Révisions baccalauréat 2018

Épreuve de mathématiques

Série C

Proposé par Gildas MBA OBIANG

Exercice 1 : Arithmétique (4 pts)

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $7^{4n} - 1$ est divisible par 5.
   (b) Déterminer pour tout entier $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, le reste de la division modulo 5 de 7^{4n}
   (c) En déduire que l'entier $7^{2019} + 2 \times 49^{2018}$ est divisible par 5.
2. (a) Déterminer que , pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier q ,on a : $1 - q^{n+1} = (1-q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$.
   (b) On pose , pour tout $n \in \mathbb{N}$; $S_n = \sum_{k=0}^{n} 7^k$,montrer que S_n divise $7^{4n} - 1$.
3. (a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le chiffre des unités de 7^{4n+1}.
   (b) Soit x un entier , montrer l'équivalence :
   $x \equiv 6[10]$ si et seulement si $x \equiv 1[10]$ ou $x \equiv 6[10]$.
   (c) Montrer que S_{100} est un entier impair .
   (d) En déduire le chiffre des unités de S_{100} .

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (5 pts)

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On désigne par I , J et K les milieux respectifs de [BC] , [AE] et [CD]. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$

1. (a) Montrer que $\overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$
   (b) Calculer le volume du tétraèdre JGKI.
2. (a) vérifier qu'une équation cartésienne du plan (GIK) est $2x + 2y - z - 3 = 0$.
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (CJ).
3. La droite (CJ) coupe le plan (GIK) en un point H'.
   (a) vérifier que la droite (CJ) est perpendiculaire au plan (GIK).
   (b) Déterminer les cordonnées du point H'.
4. Soit S la sphère passant par C et tangente au plan (GIK) en H'.
   (a) Montrer que S est de centre $\Omega\left(\frac{8}{9} ; \frac{8}{9} ; \frac{1}{18}\right)$ et de rayon $R = \frac{3}{18}$
   (b) Montrer que le plan (ABC) coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le rayon r .
   (c) Soit h l'homothétie de centre C qui transforme J en Ω . Soit Ω' le centre du cercle $\mathscr{C}$.
   Donner l'expression analytique de h puis vérifier que $h(A) = \Omega'$.

PROBLÈME : Étude d'une fonction définie par une intégrale (11 pts)

PARTIE A : Étude de la parité de la fonction f

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ .On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{f(t)}{1+t^2} dx$.

1. (a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{1 + x^2}$.

   (b) Calculer $\mathrm{F}(0)$ .En déduire que si f est impaire alors F est nulle.

   (c) Montrer que si f est paire alors ,pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $F(x) = 2\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dx$.

2. soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 3}{1 + x^2}$.

   (a) Étudier les variations de la fonctionne g puis tracé sa courbe ζ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O} ; \vec{\mathrm{i}} ; \vec{\mathrm{j}})$.

   (b) En utilisant la question 1 , montrer que $\displaystyle\int_{-x}^{x} g(t)dt = 6x$.

   (c) Calculer , en cm^2 ,l'aire de la partie du plan délimitée par ζ l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

PARTIE B :Étude d'une suite

Soit G la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right[$ par $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2}$.

1. (a) Montrer que G est d dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right[$ et calculer $\mathrm{G}'(x)$.

   (b) Calculer $\mathrm{G}(0)$ et en déduire $\mathrm{G}\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

2. On définie la suite (u_n) par : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2}$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{t}^{2n}}{1+\mathrm{t}^2} \mathrm{dt}$.

   (a) montrer que pour tout $n \geqslant 1, 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

   (b) Montrer que $u_{n-1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

   (c) calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k} x^{2k} = \frac{1 + (-1)^{n-1} x^{2n}}{1 + x^2}$.

   (b) En déduire que $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n-2}}{1 + x^2} dx$

   (c) Exprimer alors v_n en fonction de u_{n+1} et u_0 puis en déduire

   (v_n) est convergente et calculer sa limite.

Fin de l'épreuve

ANNEXE figure de l'exercice 2