i = \frac{f_i}{a_i}$.

2- Caractéristiques de position

✚ **La classe modale** : est la classe qui correspond à l'effectif le plus élevé de la série, si les amplitudes des classes sont identiques. Dans le cas où les amplitudes des classes ne sont pas identiques, la **classe modale** est la classe de densité maximale.

✚ **Le mode** : est le centre de la classe modale.

✚ **La Moyenne** : de la série statistique continue est le nombre réel \bar{x} défini par :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i c_i$$

3- Caractéristique de dispersion

✚ **L'écart-moyen** est le nom réel noté e_m et défini par $e_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i |c_i - \bar{x}|$.

✚ **La variance** est le nombre réel positif noté V et défini par $V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (c_i - \bar{x})^2$.

Exercice : Démontrer que la variance V peut être définie par $V = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i c_i^2 \right) - \bar{x}^2$ (formule de KÖNIG).

✚ **L'écart-type** est le nombre réel noté σ et défini par $\sigma = \sqrt{V}$.

4- Représentation graphique

On peut représenter une série statistique à caractère continu par un histogramme qui est un ensemble de rectangle dont la base est l'amplitude de la classe correspondante.

✚ Si les amplitudes des classes sont identiques, la hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif (où la fréquence) de la classe correspondante.

✚ Si les amplitudes des classes ne sont pas identiques, la hauteur de chaque rectangle est proportionnelle à la densité de la classe correspondante.

Exercice d'application

On considère la série dont les effectifs cumulés décroissants sont donnés dans le tableau suivant :

Classes	$[0 ; 4[$	$[4 ; 6[$	$[6 ; 8[$	$[8 ; 10[$
ECD	60	45	24	6

- 1- Dresser le tableau des effectifs de cette série statistique.
- 2- Déterminer la classe modale et le mode.
- 3- Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

Correction

1- Dressons le tableau des effectifs

Classes	[0 ;4[[4 ;6[[6 ;8[[8 ;10[TOTAL
Effectifs	6	18	21	15	60
ECD	60	45	24	6	

2- La classe modale est **[6 ;8[** et le mode est **7**

3- Calculons la moyenne, la variance et l'écart-type

Classes (ci)	[0 ;4[[4 ;6[[6 ;8[[8 ;10[TOTAL
Effectifs(ni)	6	18	21	15	60
ni×ci	12	60	147	135	354
ni×ci ²	24	450	1029	1215	2718

- La moyenne : $\bar{x} = \frac{354}{60} \Rightarrow \bar{x} = 5,9$
- La variance : $V = 45,3 - 5,9^2 \Rightarrow V = 10,49$
- L'écart-type : $\sigma = 3,24$