

Terminale Spécialité maths

‡ Devoir maison N°3 ‡

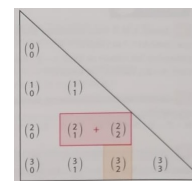
Lundi 09 novembre 2020 à rendre le 23 novembre 2020

PROF : MBA OBIANG

PARTIE A

Le triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est une présentation des nombres de combinaisons de k éléments parmi n sous la forme d'un triangle : pour deux entiers naturels i et j avec $i \geq j \geq 0$, le nombre de la $(i + 1)$ -ième ligne et de la $(j + 1)$ -ième colonne vaut $\binom{i}{j}$.



Ce triangle peut être construit de proche en proche grâce à la relation de Pascal : un coefficient dans ce tableau est égal à la somme du coefficient au-dessus de lui et du coefficient en haut à gauche (voir illustration ci-contre).

Questions préliminaires :

1. Que valent les coefficients de la première colonne ? De la diagonale ?
2. En utilisant la relation de Pascal, construire « à la main » la cinquième ligne du triangle de Pascal.

Objectif

Construire le triangle de Pascal de proche en proche en utilisant deux méthodes.

Méthode 1 : Utilisation d'un tableur

1. Recopier le tableau ci-dessous et compléter la colonne **C**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			k								
2			0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	n	0	1								
4		1	1	1							
5		2									
6		3									
7		4									
8		5									
9		6									
10		7									
11		8									

2. Quelle formule doit-on saisir puis glisser vers le bas dans la cellule **D5** ?
3. Compléter le tableau en saisissant les formules manquantes.

4. Dans la colonne **L**, afficher pour chaque ligne du tableau la somme des coefficients sur cette ligne. Quel résultat du cours retrouve-t-on ?

Méthode 2 : Programme Python

On souhaite écrire une fonction en Python qui renvoie, pour un entier naturel n donné, les n premières lignes du triangle de Pascal.

La ligne 2 sert à construire un tableau de n lignes et n colonnes rempli de 0.

```
1 def pascal(n) : :
2     l = [ [0]*n for x in range(n)]
3     for i in range(n) :
4         for j in range(n) :
5             if j==0 :
6                 l[i][j]= ...
7             elif ... :
8                 l[i][j]= ...
9             elif ... :
10                l[i][j]= ...
11            return (l)
```

1. Compléter la ligne 6 du programme.
2. Un autre cas doit être traité aux lignes 7 et 8. Lequel et de quelle manière ?
3. En utilisant la relation de Pascal, compléter la ligne 10.
4. Pour n fixé, vérifier que l'on retrouve bien l'identité suivante :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

PARTIE B

Les triangles de Sierpinski

Waclaw SIERPINSKI (photo ci-contre) était un mathématicien et enseignant polonais. Il est né en 1882 et mort en 1969. Il a apporté plusieurs contributions en mathématiques notamment sur l'axiome du choix.



a étant un réel strictement positif, on considère un triangle ABC équilatéral tel que $AB = a$.

On réalise les constructions suivantes :

1. **Etape 1** : On divise ce triangle en quatre triangles équilatéraux obtenus en joignant les milieux des côtés et on numérote «1» le triangle central.
2. **Etape 2** : Chacun des trois autres triangles non numérotés est alors divisé en suivant la règle de l'étape 1. On numérote leurs triangles centraux «2».
3. On réitère le processus en incrémentant les numéros des triangles centraux obtenus.

Après trois étapes, on obtient la figure ci-dessous.

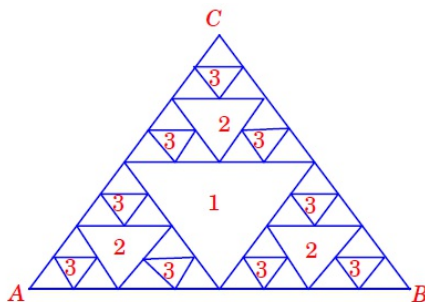


Figure 1. Etape 3

On se demande si le triangle ABC sera complètement recouvert par les triangles numérotés si l'on continue indéfiniment la construction.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note :

m_n le nombre de triangles numérotés n .

a_n l'aire d'un triangle numéroté n .

u_n l'aire totale des triangles numérotés de 1 à n après n étapes.

1. Montrer que pour tout entier n non nul :

$$m_{n+1} = 3m_n \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$$

2. A l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice, calculer les 20 premiers termes de la suite u . Quelles conjectures peut-on faire ?
3. Interpréter géométriquement $u_{n+1} - u_n$ et démontrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

4. Pour tout entier $n \geq 2$, démontrer par récurrence que : $u_n = u_1 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

5. Conclure.
6. On note maintenant p_n la somme des périmètres des triangles numérotés n et P_n la somme des périmètres de tous les triangles numérotés de 1 à n .

Calculer P_n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

L'objet que l'on obtient, inspiré des triangles de Sierpinski est un objet fractal, ayant notamment une aire finie pour un périmètre infini tout en étant borné.