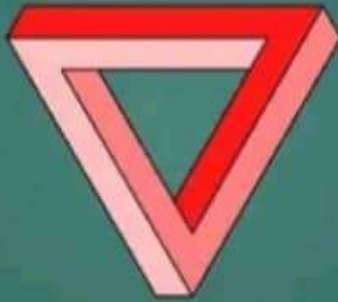


MATHÉMATIQUES T.C & D



Prénum et A1



edby0h

LES SUITES NUMERIQUES

I) RAPPELLES

1) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

Activité : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

3- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$

Solution : 1) on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Pour $n=0$ on a : $u_1 = \sqrt{u_0 + 2}$ donc $u_1 = \sqrt{2}$

Pour $n=1$ on a : $u_2 = \sqrt{u_1 + 2}$ donc $u_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$

Pour $n=2$ on a : $u_3 = \sqrt{u_2 + 2}$ donc

$$u_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}$$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

1 étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0$.

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

Supposons que : $0 \leq u_n$

3 étapes : Montrons alors que : $0 \leq u_{n+1} ??$

Or on a : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \geq 0$

donc : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$

1 étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$u_0 = 0$ donc $u_0 \leq 2$.

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

Supposons que : $u_n \leq 2$

3 étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq 2 ??$

on a : $u_n \leq 2$ donc $u_n + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4}$
 $\Rightarrow u_{n+1} \leq 2$

donc : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 0
car $u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0
car $0 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car :
 $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$

Définition : Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in I : u_n \leq M$

• On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in I : m \leq u_n$

• On dit que la suite $((u_n)_{n \in I})$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Exemple : soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0

2) Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3) Que peut-on déduire ?

Solution : 1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq v_n ??$

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (\text{Le conjugué})$$

$$v_n = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq 0$$

Donc : $0 \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $(v_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0

2) Montrons que : $v_n \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

On a : $n \geq 1$ et $n+1 \geq 2$ donc $\sqrt{n} \geq 1$ et $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{2}$

Donc : $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1 + \sqrt{2}$ donc

$$-(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \leq -1 - \sqrt{2}$$

donc $2 - (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \leq 1 - \sqrt{2}$ et puisque : $1 - \sqrt{2} < 0$

$$\text{Donc } v_n - \frac{1}{2} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Donc } v_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3) Donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est bornée car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < v_n < \frac{1}{2}$$

Exercice1 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie

$$\text{par : } u_n = \frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin \sqrt{n} \leq 1$$

$$\text{donc : } 1 \leq 2 + \cos n \leq 3 \quad \text{et} \quad -1 \leq -\sin \sqrt{n} \leq 1$$

$$\text{donc : } 1 \leq 2 + \cos n \leq 3 \quad \text{et} \quad 2 \leq 3 - \sin \sqrt{n} \leq 4$$

$$\text{donc : } 1 \leq 2 + \cos n \leq 3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \sin \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{donc : } \frac{1}{4} \leq \frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{cad : } \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2} \quad \text{donc : } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

Propriété : Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :

$$\forall n \in I \quad |u_n| \leq M$$

Exemple : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie

$$\text{par : } u_n = (-1)^n \sin \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_n| = |(-1)^n \sin \sqrt{n}| = |(-1)^n| |\sin \sqrt{n}| = |\sin \sqrt{n}| \leq 1$$

$$\text{donc } |u_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donc : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

2) Monotonie d'une suite.

Activité2 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer par récurrence que $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solutions : 1 étapes : on a $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{2}$

Pour $n=0$ nous avons $u_0 = 1$ donc $u_0 \leq u_1$.

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

2 étapes : Supposons que : $u_n \leq u_{n+1}$

3 étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq u_{n+2} \quad ??$

$$\text{on a : } u_n \leq u_{n+1} \quad \text{donc } u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2$$

$$\text{donc : } \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2} \quad \text{donc } u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

$$\text{Par suite : } \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

Définition : Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique

On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est croissante si :

$$\forall n \in I \quad \forall m \in I : m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante si :

$$\forall n \in I \quad \forall m \in I : m \leq n \Rightarrow u_m \geq u_n$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante sur I .

Théorème : Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

• La suite $(u_n)_{n \in I}$ est croissante si et seulement si :

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$$

• La suite $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante si et

seulement si : $\forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$

Exemple1 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Solutions :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+1}}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0 \quad \text{Donc : } u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exemple2 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Solutions : $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

Et on a : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k'=2}^{n+2} \frac{1}{n+k'}$ on pose $k' = k+1$

Et puisque k' est un variable on peut l'appeler k'

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k'=2}^{n+2} \frac{1}{n+k'} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k}$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice 2: soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente

définie par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 4

3) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Solutions : 1) Montrons que $2 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$????

1étapes : $n=0$ on a : $2 \leq u_0$ car $2 < 3$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $2 \leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $2 \leq u_{n+1}$??

$$u_{n+1} - 2 = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 2 = \frac{8(u_n - 1) - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{6u_n - 12}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - 2 = \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} \quad \text{et puisque on a : } 2 \leq u_n$$

Donc : $u_n - 2 \geq 0$ et $u_n + 2 > 0$

Donc : $u_{n+1} - 2 \geq 0$

donc $2 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrons que $u_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$????

1étapes : $n=0$ on a : $u_0 \leq 4$ car $3 < 4$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $u_n \leq 4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq 4$??

$$4 - u_{n+1} = 4 - \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} = \frac{4(u_n + 2) - 8(u_n - 1)}{u_n + 2} = \frac{-4u_n + 16}{u_n + 2}$$

$$4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \quad \text{et puisque on a :}$$

$$u_n \leq 4$$

Donc : $4 - u_n \geq 0$ et $u_n + 2 > 0$

Donc $u_{n+1} \leq 4$ par suite $u_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$3) u_{n+1} - u_n = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - u_n = \frac{8(u_n - 1) - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2}$$

On va factoriser $-u_n^2 + 6u_n - 8$: $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$

$$x_1 = \frac{-6+2}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6-2}{-2} = 4 \quad \text{donc :}$$

$$-u_n^2 + 6u_n - 8 = -(u_n - 2)(u_n - 4)$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

Or on a : $u_n \geq 2$ et $u_n \leq 4$

Donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} \geq 0$ donc la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

3) Suite arithmétique et géométrique

Définition1 : On appelle suite **arithmétique** toute

suite $(u_n)_{n \in I}$ définie par son premier terme et par

la relation récurrente : $\forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n + r$

Où r est un réel fixe. Le réel r s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_{n \in I}$.

Propriétés : d'une suite arithmétique.

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes.

$$1) u_n = u_p + (n - p)r \quad \forall n \in I$$

$$2) s_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)}{2} (u_p + u_n)$$

Définition2 : On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in I$ où q est un réel fixe. Le réel q s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_n$.

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

Propriétés : d'une suite géométrique

Si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors :

$$1) u_n = q^{n-p} u_p \quad \forall n \in I$$

$$2) s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

$$\text{Si } q = 1 \text{ alors : } s_n = (n - p + 1)u_p$$

$$\text{Si } q \neq 1 \text{ alors : } s_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Exemple1 : Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répondit-il, donne-moi seulement 1 centime le 1^{er} juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne moi la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Solution : Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est : $u_1 = 1$ et la raison $q = 2$

$u_2 = 2$ (La somme à donner le 2 iem jour)

$u_{20} = \dots$ (La somme à donner le 20^e jour)

$$\text{Donc : } u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288 \text{ Centimes}$$

La somme totale à payer serait :

$$s_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{20} = u_1 \frac{1 - 2^{20-1+1}}{1 - 2}$$

$$s_{20} = 2^{20} - 1 = 1048575$$

centimes $s_{20} \approx 1 \text{ million } 500 \text{ dh}$ Joli voyage !

Exemple2 : calculer en fonction de n la somme suivante :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{Solutions : } 1) \text{ on pose : } u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison

$$q = \frac{1}{2} \text{ Car : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \text{ Donc :}$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Exercice3 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \\ u_0 = 2; u_1 = \frac{4}{9} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et on considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1) \text{ Montrer que } u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) écrire v_n et u_n en fonction de n

c) calculer la somme : $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

Solution :1) montrons par récurrence que

$$u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 \text{étapes : } n=0 \quad u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

$$2 \text{étapes : Supposons que: } u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$$

3étapes : Montrons alors que :

$$u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}} ??$$

$$\text{on a: } u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \text{ donc } u_n = 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)$$

$$\text{et on a : } u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n)$$

$$u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(12u_{n+1} - 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)\right)$$

$$u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(3u_{n+1} + \frac{2}{3^n}\right) \text{ donc } u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+2}}$$

$$\text{Par suite : } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$$

$$2) \text{a) on a: } v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$\text{Donc : } v_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{9}\left(u_n - \frac{1}{3^n}\right) \text{ donc } v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{1}{9} \text{ et de premier terme } v_0 = 1$$

2) b) écrire v_n et u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{1}{9} \text{ et de premier terme } v_0 = 1$$

$$\text{Donc : } v_n = v_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Puisque : } u_n = v_n + \frac{1}{3^n} \text{ donc } u_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$2) \text{ c) } s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} ??$$

$$u_n = v_n + w_n \text{ avec } w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

on a $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites

géométriques de raison $q = \frac{1}{9}$ et $q' = \frac{1}{3}$ donc

$$\text{donc } s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + \sum_{k=0}^{n-1} w_k$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \frac{1}{9}} + w_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{21}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Exercice4 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in]-1; 0[\end{cases}$$

1) Montrer que $-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Et en déduire que : } u_n \geq \frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0 + 2}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solution : 1) montrons par récurrence que

$$-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 \text{étapes : } n=0 \text{ on a : } -1 < u_0 < 0$$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

$$2 \text{étapes : Supposons que: } -1 < u_n < 0$$

$$3 \text{étapes : Montrons alors que : } -1 < u_{n+1} < 0 ??$$

$$\text{On a : } -1 < u_n < 0 \text{ donc : } 1 < u_n + 2 < 2$$

$$\text{donc : } 1 < \sqrt{u_n + 2} < \sqrt{2} \text{ donc : } \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{u_n + 2}} < 1$$

$$\text{et puisque : } 0 < -u_n < 1 \text{ alors : } 0 < \frac{-u_n}{\sqrt{u_n + 2}} < 1$$

donc : $-1 < \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} < 0$ donc $-1 < u_{n+1} < 0$

d'où : $-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} (1 - \sqrt{u_n+2})$$

et puisque : $1 - \sqrt{u_n+2} < 0$ et $\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} < 0$

alors : $u_{n+1} - u_n > 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrons que $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geq u_0$ car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante

$$\text{Donc : } \sqrt{2+u_n} \geq \sqrt{2+u_0} \text{ cad } \frac{1}{\sqrt{2+u_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2+u_0}}$$

et puisque : $u_n < 0$ alors : $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

$$\text{Donc : } u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 > u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

$$\text{Donc : } 0 \leq -u_{n+1} \leq \frac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$$

En donnant à n des valeurs on trouve :

$$0 \leq -u_1 \leq \frac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}$$

$$0 \leq -u_2 \leq \frac{-u_1}{\sqrt{2+u_1}}$$

.....

$$0 \leq -u_{n-1} \leq \frac{-u_{n-2}}{\sqrt{2+u_0}}$$

$$0 \leq -u_n \leq \frac{-u_{n-1}}{\sqrt{2+u_0}}$$

Le produit des inégalités donne :

$$0 < -u_n \leq \frac{-u_0}{(\sqrt{u_0+2})^n}$$

$$\text{Donc : } u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0+2})^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :

$$1) v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{u_n}{3-u_n}} = 1 - \frac{6-2u_n}{u_n}$$

$$v_{n+1} = 3 \left(1 - \frac{2}{u_n} \right) \text{ donc } v_{n+1} = 3v_n$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

$$\text{Donc : } v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3 \times 3^n = -3^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Puisque : } v_n = 1 - \frac{2}{u_n} \text{ donc } u_n = \frac{2}{1-v_n} \text{ donc } u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}$$

II) LIMITE D'UNE SUITE

1) Activités :

Activité1 : soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = 1 + n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) à la calculatrice, conjecturer une "limite" pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$

(b) que devient la valeur de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Que dit-on alors ? (En terme de limite)

Remarques : $u_n = 1 + n^2$

n	1	2	10	100	1000	10000
u_n	2	5	101	10001	1000001	100000001

On note alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang

Activité2 : soit la suite (u_n) définie : $u_n = 1 - \sqrt{n}$ pour $n \geq 0$

(a) à la calculatrice, conjecturer une "limite" pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$

(b) que devient la valeur de u_n lorsque n tend

vers $+\infty$?

Que dit-on alors ? (En terme de limite)

Remarques : $u_n = 1 - \sqrt{n}$

n	1	2	10	100	1000	10000
u_n	0	$\simeq -0,4$	$\simeq -2,2$	-9	$\simeq -30,7$	-99

On note alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont aussi petits que l'on veut à partir d'un certain rang

Activité3 : soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

pour $n \geq 1$

(a) à la calculatrice, conjecturer une "valeur limite" l pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$

(b) que devient la distance entre u_n et 1 lorsque n tend vers $+\infty$?

Que dit-on alors ? (En terme de limite)

on dit : que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite 1

Remarques : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

n	1	2	10	100	1000	10000
u_n	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
$ u_n - 1 $	1	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001

La distance entre u_n est 1 "se rapproche" de 0 lorsque n tend vers $+\infty$: on note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Remarque : L'expression « quand n tend vers $+\infty$ » est superflu car l'étude de la limite d'une suite c'est toujours quand n tend vers $+\infty$ et on se contente d'écrire : $\lim u_n = +\infty$

Remarque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$

Propriété : (limites de référence)

Les suites $(n); (n^2); (n^p) \quad p \in \mathbb{N}^*; (\sqrt{n})$

tendent Vers $+\infty$ en écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad p \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Propriété : (limites de référence)

Les suites $\left(\frac{1}{n}\right); \left(\frac{1}{n^2}\right); \left(\frac{1}{n^3}\right); \left(\frac{1}{n^p}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

tendent Vers $+\infty$ en écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad p \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Définition 4 : 1) Une suite qui tend vers une limite finie l s'appelle une suite convergente.

2) Une suite qui n'est pas convergente est une suite divergente.

Exemples : 1) les suites : $\left(\frac{1}{n}\right); \left(\frac{1}{n^2}\right); \left(\frac{1}{n^3}\right);$

$\left(\frac{1}{n^p}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sont des suites convergentes

2) les suites : $(n); (n^p) \quad p \in \mathbb{N}^*; (\sqrt{n}); (\cos n); ((-1)^n)$ sont divergentes.

Théorème : Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie l cette limite est unique

4) Opération sur les limites des suites.

4-1) Limite de la somme :

$\lim u_n$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Formes indéterminées

4-2) Limites des produits

$\lim u_n$	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$\pm\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Formes indéterminées

4-3) Limites des inverses

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

4-4) Limites des quotients

$\lim u_n$	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Formes indéterminées

Formes indéterminées

Propriété : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exemple : Utiliser les Opération sur les limites des suites pour calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1$ 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n$

4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n$

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 - 2n - 5$

6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$

7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - 3n + 2} - n$

Solutions :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1 = 0 - 0 + 0 - 1 = -1$$

Car : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = (-3+0)(1+0) = (-3)(1) = -3$$

Car : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n$ directement on trouve une forme indéterminée $(+\infty - \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1) = +\infty$$

Car : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n-1 = +\infty$ et

$$+\infty \times +\infty = +\infty$$

4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n$ directement on trouve une forme indéterminée $(+\infty - \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(1 - 2\sqrt{n}) = -\infty$$

Car : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 2\sqrt{n}) = -\infty$ et

$$+\infty \times -\infty = -\infty$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 - 2n - 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(4 - \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}\right)$$

Et puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 - 2n - 5 = +\infty$

6)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{\left(3 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{4}{3}$$

car : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

7)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - 3n + 2} - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n)(\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)}{(\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 3n + 2 - n^2}{\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n + 2}{\sqrt{n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(-3 + \frac{2}{n}\right)}{n \left(\sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1\right)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1} = -\frac{3}{2}$$

Remarques : 1) La limite d'une suite polynôme en est la limite de son plus grand terme

2) La limite d'une suite rationnelle

en est la limite du rapport des termes de plus grand degré

Exemple : calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1$ 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n-3}{3n+5}$ 4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1}$ 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$

6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$

Solutions :

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 = +\infty$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9 = \lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^5 = -\infty$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n-3}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n}{3n} = \frac{9}{3} = 3$

4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 2 \times n \times n}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times n = +\infty$

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{14n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n \times n}{14n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$

6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times n}{n \times n \times n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

Exercice 5: calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n$

Solutions :

1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} = 0$$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)(\sqrt{n^2 + n + 1} + n)}{(\sqrt{n^2 + n + 1} + n)}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{(\sqrt{n^2 + n + 1} + n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} + n\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

5) Les limites et l'ordre et techniques de calculs des limites et critères de convergences.

Théorème 1 : Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie

d'une façon explicite $u_n = f(n)$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Exemple :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^5 + 2n^3 - n + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan \frac{1}{n} \text{ ? on pose : } \frac{1}{n} = t$$

$$n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan \frac{1}{n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$$

Théorème 1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers L tel que : $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) : u_n \geq 0$ Alors : $L \geq 0$

Théorème 3 : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes tels que :

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \text{ Alors : } \lim v_n \leq \lim u_n$$

Preuve : On pose : $w_n = u_n - v_n$

On a : $w_n \geq 0$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente

$$\text{Donc : } \lim w_n \geq 0 \text{ donc : } \lim u_n - \lim v_n \geq 0$$

$$\text{donc : } \lim u_n - \lim v_n \geq 0 \text{ donc : } \lim v_n \leq \lim u_n$$

Remarque : si $v_n < u_n$ ($\forall n > N$)

On n'a pas obligatoirement $\lim v_n < \lim u_n$

Exemple : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques tels que : $u_n = 3 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 3 + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{On a : } u_n < v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ mais : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

Théorème 4 : (critères de divergence 1)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques tels que : $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n)$ et $\lim v_n = +\infty$ on a alors : $\lim u_n = +\infty$

Exemple : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1) \text{montrer que : } v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) \text{en déduire : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Solutions : 1) on a : $(-1)^n \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Donc : } 2(-1)^n \geq -2 \text{ donc } 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \geq -2 + \frac{4}{3}n^2 + 2$$

$$\text{Donc : } v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) \text{ on a : } v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3}n^2 = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ d'après : Théorème 4}$$

Exercice 6 : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$v_n = 3n + 5 \sin n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{calculer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Solutions : on a : $\sin n \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Donc : } 5 \sin n \geq -5 \text{ donc } v_n \geq 3n - 5$$

$$\text{on a : } v_n \geq 3n - 5 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - 5 = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ d'après : Théorème 4}$$

Théorème 5 : (critères de divergence 2)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques tels que : $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n)$ et $\lim u_n = -\infty$

$$\text{on a alors : } \lim v_n = -\infty$$

Exemple : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$v_n = -4n + 3 \cos n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{calculer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Solutions : on a : $\cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Donc : } 3 \cos n \leq 3 \text{ donc } v_n \leq -4n + 3$$

$$\text{on a : } v_n \leq -4n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} -4n + 3 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \text{ d'après : Théorème 5}$$

Théorème 6 : (critères de convergence)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques et l un réel. tels que : $|u_n - l| \leq v_n \quad \forall n \geq p$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Exemple 2 : soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{calculer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\text{Solutions : on a : } u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3}$$

donc : $u_n - 3 = \frac{\sin n}{n^3}$ donc : $|u_n - 3| = \left| \frac{\sin n}{n^3} \right|$

donc : $|u_n - 3| \leq \frac{1}{n^3}$ car : $|\sin n| \leq 1$

et puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

Théorème 7 : (critères de convergence)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites numériques et l un réel. Tels que :

$$w_n < u_n < v_n \text{ et } \forall n \geq p \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$$

Alors : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

Exemple : calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$

Solutions : on a : $-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Or on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Théorème 8:1) Toute suite croissante et majorée est convergente.

2) Toute suite décroissante et minorée est convergente

Exemple1 : (Exercice déjà corrigé)

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) On a montré La suite $((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est croissante.

2) On a montré que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 4.

Donc elle est convergente.

Exemple2 : soit $(v_n)_{n \geq 4}$ la suite récurrente

définie par : $\begin{cases} v_{n+1} = \frac{5v_n}{n+1} \\ v_4 = 10 \end{cases}$

montrer que La suite $((v_n)_{n \geq 4})$ est convergente.

Solutions : 1) $v_{n+1} - v_n = \frac{5v_n}{n+1} - v_n = \frac{4-n}{n+1} v_n$

Et puisque $v_n > 0 : \forall n \geq 4$ (vérifier le par récurrence)

Alors : $v_{n+1} - v_n \leq 0 \quad \forall n \geq 4$ Donc : $((v_n)_{n \geq 4})$ est décroissante

Et puisque : $v_n > 0 \quad \forall n \geq 4$ alors $(v_n)_{n \geq 4}$ est

minorée par 0 **Conclusion :** $(v_n)_{n \geq 4}$ est convergente

Remarque : Une suite peut être convergente sans qu'elle est monotone : exemple :

$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$: n'est pas monotone mais elle est convergente.

Exercice7 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n+2}$ 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 2 \sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}}$

Solutions : 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n+2} ??$

on a : $-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $-\frac{1}{n+2} \leq \frac{\cos n}{n+2} \leq \frac{1}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Or on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$ donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n+2} = 0$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 2 \sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}}$ posons : $u_n = \frac{3n - 2 \sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}}$

donc : $\left| u_n - \frac{3}{4} \right| = \frac{11}{4} \left| \frac{\sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}} \right|$ (a vérifier)

et on a : $-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ donc :

$4n - 1 \leq 4n + \sin \frac{1}{n} \leq 4n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $\frac{1}{4n+1} \leq \frac{1}{4n + \sin \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{4n-1}$

et puisque $\left| \sin \frac{1}{n} \right| \leq 1$ et $\left| \frac{1}{4n + \sin \frac{1}{n}} \right| \leq \frac{1}{4n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $\left| \frac{\sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}} \right| \leq \frac{1}{4n-1}$ Donc : $\left| u_n - \frac{3}{4} \right| \leq \frac{11}{4(4n-1)}$

et puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11}{4(4n-1)} = 0$ alors ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 2 \sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

Théorème 9:1) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

2) Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Exemple : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suites tel que :

$$v_{n+1} = v_n + n^4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad v_0 = 1$$

montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Solutions : on a : $v_{n+1} - v_n = n^4 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée ?

Supposons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée

Donc : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un $l \in \mathbb{R}$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ et on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = l$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} - v_n = 0$ or on a : $v_{n+1} - v_n = n^4$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 = +\infty$ absurde ($+\infty = 0$)

donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée et croissante

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Exercice8 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où} \quad f(x) = x^2 + x + 1$$

1. Monter que la suite (u_n) est croissante

2. Montrer que la suite (u_n) est non majorée
(Par absurde) .

3. En déduire la limite de la suite (u_n)

6) Suite de la forme : $v_n = f(u_n)$

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; et (u_n) une suite numérique telle que $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \in I)$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et f continue en l

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$

Exemple : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suites tel que :

$$v_n = \sqrt{\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Solutions : on pose : $u_n = \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}$

Donc : $v_n = f(u_n)$ avec : $f(x) = \sqrt{x}$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3}$

Et f est continue en $\frac{2}{3}$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Exercice9 : calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Solutions : 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi n + 1}{3n + 4} = \frac{\pi}{3}$ et la fonction f

tel que : $f(x) = \tan x$ est continue en $\frac{\pi}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n^2}{2n^2} = 8$ et la fonction f

tel que : $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en 8

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = ?$ on pose : $t = \frac{1}{n}$

$$n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{donc :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

et la fonction f tel que : $f(x) = \arctan(x)$ est continue en 1

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

7) limite de Suite de la forme : a^n et n^p

Proposition : $a \in \mathbb{R}$

1)a) si $a > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$

b) si $-1 < a < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

c) si $a \leq -1$ (a^n) n'a pas de limites

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$ si $p \in \mathbb{N}^*$

Preuve : 1) a) $a > 1 \Leftrightarrow a = 1 + \alpha$ avec $\alpha > 0$

Donc : $a^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ d'après l'inégalité de Bernoulli

Donc : $a^n \geq n\alpha$ et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha = +\infty$

alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$

b) si $-1 < a < 1$ alors $|a| < 1$ donc : $\frac{1}{|a|} > 1$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a^n| = 0$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

c) si $a \leq -1$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |a|^n = +\infty$ car $|a| > 1$

mais a^n change de signe donc (a^n) n'a pas de limites

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p$ si $p \in \mathbb{N}^*$?

On a : $n^p \geq n$ car $p \in \mathbb{N}^*$ et puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$

Exemples : calculer les limites suivantes :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n$

Solutions : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $a = 2 > 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < a = \frac{2}{3} < 1$

$(-5)^n$ N'a pas de limites car $a = -5 < -1$

Exercice 10 : calculer les limites suivantes

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}$

Solutions : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n = 0$ car $-1 < a = 0,7 < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}^n = +\infty$ car $a = \sqrt{2} > 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$ N'a pas de limites car $a = -2 < -1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(4)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < a = \frac{1}{4} < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$ car $a = \frac{5}{4} > 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n} = +\infty - 0 = +\infty$ car $a = 3 > 1$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n}{(2)^n} + \frac{(2)^n}{(2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1 = +\infty + 1 = +\infty$

8) Suite de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

Activité : Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

1. Déterminer le point d'intersection de C_f avec la droite $(\Delta) y = x$

2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et

$u_{n+1} = f(u_n)$

a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite (u_n)

b) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et sa limite potentielle.

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante majorée par 2.

4. Soit la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + \alpha$

a) Déterminer α pour que la suite (v_n) soit géométrique.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite numérique telle que

a) f est continue sur I

b) $f(I) \subset I$

c) $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$

d) $u_0 \in I$ (donc $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I)$

e) (u_n) est convergente

Alors la suite (u_n) tend vers l solution de l'équation $f(x) = x$

Remarque :

1- Par fois l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions ; Dans ce cas prenez celle qui est dans I .

S'il y a plusieurs solutions de l'équation $f(x) = x$; utiliser la monotonie de (u_n)

2- La fonction f et la suite (u_n) n'ont pas nécessairement la même monotonie :

Exercice11 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$

et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1) Etudier les variations de f sur $I = [0,1]$

et Montrer que $f(I) \subset I$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in I = [0,1]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Solution : 1) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

La fonction f est croissante et continue sur $I = [0,1]$ donc :

$$f(I) = f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \subset [0,1]$$

2) a) montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 1$

- on a : $0 \leq u_0 \leq 1$ la ppte est vraie pour $n=0$
- supposons que : $0 \leq u_n \leq 1$
- montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$?

on a : $0 \leq u_n \leq 1$ donc $u_n \in I = [0,1]$

donc : $f(u_n) \in f(I) \subset I$ donc : $u_{n+1} \in [0,1]$

donc : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 1$

2) b) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1+u_n}{2} - u_n^2 \right) \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n}$$

$$\text{On a : } \frac{1+u_n}{2} - u_n^2 = \frac{-2u_n^2 + u_n + 1}{2} = \frac{-2(u_n - 1)\left(u_n + \frac{1}{2}\right)}{2}$$

Et puisque : $0 \leq u_n \leq 1$ alors : $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc : la suite (u_n) est croissante

et puisque : (u_n) majorée par 1 alors :

(u_n) est convergente.

c) (u_n) est convergente et la limite est solutions de l'équation $f(x) = x$

$$\text{donc : } l = f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{1+l}{2}} \Leftrightarrow 2l^2 - l - 1 = 0$$

$$\text{donc : } l = 1 \text{ ou } l = -\frac{1}{2} \text{ et puisque : } 0 \leq l \leq 1$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Exercices 12 : Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$$

1. Etudier les variations de f et déterminer $f([0,2])$

2. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in I = [0,2]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Propriété : Toute suite convergente est bornée

Remarque : La réciproque n'est pas vraie :

$u_n = (-1)^n$ est bornée mais pas convergente.

Exercices 13 : Soit les suites numériques (u_n)

$$\text{et } (v_n) \text{ définies par : } u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$\text{et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) (v_n > u_n)$

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Exercice14 : Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$ et $v_0 = b$ avec $0 < a < b < 2a$

$$u_n v_n = ab \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(0 < u_n < v_n)$
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante

$$3. a) \text{ Montrer } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$b) \text{ En déduire : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$$

Exemple: Soit les suites numériques (u_n) et (v_n)

$$\text{définies par : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

$$2) \text{ calculer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$$

Solution :

$$1) u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0 \text{ donc : } (u_n) \text{ est croissante}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{(n^2 + n + 1)}{n(n+1)^3} < 0$$

donc : (v_n) est décroissante.

$$2) \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Exercice15: Soit les suites numériques (u_n) et

$$(v_n) \text{ définies par : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad \text{et}$$

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

$$2) \text{ calculer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$$

Solution :

$$1) u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} > 0$$

donc : (u_n) est croissante

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0$$

donc : (v_n) est décroissante.

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Exercice16: Soit les suites numériques : (x_n) et

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ définies par : } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \quad \text{et}$$

$$u_n = x_{2n} \quad \text{et} \quad v_n = x_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Solution : il suffit de montrer que Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ???

$$u_{n+1} - u_n = x_{2n+2} - x_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2} > 0$$

donc : (u_n) est croissante

$$v_{n+1} - v_n = x_{2n+3} - x_{2n+1} = \frac{1}{(2n+3)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2} < 0$$

donc : (v_n) est décroissante.

Et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1} - x_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0$$

alors Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc convergentes et ont la même limite.

Exercice17 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$

$$\text{et } u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } f(x) = \frac{1}{x+1}$$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

$$2) \text{ on pose : } \alpha_n = u_{2n+1} \quad \text{et} \quad \beta_n = u_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante

$$b) \text{ Montrer que : } \alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$3) \text{ Montrer que : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$$

4) Montrer que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

5) calculer : $\lim \alpha_n - \beta_n$

Solution :1) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Donc f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$

2) on a : $\alpha_n = u_{2n+1}$ et $\beta_n = u_{2n}$ et $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\alpha_{n+1} = (f \circ f)(\alpha_n)$ et $\beta_{n+1} = (f \circ f)(\beta_n)$

Et puisque f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$ et

$f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ alors : $f \circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$

a) montrons que : $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1} \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• pour $n=0$ on a : $\alpha_0 = \frac{1}{2} \leq \alpha_1 = \frac{3}{5}$ et $\beta_1 = \frac{2}{3} \leq \beta_0 = 1$

• on suppose que : $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1} \leq \beta_n$

• montrons que : $\alpha_{n+1} \leq \alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2} \leq \beta_{n+1}$?

on a : $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1} \leq \beta_n$ et puisque $f \circ f$ est

croissante Sur $\mathbb{R}^+$ alors :

$(f \circ f)(\alpha_n) \leq (f \circ f)(\alpha_{n+1})$ et $(f \circ f)(\beta_{n+1}) \leq (f \circ f)(\beta_n)$

Donc : $\alpha_{n+1} \leq \alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2} \leq \beta_{n+1}$

Donc : $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1} \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc : (α_n) est croissante et la suite (β_n) est décroissante

b) Montrons que : $\alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• pour $n=0$ on a : $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ et $\beta_1 = 1$ donc : $\alpha_0 \leq \beta_0$

• on suppose que : $\alpha_n \leq \beta_n$

• montrons que : $\alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1}$?

on a : $\alpha_n \leq \beta_n$ et puisque $f \circ f$ est croissante Sur

$\mathbb{R}^+$ alors : $(f \circ f)(\alpha_n) \leq (f \circ f)(\beta_n)$

donc : $\alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1}$ donc : $\alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

Puisque : $\alpha_0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Donc : $\frac{1}{2} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n} \leq 1$

Donc : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) Montrons que : $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

• pour $n=1$ on a : $|u_2 - u_1| = \frac{1}{6}$ donc : $|u_2 - u_1| \leq \frac{1}{1}$

• on suppose que : $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n}$

• montrons que : $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$?

on a : $|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left| \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1} \right|$

$= \frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} |u_{n+1} - u_n|$

Et on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

Donc : $\frac{3}{2} \leq 1+u_n \leq 2$ et $\frac{3}{2} \leq 1+u_{n+1} \leq 2$

Donc : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_{n+1}+1} \leq \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{2}{3}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} \leq \frac{4}{9}$ et $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{4}{9n}$

Et on a : $\frac{1}{n+1} - \frac{4}{9n} = \frac{5n-4}{9n(n+1)} > 0$ donc :

$\frac{4}{9n} < \frac{1}{n+1}$

Donc : $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$

donc : $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

5) montrons que la suite (u_n) est convergente

Et déterminons la limite de la suite (u_n) ??

On a : $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc : $|u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc : $|\alpha_n - \beta_n| \leq \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

et puisque : $\lim \frac{1}{2n} = 0$ alors : $\lim \alpha_n - \beta_n = 0$

Exercice18 : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{12u_n}{9+u_n^4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$
- 2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
- Et en déduire sa convergence et sa limite

Solution :

On a : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{12u_n}{9+u_n^4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}} ?$

Soit la fonction f tel que : $f(x) = \frac{12x}{9+x^4}$

la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 12 \frac{9+x^4-4x^4}{(9+x^4)^2} = 36 \frac{3-x^4}{(9+x^4)^2} = 36 \frac{(\sqrt{3}+x^2)(\sqrt{3}-x^2)}{(9+x^4)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $\sqrt{3} - x^2$

$$\sqrt{3} - x^2 = (\sqrt{\sqrt{3}} - x)(\sqrt{\sqrt{3}} + x)$$

Donc : f est croissante sur $[-\sqrt{\sqrt{3}}; \sqrt{\sqrt{3}}]$

Et f est décroissante sur $]-\infty; -\sqrt{\sqrt{3}}]$ et $[\sqrt{\sqrt{3}}; +\infty[$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$$

$n=1 \quad u_1 = 1$ donc : $1 \leq u_1 \leq \sqrt{\sqrt{3}}$

supposons que : $1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$

montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{\sqrt{3}}$

on a : $1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$

et puisque : f est croissante sur $I = [1; \sqrt{\sqrt{3}}]$

on a : $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{\sqrt{3}})$ donc $\frac{6}{5} \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$

donc : $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{\sqrt{3}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- 2) Etudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} ?$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{12u_n}{9+u_n^4} - u_n = u_n \left(\frac{12}{9+u_n^4} - 1 \right) = u_n \left(\frac{3-u_n^4}{9+u_n^4} \right)$$

Puisque : $1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$ donc :

$0 < u_n$ et $3 - u_n^4 \geq 0$ et $9 + u_n^4 > 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

Déduction de sa convergence et sa limite ?

la suite (u_n) est croissante et puisque (u_n)

majorée par $\sqrt{\sqrt{3}}$ alors : (u_n) est convergente.

Soit : $\lim u_n = l$ on a donc : $1 \leq l \leq \sqrt{\sqrt{3}}$

Soit la fonction f tel que : $f(x) = \frac{12x}{9+x^4}$

On donc :

a) f est continue sur $I = [1; \sqrt{\sqrt{3}}]$

b) $f(I) = f([1; \sqrt{\sqrt{3}}]) = [f(1); f(\sqrt{\sqrt{3}})]$

$$f(I) = \left[\frac{6}{5}; \sqrt{\sqrt{3}} \right] \subset I$$

c) $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$

d) $u_0 \in I$ e) (u_n) est convergente

Alors la limite l de la suite (u_n) vérifie l'équation :

$l = f(l)$ et $l \in I$

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{12l}{9+l^4} \Leftrightarrow 9+l^4 = 12 \Leftrightarrow l^4 = 3$$

donc : $l = \sqrt{\sqrt{3}}$ ou $l = -\sqrt{\sqrt{3}}$ et puisque : $l \in I$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l = \sqrt{\sqrt{3}}$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Nombre complexes: Aspect trigonométrique

BOUOPDA FRANCIS

Sous l'encadrement de

Pr.Christophe MOUAHA (Maitre de Conférences)

Dr.Siméon FOTSO (Chargé de Cours)

Mr.ADJABA BIWOLI JEAN PIERRE(IPN/MATHS)

Et de Mr.TCHOKONA DONATIEN(PEG)

Yaoundé, le 1^{er} janvier 2001

NOMBRES COMPLEXES : ASPECT TRIGONOMETRIQUE

2.1 Présentation de la ressource

Objectif pédagogique général de la ressource

Cette ressource vise permet à l'élève de résoudre des problèmes faisant appel aux aspects trigonométriques des nombres complexes.

Objectifs pédagogiques spécifiques

A la fin de cette ressource l'élève doit être capable de :

- déterminer l'argument d'un produit et d'un rapport de deux nombres complexes ;
- de passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à la forme trigonométrique et vice versa ;
- d'énoncer la formule de Moivre et de l'utiliser pour déterminer les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité, linéariser dans $\mathbb{C}$...
- utiliser et exploiter diverses formules trigonométriques pour la résolution des problèmes ;
- déterminer, interpréter et utiliser les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Liens avec les autres parties du programme

Les parties du programme ayant un lien avec cette ressource sont :

- la trigonométrie ;
- le calcul des primitives et l'intégration ;
- les isométries et les similitudes du plan.

Les apports de la ressource à ces parties sont :

- la formule de Moivre permet de montrer les formules trigonométriques ;
- la linéarisation permet de calculer les intégrales de la forme $\int (a \cos^n x + b \sin^m x) dx$
 $n, m \in \mathbb{N}; a, b, x \in \mathbb{R}$;
- elle permet de calculer le rapport et l'argument d'une similitude (isométrie) et plus encore, elle permet de trouver facilement l'expression analytique d'une application affine.

Pré-requis

Pour mieux aborder cette ressource, il est conseillé à l'élève d'être familiarisé avec, les notions de structures algébriques, les formules usuelles de trigonométrie, et de maîtriser parfaitement l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Introduction et Historique(voir [6])

Au XVI^e siècle, les mathématiciens italiens Jérôme Cardan et Raffaele Bombelli ont introduit des nombres "imaginaires" ayant un carré négatif, pour résoudre des équations du troisième degré. Deux siècles plus tard, Leonhard Euler et Jean le Rond d'Alembert ont parachevé la création des nombres complexes et fixé les notations actuelles, en particulier celle du nombre i . Aujourd'hui, les nombres complexes sont utilisés non seulement dans toutes les branches des mathématiques, en particulier en trigonométrie et en géométrie, mais aussi dans d'autres sciences comme la physique.

2.2 Aspect trigonométrique d'un nombre complexe

2.2.1 Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe

Activité 2.1.

Soit $z = \sqrt{3} + i$ un nombre complexe, a et b désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z .

1. Déterminer a et b .
2. Calculer le module de z . On le note $|z|$.

3. Dédurre l'existence d'un θ appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$. Le réel θ est appelé argument de z .
4. Ecrire z en fonction de θ et de $|z|$. Cette forme est appelée forme trigonométrique de z .
5. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, écrire z sous forme trigonométrique.

Solution.

1. – La partie réelle de z est: $a=\sqrt{3}$
 – La partie imaginaire de z est : $b=1$
2. Calculons la valeur $|z|$:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

3. Cherchons $\theta \in \mathbb{R}$ / $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.

$$2 = \sqrt{3+1} \Rightarrow (2)^2 = 3+1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$\text{Prendre } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ et } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

5. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = |z|^2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{|z|^2} + \frac{b^2}{|z|^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = 1$$

$$\text{Il existe } \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases} \Leftrightarrow z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

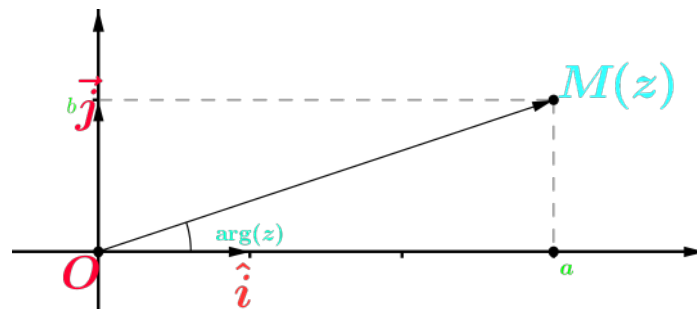
Activité 2.2.

Soient M,N les points du plan d'affixes respectives $z = \sqrt{3} + i$, $z_1 = 1$

1. Placer les points O, N et M dans le plan P.
2. Calculer $d(O,M)$ et $|z|$ et Comparer $d(O,M)$ et $|z|$.
3. Calculer $\cos \theta$, $\sin \theta$ où $\theta = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$ et comparer $\arg z$ et θ .
4. Exprimer z en fonction de $|z|$ et θ . Cette forme est appelée forme trigonométrique de z .
5. Donner une interprétation géométrique de l'argument d'un nombre complexe non nul z .

Définition 2.1.

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe non nul et M un point d'affixe z . On appelle argument de z toute mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.



Remarque 2.1.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, si θ est un argument de z et $|z|$ le module de z alors :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Définition 2.2.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, z s'écrit en fonction de son module ($|z|$) et θ , où θ est un argument de z .

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2.1)$$

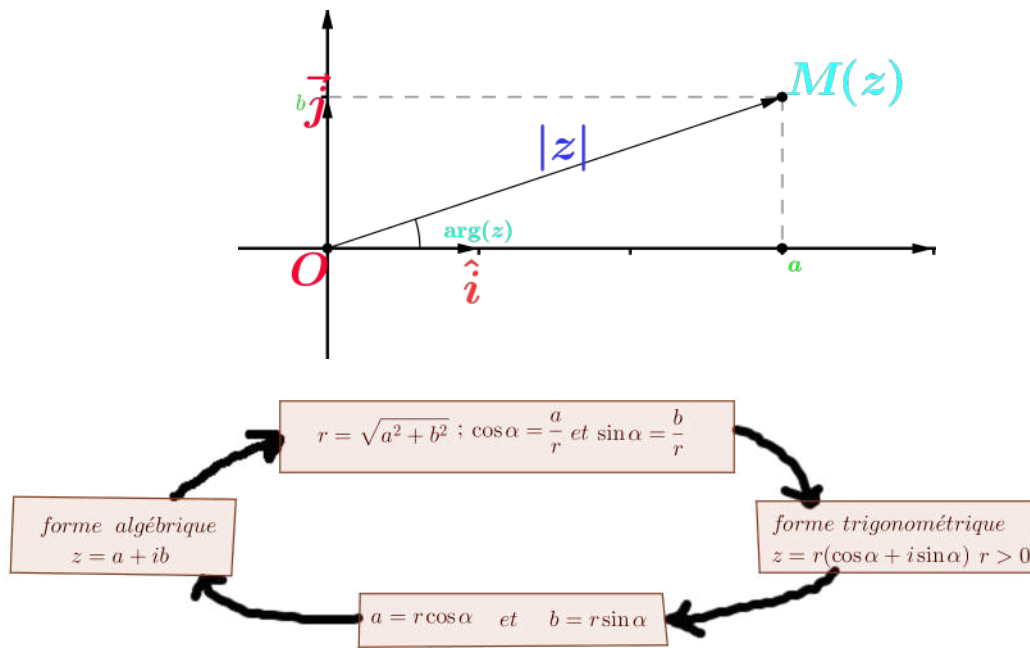
On dit alors que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ est écrit sous forme trigonométrique.

Notation

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\cos \theta + i \sin \theta$ se note $e^{i\theta}$ et est appelée fonction exponentielle. z s'écrit alors

$$z = |z|e^{i\theta} \quad (2.2)$$

Cette forme est appelée la forme exponentielle de z .



Propriété 2.1.

Soient $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')$ deux nombres complexes non nuls.

1. Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta[2\pi]$
2. Si $z = z'$ alors $|z| = |z'|$ et $\theta = \theta' + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Exemple 2.1.

Calculer le module, un argument, écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 2 + 2i$; $z_3 = -1 - i$; $\overline{z_1}$.

a. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$$|z_1| = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos \arg(z_1) = \frac{1}{2} \\ \sin \arg(z_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \arg(z_1) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

b. $z_2 = 2 + 2i$

$$|z_2| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \arg(z_2) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \arg(z_2) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \arg(z_2) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

c. $z_3 = -1 + i$

$$|z_3| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \arg(z_3) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \arg(z_3) = \frac{\sqrt{1}}{2} \end{cases} \iff \arg(z_3) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$$z_3 = |\sqrt{2}| \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

2.2.2 Argument des nombres complexes particuliers

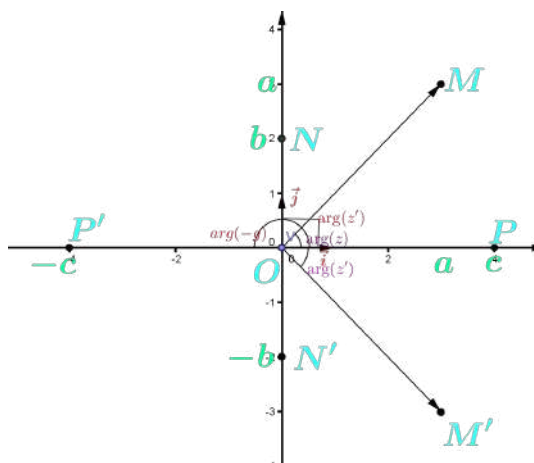
Activité 2.3.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ et z, z', g les complexes définis par : $z = a + ia, z' = ib$ et $g = c$. Soient M, N, P les points d'affixes respectives z, z' et g .

- Placer les points M, N et P dans le plan $\mathcal{P}$.
- Déterminer le module et un argument des nombres complexes z, z' et g .
- Soient M', N' et P' les points d'affixes respectives $\bar{z}, \bar{z}'$ et $-g$.
 - Placer M', N' et P' dans le plan $\mathcal{P}$.
 - En déduire le module et l'argument de $\bar{z}, \bar{z}'$ et $\bar{g}$.
- Quelle relation existe-t-il entre l'argument de z et l'argument de $\bar{z}$.

Solution.

i.



- ii. a Calculons le module de z, z' et g .

$$|z| = \sqrt{a^2 + a^2} = |a|\sqrt{2}$$

$$|z'| = \sqrt{b^2 + 0^2} = |b|$$

$$|g| = \sqrt{c^2} = |c|$$

b Calculons un argument de z , z' et g .

$$\arg(z) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\arg(z') = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\arg(g) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OP}) = 0 + k\pi$$

$$\text{iii. } \arg(\bar{z}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\arg(\bar{z}') = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{ON'}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\arg(-g) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OP'}) = \pi + k\pi$$

iv. Nous constatons que $\arg(z) = -\arg(\bar{z})[2\pi]$

Propriété 2.2.

Soit z un nombre complexe ;

1. z est un nombre réel non nul, si et seulement si $\arg(z) = 0 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
2. z est un nombre réel non nul, strictement positif si et seulement si $\arg(z) = 0 + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
3. z est un nombre réel non nul, strictement négatif si et seulement si $\arg(z) = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
4. z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
5. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$.

Exercice d'application 2.1.

Soit i le complexe imaginaire pur tel que $i^2 = -1$.

- a) Calculer le module et un argument de i .
- b) Mettre le complexe i sous la forme trigonométrique.
- c) Calculer i^n , $\forall n \in \mathbb{N}$.
- d) En déduire la somme $S = \sum_{k=0}^n i^k$.
- e) Simplifier les expressions suivantes :

$$\text{i } I = i^{100000}$$

$$\text{ii } J = i^{23000004}$$

$$\text{iii } K = i^{100000} + i^{23000004}$$

$$\text{iv } L = i^{5000000} + i^{7896543} + i^{41236}$$

2.2.3 Exercices d'entraînement

2.a Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

- a) $3i$
- b) $2 + \sqrt{3}i$
- c) -4
- d) $\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

2.b Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- a) $(2 + 2i)(1 - i)$
- b) $\frac{-2+i\sqrt{3}}{1+3i}$
- c) $\frac{\sqrt{3}}{1+2i}$
- d) $(-1 - i)^4$

2.c Placer dans le plan complexe les points d'affixes suivants :

- a) $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$
- b) $z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$
- c) $z = 1 + e^{-i\frac{\pi}{6}}$
- d) $z = e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}$

2.d Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

- a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .
- b) Écrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit $z_1 z_2$.
- c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

2.3 Formule de Moivre et applications

2.3.1 Formule de Moivre

Activité 2.4.

Cette activité a pour objectif d'énoncer et de montrer la formule de Moivre.

Considérons la fonction : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\theta \longmapsto \cos \theta + i \sin \theta$$

1. Montrer que $f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta')$
2. En déduire que $f(2\theta) = (f(\theta))^2$
3. Montrer que
$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$
4. En utilisant la question 1), montrer que $f(n\theta) = (f(\theta))^n \forall n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $f(n\theta) = (f(\theta))^n \forall n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur n .
6. En utilisant la question précédente, déterminer l'expression de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$.
7. En déduire la formule de Moivre c'est-à-dire $f(n\theta) = f(\theta)^n \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Solution.

1.
$$\begin{aligned} f(\theta + \theta') &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \\ &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta') \\ &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' \\ &= \cos \theta'(\cos \theta + i \sin \theta) - \sin \theta'(\sin \theta - i \cos \theta) \\ &= \cos \theta'(\cos \theta + i \sin \theta) + i^2 \sin \theta'(\sin \theta - i \cos \theta) \\ &= \cos \theta'(\cos \theta + i \sin \theta) + i \sin \theta'(i \sin \theta - i^2 \cos \theta) \\ &= \cos \theta'(\cos \theta + i \sin \theta) + i \sin \theta'(i \sin \theta + \cos \theta) \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= f(\theta)f(\theta') \end{aligned}$$
2. $f(2\theta) = f(\theta + \theta)$ d'après la question 1.) avec $\theta = \theta'$
$$\begin{aligned} &= f(\theta)f(\theta) \\ &= f(\theta)^2 \end{aligned}$$
3. $f(2\theta) = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$
$$\begin{aligned} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad f(n\theta) &= f(\theta + (n-1)\theta) \\
 &= f(\theta)f((n-1)\theta) \\
 &= f(\theta)f(\theta)f((n-2)\theta) \\
 &= \underbrace{f(\theta) \times \dots \times f(\theta)}_{n \text{ fois}} \\
 &= f(\theta)^n
 \end{aligned}$$

5. Désignons par P(n) cette propriété.

$$\text{Pour } n=1 \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^1 = \cos 1\theta + i \sin 1\theta$$

D'où P(1) est vraie

Supposons que $\forall k < n$ p(k) est vraie et montrons que P(n) est aussi vraie.

En effet

$$\begin{aligned}
 (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{n-1}(\cos \theta + i \sin \theta) \\
 &= (\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\
 &= \cos(n-1)\theta \cos \theta + i \cos(n-1)\theta \sin \theta + i \sin(n-1)\theta \cos \theta - \sin(n-1)\theta \sin \theta \\
 &= \cos((n-1)\theta + \theta) + i \sin((n-1)\theta + \theta) \\
 &= \cos n\theta + i \sin n\theta
 \end{aligned}$$

D'où P(n) est aussi vraie

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad (\cos n\theta + i \sin n\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^k (i \sin \theta)^{n-k} \quad (\text{D'après la formule du Binôme de Newton})
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \cos n\theta = \text{Re}(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^k (i \sin \theta)^{n-k}) \\ \sin n\theta = \text{Im}(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^k (i \sin \theta)^{n-k}) \end{cases}$$

7. Soit $n \in \mathbb{Z}^-$, $-n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n}} \\
 &= \frac{1}{\cos -n\theta + i \sin -n\theta} \\
 &= \frac{(\cos n\theta + i \sin n\theta)}{(\cos -n\theta + i \sin -n\theta)(\cos n\theta + i \sin n\theta)} \\
 &= \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{\cos^2 n\theta - i \sin \theta \cos \theta + i \sin \theta \cos \theta + \sin^2 n\theta} \\
 &= \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta}
 \end{aligned}$$

$$= \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Il en résulte que : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Propriété 2.3. (Formule de Moivre)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

Proposition 2.1.

$$\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} : \begin{cases} \cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\ \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \end{cases}$$

Corollaire 2.1. (Formule d'Euler)

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2.3.2 Module et argument d'un produit (rapport) de nombres complexes

Activité 2.5.

Soit $z = re^{i\alpha} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ et $z' = r'e^{i\alpha'} = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$ deux nombres complexes non nul.

1. Prouver que $zz' = rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha'))$.
2. En déduire $|zz'|$ et $\arg(zz')$.
3. Écrire $\frac{1}{z}$; $-z$; $\bar{z}$ sous la forme trigonométrique.
4. En déduire le module et un argument de $\frac{1}{z}$; $-z$; $\bar{z}$.
5. En utilisant la formule de Moivre déterminer le module et un argument de z^n .
6. Écrire $\frac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique avec $z' \in \mathbb{C}^*$.
7. En déduire le module et un argument de $\frac{z}{z'}$.

Solution.

1. $zz' = re^{i\alpha}r'e^{i\alpha'} = rr'e^{i(\alpha+\alpha')}$ (d'après l'activité précédente)
2. $zz' = rr'e^{i(\alpha+\alpha')}$ avec $rr' > 0$
Donc $|zz'| = rr'$ et $\arg(zz') = \alpha + \alpha'$
3. $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\alpha}} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha} = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$ On fait de même pour les autres.
4. $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{r}$ et $\arg \frac{1}{z}$

5. Nous pouvons déduire d'après la formule de Moivre que $|z^n| = |r^n|$ et $\arg z^n = n\alpha$
6. $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\alpha}}{r'e^{i\alpha'}} = \frac{r}{r'}e^{i\alpha}e^{-i\alpha'} = \frac{r}{r'}e^{i(\alpha-\alpha')}$
7. $|\frac{z}{z'}| = \frac{r}{r'}$ et $\arg(\frac{z}{z'}) = \alpha - \alpha'$

Propriété 2.4.

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*$$

1. $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad |z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \arg(z)[2\pi]$
3. $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$
4. $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
5. $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$
6. $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)[2\pi]$

2.3.3 Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Etant donné un nombre complexe Z et un entier naturel non nul n , le but de cette partie est de déterminer des nombres complexes z tels que $z^n = Z$

Activité 2.6.

Soit Z un nombre complexe non nul.

1. Vérifier que $(1+i)^2 = 2i$. On dit que $1+i$ est une racine carrée de $2i$.
2. Trouver une autre racine carrée de $2i$.
3. On se donne l'équation $(E) : z^2 = Z$. Nous nous proposons de chercher $z \in \mathbb{C}^*$ telle que z vérifie (E) .
 - (a) Mettre z et Z sous forme trigonométrique.
 - (b) En utilisant la formule de Moivre mettre z^2 sous forme trigonométrique.
 - (c) Remplacer z et Z par leurs expressions dans (E) .
 - (d) Résoudre (E) .

Solution.

1. $(1+i)^2 = 1 - 2i - 1 = 2i$.

2. On remarque que : $(-1 - i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

Donc l'autre racine de $2i$ est $-1-i$.

3. (a) $Z = |Z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ avec $\alpha = \arg z$ et $\theta = \arg Z$.

$$(b) \quad z^2 = (|z|(\cos \alpha + i \sin \alpha))^2.$$

$$= |z|^2 (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2.$$

$$= |z|^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha).$$

$$= |Z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

(c) Comme $|z|^2, |z| > 0$ Par identification on'a :

$$\begin{cases} |z|^2 = |Z| \\ \cos 2\alpha = \cos \theta \\ \sin 2\alpha = \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} |z| = \sqrt{|Z|} \\ \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi \quad k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Donc

$$S = \{ \sqrt{|Z|}(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}), \sqrt{|Z|}(\cos(\frac{\theta}{2} + \pi) + i \sin(\frac{\theta}{2} + \pi)) \}$$

Proposition 2.2.

Soient z et Z deux nombres complexes non nuls, z est une racine carrée de Z si et seulement si $z^2 = Z$.

Activité 2.7.

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cet activité est de trouver des nombres complexes z tels que $z^n = a + ib$.

1. Supposons que $a + ib = 1$ (rechercher les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité)
2. Supposons que $a + ib = 1 + i$ (rechercher les racines $n^{\text{ième}}$ de $1+i$)
3. Trouver z tel que $z^n = a + ib$ avec $n > 1$. (rechercher les racines $n^{\text{ième}}$ de $a+ib$)

Solution.

1. Premier cas $z^n = 1$

$$\text{Posons } z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \implies z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = 1$$

Par identification :

$$\begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases} \implies \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité sont les $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

2. Deuxième cas on fait de même comme dans le premier cas.

3. Cas général

Nous savons que $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

Or $z^n = Z$ d'où $z^n = |Z|(\cos(\arg Z) + i \sin(\arg Z))$

Par identification on a :

$$\begin{cases} |z|^n = |Z| \\ \cos n\theta = \cos(\arg Z) \\ \sin n\theta = \sin(\arg Z) \end{cases} \implies \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ \theta = \frac{\arg Z}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Les racines $n^{\text{ième}}$ de $Z=a+ib$ sont les complexes $z_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\arg Z+2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

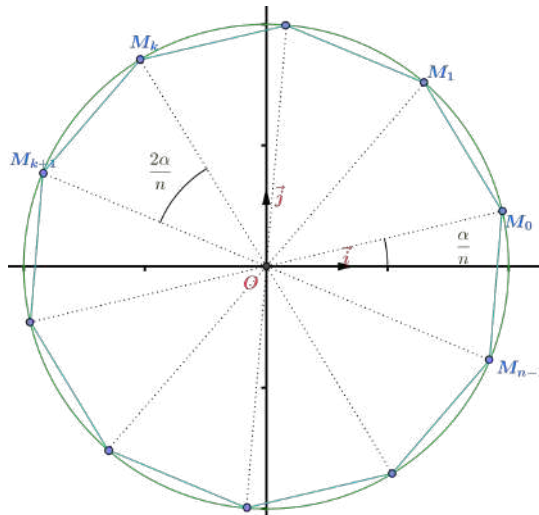
Propriété 2.5.

Soit $Z = re^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

1. Z admet n racines $n^{\text{ième}}$ telles que $z_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\arg Z+2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
2. Les images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.
3. Si z et g sont les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe Z non nul, alors $\frac{z}{g}$ et $\frac{g}{z}$ sont les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
4. La somme de toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z est égale à 0.
5. L'ensemble de toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z forme un groupe pour la multiplication de $\mathbb{C}$.

Preuve

1. D'après l'activité précédente.
2. Soit M_k d'affixe z_k , $OM_k = |z_k| = |z_0| = |\sqrt[n]{r}| \implies M_k \in C(O; \sqrt[n]{r})$
 $M_k M_{k+1} = |z_{k+1} - z_k| = |z_k| |e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1| = |e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1| \sqrt[n]{r} = 2 \sin(\frac{\pi}{n}) \sqrt[n]{r}$.
 $M_0 M_1 = M_1 M_2 = \dots = M_{n-1} M_n = M_n M_0 \implies$ polygone régulier de n cotés inscrit dans le cercle $C(O; \sqrt[n]{r})$.



3. Montrons que $(\frac{z}{g})^n = 1$

Pour cela $(\frac{z}{g})^n = \frac{z^n}{g^n} = \frac{Z}{Z} = 1$.

De même on montre que $\frac{g}{z} = 1$.

4. Posons $S = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}$ et $q = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. On remarque que, $z_{k+1} = qz_k$

$$S = z_0 + qz_0 + q^2z_0 + \dots + q^{n-1}z_0$$

$$= z_0(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

$$= z_0\left(\sum_{k=0}^{n-1} q^k\right)$$

$$= z_0 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ (Or } q^n = 1)$$

$$= 0$$

2.3.4 Linéarisation

Activité 2.8.

1. En utilisant la formule d'Euler exprimer $\cos^2 \theta$ en fonction de $\cos k\theta$ où $k \in \mathbb{N}$. Cette écriture est une linéarisation de $\cos^2 \theta$
2. Linéariser $\cos^3 \theta$, $\sin^3 \theta$
3. Linéariser $\cos^2 \theta \sin \theta$

Solution.

1. D'après la formule d'Euler on a :

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{i2\theta} + 2 + e^{-i2\theta})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} + \frac{2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) \\
 &= \frac{\cos 2\theta + 1}{2}
 \end{aligned}$$

2. En utilisant toujours la formule d' Euler nous avons :

$$\begin{aligned}
 \cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{8} (e^{i2\theta} + 2 + e^{-i2\theta}) (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
 &= \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 2e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} + e^{-i3\theta}) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} + 3 \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta)
 \end{aligned}$$

De même on montre que $\sin^3 \theta = \frac{1}{4} (-\sin 3\theta + 3 \sin \theta)$

En effet

$$\begin{aligned}
 \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\
 &= -\frac{1}{8i} (e^{i2\theta} - 2 + e^{-i2\theta}) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
 &= -\frac{1}{8i} (e^{i3\theta} - 2e^{i\theta} + e^{-i\theta} - e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} - e^{-i3\theta}) \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i} + 3 \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) \\
 &= \frac{1}{4} (-\sin 3\theta + 3 \sin \theta)
 \end{aligned}$$

Définition 2.3.

Linéariser c'est transformer un produit en une somme, développer les expressions de la forme $\cos^n x$ et $\sin^m x$ en fonction de $\cos \alpha x$ ou en fonction de $\sin \beta x$ avec $\alpha, \beta, \dots$ étant des entiers naturels non nuls.

A. Utilisations des formules trigonométriques pour linéariser

a. Forme linéaire de $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \iff \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

De même

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \iff \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

b. Forme linéaire de $\cos a \cos b$

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin b \sin a & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \iff \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

Exemple 2.2.Linéariser $\cos^3 x$ et $\cos^4 x$ **Solution.**

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x\right) + \frac{1}{2} \cos 2x \\ &= \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \cos x \cos^2 x \\ &= \cos x \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right) \\ &= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x \cos 2x \\ &= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x\right) \\ &= \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x\end{aligned}$$

c. Forme linéaire de $\cos a \sin b$

$$\begin{cases} \sin a + b = \cos a \sin b + \sin a \cos b & (1) \\ \sin a - b = \cos a \sin b - \cos b \sin a & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \iff \cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Exercice d'application 2.2.Linéariser $\sin^3 x$ et $\sin^4 x$ **B. Utilisations des nombres complexes pour linéariser**

Nous avons d'après la formule d'Euler que

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n \\ \sin^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n \end{cases}$$

a. **Forme linéaire de $\cos a \cos b$ et $\sin a \cos b$**

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right) \left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} + \frac{e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))\end{aligned}$$

Exercice d'application 2.3.Linéariser $\sin a \cos b$, $\sin 3x \cos 2x$, $\cos 3x \cos 2x$

2.3.5 Exercice d'entraînement

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

- i. La partie imaginaire d'un nombre complexe est un imaginaire pur. ?
- ii. Si le produit de deux nombres complexes est nul, c'est que l'un des deux est nul.
- iii. Si z est un nombre complexe de module 1, alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
- iv. Le module d'une somme de deux complexes est la somme de leurs modules respectif.
- v. L'argument du produit de deux complexes est la somme de leurs arguments.

2.4 Exercices

Exercice 2.1.

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z = 1 - i$
2. $z = 3i$
3. $z = \sqrt{3} + i$
4. $z = 2 + \sqrt{3} + i$

Exercice 2.2.

Soit (E) l'équation $z^2 - 6z + 12 = 0$.

1. Montrons que (E) admet 2 solutions complexes conjuguées u et $\bar{u}$, u étant celle de partie imaginaire positive.
2. Calculer le module et un argument de u .
3. En déduire le module et un argument de $\bar{u}$.
4. Écrire $u-4$ sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.
5. Calculer le module de $g = \frac{u}{u-4}$
6. vérifier que $\bar{g} = \frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}$
7. En déduire le module et un argument de $\bar{g} = \frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}$.

Exercice 2.3.

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $z = \frac{1-u}{1+u}$ avec $u = \cos \theta + i \sin \theta$ $\theta \in]0, \pi[$
2. $z = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+1)^3}$.
3. $z = -3(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$.

Exercice 2.4. (voir[5])

Posons $q = e^{ix} = \cos x + i \sin x$; $x \neq 0[2\pi]$

1. Exprimons $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$ en fonctions de n et x . Trouver la partie réelle A et la partie imaginaire B de S.
2. En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \cos kx$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \sin kx$

Exercice 2.5. (voir[3])

Calculer les sommes suivantes en utilisant la formule de Moivre.

- a. $C = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos k\theta$
- b. $S = \sum_{k=0}^n C_n^k \sin k\theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$

Exercice 2.6.

Soient a_n et (b_n) les suites de réels tels que :
$$\begin{cases} a_0 = 1 & b_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} & \forall n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On pose $z_n = a_n + ib_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} e^{in\frac{\pi}{4}}$.
3. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n .
4. Montrer que la suite (z_n) converge vers 0 dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.7.

Dans chacun des cas suivants :

- Déterminer le module et un argument de z .
- En déduire la forme trigonométrique de z .

1. $z = (\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^3$
2. $z = (1-i)^4$
3. $z = (\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i})^3$

Exercice 2.8. (voir[7])

Soit $(z_n)_n$ la suite définie par :
$$\begin{cases} z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}} & \text{si } n = 0 \\ z_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_n & \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On note M_n l'image de z_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Placer les points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$.
2.
 - a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = e^{-i(\frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{6})}$
 - b. En déduire que M_n et M_{n+12} sont confondues.
3.
 - a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+6} = -z_n$
 - b. En déduire que O est le milieu du segment $[M_n, M_{n+6}]$.
4.
 - a. sous forme exponentielle le complexe de $\frac{z_{n+8} - z_n}{z_{n+4} - z_n}$.
 - b. En déduire la nature du triangle M_n, M_{n+4}, M_{n+8} .

Exercice 2.9.

Soit z un nombre complexe

1. Résoudre l'équation $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ et mettre le résultat sous forme exponentielle.
2. Démontrer que si $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ alors $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$

Exercice 2.10.

Déterminer les parties réelles et imaginaire des complexes suivants :

1. $z = e^{-1+i\frac{\pi}{6}}$
2. $z = e^{2-i}$
3. $z = e^{1+i} e^{-2+i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 2.11.

Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

- a Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .
- b Écrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{z_1}{z_2}$.
- c En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2.12. (voir[3])

Calculer le module et l'argument de e^z dans les cas suivants :

1. $z = x + iy$

2. $z = 1 + i$
3. $z = \frac{1+i}{1-i}$
4. Le complexes z est solution de : $z^2 = 8 + 6i$

Exercice 2.13.

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z = 2i$
2. $z = \frac{1+i}{1-i}$
3. $z = 1 + i$
4. $z = 3 - 4i$
5. $z = -11 + 60i$

Exercice 2.14.

Soit z le nombre complexe égal à $1+i\sqrt{3}$.

- a. Mettre le nombre complexe z sous la forme trigonométrique.
- b. En déduire la forme algébrique du nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^{30}$.

Exercice 2.15.

Soit z le nombre complexe égal à $\frac{(1+\sqrt{2})+i}{(1+\sqrt{2})-1}$.

- a. Déterminer le module et un argument de z .
- b. Calculer : z^{20}, z^{22}, z^{24} .

Exercice 2.16. (voir[4])

Soient x un nombre réel et z le nombre complexe égal à : $z = (x - 2)(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

- a. Déterminer le module et un argument du complexe z .
- b. Démontrer que z^{1976} est un nombre réel. Préciser le signe de z^{1976} .

Exercice 2.17.

- a. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.
- b. Soit z le nombre complexe égal à $\frac{z_1}{z_2}$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z .
- c. En déduire le cosinus et le sinus de $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2.18.

Soit $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

- Soit z un élément de $\mathbf{U}$ que peut-on dire des nombres complexes $\frac{1}{z}$ et $\bar{z}$?
- Soient z_1 et z_2 deux éléments de $\mathbf{U}$ tels que l'on ait : $z_1 z_2 \neq -1$. Démontrer que le nombre complexe égal à $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est un nombre réel.
- Soient θ_1 et θ_2 des arguments respectives de z_1 et z_2 . Exprimer le nombre Z en fonction de θ_1 et θ_2 .

Exercice 2.19.

Soit α un réel tel que l'on ait $\forall k \in \mathbb{Z}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

- Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1}{1+i \tan \alpha}$.
- Même question pour le nombre complexe $\frac{1}{i+\tan \alpha}$.

Exercice 2.20.

Soit z le nombre complexe égal à $-i$.

- Mettre le nombre complexe z sous forme trigonométrique.
- Calculer les racines cubiques de z et construire leurs images dans le plan complexe.

Exercice 2.21.

Calculer les racines cubiques des nombres complexes suivant :

- $z = 1$
- $z = 1 + \sqrt{3}i$
- $z = 2 - 2i$
- $z = \frac{1+\sqrt{3}}{2-2i}$

Exercice 2.22.

Déterminer les complexes z définis par les conditions suivantes :

- $z^6 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$
- $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$
- $z^7 = 1 + i$

Exercice 2.23.

Exprimer $\cos 5x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

Exercice 2.24.

Linéariser les expressions suivantes :

1. $a = \cos^3 x \sin^2 x$
2. $b = \sin^4 x$
3. $c = \sin^4 x \cos 2x$

Exercice 2.25. (voir[5])

Soit $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

- a) Écrire i en fonction de j puis démontrer que tout nombre complexe z peut s'écrire sous forme :

$$z = \alpha + j\beta (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R})$$

- b) Déterminer une relation entre α et β pour que le complexe $\alpha + j\beta (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R})$ ait pour module 1.

Exercice 2.26. (voir[5])

Soit (z_n) la suite définie dans $\mathbb{C}$ par :

$$z_0 = 1 + i \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = -\frac{1}{2}z_n$$

1. Démontrer que $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison
2. Exprimer $\arg(z_n)$ en fonction de n , puis z_n en fonction de z_0 et n

Exercice 2.27.

Soit $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ et $u = 1 + j$

- a) Démontrer que $1 + j + j^2 = 0$.
- b) Calculer $u^n (n \in \mathbb{N}^*)$ en fonction de n .

Exercice 2.28. (voir[3])

On considère le nombre complexe $z_0 = -2 - 2i\sqrt{3}$

1. Déterminer le module et un argument de z_0 . En déduire z_0^2 et z_0^3
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = z_0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz + 1 - 2i\sqrt{3} = 0$.

Exercice 2.29. (voir[5]) **Construction d'un pentagone régulier**

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On pose : $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

1. a) Démontrer que $1 + z_0 + \dots + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation $(E) : Z^2 + Z - 1 = 0$.
b) Exprimer α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
c) Résoudre (E) et déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
2. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4$.
a) Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec la droite de repère $(O, \vec{i})$.
Démontrer que l'affixe du point H est $\cos \frac{2\pi}{5}$.
b) Soit (Γ) le cercle de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i .
 (Γ) coupe la droite de repère $(O, \vec{i})$ en M et N , M étant le point d'abscisse positive.
Démontrer que M et N ont pour affixes respectives α et β et que H est le milieu de $[OM]$.
c) En déduire une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0 .

Exercice 2.30. (voir[3])

Soit $z = -4i$; un nombre complexe.

1. Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe z . On désignera ces racines par z_1, z_2, z_3, z_4 .
2. Calculer les nombres $A = \sum_{k=1}^4 z_k, B = \sum_{k=1}^4 z_k^2$ et $C = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{z_k}$.

2.5 Correction des exercices

Exercice 11

Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1. $|z_1| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$$\begin{cases} \cos \arg z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \arg z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{1}}{2} \end{cases} \implies \arg z_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} \cos \arg z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \arg z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \implies \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}$$

2. Posons $z = \frac{z_1}{z_2}$ et mettons z sous la forme algébrique et trigonométrique.

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{z_1}{z_2} \\
 &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \frac{1}{1-i} \\
 &= \frac{1}{2}(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i) \frac{1}{2} \\
 &= \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
 z &= \frac{z_1}{z_2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))} \\
 &= \cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) \\
 &= \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad z &= \frac{z_1}{z_2} \\
 &= \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \\
 &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Conclusion générale

En conclusion nous avons montré qu'il existe une application bijective de l'ensemble des similitudes de centre $O(0)$ dans $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire qu'une similitude directe de centre O peut être modélisée par un couple $(a; b)$. Et par suite nous avons défini une nouvelle opération sur les couples qui prolonge la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui s'obtient par la composée de deux similitudes de centre O . Ces couples acquièrent le statut de nombres puisqu'ils se prêtent à des calculs (somme, multiplication). Grâce à la notation d' EULER, nous avons construit un ensemble contenant $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, chaque élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + ib$ (i étant le couple $(0; 1)$ qui modélise la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$). A partir d'un objet mathématique concret (Similitude directe de centre O) nous avons donné un sens aux nombres complexes. Nous avons interprété les solutions de l'équation $x^2 = -1$ (comme une rotation de centre O qui, composée par elle même donne une rotation de centre O et d'angle π).

Le cours proposé au chapitre deux est bien détaillé (avec des exercices d'application, des activités pédagogiques, des exercices d'entraînement) pour faciliter l'enseignement de l'aspect trigonométrique des nombres complexes aux enseignants et l'apprentissage pour les élèves de terminale scientifique. Les élèves ont intérêt à bien assimiler cette ressource parce qu'elle intervient dans beaucoup de parties du programme (Primitives et Intégration, isométrie et similitude, trigonométrie...). Les exercices du chapitre deux peuvent servir d'objet d'évaluation pour vérifier si les enseignements dispensés ont été bien assimilés.

Dans la suite nous pouvons nous intéresser aux intérêts d'avoir inventé les nombres complexes en mathématiques ou dans l'interdisciplinarité (en physique, Électronique, Télécommunication et j'en passe).

Bibliographie

- [1] CHARLES MVOMO OTAM et al, MAJORS en Mathématiques terminales C-E, ASVA EDUCATION, Mars 2012.
- [2] Hilda ROSSEEL et MAGGY SCHNEIDER, Ces nombres qu'on dit imaginaires sont-ils vraiment des nombres?, Laboratoire de didactique des mathématiques, Facultés universitaires de Namur, Petit X n° 63, 2004
- [3] JEAN-LECOUTRE.PHILIPPE PILIBOSSIAN, édition DUNOD 2001
- [4] M. MONGE.-C Audouin-Egoroff F. Lemaire'Body, MATHÉMATIQUES Terminale C-E Tome 1 Bulletin officiel du 24 juin 1971 EDICEF 1999.
- [5] SALIOU TOURE et al, Collection Inter Africaine de Mathématique Terminale SM (CIAM), EDICEF 1999, Dépôt légal 11/2004
- [6] Microsoft Encarta 2008
- [7] www.EDUCAMER.org

Annexe

Programme officiel :

Continuité des fonctions numériques.

TAGNE TAKAM Griaul Bruno

le 17 septembre 2012

Table des matières

0.1	Objectifs pédagogiques :	3
0.2	Pré-requis :	3
0.3	Place dans le programme :	4
0.4	Introduction	5
1	Rappels	7
1.1	Activités	7
1.1.1	Activités 1 :	7
1.2	Définitions.	7
1.2.1	Fonctions continues en un point.	7
1.2.2	Fonction continue à droite en un point	11
1.2.3	Fonction continue à gauche en un point	12
1.3	Comment reconnaître une fonction continue en un point ?	15
1.3.1	Critère de continuité en un point	15
1.3.2	Continuité en un point et opération	16
1.3.3	Continuité en un point et composition	17
2	Continuité sur un intervalle	20
2.1	Activité 2.1	20
2.1.1	Fonction continue sur un intervalle	21
2.1.2	Continuité sur un intervalle et fonctions élémentaires	22
2.1.3	Continuité sur un intervalle et opération	22
2.1.4	Continuité sur un intervalle et composition	23
2.1.5	Image d'un intervalle par une fonction continue	24
2.1.6	Théorème des valeurs intermédiaires	27
2.1.7	Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone	30
2.1.8	Bijection réciproque d'une fonction continue et monotone	31
2.1.9	Prolongement par continuité	33
2.1.10	Recollement par continuité	38

2.2	<u>Exercices résolus</u>	41
	Bibliographies	45
	Bibliographie	46

0.1 Objectifs pédagogiques :

A l'issue de ce cours, le lecteur doit être capable de :

Le lecteur dans son étude doit être capable de :

1. Étudier la continuité d'une fonction sur un intervalle,
2. Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue,
3. Étudier la continuité de la somme, du produit et du rapport de fonctions,
4. Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue et monotone,
5. Étudier la continuité de fonctions composées,
6. Lire graphiquement la continuité d'une fonction,
7. Utiliser la recollement par continuité,
8. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

0.2 Pré-requis :

Pour le faire, il doit être capable avant d'aborder ce cours , de pouvoir :

1. Calculer l'image d'un réel par une fonction,
2. Déterminer le domaine de définition d'une fonction,
3. Calculer les limites d'une fonction en un point,
4. Déterminer graphiquement d'un intervalle par une fonction,
5. Étudier la continuité d'une fonction à droite et à gauche en un point,
6. Étudier la continuité d'une fonction en un point,
7. Étudier la monotonie d'une fonction,
8. Encadrer une fonction,
9. Connaître les fonction de référence continues.

0.3 Place dans le programme :

la notion de continuité d'une fonction est une notion très importante en mathématiques, dans la mesure où elle intervient dans presque toutes les autres notions du programme : les suites, les intégrales, les équations différentielles, la probabilité... Donc, il est nécessaire de l'introduire avant tous ces chapitres et après la notion de limite dont elle dépend.

0.4 Introduction

La notion de continuité en mathématique garde le même sens qu'en français. "continuité" qui signifie " sans interruption". elle intervient dans plusieurs domaines tels que : l'imagerie, le cinéma, la physique, la vie courante et bien d'autres. Mais ici, nous parlerons de continuité des fonctions numériques à variables réelles. Sachant que les fonctions en mathématiques, sont des représentations des phénomènes réels, elles représentent l'étude d'une grandeur dépendant d'une autre ou de plusieurs autres. Par conséquent, la continuité permet de décrire les phénomènes qui ne sautent pas brutalement, mais évoluent progressivement. Par exemple, on dit souvent : " exprimer la distance en fonction du temps, exprimer l'aire d'un disque en fonction de son rayon..."

Pour bien assimiler et comprendre les notions abordées ici, il serait intéressant pour le lecteur de maîtriser le calcul des limites.

les fonctions utilisées dans ce cours, sont des fonctions numériques à variables réelles.

RAPPELS

1.1 Activités

1.1.1 Activités 1 :

Une voiture roule sur une route plate et rectiligne. A 15 mètres de son point de départ, le chauffeur se rend compte d'un fossé de 3 mètres de long, qui coupe cette route en deux. Ce qui l'oblige à rebrousser chemin.

- Que peut-on dire de cette route au point où se trouve le fossé ?
- La route est contenue dans un plan (et représentée par une ligne), et on le muni d'un repère $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

Cette route étant contenue dans ce plan, peut-être représentée dans le repère R par une fonction f .

(a)- Représenter f dans le repère R si on suppose que le trottoir a une largeur de 4 mètres et l'axe des abscisses est confondu à la bordure (extérieure à la route) du trottoir.

(b)- Que pouvons-nous dire de la fonction f au point d'abscisse 15 ?

- Maintenant, considérons que sur la route il n'y ait pas de fossé. Alors la voiture continuerait son chemin sans problème.
- Représenter la courbe g représentant la route pour ce cas. Que pouvons-nous dire de g au point d'abscisse 15.

Après avoir répondu à toutes ces questions, nous pouvons ainsi définir ce qu'on entend par fonction continue en un point.

1.2 Définitions.

1.2.1 Fonctions continues en un point.

Débutons par énoncer une remarque faite sur le calcul des limites. Elle est donnée comme suit :

Remarque 1.1 : Si f est définie en x_0 , la valeur de la limite de f en x_0 ne dépend pas de la valeur de $f(x_0)$.

Exemples :

$$- f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} & \forall x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrons que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \quad (1.1)$$

Pour cela nous allons calculer la limite de f à droite puis à gauche en 0.

l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

Par ailleurs f coïncide sur $]0; +\infty[$ avec la fonction $l : x \mapsto \frac{x^2}{x} = x$, définie de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l(0) = 0. \quad (1.2)$$

De même f coïncide sur $] -\infty; 0[$ avec $j : x \mapsto \frac{x^2}{-x} = -x$, définie aussi de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$.

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = j(0) = 0. \quad (1.3)$$

On obtient alors que la limite de f en 0 à droite et à gauche est la même. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \quad (1.4)$$

Par ailleurs $f(0) = 1$. Donc la limite de f en 0 ne dépend pas de $f(0)$.

$$- h(x) = \frac{(2x+1)(x+3)}{x+3}.$$

$$D_h = \mathbb{R} - \{-3\}.$$

h coïncide pour $x \neq -3$ avec $u : x \mapsto \frac{(2x+1)(x+3)}{x+3} = 2x+1$ (par simplification).

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow -3} h(x) = u(-3) = -5. \quad (1.5)$$

Mais h n'existe pas en -3. D'où cette limite ne dépend pas de l'image de -3 par h .

$$- g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$D_g = \mathbb{R}^*$$

En utilisant le calcul de limite des fonctions composées et le fait que la fonction sinus n'admet pas de limite en l'infini, on constatera que g n'admet pas de limite en 0. Et de plus $g(0)$ n'existe pas. D'où également, la limite de g ne dépend pas de l'image de g en 0.

Ainsi, on note la définition d'une fonction continue de la façon suivante :

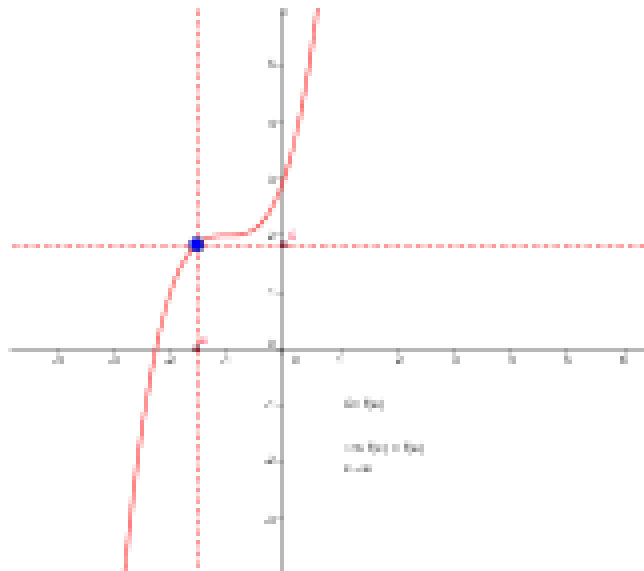
Definition 1.1 :

Soit f une fonction et x_0 un réel.

f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Attention

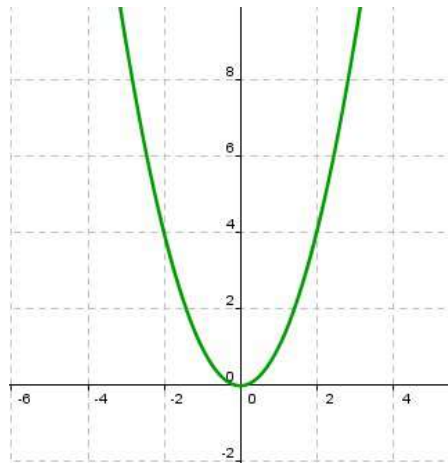
Cette définition montre que : pour dire que f est continue en x_0 , il faut d'abord vérifier que f est définie en x_0 ensuite, que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



brutus package/fig22.png

Exemples 1.1 :

1. La trajectoire d'un mobile en déplacement est générée par une fonction continue (de la forme $\frac{1}{2}ax^2 + vx + v_0$).
2. $f(x)=x^2$.



brutus package/fig1.jpg

Pour tout nombre réel x_0 , on a : f est définie en x_0 . De plus,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0^2 = f(x_0) \quad (1.6)$$

On en déduit alors que la fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction continue en tout élément de $\mathbb{R}$

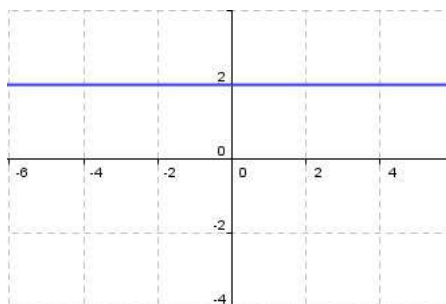
3. $g(x)=k$.

pour tout élément x_0 de $\mathbb{R}$, g est définie en x_0 et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = k = g(x_0). \quad (1.7)$$

Donc la fonction $x \mapsto k$ (fonction constante) est continue en tout élément de $\mathbb{R}$

brutus package/fig2.jpg

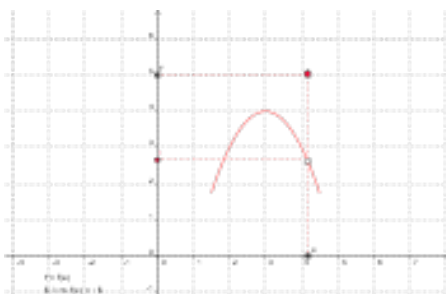
**Remarques 1.1 :**

- Si la fonction f n'est pas continue en x_o , alors soit f n'est pas définie en x_o , soit

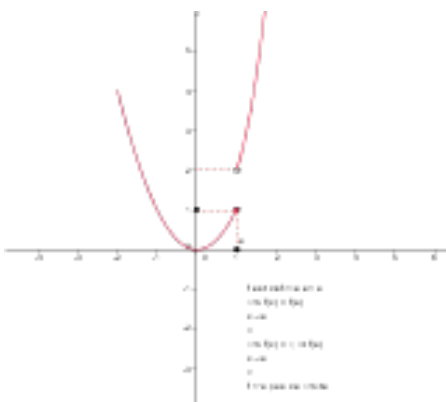
$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) \neq f(x_o), \text{ soit } f \text{ n'admet pas de limite en } x_o. \quad (1.8)$$

- Si f n'est pas définie en x_o , alors la question de sa continuité ne se pose pas.
- Si f est définie en x_o , et limite de $f(x)$ quand x tend vers x_o existe et est différente de $f(x_o)$, alors f n'est pas continue en x_o .

brutus package/fig24.png



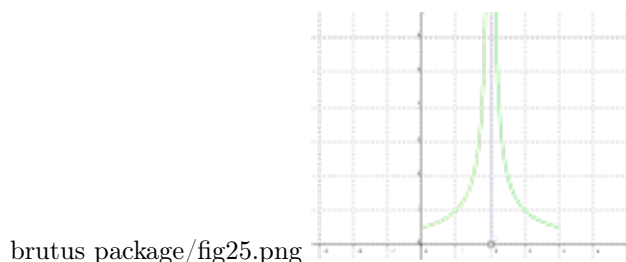
brutus package/fig23.png



- Si f n'admet pas de limite en x_o , alors f n'est pas continue en x_o .
- On ne peut pas étudier la continuité d'une fonction f en $-\infty$ ou en $+\infty$ car ceux-ci ne sont pas des éléments de $\mathbb{R}$.

L'idée générale

La continuité d'une fonction numérique à variable réelle peut se traduire par le fait que sa courbe représentative peut être tracée d'un seul tenant, sans lever le crayon.



brutus package/fig25.png

Propriété 1.1.1 : Si f est une fonction continue en x_0 , alors on a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Cette propriété permet de calculer les limites en un point de toutes les fonctions continues en ce point. par exemple $\lim_{x \rightarrow 3} (x^4 - x + 3) = 3^4 - 3 + 3 = 81$.

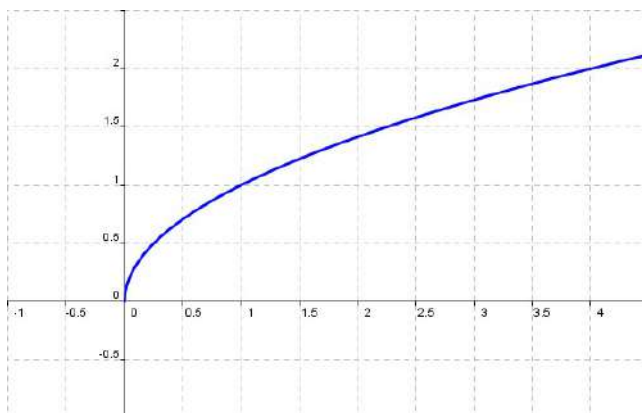
1.2.2 Fonction continue à droite en un point

Définition 1.2 : soient f une fonction et x_0 un réel.

f est continue à droite en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Exemples 1.2 :

1. $f(x) = \sqrt{x}$.



brutus package/fig0.jpg

f est définie sur $[0; +\infty[$ et,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad (1.9)$$

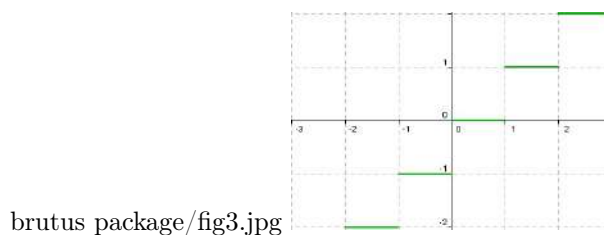
et $f(0) = 0$.

Ce qui permet de dire que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue à droite en 0.

2. $f(x) = E(x)$. f est la fonction partie entière définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1; 2[\end{cases}$

f est définie sur $[1; 2[$.

En calculant la limite à droite en 1, on obtient :



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \quad \text{Deplus} \quad f(1) = 1 \quad (1.10)$$

On conclut que la fonction partie entière est continue à droite en 1.

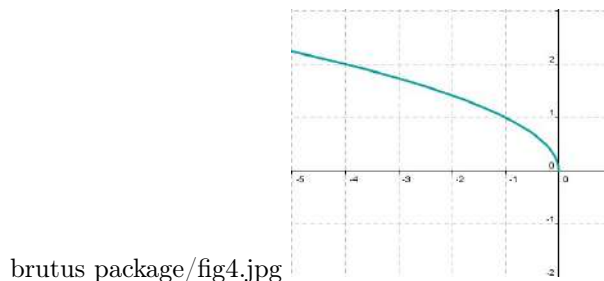
1.2.3 Fonction continue à gauche en un point

Définition 1.3 : Soient f une fonction et x_0 un réel.

f est continue à gauche en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Exemples 1.3 :

$$f(x) = \sqrt{-x}.$$



Elle est définie sur $] -\infty; 0]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0. \quad (1.11)$$

On en déduit alors que f est continue à gauche en 0.

Propriété 1.3 : Soient f une fonction et x_0 un réel. f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0 .

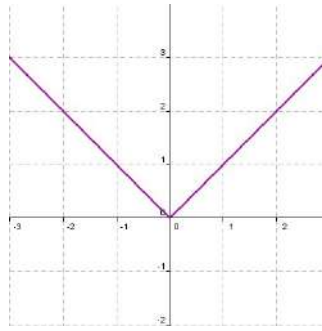
$$\text{i.e.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Exemples 1.4 :

$$f(x) = |x| \text{ peut-être encore écrit : } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

f est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

f coïncide sur $[0; +\infty[$ avec la fonction $t : x \mapsto x$ et sur $]-\infty; 0]$ avec la fonction $k : x \mapsto -x$. Donc



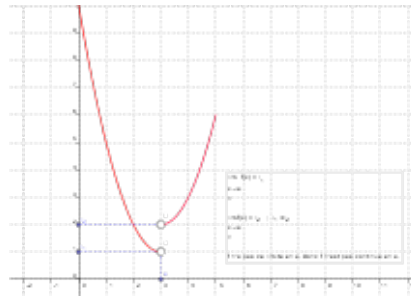
brutus package/fig5.jpg

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = t(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = k(0) = 0. \quad \text{Et de plus } f(0) = 0. \quad (1.12)$$

Ainsi donc, la fonction valeur absolue est continue à gauche et à droite en 0. Elle est continue en 0.

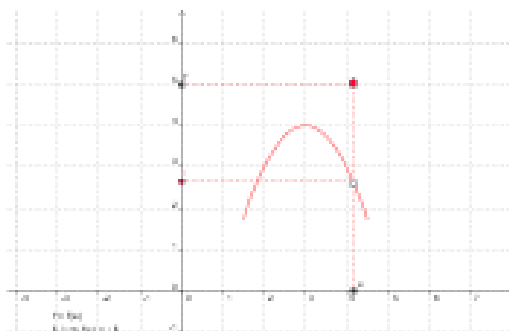
Remarques 1.2 :

1. Il est des fonctions dont pour étudier la continuité, on n'a pas besoin d'étudier la continuité à droite et la continuité à gauche (car ce type de fonction n'est pas définie soit à droite, soit à gauche en cet élément) .
On a par exemple la fonction racine carrée, qui est continue en 0 sans l'être à gauche de 0.
2. Si les limites à droite et à gauche en x_o existent et sont différentes, alors f n'est pas continue en x_o .



package/fig26.png

3. Si f n'est pas continue en x_o , alors elle est dite discontinue en x_o . graphiquement, elle se remarque par un saut en x_o . Par exemple une route coupée par un fossé est une route discontinue.
4. si la limite à droite est égale à la limite à gauche en x_o et est différente de $f(x_o)$, alors la fonction n'est pas continue en x_o .



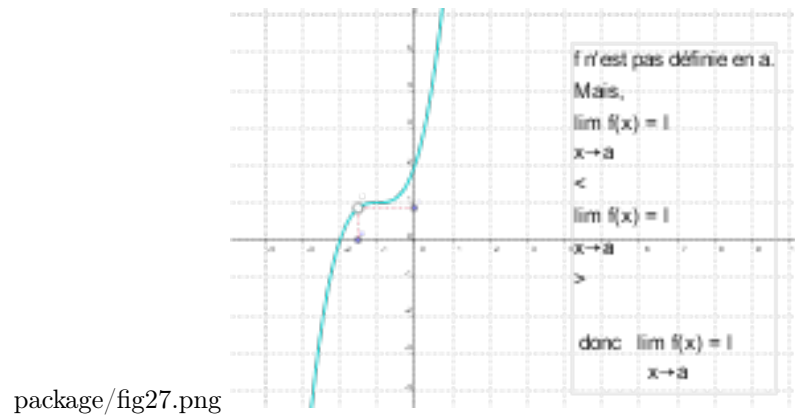
package/fig24.png

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$$

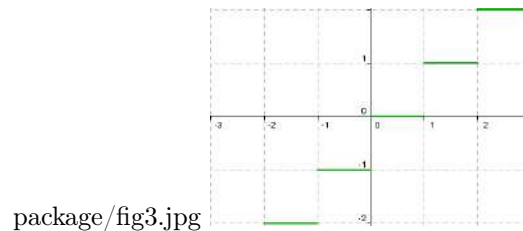
$$1 \neq f(a)$$

f n'est pas continue en a .



Exemples 1.5 :

$$f(x) = E(x).$$



f est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \quad (1.13)$$

On obtient ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x). \quad (1.14)$$

Il en résulte que f n'est pas continue en 1.

De même f n'est continue en aucun nombre entier. On dit alors que la fonction partie entière n'est continue en aucun nombre entier relatif. Cependant, elle est continue en tout nombre non entier. (la démonstration est laissée au soin du lecteur)

1.3 Comment reconnaître une fonction continue en un point ?

Propriétés 1.4 (fonction élémentaires) : On admet que les fonctions suivantes sont continues en tout élément x_o de leur ensemble de définition.

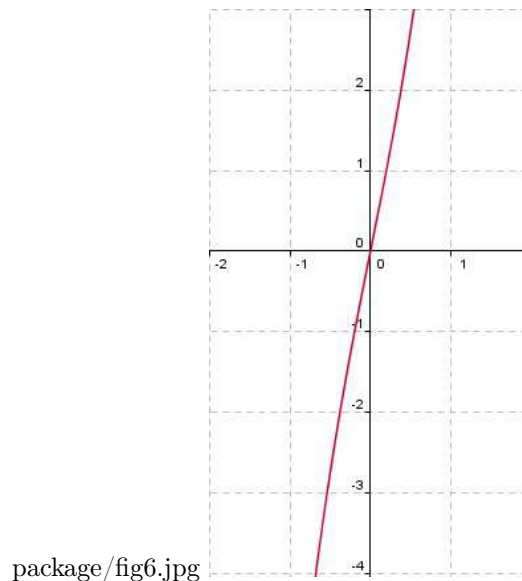
$x \mapsto x $	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto x^n$ (n, entier naturel non nul)	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (n, entier naturel non nul)
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto x^q$ (q, rationnel non nul)	$x \mapsto k$ (k, constante)

1.3.1 Critère de continuité en un point

Propriété 1.5 : Toute fonction qui est somme, produit, ou quotient de fonctions élémentaires est continue en tout élément de son ensemble de définition.

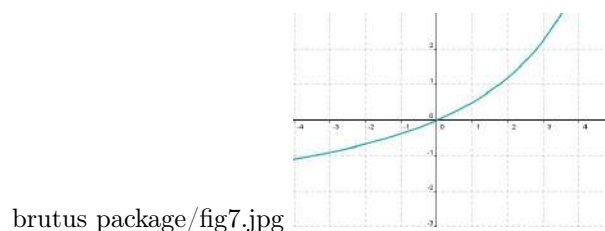
Exemples 1.6 :

1. $f(x) = 2x^3 + 5x$



f est une fonction polynôme, qui est somme des produit des fonctions élémentaires continues en tout élément x_o de $\mathbb{R}$.

2. $t(x) = \frac{3x}{|x-7|}$



t est une fonction rationnelle qui est continue en tout x_o de $\mathbb{R} \setminus \{7\}$.

1.3.2 Continuité en un point et opération

Propriété 1.6 : Soient x_o et λ deux réels, f et g deux fonctions.

1. Si f et g sont continues en x_o , alors $f+g$, $f.g$, λf sont continues en x_o .
2. Si de plus $g(x_o) \neq 0$, alors f/g est continue en x_o .

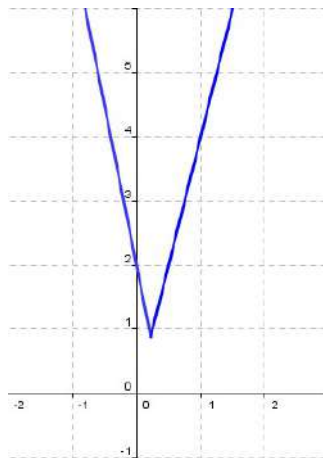
Démonstration :

Supposons que f et g sont continues en x_o . Alors les limites de f et g existent et sont respectivement égales à $f(x_o)$ et $g(x_o)$. Par suite, $f+g$, $f.g$, λf admettent chacune une limite, et elles sont respectivement : $f(x_o) + g(x_o)$, $f(x_o) \cdot g(x_o)$, $\lambda f(x_o)$. D'où $f+g$, $f.g$, λf sont continues en x_o .

Si par ailleurs $g(x_o) \neq 0$, alors f/g admet une limite en x_o égale à $f(x_o)/g(x_o)$. Donc f/g est continue en x_o .

Exemples 1.7 :

1. $h(x) = |x| - 3$



brutus package/fig9.jpg

h est une fonction continue en tout nombre réel comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2. $v(x) = (3x - 7)(6x - 2)$

v est une fonction continue en tout nombre réel comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

3. $w(x) = \frac{x^5 - 6x^3}{4 - x^2}$ est une fonction continue en tout élément de $\mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$ comme rapport de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$.

Il existe des fonctions pour lesquelles on ne peut directement appliquer le critère de continuité en un point.

Dans ce cas comment procéder ?

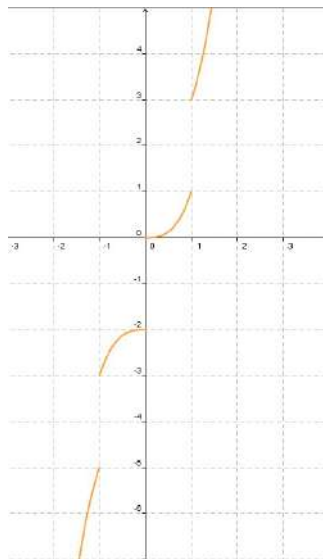
Propriété 1.7 : Étant donné deux fonctions qui coïncident sur un intervalle ouvert K , si l'une est continue en un élément x_o de K , alors l'autre est aussi continue en ce même élément x_o .

On rappelle que deux fonctions f et g coïncident (ou sont égales) sur un intervalle I si et seulement si pour tout élément x de I , on a $f(x) = g(x)$. (Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f et celle

de g sont confondues sur cet intervalle.)

Exemples 1.8 :

1. $f(x) = x^3 + 2E(x)$



brutus package/fig8.jpg

Étudions la continuité de f en 0.5.

Sur l'intervalle $[0; 1[$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est équivalente à la fonction $g : x \mapsto x^3$. Donc f et g coïncident sur $[0; 1[$. Or g est continue en 0.5. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0.5} f(x) = g(0.5) = 0.5^3. \quad (1.15)$$

On en déduit que f est continue en 0.5.

2. $f(x) = \max(4x; 2 - 5x)$

Étudions la continuité de f en 0.

x	$-\infty$	$2/9$	$+\infty$
f(x)	$2-5x$		$4x$

f coïncide avec $h : x \mapsto 2 - 5x$ sur $] -\infty; \frac{2}{9}]$ et $0 \in] -\infty; \frac{2}{9}]$.

puisque h est continue en 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = h(0) = 2. \quad (1.16)$$

IL en ressort que f est continue en 0.

1.3.3 Continuité en un point et composition

Soient f et g deux fonctions définies par :

1. pour x positif, $f(x) = \sqrt{x}$

2. pour tout élément de $\mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 1$.

Alors pour $3x - 1 \geq 0$, et sachant que $f \circ g(x) = f(g(x))$, on a :

$$f \circ g(x) = f(3x - 1) = \sqrt{3x - 1}.$$

$$\text{Donc } f \circ g(x) = \sqrt{3x - 1}.$$

Et pour tout x réel positif, on a :

$$g \circ f(x) = 3\sqrt{x} - 1.$$

On peut remarquer que $g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$.

On sait aussi que, pour que $g \circ f$ soit définie, il faut et il suffit que $f(x)$ appartienne au domaine de définition de g .

Ainsi :

Propriété 1.8 : Soient f et g deux fonctions et x_o un réel.

$f \circ g$ est continue en x_o si et seulement si g est continue en x_o et f est continue en $g(x_o)$.

Démonstration :

soit x_o un élément de $\mathbb{R}$.

g étant continue en x_o , on a

$$\lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = g(x_o). \quad (1.17)$$

Ainsi, en posant $u_o = g(x_o)$ et f étant continue en $g(x_o)$, est continue en u_o . D'où par un changement de variable (poser $u = g(x)$), on a :

$$\lim_{u \rightarrow u_o} f(u) = f(u_o). \quad (1.18)$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f \circ g(x) = f(g(x_o)) = f \circ g(x_o). \quad (1.19)$$

Par conséquent $f \circ g$ est continue en x_o .

Remarques 1.3 :

1. Si g n'est pas continue en x_o ou si f n'est pas continue en $g(x_o)$, alors $f \circ g$ n'est pas continue en x_o .
2. Si $f \circ g$ n'est pas continue en x_o , alors soit g n'est pas continue en x_o , soit f n'est pas continue en $g(x_o)$.

Exemples 1.9 :

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ et } g(x) = x - 1.$$

f est continue en tout élément non nul de $\mathbb{R}$ et g est continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

Étudions la continuité de $f \circ g$ en 1 et en 0.

g est continue en 1 comme fonction polynôme. Mais $g(1) = 0$. Alors $f(g(1))$ n'est pas défini, c'est-à-dire que $f \circ g$ n'est pas définie en 1. Donc elle n'est pas continue en 1.

g est continue en 0 en raison du critère de continuité en un point. Et pour la même raison f est continue en $g(0) = -1$. Il vient alors que $f \circ g$ est continue en 0.

CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

Définition d'un intervalle 2.1 :

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble de la forme : $]a; b[$, $[a; b[$, $]a; b]$, $[a; b]$, $] -\infty; a]$, $] -\infty; a[$, $[b; +\infty[$, $[b; +\infty]$, $\mathbb{R} =] -\infty; +\infty[$.

Remarque 2.1 : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Une propriété des intervalles 2.1 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour tout $a, b \in I$ on a $[a; b] \subseteq I$.

2.1 Activité 2.1

soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$

1. f est-elle définie en 2 ?
2. Étudier la continuité de f en 2.
3. Étudier la continuité de f en $-2; 0; 3$.
4. soit $x_o \in]-\infty; 2[$. Étudier la continuité de f en x_o et donner une représentation graphique de f .
5. Étudier la continuité de f en chaque point de l'intervalle $[-1; 4]$. Que remarque-t-on ?
6. Que peut-on en conclure ?

solutions

1. 2 annulant le dénominateur de f , on en conclut que f n'y est pas définie .
2. La fonction f n'étant pas définie en 2, f n'y est pas continue .
3. On a, puisque f est définie en -2, 0 et en 3,

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{1}{4} = f(-2), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{5}{2} = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 14 = f(3). \quad (2.1)$$

On en déduit alors que f est continue en -2, 0 et en 3.

4. $x_o \in]-\infty; 2[$ implique que f est définie en x_o . d'où f est continue en x_o comme rapport de fonctions continues en x_o telles que le dénominateur de f est non nul en x_o .

Puisque x_o est pris quelconque, on a donc pour tout élément x_o de $] -\infty; 2[$, f continue en x_o .

D'où la définition suivante :

2.1.1 Fonction continue sur un intervalle

Activité :

Un chauffeur, empreinte un virage. Les eaux de pluies l'ayant dégradé, des fossés s'y sont formés. Ainsi, il se rend compte qu'un certain intervalle de la route a trois fossés. A 4 mètres de son point de départ il y a un fossé, également 3 mètres après et enfin 5 mètres après le précédent . Ces fossés ont tous la même longueur qui est d'un mètre.

On suppose qu'on est dans un repère $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$, l'axe des abscisses étant confondu avec la bordure extérieure (à la chaussée) du trottoir. La route dans ce repère est une ligne.

- 1)- Représentons h la courbe représentative de la route dans le repère R, si nous supposons que cette route est parabolique passant par l'origine de R et que le trottoir a une largeur de 2 mètres.
- 2)- Que pouvons-nous dire de la fonction h en les points d'abscisses respectifs 7, 10, et 15 ?
- 3)- Que pouvons-nous dire de la fonction h dans l'intervalle $[7; 15]$

Définitions

Définition2.2 :

Soient f une fonction et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

f est continue sur I si f est continue en tout élément de I.

Autres exemples2.1 :

1. $f(x) = x^2$ et $I =]-1; 1[$.

f est définie sur I, puisque définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout élément x_o de I, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = x_o^2 \text{ et } f(x_o) = x_o^2. \quad (2.2)$$

Alors f est continue en tout élément de I. Donc f est continue sur I.

2. $f(x) = \sin x$ et $I =]-\pi; 0[$.

f est définie sur I et pour tout a élément de I, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sin a. \quad (2.3)$$

D'où f est continue en tout élément de I. C'est-à-dire que f est continue sur I.

Une fonction est dite continue lors qu'elle est continue sur son ensemble de définition.

Remarques2.2 :

1. Si f est définie sur I et s'il existe un élément de I en lequel f n'est pas continue, alors f n'est pas continue sur I .
2. Si f n'est pas continue sur I , alors soit f n'est pas définie sur I , soit il existe un élément de I en lequel f n'est pas continue.
3. f est définie sur une réunion d'intervalles, si ses restrictions sur chacun de ces intervalles sont continues.
4. si f est une fonction continue en un élément x_o de $\mathbb{R}$, alors f est continue sur un intervalle centré en x_o et f est définie en x_o .
5. Si f est continue à droite (resp, à gauche) en x_o , alors f est définie en x_o et f est continue sur un intervalle de la forme $]x_o; x_o + \alpha[$, (resp, de la forme $]x_o - \alpha; x_o[$).

2.1.2 Continuité sur un intervalle et fonctions élémentaires

Propriété 2.2 : Les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition.

$x \mapsto x $	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto x^n$ (n entier naturel non nul)	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (n entier naturel non nul)
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto x^q$ (q, un rationnel non nul)	$x \mapsto k$ (k, constante)

Démonstration :

Ces propriétés se remarquent facilement sur le graphe et se déduisent de la continuité en un point.

2.1.3 Continuité sur un intervalle et opération

Propriété 2.3 :

Soient f et g , λ un réel et K un intervalle de $\mathbb{R}$.

si f et g sont continues sur K , alors :

- $f+g$, $f.g$, λf sont continues sur K .
- Si g ne s'annule pas sur K , alors f/g est continue sur K .
- Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions continues sur K , est continue sur K . (Critère de continuité sur un intervalle).

Démonstration :

soit x_o un élément de K .

- Puisque f et g sont continues sur K et donc continues en x_o , on a $f+g$, $f.g$ et λf sont continues en x_o . comme x_o est pris quelconque, on en conclut que $f+g$, λf et $f.g$ sont continues sur K .
- De plus si $g(x_o) \neq 0$, alors f/g est continue en x_o . Donc f/g est continue sur K .
- Soit v une fonction qui est somme (rep, produit ou quotient) de fonctions élémentaires continues sur K .

Alors ces fonctions élémentaires sont continues en x_o puisque continues sur K . D'où v est continue en x_o d'après le critère de continuité en un point. On en déduit que v est continue sur K .

Exemples 2.2 :

1. Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
3. Les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

2.1.4 Continuité sur un intervalle et composition

Propriété 2.4 :

Soient f et g deux fonctions, et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

$f \circ g$ est continue sur I si et seulement si g est continue sur I et f est continue sur $g(I)$ ($g(I)$ est l'ensemble de tous les réels $g(x)$, x parcourant I).

Démonstration :

Soit x_o un élément de I .

On a

$$\lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = g(x_o) \quad (2.4)$$

car g est continue sur I .

Mais, $g(x_o)$ est un élément de $g(I)$ et f est continue sur $g(I)$.

Donc f est continue en $g(x_o)$.

D'où

$$\lim_{x \rightarrow g(x_o)} f(x) = f(g(x_o)) = f \circ g(x_o). \quad (2.5)$$

Il en résulte que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f \circ g(x) = f \circ g(x_o). \quad (2.6)$$

ceci entraîne que $f \circ g$ est continue en tout point de I . On peut ainsi conclure que $f \circ g$ est continue sur I .

Exemple 2.3 :

Démontrons que la fonction $x \mapsto \sin \sqrt{3x^2 - x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus f est positive sur $\mathbb{R}$.

la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$.

Donc $g \circ f : x \mapsto \sqrt{3x^2 - x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.3 :

Plus généralement, la composée de deux fonctions continues sur leurs ensembles de définition est continue sur son ensemble de définition.

2.1.5 Image d'un intervalle par une fonction continue

Soient f une fonction et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Il convient de rappeler que $f(I)$ est l'ensemble de tous les réels $f(x)$ lorsque x parcourt I . $f(I)$ est l'image de I par f .

Ainsi, on a : y élément de $f(I)$ équivaut à : il existe x élément de I tel que $y = f(x)$ ($y \in f(I)$)
 $\Leftrightarrow \exists x \in I / y = f(x)$.

Activité 2.2 :

Soient $f(x) = \frac{x^2+3}{x-4}$ et $g(x) = x^3$. Soit $I = [-2; 6]$.

1. Représenter graphiquement f et g .
2. Étudier la continuité de f et de g sur I .
3. Déterminer graphiquement l'image de I par f et par g .
4. Relever les intervalles images de I par f et g .
5. Que pouvons-nous remarquer ?

Solutions

1. Représentations graphiques
2. f n'est pas définie en 4 et $4 \in I$. Donc f n'est pas continue sur I . g quant à elle est continue sur I comme fonction polynôme.
3. Représentations graphiques

4. $f(I) =]-\infty; -\frac{7}{6}] \cup [-\frac{7}{6}; \frac{37}{2}] \cup [\frac{37}{2}; +\infty[$ et $g(I) = [-8; 216]$.

5. nous remarquons que $f(I)$ est une réunion d'intervalles, qui n'est pas un intervalle. Tandis que $g(I)$ est un intervalle.

Ce qui nous permet d'énoncer les propriétés suivantes :

Propriétés :

Propriété 2.5 : L'image d'un intervalle par une fonction non continue peut ne pas être un intervalle.

Exemple 2.4 :

1. soit $f(x) = E(x)$ la fonction partie entière, et $I = [0; +\infty[$.

On a $f(I) = \mathbb{N}$ qui n'est pas un intervalle.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $I = [-1; 1]$.

On a $f(I) =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ qui n'est pas un intervalle, mais une réunion d'intervalles.

Propriété 2.6 : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. c'est-à-dire que si f est une fonction continue et I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle.

Exemples 2.5 :

Soient $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ et $I = [1; 3]$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $I \subset \mathbb{R}$.

Donc f est continue sur I .

Déterminons $f(I)$.

Soit x un élément de I . On a :

x élément de I équivaut à $1 \leq x \leq 3$.

équivaut à $-1 \leq x - 2 \leq 1$

équivaut à $0 \leq (x - 2)^2 \leq 1$

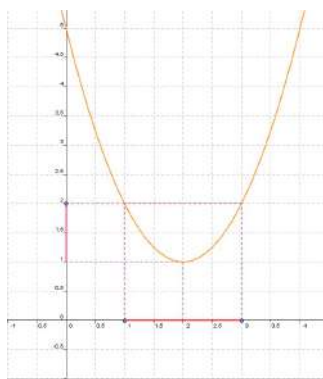
équivaut à $1 \leq (x - 2)^2 + 1 \leq 2$

équivaut à $f(x) \in [1; 2]$.

On a donc $f(I) = [1; 2]$ qui est un intervalle.

Mais,

Remarque 2.4 :

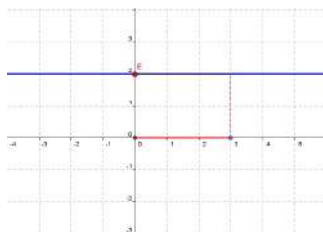


brutus package/fig13.jpg

1. Si f est une fonction constante, alors $f(I)$ est réduit à un singleton.
2. Si f est continue sur I , les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas forcément de même nature (c'est-à-dire tous ouverts, tous semi-ouverts, tous fermés).

Exemples 2.6 :

1. $f(x) = 2$ et $I =]0; 3[$.



brutus package/fig14.jpg

f est continue sur I comme fonction constante. Ainsi, pour tout élément x de I , $f(x) = 2$.

D'où $f(I) = \{2\}$.

2. $u(x) = x^4$ et $I =]-2; 5[$.

u est continue sur I comme fonction polynôme et $u(I) = [0; 625[$.

Toutefois pour les intervalles fermés, nous énonçons la propriété suivante :

Propriété 2.7 : Soient f une fonction et $I = [a; b]$ un intervalle fermé

avec a et b deux réels distincts tels que $a < b$.

Si f est une fonction continue sur I , alors $f(I)$ est un intervalle fermé.

Remarques2.5 :

1. soit $I = [a; b]$ un intervalle fermé. Alors $f(I)$ est un intervalle fermé et donc il existe m et M tels que $f(I) = [m; M]$.

Par suite on a pour tout élément x de I , on a $m \leq f(x) \leq M$. Ce qui traduit que f est bornée.

2. La fonction continue f admet sur l'intervalle fermé I , un minimum m et un maximum M absolus ; ce sont les deux bornes du segment $f(I)$. Cependant, m et M ne sont pas forcément $f(a)$ et $f(b)$.

Corollaire2.1 :

Soient I un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction.

Si f est continue sur I , alors il existe au moins un couple $(c; d)$ de $I \times I$ tel que l'on ait :

pour tout x élément de I , $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

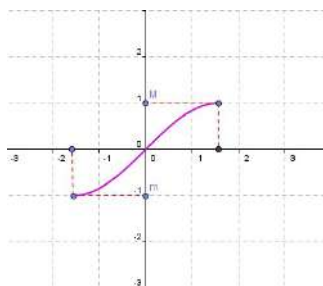
Démonstration :

I étant un segment de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle fermé, et f continue, d'après la propriété précédente, $f(I)$ est intervalle fermé $[m; M]$. On a donc pour tout élément x de I , $m \leq f(x) \leq M$.

d'autre part, m et M appartiennent à $f(I)$. Ainsi d'après la propriété précédente, on obtient $[m; M] \subset f(I)$. Il existe donc au moins un couple $(c; d)$ de $I \times I$ tel que l'on ait $m = f(c)$ et $M = f(d)$.

Exemple2.7 :

Soit $f : x \mapsto \sin x$ et $I = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.



brutus package/fig15.jpg

On a $f([-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]) = [-1; 1]$ et pour tout élément x de I , $f(-\frac{\pi}{2}) \leq f(x) \leq f(\frac{\pi}{2})$.

2.1.6 Théorème des valeurs intermédiaires**Activité 2.3 :**

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$.

1. Étudier la continuité de f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
2. Justifier que pour tout x élément de $[1; +\infty[$, $f(x) \geq -2$.
3. Tracer la courbe représentative de f .
4. Démontrer que tout élément β de $[-2; +\infty[$ a un antécédent α dans $[1; +\infty[$; en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1; +\infty[$.
5. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[1; +\infty[$.

Résoudre certaines équations relève d'un travail assez fastidieux. Dans certains cas il est impossible de trouver les valeurs exactes des solutions de celles-ci. Ainsi, on convient souvent de prouver l'existence de ces solutions sans pour autant les déterminer. Le théorème des valeurs intermédiaires est pour ce fait d'une très grande utilité. Après avoir prouvé l'existence de ces solutions, les valeurs approchées de celles-ci sont déterminées par différentes méthodes apprises :

- Le balayage des intervalles contenant chacun l'une des solutions, après avoir choisi un pas adéquat.
- La dichotomie.

Théorème 2.1 : Soient f une fonction continue sur un intervalle I ,
 a et b deux éléments de I . Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b .

Interprétation graphique

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, soit (C) la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle I .

Alors pour toute valeur y_o comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y = y_o$ coupe (C) en au moins un point entre a et b d'ordonnée y_o .

Démonstration :

On sait que $f([a; b])$ est un intervalle K .

Soit y_o un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

On a $f(a)$ et $f(b)$ sont deux éléments de K . K étant un intervalle, on a $[f(a); f(b)] \subset K$ si $f(a) < f(b)$ (ou $[f(b); f(a)] \subset K$ si $f(b) < f(a)$). Ainsi, $y_o \in K$.

Or $K = f([a; b])$. Donc $y_o \in f([a; b])$. On en déduit par définition de $f([a; b])$ que y_o a au moins un antécédent compris entre a et b .

Remarque 2.6 :

si f n'est pas continue sur $[a; b]$, un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ peut ne pas avoir d'antécédent dans l'intervalle $[a; b]$.

Exemple 2.7 :

E désigne la fonction partie entière.

On a $E(1) < 1,5 < E(2)$. Mais 1,5 n'a pas d'antécédent par E dans $[2; 3]$.

Ceci prouve que l'hypothèse de continuité est fondamentale pour l'application de ce théorème.

On déduit du théorème précédent la propriété suivante :

Propriété 2.8 :

Soient f une fonction et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si f est continue et s'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de I tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Démonstration :

$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Alors, on a $0 \in [f(a); f(b)]$ (ou $0 \in [f(b); f(a)]$). Il résulte du théorème précédent qu'il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = 0$.

Interprétation graphique

Le plan étant toujours muni d'un repère orthonormal, et (C) la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle I .

Alors, la courbe (C) coupe l'axe des abscisses au moins une fois entre a et b .

Exemple 2.8 :

Soient $s(x) = x^5 + x + 1$ et $I = [-1; 1]$.

Montrons que l'équation (E) : $s(x) = 0$ a au moins une solution dans I .

On a $s(-1) = -1$ et $s(1) = 3$. on peut remarquer que $s(-1)$ et $s(1)$ sont de signes contraires.

D'après donc le théorème des valeurs intermédiaires, on conclut que (E) a au moins une solution dans I .

La propriété suivante est la contraposée de la propriété 1.

Propriété 2.9 : Soient f une fonction, et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si f est continue sur I et ne s'y annule pas, alors f garde un signe constant sur I .

Démonstration :

Procédons par l'absurde.

Supposons que f est continue sur I et ne s'y annule pas (c'est-à- dire, pour tout x élément de I , $f(x) \neq 0$) et f change de signes sur I .

Alors il existe a et b deux élément de I tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c élément de $] a ; b [$ tel que $f(c) = 0$. Et par suite il existe c élément de I tel que $f(c) = 0$.

il vient alors que : pour tout élément x de I , $f(x) \neq 0$ et $c \in I$ tel que $f(c) = 0$. Ce qui est absurde.

2.1.7 Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

On rappelle qu'une fonction est dite monotone, si elle est croissante ou décroissante. Elle est dite strictement monotone, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Théorème 2.2 :

1. Soit f une fonction, a et b deux réels tels que $a < b$, $I = [a ; b]$. Si f est continue et croissante sur I (ou décroissante sur I), alors $f(I)$ est le segment $[f(a) ; f(b)]$ (ou $[f(b) ; f(a)]$).
2. Soit a un réel, b désignant soit un réel, soit $+\infty$ et $I = [a ; b[$.
Si f est continue et croissante sur I (ou décroissante sur I), alors f a une limite c en b (ou c' en b) et $f(I)$ est l'intervalle $[f(a) ; c [$ (ou $] c' ; f(a)]$), c désignant soit un réel, soit $+\infty$ et c' désignant soit un réel, soit $-\infty$.
3. a désignant soit un réel, soit $-\infty$, b désignant soit un réel, soit $+\infty$ et $I =]a ; b]$.
Si f est continue et croissante sur I (ou décroissante sur I), alors f a une limite c en a , d en b (ou c' en a et d' en b) et $f(I)$ est l'intervalle $] c ; d [$ (ou $] d' ; c' [$) et d et c' désignant soit des réels, soit $+\infty$ et , c et d' désignant des réels, soit $-\infty$.

Le théorème est vrai si f est strictement monotone.

Exemple 2.9 :

1. $f(x) = x^2$ et $I = [1 ; 3]$.

f est continue et strictement croissante sur I , donc $F(I) = [f(1) ; f(3)]$. e.i. $f(I) = [1 ; 9]$.

2. $g(x) = \cos x$ et $I = [0 ; \Pi]$.

f est continue et strictement décroissante sur I . Donc $g(I) = [g(\Pi); g(0)] = [-1; 1]$.

3. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ et $I = [0; +\infty[$. f est continue et croissante sur I . Ainsi $f(I) = [1; +\infty[$.

Remarque 2.7 :

Lors qu'une fonction f est continue et strictement monotone sur I , $f(I)$ est un intervalle de même nature que I et ses bornes sont limites de f aux bornes de I .

Le tableau suivant précise $f(I)$ suivant la nature de I et le sens de variation de f .

Soient a et b deux réels distincts tels que $a < b$.

I	$f(I)$
	f strictement croissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$
$]a; b]$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$
$[a; +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$
$\mathbb{R}$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$
	f strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a; b]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$[a; +\infty[$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$\mathbb{R}$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$

Si f n'est pas monotone sur I , l'étude des variations de f nous amène à découper I en sous-intervalles sur lesquels f est monotone. Nous savons déjà trouver l'image de chacun de ces intervalles et $f(I)$ est la réunion de ces images; nous pouvons montrer que $f(I)$ est lui aussi un intervalle.

2.1.8 Bijection réciproque d'une fonction continue et monotone

Activité 2.4 :

Soient $f(x) = \tan x$ et $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur I .
2. Calculer $f(I)$ et en déduire que $f(I)$ est un intervalle.
3. montrer que $f :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection.
4. Représenter (C) la courbe graphique de f et représenter (C') la courbe obtenue par symétrie d'axe $\Delta : y = x$ de f .

Propriétés :

Propriété 2.10 :

Soit f une fonction et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone sur I , alors :

1. f réalise une bijection de I vers $f(I)$.
2. Sa bijection réciproque, notée f^{-1} , est continue et strictement monotone, de même variation que f de $f(I)$ sur l'intervalle I .
3. Pour tout élément x de I , $f(x) \in f(I)$ et $f(x) = y$ équivaut à $y = f^{-1}(x)$.

Démonstration :

1. La fonction f est continue sur I . Donc $f(I)$ est un intervalle.
 - la fonction f est une surjection de I sur $f(I)$ car par définition de $f(I)$, pour tout y élément de $f(I)$, il existe x élément de I tel que $y = f(x)$. i.e. l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution sur I .
 - Démontrons que f est aussi injective sur I .
Soient a et b deux éléments distincts ($a \neq b$) de I . Supposons $a < b$. Puisque f est strictement croissante (resp strictement décroissante) sur I , on obtient : $f(a) < f(b)$ (resp $f(a) > f(b)$), et par suite $f(a) \neq f(b)$. Donc f est injective sur I . Ainsi, f est à la fois surjective et injective sur I . Par conséquent f est bijective de I vers $f(I)$.

2. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f sur I .

f^{-1} est une application bijective de $f(I)$ vers I .

Conformément au programme, nous admettons que f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Étudions son sens de variation sur $f(I)$.

Soient y et z deux éléments quelconques de $f(I)$ distincts; supposons que l'on ait $y < z$ et appelons x (resp a) l'antécédent de y (resp z).

On a ainsi $y = f(x)$ et $z = f(a)$.

Par suite on obtient $x = f^{-1}(y)$ et $a = f^{-1}(z)$.

Supposons f strictement croissante et f^{-1} strictement décroissante.

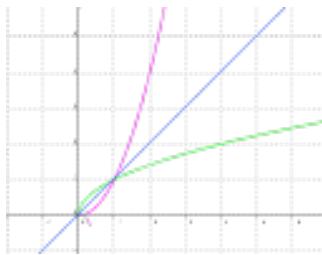
Si $x > a$, ce qui équivaut à $f^{-1}(y) > f^{-1}(z)$, alors on a $f(f^{-1}(y)) > f(f^{-1}(z))$ puisque f est strictement croissante. c'est-à-dire $y > z$. ce qui est absurde.

3. De même pour f strictement décroissante et f^{-1} strictement croissante, si $x > a$, on aboutit à $y > z$. ce qui est absurde.

Remarques 2.8 :

1. Pour tout x élément de I , $f^{-1} \circ f(x) = x$, pour tout y élément de $f(I)$, $f \circ f^{-1}(y) = y$, ceci signifie que $f^{-1} \circ f = id_I$ et $f \circ f^{-1} = id_{f(I)}$.
2. Si (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont respectivement les courbes représentatives de f et de f^{-1} , alors elles sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y=x$).

Soit $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$. f a pour fonction réciproque $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.



brutus package/fig.png

Plus généralement, la fonction $h : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ si n est pair et de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ si n est impair) a pour fonction réciproque $h^{-1} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

2.1.9 Prolongement par continuité

Activités 2.5

Soit la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Étudier la continuité de f en 0.
3. Calculer la limite de f en 0.

4. Soient les fonctions définies par : $h(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ et

$$t(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

– représenter graphiquement h et t .

– Étudier la continuité de h et t en 0. Que peut-on dire de h et de t ?

Solutions

1. f existe si et seulement si $x \neq 0$. Donc le domaine de f est $D_f = \mathbb{R}^*$.

2. f n'étant pas définie en 0, f n'est pas continue en 0.

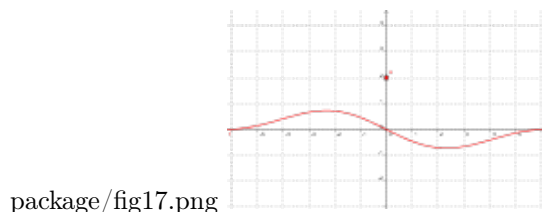
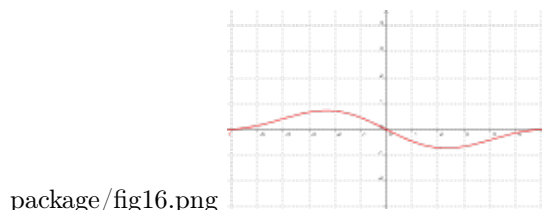
3. D'après un résultat sur les limites, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1. \quad (2.7)$$

4. Par définition de h on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1. \text{ et } h(0) = 1. \quad (2.8)$$

Donc h est continue en 0.



Également par définition de t on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = 1. \text{ et } t(0) = 2. \quad (2.9)$$

on peut donc remarquer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} t(x) \neq t(0) \quad (2.10)$$

Il en résulte que t n'est pas continue en 0.

La définition suivante permet de conclure :

Définition 2.3 :

Soit f une fonction non définie en x_0 et l un nombre réel tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

On appelle prolongement de f par continuité en x_0 , la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

Ainsi h est un prolongement par continuité de f , tandis que t ne l'est pas.

Autres exemples 2.10 :

1. Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Donc la fonction t définie par :

$$t(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ est un prolongement par continuité de } f \text{ en } 0.$$

2. Soit la fonction $s(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 6x + 3}{4x^2 - 1}$.

$D_s = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ et f étant une fonction rationnelle, elle est continue sur son domaine de définition.

Pour tout élément x de D_s , $s(x) = \frac{(2x+1)(x^3+3)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{x^3+3}{2x-1}$.

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} = -\frac{25}{16} \quad (2.11)$$

Alors un prolongement par continuité de s en $-\frac{1}{2}$ est donc v défini par : $v(x) =$

$$\begin{cases} \frac{2x^3+x^2+6x+3}{4x^2-1} & \text{si } x \in D_s \\ -\frac{25}{16} & \text{si } x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

v est continue sur $D_s \cup \{-\frac{1}{2}\}$

.

Remarque 2.9 :

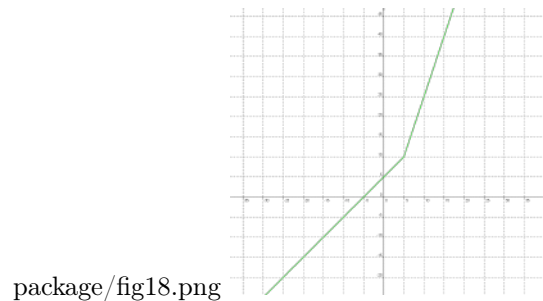
1. Si g est un prolongement de f par continuité en x_o , alors f est la restriction de g par continuité en x_o .
2. De façon analogue aux paragraphes 1.2.2 et 1.2.3, on introduit la notion de prolongement par continuité à droite (resp à gauche) en un point et on démontre qu'une fonction admet pour limite à droite (resp à gauche) en x_o le réel l si et seulement si elle admet en x_o un prolongement par continuité g à droite (resp à gauche) en x_o tel que l'on ait $g(x_o) = l$.
3. Si g est un prolongement par continuité de f , alors g est unique.

Exemple 2.11 :

1. Soit la fonction $f : x \rightarrow 2x + |x-5|$

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

$$\text{On a } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 5[& f(x) = 2x - x + 5 = x + 5 \\ \forall x \in]5; +\infty[& f(x) = 2x + x - 5 = 3x - 5 \\ f(5) = 10. \end{cases}$$



Cherchons la limite à droite et la limite à gauche de f en 5.

La fonction

$$g :]-\infty; 5[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x+5$$

coïncide avec f sur $] -\infty ; 5[$ et est continue à gauche en 5. On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = g(5) = 10 \quad (2.12)$$

La fonction

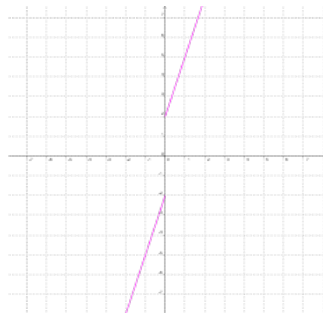
$$\begin{aligned} h :] 5 ; +\infty [&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x-5 \end{aligned}$$

De même h coïncide avec f sur $] 5 ; +\infty [$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = h(5) = 10 \quad (2.13)$$

$$\text{Soit la fonction } h(x) = \begin{cases} 3x + \frac{|2x|}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

package/fig19.png



Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} =]-\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$.

Nous allons étudier la continuité de h en 0.

$$\text{On a : } h(x) = \begin{cases} 3x + \frac{-2x}{x} = 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x + \frac{2x}{x} = 3x + 2 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ainsi h coïncide avec la fonction définie par :

$$\begin{aligned} l :]-\infty ; 0 [&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x - 2 \end{aligned}$$

sur $] -\infty ; 0 [$. Donc l étant continue sur cet intervalle, h y est aussi continue.

Également, h coïncide avec la fonction définie par :

$$\begin{aligned} j :] 0 ; +\infty [&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x + 2 \end{aligned}$$

sur $] 0 ; +\infty [$. Et puisque j est continue sur cet intervalle, h y est aussi continue.

Par conséquent h est continue en tout point non nul de $\mathbb{R}$. Ainsi le point problème ici est 0.

h est-il continue en 0 ?.

Calculons la limite à droite et la limite à gauche de h en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = l(o) = -2 \quad (2.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = j(o) = 2 \quad (2.15)$$

Nous remarquons tout de suite que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \quad (2.16)$$

Il en résulte que h n'est pas continue en 0.

Mais remarquons aussi que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 2 = h(0) \quad (2.17)$$

Donc h est continue à droite en 0. Ainsi, j est un prolongement par continuité de h à droite en 0. h n'est pas continue à gauche donc n'admet pas de prolongement à gauche en 0.

Remarquons que l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 10 \quad (2.18)$$

et par suite

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10. \quad (2.19)$$

Donc f est continue en 5.

On aurait pu démontrer ce dernier résultat directement.

Théorème 2.3 : Soient x_0 et l deux réels, I un intervalle épointé de centre x_0 et f une fonction définie sur I .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f admet pour limite en x_0 le réel l .
2. f admet un prolongement par continuité g en x_0 et l'on a : $g(x_0) = l$.

Démonstration :

1) $\Rightarrow$ 2) découle de la définition. Prouvons que 2) $\Rightarrow$ 1). Soit g le prolongement par continuité de f en x_0 ; la fonction g est définie sur $D \cup \{x_0\}$ et continue en x_0 . Il résulte de la propriété (1.1.1) (1.2.111) les égalités :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = l.$$

Les fonctions f et g coïncident sur I ; de la définition de la limite en x_0 , il résulte l'égalité : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Remarque :

Ce théorème permet dans certains cas de trouver, de façon très simple, la limite en un point x_0 de toute fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur s'annulent en x_0 . Par simplification, on obtient un prolongement par continuité de f et la limite de f en x_0 est la valeur numérique de ce prolongement en x_0 .

Par exemple pour la fonction $f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3. \quad (2.20)$$

2.1.10 Recollement par continuité

Activités 2.6 :

Activité 2.6.1

Un électricien veut installer une ligne de courant dans une maison. Mais il se rend compte que la distance entre la source de courant et la maison en question est très grande. Pourtant il ne possède que de morceaux de fils de courant chacun d'une longueur bien précise.

- 1)- Que peut-il faire pour résoudre ce problème ?
- 2) Si nous considérons que u, v et w sont les fonctions représentant chacune la ligne tendue par chaque morceau de fils et qu'il n'en a utilisé que trois morceaux. Que peut-on dire de la fonction t représentant la ligne totale tendue par les trois fils ? (notons que h est l'association de u, v et w)

Activité 2.6.2 Soient les fonctions définies par : $u(x) = -2x+6$; $v(x) = x-3$.

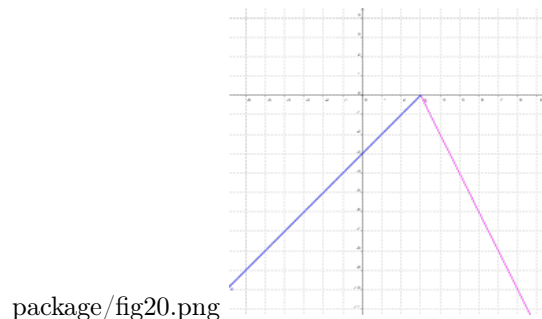
1. Étudier la continuité de u sur $]3; +\infty[$ et de v sur $]-\infty; 3[$.
2. Posons s et w les fonctions définies par : $s(x) = \begin{cases} -2x+6 & \text{si } x \geq 3 \\ x-3 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$

$$w(x) = \begin{cases} -2x+6 & \text{si } x > 3 \\ x-3 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

- a. Déterminer les domaines de définition de s et de w .
- b. Représenter graphiquement s et w .
- c. Étudier la continuité de s et w en 3. Conclure.

Solutions

1. les fonctions u et v sont continues respectivement sur $]3; +\infty[$ et $]-\infty; 3[$ comme fonctions polynômes. (ou les restrictions de s respectivement sur $]3; +\infty[$ et $]-\infty; 3[$ y sont continues).
- a. $D_s = D_w =]-\infty; 3] \cup [3; +\infty[= \mathbb{R}$



- c. En utilisant la définition, on a

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} s(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^+} s(x) = 0 \text{ et } s(3) = 0. \quad (2.21)$$

Par conséquent s est continue en 3.

$$\text{tandisque } \lim_{x \rightarrow 3^-} w(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^+} s(x) = 0 \text{ et } s(3) = 1. \quad (2.22)$$

Ainsi w n'est pas continue en 3.

Définition 2.4 : Un recollement par continuité peut être défini comme la jonction de deux fonctions définies chacune dans un intervalle donné, pour en former une seule de sorte que celle-ci soit continue. La fonction résultante est alors définie dans la réunion de ces intervalles.

Ainsi on retient le théorème suivant :

Théorème 2.4 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I .

Si f est continue sur $I \cap]-\infty; a]$ ainsi que sur $I \cap [a; +\infty[$, alors f est continue sur I .

Exemples 2.12 :

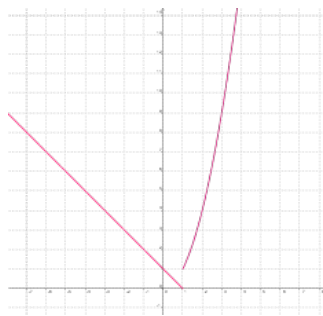
$$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

f est continue sur $] -\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$ comme fonctions polynômes.

f est donc continue sur $\mathbb{R} =]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[$. f est un recollement par continuité.

Remarque 2.10 :

$$q(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$



package/fig21.png

q est continue sur $[1; +\infty[$ et sur $] -\infty; 1[$ comme fonctions polynômes.

Mais on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} q(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} q(x) = 1. \text{ Alors } \lim_{x \rightarrow 1^-} q(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} q(x). \quad (2.23)$$

On en déduit que q n'est pas continue en 1.

Astuce* : Pour étudier la continuité d'une fonction f sur son D_f , il faut souvent faire deux études :

- Une étude globale sur des intervalles : on utilise pour cela les théorèmes généraux sur les fonctions continues.
- Des études locales, pour lesquelles il faut revenir à la définition.

– **Attention** :

Avant d'étudier la continuité d'une fonction, il faut absolument déterminer son ensemble de définition, que l'énoncé le précise ou pas ; cela doit être un réflexe.

2.2 Exercices résolus

:

Exercice 1 :

Une boîte cylindrique de rayon 12 cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 5 cm. On immerge une boule métallique dans ce récipient et on constate que la surface de l'eau est tangente à la boule.

(1)- Calculer le volume de l'eau contenue dans la boîte.

(2)- Trouver de deux façons différentes, le volume de la boule immergée.

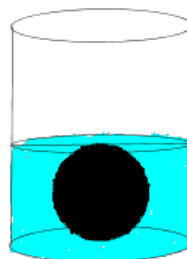
(3)- On pose $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 72x + 180$

* justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

* Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution dans chacun des intervalles suivants : $[-16; -15.5]$, $[2.5; 3]$ et $[13; 13.5]$.

*Déterminer à 10^{-3} mm près la solution dans $[2.5; 3]$.

(4)- Montrer que le rayon de la boule vérifie l'équation $f(x) = 0$. Déterminer le à 10^{-3} mm près.



package/fig28.png

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}$$

$$f(0) = 0$$

(1)- Quelle est la limite de f en 0 ?

(2)- Démontrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

(3)- Vérifier que la fonction réciproque de f est la fonction $x \mapsto |x|x$.

Solutions**Exercice 1 :**

(1)- Calculons le volume de l'eau contenue dans la boîte.

l'eau étant contenue dans le cylindre jusqu'à 5 cm de hauteur, son volume est celui de la partie du cylindre qu'il occupe (cylindre de 5 cm de hauteur et 12 cm de rayon).

Rappelons que le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est donné par :

$$V = \pi \times r^2 \times h.$$

$$\text{Donc } V_{eau} = \pi \times 12^2 \times 5 = 720 \pi \text{ cm}^3.$$

(2)- Première façon :

la boule est une sphère. Donc par la formule usuelle, on obtient : pour une sphère de rayon R ,

$$V_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 \text{ en cm}^3.$$

- Deuxième façon :

la boule étant immergée, l'eau contenue dans le cylindre se déplace d'une certaine hauteur. Puisque la surface de l'eau est tangente à la boule, le diamètre $d = 2R$ de la boule (où R est son rayon) est la nouvelle hauteur de l'eau.

Ainsi le nouveau volume occupé par l'eau est :

$$V'_{eau} = \pi \times 12^2 \times (2R)^3 \text{ en cm}^3.$$

Par ailleurs, la poussée d'Archimède énonce que le volume du liquide déplacé est égale au volume du solide immergé.

D'où, le volume déplacé de l'eau est égale au volume de la boule. Et le volume du liquide déplacé est donné par :

$$V_{\text{liquide déplacé}} = V'_{eau} - V_{eau} \text{ en cm}^3.$$

Il en résulte que :

$$V_{boule} = V'_{eau} - V_{eau} \text{ en cm}^3.$$

c'est-à-dire que :

$$V_{boule} = 144 \times \pi \times (2R)^3 - 720\pi$$

(3)- * Le domaine de f est $\mathbb{R}$. De plus f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

* Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans chacun des intervalle suivant :

- Dans $[-16; -15.5]$.

f étant continue sur $\mathbb{R}$, est continue sur cet intervalle.

De plus on a :

Étudions la monotonie de f dans $[-16; -15.5]$.

Soient a, b deux éléments de $[-16; -15.5]$.

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &= \frac{\frac{1}{3}b^3 - 72b + 180 - \frac{1}{3}a^3 + 72a - 180}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)[\frac{1}{3}(b^2 + ba + a^2) - 72]}{b - a} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}(b^2 + ba + a^2) - 72$$

Mais, on a :

$$-16 \leq a \leq 15.5 \text{ et } -16 \leq b \leq 15.5$$

d'où en encadrant Δ , on obtient $168.25 < \Delta < 184$. c'est-à-dire que $\Delta > 0$.

Donc f est strictement croissante dans l'intervalle $[-17; -16]$. i.e. f est bijective de $[-16; -15.5]$ vers $f([-16; -15.5])$.

Et,

$$f(-16) = -33.33 < 0 \text{ et } f(-15.5) = 35.29 > 0.$$

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[-16; -15.5]$.

- Dans $[2.5; 3]$. f est continue sur cet intervalle. De plus,

Soient $u, v \in [2.5; 3]$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \\ &= \frac{\frac{1}{3}v^3 - 72v + 180 - \frac{1}{3}u^3 + 72u - 180}{v - u} \\ &= \frac{(v - u)[\frac{1}{3}(v^2 + vu + u^2) - 72]}{v - u} \\ &= \frac{1}{3}(v^2 + vu + u^2) - 72. \end{aligned}$$

Et puisqu'on a :

$$2.5 \leq u \leq 3 \text{ et } 2.5 \leq v \leq 3,$$

dans un encadrement de Δ , on obtient : $-65.75 < \Delta < -63$. Donc $\Delta < 0$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $[2.5; 3]$. Et puisque

$f(3) = -27 < 0$ et $f(2.5) = 5.21 > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[2.5; 3]$.

-dans $[13; 13.5]$.

Egalement, f est continue sur $[13; 13.5]$ et par suite,

pour tous x, y dans $[13; 13.5]$,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= \frac{\frac{1}{3}y^3 - 72y + 180 - \frac{1}{3}x^3 + 72x - 180}{y - x} \\ &= \frac{(y - x)[\frac{1}{3}(y^2 + yx + x^2) - 72]}{y - x} \\ &= \frac{1}{3}(y^2 + yx + x^2) - 72. \end{aligned}$$

Et comme on a :

$$13 \leq x \leq 13.5 \text{ et } 13 \leq y \leq 13.5, \text{ il vient que } 97 < \Delta < 110.25. \text{ Ce qui montre que } \Delta > 0.$$

D'où f est strictement croissante dans $[13; 13.5]$. Par ailleurs, $f(13.5) = 28.13 > 0$ et $f(13) = -23.67 <$

0 . Toujours en raison du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[13; 13.5]$.

* Déterminons à 10^{-3} près la solution de l'équation précédente dans $[2.5; 3]$.

Nous allons le faire en procédant par deux méthodes.

- Méthode par balayage

On choisit un "pas" et on procède à un balayage systématique de l'intervalle $[2.5 ; 3]$.

Posons α cette solution.

On a $f(2.5) = 5.21$ et $f(2.6) = -1.34$. Donc $\alpha \in [2.5 ; 2.6]$.

Pour un pas de 0.001, on calcule $f(2.501) ; f(2.502) ; \dots ; f(2.509)$.

On obtient alors : $f(2.501) = 5.14 ; f(2.502) = 5.08 ; \dots ; f(2.509) = 4.62 ;$

$f(2.511) = 4.49 ; \dots ; f(2.579) = 0.03 ; f(2.580) = -0.04 ; \dots ; f(2.599) = -1.28$.

On peut alors remarquer que $\alpha \in [2.579 ; 2.580]$.

Donc 2.579 et 2.580 sont respectivement les valeurs approchées par défaut et par excès, à 10^3 près de α .

- Méthode par dichotomie

On a $\alpha \in [2.5 ; 2.6]$; on choisit x_0 le milieu de $[2.5 ; 2.6]$.

Alors $x_0 = \frac{2.6+2.5}{2} = 2.55 ;$

$f(x_0) = 1.93 ; f(2.5) = 5.21$ et $f(2.6) = -1.34$.

D'où on observe que $\alpha \in [2.55 ; 2.6]$ et $|2.55-2.6| = 0.05 > 0.001$.

Donc on reprend le processus avec l'intervalle $[2.55 ; 2.6]$.

Posons x_1 le milieu de $[2.55 ; 2.6]$. Alors $x_1 = \frac{2.6+2.55}{2} = 2.575$

$f(2.575) = 0.29 ; f(2.55) = 1.93$ et $f(2.6) = -1.34$.

D'où $\alpha \in [2.575 ; 2.6]$ et $|2.6-2.575| = 0.025 > 0.001$

On poursuit l'algorithme, jusqu'à obtenir $\alpha \in [a_n ; b_n]$ avec $|a_n - b_n| < 0.001$.

D'après la question (2), le rayon de la boule vérifie l'équation suivante :

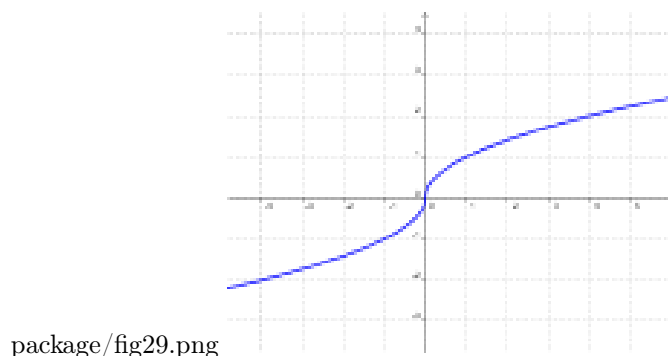
En égalant les deux expressions du volume de la boule, on obtient :

$$144 \times \pi \times (2 \times R)^3 - 720 \pi = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3.$$

Ce qui en simplifiant donne l'équation voulue.

Exercice 2 :

Représentons tout d'abord graphiquement f .



(1) Calculons la limite de f en 0.

f peut encore se définir de la manière suivante :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } x > 0$$

$$f(x) = -\sqrt{-x} \text{ si } x < 0$$

$$f(0) = 0$$

Ainsi, f est coïncide sur $]0; +\infty[$ avec la fonction $t : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Alors, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = t(0) = 0$.

Par ailleurs, f coïncide sur $] -\infty; 0[$ avec la fonction $q : x \mapsto -\sqrt{-x}$ définie sur $\mathbb{R}^-$.

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = q(0) = 0$.

Il résulte donc de ces deux résultats que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

(2) Démontrons que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $x < y$.

- Si x et y sont tous deux strictement positifs, alors $f(x) < f(y)$, puisque f coïncide sur $]0; +\infty[$ avec t qui est strictement croissante.

- Si x et y sont tous deux négatifs, alors $f(x) < f(y)$ car on a :

$x < y$ implique $-y < -x$. la fonction racine carrée étant croissante, on obtient par la suite :

$$\sqrt{-y} < \sqrt{-x}. \text{ Et ensuite on a } -\sqrt{-x} < -\sqrt{-y}.$$

- Si x et y sont de signes contraires, donc x est négatif et y est positif. Alors $f(x) = -\sqrt{-x}$ et $f(y) = \sqrt{y}$. D'où $f(x) < 0$ et $f(y) > 0$. il en résulte donc que $f(x) < f(y)$.

On a ainsi pour tous les cas $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. C'est-à-dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(3) Vérifions que la fonction réciproque de f est la fonction $x \mapsto |x|x$.

f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Donc f admet une fonction réciproque de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on sait que f^{-1} est la fonction telle que :

$$f \circ f^{-1}(x) = x \text{ et } f^{-1} \circ f(x) = x, \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Vérifions cela !

pour tout x élément de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$f \circ f^{-1}(x) = \frac{|x|}{|x|} \sqrt{|x|} = \frac{|x|}{|x|} \sqrt{|x|} = \frac{|x|}{|x|} |x| = \frac{|x|^2}{|x|} = x.$$

$$f^{-1} \circ f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}$$

$$= \frac{|x|}{|x|} \sqrt{|x|} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} = \frac{x^2}{x} = x.$$

Ainsi nous pouvons conclure que la fonction définie par : $x \mapsto |x|x$ est la fonction réciproque de f .

Bibliographie

- [1] Mathématique première SE : CIAM ;EDICEF. limites et continuité.
- [2] Mathématique première SM : CIAM ;EDICEF. limites et continuité.
- [3] Mathématiques terminale SM : CIAM ;EDICEF. limites et continuité.
- [4] Mathématiques terminale C et E :M. Monge, M-C Audouin-Ergoroff F. Lemaire- Body,
Tome 2 : BERLIN. Limites et continuité
- [5] Mathématiques terminale C et E :ANALYSE, collection "Fractale", Bordas

<http://www.google.fr>

MATHÉMATIQUES

Terminale D

DÉRIVATION

MATHÉMATIQUES

Terminale D

DÉRIVATION

Pha Radoli LOUZINGA

Étudiant à l'École Normale Supérieure , Brazzaville , Congo

Paul TSIKA

Enseignant au lycée E.P. LUMUMBA , Brazzaville , Congo

Mathias OMPORO

Enseignant à l'École Normale Supérieure , Brazzaville , Congo

Projet : PRENUM-AC

" Production des ressources numériques pour l'enseignement
des mathématiques au secondaire en Afrique centrale "

Décembre 2012

Que vise ce cours ?

Objectif Général :

Réaliser des activités sur les fonctions.

Objectif Spécifique :

Décrire les éléments qui définissent le comportement des fonctions.

Objectif Opérationnels :

A la fin de ce cours l'élève doit être capable, en utilisant la notion de nombre dérivé, de :

- étudier la dérivabilité d'une fonction en un point ;
- déterminer l'équation de la tangente à une courbe en un point ;
- déterminer une approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point.

Pourquoi étudier ce cours ?

Ce cours, déjà fait en classe de Première D, est le troisième cours de maths (d'après le programme de 2002 du Congo-Brazzaville) se faisant en Terminale D au début d'une année académique. Il constitue un cours de révision pour l'élève de Terminale D, lui permettant d'aborder la dérivation des fonctions composées et de comprendre les applications de la notion de dérivée dans l'étude des fonctions.

Avant d'aborder ce cours

La seule grande exigence, avant d'aborder ce cours est la maîtrise du calcul des limites. Si vous ne vous sentez pas à l'aise dans la détermination des limites des fonctions alors nous vous conseillons vivement de revoir votre cours sur le calcul de limites. Par contre, si vous êtes apte au calcul des limites alors prouvez-le en réussissant le test ci-dessous.

Test :

Trouve la bonne réponse et saisis la lettre A ou B ou C correspondant à cette réponse dans la case « ta réponse ».

Numéro	Question	Réponses			Ta réponse
		A	B	C	
1	Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$	?	0	$-\infty$	
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x^3) = ?$	$+\infty$	$-\infty$	?	
3	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1+x}{1-x^{1/2}} = ?$	0	$+\infty$	$-\infty$	
4	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos 4x}{1+x^2} = ?$	$-\infty$	0	?	
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 x} = ?$	8	4	16	

Solution du test :

Numéro	Réponse
1	A
2	B
3	C
4	B
5	A

Déroulement prévu

Pour l'élève :

Nous recommandons vivement à l'élève travaillant de façon autonome de commencer par traiter, pour chaque partie du cours, l'activité préparatoire proposée avant d'étudier le cours et résoudre les exercices qui y correspondent. Ainsi, l'élève devra suivre le schéma suivant.

Activité préparatoire → Cours → Exercices .

Pour l'enseignant :

Nous proposons, à l'enseignant souhaitant dispenser ce cours, une fiche pédagogique dans la laquelle figurent les différentes étapes prévues dans le déroulement de ce cours. Chaque étape est subdivisée en plusieurs phases et correspond à un objectif opérationnel précis. Ceci dit, rappelons les définitions de notions didactiques qui nous seront utiles.

- **La fiche pédagogique :** c'est un outil didactique, rédigée par un enseignant ou un groupe d'enseignants, dans lequel sont inscrits les renseignements et informations essentiels à la réalisation d'une séance d'enseignement / apprentissage.

- **La motivation :** C'est la phase qui permet la prise de contact avec l'objet d'apprentissage. Elle consiste à éveiller, à capter l'intérêt des apprenants au début et tout au long du cours.
- **Le contrat pédagogique :** C'est la phase qui consiste à communiquer oralement ou par écrit le thème ou l'objectif opérationnel dans des termes adaptés au niveau de développement intellectuel des apprenants.
- **La vérification des pré-requis :** C'est la phase qui consiste à s'assurer si l'apprenant possède les connaissances antérieures nécessaires à l'acquisition des nouvelles connaissances.
- **Les acquisitions nouvelles :** C'est la phase dans laquelle l'enseignant transmet en utilisant tous les moyens intéressants, les nouvelles connaissances aux apprenants.
- **La synthèse :** C'est la phase où l'enseignant fait un récapitulatif de ce qui a été dit ou fait pendant une séquence de cours.
- **L'évaluation :** C'est la phase pendant laquelle l'enseignant vérifie si les apprenants peuvent réaliser la performance attendue . On parle d'évaluation formative pour une évaluation qui a lieu au cours d'une séance de cours et servant à découvrir et à remédier aux difficultés des apprenants dans l'assimilation des connaissances enseignées.
- **La technique :** C'est l'ensemble des procédés employés pour obtenir un résultat déterminé.
- **La modalité :** C'est la manière ou la condition dans laquelle les apprenants vont travailler.
- **La consigne :** C'est l'énoncé de ce qu'il faut faire faire aux apprenants.

Fiche pédagogique

« pour l'enseignant »

Niveau : **Terminal D**

Discipline : **Mathématiques**

Thème : **Dérivation**

Sous-discipline : **Algèbre**

Date :

Durée estimée du cours : 8 h

Durée réelle du cours :

Effectif total :

Effectif garçons :

Effectif filles :

Matériel : Craies blanches ; règles graduées.

Documentation : voir bibliographie.

N.B : Les vides marqués en pointillés seront remplis par l'enseignant.

Étape 1. Objectif opérationnel 1 (0.0 1)

A la fin de cette séance de cours l'élève devra être capable de montrer qu'une fonction est dérivable (ou ne l'est pas) en un point ou dans un intervalle, en utilisant la définition de la dérivabilité d'une fonction.

[illegible]

Contrat pédagogique : Pour pouvoir répondre à la question précédente, il nous faudra connaître la notion de “dérivabilité d'une fonction”. C'est le premier objectif du présent cours dont le titre est « La Dérivation ».	Audition attentive.	5 min
Vérification des pré-requis : <u>Technique</u> : Présenter l'exercice-test au tableau. <u>Modalité</u> : Travail en groupe d'élèves d'un même banc. <u>Consigne</u> : Résolvez l'exercice-test.	Résolution de l'exercice-test (voir page ii)	20 min
Activité préparatoire : AP 1 : Dérivabilité et Nombre dérivée	Les élèves recopient l' AP 1. Un élève volontaire résout l' AP 1 au tableau pendant que les autres suivent.	40 min
Acquisitions nouvelles : • Dérivabilité en un point ; • nombre dérivé ; • Dérivabilité à gauche et à droite ; • Dérivabilité sur un intervalle. <u>Technique</u> : Transmission orale et écrite du cours. <u>Modalité</u> : Travail individuel. <u>Consigne</u> : Noter les données dictées dans le calme. Synthèse : Posez des questions aux élèves sur les notions relatives à cette partie du cours.	Les élèves recopient le cours et posent éventuellement des questions.	50 min

Par exemple : • A quel moment dit-on qu'une fonction f est dérivable en a ? • Est-il vrai que toute fonction continue est dérivable ? • A quelle condition une fonction f est dérivable à droite en a ? <u>Évaluation formative :</u> • Résoudre les exemples a), b) et d) (voir page 12-13). • Résoudre l'exercice d'application 1.1. L'enseignant guide principalement le travail des élèves qui sont au tableau.	Les élèves répondent aux questions de synthèse. Trois élèves résolvent au tableau respectivement les exemples a), b) et d). Ensuite trois autres élèves traitent chacun une question de l'exercice d'application. Le reste des élèves suivent attentivement.	15 min 25 min 25 min
---	---	---

Étape 2. Objectif opérationnel 2 (O.0 2)

A la fin de cette séance de cours, l'élève devra être capable de déterminer la meilleure approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point donné, en se servant de la notion de nombre dérivé.

O.0 2		
Stratégies d'enseignement	Activités d'apprentissage	temps
Motivation : (question posée par l'enseignant aux élèves)		

Soit f une fonction définie sur D_f et $a \in D_f$. Supposons qu'on ne connaît pas l'expression analytique de f mais qu'on connaît les valeurs de $f(a)$ et $f'(a)$. Question : Peut-on trouver une fonction g qui approxime f au voisinage de a c'est-à-dire $g(x) \approx f(x)$ avec x proche de a. Si oui, comment trouver g ? Réponse : Oui, quant à comment trouver g, c'est ce que nous verrons dans cette deuxième partie du cours. Contrat pédagogique : L'objectif que nous nous fixons, dans cette deuxième partie du cours, est d'établir une formule donnant l'expression analytique de la meilleure approximation affine locale d'une fonction en un point où elle est dérivable. Aussi nous verrons l'aspect cinématique de la notion de nombre dérivé. Activité préparatoire : AP 2 : Approximation affine et vitesse instantanée Acquisitions nouvelles : • Approximation affine locale d'une fonction f en a ;	Audition attentive des élèves. Les élèves réfléchissent et tentent de répondre à la question. Audition attentive. Les élèves recopient l' AP 2. Un élève volontaire résout l' AP 2 au tableau pendant que les autres suivent.	5 min 5 min 5 min 35 min
---	---	--

Étape 3. Objectif Opérationnel 3 (O.O 3)

A l'issue de ce cours, l'élève doit être capable de déterminer la direction et l'équation de la tangente en un point à courbe donnée, en se servant de la notion de nombre dérivée.

O.O 3		
Stratégies d'enseignement	Activités d'apprentissage	Temps
Motivation : (question posée aux élèves) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur I, (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$. D'après ce qui précède, nous savons que la courbe (C_f) admet au point $A(a, f(a))$ une tangente d'équation : $y = f'(a).x + b .$ <u>Question :</u> Trouvez le réel b. <u>Réponse :</u> $b = f(a) - f'(a).a$. Contrat pédagogique : Dans cette troisième et dernière partie cours, nous verrons comment déterminer la direction et l'équation de la tangente à une courbe en un point donné, en se servant de la notion de nombre dérivée.	Audition attentive des élèves. Les élèves réfléchissent et tentent de répondre à la question. Audition attentive des élèves.	5 min 5 min 5 min

Enfin, nous définirons la notion de fonction dérivée. Cette notion sera indispensable dans l'étude des fonctions. Activité préparatoire : AP 3 : Équation de la tangente . Acquisitions nouvelles : • Équation de la tangente à une courbe ; • interprétation graphique de la dérivabilité d'une fonction ; • fonction dérivée. <u>Technique</u> : Transmission orale et écrite du cours. <u>Modalité</u> : Travail individuel. <u>Consigne</u> : Noter les données dictées dans le calme. Synthèse : Posez des questions aux élèves sur les notions relatives à cette partie du cours. Par exemples : • Qu'est ce que une tangente à une courbe (C_f) en un point $A(a, f(a))$? • Soit f une fonction dérivable en a. Existe-t-il une différence entre tangente de f en a et meilleure approximation affine locale de f au voisinage de a ?	Les élèves recopient l' AP 3. Un élève volontaire résout l' AP 3 au tableau pendant que les autres suivent. Les élèves recopient le cours et posent éventuellement des questions. Les élèves répondent aux questions de synthèse.	40 min 50 min 10 min
---	--	---

• A quelle condition la courbe d'une fonction f admet en $A(a, f(a))$: une tangente vertical ? une tangente horizontale ? une tangente oblique ? • Qu'appelle-t-on fonction dérivée d'une fonction f. <u>Évaluation formative :</u> • Résoudre les exercices d'application 3.1 et 3.2. L'enseignant guide principalement le travail des élèves qui sont au tableau.	Pour chaque exercice d'application, Deux élèves traitent au tableau chacun une question.	40 min
--	---	---------------

Remarque :

Dans les tableaux ci-dessus, sont mentionnées :

- les activités de l'enseignant dans la colonne « Stratégies d'enseignement ».
- les activités de l'élève dans la colonne « Activités d'apprentissage ».
- la durée estimée pour chaque séquence de cours dans la colonne « Temps ».

SOMMAIRE

Partie 1	Dérivabilité	1
AP 1	Dérivabilité et Nombre dérivé	1
AP1	Corrigé	3
Cours		7
1.1	Dérivabilité en un point	7
1.2	Dérivabilité à gauche, Dérivabilité à droite	10
1.3	Dérivabilité sur un intervalle	14
Exercices		16
Partie 2	Approximation affine	20
AP 2	Approximation affine et vitesse instantanée	20
AP2	Corrigé	21
Cours		24
2.1	Approximation affine	24
2.2	Aspect cinématique	26
Exercices		29
Partie 3	Tangente à une courbe	32
AP 3	Équation de la tangente	32
AP3	Corrigé	33
Cours		37

3.1 Tangente à une courbe en un point	37
3.2 Interprétation graphique	40
3.3 Fonction dérivée	44
Exercices	47
Devoir à faire en classe	53
Corrigé. Devoir à faire en classe	54
Devoir 1 (à faire la maison)	61
Devoir 2 (à faire la maison)	63
Bibliographie	65

Partie 1

Dérivabilité

Activité Préparatoire

AP 1 Dérivabilité et Nombre dérivé

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 ; \quad g(x) = \frac{1-x}{x} .$$

- 1) Déterminez les domaines de définitions D_f et D_g de f et g .
- 2) Soit $h \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$ tel que $1+h \in \mathbb{R}$ et $1+h \neq 0$. Calculez :

- $A_x = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}, \quad \forall x \in D_f.$
- $B_x = \frac{g(x) - g(1)}{x-1}, \quad \forall x \in D_g.$
- $A_h = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} ; \quad B_h = \frac{g(1+h) - g(1)}{h}.$

3)

a) Calculez les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} A_x ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} B_x ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} A_h ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} B_h .$$

- Que constatez-vous ?

b) Que pouvez-vous dire des fonctions f et g ?

Indication : En fonction du caractère fini ou infini du résultat obtenu en calculant les limites $\lim_{x \rightarrow 1} A_x$ et $\lim_{x \rightarrow 1} B_x$, on dira que f ou g est dérivable en 1 ou ne l'est pas.

4) Tracez la courbe (C_f) de f .

5) On note : $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} A_x$ et $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$.

Tracez, dans le même graphe que (C_f) , les droites :

$$(T_1): y = f'(1) \cdot x - 1 \quad \text{et} \quad (T_2): y = f'(-1) \cdot x - 1.$$

(*) On remarquera que (T_1) et (T_2) sont les tangentes à (C_f) aux points d'abscisse 1 et -1 respectivement.

6) Que représentent les réels $f'(1)$ et $f'(-1)$ pour les droites (T_1) et (T_2) respectivement.

(**) Les réels $f'(1)$ et $f'(-1)$ sont appelés respectivement : nombre dérivé de f en 1 et en -1 .

AP 1 Corrigé

On dispose des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 ; \quad g(x) = \frac{1-x}{x}.$$

1) On trouve aisément : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$.

2) Pour $h \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$ tel que $1+h \in \mathbb{R}$ et $1+h \neq 0$. On a :

$$\bullet \quad A_x = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x^2 - 1}{x-1} = x+1, \quad \forall x \in D_f.$$

$$\bullet \quad B_x = \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \frac{1-x}{x(x-1)} = -\frac{1}{x}, \quad \forall x \in D_g.$$

$$\bullet \quad A_h = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = h+2.$$

$$\bullet \quad B_h = \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{-h}{h(1+h)} = \frac{-1}{1+h}.$$

3) a) On trouve :

$$\lim_{x \rightarrow 1} A_x = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} B_x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1 ;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} A_h = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} B_h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1.$$

• On constate que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} A_x = \lim_{h \rightarrow 0} A_h \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} B_x = \lim_{h \rightarrow 0} B_h.$$

b) D'après ce qui précède, il est clair que : $\lim_{x \rightarrow 1} A_x < \infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} B_x < \infty$.

DÉRIVATION

En tenant compte de l'indication (relative à la question 3), on peut dire que les fonctions f et g sont dérivables en 1 .

5) Étude de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 .$$

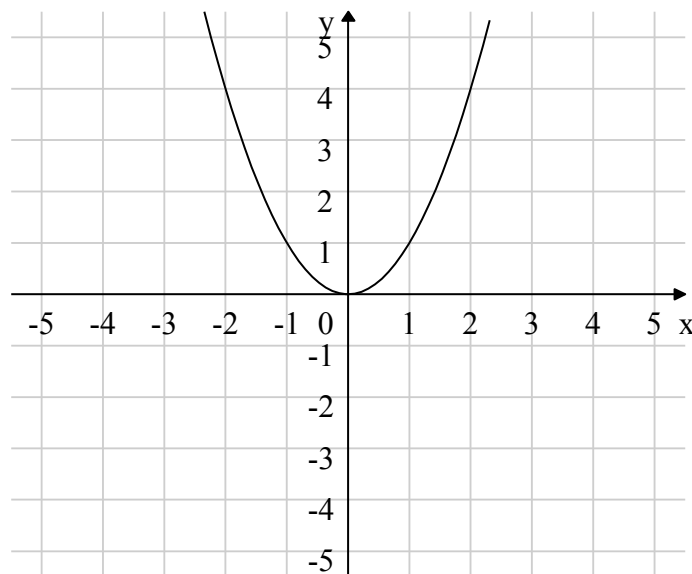
$$f(-x) = f(x) = x^2, f \text{ est paire.}$$

L'axe (Oy) est un axe de symétrie de C_f . L'intervalle d'étude de f se réduit à $]0 ; +\infty[$.

$\forall a, b \in]0 ; +\infty[$, on a : $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$. f est donc croissante sur $]0 ; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy) .

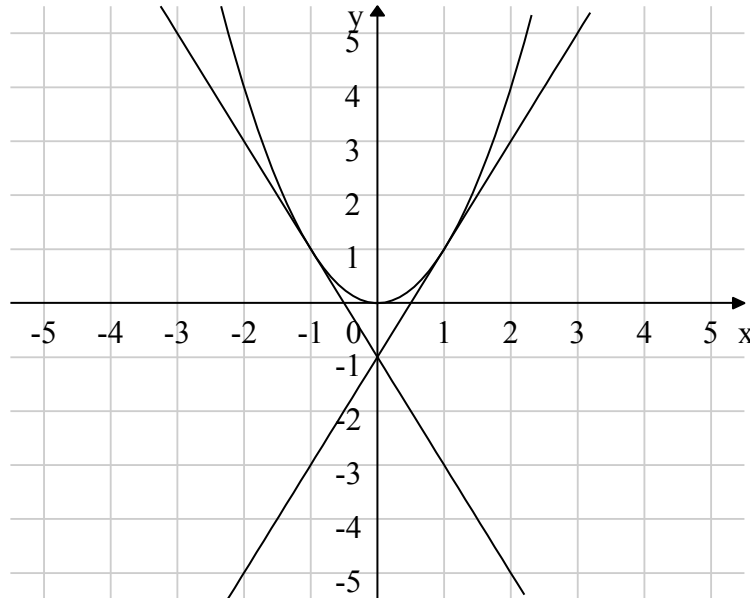
On obtient par symétrie la courbe (C_f) suivante :



5) On a $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} A_x = 2$ et $f'(-1) = -2$ donc :

$$(T_1): y = 2x - 1 \text{ et } (T_2): y = -2x - 1.$$

On obtient les graphes suivants :



- On voit graphiquement que (T_1) et (T_2) sont les tangentes à (C_f) aux points d'abscisse 1 et -1 respectivement.

6) Les équations des droites (T_1) et (T_2) sont de la forme :

$(T_1): y = f'(1).x - 1$ et $(T_2): y = f'(-1).x - 1$. On en déduit que les réels $f'(1)$ et $f'(-1)$, appelés respectivement nombres dérivés de f en 1 et en -1 , représentent les coefficients directeurs des droites (T_1) et (T_2) qui sont les tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisse 1 et -1 respectivement.

Synthèse :

On retient de cette activité préparatoire les notions suivantes :

La dérivabilité :

- Une fonction réelle f sera dite **dérivable en un réel a** si la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, qui est équivalente à la $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + a) - f(a)}{h}$, est finie.

Le nombre dérive :

- Lorsque la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \eta \in \mathbb{R}$, le réel η est appelé nombre dérivé de f en a et c'est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe (C_f) au point d'abscisse a .

COURS

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 1. Soit a un réel appartenant à D_f . On dit que f est dérivable en a si pour tout réel h non nul tel que $a + h \in D_f$, le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro.

On écrit : f est dérivable en $a \in D_f$ si et seulement si :

$$\forall h \in \mathbb{R}, h \neq 0, a + h \in D_f \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- Le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé taux de variation de f entre a et $a+h$.
- Le taux de variation à un sens concret, il peut représenter une vitesse moyenne ; un débit moyen ; un coût moyen de fabrication d'un produit ...
- Le réel l tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$ est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$. C'est le **coefficient directeur** de la **tangente** à la courbe représen-

tative de f au **point d'abscisse a** (une preuve sera donnée ultérieurement).

Autres définitions équivalentes :

- Faisant le changement de variable : $h = x - a$. Quand h tend vers 0, x tend vers a . Alors on obtient la définition suivante :
 f est **dérivable** en $a \in D_f$ si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

- f est **dérivable** en $a \in D_f$ si et seulement si :

$$\forall h \in \mathbb{R}, h \neq 0, a + h \in D_f \text{ on a } f(a+h) = f(a) + l.h + h.\varphi(h) \quad (3)$$

où l est un réel et φ est une fonction de limite nulle en 0.

Point réflexion

A partir de (3), on peut aboutir à la définition de (1) de la manière suivante :

Pour tout réel h non nul tel que $a + h \in D_f$:

$$f(a+h) = f(a) + l.h + h.\varphi(h) \text{ avec } l \text{ un réel.}$$

$$f(a+h) - f(a) = l.h + h.\varphi(h),$$

On obtient :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l + \varphi(h).$$

En passant à la limite $h \rightarrow 0$ et sachant que $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1. *Si une fonction réelle à valeurs réelles est dérivable en un point alors elle est continue en ce point.*

Preuve :

Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable au point $A(a, f(a))$ avec $a \in D_f$. Pour tout réel non nul h tel que $a+h \in D_f$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + l.h + h.\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 \quad (4)$$

Posons $h = x - a$.

Quand h tend vers 0, x tend vers a .

La relation (4) devient : $f(x) = f(a) + l.(x-a) + (x-a).\varphi(x-a)$ (5)

$$\text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x-a) = 0.$$

Après passage à la limite quand x tend vers a , on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

D'où f est continue en a ■

Point réflexion

Attention ! La réciproque du théorème 1 est fausse. Une fonction continue en un point n'est pas toujours dérivable en ce point. Par exemple la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est continue au point d'abscisse 0 mais n'est pas dérivable en ce point (la justification sera faite ultérieurement).

1.2 Dérivabilité à gauche, Dérivabilité à droite

Soit f une fonction à valeur réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I .

Définition 2. On dit que f est **dérivable à gauche en a** si la restriction de f à l'intervalle $I_g =]-\infty, a] \cap I$ est dérivable en a . Ce qui se traduit par :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I_g}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Remarques :

- Lorsque la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie alors on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a) .$$

- Le réel $f'_g(a)$ est appelé nombre dérivé à gauche de f en a .

Définition 3. On dit que f est **dérivable à droite en a** si la restriction de f à l'intervalle $I_d = I \cap [a ; +\infty[$ est dérivable en a . Ce qui se traduit par :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I_d}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} .$$

Remarques :

- Lorsque la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie alors on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a) .$$

- Le réel $f'_d(a)$ est appelé nombre dérivé à droite de f en a .

Nota Béné :

Une fonction f est dite dérivable en a si le nombre dérivé à gauche de f en a est égal au nombre dérivé à droite de f en a , c'est-à-dire :

$$f'_d(a) = f'_g(a) .$$

Par contre une fonction f n'est pas dérivable en a , si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- la limite du taux de variation de f entre a et x , quand x tend vers a vaut l'infini c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty .$$

- le nombre dérivé à gauche de f en a est différent du nombre dérivé à droite de f en a c'est-à-dire : $f'_g(a) \neq f'_d(a)$.

- la limite du taux de variation de f entre a et x , quand x tend vers a^- «à gauche» vaut l'infini c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty .$$

- la limite du taux de variation de f entre a et x , quand x tend vers a^+ «à droite» vaut l'infini c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty .$$

Exemples :

- a) La fonction f définie par : $f(x) = x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$, est dérivable en 1 car $f'_g(1) = f'_d(1) = 5$.
- b) La fonction f définie par : $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, est dérivable à gauche et à droite en 0 avec $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$, mais elle n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.

c) La fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \cos(x\pi) & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
, n'est pas dérivable en 1 car $f'_g(1) = 0$ et $f'_d(1) = 1$.

d) La fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \tan\left(\frac{x\pi}{2}\right) & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
, n'est pas dérivable en 1. On peut remarquer qu'elle est dérivable à droite en 1 avec $f'_d(1) = 1$ mais qu'elle n'est pas dérivable à gauche en 1 puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$.

e) La fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \cos(x\pi) & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
, n'est pas dérivable en 1 car $f'_g(1) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$.

f) La fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
 est dérivable en 1 car $f'_g(1) = f'_d(1) = 1$.

g) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas dérivable en 0 puisqu'elle n'est pas continue en 0.

1.3 Dérivabilité sur un intervalle

Une fonction f est dite dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ lorsque f est dérivable en tout point de I .

Dans ce cas, on a :

$$\forall a \in I, \exists l \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

Point réflexion

Question : Pourquoi a-t-on considéré l'intervalle I ouvert ?

Réponse : on considère un intervalle ouvert I pour s'assurer, à chaque fois que l'on choisit un élément a de I , de l'existence d'un réel h tel que $a + h$ appartienne à I . Ce qui n'est pas possible si l'intervalle I est fermé.

En langage mathématique, on écrit :

$$\text{l'intervalle } I \text{ est ouvert} \Rightarrow \forall a \in I, \exists h \in \mathbb{R}, a + h \in I.$$

Exercice d'application 1.1

Calculer le nombre dérivée de f en x_0 , dans les cas suivants :

a) $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$; $x_0 = -2$.

b) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$; $x_0 = 2$.

c) $f(x) = \sqrt{3x-2}$; $x_0 = 1$.

Solution :

a) $f(x) = 5x^2 + 4x - 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(-2) = 9$ et $f(x) - f(-2) = 5x^2 + 4x - 12 = (5x - 6) \cdot (x + 2)$,

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = 5x - 6.$$

En passant à la limite : x tend vers -2 , on obtient :

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -16.$$

b) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$. Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

On a : $f(2) = 4$ et $f(x) - f(2) = \frac{2x}{x-1} - 4 = -\frac{2(x-2)}{x-1}$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{2}{x - 1}.$$

D'où $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -2$.

c) $f(x) = \sqrt{3x-2}$. $f(x)$ existe si $3x - 2 \geq 0$, donc f est définie sur $[\frac{2}{3}; +\infty[$.

On a : $f(1) = 1$ et $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{3x - 2} - 1}{x - 1},$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{3x - 2} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{3x - 2} + 1}{\sqrt{3x - 2} + 1},$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{\sqrt{3x - 2} + 1}.$$

$$\text{D'où } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}.$$

Exercices

Exercice 1.1

Déterminer sans calcul le nombre dérivé en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = 2 - 3x + x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x).$

Exercice 1.2

Soient f la fonction cube : $x \mapsto x^3$, et a un nombre réel. En utilisant la définition du nombre dérivé, démontrer que f est dérivable en a et préciser $f'(a).$

Exercice 1.3

Soit f la fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}.$

En revenant à la définition du nombre dérivé, démontrer que :

- 1) f est dérivable en tout réel a strictement positifs ;
- 2) f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 1.4

Déterminer sans calcul :

- 1) le nombre dérivé en 0 de la fonction f :

$$x \mapsto 1 - 2x + 3x \cdot \tan(x) .$$

- 2) le nombre dérivé en -1 de la fonction g :

$$x \mapsto 2x + (x + 1)^2 \cdot \sqrt{x^4 + 3} .$$

Exercice 1.5

Déterminer la limite de $\frac{\tan(x) - 1}{4x - \pi}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 1.6

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = -2x + 5$.

- 1) Soit h un réel non nul, déterminer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$.

En déduire que f est dérivable en 2 et préciser le nombre dérivé $f'(2)$.

- 2) f est-elle dérivable en -3 ? Justifier.

Exercice 1.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

Démontrer que f est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

Exercice 1.8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x(2 - x)$. Démontrer que f est dérivable en 2 et déterminer le nombre dérivé $f'(2)$.

Exercice 1.9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Démontrer que f est dérivable en -1 et déterminer le nombre dérivé $f'(-1)$.

Exercice 1.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, par : $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Démontrer que f est dérivable en 3 et déterminer le nombre dérivé $f'(3)$.

Exercice 1.11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x^3$.

Démontrer que, pour tout réel non nul h : $\frac{(-2+h)^3 + 8}{h} = 12 - 6h + h^2$.

En déduire que f est dérivable en -2 et déterminer le nombre dérivé $f'(-2)$.

Exercice 1.12

Soit f la fonction définie sur $[-3 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3+x}$.

Pour tout réel non nul $h > -4$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}.$$

En multipliant et en divisant le numérateur et le dénominateur par :

$$\sqrt{4+h} + 2, \text{ démontrer que : } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}.$$

En déduire que f est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

Exercice 1.13

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + |x-1|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1) Calculer la dérivée de cette fonction pour $x=-2$ et pour $x=2$.

2) La fonction est-elle dérivable pour $x=1$?

Dans les deux cas, on appliquera la définition de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable.

Partie 2 Approximation affine

Activité Préparatoire

AP 2 Approximation affine et Vitesse instantanée

Considérons une fois encore la fonction f définie par : $f(x) = x^2$, pour tout réel x . Soit k la fonction définie par : $k(x) = f(2) + (x - 2) \cdot f'(2)$ pour tout réel x , avec :

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

1) Calculez : $f(1,75)$ et $k(1,75)$; $f(1,95)$ et $k(1,95)$; $f(2,15)$ et $k(2,15)$; $f(2,35)$ et $k(2,35)$; $f(2,55)$ et $k(2,55)$.

2) Quel constat faites-vous ?

(*) La fonction k est appelée approximation affine de f pour x proche de 2.

3) Soit M un mobile se déplaçant suivant la loi horaire :

$$f(t) = t^2 \text{ en mètre, } t \text{ en seconde.}$$

a) Combien de temps le mobile met-il pour parcourir 100 m ?

b) Soit h un réel non nul tel que $2 + h$ appartient à $[0 ; 4]$.

Quelle est, en fonction de h , la vitesse moyenne de M entre

les instants 2 et $2 + h$.

c) Calculez la limite, quand h tend vers 0 , de cette vitesse moyenne.

(**) Cette limite est appelée vitesse instantanée du mobile M à l'instant $t = 2$.

AP 2 Corrigé

1) $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R},$

$$k(x) = f(2) + (x - 2) \cdot f'(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4,$$

$$\text{On a : } k(x) = 4x - 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(1,75) = 3,0625, \quad k(1,75) = 3;$$

$$f(1,95) = 3,8025, \quad k(1,95) = 3,8;$$

$$f(2,15) = 4,6225, \quad k(2,15) = 4,6;$$

$$f(2,35) = 5,5225, \quad k(2,35) = 5,4;$$

$$f(2,55) = 6,5025, \quad k(2,55) = 6,2.$$

2) On constate que : pour des valeurs de x proches de 2 ,

$$f(x) \approx k(x).$$

Ce qui justifie le fait que la fonction k soit appelée approximation affine de f au voisinage de 2.

3) a) Lorsque le mobile parcourt 100 m on a :

$$f(t) = t^2 = 100 \quad \text{donc} \quad t = 10\text{ s}.$$

Le mobile met 10 s pour parcourir 100 m .

b) Par définition, la vitesse moyenne M est :

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Dans le cas présent, il s'agit de la vitesse moyenne du mobile entre les instants 2 et $2 + h$. On a :

$$M = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 4.$$

c) On a : $\lim_{h \rightarrow 0} M = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4.$

De même, on peut écrire : $\lim_{h \rightarrow 0} M = f'(2) = 4.$

En tenant compte de (**), on conclut que la vitesse du mobile à l'instant $t = 2$ est égale au nombre dérivée de la loi horaire du mobile en $t = 2$, ce qui vaut 4 m/s .

Synthèse :

On retient de cette activité préparatoire les notions suivantes :

Approximation affine :

- Une approximation affine d'une fonction f au voisinage de x_0 est une fonction affine φ telle que pour tout x proche de x_0 :
$$\varphi(x) \approx f(x).$$
- Pour une fonction réelle f dérivable en x_0 , la fonction affine g définie par $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est une approximation affine de f au voisinage de x_0 .

Vitesse moyenne et instantanée :

- La vitesse moyenne d'un mobile entre deux instants t_1 et t_2 correspond au taux de variation de la loi horaire de ce mobile entre les instants t_1 et t_2 .
- La vitesse d'un mobile à un instant t correspond au nombre dérivée en t de la loi horaire de ce mobile en t .

Cours

2.1 Approximation affine

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a \in D_f$. Une fonction g est une approximation affine de f au voisinage de a si g est une fonction affine telle que : $f(x) \approx g(x)$ pour tout x proche de a c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Notons $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{On a : } \begin{cases} f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varepsilon(h) \\ \text{et} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

La relation (1) montre que lorsque h est très proche de 0, $f(a+h)$ est très proche de $f(a) + h.f'(a)$.

On dit que $f(a) + h.f'(a)$ est une **approximation** ou une **valeur approchée** de $f(a+h)$, pour h suffisamment proche de 0.

On note :

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \text{ pour } h \text{ proche de } 0.$$

De même, en posant $x = a + h$, la relation (1) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(a) + (x-a).f'(a) + (x-a).\varepsilon(x) \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \end{array} \right.$$

on trouve l'approximation : $f(x) \approx f(a) + (x-a).f'(a)$ pour x proche de a . Ainsi, on déduit la propriété suivante :

Propriété : Soit une fonction $f : D_f \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

La fonction : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(a) + (x-a).f'(a)$ est une **approximation affine** de la fonction f au voisinage de a .

Exemples :

Pour tout réel h suffisamment proche de 0, on a :

$$(1+h)^2 \approx 1 + 2h \quad ; \quad (1+h)^3 \approx 1 + 3h \quad ; \quad \frac{1}{1+h} \approx 1 - h \quad ; \quad \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h.$$

Qu'est ce qu'une meilleure approximation affine locale ?

Généralement, il est possible qu'une fonction f ait plusieurs approximations affines locales autour d'un point a . Cependant, la meilleure approximation affine locale de f autour de a est la fonction affine M_f telle que pour toute approximation affine g de f autour de a , on ait :

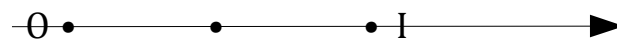
$$|f(x) - M_f(x)| \leq |f(x) - g(x)| \quad \text{pour } x \text{ proche de } a.$$

Remarques :

- La fonction : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(a) + (x-a).f'(a)$ est la **meilleure approximation affine** locale de f au voisinage de a .
- Pour une fonction donnée $f : D_f \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, on ne peut prétendre trouver la meilleure approximation affine locale de f au voisinage de $a \in D_f$ qu'au cas où l'on sait que f est dérivable en a .

2.2 Aspect cinématique

Considérons un mobile se déplaçant sur un axe $(x'x)$ de repère (O, I) .



On suppose que la position du mobile est repérée par une fonction $f: t \mapsto f(t)$ (la loi horaire du mouvement). La variable t désigne le temps. Si f est dérivable en t_0 alors la **vitesse instantanée** V_{t_0} du mobile à l'instant t_0 est le nombre dérivé de f en t_0 c'est-à-dire :

$$V_{t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+t_0) - f(t_0)}{h} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Exercice d'application 2.1

1) Déterminer la meilleure approximation affine de $f(x)$ quand x tend vers x_0 , dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^2 - 3x - 4$; $x_0 = 0$.

b) $f(x) = \frac{3x-1}{x-4}$; $x_0 = -1$.

2) En considérant le cas a), calculer les valeurs approchées de $f(0,2)$ et $f(1,5)$. Laquelle des deux valeurs approchées est la plus proche de la valeur exacte y correspondant ? Dites pourquoi.

Solution :

1)

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Commençons par calculer $f'(0)$. On a : $f(0) = 4$ et $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x - 3$,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -3.$$

Nous savons que la meilleure approximation affine d'une fonction g au voisinage de a est la fonction M_g définie par :

$$M_g(x) = g'(a)(x - a) + g(a).$$

Soit M_f la meilleure approximation affine de f au voisinage de 0, on a :

$$M_{f,0}(x) = f'(0)x + f(0),$$

$$M_{f,0}(x) = -3x + 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) $f(x) = \frac{3x-1}{x-4}$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{4\}$.

Calculons d'abord $f'(-1)$.

$$\text{On a : } f(-1) = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad f(x) - f(-1) = \frac{11}{5} \cdot \frac{x+1}{x-4},$$

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{x-4},$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -\frac{11}{25}.$$

D'où la meilleure approximation affine de f au voisinage de -1 est :

$$M_{f,-1}(x) = f'(-1)(x+1) + f(-1),$$

$$M_{f,-1}(x) = -\frac{11}{25}x + \frac{9}{25}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2) Notons V_1 et V_2 les valeurs approchées de f respectivement en 0,2 et 1,5. On a : $V_1 = M_{f,0}(0,2) = 3,4$ et $V_2 = M_{f,0}(1,5) = -0,5$.

Par ailleurs, $f(0,2) = 3,44$ et $f(1,5) = 1,75$. On voit que V_1 est plus proche de la valeur exacte $f(0,2)$ qu'elle approxime, comparé à V_2 . Cela s'explique par le fait que 0,2 est plus proche de 0 comparé à 1,5.

Exercices

Exercice 2.1

Un mobile M se déplace sur une droite (D) munie d'un repère $(O ; \vec{i})$.
À chaque instant $t \geq 0$, on repère sa position par son abscisse :

$$x(t) = 6t - 3t^2.$$

- 1) Déterminer la vitesse v_0 de ce mobile à l'instant $t = 0$.
- 2) Décrire le mouvement du mobile sur la droite (D) .
- 3) Quelle est la vitesse du mobile lorsqu'il change de direction ?
- 4) Quelle est la vitesse du mobile lorsqu'il repasse en O ?

Exercice 2.2

On laisse tomber un objet du sommet d'une falaise à l'instant $t = 0$.
On estime qu'à chaque instant, l'altitude (en mètres) de l'objet est donnée par : $a(t) = 100 - 5t^2$.

- 1) Quelle est la hauteur de la falaise ?
- 2) Quelle est la vitesse de l'objet lorsqu'il atteint le sol ?

Exercice 2.3

Un objet est lancé verticalement vers le haut à l'instant $t = 0$. Pendant la phase ascendante, la hauteur (en mètres) de cet objet à l'instant t est : $h(t) = 1 + 7t - 5t^2$.

- 1) De quelle hauteur lance-t-on cet objet ?
- 2) Déterminer sa vitesse en fonction de t .
- 3) Quelle hauteur maximale atteint-il ?

Exercice 2.4

- 1) Déterminer la meilleure approximation affine de $(3+h)^2$ lorsque h est proche de 0.
- 2) Utiliser cette approximation pour déterminer mentalement des valeurs approchées de $(2,95)^2$ et de $(3,04)^2$.

Exercice 2.5

- 1) Déterminer la meilleure approximation affine de $\frac{2}{4+h}$ lorsque h est proche de 0.
- 2) Utiliser cette approximation pour calculer des valeurs approchées de : $\frac{2}{3,91}$ et $\frac{2}{4,03}$.

Exercice 2.6

- 1) Déterminer la meilleure approximation affine de $(1+h)^3$ lorsque h est proche de 0.
- 2) Utiliser cette approximation pour déterminer des valeurs approchées de : $(1,02)^3$ et $(0,96)^3$.

Exercice 2.7

- 1) Déterminer la meilleure approximation affine de $\sqrt{4+h}$ lorsque h est proche de 0.
- 2) Utiliser cette approximation pour déterminer des valeurs approchées de : $\sqrt{3,93}$ et $\sqrt{4,06}$.

Exercice 2.8

Soit f une fonction dérivable en tout réel a telle que :

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 3 \quad \text{et} \quad f'(1,2) = 2.$$

- 1) Utiliser la meilleure approximation affine de f au voisinage de 1 pour déterminer une valeur approchée de $f(1,2)$.
- 2) Utiliser la meilleure approximation affine de f au voisinage 1,2 pour déterminer une valeur approchée de $f(1,4)$.

Exercice 2.9

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

- 1) Démontrer que f est dérivable en 1 et en déduire que, lorsque h est proche de 0, on a $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2}$.

- 2) a) Démontrer que, pour $h > -1$, on a :

$$1 + \frac{h}{2} - \sqrt{1+h} = \frac{h^2}{4\sqrt{1+h} + 4 + 2h}.$$

- b) En déduire que, pour h appartenant à $[-0,5; 0,5]$, l'erreur

commise en remplaçant $\sqrt{1+h}$ par $1 + \frac{h}{2}$ est inférieure à $\frac{h^2}{4}$.

- 3) Utiliser ce résultat pour déterminer des valeurs approchées des réels $\sqrt{1,08}$ et $\sqrt{0,94}$ en donnant un majorant de l'erreur sous la forme d'une puissance de 10.

Partie 3 Tangente à une courbe

Activité Préparatoire

AP 3 Équation de la tangente

On considère la fonction g définie par : $g(x) = -x^2$.

- 1) Rappelez le domaine de définition D_g de g .
- 2) Soit $a \in D_g$ et h un réel non nul tel que $a+h \in D_g$.
 - Comment appelle-t-on le rapport : $T_a = \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$?
 - Calculez $\lim_{h \rightarrow 0} T_a$.
 - Que peut-on conclure.
- 3) Tracer dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C_g de g .
- 4) Tracez la droite (T) passant par les points $A(1; -1)$; $B(0; 1)$.
 - En se référant au graphique obtenue, que peut-on dire de (T) par rapport à C_g .
- 5) Calculez $g'(1)$ et $g(1)$. **Indication :** $g'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} T_1$.

6) On considère la droite (D) d'équation : $y = g'(1).(x-1) + g(1)$.

- Vérifier que les points A et B appartiennent à (D) .
 - En déduire l'équation de (T) .
-

AP 3 Corrigé

On considère la fonction g définie par : $g(x) = -x^2$.

1) On trouve : $D_g = \mathbb{R}$.

2) Soit $a \in D_g$ et h un réel non nul tel que $a+h \in D_g$.

- Le rapport $T_a = \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$ est appelée taux de variation de g entre a et $a+h$.
- $\lim_{h \rightarrow 0} T_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(a+h)^2 + a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 2a) = -2a$.
- L'élément a étant quelconque dans D_g , on peut conclure que g est dérivable sur D_g .

3) Étude de g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -x^2.$$

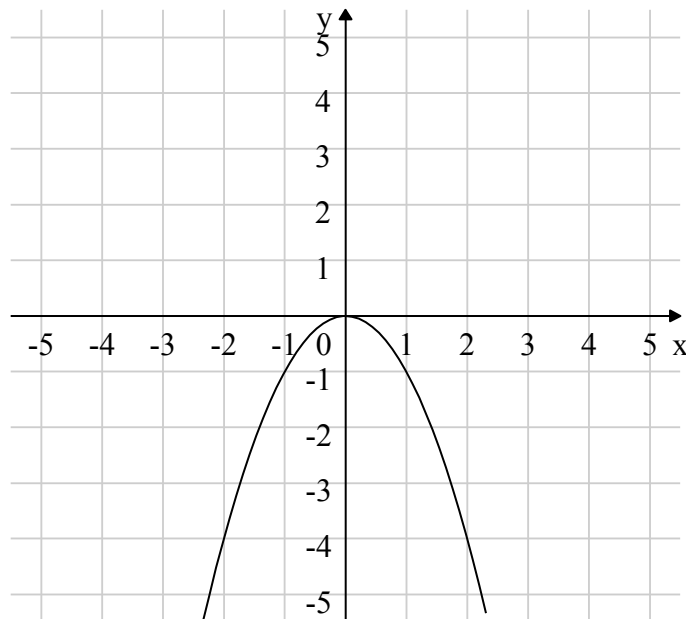
$$g(-x) = g(x) = -x^2, g \text{ est paire.}$$

L'axe (Oy') est un axe de symétrie de C_g . L'intervalle d'étude de g se réduit à $]0; +\infty[$.

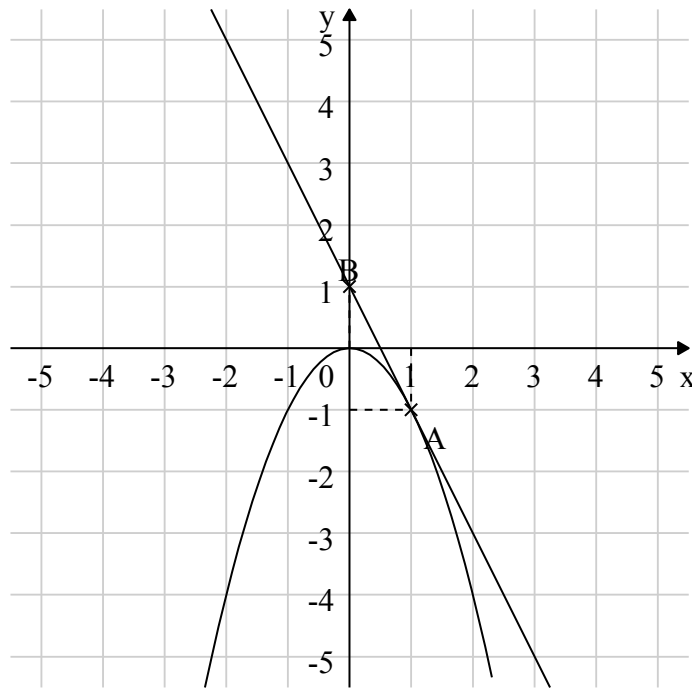
$\forall a, b \in]0; +\infty[$, on a : $a \geq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. f est donc décroissante sur $]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$, la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy') .

On obtient par symétrie la courbe (C_g) suivante :



4) Traçons la droite (T) .



- En se référant au graphe tracé, on peut dire que la droite (T) est la tangente à C_g au point $A(1; -1)$.

5) On a : $g(1) = -1$ et $g'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} T_1 = -2$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} T_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^2 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 2) = -2.$$

6) $(D) : y = g'(1) \cdot (x-1) + g(1).$

$$\text{Soit } (D) : y = -2x + 1.$$

- Il est aisé de vérifier que les points A et B appartiennent à (D) .
- Les droites (D) et (T) passent toutes les deux par les points $A(1; -1)$ et $B(0; 1)$, donc elles sont identiques.

On en déduit que (T) a pour équation :

$$(T) : y = g'(1).(x-1) + g(1).$$

Soit $(T) : y = -2x + 1.$

Synthèse :

On retient de cette activité préparatoire, on retient ceci :

Équation de la tangente à une courbe :

- Lorsqu'une fonction f est dérivable en a c'est-à-dire $f'(a)$ existe et est fini, la tangente à la courbe C_f en a admet une équation de la forme :

$$y = f'(a).(x-1) + f(a) .$$

Cours

3.1 Tangente à une courbe en un point

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I , (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $a \in I$.

Définition 4. En supposant que la fonction f est dérivable en a , la droite (T) passant par $A(a, f(a))$ et ayant pour coefficient directeur $f'(a)$ est appelée tangente à la courbe (C_f) au point a .

Remarque :

Supposons que la fonction f est dérivable en a . Alors (C_f) admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a) \in \mathbb{R}$.

Il en découle que l'équation de (T) est de la forme :

$$y = f'(a).x + b \text{ avec } b \in \mathbb{R}.$$

On a : $f(a) = f'(a).a + b$, puisque $A(a, f(a)) \in (T)$.
 $b = f(a) - f'(a).a$.

D'où l'équation de (T) est : $y = f'(a).(x - a) + f(a)$.

On s'aperçoit que la tangente (T) n'est autre que la fonction qui à tout réel x associe $(x-a).f'(a) + f(a)$. Ainsi, nous avons la propriété suivante.

Propriété. Supposons que f est dérivable en a . La tangente (T) à la courbe (C_f) est la meilleure approximation affine de f au voisinage de a .

Exercice d'application 3.1

Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f représentative de f , au point M_0 d'abscisse x_0 :

a) $f(x) = x^3 - 5x + 4$; $x_0 = -2$.

b) $f(x) = \sqrt{2x-1}$; $x_0 = 1$.

Solution :

a) $f(x) = x^3 - 5x + 4$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Commençons par déterminer $f'(-2)$.

On a : $f(-2) = 6$ et $f(x) - f(-2) = x^3 - 5x - 2 = (x+2)(x^2 - 2x - 1)$,

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = x^2 - 2x - 1,$$

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = 7.$$

Ainsi, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -2 est la droite (T_{-2}) d'équation : $f'(-2)(x + 2) + f(-2)$,

$$\text{soit } (T_{-2}) : 7x + 8.$$

b) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, la fonction f est définie sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$ et dérivable sur $] \frac{1}{2}; +\infty[$.

Calculons $f'(1)$:

$$\text{On a : } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{2x - 1} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{2x - 1} + 1}{\sqrt{2x - 1} + 1} = \frac{2}{\sqrt{2x - 1} + 1},$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1, \text{ avec } f(1) = 1.$$

L'équation de la tangente (T_1) à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est :

$$(T_1) : x + 1.$$

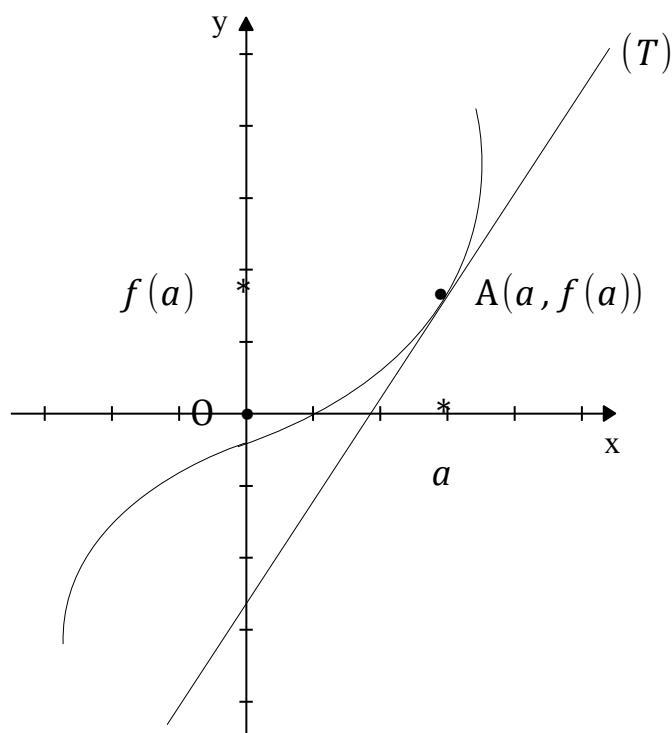
3.2 Interprétation graphique

1^{er} cas : f est dérivable en a

Théorème 2. si une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors pour tout $a \in I$, la courbe représentative de f admet au point d'abscisse a une tangente non verticale d'équation :

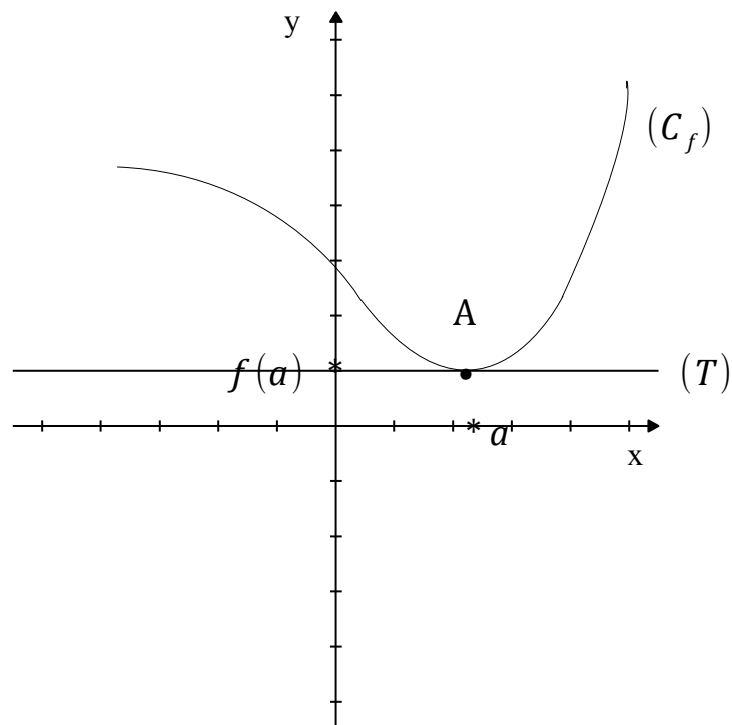
$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

Illustration :



Cas particulier : Si une fonction f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$ alors sa courbe représentative (C_f) admet une tangente horizontale d'équation : $y = f(a)$.

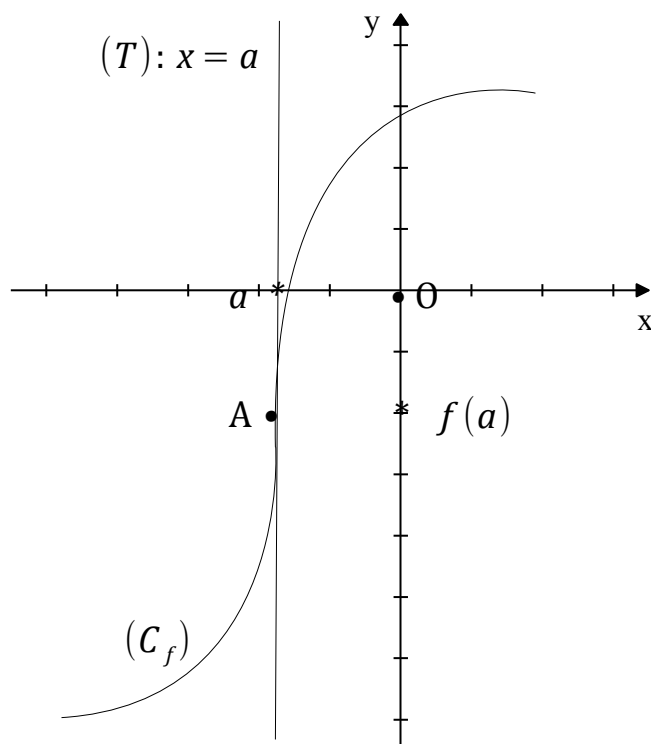
Illustration :



2^{ieme} cas : f n'est pas dérivable en a

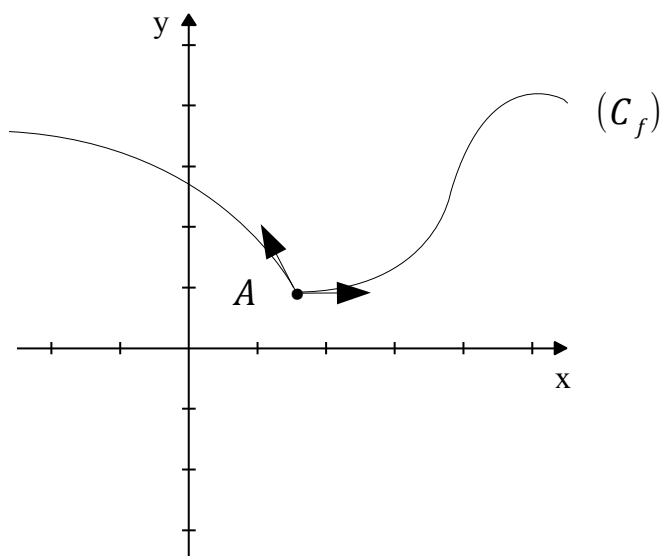
- Si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en un réel a et n'est pas dérivable en a avec $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$ alors la courbe représentative (C_f) de f admet, au point A d'abscisse a , une tangente verticale d'équation $x = a$.

Illustration :



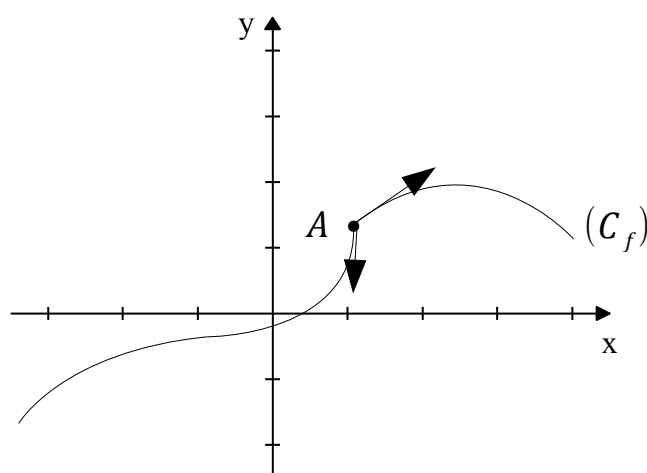
- Si une fonction $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas dérivable en $a \in I$ avec $f'_g(a) = l$ et $f'_d(a) = k$; $(l, k) \in \mathbb{R}^2$; $l \neq k$ alors la courbe représentative (C_f) de f admet au point A d'abscisse a : une demi-tangente, oblique ou horizontale, à gauche en a et une autre, oblique ou horizontale, à droite en a .

Illustration :



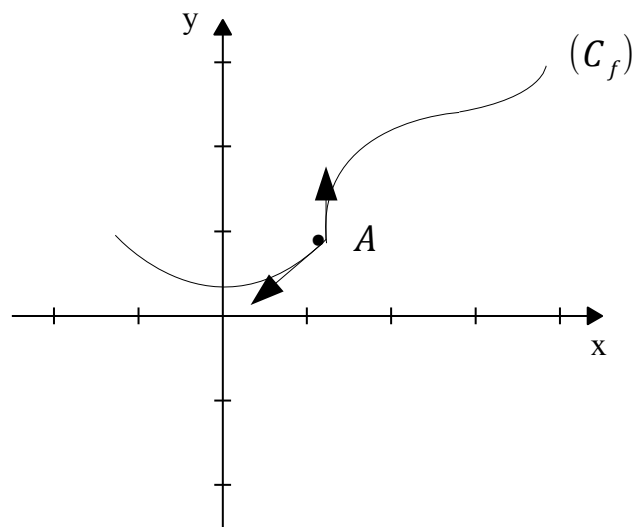
- Si une fonction $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas dérivable en $a \in I$ avec $f'_g(a) = \infty$ et $f'_d(a) = k$; $k \in \mathbb{R}$; alors la courbe représentative (C_f) de f admet au point A d'abscisse a : une demi-tangente verticale à gauche en a et une demi-tangente, oblique ou horizontale, à droite en a .

Illustration :



- Si une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas dérivable en $a \in I$ avec $f'_g(a) = l$ et $f'_d(a) = \infty$; $l \in \mathbb{R}$; alors la courbe représentative (C_f) de f admet au point A d'abscisse a : une demi-tangente, oblique ou horizontale, à gauche en a et une demi-tangente verticale à droite en a .

Illustration :



3.3 Fonction dérivée

Nous proposons ici, une succincte introduction à la notion de fonction dérivée. Un développement plus large de cette notion sera présenté dans la ressource intitulée : Fonction dérivée.

Définition 6. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On appelle fonction dérivée de f sur I , la fonction f' qui à tout élément x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x .

On écrit :

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Notation : Au lieu de f' (notation de Newton), la fonction dérivée peut également être notée par : $\frac{df}{dx}$ (notation de Leibniz). On écrit :

$$\frac{df}{dx} : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{df}{dx}(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Exercice d'application 3.2

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, après avoir précisé sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ elles sont définies :

a) $f(x) = \frac{1}{x} + x^4.$

b) $f(x) = 3x + \sqrt{2x - 1}.$

Solution :

a) $f(t) = \frac{1}{t} + t^4$, f est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(t) - f(x) = -\frac{t-x}{t \cdot x} + (t-x)(t^3 + t^2 \cdot x + t \cdot x^2 + x^3),$$

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = -\frac{1}{t \cdot x} + t^3 + t^2 \cdot x + t \cdot x^2 + x^3,$$

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = -\frac{1}{x^2} + 4x^3.$$

La fonction dérivée de f est donc la fonction f' définie par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 4x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

b) $f(t) = 3t + \sqrt{2t-1}$, f est définie sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

Soit $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$, on a :

$$f(t) - f(x) = 3(t-x) + \sqrt{2t-1} - \sqrt{2x-1},$$

$$f(t) - f(x) = 3(t-x) + (\sqrt{2t-1} - \sqrt{2x-1}) \cdot \frac{\sqrt{2t-1} + \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2t-1} + \sqrt{2x-1}},$$

$$f(t) - f(x) = 3(t-x) + \frac{2(t-x)}{\sqrt{2t-1} + \sqrt{2x-1}},$$

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 3 + \frac{2}{\sqrt{2t-1} + \sqrt{2x-1}},$$

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 3 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

D'où on trouve la fonction dérivée :

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}, \quad \forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[.$$

Exercices

Exercice 3.1

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer une équation de la tangente à la parabole P d'équation :

$$y = x^2 - 3x, \text{ au point } A(-1; 4).$$

Exercice 3.2

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer une équation de la tangente à l'hyperbole H d'équation :

$$y = \frac{3}{x}, \text{ au point } A(3; 1).$$

Exercice 3.3

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que la tangente à la parabole P d'équation : $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ en son point d'abscisse 1 coupe l'axe des abscisses au point $B\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$.

Exercice 3.4

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Soit a un réel strictement positif et Δ la tangente à la courbe (C_f) en son point A d'abscisse a .

- 1) Déterminer une équation de Δ .
- 2) La droite Δ coupe l'axe des abscisses en B et l'axe des ordonnées en C .

Que peut-on dire du point A pour le segment $[BC]$?

Exercice 3.5

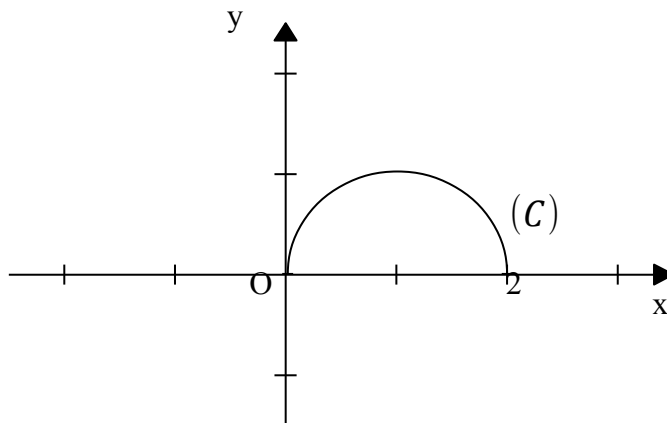
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et P la parabole représentant f dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x ,
 $f'(x) = 2x - 5$.
- 2) Déterminer une équation de la tangente à P au point $E(4 ; 0)$.

- 3) Existe-t-il un point M de P en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x$.
- 4) Soit a un réel. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe P au point A d'abscisse a . En déduire que la courbe P admet deux tangentes passant par l'origine O du repère.

Exercice 3.6

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 2]$, dont la courbe représentative (C) est le demi-cercle de la figure ci-dessous :



- 1) Comment voit-on graphiquement que f n'est pas dérivable en 0 ?
- 2) Justifier qu'un point $M(x; y)$ du plan, appartient à (C) si et seulement si :
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Donner l'expression de $f(x)$, pour tout x de $[0 ; 2]$.

3) Retrouver le résultat de la question 1) par un calcul.

Exercice 3.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 5$.

- 1) Pour tout réel a , justifier la dérivabilité de f en a et préciser $f'(a)$.
- 2) Soit m et p deux réels quelconques.
Quelle est la fonction dérivée de la fonction affine $x \mapsto mx + p$ définie sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

- 1) En utilisant la définition du nombre dérivé de f en a , démontrer que la fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = 3x^2$.
- 2) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point $A(1 ; 1)$.

Exercice 3.9

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -0,5x^2 + 2x$.

- 1) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
- 2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(0) = 1$ et pour tout réel t , $f'(t) = 2 - t$.

On considère la fonction $\phi = f - g$.

- a) Démontrer que , pour tout réel a et tout réel non nul h :

$$\frac{\phi(a+h) - \phi(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + a - 2 + 0,5h.$$

- b) Établir que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et justifier que ϕ est une fonction constante.

- c) En déduire que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -0,5x^2 + 2x + 1.$$

En résumé :

La dérivation donne la clé de trois (3) grands problèmes apparemment non connexes : vitesse instantanée ; tangente ; approximation locale . Comme on peut le constater, la dérivée mesure une variation instantanée, alors que le taux de variation mesure lui, une variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (passage du global au locale c'est-à-dire une dérivée est la limite d'un taux de variation).

Devoir surveillé

Durée : 2 h 30 min

Documents non autorisés

Exercice 1 :

Calculer, en appliquant la définition, la nombre dérivé de la fonction f en x_0 . On donne : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$; $x_0 = 2$.

Exercice 2 :

1) Soit la fonction g définie sur $] -\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty [$ par :

$$g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Déterminer une équation de la tangente, au point d'abscisse 2, à la courbe représentative C_g de g .

Préciser les demi-tangentes, aux points d'abscisses 1 et -1, à C_g .

2) Soit la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |x^2 + x|$.

Préciser les demi-tangentes, aux points d'abscisses 0 et -1, à la courbe représentative de h .

Exercice 3 :

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2(x-1)^2}}{(x-1)(|x|+1)} & \text{pour } x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=0$ et $x=1$.

Corrigé : devoir surveillé

Exercice 1 :

Pour $x=2$, on a $f(2) = \sqrt{3}$; donc $f(x) - f(2) = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3}$.

Ce qui peut encore s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) - f(2) &= \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3})(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3})}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}} \\ f(x) - f(2) &= \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}} = \frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}} \\ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 2 :

1) On a $g(x) = x + \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 1$.

La fonction polynôme u est dérivable et strictement positive sur $] -\infty ; -1[$ et $] 1 ; +\infty[$. La fonction g est donc dérivable sur ces intervalles.

Pour tout $x \in] -\infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty[$, $g'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

La tangente T à C_g au point d'abscisse 2 a une équation de la forme $y = g'(2)(x - 2) + g(2)$.

Comme $g(2) = 2 + \sqrt{3}$ et $g'(2) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$, une équation de T

est : $y = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}(x - 2) + 2 + \sqrt{3}$.

$$\text{Soit } y = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Demi-tangente au point d'abscisse 1 :

Si $x \in] 1 ; +\infty[$, $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1}$.

On a : $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 1 + \frac{\sqrt{(x - 1)(x + 1)}}{x - 1}$

Comme $x - 1 > 0$, on a :

$$x - 1 = \sqrt{(x - 1)^2} \text{ et } \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 1 + \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}},$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = +\infty$ donc g n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 1$

mais sa courbe représentative admet en ce point une demi-tangente verticale c'est-à-dire parallèle à l'axe yOy' .

Demi-tangente au point d'abscisse -1 :

Si $x \in]-\infty ; -1[$, $\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + 1}{x + 1}$.

On a : $\frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = 1 + \frac{\sqrt{(x - 1)(x + 1)}}{x + 1}$.

Comme $x + 1 < 0$, on a $x + 1 = -\sqrt{(x + 1)^2}$,

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = 1 - \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}},$$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(1)}{x + 1} = -\infty$ donc g n'est pas dérivable à gauche en $x_1 = -1$

mais sa courbe représentative admet en ce point une demi-tangente verticale.

2) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |x(x + 1)|$.

- Si $x \in]-\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty[$, $h(x) = x^2 + x$.
- Si $x \in [-1 ; 0[$, $h(x) = -x^2 - x$.

- La restriction h_1 de h sur $] -\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty [$ est définie par $h_1(x) = x^2 + x$. La fonction h_1 est dérivable sur $] -\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty [$ car c'est une fonction polynôme et $h'_1(x) = 2x + 1$.

La fonction h est donc dérivable sur $] -\infty ; -1 [\cup] 0 ; +\infty [$, dérivable à gauche en $x = -1$ et dérivable à droite en $x = 0$. On a :

$$h'_g(-1) = h'_1(-1) = -1 \quad \text{et} \quad h'_d(0) = h'_1(0) = 1.$$

- La courbe représentative C_h de h admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente à gauche, d'équation :

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ y = h'_g(-1)(x - (-1)) + h(-1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ y = -x - 1 \end{cases}.$$

- La courbe C_h admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à droite, d'équation :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = h'_d(0).x + h(0) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x \end{cases}.$$

- La restriction h_2 de h sur $[-1 ; 0]$ est définie par $h_2(x) = -x^2 - x$.

La fonction h_2 est dérivable sur $[-1 ; 0]$ et $h'_2(x) = -2x - 1$.

La fonction h est donc dérivable sur $] -1 ; 0 [$; elle est dérivable à droite en -1 et dérivable à gauche en 0 . On a :

$$h'_d(-1) = h'_2(-1) = 1 \quad \text{et} \quad h'_g(0) = h'_2(0) = -1.$$

- La courbe C_h admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente à droite, d'équation :

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y = h'_d(-1) \cdot (x - (-1)) + h(-1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ y = x + 1 \end{cases}.$$

- C_h admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche, d'équation :

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y = h'_g(0) \cdot x + h(0) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ y = -x \end{cases}.$$

Exercice 3 :

Commençons par observer que sur $\mathbb{R} - \{1\}$ on a :

$$f(x) = \frac{|x(x-1)|}{(x-1)(|x|+1)},$$

on est conduit à distinguer les trois intervalles :

$$]-\infty ; 0], [0 ; 1[\quad \text{et} \quad]1 ; +\infty[.$$

- Sur $]-\infty ; 0]$, on a $|x(x-1)| = x(x-1)$ et $|x| = -x$, donc :

$$f(x) = f_1(x) = \frac{x}{-x+1}.$$

- Sur $[0 ; 1[$, on a : $|x(x-1)| = -x(x-1)$ et $|x| = x$, donc :

$$f(x) = f_2(x) = -\frac{x}{x+1}.$$

- Sur $]1 ; +\infty[$, on a : $|x(x-1)| = x(x-1)$ et $|x| = x$, donc :

$$f(x) = f_3(x) = \frac{x}{x+1} = -f_2(x).$$

1)

Étude de f au point $x = 0$:

a) Continuité : On a, d'une part $f(0) = 0$, d'autre part,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_2(x) = 0.$$

Finalement on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

Par conséquent, la fonction f est continue en 0.

b) Dérivabilité : Tout revient à étudier la limite $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

– Sur $] -\infty ; 0]$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f_1(x)}{x} = \frac{1}{-x+1}, \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

– Sur $[0 ; 1]$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f_2(x)}{x} = -\frac{1}{x+1}, \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en $x = 0$, mais elle admet une dérivée à gauche $f'_g(0) = 1$ et une dérivée à droite $f'_d(0) = -1$.

Remarque : On pouvait également observer que :

– Sur $] -\infty ; 0]$, on a :

$$f'(x) = f'_1(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f_1(t) - f_1(x)}{t - x} = \frac{1}{(-x+1)^2}, \quad \text{donc} \quad f'_g(0) = 1.$$

– Sur $[0 ; 1]$, on a :

$$f'(x) = f'_2(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f_2(t) - f_2(x)}{t - x} = -\frac{1}{(x+1)^2}, \text{ donc } f'_d(0) = -1.$$

Étude de f au point $x = 1$.

a) Continuité :

On a, d'une part $f(1) = -\frac{1}{2}$, d'autre part

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x) = -\frac{1}{2} = f(1)$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_3(x) = \frac{1}{2} \neq f(1).$$

La fonction f n'est donc pas continue au point $x = 1$; elle est continue à gauche de ce point, mais elle ne l'est pas à droite.

b) Dérivabilité :

La fonction f n'étant pas continue au point $x = 1$, n'est pas dérivable en

ce point ; cependant elle admet une dérivée à gauche $f'_g(1) = f'_2(1) = -\frac{1}{4}$

et une dérivée à droite $f'_d(1) = f'_3(1) = \frac{1}{4}$.

Devoir 1 (à faire la maison)

A rendre au bout d'une semaine

Exercice 1 :

Deux mobiles M_1 et M_2 se déplacent sur un axe $(O, \vec{i})$. Le mouvement de M_1 est donné par l'équation horaire : $x_1(t) = -t^2 + 4t + 1$ et celui de M_2 par $x_2(t) = t^2 - 2t + 1$. Unité de temps : la seconde ; unité de l'espace : le centimètre.

- 1) Construire dans le même repère les diagrammes des espaces, c'est-à-dire les courbes représentatives de :

$$t \mapsto x_1(t) \text{ et } t \mapsto x_2(t).$$

- 2) Construire dans le même repère les diagrammes des vitesses, c'est-à-dire les courbes représentatives de : $t \mapsto x'_1(t)$ et $t \mapsto x'_2(t)$.

- 3) Déterminer graphiquement, puis par le calcul, les instants où les mobiles se rencontrent.

- 4) Déterminer les instants où les mobiles ont :

- la même vitesse ;
- des vitesses opposées.

Exercice 2 :

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + px + q$ et C sa courbe représentative.

- 1) Calculer $f'(x)$. A quelle(s) condition(s) l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle deux racines distinctes $x_1 ; x_2$. Calculer alors $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
- 2) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $f(x) = 0$ ait trois racines distinctes est que x_1 et x_2 existent avec $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

En déduire que pour que l'équation $f(x) = 0$ ait trois racines distinctes, il faut et il suffit que l'on ait : $4p^3 + 27q^2 < 0$.

- 3) Étudier le cas où l'on a : $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Devoir 2 (à faire la maison)

A rendre au bout d'une semaine

Exercice 1 :

On considère l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et le point $H(\sqrt{2} ; \sqrt{2})$.

- 1) Écrire l'équation d'une droite de coefficient directeur m et passant par H .
- 2) Cette droite coupe la parabole en deux points M_1 et M_2 , d'abscisses x_1 et x_2 . Écrire l'équation admettant x_1 et x_2 pour racines.
- 3) Écrire les équations des tangentes à la parabole aux points M_1 et M_2 .
- 4) Soit T le point d'intersection de ces tangentes. Déterminer les coordonnées du point T en fonction de x_1 et x_2 . En déduire l'ensemble des points T lorsque m varie dans $\mathbb{R}$ et préciser le point où la parallèle menée par T à l'axe des ordonnées coupe le segment $[M_1 ; M_2]$.

Exercice 2 :

L'équation horaire du mouvement d'une pierre que l'on lâche dans un puits est celle du mouvement uniformément varié s'écrivant :

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{avec} \quad g = 9,8 \text{ m.s}^2.$$

On lâche la pierre à l'instant $t = 0$, à l'ouverture du puits.

- 1) Exprimer, en fonction de la profondeur x du puits, le temps mis par le son pour parcourir la distance x sachant qu'il parcourt 343 mètres par seconde.
- 2) $\frac{74}{35}$ s après avoir lâché la pierre, on perçoit le bruit de son entrée dans l'eau. Calculer la profondeur du puits et la vitesse de la pierre au moment où elle atteint l'eau.

Bibliographie

- [1] Mathématiques Déclic, 1^{re} S, Réservé aux enseignants ;
J.P BELTRAMONE, V. BRUN ; Hachette-Éducation, 2007.
ISBN : 978-2-01-135444-0
- [2] Mathématiques Fractale , Terminale S ;
H. CARNEC, G. HAYE , M. NOUET ; BORDAS, 1994.
ISBN : 2-04-020978-6
- [3] Maths Obligatoire et Spécialité, Exos résolus, Term S ;
C. RENARD, G. ROCHE ; Hachette-Éducation, 2005.
ISBN : 2.01.169109.5

ETUDE DE CONTINUITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES EN TERMINALE D.

Ecrit par

HAMADOU BAKARI

dirigé par

Pr. TCHANTCHO Bertrand

Inspecteur: NKENG ESSOMBO

Encadreur du Lycée: BOUDA Albert

Yaoundé, le 8 décembre 2014

♣ Table des matières ♣

0.1	Les parties du programme nécessaires au développement de la ressource et les contributions de ces parties	iv
0.2	Les apports de la ressource à d'autres parties du programme	iv
0.3	Les différentes applications de la ressource	iv
Introduction générale		1
1	Quelques rappels	2
1.1	Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction	3
1.2	Calcul des limites	4
1.2.1	Limites de fonctions élémentaires	4
1.2.2	Propriétés de comparaison	7
1.2.3	Opération sur les limites	8
1.2.4	Limite à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles	10
1.3	Lecture et interprétation des graphiques ou des tableaux de variation de fonctions	11
2	Continuité d'une fonction en un point	13
2.1	Notion de continuité en un point x_0	13
2.2	Définitions	15
2.3	Opérations sur les fonctions continues en un point x_0	19
2.3.1	Continuité de la somme de deux fonctions continues en x_0	19
2.3.2	Continuité du produit de deux fonctions continues en x_0	19
2.3.3	Continuité du quotient de deux fonctions continues en x_0	20
2.3.4	Continuité de la racine carrée d'une fonction continue en x_0	21
2.3.5	Continuité de la valeur absolue d'une fonction continue en x_0	21
2.3.6	Continuité de la composée de deux fonctions en un point x_0	21

3	Continuité des fonctions sur un intervalle	23
3.1	Opération sur les fonctions continues sur un même intervalle	28
3.1.1	Propriétés	28
4	Prolongement par continuité d'une fonction	30
5	Utilisations de continuité des fonctions	32
5.1	Image d'un intervalle par une fonction continue	33
5.2	Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone . . .	36
5.3	Théorème des valeurs intermédiaires	39
5.4	la variation et la représentation graphique de fonction réciproque d'une fonction continue monotone.	42
	Exercices	45
	Bibliographie	48

♣ ETUDE DE CONTINUITE DES FONCTIONS EN TERMINALE D. ♣

Objectifs pédagogiques spécifiques :

A la fin de ce cours, le lecteur doit être capable de :

1. Etudier la continuité d'une fonction en un point ;
2. Etudier la continuité d'une fonction sur un intervalle ;
3. Faire un prolongement par continuité d'une fonction ;
4. Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue ;
5. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solution d'une équation ;
6. Etudier les variations et représenter le graphique de fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

♣ LIENS AVEC LES AUTRES PARTIES DU PROGRAMME ♣

0.1 Les parties du programme nécessaires au développement de la ressource et les contributions de ces parties

1. Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction ;
2. Calculs des limites de fonctions ;
3. Lecture et interprétation des graphiques ou des tableaux de variation de fonctions.

0.2 Les apports de la ressource à d'autres parties du programme

1. Détermination des primitives d'une fonction continue ;
2. Intégrations de fonctions continues ;
3. Etudes des fonctions.

0.3 Les différentes applications de la ressource

1. L'image d'un intervalle par une fonction continue ;
2. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solution d'une équation ;
3. L'application réciproque continue et strictement monotone sur un intervalle image d'une application continue et strictement monotone sur un intervalle.

♣ Introduction générale ♣

La notion mathématique de continuité peut dériver du mot « *continu* » possédant deux significations, non étrangères l'une à l'autre. D'une part, « *continu* » a le sens de : non interrompu dans son étendue ou sa durée, exempt de lacunes, d'un seul tenant (une rangée de piqués continus d'une clôture, une muraille continue). D'autre part « *continu* » peut signifier : exempt de sauts, de modifications subites (évolution continue).

Si l'on adopte la première interprétation, on conçoit intuitivement une fonction continue comme une fonction prenant toutes les valeurs intermédiaires entre deux valeurs données. Avec la seconde interprétation, toujours d'un point de vue intuitif, dire qu'une fonction f est continue signifie : si, à x_0 , correspond la valeur $f(x_0)$ de la fonction, à des valeurs de x peu différentes de x_0 correspondent des valeurs de la fonction peu différentes de $f(x_0)$. La première interprétation est donc liée à la notion d'ordre, alors que la seconde tient à la notion de distance. Les mathématiciens ont adopté le second point de vue, qui, de plus que le premier, permet de faire correspondre à des valeurs x proches de x_0 , des valeurs $f(x)$ proches de $f(x_0)$. Ce qui fait que la notion de continuité d'une fonction va de façon formelle s'appuyer sur la notion de limite.

En fait, la notion de continuité étant déjà introduite en classe de première, en terminale, il est question de renforcer la connaissance de l'élève sur cette notion de continuité des fonctions réelles en un point et ses propriétés, lui présenter la continuité d'une fonction sur un intervalle et ses propriétés, et enfin lui montrer ses importances dans la détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue, l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solution d'une équation, et dans l'étude de variations et de représentation graphique de fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

Quelques rappels

Dans ce chapitre, il s'agit de rappeler quelques notions comme la détermination de l'ensemble de définition d'une fonction, les Calculs des limites de fonctions et l'interprétation des graphiques ou des tableaux de variation de fonctions servant d'outils pour l'enseignement des notions suivantes :

- Continuité d'une fonction en un point ;
- Continuité d'une fonction sur un intervalle ;
- Prolongement par continuité d'une fonction ;
- Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue ;
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solution d'une équation ;
- Etudier les variations et représenter le graphique de fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

1.1 Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction

Exemple 1.1.1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{|x|-x}} \text{ et } g(x) = \frac{\ln(4-x)}{|x-1|-1}.$$

Solution :

-Pour $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{|x|-x}}$: Le numérateur n'est défini que pour les valeurs de x telles que l'on ait $(x-2)(x+2) \geq 0$, c'est-à-dire $x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$. Le dénominateur est défini quel que soit x , mais il n'est différent de zéro que pour les valeurs de x strictement négatives, c'est-à-dire $x \in]-\infty; 0[$. Donc l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; -2]$.

-Pour $g(x) = \frac{\ln(4-x)}{|x-1|-1}$: Le numérateur n'est défini que pour les valeurs de x telles que l'on ait $4-x > 0$, c'est-à-dire $x \in]-\infty; 4[$. Le dénominateur n'est défini que pour les valeurs de x autres que celles pour lesquelles on a $|x-1|-1 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ et $x = 2$, donc l'ensemble de définition de g est $D_g =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; 4[$.

Exercice 1.1.1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes, puis les représenter sous forme de réunion d'intervalles :

i) $f(x) = 4$, $g(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x - 1}$ et $h(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 2$;

ii) $f(x) = \frac{2x+1}{4x^2-1}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-4}$;

iii) $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|+2}$, $g(x) = \frac{\ln(x^2)-x-6}{\sqrt{2x^2+1}}$ et $h(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

iv) $f(x) = x^2 + E\left[\frac{1}{1-E(x^2)}\right]$.

1.2 Calcul des limites

1.2.1 Limites de fonctions élémentaires

(a) a et c sont des nombres réels.

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$.

(b) a est un nombre réel et n est un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$;
- Pour n pair, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$;
- Pour n impair, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Exemple 1.2.1.

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^6} = 0$.
- ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x^3} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} = +\infty$

Exercice 1.2.1.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^4$; $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^5}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^6}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5}$.

Remarque 1.2.1.

- (i) Dans le cas où f est définie en a , f admet une limite en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(a)$;
- (ii) Dans le cas où f n'est pas définie en a , f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à l .

Exemple 1.2.2.

1) Soit $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous : .

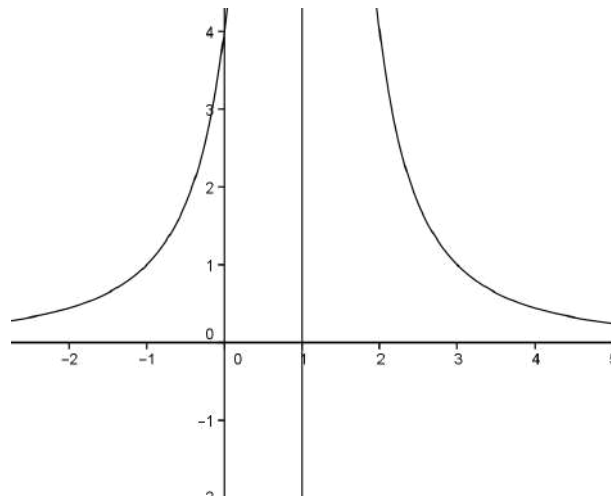


FIGURE 1.1 – C_f

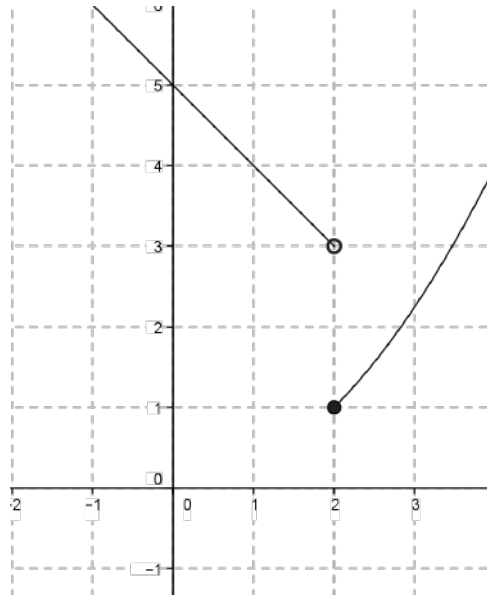
Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

2) Considérons la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} (-x + 5) & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^2}{4} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x + 5) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2}{4}\right) = 1.$$


FIGURE 1.2 – C_f

Exercice 1.2.2.

1. Les fonctions suivantes admettent-elles de limite en x_0 ?

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 0.$$

$$\text{ii) } g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 0.$$

2. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes, puis calculer leur limite en x_0 :

$$\text{i) } f(x) = \frac{1}{x^3} \text{ en } x_0 = 0 \text{ et } g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 0.$$

$$\text{ii) } g(x) = \frac{x^2}{x} \text{ en } x_0 = 0.$$

1.2.2 Propriétés de comparaison

Soient f et g deux fonctions numériques à variable réelle x .

Propriété 1.1.

Si $f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Propriété 1.2.

Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Propriété 1.3.

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Exemple 1.2.3.

Calculons la limite de la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{\sin^2(x)+2}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\forall x \in]-\infty; 1[$,

$$\begin{aligned} 2 \leq \sin^2 x + 2 \leq 3 &\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin^2 x + 2} \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{x-1}{2} \leq \frac{x-1}{\sin^2 x + 2} \leq \frac{x-1}{3}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)(x-1) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

De même $\forall x \in]1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} 2 \leq \sin^2 x + 2 \leq 3 &\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin^2 x + 2} \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{x-1}{3} \leq \frac{x-1}{\sin^2 x + 2} \leq \frac{x-1}{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)(x-1) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 1.2.3.

1. Utiliser les propriétés ci-dessus pour calculer les limites des fonctions suivantes :

i) $f(x) = \frac{2}{3+E(x)}$ en $+\infty$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x ;

ii) $f(x) = x^3 \cos \frac{2}{x^2}$ en 0.

iii) $f(x) = -x + 1 - \cos x$ et $g(x) = \frac{x \sin x}{x^2+2}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{x \cos x}{1+x^2}$.

i) Déterminer un encadrement de f par deux fonctions rationnelles.

ii) En déduire la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

1.2.3 Opération sur les limites

Limite d'une somme de deux fonctions

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, l et m deux autres nombres réels.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$
l	m	$l + m$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	<i>pas de conclusion immédiate</i>

Exemple 1.2.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 + \frac{1}{x^2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 5x + 3 = 9 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 10 = -\infty$$

Exercice 1.2.4.

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 + 3x^3 - x + 6$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 2x^2 - 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^6}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 + x - 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5}$.
- $\lim_{x \rightarrow -2} x^5$; $\lim_{x \rightarrow 3} x^3$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{x^5}$.

Limite d'un produit de deux fonctions

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, l et m sont deux autres nombres réels.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x)$
l	m	$m \times l$
$l \neq 0$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } l > 0 \\ -\infty \text{ si } l < 0 \end{cases}$
$l \neq 0$	$-\infty$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } l < 0 \\ -\infty \text{ si } l > 0 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$ ou $-\infty$	<i>pas de conclusion immédiate</i>

Remarque 1.2.2.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f^n(x) = l^n$ où $f^n(x) = \underbrace{f(x) \times f(x) \times \dots \times f(x)}_{n \text{ fois}}$.

Exemple 1.2.5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^4) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4(1 + \frac{1}{x^3}) = +\infty$

Exercice 1.2.5.

Calculer la limite de chacune des fonctions suivantes :

i) $f(x) = x^3(-3 + \frac{2}{x})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

ii) $g(x) = -3(\frac{1}{2}x + 5)$ en 2.

iii) $h(x) = (\sqrt{x^2 + 1} + 6)(x - 2)$ en $+\infty$.

iv) $j(x) = (x - 1)(\frac{-2}{x^2})$ en $+\infty$.

Limite d'un quotient de deux fonctions

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, l et m sont deux autres nombres réels.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
l	$m \neq 0$	$\frac{l}{m}$
$l \neq 0$	0	$\begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ -\infty & \text{si } l < 0 \end{cases}$
l	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$+\infty$	l	$\begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ -\infty & \text{si } l < 0 \end{cases}$
$-\infty$	l	$\begin{cases} +\infty & \text{si } l < 0 \\ -\infty & \text{si } l > 0 \end{cases}$
0	0	<i>pas de conclusion immédiate</i>
$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	<i>pas de conclusion immédiate</i>

Exemple 1.2.6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{2}{3}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2}$;

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$.

Exercice 1.2.6.

Calculer la limite de chacune des fonctions suivantes :

i) $f(x) = \frac{x-5}{-x^2+3}$ en -1 , en $\sqrt{3}$ et en 5.

ii) $g(x) = \frac{x^2}{x(x+3)}$ en 0 et en $+\infty$.

Limite de la composée d'une fonction de limite l et d'une fonction qui a une limite en l

f et g sont des fonctions, a , l et l' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = l'$.

Exemple 1.2.7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{4x^2 - 3}} = \frac{1}{2}$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{4x^2 - 3} = \frac{1}{4}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Exercice 1.2.7.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x+2}{x}}$.

On pose $u(x) = \frac{2x+2}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

i) Calculer la limite de u en 2 et la limite de v en 3.

ii) En déduire la limite de $f(x) = (v \circ u)(x)$ en 2.

2. Calculer la limite des fonctions suivantes :

i) $f(x) = \sqrt{\frac{8x+1}{2x-3}}$ en $+\infty$.

ii) $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ en $+\infty$.

1.2.4 Limite à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n;$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n;$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m};$
- (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$

Exemple 1.2.8.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2 - x^4 + x - 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 - 3x + 4x^3 - 5x^2}{2x^3 - x^2 + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^3}{2x^3} \right) = 2.$$

Exercice 1.2.8.

Calculer la limite de chacune des fonctions suivantes en $-\infty$ et en $+\infty$:

i) $f(x) = 2x^3 - 3x + \frac{1}{2}$; $g(x) = -\frac{1}{3}x^4 - 6x + \frac{2}{5}$ et $h(x) = -x^5 - 8x^2 + 5$.

ii) $f(x) = \frac{-x^3 + 5x^2 + x - 8}{8x^2 + 4x - 5}$; $g(x) = \frac{2 + 5x - x^2}{3 - x - 3x^2}$ et $h(x) = \frac{-x^5}{3x^3 + 2x^2 + 5x + 8}$.

1.3 Lecture et interprétation des graphiques ou des tableaux de variation de fonctions

Exemple 1.3.1. Soit f la fonction à variable réelle définie par $f(x) = \frac{4x^2-3x-1}{4x^2+1}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :

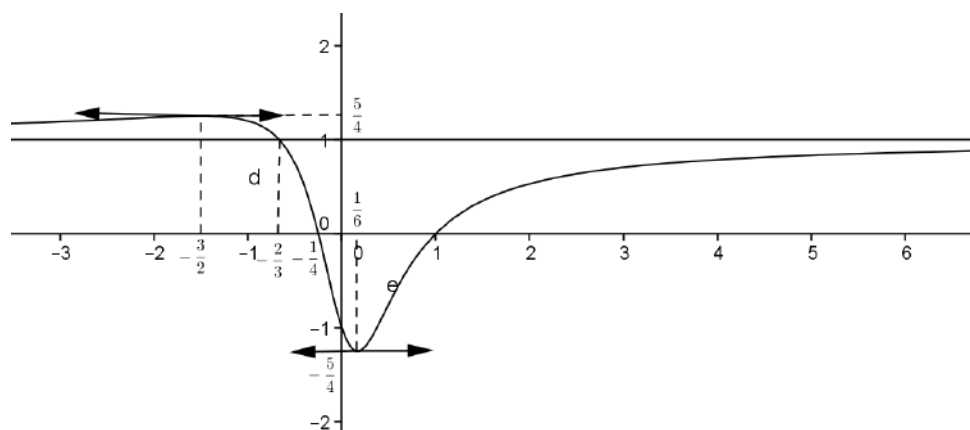


FIGURE 1.3 – C_f

1. Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par $f :]-\infty; -\frac{2}{3}]$ et $[-\frac{3}{2}; 1]$.
2. Déterminer l'image réciproque de $[-\frac{5}{4}; 1]$ et $[0; 1]$.

Solution :

1. $f(]-\infty; -\frac{2}{3}]) = [1; \frac{5}{4}]$ et $f([-\frac{3}{2}; 1]) = [-\frac{5}{4}; 1]$.
2. L'image réciproque de $[0; 1]$ est $[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}] \cup [1; +\infty[$.

1.3. Lecture et interprétation des graphiques ou des tableaux de variation de fonctions

Exercice 1.3.1. Soit g une fonction définie par $g(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4$ dont la courbe représentative est donnée ci-après :

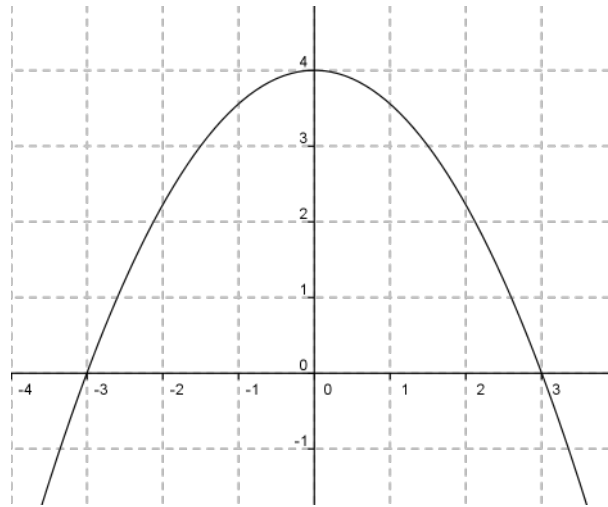


FIGURE 1.4 – C_g

1. Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par g : $[-3; 3]$; $[-3; 0]$ et $[0; 3]$.
2. Déterminer l'image réciproque de $[0; 2]$.
3. Déterminer la variation de g sur l'intervalle $[-3; 3]$, puis donner un intervalle sur lequel g réalise une bijection.

Continuité d'une fonction en un point

Objectifs spécifiques : Dans ce chapitre, il est question de renforcer la connaissance de l'élève sur la notion de continuité des fonctions réelles en un point déjà étudiée en classe de première. Il est donc important qu'à la fin de ce chapitre l'élève soit capable de donner les définitions de la fonction continue en un point ainsi que ses propriétés.

Prérequis : Calculs de limites.

2.1 Notion de continuité en un point x_0

Activité1 : Fatimata et Momo ont tracé chacun une courbe sur le sol du point A au point B et du point C au point D respectivement. Momo, en traçant sa courbe, a rencontré un caillou placé sur le sol qu'il n'a pas voulu contourner, il a donc soulevé sa main pour continuer le tracé de sa courbe après le caillou. Lorsqu'il a déplacé ce caillou, ils ont obtenu leurs courbes représentées ci-après :

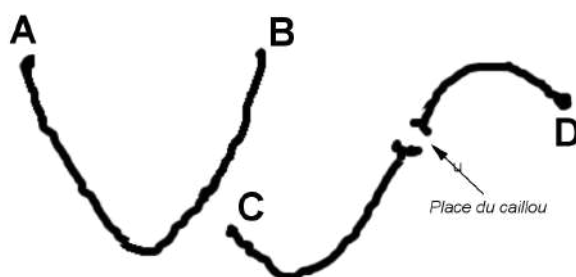


FIGURE 2.1 – courbes de Fatimata et Momo

- (a) Laquelle de ces deux courbes présente-t-elle une rupture ?
- (b) Que peut-on dire de l'autre courbe ? A-t-on levé la main pendant son tracé ?

2.1. Notion de continuité en un point x_0

Activité2 : Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle $[a; b]$ dont les courbes représentatives sont celles de Fatimata et de Momo reportées chacune dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ci-après :

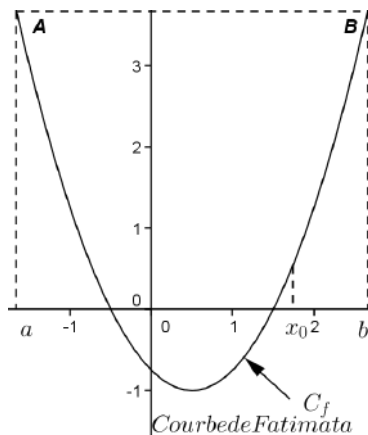


FIGURE 2.2 – Courbe de Fatimata

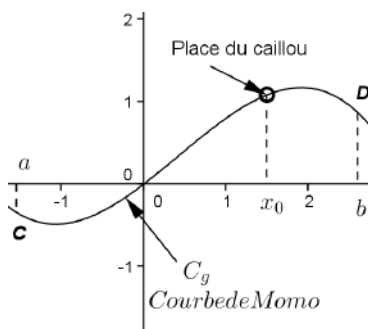


FIGURE 2.3 – Courbe de Momo

On observe graphiquement que la fonction g n'est pas continue en x_0 (point d'abscisse x_0 où le caillou était placé) puis qu'elle n'est pas définie en x_0 ou encore qu'elle n'a pas d'image en x_0 . On dit que g n'est pas continue en x_0 ou encore g est discontinue en x_0 . Par contre, la fonction f est tracée sans rupture en x_0 . On dit que la fonction f est continue en x_0 .

2.2. Définitions

QUESTION : Peut-on donc dire que si une fonction est définie en x_0 , alors elle est continue en x_0 ?

Pour répondre à cette question, l'élève est appelé à traiter l'exercice suivant :

Soit f une fonction définie par $f(x) = E(x)$ la partie entière du nombre réel x ($x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1$).

- (i) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- (ii) Compléter le tableau suivant :

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8
$f(x)$								

1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5

- (iii) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ puis comparer les à $f(2)$.
- (iv) Donner la représentation graphique de f dans l'intervalle $[1; 2, 5]$.
- (v) Peut-on parler de rupture sur la fonction f en 2 par exemple ?
- (vi) Que peut-on dire de la continuité de f en 2.

Remarque 2.1.1.

La notion de limite permet d'étudier la continuité d'une fonction en x_0 . Pour cela, la définition de continuité d'une fonction va de façon formelle s'appuyer sur la notion de limite.

2.2 Définitions

Soient f une fonction et x_0 un nombre réel.

Définition 2.1.

f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et admet une limite en x_0 égale à $f(x_0)$ (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$).

Définition 2.2.

f est continue à gauche de x_0 si f est définie sur un intervalle $]a; x_0]$ et admet une limite à gauche de x_0 égale à $f(x_0)$ (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

Définition 2.3.

f est continue à droite de x_0 si f est définie sur un intervalle $[x_0; a[$ et admet une limite à droite de x_0 égale à $f(x_0)$ (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$).

Théorème 2.1.

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite de x_0 (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$).

Démonstration :

-Si f est continue en x_0 , alors f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ qui signifient $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, c'est-à-dire f est continue à gauche et à droite de x_0 .

-Si f est continue à gauche et à droite de x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ qui signifie f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ qui veut dire f est continue en x_0 .

Remarque 2.2.1.

Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ signifie aussi que $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$.

Exemple 2.2.1.

Soit f une fonction définie par $f(x) = 3x + 2$.

Montrer que f est continue en 5.

Solution :

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (3x + 2) = 17$ et $f(5) = 17$. on a $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 17 = f(5)$. Donc f est continue en 5.

Exemple 2.2.2.

Soit g une fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $g(0)$
2. g est-elle continue en 0 ?

Solution :

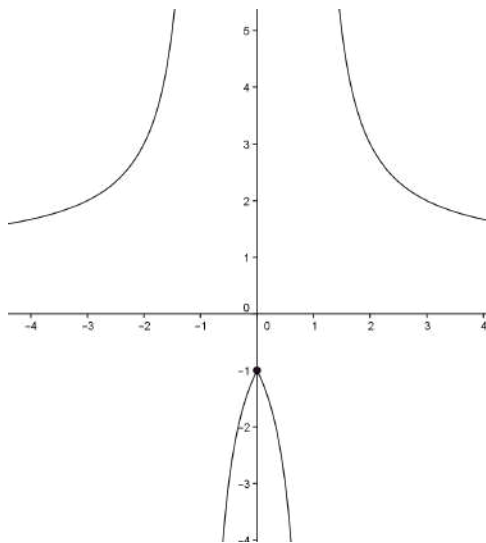


FIGURE 2.4 – C_g

1. On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x+1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x-1} = -1$ et $g(0) = -1$
2. D'après la question précédente, on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, donc g est continue en 0.

Exemple 2.2.3.

Soit h une fonction définie par $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de h en 1.
2. Dessiner la courbe représentative C_h de h .

Solution :

1)

- On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 2x = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 2x + 2 = 1$ et $h(1) = 1$
- h n'est pas continue à gauche de 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq h(1)$ et h est continue à droite de 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1)$.
- h n'est pas continue en 1, car $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$.

2) la courbe représentative C_h de h

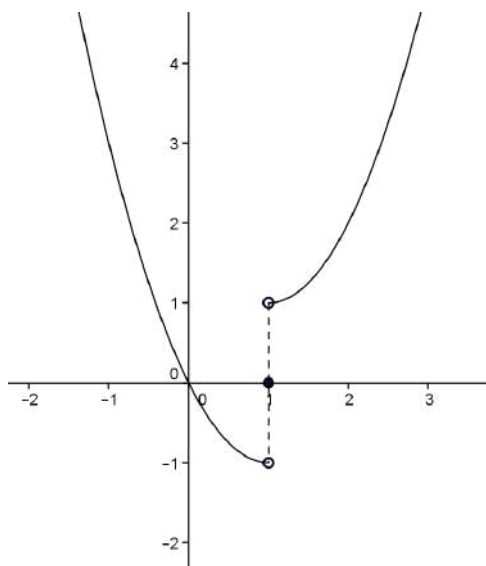


FIGURE 2.5 - C_h

Exercices d'application :

1. Soit f une fonction définie par $f(x) = x^2 + x - 1$. f est-elle continue en 1 ?
2. Soit g une fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
 - (i) Écrire g sans symboles valeur absolue.
 - (ii) Déterminer l'ensemble de définition de g .
 - (iii) Étudier la continuité de g en 0.
3. Étudier la continuité de h en 0 pour $h(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2.3 Opérations sur les fonctions continues en un point

x_0

2.3.1 Continuité de la somme de deux fonctions continues en x_0

Activité : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle contenant x_0 .

Montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = (f + g)(x_0)$.

Indication :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f)(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} (g)(x) \\ &= f(x_0) + g(x_0) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont continues en } x_0. \\ &= (f + g)(x_0). \end{aligned}$$

Propriété 2.1.

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 , alors leur somme $f + g$ est continue en x_0 .

Exemple 2.3.1.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 1$.

Montrons que f est continue en 1.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto (x^2 - 1)$ sont continues en 1. Donc f est continue en 1 comme somme de deux fonctions continues en 1.

Exercice 2.3.1.

Etudier la continuité de la fonction $f(x) = (3x^2 - 3) + \sqrt{2x + 1}$ en 1.

2.3.2 Continuité du produit de deux fonctions continues en x_0

Activité :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle contenant x_0 .

Montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = (f \times g)(x_0)$.

Indication :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) &= \left(\lim_{x \rightarrow x_0} (f)(x) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow x_0} (g)(x) \right) \\ &= (f(x_0)) \times (g(x_0)) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont continues en } x_0. \\ &= (f \times g)(x_0). \end{aligned}$$

Propriété 2.2.

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 , alors leur produit $f \times g$ est continue en x_0 .

Exemple 2.3.2.

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}(x^2 + x - 1)$.

Etudions la continuité de f en 2.

Les fonctions $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x}$ et $x \mapsto (x^2 + x - 1)$ sont continues en 2, donc f est continue en 2 comme produit de deux fonctions continues en 2.

Exercice 2.3.2.

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

i) $f(x) = (2x^2 + x + 3)\sqrt{x+1}$ en 2 ;

ii) $g(x) = x \sin x$ en $\frac{\pi}{2}$.

2.3.3 Continuité du quotient de deux fonctions continues en x_0

Activité : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle contenant x_0 avec $g(x_0) \neq 0$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$.

Indication :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont continues en } x_0 \\ &= \left(\frac{f}{g}\right)(x_0). \end{aligned}$$

Propriété 2.3.

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 et $g(x_0) \neq 0$, alors leur quotient $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .

Exemple 2.3.3.

Soient f une fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x-1}$.

Montrons que f continue en $\frac{\pi}{2}$.

Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto (x - 1)$ sont continues en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - 1 \neq 0$. Donc f est continue en $\frac{\pi}{2}$ comme quotient de deux fonctions continues en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.3.3.

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

i) $f(x) = \frac{2x^2+x+3}{x-1}$ en 2 ;

ii) $g(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3}{2\pi+\cos x}$ en π .

2.3.4 Continuité de la racine carrée d'une fonction continue en x_0

Activité : Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle x définies respectivement par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. Que peut-on dire de la continuité de $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ en 0 ?
3. Étudier la continuité de f en 2.
4. Que peut-on dire de la continuité de $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ en 2 ?

Propriété 2.4.

Si f est une fonction continue en x_0 et $f(x_0) \geq 0$, alors la racine carrée de f est continue en x_0 .

Exercice 2.3.4.

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

- i) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x+3}{x-1}}$ en 2 ;
- ii) $g(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}x^3}{1+\cos x}}$ en π .

2.3.5 Continuité de la valeur absolue d'une fonction continue en x_0

Activité : Soient f une fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = x^2 - 1$.

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. Posons $g(x) = |f(x)|$. Que peut-on dire de la continuité de g en 0 ?

Propriété 2.5.

Si f est une fonction continue en x_0 , alors $|f|$ est continue en x_0 .

Exercice 2.3.5. Etudier la continuité de la fonction $f(x) = |-5x^3 + 2x + 1|$ en 1.

2.3.6 Continuité de la composée de deux fonctions en un point x_0

Propriété 2.6. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(I)$.*

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Démonstration :

f est continue en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ et g est continue en $f(a)$,
alors $\lim_{y \rightarrow f(a)} g(y) = g[f(a)]$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g \circ f(a)$. Donc $g \circ f$ est continue
en a .

Exemple 2.3.4.

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et de g .

2. Étudier la continuité de $g \circ f$ en 0 et en 1.

Solution :

1. $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ et $D_g = [0; +\infty[$. f et g sont continues sur leur domaine de définition.

2.

- On a : $0 \in D_f$. Comme f est continue sur D_f , alors f est continue en 0. Mais $f(0) = -\frac{1}{2}$ n'appartient pas à D_g , donc $g \circ f$ n'est pas continue en 0.
- On a : $1 \in D_f$. Comme f est continue sur D_f , alors f est continue en 1 et $f(1) = 0 \in D_g$, donc $g \circ f$ est continue en 1.

Exercice 2.3.6.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

Appliquer la propriété ci-dessus pour étudier la continuité de f en 0.

Continuité des fonctions sur un intervalle

Objectifs spécifiques : A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- Donner la définition de la continuité d'une fonction sur un intervalle et ses propriétés ;
- Etudier la continuité d'une fonction sur un intervalle.

Prérequis :

- Déterminer le domaine de définition d'une fonction ;
- Calculer des limites de fonctions ;
- Déterminer les extrémités de l'intervalle image par interprétation graphique ou du tableau de variation.

Activité :

Soit f une fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+5}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ 4x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Etudier la continuité de f en -2 , à gauche et à droite de 2, et en 3.
3. En déduire la continuité de f sur les intervalles $[-2; 2[$; $[2; 3]$ et $]2; 3]$.

Définition 3.1.

Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I .

La fonction f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point x_0 de I .

Exemple 3.0.5. Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. f est-elle continue sur tout intervalle de son domaine de définition ? Sinon déterminer les points où f n'est pas continue.

Solution :

1. Déterminons le domaine de définition de f .

$f(x)$ existe si et seulement si $|x| + 1 \neq 0$

si et seulement si $x \in \mathbb{R}$ car $|x| + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $D_f =]-\infty; +\infty[$.

2. Etudions la continuité de f en 0 et en 1. Pour le faire, écrivons f sans symbole de valeur absolue. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$ x $		$-x$ o x	x	
$ x-1 $		$-x+1$	$-x+1$ o $x-1$	
$f(x)$		$\frac{-x+1}{-x+1}$	$\frac{-x+1}{x+1}$	$\frac{x-1}{x+1}$

$$\text{Donc } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{-x+1}{x+1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

continuité en 0 : On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x+1}{x+1} = 1$ et $f(0) = 1$.

Donc f est continue en 0.

continuité en 1 : On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1}{x+1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x+1} = 0$ et $f(1) = 0$. Donc f est continue en 1.

On conclut en disant que f est continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ qui est son domaine de définition.

Exemple 3.0.6.

Soit g une fonction définie par $g(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de g .
2. g est-elle continue sur tout intervalle de son domaine de définition ? Sinon déterminer les points où g n'est pas continue.

Solution :

1. Déterminons le domaine de définition de g , donc $D_g =]-\infty; +\infty[$.
2. Etudions la continuité de g en 0. Pour le faire, écrivons g sans symbole de valeur absolue.

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ x $	$-x$	0	x
$x^2 + \frac{ x }{x}$	$x^2 + \frac{-x}{x}$		$x^2 + \frac{x}{x}$

$$\text{Donc } g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

continuité en 0 : On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$ et $g(0) = 1$. Donc g est continue à droite en 0, mais elle n'est pas continue à gauche en 0. Donc g n'est pas continue en 0. On conclut en disant que g n'est pas continue sur tout intervalle de D_g contenant 0.

Remarque 3.0.1.

La fonction g est définie en 0 mais elle n'est pas continue en 0.

Exercice 3.0.7.

i) On donne les fonctions suivantes : $f(x) = \frac{-2x^2+3}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{3x-2} + x^2 + 1$ et $h(x) = \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x - 5$.

1. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
 2. Etudier la continuité de chacune de ces fonctions sur son domaine de définition.
- ii) Etudier la continuité de $f(x) = \frac{|x+2|}{3x-2}$ en -2

Remarque 3.0.2.

1. Toute fonction polynôme à coefficients réels est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction rationnelle à coefficients réels est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.
3. Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3.0.7. (cas des graphiques illustrant des fonctions continues ou non sur un intervalle)

Parmi les fonctions suivantes dont les courbes représentatives sont données ci-après, identifier celles qui sont continues sur l'intervalle $[a;b]$ et celles qui ne sont pas :

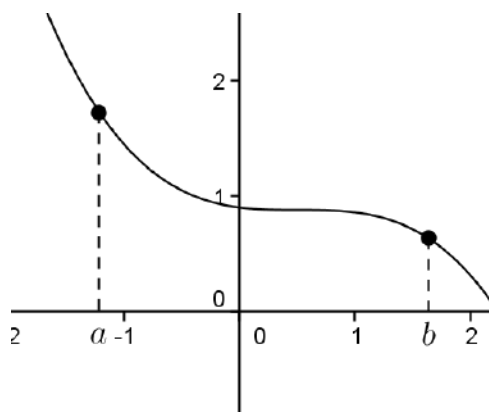


FIGURE 3.1 – Courbe de f_0

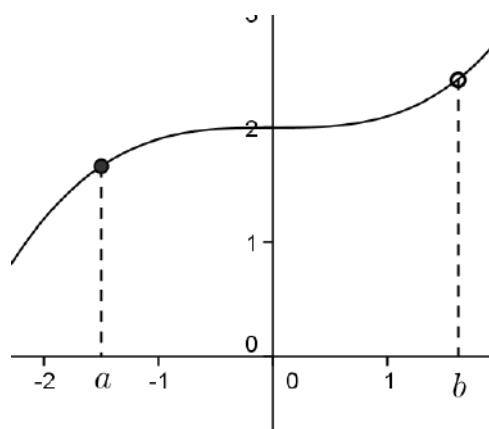


FIGURE 3.2 – Courbe de f_1

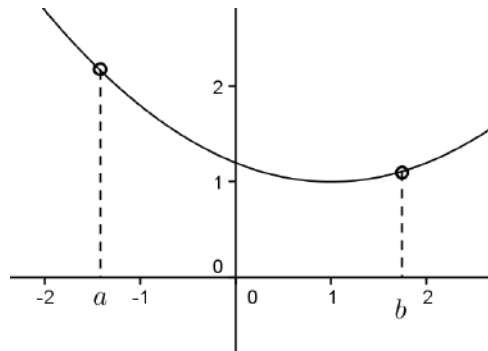


FIGURE 3.3 – Courbe de f_2

Remarque 3.0.3. On peut avoir une fonction dont la courbe représentative est représentée d'un trait continu en apparence mais qu'elle présente une infinité de discontinuités.

Exemple 3.0.8.

La courbe représentative de la fonction f définie

par :
$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
 est d'un trait continu à l'apparence ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$), mais présente une infinité de discontinuités.

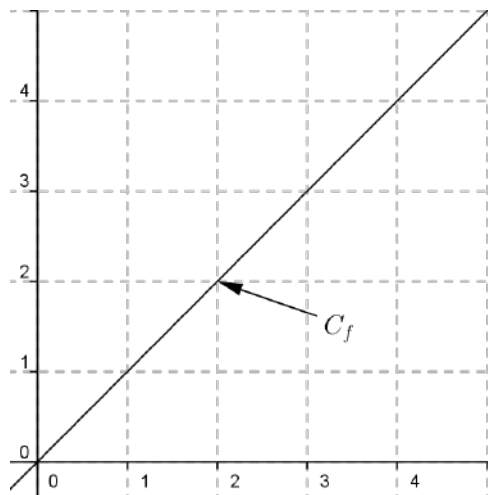


FIGURE 3.4 – Courbe f

3.1 Opération sur les fonctions continues sur un même intervalle

3.1.1 Propriétés

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété 3.1.

Si f et g sont continues sur I , alors $f + g$ est continue sur I .

Propriété 3.2.

Si f et g sont continues sur I , alors $f \cdot g$ est continue sur I .

Propriété 3.3.

Si f et g sont continues sur I et de plus g est non nulle sur I , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Propriété 3.4.

Si f est continue sur I , alors $\lambda \cdot f$ est continue sur I .

Propriété 3.5.

Si f est continue sur I , alors $|f|$ est continue sur I .

Propriété 3.6.

Soit h une fonction, $h \circ f$ est continue sur I si et seulement si f est continue sur I et h est continue sur $f(I)$.

Exemple 3.1.1.

1. Soit la fonction $f : x \mapsto 5x^2 - 4x + 2$. Montrons que f est continue sur l'intervalle $[-2; 7]$.

La fonction f est un polynôme donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $[-2; 7]$.

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{2x}{2x^2-3}$.

Etudions la continuité de g sur l'intervalle $[0; 3]$.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\}$, et $\sqrt{\frac{3}{2}} \in [0; 3]$. Comme g n'est pas continue en $\sqrt{\frac{3}{2}}$, alors g n'est pas continue sur $[0; 3]$. Mais sur $[0; \sqrt{\frac{3}{2}}[\cup]\sqrt{\frac{3}{2}}; 3]$.

Exercice 3.1.1.

1. Etudier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition :

i) $f(x) = 4$ et $g(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 2$;

3.1. Opération sur les fonctions continues sur un même intervalle

ii) $f(x) = \frac{2x+1}{4x^2-1}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-4}$;

iii) $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|+2}$ et $g(x) = \frac{\ln x^2 - x - 6}{\sqrt{2x^2+1}}$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

Appliquer la propriété précédente pour étudier la continuité de f sur les intervalles $[1; 2]$ et $[0; 2]$.

Prolongement par continuité d'une fonction

Objectifs spécifiques :

A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de :

- Reconnaitre qu'une fonction est un prolongement par continuité d'une autre fonction ;
- Déterminer un prolongement par continuité d'une fonction en un point x_0 .

Prérequis :

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ;
- Etudier la continuité d'une fonction en un point.

Activité : On considère la fonction f définie sur $] - \infty; 1[\cup]1; +\infty[$
 par : $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1}$.

1. Justifier que f est continue sur chacun des intervalles de son domaine de définition.
2. f est-elle continue en 1 ? Justifier votre réponse.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
4. Peut-on dire que la fonction g par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété et définition :

Soit f une fonction non définie en x_0 , mais possédant une limite réelle l en x_0 .

La fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ est continue en x_0 .

On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0 . (On dit aussi que f est prolongeable par continuité en x_0).

Exemple 4.0.2. Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Peut-on avoir un prolongement par continuité de f en 0 ?

Solution :

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Calculons la limite de f en 0 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Alors la fonction h définie par $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est prolongement par continuité de f en 0.

Exercice 4.0.2. 1. Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$.

- i) Déterminer le domaine de définition de f .
 - ii) Calculer la limite de f en 0 et en déduire un prolongement par continuité g de f en 0.
2. Vérifier que la fonction h définie par $h(x) = \begin{cases} \frac{2x^3+x^2+6x+3}{4x^2-1} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\} \\ -\frac{25}{16} & \text{si } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ est un prolongement par continuité de la fonction $j(x) = \frac{2x^3+x^2+6x+3}{4x^2-1}$ en $-\frac{1}{2}$.

Utilisations de continuité des fonctions

Objectifs spécifiques :

A la fin de ce chapitre, le lecteur doit être capable de :

- Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue ;
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer ou justifier l'existence de solution d'une équation.
- Etudier les variations et la représentation graphique de la fonction réciproque d'une fonction continue monotone.

Prérequis :

- calculs des limites de fonctions ;
- Interprétation des graphiques ou des tableaux de variation des fonctions ;
- Détermination de l'image d'un point ou d'un segment par une fonction.
- Fonction bijective.

5.1 Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité1 : Considérons la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-après :

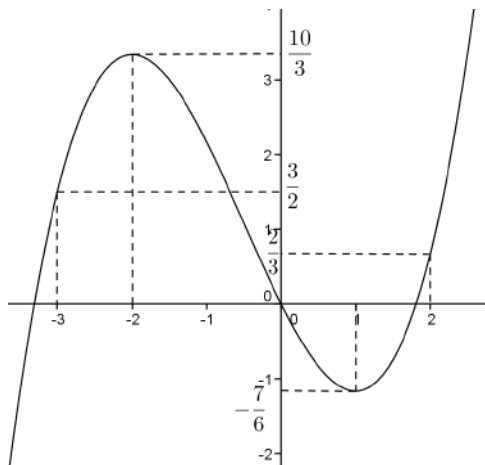


FIGURE 5.1 – Courbe de f

Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par f : $[-2; 2]$; $[0; +\infty[$; $] - \infty; -2]$ et $[-2; 1]$.

Activité2 : Considérons la fonction g continue sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-après :

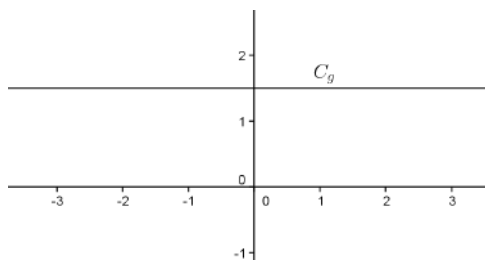


FIGURE 5.2 – Courbe de g

Déterminer l'image de l'intervalle $[-2; 3]$ par g .

5.1. Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété 5.1.

- L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle ou un singleton noté $f(I)$;
- L'image d'un intervalle fermé $[a; b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé ou un singleton noté $[m; M]$ où m et M désignent respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a; b]$.

Remarque 5.1.1.

m et M ne sont pas toujours les images des bornes de l'intervalle en question.

Exemple 5.1.1.

1. Soit f la fonction continue sur son domaine de définition dont le tableau de variation est donné ci-après :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$ 0 $-$	
f	0	$+\infty$	3	0

Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par $f :]-\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x^2 - x - 3$. Déterminer l'image de l'intervalle $[-1; 0]$ par g .

Solution :

1. $f(]-\infty; -1[) =]0; +\infty[$ et $f(]-1; +\infty[) =]-\infty; 3]$.

2. Déterminons l'image de l'intervalle $[-1; 0]$ par g .

g est strictement décroissante sur $[-1; 0]$. On a :

$$-1 \leq x \leq 0$$

$$0 \leq x^2 \leq 1$$

$$0 \leq 2x^2 \leq 2$$

$$0 \leq 2x^2 - x \leq 3$$

$$-3 \leq 2x^2 - x - 3 \leq 0$$

Donc $f([-1; 0]) = [-3; 0]$.

5.1. Image d'un intervalle par une fonction continue

Exercice 5.1.1.

1. Déterminer les images des intervalles $] - \pi; 0[$; $] - \pi; \pi]$; $] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $] - \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ par la fonction sinus dont la courbe représentative est donnée ci après :

2. Déterminer $f(I)$ dans chacun des cas suivants :

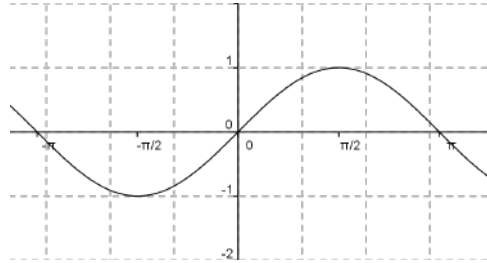


FIGURE 5.3 – Courbe de f

i) $f(x) = x^2 + x - 2$, $I = [-2; 3]$.

ii) $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$, $I = \mathbb{R}$.

5.2 Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

Activité : Considérons la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$, dont la représentation graphique est donnée ci-après :

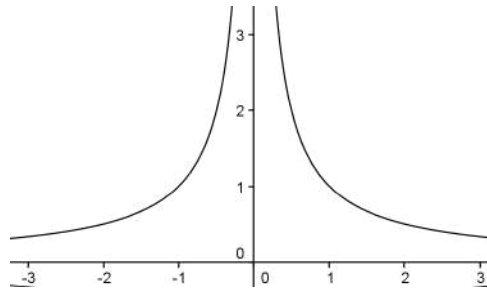


FIGURE 5.4 – Courbe de f

1. Déterminer l'image des intervalles $[-3; -1]$ et $] -\infty; -3]$ par f .
2. Déterminer l'image des intervalles $[1; 3]$ et $]3; +\infty]$ par f .

Propriété 5.2.

α et β sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tels que $\alpha < \beta$, f est une fonction admettant une limite à droite de α et une limite à gauche de β .

- Si f est continue et strictement croissante sur $[\alpha; \beta]$,
alors $f([\alpha; \beta]) = [f(\alpha); f(\beta)]$;
- Si f est continue et strictement croissante sur $] \alpha; \beta[$,
alors $f(] \alpha; \beta[) =] \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x); \lim_{x \rightarrow \beta} f(x)[$;
- Si f est continue et strictement décroissante sur $[\alpha; \beta]$,
alors $f([\alpha; \beta]) = [f(\beta); f(\alpha)]$;
- Si f est continue et strictement décroissante sur $] \alpha; \beta[$,
alors $f(] \alpha; \beta[) =] \lim_{x \rightarrow \beta} f(x); \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)[$.

5.2. Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

Exemple 5.2.1. Soit f une fonction continue à variable réelle x dont la courbe représentative est donnée ci-après :

i) Etudier la variation de f .

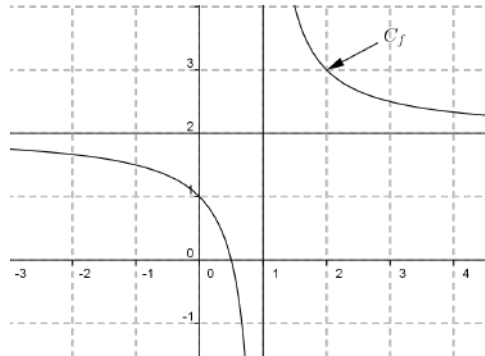


FIGURE 5.5 – Courbe de f

ii) Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par $f :]-\infty; 0]$ et $]1; 2[$.

Solution :

i) La variation de f :

f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

ii) $f(]-\infty; 0]) = [0; 2[$ et $f(]1; 2]) = [3; +\infty[$.

Remarque 5.2.1.

On admet les résultats du tableau ci-après :

Intervalle I	$f(I)$	$f(I)$
	f est croissante	f est décroissante
$[a; b]$	$f(I) = [f(a); f(b)]$	$f(I) = [f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$f(I) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$f(I) =] \lim_{x \rightarrow b} f(x); f(a)]$
$]a; b]$	$f(I) =] \lim_{x \rightarrow a} f(x); f(b)]$	$f(I) = [f(b); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$
$]a; b[$	$f(I) =] \lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$f(I) =] \lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$
$]a; +\infty[$	$f(I) =] \lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f(I) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$
$] - \infty; b]$	$f(I) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)]$	$f(I) = [f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

5.2. Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

Exercice 5.2.1.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			-	
f	$2 \nearrow 5 \nearrow +\infty$			$+\infty \searrow 2 \searrow -3$	

Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par f : $] -5; -2[$; $] -2; 1]$; $] -2; +\infty[$ et $] -\infty; -5[$.

2. On donne la fonction $g(x) = \frac{2x+3}{x^2-9}$. Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par g : $] -3; 3[$; $[0; 3[$ et $] -\infty; -3[$.

5.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Activité :

Soit f une fonction définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ dont la représentation graphique est donnée ci-après :

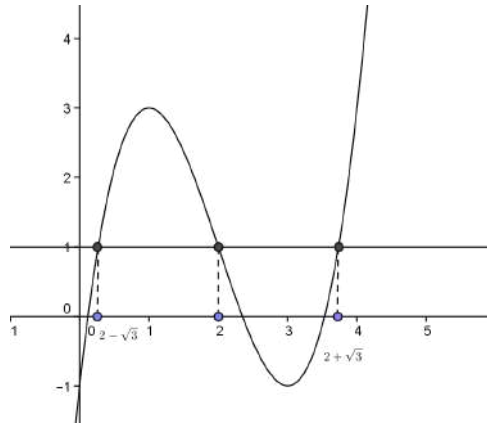


FIGURE 5.6 – Courbe de f

1. Justifier que f est continue sur $[0; 4]$.
2. Calculer $f(0)$ et $f(4)$ et justifier que 1 est compris entre $f(0)$ et $f(4)$.
3. Déterminer les antécédents de 1.
4. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$
5. En déduire que tout élément α compris entre $f(0)$ et $f(4)$ a au moins un antécédent par f compris appartenant à $[0; 4]$.

Remarque 5.3.1.

La figure nous montre que pour toute valeur α (intermédiaire) comprise entre $f(0)$ et $f(4)$, elle correspond au moins une valeur x_0 (intermédiaire comprise entre 0 et 4) telle que $f(x_0) = \alpha$.

Théorème 5.1.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$, $a < b$. Alors pour tout réel α de $f([a; b])$, il existe au moins un réel x_0 appartenant à $[a; b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$.

Démonstration :

f est continue sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [m; M]$ est un intervalle fermé, m et M sont respectivement la valeur minimale et la valeur maximale de l'image de $[a; b]$ par f . Soit donc α un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$ donc $\alpha \in [f(a); f(b)] \subset [m; M]$. On en déduit que α a au moins un antécédent compris entre a et b .

Interprétation graphique :

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit C_f la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle I . Alors pour toute valeur α comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y = \alpha$ coupe C_f en au moins un point entre a et b d'ordonnée α .

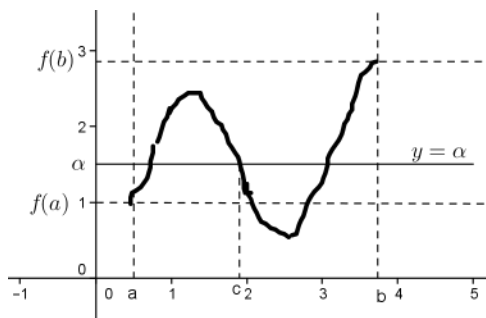


FIGURE 5.7 – Courbe de f

Corollaire 5.1.

Si une fonction f est continue sur $[a; b]$ et si $f(a) \times f(b)$ est strictement négatif, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

Indication :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$.

- i) Justifier que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
- ii) Supposons que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Justifier que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
- iii) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

Exemple 5.3.1.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{8}(8x^3 + 12x^2 - 18x - 11)$. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-2; 1]$.

Solution :

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ donc continue sur l'intervalle $[-2; 1]$. On a $f(-2) = \frac{9}{8}$, $f(1) = -\frac{9}{8}$ et $f(-2) \times f(1) < 0$. Donc $f(x) = 0$ admet une solution.

Théorème 5.2. *Toute fonction continue et strictement monotone est bijective.*

Conséquences 5.1.1 :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$. Alors :

- (i) Si f est strictement croissante sur $[a; b]$, alors pour tout $\alpha \in [f(a); f(b)]$, il existe un unique x_0 de $[a; b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$.
- (ii) Si f est strictement décroissante sur $[a; b]$, alors pour tout $\alpha \in [f(b); f(a)]$, il existe un unique x_0 de $[a; b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$.

Démonstration :

- (i) Soit f une fonction continue sur le segment $[a; b]$. Alors pour un réel α de $f([a; b])$, il existe au moins un réel x_0 appartenant à $[a; b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$ d'après le théorème ci-dessus. Et comme f est strictement croissante alors x_0 est unique. Sinon on aurait au moins deux réels x_0 et x_1 tels que $x_0 \neq x_1$, soit $x_0 < x_1$ et $f(x_0) = f(x_1) = \alpha$ en contradiction avec le fait que f est strictement croissante.
- (ii) Similaire à (i).

Remarque 5.3.2.

Après avoir prouvé l'existence de solutions de l'équation de la forme $f(x) = \alpha$, les valeurs approchées de celles-ci peuvent être déterminées par la méthodes de dichotomie ou par balayage.

Exercice 5.3.1.

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$.

i) Dresser le tableau de variation de f .

ii) En déduire le nombre de racines de f .

2. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

Montrer que g possède une unique racine.

3. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$. Montrer que h possède une unique racine puis en donner un encadrement d'amplitude 0.01.

5.4 la variation et la représentation graphique de fonction réciproque d'une fonction continue monotone.

Activité : Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$ et dont la représentation graphique est donnée ci-après :

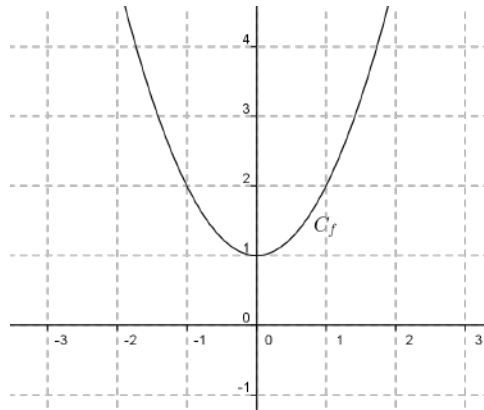


FIGURE 5.8 – Courbe de f

1. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2. Déterminer $f([0; +\infty[)$.
3. Démontrer que f détermine une bijection g de $[0; +\infty[$ vers $[1; +\infty[$.
4. Déterminer la formule analytique de g^{-1} de $[1; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$.
5. Etudier le sens de variation de g^{-1} . Est-elle bijective ?
6. Etudier la continuité de g^{-1} .
7. Représenter C_f , $C_{f^{-1}}$ et la droite d'équation $y = x$ dans un même repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Que constate-t-on ?

5.4. la variation et la représentation graphique de fonction réciproque d'une fonction continue monotone.

Propriété 5.3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si f est strictement monotone sur I , alors :

1. f réalise une bijection de I vers $f(I)$ (c'est-à-dire $\forall y \in f(I)$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$).
2. La bijection réciproque de f , notée f^{-1} , est continue et strictement monotone de $f(I)$ vers I , de même sens de variation que f .
3. Pour tout $x \in I$, $f(x) \in f(I)$ et $f(x) = y$ équivaut à $x = f^{-1}(y)$.

Exemple 5.4.1.

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ définie de $]0; +\infty[$ vers $] - \infty; 0[$ par $f(x) = -\frac{1}{x}$.

1. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2. Justifier que f réalise une bijection.
3. Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f .
4. Etablir le tableau de variation de f^{-1} .
5. Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ de f et f^{-1} .

Solution :

1. Etudions la continuité de f sur son domaine de définition : $\frac{1}{x}$ est une fonction rationnelle, elle est donc continue sur $] - \infty; 0[\cup]0; +\infty[$. On en déduit donc que f est continue sur $D_f =]0; +\infty[$.
2. Justifions que f réalise une bijection : On a $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \forall x \in D_f$, donc f est strictement croissante sur $] - \infty; 0[$. Donc f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $] - \infty; 0[$.

3. Déterminons la bijection réciproque f^{-1} de f :

$$\begin{aligned} f(x) = y & \text{ équivaut à } \frac{1}{x} = y \\ & \text{équivaut à } x = \frac{1}{y} \\ & \text{équivaut à } f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

5.4. la variation et la représentation graphique de fonction réciproque d'une fonction continue monotone.

4. Etablissons le tableau de variation de f^{-1} .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f		0 $\nearrow$ $-\infty$

5. Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ de f et f^{-1} .

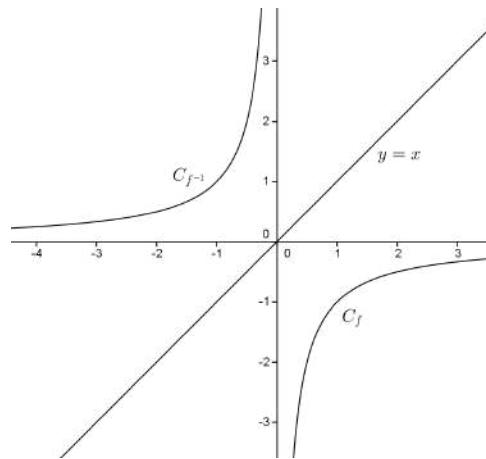


FIGURE 5.9 – Courbe de f

Remarque 5.4.1. La courbe représentative de la réciproque d'une fonction bijective f est l'image de la courbe représentative de la fonction f par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 5.4.1. 1 Soit f une fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan x$.

i) Montrer que f réalise une bijection de $I =] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle $f(I)$ à déterminer.

ii) Etudier la continuité de f^{-1} .

2. Soit g une fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$.

i) Montrer que g réalise une bijection de $[0; 1]$ vers $[0; 1]$.

ii) Montrer que $g^{-1} = g$.

3. Montrer que la fonction $h(x) = x^3$ réalise une bijection. En déduire la variation et continuité de h^{-1} la bijection réciproque de h .

♣ Exercices ♣

Exercice 5.4.2. Etudier la continuité des fonctions suivantes en x_0 :

1. $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $x_0 = 0$.

2. $g(x) = \begin{cases} \frac{2-3x}{9x^2-4} & \text{si } x \neq \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \text{si } x = \frac{2}{3} \end{cases}$ en $x_0 = \frac{2}{3}$.

Exercice 5.4.3. Exploiter la figure des chacune des fonctions suivantes et dire si elle continue en x_0 .

1. $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$.

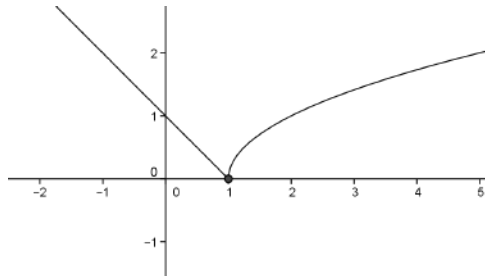


FIGURE 5.10 – Courbe de f

2. $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$.

Exercice 5.4.4. On considère la fonction définie de la façon suivante :

$f(x) = x^2 + \frac{|x|}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction est-elle continue pour $x = 0$?

5.4. la variation et la représentation graphique de fonction réciproque d'une fonction continue monotone.

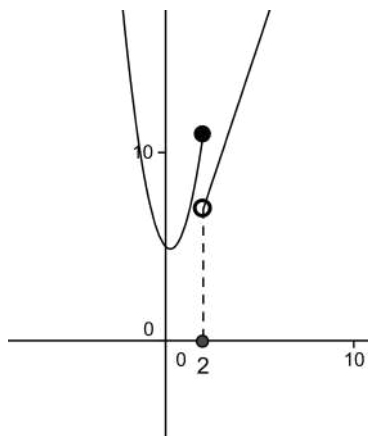


FIGURE 5.11 – Courbe de f

Même question pour la fonction $\varphi(x)$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = -1.$$

Exercice 5.4.5. 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 2 - x \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Démontrer que cette fonction n'est continue qu'en deux points, que l'on précisera.

2. Soit g la fonction de la variable réelle x définie par

$$x \mapsto g(x) = x|1 + \frac{1}{x}|.$$

i) Déterminer l'ensemble de définition de g .

ii) Étudier la limite de $f(x)$ en 0.

iii) g admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 5.4.6.

1. Étudier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition :

i) $f(x) = \frac{2}{5}$ et $g(x) = 3x^4 + x^3 - 4x + 2$;

ii) $f(x) = \frac{3x-1}{3x^2-1}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{2x-4}$;

iii) $f(x) = \frac{|x-2|}{|x|+3}$, $g(x) = \frac{\ln x^2 - 3x - 6}{\sqrt{2x^2+1}}$ et $h(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

iv) $f(x) = x^2 + E[\frac{1}{1-E(x^2)}]$.

Exercice 5.4.7. 1. Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie par sa formule.

Démontrer que f définit une bijection de l'intervalle K sur un intervalle que l'on précisera.

i) $f(x) = 6x^2 - 11x + 4$, $K = [\frac{11}{12}; +\infty[$.

ii) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, $K =]-1; 2]$.

5.4. la variation et la représentation graphique de fonction réciproque d'une fonction continue monotone.

iii) $f(x) = 2x + 3 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, $K = [\sqrt{2}; +\infty[$.

iv) $f(x) = \frac{x-2}{3x^2-2x+8}$, $K = [0; 2]$.

2. Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ définie de $f(]-1; 2])$ vers $] -1; 2]$.

♣ Bibliographie ♣

- [1] Abdou Khadre BARRY, Joseph TSOUMTSA, Jules N'DA KOUADIO, Olivier Théodule RAZQFINDRANOVONA, Saliou Touré, Tairou ALASSANE, Paul REY, Julien SANHOUIDI, Soma TRAORE et al, CIAM Terminale Sciences mathématiques : Limites et continuité, EDICEF 1999.
- [2] Abdou KOUMCHEGHAME, Benoît Eric MINALI, Bernard Eto MONEVONDO, Casimir NDEUTCHOUA, Charles MVOMO OTAM, François TCHETGNA, ISSA OUMAROU, Jean Roland ELANDI ELANDI, Luc Calvin MEGAMTCHE, Nicolas Gabriel ANDJIGA, Olivier TCHOUMGUI FOM, Samuel TOBOU, Séverin Didier FOUDA, Stanislas Hervé NKOULE, Raoul AYISSI, MAJORS en mathématiques, Terminales C-E : Limites et continuité, 2012.
- [3] A. Combes et D. Barues, ALGEBRE première S et E, Exercices VUIBERT, 1982.
- [4] Baye OULD EL HADJ AMAR, Denis OUEHI, Faustin TOUADERA, Georgette OUEDRAOGO-HADDAD, Saliou Touré, Pierre LAWIN ORE, CIAM Terminale Sciences expérimentales : Limites et continuité, EDICEF 1999.
- [5] Saliou Touré et al, CIAM première Sciences mathématiques : Limites et continuité, EDICEF 1998.
- [6] TAGNE TAKAM Griaul Bruno, Enseignement et apprentissage de la notion de continuité des fonctions numériques en classe de terminale : Conception des élèves, 2013.
- [7] <http://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/ANALY/ANALY2.PDF>, 2013.
- [8] G. COSTANTINI <http://bacamaths.net/Continuité>.
- [9] <http://www.uqac.ca/rebaine/8GMA050/SagnetTOME2.pdf>.

PRIMITIVES ET INTEGRALES EN TERMINALE "C"

Rédigé par:

KOUOMOGNE KAMGAING Laurent

Sous la direction de:

Dr TEMGOUA ALOMO Etienne R.

Mr. SIELINOUE Damase

Mr. FEUDJIO Anicet

Yaoundé, le 05 Juillet 2013

♣ Table des matières ♣

1 PRIMITIVES ET INTÉGRALES	1
1.1 INTRODUCTION	1
1.1.1 Objectifs pédagogiques spécifiques	1
1.1.2 Liens avec les autres parties du programme	1
1.1.3 Place dans le programme	2
1.1.4 Pré-requis nécessaires	2
1.1.5 déroulement de la ressource	2
1.2 Primitives des fonctions continues.	3
1.2.1 Généralités	3
1.2.2 Primitives des fonctions usuelles	7
1.2.3 Primitives des fonctions de la forme $u' \cdot u^n$ où n est un nombre rationnel	7
1.2.4 Primitives des fonctions de la forme $g'(h) \times h'$	8
1.2.5 Opération sur les primitives	9
1.2.6 Exemples de recherche de primitives	9
1.3 Détermination des primitives	10
1.3.1 Primitive des fonctions rationnelles	10
1.3.2 Primitives des fonctions trigonométriques.	14
1.3.3 Primitive d'autres fonctions	16
1.4 Notion d'intégrale d'une fonction	18
1.4.1 Définition et propriétés	18
1.4.2 Complément	22
2 EXERCICES DE SYNTHÈSES	24
Bibliographie	30
Annexe	i

PRIMITIVES ET INTÉGRALES

1.1 INTRODUCTION

Lors de l'étude d'une fonction faite en classe de *Première "C"* nous nous souvenons qu'étudier le signe de la dérivée était une étape capitale sinon la plus importante. Dès lors si nous avons une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ il est évident que nous pouvons déterminer le signe de cette fonction : en résolvant l'inéquation $f(x) \leq 0$ par exemple. Si nous considérons le tableau de signe de f comme celui d'une fonction dérivée g' (c'est à dire que $f = g'$) on peut donc se poser la question : quelle est l'expression de g ? une telle fonction g lorsqu'elle existe est appelée une primitive de f . Nous allons dans ce chapitre étudier la condition d'existence et d'unicité de g ainsi que quelques méthodes de détermination de g .

Soit g une primitive de f et $a, b \in I$. La quantité $g(b) - g(a)$ sera appelée intégrale de f entre a et b . La notion d'intégrale aide aux calcul d'aires et de volumes.

Dans cette ressource nous proposons quelques techniques de détermination des primitives des fonctions réelles, nous introduisons la notion d'intégrale d'une fonction à partir d'une primitive de celle-ci et à chaque fois nous donnerons quelques propriétés.

1.1.1 Objectifs pédagogiques spécifiques

Les notions de primitives et d'intégrales étant nouvelles pour l'élève de terminale, à la fin de ce cours celui-ci doit être capable :

- 1^o) de définir les primitives d'une fonction,
- 2^o) d'énoncer et utiliser les propriétés des primitives,
- 3^o) de calculer les primitives de certaines fonctions continues sur un intervalle,
- 4^o) de définir l'intégrale d'une fonction et calculer sa valeur.

1.1.2 Liens avec les autres parties du programme

Les autres parties du programme en lien avec les primitives et intégrales sont :

- **la dérivation d'une fonction** ; En effet, lors la détermination des primitives d'une fonction, une bonne maîtrise de la dérivation est un très grand atout. En effet si f' est la dérivée d'une fonction f alors f est une primitive de f'

- **les équations différentielles** ; En effet, savoir déterminer les primitives d'une fonction facilite la résolution de certaines équations différentielles.

- **les nombres complexes** ; En effet, la détermination des primitives de certaines fonctions trigonométriques nécessite que celles-ci soient linéarisées. D'où la nécessité des nombres complexes.

- **la fonction logarithmique népérienne** car elle peut être définie comme la primitive de la fonction inverse $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

le calcul d'intégrales sera ici une application immédiate de la notion de primitive.

1.1.3 Place dans le programme

Il est souhaitable que le cours sur les primitives soit fait après :

- L'étude de la continuité des fonctions,
- L'étude de la dérivabilité des fonctions,
- L'étude de la linéarisation des fonctions trigonométriques (les nombres complexes).

Quant au cours sur le calcul d'intégrale, il peut être fait après :

- Le cours sur les primitives
- L'étude des fonctions logarithmes et exponentielles

Il est souhaitable que le cours sur les primitives et intégrales soit fait avant :

- Les équations différentielles,
- les suites numériques.

1.1.4 Pré-requis nécessaires

Pour bien aborder cette ressource les pré-requis nécessaires sont :

- Les dérivées de fonctions usuelles et quelques opérations sur les dérivées.
- La notion de solution d'une équation à une inconnue.
- La linéarisation d'une fonction trigonométrique.
- La décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle.

1.1.5 déroulement de la ressource

Cette ressource peut être dispenser en 10 heures subdivisés conformément au plan de la manière suivante :

De l'introduction jusqu'au primitives des fonctions usuelles(1.2.2), 02 heures

De (1.2.2) au (1.2.6), 02 heures

1.2 Primitives des fonctions continues.

De (1.4) au (1.4.2), 02 heures

En deux heures d'exercices on travaille avec les élèves sur la détermination des primitives des fonctions rationnelles (1.3.1), des fonctions trigonométriques (1.3.2) et de d'autres fonctions (1.3.3).

les deux dernière heures servirons à apprécier le niveau d'assimilation de ce cours par les élèves via un test basé sur les objectifs déclinés plus haut.

1.2 Primitives des fonctions continues.

1.2.1 Généralités

Activité

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -x^4 + x^3 - 2x^2 + 3$.

1°) Déterminer $F'(x)$.

2°) Soit la fonction L définie par : $L(x) = F(x) + 5$. Calculer L' la dérivée de L et vérifier que $L'(x) = F'(x)$

3°) Y a-t-il d'autres fonctions dont la dérivée est aussi égale à $F'(x)$? Si oui, donner deux exemples.

Solution

$$1^\circ) F'(x) = -4x^3 + 3x^2 - 4x.$$

$$2^\circ) L(x) = -x^4 + x^3 - 2x^2 + 8.$$

On a donc :

$$L'(x) = -4x^3 + 3x^2 - 4x = F'(x)$$

3°) On sait qu'une constante a une dérivée nulle. On peut donc remplacer la constante 3 par un autre nombre sans changer la dérivée.

Appelons G et H deux fonctions répondant à la question.

$$G(x) = -x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$$

$$H(x) = -x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}$$

On a bien

$$F'(x) = L'(x) = G'(x) = H'(x)$$

.

Remarques Posons $f(x) = -4x^3 + 3x^2 - 4x$.

◦ f est alors la fonction dérivée de F sur $\mathbb{R}$

◦ On dit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle primitive de f sur I toute fonction F de I vers $\mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que pour tout élément x de I , $F'(x) = f(x)$. **[1]**.

F est une primitive de f sur I équivaut à F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

Propriétés

Propriété 1 (admise).

Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur I . Par

Conséquent,

- les fonctions polynômiales admettent des primitives sur $\mathbb{R}$
- les fonctions rationnelles admettent des primitives sur chaque intervalle où elles sont définies.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet des primitives sur $[0; +\infty[$.

Exercice

Pour chacune des fonctions f suivantes déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel f admet une primitive.

$$\begin{array}{ll} a) & f(x) = 2x + 3 ; \\ b) & f(x) = 2x + 3 ; \\ c) & f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} ; \end{array}$$

propriété 2 (Ensemble des primitives d'une fonction)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

Toutes les primitives de f sur I sont de la forme $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle par rapport à x .

Preuve. (Exercice guide) **[3]**

- 1) Poser $G(x) = F(x) + k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$. Dériver G et conclure.
- 2) Réciproquement, soit G une autre primitive de F .

Montrer que $(G(x) - F(x))' = 0$ et en déduit que $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.

□

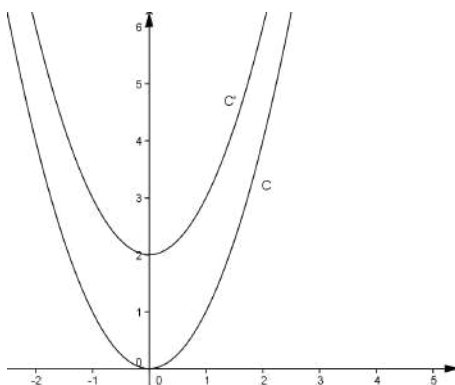
1.2 Primitives des fonctions continues.

Remarques :

- 1) Si f admet une primitive F sur I alors elle en admet une infinité.
- 2) Toutes les primitives de f sur I sont de la forme :

$$x \mapsto F(x) + k \quad \text{où } k \text{ est une constante par rapport à } x.$$

3) Si C est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f et G d'une autre primitives de f alors il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que la courbe représentative de G soit l'image de C par la translation de vecteur $\vec{u}(0, k)$.



(C) et (C') représentent les courbes de deux primitives de la fonction f définie par $f(x) = 2x$. $(C') = t_{\vec{u}(0,2)}(C)$.

Exemple

On donne $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$

- 1° - Déterminer toutes les primitives de f sur $]0; +\infty[$.
- 2° - Déterminer la primitive G telle que $G(1) = \frac{1}{2}$.
- Déterminer la primitive H telle que $H(-1) = 3$.

Solution

1° Une primitive F de f sur $]0; +\infty[$ est : $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$. Toutes les primitives de f sont donc de la forme : $x \mapsto x^2 - \frac{1}{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$$2^\circ G(x) = x^2 - \frac{1}{x} + k.$$

$$-G(1) = 1 - 1 + k = \frac{1}{2} \text{ donc } k = \frac{1}{2} \text{ Ce qui donne } G(x) = x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

$$-H(-1) = 1 + 1 + k = 3 \text{ donc } k = 1 \text{ Ce qui donne } G(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1.$$

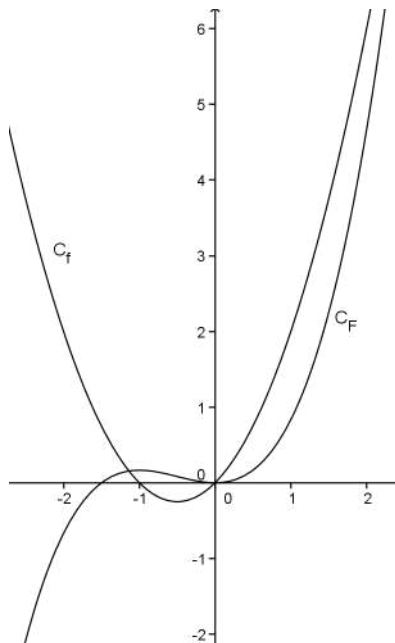
Remarque

Dans l'exemple précédent on a trouvé une seule fonction G vérifiant une condition donnée. Cette propriété peut se généraliser comme suit :

Propriété 3

1.2 Primitives des fonctions continues.

Parmi toutes les primitives d'une fonction f sur I , il en existe une seule prenant la valeur y_0 en $x_0 \in I$. Ce résultat montre que dans l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle I , il existe une et une seule dont la courbe passe par le point de coordonnées (x_0, y_0) avec $x_0 \in I$.



(C_f) est la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x$ et $F(x) = \frac{1}{6}x^2(2x + 3)$ est l'unique primitive de f dont la courbe (C_F) passe par l'origine du repère.

preuve. (exercice guide)

Existence :

Soit F une primitive de f sur I et (c) sa courbe dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit x_0 un point de I et A le point de coordonnée (x_0, y_0) .

1) Tracer la droite (D) passant par A et perpendiculaire à l'axe (Ox) . Soit B le point d'intersection de (D) et (C) .

2) Tracer la courbe (C') image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Remarquer que $\overrightarrow{BA} = k\vec{j}$ avec $k = \overline{BA}$.

3) Vérifier que la fonction G représentée par (C') a pour expression $G(x) = F(x) + k$.

4) Vérifier que $G(x_0) = y_0$. Conclure.

Unicité :

Donnons nous 2 primitives F et G de f donc la courbe passe par le point de coordonnées (x_0, y_0) .

1) Quelle relation y a-t-il entre F et G .

2) De $G(x_0) = F(x_0) = y_0$; en déduire que $F = G$. □

Exemple : On donne $f(x) = 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \frac{1}{x} + 3$ sur $I =]0, +\infty[$. Déterminer pour chacune des fonctions f et g la primitive dont la courbe passe par le point de coordonnées $(1, 2)$. c'est à dire vérifiant $F(1) = G(1) = 2$.

1.2 Primitives des fonctions continues.

solution :

1) $F(x) = x^2 + x + k$. Il reste à trouver celle qui vérifie $F(1) = 2$.

$F(1) = 2 + k = 2 \implies k = 0$. Donc $F(x) = x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$.

2) $G(x) = \ln x + 3x + k$. Il reste à trouver celle qui vérifie $G(1) = 2$.

$G(1) = 3 + k = 2 \implies k = -1$. Donc $G(x) = \ln x + 3x - 1$ sur $I =]0, +\infty[$.

Remarque : L'unicité de k dans chacun des cas précédant prouve l'unicité de la primitive.

Exercices

1) Déterminer une primitive F de $f(x) = x + \cos x$ et donner les coordonnées (a, b) d'un point de la courbe de F .

2) En revenant à l'exercice (1) existe-t-il une autre primitive G de f telle que $G(a) = b$; déterminer la primitive G de f vérifiant $G(a) = b + 1$.

3) Dans chacun des cas suivant déterminer une primitive F de f .

a) $f(x) = \sin x$ et vérifie $F(0) = 5$.

b) $f(x) = e^x + 2$.

c) $f(x) = e^x + 2$ et la courbe de F passe par le point de coordonnées $(0, 0)$.

1.2.2 Primitives des fonctions usuelles

Nous allons ici exploiter essentiellement nos connaissances sur les dérivées des fonctions étudié en classe de première et aussi nos connaissances des fonctions logarithmes et exponentielles.

Exemples fondamentaux :

La lecture du tableau donnant la dérivée des fonctions permet de dresser le tableau des primitives suivant :

1.2 Primitives des fonctions continues.

f définie par	Une primitive F	sur l'intervalle I
0	$c ; c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + c ; c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
x^2	$\frac{x^3}{3} + c ; c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x^n ; n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c ; c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} ; x > 0$	$\sqrt{x} + c ; c \in \mathbb{R}$	$I =]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c ; c \in \mathbb{R}$	$I =]0; +\infty[$ ou $I =]-\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n} ; n > 1$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c ; c \in \mathbb{R}$	$I =]0; +\infty[$ ou $I =]-\infty; 0[$
$\cos x$	$\sin x + c ; c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c ; c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c ; c \in \mathbb{R}$	$I =]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[; n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c ; c \in \mathbb{R}$	$I =]0; +\infty[$
e^x	$e^x + c ; c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$\ln x ; x > 0$	$x \ln x - x$	$I =]0; +\infty[$

1.2.3 Primitives des fonctions de la forme $u' \cdot u^n$ où n est un nombre rationnel

Activité

Soit u une fonction continue sur un intervalle I et n un entier différent de -1.

- 1) Rappeler la dérivée de u^{n+1} .
- 2) En déduire une primitive de $u' u^n$.
- 3) Rappeler la dérivée de $\ln(u)$ et en déduire une primitive de $\frac{u'}{u}$.

Remarque : pour tout nombre rationnel $r \neq -1$, une primitive de $u' u^r$ est $\frac{u^{r+1}}{r+1}$.

Nous résumons les résultats obtenus dans le tableau suivant.

fonction	Une primitive
$u' \cdot u^r \quad r \neq -1 ; r \in \mathbb{Q}$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{(2x-1)^3}$. Déterminer une primitive F de f en précisant les intervalles sur lesquels f et F existent.

Solution.

Posons $v(x) = 2x - 1$ On a $v'(x) = 2$ On peut écrire $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{(2x-1)^3}$. Soit $f = \frac{3}{2} \times \frac{v'}{v^3} = \frac{3}{2} v' v^{-3}$.

Une primitive de $v' v^{-3}$ est $-\frac{1}{2} v^{-2} = -\frac{1}{2v^2}$.

On obtient

$$\begin{aligned} F &= \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2v^2} \right) \\ &= -\frac{3}{4v^2} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$F(x) = -\frac{3}{4(2x-1)^2}.$$

Les fonctions f et F existent sur chacun des intervalles $] -\infty; \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Exercice

1) Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^3} \text{ et vérifiant } F(2) = 0.$$

2) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}; g(x) = \frac{2}{2x+5}; h(x) = -2 \tan(2x+1); k(x) = 2e^{3+2x}.$$

1.2.4 Primitives des fonctions de la forme $g'(h) \times h'$

activité

1) Soient g et h deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(h(x))$.

a) Calculer la dérivée de f .

b) En déduire une primitive de $g'(h) \times h'$.

c) Proposer une méthode de détermination des primitives de $f = g(h) \times h'$.

Résultat

Soit h une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g une fonction dérivable sur $h(I)$. Une primitive de $g'(h) \times h'$ est $g(h)$.

Exemple

1) Une primitive de $u'e^u$ est e^u

2) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x[3(x^2+1)^8+1]$ peut se mettre sur la forme $f = h' \cdot g(h)$ avec $h(x) = x^2+1$; $g(x) = 3x^8+1$.

Une primitive de f est donc $F = G(h)$ où G est une primitive de g .

On a $G(x) = \frac{x^9}{9}$. D'où

$$F(x) = \frac{(x^2+1)^9}{9}.$$

1.2.5 Opération sur les primitives

Soit F une primitive de f , G une primitive de g ; a et b des nombres réels.

– Une primitive de $f+g$ est $F+G$.

– Une primitive de af est $a \times F$.

– Par conséquence une primitive de $af+bg$ est $aF+bG$.

– **Une primitive de $f'g+g'f$ est fg : ceci provient de la dérivation du produit de deux fonctions.**

Exercice :

On donne $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = \sin x$; $h(x) = 2x^2 + 4$; $k(x) = 3x^2 + 6 + 3\sin x$

1) Déterminer une primitive de f et une primitive de g .

2) En déduire une primitive de h et k .

3) En déduire une primitive de chacune des fonctions ci-dessous.

$$m(x) = -(x^2 + 2) \cos x + \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x\right) \sin x.$$

$$n(x) = 3(x^2 + 2) \cos x - (x^3 + 6x) \sin x + 2x^2 + 4$$

1.2.6 Exemples de recherche de primitives

Exemples 1

On donne $f(x) = x^2 + x + 1$. Trouver une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Solution

$$f(x) = \frac{1}{3}(3x^2) + \frac{1}{2}(2x) + 1$$

$$\text{d'où } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$$

exemple 2

Soit $f(x) = \frac{3}{2x^2} + \frac{2}{3\sqrt{x}}$. Trouver une primitive F de f sur $]0; +\infty[$.

Solution

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } F(x) = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{4}{3} \sqrt{x} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

Exercices

Exercice 1 : Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sachant que

$$f(x) = (2x + 1)(-x + 3)$$

Exercice 2 : Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par

$$f(x) = (x + 2)^3.$$

Exercice 3 : Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par

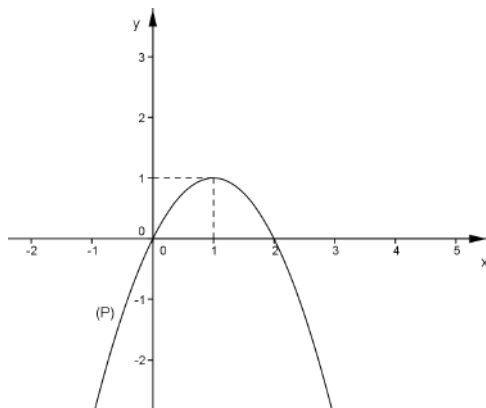
$$f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 3)^2.$$

Exercice 4 : Trouver une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{(x+2)^3}.$$

Exercice 5 :

1.3 Détermination des primitives



La parabole (P) ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f .

- 1) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et (c) la courbe représentative de F . Dresser le tableau de variation de F .
- 2) On donne $F(1) = 0$. Donner une équation de la tangente à la courbe (c) au point d'abscisse 1.
- 3) Exprimer $f(x)$ puis $F(x)$ en fonction de x . Tracer (c).

1.3 Détermination des primitives

On donne dans ce qui suit des méthodes de détermination des primitives d'une fonction continue f , dans le cas où elles s'obtiennent à l'aide des fonctions élémentaires (fonctions rationnelles, trigonométriques, exponentielles).

1.3.1 Primitive des fonctions rationnelles

a) Décomposition d'une fonction en éléments simples

NB : cette partie sur la décomposition en éléments simples est surtout utile pour les enseignants pour aider les élèves à déterminer les primitives de certaines fonctions.

Il s'agit ici de transformer une fonction rationnelle irréductible en une somme de plusieurs fonctions rationnelles dont les dénominateurs sont :

- soit de la forme $(ax + b)^m$ avec $m \in \mathbb{N}$
- soit de la forme $(x^2 + px + q)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Activité 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$.

- 1) Factoriser son dénominateur.
- 2) On pose $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ a et b étant des réels.
 - a) Démontrer que a et b vérifient $(a+b)x + a - b = 2$.
 - b) Par identification selon les puissances de x , déterminer a et b .
 - c) Vérifier que $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

Activité 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$.

1) Factoriser son dénominateur.

2) On pose $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$; a , b et c étant des réels.

a) Montrer que a , b et c vérifient l'équation : $(a+b)x^2 + (a+c-b)x + a-c = 1$.

b) Par identification selon les puissances de x , déterminer a , b et c .

Remarque :

Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ étant négatif, ($\Delta = -3 < 0$), le terme $\frac{1}{x^2+x+1}$ est multiplié par une fonction affine, (c'est à dire de la forme $cx + d$).

Activité 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3+1}{x^5+x^4-x+1}$.

1) Vérifier que $x^5 + x^4 - x + 1 = (x+1)^2(x-1)(x^2+1)$.

2) On pose $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{dx+e}{x^2+1}$.

a) Vérifier que :

$$(b+c+d)x^4 + (a+e+2c+d)x^3 + (e-a+2c-d)x^2 + (a-e+2c-d)x + c-b-a-e = 2x^3+1.$$

b) En déduire que $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{9}{8}$, $c = \frac{3}{8}$, $d = \frac{3}{4}$ et $e = \frac{1}{4}$.

Remarques

1) Comme dans le cas précédent à x^2+1 on associe un numérateur affine ($dx+e$) car son discriminant est négatif.

2) Le terme $x+1$ étant élevé au carré dans l'expression factorisé du dénominateur on le transforme sous la forme $\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1}$.

Résumé

Pour décomposer une fonction rationnelle en une somme d'éléments simples on doit :

1) Factoriser le dénominateur de sorte que chaque facteur apparaissant soit :

- soit de la forme $(ax+b)^m$ avec $m \in \mathbb{N}$,

- soit de la forme $(x^2+px+q)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta = q^2 - 4p < 0$.

2) Chaque terme de la forme $(ax+b)^m$ se transforme en une somme de m fractions :

$$\frac{a_m}{(ax+b)^m} + \frac{a_{m-1}}{(ax+b)^{m-1}} + \dots + \frac{a_2}{(ax+b)^2} + \frac{a_1}{ax+b}$$

où $a_m, a_{m-1} \dots a_2$ et a_1 sont des réels.

3) Chaque termes de la forme $(x^2+px+q)^n$ se transforme en une somme de n fractions :

$$\frac{b_n x + c_n}{(x^2+px+q)^n} + \frac{b_{n-1} x + c_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{b_1 x + c_1}{x^2+px+q}$$

1.3 Détermination des primitives

où les b_i et c_i ; $i = 1, \dots, n$ sont des réels.

4) Si on a $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec $\deg(p) \geq \deg(q)$ alors il faut commencer par faire la division euclidienne de $p(x)$ par $q(x)$.

On obtient $\frac{p(x)}{q(x)} = t(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ avec $\deg(r) < \deg(q)$. On décompose en éléments simples

$$\frac{r(x)}{q(x)}.$$

Exemple

Dans chacun des cas suivants, décomposer f en éléments simples :

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

2) $f(x) = \frac{3}{(x+1)(x^2+2)}$.

3) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

Solution

1) Par division euclidienne on a $f(x) = 1 + \frac{2}{x^2-1}$. Décomposons $\frac{2}{x^2-1}$.

On a $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

On écrit alors $\frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} - \frac{b}{x+1}$. Ce qui nous donne $(a+b)x + a - b = 2$.

Par identification on a $a+b=0$ et $a-b=2$. Soit $a=1$ et $b=-1$.

D'où $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ et par suite on a $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + 1$.

2) $f(x) = \frac{3}{(x+1)(x^2+2)}$. On écrit $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+2}$.

On a alors $(a+b)x^2 + (b+c)x + 2a + c = 3$.

Par identification on a $a+b=0$, $b+c=0$ et $2a+c=3$

Donc $a=c=1$ et $b=-1$.

Donc $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+2}$.

3) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$. On écrit $f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$. Ce qui donne :

$$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{cx^3+dx^2+(a+b)x+b+d}{(x^2+1)^2}$$

On a $cx^3 + dx^2 + (a+b)x + b + d = x^2 - 1$

Donc $c = a + c = 0$, $d = 1$ et $b + d = -1$. C'est à dire $c = a = 0$, $d = 1$ et $b = -2$.

Donc $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{(x^2+1)^2}$.

Exercice

Décomposer en éléments simples chacune des fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x(x^2+1)(x^2+2)}$

b) $f(x) = \frac{1}{3x^2-2}$

d) $f(x) = \frac{x^3-3}{x^2-1}$.

Remarque : Décomposer une fonction en éléments simples permet de rendre plus facile la recherche des primitives des fonctions rationnelles.

b) Primitive d'une fonction rationnelle

Pour déterminer les primitives d'une fonction rationnelle f , il est souhaitable de commencer par décomposer f en éléments simples. Dès lors, la détermination des primitives d'une fonction rationnelle se réduit à la détermination des primitives des fractions $\frac{1}{(ax+b)^m}$ et $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ où $m \geq 1$; $n \geq 1$ sont des entiers naturels et $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

$b_1)$ Primitive de $\frac{1}{(ax+b)^m}$
--

Cas où $m = 1$

Une primitive de $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ est $F(x) = \frac{1}{a} \ln |ax + b|$.

Cas où $m > 1$

Une primitive de $f(x) = \frac{1}{(ax+b)^m}$ est $F(x) = \frac{-1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}$.

Exemple

Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous.

1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

2) $g(x) = \frac{3}{(2x-1)^2}$

Solution

1) Ici on a $m = 1$. Donc $F(x) = \ln |x + 1|$.

2) Ici on a $m > 1$. Donc $G(x) = \frac{-3}{2(2-1)(2x-1)^{2-1}} = -\frac{3}{4x-2}$.

Exercice

Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f .

a) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ b) $f(x) = \frac{2}{x+3}$ c) $g(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ d) $g(x) = \frac{5}{(2x-1)^4}$.

$b_2)$ Primitive de $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

On commence ici par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.

On obtient $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = \frac{a}{2} \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \frac{1}{(x^2+px+q)^n}$.

Il suffit donc de déterminer une primitive de $\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$ et de $\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$.

i) Primitive de $\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$

Cas où $n = 1$

1.3 Détermination des primitives

Une primitive de $f(x) = \frac{2x+p}{x^2+px+q}$ est $F(x) = \ln(x^2 + px + q)$.

Cas où $n > 1$

Une primitive de $f(x) = \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$ est $F(x) = \frac{-1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}$.

Exemple

Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous.

1) $f(x) = \frac{4x+10}{x^2+5x+8}$.

2) $g(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+5)^2}$.

Solution

1) $f(x) = \frac{4x+10}{x^2+5x+8} = 2 \times \frac{2x+5}{x^2+5x+8}$; or $\frac{2x+5}{x^2+5x+8}$ est de la forme $\frac{u'}{u^1} = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 5x + 8$.

D'où $F(x) = 2 \ln(x^2 + 5x + 8)$.

2) Ici $n > 1$ et $(x^2 + 3x + 5)' = 2x + 3$. On a donc

$$G(x) = \frac{-1}{(2-1)(x^2+3x+5)^{2-1}} = -\frac{1}{x^2+3x+5}.$$

Exercice

Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ b) $f(x) = \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^3}$ c) $g(x) = \frac{2x}{(x^2+5)^2}$.

ii) Primitive de $\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$.

NB : La recherche des primitives de telles fonctions n'est pas au programme de terminale C.

1.3.2 Primitives des fonctions trigonométriques.

Nous allons maintenant déterminer les primitives de fonctions trigonométriques.

Ceci exige du lecteur quelques compétences telles que :

☐ Linéariser $\cos^n x$ et $\sin^n x$.

☐ Transformations d'une somme (respectivement produit) de fonctions trigonométriques de base en produit (respectivement somme) de fonctions trigonométriques de base.

Il est important de savoir que pour tout réel non nul b une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(bx)$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{b} \sin(bx)$ et une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(bx)$ est la fonction $x \mapsto -\frac{\cos(bx)}{b}$.

Activités

1.3 Détermination des primitives

Enoncé 1

- 1) Linéariser $\cos^4 x$.
- 2) que $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$.
- 3) En déduire une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \cos^4 x + \sin^3 x$.

Enoncé 2

On donne $f(x) = \cos(x) \sin^2(3x)$.

Déterminer l'expression linéarisée de $f(x)$ et en déduire en une primitive.

Remarques :

Transformer $\cos^n(bx)$ en $\left(\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}\right)^n$ et $\sin^n(bx)$ en $\left(\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}\right)^n$ doit être un réflexe lorsqu'on cherche à déterminer les primitives des fonctions trigonométriques. Mais d'autres transformations sont souvent plus efficaces.

Exemple :

Déterminons les primitives de chacun des fonctions suivantes.

- a) $f(x) = \sin 3x \cos^2(2x)$. b) $g(x) = \sin x + x \cos x$. c) $h(x) = \sin 2x \cos^2 2x$

solution :

$$\begin{aligned} \sin 3x \cos^2(2x) &= \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right)^2 \\ \text{a) On a :} &= \frac{1}{8i} (e^{i3x} - e^{-i3x}) (e^{i4x} + 2 + e^{-i4x}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{i7x} - e^{-i7x}}{2i}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \end{aligned}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{4} \sin 7x + \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin x$.

Une primitive F de f est donc

$$F(x) = -\frac{1}{28} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos x$$

- . b) En remarquant que la dérivée de $x \sin x$ est $\sin x + x \cos x$,
on en déduit qu'une primitive de g est la fonction G définie par $G(x) = x \sin x$.

c) $h(x) = \sin 2x \cos^2 2x = -\frac{1}{2} [(-2 \sin 2x) \cos^2 2x]$
donc h est sous la forme $-\frac{1}{2} u' u^2$ avec $u(x) = \cos 2x$
d'où une primitive H de h est $H(x) = -\frac{\cos^3 2x}{6}$.

Exercices :

exercice 1 :

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = \cos^3 x$; b) $g(x) = \cos^3(x+1) + \tan x$; c) $h(x) = \sin 2x \cos^3 x$.

exercice 2 :

1.3 Détermination des primitives

On donne $f(x) = \cos x \sin^2(2x+1) [2 \sin x + \sin(2x+1)]$.

- 1) Ecrire f sous la forme $f = u'v + uv'$ où u et v sont à déterminer.
- 2) En déduire une primitive F de f .

exercice 3 :

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = \sin x \cos^3 x$.
- b) $g(x) = -3 \sin(x+1) \cos^5(x+1)$ (de deux manières différentes).
- c) $h(x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$.

1.3.3 Primitive d'autres fonctions

a) **Primitives de $e^{ax}P(x)$, où a est un nombre complexe, et P un polynôme de degré n .**

Exercie 1

Déterminer une primitive de $f(x) = e^x(x^2+1)$.

- 1) Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Soit $g(x) = ax^2 + bx + x$ un polynôme. déterminer la dérivée de $h(x) = e^x g(x)$.
- 2) a) Pour quelles valeur de a et b $h'(x) = f(x)$.
b) En déduire une primitive de $f(x)$.

En résumé, si p est un polynôme de degré n , alors une primitive de $e^{ax}P(x)$ est de la forme $e^{ax}q(x)$ où q est un polynôme degré n .

exemple Déterminer une primitive F de $f(x) = x^2 e^{2x}$.

solution Une primitive de f est de la forme $F(x) = (ax^2 + bx + c) e^{2x}$.

la dérivée de F est $F'(x) = [2ax^2 + (2a+2b)x + b+2c] e^{2x}$.

En égalant $F'(x)$ et $f(x)$ on a : $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$

Il en résulte que $F(x) = \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1) e^{2x}$.

Exercices

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = (5x^2 + 1) e^{3x}$. b) $g(x) = x^3 e^x + x e^{-2x}$. c) $h(x) = (2x + 2) e^{2x+1}$.

b) **Primitives de $P(x)e^{ax}\cos(bx)$ et $P(x)e^{ax}\sin(bx)$, où P est un polynôme de degré n ; a et b sont deux nombres réels.**

Exercie 2

Déterminer une primitive de $f(x) = (x^2 + 1) e^{3x} \cos 2x$.

- 1)

1.3 Détermination des primitives

- a) Déterminer la dérivée de $p(x) = (x^2 + 1)e^{3x}[a(x) \cos 2x + b(x) \sin 2x]$ où a et b sont des polynômes de degré au plus 2.
- b) Identifier les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ pour lesquelles $p'(x) = f(x)$.
- c) En déduire une primitive de $f(x)$.

En résumé, on cherche une primitive I de $f(x) = P(x)e^{ax}\cos(bx)dx$ ou une primitive J de $g(x) = P(x)e^{ax}\sin(bx)dx$ sous la forme

$$I \text{ (ou } J) = e^{ax}[Q(x) \cos(bx) + R(x) \sin(bx)].$$

où Q et R sont des polynômes de degrés au plus égaux au degré de p .

On peut également partir de la relation (★) ci-dessus, dériver et identifier pour obtenir les polynômes R et Q .

Exemple : Déterminer de deux manières différentes une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$t(x) = (x - 1)e^{2x} \cos 3x; \quad g(x) = x^2 \sin 2x.$$

Nous ferons ici un seul cas et l'autre est laissé comme exercice d'application pour le lecteur.

Déterminer de deux manières différentes une primitive G de $g(x) = x^2 \sin 2x$.

1^{er} methode : Posons $f(x) = x^2 \cos 2x$ et $h(x) = f(x) + ig(x) = x^2 e^{2ix}$.

une primitive de h est de la forme $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2ix}$. En dérivant on a :

$$H'(x) = [2iax^2 + (2ib + 2a)x + b + 2ic]e^{2ix}.$$

Par identification on a : $a = \frac{i}{2}$; $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{i}{4}$

Par suite $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2ix} = \frac{1}{4}(-2ix^2 + 2x + i)(\cos 2x + i \sin 2x)$.

La partie imaginaire de H est une primitive G de g . soit

$$G(x) = \frac{1}{4}[(1 - 2x^2) \cos 2x + 2x \sin 2x]$$

2^{ième} methode : Il s'agit pour nous de chercher une primitive de g sous la forme $G(x) = (ax^2 + bx + c) \cos(bx) + (fx^2 + gx + h) \sin(bx)$ où a ; b ; c ; f ; g ; et h sont des réels.

$$G'(x) = [2fx^2 + (2g + 2a)x + 2h + b] \cos 2x + [-2ax^2 + (2f - 2b)x + g - 2c] \sin 2x$$

de $G'(x) = g(x)$ on a :

$$2fx^2 + (2g + 2a)x + 2h + b = 2 \quad \text{et} \quad -2ax^2 + (2f - 2b)x + g - 2c = x^2$$

Par identification on a : $a = -\frac{1}{2}$; $b = f = h = 0$; $c = \frac{1}{4}$ et $g = \frac{1}{2}$.

Il en résulte que :

$$G(x) = \frac{1}{4} [(1 - 2x^2) \cos 2x + 2x \sin 2x]$$

Remarque : dans cette exercice, la partie exponentielle peut être pris en compte en écrivant $1 = e^{0x}$. C'est à dire $g(x) = x^2 \sin 2x = x^2 e^{0x} \sin 2x$.

1.4 Notion d'intégrale d'une fonction

Activité

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, F et G deux primitives de f et a et b deux nombre réels.

- Déterminer une relation entre F et G .
- Calculer $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$.

On constate $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

1.4.1 Définition et propriétés

a) Définition d'une intégrale

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f . Soit a et b deux éléments de I . alors la quantité $F(b) - F(a)$ (encore noté $[F(x)]_a^b$) est appelée intégrale de f entre a et b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.

Vocabulaire :

- ▲ $\int_a^b f(x)dx$ se lit : " somme de a à b de $f(x)dx$ "
- ▲ Le nombre a est la borne inférieure de l'intégrale et b est sa borne supérieure.
- ▲ Le nombre x apparaissant dans l'intégrale est une variable muette : elle peut donc être remplacé par une autre variable. c'est à dire $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz$.

Exemples

- Soit $g : x \mapsto 3x^2 + 1$. Calculer : $\int_1^3 g(x)dx$; $\int_0^{-2} g(x)dx$.
- Soit h une fonction définie dans un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$.
- L'intégrale de h entre a et b dépend-elle de la primitive de h choisie ?

b) Propriétés des intégrales

Activité 1

Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, F une primitive de f et a , b et c des réels.

1) Calculer les intégrales suivant : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$; $\int_a^c f(x)dx$.

2) Vérifier que $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

propriété 1(relation de Chasles)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a , b , et c de I

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Exemple

Calculer : $\int_{-2}^3 |x+1| dx$

On sait que $|x+1| = x+1$ si $x \geq -1$ et $|x+1| = -x-1$ si $x \leq -1$.

Donc

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 |x+1| dx &= \int_{-2}^{-1} |x+1| dx + \int_{-1}^3 |x+1| dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (-x-1) dx + \int_{-1}^3 (x+1) dx \\ &= -\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^3 \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1)\right) + \left(\frac{1}{2}(-2)^2 + (-2)\right)\right] \\ &\quad + \left[\left(-\frac{1}{2}(3)^2 - (3)\right) - \left(-\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1)\right)\right] \\ &= \frac{17}{2} \end{aligned}$$

Exercices

Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int_{-2}^3 |x^2 - 1| dx$; $B = \int_{-2}^2 (|x| + x) dx$

2) Soit la fonction f définie sur $[0; 2\pi]$ par : $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 + \cos x & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Calculer :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

b) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx$

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi} f(x)dx$

Activité 2

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$; F une primitive de f , G une primitive de g et a , b , c et d des réels.

1-a) Démontrer qu'une primitive de cf et cF et qu'une primitive de $f+g$ est $F+G$.

b) En déduire que $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$ et que $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

2) Démontrer que

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))dx = c \int_a^b f(x)dx + d \int_a^b g(x)dx.$$

propriété 2 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I contenant a et b .
Pour tous réels α et β on a :

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Exemple

Calculer : $A = \int_{-2}^3 (2|x+1| + 3x) dx$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^3 (2|x+1| + 3x) dx \\ &= 2 \int_{-2}^3 |x+1| dx + 3 \int_{-2}^3 x dx \\ &= 2 \int_{-2}^3 |x+1| dx + 3 \int_{-2}^3 x dx \quad . \\ &= 2 \times \frac{17}{2} + 3 \times \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-2}^3 \\ &= 17 + \frac{15}{2} = \frac{49}{2} . \end{aligned}$$

D'après l'exemple précédent. **Exer-**

cice

Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale de f entre 1 et 2.

a) $f(x) = 5x^2 + 2(x+1)$ b) $f(x) = \frac{5}{2x} - \frac{2}{x^2}$.

Activité 3

On donne $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

- f et g sont-elles paires ou impaires ?
- Déterminer une primitive F de f et une primitive G de g .
- soit t un nombre réel. calculer les quantités

$$F(t) - F(-t) \text{ et } G(t) - G(-t).$$

- Vérifier que $F(t) - F(-t) = 2(F(t) - F(0))$ et que $G(t) - G(-t) = 0$.

propriété 3

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Pour tout réel a de I on a :

- $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- Si f est une fonction paire on a $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
- Si f est une fonction impaire on a $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- Pour $a, b \in I$ on a $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Preuve. 1) Notons F une primitive de f . on a $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$.

2) $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$. Mais lorsque x décrit l'intervalle $[-a, 0]$, $-x$ décrit $[0, a]$. On a alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a f(x) dx$ car f est paire. On a donc le résultat.

3) Lorsque f est impaire on a

$$\begin{aligned}\int_{-a}^0 f(x)dx &= \int_0^a f(-x)dx \\ &= -\int_0^a f(x)dx\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= 0\end{aligned}$$

4) En effet $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$ d'où $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. $\square$

Exercices

- 1) Calculer les intégrales ci-dessous :
- a) $\int_{-2}^2 (x^2 + \cos x) dx$. b) $\int_{-1}^1 (x + \sin x) dx$. c) $\int_{-\pi}^{\pi} (x \sin x) dx$.
- d) $\int_{-1}^1 (x \cos x) dx$.
- 2) Calculer les intégrales suivantes :
- a) $\int_0^{\pi} (3x^2 + 5 \cos x) dx$. b) $\int_0^{\pi} (x^2 + \cos x) dx$. c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [3(x \sin x) + 5(x \cos x)] dx$.

1.4.2 Complément

D'autres méthodes permettent de déterminer l'intégrale d'une fonction, mais ceci c'est l'objet d'une autre ressource. Nous vous donnons quand même de retenir les notions suivantes.

Signe de l'intégrale

Activité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

- 1) Tracer la courbe (C_f) de f et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) Dans chacun des cas suivants calculer $\int_a^b f(x)dx$ et en déduire son signe.
- a) $\int_{-3}^{-1} f(x)dx$. b) $\int_{-5}^0 f(x)dx$. c) $\int_2^5 f(x)dx$. d) $\int_1^6 f(x)dx$.

Propriété

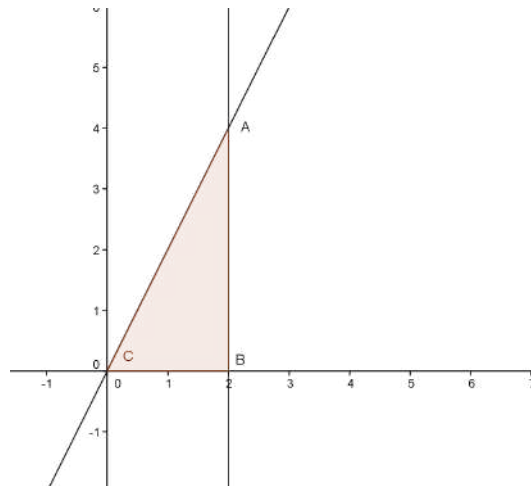
Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant les réels a et b tels que $a \leq b$.

- 1) Si f est positive sur $[a; b]$; alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- 2) Si f est négative sur $[a; b]$; alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Intégrale et aire :

Activité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ et soit (C_f) sa courbe. Soit (D) la droite d'équation $x = 2$.

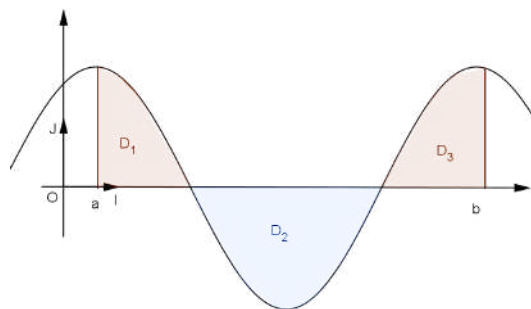


- 1) Calculer l'aire du triangle ABC.
- 2) Calculer $\int_0^2 f(x)dx$ et comparer les deux résultats.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et soit (C_f) sa courbe représentative ; soit D l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

- 1) Si f est toujours positive sur $[a; b]$: alors $\int_a^b f(x)dx = \text{aire}(D)$ (unité d'aire) .
- 2) Si f est toujours négative sur $[a; b]$: alors $\int_a^b f(x)dx = -\text{aire}(D)$ (unité d'aire) .
- 3) Si f a un signe variable sur $[a; b]$: alors $\int_a^b f(x)dx = \text{aire}(D_1) - \text{aire}(D_2) + \text{aire}(D_3)$



Exercice

f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et (C_f) sa courbe représentative.

Soit D l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Déterminer D dans chacun des cas suivants.

- 1) $f(x) = x + 1$; $a = -1$ et $b = -2$.
- 2) $f(x) = x + 1$; $a = -2$ et $b = 2$
- 3) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $a = 0$ et $b = 3$.

EXERCICES DE SYNTHÈSES

Exercice 1

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$; a et b deux nombres réels distincts vérifiant $f(a) = f(b)$. Soit (c_F) la courbe représentative d'une primitive F de f , (D_a) et (D_b) les tangentes à (c_F) aux points d'abscisses a et b respectivement.

1) Démontrer que (D_a) et (D_b) sont confondues si et seulement si $F(b) - F(a) = f(a)(b - a)$

2) Démontrer que la droite (D_a) passe par l'origine du repère si et seulement si $F(a) = f(a)a$.

Exercice 2

Nous voulons déterminer une primitive de $f(x) = 2x [3(x^2 + 1)^8 + 1]$.

1) Déterminer deux fonctions g et h telles qu'on ait $f(x) = g(h(x)) \times h'(x)$.

2) Déterminer une primitive G de g .

3) Vérifier que $(G \circ h)' = f$ et en déduire une primitive de f .

4) Proposer une méthode de détermination des primitives de $f = g(h) \times h'$.

Exercice 3 (ce référer à l'exercice 2).

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+5} \tan [1 + \ln (x^2 + 5)]$.

c) $f(x) = \frac{3}{x(1+\ln^2 x)}$

b) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$.

d) $f(x) = \frac{1}{x} \sin (2 + \ln x)$

Exercice 4

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

b) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

Soient f la fonction identité de $\mathbb{R}$, F une primitive de f ; $A(a, F(a))$ et $B(b, F(b))$ deux points distincts de la courbe représentative de F notée (c_F) . On note (D_a) et (D_b) les tangentes à (c_F) aux points A et B respectivement.

1) Montrer que si (D_a) et (D_b) sont linéaires et $F(a) = F(b)$ alors $b = -a$.

-
- 2) A-t-on forcément $(D_a) = (D_b)$?
3) Pour $a = 1$ et $b = -1$ construit A , B , (D_a) , (D_b) et (c_F) .

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . Soient f une fonction réelle ; $A(a, b)$ un point du plan et (C) la courbe de la primitive F de f qui passe par A .

- 1) Au point A que représente $f(a)$ pour (C) ?
- 2) Donner en fonction de a la valeur de b pour laquelle la tangente (D) à (C) en A passe par l'origine du repère.
- 3) On donne $f(x) = 2x$ et $b = 2a^2$
 - a) Que peut-on dire de la nature de (D) ?
 - b) Déterminer l'équation de (D) .
 - c) Déterminer l'expression de F en fonction de a .

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}e^{(1+\ln x)}$.

- 1) Déterminer une primitive F de f .
- 2) Sachant que la fonction $G = F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f , donner en fonction de k la valeur de $G(1)$ pour que la tangente à la courbe de G au point $A(1, G(1))$ passe par l'origine du repère.
- 3) Pour quelle valeur de $G(1)$ a-t-on $F = G$?

Exercice 8

Soient a, b, c, p, r et m des nombres réels avec $m \neq 0$ Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f :

- a) $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-mx}$
- b) $g(x) = (p \cos x + r \sin x)e^{-mx}$

Exercice 9

Dans chacun des cas suivant déterminer une primitive de f :

- a) $f(x) = (2x^2 + 2x + 2)e^{-2x}$ c) $g(x) = (\cos x + 2 \sin x)e^{-x}$
b) $f(x) = (-x^2 + 1)e^{-x}$ d) $g(x) = (3 \cos x + 4 \sin x)e^{-2x}$

Exercice 10

Dans chacun des cas suivant déterminer une primitive de f :

- a) $f(x) = (2x^2 + 2x + 2)e^{2x}$ c) $g(x) = (\cos x + 2 \sin x)e^x$
b) $f(x) = (-x^2 + 1)e^x$ d) $g(x) = (3 \cos x + 4 \sin x)e^{2x}$

Exercice 11

Dans chacun des cas suivant déterminer une primitive de f :

- a) $f(x) = (2x^2 + 2)e^x$ c) $g(x) = (2 \sin x) e^{-x}$
b) $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$ d) $g(x) = (\cos x + \sin x)e^x$

Signe de l'intégrale et encadrement.**Exercice 12**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a et b deux éléments de I .

1) Dans chacun des cas suivants préciser le signe de $\int_a^b f(x)dx$.

- a) $a \leq b$; $f(x) \geq 0$. $b \leq a$; $f(x) \leq 0$.
b) $a \leq b$; $f(x) \leq 0$ $b \leq a$; $f(x) \geq 0$.

2) On suppose $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$.

- a) Montrer que $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$.
b) En déduire que $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

3) Application : On donne $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$.

Déterminer le signe de $f - g$ et comparer sans faire aucun calcul $\int_2^5 f(x)dx$ et $\int_2^5 g(x)dx$.

Exercice 13

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

1) Déterminer le signe de $f - g$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

2) En déduit que :

- a) $\int_2^4 f(x)dx \geq \int_2^4 g(x)dx$. b) $\int_{-5}^{-4} f(x)dx < \int_{-5}^{-4} g(x)dx$.

Exercice 14

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin x$.

- a) A-t-on $-\int_0^\pi dx \leq \int_0^\pi \sin x dx \leq \int_0^\pi dx$.
b) En déduire que $-\pi \leq \int_0^\pi \sin x dx \leq \pi$
c) Déterminer un encadrement de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

Exercice 15

Soit f fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de I et m et M deux nombres réels tel que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Par une intégration membre à membre montrer que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

b) Démontrer que pour $0 \leq x \leq 1$ on a $0 \leq \frac{x}{1+x^2} \leq x \leq 1$

c) En déduire que $0 \leq \int_0^1 \frac{x^3}{1-x^2} dx \leq 1$.

Exercice 16

Démontrer les encadrements ci-dessous :

$$\text{a) } \frac{3}{2} \leq \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \leq 3.$$

$$\text{c) } \frac{\pi}{16} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+\cos x)^2} < \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{b) } \sqrt{2} \leq \int_0^3 \sqrt{1+t^3} dt \leq 3$$

$$\text{d) } \frac{\pi}{16} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \frac{\pi}{2}.$$

(Aide : encadrer la fonction entre les bornes de l'intégrale)

Exercice 17

Soit f fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de I et M un nombre réel.

1-a) Démontrer que si pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq M$ alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b-a|$.

b) En déduire que si $a \leq b$ alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a)$

2-) Donner un encadrement de $\left| \int_0^\pi (1 + \sin x) dx \right|$

Exercice 18

Dans chacun des cas ci-dessous donner un encadrement de $\left| \int_a^b f(x)dx \right|$.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x+2}; \quad a = 1 \text{ et } b = 3.$$

$$\text{c) } f(x) = \ln(1+x^2); \quad a = 1 \text{ et } b = 5.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}; \quad a = -1 \text{ et } b = 2.$$

$$\text{d) } f(x) = 2 \cos x + 3; \quad a = 0 \text{ et } b = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 19

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3$.

1-a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$.

b) Montrer que $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$

2-a) Montrer que $\int_1^x f'(t)dt \geq \int_0^x 3dt$.

b) En déduire que $x^3 - 3x + 2 \geq 0$.

Exercice 20

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \cos x \leq 2$.

2) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin t - t \leq 0$ (on peut intégrer l'inégalité précédente entre 0 et t).

Exercice 21

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$.

1) Déterminer $f'(x)$.

2) Montrer que pour tout $x < -1$, $\int_{-1}^x \leq 0$.

3) En déduire que pour $x \leq -1$ on a $f(x) \leq \frac{1}{2}$ et pour $x \geq 1$ on a $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 22

Calculer l'intégrale de chacune des fonctions suivantes entre 1 et 3 :

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+5} \tan [1 + \ln (x^2 + 5)]$.

c) $f(x) = \frac{3}{x(1+\ln^2 x)}$.

b) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$.

d) $f(x) = \frac{1}{x} \sin (2 + \ln x)$.

Exercice 23

On donne $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = \sin x$; $h(x) = 2x^2 + 4$; $k(x) = 3x^2 + 6 + 3\sin x$

1-a) Calculer l'intégrale de f et h entre -1 et 2 :

b) Démontrer que $\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx$

2) Calculer l'intégrale de g et k entre 0 et π :

Exercice 24

Soient m et n deux fonctions définies par :

$$m(x) = -(x^2 + 2) \cos x + \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x\right) \sin x.$$

$$n(x) = 3(x^2 + 2) \cos x - (x^3 + 6x) \sin x + 2x^2 + 4$$

1) Déterminer une primitive de m et une primitive de n .

2) Calculer $\int_0^\pi m(x)dx$ et $\int_0^\pi n(x)dx$.

Exercice 25

Dans chacun des cas suivants calculer l'intégrale de f entre 1 et 2.

a) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

b) $f(x) = \frac{2}{x+3}$

c) $g(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$

d) $g(x) = \frac{5}{(2x-1)^4}$.

Exercice 26

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 9}$.

- 1) Etudier et tracer f dans $[-5; 5]$
- 2) Déterminer une primitive de f .
- 3) Calculer $\int_{-5}^5 f(x)dx$.

Exercice 27

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

- 1) Etudier et tracer f dans $[\frac{1}{2}; 2]$
- 2) Déterminer une primitive de f .
- 3) Calculer l'aire du domaine comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.

♣ Bibliographie ♣

- [1] SALIOU TOURE et les autres, Collection Inter Africaine de Mathématique Terminale(CIAM) SM, EDICEF, 11/2004.
- [2] CHARLES MVOMO OTAM et les autres, Majors en Mathématiques Terminales C-E, ASVA EDUCATION, Mars 2012.
- [3] M. MONGE, M.-C.Audoum-Egouoff et Lemoine-Body, Mathématiques terminales C et E. Tome 1 ; librairie Classique Eugène Belin, 1974.

♣ Annexe ♣

Dans cette partie une primitive d'une fonction f sera désigné par la lettre majuscule F .

Exercice corrigé.

Exercice 3 (Correction).

a) Posons $h(x) = [1 + \ln(x^2 + 5)]$ et $t(x) = \tan x$. On a $h'(x) = \frac{2x}{x^2+5}$. On peut écrire $f(x) = h'(x)t(h)$. Une primitive F de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = T(h(x))$ D'après l'exercice 2. Or $T(x) = -\ln|\cos x|$. Il en résulte que

$$F(x) = -\ln|\cos[1 + \ln(x^2 + 5)]|.$$

b) En posant $h(x) = e^x$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on a $f(x) = h'(x)g(h(x))$. Une primitive F de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = G(h(x))$. Il est résulte que

$$F(x) = \arctan(e^x).$$

Fonctions logarithmes en terminale D

PEDEPOUH Severain

dirigé par

Dr Fidèle CIAKE CIAKE, Chargé de Cours à l'ENS de Yaoundé

Mme Alice KAMGA, Inspecteur national de Mathématiques

Mme Judith MELELE Epse SIMO, Professeur au Lycée Bilingue de Yaoundé

Yaoundé, le 15 juillet 2014

♣ Résumé ♣

Dans ce travail, nous élaborons un cours sur les fonctions logarithmes en terminale D .Il s'adresse aux enseignants et aux élèves en classe de terminale D.

♣ Abstract ♣

We have elaborated in this work, lessons on logarithms functions in Terminale D. This work concerns teachers en students in terminale D.

♣ Table des matières ♣

Résumé	i
Abstract	ii
0.1 Présentation de la ressource	2
0.1.1 Objectifs pédagogiques	2
0.1.2 Liens avec les autres parties du programme	3
0.2 Généralités sur la fonction logarithme népérien.	3
0.2.1 Définition et conséquences	3
0.2.2 Propriété fondamentale	5
0.3 Etude de la fonction logarithme népérien.	8
0.3.1 Limites aux bornes de l'ensemble de définition $]0; +\infty[$	8
0.3.2 Dérivée et sens de variation.	9
0.3.3 Limites de références.	10
0.4 Equations et inéquations	14
0.5 Dérivées et primitives.	17
0.5.1 Dérivée de la fonction $\ln \circ f$	17
0.5.2 Primitives de $\frac{u'}{u}$	18
0.6 Exemple d'étude des fonctions comportant $\ln$	19
0.7 Les fonctions Logarithmes	22
0.7.1 Etude de la fonction logarithme de base a	24
0.7.2 Logarithme décimal	24
0.8 Exercices à faire à domicile	26
Bibliographie	34

Fonctions logarithmes en terminale D

Historique

Vers la fin du 16^e siècle, le développement de l'astronomie, de la navigation d'une part et les calculs bancaires d'intérêt d'autre part, poussent les mathématiciens à chercher des méthodes de simplifications de calculs et en particulier la transformation des produits par des sommes et racine carrée par division par 2. C'est dans le but de simplifier les calculs trigonométriques de l'astronomie que John Napier (1550 – 1617) invente les logarithmes. (Le terme est de lui, du grecque logos= logique, raison et arithmos =nombre). Son travail sera poursuivi et prolongé par le mathématicien anglais Henry BRIGGS qui publie en 1624 les tables de logarithmes décimaux. Le logarithme népérien (ou naturel) est celui qui utilise le nombre e comme base, il est fondamental en analyse mathématiques car il est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Le logarithme binaire, qui utilise 2 comme base, est utile pour les calculs appliqués, et en informatique théorique. Les logarithmes sont fréquents dans les formules utilisées en sciences. La notion de fonction, la correspondance entre les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes n'apparaissent que plus tardivement après le travail de Leibniz sur la notion de fonction (1697).[7] ;[6])

0.1 Présentation de la ressource

0.1.1 Objectifs pédagogiques

Objectif général

L'objectif est de compléter la banque des fonctions, des suites de références d'outils et utiliser les fonctions logarithmes dans la résolution des problèmes [8].

Objectifs spécifiques

A la fin de ce cours, l'apprenant doit être capable de :

- Faire des calculs logarithmiques et tracer des courbes des fonctions logarithmiques.
- Résoudre une équation ou une inéquation comportant des logarithmes .
- Utiliser les limites de la fonction logarithme pour déterminer les limites de fonctions .
- Déterminer les primitives d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction .
- Etudier la composée d'une fonction avec le logarithme népérien.
- Donner la relation entre le logarithme népérien et le logarithme dans d'autres bases de calcul.
- Valoriser le rôle des logarithmes pour d'autres disciplines permettant de résoudre des situations réelles en économie, en chimie, en biologie ...
- Utiliser les logarithmes dans la résolution des problèmes de la vie courante.

0.2. Généralités sur la fonction logarithme népérien.

0.1.2 Liens avec les autres parties du programme

Parties du programme nécessaire au développement de la ressource et leurs contributions

Pour bien acquérir ce cours et surmonter les difficultés, l'apprenant a besoin des savoirs et de savoirs-faire suivants :

- a) La dérivation, en particulier la dérivation des fonctions composées .
- b) L'étude des variations d'une fonction .
- c) L'étude des fonctions usuelles : elle permet de mieux assimiler l'étude des fonctions logarithmes.
- d) Les primitives simples et généralisées.
- e) Le théorème des valeurs intermédiaires. Nous supposons connu l'existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle non trivial.

En revanche la fonction exponentielle n'est pas supposée connue.

Apport de la ressource dans d'autres parties.

Ce cours permet d'élargir le champ d'étude de fonctions ainsi que les suites numériques. Elle permet également d'agrandir le champ de calcul de primitives et de calcul intégral de certaines fonctions rationnelles. Elle permet également de résoudre certaines équations de 1^{er} ordre. Vu l'importance de ce cours, il est conseillé de le faire à la deuxième séquence pour sa utilisation aisée dans d'autres parties du programme de terminale.

Différents champs d'application des fonctions logarithmes.

En mathématiques : calcul du nombre de chiffres intervenant dans l'écriture décimale d'un nombre entier naturel .

En économie : Calcul du temps de doublement d'un capital.

En science physique : Calcul du pH d'une solution

En acoustique : Déterminer l'intensité sonore

En séismologie : déterminer la magnitude d'un séisme et le placer sur l'échelle de RICHTER.

En démographie...

0.2 Généralités sur la fonction logarithme népérien.

0.2.1 Définition et conséquences

Activité 0.2.1. *le but de cette activité est de montrer la nécessité de créer la primitive de $\frac{1}{x}$.*

0.2. Généralités sur la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur $I =]0; +\infty[$ après avoir justifier leur existence : $j(x) = x^3$; $h(x) = x^2$; $u(x) = \frac{1}{x^4}$; $v(x) = \frac{1}{x^3}$; $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
2. Donner la formule générale pour les primitives de la fonction l définie par $l(x) = \frac{1}{x^n}$ où n est entier naturel supérieur ou égal à 2. Cette formule est-elle vraie pour $n = 1$?
3. Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Peut-on dire que f admet des primitives sur I ? Si oui, déterminer celle qui s'annule en 1.

Solution de l'activité 0.2.1. 1. Chaque de fonction est continue sur I donc admet des primitives sur I . En notant par : J ; H ; U ; V et G les primitives respectives j ; h ; u ; v et g on a :

$$J(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$U(x) = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$V(x) = -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$G(x) = -\frac{1}{x} + c.$$

c étant un réel quelconque.

2. formule générale : $F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$. $c \in \mathbb{R}$
La formule est vraie dans $\mathbb{N}^*$ sauf pour $n = 1$.
3. Oui, La fonction admet des primitives sur I car elle y est continue. La primitive de f qui s'annule en 1 est notée $\ln$ tel que $\ln(1) = 0$: c'est la fonction logarithme népérien.

Nous savons que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I . La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $]0; +\infty[$, y admet donc des primitives. Parmi ces primitives F il y a une seule qui vérifie la condition $F(1) = 0$. C'est précisément cette fonction qui s'appelle logarithme népérien. De cette définition se dégagerons progressivement diverses propriétés qui finiront par nous éclairer sur cette fonction.

Définition 0.2.1.

La fonction logarithme népérien est la primitive sur $]0; +\infty[$, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Cette fonction est notée $\ln$.

Conséquence 0.2.1.

- C_1 : Etant donné que la fonction primitive est défini sur le même intervalle que la fonction considérée, la fonction $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$.
- C_2 : $\ln(1) = 0$.
- C_3 : La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est définie par $\forall x \in]0; +\infty[$,
 $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

0.2. Généralités sur la fonction logarithme népérien.

C_4 : La fonction $\ln$ est continue sur $]0; +\infty[$ puisqu'elle y est dérivable.

C_5 : La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ car sa dérivée y est strictement positive.

Exercice d'application 1.

1. Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(2x - 6)$ et $g(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$.
2. Dériver la fonction h définie par $h(x) = 10 - x + \ln(x)$.
3. Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -3 + 2x + \frac{1}{x}$ qui s'annule en 0.

Solution de l'exercice d'application 1.

1. – f est définie en x si et seulement si $2x - 6 > 0$ ie $x > 3$,
d'où $D_f =]3; +\infty[$.
– g est définie en x si et seulement si $x^2 - 4x + 3 > 0$.
Ce qui signifie que $x \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$
D'où $D_g =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$.
2. h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions $u : x \mapsto 10 - x$ et $v : x \mapsto \ln(x)$ toutes dérivables sur $]0; +\infty[$ et $h'(x) = -1 + \frac{1}{x}$.
3. f est continue sur $]0; +\infty[$ donc y admet des primitives de la forme $F(x) = -3x + x^2 + \ln(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
Or $F(1) = 0$, on a : $-3 + 1 + \ln(1) + C = 0$, donc $C = 2$
D'où $F(x) = 2 - 3x + x^2 + \ln(x)$.

0.2.2 Propriété fondamentale

Activité 0.2.2. *Le but de cette activité est de montrer que la fonction logarithme népérien transforme le produit en somme.*

Soit a un réel strictement positif, on définit la fonction G_a sur $]0; +\infty[$ par $G_a(x) = \ln(ax) - (\ln a + \ln x)$.

1. Montrer que la fonction G_a est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer sa dérivée. (On pourra utiliser la composée de fonctions $u : x \mapsto ax$ et $v : x \mapsto \ln(x)$)
2. En déduire qu'il existe un réel c tel que $G_a(x) = c$.
3. Calculer $G_a(1)$ et en déduire la valeur de c .

0.2. Généralités sur la fonction logarithme népérien.

4. Conclure.

Solution de l'activité 0.2.2.

1. G_a est une composée de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$. $G_a = v \circ u - (\ln a + \ln x)$ avec $u(x) = ax$ et $v(x) = \ln(x)$.
Donc G_a est dérivable.
Et $G'_a(x) = a \times \frac{1}{ax} - 0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$.
2. La fonction G_a est une fonction constante sur $]0; +\infty[$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G_a(x) = c$.
3. $G_a(1) = \ln(a) - (\ln a + \ln 1) = 0$ donc $c = 0$, par conséquent G_a est constamment sur $]0; +\infty[$.
4. Finalement on obtient $\ln(ax) - (\ln a + \ln x) = 0$ ie $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.

Ce qui justifie la propriété fondamentale suivante :

Propriété 0.2.1. (fondamentale)

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

Exercice d'application 2.

Écrire sous la forme d'une seule logarithme les nombres réels suivants :

$$A = \ln 2 + \ln 9; \quad B = \ln 7 + \ln 3 \text{ et } C = \ln 5 + \ln 13.$$

Écrire sous la forme d'une somme de logarithmes les nombres réels suivants :

$$D = \ln 21 \text{ et } E = \ln 65.$$

Solution de l'exercice d'application 2.

Appliquons la propriété fondamentale $A = \ln(2 \times 9) = \ln 18$ De même $B = \ln 21$ et $C = \ln 65$.

La propriété fondamentale nous permet d'écrire $D = \ln 3 + \ln 7$ car $21 = 3 \times 7$

De même on a : $E = \ln 5 + \ln 13$

Remarque 0.2.1.

Cette propriété se généralise au cas du produit d'un nombre fini de facteurs et on a pour tout entier naturel n et pour tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$,

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n.$$

Activité 0.2.3. .

Etant donnée a et b deux réels strictement positifs ; n un entier relatif et r un nombre rationnel, l'objectif de cette activité est d'exprimer $\ln(\frac{1}{a})$, $\ln(a^n)$ et $\ln(a^r)$ en fonction de $\ln a$ d'une part ; et $\ln(\frac{a}{b})$ en fonction de $\ln a$ et $\ln b$ d'autre part.

0.2. Généralités sur la fonction logarithme népérien.

1. En remarquant que $1 = \frac{a}{a} = a \times \frac{1}{a}$ et en utilisant la propriété fondamentale, montrer que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.
2. Utiliser 1 et la propriété fondamentale pour montrer que $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln a^n = n \times \ln a$.
4. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}, \ln a^r = r \times \ln a$.

Solution de l'activité 0.2.3.

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $n \in \mathbb{Z}$; $r \in \mathbb{Q}$

1. On a : $\ln 1 = \ln \frac{a}{a} = \ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{a})$
Donc $\ln(a) + \ln \frac{1}{a} = 0$ d'où $\ln \frac{1}{a} = -\ln(a)$
2. $\ln \frac{a}{b} = \ln a \times \frac{1}{b} = \ln(a) + \ln \frac{1}{b}$
 $= \ln a - \ln b$ d'après 1.
Donc $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
3. • Si n est positif, procédons par récurrence sur n , soit $p(n)$ la proposition " $\ln a^n = n \times \ln a$ ".
pour $n = 0$, on a : $\ln a^0 = \ln 1 = 0$
Donc $\ln a^0 = 0 \times \ln a$ la proposition est vraie au rang 0
Supposons que $\forall n \geq 0, p(n)$ est vraie c'est-à-dire que $\ln a^n = n \times \ln a$ et montrons que $p(n+1)$ est aussi vraie.
 $\ln a^{n+1} = \ln a^n \times a = \ln a^n + \ln a = n \ln a + \ln a$, Ainsi $\ln a^{n+1} = (n+1) \times \ln a$ alors $p(n+1)$ est vraie.
On conclut que si $n > 0$ alors $\ln a^n = n \times \ln a$
• Si $n < 0$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = -m$ et on a :
 $\ln a^n = \ln a^{-m} = \ln \frac{1}{a^m} = -\ln a^m = -m \ln a$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln a^n = n \ln a$.
4. Si $r \in \mathbb{Q}$, alors il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$,
ainsi $\ln a^r = \ln a^{\frac{p}{q}} = q \ln a^{\frac{p}{q}} = \ln a^{(\frac{p}{q})^q} = \ln a^p = p \times \ln a$ ceci implique
 $\ln a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \ln a = r \ln a$ donc, $\ln a^r = r \ln a, \forall r \in \mathbb{Q}$.

On en déduit les résultats suivants :

Propriété 0.2.2.

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs, on a :

- (i) $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- (ii) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- (iii) $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln a^n = n \ln a$
- (iv) $\forall r \in \mathbb{Q}, \ln a^r = r \ln a$

0.3. Etude de la fonction logarithme népérien.

Remarque 0.2.2.

En particulier, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

1. $\ln \sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a.$
2. $\ln \sqrt[n]{a} = \ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln a, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Exercice d'application 3.

Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$A = \ln 5 + \ln 2 - \ln 20 + \ln 4$$

$$B = \ln 2^3 + \ln 4^2$$

$$C = \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{8}{3} - \ln 2^3$$

$$D = 4 \ln 25 - 2 \ln \sqrt{5}$$

Solution de l'exercice d'application 3.

$\begin{aligned} A &= \ln 5 + \ln 2 - \ln 20 + \ln 4 \\ &= \ln 5 \times 2 - \ln 20 + \ln 4 \\ &= \ln 10 + \ln 4 - \ln 20 \\ &= \ln \frac{40}{20}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} B &= \ln 2^3 + \ln 4^2 \\ &= 3 \ln 2 + \ln 2^4 \\ &= 3 \ln 2 + 4 \ln 2 \\ &= 7 \ln 2 \end{aligned}$ D'où $\boxed{B = 7 \ln 2}$	$\begin{aligned} C &= \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{8}{3} - \ln 2^3 \\ &= \ln 3 - \ln 4 + \ln 8 - \ln 3 - \ln 8 \\ &= -\ln 4 \\ &= -2 \ln 2 \end{aligned}$ D'où $\boxed{C = -2 \ln 2}$
D'où $\boxed{A = \ln 2}$		

0.3 Etude de la fonction logarithme népérien.

0.3.1 Limites aux bornes de l'ensemble de définition $]0; +\infty[$.

Activité 0.3.1.

Le but de cette activité est de déterminer les limites de la fonction $x \mapsto \ln x$ en 0^+ et en $+\infty$.

Soit n un entier naturel .

- 1.a) Justifier que si $x > 3^n$ alors $\ln x > n \ln 3$.
- 1.b) En utilisant la propriété de comparaison des limites, déduire de 1.a) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
2. En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, et le résultat de 1.b), calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$.

0.3. Etude de la fonction logarithme népérien.

Solution de l'activité 0.3.1. 1.a) Soient n un entier naturel et x un réel tel que $x > 3^n$.

Puisque la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on a $x > 3^n \implies \ln x > \ln 3^n$; donc $\ln x > n \ln 3$.

1.b) Puisque $\ln x > n \ln 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln 3 = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ d'après la propriété de comparaison de limites.

2. En posant $u = \frac{1}{x}$, quand $x \rightarrow 0^+$, $u \rightarrow +\infty$ on a alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (-\ln u), \text{ car } \ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\ln u.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{u \rightarrow +\infty} (-\ln u) = -\infty.$$

$$\text{Il en résulte que } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

On en déduit les résultats suivants :

Propriété 0.3.1.

$$\boxed{\text{(i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty; \text{ (ii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.}$$

Conséquence 0.3.1. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ alors on en déduit que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction $\ln$.

Exercice d'application 4.

Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes.

a) Pour tout réel $x > 3$, $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$.

b) Pour tout réel $x > -\frac{1}{2}$, $g(x) = \ln(2x + 1) - \ln(x + 3)$

Solution de l'exercice d'application 4.

a) f est la composée de deux fonction : $f(x) = u \circ v(x)$ où $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x^2 - 3x + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) Remarquons que le calcul direct de la limite de g donne l'indétermination du type « $+\infty - \infty$ ».

Pour lever l'indétermination on va transformer l'écriture de g .

$g(x) = \ln(2x + 1) - \ln(x + 3) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$. En appliquant une fois de plus la propriété de la limite de composée de fonctions on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln 2$

0.3.2 Dérivée et sens de variation.

Nous avons vu que la fonction $\ln$ est définie continu et dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle, donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

0.3. Etude de la fonction logarithme népérien.

Conséquence 0.3.2.

C_1 : $\ln$ réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

C_2 : Nous en déduisons également le signe de la fonction $\ln$:

- $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$.
- $\ln(x) = 0 \iff x = 1$.
- $\ln(x) > 0 \iff x > 1$.

C_3 : On en déduit aussi que pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$:

- $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$.
- $\ln(a) > \ln(b) \iff a > b$.

Notons que la conséquence C_3 est très importante dans la résolution des équations et inéquations comportant $\ln$.

On peut remarquer grâce au théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $\ln x = 1$ a une unique solution dans $]0; +\infty[$.

Le nombre e

On note e l'unique solution de l'équation $\ln x = 1$. On a donc $\ln e = 1$.

e est appelé **base du logarithme népérien**.

Le nombre e s'obtient avec une calculatrice en appuyant successivement dans l'ordre sur les touches $\boxed{e^x}$ et puis $\boxed{1}$. On obtient $e \simeq 2,718282\dots$

Puisque la fonction $\ln$ est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, pour tout réel m l'équation $\ln x = m$ a une unique solution dans $]0; +\infty[$.

$\ln x = m$ signifie que $x = e^m$.

Remarque 0.3.1.

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction $\ln$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. La tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x = 1$ est droite $(\Delta) : y = x - 1$.
2. La tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x = e$ est droite $(\mathcal{D}) : y = \frac{x}{e}$.

0.3.3 Limites de références.

Nous avons déjà établi en activité 2.1.2 la propriété suivante.

Propriété 0.3.2.

$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; (ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$

Exercice d'application 5.

Calculer la limite des fonctions suivantes.

0.3. Etude de la fonction logarithme népérien.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

FIGURE 1 – Tableau de variation

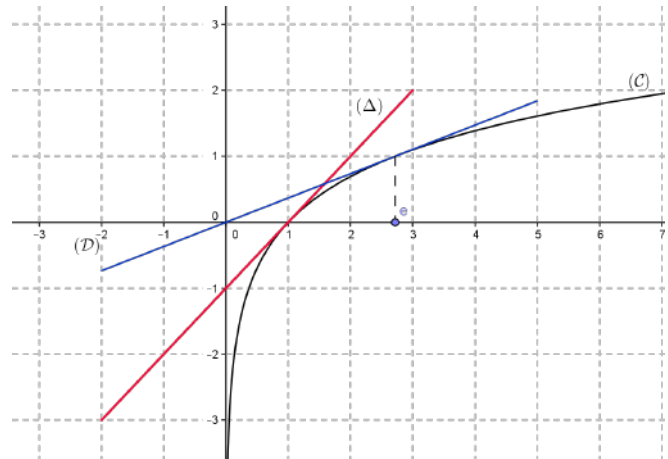


FIGURE 2 – Courbe représentative

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\sqrt{x}) + 3).$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x).$

Solution de l'exercice d'application 5.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x}) + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(x) + 3 = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Exercice d'application 6.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) + \ln(x-3);$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\ln(x+3)} - 4 \right);$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 5}{\ln x};$

Activité 0.3.2. Le but de cette activité est de déterminer certaines limites de la fonction $\ln$.

(C) désigne la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

1.b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1 < x$.

2.a) Montrer en utilisant l'inégalité précédente que $\forall x \in]1; +\infty[, 0 \leq \ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$ et en déduire que $\forall x \in]1; +\infty[, 0 \leq \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$.

2.b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

3. En utilisant le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ et la question 2.b), montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

Solution de l'activité 0.3.2. 1.a) La tangente (T) au point d'abscisse $x = 1$ est d'équation

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ avec } f'(1) = 1 \text{ et } f(1) = 0$$

$$\text{D'où } (T) : y = x - 1.$$

0.3. Etude de la fonction logarithme népérien.

1.b) Nous savons que la courbe de la fonction $\ln$ est en dessous de la tangente (T) donc

$$\forall x \in]0; +\infty[, \ln x \leq x - 1; \quad (1)$$

$$\text{De plus } \forall x \in]0; +\infty[\quad x - 1 < x; \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) réunies donnent $\forall x \in]0; +\infty[, \ln x \leq x - 1 < x$.

2.a) Soit $x \in]1; +\infty[$, Alors $1 \leq \sqrt{x}$, donc $\ln 1 \leq \ln \sqrt{x}$, (car $\ln$ est croissante).

Ainsi $\ln 1 < \ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$, d'après 1.b). Donc

$$0 \leq \frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}$$

2.b) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

3) On a $x \ln x = \frac{1}{\frac{1}{x}} \ln \frac{1}{\frac{1}{x}}$.

Posons $X = \frac{1}{x}$, quand $x \rightarrow 0^+$, $X \rightarrow +\infty$.

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0.$$

Propriété 0.3.3. $i) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0; \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Conséquence 0.3.3. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors la courbe représentative de la fonction $\ln$ admet une branche parabolique de direction (OI).

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Propriété 0.3.4.

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

On obtient le résultat en écrivant $\forall n \geq 2$, $x^n \ln x = x^{n-1}(x \ln x)$ et $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x}$.

Propriété 0.3.5.

$$\text{Pour toute fonction polynôme } P \text{ de degrés supérieur ou égale à 1, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0. \quad [14]$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P , alors $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ (avec $a_n \neq 0$).

Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. ■

Exercice d'application 7. Calculer les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+3};$

b $\lim_{x \rightarrow -4^+} (x+4) \ln(x+4)$

0.3. Etude de la fonction logarithme népérien.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 + x^2 \ln x);$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x;$

Solution de l'exercice d'application 6.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+3} = 0$

b) Posons $X = x + 4$, quand $x \rightarrow -4^+$, $X \rightarrow 0^+$,

on a donc, $\lim_{x \rightarrow -4^+} (x + 4) \ln(x + 4) = \lim_{x \rightarrow 0^+} X \ln X = 0.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 + x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 + x(x \ln x)) = -1.$

d) Posons $X = \sqrt{x}$, alors $x = X^2$, quand $x \rightarrow 0^+$, $X \rightarrow 0^+$,

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x; = \lim_{X \rightarrow 0^+} X(\ln X^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2X \ln X = 0.$

Activité 0.3.3.

i) En utilisant le nombre dérivé de la fonction $\ln$ en 1, calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}.$

ii) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

Solution de l'activité 0.3.3.

i) La fonction $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1) = 1.$

Mais D'après la définition du nombre dérivée en 1 ; on a aussi, $\ln'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1}$, avec

$\ln 1 = 0$ on a alors $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

ii) Posons $X = x + 1$ $x = X - 1$; quand $x \rightarrow 0$, quand $X \rightarrow 1$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$ d'après i).

Propriété 0.3.6.

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$; (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$

Exercice d'application 8.

Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^3-1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}).$

Solution de l'exercice d'application 7.

a) On a : $\frac{\ln x}{x^3-1} = \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x^2+x+1}.$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x^2+x+1} = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

b) Posons $X = x^2 + 1$ alors $x^2 = X - 1$ quand $x \rightarrow 0$, $X \rightarrow 1$

ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1.$

On peut aussi poser $X = x^2$, alors quand $x \rightarrow 0$, $X \rightarrow 0$

ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$

c) Posons $X = \frac{1}{x}$, quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow 0^+$, $x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+X)}{X},$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$

0.4 Equations et inéquations .

Activité 0.4.1.

1. Resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \ln(3x - 6) = 0 \text{ et } (E_2) : \ln(x + 3) = 5.$$

* Pour que (E_1) soit bien défini il faut que $3x - 6 > 0$ c'est à dire $x > 2$.

Les solutions de (E_1) doivent être dans $]2; +\infty[$.

$$* \ln(3x - 6) = 0 \iff \ln(3x - 6) = \ln 1 \text{ (car } 0 = \ln 1).$$

Ainsi $3x - 6 = 1$ car $\ln$ est injective ;

$$\text{donc } x = \frac{7}{2};$$

$$x = \frac{7}{2}; \text{ est bien un élément de }]2; +\infty[.$$

Donc la seule solution de (E_1) est $\boxed{x = \frac{7}{2}}$.

(E_2) est bien définie si $x + 3 > 0$ c'est à dire $x \in]-3; +\infty[$.

$$\ln(x + 3) = 5 \iff \ln(x + 3) = \ln e^5 \text{ (car } 5 = \ln e^5).$$

$$\text{Ainsi } x + 3 = e^5 \text{ D'où } \boxed{x = e^5 - 3}.$$

2. Resoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $I_1 : \ln(x - 5) \leq 0$

On doit avoir $x - 5 > 0$ c'est-à-dire $x > 5$, donc $x \in]5; +\infty[$. Les solutions doivent appartenir à l'ensemble $E =]5; +\infty[$.

$$\ln(x - 5) < 0 \iff x - 5 \leq 1$$

$$\iff x \leq 6$$

$$\iff x \in]-\infty; 6[$$

L'ensemble solution est formé des réels appartenant à $] -\infty; 6]$ qui sont dans $]5; +\infty[$.

C'est l'intersection $] -\infty; 6] \cap]5; +\infty[$. $S =]5; 6]$.

3. Resoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(3x + 1) = \ln(x - 5)$ Les valeurs cherchées doivent vérifier :

$$\begin{cases} 3x + 1 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases}$$

Donc les solutions doivent appartenir à l'ensemble $E =]5; +\infty[$. les logarithmes de deux réels positifs sont égaux si et seulement si ces réels sont égaux.

Ainsi :

$$\text{si } x \in]4; +\infty[, \ln(3x + 1) = \ln(x - 5) \iff 3x + 1 = x - 5 \text{ c'est-à-dire } x = -3.$$

puisque $-3 \notin]4; +\infty[$, l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre l'équation : $(E - 2) : \ln(x^2 - 4) = \ln 3x$

0.4. Equations et inéquations .

Les valeurs cherchées doivent vérifier :

$$\begin{cases} x^2 + 4 > 0 \\ 3x > 0 \end{cases}$$

Or $x^2 - 4 > 0$ lorsque $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ et $3x > 0$ lorsque $x > 0$. L'équation résolue dans l'ensemble $E =]2; +\infty[$.

De plus $\ln(x^2 - 4) = \ln 3x$ signifie $x^2 - 4 = 3x$ c'est-à-dire $x^2 - 3x - 4 = 0$.

On trouve $\Delta = 25$ et les solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$. Or $4 \notin E$ et $-1 \notin E$.

Donc la seule solution de l'équation (E_2) est 4.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x + 4) \geq \ln(6 - 2x)$.

Les valeurs cherchées doivent vérifier $2x + 4 > 0$ et $6 - 2x > 0$ c'est-à-dire $x > -2$ et $x < 3$. L'inéquation doit être résolue dans l'ensemble $E =]-2; 3[$.

Ainsi $\ln(2x + 4) \geq \ln(6 - 2x)$ signifie $2x + 4 \geq 6 - 2x$ c'est à dire $x \geq \frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions est alors $] - 2, 3[\cup [\frac{1}{2}, +\infty[$ c'est-à-dire $S = [\frac{1}{2}; 3[$.

Methode :

Pour résoudre une équation (resp.une inéquation)comportant $\ln$:

- On détermine l'ensemble A des réels sur lesquels l'équation(resp.l'inéquation)est bien définie ;
- On transforme l'écriture en utilisant les propriétés de $\ln$ pour se ramener à $\ln u(x) = \ln v(x)$ (resp. $\ln u(x) \leq \ln v(x)$) ;
- On applique l'injection de la fonction $\ln$: ($\ln u(x) = \ln v(x) \iff u(x) = v(x)$) ou encore la croissance de $\ln$: ($\ln u(x) \leq \ln v(x) \iff u(x) \leq v(x)$) ;
- On résout dans A l'équation (resp.l'inéquation)obtenue.

Changement de variable Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_3) : $(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 = 0$

(E_3) est bien définie lorsque $x > 0$.

Posons $X = \ln x$. Et nous obtenons l'équation $X^2 - 3X - 4 = 0$.

Les solutions sont $X_1 = -1$ et $X_2 = 4$.

On résout alors les équations : $\ln x = -1$ et $\ln x = 4$.

On obtient $x = e^{-1}$ et $x = e^4$.

$S = \{e^{-1}; e^4\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(4 - x) - 2 \ln 3 \leq 0$ (1) et $\ln x - \ln(x - 3) = \ln 2$ (2)

0.4. Equations et inéquations .

$4 - x > 0$ c'est-à-dire $4 > x$ ou encore $x < 4$ donc $x \in]-\infty; 4[$

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \ln(4 - x) \leq 2 \ln 3 \Leftrightarrow \ln(4 - x) \leq \ln 3^2 \\ &\Leftrightarrow \ln(4 - x) \leq \ln 9 \\ &\Leftrightarrow 4 - x \leq 9 \\ &\Leftrightarrow -5 \leq x \\ &\Leftrightarrow x \geq -5\end{aligned}$$

Donc $S = [-5; 4[$.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in]3; +\infty[$$

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \ln x = \ln(x - 3) + \ln 2 \\ &\Leftrightarrow \ln x = \ln 2(x - 3) \\ &\Leftrightarrow x = 2x - 6 \\ &\Leftrightarrow x = 6\end{aligned}$$

$S = \{6\}$

Remarque 0.4.1. – Dans l'écriture de l'équation ou de l'inéquation, si un logarithme est soustrait, il est préférable de le transporter dans l'autre membre pour éviter un quotient. Par exemple $\ln x - \ln(x - 3) = \ln 2$ s'écrit encore $\ln x = \ln(x - 3) + \ln 2$.

- A chaque fois qu'on trouvera un membre égal à zéro on le remplacera par $\ln 1$, quand on trouvera un membre égal à 1 on le remplacera par $\ln e$ et de façon générale quand on trouvera un membre égal à un réel r on le remplacera par $\ln e^r$.
- Après avoir déterminé les contraintes sur l'inconnue, on trouve un ensemble de solution noté S_1 . Puis après résolution de l'équation ou inéquation on ne prendra que les solutions qui sont dans S_1 et qui seront donc les solutions cherchées.
- Les formules les plus utilisées pour la transformation des équations ou inéquations en $\ln$ sont les suivantes :
 - $\ln u - \ln v = \ln\left(\frac{u}{v}\right)$
 - $\ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\ln u$
 - $\ln u + \ln v = \ln(uv)$
 - $\ln u^n = n \ln u$Où u et v sont des fonctions strictement positives et n un nombre rationnel.
- Pour certaines équations et inéquations on sera appelé à faire des changements de variable

0.5. Dérivées et primitives.

pour obtenir des équations ou inéquations du second degré ou bicarrées.

Exercice d'application 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. a) $\ln(x + 3) = 9$
b) $\ln(x^2 - 5) = \ln 4x$
c) $\ln(x^2 - 5) \leq \ln 4x$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2 \ln x - \ln y = -3 \\ 3 \ln x - 2 \ln y = 13 \end{cases}$$

0.5 Dérivées et primitives.

0.5.1 Dérivée de la fonction $\ln \circ f$

Activité 0.5.1.

le but est de calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln \circ f(x)$ où f est une fonction strictement positive.

Soit f une fonction numérique, dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I .

On pose $u(x) = \ln x$ et $v(x) = f(x)$.

1. Vérifier que $\forall x \in I, \ln \circ f(x) = u \circ v(x)$ et en déduire que $\ln f$ est dérivable sur I .
2. En utilisant la propriété sur la dérivée de composée de fonctions, montrer que $\forall x \in I$, on a $(\ln f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Solution de l'activité 0.5.1.

1. Posons $u(x) = \ln x$ et $v(x) = f(x)$ on a bien $u[v(x)] = \ln(f(x))$.
 $\ln \circ f$ est la composée de deux fonctions dérivables sur I donc $\ln \circ f$ est dérivable.
2. La propriété de la dérivée de composée de fonctions nous permet d'écrire :
$$\begin{aligned} (\ln \circ f)' &= u'(v(x)) \times v'(x) \\ &= u'(f(x)) \times f'(x) \\ &= \frac{1}{f(x)} \times f'(x). \end{aligned}$$

Ceci justifie la propriété suivante :

Propriété 0.5.1.

Soit f une fonction strictement positive sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $\ln \circ f$ est dérivable sur I et $\ln f = \frac{f'}{f}$.
 $\frac{f'}{f}$ est appelée dérivée logarithmique de f .

0.5. Dérivées et primitives.

Exemple d'application 1.

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 3)$.
Le polynôme u définie par $u(x) = x^2 + 3$ est strictement positif et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi d'après la propriété 1.5.1 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ c'est à dire $f'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$.
2. Calculer la dérivée la fonction g définie sur $] - \infty; \frac{1}{2}[$ par $g(x) = 4x + 3 \ln(-2x + 1)$.
 g est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $] - \infty; \frac{1}{2}[$ et sa dérivée est $g'(x) = 4 - \frac{6}{-2x+1}$.
3. Sur $]0; +\infty[$ la fonction f définie par $f(x) = \ln(\frac{x^2+1}{x})$ est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$.

Remarque 0.5.1.

Si f est strictement négative, on a : $(\ln(-f))' = \frac{-f'}{-f} = \frac{f'}{f}$. par conséquent pour tout $x \in I$ tel que $f(x) \neq 0$, $(\ln f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
On peut donc dire que si f ne s'annule pas sur I , $\ln |f| = \frac{f'}{f}$.

Ceci nous permet de calculer les primitives de certaines fonctions.

0.5.2 Primitives de $\frac{u'}{u}$

Propriété 0.5.2.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , ne s'annulant pas sur I , alors la fonction $f = \frac{u'}{u}$ admet des primitives sur I de la forme $F = \ln |u| + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exemple d'application 2.

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{4x^3}{x^4+2}$ se présente sous la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^4 + 2$.
Or pour tout réel x , $x^4 + 2 > 0$ donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(x^4 + 2) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
2. Sur l'intervalle $] - \infty; 0[$, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement négative. Les primitives de f sont fonctions $F : x \mapsto \ln -x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
3. La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ est $x \mapsto \ln(\sin x)$.

Exercice d'application 10.

1. Calculer les dérivées des fonctions après avoir déterminé leur domaine de définition.
 - a) $f(x) = \ln \sqrt{x}$.
 - b) $f(x) = \ln(2x^2 + 3x + 4)$.

0.6. Exemple d'étude des fonctions comportant $\ln$.

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+3x-4}{x}\right)$.

d) $\ln x - \ln(\ln x)$

2. Déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I .

a) $f(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x+1}$; $K=]1; +\infty[$

b) $f(x) = \tan x$; $K=[0; \frac{\pi}{2}[$

c) $f(x) = \frac{4x+1}{4x^2+2x+3}$; $K = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{1}{3x+1}$; $K=]-\infty; -\frac{1}{3}[$

0.6 Exemple d'étude des fonctions comportant $\ln$.

Dans ce paragraphe, $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O; I; J)$.

Etude de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1 - \ln x$

a) Domaine de définition : $D_f =]0; +\infty[$.

b) Limites aux bornes du domaine de définition et branches infinies.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; donc l'axe des ordonnées est asymptote à $(\mathcal{C})$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(1 - \frac{1}{x^2 - \frac{\ln x}{x^2}}) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}) = +\infty$; donc $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ) .

c) Dérivée et sens de variation.

f est somme des fonctions $x \mapsto x^2 - 1$ et $x \mapsto -\ln x$ qui sont toutes dérivables sur $]0; +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$ ie $f'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$.

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- $f'(x) \leq 0$ sur $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ donc f est décroissante sur $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$.
- $f'(x) \geq 0$ sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$ donc f est croissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$.

Etude de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

a) Domaine de définition : $D_f =]0; +\infty[$.

b) Limites aux bornes du domaine de définition et branches infinies.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; donc l'axe des ordonnées est asymptote à $(\mathcal{C})$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; donc $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ) .

0.6. Exemple d'étude des fonctions comportant $\ln$.

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	$-\frac{1 + \ln 2}{2}$	$+\infty$

FIGURE 3 – Tableau de variation

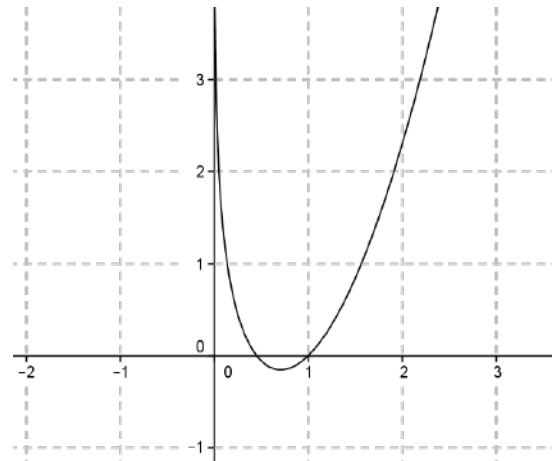


FIGURE 4 – Courbe représentative

c) Dérivée et sens de variation.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \iff x = e$.

$\forall x \in]0; e], f'(x) \geq 0$ donc f est décroissante sur $]0; e]$.

$\forall x \in [e; +\infty[, f'(x) \leq 0$ donc f est croissante sur $[e; +\infty[$.

d) Tableau de variation

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
f	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

FIGURE 5 – Tableau de variation

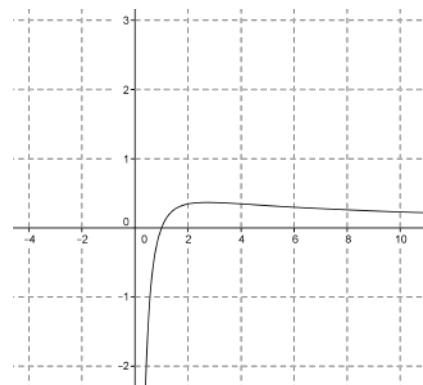


FIGURE 6 – Courbe représentative

Etude de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$.

1. Ensemble de définition :

f est défini en x si et seulement si $\frac{x+3}{x-1} > 0$, d'où $D_f =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

2. Limites et branches infinies.

- On a $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x-1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$; donc par composition de limites on obtient :
 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

0.6. Exemple d'étude des fonctions comportant $\ln$.

On en déduit que (OI) est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

- On a $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+3}{x-1} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; donc par composition de limites on obtient : $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$.

On en déduit que $(\mathcal{D}) : x = -3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

- On a $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; donc par composition de limites on obtient : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

On en déduit que $(\mathcal{D}') : x = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

3. Dérivée et sens de variation.

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $] -\infty; -3[\cup]1; +\infty[$, et sa

dérivée est $f'(x) = \ln'(x+3) - \ln'(x-1) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$.

D'où $f'(x) = \frac{-4}{(x+3)(x-1)}$.

$f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in] -\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

En conséquence f est décroissante sur $] -\infty; -3[$ et sur $]1; +\infty[$.

4. Tableau de variation

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$-$
f	0 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 0	

FIGURE 7 – Tableau de variation

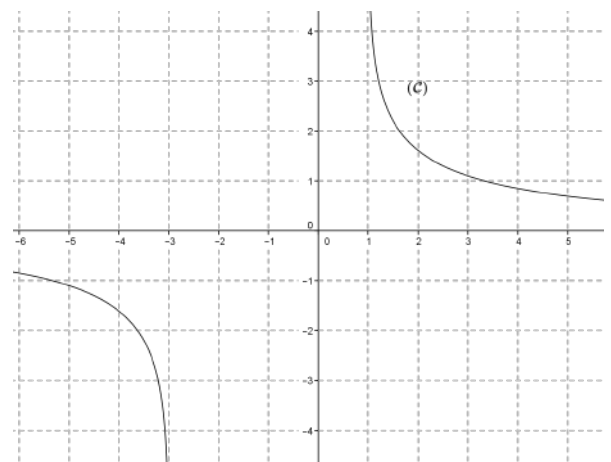


FIGURE 8 – Courbe représentative

Etude de la fonction $f : x \mapsto x \ln x^2$.

1. Domaine de définition.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. Etude aux bornes du domaine de définition.

- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln x^2 = -\infty$.
- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x^2 = +\infty$.
- On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln x^2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x \ln -x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x \ln x) = 0$.
- De même on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

0.7. Les fonctions Logarithmes .

Mais f n'est pas défini en 0. f est continue sur D_f .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, donc la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f admet deux branches paraboliques de direction (OJ) .

3. Dérivée et sens de variation.

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et sa dérivée est $f'(x) = x(\ln x^2)' + (x)' \ln x^2 = 2 + \ln x^2$.

- $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [-\frac{1}{e}; 0[\cup]0; \frac{1}{e}]$ donc f est décroissante sur $[-\frac{1}{e}; 0[$ et sur $]0; \frac{1}{e}]$.
- $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty; -\frac{1}{e}] \cup [\frac{1}{e}; +\infty[$ donc f est croissante sur $] -\infty; -\frac{1}{e}]$ et sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$.

4. Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	
f	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0	$-\frac{2}{e}$	$+\infty$

FIGURE 9 – Tableau de variation

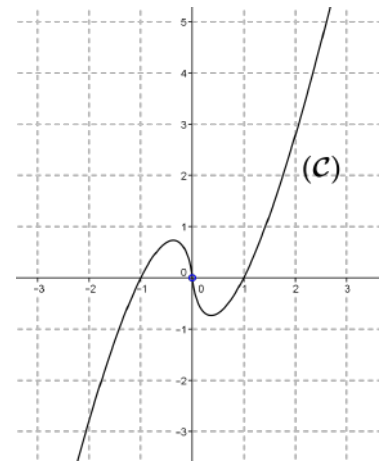


FIGURE 10 – Courbe représentative

Remarque 0.6.1. $f''(x) = \frac{2}{x}$, la dérivée seconde change de signe en 0 mais ne s'annule pas en 0. Le point $(0; 0)$ n'est pas un point d'inflexion à $(\mathcal{C})$.

0.7 Les fonctions Logarithmes .

Activité 0.7.1.

a est un nombre réel strictement positif. On désigne par f_a la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Démontrer que pour tous réels strictement positifs x et y , on a :

a) $f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$.

0.7. Les fonctions Logarithmes .

- b) $f_a(\frac{1}{x}) = -f_a(x)$.
- c) $f_a(\frac{x}{y}) = f_a(x) - f_a(y)$.
- d) $f_a(x^r) = r f_a(x) \forall x \in \mathbb{Q}$.

3. Calculer $f_a(a)$.

Solution de l'activité 0.7.1. 1. $\ln x$ existe si $x > 0$ donc f_a est définie sur $]0; +\infty[$.

- 2. a) $f_a(xy) = \frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = f_a(x) + f_a(y)$.
 - b) $f_a(\frac{1}{x}) = \frac{\ln \frac{1}{x}}{\ln a} = -\frac{\ln x}{\ln a} = -f_a(x)$.
 - c) $f_a(\frac{x}{y}) = \frac{\ln \frac{x}{y}}{\ln a} = \frac{\ln x - \ln y}{\ln a} = f_a(x) - f_a(y)$.
 - d) Soit $r \in \mathbb{Q}$, on a $f_a(x^r) = \frac{\ln x^r}{\ln a} = \frac{r \ln x}{\ln a} = r \frac{\ln x}{\ln a} = r f_a(x)$.
3. $f_a(a) = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$

Définition 0.7.1.

On appelle fonction logarithme de base a la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$.
On la note $\log_a$.

Remarque 0.7.1. 1. $\log_a(1) = 0 \forall a > 0$.

- 2. On parle du logarithme de base a car $\log_a(a) = 1$.
- 3. La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e .
- 4. Dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction logarithme de base a se déduit de celle de la fonction $\ln$ par affinité orthogonale d'axe l'axe des abscisses et de rapport $\frac{1}{\ln a}$.

De l'activité ci-dessus nous déduisons les propriétés suivantes :

Propriété 0.7.1.

Soient a, x et y trois réels strictement positifs. On a les résultats suivantes :

- i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
- ii) $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$.
- iii) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
- iv) pour tout nombre rationnel r , $\log(a^r) = r \log(a)$.

Exemple d'application 3. 1. On a $\log_3(81) = \log_3(3^4) = 4$

$$\log_2(\frac{1}{8}) = \log_2(2^{-3}) = -3$$

2. Ecrire plus simplement : $A = \log_2(\sqrt{8}) \times \log_3(27^2)$.

$$\text{On a } \log_2(\sqrt{8}) = \log_a(8)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2(8) = \frac{1}{2} \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{1}{2} \frac{3 \ln 2}{\ln 2} = \frac{3}{2};$$

$$\text{et } \log_3(27^2) = 2 \frac{\ln 27}{\ln 3} = 2 \times \frac{3 \ln 3}{\ln 3}.$$

$$\text{D'où } A = \frac{3}{2} \times 6 = 9.$$

0.7. Les fonctions Logarithmes .

Formule de changement de base Le logarithme d'un nombre réel dans une base a peut être exprimé dans une base b à l'aide de la formule suivante dite du changement de base :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \text{ et donc } \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}.$$

$$\text{En effet, } y = \log_a(x) \iff a^y = x \iff \log_b(a^y) \iff \log_b(a^y) = \log_b(x) \iff y \log_b(a) = \log_b(x) \iff y = \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

$$\text{En particulier pour } x = b \text{ on a : } \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}.$$

Exemple d'application 4.

0.7.1 Etude de la fonction logarithme de base a .

Soit a un réel strictement positif. Etudions la fonction $\log_a$ et traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_a$ dans un repère orthogonal $(O; I; J)$

a) Ensemble de définition .

Rappelons pour tout réel x , $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$; ainsi $\log_a$ est le produit de la fonction $\ln$ par le réel $\frac{1}{\ln a}$. Par suite $\log_a$ est défini sur $]0; +\infty[$.

b) Limites aux bornes de l'ensemble de définition.

On distingue deux cas :

• $0 < a < 1$:

On alors $\ln a < 0$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty \end{array} \right.$$

$$2 \bullet \text{a} > 1: \text{On alors } \ln a > 0 \text{ et } - \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty \end{array} \right.$$

Remarque 0.7.2. De l'égalité $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$, il résulte que l'on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \log_{\frac{1}{a}}(x) = \frac{\ln x}{\ln \frac{1}{a}} = -\frac{\ln x}{\ln a} = -\log_a(x).$$

Ainsi les courbes $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_{\frac{1}{a}}$ sont symétriques par rapport à l'axe (OI) .

Exercice d'application 11.

Etudier et tracer la fonction $\log_2$.

En déduire la courbe représentative de la fonction $\log_{\frac{1}{2}}$

0.7.2 Logarithme décimal

Définition 0.7.2.

0.7. Les fonctions Logarithmes .

La fonction logarithme décimal est la fonction logarithme de base 10 définie sur $]0; +\infty[$ par $\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$. On la note plus simplement $\log$.

Ainsi $\log(1) = 0$; $\log 10 = 1$.

Pour tout entier relatif n , $\log 10^n = n$. Cette fonction est utilisée dans tous les calculs faisant intervenir les puissances de 10.



FIGURE 13 – Coupe des calculatrices

Commentaire 0.7.1. Nous présentons ci-dessous les coupes de deux types de calculatrices le plus souvent utilisées par les élèves au secondaire.

- Les touches encadrées en rouge sont utilisées pour les calculs sur $\ln$ et $\log$ et leurs réciproques respectives $x \rightarrow e^x$ et $x \rightarrow 10^x$
- Nous avons encadré en vert les fonctions puissances et leurs réciproques racines n^{ime} .

Il est à noter que pour utiliser les fonctions réciproques on doit utiliser en plus des touches ci-dessus, la touche $\boxed{2ndf}$

Exemple 0.7.1. 1. $\log 10^5 = 5$;

2. $\log 0,01 = \log 10^{-2} = -2$

Définition et propriété[13]) : Lorsqu'un nombre m s'écrit en base 10, $m = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$, le nombre de chiffres intervenant dans l'écriture décimale de m est appelé longueur de m notée $l(m)$ et $l(m) = n + 1$.

$l(m) = E(\log(m)) + 1$. E désigne la fonction partie entière.

En effet, étant donné que $m = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$, on a :

$$10^n \leq m < 10^{n+1}.$$

Comme la fonction $\log$ est croissante, on déduit que

$$\log 10^n \leq \log m < \log 10^{n+1};$$

$$\text{ie } n \log 10 \leq \log m < (n + 1) \log 10;$$

ie $n \leq \log m < n + 1$, Car $\log 10 = 1$.

D'où $n = E(\log m)$; par conséquent $l(m) = n + 1 = E(\log m) + 1$.

0.8 Exercices à faire à domicile

propriétés algébriques.

Exercice 1.

Ecrire sous la forme d'un seul logarithme.

- a) $A = \ln 2 + \ln 4 - \ln 8$.
- b) $B = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$.
- c) $\frac{1}{3} \ln a + \frac{1}{3} \ln b - \frac{1}{3} \ln c$; où a, b et c sont des réels strictement positifs.
- d) $3 \log 2 - 2 \log 3 + \log 81$.

Exercice 2.

Exprimer en fonction de $\ln a$ et $\ln b$.

- 1. $\ln(a^3 \times b^5)$
- 2. $\frac{\ln(ab^5)}{\ln b}$

Exercice 3. Décomposer les expressions suivantes en vous servant des propriétés des logarithmes. a, x, y et z sont des réels strictement positifs.

- 1) $\log_a \sqrt[3]{xyz}$
- 2) $\log_a \sqrt{x\sqrt{yz}}$
- 3) $\log \frac{xy^2}{2z}$
- 4) $\log_a a^2 x^3 \sqrt{y}$
- 4) $\log_a x^3 \sqrt{xy^3 \sqrt{z^2}}$
- 5) $\log \frac{x^2}{x-y}$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$

- 1) $\ln x = 2$
- 2) $3 - \ln x \leq 0$.
- 3) $\frac{1}{\ln x + 1}$
- 4) $\ln(2x + 1) = 1$.
- 5) $\ln x^2 = -1$
- 6) $\ln(x(x + 1)) = 0$.
- 7) $2x \ln x + x = 0$
- 8) $x \ln(x + 2) = 0$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$

- 1) $\ln(2x + 7) = \ln(x - 3)$;
- 2) $\ln(x) + \ln(3x + 2) = \ln(2x + 3)$
- 3) $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x + 7)$;
- 4) $\ln(x - 1) = -\ln\left(\frac{x-3}{3}\right)$
- 5) $\ln(x^2 - 4) = \ln 5 + 2 \ln 3$.
- 6) $\ln(\sqrt{3-x}) + \ln \sqrt{3-x} = \ln \sqrt{10-6x}$
- 7) $\ln(x^2 - ex + 3) - \ln(x^2 - x - 1) = 1$;

Exercice 6. Soit $A(x)$ le polynôme $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

- 1. Calculer $A(-1)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.

0.8. Exercices à faire à domicile

2. En déduire les solutions de l'équation $2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 4 \ln x + 3 = 0$

Exercice 7. On définit le polynôme p par $p(x) = 2x^3 - 13x^2 - 10x + 21$.

1. (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout réel $x : p(x) = (x - 1)(ax^2 + 6x + c)$
(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $p(x) = 0$.
2. En déduire la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $(E) : 2(\ln x)^3 - 13(\ln x)^2 - 10 \ln x + 21 = 0$.

Exercice 8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ défini par : $f(x) = \frac{2 - \ln(x+8)}{1 - \ln(2-x)}$.

1. Déterminons l'ensemble de définition de f .
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

$$(E_1) : f(x) = 1$$

$$(E_2) : f(x) = 2$$

Exercice 9. [2]

1. Pour quels exposants entiers naturels n , 2^n reste inférieur à un milliard de milliards ?
2. La population d'un pays augmente de 4% par an. Au bout de combien d'années la population aura-t-elle décuplée (sera multipliée par 10) ?
3. On considère qu'une génération correspond à 30 ans. Dans combien de génération se produira ce phénomène, si le taux d'accroissement annuel est maintenu ?

Limites

Exercice 10. Pour chacune de ces fonctions, donner le domaine de définition, puis calculer les limites aux bornes de ce domaine. Préciser les asymptotes éventuelles. [4]

- | | |
|--|---|
| a $f(x) = x - \ln x$. | e $f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)}$ |
| b $f(x) = \ln(x-1)^2$ | f $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ |
| c $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ | g $f(x) = \frac{\ln(x)-3}{\ln(x)+5}$ |
| d $f(x) = \sqrt{\ln x}$ | h $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ |

Dérivation

Exercice 11. Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné l'ensemble de dérivabilité.

- a** $f(x) = x - \ln(2x - 1)$.
- b** $f(x) = x^2 - 8 \ln(x - 1)^2$

0.8. Exercices à faire à domicile

c $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

d $f(x) = x \ln(x) - x$

e $f(x) = (x \ln x)^2$

f $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

g $f(x) = \frac{\ln(x)-3}{\ln(x)+5}$

h $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

Exercice 12. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a $2x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

b $\ln\left(\frac{1}{2(x+1)}\right)$

c $\ln \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

b $\ln(4x^2 + 2x + 1)^3$

c $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

d $\log_a\left(\frac{1}{x}\right)$; avec $a > 0$.

e $\log_2(3x^2 - \sin x)$

f $\ln |x + 1|$

Exercice 13. a Déterminer les nombres a et b tels que la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = a + b \ln(1 + x)$ vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(3) = \frac{3}{4}$.

b Etudier les variations de f . [3]

Exercice 14. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(ax + b)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer a et b tels que $\mathcal{C}$ passe par le point $A(2; 0)$ et la tangente en A ait pour coefficient directeur -2
2. Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 15. On considère la fonction f définie sur $] -\infty; 0[$ par $f(x) = ax + b + \ln(-2x)$, où a et b sont des réels. On connaît le tableau de variations de f .

1. Déterminer les valeurs a et b qui caractérisent cette fonction.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $-\infty$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-0, 5; -0, 01]$ et en déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
4. Tracer sa courbe représentative.

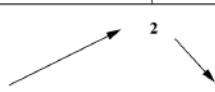
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
f'(x)	+	0	-
f(x)			

FIGURE 14 – Tableaux de variation

Exercice 16. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J) déduire de la courbe représentative de la fonction $\ln$, les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(x+1); \quad g(x) = \ln|x|; \quad h(x) = 1 + \ln x; \quad j(x) = |\ln x|; \quad m(x) = \log_2(x).$$

Exercice 17. Etudier et tracer la courbe représentatives des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \frac{\ln x}{x^2} & c) f(x) &= \frac{1}{\ln x} \\ b) f(x) &= x - \ln x & d) f(x) &= (\ln x)^2 + \ln x \end{aligned}$$

Exercice 18. Etudier et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= 2x - 1 - \ln x & e) f(x) &= \frac{1}{\ln(x)-1} \\ b) f(x) &= \frac{1}{x} - \ln x & f) f(x) &= x + \ln(x^2 - 1) \\ c) f(x) &= \ln(x+2) - \ln(x-1) & g) f(x) &= \frac{\ln x}{x} \\ d) f(x) &= \ln(x+2) - \ln(x-1) \end{aligned}$$

Primitives

Exercice 19. Déterminer les primitives des fonctions suivantes dans les intervalles indiqués I .

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \quad f(x) &= \frac{1}{x+1}; & I &=]-1; +\infty[\\ \mathbf{b} \quad f(x) &= \frac{3}{2-x}; & I &=]2; +\infty[\\ \mathbf{c} \quad f(x) &= \frac{1}{2x+1}; & I &=]0; +\infty[\\ \mathbf{d} \quad f(x) &= \frac{-2}{3x-1}; & I &=]-\infty; 0[\\ \mathbf{e} \quad f(x) &= \frac{4x-1}{2x^2-x+1}; & I &=]-\infty; +\infty[\\ \mathbf{f} \quad f(x) &= \frac{x+1}{x^2+2x+5}; & I &=]-\infty; +\infty[\end{aligned}$$

Exercice 20. Soit f la fonction $x \mapsto \frac{x(x-2)}{(x+1)^2}$.

0.8. Exercices à faire à domicile

1. Déterminer trois réels a, b , et c tels que pour tout réel de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$
2. En déduire les primitives de f sur $] -1; +\infty[$

Exercice 21. On définit la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{5x^2 - x + 4}{(x-1)(x^2+1)}$

1. Déterminer trois nombres réels a, b ; et c tels que pour tout réels de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a : $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$.
2. En déduire les primitives de f sur $]1; +\infty[$.

Exercice 22. On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x^2+x+1}{2x^2+3x+1}$.

1. Déterminer trois nombres réels a, b ; et c tels que pour tout réels de $\mathbb{R} \setminus \{-1; -\frac{1}{2}\}$ on a : $f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}$.
2. En déduire la primitive de f sur $] -\frac{1}{2}; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Problème 1. On se propose de démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\ln x < x^n$.

1. Soit $x \in]0; 1[$
 - (a) Quel est le signe de $\ln x$?
 - (b) En déduire que $\ln x < x^n$ pour tout entier naturel non nul.
2. Soit $x \in]1; +\infty[$.
 - (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$
 - (b) en déduire que $\ln x < x \quad x \in I$.
 - (c) Montrer que pour tout entier non nul n et pour tout réel x de $]1; +\infty[$, $x^n > x$.
 - (d) Conclure et interpréter graphiquement le résultat.

Problème 2. On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17)$.

1.
 - (a) Dresser de variations de la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 8x + 17$.
 - (b) En déduire le signe de g .
2. A l'aide des résultats de la question 1), étudier les variations de f et déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Résoudre l'équation $f(x) = \ln 5$.
A l'aide des variations de f , déduire l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geq 5$.
4. Construire la les courbes de g et f dans le même repère orthonormal.[3]

Problème 3. Soit la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f noté $\mathcal{D}_f$.

0.8. Exercices à faire à domicile

2. Montrer que f est paire.
3. Etudier les variations de f sur $]0; 1[$.
4. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; I; J)$.
 - (a) Justifier que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes .
 - (b) Déterminer une équation à $\mathcal{C}$ au point O . Tracer $\mathcal{C}$. [3]

Problème 4. [4] Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = x \ln(x) - 2x + 1 \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Préciser le domaine de définition de f et étudier la continuité de f .
2. Etudier la dérivabilité de f sur $]0; +\infty[$, puis en 0.
3. Etudier les variations de f .
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$.
5. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire le comportement de la courbe de f .
6. représenter graphiquement f .

Problème 5. Partie A Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -x + \ln(x + 1) - \ln(x)$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ (unité : 2cm).

1. Etudier les variations de f .
2.
 - (a) Démontrer que la droite $(\mathcal{D}) : y = -x$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
 - (b) Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.
4. Tracer $\mathcal{C}$.

Partie B Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

1. Etudier les variations de h .
2. Soit (Γ) la courbe h dans le repère $(O; I; J)$. Démontrer que le point $K\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (Γ) . Tracer (Γ) .

Problème 6. Partie A On considère la fonction f définie sur $[0; 15]$ par $f(x) = 2 \ln(x + 1) - 1$.

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. recopier et compléter le tableau ci-dessous (arrondir au dixième).
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthogonal (unité : 1cm) et tracer la droite $\mathcal{D} : y = 0,8x$.

0.8. Exercices à faire à domicile

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f(x)			3.2		4.2	4.6	4.9	5.2			5.8		6.1	6.3		

Partie B

Une entreprise fabrique des pièces pour avion. On note x le nombre de pièces fabriquées par mois avec $0 \leq x \leq 15$. Chaque mois les coûts de production, exprimés en millions d'euros, sont donnés par $f(x) = 2 \ln(x + 1) - 1$.

Le prix de vente d'une pièce est 0,8milliers d'euros.

1. Si l'entreprise vend x pièces,déterminer la recette exprimée en milliers d'euros.
2. Vérifier que le bénéfice mensuel est $B(x) = 0,8x - 1 - 2 \ln(x + 1)$.
3. Calculer une valeur approchée de $B(3)$ et $B(14)$,puis préciser pour chacun de ces cas si l'entreprise est bénéficiaire.
4. En justifiant graphiquement la réponse,donner le nombre minimal de pièces qu'il faut fabriquer et vendre pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

Problème 7. On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1; 7]$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 40 + 16 \ln(x)$.

1. Montrer que sa dérivée est donnée par $f'(x) = \frac{4(x-4)(x-1)}{x}$. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[1; 7]$ et en déduire le tableau de variations de f .
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus .On arrondira à l'unité près.

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)							

3. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.
4. Un artisan fabrique entre 1 et 7 poupées de collections par jour. Le coût unitaire de fabrication de x poupées,exprimé en euros, est égal à $f(x)$ (x est compris entre 1 et 7). Combien faut-il produire de poupées pour que le coût unitaire de fabrication soit minimal ? Quel est ce coût minimal ?
5. Le prix de vente d'une poupée est de 20 euros.Par lecture graphique, déterminer combien de poupées l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice.

N.B : les questions de 1 à 3 sont indépendantes

Problème 8. 1. La population du COSTA RICA double tous les 18ans. En 2012,il y avait 2 millions d'habitants. En se même année la population de BOLIVIE était de 6millions d'habitants, et sa population double tous les les 27ans.[7]

- (a) A quelle date le COSTA RICA rattrapera -t-il la BOLIVIE ?

0.8. Exercices à faire à domicile

- (b) Quel était le taux de variation annuel du COSTA RICA en 2012 ? Que vaudra-t-il en 2022 ?[13]
2. La raréfaction d'une matière première oblige un pays à envisager d'en diminuer la consommation de 8% par an. Celle-ci était de 100(en millions de tonnes)en 2009.
- (a) En quelle année la consommation sera-t-elle, pour la première fois, inférieure à 1 (millions de tonnes) ?
- (b) Quel doit être le pourcentage de diminution annuelle imposé pour atteindre une consommation annuelle égale à 1 au bout de 20 ans ?[13]
3. Une chaufferie produit de la vapeur à 100°C . La température de la vapeur diminue de 1% par mètre de tuyauterie parcouru. Quelle est la distance maximum pour recueillir de la vapeur à au moins 60° ?
4. Un marteau pilon frappe toutes les 6 secondes une pièce métallique dont l'épaisseur initiale est un centimètre.
- A chaque coup, l'épaisseur du métal diminue de 1%.Combien de coups seront-ils nécessaires pour réduire d'au moins un quart l'épaisseur de la pièce ?
- La pièce est terminée lorsque l'épaisseur n'excède plus 5 millimètres.
- Quel est le temps minimum nécessaire pour terminer une pièce ?[7]
5. Une personne loue un appartement à partir du 1^{er} janvier 2010. Elle a le choix entre deux contrats. Dans les deux cas ,le loyer mensuel initial est de 150 euros et le locataire accepte de rester pendant six mois.
- Contrat 1 : Augmentation annuelle de 10% du loyer de l'année précédente.
- Contrat 2 : augmentation annuelle forfaitaire du loyer mensuel de 17,5%.
- (a) Calculer le loyer final pour les deux types de contrat.
- (b) Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ? (celui où, au total il paie moins).
- (c) Reprendre la question b si le locataire reste durant dix ans.

♣ Bibliographie ♣

Bibliographie

- [1] BIWOLE MBIOCK Nazaire et al, *Chimie Terminale C, D et E, nouveau programme, Les classiques camerounais, Yaoundé-Cameroun*, 2007.
- [2] GARMIRIAN C. et al, *DECLIC Maths Terminales ES*. **Hachette Education**, 1989.
- [3] HAYE Geneviève et al, *FRACTALE Analyse Terminales C et E*. **BORDAS, Paris**, 1989.
- [4] MVOMO OTAM C. et al, *Majors EN MATHEMATIQUES T^{le} D*, **ASVA EDUCATION**, 2012.
- [5] Taïrou Alassane et al, *CIAM Terminale sciences expérimentales*, **EDICEF**, 1999

Webographie

- [6] [http ://www.historique des fonctions logarithmes](http://www.historique%20des%20fonctions%20logarithmes), Mai 2013.
- [7] [http ://wiki-math.univ-mlv.fr/DAEU-B/media/td10.pdf](http://wiki-math.univ-mlv.fr/DAEU-B/media/td10.pdf), Mai 2014

Autre

- [8] Decret N^o53/D/43MINEDUC/SG/IGP du 12/08/1998

Fonctions Exponentielles et Puissances en Terminale D

Par

OUAFEU TOKAM GUY PAULIN

Sous l'encadrement du

Dr Fidele CIAKE CIAKE : Chargé de cours ; ENS de Yaoundé.

de

M. TCHOUTIO Moïse : Inspecteur Pédagogique National de Mathématiques

et de

M. MEGAMTCHE Luc Calvin : Professeur des Lycées d'Enseignement Général.

Juillet 2014

♣ Table des matières ♣

Introduction générale	1
0.1 Activité introductive	6
0.2 Fonction Exponentielle :	7
0.2.1 Définition :	7
0.2.2 Propriétés algébriques :	8
0.2.3 Représentation graphique :	9
0.2.4 Exercices d'application :	9
0.2.5 Dérivées :	11
0.2.6 Primitive	12
0.2.7 Limites :	12
0.2.8 Puissance d'un réel positif : $a^\alpha, a > 0$:	17
0.2.9 Fonction exponentielle de base a :	18
0.3 Fonction puissance :	22
0.3.1 Définition et propriétés :	22
0.3.2 Étude de la fonction $x \mapsto x^\alpha$:	22
0.4 Comparaison des croissances des fonctions logarithme népérienne, exponentielle et puissance :	24
0.4.1 Logarithme et puissance :	25
0.4.2 Exponentielle et puissance :	25
0.4.3 Exponentielle et logarithme	25
0.5 Exercices dans les domaines d'utilisation	26
0.6 Exercices d'application :	31
0.7 Devoir surveillé :	36
0.8 Devoir de maison :	38
Conclusion	42
Bibliographie	42

♣ Introduction générale ♣

La nécessité de rendre facile l'enseignement des Mathématiques, de mettre à la disposition des enseignants et des élèves de l'Afrique Centrale des cours numériques de Mathématiques de bonne qualité, l'acquisition par les élèves des bases d'une formation solide en Mathématiques permettant de mieux aborder l'enseignement supérieur et d'analyser une situation de vie, sont les objectifs majeurs du projet Prenum-AC (Production de Ressources Numériques de Mathématiques en Afrique Centrale). C'est dans le cadre de ce projet que nous présenterons un cours sur les fonctions exponentielles et puissance en Terminale D.

Les fonctions exponentielles et puissances sont des notions étudiées dans les classes de Terminales. L'enseignement de ces deux fonctions a pour objectif de faciliter la résolution des équations de la forme $a^x + b = 0$, la détermination des nombres de la forme $a^{\frac{p}{q}}$. Pour l'atteinte de cet objectif, on peut définir la fonction exponentielle dans les classes de Terminale, comme :

1. La solution du système différentiel :

$$\begin{cases} Y' = Y \\ Y(0) = 1 \end{cases}$$

2. La bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

Au Cameroun, dans les classes de Terminale D, les enseignants utilisent le logarithme népérien pour transmettre cette notion. C'est dans ce sillage que nous introduirons la fonction exponentielle dans le cours qui suivra tout en proposant nos motivations. Au delà de cette approche axiomatique, nous constatons que les élèves de Terminale D ont des aptitudes théoriques plus ou moins moyennes au sujet des fonctions exponentielles et puissances, mais seulement très peu d'entre eux et certains enseignants ignorent concrètement à quoi elles peuvent servir. Il est donc également question à la suite du cours de proposer des exercices concernant des domaines d'application. .

♣ COURS SUR LES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES EN TERMINALE D ♣

Historique :

Dans [6], il ressort que : «La naissance de la fonction exponentielle est le fruit d'un long murissement qui n'aboutit qu'à la fin du 17 ième siècle. L'idée de combler les trous entre plusieurs puissances d'un même nombre est très ancienne. Ainsi trouve t-on dans les mathématiques babyloniennes un problème d'intérêts où il est question du temps pour doubler un capital placé à 20% conduisant à une interpolation linéaire pour fournir un nombre d'années égal à $\frac{347}{60}$.

Il manque cependant une notation pour permettre le développement d'exposant entiers, négatifs et même fractionnaire. La notation d'une puissance entière sous forme d'un exposant ne se développe réellement qu'après sa présentation par René Descartes en 1637 dans sa géométrie et est rapidement utilisée par des mathématiciens comme Huygens, Mersenne. Chez Descartes cependant, l'exposant est un nombre entier et pas une lettre, il est comme un indice indiquant combien de fois la quantité (nombre ou variable) a été multipliée par elle même. Chez Wallis en 1657, on voit apparaître des exposants littéraux entiers. On trouve également chez lui, dans son Arithmétique Infinitorum de 1656, une étude algébrique et géométrique des fonctions puissance rationnelle. Mais l'apport décisif dans ce domaine se situe dans deux lettres (Epistola Prior et Epistola Posterior) de 1676 que Newton envoie à Leibniz par l'intermédiaire d'Henry Oldenburg. C'est la première apparition en exposant d'une expression littérale fractionnaire, de sa signification et du développement du binôme correspondant ; suivie dans la seconde lettre, de la première apparition d'une expression contenant un exposant irrationnel.

Cependant Newton n'en donne aucune définition ni calcul approché. Leibniz s'empare de ce concept et présente pour la première fois en 1678 un exposant variable «gradus indefinitus» dans une expression x^y qui devient pour lui le premier modèle d'expression transcendante. Cependant, il n'en explique pas la signification. En 1679, il confie à Huygens qu'il a encore du

mal à exploiter des équations de forme $x^x - x = 24$.

Au cours de la seconde moitié du 17^{ième} siècle la notation $a^{\frac{p}{q}}$ se généralise. Les exposants commencent à être perçus comme des logarithmes. Vue de l'esprit en 1679, la notion prend peu à peu corps jusqu'à se voir qualifiée d'exponentielle. Leibnitz confie à Huygens que de telles expressions ne sont plus obscures. Il les relie explicitement aux logarithmes expliquant que $\ln \frac{1+x}{1-x} = y \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = b^y$ où b représente une grandeur constante dont le logarithme vaut 1. C'est la première apparition de la base des logarithmes naturels qui sera noté par Euler « e ».

En 1694, Jean Bernoulli et Leibnitz étudiaient la courbe d'équation $y = x^x$ en déterminant les tangentes. En 1697, Jean Bernoulli étudie la fonction exponentielle en tant que telle dans son *Principia calculi exponentialium seu percurrentium*. Les fonctions exponentielles font alors leur entrée officielle dans le corps mathématique.

Les deux autres avancées dans ce domaine consistent à mettre en exposant un nombre complexe, puis une matrice. La première démarche est entreprise par Euler des 1740 et est finalisée dans son texte fondateur de 1747, *Introductio in analysin infinitorum*. La seconde est l'œuvre d'Edmond Laguerre en 1867».

Pré-requis :

Pour aborder aisément ce cours, l'apprenant doit impérativement maîtriser :

1. La définition de la notion de primitive.
2. La notion de monotonie d'une fonction.
3. La définition de la notion de bijection et les propriétés des fonctions bijectives.
4. Les différentes formes indéterminées et les règles de calcul des limites du produit, du quotient, de la somme et de la composée de deux fonctions.
5. L'étude et les propriétés de la fonction logarithme népérien.

Objectifs pédagogiques spécifiques :

A la fin de ce cours, l'apprenant devra être capable de :

1. Définir les fonctions exponentielles et puissances.
2. Maîtriser les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et puissances, puis les utiliser pour les calculs numériques.
3. Résoudre des équations et inéquations contenant les fonctions exponentielles et puissances.
4. Étudier et représenter les fonctions du type : $\ln \circ f$, $\exp \circ f$, f^a où f est une fonction réelle et $f > 0$.
5. Étudier les croissances comparées des fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et $x \mapsto e^x$ puis s'en servir pour lever des indéterminations dans le calcul des limites.

Relations avec d'autres parties du programme :

Les fonctions exponentielles et puissances interviennent dans les contextes suivants :

- La résolution des équations différentielles linéaires du premier et second ordre à coefficients constants.
- La définitions de certaines suites numériques.
- Le calcul de l'intégrale des fonctions les contenant.

Utilisations :

Nous pouvons citer quelques domaines :

- En Thermodynamique pour la détermination de la température d'un corps en fonction du

temps par la méthode de Newton.

- En Biologie animale pour la détermination de la surface de la peau d'un animal.
- En Biologie animale pour la détermination de la taille de la population des rongeurs.
- En Agronomie pour la prévision de la croissance d'une racine.

Motivations :

La fonction exponentielle peut être introduite selon plusieurs approches. Notamment

1. Comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérienne.
2. Comme solution de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant la condition $f(0) = 1$.
3. Comme la fonction $x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ (l'existence de cette limite mobilisant des notions hors programme en Terminale D, on l'admettra).

La compréhension des approches 2 et 3 nécessite des pré-requis d'une part sur la notion de suites de fonctions adjacentes, notamment celles définies par $u_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ et $v_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^{-n}$, d'autre part sur la notion d'approximation affine ; qui ne sont pas au programme de mathématiques en terminale D.

A cause de la complexité de compréhension des approches 2 et 3 pour les apprenants de la terminale D et en conformité avec le programme officiel de mathématiques, nous présenterons en priorité dans ce cours la fonction exponentielle suivant l'approche 1. Toutefois, nous ferons allusion à l'approche 2 en exercice, à la fin du cours.

Schéma pédagogique de la ressource

1. Activités d'approches

Elles introduisent des notions nouvelles et ressortent l'objectif générale de la notion à enseigner ainsi que les méthodes de démonstration. En général leur conclusion seront mises en évidence.

2. Définitions

Bien structurées elles seront écrites dans un langage très accessible à tous.

3. Propriétés et Théorèmes

Ils énonceront tous les résultats et seront illustrés d'exemples et complétés par des remarques et commentaires.

4. Exercices d'application

Chacun de ces exercices porte sur un savoir faire. La solution proposée fait ressortir clairement le point méthode et explique aussi la démarche suivie pour trouver une solution.

0.1 Activité introductive

- **Objectif :** Découvrir quelques propriétés de la fonction exponentielle à partir de sa représentation graphique.
- **Modalité :** Travail à faire par les élèves individuellement en classe pendant 20 minutes et correction guidée par l'enseignant en 10 minutes.

Énoncé : Le plan est muni d'un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.

1. Graphiques :

- Tracer la représentation graphique (C) de la fonction logarithme népérien dans $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
- Tracer la droite (D) d'équation $y = x$.
- Construire l'image (L) de (C) par la symétrie d'axe (D) . (L) est la représentation graphique d'une fonction qu'on appelle fonction exponentielle notée exp .

2. Interprétation :

- Conjecturer graphiquement le sens de variation de exp .
- Reproduire et compléter, à l'aide d'une calculatrice scientifique le tableau de valeurs ci dessous. Consulter la notice de votre calculatrice ou exécuter la séquence suivante pour une calculatrice scientifique non programmable :

$$\boxed{x} \quad \boxed{2^{nd}} \quad \boxed{e^x} \quad \boxed{=} \quad exp(x) = \dots$$

$$\boxed{x} \quad \boxed{2^{nd}} \quad \boxed{e^x} \quad \boxed{\ln} \quad \boxed{=} \quad \ln exp(x) = \dots$$

x	0	1	$\sqrt{2}$	3	2	2,7	1,5	-1,5	-2,3	-6,1	-7	-2
$exp x$												
$\ln(exp x)$												
$exp(\ln x)$												

- Conjecturer les propriétés de la fonction exp en complétant :
 $\forall x \dots \quad \ln(exp x) = \dots \quad \text{et} \quad \forall x \dots \quad exp(\ln x) = \dots$
- Placer dans le repère, les points M et N de coordonnées $M(a, \ln a)$ et $N(\ln a, a)$ pour $a = 1$ et $a = \sqrt{2}$.
- Constater que $M \in (C)$ et $N \in (L)$ puis interpréter graphiquement les deux résultats précédents.
- Déduire une définition de la fonction exponentielle notée exp .

0.2 Fonction Exponentielle :

0.2.1 Définition :

La fonction exponentielle, notée **exp** définie de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$ est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien définie de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Conséquences immédiates :

- Pour tout réel x , $\ln(\exp(x)) = x$.
- Pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $\exp(\ln x) = x$.
- Pour tout réel x , $\exp(x) > 0$.
- Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y ,
 $y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y$.

Cas particuliers :

$$\exp(0) = 1 \text{ car } \ln 1 = 0.$$

$$\exp(1) = e \text{ car } \ln e = 1.$$

Remarque 1 : $\exp(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Remarque 2 : $e = 2,718281828\dots$

Activité 0.2

- **Objectif :** Méthode Montrer que la fonction exponentielle est égale à sa dérivée.
- **Modalité :** A faire individuellement par les élèves en 5 minutes sur la surveillance de l'enseignant.

Énoncé	Commentaires
Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x$, pour tout réel x. (i) Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer x en fonction de $f(x)$. (ii) Dériver l'expression obtenue ci-dessus par rapport à x. (iii) Dédurre que $f'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.	Cette activité traduit que si g est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \ln x$, alors $(g^{-1}(x))' = \frac{1}{(g' \circ g^{-1})(x)}$ C'est-à-dire $(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Solution :

- (i) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \Leftrightarrow x = \ln(f(x))$.
- (ii) $(x)' = (\ln(f(x)))' \Rightarrow 1 = \frac{(f(x))'}{f(x)}$.
- (iii) $1 = \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = f(x)$.

0.2. Fonction Exponentielle :

0.2.2 Propriétés algébriques :

Activité 0.3

- **Objectif :** Méthode Montrer les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- **Modalité :** A faire individuellement par les élèves en 10 minutes.

Énoncé : a et b sont deux nombres réels ; notons A et B leurs images respectives par la fonction $\exp$, soit $e^a = A$ et $e^b = B$.

1. On rappelle que $\ln A + \ln B = \ln AB$.
 - a) Montrer que $a + b = \ln AB$.
 - b) En déduire que $e^{a+b} = e^a \times e^b$. (1)
2. a) En prenant $a = -b$ dans l'égalité (1), exprimer e^{-b} en fonction de e^b .
 - b) En déduire le réel x tel que $e^x = \frac{e^a}{e^b}$.
 - c) En prenant $a = b$ dans l'égalité (1), exprimer e^{2a} en fonction de e^a . Généraliser le résultat à e^{na} pour n entier relatif, puis à e^{ra} pour r nombre rationnel.

Solution

1. a) On a $e^a = A \Leftrightarrow a = \ln A$ et $e^b = B \Leftrightarrow b = \ln B$.
D'où $a + b = \ln A + \ln B = \ln AB$.
1. b) $a + b = \ln AB \Leftrightarrow e^{a+b} = AB = e^a \times e^b$.
2. a) $e^{-b+b} = e^{-b} \times e^b \Leftrightarrow e^{-b} \times e^b = 1 \Leftrightarrow e^{-b} = \frac{1}{e^b}$.
2. b) $e^x = \frac{e^a}{e^b} = e^a \times e^{-b} = e^{a+(-b)} = e^{a-b}$.
D'où $e^x = e^{a-b} \Leftrightarrow \ln e^x = \ln e^{a-b} \Leftrightarrow x = a - b$. Donc $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
2. c) $e^{a+a} = e^a \times e^a \Leftrightarrow e^{2a} = (e^a)^2$ (2).

Par la suite pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln(e^{na}) = na = \underbrace{a + \dots + a}_{n \text{ fois}} = \underbrace{\ln(e^a) + \dots + \ln(e^a)}_{n \text{ fois}}$.

D'où $\ln(e^{na}) = \ln(\underbrace{e^a \times \dots \times e^a}_{n \text{ fois}}) = \ln((e^a)^n)$ (Par application successive de (1) et (2)).

Donc $e^{na} = (e^a)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Pour $m \in \mathbb{Z}_-$, $e^{ma} = e^{-m(-a)} = (e^{-a})^{-m} = \frac{1}{(e^{-a})^m} = \frac{1}{(\frac{1}{e^a})^m} = \frac{1}{\frac{1}{(e^a)^m}} = (e^a)^m$.

Pour $r \in \mathbb{Q}$, on pose $r = \frac{\alpha}{\beta}$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z}^*$.

D'où $e^{\frac{\alpha}{\beta}a} = \sqrt[\beta]{e^{\alpha a}} = \sqrt[\beta]{(e^a)^\alpha} = (e^a)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ (en supposant que $\beta > 0$).

D'où $e^{ra} = (e^a)^r$.

Propriété 0.1. Pour tous réels a et b , $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

0.2. Fonction Exponentielle :

Conséquence :

- Pour tout réel a , $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.
- Pour tous réels a et b , $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout réel a et pour tout rationnel r , $(e^a)^r = e^{ra}$.

Exemples : Écrire plus simplement $\frac{e^\pi}{e^{\sqrt{3}}}$, $e^{\ln 3 - \ln 7}$, $e^{-\ln 5}$, $(e^x)^3 \times e^{-3x}$.

Solution :

$$\frac{e^\pi}{e^{\sqrt{3}}} = e^{\pi - \sqrt{3}}. \quad e^{\ln 3 - \ln 7} = \frac{e^{\ln 3}}{e^{\ln 7}} = \frac{3}{7}. \quad e^{-\ln 5} = \frac{1}{e^{\ln 5}} = \frac{1}{5}.$$
$$(e^x)^3 \times e^{-3x} = e^{3x} \times e^{-3x} = e^{3x-3x} = e^0 = 1.$$

0.2.3 Représentation graphique :

Dans un repère orthonormé, les représentations graphiques des fonctions $\exp$ et $\ln$ se déduisent l'une de l'autre par symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$.

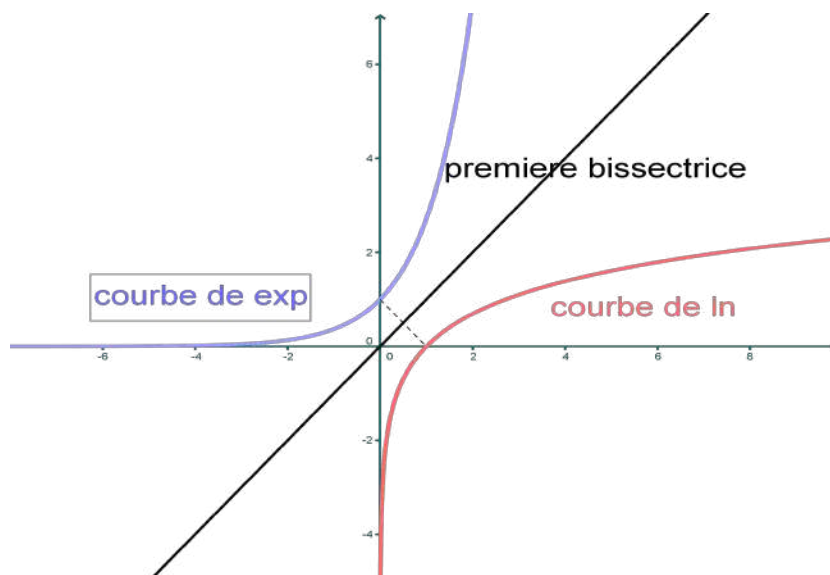


FIGURE 1 – Courbe représentative de la fonction exponentielle

Conséquence :

Il découle de la courbe représentative de $\exp$ qu'elle est strictement croissante, continue et donc bijective. Ainsi pour tout réels x et y on a :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y.$$
$$e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y.$$

0.2.4 Exercices d'application :

★ Résolution des équations :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$$e^{x^2+2} = e^{3x} \quad ; \quad e^{2x+1} = -3 \quad ; \quad 2e^{2x+2} - 7e^{x+1} + 3 = 0.$$

0.2. Fonction Exponentielle :

Solution :

- $e^{x^2+2} = e^{3x} \Leftrightarrow x^2 + 2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$.

D'où les solutions sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

$$\text{Donc } \boxed{S = \{2; 1\}}.$$

- $e^{2x+1} = -3 < 0$ (impossible car la fonction exponentielle est toujours positive).

$$\text{Donc } \boxed{S = \emptyset}.$$

- $2e^{2x+2} - 7e^{x+1} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2(x+1)} - 7e^{x+1} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2(e^{x+1})^2 - 7e^{x+1} + 3 = 0$. (I)

Effectuons le changement de variable $X = e^{x+1}$, D'où (I) devient $2X^2 - 7X + 3 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 49 - 4(2)(3) = 25$, d'où les solutions de la dernière équation sont $X_1 = \frac{7+5}{4} = 3$ et $X_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Cas1 : } X = 3 \Rightarrow e^{x+1} = 3.$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \ln 3.$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \ln 3.$$

$$\text{Cas2 : } X = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{x+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \ln \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \ln \frac{1}{2} = -1 - \ln 2.$$

$$\text{Donc } \boxed{S = \{-1 + \ln 3; -1 - \ln 2\}}.$$

★ Résolution d'inéquations :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$$e^{x+2} < 2, \quad e^{5x+2} > -3, \quad e^{2x} - 5e^x - 6 \geq 0.$$

Solution :

- $e^{x+2} < 2 \Leftrightarrow e^{x+2} < e^{\ln 2} \Leftrightarrow x + 2 < \ln 2 \Leftrightarrow x < -2 + \ln 2$.

$$\text{Donc } \boxed{S =]-\infty; -2 + \ln 2[}.$$

- $e^{5x+2} > -3 \Rightarrow e^{5x+2} > 0 > -3$. Cette inégalité est toujours vraie car la fonction exponentielle est toujours positive quelque soit la valeur de x .

$$\text{Donc } \boxed{S = \mathbb{R}}.$$

0.2. Fonction Exponentielle :

- Pour la résolution de l'inéquation $e^{2x} - 5e^x - 6 \geq 0$, Il est nécessaire de poser $X = e^x$ et on obtient alors $X^2 - 5X - 6 \geq 0$.

Le discriminant du polynôme associée à cette inéquation est

$$\Delta = 25 - 4(-6) = 25 + 24 = 49.$$

D'où ses racines sont $X_1 = 6$ et $X_2 = -1$.

Donc l'inéquation s'écrit encore $(X - 6)(X + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (e^x - 6)(e^x + 1) \geq 0$.

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\ln 6$	$+\infty$
$e^x - 6$	-	0	+
$e^x + 1$	+		+
$e^{2x} - 5e^x - 6$	-	0	+

$$\text{Donc } S = [\ln 6; +\infty[.$$

0.2.5 Dérivées :

★ Dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$:

Théorème 0.1. La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa dérivée. C'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$.

★ Dérivée de la fonction $x \mapsto \exp \circ u(x)$ où u est une fonction de x :

Activité 0.4

- **Objectif :** Méthode Déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto \exp \circ u(x)$.
- **Modalité :** A faire individuellement par les élèves en 5 minutes sur la surveillance de l'enseignant.

Énoncé : Soit la fonction $f = \exp \circ u$.

1. Vérifier que $f' = u' \times (\exp' \circ u)$.
2. Dédire que $f' = u' \times (\exp \circ u)$.

Solution : A faire par les élèves.

Théorème 0.2. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et : $(e^u)' = u'e^u$.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = x^2 - x$, alors $u'(x) = 2x - 1$ et $f(x) = e^{u(x)}$.

D'où pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x - 1)e^{x^2-x}$.

0.2. Fonction Exponentielle :

0.2.6 Primitive

Activité 0.5

- **Objectif :** **Introductif** Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.
- **Modalité :** A faire individuellement par les élèves en 5 minutes sur la surveillance de l'enseignant.

Énoncé : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2+1}$. On pose $u(x) = x^2 + 1$.

1. Écrire $f(x)$ sous la forme $ku'(x)e^{u(x)}$ $k \in \mathbb{R}$.
2. D'après le paragraphe I.2, comment est définie la fonction dont la dérivée est f .
3. En déduire une primitive de f .

Solution :

1. Puisque $u'(x) = 2x$, on a $f(x) = \frac{1}{2}(2x)e^{x^2+1} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$.
2. En interprétant la formule de la dérivée on peut définir une fonction g par $g(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = \frac{1}{2}e^{x^2+1}$, de sorte que sa dérivée soit f .
3. Une primitive de f est g définie ci dessus.

Théorème 0.3. Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I . La fonction f définie sur I par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives sur I et ces primitives F sont définies par $F(x) = e^{u(x)} + k$ $k \in \mathbb{R}$.

0.2.7 Limites :

★ Limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto e^x$:

Soit M un réel strictement positif donné, arbitrairement grand. Nous savons que $e^x > M$ si et seulement si $x > \ln M$. Donc, pour des grandes valeurs de x (Plus précisément $x > \ln M$) les valeurs de e^x dépassent M .

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Conséquence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

★ Limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto e^x$:

Activité 0.6

- **Objectif :** **Méthode** Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto e^x$.
- **Modalité :** A faire individuellement par les élèves en 5 minutes sur la surveillance de l'enseignant.

0.2. Fonction Exponentielle :

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{e^x}$ et $g(x) = -x$.

1. Vérifier que $\exp = f \circ g$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. En déduire la limite en $-\infty$ de $\exp$.

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{e^{-x}} = e^x$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
3. D'après la formule de calcul de la limite de la composée de deux fonctions on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x) = 0, \text{ d'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0}.$$

Conséquence :

La droite d'équation $y = 0$, à savoir l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction $\exp$.

★ **Limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto xe^x$:**

On a $\forall x \in \mathbb{R}, xe^x = e^x \times \ln e^x$. Posons $X = e^x$, or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$.
d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0}$.

★ **Limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$:**

Activité 0.7

- **Objectif :** Méthode Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$.
- **Modalité :** A faire individuellement par les élèves en 5 minutes sur la surveillance de l'enseignant.

1. Calculer si possible $\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x}$.
2. Si non, poser $X = e^x$ et montrer que $\frac{e^x}{x} = \frac{X}{\ln X}$.
3. Calculer $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{\ln X}$.
4. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

★ **Limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$:**

Activité 0.8

- **Objectif :** Méthode Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$.

0.2. Fonction Exponentielle :

- **Modalité :** A faire individuellement par les élèves en 5 minutes sur la surveillance de l'enseignant.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$.

1. Sachant que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$.
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Solution : A faire par les élèves.

Théorème 0.4. (Limites de référence :)

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$
$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

★Exemples d'utilisation de transformation d'écriture pour se ramener à une limite de référence :

Calculons les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x), \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 5x)e^x, \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Solution :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = +\infty(-\infty) = -\infty.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x-1} = +\infty(1) = +\infty.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 5x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7e^x - 5xe^x = 0 - 0 = 0.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

$$\text{Posons } X = e^{2x} \text{ or } \lim_{x \rightarrow -\infty} X = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X - 1}{X + 1} = -1, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1.$$

★Exercices d'application :

Exercice 1 : Étudier et représenter graphiquement la fonction g définie par

$$g(x) = (3 - x)e^x.$$

Solution :

* **Domaine de définition :** $D_g = \mathbb{R}$.

* **Limites de g aux bornes de son domaine :**

En faisant le produit des limites en $+\infty$ des facteurs de $g(x)$ on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

L'approche précédente nous conduit en $-\infty$ à une indétermination du type $\infty \times 0$. Pour lever

0.2. Fonction Exponentielle :

cette indétermination on procède la manière suivante :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - xe^x) = 0 - 0 = 0.$$

* **Dérivée et sens de variation :** La fonction g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et on a $g'(x) = -e^x + (3 - x)e^x = (2 - x)e^x$.

Remarquant que $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, g est décroissante pour $2 - x \leq 0$ et croissante pour $2 - x \geq 0$.

On en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	e^2	$-\infty$

* **Étude des branches infinies :**

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, on calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{x} e^x = -\infty$.

Donc la courbe de g admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

D'autre part, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, il s'en suit que la courbe de g admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

* **Courbe représentative de g :**

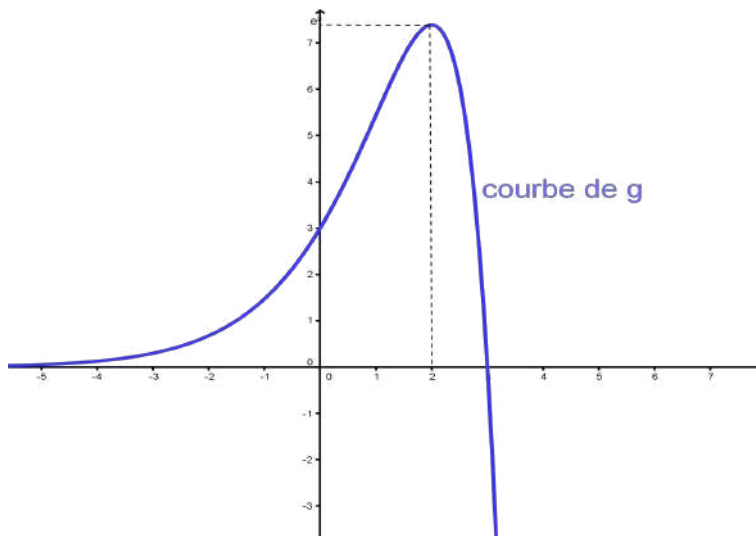


FIGURE 2 – Courbe représentative de la fonction g

Exercice 2 : Étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
 $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$.

Solution :

* **Domaine de définition :**

Soit x un nombre réel, $x \in D_f \iff x + 1 + e^{-x} > 0$.

Or nous ne savons pas résoudre algébriquement l'inéquation (I) : $x + 1 + e^{-x} > 0$, plutôt étu-

0.2. Fonction Exponentielle :

dions le sens de variation de la fonction u de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $u(x) = x + 1 + e^{-x}$, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 1 - e^{-x}$. Le signe de $1 - e^{-x}$ est donné par la résolution de l'inéquation $1 - e^{-x} \geq 0$. Ce qui équivaut à $e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$\searrow$ 2 $\nearrow$		

Le tableau de variation de u montre que $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$. Par conséquent $D_f = \mathbb{R}$.

* Décomposition de f :

La fonction f est la composée de u suivie de $\ln$: $f = \ln \circ u$.

* Limites de f :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty; \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Pour le calcul de la limite en $-\infty$ de u , la somme des limites donne la forme indéterminée $+\infty - \infty$. Ramenons nous à une limite de référence par une transformation d'écriture.

On a $u(x) = x + 1 + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x + e^x + 1}{e^x}$, d'où

$$\ln(u(x)) = \ln(xe^x + e^x + 1) - \ln e^x = -x + \ln(xe^x + e^x + 1). \quad (2)$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + e^x + 1) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

* Dérivée et tableau de variation :

u étant une fonction strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f égale à $\ln \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, f' est donc du signe de u' .

On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $\ln 2$ $\nearrow$		$+\infty$

* Étude de la branche infinie en $-\infty$:

L'écriture (2) montre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$, d'où la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet en $-\infty$ une asymptote oblique, la droite (D) d'équation $y = -x$.

* Étude de la branche infinie en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \times \ln(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OI) .

0.2. Fonction Exponentielle :

* Position relative de $\mathcal{C}_f$ et (D) :

Soit $x \in \mathbb{R}$, $(f(x) - (-x)) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(xe^x + e^x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x + 1 \geq 1$.

Ce qui équivaut à $(x+1)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Par conséquent, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (D) pour $x > -1$, et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (D) pour $x < -1$.

* Courbe représentative de f :

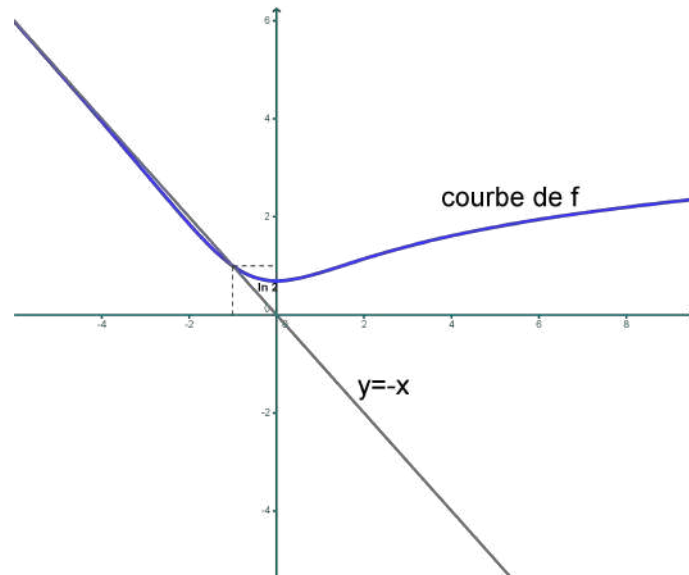


FIGURE 3 – Courbe représentative de la fonction f

0.2.8 Puissance d'un réel positif : a^α , $a > 0$:

Définition 0.1. Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel α , nous savons que $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$. Nous en déduisons que $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$.

Ce qui nous conduit au théorème suivant :

Théorème 0.5. Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel α , on a $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$ et on lit « a exposant α ».

Exemples : $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x = e^{x \ln 2}$ et $\forall x > 0, x^{-0.7} = e^{-0.7 \ln x}$.

Théorème 0.6. Pour tous réels x et y , on a :

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x \times a^y, & (a^x)^y &= a^{xy}, & (ab)^x &= a^x \times b^x. \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, & a^0 &= 1, & a^1 &= a. \end{aligned}$$

0.2. Fonction Exponentielle :

★ Utilisation dans la résolution des équations et inéquations dans $\mathbb{R}$:

- L'équation $3^x = 4$ est équivalente à $e^{x \ln 3} = 4$. D'où $e^{x \ln 3} = e^{\ln 4}$; la fonction $\exp$ étant bijective, $x \ln 3 = \ln 4$. Donc cette équation admet pour unique solution $x = \frac{\ln 4}{\ln 3}$.
- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E) \quad 3 \times 49^x + 5 \times 7^x - 2 = 0$.

Nous pouvons nous ramener à la résolution d'une équation du second degré à l'aide d'une inconnue auxiliaire. L'ensemble de validité de (E) étant $\mathbb{R}$, l'équation (E) peut s'écrire $(E) : 3 \times (7^x)^2 + 5 \times 7^x - 2 = 0$; en posant l'inconnue auxiliaire $X = 7^x$, (E) devient $(E') : 3X^2 + 5X - 2 = 0$. La résolution de (E') donne $X = -2$ ou $X = \frac{1}{3}$. Deux cas se posent :

$$(1) \quad 7^x = -2 \Leftrightarrow e^{x \ln 7} = -2 < 0 \quad (2) \text{ Aussi}$$

0. Cette équation est impossible, d'où elle n'a pas de solution.

$$\begin{aligned} 7^x = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow e^{x \ln 7} = e^{\ln \frac{1}{3}} \\ &\Leftrightarrow x \ln 7 = \ln \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\ln 3}{\ln 7}. \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{\ln 3}{\ln 7} \right\}$$

- L'inéquation $0,8^x < 2$ est équivalente à $e^{x \ln 0,8} < 2 = e^{\ln 2}$. La fonction $\exp$ étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$ on en déduit que $x \ln 0,8 < \ln 2$. Or $\ln 0,8 < 0$, d'où $x > \frac{\ln 2}{\ln 0,8}$. $S =]\frac{\ln 2}{\ln 0,8}; +\infty[$.

0.2.9 Fonction exponentielle de base a :

Définition 0.2. Pour tout réel a strictement positif et différent de 1, la fonction

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a^x = e^{x \ln a} \end{aligned}$$

est appelée fonction exponentielle de base a .

Remarque : Nous supposons dans la suite que $a > 0$ et $a \neq 1$, car si $a = 1$ alors $\exp_1$ est la fonction constante $x \mapsto 1$.

★ Étude de la fonction $x \mapsto a^x$:

- **Domaine de définition :** $\exp_a(x)$ existe pour tout réel x . Donc $D_{\exp_a} = \mathbb{R}$.
- **Limites aux bornes du domaine de définition :**

Si g_a désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_a(x) = x \ln a$, alors on peut écrire

0.2. Fonction Exponentielle :

$\exp_a = \exp \circ g_a$. En appliquant le théorème sur le calcul des limites des fonctions composées vue dans le chapitre «Limites et Continuité» on établit les résultats suivants en fonction de a .

$a > 1$	$0 < a < 1$
Limite en $-\infty$	
Puisque $\ln a > 0$, il s'en suit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = -\infty$ et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0$.	Puisque $\ln a < 0$, il s'en suit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = +\infty$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = +\infty$.
Limite en $+\infty$	
Puisque $\ln a > 0$, il s'en suit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = +\infty$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = +\infty$.	Puisque $\ln a < 0$, il s'en suit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = -\infty$ et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = 0$.

• Comportement asymptotique :

$a > 1$	$0 < a < 1$
Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0$, alors $\exp_a$ admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).	Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = +\infty$, on calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp_a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln a}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln a}}{e^{x \ln a}} \ln a = -\infty$ d'où $\exp_a$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = +\infty$, on calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp_a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln a}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln a}}{e^{x \ln a}} \ln a = +\infty$ car $\ln a > 0$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ avec $X = x \ln a$, d'où $\exp_a$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.	Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = 0$, alors $\exp_a$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

• Dérivée et sens de variation :

Pour tout réel x , on a $(\exp_a(x))' = (x \ln a)' e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \ln a$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
puisque $\ln a > 0$ et $e^{x \ln a} > 0$, on a $(\exp_a(x))' > 0$. D'où $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	Puisque $\ln a < 0$ et $e^{x \ln a} > 0$, on a $(\exp_a(x))' < 0$, d'où $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

0.2. Fonction Exponentielle :

• Tableau de variation :

$a > 1$			$0 < a < 1$		
x	$-\infty$	$+\infty$	x	$-\infty$	$+\infty$
$(exp_a)'(x)$	+		$(exp_a)'(x)$	-	
$exp_a(x)$	0	$+\infty$	$exp_a(x)$	$+\infty$	0
		$\nearrow$		$\searrow$	

• Courbes représentatives :

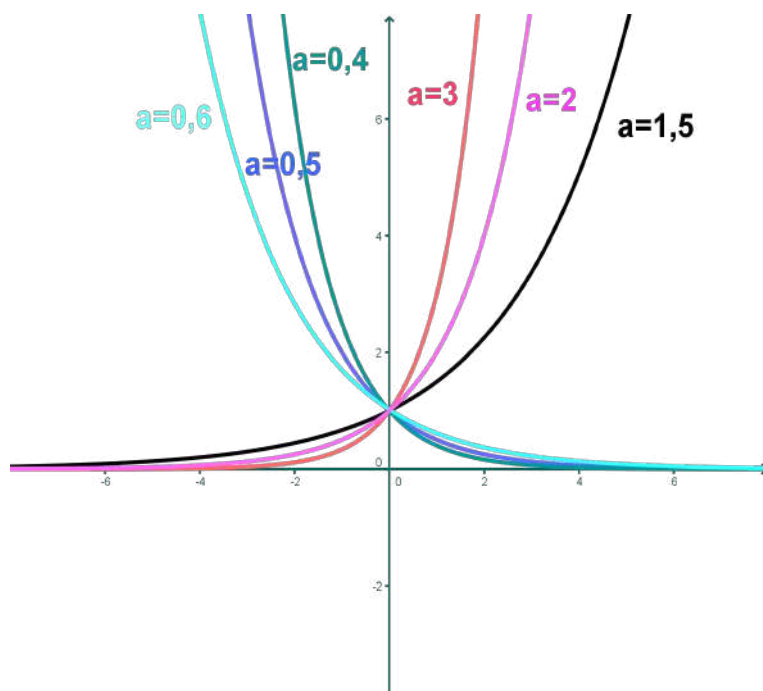


FIGURE 4 – Courbe representative des fonctions exponentielles de base a

★ Exercice d'application :

Étudier et représenter la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x3^{-x}$.

Solution :

* Domaine de définition :

On a $f(x) = x3^{-x} = \frac{x}{3^x}$, puisque $\forall x \in \mathbb{R}, 3^x > 0$. D'où $D_f = \mathbb{R}$.

* Limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x \ln 3} = (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 3} \times \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}}. \text{ Posons } X = x \ln 3, \text{ d'où } \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}} = \frac{X}{e^X} = \frac{1}{\frac{e^X}{X}}.$$

0.2. Fonction Exponentielle :

Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

* Dérivée et tableau de variation :

f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (xe^{-x \ln 3})' = e^{-x \ln 3} - xe^{-x \ln 3} \ln 3 = (1 - x \ln 3)e^{-x \ln 3}.$$

Or, $1 - x \ln 3 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\ln 3}$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $\frac{1}{\ln 3}$ $\searrow$	0

* Étude des branches infinies et tangentes

La courbe de f admet au point O une tangente de coefficient directeur 1, c'est la droite (Δ) d'équation $y = x$, et elle admet en $+\infty$ une asymptote horizontale qui est la droite (OI).

D'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x \ln 3} = +\infty$.

D'où la courbe de f admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

* Courbe représentative :

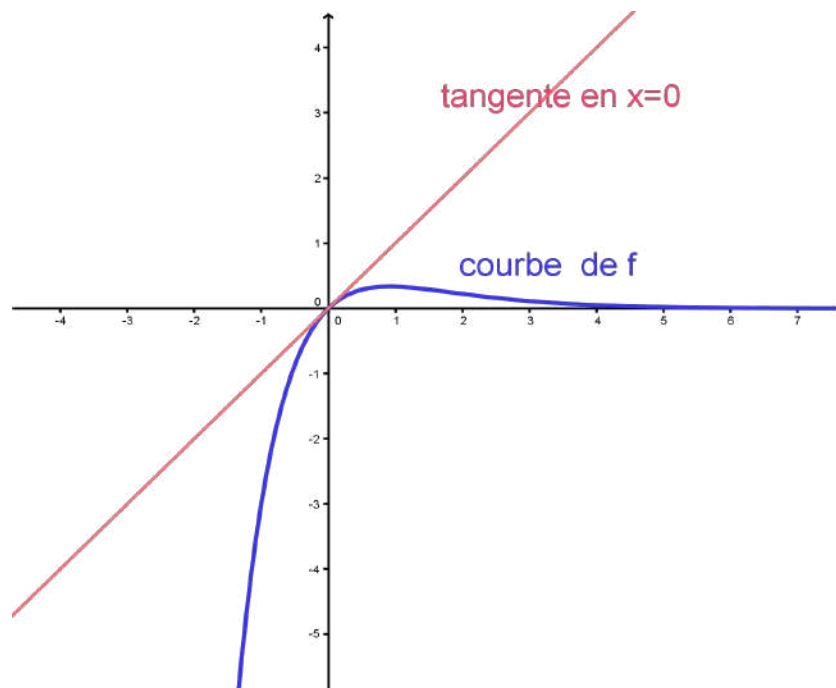


FIGURE 5 – Courbe représentative de la fonction f

0.3 Fonction puissance :

0.3.1 Définition et propriétés :

Définition 0.3. α étant un nombre réel différent de 0, on appelle fonction puissance d'exposant réel α l'application $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Remarques :

$$R_1 : \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x \Leftrightarrow e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x} \Leftrightarrow x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

R_2 : La fonction puissance 1 est la fonction identique.

R_3 : Pour tout $x > 0$, $x^\alpha > 0$.

Exemple : $x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln x}$.

Propriété 0.2. Pour tout réel strictement positif x , pour tous réels α et β , on a
 $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$; $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta}$.

0.3.2 Étude de la fonction $x \mapsto x^\alpha$:

On pose $f(x) = e^{\alpha \ln x}$.

• **Domaine de définition :** $D_f =]0; +\infty[$.

• **Limites :**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

• **Dérivée et sens de variation :**

$$f'(x) = (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x}. \text{ D'où } \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ f'(x) < 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Donc f est strictement croissante pour $\alpha > 0$ et f est strictement décroissante pour $\alpha < 0$.

• **Tableaux de variation :**

$\alpha > 0$	$\alpha < 0$																					
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td> $\nearrow$ </td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td></tr></table>	x	0	$+\infty$	$f'(x)$	+		$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$		0		<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td> $+\infty$ $\searrow$ </td><td>0</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	$f'(x)$	-		$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0
x	0	$+\infty$																				
$f'(x)$	+																					
$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$																				
	0																					
x	0	$+\infty$																				
$f'(x)$	-																					
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0																				

0.3. Fonction puissance :

• Branches infinies :

*Pour $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-1)\ln x} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Donc si $0 < \alpha < 1$, la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses. Et si $\alpha > 1$, la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

* Pour $\alpha < 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

• Courbes représentatives :

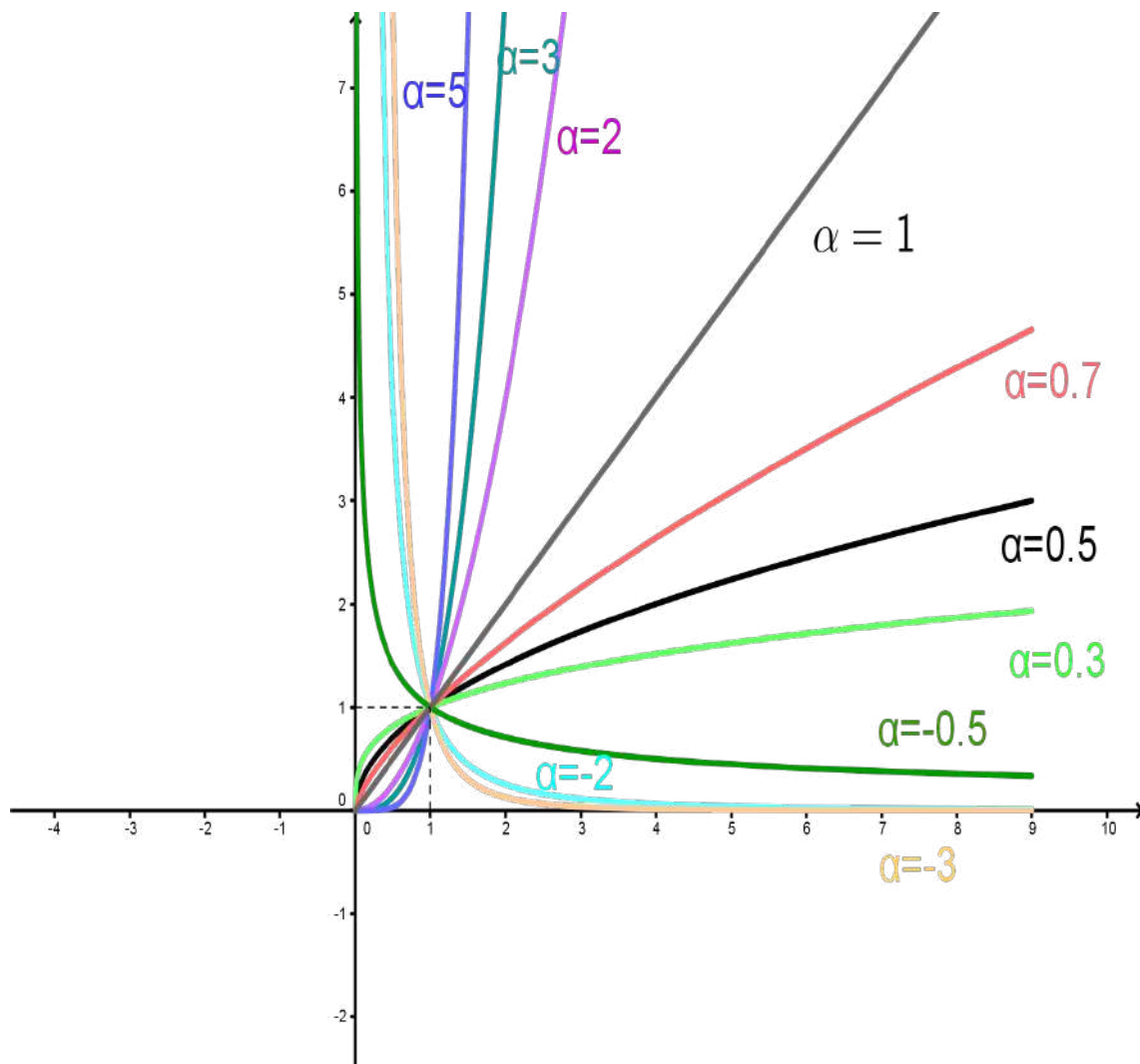


FIGURE 6 – Courbe representative des fonctions puissances

0.4. Comparaison des croissances des fonctions logarithme népérienne, exponentielle et puissance :

0.4 Comparaison des croissances des fonctions logarithme népérienne, exponentielle et puissance :

Soit la représentation suivante des fonctions logarithme népérienne, exponentielle et puissance d'exposant r ($r > 0$) restreintes sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

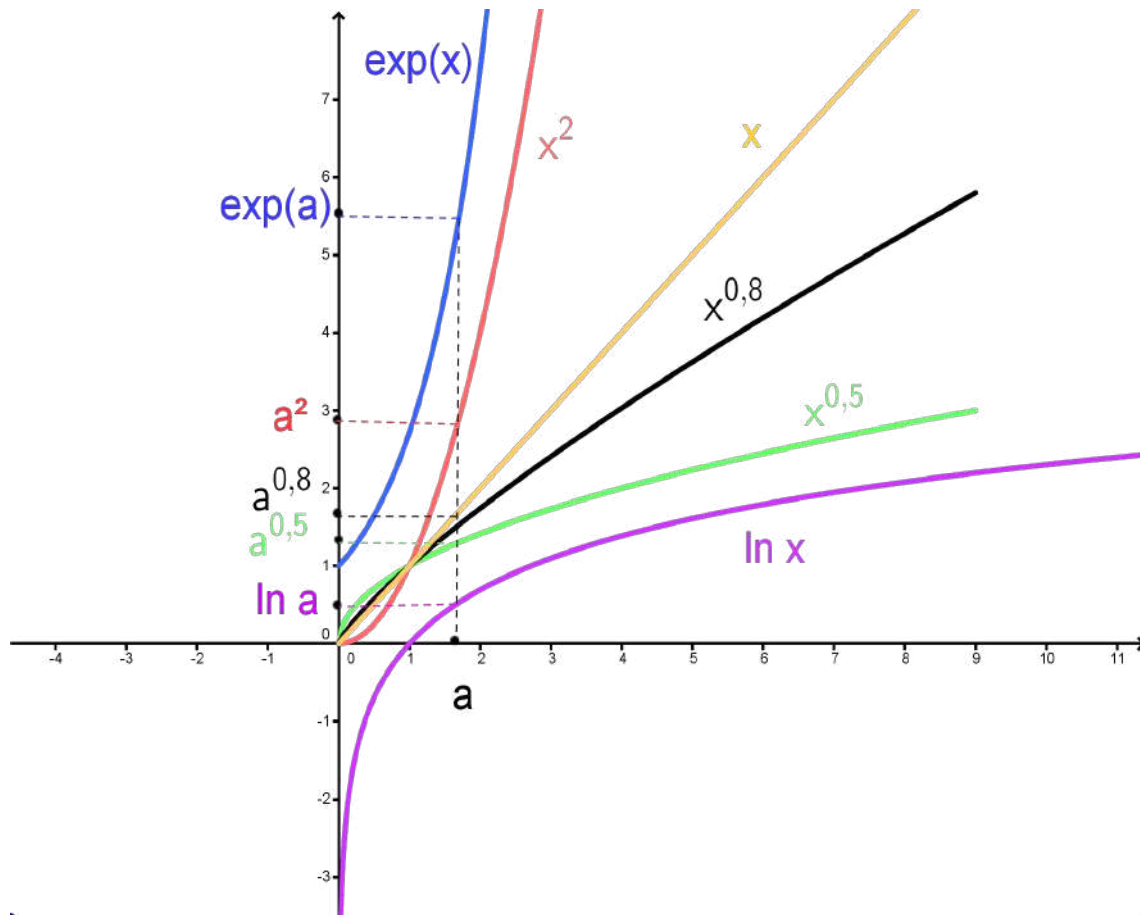


FIGURE 7 – Courbe representative des croissances comparées

Il ressort de ce graphe que les fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^r$, $r > 0$ sont toutes croissantes sur $[0, +\infty[$.

Pour $a > 0$, on a $\ln a < a^r < e^a$. D'où le théorème suivant :

Théorème 0.7. La croissance de la fonction exponentielle est plus rapide que celle des fonctions puissances d'exposant positif, qui à leur tour ont une croissance plus rapide que celle de la fonction logarithme népérienne.

Le théorème précédent justifie graphiquement les propriétés suivantes sur les limites.

0.4. Comparaison des croissances des fonctions logarithme népérienne, exponentielle et puissance :

0.4.1 Logarithme et puissance :

Activité 0.9

- **Objectif :** Méthode Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \ln x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \ln x$.
- **Modalité :** A faire individuellement par les élèves en 5 minutes sur la surveillance de l'enseignant.

1. Justifier que pour tout réel positif α , $\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$ et $x^\alpha \ln x = \frac{1}{\alpha} [x^\alpha \ln(x^\alpha)]$.
2. En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$; $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \ln x$.

Propriété 0.3. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

0.4.2 Exponentielle et puissance :

Activité 0.10

- **Objectif :** Méthode Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x$.
- **Modalité :** A faire individuellement par les élèves en 5 minutes sur la surveillance de l'enseignant.

1. Justifier que pour tout réel positif α , on a : $\ln\left(\frac{e^x}{x^\alpha}\right) = x\left(1 - \alpha \frac{\ln x}{x}\right)$
et $x^\alpha e^x = \frac{(-1)^\alpha}{\left(\frac{e^{-x}}{(-x)^\alpha}\right)}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x$.

Propriété 0.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$.

0.4.3 Exponentielle et logarithme

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x \ln x = -\infty$ s'obtiennent directement sans aucune forme d'indétermination, cela ne fera l'objet d'aucune étude.

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 e^{-x \ln 3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x = 0.$$

0.5 Exercices dans les domaines d'utilisation

Exercice 0.5.1 : Détermination de la température d'un corps en fonction du temps par la méthode de Newton.[4]

Un corps dont la température initiale θ_0 est 30°C est placée dans une ambiance dont la température T est constante. La température de ce corps est une fonction du temps $\theta : t \mapsto \theta(t)$.

D'après Newton, la dérivée de θ est proportionnelle à la différence entre la température ambiante et la température du corps. On a donc $\frac{d\theta}{dt} = k[T - \theta(t)]$ où k est le coefficient de proportionnalité fixé par la nature, la forme, la taille,...du corps.

On prend $k = 0,1$ et $\theta_0 = 30^\circ\text{C}$, la température pour $t = 0$. Le temps est exprimé en minutes ; les températures en degré celcius.

1. Sachant que $\frac{d\theta}{dt} = \theta'(t)$, exprimer la loi $\frac{d\theta}{dt} = k[T - \theta(t)]$ de Newton à l'aide d'une équation liant θ et θ' en précisant les conditions initiales.
2. Dans cette section, T la température ambiante est 100°C .
 - a) Montrer que θ définie par $\theta(t) = -70e^{-0,1t} + 100$ est la solution de cette équation vérifiant $\theta(0) = 30$.
 - b) Calculer la limite de θ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.
3. Représenter les courbes d'évolution de la température en fonction du temps pour $T = 100^\circ\text{C}$, $T = 30^\circ\text{C}$ et $T = -10^\circ\text{C}$.

Solution :

1. Expression de la loi de Newton en équation liant θ et θ' .
$$\frac{d\theta}{dt} = k[T - \theta(t)] \Leftrightarrow \theta'(t) = kT - k\theta(t) \Leftrightarrow \theta'(t) + k\theta(t) = kT.$$
Donc on obtient l'équation (E) suivante : $\theta'(t) + 0,1\theta(t) = 0,1T$ avec $\theta(0) = 30^\circ\text{C}$.
2. $T = 100^\circ\text{C}$.
 - a) Montrons que θ est solution.
On a $\theta'(t) = 7e^{-0,1t}$.
D'où $\theta'(t) + 0,1\theta(t) = 7e^{-0,1t} + 0,1(-70e^{-0,1t} + 100) = 7e^{-0,1t} - 7e^{-0,1t} + 10 = 10$.
D'autre part, $\theta(0) = -70 + 100 = 30$.
 - b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 100$.

Interprétation : A long terme, le corps prendra la température du milieu ambiant.
3. Courbe d'évolution de la température en fonction du temps.

0.5. Exercices dans les domaines d'utilisation

a) Étude de θ pour $T = 100^\circ C$.

Domaine : $D_\theta = \mathbb{R}$.

Limites : $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = 30$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 100$.

Dérivée : $\theta'(t) = 7e^{-0,1t} > 0$.

Sens de variation : θ est strictement croissante sur son domaine.

Tableau de variation :

t	$-\infty$	$+\infty$
$\theta'(t)$	+	
$\theta(t)$	$-\infty$	100

courbe de θ :

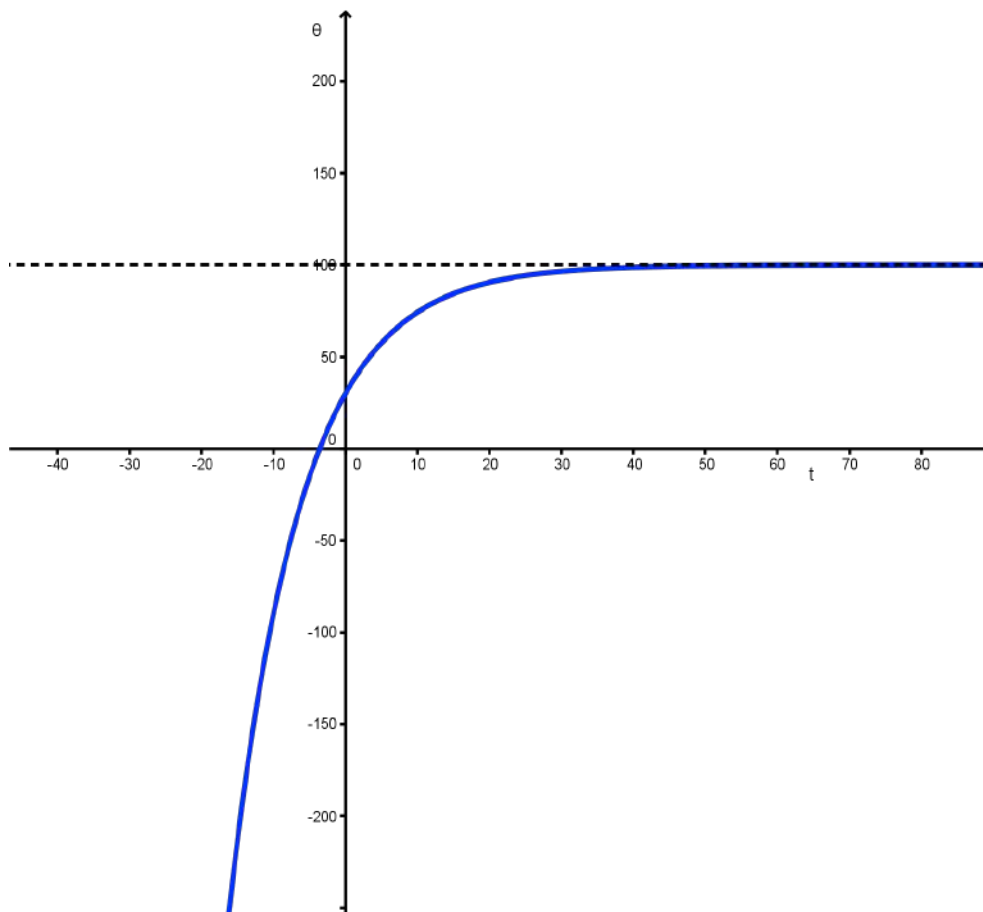


FIGURE 8 – Courbe representative de l'évolution de la température d'un corps pour $T = 100^\circ C$

b) Étude de θ pour $T = 30^\circ C$.

Dans ce cas, (E) devient $\theta'(t) + 0,1\theta(t) = 3$.

On constate que θ défini par $\theta(t) = 30$ est la solution de (E) vérifiant $\theta(0) = 30$.

0.5. Exercices dans les domaines d'utilisation

Tableau de variation

t	$-\infty$	$+\infty$
$\theta(t)$	30	30

courbe de θ

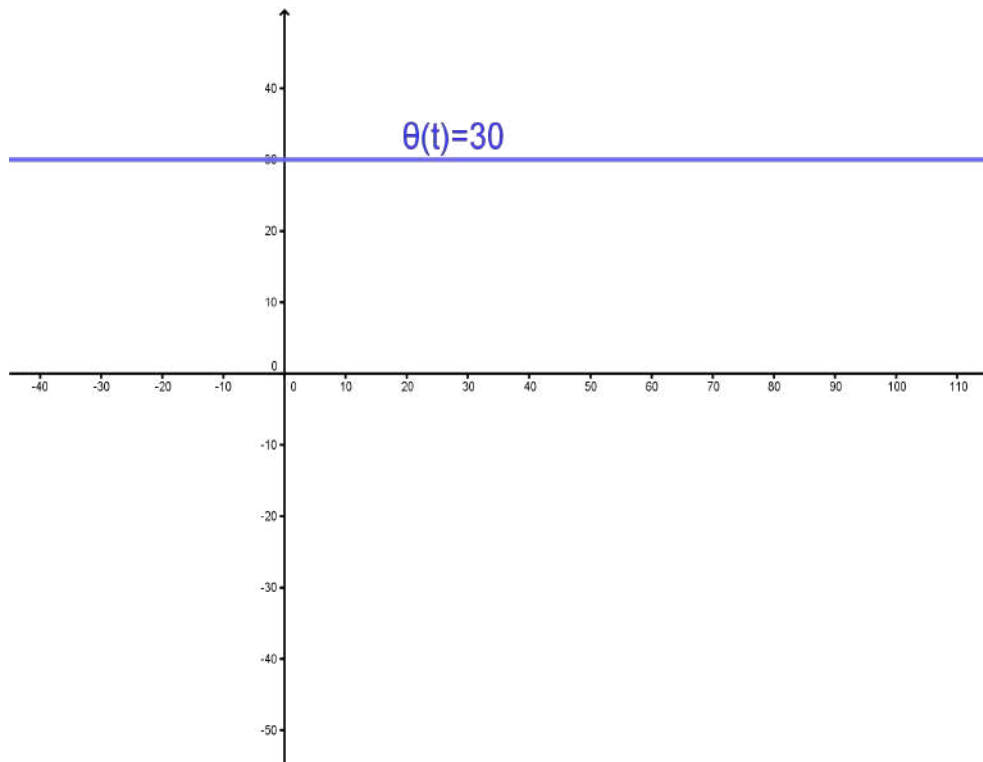


FIGURE 9 – Courbe representative de l'évolution de la température d'un corps pour $T = 30^\circ C$

c) Étude de θ pour $T = -10^\circ C$.

Dans ce cas, (E) devient $\theta'(t) + 0,1\theta(t) = -1$.

On montre aussi que θ définit par $\theta(t) = 40e^{-0,1t} - 10$ est la solution de (E) vérifiant $\theta(0) = 30$.

Nous récapitulons cette étude dans le tableau suivant :

Domaine	$D_\theta = \mathbf{R}$.
Limites	$\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -10$.
Dérivée	$\theta'(t) = -4e^{-0,1t} - 10 < 0$.
Sens de variation	θ est strictement décroissante sur son domaine.
Branches infinies	$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\theta(t)}{t} = -\infty$, donc, la courbe admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. D'autre part la droite d'équation $y = -10$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Tableau de variation

t	$-\infty$	$+\infty$
$\theta'(t)$	-	
$\theta(t)$	$+\infty$	-10

courbe de θ

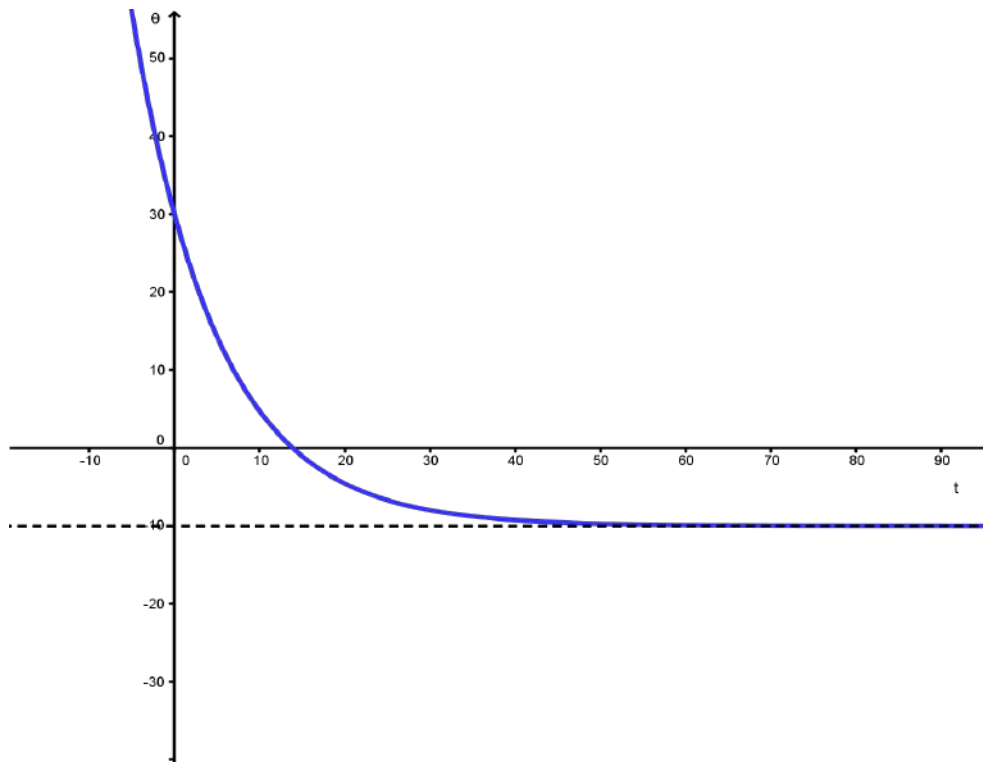


FIGURE 10 – Courbe representative de l'évolution de la température pour $T = -10^\circ\text{C}$

Exercice 0.5.2 : Détermination de la surface de la peau d'un animal.[4]

Il n'est pas commode de mesurer la surface de la peau d'un animal. Il est souvent beaucoup plus facile de mesurer le poids de cet animal. **Kibler , Brody et Worstell(1947)** proposent d'évaluer chez le cobaye la surface A (en cm^2) de la peau connaissant le poids p (en gramme) de l'animal par $A(p) = 9,85p^{0,64}$.

1. Étudier et représenter la fonction $p \mapsto A(p)$.
2. Interpréter le résultat.

Solution :

1. Étude de la fonction $p \mapsto A(p)$.

Domaine	$D_A =]0; +\infty[$.
Limites	En remarquant que $A(p) = 9,85e^{0,6 \ln p}$, on a $\lim_{p \rightarrow 0} A(p) = 0$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} A(p) = +\infty$.
Branches infinies	Puisque $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{A(p)}{p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} 9,85 \frac{p^{0,64}}{p} = 0$, alors la courbe de p admet une branche parabolique de direction la droite (OI) en $+\infty$.
Dérivé	$A'(p) = \frac{9,85 \times 0,64}{p} e^{0,64p} > 0$.
Sens de variation	Donc A est strictement croissante sur son domaine.

Tableau de variation

t	0	$+\infty$
$\theta'(t)$	+	
$\theta(t)$	0	$+\infty$

Courbe de θ

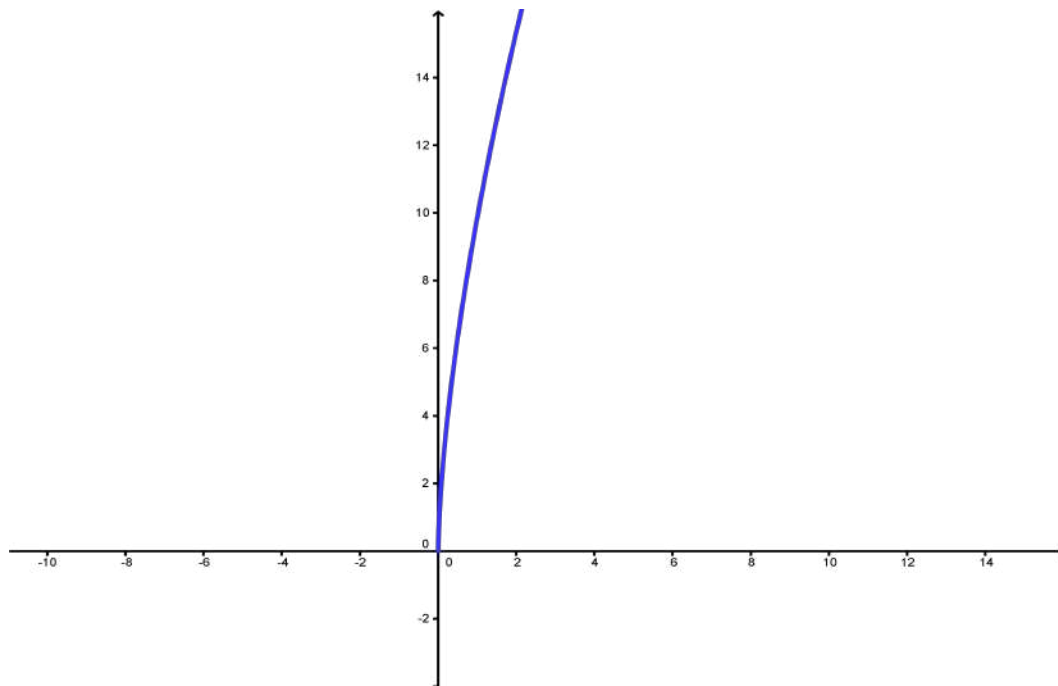


FIGURE 11 – Courbe representative de l'évolution de la surface de la peau d'un animal

0.6. Exercices d'application :

2. **Interprétation :** Plus le poids de l'animal est grand , plus la surface de sa peau l'est aussi.
Cette évolution est exponentielle.

Exercice 0.5.3 : Taille de la population des rongeurs(Ref :[4])

. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population , au temps t , est noté $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation (E) $\frac{y'}{y} = \frac{1}{4}$.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer l'expression de $g(t)$ sachant qu'à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
3. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

Solution :

1. En prenant la primitive des membres de (E) on obtient $\ln |y| = \frac{1}{4}t + c$, où c est un réel. Il s'en suit que $|y(t)| = e^{\frac{1}{4}t+c} = ke^{\frac{1}{4}t}$ où $k = e^c$. Donc $y(t) = ke^{\frac{1}{4}t}$ avec k réel.
2. Pour tout réel t , on a $g(t) = ke^{\frac{1}{4}t}$. Par suite, $g(0) = 1 \Leftrightarrow ke^0 = 1 \Leftrightarrow k = 1$.
La solution de (E) prenant la valeur 1 en 0 est la fonction $g : t \mapsto e^{\frac{1}{4}t}$.
3. Soit t un réel positif.
 $g(t) \geq 3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4}t} \geq 3$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{4}t \geq \ln 3$ (car la fonction exponentielle est croissante).
 $\Leftrightarrow t \geq 4 \ln 3$.
Or $4 \ln 3 = 4, 3\dots$ Donc la première valeur entière de t à partir de laquelle $g(t)$ est supérieur ou égal à 3 est 5 ans.

0.6 Exercices d'application :

Exercice 0.6.1

- **Objectif :** Montrer qu'une fonction remplissant les conditions ci-dessous est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérienne.
 - Toutes ses valeurs sont positives.
 - Elle est égale à sa dérivée.

0.6. Exercices d'application :

- Elle prend la valeur 1 en 0.
- **Modalité** : Travail de groupe en salle pendant 15 min de classe sous la surveillance de l'enseignant.

Énoncé : On considère l'équation $(E) : Y' = Y$. On admet qu'il existe une fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, soient g et h les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(f(x)) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = f(\ln x).$$

1. a) Montrer que $g'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
b) Dédire que $g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
2. a) Montrer que $h'(x) = \frac{h(x)}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
b) Dédire que $h(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Dédire de 1.b) et 2.b) que $f \circ \ln = Id_{\mathbb{R}_+^*}$ et $\ln \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.
4. Que représente f pour $\ln$?

Remarque : f est unique et est appelée fonction exponentielle notée $\exp$.

Solution : (L'enseignant supervise la correction proposée par les élèves.)

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$.
b) De ce qui précède on a $g(x) = x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. or $g(0) = \ln(f(0)) = \ln 1 = 0$, il s'en suit que $\lambda = 0$. Donc $g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
2. a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = \frac{1}{x} f'(\ln x) = \frac{1}{x} f(\ln x) = \frac{h(x)}{x}$. D'où h est la solution de l'équation $\frac{Y'}{Y} = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
b) Cette dernière égalité implique $\ln(|h(x)|) = \ln x + c, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+^*$ (Car lorsque deux fonctions sont égales alors elles ont même primitive à une constante près).
Or $\ln(|h(1)|) = \ln(|f(0)|) = \ln 1 = 0$, il s'en suit que $c = 0$.
Donc $\ln(|h(x)|) = \ln x \Leftrightarrow |h(x)| = h(x) = x \quad \text{car} \quad h(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. D'après 1.b), $g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. D'où $\ln(f(x)) = x$, car $|f(x)| = f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Donc $\ln \circ f = Id_{\mathbb{R}}$. De même d'après 2.b), $|h(x)| = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
D'où $|h(x)| = h(x) = x \quad \text{car} \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$. C'est-à-dire $f \circ \ln = Id_{\mathbb{R}_+^*}$.
4. De ce qui précède f est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. f est unique et noté $\exp$.

Commentaire : Cet exercice a permis à l'apprenant de consolider sa compréhension de la définition de la fonction exponentielle, en tant que bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ; qui est aussi l'unique solution de l'équation $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 0.6.2

• **Modalité :** Travail individuel des élèves pendant 15 minutes. [1]

1. Montrer que : $e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = (e^{2x} + 4e^x + 1)(e^{2x} - 4e^x + 1)$.
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$.
3. On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{8}{1+e^{2x}}$.
 - a) Calculer $f'(x)$.
 - b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - c) Dresser le tableau de variation de f .
 - d) Montrer que la courbe (C) de f admet deux asymptotes obliques que l'on déterminera.
 - e) Construire la courbe (C) et ses deux asymptotes dans un repère orthonormé.
4. a) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = x + \frac{8e^{2x}}{1+e^{-2x}}$.
5. b) En déduire la primitive F de f qui s'annule en 0.

Solution : (L'enseignant supervise la correction proposée par les élèves.)

1. On a, $(e^{2x} + 4e^x + 1)(e^{2x} - 4e^x + 1) = e^{4x} - 4e^{3x} + e^{2x} + 4e^{3x} - 16e^{2x} + 4e^x + e^{2x} - 4e^x + 1 = e^{4x} - 14e^{2x} + 1$.
2. $e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{2x} + 4e^x + 1)(e^{2x} - 4e^x + 1) = 0$.
 D'où $e^{2x} + 4e^x + 1 = 0$ ou $e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$.
 Or $e^{2x} + 4e^x + 1 > 0$ pour tout réel x , donc le cas $e^{2x} + 4e^x + 1 = 0$ est impossible.
 Pour le cas $e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$, on pose $X = e^x$ et on obtient le polynôme
 $X^2 - 4X + 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 12$.
 D'où $X = e^x = \frac{4+\sqrt{12}}{2} > 0$ ou $X = \frac{4-\sqrt{12}}{2} > 0$.
 Il s'en suit que $x = \ln(2 + \sqrt{3})$ ou $x = \ln(2 - \sqrt{3})$.
 $S = \{\ln(2 + \sqrt{3}); \ln(2 - \sqrt{3})\}$.

3. $f(x) = x + \frac{8}{1+e^{2x}}$.

a) **Dérivée :**

$$f'(x) = 1 + \frac{-16e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{1+e^{4x}+2e^{2x}-16e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{4x}-14e^{2x}+1}{(1+e^{2x})^2}.$$

b) **Limites :**

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty + \frac{8}{1+0} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

0.6. Exercices d'application :

c) Tableau de Variation :

Le signe de $f'(x)$ dépend seulement de celui de $e^{4x} - 14e^{2x} + 1$.

$$e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = (e^{2x} + 4e^x + 1)(e^{2x} - 4e^x + 1).$$

x	$-\infty$	$\ln(2-\sqrt{3})$	$\ln(2+\sqrt{3})$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		$6, 15$		$1, 84$	

d) Montrons que f admet deux asymptotes obliques que l'on déterminera.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{1 + e^{2x}} = 0$. D'où la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{8}{x(1 + e^{2x})}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{1 + e^{2x}} = 8$.
D'où la droite d'équation $y = x + 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.

e) Courbe représentative de f :

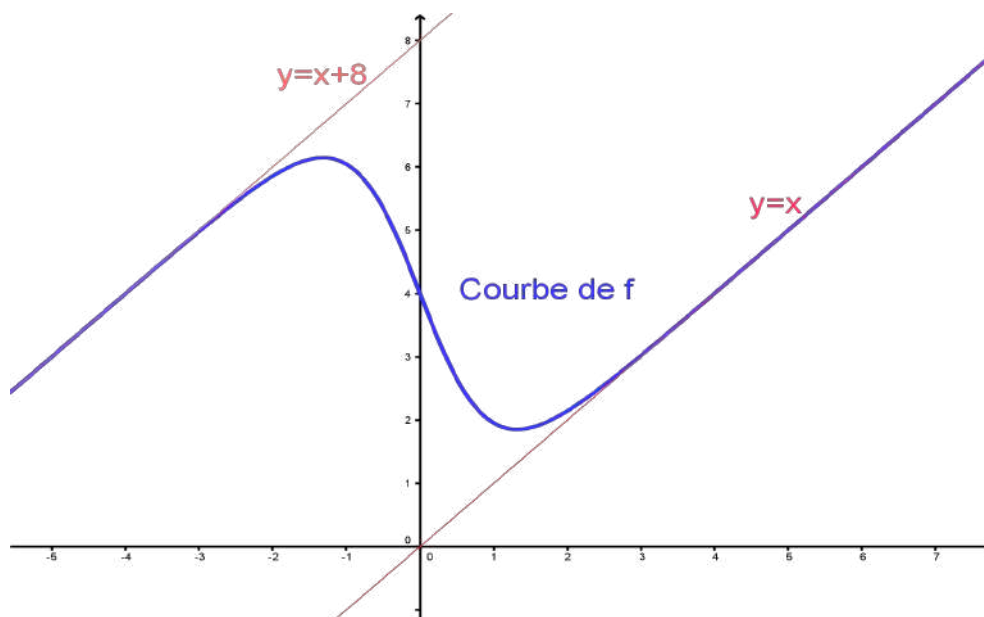


FIGURE 12 – Courbe représentative de la fonction f

f) $x + \frac{8e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = x + \frac{\frac{8}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = x + \frac{8}{1 + e^{2x}} = f(x)$. Donc $\boxed{f(x) = x + \frac{8e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}}$.

g) Primitive de f qui s'annule en 0 :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\ln(1 + e^{-2x}) + \lambda. F(0) = 0 \Rightarrow -4\ln 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 4\ln 2.$$

Donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\ln(1 + e^{-2x}) + 4\ln 2}$.

Commentaire : Cet exercice permet à l'apprenant de tester sa compréhension des propriétés algébriques, de la primitive et de l'étude d'une fonction comportant la fonction exponentielle.

Exercice 0.6.3

•**Modalité** : Travail individuel des élèves pendant 10 minutes. [5]

Énoncé : On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x3^{-x}$. On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
1. b) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie par : $x \mapsto \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}}$.
En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f .
- 2 Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 3 Construire la courbe de (C) .

Solution :

1.a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(+\infty) = -\infty$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}.$$

1.b) Posons $X = x \ln 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}} = 0}.$$

Or $f(x) = x3^{-x} = xe^{-x \ln 3} = \frac{x}{e^{x \ln 3}} = \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}} \times \frac{1}{\ln 3}$.

D'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

2. Variations de f :

$$f'(x) = (xe^{-x \ln 3})' = e^{-x \ln 3} - x \ln 3 e^{-x \ln 3} = (1 - x \ln 3)e^{-x \ln 3}.$$

$$1 - x \ln 3 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\ln 3}.$$

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e \ln 3}$	0

En plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Ce qui implique que la courbe de f admet une branche infinie de direction la droite (OJ) en $-\infty$.

3. courbe représentative

0.7. Devoir surveillé :

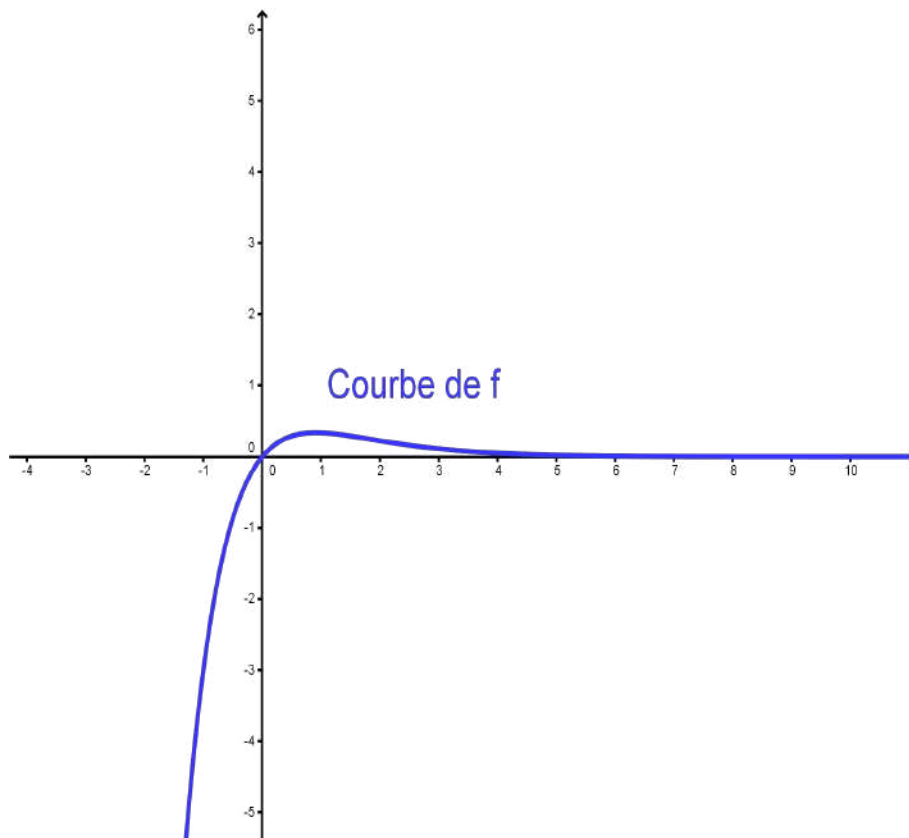


FIGURE 13 – Courbe représentative de la fonction f

Commentaire : Cet exercice a permis à l'apprenant de réviser ses aptitudes sur une fonction exponentielle de base a , $a > 0$.

0.7 Devoir surveillé :

NB : Les élèves répondront soigneusement aux questions suivantes pendant 2h sous la surveillance de l'enseignant.

Exercice 0.7.1 : (4 points)

On considère le polynôme suivant : $p(x) = -x^3 + 7x - 6$.

1. Écrire $p(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{3x} - 7e^x + 6 < 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln^2 x + \ln x - 6 \geq 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
 $a) 2e^{2x+1} - 3e^{x+1} \leq 2e$ $b) \frac{2e^x+1}{e^x-3} - e^x > 0$.

Exercice 0.7.2 : (5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $X^2 - X - 2 = 0$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $9^x - 3^x - 2 = 0$.
3. Simplifier l'écriture des nombres réels suivants, a étant un nombre réel strictement positif : a) $a^3 \times a^{-2}$ b) $a^{0,7} \times a^{4,9}$ c) $a^{-22} \times \sqrt{a}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$3) \begin{cases} \ln(y+6) - \ln x &= 3 \ln 2 \\ e^{5x} \times e^{-y} &= e^{-6} \end{cases}$$

Problème 0.7.1 : (11 points)**Partie A**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$.

1. Étudier cette fonction et tracer sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormal (2 cm pour unité graphique).
2. Justifier l'existence d'une racine a de l'équation $f(x) = 0$; montrer que $-1 < a < 0$, donner un encadrement de a au dixième près.
3. On considère la suite

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

En utilisant (C) et la droite d'équation $y = x$, construire u_1, u_2, u_3, u_4 . Peut-on conjecturer l'existence d'une limite de la suite ?

En utilisant une calculatrice, donner un encadrement de la limite de u_n (dont on admettra l'existence) au $\frac{1}{100}$ près.

4. Déterminer a , b et c de sorte que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ admette f comme dérivée ; en déduire une primitive de f .

Partie B

On considère la fonction définie sur $D = \mathbb{R} - \{0\}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

On désigne par (C') la courbe représentative de f dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{e^x - 1}$, pour tout x de D ; utiliser cette écriture pour calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

0.8. Devoir de maison :

2. Montrer que f est dérivable en tout point de D et expliciter la fonction dérivée f' de f .
3. Donner les équations des asymptotes à la courbe (C') et de la tangente (T) à la courbe (C') au point d'abscisse 1.
4. Construire la courbe (C') . On fera figurer les asymptotes et la droite (T) .
5. On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par $h(x) = \ln(e^x - 1)$.
 - a) Quel est l'ensemble de définition de h ?
 - b) Montrer que h est dérivable en tout point de son ensemble de définition, et expliciter la fonction dérivée h' .
 - c) En déduire une primitive de f .

0.8 Devoir de maison :

Définition et propriétés élémentaires

Exercice 0.8.1

Ecrire plus simplement

$$\begin{array}{llll} a) e^{\ln 5} & b) e^{\frac{1}{2} \ln 4} & c) \frac{1}{2} \ln e^6 & d) \frac{e^{3+\ln 5}}{e^{4+\ln 4}} \\ e) \ln e^{\sqrt{2}} & f) \ln \frac{1}{e^3} & g) \frac{(e^3)^2}{(e^{-2})^5} & h) e^{\ln 6 - \ln 3}. \end{array}$$

Exercice 0.8.2

1. Simplifier l'écriture des nombres réels suivants, a étant un nombre réel strictement positif :
 $a) a^3 \times a^{-2}$ $b) a^{0,7} \times a^{4,9}$ $c) a^{-22} \times \sqrt{a}$.
 $d) \frac{a^{2,01}}{a^{6,1}}$ $e) (a^{-9})^{0,5}$ $f) 8^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}}$.
2. calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de : $a) 2^{3,8}$ $b) 5^{\frac{1}{3}}$ $c) (1,03)^{\frac{3}{4}}$

Équations et Inéquations

Exercice 0.8.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$\begin{array}{llll} a) e^{3x+2} = e^{5x+1} & b) e^{x^2+2} = e^{3x+7} & c) e^{x+1} = e^{-x-1} & d) e^{x+3} \times e^{-x+2} = e^3. \\ e) e^{x^2} = 4 & f) e^x = -3 & g) e^{x-8} = \sqrt{2} & h) \frac{e^x}{e^4} = e^5. \\ i) \ln x = 3 & j) \ln(2x-4) = -5 & k) \ln(x^2+3x) = 1 & l) e^{\ln 6 - \ln 3} = \ln(x+1). \end{array}$$

Exercice 0.8.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} a) (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 &= 0 & b) 2e^{2x} + 5e^x - 3 &= 0 \\ c) 3e^{2x+2} + e^{x+1} - 2 &= 0 & e) e^{5x} - (\sqrt{3} + \sqrt{4})e^{3x} + \sqrt{12}e^x &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 0.8.5

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$$a) \frac{3}{e^x} > 5 \quad b) e^{3x-1} \geq e^{x^2+1} \quad c) e^{x-3} + \frac{3}{2} \leq 2 \quad d) e^{-x} < 0 \quad e) \frac{e^{3x}}{e^x} \geq -1.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $a) 3^x = 5$ $b) 5^x = -2$ $c) 10^x = 1$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $a) 5^x < 10^{3x}$ $b) 2^x \geq 5$ $c) 3^x < 0$.

Systemes d'équations**Exercice 0.8.6**

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} e^x + e^y &= 2 \\ 3e^x - 2e^y &= 11 \end{cases} & \quad 2) \begin{cases} e^x + e^y &= 7 \\ 3e^{x+y} &= 10 \end{cases} & \quad 3) \begin{cases} \ln(y+6) - \ln x &= 3 \ln 2 \\ e^{5x} \times e^{-y} &= e^{-6} \end{cases} \\ 4) \begin{cases} e^x \times e^y &= 2 \\ 3e^{x-y} &= 11 \end{cases} & \quad 5) \begin{cases} 2^x - 2^y &= 8 \\ 2^x + 2^y &= 2\sqrt{2} \end{cases} & \quad 6) \begin{cases} 2^x \times 2^{2y} &= 64 \\ \ln x + 2 \ln y &= 8 \ln 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Domaine de définition**Exercice 0.8.7**

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, déterminer le domaine de définition.

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= e^x - x & 2) g(x) &= (5 - 3x)e^x & 3) h(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \\ 4) t(x) &= \frac{3e^{2x} - 1}{5e^x + 4} & 5) j(x) &= e^{2x} - x + 7 & 6) q(x) &= \ln(e^x - 2). \\ 7) z(x) &= e^{\ln(3x+2)} & 8) p(x) &= \frac{\ln x}{(x+2)^3} & 9) m(x) &= e^{\frac{x-1}{x^2-1}}. \\ 10) s(x) &= 3^x \ln(2x+7) & 11) v(x) &= 2^x & 12) l(x) &= (1-x)^{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Limites

Exercice 0.8.8

Étudiez les limites de la fonction aux points proposés :

- 1) $x \mapsto (e^{-x})^2$ en $+\infty, -\infty$
- 2) $x \mapsto e^{2x} - 3e^x$ en $+\infty$.
- 3) $x \mapsto 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$ en $-\infty, 0, +\infty$
- 4) $x \mapsto (2x + 3)e^x$ en $-\infty$.
- 5) $x \mapsto \frac{x^2+1}{x}e^x$ en $+\infty$
- 6) $x \mapsto 2^x$ en $-\infty$.
- 7) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}$ en $+\infty$, en 0
- 8) $x \mapsto x^2 \ln |x - 1|$ en $-\infty$.
- 9) $x \mapsto 3^x \ln x$ à droite en 0
- 10) $x \mapsto \frac{\ln x}{e^x}$ en $+\infty$.
- 11) $x \mapsto xe^{-x}$ en $+\infty$
- 12) $x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \ln x$ à droite en 0.

Dérivées

Exercice 0.8.9

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction ainsi définie.

- 1) $f(x) = e^{2x} \ln x$
- 2) $g(x) = (x^3 + 4)e^{-x}$
- 3) $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
- 4) $t(x) = \frac{3e^{2x} - 1}{5e^x + 4}$
- 5) $j(x) = e^{2x} - x + 7$
- 6) $q(x) = \ln(e^x - 2)$.
- 7) $z(x) = e^{\ln(3x+2)}$
- 8) $p(x) = xe^{x^2+2x}$
- 9) $m(x) = e^{\frac{x-1}{x^2-1}}$.
- 10) $s(x) = 3^x \ln(2x + 7)$
- 11) $v(x) = 2^x$
- 12) $l(x) = (1 - x)^{\sqrt{2}}$.

Primitives

Exercice 0.8.10

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, de chacune des fonctions suivantes :

- 1) $f : x \mapsto e^{-x+3}$
- 2) $g : x \mapsto e^{2x}$
- 3) $h : x \mapsto \frac{e^x}{3e^x+2}$.
- 4) $t : x \mapsto (-2x + 3)e^{-x^2+3x-1}$
- 5) $q : x \mapsto 3xe^{x^2-1}$
- 6) $k : x \mapsto -\frac{1}{x}e^{\ln|x|}$.
- 7) $z : x \mapsto \frac{2e^x}{e^x+3}$
- 8) $b : x \mapsto xe^{x^2-2} + 3x^2$
- 9) $u : x \mapsto \sin xe^{\cos x}$.

Exercice 0.8.11

Donner une primitive F de f , définie sur I et vérifiant la condition donner

- 1) $f(x) = e^{-x}$ $F(0) = 2$ $I = \mathbb{R}$.
- 2) $f(x) = e^{2x} - xe^{x^2-2}$ $F(0) = 0$ $I = \mathbb{R}^+$.
- 3) $f(x) = \frac{e^x}{2-e^x}$ $F(1) = 0$ $I =]-\infty, \ln 2[$.

Étude des Fonctions**Exercice 0.8.12**

Étudier et représenter chacune des fonctions définies par :

- | | | |
|--|-----------------------------|---|
| 1) $f(x) = e^{2x} \ln x$ | 2) $g(x) = (x^3 + 4)e^{-x}$ | 3) $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ |
| 4) $t(x) = \frac{3e^{2x} - 1}{5e^x + 4}$ | 5) $j(x) = e^{2x} - x + 7$ | 6) $q(x) = \ln(e^x - 2)$ |
| 7) $z(x) = e^{\ln(3x+2)}$ | 8) $p(x) = xe^{x^2+2x}$ | 9) $m(x) = e^{\frac{x-1}{x^2-1}}$ |
| 10) $s(x) = 3^x \ln(2x + 7)$ | 11) $v(x) = 2^x$ | 12) $l(x) = (1 - x)^{\sqrt{2}}$ |

PROBLÈMES**Problème 0.8.1**

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - \ln(x^2 + 1), & \text{si } x \leq 0. \\ f(x) = -x^2 + e^{-x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative

1. Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. Étudier les branches infinies de (C) ; démontrer que la parabole (Γ) d'équation $y = -x^2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
3. Compléter l'étude de f et construire (Γ) et (C) .
- 4 a) Dédire de cette étude que (C) coupe (OI) en deux points dont l'un a une abscisse négative que l'on calculera.
b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'abscisse du deuxième point d'intersection.

Problème 0.8.2 : Courbes de Gauss

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction G_k par $G_k(x) = e^{-kx^2}$.

1. Étudier la parité de G_k .
2. Démontrer que G_k est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire le tableau de variation de G_k .
3. Calculer G_k'' et résoudre l'équation $G_k''(x) = 0$.
4. Tracer les courbes de G_k pour $k = \frac{1}{2}, 1$ et 2 .

0.8. Devoir de maison :

5. Démontrer que $h \leq k \Leftrightarrow G_h \geq G_k$ sur $\mathbb{R}$.

6. Dans cette question $k = \frac{1}{2}$.

Soit α la solution positive de $G_k''(x) = 0$. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe de G_k au point d'abscisse α . Tracer (T) sur le graphique.

Problème 0.8.3 :

Comparaison entre x^2 et 2^x . Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2^x) - \ln(x^2)$.

1. Démontrer que : $f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$.
2. Calculer $f(2)$ et $f(4)$.
3. Calculer la dérivée f' de f . En déduire les variations de f .
4. A l'aide des questions 2 et 3, préciser le signe de f .
5. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a : $2^n \geq n^2$.

Commentaire : Les notions développées dans ce chapitre 1 et la plus part des exercices ont été puisés dans les livres suivants : [1], [2], [3], [4], [5].

Conclusion

La méthode pédagogique qui permet d'introduire la fonction exponentielle en Terminale D au Cameroun peut se justifier par son accessibilité, car elle nécessite des pré-requis sur la fonction logarithme népérien, la notion de monotonie d'une fonction et de bijection ; qui sont des notions enseignées avant le cours sur les fonctions exponentielles et puissances . Les fonctions exponentielles et puissances peuvent être mises en exergue avec plusieurs parties du programme de Mathématiques en Terminale D ; notamment les équations différentielles, les suites numériques, les intégrales. Elles présentent entre autre plusieurs applications, en occurrence en médecine, en biologie animale et végétale. Ces quelques domaines d'application sont en harmonie avec l'orientation de sciences expérimentales et naturelles qui constituent la connotation de la série D au Cameroun. Ce cours s'est donné entre autre pour objectif principal d'initier aussi simplement possible les élèves de terminale D aux propriétés algébriques et géométriques de ces fonctions, en guise de solution à certains problèmes rencontrés par les élèves. En effet une enquête au près d'un échantillon de 20 élèves de Terminale D et de Monsieur MEGAMTCHE, professeur expérimenté de mathématiques du Lycée d'Elig-Essono a révélé que la majorité des élèves ont du mal à déterminer des limites autres que celles dites de référence, notamment à travers le processus qui permet de lever les formes indéterminées. Nous préconisons donc aux enseignants de mathématiques de multiplier des exemples et des exercices dont l'objet porte sur la détermination des limites des fonctions comportant la fonction exponentielle.

♣ Bibliographie ♣

- [1] Charles MVOMO OTAM et al. *MAJORS en mathématiques, T^{le} D*, ASVA EDUCATION, 2012.
- [2] Francis NASSIET et al. *Mathématiques Terminales S*, DIMATHEME, Didier, 1994.
- [3] Guy BONTEMPS et al. *Maths Terminales S, Enseignement Obligatoire* ; FRACTALE, Bordas, 2002.
- [4] Raymond BARRA et al. *Mathématiques Terminale D*, COLLECTION TRANSMATH, Nathan, 2008
- [5] Saliou TOURE et al. *Mathématiques en Terminale Scientifique, Option Sciences Expérimentales*, CIAM, Edicef, 1999.

♣ Webographie ♣

[6] [http://fr.wikipedia.org/wiki/histoire des logarithmes et des exponentielles](http://fr.wikipedia.org/wiki/histoire_des_logarithmes_et_des_exponentielles).

♣ Table des matières ♣

1	Isométries du plan : généralités ; Composition des isométries du plan	1
1.1	Introduction	2
1.2	Généralités	3
1.2.1	Quelques définitions	3
1.2.2	Isométries	3
1.2.3	Pré-requis	3
1.2.4	Translation	4
1.2.5	Symétrie orthogonale	5
1.2.6	Rotation	7
1.3	Isométries et configurations	9
1.3.1	Écriture complexe d'une isométrie	11
1.4	Composition des isométries	12
1.4.1	Composée de deux translations	12
1.4.2	Pré-requis	12
1.4.3	Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles	13
1.4.4	Décomposition d'une translation de vecteur non nul	14
1.4.5	Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants : la rotation	15
1.4.6	Décomposition d'une rotation	16
1.4.7	Composée de deux rotations	16
1.4.8	Composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation	18
1.4.9	Composée d'une rotation et d'une translation	21
1.4.10	Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale	22
1.5	Compléments sur les isométries	22
1.6	Application	24
1.6.1	Isométries et recherche des lieux géométriques (cf.[2])	24

1.6.2	Isométries et problèmes de construction	25
1.6.3	Isométries et démonstration des propriétés	27
1.6.4	Application des isométries à un problème d'optimisation	30
1.7	EXERCICES	32
Bibliographie et Webographie		41

Isométries du plan : généralités ;

Composition des isométries du plan

Objectifs spécifiques

L'apprenant doit être capable de :

- Reconnaître une isométrie.
- Déterminer et construire l'image d'un point, d'une droite et d'un cercle par une isométrie.
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux isométries.
- Utiliser les isométries dans les problèmes de constructions, les problèmes de démonstrations de propriétés, les problèmes de la recherche des lieux géométriques.
-

Liens avec les autres parties du programme

Les isométries, leur composition et leur décomposition sont utilisées dans :

- la classification des isométries du plan.
- l'étude générale des applications affines du plan.
- les similitudes.
- les applications de l'espace.

Motivation

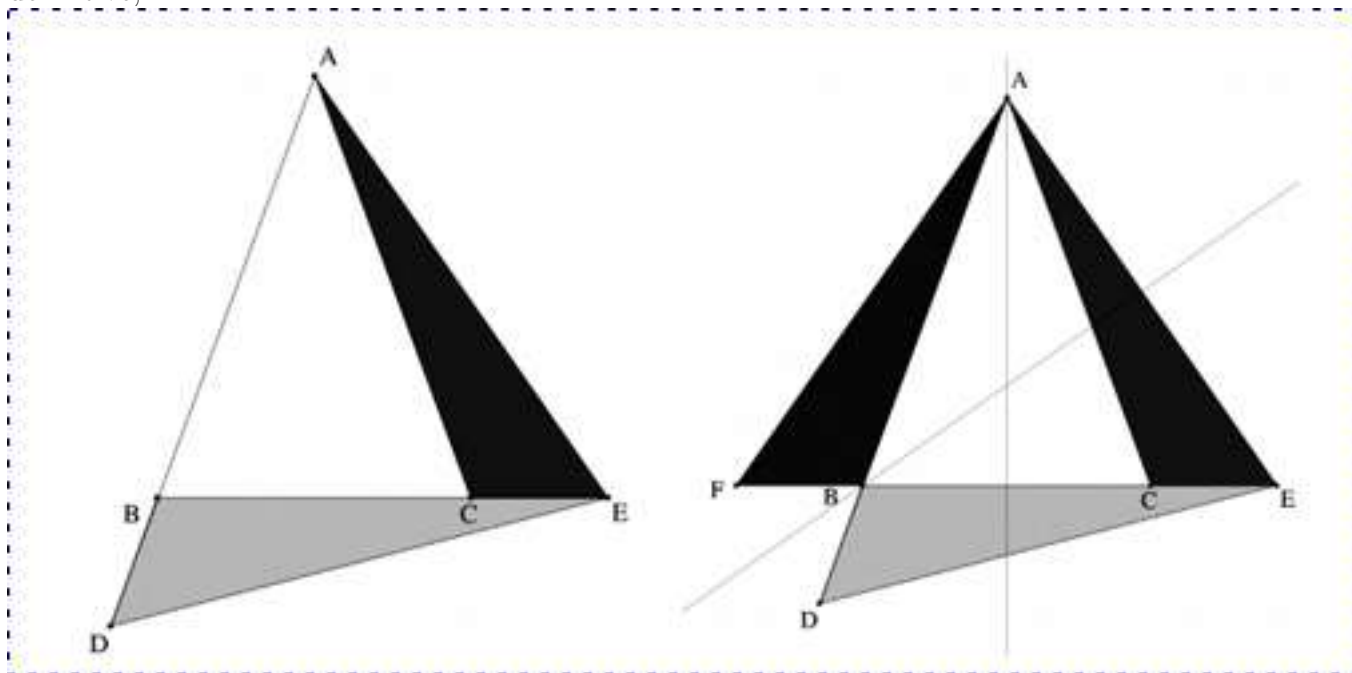
Les isométries planes étant un outil de la géométrie, nous nous intéresserons aux isométries planes par exemple si l'on nous pose le problème suivant :

Enoncé ([5]) Soit ABC triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On prolonge les segments $[AB]$ et $[BC]$ par $[BD]$ et $[CE]$, avec $BD = CE = AB - BC$. Montrer que ADE est isocèle.

Solution :

Pour montrer, il suffit de trouver la transformation qui permet de transformer ACE en EBD . L'examen des angles montre que c'est une rotation. On peut donc la trouver comme composée de deux symétries en introduisant le point F symétrique de E dans la symétrie s_1 par rapport à la médiane-hauteur de ABC . On compose ensuite par la symétrie s_2 par rapport à la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et F vient en D (la droite (BC) vient sur (AB) et précisément la demi-droite $[BC]$ sur $[BA]$ et on conclut en utilisant $BF = BD$), on conclut que,

Si $s = s_2 \circ s_1$, on a $s(E) = D$. Par ailleurs, on a : $s_1(A) = A$ et $s_2(A) = E$ (car le triangle ABE est isocèle en B , donc la bissectrice est un axe de symétrie). Donc $s(A) = E$, en définitive, $EA = DE$.



1.1 Introduction

Dans les classes précédentes, certaines isométries ont été définies et étudiées. Elles sont utilisées pour rechercher des lieux géométriques, pour résoudre des problèmes de construction et démontrer des propriétés. Dans cette ressource, nous nous proposons de compléter cette étude en déterminant les autres isométries du plan et d'étudier la composition et la décomposition des isométries du plan.

1.2 Généralités

1.2.1 Quelques définitions

Définition 1.2.1. *Lorsqu'une construction associe à chaque point du plan un unique point, on dit qu'on définit une application du plan.*

Exemple : la projection orthogonale sur une droite Δ (M' est l'image de M si et seulement si $M' \in \Delta$ et $(MM') \perp \Delta$).

Deux applications f et g sont égales si et seulement si pour tout point $M \in \mathcal{P}$;
 $f(M) = g(M)$.

Définition 1.2.2. *Une application f est dite bijective si tout point de $\mathcal{P}$ est l'image d'un point et d'un seul par f , autrement dit, si tout point de $\mathcal{P}$ admet un unique antécédent. On dit alors que f est une transformation du plan.*

Ainsi, une transformation du plan $\mathcal{P}$ est une application bijective du plan sur lui-même.

Exemple : les translations , les symétries centrales , les symétries orthogonales et les homothéties sont des transformations.

1.2.2 Isométries

Dans cette partie, on se propose de reconnaître une isométrie

1.2.3 Pré-requis

Pour l'atteinte de cet objectif, l'élève devrait maîtriser :

- La représentation des vecteurs.
- Le calcul de la racine carrée d'un nombre.
- La notion du repère.
- Le calcul de la distance entre deux points.
- Le calcul du produit scalaire.

Activité 1.2.1. Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$
$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}.$$

Soit $N \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ d'image $N' \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$ comparer les distances $d(M, N)$ et $d(M', N')$.

Définition 1.2.3. On appelle *isométrie affine plane* toute application du plan dans lui-même qui conserve la distance euclidienne.

Autrement dit, une application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est une isométrie affine si pour tous points M et N du plan $\mathcal{P}$ tels que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$ alors $MN = M'N'$.

Exemples : les translations, les symétries centrales, les symétries orthogonales, et les rotations.

Contre-exemple

Une homothétie de rapport 2 n'est pas une isométrie, car elle ne conserve pas les distances.

1.2.4 Translation

Activité 1.2.2. Soient $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ deux points du plan $\mathcal{P}$

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$.

Que peut-on en déduire ?

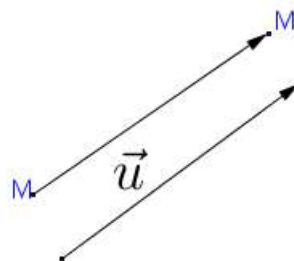
Définition 1.2.4. Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ (espace des vecteurs).

On appelle *translation de vecteur $\vec{u}$* l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

M' est appelé *translaté de M par $\vec{u}$* . On la note $t_{\vec{u}}$.

Remarque

$$\begin{array}{ccc} t_{\vec{u}} : \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \quad \text{tel que } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$



Expression analytique d'une translation

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit une translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par t . On se propose de déterminer l'expression analytique de t , c'est-à-dire d'exprimer x' et y' en fonction de x et y .

$$\text{On a : } \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}.$$

L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

1.2.5 Symétrie orthogonale

Activité 1.2.3. Soient $ABCD$ un carré et O le projeté orthogonal de D sur la droite (AC) .

Comparer les longueurs de segments $[DO]$ et $[OB]$ et conclure.

Définition 1.2.5. Soit D une droite du plan.

On appelle symétrie orthogonale l'application définie par :

$$S_D : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} M' = M & \text{si } M \in D \\ D \text{ est la médiatrice de } [MM'] & \text{si } M \notin D \end{cases}$$

$$M \longmapsto M' = S_D(M)$$

Expression analytique de symétries orthogonales particulières

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit s une symétrie orthogonale d'axe (Δ) , $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par s .

On se propose de déterminer l'expression analytique de s dans trois cas particuliers.

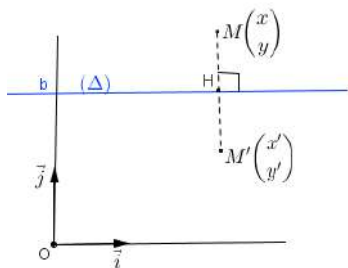
1. (Δ) est parallèle à l'axe des abscisses

Soient (Δ) la droite d'équation $y = b$ et H le point d'intersection des droites (MM') et (Δ) .

Les points M et M' ont même abscisse et H est le milieu de $[MM']$.

Donc : $x' = x$ et $y + y' = 2b$.

L'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = b$ est $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$.



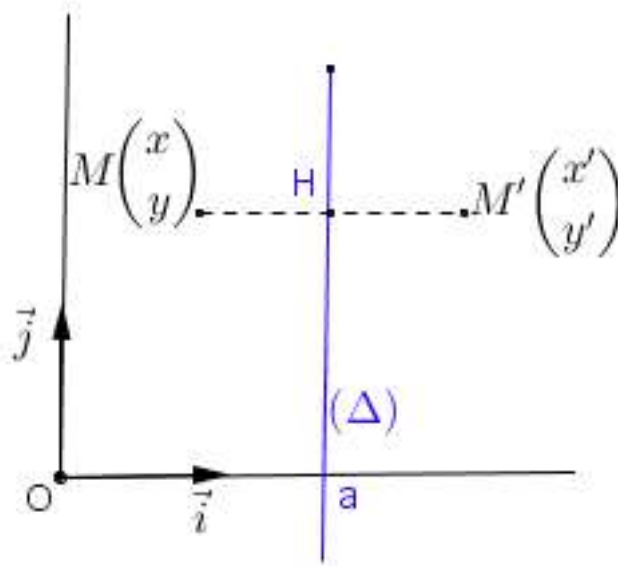
2. (Δ) est parallèle à l'axe des ordonnées

Soit (Δ) la droite d'équation $x = a$ et H le point d'intersection des droites (MM') et (Δ) .

Les points M et M' ont même ordonnée et H est le milieu de $[MM']$.

Donc : $x' + x = 2a$ et $y' = y$.

L'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = a$ est :
$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}.$$



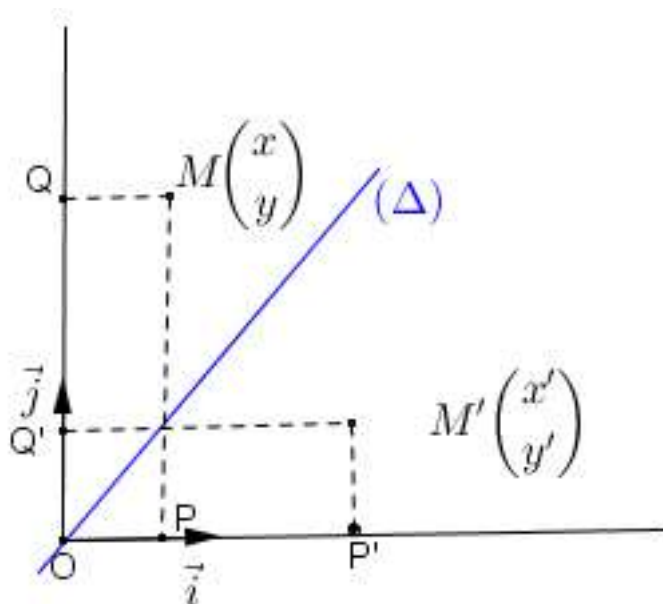
3. (Δ) est la première bissectrice du repère

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$. Soient P, Q et P', Q' les projetés orthogonaux respectifs des points M et M' sur les axes du repère.

Les images respectives par s des points P et Q sont les points Q' et P'.

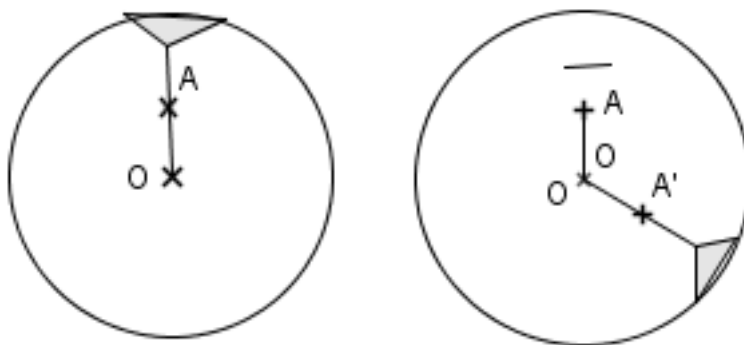
Donc : $x' = y$ et $y' = x$.

L'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice est :
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}.$$



1.2.6 Rotation

Activité 1.2.4. Tati a marqué en rouge un point sur l'aiguille d'un chronomètre de centre O et elle a noté sa position A . Elle observe la nouvelle position A' du point rouge lorsque l'aiguille a tourné d'un angle de 120° autour de O c'est à dire au bout de 20 min.



On dit que le point A' est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle 120° .

Définition 1.2.6. Soient O un point, α un angle orienté.

On appelle rotation de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$ (ou α) l'application notée $r(O, \alpha)$ ou r simplement qui à tout point M associe le point M' tel que

- si $M = O$ alors $M' = O$
- si $M \neq O$ alors $OM = OM'$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \hat{\alpha}$.

Conservation du produit scalaire

Activité 1.2.5. Soient f une isométrie, A, B, C trois points et A', B' et C' leurs images respectives par f .

1. Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de AB^2, AC^2 et BC^2 .

(On pourra utiliser l'expression du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$).

2. Exprimer $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ en fonction de $A'B'^2, A'C'^2$ et $B'C'^2$.
3. En déduire que : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Propriété 1.2.1. Soient f une isométrie. Pour tous points A, B, C, D d'images respectives A', B', C', D' par f , on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

On dit que les isométries conservent le produit scalaire.

Preuve guidée

- Justifier que : $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'B'} \cdot (\overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{A'C'})$.
- Conclure.

Conservation du barycentre

Activité 1.2.6. Soit ABC un triangle. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par G le centre de gravité de ABC . Soit A', B', C', I' et G' les images respectives des points A, B, C, I et G par une isométrie.

1. Démontrer que I' est le milieu de $[B'C']$.
2. Démontrer que $A'G' = \frac{2}{3}A'I'$.
3. En déduire que G' est le centre de gravité de $A'B'C'$.

Propriété 1.2.2. Soient f une isométrie, $(A,a), (B,b), (C,c)$ des points pondérés et A', B', C' les images respectives des points A, B, C , par f , G un point et G' son image par f . G est le barycentre des points pondérés $(A,a), (B,b), (C,c)$ si et seulement si G' est le barycentre des points pondérés $(A',a), (B',b), (C',c)$.

On dit que les isométries conservent le barycentre.

Preuve guidée

- Vérifier que G est le barycentre des points pondérés $(A,a), (B,b), (C,c)$ si et seulement si : $(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC})^2 = 0$.
- A l'aide d'un développement, démontrer que : $(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC})^2 = (a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} + c\overrightarrow{G'C'})^2$.
- Conclure.

1.3 Isométries et configurations

Images de figures usuelles

Propriété 1.3.1. Soient f une isométrie, A et B deux points distincts, d'images respectives A' et B' par f .

- L'image par f de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'image par f du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- l'image par f de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.

Preuve

Soit M un point du plan et M' son image par f .

- Démontrons que l'image d'une droite est une droite.

$$\begin{aligned}M \in (AB) &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \\&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, M = \text{bar} \{(A, 1 - k), (B, k)\} \\&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, M' = \text{bar} (A', 1 - k), (B', k)\} \\&\Leftrightarrow M \in (A'B').\end{aligned}$$

- On démontre de même les deux autres résultats en remplaçant, dans cette démonstration, $\mathbb{R}$ par $[0;1]$ puis par $\mathbb{R}^+$.

Remarque

- On déduit de cette propriété que l'image d'un ensemble de points alignés par une isométrie est un ensemble de points alignés.
- On dit que les isométries conservent l'alignement.

Propriété 1.3.2. Soient f une isométrie, (C) un cercle de centre O et de rayon r et O' l'image de O par f .

L'image par f du cercle (C) est le cercle de centre O' et de rayon r .

Preuve

Soit (C') le cercle de centre O' et de rayon r , M un point du plan.

$$\begin{aligned}M \in (C) &\Leftrightarrow OM = r \\&\Leftrightarrow O'M' = r \\&\Leftrightarrow M' \in (C').\end{aligned}$$

Vocabulaire

Une figure est dite globalement invariante par une transformation si elle est sa propre image par cette transformation. Ainsi, toute droite perpendiculaire à l'axe d'une symétrie orthogonale est globalement invariante par cette symétrie orthogonale.

Conservation des mesures d'angles

Propriété 1.3.3. Soient f une isométrie, ABC un triangle et A', B', C' les images respectives des points A, B, C par f .

On a : $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.

On dit que les isométries conservent les angles non orientés.

Démonstration guidée

- Démontrer que : $\cos \widehat{BAC} = \cos \widehat{B'A'C'}$
(on pourra remarquer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.)
- Conclure.

Remarques

1. On déduit de cette propriété que par une isométrie :
 - les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires ;
 - les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
2. On dit que les isométries conservent le parallélisme et l'orthogonalité.

Conservation du contact

Propriété 1.3.4. Soient f une isométrie, (D) une droite, A un point de (D) , (C) un cercle tangent à (D) en A et (D') , A' , (C') les images respectives de $(D), A, (C)$ par f .

La droite (D') est tangente au cercle (C') en A' .

On dit que les isométries conservent le contact entre un cercle et une droite.

Preuve

Le point A appartient au cercle (C) et à la droite (D) , donc le point A' appartient au cercle (C') et à la droite (D') . Soit O le centre du cercle (C) et O' son image par f . O' est le centre du cercle (C') ; puisque les isométries conservent l'orthogonalité, on a $(O'A') \perp (D')$. La droite (D') est donc tangente au cercle (C') en A' .

Remarque : on déduit de cette propriété que deux cercles tangents (on dit que deux cercles sont tangents en un point A s'ils passent tous deux par A et si leurs tangentes en ce point sont confondues.) ont pour images deux cercles tangents. On dit que les isométries conservent le contact entre deux cercles. Plus généralement, on admettra que les isométries conservent le contact.

Conservation des aires

Propriété 1.3.5. Soient f une isométrie, ABC un triangle et A', B', C' les images respectives des points A, B, C par f .

Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même aire.

On dit que les isométries conservent l'aire des triangles.

Preuve

L'aire du triangle ABC est $:\frac{1}{2}(AB \times AC \times \sin \widehat{BAC})$.

Puisque les isométries conservent les distances et les angles non orientés, elles conservent donc l'aire des triangles.

Remarque

L'image d'un cercle étant un cercle de même rayon, les isométries conservent aussi l'aire des cercles. Plus généralement, on admettra que les isométries conservent les aires.

Déplacements et antidéplacement

- Si f est une isométrie de $\mathcal{P}$, on dit que f est un déplacement de $\mathcal{P}$ si f conserve les mesures des angles orientés
- On dit que f est un antidéplacement si les angles orientés sont changés en leur opposé
- Toute isométrie du plan est soit un déplacement, soit un antidéplacement.

Notation : On note $\mathcal{J}^+$ l'ensemble des déplacements de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{J}^-$ l'ensemble des antidéplacement de $\mathcal{P}$. $\mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^- = \mathcal{J}$ qui est l'ensemble des isométries du plan.

Exercice Le plan $\mathcal{P}$ orienté est muni d'un repère orthonormé direct.

Soit f l'application qui, au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ avec
$$\begin{cases} x' &= -y + 1 \\ y' &= x + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?

1.3.1 Écriture complexe d'une isométrie

1) Forme complexe d'une translation.

Propriété 1.3.6. Toute translation a une forme complexe du type : $z' = z + b$, avec b l'affixe du vecteur de cette translation.

2) Forme complexe d'une rotation.

Propriété 1.3.7. Toute rotation du plan a une écriture complexe du type : $z' = az + b$ tel que $|a| = 1$ et $a \neq 1$.

- le centre de cette rotation a pour affixe : $\omega = \frac{b}{1-a}$

- l'angle orienté de cette rotation a pour mesure $\arg(a)$.

3) Formes complexes de quelques symétries orthogonales.

Propriété 1.3.8. Soit (O, I, J) un repère orthogonal direct du plan complexe, (Δ) la droite d'équation $y = x$ relativement au repère (O, I, J) . On a les propriétés suivantes :

- la symétrie orthogonale d'axe (OI) a pour écriture complexe : $z' = \bar{z}$.

- la symétrie orthogonale d'axe (OJ) a pour écriture complexe : $z' = -\bar{z}$.

- la symétrie orthogonale d'axe (Δ) a pour écriture complexe : $z' = iz$.

1.4 Composition des isométries

1.4.1 Composée de deux translations

Dans cette section , l'élève doit être capable de donner le résultat de la composition de deux translations.

1.4.2 Pré-requis

L'apprenant doit être capable de représenter les vecteurs du plan et d'identification le sens de ces vecteurs ;

il doit être capable de reconnaître une translation

Activité 1.4.1. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans ce repère ;

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Soit $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'image B de A par $t_{\vec{v}}$.

2. Déterminer l'image C de B par $t_{\vec{u}}$.

3. En déduire que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.

Propriété 1.4.1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs , la composée $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Preuve : Soit M un point du plan , M_1 son image par $t_{\vec{u}}$ et M' l'image de M_1 par $t_{\vec{v}}$
 On a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$ (relation de Chasles)
 $= \vec{u} + \vec{v}.$

Ainsi, $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est l'application qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v}$, $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ est donc une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

Remarques

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

On a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Donc $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$. On dit que la composition des translations est commutative.

2. Si $\vec{v} = -\vec{u}$, on obtient $t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = \text{Id}$

1.4.3 Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Activité 1.4.2. Soient (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, s_{Δ} et $s_{(\Delta')}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') , M , M' et M'' trois points du plan tels que $s_{\Delta}(M) = M'$ et $s_{\Delta'}(M') = M''$. Soient A le point d'intersection de Δ et (MM') , B le point d'intersection de Δ' et $(M'M'')$.

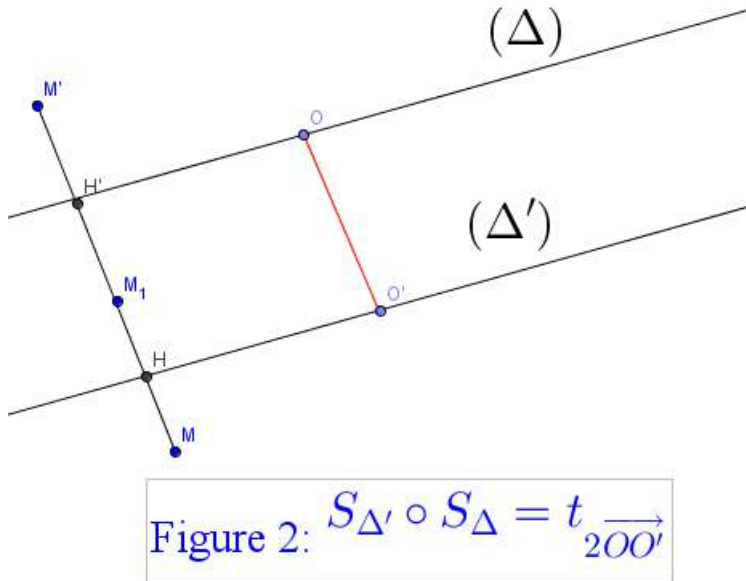
1. Faire une figure.
2. Montrer les points M , M' , M'' sont alignés.
3. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'B}$.
4. Montrer que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
5. En déduire que $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ est une translation dont on déterminera le vecteur.

Propriété 1.4.2. Soient (Δ) et (Δ') deux droites parallèles , O un point de (Δ) et O' son projeté orthogonal sur (Δ') . La composée $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

Preuve : Soit M un point du plan , M_1 son symétrique par rapport à (Δ) , M' le symétrique de M_1 par rapport à (Δ') . H et H' les projetés orthogonaux respectifs de M sur (Δ) et sur (Δ') On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} \\ &= 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1M'} \\ &= 2\overrightarrow{HH'} \\ &= 2\overrightarrow{OO'} \end{aligned}$$

Donc $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{2OO'}}$



1.4.4 Décomposition d'une translation de vecteur non nul

Activité 1.4.3. Soit $ABCD$ un carré; désignons par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée d'isométries suivante $s_{(IJ)} \circ s_{(AD)}$.
- Démontrer que $t_{\overrightarrow{AB}}$ est la composée de $s_{(BC)}$ et d'une symétrie orthogonale dont on préciseras l'axe.

Propriété 1.4.3. Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$. Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une unique droite (Δ') telle que :

$$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{u}}.$$

Preuve :

- **Existence :**

Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$, (Δ) une droite de vecteur normal $\vec{u}$ et (Δ') une droite telle que $t_{\frac{\vec{u}}{2}}(\Delta) = \Delta'$, d'après la propriété précédente, on a :

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\vec{u} \text{ or } s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{\overrightarrow{2OO'}};$$

d'où $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{u}}$. Ce qui prouve l'existence de (Δ')

- **Unicité :**

soit (Δ'') une autre droite telle que $s_{\Delta''} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{u}}$;

$$\begin{aligned}
 \text{on a alors , } s_{\Delta''} \circ s_{\Delta} &= s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \Leftrightarrow (s_{\Delta''} \circ s_{\Delta}) \circ s_{\Delta} = (s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}) \circ s_{\Delta} \\
 &\Leftrightarrow s_{\Delta''} \circ (s_{\Delta} \circ s_{\Delta}) \\
 &\Leftrightarrow s_{\Delta''} \circ Id = s_{\Delta'} \circ Id \\
 &\Leftrightarrow s_{\Delta''} = s_{\Delta'} \text{ d'où } (\Delta'') = (\Delta'). \blacksquare
 \end{aligned}$$

1.4.5 Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants : la rotation

Activité 1.4.4. Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O , et s_{Δ} et $s_{(\Delta')}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') . Soient I et J deux points respectifs de (Δ) et (Δ') et tels que $\widehat{(\vec{OI}, \vec{OJ})} = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $r = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$; soit M est un point du plan distinct de O et $r(M) = M'$.

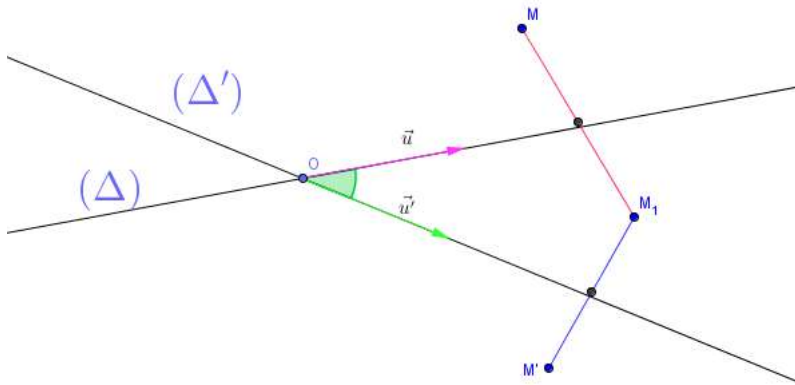
1. Faire une figure.
2. Démontrer que O est un point fixe par r .
3. Montrer que $OM = OM'$.
4. En déduire que r est une rotation dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Propriété 1.4.4. Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. La composée $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la rotation de centre O et d'angle $2\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$.

Preuve : le point O est invariant par $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$; car $\Delta \cap \Delta' = \{O\}$.

Soit $M \in \mathcal{P} - \{O\}$; posons $M_1 = s_{\Delta}(M)$ et $M' = s_{\Delta'}(M_1)$.

Montrons que $OM' = OM$ et $\widehat{(\vec{OM}, \vec{OM}')} = 2\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$.



$$\begin{aligned}
 \text{On a :} \\
 \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} &= \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1})} + \widehat{(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'})}. \\
 &= 2(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{u'}}). \\
 &= 2[(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{u'}})]. \\
 &= 2(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}}).
 \end{aligned}$$

On a $OM = OM_1$ et $OM_1 = OM'$; donc $OM = OM'$. ■

Remarque

Si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires , alors $2(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}}) = \hat{\pi}$ et $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ est la symétrie de centre O .

1.4.6 Décomposition d'une rotation

Activité 1.4.5. ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O . Soit A' , B' , C' les milieux respectifs $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée $s_{A'B} \circ s_{AC}$.
- Démontrer que $r(O, 2\frac{\pi}{3})$ est la composée deux symétries d'axes sécants.

Propriété 1.4.5. Soit $r(O, \alpha)$ une rotation de centre O et d'angle α ; pour toute droite (D) passant par O , il existe une unique droite (D') passant par O telle que $s_{D'} \circ s_D = r(O, \alpha)$.

Preuve

-Existence : Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$; et $\vec{u'}$ un vecteur tel que $\widehat{(\vec{u}, \vec{u'})} = \frac{\alpha}{2}$; soit $(D') = (O, \vec{u'})$; $s_{D'} \circ s_D = r(O, 2\widehat{(\vec{u}, \vec{u'})}) = r(O, \alpha)$; d'où l'existence de (D')

- unicité : soit (D'') une autre droite telle que $s_{D''} \circ s_D = r(O, \alpha)$; montrons que les droites (D'') et (D') sont confondues .

$$\Leftrightarrow (s_{D''} \circ s_D) \circ s_D = (s_{D'} \circ s_D) \circ s_D.$$

$$\Leftrightarrow s_{D''} \circ (s_D \circ s_D) = s_{D'} \circ (s_D \circ s_D).$$

$$\text{On a } s_{D''} \circ s_D = s_{D'} \circ s_D \Leftrightarrow s_{D''} \circ Id_P = s_{D'} \circ Id_P$$

$$\Leftrightarrow s_{D''} = s_{D'}$$

$$\Leftrightarrow D'' = D'. \blacksquare$$

1.4.7 Composée de deux rotations

Composée de deux rotations de même centre

Propriété 1.4.6. Soient r et r' deux rotations de centre O et d'angles respectifs α et α' tels que $\alpha + \alpha' \neq \hat{0}$ alors $r \circ r'$ est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$.

Cas particulier :

- si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{\pi}$, alors $r' \circ r$ est la symétrie de centre O .

Remarque : si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{0}$, alors $r' \circ r$ est l'application identique.

Composée de deux rotations de centres distincts

Propriété 1.4.7. Soient r et r' deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs α et α' :

- si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' \neq \hat{0}$, alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.
- si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{0}$, alors $r' \circ r$ est une translation.

Preuve

Soient M et N deux points distincts

Posons $r(M) = M_1$, $r(N) = N_1$, $r'(M_1) = M'$, $r'(N_1) = N'$ On a
 $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}) + (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}'$

De plus, $M'N' = M_1N_1 = MN$

Donc :

- si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' \neq \hat{0}$, alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.
- si $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{0}$, alors $r' \circ r$ est une translation.

Méthode

Soit $r(A, \alpha)$ la rotation de centre A et d'angle α ; $r(B, \beta)$ la rotation de centre B et d'angle β et tel que $A \neq B$. Pour déterminer le centre de la composée $r(B, \beta) \circ r(A, \alpha)$, on peut utiliser les droites (Δ) et (Δ') telles que : $r(A, \alpha) = s_{(AB)} \circ s_{(\Delta)}$ et $r(B, \beta) = s_{(\Delta')} \circ s_{(AB)}$

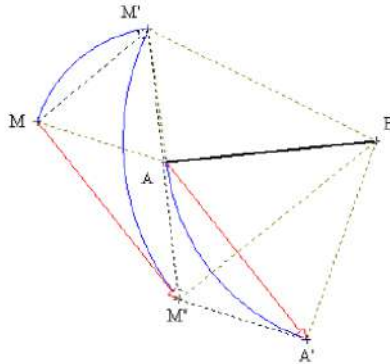


Figure 4 :
 $r'_{(B, -\hat{\alpha})} \circ r_{(A, \hat{\alpha})}(M) = M''$; $r'_{(B, -\hat{\alpha})} \circ r_{(A, \hat{\alpha})}(A) = A'$
 $\overline{MM''} = \overline{AA'}$

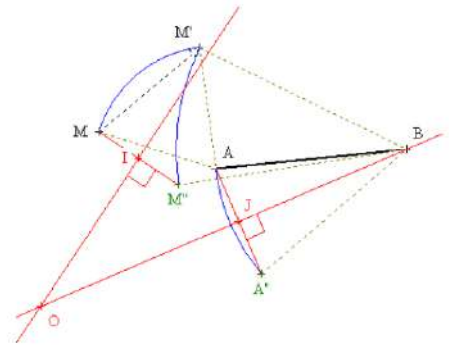


Figure 3 :
 $r'_{(B, \hat{\alpha}_2)} \circ r_{(A, \hat{\alpha}_1)}(M) = M''$; $r'_{(B, \hat{\alpha}_2)} \circ r_{(A, \hat{\alpha}_1)}(A) = A''$
 $[MM'']$ et $[AA'']$ ont des médiatrices sécantes

Exemple : Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct ; soit B' le milieu de [AC].

Alors :

1. $r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{3})}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

En effet,

$$r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{3})}(A) = B$$

$$\text{Donc } r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{3})} = t_{\overrightarrow{AB}}$$

2. $r_{(B, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(C, \frac{2\pi}{3})}$ est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$

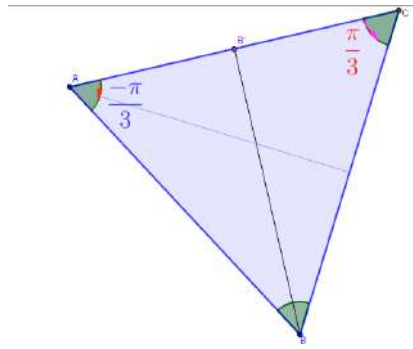
$$\text{De plus, } r_{(B, \frac{2\pi}{3})} = s_{(AB)} \circ s_{(BC)} \text{ et } r_{(C, \frac{2\pi}{3})} = s_{(BC)} \circ s_{(AC)}$$

$$\text{Donc } r_{(B, \frac{2\pi}{3})} = s_{(AB)} \circ s_{(AC)} = r_{(A, -\frac{2\pi}{3})} = r_{(A, \frac{4\pi}{3})}.$$

3. $r_{(A, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{3})}$ est une rotation d'angle π . Donc c'est une symétrie centrale.

$$\text{De plus, } r_{(A, \frac{2\pi}{3})} = s_{(AC)} \circ s_{(AB)} \text{ et } r_{(B, \frac{\pi}{3})} = s_{(AB)} \circ s_{(BB')}$$

$$\text{Donc } r_{(A, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{3})} = s_{(AC)} \circ s_{(BB')} = s_{B'}$$

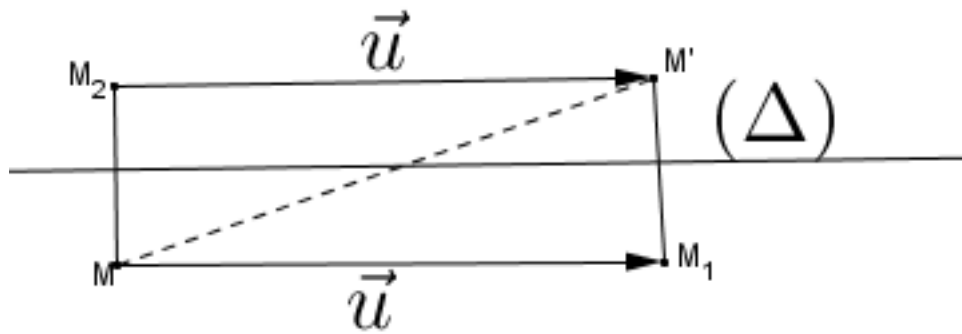


1.4.8 Composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation

Activité 1.4.6. Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$;

soit M un point ; M_1 l'image de M par $t_{\vec{u}}$; M' l'image de M_1 par s_{Δ} et M_2 l'image de M par s_{Δ}

1. Démontrer que $t_{\vec{u}(M_2)} = M'$.
2. En déduire que $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.
3. Démontrer que la transformation $s_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ n'admet pas de point invariant.



Définition 1.4.1. Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

On appelle symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$ la composée de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{u}$.

Nature de la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation

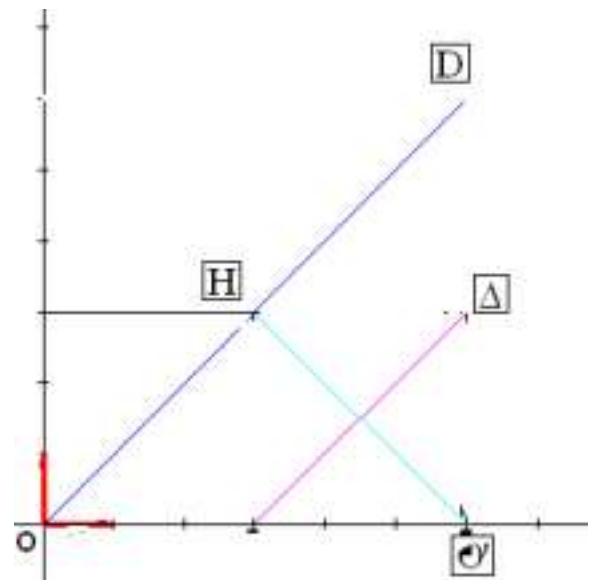
Activité 1.4.7. Soient O et O' deux points distincts du plan.

I) On considère (D) : la droite perpendiculaire à la droite (OO') en O ; et soit (D') la médiatrice du segment $[OO']$.

1. Déterminer $s_{(D')} \circ s_{(D)}$.
2. Déterminer $f = t_{\vec{OO'}} \circ s_{(D)}$.

II) On considère (D) une droite passant par O et non perpendiculaire à (OO') ; (Δ) la droite passant par le milieu de $[OO']$ et parallèle à (D) ; soit H le projeté orthogonal de O' sur (D) .

1. Déterminer $t_{\vec{HO}} \circ t_{\vec{OH}}$.
2. Déterminer $t_{\vec{HO}} \circ s_{(D)}$.
3. Déterminer $f = t_{\vec{OO'}} \circ s_{(D)}$.

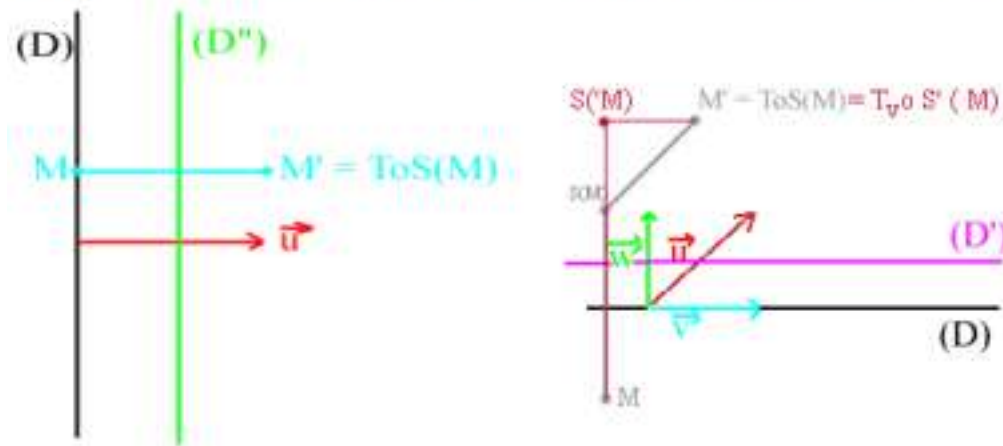


Propriété 1.4.8. Soit (D) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

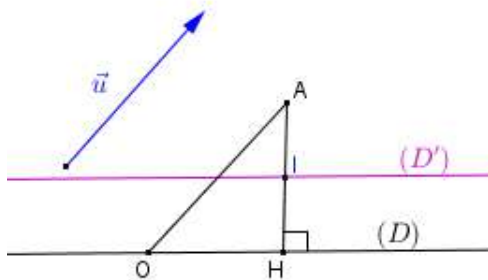
- si $\vec{u}$ est normal à (D) , alors $t_{\vec{u}} \circ s_{(D)}$ est une symétrie orthogonale
- si $\vec{u}$ n'est pas normal à (D) alors $t_{\vec{u}} \circ s_{(D)}$ est une symétrie glissée.

On voit sur les figures ci-dessous les deux cas.

Figure 1 : Le vecteur $\vec{u}$ est normal à (D) Figure 2: Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas normal à (D)



Preuve



Soit O un point de la droite (D) et A un point tel que $\vec{OA} = \vec{u}$. soit H le projeté orthogonal de A sur (D) ; I le milieu de $[AH]$ et (D') la droite parallèle à (D) passant par I

- si $\vec{u}$ est normal à (D) alors $t_{\vec{u}} = s_{(D')} \circ s_{(D)}$ et $t_{\vec{u}} \circ s_{(D)} = s_{(D')} \circ s_{(D)} \circ s_{(D)} = s_{(D')}$

- si $\vec{u}$ n'est pas normal à (D) alors $\vec{u} = \vec{OA} + \vec{HA}$

$t_{\vec{u}} \circ s_{(D)} = t_{\vec{OA} + \vec{HA}} \circ s_{(D)} = t_{\vec{OA}} \circ t_{\vec{HA}} \circ s_{(D)} = t_{\vec{OA}} \circ s_{(D')}$ et $\vec{OH}$ est un vecteur directeur de (D) . Donc $t_{\vec{OH}} \circ s_{(D')}$ est une symétrie glissée.

On en déduit que $t_{\vec{u}} \circ s_{(D)}$ est une symétrie glissée. Dans le cas où, la composée d'une symétrie orthogonale d'axe Δ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est une symétrie glissée, on a :

$t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$. Cette écriture d'une symétrie glissée s'appelle la forme canonique.

Propriété 1.4.9. Une symétrie glissée n'a pas de point invariant.

Preuve : raisonnons par l'absurde

supposons que $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$ a au moins un point invariant M ; alors

on a $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}(M) = M \iff s_{\Delta}(M) = M_1$ et $t_{\vec{u}}(M_1) = M$

On a $s_{\Delta}(M) = M_1 \implies \overrightarrow{MM_1} \cdot \vec{u} = 0$ et

$t_{\vec{u}}(M_1) = M \implies \overrightarrow{M_1M} = \vec{u}$.

On obtient $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$; soit $\vec{u} = \vec{0}$; ce qui contredit le fait que $\vec{u}$ est un vecteur non nul .

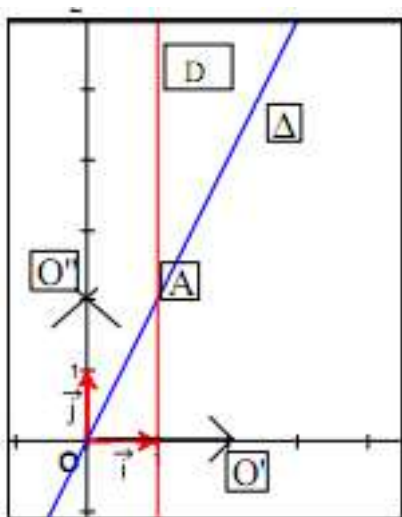
Donc $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}(M)$ n'a pas de point invariant. ■

1.4.9 Composée d'une rotation et d'une translation

Activité 1.4.8. Soient O et O' deux points distincts du plan ; on considère le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OO''})$ et soit r la rotation de centre O et d'angle α notée $r(O, \alpha)$.

Construire D la médiatrice de $[OO']$ et Δ la droite passant par O , sécante avec D en A telle que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OO''}}) = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer $s_D \circ s_{(OO')}$.
2. Déterminer $s_{(OO'')} \circ s_{\Delta}$.
3. Déterminer $t_{\overrightarrow{OO''}} \circ r(O, \alpha)$



Propriété 1.4.10. Soit r une rotation d'angle α non nul et t une translation ; $t \circ r$ est une rotation d'angle α .

Preuve : cette preuve ne donne aucune indication sur le centre de la rotation ; soient M et N deux points distincts du plan. Posons $r(M) = M_1$; $r(N) = N_1$, $t(M_1) = M'$, $t(N_1) = N'$

on a $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \hat{0}$

Donc $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}) + (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \hat{\alpha}$

De plus, $M'N' = M_1N_1 = MN$. Donc $t \circ r$ est une rotation d'angle α

MÉTHODE

Pour déterminer la composée $t_{\vec{u}} \circ r(O, \alpha)$ d'une rotation et d'une translation de vecteur non nul, on peut utiliser les droites (D) , (Δ) et (Δ') telles que :

- (D) est la droite passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$

- $r = s_D \circ s_{\Delta}$ et $t = s_{\Delta'} \circ s_D$. On a $t \circ r = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$.

1.4.10 Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale

Activité 1.4.9. Soit $r = r(O, \hat{\theta})$ une rotation de centre O et d'angle $\hat{\theta}$ et $s = s_{\Delta}$ une symétrie orthogonale d'axe (Δ).

- 1) On suppose que $O \in \Delta$. En utilisant la décomposition de r en symétries orthogonales, démontrer que $r \circ s$ est une symétrie orthogonale.
- 2) On suppose que $O \notin \Delta$. Démontrer que $r \circ s$ est une symétrie glissée.

Propriété 1.4.11. Soit r une rotation de centre O et s une symétrie orthogonale d'axe (Δ).

- Si $O \in \Delta$, alors $r \circ s$ ou $s \circ r$ est une symétrie orthogonale.
- Si $O \notin \Delta$, alors $r \circ s$ ou $s \circ r$ est une symétrie glissée.

Théorème

- La composée de deux isométries est une isométrie.
- Toute isométrie f se décompose de manière unique en la composée d'une translation et d'une isométrie g qui fixe O un point du plan
- La réciproque d'une isométrie plane est une isométrie plane.

1.5 Compléments sur les isométries

Triangles isométriques

Définition 1.5.1. On dit que des triangles ABC et A'B'C' sont isométriques ou superposables, s'il existe une isométrie f telle que les points A, B et C ont respectivement pour images A', B' et C'.

- Si f est un déplacement, on dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement superposables.
- Si f est un antidéplacement, on dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont superposables après retournement.

Théorème

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles.

Si $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$, alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Preuve

Supposons que $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$.

Démontrons qu'il existe alors une isométrie f qui transforme le triangle ABC en $A'B'C'$.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, B_1 et C_1 les images respectives de B et C par t .

Le théorème d'Al Kashi nous permet de déduire des égalités précédentes que les angles des deux triangles sont égaux deux à deux.

· Si $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$, alors : $(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'C_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$.

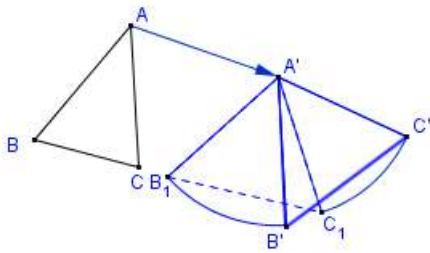
Donc $(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'B'}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'C_1}, \overrightarrow{A'C'}})$.

De plus, $A'B' = A'B_1$ et $A'C' = A'C_1$.

D'où $A'B'C'$ est l'image de $A'B_1C_1$ par la rotation r de centre A' et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'B'}})$.

Enfin, $A'B_1C_1$ est l'image de ABC par t .

Donc le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par le déplacement $r \circ t$.



· Si $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ alors :

$$(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'C_1}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$$

Soit la bissectrice de l'angle $\widehat{C_1A'C'}$ et $\vec{v}$ l'un de ses vecteurs directeurs ;

$$\text{On a : } (\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \vec{v}}) = (\vec{v}, \overrightarrow{A'C_1})$$

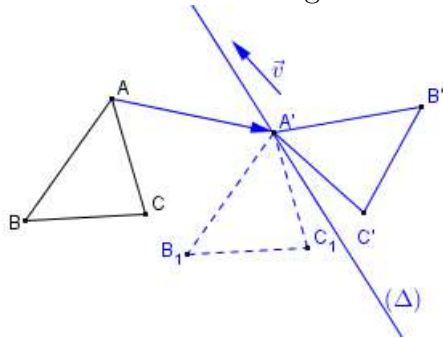
On a de plus : $A'C' = A'C_1$; donc, C' est l'image de C_1 par la symétrie orthogonale s_Δ .

$$\begin{aligned} \text{On a également : } (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \vec{v}}) &= (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) + (\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \vec{v}}) \\ &= -(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'C_1}}) - (\widehat{\overrightarrow{A'C_1}, \vec{v}}). \\ &= -(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \vec{v}}). \end{aligned}$$

De plus, $A'B' = A'B_1$; donc, B' est l'image de B_1 par s_Δ et $A'B'C'$ est l'image de $A'B_1C_1$ par s_Δ .

Enfin, $A'B_1C_1$ est l'image de ABC par t ;

Donc $A'B'C'$ est l'image de ABC par l'antidépacement $s_\Delta \circ t$.



1.6 Application

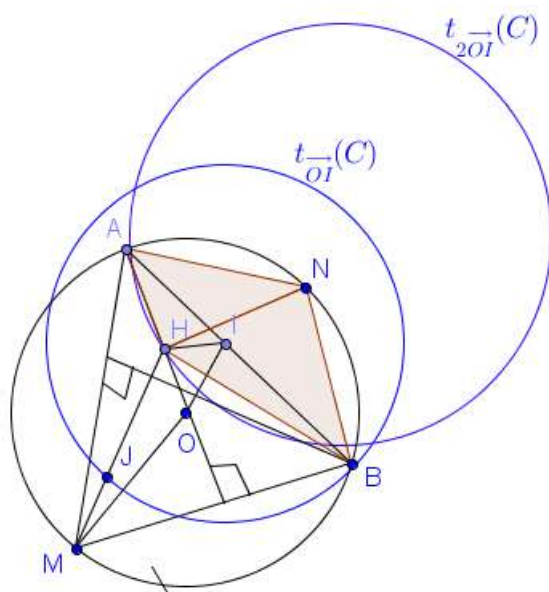
1.6.1 Isométries et recherche des lieux géométriques (cf.[2])

Soit (C) un cercle de centre O , A et B deux points de (C) , I le milieu du segment $[AB]$.

M étant un point du cercle (C) , distinct de A et B , on désigne par N le point diamétralement opposé à M sur C , H l'orthocentre du triangle MAB .

- 1) Quelle est la nature du quadrilatère $AHBN$?
- 2) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{MH}$.
- 3) Quel est le lieu des points H lorsque M décrit (C) privé des points A et B ?
- 4) Quel est le lieu des points J , milieu de $[MH]$, lorsque M décrit (C) privé des points A et B ?

Solution(cf.[1])



- 1) Puisque les droites (AH) et (BN) sont toutes perpendiculaires à (BC), alors elles sont parallèles.

De même, les droites (AN) et (BH) sont parallèles.

Le quadrilatère AHBN est donc un parallélogramme.

- 2) Ses diagonales [HN] et [AB] se coupent en leur milieu I.D'après la propriété de la droite des milieux appliquée au triangle MHN , on a : $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OI}$.

- 3) On désigne par $(\mathcal{C}')$ le cercle $(\mathcal{C})$ privé des points A et B. H est l'image de M par la translation $t_{\overrightarrow{OI}}$, donc H décrit $t_{\overrightarrow{OI}}(\mathcal{C}')$.

On remarque que H peut également être défini comme le symétrique de N par rapport à I . Lorsque M décrit (C') , N décrit également (C') , donc H décrit $s_I(C')$. les deux ensembles trouvés sont égaux.

- 4) J est le milieu de $[MH]$, donc : $\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{OI}$ et $J = t_{\overrightarrow{OI}}(M)$. Par conséquent , J décrit $t_{\overrightarrow{OI}}(\mathcal{C}')$.

1.6.2 Isométries et problèmes de construction

Example 1 (cf.[1])

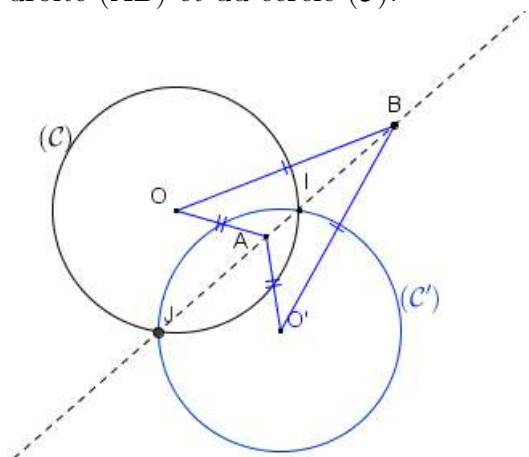
Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O , A et B deux points tels que O n'appartienne pas à la droite (AB) .

Construire, au compas, les points d'intersection de la droite (AB) et du cercle $(\mathcal{C})$.

Solution

Si on considère le cercle $(\mathcal{C})$, image de $(\mathcal{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (AB) , les points communs aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ appartiennent à la droite (AB) . D'où la construction suivante :

- construire le point O' , image de O par la symétrie orthogonale d'axe (AB) ;
- construire le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre O' et de même rayon que $(\mathcal{C})$;
- I et J , points d'intersection des cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, sont les points d'intersection de la droite (AB) et du cercle $(\mathcal{C})$.



Exemple 2 (cf.[1])

Soit (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites distinctes parallèles.

Construire un triangle équilatéral ABC tel que : $A \in (D_1)$, $B \in (D_2)$ et $C \in (D_3)$

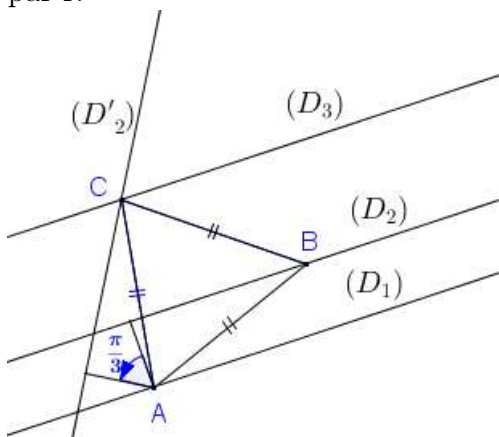
Solution (cf.[1])

Analyse d'une figure répondant à la question.

Soit ABC un triangle équilatéral, de sens direct, tel que : $A \in (D_1)$, $B \in (D_2)$ et $C \in (D_3)$.

La configuration "triangle équilatéral" conduit à considérer la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, par laquelle le point B a pour image le point C .

Le point C appartient à (D_3) et à l'image de (D_2) par r ; le point B est l'antécédent de C par r .



Synthèse : construction du triangle ABC .

D'après ce qui précède, pour construire un triangle ABC de sens direct répondant à la question, il suffit de suivre les étapes suivantes :

- choisir un point A quelconque de (D_1) ;
- construire l'image (D'_2) de (D_2) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; cette droite coupe la droite (D_3) en C ;
- construire le point B, antécédent de C par r .

Deux choix se sont présentés au cours de la construction :

- le choix du point A sur la droite (D_1) ;
- le choix du sens du triangle ABC, donc de l'angle de la rotation r .

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur des droites $(D_1), (D_2)$ et (D_3) et (Δ) une droite orthogonale à ces trois droites.

Connaissant un triangle ABC, solution, les translations de vecteurs $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) permettent de construire tous les triangles solutions de même sens et les symétries orthogonales s_Δ permettent de construire tous les triangles solutions de sens contraire.

Méthode :

Pour résoudre un problème de construction, on procède généralement en deux étapes : analyse et synthèse.

- L'analyse consiste à supposer le problème résolu et à étudier une figure répondant à la question pour en dégager les propriétés permettant sa construction.
- la synthèse consiste à construire la figure en utilisant les propriétés dégagées dans l'analyse, à justifier que la figure construite répond à la question et, éventuellement, à discuter le nombre de solutions au problème.

1.6.3 Isométries et démonstration des propriétés

Exemple 1 (cf.[2])

$ABCD$ et $AEFG$ sont des carrés de sens direct et H est le point tel que ADHE soit un parallélogramme.

Démontrer que les droites (BH) et (CG) sont perpendiculaires et que $BH = CG$.

Solution (cf.[2])

Désignons par :

- t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$;
- r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- C' le symétrique de C par rapport à B.

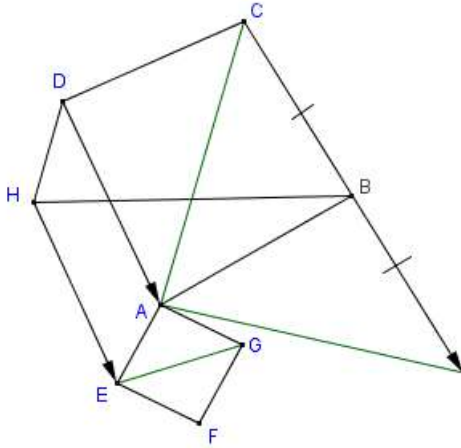
On a : $t_{\overrightarrow{DA}}(H) = E$; $t_{\overrightarrow{DA}}(B) = C'$;

$r(E) = G$; $r(C') = C$;

Donc $r \circ t(H) = G$, $r \circ t(B) = C$.

Or : $r \circ t$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$;

Donc $(BH) \perp (CG)$ et $BH = CG$.



Exemple 2 (cf.[2])

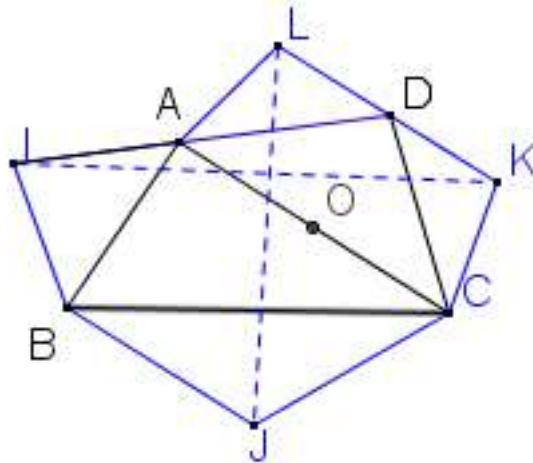
Soit ABCD un quadrilatère convexe de sens direct. On construit, à l'extérieur de ce quadrilatère, les triangles rectangles isocèles IAB, JBC, KCD, LDA de sommets respectifs I, J, K, L. On désigne par O le milieu de $[AC]$.

a) Soit r_I et r_J les rotations d'angles $\frac{\pi}{2}$ de centres respectifs I et J.

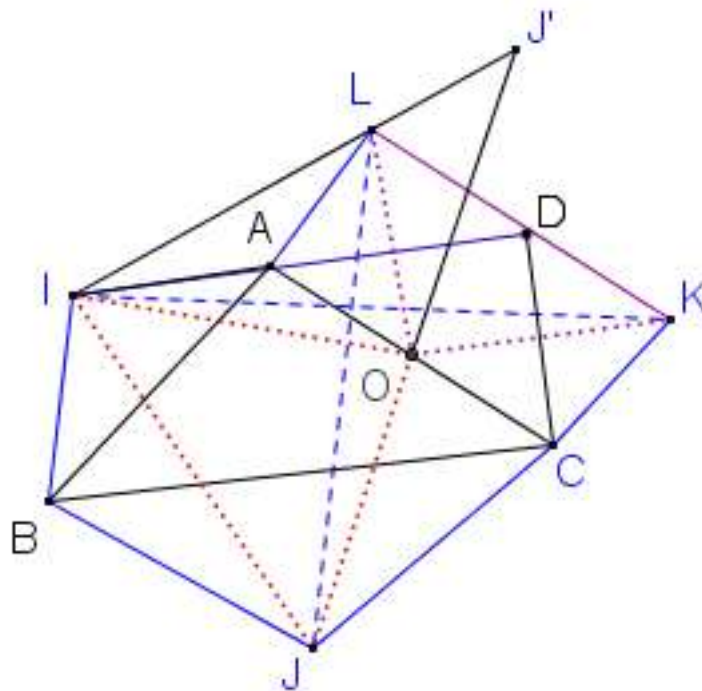
Étudier la transformation $r_I \circ r_J$. En déduire que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

b) Démontrer de même que le triangle Okl est rectangle isocèle en O.

c) Démontrer que $IK = JL$ et que les droites (IK) et (JL) sont perpendiculaires.



Solution : (cf.[2])



a) La composée de deux rotations d'angles $\frac{\pi}{2}$ respectivement est une symétrie centrale.
De plus, $r_I \circ r_J(C) = A$. Donc, le centre de cette symétrie est le milieu O de $[AC]$.
On a : $r_I \circ r_J(J) = s_O(J) = J'$, avec O milieu de $[JJ']$; donc : $r_I(J) = s_O(J) = J'$; le triangle JIJ' est rectangle isocèle en I et O est milieu de $[JJ']$.

Donc, le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

b) On démontrerait de même que, si r_K et r_L sont les rotations d'angles $\frac{\pi}{2}$ respectivement et de centres respectifs K et L, alors : $r_K \circ r_L = s_O$ et le triangle OKL est rectangle isocèle

en O.

c) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

L'image par r du segment $[IK]$ est le segment $[JL]$.

Donc, $IK = JL$ et les droites (IK) et (JL) sont perpendiculaires.

MÉTHODE

Configurations géométriques et transformations

Pour résoudre un problème de géométrie (lieu, construction, démonstration d'une propriété, ...), une transformation peut s'avérer utile. Le choix de cette transformation est suggéré par la configuration géométrique existante ou à construire :

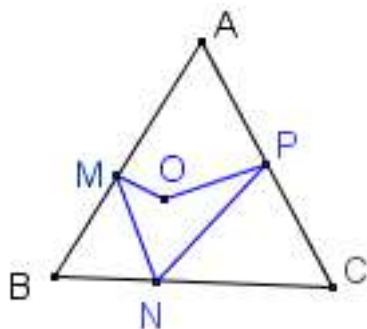
- points alignés, droites concourantes : toutes isométries et homothétie ;
- orthogonalité, parallélisme : toutes isométries et homothétie ;
- triangle isocèle : symétrie orthogonale ;
- triangle rectangle isocèle : symétrie orthogonale, rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- triangle équilatéral : symétrie orthogonale, rotations d'angles $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$;
- parallélogramme : symétrie centrale, translation ;
- rectangle, losange : symétrie centrale, symétrie orthogonale ;
- carré : symétrie centrale, symétrie orthogonale, rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- configuration de Thalès : homothétie.

1.6.4 Application des isométries à un problème d'optimisation

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de centre O.

Déterminer les points M, N, P situés respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ (à l'exclusion des extrémités) et tels que le quadrilatère OMNP ait un périmètre minimal.

Calculer, en fonction du côté a du triangle ABC, ce périmètre minimal.

**Solution** (cf.[1])

Par trois symétries orthogonales consécutives, on a : $MN = MN'$;

$NP = N'P' = N'P''$;

$PO = P'O' = P''O'' = P''\Omega$. Donc : $OM + MN + NP + PO = MN' + N'P'' + P''\Omega$.

Le trajet $OMN'p''\Omega$ sera minimum quand il sera effectué en ligne droite.

Donc, pour déterminer le trajet minimum :

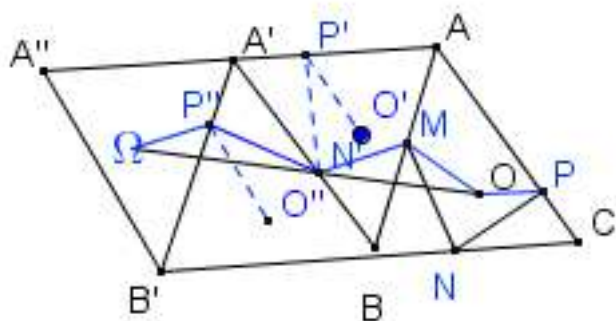
- tracer la droite $(O\Omega)$ qui coupe les droites $(AB), (A'B), (A'B')$ respectivement en M, N', P'' ;
- construire les points N et P, antécédents respectifs des points N' et P'' par les symétries successives.

Par symétrie, on a :

- N' milieu de $[A'B]$, donc N milieu de $[BC]$;
- la droite (AO) est un axe de symétrie pour la quadrilatère OMNP. Soit p le périmètre minimal.

On a : $p = 2(OM + MN) = 2O'N$. $O'N^2 = O'B^2 + BN^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}$.

Donc $p = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.



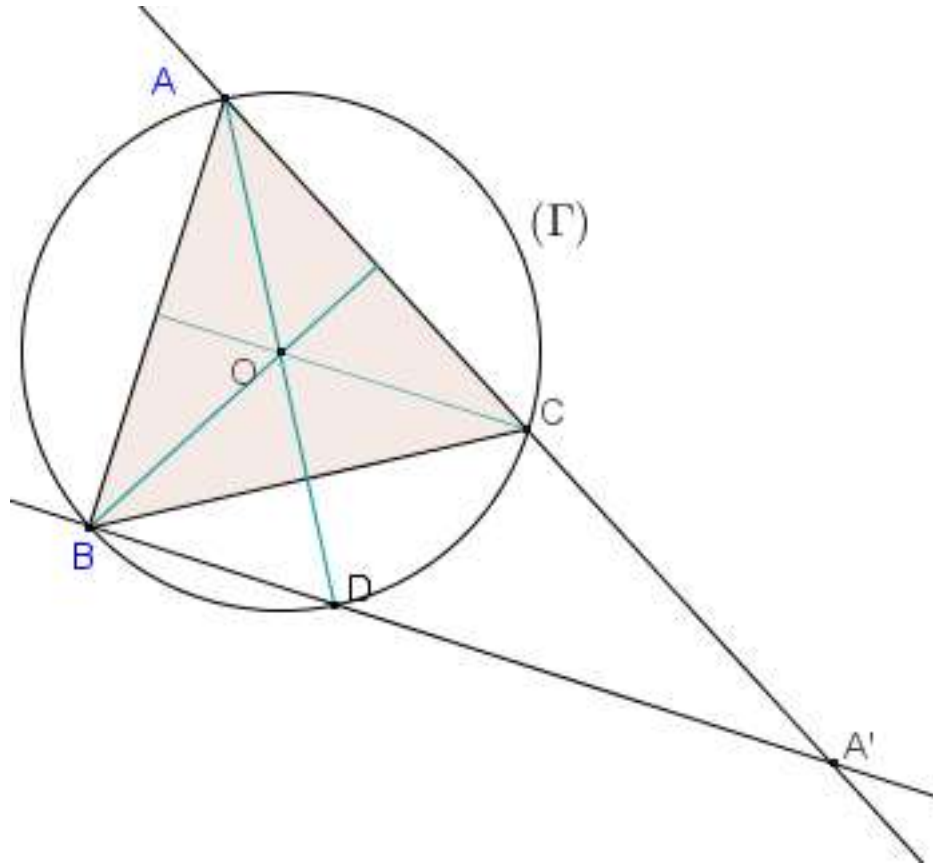
-

3. Les droites (DC) et (AC) sont sécantes en C. Donc f est une rotation de centre C.
Notons par α son angle ; on a $s_{(DC)} \circ s_{(AC)} = r(C, 2(\widehat{\overrightarrow{CA}}, \widehat{\overrightarrow{CD}}))$.
D'où $\alpha = 2(\widehat{\overrightarrow{CA}}, \widehat{\overrightarrow{CD}}) = 2(\frac{-\pi}{4}) = \frac{-\pi}{2}$.
Donc f est la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.
4. On a $\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$ et $f(A) = A'$: où A' est le symétrique de A par rapport à (d).
Alors f est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AD}$.
5. On a $t_{2\overrightarrow{AD}} = s_{(DC)} \circ s_{(AB)}$; $r(A, \frac{-\pi}{2}) = s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$.
 $f = s_{(DC)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AC)} = s_{(DC)} \circ s_{(AC)} = r(C, \frac{-\pi}{2})$ d'après iii).
Donc f est un quart de tour à droite.

Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par ($\mathcal{C}$) le cercle circonscrit à ABC et O son centre. La médiatrice de [BC] coupe ($\mathcal{C}$) en A et D. On note A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

- 1) Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
 - a) $s_{(BD)} \circ s_{(DC)}$.
 - b) $s_{(CA)} \circ s_{(AB)}$.
 - c) $s_{(DC)} \circ s_{(CA)}$.
- 3) On note $f = s_{(BD)} \circ s_C \circ s_{(AB)}$.
 - a) Déterminer $f(A)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de f .
 - b) En déduire la nature de la transformation $s_{(BD)} \circ s_C$.



Solution

1) Démontrons que $A' = s_C(A)$

La droite (CO) coupe les segments [AD] et [AB] en leurs milieux. D'après la propriété de la droite des milieux, (OC) est parallèle à (BD), O est le milieu de [AD] et la droite (OC) est parallèle à DA'. En appliquant la propriété de la droite des milieux dans le triangle ADA', C est le [AA']. Donc A' est le symétrique de A par rapport à C.

2 Détermination de la nature et des éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a) $s_{(BD)} \circ s_{(DC)}$ On a $(BD) \cap (DC) = D$ et $s_{(BD)} \circ s_{(DC)} = r(D, 2(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}))$ or
 $\text{mes}(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) = \pi - \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2k\pi$
 $= \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 Alors $s_{(BD)} \circ s_{(DC)} = r(D, \frac{4\pi}{3})$

b) $s_{(CA)} \circ s_{(AB)} = r(A, 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) = r(A, \frac{2\pi}{3})$.

c) $s_{(DC)} \circ s_{(CA)} = r(A, 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})) = r(C, 2\pi(\frac{\pi}{2})) = r(C, \pi) = s_C$.

$$3) \quad f = s_{(BD)} \circ s_C \circ s_{(AB)}.$$

a) $f(A) = s_{(BD)} \circ s_C \circ s_{(AB)}(A) = s_{(BD)} \circ s_C(A) = s_{(BD)}(A') = A'.$

D'après la question 2) $s_C = s_{(DC)} \circ s_{(CA)}$ alors $f = s_{(BD)} \circ s_{(DC)} \circ s_{(CA)} \circ s_{(AB)}$.

D'après la question 1) $s_{(BD)} \circ s_{(DC)} = r(D, \frac{4\pi}{3})$ et $s_{(CA)} \circ s_{(AB)} = r(A, \frac{2\pi}{3})$.

D'où $f = r(D, \frac{4\pi}{3}) \circ r(A, \frac{2\pi}{3})$. Mais $\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$. Donc f est une translation ; comme $f(A) = A'$, alors $f = t_{\overrightarrow{AA'}}$

b) Nature de $s_{(BD)} \circ s_C$

$f = s_{(BD)} \circ s_C \circ s_{(AC)} = t_{\overrightarrow{AA'}} \Rightarrow s_{(BD)} \circ s_C = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ s_{(AC)}$. Mais $\overrightarrow{AA'}$ n'est pas un vecteur normal à (AC) donc $s_{(BD)} \circ s_C$ est une symétrie glissée.

Exercice non corrigés

Exercice 3

Soit f l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même définie par l'expression analytique suivante :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y) \end{cases} . \text{ Montrer que } f \text{ est une isométrie.}$$

Exercice 4

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.

1. Déterminer les images des points A et B par la rotation de centre A , d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Déterminer l'image de la droite (AB) par la rotation de centre O , d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

Exercice 5

Soient ABCD un rectangle de centre O, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] ; K et L les milieux respectifs des segments [AD] et [BC]. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IB}$ et s la symétrie orthogonale d'axe (IJ).

Déterminer les images respectives des points A, D, K et O par t , puis par s .

Exercice 6

- 1) Déterminer l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe $-2 + 3i$.
- 2) Déterminer la translation dont l'écriture complexe est $z' = z + 4 - i$.

Exercice 7

- 1) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre $A(-3 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- 2) Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation d'écriture complexe $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + i$.

Exercice 8

Soit ABC un triangle équilatéral et A',B',C' les milieux respectifs de [BC],[CA],[AB].

- 1 Quelle est la transformation $s_{(BC)} \circ s_{(B'C')}$?
- 2 Déterminer la droite Δ telle que : $s_{(AA')} \circ s_{\Delta} = t_{\overrightarrow{BC}}$.

Exercice 9

ABCD est un parallélogramme. Citer une translation transformant (AB) en (CD) et (AD) en (BC).

Exercice 10

ABCD est un carré. Soit (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives de $[AB]$ et $[BC]$.

Déterminer les images des points A,B,C et D par la transformation $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$.

Quelle est la nature de cette transformation ?

Exercice 11

On considère l'homothétie $h(O, k)$. Pour quelles valeurs de k h est-elle une isométrie ?

Exercice 12

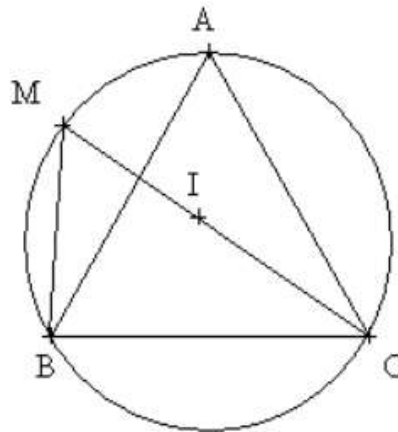
On considère un parallélogramme ABCD.

Déterminer les images des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ par la projection p sur la droite (DC), parallèlement à la droite (AD).

La projection p est-elle une isométrie ? **Exercice 13**

Soit ABC un triangle équilatéral direct (Γ) l'arc $\widehat{AB}$ du cercle circonscrit au triangle ABC ne contenant pas C ; M le point de (Γ) . Soit I le point du segment $[MC]$ tel que $MA = MI$ et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Montrer que $MB = MI$ et déduire que $MA + MB = MC$.



exo.png

Exercice 14

Soit f la symétrie glissée de forme analytique :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$$

Déterminer la forme canonique de f .

Exercice 15

ABCO est un parallélogramme.

- 1) Démontrer que : $s_B \circ s_A = s_C \circ s_0$.
- 2) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $s_C \circ s_B \circ s_A$.
- 3) Construire l'image de ABCO par cette transformation.

Exercice 16

Quelle est l'image par une isométrie d'un carré ? d'un rectangle ? d'un losange ? Justifier chaque réponse.

Exercice 17

On considère un cercle (Γ) de centre O et un point M de ce cercle. Soit A et B deux points distincts tels que la droite (AB) n'ait aucun point commun avec (Γ) .

- 1) Construire le point N tel que NBMA soit un parallélogramme.
- 2) Quel est le lieu du point N lorsque le point M décrit le cercle (Γ) ?

Exercice 18

Soient ABC et AB'C' sont deux triangles rectangles isocèles en A et de sens direct.

Démontrer que : $BB' = CC'$ et $(BB') \perp (CC')$.

Exercice 19

ABC est un triangle tel que : $Mes(\widehat{AB, AC}) = \frac{\pi}{3}$ et $AB < AC$. On désigne par (Γ) le cercle circonscrit à ABC et O son centre. Soit E le milieu de [BC] et P le point de [AC] tel que $AB = CP$. La droite (OE) coupe (Γ) en I et J, tels que J et A soient sur le même arc de corde [BC].

- 1.a) Faire une figure.
- b) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que : $Mes(\widehat{AB, AC}) = \frac{\pi}{3}$?
- 2.a) Justifier qu'il existe une unique rotation r telle que : $r(A) = P$ et $r(B) = C$.
Déterminer son angle.
- b) Démontrer que son centre est un point de (Γ) , que l'on précisera.
- c) Quelle est la nature du triangle JAP ?
- 3.a) Déterminer l'image de B par $r \circ S_B$, où S_B est la symétrie de centre B.
- b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r \circ S_B$.

Exercice 20

Soit (D) une droite et A, B deux points extérieurs à cette droite. À tout point M de (D), on associe le point M', second point d'intersection du cercle de centre A et de rayon AM

avec le cercle de centre B et de rayon BM.

Déterminer le lieu géométrique des points M' lorsque le point M décrit la droite (D).

Exercice 21

(C) est un cercle de centre O et A un point de (C). Soit M un point de (C) et P le point tel que [MP] est un diamètre de (C). La droite (AP) et la parallèle à (OA) passant par M se coupent en un point N.

Déterminer le lieu de N lorsque M décrit (C).

Exercice 22

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $Mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) O est le centre du triangle, I, J, K les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{5}{3}\overrightarrow{CA}$.

- Déterminer deux nombres réels a et b tels que I soit le barycentre de (A, a) et (B, b).
- En utilisant la rotation de centre O qui transforme A en B, démontrer que O est le centre de gravité du triangle.

Exercice 23

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose : $N = r_1(M)$ et $M' = r_2(N)$.

Soit r la transformation telle que : $r = r_2 \circ r_1$

1) Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB) et Ω le milieu du segment [BD].

Déterminer $r(B)$. En déduire la nature de r.

2.a) Démontrer que les points M, N et M' sont alignés si et seulement si : $Mes(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$.

b) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, N et M' sont alignés est un cercle passant par les points A et Ω.

Construire (Γ).

Exercice 24

ABCD est un carré de sens direct et de centre O. Soit r le quart de tour direct de centre O et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Caractériser les transformations $r \circ t$ et $t \circ r$.

Exercice 25

ABCD est un rectangle tel que : $AD = 2AB$.

1. Construire les points E et G tels que :

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

2. Démontrer qu'il existe deux rotations, dont on déterminera les éléments caractéristiques, qui transforment le rectangle ABCD en le rectangle AEFG.

Exercice 26

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

- 1) Déterminer deux isométries f et g transformant le couple (A, B') en le couple (B, C').
- 2) Préciser l'image du couple (C, A') par chacune de ces transformations.

Exercice 27

AOB est un triangle de sens direct. Soit r le quart de tour direct de centre O.

On note C, D et A' les points tels que : $C = r^{-1}(A)$, $D = r(B)$ et $A' = r \circ r(A)$

Démontrer que : $A'B = CD$ et $(A'B) \perp (CD)$.

Exercice 28

ABCD est un carré de sens direct et de centre I, (Γ) est le cercle passant par A, B, C, et D.

Faire une figure.

On désigne par :

- t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$,
- r_D la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$,
- r_1 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$,
- r_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

On se propose de déterminer les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$f = t \circ r_D ; g_1 = r_1 \circ f ; g_2 = r_2 \circ f.$$

- 1) Démontrer que f, g_1 et g_2 sont des rotations, dont on précisera les angles.
- 2.a) Déterminer $f(D)$ et $f(A)$. Quel est le centre de f ?
- b) Déterminer $g_1(D)$ et $g_2(D)$.
- 3) Soit $A'_1 = g_1(A)$ et $A'_2 = g_2(A)$.
 - a) Démontrer, en utilisant $g_2 \circ g_1^{-1}$, que A est le milieu du segment $[A'_1 A'_2]$.
 - b) Démontrer, en déterminant une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'_1}})$, que A'_1 est sur la tangente en A à (Γ) .

4.a) Soit J le centre de g_1 et K celui de g_2 . Démontrer que J et K appartiennent à (Γ) et sont diamétralement opposés. Placer J et K sur la figure.

b) Démontrer que A'_1 est sur la droite (JB) .

Placer les points A'_1 et A'_2 sur la figure.

Exercice 29

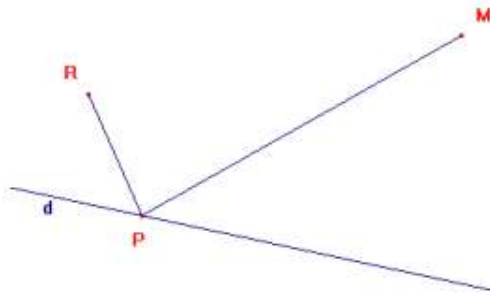
$ABCD$ est un quadrilatère convexe.

On construit les points F et E , images respectives des points B et D par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que l'aire de $BDEF$ est le double de l'aire de $ABCD$.

Exercice 30

Sur la figure ci-après, Remy est en un point R d'une plage et détient un seau vide. Sa sœur Marie est en un autre point de cette même plage où elle construit un château de sable. Remy doit lui apporter un seau d'eau qu'il compte chercher en un point P sur le bord rectiligne (d) de la mer.



Question : Déterminer l'emplacement de P pour que la longueur $RP + PM$ du chemin parcouru par Remy soit minimale.

Indication : (on pourra utiliser le symétrique de R par rapport à (d) et que $RP = R'P$).

♣ Bibliographie et Webographie ♣

Bibliographie

- [1] Charles MVOMO OTAM et al Majors en Mathématiques Terminale C, **ASVA EDUCATION, 2012.**
- [2] Christophe AKELE et al **CIAM 1^{re} sciences Mathématiques, EDICEF 1998.**
- [3] Taïrou ALASSANE et al **CIAM T^{le} sciences Mathématiques, EDICEF 1999.**

Webographie

- [4] [http ://www. Maths TICE de Adama Traoré/ Lycée Technique Bamako.](http://www.MathsTICE.deAdamaTraoré/LycéeTechniqueBamako)
- [5] [http ://www.maths.u-psud.fr/perrin/c....](http://www.maths.u-psud.fr/perrin/c....)
- [6] [formatif.e-monsite.Com/medias/files/ddm-geo.pdf.](http://formatif.e-monsite.Com/medias/files/ddm-geo.pdf)
- [7] [http ://www.maths.u-psud.fr/get-file/isométries du plan.](http://www.maths.u-psud.fr/get-file/isométriesduplan)

SIMILITUDES DIRECTES PLANES

MOUNTOUMJOU ABDEL AZIZ

le 11 octobre 2012

Table des matières

1 INTRODUCTION	3
2 GENERALITES	3
3 DEFINITIONS	4
3.1 Similitudes planes	4
3.2 Similitudes directes planes	6
4 FORME REDUITE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE	9
5 EXPRESSION COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE	9
6 PROPRIETE CARACTERISTIQUE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE	13
7 EXISTENCE ET UNICITE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE	14
8 EXPRESSION ANALYTIQUE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE	16
9 ELEMENTS GEOMETRIQUES D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE	17
10 COMPOSITION DE SIMILITUDES DIRECTES PLANES	20
11 SIMILITUDES DIRECTES ET CONFIGURATIONS DU PLAN	21
12 UTILISATION DES SIMILITUDES DIRECTE PLANES	22
12.1 Rechercher les lieux géométriques	22
12.2 Problèmes de construction	23
12.3 Démonstration des propriétés	24
13 EXERCICES ET PROBLEMES	25

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES OPERATIONNELS

Au terme de cette ressource, l'apprenant doit être capable de :

1. Définir les similitudes
2. Déterminer la forme réduite des similitudes directes planes
3. Donner les éléments géométriques d'une similitude directe
4. Maîtriser la composée des similitudes directes planes
5. Construire les images des figures simples
6. Dédurre une image à l'aide des similitudes directes
7. Utiliser les similitudes directes planes pour construire, rechercher les lieux géométriques et démontrer les propriétés

PLACE DE LA RESSOURCE DANS LE PROGRAMME

Les similitudes directes devraient s'enseigner après les leçons sur les nombres complexes et les isométries.

PRE-REQUIS

L'apprenant doit connaître :

1. La notion de distance entre deux points et ses propriétés
2. La notion d'application et de composition des applications
3. La notion de barycentre et ses propriétés
4. Les homothéties et leurs utilisations
5. Les isométries du plan et leurs utilisations
 - (a) Composition (symétries-translations, rotations-translations)
 - (b) Classification des isométries (déplacements, antidéplacements et leurs compositions)
6. Les nombres complexes
 - (a) Formes algébriques et opérations
 - (b) Conjugué et module

- (c) Forme trigonométrique
- (d) Notation exponentielle
- (e) Résolution des équations dans $\mathbb{C}$ et des systèmes d'équations à deux inconnues
- (f) L'expression complexe d'une transformation du plan
- (g) Caractérisations des configurations du plan à l'aide des nombres complexes

HISTORIQUE ET MOTIVATION

Les notions d'homothétie et de rotation sont connues depuis les classes de Troisième et celles de similitudes en classe de Premières scientifiques. Les applications de cette dernière transformation en physique sont d'une grande importance comme en optique physique. Plus couramment, deux objets sont semblables si l'un est l'image de l'autre par une similitude. Plus généralement, une similitude agrandit ou réduit la taille de l'image d'un objet.

UTILISATIONS FUTURES

Les similitudes directes du plan nous permettent de résoudre plus facilement certains problèmes de mathématiques physiques liés à la pratique dans la vie courante.

1 INTRODUCTION

2 GENERALITES

En classe de Première, les similitudes sont définies comme la composée d'une isométrie et d'une homothétie. Ici, la notion sera plus approfondie. L'utilisation des nombres complexes facilitera l'étude des éléments caractéristiques de cette transformation géométrique.

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

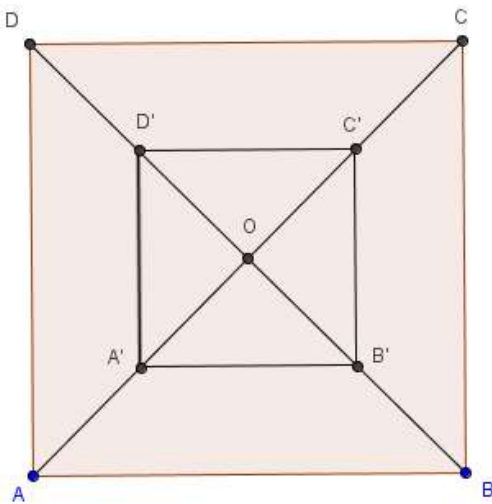
3 DEFINITIONS

3.1 Similitudes planes

Activité. Soit $ABCD$ un carré direct de centre O ; A' , B' , C' et D' les milieux respectifs des côtés $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ et $[OD]$. Soit f l'application du plan dans lui même qui transforme les points A , B , C , D respectivement en A' , B' , C' , D' et conservant le barycentre de deux points.

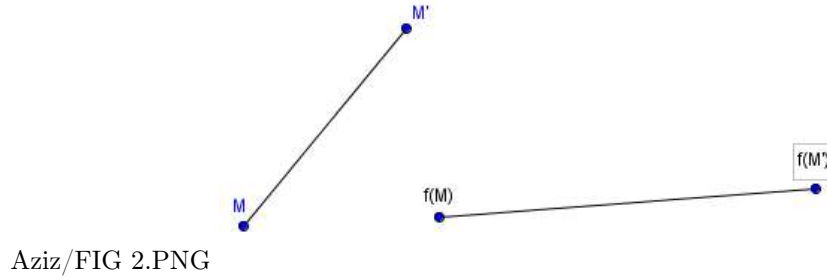
1. Démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$, (BC) et $(B'C')$, (CD) et $(C'D')$, (AD) et $(A'D')$ sont parallèles.
2. Démontrer que $A'B' = \frac{1}{2}AB$, $B'C' = \frac{1}{2}BC$, $C'D' = \frac{1}{2}CD$ et $A'D' = \frac{1}{2}AD$.
3. (a) Quelle conjecture peut faire pour l'application f ?
 (b) Montrer que si M est un point du plan, M est le barycentre des points A, B et C .

Déduire que $\forall M, N \in \mathcal{P}, f(M)f(N) = \frac{1}{2}MN$.



Aziz/FIG 1.PNG

Définition 1. On appelle *similitude plane* toute application f du plan dans lui-même telle que :
 $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall M, N \in \mathcal{P}, f(M)f(N) = kMN$. k est le rapport de la similitude f .

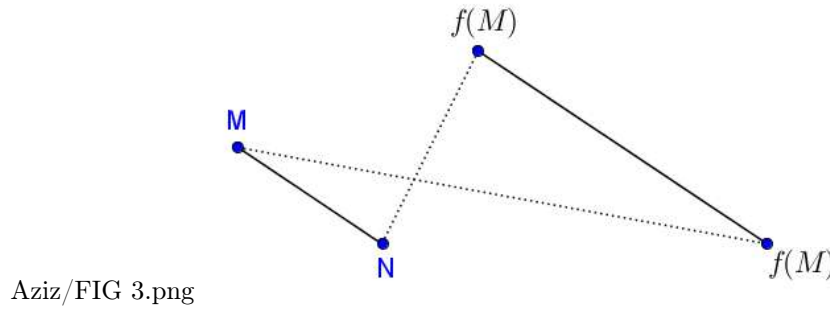


Exemple 1. 1. Toute homothétie h de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$ est une similitude plane de rapport $|k|$.

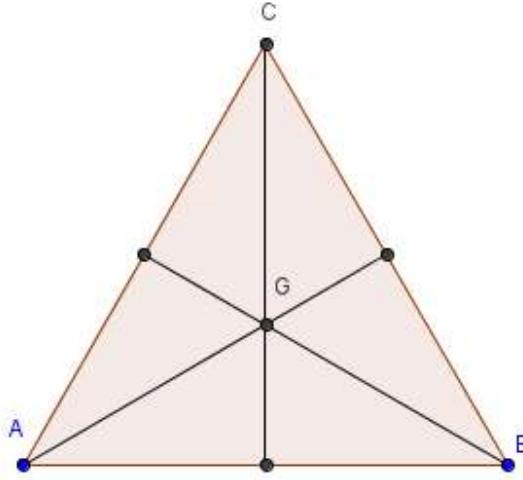
En effet, $\forall M, N \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{h(M)h(N)} &= k\overrightarrow{MN} \implies \|h(M)h(N)\| = \|kMN\| \\ &\implies \|h(M)h(N)\| = |k|\|MN\| \\ &\implies h(M)h(N) = |k|MN. \end{aligned}$$

(2)



2. Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre G et s la réflexion d'axe (AG) . On a :
 $s(A) = A$, $s(B) = C$ et $s(G) = G$, c'est-à-dire que $s(AB) = s(A)s(B) = AC = AB$ et
 $s(GB) = s(G)s(B) = GC = GB$. Donc s conserve le rapport des distances. Ainsi s est
une similitude plane.



Aziz/FIG 4.PNG

3. Toute isométrie du plan est une similitude plane de rapport 1.

En effet, soit f une isométrie du plan ; $\forall M, N \in \mathcal{P}, f(M)f(N) = MN \implies f(M)f(N) = kMN$ avec $k = 1$.

Remarque 1. 1. Une homothétie conserve les angles orientés. Si h est une homothétie, alors
 $\forall A, B, C, D \in \mathcal{P}, \widehat{\overrightarrow{h(A)h(B)}, \overrightarrow{h(C)h(D)}} = \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}$.

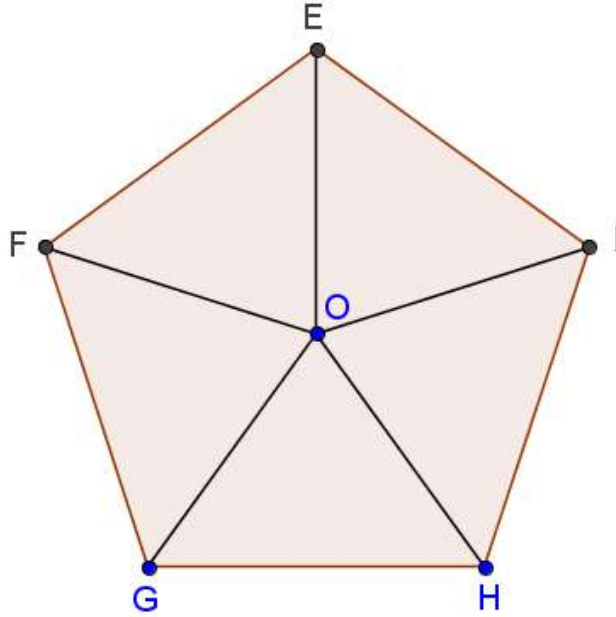
2. Une réflexion conserve les angles orientés. Si s est une réflexion, alors $\forall A, B, C, D \in \mathcal{P}, \widehat{\overrightarrow{s(A)s(B)}, \overrightarrow{s(C)s(D)}} = \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}$.

Les similitudes conservent les angles géométriques.

3.2 Similitudes directes planes

Activité. Soit $EFGHI$, un pentagone régulier direct de centre O et f l'application du plan dans lui même qui transforme les points E, F, G, H, I respectivement en F, G, H, I, E et conservant le barycentre des points.

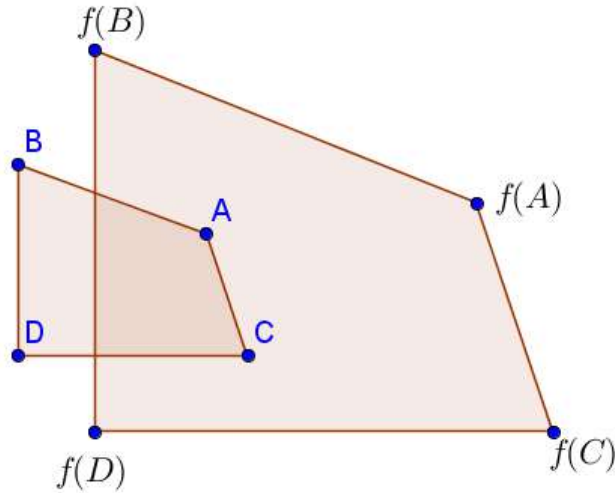
1. Que peut-on dire des angles $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}), (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}), (\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}), (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OI})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE})$.
2. Démontrer que : $\widehat{\overrightarrow{f(O)f(E)}, \overrightarrow{f(O)f(F)}} = \widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}}$ et $\widehat{\overrightarrow{f(O)f(F)}, \overrightarrow{f(O)f(H)}} = \widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH}}$.



Aziz/FIG 5.png

3. Que peut-on conjecturer pour $\widehat{\overrightarrow{f(M)f(N)}, \overrightarrow{f(M')f(N')}} , \forall M, N, M', N' \in \mathcal{P}$?

Définition 2. Une similitude directe plane est une similitude plane f qui conserve les angles orientés c'est-à-dire que $\forall ABCD \in \mathcal{P}, \widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(C)f(D)}} = \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}$.



Aziz/FIG 6.PNG

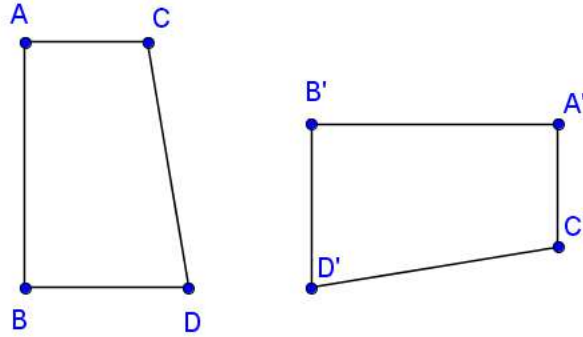
Note

Toute similitude directe plan qui n'est pas directe est dite indirecte ou rétrograde.

Exemple 2. 1. Toute homothétie est une similitude directe plane. En effet, si h est une similitude, alors $\forall M, N, M', N' \in \mathcal{P}, \widehat{\overrightarrow{h(M)h(N)}, \overrightarrow{h(M')h(N')}} = \widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}$.

2. Toute rotation est une similitude directe plane. En effet, si r est une rotation, alors

$$\forall M, N, M' N' \in \mathcal{P}, \text{ on a : } \begin{cases} r(M')r(N') = M' N' \\ r(M)r(N) = MN \\ \widehat{\overrightarrow{mes(r(M)r(N))}, \overrightarrow{mes(r(M')r(N'))}} = \widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M' N'}}. \end{cases}$$

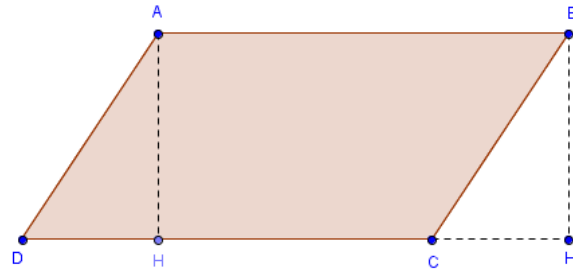


Aziz/FIG 7.PNG

3. Soit $ABCD$ parallélogramme de sens direct, H et H' les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite (DC) . On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a $t(A) = B$, $t(D) = C$ et $t(H) = H'$ c'est-à-dire que $t(ADH) = BCH'$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AH}) &= \text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH'}) \\ \text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH}) &= \text{mes}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CH'}) \\ \text{mes}(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HD}) &= \text{mes}(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) \end{aligned}$$

Donc t conserve les rapports les angles orientés : c'est une similitude directe plane.



Aziz/FIG 8.PNG

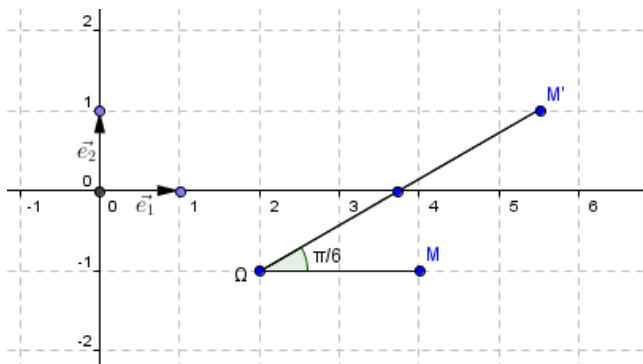
Proposition 1. Une similitude directe est la composée d'un déplacement (translation ou rotation) et d'une homothétie.

4 FORME REDUITE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Activité.

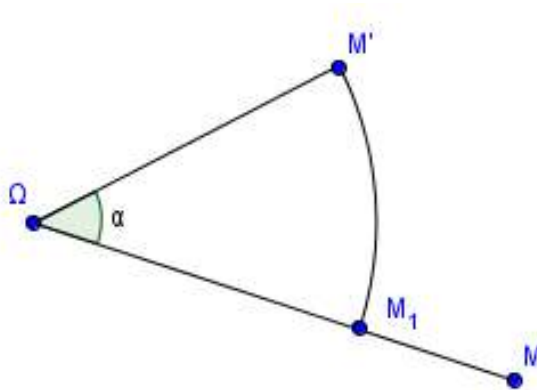
Proposition 2. : Soient k un réel strictement positif et f une similitude directe plane de rapport k .

- Si f n'a pas de point invariant, alors f est une translation du plan de vecteur non nul.



Aziz/FIG 9.PNG

- Si f a au moins un point invariant Ω , alors il existe un unique angle α tel que l'on ait $f = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \alpha)$.



Aziz/FIG 11.PNG

Si f n'est pas l'identité du plan, et si f admet au moins un point invariant Ω , alors ce point est le seul point invariant.

L'application f est déterminée par la donnée de Ω , k et α . On dit que f est la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle α et on note souvent $s(\Omega, k, \alpha)$.

La décomposition $h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \alpha)$ ou tout simplement $h \circ r$ est appelée forme réduite de f .

5 EXPRESSION COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Activité. Soit f une similitude directe de rapport k . Elle est composée d'un déplacement g et d'une homothétie h de rapport k .

1. Démontrer que l'expression complexe de g est : $g(z) = az + b$ où a est un nombre complexe de module 1 et b un nombre complexe quelconque.
2. Démontrer que l'expression complexe de h est $h(z) = kz + d$ où k est le rapport le rapport de l'homothétie (donc un nombre réel non nul) et d un nombre complexe quelconque.
3. En Dédurre l'expression complexe de f .

Théorème 1. Soit f une similitude directe (de rapport k et d'angle θ). Alors, f admet une expression complexe de la forme $f(z) = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$.

Démonstration. Soit f une similitude directe de rapport k et d'angle θ . Il est à remarquer que si f a une expression complexe de la forme $z' = az + b$, alors O a pour image O' d'affixe b .

Appelons donc b l'affixe de O' image de O par f et soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par f .

Alors $O'M' = kOM$, donc $|z' - b| = k|z - 0|$, soit $|\frac{z'-b}{z}| = k$.

De plus, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \theta$.

Donc $\arg(z' - b) - \arg(z - 0) = \theta$, soit $\arg(\frac{z'-b}{z}) = \theta$.

$\frac{z'-b}{z}$ est le nombre complexe de module k et d'argument θ , donc $\frac{z'-b}{z} = ke^{i\theta}$.

D'où f s'écrit $z' = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$ et $k \neq 0$ donc $a \neq 0$.

Activité. Soit s une application du plan dans lui-même dont l'expression complexe est de la forme $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b .
2. Montrer que si $a \neq 1$, alors l'écriture complexe de s est $z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$ où ω est la solution de l'équation $z = az + b$, k le module de a et α un argument de a . En déduire que $s = h \circ r = r \circ h$.

Théorème 2 (Réciproque). Soient a et b deux nombres complexes.

Toute transformation f admettant une expression complexe de la forme $az + b$ avec $a \neq 0$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \arg a$.

Démonstration. Soient M et N deux points quelconques du plan d'images respectives M' et N' par f .

On a $z_{N'} = az_N + b$ et $z_{M'} = az_M + b$.

Alors $z_{N'} - z_{M'} = a(z_N - z_M)$.

D'où $|z_{N'} - z_{M'}| = |a| |z_N - z_M|$.

Donc $M'N' = |a| MN$ et $a \neq 0$.

Donc f est une similitude de rapport $|a|$.

De plus, comme $a \neq 0$, son argument existe et $\arg(z_{N'} - z_{M'}) = \arg a + \arg(z_N - z_M)$.

Donc $(\vec{u}, \overrightarrow{M'N'}) = \arg a + (\vec{u}, \overrightarrow{MN})$.

D'où $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \arg a$.

f est une similitude et l'angle entre un vecteur et son image est constant.

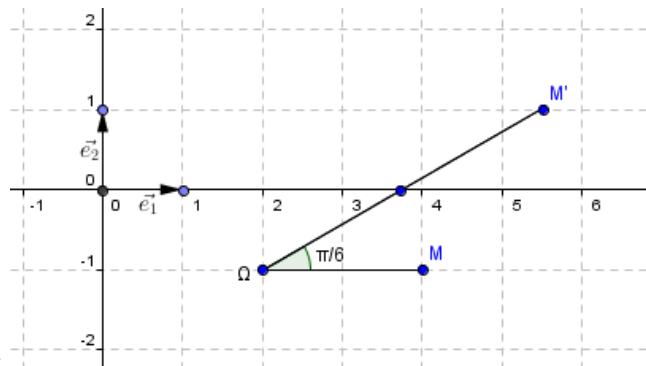
Donc f est une similitude directe et son angle vaut cette constante : $\arg a$.

Définition 3. Les nombres réels k et θ sont appelés respectivement **rapport** et **angle** de la similitude directe f .

Le point Ω est appelé **centre** de la similitude directe f .

Une similitude directe qui n'est pas une translation est déterminée par son centre, son rapport et son angle, appelés **éléments caractéristiques** de cette similitude.

Exemple 3. 1. Donner l'expression complexe de la similitude s de centre $\Omega(2; -1)$ de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{6}$.



Aziz/FIG 9.PNG

2. Etudier la transformation f définie par

$$f: C \longrightarrow \mathbb{C} \quad (3)$$

$$z \longmapsto (1 - i\sqrt{3})z - 1 + i$$

Solution. 1. La similitude directe s a pour point invariant Ω d'affixe $\omega = 2 - i$.

$$\text{On a : } z' = az + b$$

$$\Rightarrow \omega = a\omega + b$$

$$\Rightarrow b = \omega(1 - a)$$

$$\Rightarrow z' = az + \omega(1 - a)$$

$$\Rightarrow z' = az + \omega(1 - a).$$

Donc

$$\begin{aligned} z' &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}(z - 2 + i) + 2 - i \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)(z - 2 + i) + 2 - i \\ &= (\sqrt{3} + i)(z - 2 + i) + 2 - i \\ &= (\sqrt{3} + i)z - 2\sqrt{3} - 1 - 2i + i\sqrt{3} + 2 - i \\ &= (\sqrt{3} + i)z + 1 - 2\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 3). \end{aligned}$$

(7)

2. L'écriture complexe de la transformation f est de la forme $z' = az + b$, donc f est une similitude directe.

L'équation $z = (1 - i\sqrt{3})z - 1 + i$ a pour solution

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-1 + i}{1 - 1 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{-1 + i}{i\sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + i}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(9)

. De plus, $(1 + i\sqrt{3}) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On en déduit que f est une similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Méthode. Pour déterminer les équations caractéristiques d'une similitude directe s d'expression complexe $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}, b \in \mathbb{C}$),

1. Résoudre l'équation $z = az + b$, on obtient le centre de s .
2. Calculer le module de a , on obtient le rapport de s .
3. Déterminer un argument de s , on obtient l'angle de s .

Cas particuliers

Les translations sont des similitudes de rapport 1 et d'angle nul.

Une homothétie de rapport $k > 0$ est une similitude directe de rapport k et d'angle nul.

Une homothétie de rapport $k < 0$ est une similitude directe de rapport $-k$ et d'angle π .

Une rotation d'angle θ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle θ

6 PROPRIETE CARACTERISTIQUE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Activité. Soit s une similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle α . En utilisant l'expression complexe de s , démontrer que $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = k$ et $\text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$.

Proposition 3. Soit s la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle α .

$\forall M, M' \in \mathcal{P}$, on a :

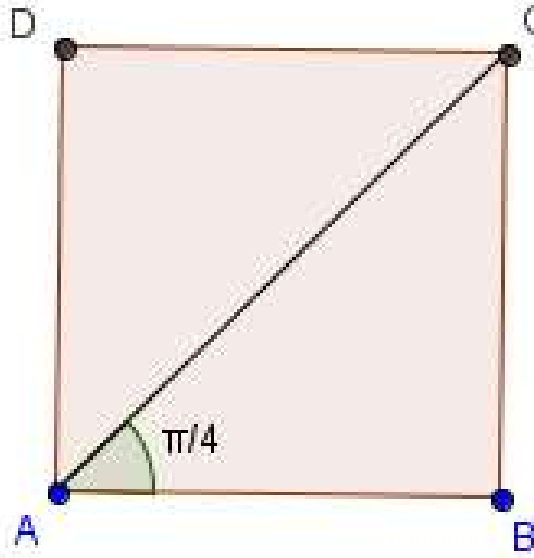
$$s(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M' = k \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$$

Exemple 4. 1. Soit $ABCD$ un carré direct. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s de centre A qui transforme B en C .

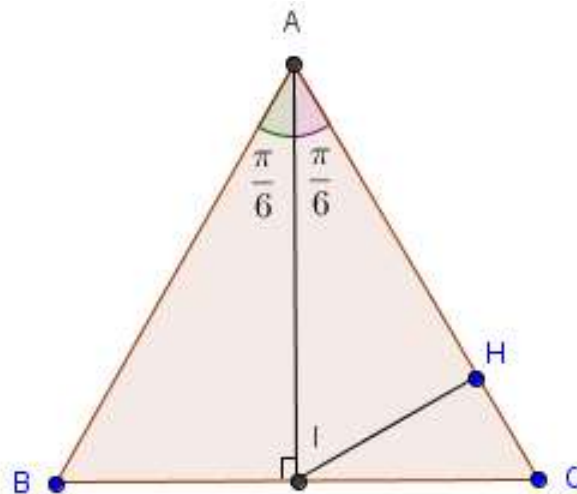
2. Soit ABC un triangle équilatéral direct. Soit I le milieu du segment $[BC]$ et H , le projeté orthogonal de I sur la droite (AC) .

(a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s' de centre A qui transforme B en I .

(b) Démontrer que cette similitude directe transforme I en H .



Aziz/FIG 12.PNG



Aziz/FIG 13.PNG

Solution. 1. On a : $\frac{AB}{AC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

Donc, $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

C'est-à-dire que $\begin{cases} AC = \sqrt{2}AB \\ \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Nous en déduisons que s est la similitude directe de centre A , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. (a) On a : $\frac{AI}{AB} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6}$.

Donc, $\frac{AI}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6}$.

C'est-à-dire que $\begin{cases} AI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \\ \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$.

Il s'en suit que s' est la similitude directe de centre A , de rapport $\sqrt{3}/2$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

$$(b) \text{ On montre de la même façon que } \begin{cases} AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AI \\ \text{mes}(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

Donc $s'(I) = (H)$.

7 EXISTENCE ET UNICITE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Activité. Soit s une similitude directe plane, Soit $A, B, A',$ et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

On suppose qu'il existe une similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. Elle a pour écriture complexe $z' = az + b$.

$$(a) \text{ Montrer que } a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \text{ et } b = z_{A'} - az_A.$$

(b) Conclure.

1. On suppose que s est une similitude directe dont l'expression complexe est $z' = az + b$ avec $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ et $b = z_{A'} - az_A$.

(a) Montrer que a est bien définie.

(b) Montrer que a est non nul et que s est bien définie.

(c) en déduire que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

(d) Conclure.

Théorème 3. Soit $A, B, A',$ et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors, il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

Démonstration. Si une telle similitude s existe, alors il existe a et b complexes, avec $a \neq 0$ tels que : $z_{A'} = az_A + b$ c'est-à-dire que $b = z_{A'} - az_A$ et $z_{B'} = az_B + b$.

Alors $z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A)$ c'est-à-dire $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$, auquel cas : $b = z_{A'} - az_A$.

Si s existe, alors le couple $(a; b)$ est unique et s est donc elle aussi unique.

Soit s dont l'expression complexe est $z' = az + b$ avec $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ et $b = z_{A'} - az_A$.

B étant différent de A , a est défini.

$$z_{A'} = az_A + b \text{ et } z_{B'} - z_{A'} = az_B - az_A.$$

$$\text{Donc } z_{B'} = az_B - az_A + z_{A'}.$$

De plus, comme $A' \neq B'$, a est non nul et s est donc définie.

$$\text{D'où : } s(A) = A' \text{ et } s(B) = B'.$$

Une similitude directe qui transforme A en A' et B en B' existe et est donc unique.

Remarque 2. – s a pour rapport : $k = \frac{A'B'}{AB}$ et pour angle $\theta = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{AB})$.

– Il est nécessaire d'avoir $A \neq B$ et $A' \neq B'$, mais il est possible d'avoir $A = A'$ et $B = B'$ auquel cas, les points sont invariants par s .

8 EXPRESSION ANALYTIQUE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Soit f est une similitude directe d'expression complexe $z' = az + b$.

Posons $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $a = \alpha + i\beta$ et $b = m + in$ avec $x, x', y, y', \alpha, \beta, m, n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 z' = az + b &\iff x' + iy' = (\alpha + i\beta)(x + iy) + m + in \\
 &\iff x' + iy' = \alpha(x + iy) + i\beta(x + iy) + m + in \\
 &\iff x' + iy' = \alpha x + i\alpha y + i\beta x - \beta y + m + in \\
 &\iff x' + iy' = \alpha x - \beta y + m + i(\alpha y + \beta x + n) \\
 &\iff \begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + m \\ y' = \alpha y + \beta x + n \end{cases}
 \end{aligned}$$

(11)

Le système obtenu est l'expression analytiques de la similitude directe f .

Exemple 5. 1. Déterminer l'expression analytique de la similitude directe s définie par $z' = (1 - 2i)z - 3 + i$.

2. Déterminer l'expression complexe puis la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe dont l'expression analytique est $\begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}$

Solution. 1. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Alors,

$$\begin{aligned}
 x' + iy' &= (1 - 2i)(x + iy) - 3 + i \\
 &= x + iy - 2ix + 2y - 3 + i \\
 &= x + 2y - 3 + i(-2x + y + 1)
 \end{aligned}$$

(13)

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + i(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}) \\ &= x(1 + i\sqrt{3}) + y(-\sqrt{3} + i) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &= \frac{z + \bar{z}}{2}(1 + i\sqrt{3}) + \frac{z + \bar{z}}{2}(-\sqrt{3} + i) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &= \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{-\sqrt{3} + i}{2i}\right)z + \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} - \frac{-\sqrt{3} + i}{2i}\right)\bar{z} + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &= (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

(15)

L'équation $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$ a pour unique solution $\frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1 - 1 - i\sqrt{3}} = 1 - 2i$. De plus, $1 + i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc f est une similitude directe de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $k = 2$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

9 ELEMENTS GEOMETRIQUES D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Etudions l'ensemble des points invariants de la similitude directe f définie par l'écriture complexe : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b$.

Soit M un point quelconque du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z . On a

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff f(z) = z \\ &\iff az + b = z \\ &\iff (1 - a)z = b. \end{aligned}$$

(17)

Il faut donc distinguer les 2 cas suivants : $a = 1$ et $a \neq 1$.

Cas où $a = 1$

Activité. Soit f la similitude directe définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z + b, b \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $b = 0$, alors $f = id_{\mathcal{P}}$.
2. Démontrer que si $b \neq 0$, alors f n'admet pas de point invariant.

Théorème 4. Soit b un nombre complexe et f la transformation de $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z + b$. La similitude directe associée à f est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'axe b .

Démonstration. Soit $\vec{w}$ le vecteur d'axe b . Montrons que f est la translation de vecteur $\vec{w}$. On a : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z + b$ c'est-à-dire $f(z) - z = b$ et par suite, $\forall M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{Mf(M)} = \vec{w}$.

Exemple 6. L'application f définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z - 1 + 3i$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'axe $-1 + 3i$.

Cas où $a \neq 1$

Activité. Soit f la similitude directe définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer que f admet un unique point invariant Ω . Préciser son affixe z_0 .
2. Démontrer que l'écriture complexe de f est donc $z' - z_0 = a(z - z_0)$.
3. On suppose que $z \neq z_0$. En déduire de ce qui précède que $\begin{cases} \Omega M' = a \Omega M \\ \arg(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \arg a \end{cases}$.

Théorème 5. Soient (a, b) un élément de $(\text{anglethbbC}^* - \{1\}) \times \mathbb{C}$ et f la transformation de $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b$. La similitude directe f admet un unique point invariant Ω d'axe $\frac{b}{1-a}$.

Définition 4. f est appelée la similitude directe de centre Ω , de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$. On dit aussi, par abus de langage que f est la similitude directe de centre Ω de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a(2\pi)$.

Soient k un réel non nul et θ un réel quelconque.

Soit f la similitude de centre Ω de rapport k et d'angle $\theta(2\pi)$. On a donc : $\forall (M, M') \in (\mathcal{P} - \{\Omega\})^2, M' = f(M) \iff \begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M'}\| = k \|\overrightarrow{\Omega M}\| \\ \arg(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta(2\pi) \end{cases}$.

Exemple 7. Soit g l'application définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = (1 - i\sqrt{3})z + 3$.

$1 - i\sqrt{3} \neq 1$ donc g admet un unique point invariant Ω d'axe $\omega = \frac{3}{1 - (1 - i\sqrt{3})} = -i\sqrt{3}$.

g est donc une similitude directe de rapport $|1 - i\sqrt{3}| = 2$ et d'angle $\arg(1 - i\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}(2\pi)$.

Remarque 3. Si $k = 1$ et $\theta = 0$, on a alors $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ c'est-à-dire que $M' = M$. L'application f est donc l'identité.

Cas particuliers

1^{er} cas : $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

Activité. Soit f la transformation du plan définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b$ $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
Démontrer que f est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

Théorème 6. Soient a un élément de $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et b un élément de $\mathbb{C}$; soit f la transformation définie de l'ensemble C par : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b$.

La similitude directe f est l'homothétie de rapport a dont le centre est le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

Remarque 4. Si $a = -1$, alors f est une symétrie centrale.

Exemple 8. Considérons la similitude directe plane d'écriture complexe $z' = 2z + 3 + 2i$.

On a : $2 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $\frac{3+2i}{1-2} = -3 - 2i$. Cette similitude est donc de rapport 2 et de centre $\Omega(-3; -2)$

2^e cas : $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $|a| = 1$ Soit f la transformation du plan définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b$ $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}, |a| = 1$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démontrer que f est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle non nul $\text{Arg} a$.

Théorème 7. Soient a un élément de $\mathbb{C}^* \setminus \{1\}$, de module 1 et un élément de C .

Soit f la transformation de C définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b$, et soit Ω le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

La similitude directe f est la rotation de centre Ω et d'angle $\text{Arg} a$.

Remarque 5. Si $a = \pi(2\pi)$ c'est-à-dire si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale.

Exemple 9. Considérons la similitude directe plane définie par $z' = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + 3 + i\sqrt{3}$.

On a : $|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ et $\arg(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ (2π).

D'autre part, $\frac{3+i\sqrt{3}}{1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2(3+i\sqrt{3})}{3-i\sqrt{3}} = \frac{2(3+i\sqrt{3})^2}{3^2+3} = \frac{2(6+6i\sqrt{3})}{12} = 1 + i\sqrt{3}$.

Cette similitude directe est donc la rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et de centre $\Omega(1; \sqrt{3})$.

10 COMPOSITION DE SIMILITUDES DIRECTES PLANES

Activité. Soient s et s' deux similitudes directes planes d'expressions complexes respectives $z' = ke^{i\alpha}z + b$ et $z' = k'e^{i\alpha'}z + b'$.

1. Déterminer l'expression complexe de la similitude $s \circ s'$. En déduire le rapport et l'angle de cette similitude.
2. Déterminer l'expression complexe de la similitude s^{-1} . En déduire le rapport et l'angle de cette similitude.

Théorème 8. Soit s une similitude directe de rapport k et d'angle α et s' une similitude directe de rapport k' et d'angle α' .

Alors,

- la composée $s' \circ s$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.
- la réciproque de s est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.

L'ensemble des similitudes directes du plan est donc un groupe de transformations.

Démonstration. Soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = ke^{i\alpha}z + b$ et s' la similitude directe d'expression complexe $z' = k'e^{i\alpha'}z + b'$.

L'expression complexe de $s' \circ s$ est $z' = kke^{i(\alpha+\alpha')}z + (k'e^{i\alpha'}b + b')$, donc $s \circ s'$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.

L'expression complexe de s^{-1} est $z' = \frac{1}{k}e^{-i\alpha}z + \frac{1}{k}e^{-i\alpha}b$, donc s^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.

Exemple 10. On considère les similitudes directes $s_1 : z' = 2iz + 1 - 2i$ et $s_2 : z' = (1 - i)z + 1 + i$. Déterminer l'expression complexe puis la nature et les éléments caractéristiques de la similitude $s_2 \circ s_1$ et de s_1^{-1} .

Solution. s_1 a pour expression complexe $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z + 1 - 2i$. Donc elle a pour rapport $k_1 = 2$ et d'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.

s_2 a pour expression complexe $z' = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 1 + i$. Donc elle a pour rapport $k_2 = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$.

La composée $s_2 \circ s_1$ est donc une similitude directe de rapport $k = k_1k_2 = 2\sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. La réciproque s_1^{-1} de s_1 est une similitude directe de rapport $k' = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{2}$ et d'angle $\theta' = -\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$.

Attention. $s \circ s'$ et $s' \circ s$ ne sont pas égales.

En effet :

$s' \circ s$ a pour expression complexe : $z' = kke^{i(\alpha+\alpha')}z + (k'e^{i\alpha'}b + b')$

$s \circ s'$ a pour expression complexe : $z' = kke^{i(\alpha+\alpha')}z + (ke^{i\alpha}b' + b)$ A moins que $k'e^{i\alpha'}b + b'$ soit égale à $ke^{i\alpha}b' + b$, $s' \circ s$ et $s \circ s'$ ne sont pas égales.

En particulier

Si $kke^{i(\alpha+\alpha')} \neq 1$, $s \circ s'$ et $s' \circ s$ possèdent chacune un centre mais leurs centres peuvent être distincts.

Remarque 6. Si deux similitudes directes ont même centre, alors $s' \circ s = s \circ s'$, c'est-à-dire composées d'homothéties et de rotations de même centre.

11 SIMILITUDES DIRECTES ET CONFIGURATIONS DU PLAN

Activité. Soit s une similitude de centre Ω , de rapport k et d'angle θ , A et B deux points du plan d'images respectives A' et B' .

1. Démontrer en utilisant la propriété caractéristique que les images de trois points alignés sont trois points alignés. En déduire que :
 - (a) une droite a pour image une droite.
 - (b) s conserve les intersections.
 - (c) le segment $[AB]$ a pour image le segment $[A'B']$ de longueur kAB .
2. (a) En utilisant la définition 1, démontrer que le milieu du segment $[AB]$ a pour image le milieu du segment $[A'B']$.
 - (b) Plus généralement, démontrer que le barycentre des points A et B a pour image le barycentre des points A' et B' affectés des mêmes coefficients.
3. En utilisant la définition 2, démontrer que :
 - (a) des droites orthogonales ont pour images des droites orthogonales.
 - (b) des droites parallèles ont pour images des droites parallèles.
4. Démontrer que le cercle de centre O et de rayon r a pour image le cercle de centre $s(O)$ et de rayon kr .

5. s multiplie les aires par k^2 .

Théorème 9. Soit s une similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ , A et B deux points du plan d'images respectives A' et B' . s possède les propriétés suivantes.

1. s conserve l'alignement, donc :
 - l'image d'une droite est une droite.
 - s conserve les intersections.
 - l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ de longueur kAB .
2. s conserve de plus, par définition, les rapport de distances donc s conserve le milieu et plus généralement le barycentre.
3. s conserve les angles géométriques donc s conserve l'orthogonalité et le parallélisme.
4. L'image du cercle de centre O et de rayon r est le cercle de centre $s(O)$ et de rayon kr .

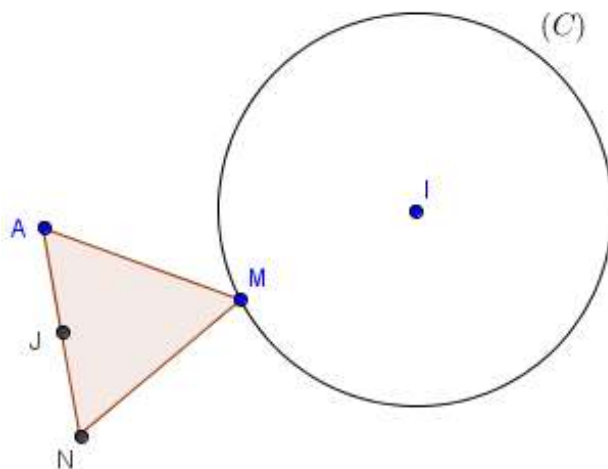
12 UTILISATION DES SIMILITUDES DIRECTES PLANES

On peut utiliser les similitudes directes pour rechercher les lieux géométriques, démontrer les propriétés et construire.

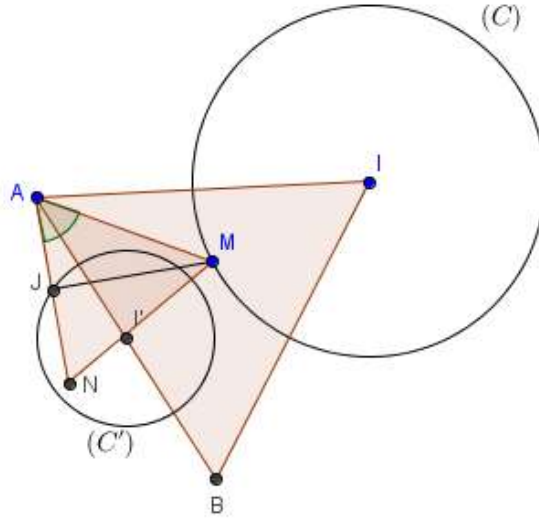
12.1 Rechercher les lieux géométriques

Enoncé 1. Soit (C) un cercle de centre I et A un point du plan. M étant un point de (C) , on désigne par AMN le triangle équilatéral de sens direct.

Déterminer le lieu géométrique du milieu J du segment $[AN]$, lorsque M décrit (C) .



Solution. On a $AN = \frac{1}{2}AM$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN}) = \frac{\pi}{3}$. Donc J est l'image de M par la similitude directe s de centre A , d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$. Comme M décrit (C) , alors le lieu de J est l'image de (C) par s , c'est-à-dire le cercle (C') de centre I' image de I qui passe par J .



Aziz/FIG 16.PNG

12.2 Problèmes de construction

Enoncé 2. Soit s la similitude directe d'écriture complexe : $z' = (1 - i)z + 2 - i$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s .
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|(1 - i)z + 2 - i| = 4$$

3. Retrouver le résultat de la question précédente par une méthode algébrique.

Solution. 1. Soit $M(z)$. On a $s(M) = M \implies z = (1 - i)z + 2 - i \implies [1 - (1 - i)]z = 2 - i$

$$iz = 2 - i \implies z = \frac{2-i}{i} = -1 - 2i.$$

$$\text{Par ailleurs } 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc s est la similitude de centre $\Omega(-1; -2i)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-i\frac{\pi}{4}$.

2. On a : $|(1 - i)z + 2 - i| = 4 \implies |z'| = 4 \implies |1 - i||z + \frac{2+i}{1-i}| = 4 \implies |z + \frac{(2-i)(2+i)}{2}| = \frac{4}{\sqrt{2}}$
 $\implies |z + \frac{3+i}{2}| = 2\sqrt{2} \implies AM = 2\sqrt{2}$ avec $A(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$. Donc M décrit $\mathcal{C}(A; 2\sqrt{2})$.

3. Retrouvons ce résultat par une méthode algébrique.

$$\text{Posons } z = x + iy \text{ et } z' = x' + iy'.$$

$$\text{On a : } |(1-i)z + 2 - i| = 4 \implies |(1-i)(x+iy) + 2 - i| = 4 \implies |x+y+2+i(-x+y-1)| = 4 \implies$$

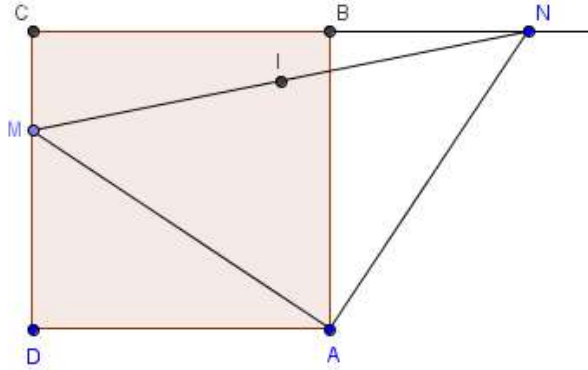
$$\begin{aligned}
(x+y+2)^2 + (-x+y-1)^2 &= 16 \implies x^2 + y^2 + 4 + 4x + 4y + 2xy + x^2 + y^2 + 1 + 2x - 2y - 2xy = 16 \\
\implies 2x^2 + 2y^2 + 6x + 2y + 5 &= 16 \implies x^2 + y^2 + 3x + y + \frac{5}{2} = 8 \implies (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{5}{2} = 8 \\
\implies (x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 &= 8.
\end{aligned}$$

Donc M décrit $\mathcal{C}(A; 2\sqrt{2})$.

12.3 Démonstration des propriétés

Enoncé 3. Soit $ABCD$ un carré M un point de la droite (DC) , la perpendiculaire en A à la droite (AM) coupe la droite (BC) en N .

Démontrer que AMN est un triangle rectangle isocèle.



Aziz/FIG 17.PNG

Solution. On considère la similitude directe s de centre A et d'angle $\theta = \text{mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD})$.

On a $s(D) = M$ et $s(B) = N$. Donc, $\begin{cases} AD = kAM \\ \text{mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}) = \theta \end{cases}$ et $\begin{cases} AB = kAN \\ \text{mes}(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}) = \theta \end{cases}$.

Or $AB = AD$, donc $AM = AN$. D'où, le triangle AMN est isocèle.

De plus, $(AM) \perp (AN)$. Il en résulte que le triangle AMN est rectangle isocèle.

13 EXERCICES ET PROBLEMES

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e^1}, \vec{e^2})$

Exercice 1. Déterminer dans chacun des cas suivants les caractéristiques de similitude directe d'écriture complexe donnée :

1. $z' = iz + 1$
2. $z' = (1 - i)z + 2$
3. $z' = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z + 3i$
4. $z' = -z + 5i$
5. $z' = z - 2 + i$
6. $z' = -\sqrt{3}z$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s de rapport k et d'angle α .

1. $\Omega(5 - 4i)$, $k = \sqrt{3}$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$
2. $\Omega(-2)$, 2 et $\alpha = \frac{\pi}{4}$
3. $\Omega(3i)$, $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$
4. $\Omega(\frac{1}{2} + i)$, $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Exercice 3. M , P et Q sont trois points du plan complexe d'affixe respectives i , 1 , $2 + i$. Déterminer la similitude directe f telle que l'on ait : $f(M) = P$ et $f(O) = Q$. On donnera le centre le rapport et l'angle de f .

Exercice 4. Soit s la similitude directe d'écriture complexe $z' = 3iz + 9 + 3i$

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s
2. Déterminer l'image par s : A
 - (a) du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $I(3 - i)$ et de rayon 1 .
 - (b) de la droite d'équation $y = 2x - 5$.

Exercice 5. Soient A , B , C , D les points du plan complexe d'affixes respectives $1 + 3i$, $4 + 3i$, $4 - 2i$, $1 - 2i$.

1. Montrer qu'il existe une similitude directe s telle que $s(A) = C$ et $s(B) = D$.

2. Déterminer $s(C)$ et $s(D)$

3. Démontrer que l'isobarycentre des points A, B, C, D est invariant par s . En déduire les éléments caractéristiques de s .

Exercice 6. Soit A le point d'affixe i dans le plan complexe. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe Z définie par : $Z = iz$.

1. Déterminer les éléments géométriques de f .

2. Déterminer l'ensemble des points m tels que les trois points m, M, A soient alignés.

Exercice 7. Soient A et B les points de coordonnées respectives $(2, 1)$ et $(0, 3)$ dans $\mathcal{R}$. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, par r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ modulo 2π et par t la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

Déterminer le point C , image de O par l'application $t \circ r \circ h$.

Donner les éléments caractéristiques de cette application ; on pourra utiliser les nombres complexes ou toute autre méthode.

Exercice 8. Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les droites (AB) et $(A'B')$, (BC) et $(B'C')$, (CA) et $(C'A')$ soient parallèles.

Démontrer qu'il existe une similitude directe f telle que l'on ait : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits **directement semblables**.

Exercice 9. Soit ABC un triangle. On désigne par A' , B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Démontrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables ; on donnera le centre et l'angle de la similitude.

Exercice 10. Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z' tels que l'on ait : $z' = (1 + i)z + 1$

1. Calculer le module et un argument de $1 + i$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la transformation du plan complexe qui à tout point du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z' = (1 + i)z + 1$.

3. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ aient la même norme.

Exercice 11. On considère l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (1 + i)z - i$.

1. Déterminer les éléments géométriques de f ; on appellera A son centre.
2. On suppose que M est distinct de A . Calculer une détermination en radian de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'})$.
3. Déterminer l'ensemble des points M' image des points du cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 12. Soit f l'application du plan qui à tout point $M(x, y)$ d'affixe z associe le point $M'(x', y')$ d'affixe z' définie par : $z' = (1 - i)z + 2 + i$.

1. Déterminer les éléments géométriques de f .
2. Quelle est l'image par f du cercle de centre O et de rayon 2.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que l'on ait $|(1 - i)z + 2 - i| = 2$.
(On pourra donner deux méthodes).

Exercice 13. Soit f la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3(1 - i)}$.

1. Démontrer que f admet un unique point invariant I ; déterminer l'affixe de I .
Caractériser géométriquement f .
2. Soit G le barycentre des points I, M, M' affectés respectivement des coefficients 3, 2, 1.
Calculer les coordonnées de G en fonction de celles de M .
3. On suppose que le point M décrit la droite d'équation : $y = x$.
Quel est l'ensemble décrit par G ?

Exercice 14. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $1 - 2i$, $-3 + i$ et $7 + 6i$. Soit s la similitude directe qui transforme A en B et C en A .

1. Donner l'écriture complexe de s .
En déduire les éléments géométriques de s .
Démontrer que le centre de s appartient à la droite (BC) .
2. Quelle est la transformée (D) , dans la similitude s , de la droite $(O, \vec{e}_1)$?
Quel point a pour transformée l'intersection de (D) et de (AB) ?

Exercice 15. Soit f l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M de coordonnée (x, y) dans $\mathcal{R}$ associe le point M' de coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}$ définie par :
$$\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y + 1 \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases}$$
 Démontrer que f est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 16. Soit f la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = 2(1 + i\sqrt{3})z + 3$.

1. Quelle est la nature de f ? Préciser les éléments géométriques.
2. Soit (D) la droite d'équation : $x - y\sqrt{3} = 0$. Quelle est l'équation de l'image $f(D)$ de la droite (D) ?
3. Quelle est l'image par f du cercle de centre le point d'affixe $2i$ et de rayon 2 ?

Exercice 17. Soient A, B, C les points d'affixes respectives $i, 1 + i$ et $2 + 2i$.

1. Déterminer l'affixe du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2, -2 et 1.
2. Démontrer que la similitude directe s qui transforme A en B , B en C a pour centre le point G .
3. Déterminer l'angle et le rapport de s .

Exercice 18. Soit $ABCD$ un losange de sens direct, de centre I et tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{4}$. On considère la similitude directe s_c de centre C , qui transforme A en B .

1. Démontrer que l'image I' du point I par s_c est le milieu du segment $[BC]$.
2. Démontrer que l'image D' de D par s_c appartient à la droite (AC) et que les droites $(D'I')$ et (BC) sont perpendiculaires.

En déduire une construction du point D' .

Exercice 19. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. M étant un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B , on désigne par N et P les points d'intersection de la droite (BM) et du cercle de centre M passant par A .

Déterminer les lieux géométriques des points N et P lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privée de A et B .

Exercice 20. Soit $\mathcal{D}$ une droite et A un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. M étant un point de $\mathcal{D}$, on désigne par N le point de $\mathcal{D}$ tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}}) = \frac{\pi}{6}$, par H_M et H_N les pieds des

hauteurs issues de M et N dans le triangle AMN .

Déterminer et construire les lieux géométriques des points H_M et H_N lorsque M décrit $\mathcal{D}$.

Exercice 21. ABC est un triangle de sens direct. I, J et K sont les points tels que les triangles IBC, JAC et KBA sont de sens direct, rectangles et isocèles.

1. Déterminer :

(a) l'angle et le rapport de la similitude directe s_1 de centre A , qui transforme C en J .

(b) l'angle et le rapport de la similitude directe s_2 qui transforme A en K et C en I .

2. En déduire que $IJAK$ est un parallélogramme.

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

WEBGRAPHIE

PRODUIT SCALAIRE de l'espace

Leçon : PRODUIT SCALAIRE dans l'espace

Présentation globale

- 1) Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace
- 2) Vecteurs orthogonaux
- 3) Produit scalaire et norme
- 4) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace
- 5) analytique du produit scalaire dans l'espace
- 6) L'ensemble des points dans l'espace tq : $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$
- 7) Equation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal
- 8) positions relatifs de deux plans dans l'espace
- 9) distance d'un point à un plan
- 10) Etude analytique de LA SPHERE



La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.

Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

1) Le produit scalaire de deux vecteurs l'espace

Définition 1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Et soient A ; B et C trois points l'espace tel que : $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$

le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\vec{AB}$ par $\vec{AC}$ dans le plan

ABC , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$

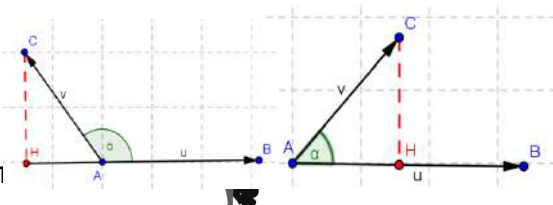
remarques: 1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un **nombre réel** définit par

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \times \vec{AB}$

c a d $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \times \vec{AB}$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ ont le même sens

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\vec{AH} \times \vec{AB}$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ ont un sens contraire



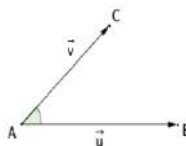
Prof/A1

2) toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont aussi vraies dans l'espace

Définition 2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel définit par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$, dans le cas contraire.



$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ".

2) Vecteurs orthogonaux

Définition : On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux dans l'espace si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Et on écrit : $\vec{u} \perp \vec{v}$

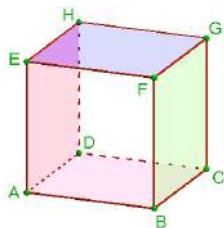
Exemple : Soit ABCDEFGH un cube de côté a
Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC} ; \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} \text{ et } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB}$$

Réponse : 1) calcul de $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC}$: on a : $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EA}$ car ABCDEFG cube

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} = -AE \times AE = -a^2$$

(car E est le projeté orthogonale de F sur (AE))



2) calcul de $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD}$:

Puisque ABCD est un carré on a :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

$$\text{donc : } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB \times AB = -a^2$$

(car B est le projeté orthogonale de F sur (AB))

3) calcul de $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC}$: Puisque DCGH est un carré on a :

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \quad (\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{DC})$$

4) calcul de $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC}$:

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \quad (\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{EH})$$

donc : $\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{GC}$

5) calcul de $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB}$:

On a : $(AE) \perp (ABC)$ donc $(AE) \perp (DB)$ car

$$(DB) \subset (ABC) \text{ donc : } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

3) Produit scalaire et norme

3-1 Définition: Soit un vecteur $\vec{u}$ de l'espace. et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$$

3-2) propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace., on a :

$$1) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$2) \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}, \text{ avec } k \text{ un nombre réel.}$$

$$3) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad 4) (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$5) (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad 6) (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$7) \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad 8) \|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$$

$$9) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\text{et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$10) \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad 11) |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

12) Soit A, B et C trois points de l'espace.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Application : 1) Soit A, B et C des points de l'espace tel que $AB = \sqrt{5}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$

Calculer $(-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC}$:

Solution :

$$(-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2AB^2 - 2 \times 3$$

$$= 2AB^2 - 2 \times 3 = 2 \times 5 - 6 = 4$$

2) sachant que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$

Calculer : $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\text{On a : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (5^2 - 4 - 9^2) = 6$$

4) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace

Soit O un point de l'espace

On pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$

Définition1 : on dit qu'un triplet $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de vecteur dans

l'espace est base orthonormé si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires et normés et

orthogonaux deux à deux c a d : $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$ et

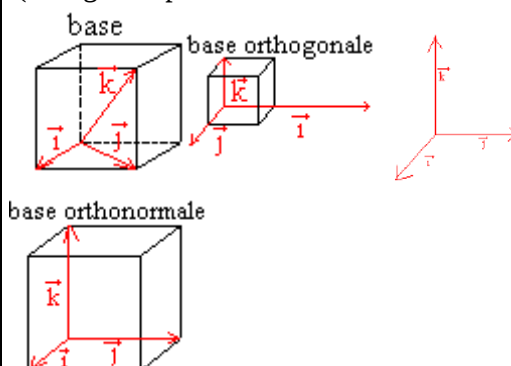
$$\|\vec{k}\| = 1 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ et } \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

Définition2 : on dit que $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère

orthonormé dans l'espace et seulement si $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est une base orthonormé

Exemples :

(La figure représente un cube dans les trois cas)



Coordonnées d'un vecteur relativement à une base :

si $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est une base orthonormé et $\vec{u}$ un vecteur de

l'espace alors Il existe un triplet unique $(x; y; z)$ de réels



tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Ce triplet $(x; y; z)$ est appelé coordonnées du vecteur $\vec{u}$ relativement à la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Voyons maintenant comment exprimer le produit scalaire dans l'espace à l'aide des coordonnées des vecteurs.

5) analytique du produit scalaire dans l'espace :

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est une base orthonormée

(Dans tout ce qui va suivre)

Soient : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} + zz'\vec{k} \cdot \vec{k} \text{ car } \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ et } \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \text{ puisque : } \|\vec{i}\| = 1 \text{ et } \|\vec{j}\| = 1 \text{ et } \|\vec{k}\| = 1$$

On a donc la propriété suivante :

Propriété :

1) Dans une base orthonormée on considère deux vecteurs

$\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

$$\text{et } \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, soient A et B de coordonnées respectives $A(x_A; y_A; z_A)$ et

$$B(x_B; y_B; z_B)$$

$$\text{alors : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemple : dans une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère

les vecteurs $\vec{u}(1; 5; -1)$ et $\vec{v}(-5; 1; 0)$ et $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$

1) Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ?

2) Calculer : la norme du vecteur $\vec{w}$

Solution : 1)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-5) \times 1 + 1 \times 5 + 0 \times (-1) = (-5) + 5 = 0$$

Donc : $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1 \text{ on dit que}$$

$\vec{w}$ est un vecteur unitaire

Exercice 1 : dans une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on

considère les vecteurs $\vec{u}(3; -2; 1)$ et $\vec{v}(2; 1; 0)$

Calculer : $\cos(\vec{u}; \vec{v})$

$$\text{Solution : } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{70}}$$

6) L'ensemble des points dans l'espace tq :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$$

Propriété : soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul et

$A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $k \in \mathbb{R}$

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ dans l'espace tq :

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ c'est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme : $ax + by + cz + d = 0$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Preuve : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = k$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A + k) = 0$$

L'ensemble des points dans l'espace tq : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ c'est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ avec : } d = -(ax_A + by_A + cz_A + k)$$

Exemple : soit $\vec{u}(2; 1; -1)$ un vecteur et $A(1; -1; 2)$ un point de l'espace

Déterminer L'ensemble (P) des points $M(x; y; z)$ dans

l'espace tq : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = -1$

Solution : soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = -1$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1) + (y + 1) - (z - 2) = -1 \Leftrightarrow 2x + y - z + 2 = 0$$

Cette équation s'écrit sous la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Donc : L'ensemble des points dans l'espace tq :

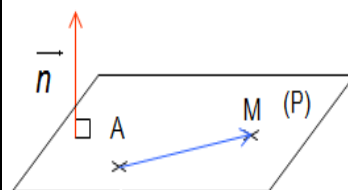
$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = -1$ est le plan (P) d'équation :

$$2x + y - z + 2 = 0$$

7) Equation cartésienne d'un plan definit par un point et un vecteur normal

Définition :

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathcal{P}$ si, pour tous points A et M de $\mathcal{P}$, on a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$



Remarque : Il existe évidemment une infinité de vecteurs normaux à un plan : ce sont tous les vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{n}$.



Propriété : Un vecteur est dit normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Remarque : Cette propriété va nous permettre d'une part de vérifier facilement qu'un vecteur est normal à un plan et, d'autre part, de déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à un plan.

Démonstration :

La propriété directe découle de la définition. Nous n'allons donc prouver que la réciproque.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathcal{P}$, $\vec{w}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il existe donc deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Ainsi $\vec{w} \cdot \vec{n} = a\vec{u} \cdot \vec{n} + b\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à tous les vecteurs du plan $\mathcal{P}$. Il lui est par conséquent orthogonal.

Exemple1 : déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à un plan dirigé par $\vec{u}(2; -1; 3)$ et $\vec{v}(4; 0; 2)$

Solution : Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires : une coordonnée est nulle pour l'un mais pas pour l'autre.

On note $\vec{n}(x; y; z)$

Puisque $\vec{n}$ est normal au plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

On obtient ainsi les deux équations $2x - y + 3z = 0$ et $4x + 2z = 0$

A l'aide de la deuxième équation, on obtient $z = -2x$ On remplace dans la première :

$2x - y - 6x = 0 \Leftrightarrow -4x - y = 0 \Leftrightarrow y = -4x$.

On choisit, par exemple $x = 1$ et on trouve ainsi :

$\vec{v}(1; -4; -2)$

On vérifie : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 + 4 - 6 = 0 \checkmark$ et

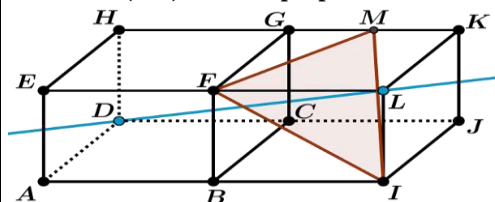
$\vec{v} \cdot \vec{n} = 4 + 0 - 4 = 0 \checkmark$.

Un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{n}(1; -4; -2)$

Exemple2 : Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.

M est le milieu du segment [GK].

La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI)?



Solution : on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ orthonormé

Voyons si $\overrightarrow{DL}$ est un vecteur normal au plan (FMI)

Il suffit de calculer: $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FI}$

On a : $\overrightarrow{DL} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc : $\overrightarrow{DL}(2; -1; 1)$

On a : $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{FM}(\frac{1}{2}; 1; 0)$

On a : $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{FI}(1; 0; -1)$

$\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FM} = 0$ et $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FI} = 1 \neq 0$

Donc : (DL) n'est pas perpendiculaire au plan (FMI)

Exercice2 : ABCDEFGH un cube tel que : $AB = 1$ avec I le milieu du segment [EH] et J le milieu de [EF]

1) Montrer que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$ et que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$

2) En déduire que le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est normal au plan (BDE)

3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux

4) l'espace étant rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

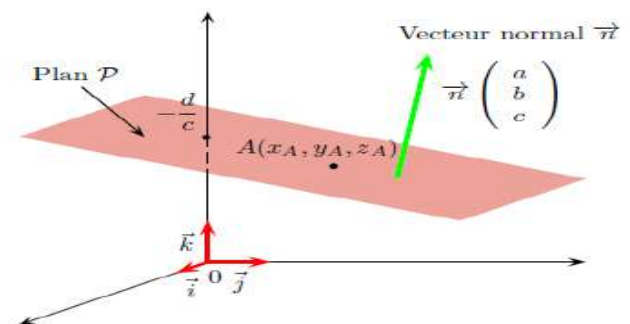
a) déterminer les coordonnées des points

F ; C ; I et J

B) Montrer que $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$

et en déduire que $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux

Propriété : Soient a et b et c des réels non tous nuls quelconque . L'ensemble (P) des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a; b; c)$.



Exemple1 : On considère le plan d'équation

$4x - 2y + 3z - 1 = 0$. Un vecteur normal à ce plan est

$\vec{n}(4; -2; 3)$. Le point $A(2; -1; -3)$ appartient au plan car :

$4 \times 2 - 2 \times (-1) + 3 \times (-3) - 1 = 0$.

Exemple2 : On cherche une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par

$A(4; 2; -3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(1; -2; -1)$:

Une équation du plan $\mathcal{P}$ est de la forme .

$x - 2y - z + d = 0$

Le point A appartient au plan. Ses coordonnées vérifient donc l'équation :

$4 - 2 \times 2 - (-3) + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc $x - 2y - z - 3 = 0$



Exemple3: $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB = 1$ avec I le milieu du segment $[AE]$

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

1) déterminer un vecteur normal au plan (CHI)

2) En déduire une équation cartésienne du plan (CHI)

Solution :1) soit un $\vec{n}(x; y; z)$ un vecteur normal au plan

$$(CHI) \text{ donc } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CI} = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{CH}(-1; 0; 1) \text{ et } \overrightarrow{CI}\left(-1; -1; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x - y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ -x - y + \frac{1}{2}x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

Puisque on veut un seul vecteur normal

Alors on donne par exemple : $x = 2$ on trouve

$$\begin{cases} z = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ donc un vecteur normal est } \vec{n}(2; -1; 2)$$

2) l'équation du plan s'écrit sous forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{Donc : } 2x - y + 2z + d = 0$$

Et puisque : $C(1; 1; 0) \in (CIH)$ donc :

$$2 - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

$$\text{Donc : } (CIH) : 2x - y + 2z - 1 = 0$$

Exercice3 : déterminer un vecteur normal au plan (P) dans les cas suivants

$$1) (P) : 2x - 3y + z + 10 = 0 \quad 2) (P) : 3x - z + 1 = 0$$

$$3) (P) : y + z + 1 = 0 \quad 4) (P) : z = 2$$

$$5) (P) : x - 2y + 7z - 3 = 0 \quad 6) (P) : 2y - z + 11 = 0$$

$$\text{Solution :1) } \vec{n}(2; -3; 1) \quad 2) \vec{n}(3; 0; -1) \quad 3) \vec{n}(0; 1; 1)$$

$$4) \vec{n}(0; 0; 1) \quad 5) \vec{n}(1; -2; 7) \quad 6) \vec{n}(0; 2; -1)$$

Exercice4: L'espace est muni d'un repère orthonormé

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(-1; 0; 2)$ et $B(3; 1; 0)$

et le vecteur $\vec{n}(1; 2; 1)$

1) déterminer une équation du plan (P) passant par A dont un vecteur normal est $\vec{n}$

2) donner une représentation paramétrique de la droite (D)

qui passe par le point B et orthogonale au plan (P)

3) Déterminer les coordonnées du point B' la projection orthogonale de B sur le plan (P)

Solution :1) méthode :

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{on a : } \overrightarrow{AM}(x+1; y; z-2)$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \times 1 + y \times 2 + 1 \times (z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 + 2y + z - 2 = 0$$

$$\text{Donc : } x + 2y + z - 1 = 0 \quad (P)$$

Autre méthode :

L'équation d'un plan s'écrit sous forme :

$ax + by + cz + d = 0$ or $\vec{n}(1; 2; 1)$ est un vecteur normal à ce plan donc : $a = 1$ et $b = 1$ et $c = 1$

$$\text{Donc L'équation devient : } 1x + 2y + 1z + d = 0 \quad (P)$$

Et on sait que le plan (P) passe par $A(-1; 0; 2)$

$$\text{Donc : } (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 2 + d = 0 \text{ cad } d = -1$$

$$\text{Donc : } (P) : x + 2y + z - 1 = 0$$

2) la droite (D) passe par le point $B(3; 1; 0)$ et orthogonale au plan (P) donc : $\vec{n}(1; 2; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (D)

Donc une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1k + 3 \\ y = 2k + 1 \\ z = 1k + 0 \end{cases} \text{ avec } (k \in \mathbb{R})$$

3) B' est la projection orthogonale de B sur le plan (P)

donc : $B' \in (D)$ et $B' \in (P)$

Donc B' est le point d'intersection de la droite (D)

Et le plan (P)

Donc les coordonnées de B' sont solutions du système :

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x = 1k + 3 \\ y = 2k + 1 \\ z = 1k + 0 \end{cases}$$

On remplace : x et y et z dans l'équation de (P)

$$\text{On trouve : } k + 3 + 2(2k + 1) + k - 1 = 0$$

$$\text{Donc : } 6k + 4 = 0 \text{ Donc : } k = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Donc : } x = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3} \text{ et } y = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \text{ et } z = -\frac{2}{3} + 0 = -\frac{2}{3}$$



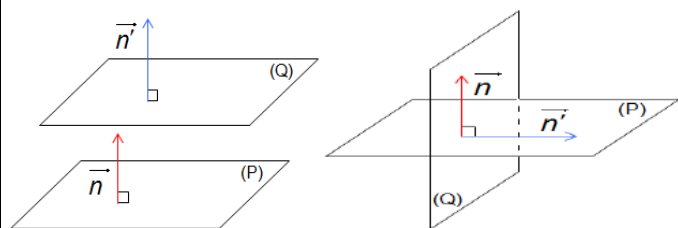
Par suite : $B' \left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right)$

8) positions relatifs de deux plans dans l'espace

Proposition : Soient : $(P) : ax + by + cz + d = 0$

et $(P') : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans dans l'espace
et $\vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n'}(a'; b'; c')$ deux vecteurs normaux
respectivement à (P) et (P')

- 1) Les plans (P) et (P') sont parallèles ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires
- 2) Les plans (P) et (P') sont sécants ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont non colinéaires
- 3) Les plans (P) et (P') sont perpendiculaires ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux



Exemple : On considère les plans d'équations :

$(P) : 2x - 4y + z + 1 = 0$ et $(P') : x + y + 2z - 3 = 0$

- 1) Montrer que : $(P) \perp (P')$
- 2) Déterminer l'équation cartésienne du plan (Q) parallèle au plan (P) passant par le point $A(1; -1; 1)$

Solutions : 1) $\vec{n}(2; -4; 1)$ et $\vec{n'}(1; 1; 2)$ les deux vecteurs normaux respectivement de (P) et (P')

On a : $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 2 - 4 + 2 = 0$

Donc $\vec{n} \perp \vec{n'}$ par suite : $(P) \perp (P')$

2) $(P) \parallel (Q)$ et $\vec{n}$ est normal à (P) donc $\vec{n}(2; -4; 1)$ est un vecteur normal à (Q)

Donc une équation cartésienne du plan (Q) est :

$$2x - 4y + z + d = 0$$

Et puisque : $A(1; -1; 1) \in (Q)$ donc :

$$2 + 4 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$$

Donc : $(Q) : 2x - 4y + z - 7 = 0$

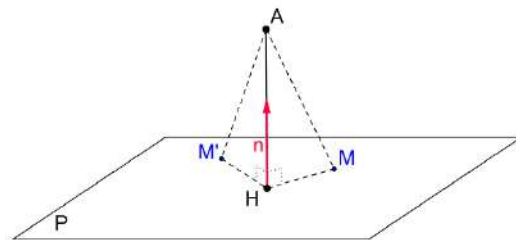
9) distance d'un point à un plan

Proposition : Soient : $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $(P) : ax + by + cz + d = 0$ un plan dans l'espace avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ et H est le projeté orthogonal de A sur le plan

la distance du point A au plan (P) est la

$$\text{distance AH et on a : } d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Remarque : pour tout point M du plan (P) on a $AH \leq AM$



RPEUVE : $\vec{n}(a; b; c)$ est normal à (P) pour tout point M

du plan on a $\vec{n} \cdot \vec{AM} = \vec{n} \cdot \vec{AH} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = \|\vec{n}\| \times \|\vec{AH}\| \times \cos(\vec{n}; \vec{AH})$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \|\vec{AH}\| \times \cos(\vec{n}; \vec{AH})$$

Or $M \in (P)$ donc $ax + by + cz + d = 0$

Donc : $ax + by + cz = -d$

$$\Leftrightarrow -ax_A - by_A - cz_A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \|\vec{AH}\| \times \cos(\vec{n}; \vec{AH})$$

$$\Leftrightarrow -ax_A - by_A - cz_A - d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \|\vec{AH}\| \times (\mp 1)$$

$$\Rightarrow |-ax_A - by_A - cz_A - d| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times AH \times (\mp 1)$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple : On considère le plan (P) d'équations :

$x + 2y + 2z - 6 = 0$ et le point $A(5; 1; 0)$

Calculer la distance du point A au plan (P) .

$$\text{Solution : } d(A; (P)) = \frac{|5 + 2 \times 1 + 2 \times 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1|}{3} = \frac{1}{3}$$

Exercice5 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère le plan (P) d'équation

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

1) Les points $A(1; 1; 2)$ et $B(2; 1; 1)$ appartiennent-ils au plan (P) ?

2) Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan (P) .



3) Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan (P)?

Solution : $1 + 2 \times 1 - 2 - 1 = 0$ donc les coordonnées du point A vérifient l'équation de.

On en déduit que A appartient au plan (P) et donc que : $2 + 2 \times 1 - 1 - 1 = 2 \neq 0$

donc les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation de (P) On en déduit que B n'est pas un point de (P).

$$2) AB = \sqrt{(2-1)^2 + 1(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

Calculons $d(A; (P))$ et $d(B; (P))$.

On a : $A \in (P)$ donc : $d(A; (P)) = 0$

$$d(B; (P)) = \frac{|2 + 2 \times 1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

on a : $\overrightarrow{AB}(1; 0; -1)$

3) Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}(1; 2; -1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\overrightarrow{AB}$ n'est pas orthogonal au plan. (P)

Le point A n'est donc pas le projeté orthogonal de B sur (P).

10) Etude analytique de LA SPHERE

Dans tout ce qui va suivre, l'espace (E) est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé.

10-1) Définition d'une sphère.

Définition : Soit Ω un point dans l'espace (E).

R et un réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon

R est l'ensemble des points M dans (E), tels que $\Omega M = R$

On la note par : $S(\Omega, R)$.

$$S(\Omega, R) = \{M \in E / \Omega M = R\}$$

10-2) Equation cartésienne d'une sphère.

Soit $\Omega(a, b, c)$ un point dans l'espace et $r \geq 0$

$$M(x, y, z) \in S(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

Propriété 1 : Soit $\Omega(a, b, c)$ un point dans l'espace et $R \geq 0$, la sphère $S(\Omega, R)$ a une équation cartésienne de la forme :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (1)$$

Exemple 1 : Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(1, -1, 2)$ et de rayon $R = 3$

2) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(0, -3, 0)$ et qui passe par $A(2, 1, -1)$.

Solution : 1) l'équation cartésienne de la sphère est :

$$(x - 1)^2 + (y - (-1))^2 + (z - 2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$$

2) $S(\Omega, R)$ la sphère de centre $\Omega(1, -2, 0)$ et qui passe par $A(2, 1, -1)$.

$$\text{Donc : } \Omega A = R = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2}$$

$$R = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

Donc l'équation cartésienne de la sphère est :

$$(x - 0)^2 + (y - (-3))^2 + (z - 0)^2 = \sqrt{21}^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 21 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 12 = 0$$

Propriété 2 : Soient : $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace

L'ensemble des points

$M(x; y; z)$ de l'espace tel

que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$

Et d'équation cartésienne :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

Preuve : $M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = 0$$

($\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ Car I le milieu du segment $[AB]$)

$$M \in (S) \Leftrightarrow MA^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow MA = IA$$

Donc (S) est la sphère de centre le milieu du segment $[AB]$ et de rayon : IA

$M(x; y; z)$ donc : $\overrightarrow{MA}(x_A - x; y_A - y; z_A - z)$

et $\overrightarrow{MB}(x_B - x; y_B - y; z_B - z)$

$$M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

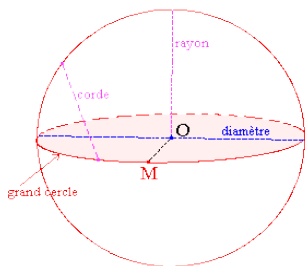
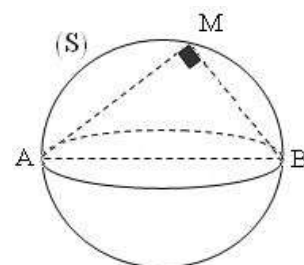
C'est l'équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$

Avec : $A(1; 0; -1)$ et $B(1; 2; -1)$

Solution : 1) méthode 1 :

On a : Ω est le milieu du segment $[AB]$



Donc : $\Omega\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ cad $\Omega(1;1;-1)$

Et on a : $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (0)^2}}{2} = 1$

Donc l'équation cartésienne de la sphère est :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1^2$$

Donc : (S) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$

Méthode2 : on utilise la Propriété

$$M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

On a : $\overrightarrow{MA}(1-x; 0-y; -1-z)$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-x) \times (1-x) + (-y)(2-y) + (-1-z)(-1-z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + -y(2-y) + (-1-z)^2 = 0$$

Donc : (S) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$

Exercice6 : Soit : A(-1;2;1) et B(1;-1;0) deux points de l'espace. Déterminer l'ensemble (S) des points

$$M(x; y; z) \text{ de l'espace tel que : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Solution : $(x+1)(x-1) + (y-2)(y+1) + (z-1)z = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - y - 2 + z^2 - z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - y - z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} \text{ Donc (S) est la sphère de}$$

centre $\Omega\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{\frac{7}{2}}$

Exercice7 : Déterminer (S) L'ensemble des points

$M(x; y; z)$ tels que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2 \sin \varphi \cos \theta \\ y = -1 + 2 \sin \varphi \sin \theta \quad (\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 + 2 \cos \varphi \end{cases}$$

Solution : soit $M(x; y; z) \in (S)$

$$\text{Donc : } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - (-1))^2 + (z - 1)^2 =$$

$$= (2 \sin \varphi \cos \theta)^2 + (2 \sin \varphi \sin \theta)^2 + (2 \cos \varphi)^2$$

$$= 4 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 4 \cos^2 \varphi$$

$$\text{Donc : } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - (-1))^2 + (z - 1)^2 = 2^2$$

(S) L'ensemble des points $M(x; y; z)$ est donc la sphère de centre $\Omega(1/2, -1, 1)$ et de rayon $R = 2$

10-3 L'ensemble (S) des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Proposition : Soit (S) L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ avec } a ;$$

$b ; c$ et d des réelles

• Si : $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ alors (S) est une sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

• Si : $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ alors $S = \{\Omega(a; b; c)\}$

• Si : $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ alors $S = \emptyset$

Preuve : $M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + z^2 - 2cz + c^2 + d - a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$$

• Si : $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ alors (S) est une sphère de centre

$$\Omega(a; b; c) \text{ et de rayon } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

• Si : $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ alors $S = \{\Omega(a; b; c)\}$

• Si : $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ alors $S = \emptyset$

Exemple : Déterminer (S) L'ensemble des points

$M(x; y; z)$ dans les cas suivants :

1) $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z = 0$

2) $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 6z + 22 = 0$

3) $(S_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + z + 7 = 0$

Solution : 1) soit $a=1$ et $b=3$ et $c=2$ et $d=0$

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 9 + 4 = 14$$

$$\text{Puisque } a^2 + b^2 + c^2 - d = 14 > 0$$

Donc : L'ensemble des points $M(x; y; z)$ est donc la sphère (S_1) de centre

$$\Omega(1, 3, 2) \text{ et de rayon } R = \sqrt{14}$$

2) $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 6z + 22 = 0$

$$M(x; y; z) \in (S_2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) + (z^2 + 6z) + 22 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-3=0 \text{ et } y+2=0 \text{ et } z+3=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ et } y=-2 \text{ et } z=-3$$



alors $S_2 = \{\Omega(3; -2; -3)\}$

3) $(S_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + z + 7 = 0$

$M(x; y; z) \in (S_3)$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 3y) + (z^2 + z) + 7 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{2}$ alors $S_3 = \emptyset$

10-4) L'intersection d'une sphère (S) et une droite (D) :

Exemple1 : Soient (S) une sphère :

$(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$

et (D) une droite : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1+t \end{cases}$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$M(x; y; z) \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9 \end{cases}$

Donc : $t^2 + t^2 + (t-1)^2 = 9 \Leftrightarrow 2t^2 - 2t - 8 = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$ ou $t = -\frac{4}{3}$

$x = \frac{7}{3}; y = -\frac{1}{3}; z = -\frac{1}{3}$ ou $x = -1; y = 3; z = 3$

la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points

$A\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ et $B(-1; 3; 3)$

Exemple2 : Soient (S) une sphère :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0$

et (D) une droite : $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 4+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2+5t \end{cases}$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$M(x; y; z) \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 4+t \\ z = -2+5t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$

Donc :

$(2+3t)^2 + (4+t)^2 + (-2+5t)^2 - 2(2+3t) - 4(4+t) + 2(-2+5t)t - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 25t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ Donc : $x = -2; y = 4; z = -2$

la droite (D) coupe la sphère (S) en un seul point

$A(2; 4; -2)$ on dit que la droite (D) est tangente à (S) en $A(2; 4; -2)$

Exemple3 : Soient (S) une sphère :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

et (D) une droite : $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1+2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases}$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$M(x; y; z) \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$

Donc : $(-1+t)^2 + (1+2t)^2 + 2^2 + 2(-1+t) - 2(1+2t) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 5t^2 + 1 = 0$ Pas de solutions

Donc la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

Proposition : Soient (D) une droite de l'espace

et (S) une sphère de centre O et de rayon R, H le projeté orthogonal du point O sur la droite (D).

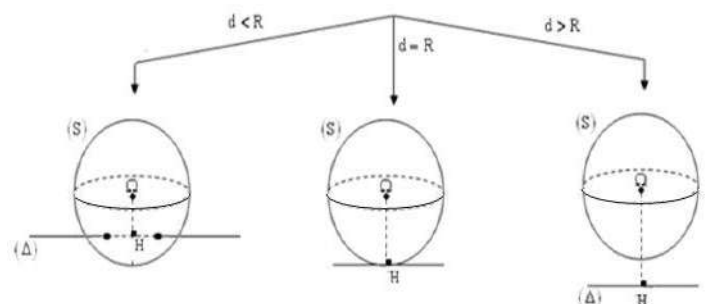
Notons $d = OH$:

- Si $d > R$ alors la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

- Si $d = R$ alors la droite (D) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que la droite (D) est tangente en H à (S)

- Si $d < R$ alors la droite (D) et la sphère (S) en deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H, dans ce cas on dit que

la droite (D) est sécante à (S). ($OA = OB = R$)



Exercice8 : Étudier la position relative de la sphère (S) et la droite (D) dans les cas suivants :

1) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$

La droite (D) qui passe par $A(0; 5; 1)$ et $\vec{n}(2; 1; -2)$ un vecteur directeur de (D)

2) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0$

La droite (D) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + t \end{cases}$$

3) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 4 = 0$

La droite (D) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

Solution : 1) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$

La droite (D) passe par $A(0; 5; 1)$ et $\vec{n}(2; 1; -2)$ un vecteur directeur de (D) donc une représentation paramétrique de

$$(D) \text{ est : } \begin{cases} x = 2t \\ y = 5 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$M(x; y; z) \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} /$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 5 = 0 \\ x = 2t \\ y = 5 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Donc :

$$(2t)^2 + (5+t)^2 + (1-2t)^2 + 6 \times 2t - 4(5+t) - 2(1-2t) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 + 18t + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0$$

On a : $\Delta = 0$ donc une solution double : $t = \frac{-b}{2a} = -1$

On remplace et on trouve : $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4; \\ z = 3 \end{cases}$

la droite (D) coupe la sphère (S) en un seul point

$T(-2; 4; 3)$ on dit que la droite (D) est tangente à (S) en $T(-2; 4; 3)$

2) on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0 \\ x = -1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

On remplace et on trouve :

$$(-1+2t)^2 + (2-2t)^2 + (-1+t)^2 - 4 \times (-1+2t) - 2(2-2t) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 18t + 5 = 0 \text{ on } \Delta = 18^2 - 4 \times 9 \times 5 = 324 - 180 = 144 = 12^2$$

Donc : $t_1 = \frac{1}{3}$ et $t_2 = \frac{5}{3}$

On remplace et on trouve :

$$A\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right) \text{ et } B\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points: A et B

3) on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 4 = 0 \\ x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

On remplace et on trouve :

$$0^2 + t^2 + t^2 - 2 \times 0 + 4t - 2t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2 = 0 \text{ on a : } \Delta = 1^2 - 4 \times 2 = -7 < 0$$

Donc l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

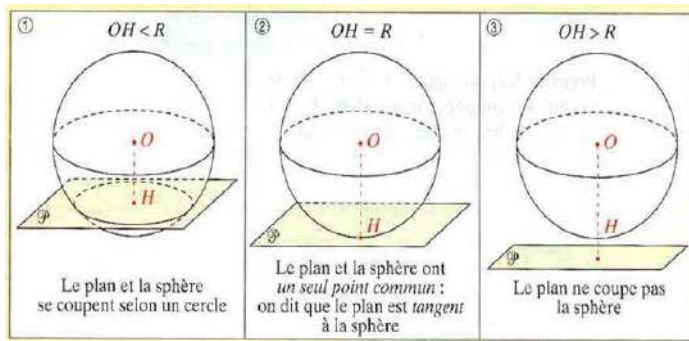
Donc la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide. $(S) \cap (D) = \emptyset$

10-5) L'intersection d'une sphère (S) et un plan (P)

Proposition : Soient (S) une sphère de centre O et de rayon R , (P) un plan de l'espace, nommons H le projeté orthogonal de O sur le plan (P) et $d = OH$, la distance du point O au plan (P) .

- Si $d > R$ alors le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.
- Si $d = R$ alors le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan (P) est tangent en H à (S)
- Si $d < R$ alors l'ensemble des points commun au plan (P) et la sphère (S) est le cercle du plan (P) de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ (Théorème de Pythagore), dans ce cas on dit le plan (P) est sécant à (S) .





Exemple1 : Soient (S) une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$$

Et le plan d'équation $(P): 2x - y - z + 5 = 0$

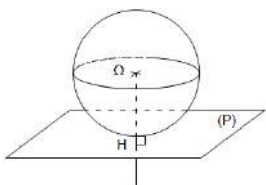
Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

Solution : Déterminons le centre et le rayon de la sphère : On a : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$ donc

$$(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{6}^2$$

(S) est donc une sphère de centre $\Omega(1;1;0)$ et de rayon

$$R = \sqrt{6}$$



Et puisque : $d(\Omega; (P)) = R = \sqrt{6}$

Alors le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun donc le plan (P) est tangent en H à (S)

Déterminons le point de tangence H qui est la projection de Ω sur le plan (P)

Soit $\vec{n}(2; -1; -1)$ Un vecteur normal à ce plan (P)

$$\exists k \in \mathbb{R} / \begin{cases} \vec{\Omega H} = k\vec{n} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = -k \\ 2x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Donc : $2(1+2k) - (1-k) - (-k) + 5 = 0 \Leftrightarrow k = -1$ Donc :

$$x = -1; y = 2; z = 1 \text{ Donc } H(-1; 2; 1)$$

Exemple2 : Soient (S) une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$$

Et le plan d'équation $(P): x - y + z - 3 = 0$

Étudier la position relative de la sphère (S)

et le plan (P)

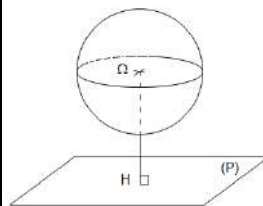
Solution : Déterminons le centre et le rayon de la sphère : On a : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ donc

$$(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1^2$$

(S) est donc une sphère de centre $\Omega(1;0;-1)$ et de rayon $R = 1$

Et puisque : $d(\Omega; (P)) = \frac{|1-0-1-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3} > R$

Alors le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.



$$(S) \cap (P) = \emptyset$$

Exemple3 : Soient (S) une sphère :

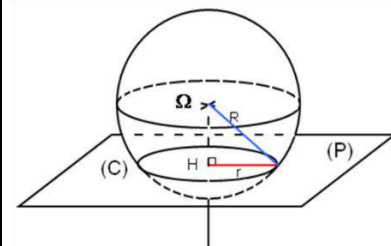
$$(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$$

Et le plan d'équation $(P): 2x - y + 3z - 2 = 0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

Solution : (S) est donc une sphère de centre $\Omega(2;1;-3)$ et de rayon $R = 3$

Et puisque : $d(\Omega; (P)) = \frac{|4-1-9-2|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{8}{\sqrt{14}} < R$



Alors la sphère (S) coupe le plan (P) suivant un cercle de centre H qui est la projection orthogonale du point Ω sur le plan (P) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{62}{14}}$

Déterminons le centre $H(x; y; z)$ du cercle

Soit $\vec{n}(2; -1; 3)$ Un vecteur normal à ce plan (P)

$$\exists k \in \mathbb{R} / \begin{cases} \vec{\Omega H} = k\vec{n} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = -3 + 3k \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$



$$\text{Donc : } 2(2+2k) - (1-k) + 3(-3+3k) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4}{7} \text{ Donc : } x = \frac{22}{7}; y = \frac{3}{7}; z = -\frac{9}{7}$$

$$\text{Donc } H\left(\frac{22}{7}; \frac{3}{7}; -\frac{9}{7}\right)$$

Exercice9 : (S) sphère de centre $\Omega(2;0;1)$

et de rayon : $R = 3$

le plan d'équation $x - 2y + z + 3 = 0$

a) déterminer une équation cartésienne de (S)

b) calculer : $d(\Omega; (P))$ et vérifier que le plan (P) coupe

(S) suivant un cercle (C) dont on déterminera

le rayon r

c) déterminer une équation paramétrique de la droite (Δ)

qui passe par Ω et orthogonal au plan (P)

d) en déduire H le centre du cercle (C)

Solution :

$$\text{a) } (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 3^2$$

On effectue les calculs on trouve :

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 9$$

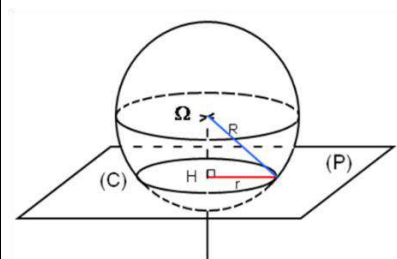
$$\text{b) } x - 2y + z + 3 = 0 \text{ et } \Omega(2;0;1)$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2+4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < R = 3$$

Donc le plan (P) coupe (S) suivant un cercle (C)

On remarque que le triangle est rectangle en H

Et Pythagore donne : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ donc :



$$r = \sqrt{3^2 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{9-6} = \sqrt{3}$$

c) (Δ) passe par $\Omega(2;0;1)$ et orthogonal au plan (P)

et on a $\vec{n}(1;-2;1)$ vecteur normal au plan (P) donc :

vecteur directeur de (Δ)

$$\text{donc : } \begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = -2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1t + 1 \end{cases}$$

$$4(P)) \quad x - 2y + z + 3 = 0 \text{ et } (\Delta) \begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = -2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1t + 1 \end{cases}$$

$H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P)$ Donc :

$$(t+2) - 2(-2t) + (t+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

$$\text{On remplace et on trouve : } \begin{cases} x = -1 + 2 \\ y = -2(-1) \\ z = -1 + 1 \end{cases}$$

donc : $H(1; 2; 0)$ est le centre du cercle (C)

10-6) le plan tangent a une sphère en un point :

Proposition :

Soient (S) une sphère de centre Ω et $A \in (S)$

Il existe un plan (P) unique de l'espace tangent à la sphère

en A et définie par : $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$

Exemple : Soit (S) une sphère : $(S) : x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$

Et soit le point $A(1; -1; -1)$

Vérifier que $A \in (S)$ et Déterminer l'équation cartésienne

du plan (P) tangent a la sphère (S) en A

Solution : $1^2 + (-1)^2 + (-1+2)^2 = 1+1+1=3$ donc $A \in (S)$

$\Omega(0;0;-2)$ est le centre de la sphère (S) et de rayon

$R = 3$ Et on a : $\overrightarrow{AQ}(-1;1;-1)$

Donc : $M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$

$$\Leftrightarrow -(x-1) + (y+1) - (z+1) = 0$$

Donc l'équation de : (P) : $x - y + z - 1 = 0$

Exercice10: on considère les plans d'équations respectives

(P) $x - y + z = 0$ et (Q) $2x + 3y + z - 6 = 0$

et la sphère (S) de centre $\Omega(1; 2; 4)$ et tangente au plan (P)

et soit la droite (Δ) qui passant par Ω et perpendiculaire au plan (Q)



1) montrer que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux

2a) déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)

b) déterminer le point de tangence de (P) et (S)

3a) déterminer le point d'intersection de (Δ) et (Q)

b) Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Solutions : 1) On a : $\vec{n}(1; -1; 1)$ Un vecteur normal à (P)

et $\vec{n}'(2; 3; 1)$ Un vecteur normal à (P)

Et on a : $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times 2 + (-1) \times 3 + 1 \times 1 = 0$

Donc $\vec{n} \perp \vec{n}'$ donc (P) et (Q) sont orthogonaux

2a) puisque la sphère (S) est tangente

au plan (P) Alors : $d(\Omega; (P)) = R$

Et on a : $d(\Omega; (P)) = \frac{|1-2+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \sqrt{3}$

Donc : $R = \sqrt{3}$

Donc l'équation cartésienne de la sphère (S) est :

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3$$

2b) le point de tangence H de (P) et (S) est

la projection orthogonale Ω sur le plan (P)

donc H est le point d'intersection entre la droite (D)

perpendiculaire à (P) passant par Ω et on a : $\vec{n}(1; -1; 1)$

Un vecteur normal à (P) donc c'est un vecteur directeur de la droite (D)

la représentation paramétrique de (D) est

$$(D): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 4+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$H \in (D) \cap (P)$ Donc : $(1+t) - (2-t) + 4+t = 0$

$\Leftrightarrow t = -1$ donc : $H(0; 3; 3)$

3a) puisque $(\Delta) \perp (Q)$ alors :

$\vec{n}(1; -1; 1)$ Un vecteur directeur de (Δ) :

Et on a : $\Omega \in (\Delta)$ donc la représentation paramétrique de

$$(\Delta): \text{est } (\Delta): \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 4+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$W(x; y; z) \in (\Delta) \cap (Q)$

donc : $2(1+2t) + 3(2+3t) + 4+t - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{3}{7} \text{ donc : } W\left(\frac{1}{7}; \frac{5}{7}; \frac{18}{7}\right)$$

3°b) Montrons que le plan (Q) coupe la sphère (S)

suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon

$$\text{on a : } d(\Omega; (Q)) = \frac{|2+6+4-6|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}} < \sqrt{3}$$

le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle de

centre H qui est la projection orthogonale du point Ω sur le plan (Q)

et puisque (Δ) passe par Ω est perpendiculaire à (Q)

en W alors $W\left(\frac{1}{7}; \frac{5}{7}; \frac{18}{7}\right)$ est le centre du cercle (C) et le

rayon du cercle (C) est $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ avec $d = d(\Omega; (Q))$

Donc : $r = \sqrt{3/13}$

Exercice 11: on considère l'ensemble (S_m) des points

$M(x; y; z)$ de l'espace qui vérifient l'équation :

$$(S_m): mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0$$

Avec m un paramètre non nul

1) montrer que (S_m) est une sphère pour tout $m \in \mathbb{R}^*$

2) montrer que tous les sphères se coupent suivant un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Solution : 1) $mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(\frac{m-1}{m}\right)x + \frac{2}{m}y + \frac{2}{m}z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(1 - \frac{1}{m}\right)x + \frac{2}{m}y + \frac{2}{m}z = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 - \frac{2}{m^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{m}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{2}{m^2}$$

Et puisque : $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{2}{m^2} > 0$

Alors : (S_m) est une sphère pour tout $m \in \mathbb{R}^*$



de centre $\Omega_m \left(1 - \frac{1}{m}; -\frac{1}{m}; -\frac{1}{m} \right)$ et de rayon

$$R_m = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{m} \right)^2 + \frac{2}{m^2}}$$

2) soit $M(x; y; z) \in (S_m) \quad \forall m \in \mathbb{R}^*$

$$\text{Donc : } mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$m(x^2 + y^2 + z^2 - 2x) + (2x + 2y + 2z) = 0 : \forall m \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Donc le cercle cherché et l'intersection entre :

la sphère $(S) : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ et le plan $(P) :$

$$2x + 2y + 2z = 0$$

en effet le cercle existe car :

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|1+0+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

le centre H du cercle est l'intersection entre (P) et la droite

(Δ) qui passe par Ω est perpendiculaire à (P) et puisque

$(\Delta) \perp (P)$ alors : $\vec{n}(1;1;1)$ Un vecteur directeur de (Δ)

Et on a : $\Omega \in (\Delta)$ donc la représentation paramétrique de

$$(\Delta) \text{ est } \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P) \text{ donc : } (1+t) + t + t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \text{ donc : } H\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

et le rayon du cercle (C) est :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Donc : tous les sphères se coupent suivant le cercle (C)

Exercice12: dans l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère

$(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé On considère les plan (P_m)

d'équations $x + y - z - m = 0$ avec m paramètre réel Et la

sphère (S) de centre $\Omega(1; 2; 1)$ et le rayon $R = \sqrt{3}$

1) Etudier et discuter suivant le paramètre m la position

relative de la sphère (S) et les plan (P_m)

2) soit (E) l'ensemble des réels m tels que : (P_m) coupe la

sphère (S) suivant un cercle (C_m)

Déterminer l'ensemble des centres des cercles (C_m)

lorsque m varie dans (E)

Solution : 1) $(P_m) : x + y - z - m = 0$

$$d_m = d(\Omega; (P_m)) = \frac{|1+2-1-m|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|2-m|}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow |2-m| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2-m < 3 \Leftrightarrow -5 < -m < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < 5$$

le plan (P_m) coupe la sphère (S) suivant des cercles de centre C_m qui est la projection orthogonal du point Ω sur le plan (P_m)

soit (Δ) la droite qui passe par Ω est perpendiculaire à

(P_m) et puisque $(\Delta) \perp (P_m)$ alors : $\vec{n}(1;1;-1)$ Un

vecteur directeur de (Δ) Et on a : $\Omega \in (\Delta)$ donc la

$$\text{représentation paramétrique de } (\Delta) \text{ est } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

le centre C_m est le point d'intersection de (Δ) et (P_m)

$$\text{on va donc résoudre le system } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z-m=0 \end{cases}$$

$$1+t+2+t-(-t+1)-m=0 \Leftrightarrow 3t+2-m=0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{m-2}{3} \text{ donc les coordonnées du centre du cercle}$$

$$\text{d'intersection est } \begin{cases} x=1+\frac{m-2}{3}=\frac{m+1}{3} \\ y=2+\frac{m-2}{3}=\frac{m+4}{3} \\ z=1-\frac{m-2}{3}=\frac{-m+5}{3} \end{cases}$$

$$C_m \left(\frac{m+1}{3}; \frac{m+4}{3}; \frac{-m+5}{3} \right) \text{ et le rayon est :}$$

et le rayon du cercle (C) est :

$$r = \sqrt{R^2 - d_m^2} \text{ avec } d_m = \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} \text{ et } R = \sqrt{3}$$

$$r_m = \sqrt{3 - \left(\frac{|2-m|}{\sqrt{3}} \right)^2} \Leftrightarrow r_m = \sqrt{3 - \frac{|2-m|^2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow r_m = \sqrt{\frac{9-(2-m)^2}{3}} = \sqrt{\frac{9-(m^2-4m+4)}{3}} = \sqrt{\frac{-m^2+4m+5}{3}}$$



2cas : Si $d(\Omega; (P_m)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |2-m| = 3 \Leftrightarrow 2-m = 3 \text{ ou } 2-m = -3$

$\Leftrightarrow m = -1 \text{ ou } m = 5$

la sphère (S) de centre $\Omega(1; 2; 4)$ et tangente au plan (P_m)

si $m = -1$: le point de tangence T_1 est le point

d'intersection de (Δ) et (P_{-1})

on va donc résoudre le system
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1-t \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$$

$1+t+2+t-(-t+1)+1=0 \Leftrightarrow 3t+2+1=0$

$\Leftrightarrow t = -1$ donc les coordonnées du point de tangence est donc $T_1(0; 1; 2)$

si $m = 5$: le point de tangence T_2 est le point

d'intersection de (Δ) et (P_5)

on va donc résoudre le system
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1-t \\ x+y-z-5=0 \end{cases}$$

$1+t+2+t-(-t+1)-5=0 \Leftrightarrow 3t+2-5=0$

$\Leftrightarrow t = 1$ donc les coordonnées du point de tangence est donc $T_2(2; 3; 0)$

3cas : Si $d(\Omega; (P_m)) > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} > \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |2-m| > 3 \Leftrightarrow 2-m > 3 \text{ ou } 2-m < -3$

$\Leftrightarrow m < -1 \text{ ou } m > 5$

$(P_m) \cap (S) = \emptyset$

2) les coordonnées des centres des cercles

d'intersections sont
$$\begin{cases} x = \frac{m+1}{3} \\ y = \frac{m+4}{3} \\ z = \frac{-m+5}{3} \end{cases} \text{ et } -1 < m < 5$$

c'est une portion de droite

Exercice13: dans l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère

$(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé on considère l'ensemble (S_m) des

points $M(x; y; z)$ tq : (S_m) :

$x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$

avec m paramètre réel

1) Montrer que (S_m) est une sphère $\forall m \in \mathbb{R}$

2) Déterminer l'ensemble des centres des (S_m) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

3) Montrer qu'il existe un cercle (C) incluse dans tous les sphères (S_m) $\forall m \in \mathbb{R}$ et Déterminer le plan (P) qui contient ce cercle (C)

4) Soit un point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ dans l'espace tq $M_0 \notin (P)$

Montrer qu'il existe une sphère unique qui passe par M_0

5) Montrer qu'il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O; x; y)$

Solution : 1) $x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{m}{2}x + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 2(m-1)y + (m-1)^2 - (m-1)^2$

$+ 2\left(\frac{m+4}{2}\right)z + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y+m-1)^2 + \left(z + \frac{m+4}{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 + (m-1)^2 - 1$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y+m-1)^2 + \left(z + \frac{m+4}{2}\right)^2 = \frac{4(m-1)^2 + (m+4)^2 + m^2 - 4}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y+m-1)^2 + \left(z + \frac{m+4}{2}\right)^2 = \frac{6m^2 + 16}{4} = R^2$

Et puisque : $\frac{6m^2 + 16}{4} > 0$

Alors : (S_m) est une sphère pour tout $m \in \mathbb{R}$

de centre $\Omega_m\left(-\frac{m}{2}; 1-m; -\frac{m+4}{2}\right)$ et de rayon

$R_m = \sqrt{\frac{6m^2 + 16}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{6m^2 + 16}$

2) Déterminons l'ensemble des centres des (S_m) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

les coordonnées des centres des cercles

d'intersections sont
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}m \\ y = -m+1 \\ z = -\frac{1}{2}m-2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$



c'est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\left(-\frac{1}{2}; -1; -\frac{1}{2}\right)$ et qui passe par $A(0;1;-2)$

3) Montrons qu'il existe un cercle (C) incluse dans tous les sphères $(S_m) \forall m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2my - 2y + mz + 4z + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 + m(x + 2y + z) &= 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0 \\ (P): x + 2y + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le cercle chercher et l'intersection entre :

la sphère $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2^2$ et le plan

$(P): x + 2y + z = 0$

en effet le cercle existe car : $\Omega(0;1;-2)$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|0+2-2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = 0 < 2 \text{ donc } \Omega \in (P)$$

donc le centre du cercle (C) est : $\Omega(0;1;-2)$

et le rayon est : $R = 2$

et tous les sphères se coupent suivant le cercle (C)

et le plan (P) qui contient ce cercle (C) est :

$(P): x + 2y + z = 0$

4) soit $M_0(x_0; y_0; z_0)$ dans l'espace tq $M_0 \notin (P)$:

$$x + 2y + z = 0 \text{ donc } x_0 + 2y_0 + z_0 \neq 0$$

Montrons qu'il existe une sphère unique qui passe par

M_0 : c d a l'existence d'un unique m ?

$$M_0 \in (S) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + mx_0 + 2(m-1)y_0 + (m+4)z_0 + 1 = 0$$

$$M_0 \in (S) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + mx_0 + 2(m-1)y_0 + (m+4)z_0 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1 + m(x_0 + 2y_0 + z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow m(x_0 + 2y_0 + z_0) = -(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1)}{x_0 + 2y_0 + z_0}$$

6) Montrons qu'il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O; x; y)$:

L'équation du plan : $(O; x; y)$ est : $z = 0$ donc

$$\begin{aligned} d(\Omega_m; (O; x; y)) &= \frac{1}{2} \sqrt{6m^2 + 16} \Leftrightarrow \frac{\left| \frac{m+4}{2} \right|}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \sqrt{6m^2 + 16} \\ \Leftrightarrow |m+4| &= \sqrt{6m^2 + 16} \Leftrightarrow (m+4)^2 = 6m^2 + 16 \\ \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 &= 6m^2 + 16 \\ \Leftrightarrow 5m^2 - 8m &= 0 \Leftrightarrow m(5m-8) = 0 \\ \Leftrightarrow m=0 \text{ ou } m &= \frac{8}{5} \text{ donc il existe deux sphères } (S_m) \end{aligned}$$

tangentes au plan $(O; x; y)$:

$$(S_0): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0$$

$$\left(S_{\frac{8}{5}}\right): x^2 + y^2 + z^2 + \frac{8}{5}x + 2\left(\frac{8}{5}-1\right)y + \left(\frac{8}{5}+4\right)z + 1 = 0$$

$$\text{Cad : } x^2 + y^2 + z^2 + \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y + \frac{28}{5}z + 1 = 0$$

[http:// abcmaths.e-monsite.com](http://abcmaths.e-monsite.com)

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien



Le PRODUIT VECTORIEL

I) ORIENTATION DE L'ESPACE

1) Le bonhomme d'Ampère

L'espace ($\mathcal{E}$) est muni d'un repère $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

orthonormé et $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ la base qui lui est associée.

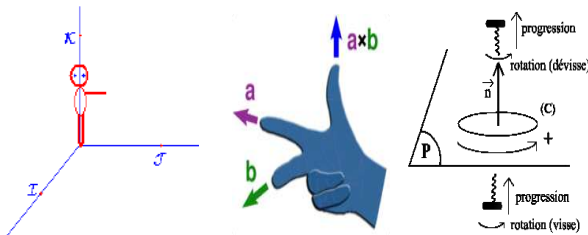
On pose un observateur (imaginaire) sur l'axe $[Oz]$ et il regarde vers l'axe $[Ox]$; On aura deux positions pour l'axe $[Oy]$:

1er cas : $[Oy]$ est à la droite de l'observateur

On dit que la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est **indirecte** de même pour le Repère $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

2eme cas : $[Oy]$ est à la gauche de l'observateur

On dit que la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est **directe** de même pour le Repère $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$



2) Remarques

1) Soit $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base **directe**.

Les bases : $(\vec{i}; \vec{k}; \vec{j})$; $(\vec{k}; \vec{j}; \vec{i})$; $(\vec{j}; \vec{i}; \vec{k})$ obtenues par la permutation de deux vecteurs sont des bases indirectes.

2) Les bases $(-\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; $(\vec{i}; -\vec{j}; \vec{k})$; $(\vec{i}; \vec{j}; -\vec{k})$ sont des bases indirectes

3) Les bases : $(\vec{j}; \vec{k}; \vec{i})$; $(\vec{k}; \vec{i}; \vec{j})$ obtenues par une rotation circulaire, sont des bases directes.

4) Soit $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base **directe**, $B'(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ une autre base de $\mathcal{V}_3$; la base B' est directe si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) > 0$

II) DEFINITION DU PRODUIT VECTORIEL.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_3$.

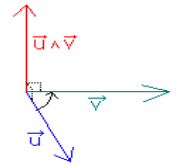
Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

alors Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est tel que :

$\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$ et la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est directe



Et $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \theta$

Exemple : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$\|\vec{u}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

Calculer : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = 1 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Remarque : On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Soit A un point dans l'espace ; ils existent deux points dans l'espace B et C tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, les points A , B et C étant non alignés, ils définissent un plan (P) dans l'espace $(\mathcal{E})$.

Et $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale au plan (P)

III) PROPRIETES DU PRODUIT VECTORIEL

1) Propriétés :

1) $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

2) Le produit vectoriel est antisymétrique :

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

3) Le produit vectoriel est bilinéaire :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$$

$$(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v})$$

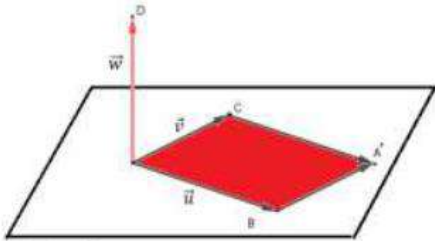
2) Interprétation géométrique : Surface d'un triangle.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_3$, qu'on suppose non colinéaires

tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ on a d'après la

Définition du produit vectoriel :

$AD = AB \times AC \times \sin \alpha$ où α la mesure de l'angle BAC



D'autre part, la surface du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$$

et on a : $\sin \alpha = \frac{BH}{AB}$ donc : $BH = AB \sin \alpha$ et par

suite :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times AB \times \sin \alpha$$

et donc $AD = 2S_{ABC} = S_{ABCD}$

Propriété 1: Soient A, B et C trois points non alignés on a $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$: est la surface du parallélogramme $ABA'C$

Propriété 2 : Soient A, B et C trois point non alignés, la surface du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

IV) L'EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Soit $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{V}_3$,

Considérons deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et

$\vec{u}'(x'; y'; z')$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}_3$ on a

donc : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

par suite :

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = xx'(\vec{i} \wedge \vec{i}) + xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) +$$

$$+yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yy'(\vec{j} \wedge \vec{j}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k}) +$$

$$+zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) + zz'(\vec{k} \wedge \vec{k})$$

On a : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$ et $\vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ et $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

et $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = xx'\vec{0} + xy'\vec{k} - xz'\vec{j} +$$

$$-yx'\vec{k} + yy'\vec{0} + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} - zy'\vec{i} + zz'\vec{0}$$

D'où :

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

Propriété : Soient $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base

orthonormée directe de $\mathcal{V}_3$, et deux vecteurs

$\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{u}'(x'; y'; z')$ on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{k}$$

Exemple1 : $\vec{u}(1;1;1)$ et $\vec{v}(2;1;2)$ deux vecteurs:

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

Exemple2 : $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

V) APPLICATIONS.

1) Alignement de 3 points.

Propriété : Soient A, B et C trois point dans l'espace, A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ce qui est équivalent à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

2) Equation d'un plan.

Soient A, B et C trois point non alignés dans

l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal

Au plan (ABC) donc :

$$M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

Cette équivalence détermine l'équation cartésienne du plan (ABC)

Exemple : dans l'espace muni d'un repère

orthonormée directe $(\vec{0}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on considère les

points $A(0;1;2)$ et $B(1;1;0)$ et $C(1;0;1)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points

A et B et C sont non alignés

2) Calculer la surface du triangle ABC

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Solution :1) $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1;0;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;-1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ Donc les points A et B et C sont non alignés

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Donc : $S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$ un vecteur normal du plan ABC

Donc une équation cartésienne du plan ABC est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$ donc $a = -2$ et $b = -1$ et $c = -1$

Donc : $-2x - 1y - 1z + d = 0$ (ABC)

Et on a : $A(0;1;2) \in (P)$ donc : $0 - 1 - 2 + d = 0$

donc $d = 3$

Donc (ABC) : $-2x - 1y - 1z + 3 = 0$

Donc (ABC) : $2x + y + z - 3 = 0$

3) Intersection de deux plans

Soient (P) et (Q) deux plan sécants dans l'espace suivant une droite (Δ), Soient $\vec{n}$

un vecteur normal sur (P) et $\vec{m}$ un vecteur normal sur (Q)

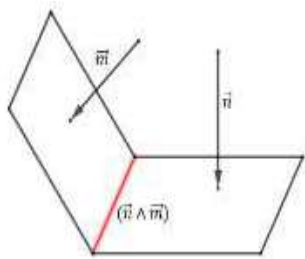
Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ) alors : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{m} \cdot \vec{u} = 0$ et on sait que :

$$\vec{m} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{m}) = \vec{n} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{m}) = 0 \text{ on en déduit que } \vec{u} \text{ et } \vec{n} \wedge \vec{m} \text{ sont colinéaires et par}$$

suite $\vec{n} \wedge \vec{m}$ est un vecteur directeur de (Δ)

Propriété : Soient (P) et (Q) deux plan dans l'espace où $\vec{n}$ est un vecteur normal sur (P) et $\vec{m}$ est un vecteur normal sur (Q), si $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont non colinéaires alors (P) et (Q) se coupent selon une droite (Δ) dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{m}$

Exemple : L'espace est muni d'un repère orthonormé



Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

(P) $x - y + 2z + 1 = 0$ et (P') $2x + y - z + 2 = 0$

Solution : $\vec{n}(1;-1;2)$ et $\vec{n'}(2;1;-1)$ deux vecteurs normaux respectivement de (P) et (P')

On a : $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$

Donc : $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} \neq \vec{0}$

les plans (P) et (P') sont sécants suivant une droite (D)

et $\vec{u}(-1;5;3)$ est un vecteur directeur de (D)

et la droite (D) passe par $A(-1;5;3)$ (il suffit de donner par exemple $z = 0$ et résoudre le système et calculer x et y)

Donc : une représentation paramétrique de

(D) est (D) : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

4) Distance d'un point par rapport à une droite.

Soit $D(A; \vec{u})$: la droite

qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point dans l'espace.

• Si $M \in (D)$ alors $d(A; (D)) = 0$

• Si $M \notin (D)$ on pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

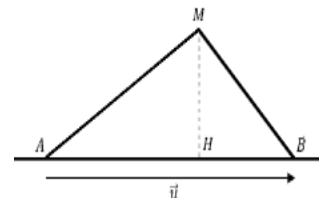
Soit H la projection orthogonale de M sur la droite (D). on a :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} MH \times AB =$$

On en déduit que : $d(M; (D)) = MH = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{AB}$

Propriété : Soient $D(A; \vec{u})$: une droite dans l'espace et M un point ; la distance du point M à la droite (D) est $d(M; (D)) = MH = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$

(Cette propriété reste vraie si $M \in (D)$)



Exemple : L'espace est muni d'un repère orthonormé
calculer la distance du point $M(-1;0;1)$ à la droite (D) dont une représentation

paramétrique est : $(D) : \begin{cases} x = -1+t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Solution : la droite (D) passe par : $A(1;-1;0)$
et $\vec{u}(2;-1;2)$ est un vecteur directeur de (D)
et $\overrightarrow{AM}(-2;1;1)$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$$

Donc : $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$

Donc : $d(M; (D)) = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$

Exercice : soit ABCDEFGH un cube dans L'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$

Soit I milieu du segment $[EF]$ et K centre de gravité du carré ADHE

1)a) Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

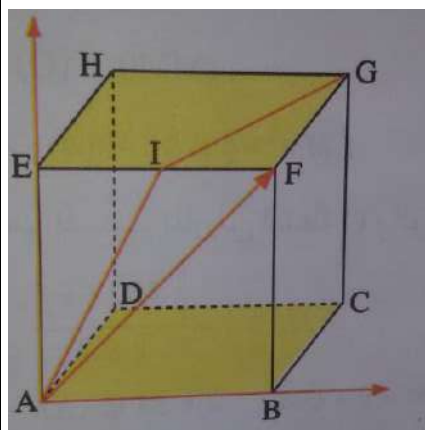
b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit Ω un point tel que : $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$

2)a) comparer les distances : BD et ΩT et comparer la surface des triangles ABD et $A\Omega T$

2)b) Montrer que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

Solution : 1) a) dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$



On a : $A(0;0;0)$ et $B(1;0;0)$ et $D(0;1;0)$ et

$E(0;0;1)$ et $F(1;0;1)$

et $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$ et $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et

$$K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

donc : $\overrightarrow{BK}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IG}\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ et $\overrightarrow{IA}\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)$

$$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{AB} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{AD} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \text{ cad } \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Donc : $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

b) $S_{IGA} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

2)a) on a : $\overrightarrow{BD} \overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$ donc $BT\Omega D$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{\Omega T} = \overrightarrow{DB}$

Donc $\Omega T = DB$

Soit M la projection orthogonal de A sur la droite (BD) donc (AM) c'est la hauteur des deux triangles ABD et $A\Omega T$ donc :

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AM \times BD \text{ et } S_{A\Omega T} = \frac{1}{2} AM \times \Omega T$$

Et puisque : $\Omega T = DB$ alors $S_{A\Omega T} = S_{ABD}$

2)b) Montrons que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{T\Omega}) = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{T\Omega}$$

On a : $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AT} = \vec{0}$ car les points A et C et T sont alignés

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} \text{ (car } \overrightarrow{T\Omega} = \overrightarrow{BD} \text{)}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien



Leçon d'arithmétique en terminale C : PGCD et PPCM

MOUNDOYI-MBOUNGOU Harold Amen
Université Marien Ngouabi
Ecole Normale Supérieure
Congo

14 Août 2014



Projet Prenum-AC

Présentation de la ressource

Dénomination de la ressource et des contributeurs

Titre de la ressource : ***PGCD et PPCM***

Nom de l'étudiant : ***MOUNDOYI-MBOUNGOU Harold Amen***

Noms de l'encadreur : ***Pas d'encadreur***

Objectif pédagogique général

Utiliser les PGCD et PPCM pour résoudre les problèmes

Objectifs pédagogiques spécifiques (O.P.S)

A la fin de la ressource, l'élève devra être capable de :

- Déterminer le *PGCD* et *PPCM* de deux entiers relatifs ;
- Utiliser les propriétés du *PGCD* et du *PPCM* pour démontrer ;
- Utiliser le théorème de Gauss et de Bézout pour démontrer et résoudre les problèmes ;
- Résoudre les équations diophantiennes de type : $ax + by = c$

Liens avec d'autres parties du programme Congolais

Les parties du programme ayant un lien avec cette ressource sont :

- La divisibilité dans $\mathbb{Z}$;
- les congruences ;
- les nombres premiers.

1. Plus grand commun diviseur (PGCD)

Exemple 1. Pour simplifier la fraction $\frac{159390}{49005}$ on peut diviser successivement le numérateur et le dénominateur par 5, puis 9, puis par 11.

$$\frac{159390}{49005} = \frac{31878}{9801} = \frac{3542}{1089} = \frac{322}{99}$$

La fraction $\frac{322}{99}$ alors obtenue ne peut plus être simplifiée.

Pour passer de $\frac{159390}{49005}$ à $\frac{322}{99}$ on a simplifié par $5 \times 9 \times 11 = 495$.

495 correspond au plus grand diviseur qui soit commun aux deux nombres 159390 et 49005.

1.1 Propriété-Définition.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Un entier naturel qui divise a et qui divise b est appelé diviseur commun à a et b .

l'ensemble des diviseurs communs à a et à b possède un plus grand élément que l'on appelle le plus grand commun diviseur de a et de b , on le note $PGCD(a, b)$.

Exemple 2.

L'ensemble des diviseurs de 15 est $\{1; 3; 5; 15\}$.

Dans $\mathbb{N}$ L'ensemble des diviseurs de 12 est $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

L'ensemble des diviseurs communs à 12 et 15 est donc $D(12; 15) = \{1; 3\}$.

On a donc $PGCD(15; 12) = 3$.

En écrivant l'ensemble des diviseurs de 159390 et l'ensemble des diviseurs de 49005, on peut obtenir $PGCD(159390; 49005) = 495$ (exemple 1).

Remarque. a étant un entier naturel, l'ensemble des diviseurs de a est égal à l'ensemble des diviseurs de $-a$. 

On pourra étendre, si besoin la notion de $PGCD$ à des nombres entiers relatifs.

On dira par exemple que $PGCD(-15; 12) = PGCD(15; 12) = 3$.

1.2 Propriété.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On a

$$PGCD(a; b) \leq a; \quad PGCD(a; b) \leq b; \quad PGCD(a; b) = PGCD(b; a)$$

Si b divise a , on a $PGCD(a; b) = b$, en particulier $PGCD(a; 1) = 1$ et $PGCD(a; a) = a$.

Exemple 3.

6 est un diviseur de 18 donc $PGCD(6; 18) = 6$.

Exercice 1. (voir correction)

En écrivant les diviseurs de 18 et 48, trouve $PGCD(18; 48)$.

Exercice 2. (voir corr) déterminer :

- a) $PGCD(125468; 3)$ b) $PGCD(8625; 5)$ c) $PGCD(7253; 6)$

1.3 Propriété.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b . (On a $a = b \times q + r$)

Alors

$$\text{si } r = 0 \quad PGCD(a; b) = b$$

$$\text{si } r \neq 0 \quad PGCD(a; b) = PGCD(b; r).$$

Exemple 4. Pour trouver le $PGCD$ de 2414 et 804, on peut écrire la division euclidienne de 2414 par 804.

$$2414 = 804 \times 3 + 2.$$

On en déduit alors $PGCD(2414; 804) = PGCD(804; 2)$.

Il est immédiat que $PGCD(804; 2) = 2$ car 2 divise 804.

Donc $PGCD(2414; 804) = 2$.

Exercice 3. (voir corr) Déterminer :

- a) $PGCD(584; 64)$ b) $PGCD(213; 5539)$ c) $PGCD(35691; 221)$.

Exercice 4. (voir corr) Démontrer que le $PGCD$ de deux nombres entiers naturels non nuls consécutifs est égal à 1.

1.4 Propriété-Algorithm d'Euclide.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On définit la suite r_n d'entiers naturels de façon suivante :

$r_0 = b$; r_1 est le reste de la division euclidienne de a par b .

pour $n \geq 1$

$$\text{si } r_n = 0 \quad \text{alors } r_{n+1} = 0.$$

$$\text{si } r_n \neq 0 \quad \text{alors } r_{n+1} \text{ est le reste de la division euclidienne de } r_{n-1} \text{ par } r_n.$$

Alors il existe un entier n_0 tel que $r_{n_0} \neq 0$ et pour tout $n > n_0$, $r_n = 0$ on a $PGCD(a; b) = r_{n_0}$.

Remarque. En effectuant ainsi des divisions euclidiennes successives de a par b puis du diviseur par le reste,... le premier reste non nul est le $PGCD$ de a et de b . C'est l'algorithme d'Euclide.

Suivant les nombres a et b , le nombre d'itérations à effectuer peut être plus ou moins grand.

Sachant que $PGCD(a; b) = PGCD(b; a)$ on aura toujours intérêt à prendre $b \leq a$.

Exemple 5.

- a) pour déterminer le $PGCD$ de 410258 et de 126 écrivant les divisions euclidiennes successives de 410258 et 126.

$$410258 = 126 \times 3256 + 2$$

$$126 = 2 \times 63 + 0$$

$$\text{Donc } PGCD(410258; 126) = 2$$

- b) Calculons le $PGCD$ de 1636 et de 1128 avec l'algorithme d'Euclide.

Etape	a	b	Reste	Quotient
1	1636	1128	508	1
2	1128	508	112	2
3	508	112	60	4
4	112	60	52	1
5	60	52	8	1
6	52	8	4	6
7	8	4	0	2

Exercice 5. En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer le $PGCD$ de :

a) 853 et 212 b) 712 et 114 c) 650 et 8563 d) 12590 et 365

Exercice 6. Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n le $PGCD$ de $n + 1$ et de $3n + 4$.

Exercice 7. Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n le $PGCD$ de $n^2 + 5n + 7$ et de $n + 1$.

1.4 Propriété.

Soient a et b deux entiers naturel non nuls.

- l'ensemble des diviseurs communs à a et à b est l'ensemble des diviseurs de leur $PGCD$.
- Pour tout entier naturel non nul k , on a $PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a; b)$

Exercice 8. Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 656 et 312.

Exercice 9. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b < a$.
Démontrer que $PGCD(a; b) = PGCD(a - b; b)$.

En utilisant cette propriété, faire apparaître un algorithme de recherche du $PGCD$ des deux nombres 3587 et 2743.

2. Nombres premiers entres eux

2.1 Définition.

Dire que deux nombres entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux signifie que $PGCD(a; b) = 1$.

2.2 Propriété.

a et b désigne des nombres entiers relatifs non nuls.

Si $d = PGCD(a; b)$, alors il existe des nombres entiers relatifs a' et b' premiers entre eux tels que :

$$a = da' \quad b = db'$$

Remarque.



par hypothèse, $d = PGCD(a; b)$, donc d divise a et il existe un nombre entier relatif a' tel que $a = da'$. De même, il existe un nombre entier relatif b' tel que $b = db'$.

Donc

$$d = PGCD(a; b) = PGCD(da'; db') = |d|PGCD(a'; b')$$

or $d \geq 1$, donc $|d| = d$ et $d \neq 0$, d'où $PGCD(a'; b') = 1$

Exercice.

$a = 3n + 4$ et $b = 2n + 3$ où n désigne un nombre entier naturel.
Démontrer que a et b sont premiers entre eux.



Solution. Pour démontrer que a et b sont premiers entre eux, il suffit de déterminer une combinaison linéaire de a et b égale à 1.

Pour cela ;

$$3b - 2a = 3(2n + 3) - 2(3n + 4) = 1$$

on note $d = PGCD(a; b)$.

d divise a et b , donc divise $3b - 2a$ c'est-à-dire 1. Or le seul diviseur de 1 est lui-même. Donc $d = 1$.
Ainsi pour tout n , $PGCD(a; b) = 1$.

3. Plus petit commun multiple (PPCM)

Exemple 1. pour effectuer le calcul $\frac{65}{18372} - \frac{21}{15310}$, on peut réduire les fractions au même dénominateur.

$$\frac{65 \times 15310}{18372 \times 15310} - \frac{21 \times 18372}{15310 \times 18372} = \frac{995150}{281275320} - \frac{385812}{281275320} = \frac{609338}{281275320}$$

on simplifie ensuite $\frac{609338}{281275320}$ en cherchant le $PGCD$ de 609338 et de 281275320 et on obtient $\frac{199}{91860}$.

Si on avait pu prévoir que 91860 était un multiple commun à 18372 et à 15310 (et même que c'était le plus petit multiple commun), les calculs en auraient été simplifiés.

En effet 91860 étant égal à 18372×5 et à 15310×6 , on aurait pu écrire

$$\frac{65 \times 5}{18372 \times 5} - \frac{21 \times 6}{15310 \times 6} = \frac{325}{91860} - \frac{126}{91860} = \frac{199}{91860}$$

La recherche des multiples communs à deux nombres présente donc un intérêt certain pour le calcul.

3.1 propriété-Définition.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

l'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b possède un plus petit élément.

Ce plus petit élément est appelé "**plus petit commun multiple**" de a et b .

On le note $PPCM(a; b)$.

Remarque. On a de façon immédiate :

$$PPCM(a; b) = PPCM(b; a)$$

si b est multiple de a , $PPCM(a; b) = b$.

Exercice 1. Ecris l'ensemble des multiples strictement positifs de



Ecrit l'ensemble des multiples strictement positifs de 6.

Ecrit l'ensemble des multiples strictement positifs communs à 6 et à 10.

Quel est le $PPCM$ de 6 et 10.

Exercice 2. Ecris l'ensemble des multiples de a et l'ensemble des multiples de b , et en déduire

$PPCM(a; b)$ dans chacun des cas suivant :

1) $a = 15; b = 24$; 2) $a = 8; b = 12$; 3) $a = 9; b = 16$

3.2 Propriété. Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

- $PGCD(a; b)$ divise $PPCM(a; b)$
- $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$
- Si a et b sont premiers entre eux, on a $PPCM(a; b) = a \times b$
- Si k est un entier naturel non nul, on a $PPCM(ka; kb) = k \times PPCM(a; b)$

Exercice 3. pour chacun des couples $(a; b)$, déterminer $PGCD(a; b)$ et en déduire $PPCM(a; b)$

1) $a = 42$; $b = 184$ 2) $a = 56$; $b = 1716$ 3) $a = 115$; $b = 244$

Exercice 4. n est un entier naturel non nul, déterminer

1) $PPCM(12n; 15n)$ 2) $PPCM(2n; 2n + 1)$ 3) $PPCM(5n + 7; 2n + 3)$

3.3 Propriété. Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

L'ensemble des multiples communs à a et à b est l'ensemble des multiples de leur $PPCM$.

Exercice. Soient a , b , et c trois entiers naturels non nuls.

Démontrer que si c est divisible par a et par b , alors c est divisible par $PPCM(a; b)$.

4. Théorème de Bézout

4.1. Identité de Bézout

a et b désignent deux nombres entiers relatifs non nuls.



Si $d = PGCD(a; b)$, alors il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.

Exemple. On sait que $PGCD(55; 35) = 5$, donc d'après l'identité de Bézout, il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $55u + 35v = 5$ par exemple $u = 2$ et $v = -3$.

En effet, $55 \times 2 + 35 \times (-3) = 5$.

Remarque.

- Le couple $(u; v)$ n'est pas unique ! si $a = 3$ et $b = 2$, $PGCD(a; b) = 1$ et $1 \times 3 - 1 \times 2 = 1$, mais aussi $-1 \times 3 + 2 \times 2 = 1$.
- La réciproque de l'identité de Bézout est fausse. par exemple, $3 \times 2 - 2 \times 2 = 2$ et pourtant 2 n'est pas le $PGCD$ de 2 et 3.

4.2. Théorème de Bézout

a et b désignent deux nombres entiers non nuls.

a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration.

- Si a et b sont premiers entre eux, alors $PGCD(a; b) = 1$.
L'identité de Bézout permet alors de dire qu'il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
- Réciproquement, s'il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$, tout diviseur communs à a et à b divise $au + bv$, donc 1.
Donc $PGCD(a; b) = 1$ et donc a et b sont premiers entre eux. $\square$

Exemple. Pour tout nombre entier naturel n non nul, $3 \times (5n + 7) - 5 \times (3n + 4) = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, $5n + 7$ et $3n + 4$ sont premiers entre eux.

Exercice. n désigne un nombre entier naturel non nul.

Démontrer que $a = 2n + 1$ et $b = 3n + 2$ sont premiers entre eux.

Solution. L'idée consiste à faire une combinaison linéaire de a et b indépendante de n , c'est-à-dire dans laquelle les n sont "éliminés".

$$\begin{aligned} -3a + 2b &= -3(2n + 1) + 2(3n + 2) = -6n - 3 + 6n + 4 = 1 \\ -3a + 2b &= 1 \end{aligned}$$

Il existe donc des nombres entiers relatifs $u = -3$ et $v = 2$ tels que $au + bv = 1$.
Donc, d'après le théorème de Bézout, $2n + 1$ et $3n + 2$ sont premiers entre eux.

Exercice. On considère $a = 145$ et $b = 55$.

- Déterminer $PGCD(a; b)$ avec l'algorithme d'Euclide.
- En exprimant de proche en proche chaque reste en fonction de a et b , déterminer un couple $(u; v)$ de nombres entiers relatifs tels que $au + bv = PGCD(a; b)$

Solution. a)

	a	b	Reste
Etape 1 : $145 = 55 \times 2 + 35$	145	55	35
Etape 2 : $55 = 35 \times 1 + 20$	55	35	20
Etape 3 : $35 = 20 \times 1 + 15$	35	20	15
Etape 4 : $20 = 15 \times 1 + 5$	20	15	5
Etape 5 : $15 = 5 \times 3$	15	5	0

Donc $PGCD(a; b) = 5$

b) On remonte l'algorithme d'Euclide à partir de l'étape 4 en isolant les restes dans un membre.

$$\begin{aligned} 5 &= 20 - 15 \times 1 \\ &= 20 - (35 - 20 \times 1) \times 1 \\ &= -35 + 20 \times 2 \\ &= -35 + (55 - 35 \times 1) \times 2 \\ &= 55 \times 2 - 35 \times 3 \\ &= 55 \times 2 - (145 - 55 \times 2) \times 3 \\ 5 &= 55 \times 8 - 145 \times 3 \end{aligned}$$

Donc $5 = 145 \times (-3) + 55 \times 8$, on en déduit que $5 = au + bv$ avec $u = -3$ et $v = 8$.

5. Le théorème de Gauss

a , b et c désignent trois.

nombres entiers relatifs non nuls.

Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

Démonstration. a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

En multipliant chaque membre de l'égalité par c , on obtient $auc + bvc = c$.

a divise auc et par hypothèse, a divise bc donc bvc , donc a divise $auc + bvc$, c'est-à-dire a divise c . $\square$

Remarque. Il est essentiel de vérifier que a est premier avec b , car a peut diviser bc en ne divisant ni b ni c . Par exemple, $300 = 15 \times 20$, or 6 divise 300 sans diviser ni 15, ni 20.

Exemple 1. Résoudre l'équation $7x = 11y$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$.

- Si $7x = 11y$, alors 11 divise $7x$. Or 7 et 11 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 11 divise x . Par conséquent, il existe un nombre entier relatif k tel que $x = 11k$. Alors de $7x = 11y$, on déduit que $7 \times 11k = 11y$, soit $y = 7k$.
- Réciproquement, tous les couples $(11k; 7k)$ sont solutions de l'équation $7x = 11y$.
En effet, $7 \times 11k = 11 \times 7k$.
- Conclusion.
Les solutions de l'équation $7x = 11y$ sont les couples $(11k; 7k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Conséquence

Propriété. a , b et c désignent des nombres entiers relatifs non nuls.

Si b et c sont premiers entre eux et divisent a , alors bc divise a .

Démonstration.

- b divise a donc il existe un nombre entier relatif k tel que $a = kb$.
- c divise a donc il existe un nombre entier relatif k' tel que $a = k'c$.

Ainsi $kb = k'c$.

On en déduit alors que b divise $k'c$.

b et c étant premiers entre eux, on déduit d'après le théorème de Gauss, que b divise k' c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier relatif k'' tel que $k' = k''b$.

De $a = k'c$, on déduit alors $a = k''bc$ donc bc divise a .

Exemple 2. le nombre 1573875 est divisible par 5 (car le chiffre des unités est 5) et il est divisible par 9 (car la somme de ses chiffres est divisible par 9). Or 9 et 5 sont premiers entre eux, donc 1573875 est divisible par 5×9 , soit 45.

Exemple 3. Le produit $n(n+1)(n+2)$ de trois nombres entiers naturels consécutifs est divisible par 2 et par 3. Ce produit est donc divisible par 6 puisque 2 et 3 sont premiers entre eux.

6. Résoudre une équation diophantienne

Activité.

(E) est l'équation $7x - 11y = 3$ où x et y sont des nombres entiers naturels.

- a) Vérifier que le couple $(x_0; y_0) = (13; 8)$ est solution de l'équation (E) .
b) En déduire la résolution de l'équation (E) .

Solution.

- a) $7x_0 - 11y_0 = 7 \times 13 - 11 \times 8 = 3$, donc $(x_0; y_0)$ est une solution de (E) .



- b) un couple $(x; y)$ est solution de (E) si, et seulement si, $7x - 11y = 3$, ce qui équivaut à : $7x - 11y - (7x_0 - 11y_0) = 3 - 3$ (on retranche 3 à chaque membre de (E)), c'est-à-dire $7(x - x_0) = 11(y - y_0)$. Or d'après l'exemple 1 ci-dessus, les solutions de cette équation sont les couples $(x - x_0; y - y_0) = (11k; 7k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi les solutions de l'équation (E) sont les couples $(x; y)$ tels que :

$$x = x_0 + 11k = 13 + 11k \quad \text{et} \quad y = y_0 + 7k = 8 + 7k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Chapitre 2

L'arithmétique des entiers

Ce chapitre se déroule dans un décor unique, à savoir l'anneau des **entiers relatifs** noté $\mathbb{Z}$ et défini par :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Parfois, on se contentera d'évoluer dans le sous décor constitué des **entiers naturels** noté $\mathbb{N}$ et défini par :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}.$$

2.1 Divisibilité et division euclidienne

Ce décor étant posé, nous allons nous intéresser aux relations qu'il peut se tisser entre les entiers et plus particulièrement à la relation de **divisibilité** :

Définition 2.1 Soit a et b sont deux entiers. On dit que a **divise** b , ou que a est un **diviseur** de b , ou que b est un **multiple** de a , s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a \times q$; on note $a \mid b$.

Propriété 2.2 On a la liste des propriétés suivantes :

- (i) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a \mid b \text{ et } b \mid c \Rightarrow a \mid c$;
- (ii) $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$;
- (iii) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a \mid c \text{ et } b \mid d \Rightarrow ab \mid cd$;
- (iv) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a \mid b \text{ et } a \mid c \Rightarrow a \mid b + c$.

Preuve — Laissez au lecteur. □

Notons qu'il y a une autre relation courante entre entiers, à savoir $a \leq b$ ou $b \geq a$. Il existe un lien entre ces deux relations ; le voici.

Proposition 2.3 (i) Les diviseurs d'un entier b **non nul** sont tous plus petit que b ; autrement dit :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \quad a \mid b \implies a \leq b.$$

ou plus généralement :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^*, \quad a \mid b \implies |a| \leq |b|.$$

(ii) On a :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^*, \quad (a \mid b \text{ et } b \mid a) \implies a = \pm b.$$

(iii) Zéro est le seul entier divisible par plus grand que lui, c'est-à-dire :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad (a \mid b \text{ et } |a| > |b|) \implies b = 0.$$

Preuve — Ces preuves sont faciles mais permettent de s'entraîner à manier la rhétorique mathématiques.

- (i) Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \mid b$. Alors il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = a \times q$ donc $b \geq a$.
- (ii) Par hypothèse, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $b = a\alpha$ et $a = b\beta$. On en déduit que $a = a\alpha\beta$ ou encore $a(1 - \alpha\beta) = 0$ donc $\alpha\beta = 1$ car $a \neq 0$. Il en résulte que $\alpha = \beta = 1$ ou $\alpha = \beta = -1$, ce qu'il fallait montrer.
- (iii) Raisonnons par l'absurde en supposant $b \neq 0$. Alors $|b| > 0$. Comme $|a| > |b|$ on a donc $|a| > 0$ ou encore $a \neq 0$. Comme par hypothèse $a \mid b$, on est en mesure d'appliquer le premier point : on en déduit que $|a| \leq |b|$. C'est contraire à l'hypothèse donc $b = 0$.

□

Tout petit, on a dû vous apprendre à poser une **division Euclidienne** ; mais si rappelez vous, cela avait l'allure suivante :

$$\begin{array}{r|l} 1234 & 25 \\ \hline 234 & 49 \\ \hline 9 & \end{array}$$

et cela voulait dire que $1234 = 25 \times 49 + 9$. De plus chacun des protagonistes de cette égalité avait un petit nom :

- **1234** s'appelle le **dividende**,
- **25** s'appelle le **diviseur**,
- **49** s'appelle le **quotient**,
- **9** s'appelle le **reste**.

En quoi consiste cette division ? à trouver le plus grand multiple de 25 qui est inférieur ou égal à 1234. Cela explique pourquoi le reste est toujours strictement inférieur au diviseur. Cette division remonte à l'antiquité avec Euclide¹.

Théorème 2.4 (Division Euclidienne) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $b \neq 0$. Il existe un unique couple d'entiers $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Preuve — Ce théorème (versant existence) résulte du fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Existence : Pour le voir, commençons par supposer a et b positifs et introduisons l'ensemble :

$$N = \{y \mid y = a - n \times b, n \in \mathbb{N}, \text{ et } y \geq 0\}$$

¹Euclide, 325-265 avt J.C., Egypte.

Comme on vient de le rappeler, cet ensemble (non vide car contenant a) admet un plus petit élément que l'on appelle r et qui par définition est positif et de la forme $r = a - q \times b$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$. De plus on a $r < b$, ce que l'on peut montrer en raisonnant par l'absurde. Si $r \geq b$ alors :

$$0 \leq r - b = a - (q + 1) \times b \quad \implies \quad r - b \in N.$$

Cela contredit la définition de r car $r - b < r$.

Unicité : Supposons qu'il existe (q_1, r_1) et $(q_2, r_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \quad \text{et} \quad 0 \leq r_1, r_2 < |b|.$$

Alors $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ ou encore $b \mid r_2 - r_1$. Par ailleurs, les encadrements de r_1 et r_2 permettent de montrer que $-|b| < r_2 - r_1 < |b|$. Pour que ceci soit compatible avec la relation de divisibilité précédente, il est nécessaire que $r_1 = r_2$. Du coup, on a aussi $bq_1 = bq_2$ ou encore $q_1 = q_2$ (car $b \neq 0$). L'unicité attendue est prouvée. $\square$

L'entier q s'appelle le **quotient** de la division euclidienne de a par b et r s'appelle le **reste** de la division euclidienne de a par b .

Le lien entre la divisibilité et la division euclidienne est contenu dans l'énoncé de la propriété suivante.

Propriété 2.5 *Un entier a est divisible par un autre entier b non nul si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.*

Preuve — Introduisons (q, r) les quotient et reste de la division euclidienne de a par b , c'est-à-dire $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

Si $r = 0$ alors $a = bq$ ou encore $b \mid a$.

Réciproquement si $b \mid a$ alors il existe $q' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq'$. En remplaçant dans la première égalité on obtient $bq' = bq + r$ ou encore $b(q' - q) = r$ ou encore $b \mid r$. Comme $|b| > |r|$, il en découle que $r = 0$. $\square$

2.2 Plus grand commun diviseur

2.2.1 Définition

Soient a et b deux entiers. On s'intéresse aux diviseurs communs de a et b . Notons qu'il y a toujours de tels diviseurs car 1 et -1 divisent tous les entiers. Mieux, nous allons établir qu'il y a toujours un diviseur commun plus grand que tous les autres. Pour cela, commençons par prouver le théorème :

Théorème 2.6 *Soient a et b deux entiers. Il existe un diviseur commun d à a et b qui est somme d'un multiple de a et d'un multiple de b , c'est-à-dire de la forme :*

$$d = au + bv$$

avec $u, v \in \mathbb{Z}$. De plus cet entier est unique au signe près.

Preuve — Existence : il suffit de le montrer pour a et b positifs ce qui peut se faire par récurrence sur l'entier $n = a + b$.

Si $n = 0$ alors $a = b = 0$ et 0 seul diviseur commun à 0 et 0 s'écrit bien sous la forme $0 = 0 \times 0 + 0 \times 0$.

On suppose le théorème vrai pour tous les couples d'entiers dont la somme est inférieure ou égale à n .

Soit $a \geq b \in \mathbb{N}$ tels que $a + b = n + 1$. Si $b = 0$ alors a est un diviseur commun à a et b qui s'écrit $a = a \times 1 + b \times 0$. Sinon, on remarque que $a - b$ et b sont deux entiers positifs de somme $a < a + b = n + 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux entiers $a - b$ et b : il existe d un diviseur commun à $a - b$ et b ainsi que $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$(a - b)u + bv = d \quad \implies \quad au + b(v - u) = d.$$

Comme d divise $a - b$ et b il divise aussi a . Ainsi, on vient bien d'exhiber un diviseur commun à a et b de la forme voulue.

Unicité au signe près : soit d et d' deux diviseurs communs à a et b tous deux de la forme $d = au + bv$ et $d' = au' + bv'$ avec $u, v, u', v' \in \mathbb{Z}$. Comme d divise a et b , il divise aussi $au' + bv'$, c'est-à-dire d' . De même, d' divise d . Ainsi on a bien $d' = \pm d$. $\square$

Les coefficients u et v du théorème précédent s'appellent des **coefficients de Bezout**².

Remarque – Les coefficients de Bezout ne sont pas uniques.

Ce théorème permet de mettre en évidence un diviseur commun à deux entiers «plus beau que les autres» ; il est tellement beau qu'il porte un petit nom, c'est le **pgcd** de a et b .

Définition 2.7 *Étant donnés deux entiers a et b , l'unique diviseur commun à a et b , positif et somme d'un multiple de a et d'un multiple de b , s'appelle le **plus grand commun diviseur** (en abrégé pgcd) de a et b ; on le note $\text{pgcd}(a, b)$.*

Mise en garde : Les entiers qui sont somme d'un multiple de a et d'un multiple de b ne sont pas forcément égaux au $\text{pgcd}(a, b)$ au signe près (cf. 2.2.3). En revanche le pgcd de a et b est l'unique diviseur commun à a et b (au signe près) qui est aussi somme d'un multiple de a et d'un multiple de b . Autrement dit dès que l'on tient un diviseur commun à a et b qui s'écrit comme la somme d'un multiple de a et d'un multiple de b , c'est que l'on a à faire au pgcd de a et b (au signe près).

La définition que j'ai choisie du pgcd n'est pas la plus répandue ni la plus intuitive mais la plus «robuste». En fait il existe deux autres caractérisations du pgcd. Les voici énoncées dans les deux propositions suivantes.

Proposition 2.8 *Soit a et b deux entiers, et d leur pgcd, alors d est aussi l'unique entier qui vérifie :*

(i) *l'entier d est positif ($d \geq 0$) ;*

²Etienne Bézout est né le 31 Mars 1730 à Nemours, France et mort le 27 Septembre 1783 à Basses-Loges, France.

- (ii) l'entier d est un diviseur commun à a et b ($d \mid a$ et $d \mid b$);
- (iii) tout diviseur commun à a et b divise d ($d' \mid a$ et $d' \mid b$ implique $d' \mid d$).

Preuve — Commençons par vérifier qu'un entier vérifiant les trois points de la proposition est unique. Soit d et d' deux tels entiers. Ce sont deux diviseurs communs à a et b qui, compte tenu du troisième point, vérifient nécessairement $d \mid d'$ et $d' \mid d$. On sait que cela veut dire que $d = \pm d'$. Mais comme d et d' sont positifs, ils sont en fait égaux, d'où l'unicité escomptée.

Ainsi pour montrer que cet entier vaut $\text{pgcd}(a, b)$, il suffit de vérifier que $\text{pgcd}(a, b)$ satisfait les trois points de la proposition. Par définition, il satisfait les deux premiers points étant positif et diviseur commun à a et b .

Il est de plus de la forme $\text{pgcd}(a, b) = au + bv$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$. Soit d un diviseur commun à a et b . Alors il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = d'a'$ et $b = d'b'$. En remplaçant ces deux expressions dans l'égalité $\text{pgcd}(a, b) = au + bv$, on aboutit à :

$$\text{pgcd}(a, b) = da'u + db'v = d(a'u + b'v).$$

Autrement dit $d \mid \text{pgcd}(a, b)$, ce qui montre que $\text{pgcd}(a, b)$ satisfait le troisième et dernier point du corollaire. $\square$

La dernière caractérisation n'est rien d'autre que celle contenue dans l'abréviation pgcd ; autrement dit le pgcd de a et b porte bien son nom !

Proposition 2.9 *L'entier $\text{pgcd}(a, b)$ est bien le plus grand de tous les diviseurs communs à a et b .*

Preuve — Il suffit de vérifier que $\text{pgcd}(a, b)$ est bien le plus grand des diviseurs communs à a et b . Si d est un diviseur commun à a et b , alors on sait que $d \mid \text{pgcd}(a, b)$ donc $d \leq \text{pgcd}(a, b)$. $\square$

Remarque – On aurait pu simplement définir $\text{pgcd}(a, b)$ comme étant le plus grand des diviseurs communs à a et b . Mais partant de cette définition, il est assez difficile de montrer que cet entier est divisible par tous les diviseurs communs à a et b et encore plus difficile de prouver qu'il s'écrit comme la somme d'un multiple de a et d'un multiple de b . C'est en ce sens que la définition que j'ai choisie est la plus «robuste». Pourtant mathématiquement parlant, les trois caractérisations sont bel et bien équivalentes.

Propriété 2.10 (i) Soit a, b et c trois entiers, alors $\text{pgcd}(ab, ac) = a \text{pgcd}(b, c)$.

(ii) Si $d = \text{pgcd}(a, b)$ alors il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = da'$, $b = db'$ et $\text{pgcd}(a', b') = 1$.

(iii) Les diviseurs communs à deux entiers a et b sont exactement les diviseurs de $\text{pgcd}(a, b)$:

$$[d \mid a \text{ et } d \mid b] \iff d \mid \text{pgcd}(a, b).$$

Preuve — À faire en exercice. $\square$

Le pgcd de deux entiers est une notion fondamentale de l'arithmétique de $\mathbb{Z}$ qui présente l'heureux avantage de se calculer très bien ; c'est ce que nous allons voir maintenant.

2.2.2 L'algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permettant de calculer le pgcd de deux entiers repose sur cette division et sur le lemme suivant :

Lemme 2.11 *Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$; si r est le reste de la division Euclidienne de a par b , alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.*

Preuve — Posons $d = \text{pgcd}(a, b)$ et $d' = \text{pgcd}(b, r)$ et notons q le quotient de la division euclidienne de a par b si bien que $a = bq + r$. D'après cette égalité, tout diviseur commun à a et b divise aussi r et tout diviseur commun à b et r divise aussi a . En particulier, d (respectivement d') qui divise a et b (respectivement b et r) divise aussi r (respectivement a). Ainsi $d \mid b$ et $d \mid r$ donc $d \mid \text{pgcd}(b, r) = d'$; de même $d' \mid b$ et $d' \mid a$ donc $d' \mid \text{pgcd}(a, b) = d$. Comme $d, d' \geq 0$, les deux dernières relations de divisibilité entraînent l'égalité $d = d'$, ou encore $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$. $\square$

De ce résultat simple découle un algorithme de calcul du pgcd de deux entiers, c'est l'**algorithme d'Euclide**. Il repose sur la remarque suivante : le processus initié dans le lemme 2.11 ne peut être réitérer qu'un nombre fini de fois. En effet, si l'on peut effectuer n divisions successives :

$$(r_0, r_1) \rightarrow (r_1, r_2) \rightarrow (r_2, r_3) \rightarrow \cdots \rightarrow (r_n, r_{n+1})$$

où on a posé $r_0 = a$, $r_1 = b$ et noté r_{i+1} le reste de la division Euclidienne de r_{i-1} par r_i alors :

$$|b| = |r_1| > r_2 > r_3 > \cdots > r_n > r_{n+1} \geq 0$$

Nécessairement $n+1 \leq |b|$; au bout d'au plus $|b|$ divisions, le reste obtenu est donc nul. Notons r_n le dernier reste **non nul**, c'est-à-dire que $r_n \neq 0$ et $r_{n+1} = 0$. D'après le lemme 2.11,

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(r_0, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2) = \text{pgcd}(r_2, r_3) = \cdots = \text{pgcd}(r_n, r_{n+1}) = \text{pgcd}(r_n, 0) = r_n$$

Le dernier reste non nul est donc le pgcd de a et b .

Comme on le sait, le pgcd de a et b , se met sous la forme $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$. Les coefficients u, v , dits de Bezout, peuvent facilement être devinés quand a et b sont petits (disons tous deux ≤ 50). La tâche devient beaucoup plus ardue quand a et b sont grands. Heureusement, une adaptation adéquate de l'algorithme d'Euclide permet de déterminer ces fameux coefficients de Bezout : c'est l'**algorithme d'Euclide «étendu»**. L'idée, pour calculer le pgcd de $a, b \in \mathbb{Z}$ avec coefficients de Bezout, est de produire la suite $(r_i)_i$ des restes classiques accompagnée de deux autres suites $(u_i)_i$ et $(v_i)_i$ telles que :

$$\forall i \geq 0, \quad au_i + bv_i = r_i.$$

Pour cela, on initialise les suites $(r_i)_i, (u_i)_i, (v_i)_i$ à :

$$\begin{cases} r_0 = a, & u_0 = 1, & v_0 = 0, \\ r_1 = b, & u_1 = 0, & v_1 = 1, \end{cases}$$

et, pour $i \geq 2$, les i -èmes termes respectifs s'expriment en fonction des $(i-2)$ -èmes et $(i-1)$ -èmes de la façon suivante :

$$\begin{cases} (r_i, q_i) := (\text{reste, quotient}) \text{ de la division euclidienne de } r_{i-2} \text{ par } r_{i-1} \\ u_i := u_{i-2} - q_i u_{i-1} \\ v_i := v_{i-2} - q_i v_{i-1} \end{cases} .$$

On renvoie à l'exercice 10 pour la preuve de cet algorithme. Pour clore ce paragraphe, donnons un exemple complet en calculant $\text{pgcd}(133, 24)$ avec coefficients de Bezout.

i	r_i	q_i	u_i	v_i
0	133		1	0
1	24		0	1
2	13	5	1	-5
3	11	1	-1	6
4	2	1	2	-11
5	1	5	-11	61

Ainsi $\text{pgcd}(133, 24) = 1$ avec $133 \times (-11) + 24 \times 61 = 1$.

2.2.3 Résolution d'équation du type $ax + by = c$

Posons nous le problème suivant : étant donnés a, b et c trois entiers, est-il possible d'écrire le troisième comme la somme d'un multiple du premier et d'un multiple du second. Autrement dit, existe-t-il des entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $c = ax + by$?

- Il est facile de vérifier que la condition $\text{pgcd}(a, b) \mid c$ est une condition nécessaire à l'existence de tels entiers x, y , c'est-à-dire :

$$\exists x, y \in \mathbb{Z}, \quad c = ax + by \quad \implies \quad \text{pgcd}(a, b) \mid c.$$

En effet, on sait qu'il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = \text{pgcd}(a, b)a'$ et $b = \text{pgcd}(a, b)b'$. Remplaçant a et b par ces dernières expressions dans l'écriture $c = ax + by$, on aboutit à $c = (a'x + b'y) \text{pgcd}(a, b)$ ou encore $\text{pgcd}(a, b) \mid c$.

- En fait cette condition est suffisante, c'est-à-dire :

$$\text{pgcd}(a, b) \mid c \quad \implies \quad \exists x, y \in \mathbb{Z}, \quad c = ax + by.$$

En effet, grâce au théorème 2.6, on sait qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = au + bv$. D'autre part, puisque $\text{pgcd}(a, b) \mid c$, il existe $c' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = c' \text{pgcd}(a, b)$. Dès lors :

$$c = c' \text{pgcd}(a, b) = c'(au + bv) = a(c'u) + b(c'v).$$

Les entiers $x = c'u$ et $y = c'v$ sont donc solution du problème initial.

En résumé :

Proposition 2.12 *Soit a, b et c trois entiers. Pour l'équation $c = ax + by$, d'inconnues x, y , admette des solutions entières, il faut et il suffit que $\text{pgcd}(a, b)$ divise c .*

Comme le montre la preuve précédente, la résolution d'une équation du type $ax + by = c$ (x et y sont les inconnues) revient à calculer $\text{pgcd}(a, b)$ ainsi que deux coefficients de Bezout $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = au + bv$. On sait le faire explicitement grâce à l'algorithme d'Euclide étendu.

2.3 Théorème de Bezout et éléments premiers entre eux

Deux entiers ont toujours 1 comme diviseur commun ; ceux dont 1 est le pgcd vont jouer un rôle très important.

Définition 2.13 *Deux entiers a et b sont dits **premiers entre eux** (ou **étrangers**) si leur pgcd est égal à 1.*

Compte tenu de ce qui précède, les entiers premiers entre eux sont caractérisés par la propriété suivante :

Théorème 2.14 (de Bezout) *Deux entiers sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :*

$$1 = au + bv$$

De ce résultat, résulte plusieurs corollaires dont le célèbre lemme de Gauss³.

Lemme 2.15 (de Gauss) *Soient a, b, c trois entiers. Si a est premier avec b et s'il divise bc alors il divise c .*

Preuve — Puisque a et b sont premiers entre eux, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$ d'où, en multipliant par c , l'égalité $acu + bcv = c$. D'autre part, comme a divise bc , il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $bc = aq$. En remplaçant, on obtient :

$$acu + bcv = acu + aqv = a(cu + qv) = c$$

ce qui montre que $a \mid c$. □

Dans le lemme de Gauss, l'hypothèse selon laquelle a doit être premier avec b est fondamentale : par exemple $4 \mid 12$ et $6 \mid 12$ sans pour autant que $24 = 4 \times 6$ ne divise 12. Ceci n'est en rien contradictoire avec le lemme de Gauss puisque $\text{pgcd}(4, 6) = 2$.

Corollaire 2.16 *Soient a, a' deux entiers premiers entre eux et b un autre entier. Si a et a' divisent b alors b est divisible par le produit aa' .*

³Johann Carl Friedrich Gauss est né le 30 Avril 1777 à Brunswick en Allemagne et mort le 23 Février 1855 à Göttingen en Allemagne.

Preuve — Puisque a et a' divisent b , il existe $q, q' \in \mathbb{Z}$ tels que $b = aq = a'q'$. Par ailleurs, a et a' étant premiers entre eux, il existe $u, u' \in \mathbb{Z}$ tels que $au + a'u' = 1$ d'où, en multipliant par b , l'égalité $abu + a'bu' = b$. Dans cette expression, on remplace la première occurrence de b par $a'q'$ et la seconde par aq :

$$a(a'q')u + a'(aq)u' = b \implies aa' \times (q'u + qu') = b.$$

Cela prouve bien que $aa' \mid b$. □

Corollaire 2.17 *Soient a, b, b' des entiers. Si a est premier avec b et b' alors il est premier avec le produit bb' .*

Preuve — Puisque a est premier avec b et b' , il existe $u, v, u', v' \in \mathbb{Z}$ tels que : $au + bv = 1$ et $au' + b'v' = 1$. En multipliant ces deux égalités, on obtient :

$$a \underbrace{(auu' + ub'v' + bvu')}_{\stackrel{\text{d\'ef.}}{=} u''} + (bb') \underbrace{(vv')}_{\stackrel{\text{d\'ef.}}{=} v''} = 1.$$

Ainsi l'entier 1 qui est un diviseur commun à a et bb' est de la forme $au'' + bv''$. Il est forcément le pgcd de a et bb' qui du coup sont bien premiers entre eux. □

2.4 Plus petit commun multiple

Plutôt que s'intéresser au plus grand des diviseurs communs à deux entiers, on peut préférer le plus petit commun multiple à deux entiers. Un tel multiple existe lui aussi et est caractérisé par :

Théorème 2.18 *Étant donnés deux entiers a et b il existe un unique entier m vérifiant les trois propriétés :*

- (i) *l'entier m est positif ($m \geq 0$) ;*
- (ii) *l'entier m est un multiple commun à a et b ($a \mid m$ et $b \mid m$) ;*
- (iii) *tout multiple commun à a et b est divisible par m ($a \mid m'$ et $b \mid m'$ implique $m \mid m'$).*

Preuve — Comme le seul multiple de zéro est zéro lui même, si $a = 0$ ou $b = 0$, le seul multiple commun à a et b est zéro. Il satisfait bien les trois points du théorème.

On suppose donc que ni a ni b ne sont nuls. Dans ce cas, l'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b est un sous-ensemble (non vide car $a \times b$ est dedans) de $\mathbb{N}^*$. Il admet par conséquent un plus petit élément :

$$m \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \min\{n \in \mathbb{N}^*, a \mid n \text{ et } b \mid n\}.$$

Montrons qu'il satisfait les trois points du théorème.

Par définition, on a $m \geq 0$ (et même $m > 0$) et c'est un multiple commun à a et b , ce qui assure les deux premiers points.

Pour le dernier point, on considère m' un multiple commun à a et b . Divisons le par m , c'est-à-dire écrivons $m' = mq + r$ avec $0 \leq r < m$. Comme m et m' sont tous deux multiples de a et b , il en est de même de r . Ainsi r est un multiple commun à a et b vérifiant de surcroît $0 \leq r < m$. Par définition de m , on a nécessairement $r = 0$ ou encore $m \mid m'$, ce qu'il fallait établir. $\square$

Nous voilà en mesure de définir.

Définition 2.19 *Étant donnés deux entiers a et b , l'unique entier du théorème précédent s'appelle le **plus petit commun multiple** de a et b ; on le note $\text{ppcm}(a, b)$.*

Comme pour le pgcd , on a :

Propriété 2.20 *Soit a, b deux entiers et m leur ppcm . Alors il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $m = aa' = bb'$ et $\text{pgcd}(a', b') = 1$.*

Le pgcd et le ppcm de deux mêmes entiers sont reliés par une jolie formule que voici.

Proposition 2.21 *Soit a, b deux entiers positifs, alors $ab = \text{pgcd}(a, b) \text{ppcm}(a, b)$.*

Preuve — La formule est facile à établir si $a = 0$ ou $b = 0$. Je les suppose donc tous les deux non nuls. Notons $d = \text{pgcd}(a, b)$ et $m = \text{ppcm}(a, b)$. On sait qu'il existe $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\begin{aligned} a &= d\alpha, \quad b = d\beta, \quad \text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1 \\ m &= a\alpha' = b\beta', \quad \text{pgcd}(\alpha', \beta') = 1. \end{aligned}$$

Il en résulte que $d\alpha\alpha' = d\beta\beta'$ ou encore $\alpha\alpha' = \beta\beta'$. Ainsi $\alpha \mid \beta\beta'$ et $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$; d'après le lemme de Gauss (lemme 2.15), on en déduit que $\alpha \mid \beta'$. De même $\beta' \mid \alpha\alpha'$ avec $\text{pgcd}(\alpha', \beta') = 1$ donc $\beta' \mid \alpha$. Dès lors $\alpha = \beta'$ et $\beta = \alpha'$.

En résumé, nous venons d'établir que :

$$a = d\alpha, \quad b = d\beta, \quad m = a\beta = b\alpha.$$

Calculons le produit :

$$ab = d\alpha \times b = d \times \alpha b = dm,$$

ce que l'on voulait. $\square$

2.5 Quand plus de deux entiers rentrent en jeu

Cette section est consacrée à des généralisations de notions ou résultats donnés précédemment. Il s'agit de toujours de faire rentrer en jeu plus de deux entiers là où avant on jouait avec simplement deux entiers. Je ne donne pas les preuves; les chercher seul est un excellent exercice.

2.5.1 pgcd et ppcm de plus de deux entiers

Nous avons, par exemple, défini les pgcd et ppcm de DEUX entiers. On peut se poser la question de savoir si on peut faire de même pour trois, quatre entiers etc... La réponse est «oui». La définition s'appuie sur la généralisation du théorème 2.6.

Théorème 2.22 *Soient $a_1, \dots, a_r$ des entiers. Il existe un diviseur commun d aux a_i de la forme :*

$$d = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$$

où $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{Z}$.

De la même façon, on en déduit que :

Théorème 2.23 *Étant donnés des entiers $a_1, \dots, a_r$, il existe un unique entier d vérifiant les trois propriétés :*

- (i) *l'entier d est positif ($d \geq 0$) ;*
- (ii) *l'entier d est un diviseur commun aux a_i ($d \mid a_i, \forall i$) ;*
- (iii) *tout diviseur commun aux a_i divise d ($d' \mid a_i, \forall i$ implique $d' \mid d$).*

Cela permet de définir.

Définition 2.24 *Étant donnés $a_1, \dots, a_r$ des entiers. L'unique entier du théorème précédent s'appelle le plus grand commun diviseur de $a_1, \dots, a_r$; on le note $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_r)$.*

2.5.2 La notion «premier entre eux» avec plus de deux entiers

Définition 2.25 *Les entiers $a_1, \dots, a_r$ sont dits **premiers entre eux dans leur ensemble** si leur pgcd vaut 1.*

On dispose de la caractérisation :

Théorème 2.26 *Les entiers $a_1, \dots, a_r$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement s'il existe $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{Z}$ tels que :*

$$1 = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$$

Pour ce qui concerne la notion premiers entre eux pour plus de deux entiers, en plus de la généralisation précédente, il convient d'ajouter la suivante :

Définition 2.27 *Les entiers $a_1, \dots, a_r$ sont dits **premiers entre eux deux-à-deux** si pour $1 \leq i \neq j \leq r$, les deux entiers a_i et a_j sont premiers entre eux.*

Bien évidemment, ces deux notions sont reliées.

Proposition 2.28 *Si les entiers $a_1, \dots, a_r$ sont **premiers entre eux deux-à-deux** alors ils le sont **dans leur ensemble**.*

Preuve — Cf. exercice 8

□

2.5.3 Généralisation de quelques énoncés

Enfin certains énoncés donnés précédemment se généralisent. Voici deux exemples donnés sans preuve. C'est un excellent exercice que d'essayer d'établir ces résultats.

Corollaire 2.29 *Soient $a, b_1, \dots, b_r$ des entiers. Si a est premier avec chacun des b_i alors il est premiers avec le produit $b_1 b_2 \cdots b_r$.*

Corollaire 2.30 *Soient $a_1, \dots, a_r$ des entiers premiers entre eux deux-à-deux et b un autre entier. Si chaque a_i divise b alors b est divisible par le produit $a_1 a_2 \cdots a_r$.*

2.6 Nombres premiers et décomposition primaire

Certains entiers, tels 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, $\dots$, se distinguent car ils satisfont la définition :

Définition 2.31 *Un élément de $\mathbb{Z}$ est dit **premier** si et seulement s'il est positif et s'il admet exactement deux diviseurs positifs, à savoir 1 et lui même.*

Ces entiers remarquables jouissent de propriétés non moins remarquables.

Propriété 2.32 *Un nombre premier est premier avec tout entier qu'il ne divise pas.*

Preuve — Comme un nombre premier p ne possède que deux diviseurs, 1 et lui même, il ne peut avoir en commun avec un autre entier a que 1 et p . Si p ne divise pas a , alors seul 1 peut diviser à la fois p et a (c'est le cas). Autrement dit $\text{pgcd}(p, a) = 1$. $\square$

Propriété 2.33 *Soit p un nombre premier et $a_1, \dots, a_r$ des entiers. Si p divise le produit $a_1 \cdots a_r$ alors il divise l'un des entiers a_i .*

Preuve — Raisonnons par l'absurde en supposant que p ne divise aucun des entiers a_i . Compte tenu de la propriété précédente, p est donc premier avec tous les a_i . Mais alors, d'après le corollaire 2.29, il est premiers avec leur produit $a_1 \cdots a_r$, ce qui est contraire à l'hypothèse. $\square$

Tout est prêt désormais pour énoncer le théorème fondamental de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 2.34 (fondamental de l'arithmétique) *Tout entier $n \in \mathbb{Z}^*$ admet une **décomposition primaire**, c'est-à-dire qu'il existe $p_1, \dots, p_r$ des premiers deux-à-deux distincts et des entiers naturels $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que :*

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$$

De plus, cette décomposition est unique à l'ordre près.

Preuve — Existence - Pour $n = 2$, il suffit de choisir $r = 1$, $p_1 = 2$ et $\alpha_1 = 1$.

On suppose que tous les entiers inférieurs (strictement) à n sont produit de premiers. Montrons qu'il en est de même pour n lui-même. Si n est premier, il suffit de choisir $r = 1$, $p_1 = n$ et $\alpha_1 = 1$. Sinon, cela veut dire que n se factorise sous la forme $n = mm'$ avec $m, m' \notin \{1, n\}$. Nécessairement on a $1 < m < n$ et $1 < m' < n$. Par récurrence, m et m' s'écrivent comme produit de premiers. Il en est donc de même de leur produit, i.e. n .

Unicité - Partons de deux écritures de n en produits de premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} = q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$$

où les p_i et q_j sont premiers et où $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}^*$. On commence par montrer que les premiers des deux factorisations sont en fait les mêmes. Pour tout $1 \leq i \leq r$, on sait que $p_i \mid q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$. Par conséquent, il existe $1 \leq j \leq s$ tel que $p_i = q_j$. Autrement dit, on vient de montrer l'inclusion $\{p_1, \dots, p_r\} \subset \{q_1, \dots, q_s\}$. L'inclusion réciproque se montre de la même façon donc $r = s$ et $\{p_1, \dots, p_r\} = \{q_1, \dots, q_s\}$. On peut, quitte à réordonner les q_j , supposer que $p_i = q_i$. On a donc :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}.$$

Montrons que $\alpha_1 = \beta_1$ en raisonnant par l'absurde. Supposons $\alpha_1 \neq \beta_1$, par exemple $\alpha_1 > \beta_1$, alors dans l'égalité précédente, on peut simplifier par $p_1^{\beta_1}$:

$$p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdots p_r^{\alpha_r} = p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}.$$

Comme $\alpha_1 - \beta_1 > 0$, il en résulte que $p_1 \mid p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$ puis que $p_1 = p_i$ pour un certain $i \geq 2$. Ceci est impossible. Ainsi $\alpha_1 = \beta_1$. Les autres égalités se montrent de la même façon. $\square$

Voici quelques exemples de décompositions primaires :

$$8 = 2^3, \quad 12 = 2^2 \times 3, \quad 15 = 3 \times 5, \quad 476619 = 3 \times 11^2 \times 13 \times 101.$$

Ce résultat est extrêmement important. Toutes les notions introduites jusqu'ici peuvent être ré-interprétées en terme de décomposition primaire. Plus précisément, on a les propositions :

Proposition 2.35 Soit a, b deux entiers se décomposant sous la forme $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, et $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$, où les p_i sont des premiers deux-à-deux distincts et où $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$. Alors on a l'équivalence :

$$a \mid b \iff [\forall 1 \leq i \leq r, \alpha_i \leq \beta_i]$$

et les décompositions :

$$\text{pgcd}(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \times \cdots \times p_r^{\min\{\alpha_r, \beta_r\}}, \quad \text{ppcm}(a, b) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \times \cdots \times p_r^{\max\{\alpha_r, \beta_r\}},$$

où $\min\{\alpha, \beta\}$ et $\max\{\alpha, \beta\}$ désignent respectivement le plus petit et le plus grand des deux nombres α, β .

Preuve — Cf. exercice 7. $\square$

Proposition 2.36 *Pour que deux entiers soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'ils n'aient aucun premier en commun dans leurs décompositions primaires.*

Preuve — Cf. exercice 7. □

Enfin terminons par le célèbre :

Théorème 2.37 (Euclide) *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Preuve — Etant donné $S = \{p_1, \dots, p_r\}$ un nombre fini de premiers. On va montrer qu'il existe au moins un premier p qui n'appartient pas à S . Pour cela posons :

$$N = p_1 \times \dots \times p_r + 1 \geq 2.$$

D'après le théorème 2.34, on sait que N se factorise en produit de premiers. Soit p un des premiers de sa décomposition primaire. Il diffère nécessairement de tous les p_i car s'il était égal à l'un des p_i , comme il divise N , il diviserait 1.

En bref, à partir d'un ensemble fini de premiers, on est en mesure de «fabriquer» un nouveau premier n'appartenant pas à cet ensemble. Nécessairement, il y a une infinité de nombres premiers. □

2.7 Exercices

Exercice 4 : Gymnastique euclidienne

1. Calculer le pgcd des entiers 1292 et 798.
2. Demandez à votre voisin qu'il vous fournisse un couple d'entiers à au moins trois chiffres décimaux puis calculer leur pgcd.

Exercice 5 : Restons divisé !

1. Existe-t-il un entier qui divise tous les entiers. Si oui, en dresser la liste.
2. Existe-t-il un entier qui est divisible par tous les entiers. Si oui, en dresser la liste.
3. Que peut-on dire de a et $b \in \mathbb{Z}$ s'ils vérifient $a \mid b$ et $b \mid a$?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
 $6 \mid n(n-1)(n+1), \quad 6 \mid n(n^2+5), \quad 24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3), \quad 120 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$
5. a. Etudier la validité des implications suivantes :

$$\begin{aligned}
 a \mid b \text{ et } a \mid c &\implies a \mid (b+c), \\
 a \mid b \text{ et } a' \mid b' &\implies (a+a') \mid (b+b'), \\
 a \mid b \text{ et } a \mid c &\implies a \mid (b-c), \\
 a \mid b \text{ et } a' \mid b &\implies aa' \mid b, \\
 a^2 \mid b^2 &\implies a \mid b, \\
 a \mid bc &\implies a \mid b \text{ ou } a \mid c, \\
 a \mid b+c &\implies a \mid b \text{ ou } a \mid c.
 \end{aligned}$$

- b. Enoncer les réciproques des implications précédentes et étudier leur validité.

Exercice 6 : Quelques critères élémentaires de divisibilité

Soit $n \in \mathbb{N}$ dont la décomposition décimale est la suivante :

$$n = n_k \times 10^k + n_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + n_1 \times 10 + n_0 \quad n_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

1. À quelle condition sur n_0 l'entier n est-il divisible par 2, par 5 ? Pourquoi, à votre avis, les entiers 2 et 5 ont-ils un rôle si particulier dans la numération décimale ?
2. Montrer que n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres décimaux, $n_k + \cdots + n_0$, l'est.
3. Peut-on donner un critère du même genre avec des entiers autre que 3 ?
4. Donner un critère de divisibilité par 11.
5. Montrer que n est divisible par 4 si et seulement si 4 divise $10n_1 + n_0$ (indication : passer en base 100).
6. Généraliser tous ces critères à l'écriture en base quelconque.

Exercice 7 : Instinct primaire

Soit a et b deux entiers dont les décompositions primaires sont données par :

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r},$$

où les p_i sont des premiers et où les exposants α_i, β_j appartiennent à $\mathbb{N}$.

1. Avec ces notations, chaque premier p_i intervient-il dans la décomposition primaire de a et b ?
2. A quelles conditions sur les exposants α_i, β_i a-t-on $a \mid b$?
3. A quelles conditions sur les exposants α_i, β_i a-t-on a et b premiers entre eux ?
4. Donner la liste des diviseurs de a ou b .
5. Donner les décompositions primaires des entiers ab , $\text{pgcd}(a, b)$ et $\text{ppcm}(a, b)$.
6. En utilisant ces décompositions primaires, donner une nouvelle preuve des résultats du cours qui suivent :
 - a. la formule $ab = \text{pgcd}(a, b) \text{ppcm}(a, b)$;
 - b. le lemme de Gauss et ses deux corollaires.

Exercice 8 : Pgcd à tout va

1. a. Montrer que si a est premier avec b , alors il en est de même de a^n et b quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
 b. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors il en est de même de a^m et b^n pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.
 c. Enfin prouver que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ on a $\text{pgcd}(a^n, b^n) = \text{pgcd}(a, b)^n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
2. a. Soit x, y, a, b, c et d des entiers. Montrer que :

$$\text{pgcd}(x, y) \mid \text{pgcd}(ax + by, cx + dy) \mid (ad - bc) \text{pgcd}(x, y).$$

- b. En déduire que si $|ad - bc| = 1$ alors $\text{pgcd}(x, y) = \text{pgcd}(ax + by, cx + dy)$; n'est-ce pas là le cas général d'une formule déjà vue ?

Exercice 9 : Plus on est de fous...

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ des entiers.

1. a. Donner un exemple pour a, b, c de telle sorte que ces entiers soient premiers entre eux dans leur ensemble sans l'être deux-à-deux.
 b. Montrer que s'ils sont premiers entre eux deux-à-deux alors ils le sont dans leur ensemble.
 c. Mieux montrer que s'ils sont premiers entre eux deux-à-deux, alors les entiers ab , ac et bc sont eux premiers dans leur ensemble.
 d. Que peut-on dire de la réciproque de l'implication précédente ?
2. Refaire la question précédente en considérant n entiers $a_1, \dots, a_n$ plutôt que trois entiers.
3. Montrer que $\text{pgcd}(a, b, c) = \text{pgcd}(a, \text{pgcd}(b, c))$.
4. Montrer que $\text{pgcd}(a, b, c, d) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), \text{pgcd}(c, d))$.

Exercice 10 : Algorithme d'Euclide étendu (sur la plage)

Comme chacun sait, l'algorithme d'Euclide permet de calculer le pgcd de deux entiers a et b . Sans trop d'efforts supplémentaires, il est possible de déterminer des coefficients de Bezout associés, c'est-à-dire deux entiers u, v tels que :

$$au + bv = \text{pgcd}(a, b)$$

Notons $r_0, r_1, \dots, r_n \dots$ la suite des restes produits par l'algorithme d'Euclide, avec $r_0 = a, r_1 = b$. Pour tout $i \geq 2$, on sait que r_i est le reste de la division euclidienne de r_{i-2} par r_{i-1} :

$$r_{i-2} = r_{i-1}q_i + r_i \quad 0 \leq r_i < |r_{i-1}|,$$

avec q_i le quotient de la division Euclidienne de r_{i-2} par r_{i-1} .

1. Montrer que pour tout $i \in \{0, 1\}$, il existe $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$ tels que $r_i = au_i + bv_i$. Que peut-on choisir comme valeurs pour u_0, v_0, u_1, v_1 ?

2. a. Montrer par récurrence qu'il en est de même pour les restes r_i avec $i \geq 2$. Plus précisément, montrer que l'on peut définir un coefficient $u_i \in \mathbb{Z}$ à partir de u_{i-2}, u_{i-1} et q_i ainsi qu'un coefficient $v_i \in \mathbb{Z}$ à partir de v_{i-2}, v_{i-1} et q_i tels que $r_i = au_i + bv_i$.

b. En déduire, sur le principe de l'algorithme d'Euclide, un algorithme dit «étendu» permettant de calculer à la fois le pgcd et les coefficients de Bezout.

3. Reprendre l'exercice 1 en calculant de surcroît les coefficients de Bezout.

4. Les coefficients de Bezout u, v sont-ils définis de façon unique ?

Exercice 11 : Bezout a des problèmes existentiels

1. Calculer le pgcd de 18480 et 9828 ainsi que les coefficients de Bezout.

2. Existe-t-il des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$11u + 17v = 5, \quad 12u + 20v = 6, \quad 12u + 20v = 8, \quad 101u + 211v = 1.$$

si oui les calculer.

3. Existe-t-il des coefficients $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$12u + 15v = 8, \quad 12u + 15v = 6, \quad 21u + 9v = 3.$$

si oui, en exhiber.

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $1665x + 1035y = 45$.

Exercice 12 : Somme et produit

Soit a et b deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer qu'il en est de même de ab et $a + b$.

2. Montrer que :

$$(a) \quad \text{pgcd}(a + b, a - b) \in \{1, 2\}, \quad (b) \quad \text{pgcd}(a + b, a^2 + b^2) \in \{1, 2\},$$

$$(c) \quad \text{pgcd}(2a + b, a + 2b) \in \{1, 3\}.$$

Exercice 13 : Avec des «panneaux d'indications»

Trouver tous les entiers $l, m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux-à-deux tels que la quantité

$$(l + m + n) \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$$

soit entière.

1. Montrer que le problème se résume à trouver les entiers l, m, n premiers entre eux deux-à-deux tels que $lmn \mid (l + m + n)(lm + ln + mn)$.

Supposons cette condition satisfaite.

2. Montrer que $l \mid mn(m + n)$ puis que $l \mid m + n$.

On peut quitte à échanger les rôles de l, m, n supposer que $l \geq m \geq n$.

3. Montrer que $m + n \in \{l, 2l\}$.

4. Vérifier qu'un seul triplet est en mesure de satisfaire $m + n = 2l$; le trouver.

5. On se place dans le cas où $m + n = l$.

a. Montrer que le problème se reformule ainsi : il s'agit de trouver tous les entiers $m \geq n$ premiers entre eux tels que $mn \mid 2(m + n)^2$.

b. résoudre ce dernier problème et conclure.

Exercice 14 : Histoire de couples

Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = 60$ et $\text{ppcm}(a, b) = 3600$.

Exercice 15 : True or False, that is the question

Étudier la validité de chacune des affirmations suivantes ; établir la propriété si elle est vraie, fournir un contre-exemple sinon.

1. Si $5 \mid n^2$ alors $25 \mid n^2$.

2. Si $25 \mid n^2$ alors $5 \mid n$.

3. Si $12 \mid n^2$ alors $4 \mid n$.

4. Si $d = au + bv$ alors $d = \text{pgcd}(a, b)$.

5. Si un entier a ne divise pas un autre entier b alors a et b sont premiers entre eux.

6. Si a est premier avec b et b avec c alors a est premier avec c .

7. Si un entier n divise un produit ab alors il divise l'un des entiers a ou b .

8. Soit $p \in \mathbb{Z}$ un premier et a, b deux entiers. Si p^γ (avec $\gamma > 0$) divise le ppcm de a et b alors p^γ divise a ou b .

9. Si a, b et c sont des entiers, b et c étant premiers entre eux, alors on a la formule $\text{pgcd}(a, bc) = \text{pgcd}(a, b) \text{pgcd}(a, c)$.

10. Soit a, b, c des entiers tels que $a \mid b$. On a $\text{pgcd}(b, c) = 1 \implies \text{pgcd}(a, c) = 1$.

11. Soit a, b, c des entiers tels que $a \mid b$. On a $\text{pgcd}(a, c) = 1 \implies \text{pgcd}(b, c) = 1$.

12. Montrer que si c est premier avec n alors $ac \equiv bc \pmod{n}$ implique $a \equiv b \pmod{n}$.

Exercice 16 : Le crible d’Eratosthènes⁴

1. Soit $n \geq 4$ un entier. Montrer que n est non premier si et seulement s’il admet un diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$.

2. Soit n un entier. L’algorithme le plus naïf permettant de tester si n est premier consiste à parcourir tous les entiers m compris entre 1 et n et d’examiner si m divise n . L’entier n est premier si et seulement si les seuls diviseurs de n mis en évidence sont 1 et n .

Gardant en tête le résultat de la première question, répondre à la question suivante : est-il vraiment nécessaire de parcourir tous les entiers compris entre 1 et n ? Si non donner un autre algorithme permettant de tester la primalité de n un tout petit peu moins naïf que le premier.

3. En utilisant de nouveau la première question, donner un procédé systématique permettant d’énumérer tous les premiers compris entre 2 et 100 (indication : dans le tableau ci-dessous commencer par rayer les multiples de 2 — qui ne sont pas premiers hormis 2 lui même — et continuer...).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 17 : Un cas particulier du théorème de Dirichlet⁵

Montrer qu’il existe une infinité de nombre premiers de la forme $4n + 3$ avec $n \in \mathbb{N}$.

⁴Eratosthenes est né en 276 avt J.C. en Afrique du nord et décédé à Alexandrie, Egypte en 194 avt J.C.

⁵Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet est né en 1805 à Dürer, Allemagne et décédé en 1859 à Göttingen, Allemagne.

APPLICATIONS AFFINES DU PLAN EN TERMINALE "C"

Rédigé par

Armel Yvan TOUNGAINBO SIGOMNOU, 06A0267.

En vue de l'obtention du

Diplôme Professionnel d'Enseignement Secondaire Deuxième Grade.

Dirigé par

Dr Alphonse MBA (Chargé de Cours).

M. Jean Pierre ADJABA BIWOLI (IPN).

M. Pascal Peguy TSOULEU (PLEG).

Yaoundé, le 17 juin 2013

♣♣ Dédicaces ♣♣

À ma maman Odette KUISSEU Epse SIGOMNOU

Je te dédie ce travail.

♣♣ Remerciements ♣♣

Tout seul on ne peut arriver à bâtir. Sans vous je n'aurais jamais pu mener à terme ce travail.

Ma reconnaissance va tout d'abord à mon directeur de mémoire, Docteur Alphonse MBA, enseignant de géométrie à l'école normale supérieur de Yaoundé, pour le grand intérêt qu'il a porté à mon sujet de mémoire, pour sa sympathie, sa constante disponibilité, ses judicieux conseils et ses nombreuses idées constructives. Ses nombreuses relectures de mon manuscrit et ses ingénieuses idées m'ont permis d'améliorer mon mémoire. Je remercie les membres du jury qui ont bien voulu consacrer un peu de leur précieux temps à l'examen de ce mémoire, recevez ici toute ma gratitude et ma reconnaissance. Je remercie l'Université de Yaoundé I, l'école normale supérieur et le département de mathématique pour la disponibilité des infrastructures dont ils regorgent et qu'ils ont bien voulu mettre à ma disposition. Je remercie particulièrement M. Désiré Magloire FEUGUENG, pour m'avoir autorisé à utiliser les équipements du laboratoire de mathématique. Ma reconnaissance va aussi à mes enseignants du département de mathématiques pour leur disponibilité à me faire comprendre les notions importantes qui ont grandement facilité la construction de ce mémoire et façonné ma vision du monde. Sans oublier les inspecteurs M. ADJABA et M. POKAM, mon encadreur du lycée M. TSOULEU pour leur volonté à me faire comprendre les notions de pédagogie et didactique.

Un merci chaleureux à mes parents et à mon oncle Jacques Barnabé NANA, sans lesquels ce travail n'aurait pu avoir lieu. Vous m'avez tellement fait confiance pendant toutes ces années. Un grand merci à mes camarades du D.I.P.E.S II Mathématiques de la promotion 2011/2012 plus particulièrement DEH, KAMBOU, KOUOMOGNE, YEPDJOUO. Je remercie également tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

♣♣ Résumé ♣♣

Les applications affines du plan ne font pas l'objet d'une étude explicite dans le livre programme du Cameroun([6]), néanmoins quelques applications affines du plan sont objet d'étude dans ce livre programme. Dans ce mémoire, nous élaborons d'abord un cours détaillé sur la notion d'application affine du plan ; dans cette partie nous montrerons que ces applications conservent le barycentre et le coefficient de colinéarité ; l'étude des propriétés de quelques applications affines du plan est consacrée à la dernière partie de ce cours. Ensuite, nous construisons une série de trente exercices sur ces applications affines du plan regroupés par objectif. Enfin une réflexion pédagogique sur la notion de marques d'une application affine du plan termine le mémoire ; premièrement il est présenté dans cette partie un constat sur les difficultés à résoudre par les élèves un type d'exercices ; deuxièmement une séquence d'enseignement sur la notion de marque d'une application affine du plan et troisièmement une résolution et une classification de quelques exercices à partir de la notion de marques sont proposées.

Mots clés : Affinité, applications affines, pédagogie, réflexion pédagogique, marque.

♣♣ Abstract ♣♣

The applications closely connected of the plan are not the object of an explicit study in the book programs of Cameroon ([6]), nevertheless some applications closely connected of the plan are object of study in this book programs. In this memory, we work out accesses a course detailed on the concept of application closely connected of the plan ; in this part we will show that these applications preserve the barycentre and the coefficient of colinearity ; the study of the properties of some applications closely connected of the plan is devoted to the last part of this course. Then, we build a series of thirty exercises on these applications closely connected of the plan gathered by objective. Finally a teaching reflection on the concept of marks of an application closely connected of the plan finishes the report ; firstly it is presented in this part a constact on the difficulties of solving by the pupils a kind of exercises ; secondly a sequence of teaching on the concept of mark of an application closely connected of the plan and thirdly a resolution and a classification of some exercises starting from the concept of marks are proposed.

Key Words : Affinity, applications closely connected, pedagogy, teaching refletion, mark.

♣♣ Table des matières ♣♣

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1 APPLICATION AFFINES DU PLAN	2
1.1 INTRODUCTION	2
1.2 RAPPELS SUR LES ESPACES AFFINES	2
1.3 GÉNÉRALITÉS	3
1.4 PROPRIÉTÉS	5
1.4.1 Détermination d'une application affine du plan	5
1.4.2 Image d'une droite, d'un plan par une application affine	7
1.4.3 Conservation du parallélisme	9
1.4.4 Points invariants par une application affine	10
1.4.5 Composée de deux applications affines	10
2 ÉTUDE DE QUELQUES APPLICATIONS AFFINES DU PLAN	11
2.1 INTRODUCTION	11
2.2 HOMOTHÉTIE-TRANSLATION	11
2.2.1 Translation	11
2.2.2 Translation et barycentre	12
2.2.3 Translation, droites et segments	12

2.2.4 Homothéties	14
2.2.5 Composée d'une homothétie et d'une translation	17
2.2.6 Homothétie et barycentre	17
2.2.7 Homothétie, droites et segments	17
2.2.8 Triangles homothétiques	18
2.3 PROJECTION	19
2.3.1 Expression analytique	21
2.4 SYMÉTRIES	21
2.4.1 Symétries centrales	21
2.4.2 Symétries centrales et barycentre	22
2.4.3 Symétries centrales, droites et segments	22
2.4.4 Symétries axiales	23
2.4.5 Expression analytique	24
2.4.6 Symétries orthogonales	24
2.5 ROTATION	25
2.5.1 Ensemble de points invariants :	25
2.5.2 Expression analytique :	26
2.6 TABLEAU RÉCAPITULATIF DE QUELQUES APPLICATIONS AFFINES DU PLAN (FIGURES)	26
3 EXERCICES	29
3.1 INTRODUCTION	29
3.2 EXPRESSIONS ANALYTIQUES ET APPLICATIONS AFFINES	29
3.3 DÉTERMINATION DES APPLICATIONS AFFINES	31
3.4 UTILISATION DES APPLICATIONS AFFINES	33
3.5 COMPOSITION DES APPLICATIONS AFFINES	35
3.6 RECHERCHES	37
4 RÉFLEXIONS PÉDAGOGIQUES SUR LA NOTION DE MARQUE D'UNE APPLICATION AFFINE DU PLAN	39
4.1 INTRODUCTION	39
4.2 ORIGINE ET MOTIVATIONS	39
4.2.1 Objectifs et Stratégies de résolution de l'activité	40

TABLE DES MATIÈRES

4.2.2 Synthèse des résultats de l'activité	40
4.3 LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT	41
4.3.1 Présentation	41
4.3.2 Expérience 1 : Première rencontre avec la notion de marque	42
4.3.3 Expérience 2 : Classification de quelques applications affines	45
4.3.4 Expérience 3 : Caractérisation des isométries du plan	46
4.4 RÉOLUTION ET CLASSIFICATION DE QUELQUES EXERCICES AVEC LA NOTION DE MARQUES	48
4.4.1 Résolution de quelques exercices	48
4.4.2 Classification des types d'exercices	49
4.5 CONCLUSION	49
CONCLUSION GÉNÉRALE	50

♣♣ INTRODUCTION GÉNÉRALE ♣♣

Depuis des années, un ensemble de travaux de recherche et d'initiatives de terrain visent à proposer ou à utiliser des modèles, des méthodes et des outils pour concevoir, mettre en place, exploiter et analyser les séquences d'apprentissage. Sur le plan international, on peut citer en particulier les travaux menés par *Koper et Tattersall*, ([4]) portant sur les langages de modélisation pédagogique ainsi que ceux de *Paquette* ([5]) conduisant à développer une approche d'apprentissage tenant compte de l'environnement. Ces travaux ont contribué à faire émerger, au sein des communautés éducatives, le concept de séquence pédagogique comme un composant essentiel des systèmes d'apprentissage. Dans *International Journal of Technologies in Higher Education* ([7]), la séquence pédagogique se définit comme l'organisation d'un ensemble d'activités d'apprentissage; et la modélisation pédagogique est l'acte pédagogique par lequel les différentes activités, ressources et services pédagogiques sont regroupés de façon à offrir une solution de formation. Ceci est au cœur de la conception des processus d'apprentissage intégrant des technologies numériques. La séquence pédagogique représente alors un processus d'apprentissage qui se décline en un ou plusieurs cheminements possibles pour l'apprenant ou encore qui offre une collection d'activités et de ressources pédagogiques faiblement couplées. C'est alors aux acteurs de construire de façon dynamique le processus de parcours de ces activités.

Ce mémoire qui s'inscrit dans la perspective de faciliter l'acquisition des connaissances sur la notion des applications affines du plan, s'est principalement intéressé à trois grands objectifs. Nous proposons dans le chapitre un et deux, un cours sur les applications affines du plan; le chapitre trois est consacré aux exercices liés à ce cours; une réflexion pédagogique et didactique sur la notion de marque d'une application affine du plan est présente au quatrième chapitre. La conclusion de ce mémoire présente un résumé étendu du travail réalisé ainsi que des perspectives envisageables à ce travail.

APPLICATION AFFINES DU PLAN

1.1 INTRODUCTION

En géométrie, une application affine est une application entre deux espaces affines compatible avec leur structure. Cette notion généralise celle de la fonction affine en analyse. C'est *EULER* en 1948 qui est à l'origine du terme « transformation affine », car dit-il deux courbes image l'une de l'autre par une telle transformation présente entre elles une certaine affinité. Les applications affines du plan ne font pas l'objet d'une étude explicite dans le livre programme du Cameroun([6]), néanmoins l'étude de quelques applications affines du plan telles que les translations, les homothéties, les rotations, les symétries orthogonales et les isométries du plan se trouvent dans le chapitre intitulé : " Géométrie plane " vu après le calcul barycentrique et avant les conique. Les objectifs pédagogiques opérationnels de cette leçon est de caractériser, reconnaître et utiliser les applications affines du plan, l'élève devra savoir que toutes les applications affines du plan conservent le coefficient de colinéarité. Cette leçon peut être vue avant les isométries et les similitudes directes du plan parce qu'elle peut être utile aux ressources isométries du plan, similitudes et coniques. Nous aurons besoins de la ressource sur les calculs barycentriques pour construire notre ressource. Comme pré-requis il faut connaître les opérations sur les vecteurs de l'espace, les espaces vectoriels, les applications linéaires, les calculs barycentriques et la notion de matrice. Pour atteindre nos objectifs nous allons faire une ou plusieurs activités au début de chaque paragraphe.

1.2 RAPPELS SUR LES ESPACES AFFINES

On sait bien qu'une fois qu'on a choisi un repère, le plan s'identifie à $\mathbb{R}^2$ (respectivement l'espace de dimension 3 à $\mathbb{R}^3$). On pourrait donc se contenter de faire de la géométrie dans

1.3 GÉNÉRALITÉS

$\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$. Cette identification repose pourtant sur le choix d'un repère. Or, se fixer un repère une fois pour toutes n'est souvent pas la meilleure solution : il est préférable, même quand on calcule en coordonnées, d'avoir la liberté de choisir un repère bien adapté au problème posé. Le cadre naturel de la géométrie élémentaire serait donc un espace homogène, dont aucun point ne serait privilégié, ce qui n'est pas le cas dans un espace vectoriel, où le vecteur nul joue un rôle particulier et tient naturellement lieu d'origine. Moralement, un espace affine n'est rien d'autre que cela : un espace vectoriel dont on aurait oublié où se trouve l'origine. Cette définition est naturellement beaucoup trop vague pour être utilisable telle quelle. Nous allons commencer par lui donner un sens précis.

Définition 1.2.1. Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel réel de dimension deux ou trois. Un espace affine de direction $\vec{E}$ est un ensemble non vide E muni d'une application $(M; N) \mapsto \vec{E}$ de $E \times E$ dans $\vec{E}$ vérifiant :

- 1) Pour tout triplet (M, N, P) de points de E : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (relation de Chasles) ;
- 2) Pour tout point O de E , l'application $M \mapsto \overrightarrow{MO}$ de E dans $\vec{E}$ est bijective.

Les éléments de E s'appellent des points, ceux de $\vec{E}$ des vecteurs. On appelle dimension de l'espace affine E la dimension de l'espace vectoriel $\vec{E}$.

Exemple 1.2.1. Tout espace vectoriel est muni d'une structure naturelle d'espace affine sur lui-même par l'application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} - \vec{v}$. Plus généralement, l'image par une translation d'un sous-espace vectoriel $\vec{F}$ d'un espace vectoriel $\vec{E}$, est un espace affine de direction $\vec{F}$.

1.3 GÉNÉRALITÉS

Activité 1.3.1. Soit O un point du plan $\mathcal{P}$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $f : M \mapsto M'$ telle que $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OM'}$.

Soit G est le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1) \dots (A_n, \alpha_n)\}$ et $G' = f(G)$.

a-) Quelle est la traduction vectorielle de : G est le barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$?

b-) Montrer que $2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i}$.

c-) Dédurre d'après les questions précédentes que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$.

d-) Sachant que $A'_i = f(A_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ que représente le point G' pour le système $(f(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Solution de l'activité :

Soit G barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

a-) G barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ signifie que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

b-) On a d'après la relation de Chasles $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i})$.

En multipliant membre à membre par 2, on obtient :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} &= 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}) \\ 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} &= 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (-\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (-2\overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{OA_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (-\overrightarrow{OG'} + \overrightarrow{OA'_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{G'O} + \overrightarrow{OA'_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i}. \end{aligned}$$

Donc $2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i}$

c-) Comme $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ alors $2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Donc $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$ d'après la question b-).

d-) On a $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$ et $A'_i = f(A_i)$. Ainsi $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G'f(A_i)} = \vec{0}$.

Donc $G' = f(G)$ est le barycentre du système $(f(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Noté bien : On vient de montrer que si G est barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ alors $G' = f(G)$ est barycentre du système $(f(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. On dit alors que f « conserve » le barycentre. Ainsi une application ponctuelle f qui conserve le barycentre est appelée une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

Définition 1.3.1. On appelle application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, toute application qui conserve le barycentre.

Théorème 1.3.1. L'application ponctuelle f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est une application affine si et seulement si, f conserve le barycentre de tout système de deux points pondérés au moins.

Exercice 1.3.1. Soit O un point du plan $\mathcal{P}$ et g l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $g : M \mapsto M'$ telle que $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OM'}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

Montrer que l'application g conserve le barycentre.

1.4 PROPRIÉTÉS

Remarque 1.3.1. Une application affine bijective est encore appelée une transformation affine du plan.

Définition 1.3.2. Soit f une application affine. L'application linéaire Φ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de représentant (M, N) associe le vecteur $\Phi(\vec{u}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$ est appelée application linéaire associée à l'application affine f .

Noté bien : f est alors appelée application ponctuelle associée à ϕ .

Définition 1.3.3. Soit f une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. Soit (K, K') un couple de points homologues c'est-à-dire $f(K) = K'$. On appelle application vectorielle associée à f relativement au point K (relativement au couple de points homologues (K, K')) ; l'application linéaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $\phi_K : \vec{u} = \overrightarrow{KM} \mapsto \vec{u}' = \overrightarrow{K'M'} = \phi_K(\vec{u})$.

1.4 PROPRIÉTÉS

1.4.1 Détermination d'une application affine du plan

Détermination analytique

Activité 1.4.1. Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère $(O; I; J)$.

$A(3; 2); B(1; 1); C(0; 1)$ trois points non alignés de $\mathcal{P}$ d'images respectives $A'(6; 6); B'(3; 3); C'(2; 1)$ par une application affine f . Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{P}$ d'image $M'(x'; y')$ par f . Soit Φ l'application linéaire associée à l'application affine f .

a-) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$.

b-) Sachant que $\phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ et $\phi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$, montrer que $\phi(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$.

c-) Écrire $\phi(\overrightarrow{AM})$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

d-) Sachant que $\phi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$, donner l'expression de x' et y' en fonction de x et y .

Solution de l'activité :

a-) On a dans le repère (O, I, J) : $\overrightarrow{AB}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{A'B'}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix};$

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{A'C'} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{A'M'} \begin{pmatrix} x-6 \\ y-6 \end{pmatrix};$

b-) On sait que $\begin{cases} \phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \\ \phi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} \end{cases},$

$$\text{alors } \begin{cases} -2\phi(\vec{OI}) - \phi(\vec{OJ}) = -3\vec{OI} - 3\vec{OJ} \text{ par } (-1) \\ -3\phi(\vec{OI}) - \phi(\vec{OJ}) = -4\vec{OI} - 5\vec{OJ} \end{cases}$$

$\phi(\vec{OI}) = \vec{OI} + 2\vec{OJ}$. On en déduit que $\phi(\vec{OJ}) = \vec{OI} - \vec{OJ}$.

c-) Puisque $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ dans le repère (O, I, J) , on peut écrire

$$\begin{aligned} \phi(\vec{AM}) &= \phi[(x-3)\vec{OI} + (y-2)\vec{OJ}] \\ &= (x-3)\phi(\vec{OI}) + (y-2)\phi(\vec{OJ}) \\ &= [(x-3) + (y-2)]\vec{OI} + [2(x-3) - (y-2)]\vec{OJ}. \end{aligned}$$

d-) Sachant que $\phi(\vec{AM}) = \vec{A'M'}$, on a $[(x-3) + (y-2)]\vec{OI} + [2(x-3) - (y-2)]\vec{OJ} = (x'-6)\vec{OI} + (y'-6)\vec{OJ}$.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} x'-6 = x-3+y-2 \\ y'-6 = 2x-6-y+2 \end{cases},$$

$$\text{c'est-à-dire } \begin{cases} x' = x+y+1 \\ y' = 2x-y+2 \end{cases}.$$

Définition 1.4.1. Soit f l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ définie par $f : M(x) \mapsto M'(x')$.
 f est affine si $x' = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition 1.4.2. Soient $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $f : M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$f \text{ est affine si } \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}, \text{ où } a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.4.1. Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $f : M(X) \mapsto M'(X')$ est affine si $X' = AX + B$ où $X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

$$B \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}.$$

La matrice de l'application linéaire ϕ associée est $A = M_\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$.

Définition 1.4.3. Une application affine est bijective si $\det(M_\phi)$ est non nul.

1.4 PROPRIÉTÉS

Remarque 1.4.2. Une application affine f est entièrement déterminée par la donnée de l'application linéaire associée ϕ et d'un couple de points.

Détermination par une application linéaire associée et un couple de points

Activité 1.4.2. Soient $\mathcal{P}$ rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et ϕ l'application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ définie par $\phi(\vec{u}) = 2\vec{u}$.

Soit l'application affine f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ d'application linéaire associée ϕ qui au point $K(1;2)$ associe $K'(3;-1)$.

a-) Sachant que $f(M) = M' \iff \phi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$, montrer que $\overrightarrow{K'M'} = \phi(\overrightarrow{KM})$;

b-) Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

Solution de l'activité :

a-) Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ son image par l'application affine f .

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{K'M'} &= \overrightarrow{K'O} + \overrightarrow{OM'} \\ &= -\phi(\overrightarrow{OK}) + \phi(\overrightarrow{OM}) \\ &= \phi(\overrightarrow{KO}) + \phi(\overrightarrow{OM}) \\ &= \phi(\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OM}) \\ &= \phi(\overrightarrow{KM}).\end{aligned}$$

b-) Puisque $f(M)=M'$, on a $\overrightarrow{K'M'} = \phi(\overrightarrow{KM}) = 2\overrightarrow{KM}$

$$\text{Ainsi } \begin{pmatrix} x' - 3 \\ y' + 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 5 \end{cases}.$$

1.4.2 Image d'une droite, d'un plan par une application affine

Image d'une droite

Activité 1.4.3. Soient $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère (O, I, J) et f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$, $f(A)$ et $f(B)$ leurs images par f .

a-) Quelle est l'ensemble des barycentre de A et B .

1.4 PROPRIÉTÉS

b-) Que représente l'image de la droite (AB) pour les points $f(A)$ et $f(B)$.

c-) Déterminer l'image par f de la droite (AB) pour les cas suivants :

- $f(A)$ est égale à $f(B)$;
- $f(A)$ est différent de $f(B)$.

Théorème 1.4.1. L'image d'une droite (AB) par une application affine f est :

- La droite passant par $f(A)$ et $f(B)$, si et seulement si $f(A)$ est différent de $f(B)$;
- L'ensemble $\{f(A)\}$ si et seulement si $f(A)$ est égale à $f(B)$.

Remarque 1.4.3. L'image d'une droite par une transformation affine est une droite.

Soient $(\mathcal{D})$ et (Δ) deux droites sécantes et p la projection sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à (Δ) .

- L'image par la projection p d'une droite parallèle à (Δ) est un singleton.
- L'image par la projection p d'une droite sécante à (Δ) est $(\mathcal{D})$.

Image d'un plan

Activité 1.4.4. Soit f une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. Soient A, B, C trois points non alignés et $A'=f(A)$, $B'=f(B)$ et $C'=f(C)$. On pose $\mathcal{P} = (ABC)$.

1^{er} cas : Supposer que les points A', B' et C' sont non alignés.

a-) Montrer que f est bijective.

b-) Déterminer l'image par f du plan (ABC) .

2^e cas : Supposer que les points A', B' et C' sont alignés et non tous confondus.

a-) Montrer que la droite $(A'B')$ est contenue dans $f(\mathcal{P})$;

b-) Montrer que $f(\mathcal{P})$ est contenu dans $(A'B')$ et conclure.

3^e cas : Supposer que $A'=B'=C'$ et déterminer $f(\mathcal{P})$.

Solution de l'activité :

Soient A, B, C trois points non alignés et $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$.

1^{er} cas : A', B' et C' sont non alignés.

a-) (A', B', C') est un repère du plan ; donc f est bijective.

b-) L'image du plan (ABC) est le plan passant par $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$.

2^e cas : A', B' et C' sont alignés et non tous confondus.

a-) Sans nuire à la généralité, supposons par exemple que A' et B' sont distincts. D'après

1.4 PROPRIÉTÉS

le premier cas, $f(AB)=(A'B')$; donc la droite $(A'B')$ est contenue dans $f(\mathcal{P})$.

b-) L'image de tout point M du plan, considéré comme barycentre de A, B et C est un point M' barycentre de A', B' et C' ; donc $f(\mathcal{P})$ est contenue dans $(A'B')$.

On en déduit que $f(\mathcal{P}) = (A'B')$.

3^e cas : $A' = B' = C'$.

On a : $f(\mathcal{P}) = \{f(A)\}$.

Théorème 1.4.2. L'image d'un plan (ABC) par une application affine f est :

- Le plan passant par $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ si et seulement si les trois points $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ sont non alignés.
- La droite passant par $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ si et seulement si $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ sont alignés non tous confondus.
- Le singleton $\{f(A)\}$ si et seulement si $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ sont confondus.

1.4.3 Conservation du parallélisme

Activité 1.4.5. Soient $\mathcal{P}$ un plan rapporté au repère (O, I, J) et A, B, C, D quatre points de $\mathcal{P}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires.

Soient $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ les images respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ par l'application affine f .

- Écrire le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- Déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{C'D'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$;
- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est non nul;
- Déduire que les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ sont parallèles.

Noté bien : On dit que l'application affine conservent le parallélisme.

Théorème 1.4.3. Si une application affine f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ transforme une droite $(\mathcal{D})$ en une droite $(\mathcal{D}')$, alors elle transforme toute droite parallèle à $(\mathcal{D})$ en une droite parallèle à $(\mathcal{D}')$.

Remarque 1.4.4.

- En générale une application affine ne conserve pas l'orthogonalité, les distances, le rapport des distances.
- Les images par une transformation affine du plan de deux droites strictement parallèles

sont deux droites strictement parallèles.

- Les images par une transformation affine du plan de deux droites sécantes sont deux droites sécantes.

1.4.4 Points invariants par une application affine

Théorème 1.4.4.

- On dit que qu'un point M est invariant par une application affine f si et seulement si $f(M) = M$.
- On dit qu'un ensemble E est globalement invariant par f si et seulement si $f(E) = E$. C'est-à-dire pour tout point M de E , $f(M)$ appartient à E .
- E est dit invariant point par point si pour tout point M de E , $f(M) = M$.

Remarque 1.4.5.

- Dire que E est globalement invariant par f ne signifie pas que tous les points de E sont fixes par f ;
- Un segment $[AB]$ est globalement invariant par la symétrie centrale dont le centre est le milieu de $[AB]$, mais seul le milieu de $[AB]$ est un point fixe par cette application ;
- Une droite (AB) est globalement invariante par la translation de vecteur alors que cette application n'a aucun point fixe ;
- Tous les points sont invariants par l'application identité.

1.4.5 Composée de deux applications affines

Activité 1.4.6. Soient f et g deux applications affines du plan.

Soient A, B, C trois points du plan et λ un nombre réel tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

- a-) Montrer que $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \overrightarrow{f(A)f(B)}$.
- b-) Montrer que $\overrightarrow{g(A')g(C')} = \lambda \overrightarrow{g(A')g(B')}$. où $A'=f(A)$, $B'=f(B)$ et $C'=f(C)$.
- c-) Dédurre que $g \circ f$ est une application affines du plan.

Théorème 1.4.5. La composée de deux applications affines du plan est une application affine du plan.

ÉTUDE DE QUELQUES APPLICATIONS AFFINES DU PLAN

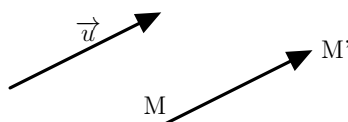
2.1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente l'étude de quelques applications affines telles que : les translations, les homothéties, les projections, les symétries et les rotations. Nous déterminerons l'expression analytique de toutes ces applications affines du plan et montrerons qu'ils conservent le barycentre, mais ne conservent pas généralement l'orthogonalité, les distances et le rapport des distances.

2.2 HOMOTHÉTIE-TRANSLATION

2.2.1 Translation

Définition 2.2.1. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application notée : $t_{\vec{u}}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de $\mathcal{P}$ associe M' tel que : $t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Points invariants par une translation

Théorème 2.2.1. Si $\vec{u} = \vec{0}$, tout point est invariant; sinon on a pas de points invariants.

Propriété vectorielle ou fondamentale d'une translation

Théorème 2.2.2. $\begin{cases} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}.$

2.2 HOMOTHÉTIE-TRANSLATION

Démonstration 2.2.1. Soient M' et N' les images respectives de M et N par $t_{\vec{u}}$. On a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$. Ainsi $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

Remarque 2.2.1. La bijection réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$, et $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

Expression analytique d'une translation

Activité 2.2.1. Soient $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

a-) Donner l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$.

b-) En déduire l'expression analytique de l'application linéaire associée et sa matrice.

Solution de l'activité :

a-) Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{P}$ et $M'(x'; y')$ son image par $t_{\vec{u}}$.

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \text{ est l'expression analytique de } t_{\vec{u}}.$$

b-) L'application linéaire associée a pour expression analytique

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \text{ et sa matrice est } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrice unité.}$$

2.2.2 Translation et barycentre

Théorème 2.2.3. Une translation conserve le barycentre.

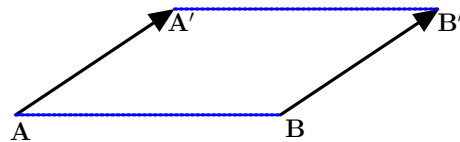
Démonstration 2.2.2. Nous démontrons avec trois points pondérés mais la démonstration est identique pour le barycentre de n points pondérés. Soit G le barycentre de $(A; a)$, $(B; b)$ et $(C; c)$. Soient A' , B' , C' et G' les images respectives des points A , B , C et G par une translation de vecteur $\vec{u}$. On a : $\overrightarrow{G'A'} = \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{G'B'} = \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{GC}$. Donc $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} + c\overrightarrow{G'C'} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Par conséquent G' est le barycentre de $(A'; a)$, $(B'; b)$ et $(C'; c)$.

2.2.3 Translation, droites et segments

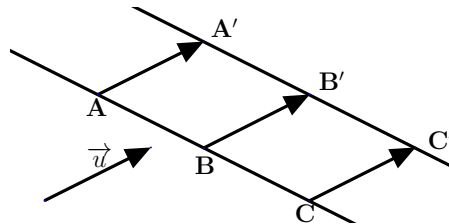
Théorème 2.2.4.

- Si A' et B' sont les images respectives des points A et B par une translation, alors $AB = A'B'$ (conservation de la distance);

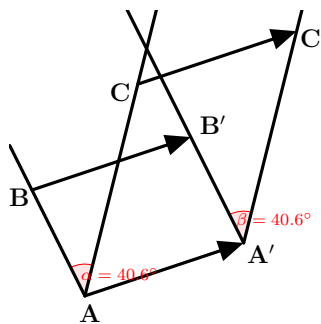
2.2 HOMOTHÉTIE-TRANSLATION



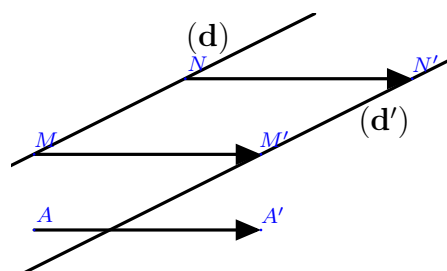
- Si trois points A , B et C sont alignés, alors leurs images respectives A' , B' et C' par une translation sont alignés dans le même ordre (conservation de l'alignement);



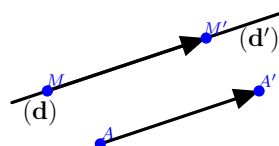
- L'image d'un angle par une translation est un angle de même mesure;



1^{er} cas : Si les droites (d) et (AA') ne sont pas parallèles; Alors l'image (d') de la droite (d) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est une droite qui lui est parallèle;

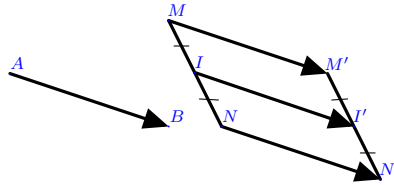


2^e cas : Si les droites (d) et (AA') sont parallèles; Alors l'image (d') de la droite (d) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est confondue à la droite (d) .



2.2 HOMOTHÉTIE-TRANSLATION

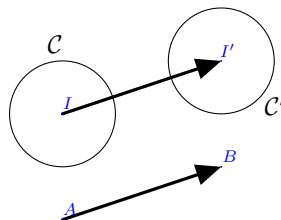
- Par une translation, l'image d'un segment $[MN]$ est le segment $[M'N']$ où M' et N' sont les images de M et N . De plus, le milieu I de $[MN]$ a pour image le milieu I' de $[M'N']$.



Démonstration 2.2.3. La preuve de ce théorème est laissée en exercice aux élèves.

Conséquence 2.2.1.

- Une translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité ;
- Une translation conserve les angles orientés de vecteurs ;
- Par une translation, la nature des triangles (isocèle, équilatéral, rectangle) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) est conservée ;
- Par une translation de vecteur $\vec{u}$, l'image d'un cercle C de centre I et de rayon r est un cercle C' de centre I' (image de I par translation) et de rayon r ;



2.2.4 Homothéties

Définition 2.2.2. Soit Ω un point de $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application notée : $h_{(\Omega;k)}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M associe le point M' tel que : $h_{(\Omega;k)}(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$.

Remarque 2.2.2.

- Le centre d'une homothétie a pour image lui-même par cette homothétie ;
- Dans une homothétie, un point, son image et le centre sont alignés ;
- On a : $\Omega M = |k| \Omega M'$;
- $h_{(\Omega;1)}$ est l'identité.

2.2 HOMOTHÉTIE-TRANSLATION

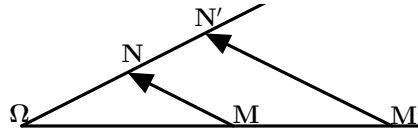
Points invariants par une homothétie :

Théorème 2.2.5. Soit h une homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$.

- Si $k = 1$, alors tout point est invariant ;
- Si $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ alors Ω est le seul point invariant.

Propriété vectorielle ou fondamentale d'une homothétie

Théorème 2.2.6. Soit h une homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} h(M) = M' \\ h(N) = N' \end{array} \right. \Rightarrow$
 $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.



Démonstration 2.2.4. Soit h une homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$.

On a : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{\Omega N}$. Ainsi, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega N} - k\overrightarrow{\Omega M} = k(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M}) = k\overrightarrow{MN}$.

Conséquence 2.2.2. On a :

- $M'N' = |k|MN$;
- Une homothétie de rapport k multiplie donc les distances par le nombre positif $|k|$. Si, $|k| > 1$, cette homothétie est un agrandissement et si $|k| < 1$ c'est une réduction.
- Si les points M et N sont distincts, alors les points M' et N' images respectives par h de M et N sont aussi distincts et les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

Remarque 2.2.3. La réciproque de $h_{(\Omega;k)}$ est $h_{(\Omega;k)}^{-1} = h_{(\Omega;\frac{1}{k})}$.

Composée de deux homothéties

Activité 2.2.2.

1-) Homothétie de même centre Ω :

a-) Vérifier que $h_{(\Omega;k)} \circ h_{(\Omega;k')} = h_{(\Omega;kk')}$

b-) Si $kk'=1$, donner la nature et les éléments caractéristiques de $h_{(\Omega;k)} \circ h_{(\Omega;k')}$

2-) Homothétie de centres différents :

Soient $h_1(A_1; k)$ et $h_2(A_2; k')$ deux homothéties de centres respectifs A_1 et A_2 , avec $kk' \neq 1$.

Supposons que h_1 transforme M en M_1 , N en N_1 et h_2 transforme M_1 en M' , N_1 en N' .

2.2 HOMOTHÉTIE-TRANSLATION

a-) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MN}$.

b-) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h_2 \circ h_1$.

Solution de l'activité :

1-a) Comme h_1 transforme M en M_1 , N en N_1 et h_2 transforme M_1 en M' , N_1 en N' alors $h_2 \circ h_1$ transforme M en M' et N en N' . D'après la propriété vectorielle on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_1N_1} = k\overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{M'N'} = k'\overrightarrow{M_1N_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = kk'\overrightarrow{MN}.$$

b-) Si $kk' = 1$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, d'où $h_2 \circ h_1$ est une translation.

Déterminons son vecteur de translation $\vec{u}$. Soit A un point du plan $\mathcal{P}$ tel que $h_2(A_1) = A$. On obtient $h_2 \circ h_1(A_1) = h_2(A_1) = A$. D'où $\overrightarrow{A_1A} = \vec{u}$;

2-a) Si $kk' \neq 1$, alors $\overrightarrow{M'N'} = kk'\overrightarrow{MN}$. D'où $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport kk' .

b-) Déterminons le centre Ω de $h_2 \circ h_1$. Soient B, C, D trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que $h_2(C) = D$ et $h_1(B) = C$. On a $\overrightarrow{A_2D} = k'\overrightarrow{A_2C}$ et $\overrightarrow{A_1C} = k\overrightarrow{A_1B}$.

D'où $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2C} = k\overrightarrow{A_1B}$ c'est à dire $\overrightarrow{A_2C} = \overrightarrow{A_2A_1} + k\overrightarrow{A_1B}$. On peut écrire que $(h_2 \circ h_1)(B) = D$ équivaut à $\overrightarrow{A_2D} = k'(\overrightarrow{A_2A_1} + k\overrightarrow{A_1B})$. Comme le centre Ω est invariant par

$h_2 \circ h_1$, on a $\overrightarrow{A_2\Omega} = k'\overrightarrow{A_2A_1} + kk'\overrightarrow{A_1\Omega}$ Équivaut à $\overrightarrow{A_2\Omega} = k'\overrightarrow{A_2\Omega} + k'\overrightarrow{\Omega A_1} + kk'\overrightarrow{A_1\Omega}$.

Ainsi $(1 - k')\overrightarrow{A_2\Omega} = k'(1 - k)\overrightarrow{\Omega A_1}$; c'est-à-dire $k'(k - 1)\overrightarrow{\Omega A_1} + (k' - 1)\overrightarrow{\Omega A_2} = \vec{0}$.

D'où le centre Ω est le barycentre des points pondérés $(A_2; (k' - 1))$ et $(A_1; k'(k - 1))$.

Expression analytique d'une homothétie :

Activité 2.2.3. Soient $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère $(O; I; J)$, Ω de coordonnée $(x_0; y_0)$ un point de $\mathcal{P}$ et k nombre réel non nul.

a-) Donner l'expression analytique de $h_{(\Omega; k)}$.

b-) En déduire l'expression analytique de son application linéaire associée puis sa matrice.

Solution de l'activité :

a-) Soient $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ son image par $h_{(\Omega; k)}$. On a $h_{(\Omega; k)}(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. C'est-à-dire $\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases}$. D'où $\begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \end{cases}$ est l'expression analytique de $h_{(\Omega; k)}$.

b-) L'application linéaire associée a pour expression analytique

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \text{ et sa matrice est } M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

2.2.5 Composée d'une homothétie et d'une translation

Théorème 2.2.7. Soient $h_{(\Omega;k)}$ une homothétie de centre Ω et de rapport k ; $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$.

- Si $k = 1$, alors $t \circ h = h \circ t = t$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t \circ h = h \circ t = h$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \neq 1$, alors $t \circ h$ est une homothétie de centre O et de rapport k tel que : $\vec{u} = (1 - k) \overrightarrow{\Omega O}$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \neq 1$, alors $h \circ t$ est une homothétie de centre O et de rapport k tel que : $\vec{u} = \frac{(1-k)}{k} \overrightarrow{\Omega O}$.

Démonstration 2.2.5. *Laissée en exercice aux élèves*

2.2.6 Homothétie et barycentre

Théorème 2.2.8. Une homothétie conserve le barycentre.

Démonstration 2.2.6. Nous démontrons avec trois points pondérés mais la démonstration est identique pour le barycentre de n points pondérés. Soit G le barycentre de $(A; a)$, $(B; b)$ et $(C; c)$. Soient A' , B' , C' et G' les images respectives des points A , B , C et G par une homothétie de rapport k . On a : $\overrightarrow{G'A'} = k\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{G'B'} = k\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{G'C'} = k\overrightarrow{GC}$. Donc $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} + c\overrightarrow{G'C'} = ak\overrightarrow{GA} + bk\overrightarrow{GB} + ck\overrightarrow{GC} = k(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}) = k\vec{0}$. Par conséquent G' est le barycentre de $(A'; a)$, $(B'; b)$ et $(C'; c)$.

2.2.7 Homothétie, droites et segments

Théorème 2.2.9.

- Si trois points A , B et C sont alignés, alors leurs images respectives A' , B' et C' par une homothétie sont alignés dans le même ordre (conservation de l'alignement);
- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle;
- Par une homothétie, l'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ où A' et B' sont les images respectives de A et B). De plus, le milieu I de $[AB]$ a pour image le milieu I' de $[A'B']$.

Conséquence 2.2.3.

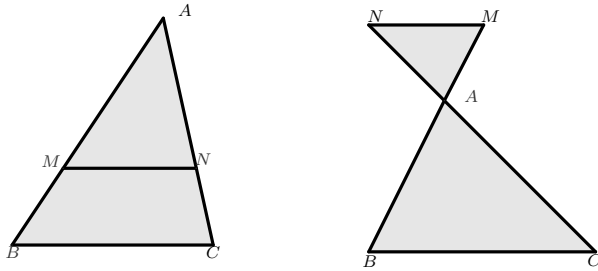
- L'image d'une droite est connue dès qu'est connue l'image d'un point de cette droite;

2.2 HOMOTHÉTIE-TRANSLATION

- Si deux droites sont parallèles, alors leurs images sont parallèles ;
- Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs images sont perpendiculaires.

2.2.8 Triangles homothétiques

Théorème 2.2.10. Soient ABC et AMN deux triangles tels que $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $(MN) \parallel (BC)$. L'homothétie de centre A qui transforme B en M , transforme C en N .

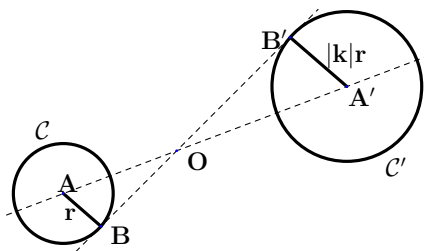


Démonstration 2.2.7. Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en M . Une homothétie conserve le parallélisme, donc h transforme la droite (BC) en la droite parallèle à (BC) et passant par M , c'est à dire (MN) . Ainsi $h(C) \in (MN)$, de plus $h(C) \in (AC)$. Donc $h(C) = N$.

Remarque 2.2.4. Les triangles ABC et AMN sont homothétiques de sommet A .

Théorème 2.2.11.

- 1- Une homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité ;
- 2- Une homothétie conserve les angles orientés de vecteurs ;
- 3- Par une homothétie, la nature des triangles (isocèle, équilatéral, rectangle) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) est conservée ;
- 4- Par une homothétie de rapport k , l'image d'un cercle C de centre A et de rayon r est un cercle C' de centre A' (image de A par l'homothétie) et de rayon $|k|r$;
- 5- Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 .



2.3 PROJECTION

Démonstration 2.2.8. Les questions 1-, 2- et 5- sont laissées en exercices aux élèves et la question 3- se fait à l'aide des théorèmes précédents sur la conservation des angles et des distances ;

4- Nous montrons premièrement que tout point du cercle $\mathcal{C}$ a son image sur le cercle $\mathcal{C}'$. Tout point B du plan a une image B' par l'homothétie h telle que $A'B' = |k|AB$. Si B est un point du cercle $\mathcal{C}$ alors $AB = r$, d'où $A'B' = |k|r$ ainsi B' est sur le cercle de centre A' et de rayon $|k|r$. Donc tout point du cercle $\mathcal{C}$ a son image sur le cercle $\mathcal{C}'$.

Réciproquement, démontrons que tout point du cercle $\mathcal{C}'$ est image d'un point du cercle $\mathcal{C}$. Soit N' un point de $\mathcal{C}'$. k étant non nul, il existe un point N unique tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AN'}$. Alors $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AN'}$ et N est l'image de N' par l'homothétie h , d'où $A'N' = |k|AN$ et comme N' est un point de $\mathcal{C}'$, on a $A'N' = |k|r$. On en déduit que $|k|AN = |k|r$, donc $AN = r$ ce qui prouve que N est sur le cercle $\mathcal{C}$. Donc tout point du cercle $\mathcal{C}'$ a son image sur le cercle $\mathcal{C}$. On a ainsi montré que les images des points de $\mathcal{C}$ par une homothétie sont sur $\mathcal{C}'$, et que tous les points de $\mathcal{C}'$ sont des images des points de $\mathcal{C}$ par cette homothétie. Donc l'image du cercle $\mathcal{C}$ est le cercle $\mathcal{C}'$.

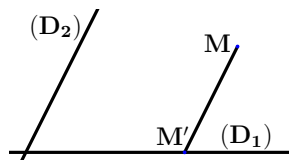
2.3 PROJECTION

Activité 2.3.1. soient $(D) : 2x + 3y + 4 = 0$ et $(D') : 2x - 4y + 3 = 0$.

1-) Donner l'expression analytique de la projection p sur (D) parallèlement à (D') .

2-) Que peut-on dire de $p \circ p$?

Définition 2.3.1. Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes du plan affine $\mathcal{P}$. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, la droite (D) contenant M et parallèle à (D_2) est sécante à (D_1) en un point M' appelé projeté de M sur (D_1) parallèlement à (D_2) .



Remarque 2.3.1.

- Soit (D'_2) une droite parallèle à (D_2) , le point M' est aussi la projection de M sur (D_1) parallèlement à (D'_2) ;

- Dans la définition du point M' , la droite (D_2) n'intervient que par sa direction $\overrightarrow{D_2}$ c'est-à-dire la droite vectorielle associée à (D_2) ;

- On dit que M' est la projection de M sur (D_1) parallèlement à la droite vectorielle $\vec{D}_2$;
- La projection sur (D_1) parallèlement à (D_2) n'est définie que si (D_1) et (D_2) sont sécantes ;
- L'application p de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M fait correspondre sa projection M' sur (D_1) parallèlement à (D_2) est appelé projection de M sur (D_1) parallèlement à (D_2) ;
- (D_1) est la base de la projection, et la direction de (D_2) est la direction de la projection ;
- La projection est dite orthogonale lorsque (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.

Propriété 2.3.1.

- Points invariants : $M \in (D_1)$ équivaut à $p(M) = M$. Donc (D_1) est invariante par p .

La base de la projection est l'ensemble de points invariants.

- p n'est pas injective. En effet, pour tout M de (D_1) , l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $p(M) = M'$ est la droite contenant M' et parallèle à (D_2) .

p n'est pas surjective. Car l'image de $\mathcal{P}$ par p est la droite (D_1) c'est-à-dire $p(\mathcal{P}) = (D_1)$.

Donc une projection est une application affine non bijective.

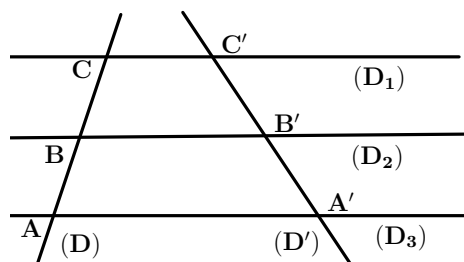
- Caractérisation d'une projection : La droite (D_1) est invariante par p , donc pour tout point M de $\mathcal{P}$, si $p(M) \in (D_1)$ alors $p \circ p(M) = p[p(M)] = p(M)$.

p est une projection affine si et seulement si $p \circ p = p$.

- $\vec{MM'}$ appartient à la direction de la projection p .

Théorème 2.3.1. (de Thalès) : Soient $\mathcal{P}$ un plan affine et deux droites (D) et (D') de $\mathcal{P}$. Étant donné trois droites parallèles (D_1) , (D_2) , (D_3) de $\mathcal{P}$, rencontrant (D) respectivement (D') en trois points distincts A , B , C respectivement A' , B' , C' . Alors : $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$

Démonstration 2.3.1. Soit $\vec{D}$ la droite vectorielle associée à (D_1) , (D_2) , (D_3) . Considérons la projection p sur (D') parallèlement à $\vec{D}$. On a : $p(A) = A'$, $p(B) = B'$, $p(C) = C'$. De plus, A , B et C sont alignés : $\vec{AC} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \vec{AB}$. Il en est de même pour A' , B' et C' : $\vec{A'C'} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} \vec{A'B'}$. Comme p est une application affine, on a : $\vec{p(A)p(C)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \vec{p(A)p(B)}$. C'est-à-dire $\vec{A'C'} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} \vec{A'B'}$. D'où $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$



2.3.1 Expression analytique

Exercice 2.3.1. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient la droite $(D_1) : x + 2y - 1 = 0$ et la droite (D_2) de vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Définir analytiquement la projection p sur (D_1) parallèlement à (D_2) .

Exercice 2.3.2. Soit $\mathcal{P}$, un plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Considérons l'application p

de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $p : M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{5}(x + 2y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(3x + 6y + 2) \end{cases}$.

Montrons que p est une projection et donner ses éléments caractéristiques.

2.4 SYMÉTRIES

2.4.1 Symétries centrales

Définition 2.4.1. Soit $O(x_0; y_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$. On appelle symétrie de centre O , l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $S_O : M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ telle que O est milieu du segment $[MM']$.

Propriété vectorielle ou fondamentale d'une Symétries centrales

Théorème 2.4.1. $\begin{cases} S_O(M) = M' \\ S_O(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}.$

Démonstration 2.4.1. Soient M' et N' les images respectives de M et N par S_O . On a : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$. Ainsi $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}.$

Expression analytique d'une symétrie centrale

Activité 2.4.1. Soient $\mathcal{P}$ un plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $M'(x'; y')$, l'image de $M(x; y)$ par la symétrie de centre $O(x_0, y_0)$.

1-) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MO}$;

2-) Dédire l'expression de x' et y' en fonction de x et y .

Solution de l'activité :

1-) Comme $S_O(M) = M'$ alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MO}.$

2-) Puisque $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MO}$, on obtient :
$$\begin{cases} x' - x = 2(x_O - x) \\ y' - y = 2(y_O - y) \end{cases}.$$

D'où
$$\begin{cases} x' = -x + 2x_O \\ y' = -y + 2y_O \end{cases}$$
 est l'expression analytique de S_O .

Théorème 2.4.2. *Le centre de la symétrie centrale S_O est le seul point invariant.*

2.4.2 Symétries centrales et barycentre

Théorème 2.4.3. *Une symétrie centrale conserve le barycentre.*

Démonstration 2.4.2. *Nous démontrons avec trois points pondérés mais la démonstration est identique pour le barycentre de n points pondérés. Soit G le barycentre de $(A; a)$, $(B; b)$ et $(C; c)$.*

Soient A' , B' , C' et G' les images respectives des points A , B , C et G par une symétrie de centre O . On a : $\overrightarrow{G'A'} = -\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{G'B'} = -\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{G'C'} = -\overrightarrow{GC}$. Donc $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} + c\overrightarrow{G'C'} = -a\overrightarrow{GA} - b\overrightarrow{GB} - c\overrightarrow{GC} = -\left(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}\right) = \vec{0}$.

Par conséquent G' est le barycentre de $(A'; a)$, $(B'; b)$ et $(C'; c)$.

Exemple 2.4.1.

Soit f une application affine définie par son expression analytique
$$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 2 \end{cases}.$$

1-) Montrer que f est une bijection;

2-) Déterminer les éléments caractéristiques de f et en déduire sa nature.

Solution :

1-) f est bijective, car La matrice de l'application linéaire ϕ associée est $M_\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

et $\det M_\phi = 1 \neq 0$;

2-) L'ensemble des points invariants est le point $A(1; 1)$, car $f(A) = A$ équivaut à $x = 1$ et $y = 1$. Donc f est la symétrie centrale de centre le point A .

Remarque 2.4.1. *Une symétrie centrale de centre O est une homothétie de centre O et de rapport -1 .*

2.4.3 Symétries centrales, droites et segments

Théorème 2.4.4.

1-) Si trois points A , B et C sont alignés, alors leurs images respectives A' , B' et C' par

2.4 SYMÉTRIES

une symétrie centrale sont alignés dans l'ordre contraire (conservation de l'alignement);

2-) Par une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite parallèle;

3-) Par une symétrie centrale, l'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ (où A' et B' sont les images de A et B). De plus, le milieu I de $[AB]$ a pour image le milieu I' de $[A'B']$.

Conséquence 2.4.1.

1-) L'image d'une droite est connue lorsqu'on connaît les images de deux points de cette droite;

2-) Si deux droites sont parallèles, alors leurs images par une symétrie centrale sont parallèles (conservation du parallélisme);

3-) Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs images sont perpendiculaires par une symétrie centrale (conservation de l'orthogonalité).

2.4.4 Symétries axiales

Activité 2.4.2. Soient $(D) : 4x + 2y = 1$ et $(D') : 2x + y = 3$.

1- Donner l'expression analytique de la symétrie S par rapport à (D) parallèlement à (D') .

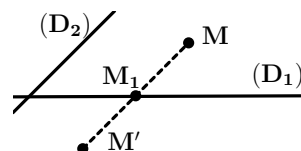
2- Que peut-on dire de $S \circ S$?

Définition 2.4.2. Soient (D_1) et (D_2) deux droites du plan $\mathcal{P}$.

• A tout point M on peut associer : M_1 projection de M sur (D_1) parallèlement à (D_2) , puis le point M' tel que : $\overrightarrow{M'M_1} = -\overrightarrow{MM_1}$ c'est-à-dire M_1 est le milieu du segment $[MM']$.

On dit que le point M' est le symétrique de M par rapport à la droite (D_1) parallèlement à la droite (D_2) . (D_1) est la base et (D_2) la direction de la symétrie.

On remarque que (D_2) n'intervient que par sa direction.



• L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M , fait correspondre son symétrique M' par rapport à (D_1) parallèlement à (D_2) est la symétrie par rapport à (D_1) parallèlement à (D_2) .

• Lorsque (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires, la symétrie est dite orthogonale.

Propriété 2.4.1.

- Toute involution est une symétrie.
- Toute symétrie s est bijective.

2.4.5 Expression analytique

Exercice 2.4.1. Soient la droite $(D_1) : x + y - 2 = 0$ et la droite (D_2) de vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à (D_1) parallèlement à (D_2) .

Exercice 2.4.2. Soit p l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $p : M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

telle que : $\begin{cases} x' = -x + 6y - 4 \\ y' = y \end{cases}$. Montrer que s est une symétrie.

2.4.6 Symétries orthogonales

Définition 2.4.3. Soit (D) une droite du plan $\mathcal{P}$. On appelle Symétrie orthogonale d'axe (D) ou une réflexion d'axe (D) , l'application S_D de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $S_D : M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ telle que (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.

Expression analytique

Définition 2.4.4. Soient une droite $(D) : ax + by + c = 0$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D) . $M'(x'; y')$ le symétrie de $M(x; y)$ par S_D la Symétries orthogonales d'axe (D) . $S_D(M) = M' \iff \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ \text{Le milieu } I \text{ de } [MM'] \in (D) \end{cases}$.

Exercice 2.4.3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, déterminer l'expression analytique de la Symétrie orthogonale S_D d'axe la droite $(D) : 4x - 2y + 1 = 0$.

Ensemble de points invariants

Théorème 2.4.5. L'ensemble des points invariants par la Symétrie orthogonale S_D est l'axe (D) .

Propriété 2.4.2.

- Si (D) et (Δ) sont parallèles, alors $S_D \circ S_\Delta$ est une translation.
- Si (D) et (Δ) sont perpendiculaires, alors $S_D \circ S_\Delta$ est une symétrie centrale dont le centre est le point d'intersection de (D) et (Δ) .

2.5 ROTATION

Définition 2.5.1. Soient un point O du plan $\mathcal{P}$ et un angle orienté α . On appelle rotation de centre O et d'angle α l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ transformant M en M' telle que :
Si $M = O$ alors $M' = O$, sinon $OM = OM'$ et l'angle $\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} = \alpha$.

Remarque 2.5.1.

- La rotation d'angle nul et de centre O est l'identité ;
- La rotation d'angle plat et de centre O est une symétrie centrale de centre O .

Théorème 2.5.1.

- Si l'angle est non nul, alors l'ensemble des points invariants d'une la rotation est le centre O de cette rotation ;
- Une rotation est une application bijective ;
- La réciproque d'une rotation d'angle α est une rotation d'angle $-\alpha$;
- La composée de deux rotations $r(O; \alpha)$ et $r'(O; \alpha')$ de même centre est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.

Propriété 2.5.1.

- L'image d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment et d'un cercle par une rotation est respectivement une droite, une demi-droite, un segment et un cercle ;
- L'image d'un angle orienté par une rotation est un angle orienté de même mesure ;
- Deux points A et B , et leurs images respectives A' et B' par une rotation d'angle sont tels que : $AB = A'B'$ et $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} = \alpha$.

2.5.1 Expression analytique :

Théorème 2.5.2. L'expression analytique d'une rotation $r_{(O; \alpha)}$ de centre O et d'angle α dans le repère $(O; I; J)$ qui à tout point $M(x; y)$ associe son image $M'(x'; y')$ est donnée

2.6 TABLEAU RÉCAPITULATIF DE QUELQUES APPLICATIONS AFFINES DU PLAN (FIGURES)

par :

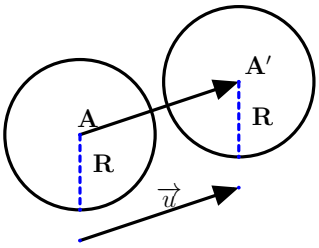
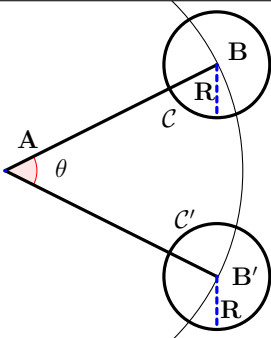
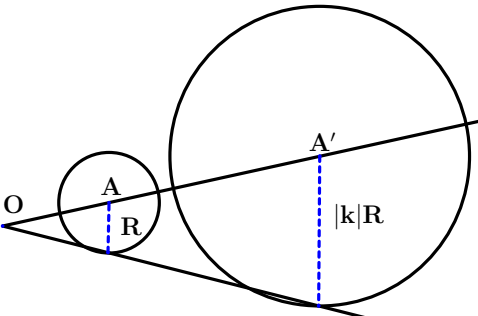
$$\begin{cases} x' = (\cos\alpha) x - (\sin\alpha) y \\ y' = (\sin\alpha) x + (\cos\alpha) y \end{cases}$$

Remarque 2.5.2. Soit $f = r_{(O;\alpha)} \circ r'_{(O';\alpha')}$

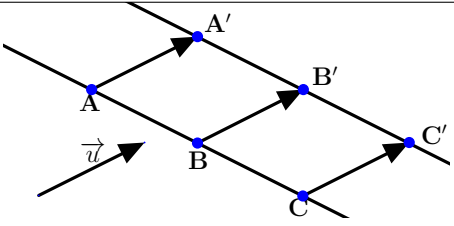
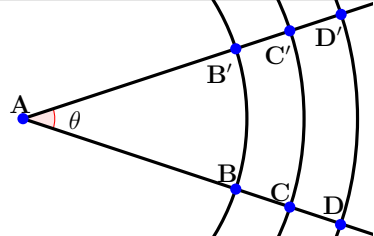
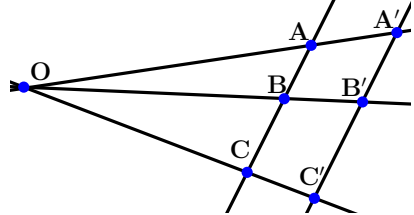
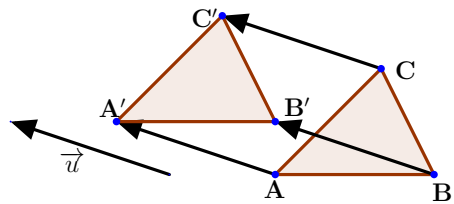
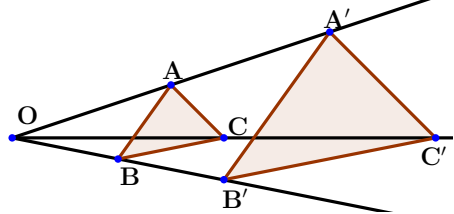
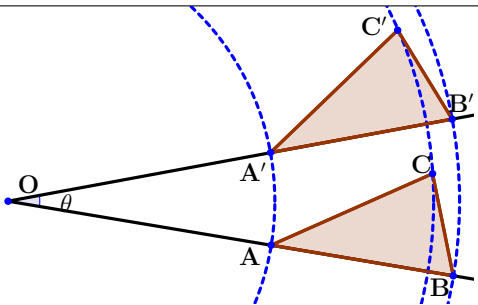
- Si $O = O'$, alors f est une rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$
- Si $O \neq O'$ et $\alpha + \alpha' = 2k\pi$, alors f est une translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$; où $f(M) = M'$.
- Si $O \neq O'$ et $\alpha + \alpha' \neq 2k\pi$, alors f est une rotation de centre le point invariant par f et d'angle $\alpha + \alpha'$.

2.6 TABLEAU RÉCAPITULATIF DE QUELQUES APPLICATIONS AFFINES DU PLAN (FIGURES)

Voici le tableau qui récapitule notre étude dans le cas d'une translation, rotation et homothétie.

L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par une translation est un cercle de centre A', image de A par la translation, et de rayon R.	
L'image d'un cercle de centre B et de rayon R par une rotation de centre A et d'angle θ est un cercle de centre B' (où B' est l'image de B par la rotation), et de rayon R.	
L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par une homothétie de centre A et de rapport k est un cercle de centre A', image de A par l'homothétie, et de rayon $k R$.	

2.6 TABLEAU RÉCAPITULATIF DE QUELQUES APPLICATIONS AFFINES DU PLAN (FIGURES)

Translation de vecteur $\vec{u}$	
Rotation de centre A et d'angle θ	
Homothétie de centre O et de rapport k	
Les translations conservent les longueurs et les aires.	
Les homothétie de rapport k multiplient les longueurs par $ k $ et les aires par k^2 .	
Les rotations conservent les longueurs et les aires.	

EXERCICES

3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons présenter trente exercices sur les applications affines du plan, répartis par centre d'intérêt. Certains sont inspirés des livres "CIAM Terminale SM" et "Majors en mathématiques Terminales C-E" ([8, 9]). La première partie propose les exercices sur l'expression analytique d'une application affine ; les trois autres parties suivantes sont consacrées respectivement à la détermination, l'utilisation, la composée des applications affines. La dernière partie présente trois exercices de recherches qui amèneront les élèves à comprendre la totalité des notions développées sur les applications affines du plan dans le cadre de ce mémoire.

3.2 EXPRESSIONS ANALYTIQUES ET APPLICATIONS AFFINE

Exercice 3.2.1. *Le plan affine P est muni du repère $(O; I; J)$, soit f l'application définie de P dans P qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ définie par :*

$$\begin{cases} x' = -x - y + 1 \\ y' = x \end{cases}.$$

1-) *Montrer que f est une application affine du plan ;*

2-) *Quel est l'ensemble des points invariants par f .*

Exercice 3.2.2. *Le plan affine P est muni du repère $(O; I; J)$, soit f l'application définie de P dans P qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ définie par :*

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}.$$

3.2 EXPRESSIONS ANALYTIQUES ET APPLICATIONS AFFINE

- 1-) Montrer que f est une application affine du plan ;
- 2-) Montrer que f admet un seul point invariant ;
- 3-) Quel est la nature géométrique de l'application $f \circ f$?

Exercice 3.2.3. Le plan affine P est muni du repère $(O; I; J)$, soit f l'application définie de P dans P qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

- 1-) Montrer que pour tout point M , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant ;
- 2-) Étudier l'ensemble des points invariants par f ;
- 3-) Reconnaître la nature de l'application f .

Exercice 3.2.4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; I; J)$, soit f l'application de P dans P qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ définir par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}.$$

- 1-) Déterminer l'ensemble D des points invariants par f ;
- 2-) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à D ;
- 3-) Montrer que le milieu de $[MM']$ appartient à D ;
- 4-) Reconnaître f .

Exercice 3.2.5. Dans le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application f de P dans P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le

point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = -\frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}.$$

- 1-) Quelle est la nature de f ?
- 2-) Donner les éléments caractéristiques de f .

Exercice 3.2.6. Dans le plan affine P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, soient les droites (D) et (D_1) d'équations respectives $x + y - 1 = 0$ et $2x - y + 2 = 0$.

- 1-) Définir analytiquement les symétries s par rapport à (D) parallèlement à (D_1) et s' par rapport à (D_1) parallèlement à (D) .
- 2-) Étudier $s \circ s'$ et $s' \circ s$.

3.3 DÉTERMINATION DES APPLICATIONS AFFINES

Exercice 3.2.7. Dans le plan affine euclidien P d'un repère orthonormé on considère l'application f de P dans P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

- 1-) Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par f ;
- 2-) Montrer que si M n'est pas invariant la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera ;
- 3-) Calculer les coordonnées du point M_1 , intersection de (MM') et (E) ;
- 4-) Reconnaître f et donner sa construction géométrique de M' .

Exercice 3.2.8. Dans le plan affine euclidien d'un repère orthonormé, on considère l'application f qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ y' = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} \end{cases}.$$

- 1-) Montrer qu'il s'agit d'une application affine bijective. Définir son application réciproque f^{-1} ;
- 2-) a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite D_0 que l'on précisera ;
b) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et que le symétrique de M par rapport à M' appartient D_0 ;
c) En déduire une construction simple de M' connaissant le point M ,
- 3-) Soit (E) la courbe d'équation : $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 10x + 6y - 11 = 0$.
a) Déterminer une équation de l'image de (E) par f ;
b) Quelle est la nature de cette courbe image.

3.3 DÉTERMINATION DES APPLICATIONS AFFINES

Exercice 3.3.1. Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$.

- 1-) Donner l'expression analytique de :
 - i-) La translation t de vecteur $\vec{u}(1; 2)$;
 - ii-) L'homothétie h de centre $(2; 3)$ et de rapport 5 ;
 - iii-) La symétrie par rapport à la droite (D) d'équation : $2x + 3y + 1 = 0$, parallèlement à la droite (D') d'équation : $4x - 3y + 2 = 0$;

3.3 DÉTERMINATION DES APPLICATIONS AFFINES

iv-) la projection p sur la droite (D) d'équation : $2x + y + 1 = 0$, parallèlement à la droite (D') d'équation : $x - 3y + 2 = 0$.

2-) Parmi les applications affines ci-dessus, lesquelles sont des transformations affines.

Exercice 3.3.2. Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O; I; J)$, soient $A(1; 1)$, $B(0; 2)$, $C(-1; 2)$, $A'(1; 1)$, $B'(1; -1)$, $C'(0; 3)$.

1-) Montrer qu'il existe une unique application f de P dans P telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$;

2-) Déterminer la matrice de application associée ;

3-) Calculer les coordonnées x' et y' du point M' image du point $M(x; y)$ par l'application affine f .

Exercice 3.3.3. Considérons l'application affine f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(0; 0) = (1; 2) ;$$

$$f(1; 1) = (2; 4) ;$$

$$f(0; 1) = (0; 3).$$

Calculer l'image par f du point $A(-1; -1)$.

Exercice 3.3.4. On considère deux droites sécantes D_1 et D_2 en A , et deux directions d et d' distinctes et ne contenant ni D_1 , ni D_2 . Soit p la projection de D_1 sur D_2 parallèlement à d , et soit p' la projection de D_2 sur D_1 parallèlement à d' . A tout point M de D_1 , on associe les points : $M_1 = p(M)$ et $M' = p'(M_1)$. Trouver la relation entre les abscisses de M et M' dans un repère donné de D_1 .

Exercice 3.3.5. Dans le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé, on donne la droite (D) d'équation $2x + 3y + 5 = 0$.

1-) Déterminer l'expression de la symétrie orthogonale s d'axe (D) ;

2-) Déterminer l'expression de la projection orthogonale p sur la droite (D) ;

3-) Déterminer l'expression de l'affinité f d'axe (D) dont la direction est orthogonale à celle de la droite (D) et de rapport 5. On pourra remarquer que $\overrightarrow{p(M)f(M)} = \overrightarrow{5p(M)M} \gg$ équivaut à «le barycentre de $(f(M); 1)$ et $(M; -5)$ appartient à (D) ».

Exercice 3.3.6. Dans le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application ponctuelle f de P dans P qui au point M de coordonnées $(x; y)$

fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -x\cos(2\alpha) - y\sin(2\alpha) + 2\cos(\alpha) \\ y' = -x\sin(2\alpha) + y\cos(2\alpha) + 2\sin(\alpha). \end{cases}.$$

1-) Déterminer l'ensemble des points double de f .

2-) En déduire la nature géométrique de f .

Exercice 3.3.7. Soit (ABC) un triangle équilatéral de sens direct du plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On donne $Z_A = 1 - i\sqrt{3}$ et $Z_B = 2$, l'affixe des points A et B respectivement.

1-) Déterminer l'affixe du centre G du triangle (ABC) ;

2-) Donner la nature, l'expression complexe et les éléments géométriques de l'application affine $f = t_{\vec{AC}} \circ S_{(AB)}$.

3.4 UTILISATION DES APPLICATIONS AFFINES

Exercice 3.4.1. Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A de coordonnées $(0; 1)$ et le cercle (C) de centre A et de rayon 1. Soit B un point de l'axe des abscisses, distinct de O . Soit (C') le cercle de centre B passant par A .

1-) On appelle ψ la mesure de l'angle $(\vec{OA}; \vec{OB})$, appartenant à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Exprimer en fonction de l'abscisse de B et le rayon du cercle (C') .

2-) a) Déterminer les deux homothéties qui transforment (C) en (C') : on déterminera le rapport et les coordonnées du centre de chacune de ces homothéties ;

b) Montrer que l'ensemble des centres de ces homothéties, lorsque B parcourt l'axe des abscisses (en restant distinct de O), est inclus dans une parabole que l'on demande de construire.

Exercice 3.4.2. Soient $A; B; C$ trois points distincts et non alignés du plan (P) , Soit a un réel. On considère l'application f_a qui à tout point M de (P) associe le point M' de (P) tel que : $\vec{MM'} = a\vec{MA} + a\vec{MB} - \vec{MC}$.

1-) Déterminer a pour que f_a soit une translation, dont on précisera le vecteur. On note a_0 la valeur obtenue.

2-) a est différent de a_0 dans toute la suite de l'exercice.

3.4 UTILISATION DES APPLICATIONS AFFINES

- a) Montrer que f_a admet un seul point invariant, noté Ω_a ;
 - b) Déterminer et représenter l'ensemble des points Ω_a , lorsque a décrit $\mathbb{R} \setminus \{a_0\}$.
- 3-) Montrer que, si plus a est distinct de 1, f_a est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques. Que peut-on dire de f_1 ?

Exercice 3.4.3. On donne deux points distincts A et B du plan affine et un réel k non nul. Soit M_1 l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport k ; soit M' le barycentre des points B et M_1 affectés respectivement des coefficients α et 1, α étant un réel distinct de -1 . Soit f l'application qui à tout point M du plan affine associe M' .

- 1-) Montrer que pour tout point M du plan affine on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$;
- 2-) Montrer que si $k = \alpha + 1$ alors f est une translation dont on déterminera le vecteur ;
- 3-) Montrer que si $k \neq \alpha + 1$, il existe un unique point invariant G par f .

Montrer alors que f est une homothétie de centre G dont on définira le rapport.

Exercice 3.4.4. Soit k un réel différent de 0 et de 1. On considère trois points A , B et C , deux à deux distincts, tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et les cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AC]$. Une droite Δ non perpendiculaire à (AB) et distincte de (AB) , passant par A , recoupe les cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement en M et N .

- 1-) a) Quelle est la position relative de droites (BM) et (CN) ?
b) Pour quelle valeur de k les droites (BN) et (CM) sont-elles parallèles ?
- 2-) On suppose désormais k fixé et différent de -1 . Soit P le point d'intersection des droites (BN) et (CM) .
a) Soit h l'homothétie de centre P telle que $h(B) = N$. Démontrer que $h(M) = C$.
Calculer le rapport de l'homothétie h en fonction du réel k (on pourra se servir des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{NC}$).
b) Déterminer le réel α tel que : $\overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{BN}$. Quel est le lieu géométrique du point P lorsque Δ varie ? En se plaçant dans le cas où $k = 2$ et où la distance AB est égale à 6cm, donner les éléments géométriques remarquables du lieu géométrique L de P , et faire une figure soignée.

Exercice 3.4.5. On donne trois droites D , D' et D'' concourantes en A . A tout point M de D , on associe le point M_1 de D' tel que (MM_1) soit parallèle à D'' , puis le point M_2 de D'' tel que (M_1M_2) soit parallèle à D .

3.5 COMPOSITION DES APPLICATIONS AFFINES

- a) Peut-on déterminer une direction d telle que, pour tout M de D , la droite de direction d passant par M_2 coupe D au milieu de $(A; M)$?
- b) Question analogue, mais M_1 est défini sur D' par $(MM_1) \in d'$, d' étant une direction donnée. La direction d dépend-elle de d' ?
- c) Construire une figure où les directions d et d' sont les mêmes. (On pourra se donner D , D' , puis construire D'' pour obtenir la figure voulue).

Exercice 3.4.6. Soit un parallélogramme $ABCD$ et un point I non situé sur les côtés du parallélogramme.

Soit $\{E\}$ l'intersection des droites (IB) et (CD) .

Soit $\{F\}$ l'intersection des droites (IB) et (AD) .

Soit $\{G\}$ l'intersection des droites (ID) et (BC) .

Soit $\{H\}$ l'intersection des droites (ID) et (AB) .

- a) Montrer que (FH) et (GE) sont parallèles ;
- b) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h qui transforme E en F ;
- c) Montrer que I , C , C' sont alignés en utilisant h .

Exercice 3.4.7. On donne un triangle ABC . Soit P un point de la droite (BC) , Q un point de la droite (CA) et R un point de la droite (AB) . Ces points P , Q , R sont distincts de A , B et C .

1-) Montrer que P , Q , R sont alignés si et seulement si, $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

2-) Montrer que (PA) , (QB) , (RC) sont parallèles si et seulement si, $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.

3.5 COMPOSITION DES APPLICATIONS AFFINES

Exercice 3.5.1. Soient A , M , O , I quatre points du plan affine.

- 1-) Construire les points A' et M' images respectives des points M et A par le symétrique de centre O (S_O) ;
- 2-) Construire les points A'' et M'' images respectives des points M' et A' par le symétrique de centre I (S_I) ;
- 3-) Montrer que les segments $[AM'']$ et $[A''M]$ ont le même milieu, et $\overrightarrow{AA''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{MM''}$;

4-) Reconnaître la nature des applications affines $S_O \circ S_I$ et $S_I \circ S_O$.

Exercice 3.5.2. Démontrer que :

- 1-) La composée de deux symétries centrales (ou de deux translations) est une translation ;
- 2-) La composée d'une translation et d'une symétrie centrale est une symétrie centrale ;
- 3-) Les compositions précédentes sont-elles commutatives ?
- 4-) Que peut-on dire de la composée d'une suite de transformations qui sont, soit des translations, soit des symétries centrales ?

Exercice 3.5.3. Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application affine f qui à tout point M de P , de coordonnées x et y , associe la point M'

de coordonnées x' et y' données par :
$$\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = -2x + 4y - 1 \end{cases}.$$

- 1-) Déterminer l'ensemble des points invariants par f ;
- 2-) Montrer que l'image de P par f est une droite D ;
- 3-) Montrer que $f = h \circ p$, où h est une homothétie qu'on déterminera et p la projection orthogonale sur la droite D .

Exercice 3.5.4. Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1-) On considère l'application affine f qui à tout point M de P , de coordonnées x et y , associe la point M_0 de coordonnées x' et y' données par :
$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

- a) Montrer que, pour tout point M , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant ;
- b) Étudier l'ensemble des points invariants par f ;
- c) Reconnaître la nature de l'application affine f .

- 2-) Soit g l'application affine de P dans lui-même qui, au point $M(x; y)$, associe le point $M''(x''; y'')$ défini par :
$$\begin{cases} x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

- a) Montrer que g peut s'écrire $h \circ f$ où h est une application de P dans lui-même que l'on précisera ;
- b) Sans calcul, vérifier que : $h \circ f = f \circ h$.

3.6 RECHERCHES

Exercice 3.5.5. (P) désigne un plan affine rapporté à un repère. Soit $a \in \mathbb{R}$. considérons l'application affine $f_a : P \longrightarrow P$ qui au point $M(x; y) \longmapsto M'(x'; y')$ telle que :

$$\begin{cases} x' = ax + a - 1 \\ y' = (3a - 1)x + (1 - 2a)y + 2 \end{cases}.$$

- 1-) Montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle f_a est une homothétie, dont on précisera le centre et la rapport ;
- 2-) Existe-t-il a tel que f_a soit involutive ? Montrer qu'alors f_a est une symétrie que l'on précisera ;
- 3-) Déterminer avec précision $f_a(P)$ suivant les valeurs de a .
On suppose $a = 0$. Soit t la translation de vecteur $3\vec{j}$.
Montrer qu'il existe une projection p que l'on déterminera telle que : $f_0 = t \circ p = p \circ t$.

3.6 RECHERCHES

Exercice 3.6.1. On donne un parallélogramme $ABCD$.

- a) I étant un point quelconque de la diagonale $[BD]$, une droite Δ passant par I coupe (AB) en E et (CD) en F . Une autre droite Δ' passant par I coupe (BC) en G et (DA) en H . Montrer que (EG) est parallèle à (HF) ;
- b) Une droite δ coupe (AD) en H' et (CD) en F' . Une droite δ' parallèle à δ coupe AB en E' et BC en G' . Montrer que les droites $(E'F')$ et $(G'H')$ se coupent en général sur la diagonale $[BD]$.

Exercice 3.6.2. $C_1, C_2, \dots, C_n, A, B$ désignent $n+2$ points (par exemple $n = 3$ ou $n = 4$).

- a) Construire les symétriques respectifs A_1, B_1 de B, A par rapport à C_1 , puis les symétriques A_2, B_2 de B_1, A_1 par rapport à C_2 , etc... enfin les symétriques A_n, B_n de B_{n-1}, A_{n-1} par rapport à C_n ;
- b) Peut-on trouver un point C qui soit simultanément le milieu de $(A; B_n)$ et de $(B; A_n)$?

Commentaires : A l'occasion de la construction de parallélogrammes, il s'agit d'expérimenter les propriétés de la symétrie centrale, de la relation d'équipollence de bipoints et de la notion de translation. On remarquera l'importance de la parité de n . Cette manipulation pourra se prolonger par une investigation libre : les élèves sont invités à se poser des questions à propos de ce dessin et à ajouter de nouveaux éléments à la figure.

Exercice 3.6.3. Soit le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application ponctuelle f de P dans P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = k(x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha)) + 1 \\ y' = k(x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha)) + 1 \end{cases}, \text{ où } k \text{ et } \alpha \text{ sont les constantes données (on suppose } k > 0 \text{ et } 0 < \alpha < 2\pi).$$

PARTIE A

1-) Étudier suivant les valeurs de k et de α l'ensemble des points invariants par f .

2-) Cet ensemble peut-il être une droite ? peut-il être vide ?

PARTIE B

On suppose maintenant d'étudier f dans le cas où $k = 1$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

1-) Quel est l'ensemble des points invariants par f ?

2-) a) Quelle est l'image par f de la droite dont d'équation est : $x - \sqrt{3}y = 0$?

b) Quelle est l'image Δ' par f de la droite Δ passant par le point $I(\frac{3+\sqrt{2}}{8}; \frac{1+\sqrt{2}}{8})$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; \sqrt{3})$? Former les équations de Δ et de Δ' .

3-) On considère l'application linéaire ϕ associée à f .

a) Démontrer que l'application linéaire ϕ est une bijection du plan vectoriel $\vec{P}$ associé à $\vec{P}$ dans lui même ; étudier $\phi \circ \phi$.

b) - Démontrer qu'il existe deux droites vectorielles globalement invariant par ϕ ;

- Démontrer que $\vec{e}_1(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ est une base normée de l'une de ces droites (que l'on appellera (D_1)) ;

- Déterminer une base normée $\vec{e}_2(b; c)$ de l'autre droite (que l'on appellera (D_2)), avec $b > 0$.

c) - Quelles sont les transformés par ϕ respectivement des vecteurs de (D_1) et de (D_2) ?

- Écrire dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la matrice de ϕ ;

- En déduire l'expression analytique de f dans le plan P rapporté cette fois au repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

d) Démontrer que f est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite que l'on précisera et une translation dont le vecteur est colinéaire à la direction de l'axe de symétrie.

RÉFLEXIONS PÉDAGOGIQUES SUR LA NOTION DE MARQUE D'UNE APPLICATION AFFINE DU PLAN

4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre illustre, grâce à des exemples précis, une conception active de la pédagogie des mathématiques. Il a été inspiré des travaux *M.SANGARÉ*([\[2\]](#)). Pour l'écrire, on a constamment imaginé et observé de jeunes élèves aux prises avec certains exercices de mathématiques proposés sur les applications affines, et on a relevé plusieurs difficultés rencontrées par ces élèves. Nous pouvons donc se poser la question à savoir : quelle est la méthode la plus appropriée pour la résolution de ces types d'exercices ? Nous établissons premièrement les résultats d'une enquête menée sur les difficultés de résoudre certains exercices sur les applications affines du plan, après nous construisons une séquence d'enseignement sur la notion de "marque d'une application affine du plan", et pour terminer le chapitre nous proposons une classification et une résolution de quelques types d'exercices qu'on peut résoudre en utilisant les propriétés de cette notion. Nous souhaitons dans cette réflexion donner d'autres approches de résolution des exercices sur les application affines.

4.2 ORIGINE ET MOTIVATIONS

La situation qui est à l'origine de cette expérience dans une classe de terminale scientifique est relative à l'élément d'enseignement intitulé, " Géométrie plane ". Elle est libellée de la façon suivante :

Activité : Le triangle ABC est isocèle en A. La rotation d'angle représenté par θ trans-

4.2 ORIGINE ET MOTIVATIONS

forme ABC en XYZ dans cet ordre. Ce triangle-image a été effacé sauf le point X.

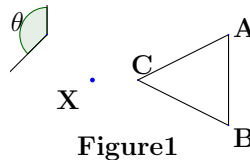


Figure1

Peux-tu reconstruire le triangle XYZ? Explique ta construction.

On vous demande d'effectuer les tâches suivantes :

(T_1) : Résoudre l'exercice; on décrira à chaque fois la technique de construction et les propriétés géométriques utilisées dans chacune de ces constructions.

(T_2) : On suppose que l'utilisation du centre de la rotation considérée n'est pas autorisée pour la construction du triangle XYZ. Pouvez-vous identifier deux points possibles de blocage dans la résolution de cet exercice? Justifiez à chaque fois votre réponse.

4.2.1 Objectifs et Stratégies de résolution de l'activité

a-) Objectifs :

L'objectif de l'activité était double : il s'agissait d'abord de tester les compétences des élèves dans une tâche de construction géométrique à l'aide d'instruments, puis les inciter lorsque cela est nécessaire, à utiliser les propriétés de conservation pour construire le triangle image XYZ.

b-) Stratégies de résolution de l'activité :

Deux stratégies de résolution notées respectivement (S_1) et (S_2) sont proposées :

- La stratégie (S_1) est fondée sur la détermination préalable du centre de la rotation. La construction des points Y et Z s'effectue par des techniques utilisant uniquement le centre et l'angle de la rotation en jeu.
- La stratégie (S_2) n'utilise pas le centre de la rotation, elle se fonde uniquement sur les autres propriétés de conservation de la rotation (distance, angle orientée, etc. ...).

4.2.2 Synthèse des résultats de l'activité

a-) Résumé des comportements des élèves

Nous avons douze participants; les deux tâches ont été exécutées de façon individuelle. Les tableaux ci-dessous, donnent un résumé des types de réponses données respectivement

4.3 LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

à la tâche (T_1) et à la résolution de l'activité par la stratégie (S_2) dans la tâche (T_2).

(S_1)	(S_2)	Réponses Erronées
4	0	8

Tableau 1 (T_1)

(S_2)	Réponses Erronées	Pas de Réponse
2	5	5

Tableau 2 (T_2)

b-) Quelques difficultés révélées à l'issue de cette activité

L'analyse des résultats ci-dessus montrent que certaines connaissances géométriques et d'autres non géométriques nécessaires à la résolution de cet exercice, n'étaient pas disponibles chez la plupart de ces élèves.

- Les résultats de type « Pas de Réponse » du tableau 2 (T_2), sont dus essentiellement à l'échec des intéressés à construire par exemple, le point Y tel que $(\widehat{AB}, \widehat{XY}) = \theta$ sans utiliser le centre et l'angle de la rotation en jeu.

- Un second type de difficultés est relatif à l'utilisation des propriétés géométriques des applications (leur effet sur les longueurs, les angles, le parallélisme, l'orthogonalité, etc...) comme outils de construction de figures. Par exemple, « comment utiliser l'orientation de l'angle θ de la rotation en jeu pour anticiper sur la position du centre de rotation à partir de la figure par rapport aux deux demi-plans de frontière la droite (AX)? » Or, les programmes de terminale C ([6]) stipulent que : « l'on présentera quelques situations où interviennent les applications pour démontrer une propriété, construire une figure, rechercher un ensemble de points ». Nous avons aussi constaté, une assez bonne maîtrise des connaissances mathématiques exigibles sur le chapitre intitulé, " géométrie plane ". Cependant, le réinvestissement de ces acquis n'est effectif que dans le domaine de la géométrie analytique. Or ces élèves de classes sont appelés à acquérir les compétences telles que : formuler les propriétés géométriques d'une application affine, établir une classification des applications affines et caractériser une application affine.

4.3 LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

4.3.1 Présentation

Nous présentons la séquence, par une description des différentes situations de formation, par la formulation des objectifs visés et par un bref résumé des comportements

d'élèves. Rappelons que les élèves au nombre de douze, ont l'habitude de travailler selon une organisation suivante : travail individuel puis travail par petits groupes, ensuite bilan et enfin synthèse (ce qui est à retenir de la situation). Chaque groupe est composé de trois personnes.

4.3.2 Expérience 1 : Première rencontre avec la notion de marque

Définition 4.3.1. Nous appelons marque d'une application (f) , tout segment $[MM']$ qui joint un point M de la figure-objet à son transformé M' sur la figure-image.

a-) Énoncé :

Pour chacune des applications affines du plan enseignées en classe de terminale scientifique (projection, symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie), effectuer les tâches ci-dessous :

- (1) Choisir et représenter le(s) élément(s) caractéristique(s) de chacune d'elles.
- (2) Dessinez un quadrilatère convexe non particulier et non aplati $ABDC$ puis construire son transformé $A'B'C'D'$ par celle-ci.
- (3) Construire les marques associées aux sommets A, B, C , et D du quadrilatère objet.
- (4) Formuler si possible les propriétés géométriques à partir des marques uniquement.

b-) Objectifs :

Nous avons deux principaux objectifs visés par cette situation :

- Faire construire par les élèves un modèle de application affine du plan au niveau de la classe de terminale scientifique à partir des marques.
- Leur faire établir les premières propriétés géométriques du modèle.

c-) Nos attentes

Les tâches (1) et (2) nous permettent d'avoir au niveau des élèves, un bref aperçu sur leur maîtrise des constructions géométriques avec les instruments, selon les pratiques habituelles de classe. En effet, la construction de l'image d'une figure donnée à partir de (ou des) élément(s) caractéristique(s) de l'application en jeu, est une tâche classique en début de lycée. Le travail en groupe permet à ceux qui ont des lacunes d'y remédier. Les tâches (3) et (4) ne sont pas familières, elles rompent avec les tâches (1) et (2). Cette rupture offre l'occasion d'initier le futur étudiant à l'élaboration d'objets d'enseignement. Une telle démarche permet à l'élève d'éviter de tomber, dans des pratiques tendant à appliquer strictement des recettes tirées de n'importe quelle ressource pédagogique. Ainsi

4.3 LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

on peut espérer sur les résultats ci-dessous.

Projection

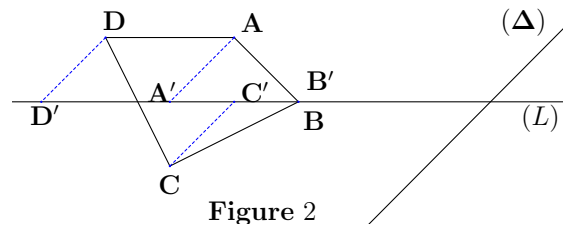


Figure 2

Il s'agit ici d'une projection sur la droite (L) parallèlement à la droite (Δ) (Figure 2). On peut formuler les propriétés suivantes pour une projection :

- 1-) Les droites-supports des marques sont parallèles.
- 2-) La direction de la projection est celle de la droite-support de toute marque non ponctuelle.

Symétrie Orthogonale

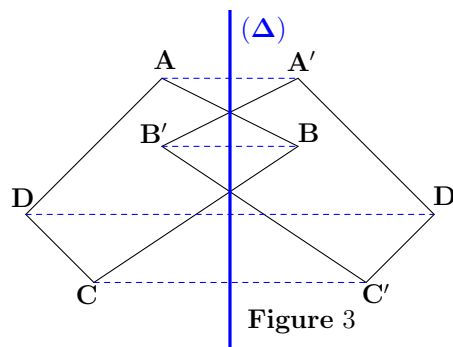


Figure 3

Il s'agit ici, d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) (Figure 3). On peut formuler certaines propriétés ci-dessous :

- 1-) Les droites-supports des marques sont parallèles.
- 2-) Les marques non ponctuelles ont même médiatrice qui est l'axe de symétrie.

Rotation

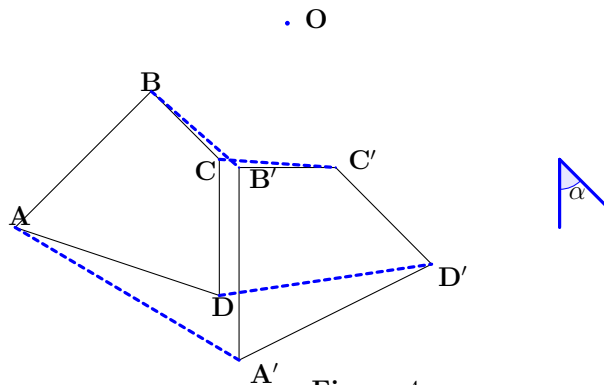


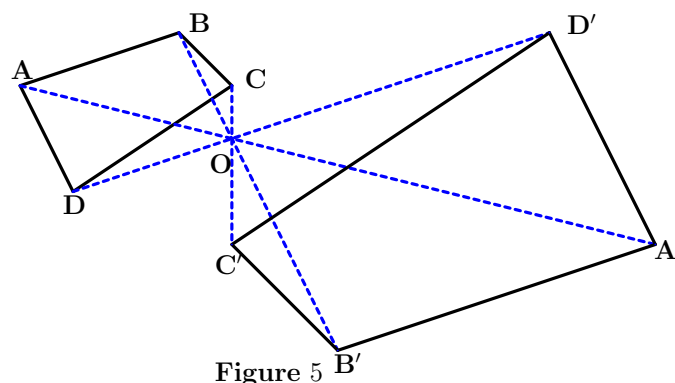
Figure 4

4.3 LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Le point O est le centre de la rotation en question (Figure 4). En observant la figure, il apparaît très peu d'indices sur les propriétés de l'application en jeu. Cependant, avec des tracés supplémentaires sur le modèle, (donc une reconfiguration au sens de Duval, [3]) nous pouvons émettre pour une rotation :

- 1-) Les médiatrices des marques sont concourantes.
- 2-) Le point commun des médiatrices des marques est le centre de rotation.
- 3-) L'angle de rotation est l'angle sous lequel on "voit toute marque non ponctuelle à partir du centre de rotation".

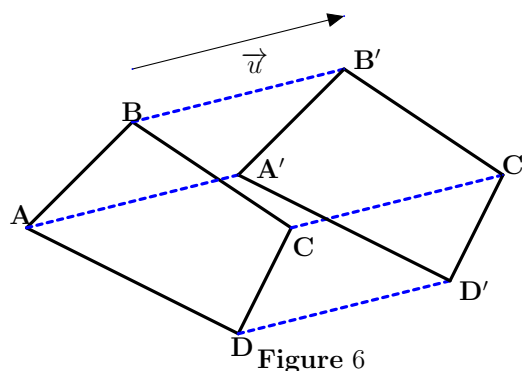
L'homothétie de rapport négatif



Nous avons ici une homothétie de rapport négatif (Figure 5). En observant cette figure, nous pouvons constater, les propriétés suivantes d'une homothétie de rapport négatif :

- 1-) Les marques sont concourantes.
- 2-) Le point commun à toutes les marques est le centre de l'homothétie.
- 3-) Le centre d'une homothétie de rapport négatif, partage en mesure algébrique, chaque marque dans le même rapport que celui de l'homothétie.

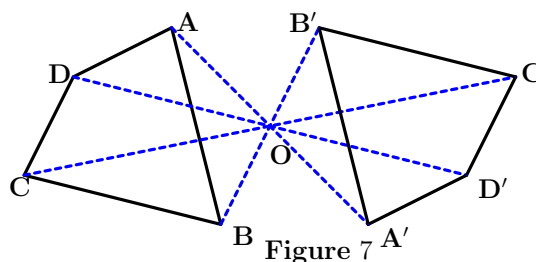
Translation



Nous avons une translation de vecteur $\vec{u}$ (Figure 6). En regardant la figure, nous pouvons émettre à partir des marques, les propriétés suivantes d'une translation de vecteur $\vec{u}$:

- 1-) Les marques sont parallèles.
- 2-) Les marques ont une même longueur égale à la norme du vecteur de translation $\vec{u}$.

Symétrie centrale



Soit O le centre de la symétrie (Figure 7). Après analyse de la figure, nous pouvons donner à partir des marques, les propriétés suivantes d'une symétrie de centre O :

- 1-) Les marques sont concourantes.
- 2-) Le point commun à toutes les marques est le centre de la symétrie centrale.
- 3-) Le centre de la symétrie centrale est le milieu de chaque marques.

d-) Un résumé des comportements d'élèves

Les résultats obtenus par les différents groupes ont été conformes dans l'ensemble à nos attentes à l'exception de deux cas. Le premier est relatif à la formulation des propriétés d'une homothétie de rapport positif : les marques sont très peu fonctionnelles alors que leurs droites-supports respectives le sont. Le second cas est lié à la rotation ; il faut apporter des modifications à la figure des marques par des tracés supplémentaires, pour faire remarquer certaines propriétés de la rotation. Ces deux types de lacune relèvent de notre point de vue du fait que les connaissances exigibles pour la conversion entre deux registres (ici figures et texte) ne sont pas disponibles ([II], p.54).

4.3.3 Expérience 2 : Classification de quelques applications affines

a-) Énoncé : On veut établir à partir de la notion de marque, une classification des six applications étudiées dans l'expérience 1. A cet effet deux variables sont retenues.

La première variable notée (V_1) est liée à la longueur des marques ; elle prend deux valeurs :

- ($V_{1,1}$) : " les marques ont même longueur " ;
- ($V_{1,2}$) : " les marques n'ont pas même longueur ".

La deuxième variable notée (V_2) est liée à la position relative des marques ; elle prend trois valeurs :

4.3 LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

- ($V_{2,1}$) : " les marques sont parallèles " ;
- ($V_{2,2}$) : " les marques sont concourantes " ;
- ($V_{2,3}$) : " les marques sont non parallèles et non concourantes " .

On vous demande d'établir cette classification sous forme de tableau.

b-) Objectifs :

Faire établir par les élèves une classification des applications affines considérées.

c-) Nos attentes

Les isométries sont considérées comme applications ponctuelles du plan dans lui-même ; ceci a comme conséquence l'abandon de tout usage des configurations géométriques usuelles au profit de techniques relevant de la géométrie analytique. Or ces techniques ne sont pas suffisamment maîtrisées par les élèves en début de lycée ; de plus, aucune autre méthode s'appuyant sur les figures ne leur est proposée. Aussi, le modèle des marques est une alternative pour combler ce vide : il offre la possibilité d'une classification fondée à la fois sur des propriétés spatiales (comme la perception visuelle de l'intersection ou non de marques) et sur des propriétés géométriques (comme l'égalité des longueurs de marques ou le parallélisme de leurs droites-soutiens ...). Le tableau ci-dessous propose un regroupement de ces applications selon les valeurs des deux variables retenues.

	$V_{1,1}$	$V_{1,2}$
$V_{2,1}$	Translation	Projection parallèle ; Symétrie orthogonale
$V_{2,2}$		Symétrie centrale ; Homothétie de rapport négatif
$V_{2,3}$		Rotation ; Homothétie de rapport positif

Tableau 3

En particulier, on peut déduire de ce tableau, une classification des isométries enseignées en terminale scientifique à savoir, la symétrie orthogonale, la symétrie centrale, la translation et la rotation : ces quatre isométries se distinguent les unes des autres à partir des marques puisque dans le tableau (Tableau 3), chacune occupe une et une seule cellule.

4.3.4 Expérience 3 : Caractérisation des isométries du plan

a-) Énoncé :

On se propose d'étudier en particulier les quatre isométries du plan enseignées (symétrie

orthogonale, symétrie centrale, translation et rotation) dans une classe de terminale scientifique, en utilisant uniquement le modèle des marques.

1-) Formuler une « propriété caractéristique » de chacune de ces isométries, en utilisant uniquement les marques, les droites ou les demi-droites supports des marques, à l'intention de vos camarades élèves en classe de terminale scientifique.

2-) Y-a-t-il un lien entre cette caractérisation des isométries du plan fondée sur le modèle des marques avec les connaissances apprises sur le cours relatif aux applications affines du plan. Si oui lequel ?

b-) Objectifs :

- Établir une caractérisation des isométries affines à partir des marques.
- Étudier l'existence d'un lien entre une caractérisation selon le modèle des marques, et les caractérisations possibles reçues en classe.

c-) Nos attentes

Les configurations liées au modèle des marques, pourraient susciter l'appréhension de nouvelles propriétés de la figure. Par exemple, lorsque f est une isométrie du plan, (X, Y, Z) un triplet de points non alignés transformé par f en le triplet (X', Y', Z') , alors la configuration géométrique obtenue par les trois marques $[XX']$, $[YY']$, $[ZZ']$ peut être caractéristique de l'isométrie en jeu. C'est ainsi qu'on pourrait énoncer les « propriétés caractéristiques » ci-dessous.

Propriété 4.3.1. *Soit (X, Y, Z) un triplet de points non alignés transformé en un triplet de points (X', Y', Z') par une isométrie inconnue f . Dire que :*

- i-) Les marques $[XX']$, $[YY']$ et $[ZZ']$ ont même médiatrice équivaut à dire que f est une symétrie orthogonale.*
- ii-) Les marques $[XX']$, $[YY']$ et $[ZZ']$ ont même milieu équivaut à dire que f est une symétrie centrale.*
- iii-) Les marques $[XX']$, $[YY']$ et $[ZZ']$ ont même longueur, que les demi-droites $[XX')$, $[YY')$, $[ZZ')$ sont parallèles et de même sens, équivaut à dire que f est une translation.*
- iv-) Les médiatrices des marques $[XX']$, $[YY']$ et $[ZZ']$ sont concourantes en un point I et que ces trois marques sont vues sous le même angle orienté θ , à partir de I (c'est-à-dire $\widehat{(X'I, X'X)} = \widehat{(Y'I, YY')} = \widehat{(Z'I, Z'Z)} = \frac{\pi-\theta}{2}$), équivaut à dire que f est une rotation.*

Ces « propriétés caractéristiques » peuvent être considérées comme des connaissances scolaires ; elles peuvent être admises ou vérifiées à l'aide des matériels et instruments scien-

4.4 RÉSOLUTION ET CLASSIFICATION DE QUELQUES EXERCICES AVEC LA NOTION DE MARQUES

tifique par les élèves d'une classe de terminale scientifique. Leur usage s'avère approprié dans des problèmes de reconnaissance d'isométries du plan enseignées à ce niveau scolaire.

4.4 RÉSOLUTION ET CLASSIFICATION DE QUELQUES EXERCICES AVEC LA NOTION DE MARQUES

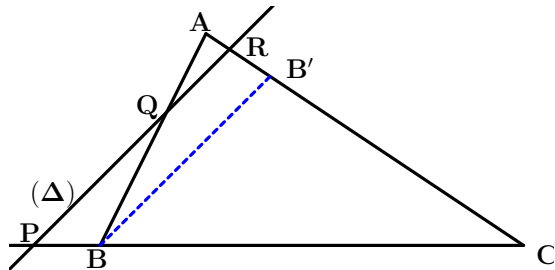
4.4.1 Résolution de quelques exercices

Activité :

Nous allons utiliser uniquement la propriété 1.3.1.iv pour résoudre le problème 1. Premièrement, traçons la médiatrice de la marque $[AX]$; et parce que les trois marques sont vues sous le même angle orienté θ à partir du centre de rotation O , on construit le point O tel que $(\widehat{XO}, \widehat{XA}) = \frac{\pi - \theta}{2}$. La détermination des deux autres points Y et Z se fait facilement connaissant le centre et l'angle de la rotation. On a ainsi reconstruit le triangle XYZ à partir de la notion de marque d'une application affine du plan.

Exercice 3.4.7 :

1-) Supposons les points P, Q, R alignés, calculons le produit : $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$.



Soit (Δ) la droite portant les points P, Q, R . D'après le tableau 3, considérons la projection p de la droite (BC) sur la droite (AC) suivant la direction de la droite (PQ) . Notons B' , l'image du point B par la projection p . Alors $B' \neq Q$.

On a $p(B) = B'$, $p(P) = Q$ et $p(C) = C$, on en déduit que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{QC}}$. (1)

Considérons aussi la projection q de la droite (AB) sur la droite (AC) suivant la direction de la droite (PQ) .

On a $q(B) = B'$, $q(A) = A$ et $q(R) = Q$, on en déduit que $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB'}}$. (2)

En multipliant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient : $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$

c'est-à-dire $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

4.4.2 Classification des types d'exercices

Types d'exercices	Style de questions posées
Constructions	• Détermination des éléments caractéristiques de l'application ; • Construction d'une image connaissant de l'application affine.
Démonstrations	• Prouver que les points sont alignés ; • Montrer que les droites sont parallèles ; • Établir les égalités de la forme : $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = \pm 1$.
Identifications	• Reconnaître l'application affine à partir d'une figure donnée.

4.5 CONCLUSION

Les résultats sont partiels, mais nous avons été convaincu qu'une maîtrise suffisante des mathématiques scolaire ne suffit pas pour exécuter les tâches pédagogiques du moins, celles liées à l'analyse des tâches. Nous sommes à présent conscient que le passage d'une géométrie académique ponctuelle, où les figures sont des parties anonymes du plan, à une géométrie du compas et de la règle s'appuyant sur des figures familières, constitue un élément pertinent de formation pour nos élèves. Par ailleurs, le décalage temporel dans l'exécution du cours intitulé, " Géométrie dans l'espace, Géométrie vectorielle et Géométrie affine " ne suffit pas, une étude sur d'éventuels liens entre leurs contenus respectifs nous paraît nécessaire. Notons enfin, que les tâches des élèves à analyser peuvent être construites à condition qu'elles soient conformes aux apprentissages visés par les programmes d'enseignement en vigueur. Le modèle des marques se situe dans cette perspective.

♣ CONCLUSION GÉNÉRALE ♣

Nous voici arrivé au terme de notre travail. Il était question pour nous de proposer premièrement une leçon complète sur la notion d'application affine du plan ; deuxièmement une série de trente exercices regroupée par centre d'intérêt et troisièmement une réflexion pédagogique sur la notion de marques d'une application affine du plan. Le contenu de ces chapitres, témoignent de tout la richesse de ce mémoire. L'un des objectifs était de proposer une méthode pour faciliter la résolution et la compréhension de certains exercices difficiles à résoudre par les élèves de classe de terminale scientifique ; la notion de marque est l'une des solutions les plus appropriées. nous avons aussi étudié les applications affines qui sont les applications qui conservent le barycentre et le coefficient de colinéarité. La présence de l'espace vectoriel sous-jacent permet d'associer à une telle application une application linéaire. Une question essentielle était alors l'existence de points fixes pour une application affine. En effet, en présence de points fixes, l'application affine est déterminée par sa partie linéaire : c'est essentiellement une application linéaire. C'est pourquoi on cherche toujours d'abord si une application affine possède un point fixe et dans ce cas on la comprend comme une application linéaire et on peut lui appliquer les techniques bien connues d'étude. C'est d'ailleurs essentiellement ce qu'on a fait dans le cas, des translations, des homothéties, des symétries, etc. . .

En perspective, on pourrait étudier l'impact de l'apprentissage des applications affines sur un espace affine sans connaître la structure de cet espace affine. on peut donc se poser la question à savoir : quelles sont les propriétés de cet espace affine ?

♣♣ Bibliographie ♣♣

- [1] DUVAL R., (2003). Décrire, visualiser ou raisonner : quels " apprentissages premiers " de l'activité mathématique ? Annales de Didactique et de Sciences cognitives, Volume 8/2003. IREM de Strasbourg.
- [2] SANGARÉ M. (2006). La marque d'une transformation géométrique : un exemple de modélisation didactique, Educação Matemática Pesquisa, Educ. Math. Pesqui, São Paulo, v.8, n.2, pp.225-266.
- [3] DUVAL R. (1995).Sémiosis et pensée humaine ? Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels, Peter Lang.
- [4] Koper, R. et Tattersall, C. (dir.). (2005). Learning design. A handbook on modelling and delivering networked education and training. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag.
- [5] Paquette, G. (2006). Introduction à la spécification IML-LD d'une perspective d'ingénierie pédagogique. [http ://www.idld.org/Methodology/tabid/174/Default.aspx](http://www.idld.org/Methodology/tabid/174/Default.aspx)
- [6] ARRETE N°53/D/43/MINEDUC/SG/IGP/ESG portant définition des programmes de mathématiques des classes du second cycle de l'enseignement secondairegénérale.
- [7] International Journal of Technologies in Higher Education (2007),4(2). WWW.profetic.org/revue.
- [8] SALIOU TOURE et les autres, Collection Inter Africaine de Mathématique Terminale (CIAM) SM, EDICEF, 11/2004.
- [9] CHARLES MVOMO OTAM et les autres, Majors en Mathématiques Terminales C-E, ASVA EDUCATION, Mars 2012.

PReNuM-AC

EQUATIONS DIFFERENTIELLES



Terminale D

Présenté par : Wolfen Hershey MADZOU Etudiant à
l'Ecole Normale Supérieure, Brazzaville, CONGO.

E-mail : wolfenmadzou@gmail.com / Contacts : +24206913-38-92

+24204474-16-21

Encadreurs :

MALONGA MOUNGABIO : Docteur en Didactique à l'Ecole Normale
Supérieure, Brazzaville CONGO.

MOUENE : Enseignant de maths au lycée, Brazzaville CONGO.

Objectifs

Objectif Général :

Réaliser les activités sur les équations différentielles.

Objectif spécifique :

Faire acquérir la technique de résolution des équations linéaires à coefficients constants avec ou sans second membre.

Objectifs opérationnels :

A la fin de la séance l'élève doit être capable :

- de restituer la définition d'une équation différentielle
 - d'identifier les équations différentielles du premier et du second ordre
 - de résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec ou sans second membre

Place du cours dans le programme

Ce cours, pas encore étudié en classe de première **D**, est le cours de mathématiques (Algèbre) en classe de terminale **D** (selon le programme du **CONGO-Brazzaville**). Il constitue un cours de découverte pour l'élève de terminale **D**, permettant d'aborder la notion sur les équations différentielles et d'identifier chaque type d'équations différentielles tout en les résolvant.

Répartition horaire

En situation enseignant-apprentissage, ce cours sera dispensé pendant 8 heures

Pré-requis

Avant d'aborder ce cours, l'élève devra être capable de :

1. Maîtriser la résolution des équations du second degré en utilisant le discriminant.
2. connaître les notions sur les dérivées 
3. Maîtriser le calcul et les propriétés sur les primitives et intégrales.

Déroulement prév

Nous recommandons profondément à l'élève travaillant de façon indépendant de commencer par traiter, pour chaque partie du cours, l'activité préparatoire proposée avant d'étudier le cours et résoudre les exercices qui y correspondent. Ainsi l'élève devra suivre le schéma :

Activités préparatoires $\longrightarrow$ **Cours** $\longrightarrow$ **Exercices.**

Un peu d'histoire

La notion d'équation différentielle apparaissait chez les mathématiciens à la fin du XVII^{ème} siècle. Encouragé par **Huygens** à étudier les mathématiques, **Leibniz** sera l'inventeur en **1686**, en même temps que **Newton**, du calcul différentielle et intégral (Nova methodus pro maximis et minimis 1684-1686)

A cette époque les equations différentielles s'introduisent en mathématiques par le biais de problèmes d'origines mécanique ou géométrique, comme par exemple : Mouvement du pendule circulaire, problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation Newtonienne, problème de l'étude de mouvement de corps "élastiques" (tiges, ressorts, cordes vibrantes), problème de l'équation de la courbe (appelée chaînette) décrivant la forme prise par une corde, suspendue aux deux extrémités et soumis à son propre poids.

Vers **1700**, beaucoup de ces problèmes étaient déjà partiellement ou totalement résolus et quelques méthodes de résolution mises au point. Ensuite les mathématiciens se sont progressivement intéressés à des classes de plus en plus larges d'équations différentielles.

Assez curieusement, les equations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre, qui apparaissent maintenant comme les plus simples, ne furent résolues qu'en **1739** par **Euler**.

Il ne faut pas oublier que pour les mathématiciens de cette époque, le maniement de la fonction exponentielle n'était pas encore familier. Dans la phase que nous venons de décrire, les mathématiciens s'attachent au calcul effectif d'une solution.

Vers **1870** **Fuchs**, puis **Pointcaré**, vont inaugurer un nouveau champ de recherche. Le calcul effectif des solution est la plupart du temps

impossible, mais on peut chercher à déduire de l'examen a priori de l'équation les propriétés des solutions.

Enfin, le développement moderne des moyens de calcul ajoute à cette panoplie la possibilité de calculer numériquement, dans un temps raisonnable, des solutions approchées très précises d'équations différentielles ou d'explorer les propriétés que l'on peut attendre des solutions.

Introduction

Ce chapitre traite des équations différentielles du premier et second ordre à coefficients constants avec ou sans second membre. Il permet de démontrer certains résultats de physique que l'élève a appris à utiliser. Son champ d'application s'étend également à la géométrie, la démographie, la chimie, la biologie etc...

Les équations différentielles jouent un rôle important dans l'étude de certains phénomènes physiques. La variable étant en générale le temps, désigne par t , on pourra obtenir des équations de la forme $ax' + bx = 0$ où $x \longmapsto x(t)$ est la fonction inconnue. Selon les circonstances et parfois pour de simples raisons tenant aux grandeurs en jeu, l'inconnue sera désigne par θ (température) ou i (intensité d'un courant) ou q (quantité d'électricité) ou encore x (l'élongation d'un point matériel) voir (T.P 1 et T.P 2), etc...

Table des matières

1	EQUATIONS	DIFFERENTIELLES	10
1.1	Définition :		10
1.1.1	Ordre d'une équation différentielle		10
1.1.2	Coefficient d'une équation différentielle		11
1.1.3	Équation différentielle homogène		11
1.2	Résolution ou intégration d'une équation différentielle		11
1.2.1	Solution générale :		12
1.2.2	Solution particulière ou intégrale particulière		12
1.2.3	Solutions linéairement indépendantes :		12
1.3	Équations différentielles linéaires du premier ordre		12
1.3.1	Équations du type $y' = f(x)$		12
1.3.2	Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre (homogène)		13
1.4	Équation différentielle linéaire du deuxième ordre :		15
1.4.1	Équation du type $y'' = f(x)$		15
1.4.2	Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre (c'est à dire homogène)		16
1.4.3	Équations du type $y'' - \omega^2 y = 0$		17
1.4.4	Équations du type $y'' + \omega^2 y = 0$		18
1.5	Équation différentielle linéaire avec second membre		19
1.6	Exercices d'applications		19
1.7	Travaux Pratiques		21
1.8	Correction des Travaux pratique 		23

Activités préparatoires

Activités 1 :

Soit les fonctions $f : x \mapsto e^{4x}$ et $g : x \mapsto \sin 5x$

1. Calculer la dérivée f' de f et démontrer que, pour tout nombre réel x
on a : $f'(x) - 4f(x) = 0$
2. Calculer la dérivée seconde g'' de g et démontrer que, pour tout nombre réel x , on a : $g''(x) + 25g(x) = 0$

Activités 2 :

On considère la fonction $h : x \mapsto e^x(\cos x + \sin x)$

1. Calculer les dérivées h' et h'' de h
2. Trouver l'expression de $h'(x) - h(x)$
3. En utilisant l'expression de la dérivée h'' de h , établir la relation entre h et ses dérivées successives h' et h'' .

Solution 1 :

1. $f'(x) = 4e^{4x}$.

Pour tout nombre réel x , on a :

$$\begin{aligned} f'(x) - 4f(x) &= 4e^{4x} - 4e^{4x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $g'(x) = 5 \cos 5x \implies g''(x) = -25 \sin 5x$.

Pour tout nombre réel x , on a :

$$\begin{aligned}g''(x) + 25g(x) &= -25 \sin 5x + 25 \sin 5x \\ &= 0\end{aligned}$$

Solution 2 :

$$h(x) = e^x(\cos x + \sin x)$$

1. Calcul des dérivées :

En utilisant la formule de calcul $(u.v)' = u'v + v'u$, on trouve :

$$h'(x) = 2e^x \cos x \text{ et } h''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

2. Expression de $h'(x) - h(x)$

$$\begin{aligned}h'(x) - h(x) &= 2e^x \cos x - e^x(\cos x + \sin x) \\ &= 2e^x \cos x - e^x \cos x - e^x \sin x \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x \\ &= e^x(\cos x - \sin x)\end{aligned}$$

$$\text{D'où } h'(x) - h(x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

3. Relation entre h et ses dérivées successives h' et h'' .

$$\begin{aligned}\text{On a : } h''(x) &= 2e^x(\cos x - \sin x) \\ \frac{1}{2}h''(x) &= e^x(\cos x - \sin x) \\ \frac{1}{2}h''(x) &= h'(x) - h(x) \\ h''(x) &= 2h'(x) - 2h(x) \\ h''(x) - 2h'(x) + 2h(x) &= 0\end{aligned}$$

On obtient donc la relation $h''(x) - 2h'(x) + 2h(x) = 0$

Commentaires :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est liée à sa dérivée f' par la relation $f' - 4f = 0$.
On dit que f est solution de l'équation $y' - 4y = 0$ (1)
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est liée à sa dérivée g' par la relation $g'' + 25g = 0$
On dit que g est solution de l'équation $y'' + 25y = 0$ (2)
3. La La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est liée aux dérivées h' et h'' par la relation $g'' - 2g' + 2g = 0$
On dit que g est solution de l'équation $y'' - 2y' + 2y = 0$ (3)
4. Les équations (1), (2) et (3) sont appelées **équations différentielles** d'ordre respectifs 1 et 2 dont l'inconnue est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
5. **relation entre h et ses dérivées successives h' et h''** 
6. Le vocable (ordre 1 et ordre 2) est en rapport avec **l'ordre de dérivation** de l'inconnue 

Synthèse :

On retient de cette activité préparatoire les définitions suivantes :

- Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives.
- L'ordre d'une équation différentielle dépend de celui de ses dérivées successives.

Chapitre 1

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1.1 Définition :

Une équation différentielle est une équation liant une fonction inconnue (généralement notée y ou z ou autres lettres), sa variable et certaines de ses dérivées successives : $(y'; y'' \dots y^n)$.

Exemples 1.1.1.

Soit y une fonction de variable x .

1. $y'' - 3y' - 3x = 0$;
2. $y'' + 3 \cos x - 1 = 0$;
3. $x^2 y' + 4y = e^x$;
4. $y^3 - 4xy'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$;
5. $y' = \sin x$

1.1.1 Ordre d'une équation différentielle

L'ordre d'une équation différentielle est le plus grand ordre de la dérivée intervenant dans cette équation.

Exemples 1.1.2.

1. $y'' - 4y' + 7y = 0$; équation d'ordre 2
2. $2x^2 y' - 8y = e^x$; équation d'ordre 1
3. $y''' - y = \cos x$; équation d'ordre 3

1.1.2 Coefficient d'une équation différentielle

Ce sont les coefficients de la fonction et de ses dérivées successives contenus dans cette équation.

Si un coefficient d'une équation différentielle ne dépend pas de la variable alors on dit qu'il est **constant**.

Exemples 1.1.3.

1. $5y' - y = 0$ (1)

2. $y'' - 3y' - 8y = 0$ (2)

3. $x^2y' - \frac{1}{2}y = 0$ (3)

4. $e^{(x+1)}y'' = e^x$ (4)

Les équations (1) et (2) sont à coefficients constants mais (3) et (4) ne le sont pas.

1.1.3 Équation différentielle homogène

C'est une équation où le second membre est nul.



Exemples 1.1.4.

$$y'' - 3y' + 2y = 0; \quad x^2y' - \frac{1}{2}y = 0$$

Contre exemple :

Les équations différentielles : $y'' - e^xy + x - 1 = 0$ et $y' - 4y = 0$ ne sont pas homogènes.



N.B : Une équation différentielle dont le second membre est non nul est appelée équation **non homogène** (ou sans second membre).

1.2 Résolution ou intégration d'une équation différentielle

Résoudre ou intégrer une équation différentielle, consiste à déterminer l'ensemble des fonctions solutions.

Pour une équation différentielle, il y a deux type de solutions ou intégrales.

1.2.1 Solution générale :

On appelle solution générale ou intégrale d'une équation différentielle, la fonction vérifiant cette équation.

1.2.2 Solution particulière ou intégrale particulière

C'est une solution que l'on détermine à partir de la solution générale en tenant compte de certaines conditions fixées appelées **conditions initiales**.

1.2.3 Solutions linéairement indépendantes

Deux solutions y_1 et y_2 d'une équation différentielle sont linéairement indépendantes si le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ n'est pas constant.

1.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.3.1 Équations du type $y' = f(x)$

Exemples 1.3.1.

Résoudre l'équation différentielle : $e^{(x+1)}y' = e^x$

Solution :

$$\begin{aligned}e^{(x+1)}y' &= e^x \\y' &= \frac{e^x}{e^{x+1}} \\&= e^x \cdot e^{-(x+1)} \\&= e^x \cdot e^{-x} \cdot e^{-1} \\&= e^{-1} \\y' &= \frac{1}{e} \\\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e} \\dy &= \frac{1}{e} dx \\\int dy &= \frac{1}{e} \int dx \\y &= \frac{1}{e}x + c \quad \square\end{aligned}$$

1.3.2 Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre (homogène)

Forme générale :

C'est une équation différentielle de la forme : $ay' + by = 0$
 $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

Résolution :

Il s'agit de déterminer la fonction inconnue y .

- La fonction nulle est solution.
- Si $y \neq 0$ alors on a :

$$\begin{aligned}ay' + by = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \text{ or } y' = \frac{dy}{dx} \square \\ \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{b}{a} dx \\ \ln|y| &= -\frac{b}{a}x + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|y| &= e^{-\frac{b}{a}x+k_1} \\
|y| &= e^{k_1}e^{-\frac{b}{a}x} \\
y &= \pm e^{k_1}e^{-\frac{b}{a}x} \text{ en posant } c = e^{k_1}
\end{aligned}$$

La solution générale est donc $y_h : x \longmapsto ce^{-\frac{b}{a}x} \quad (c \in \mathbb{R})$

ou $y = ce^{-\frac{b}{a}x} \quad (c \in \mathbb{R})$

La présence du réel c , traduit qu'il s'agit d'une solution générale.

Application :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 4y = 0$ (E)
2. $3y' + 2y = 0$ (E')
3. $y \ln 5 - y' = 0$ (E'')

Déterminer la solution f de (E) dont la courbe passe par le point $A(0;1)$

Déterminer la solution particulière g de (E') telle que : $g'(1) = 1$

Solution :

Résolution des équations :

1. $y' - 4y = 0$ (E) forme $ay' + by = 0$ avec $a=1$ et $b=-4$

la solution de (E) est de la forme $y = ce^{-\frac{b}{a}x}$ c'est à dire $y = ce^{4x}$

2. $3y' + 2y = 0$ (E') forme $ay' + by = 0$ avec $a=3$ et $b=2$

la solution de (E') est de la forme $y = ce^{-\frac{b}{a}x}$ c'est à dire $y = ce^{-\frac{2}{3}x}$

3. $y \ln 5 - y' = 0$ (E'') forme $ay' + by = 0$ avec $a=-1$ et $b=\ln 5$

la solution de (E'') est de la forme $y = ce^{-\frac{b}{a}x}$ c'est à dire $y = ce^{x \ln 5}$

la solution f de (E) dont la courbe passe par le point $A(0;1)$

On a : $f(x) = ce^{4x} \implies f(0) = c = 1$ d'où $f(x) = e^{4x}$

solution particulière g de (E') telle que : $g'(1) = 1$

On a : $g(x) = ce^{-\frac{2}{3}x} \implies g'(x) = -\frac{2}{3}ce^{-\frac{2}{3}x}$ et $g'(1) = -\frac{2}{3}c = 1$

donc $c = -\frac{3}{2}$ et par conséquent $g(x) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x}$

Méthode  $y' - 4y = 0$ (E)

$$\begin{aligned}y' - 4y &= 0 \\y' &= 4y \\\frac{dy}{dx} &= 4y \\dy &= 4ydx \\\frac{dy}{y} &= 4dx \\\int \frac{dy}{y} &= 4 \int dx \\\ln|y| &= 4x + c \\|y| &= e^{4x+c} \\|y| &= e^c \cdot e^{4x} \\y &= \pm e^c \cdot e^{4x}\end{aligned}$$

En posant $C = \pm e^c$, on trouve $y = Ce^{4x}$

1.4 Équation différentielle linéaire du deuxième ordre :

1.4.1 Équation du type $y'' = f(x)$

Exemples 1.4.1.

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - e^x = -\sin x + x$

Solution :

Résolution de l'équation

$$\begin{aligned}y'' - e^x &= -\sin x + x \\y'' &= e^x - \sin x + x \\\frac{dy'}{dx} &= e^x - \sin x + x \\dy' &= (e^x - \sin x + x)dx \\\int dy' &= \int (e^x - \sin x + x)dx \\y' &= e^x + \cos x + \frac{x^2}{2} + c \\\frac{dy}{dx} &= e^x + \cos x + \frac{x^2}{2} + c \\dy &= (e^x + \cos x + \frac{x^2}{2} + c)dx \\\int dy &= \int (e^x + \cos x + \frac{x^2}{2} + c)dx \\y &= e^x + \sin x + \frac{x^3}{6} + c(x) + k\end{aligned}$$

1.4.2 Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre (c'est à dire homogène)

Forme générale :

C'est une équation de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ (E) où $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$

Résolution :

- On détermine l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (E) comme suit :

Soit la fonction $y : x \mapsto e^{rx}$ solution de cette équation, on a :

$$y(x) = e^{rx}, y'(x) = re^{rx} \text{ et } y''(x) = r^2e^{rx}$$

alors l'équation (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ devient

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \text{ or } \forall x \in \mathbb{R}, e^{rx} > 0$$

On obtient l'équation caractéristique $\boxed{ar^2 + br + c = 0}$

- On résout l'équation caractéristique en calculant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (ou le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$).

1^{er} cas : Si $\Delta > 0$ (ou $\Delta' > 0$)

l'équation caractéristique admet pour solutions : deux racines distinctes $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (ou $r_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $r_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$ avec $b' = \frac{b}{2}$), alors la forme générale des solutions sur $\mathbb{R}$ de $ay'' + by' + cy = 0$ est :

$$\boxed{y = f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

2^{em} cas : Si $\Delta = 0$ (ou $\Delta' = 0$)

l'équation caractéristique admet pour solutions : une racine réelle double $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ (ou $r = r_1 = r_2 = -\frac{b'}{a}$), alors la forme générale des solutions sur $\mathbb{R}$ de $ay'' + by' + cy = 0$ est :

$$\boxed{y = f(x) = (Ax + B)e^{rx}} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

3^{em} cas : Si $\Delta < 0$ (ou $\Delta' < 0$)

l'équation caractéristique admet pour solutions : deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors la forme générale des solutions sur $\mathbb{R}$ de $ay'' + by' + cy = 0$ est :

$$\boxed{y = f(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Si de plus une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ est fixée, avec $x_0 \in I$, y_0 et $y_1 \in \mathbb{K}$ alors la valeur de la constante est fixée. L'équation avec condition initiale possède une unique solution.

1.4.3 Équations du type $y'' - \omega^2 y = 0$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$
($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$)

1.4.4 Équations du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$ ($A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$)

Exercice :

1. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :
 - (a) $y'' + y' + y = 0$
 - (b) $6y'' + y' - y = 0$
 - (c) $25y'' + 60y' + 36y = 0$
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$ telle que la courbe représentant f dans un repère orthonormal admette en $P(0, 2)$ une tangente de coefficient directeur 1.

Solution :

Résolution des équations :

1. $y'' + y' + y = 0$,
Équation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$, $\Delta = -3 = 3i^2$ et
 $r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ici $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La solution est de la forme
 $y = f(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ c'est à dire
 $y = f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x), (A, B) \in \mathbb{R}^2$
2. $6y'' + y' - y = 0$,
Équation caractéristique : $6r^2 + r - 1 = 0$, $\Delta = 25 = 5^2$ et
 $r_1 = -\frac{1}{2}$; $r_2 = \frac{1}{3}$. La solution est de la forme
 $y = f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ ($A, B \in \mathbb{R}^2$) c'est à dire
 $y = f(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^{\frac{1}{3}x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2$
3. $25y'' + 60y' + 36y = 0$,
Équation caractéristique : $25r^2 + 60r + 36 = 0$, $\Delta' = 0$ et
 $r = r_1 = r_2 = -\frac{6}{5}$. La solution est de la forme
 $y = f(x) = (Ax + B)e^{rx}$ ($A, B \in \mathbb{R}^2$) c'est à dire
 $y = f(x) = (Ax + B)e^{-\frac{6}{5}x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2$

1.5 Équation différentielle linéaire avec second membre

Pour résoudre cette équation, on procède comme suit :

- On détermine une solution générale de l'équation sans second membre (homogène), notée y_h
- On détermine une solution particulière y_p de l'équation non homogène (avec second membre)
- La solution générale de l'équation avec second membre est

$$y_G = y_h + y_p$$

Exercice :

Soit à résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = \cos x$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $g : x \mapsto a \cos x + b \sin x$ soit solution de (E).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

Solution

1.6 Exercices d'applications

Exercice 1 :

Trouver la fonction f solution de l'équation différentielle et vérifiant les conditions initiales indiquées 

1. $2x'(t) + 3x(t) = 0$
2. $y'(x) - 2y(x) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) = 1$
3. $y'(x) + y(x) = 0$ et $f(1) = e$
4. $2y'' + 3y' + y(x) = 0$
5. $2x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0$
6. $2x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$
7. $y''(x) + 2y(x) = 0$; $f(0) = 1$, $f'(0) = \sqrt{2}$
8. $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0$; $f(\frac{\pi}{4}) = 0$, $f'(\frac{\pi}{4}) = -2$

Exercice 2 :

1. Résoudre l'équation différentielle $9y'' + \pi^2 y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f sachant que : $f(0)=2$ et $f'(0)=\pi$.

Exercice 3 :

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle : $y''+4y=0$.
2. Trouver la solution particulière f dont sa courbe représentative passe par le point $A(0 ; 2)$ et admet en ce point une tangente horizontale.

Exercice 4 :

1. Résoudre l'équation différentielle $y''+16y=0$
2. Déterminer, parmi les solutions de cette équation la fonction f telle que : $f(\frac{\pi}{6}) = 0$ et $f'(\frac{\pi}{6}) = 1$.
3. Écrire $f(x)$ sous la forme $A \cos(\omega x + \phi)$. A, ω, ϕ étant des constantes à déterminer.

Exercice 5 :

Déterminer l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle : $y''-y=0$. Satisfaisant aux conditions suivantes :

1. f est une application paire
2. $f(0)=1$.

Exercice 6 :

1. Résoudre l'équation différentielle : $3y'' + 2y' - y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f dans chacun des cas :
 - (a) $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$.
 - (b) la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet le point $A(0 ; 1)$ comme point d'inflexion.

- (c) la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f est tangente à la courbe $(\mathcal{C}_g)$ d'équation $g(x) = e^{2x}$ au point $x = 0$.
- (d) f admet un extremum égal à -1 pour $x = 0$.
- (e) $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale au point $B(0;-1)$.

Exercice 7 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2(1+i)z + 2i + 3 = 0$ z_1 et z_2 étant les deux solutions de cette équation, déterminer le nombre complexe $z = z_1 z_2$.
2. (a) Résoudre l'équation différentielle : $8y'' - \mathbf{p}y' - \mathbf{q}y = 0$ sachant que $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z .
- (b) Déterminer la solution particulière de cette équation dont la courbe représentative passe par le point $B(0;\frac{1}{2})$ et admet en ce point une tangente perpendiculaire à la droite d'équation $y = -x - 1$.

1.7 Travaux Pratiques

T.P 1 : La mathématisation de nombreux phénomènes physiques conduit à des équations différentielles : ce T.P en est une illustration dans un cas simple et classique.

Un solide dont la température est de 70° est placé dans une pièce dont la température ambiante est de 20° . Les dimensions du solide sont très faibles comparativement à celles de la pièce.

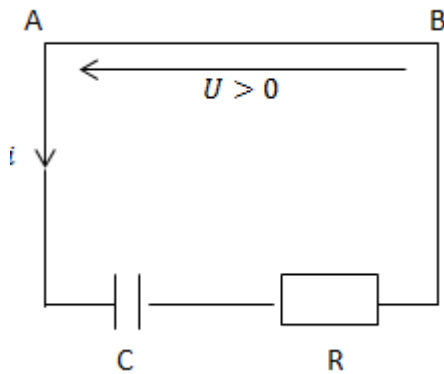
On désigne par $\theta(t)$ la température du solide à l'instant t l'unité de temps étant la minute et l'unité de température le degré celsius ; on peut donc écrire $\theta(0) = 70$.

La loi de refroidissement d'un corps c'est à dire l'expression de $\theta(t)$ en fonction du temps, est la suivante : la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et la température ambiante.

1. Sachant qu'au bout de 5 minutes la température est de 60° (soit $\theta(5) = 60$) et en tenant compte également de $\theta(0) = 70$, prouver que la loi de refroidissement du solide considéré est : $\theta(t) = 50\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{5}} + 20$ (on pourra poser $x(t) = \theta(t) - 20$).
2. Quelle sera la température du corps au bout de 20 minutes ?
3. Tracer la représentation graphique de la fonction : $t \mapsto \theta(t)$

T.P 2 : Charge d'un condensateur sous une tension constante avec resistor.

On considère le circuit électrique ci-dessous.



R est la résistance du resistor et C la capacité du condensateur. R et C sont des constantes.

Soit $q(t)$ la charge de l'armature du condensateur à l'instant t . Dans le cours de physique, on prouve que : $R \frac{dx}{dt} + \frac{q}{C} = u$.

La fonction $t \mapsto q(t)$ est la solution de l'équation différentielle $R \frac{dx}{dt} + \frac{1}{C}x(t) = u$ (ou $Rx'(t) + \frac{1}{C}x(t) = u$) (1) qui prend la valeur 0 à l'instant $t = 0$ (soit $q(0) = 0$)

1. Déterminer la solution générale de l'équation (1) en posant $y(t) = x(t) - Cu$.
2. En utilisant la condition initiale $q(0) = 0$, prouver que $q(t) = Cu(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.
3. On observe à l'oscilloscope la tension $U_r = Ri$ aux bornes du resistor. Sachant que $i(t) = \frac{dq}{dt}$, donner l'expression de U_r en fonction du temps.

1.8 Correction des Travaux pratiques :

Devoir de classe

Durée : 3h

Documents autorisés : Néant

Exercice 1 : (4 points) 40 min

1. Qu'appelle t-on équation différentielle du second ordre ? donner un exemple.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$
3. Déterminer la solution particulière de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes :
 - Sa courbe représentative passe par le point $A(0 ; 4)$.
 - La tangente à cette courbe au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 0.

Exercice 2 : (5 points) 40 min

Un bloc de céramique est mis dans un four dont la température constante est 1000°C . Les variations de la température x du bloc en fonction du temps t sont données par l'équation différentielle suivante où k est une constante réel :

$$(E) : x'(t) = k[1000 - x(t)].$$

1. On pose $y(t) = x(t) - 1000$; Écrire l'équation différentielle (F) satisfaite par y .
2. Résoudre (F) puis (E).
3. Le bloc initialement à 40°C est mis dans le four au temps $t = 0$. Si la température du bloc au temps $t = 1$ est 160°C , calculer la température du bloc au temps $t = 3$

Exercice 3 : (7 points) 60 min

1. Soit à résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = \cos x$.
 - (a) Déterminer les réels p et q tels que la fonction $g : x \mapsto p \cos x + q \sin x$ soit solution de (E).
 - (b) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $f + g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de l'équation (E') : $y' + 2y = 0$
 - (c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E') et en déduire les solution sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$.
 - (a) Déterminer un nombre réel m tel que la fonction $h : x \mapsto me^{-2x}$ soit solution de cette équation.
 - (b) Résoudre l'équation proposée en utilisant une méthode analogue à celle utilisée dans la question 1)

Exercice 4 : (4 points) 40 min

Soit l'équation différentielle : $\mathbf{a}y'' + \mathbf{b}y' + \frac{1}{4}y = 0$ où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $-\frac{\pi}{4}$ modulo 2π .

1. Déterminer $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.
2. Résoudre cette équation différentielle.
3. Déterminer la solution particulière f de cette équation qui vérifie les deux conditions :
 - Sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) passe par le point A(0;4).
 - La tangente au point x=2 a pour coefficient directeur 0.

Devoir à faire à la maison

Durée : 5 jours

Problème 1 : (10 points)

Partie A :

1. Déterminer les solutions h sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :
 $y'' + 4y' + 4y = 0$
2. On considère l'équation différentielle (F) : $y'' + 4y' + 4y = -4x$
 - (a) Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction $\varphi : x \mapsto ax + b$ soit solution de (F).
 - (b) Montrer qu'une fonction f est solution de (F) si, et seulement si, $f - \varphi$ est solution de (E).
 - (c) En déduire toutes les solutions de (F).
 - (d) Donner la solution f de (F) qui vérifie :
 $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f . On se propose d'étudier cette fonction ainsi que l'équation $f(x) = 0$.

1. (a) Calculer la fonction f' dérivée de f .
 - (b) Dresser le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$.
 - (c) Indiquer la limite de f' en $+\infty$.
 - (d) En déduire le signe de f' sur $[0; +\infty[$.

2. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
3. Indiquer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote d que l'on déterminera.
5. Construire d et $\mathcal{C}$, sur un même graphique

Problème 2 : (10 points)

Un objet relié à un parachute et largué d'un point O avec une vitesse initiale v_0 se déplace sur un axe vertical $(O; \vec{i})$.

On note $\vec{v}(t)$ la vitesse à l'instant t et v la norme de $\vec{v}$; v est une fonction de la variable t ($t \in \mathbb{R}_+$) vérifiant l'équation différentielle :
 (1) $mv' + kv = mg$ où m est la masse totale de l'objet et du parachute et g le coefficient de l'accélération de la pesanteur.

1. (a) Trouver une fonction constante, solution particulière de (1).
 (b) Le résultat ci-dessus conduit à poser $w = v - \frac{mg}{k}$. Montrer que w est solution d'une équation sans second membre; résoudre cette équation.
 Prouver que $v = v_0 e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}$ où v_0 est la norme de la vitesse initiale.
2. Dans la suite du problème on prendra $m = 8kg$; $g = 10m/s^2$ et $k = 25$ U.S.I
 (a) Donner la solution particulière de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale telle que $v_0 = 5m/s$. On appellera v_1 la fonction obtenue.
 (b) Donner la solution particulière de l'équation (1) correspondant à une vitesse initiale nulle. On appellera v_2 la fonction obtenue.
 (c) Montrer que les fonctions v_1 et v_2 ont la même limite l lorsque t tend vers $+\infty$.
 (d) Donner la solution particulière de (1) correspondant à une vitesse initiale telle que $v_0 = 3,2m/s$. On appellera v_3 la fonction obtenue.

- (e) Tracer soigneusement les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentant les fonctions v_1 , v_2 et v_3 dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $||\vec{i}||=2\text{cm}$ et $||\vec{j}||=4\text{cm}$.

Bibliographie

- [1] VUIBERT *Annales du BAC*, Mathématiques A,C,D 1992
- [2] Michel Dofal, J.P Bouvier, Jacques Chadenas, Pierre Daudin, Annette Leroy, Yves Olivier, André Pressiat, *Livre de mathématiques terminale D*, collection "GUIDES plus"
- [3] COLLECTION INTER AFRICAINE DE MATHÉMATIQUES *Livre de mathématiques Terminale S*
- [4] BASSILA JEAN BAPTISTE *Cahier de cours d'équations différentielles* Lycée Thomas Sankara CONGO-Brazzaville (2007-2008).

PRENUM-AC

MATHEMATIQUES
Terminale C

ELLIPSE

Auteur :

MOUSSITOU Ronald Reagan,
Etudiant à l'Ecole Normale Supérieure
de l'Université Marien NGOUABI
..... Congo-Brazzaville.....

Encadreur :

BONAZEBI YINDOULA, *enseignant au lycée*
Savorgnan de Brazza

Projet : PRENUM-AC

« Production des ressources numériques pour l'enseignement des
Mathématiques au secondaire en Afrique Centrale »

Table des matières

Introduction

1- Historique.....	4
2- Objectifs pédagogiques.....	4
3- Place dans le programme.....	4
3.1- Prérequis.....	4
3.2- Intérêt du cours.....	5
4- Répartition Horaire.....	5
5- Différentes approches d'une ellipse.....	5
I- Activités Préparatoires.....	5
a- Enoncé de l'activité préparatoire 1.....	5
b- Enoncé de l'activité préparatoire 2.....	6
c- Analyse à priori.....	6
d- Résolution des activités préparatoires	6
e- Analyse à posteriori.....	8
II- Cours.....	8
A- Définitions.....	8
1- Définition Monofocale.....	8
2- Définition Bifocale.....	8
3- Définition analytique.....	8
B- Eléments caractéristiques.....	9
1- Tableau récapitulatif des éléments caractéristiques.....	10
2- Groupe des isométries d'une ellipse.....	11
3- Cas particulier du Cercle.....	12
4- Représentation paramétrique d'une ellipse.....	12
C- Construction d'une ellipse.....	12
1- Construction analytique.....	12
2- Construction point par point.....	14
3- Construction par la méthode de la Bande de papier.....	16
4- Construction par la méthode du jardinier.....	17
D- Equation de la tangente.....	18
III- Exercices.....	18
Bibliographie.....	

Avertissement : Cette Ressource a été rédigée en vue d'aider les apprenants et les enseignants à avoir une maîtrise de la notion d'ellipse. Les lecteurs spécialistes voudront bien, de ce fait excuser certaines précisions qu'ils pourraient juger inutiles, mais qui ne leur sont nullement destinées.

INTRODUCTION

1- Historique

Le traité perdu des Coniques d'Apollonius constitue la source principale qui conduit les scientifiques dans l'invention de ce qui deviendra la Géométrie analytique par l'étude des problèmes de lieu plan. Ces problèmes ont conduit à caractériser analytiquement les coniques. Certains scientifiques ont également inventé des systèmes pour expliquer le mouvement des planètes. En effet, en 1543 paraît l'ouvrage de Nicolas COPERNIC (1473-1543) intitulé "De Revolutionibus Orbium Coelestium" qui propose une vision héliocentrique de l'Univers : les planètes effectuent une révolution autour du Soleil en parcourant des orbites circulaires. Cependant, Parmi les phénomènes astronomiques les mieux connus du public, figure en bonne position le fait que les planètes se déplacent autour du soleil sur des trajectoires elliptiques. Ce nom ellipse, vient d'Apollonius de Perge. Bien que les mathématiciens grecs connaissaient de nombreuses propriétés de l'ellipse, c'est KEPLER qui leurs trouva une première application pratique importante. Il utilisa l'ellipse pour décrire le mouvement des planètes autour du soleil, et affirma que les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.

2- Objectifs Pédagogiques

2.1- Objectif général

Réaliser des activités géométriques.

2.2- Objectif spécifique

Maîtriser la notion d'ellipse.

2.3- Objectifs opérationnels

A l'issue de ce cours, l'élève doit être capable de :

- a- Donner les éléments caractéristiques de l'équation d'une ellipse ;*
- b- Tracer une ellipse d'équation donnée ;*
- c- Déterminer l'équation de la tangente en un point d'une ellipse d'équation donnée.*

3- Place du cours dans le programme

Ce cours est une partie du cours sur les coniques.

3.1- Prérequis :

- Définition générale des coniques ;*
- Définition et propriétés des projections et symétries ;*
- Définition et propriétés des applications affines.*

3.2- L'intérêt de ce cours

Ce cours permettra aux apprenants de faire assoir leurs connaissances sur la notion d'ellipse et de comprendre que le cercle qui est connu de tout le monde n'est qu'un cas particulier d'une ellipse.

4- Répartition horaire : durée du cours 3h00.

5- Différentes approches d'une ellipse

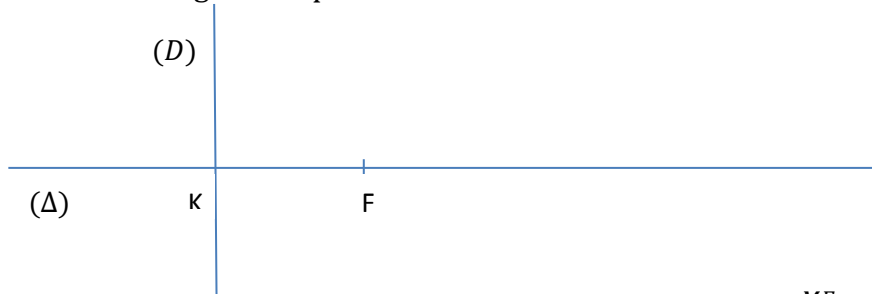
- L'ellipse se définit comme l'intersection d'un cône et d'un plan.
- L'ellipse est un lieu géométrique des points dans le plan vérifiant une certaine équation appelée équation focale.
- L'ellipse est une courbe algébrique du second degré.
- En fin l'approche géométrique, la définition bifocale.

Dans le développement de cette ressource, nous allons nous appesantir sur les trois dernières approches.

I- ACTIVITES PREPARATOIRES

a- Enoncé de l'activité préparatoire 1 (Définition Monofocale)

On considère la figure ci-après :



- 1- Construire le cercle (C), ensemble des points M tels que : $\frac{MF}{MK} = \frac{2}{3}$
- 2- Justifier qu'il existe deux points A et A' de (Δ), appartenant à (δ), où (δ) est l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MF}{MH} = \frac{2}{3}$, H le projeté orthogonal de M sur (D).
- 3- Soit M un point de (δ) distinct de A et A'.
Démontrer que $\frac{MF}{MK} < \frac{2}{3}$; On remarque que M est intérieur à (C).
Soit P un point de [A, A'], distinct de A et A', et (D_p) la perpendiculaire à (Δ) en P.
Construire les points M de (D_p) appartenant à (δ). (on pourra constater que $MF = \frac{2}{3}KP$).
- 4- En déduire une construction point par point de (δ).

b- Enoncé de l'activité préparatoire 2 (Définition analytique)

Soit (P) le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On appelle f la fonction de (P) dans (P) qui à tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

- 1- On pose $z = x + iy$ et $z' = f(z)$. Exprimer en fonction de x et de y la partie réel et la partie imaginaire de z' .
- 2- Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que M' appartienne à l'axe des réels.
- 3- On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer un support de la trajectoire du point M' .

c- Analyse à priori

En traitant ces activités, l'apprenant rencontrera des difficultés sur les points suivants :

- Démonstration de : $\frac{MF}{MK} < \frac{2}{3}$
- Résolution de la troisième question de l'activité 2, car il faut avoir l'inspiration d'écrire la représentation paramétrique d'un cercle

d- Résolution des activités préparatoires

Solution 1

- 1- Construction de (C) .

Comme $\frac{MF}{MK} = \frac{2}{3}$, on a : $3MF = 2MK$

$$\Rightarrow 9MF^2 - 4MK^2 = 0.$$

$$\Rightarrow (3\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{MK})(3\overrightarrow{MF} - 2\overrightarrow{MK}) = 0,$$

Posons : $I = \overline{(F, 3), (K, 2)}$ et $J = \overline{(F, 3), (K, -2)}$

On obtient :

$$5\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0, \text{ donc } (C) \text{ est le cercle de diamètre } [IJ].$$

- 2- Justification de l'existence de A et A' .

Posons $A=I$ et $A'=J$. Puisque I et J sont situés sur (Δ) , en projetant les deux point sur (D) , on trouve le point K . Alors $\frac{AF}{AK} = \frac{2}{3}$ et $\frac{A'F}{A'K} = \frac{2}{3}$ sont vérifiées.

- 3- Démontrons que $\frac{MF}{MK} < \frac{2}{3}$.

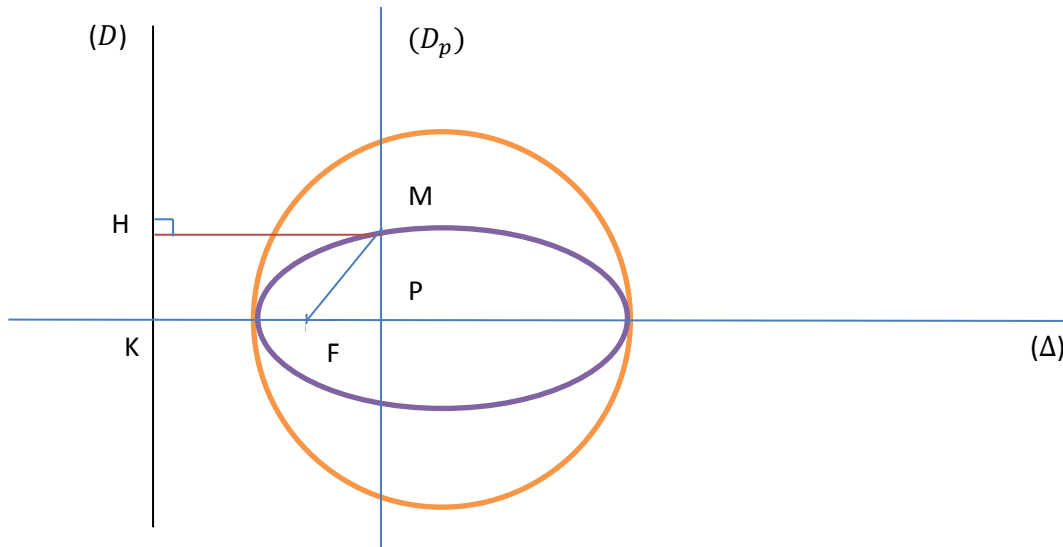
Puisque le triangle MHK est rectangle en H , on a : pour $\theta = (\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MK})[2\pi]$

ELLIPSE

$$\cos(\theta) = \frac{MH}{MK}, \quad \text{on a : } \frac{MF}{MH} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MF}{MK} = \frac{2}{3} \cos(\theta) \leq \frac{2}{3}.$$

Puisque M est distinct de A et A', on obtient : $\frac{MF}{MK} < \frac{2}{3}$.

4- Construction du point :



Le point M est un point de (D_p) . La distance MP est telle que : $MP = \sqrt{PF^2 + \frac{4}{9}KP^2}$ (d'après le théorème de Pythagore)

Solution2

1- $f: P \rightarrow P, M \mapsto M'$ tel que : $z' = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

$$\text{On pose } z = x + iy, \quad z' = \frac{1}{2} \left(x + iy + \frac{1}{x+iy} \right) = \frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} + i \frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)}$$

$$\text{On en déduit : } x' = \frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} \text{ et } y' = \frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)}$$

2- $M \in E \Leftrightarrow M'$ appartient à l'axe des réels $\Rightarrow y' = 0, \Rightarrow \frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow y(x^2+y^2-1) = 0$

Par conséquent, $E = D(o, \vec{u}) \cup C(o, 1) - \{o\}$, car $z \neq 0$

3- M décrit $C(0,2)$ $x = 2\cos\theta$ et $y = 2\sin\theta$

$$\text{On a : } x' = \frac{2\cos\theta(4(\cos\theta)^2+4(\sin\theta)^2+1)}{8} = \frac{5}{4}\cos\theta, \quad y' = \frac{2\sin\theta(4(\cos\theta)^2+4(\sin\theta)^2-1)}{8} = \frac{3}{4}\sin\theta$$

$$\text{On en déduit : } x'^2 = \frac{25}{16}(\cos\theta)^2 \text{ et } y'^2 = \frac{9}{16}(\sin\theta)^2$$

$$\text{Ainsi : } \frac{x'^2}{\frac{25}{16}} + \frac{y'^2}{\frac{9}{16}} = 1$$

Le support de la trajectoire du point M' est la courbe d'équation : $\frac{x'^2}{\frac{25}{16}} + \frac{y'^2}{\frac{9}{16}} = 1$

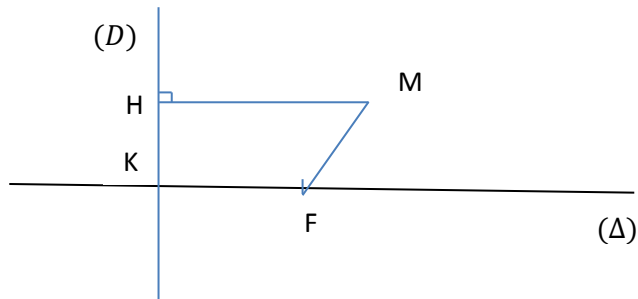
e- Analyse à posteriori

II- PARTIE COURS

A- Définitions

1- Définition Monofocale :

Soit (D) une droite, F un point du plan n'appartient pas à (D) et e un nombre réel strictement positif tel que $0 < e < 1$. L'ensemble des points M du plan dont le rapport des distances à F et à (D) est constant et égal à e , c'est-à-dire $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D) , est appelé ellipse.

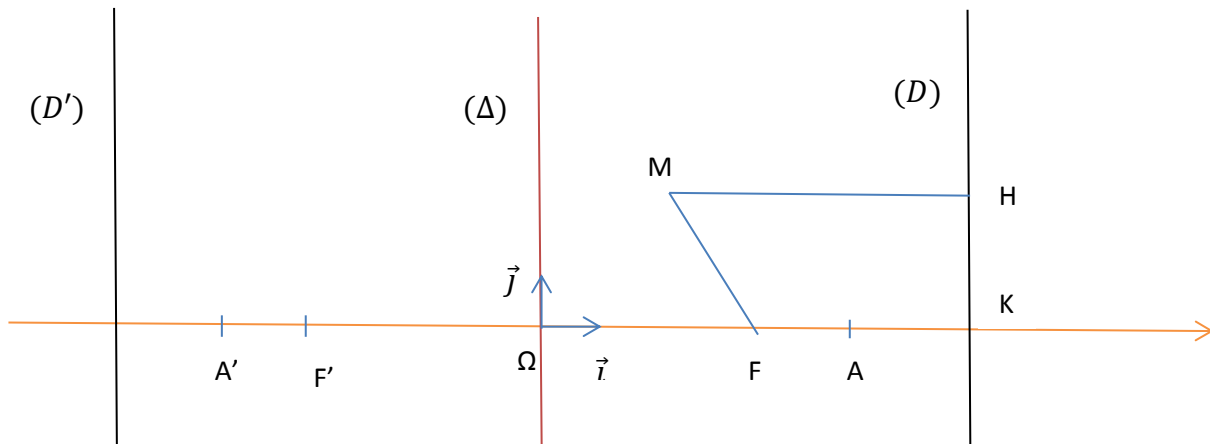


2- Définition Bifocale :

On appelle ellipse, le lieu des points d'un plan dont la somme des distances à deux points fixes est constante. C'est-à-dire : soient F et F' deux points distincts d'un plan (P) . L'ellipse (γ) est l'ensemble des points M du plan tel que : $MF + MF' = 2a$

3- Définition Analytique :

On considère la figure suivante :



Posons $\Omega A = a$ ($a > 0$); $\Omega F = c$ ($c > 0$)

On a : $e = \frac{c}{a}$; $\Omega K = \frac{a^2}{c}$

Considérons le repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, tel que : $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{\Omega F}}{\|\overrightarrow{\Omega F}\|}$ $\overrightarrow{\Omega F} = c\vec{i}$, $\overrightarrow{\Omega A} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{\Omega K} = \frac{a^2}{c}\vec{i}$

Dans ce repère, soit $M(x, y)$; $F(c, 0)$; $K(\frac{a^2}{c}, 0)$ et $H(\frac{a^2}{c}, y)$

$$M(x, y) \in (\gamma) \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2$$

$$\Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} (x - \frac{a^2}{c})^2 \text{ puisque } e = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Posons $b^2 = a^2 - c^2$

On obtient : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ainsi, dans le repère ci-dessus (γ) admet pour équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

NB : Le point Ω , l'origine du repère est centre de symétrie de (γ) . En effet,

$$M(x, y) \in (\gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow S_O(M) \in (\gamma). \text{ C'est pour cette raison que l'ellipse}$$

est une conique à centre.

B- Éléments caractéristiques

1- Tableau récapitulatif des éléments caractéristiques

Considérons l'ellipse (γ) définie par son équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ELLIPSE

	$a > b$	$b > a$
Equation	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Demi- distance focale	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Paramètres	$p = \frac{a^2}{c}$	$p = \frac{b^2}{c}$
Excentricité	$e = \frac{c^2}{a}$	$e = \frac{c^2}{b}$
Sommets	$A\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right), A'\left(\begin{smallmatrix} -a \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$	$B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right), B'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -b \end{smallmatrix}\right)$
Foyers	$F\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right), F'\left(\begin{smallmatrix} -c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$	$F\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ c \end{smallmatrix}\right), F'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -c \end{smallmatrix}\right)$
Axes	Axe focal : (AA') Grand axe : (AA') Petit axe : (BB')	Axe focal : (BB') Grand axe : (BB') Petit axe : (AA')
Cercles remarquables	Cercle principal : $C(0, a)$ Cercle secondaire : $C(0, b)$	Cercle principal : $C(0, b)$ Cercle secondaire : $C(0, a)$

Proposition 1

Soit (γ) une ellipse. La définition bifocale et la définition analytique sont équivalentes.

Démonstration

On sait que si $M \in (\gamma)$, alors :

$$MF + MF' = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2}) = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2 = ((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2) \\ &\quad \text{et } 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \text{ et } 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \text{ et } 2a^2 - x^2 - c^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

Réciproquement, soit (γ) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère orthonormé dont l'axe focal est (ox), alors : $F(c,0), F'(-c,0)$, $e = \frac{c}{a}$, (D) : $x = \frac{a^2}{c}$ et (D') : $x = -\frac{a^2}{c}$.

Comme l'ellipse est entièrement située entre ses directrices (D) et (D'), on a pour $M \in (\gamma)$: $d(M, (D)) + d(M, (D')) = d((D), (D')) = 2\frac{a^2}{c}$

Donc, $MF + MF' = e d(M, (D)) + e d(M, (D')) = e(d(M, (D)) + d(M, (D'))) = e d((D), (D')) = \frac{c}{a} \times 2\frac{a^2}{c} = 2a$

Ainsi, $MF + MF' = 2a$

Proposition : Une partie $\mathcal{E}$ d'un plan affine euclidien (P) est une ellipse si et seulement si il existe un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de (P) par rapport auquel $\mathcal{E}$ est la courbe d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'unicité de cette équation et des axes du repère va résulter de l'étude des isométries qui conservent une ellipse.

2- Groupe des isométries d'une ellipse

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé introduit dans son étude analytique.

Dans ce repère, l'équation de $\mathcal{E}$ est :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$. Soit M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x, y). On a :

$$OM^2 = x^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right) \leq a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = a^2,$$

L'égalité étant possible seulement si $M=A$ ou $M=A'$, c'est-à-dire $y=0$.

On a donc caractérisé géométriquement A, A' et a : A et A' sont les points les plus

éloignés du centre de $\mathcal{E}$ et a est la distance maximum de O à un point de $\mathcal{E}$.

Soit f une isométrie qui conserve $\mathcal{E}$: $\mathcal{E} = f(\mathcal{E})$. On a, $a = OA = f(O)f(A) = Of(A)$ et donc $f(A) \in \{A, A'\}$. L'isométrie f conserve $\{A, A'\}$ c'est-à-dire que f est l'une des isométries suivantes :

- 1- L'application identité ;
- 2- La réflexion par rapport à la droite (AA') ;
- 3- La réflexion par rapport à la médiatrice de [AA'] ;
- 4- La symétrie centrale de centre O.

Remarquons que ces quatre isométries conservent les courbes de la forme : $C(F, D, e)$.

Elle constituent donc le Groupe des isométries de l'ellipse $\mathcal{E}$.

3- Cas particulier du cercle

Soit (γ) l'ellipse définie par son équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Si $a = b$, c'est-à-dire $e = 0$, alors l'équation de (γ) devient : $x^2 + y^2 = a^2$ ce qui est bien l'équation du cercle de centre O et de rayon a .

Ainsi, un cercle est une ellipse d'excentricité nulle. Les foyers F et F' sont confondus en O, centre du cercle et dont les directrices sont repoussées à l'infini.

4- Représentation paramétrique d'une ellipse

Soit (γ) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Pour tout $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, on a : $M \in (\gamma) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in R, \frac{x}{a} = \cos \theta \text{ et } \frac{y}{b} = \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists \theta \in R, x = a \cos \theta \text{ et } y = b \sin \theta$$

Ainsi, l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} (\theta \in R)$

C- Construction d'une ellipse

1- Construction analytique

Soit (γ) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\text{Pour } M(x, y) \in (\gamma) \text{ on a : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'égalité $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ équivaut à : $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ou $y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

L'ellipse est donc la réunion des graphes des fonctions :

$$f_1: x \mapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ et } f_2: x \mapsto -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Comme $f_2(x) = -f_1(x)$, alors nous allons construire le graphe de f_1 et celui de f_2

sera déduit du graphe de f_1 par symétrie par rapport à l'axe des abscisse qui est l'axe de symétrie.

Etude de f_1

- Ensemble de définition

f_1 est définie $\Leftrightarrow a^2 - x^2 \geq 0$. Ainsi, $E_f = [-a, a]$

$$f_1(a) = f_1(-a) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \mp \infty$ et $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x) - f(a)}{x + a} = \pm \infty$. Donc aux points A(a,0) et A(-a,0), la courbe de f_1 admet deux demi-tangentes verticales.

- Calcul de la dérivée

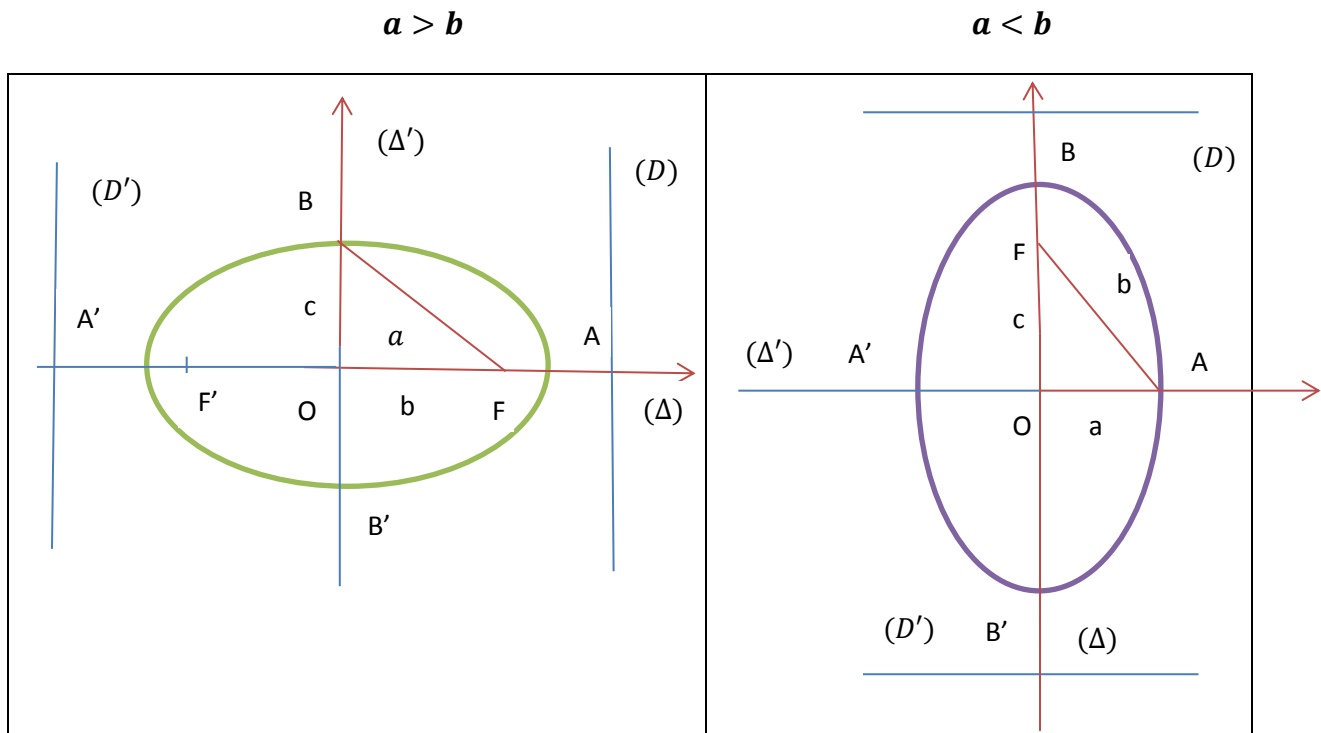
$$f_1 \text{ est dérivable sur } E_f, \text{ on a: } f'_1(x) = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\forall x \in [-a, 0], f'_1(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [0, a], f'_1(x) \leq 0$$

- Tableau de variations

x	$-a$	0	a
$f'_1(x)$		$\begin{array}{c} + \\ \circ \\ - \end{array}$	
$f_1(x)$	0	b	0



2- Construction point par point

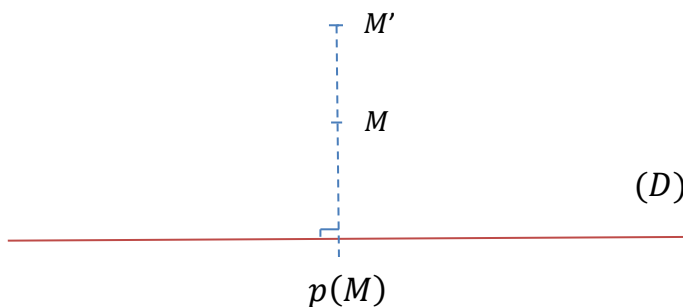
ELLIPSE ET AFFINITE ORTHOGONALE

Définition 1: Soit (D) une droite de E et k un réel non nul.

L'affinité orthogonale de base (D) et de rapport k est l'application :

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow E \\ M &\mapsto M' \end{aligned}$$

Telle que : $\overrightarrow{p(M)M'} = k\overrightarrow{p(M)M}$ où p désigne la projection orthogonale sur (D)



Théorème 1:

L'ellipse ε est l'image de son cercle principal $C(o, a)$ (respectivement de son cercle secondaire $C(o, b)$) par l'affinité orthogonale de (Ox) (respectivement (Oy)) et de rapport $\frac{b}{a}$ (respectivement $\frac{a}{b}$).

Plus généralement, l'image d'un cercle par une affinité orthogonale est une ellipse.

Démonstration : Soit f l'affinité orthogonale de base (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$, son expression

analytique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{a}y \end{cases}$

L'équation de $C(O, a)$ est : $x^2 + y^2 = a^2$, donc celle de $f(C(O, a))$ s'écrit :

$$x'^2 + \left(\frac{a}{b}y'\right)^2 = a^2$$

Soit,

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

On a bien $f(C(O, a)) = \varepsilon$

Plus généralement, soit f l'affinité orthogonale de base (Ox) et de rapport k .

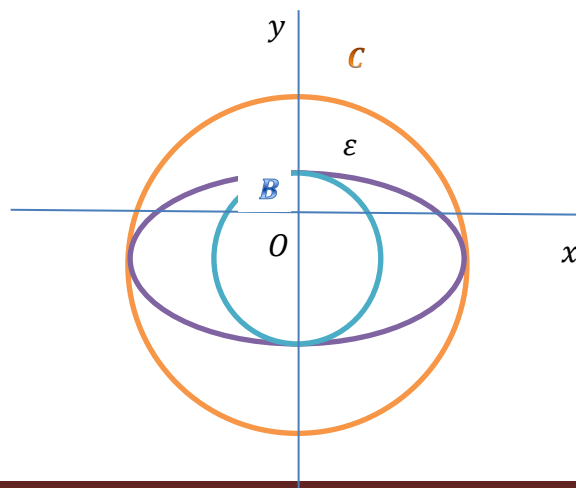
Soit C le cercle d'équation : $(x - \rho)^2 + (y - \varphi)^2 = r^2$. L'expression analytique

de f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit : $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$

L'image $f(C)$ de C par f sera d'équation : $(x' - \rho)^2 + \left(\frac{y'}{k} - \varphi\right)^2 = r^2$.

Ou encore $\frac{(x' - \rho)^2}{r^2} + \frac{(y' - k\varphi)^2}{(kr)^2} = 1$.

On reconnaît alors l'équation réduite d'une ellipse de centre $\Omega(\rho, k\varphi)$ d'axe de symétries les droites passant par Ω et parallèles à (Ox) et (Oy) et de longueur de demi-axes r et $|k|r$.



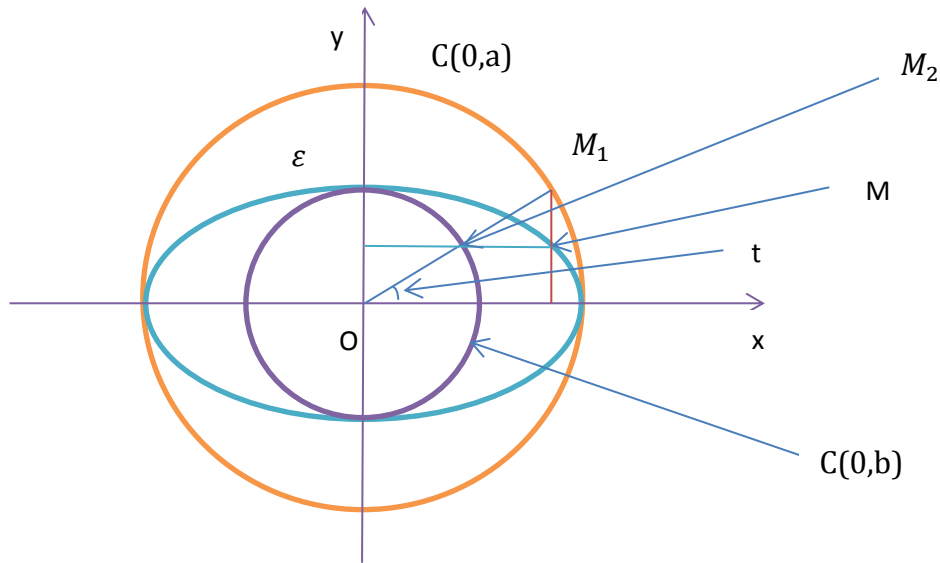
$C = C(O, a)$

$B = C(O, b)$

$\varepsilon = \text{ellipse}$

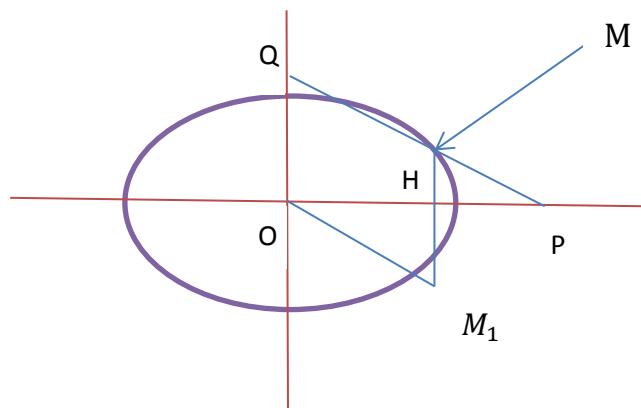
NB : Ce que nous venons de faire donne une méthode simple pour construire l'ellipse point par point

Proposition 3 : Le point $M(\text{acost}, \text{bsint})$ de ε est l'image à la fois du point $M_1(\text{acost}, \text{asint})$ par l'affinité orthogonale d'axe (ox) et de rapport $\frac{b}{a}$ et du point $M_2(\text{bcost}, \text{bsint})$ par l'affinité orthogonale d'axe (oy) et de rapport $\frac{a}{b}$. le point M est donc à l'intersection de la perpendiculaire à (ox) passant par M_1 et de la perpendiculaire à (oy) passant par M_2 .



2- Construction d'une ellipse par la méthode de la « Bande de Papier »

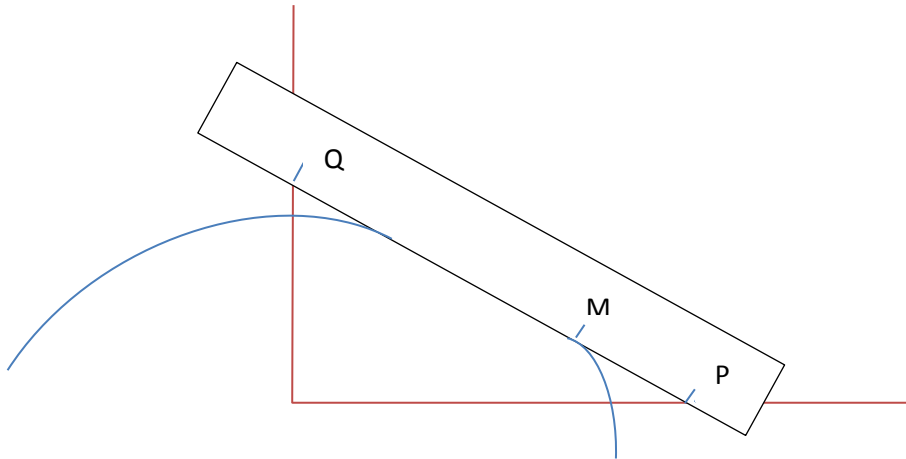
Proposition 4 : Soient P et Q deux points de E respectivement sur (Ox) et (Oy) de sorte que la longueur de PQ soit constante. Soit $M \in [PQ]$ tel que $MP=a$ et $MQ=b$ avec a et b deux constantes telles que $a+b=PQ$. Alors $M \in \varepsilon$.



Démonstration : Soit M_1 le quatrième sommet d'un parallélogramme $OQMM_1$ et H le projeté orthogonal de M sur (Ox) . Comme $OM_1 = a$, M_1 décrit un cercle C_1 de centre O et de rayon a . D'après le théorème de Thales, on a : $\frac{HM}{HM_1} = \frac{PM}{OM_1} = -\frac{b}{a}$

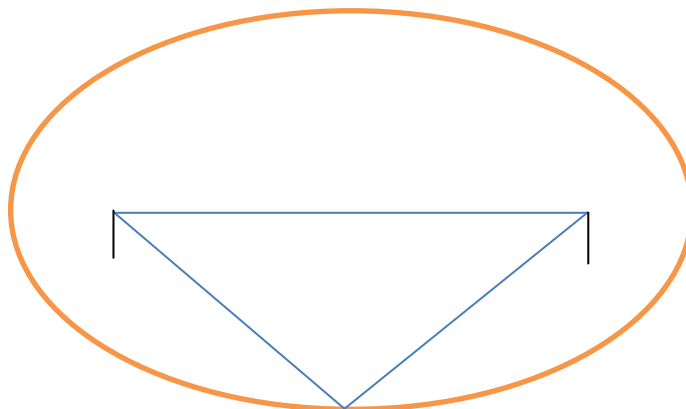
Ainsi, on déduit le point M de M_1 par l'affinité orthogonale de base (Ox) et de rapport $-\frac{b}{a}$; celle-ci transforme C_1 en l'ellipse d'axes (Ox) et (Oy) , qui a pour demi-axes a et b .

NB : On remarque que P, Q, M sont sur le bord d'une bande de papier que l'on fait glisser de sorte que P et Q restent respectivement sur les axes (Ox) et (Oy)



3- Construction d'une ellipse par la méthode du jardinier

Pour construire une ellipse avec la méthode du jardinier, on prend une ficelle dont la longueur est supérieure au double de la distance entre deux piquets, pour former une boucle autour d'eux. Le troisième piquet tendant la ficelle qui coulisse sur les deux piquets plantés, permet de tracer l'ellipse sans interruption.



Les deux points où sont plantés les piquets sont les foyers de l'ellipse.

D- Equation de la tangente à une ellipse

Considérons l'ellipse (γ) d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $P(x_0, y_0) \in (\gamma)$.

Cherchons l'équation de la tangente (T) à (γ) en P .

Comme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on a : $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

Premier cas : $y_0 > 0$ (alors $y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$)

Posons $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, alors $f'(x) = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Donc $f'(x_0) = -\frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$ et par conséquent :

$$(T) : y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) = -\frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} (x - x_0) = -\frac{b}{a} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$$

$$= -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0)$$

$$a^2 y_0 (y - y_0) = -b^2 x_0 (x - x_0)$$

$$a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = -b^2 x_0 x + b^2 x_0^2$$

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2$$

En divisant cette équation par $a^2 b^2$, on obtient :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Car } P \in (\gamma))$$

$$\text{Ainsi, } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Deuxième cas : $y_0 < 0$ On procède de la même façon que dans le premier cas. On trouve :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

III- PARTIE EXERCICES

Devoir Sur table

Exercice n°1 (7 points)

Soit (P) un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

A tout nombre complexe $Z = x + iy$, on associe le point $M(x, y)$, $\bar{Z}$ le conjugué de Z .

1- Soit (E) l'ensemble des points dont l'affixe vérifie la relation :

$$2|Z|^2 - \frac{1}{2}i(Z^2 - \bar{Z}^2) = 1$$

Déterminer une équation cartésienne de (E) .

2- Soit Rot la rotation de centre O dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$

- a- Déterminer une équation cartésienne de (E') image de (E) par Rot
- b- Reconnaître la nature de (E')
- c- Caractériser (E')
- d- Tracer (E')
- e- En déduire le tracer de (E).

Exercice n°2 (5 points)

Soit (E) l'ensemble de points M du plan P dans lui-même, qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = \frac{1}{2}(1 - i)Z + (1 + i)\frac{1}{Z}$.

- 1- Soit θ un réel et M le point d'affixe $Z = e^{i\theta}$. Montrer que les coordonnées de M' image de M peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} x' = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \end{cases}$$

- 2- Déduire que l'ensemble des points M' lorsque θ décrit $\mathbb{R}$ est une ellipse.
3- Caractériser et construire (E).

Exercice n°3 (8 points)

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, ; on considère l'équation :

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 9 = 0 \quad (1)$$

Rappel : cette équation est de la forme : $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + ax + by + c = 0$

- a- Calculer $\beta^2 - \alpha\gamma$. Que constatez-vous ?
- b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - (\alpha + \gamma)x + (\alpha\gamma - \beta^2) = 0$.
- c- Soit A la matrice définie par : $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$. Déterminer deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ tels que : $AX = \mu X$, avec μ les valeurs de x trouvées au b), et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Calculer leur produit scalaire. Que dire de ces deux vecteurs ?

- d- Soit $\vec{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

On considère la matrice $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Exprimer (x, y) en fonction de

$$(X, Y) \text{ tel que : } \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e- En déduire l'équation réduite (2) en remplaçant x et y dans (1).

Solution du devoir sur table

Exercice n°1

$$2|Z|^2 - \frac{1}{2}i(Z^2 - \bar{Z}^2) = 1$$

1- Déterminons l'équation cartésienne de (E).

On sait que $Z = x + iy$, $\bar{Z} = x - iy$ et $|Z|^2 = x^2 + y^2$

On aura : $2(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}i(x^2 + 2ixy - y^2 - x^2 + 2ixy + y^2) = 1$

$$2(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}i(4ixy) = 1$$

Ainsi l'équation de (E) est : $2x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$.

2- Expression analytique de $\text{Rot}(O, \frac{\pi}{4})$:

$$\text{Rot}(O, \frac{\pi}{4}) : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

Trouvons x et y en fonction de x' et y' . on a :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

a- Equation cartésienne de (E') : en remplaçant x et y dans (E), on a :

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 1$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + x'y'\right) + 2\left(\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - x'y'\right) + 2\left(-\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2\right) = 1$$

$$\Rightarrow x'^2 + 3y'^2 = 1 \quad (E').$$

b- Reconnaissance de (E').

D'après a) (E') a pour équation : $x'^2 + 3y'^2 = 1$. On obtient :

$$x'^2 + \frac{y'^2}{\frac{1}{3}} = 1 \quad (E').$$

Ainsi, (E') est une ellipse.

c- Eléments caractéristiques de (E') :

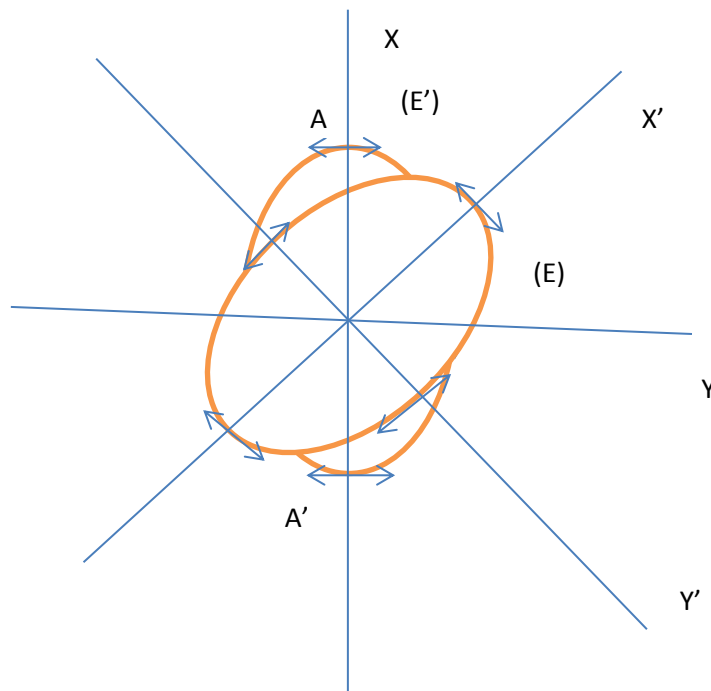
(E') est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = 1, b = \frac{\sqrt{3}}{3}, c = \sqrt{-\frac{1}{3} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

On obtient : sommets $A(1,0), A'(-1,0), B(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ et $B'(0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$;

Foyers : $F(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$, et $F'(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$; excentricité : $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$; Directrices : $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

et $(D') : x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$; axe focal ; $(O, \vec{i})$.

d- Tracer de (E') .



e- Dédisons le tracer de (E) .

(E) est déduite de (E') par la rotation de centre O et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

$$Z' = \frac{1-i}{2}Z + \frac{1+i}{Z}$$

1-

Pour $Z = e^{i\theta}$, on obtient :

$$Z' = \frac{1-i}{2}e^{i\theta} + \frac{1+i}{e^{i\theta}} \text{ or, } 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ et } 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned} \text{On aura : } Z' &= \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}e^{i\theta} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\theta} \\ &= \frac{\sqrt{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}}{2} + \sqrt{2}e^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

$$Z' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - i\sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z' = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Comme $Z' = x' + iy'$

$$\text{On obtient : } x' + iy' = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} x' = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \end{cases}$$

2- Dédudisons que (E) est une ellipse.

D'après ce qui précède :

on a :

$$\begin{cases} \frac{x'}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \\ \frac{y'}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \end{cases}$$

En élevant chaque membre de ce système au carré on obtient :

$$\begin{cases} \left(\frac{x'}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \\ \left(\frac{y'}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \end{cases}$$

Ainsi, $(\frac{x'}{\frac{3\sqrt{2}}{2}})^2 + (\frac{y'}{\frac{\sqrt{2}}{2}})^2 = 1$, car $\cos^2(\frac{\pi}{4} - \theta) + \sin^2(\frac{\pi}{4} - \theta) = 1$, ce qui a bien la forme réduite de l'équation d'une ellipse.

3- Eléments caractéristiques.

(E) est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = 2$

On obtient : sommets $A(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$, $A'(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$, $B(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $B'(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$;

Foyers : $F(2, 0)$, et $F'(-2, 0)$; excentricité : $e = \frac{2}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; Directrices : $x = \frac{9}{4}$

et (D') : $x = -\frac{9}{4}$; axe focal ; $(o, \vec{i})$.

DEVOIRS A FAIRE A LA MAISON

Devoir n°1

Exercice n°1

Soit S l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = (1 + i)Z$.

- 1- Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.
- 2- Soit (E) l'ensemble des points M du plan ayant pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$. Déterminer l'ensemble (E') image de (E) par S.
- 3- Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E').

Exercice n°2

Dans le plan P muni du repère orthonormé $R = (o, \vec{u}, \vec{v})$ on définit les points $A(1, 0)$, $B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $C(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ et (D) la droite d'équation : $x=4$.

- 1- Déterminer les coordonnées du point G tel que $\vec{CG} = \vec{AB}$. Quelle est la nature du quadrilatère ABGC ?
- 2- On note γ l'ensemble des points M(x, y) du plan vérifiant : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x - 1)^2$
 - a- Montrer que γ est l'ensemble des points M vérifiant : $MG = \sqrt{2} d(M, (D))$ où $d(M, (D))$ désigne la distance du point M à la droite (D).

- b- En déduire la nature de γ et préciser ses éléments caractéristiques. Représenter ensuite γ dans le repère orthonormé $R = (o, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice n°3

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (E) dont une équation cartésienne est : $21x^2 + 31y^2 - 10\sqrt{3}xy = 0$. f désigne la similitude plane directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

- 1- Ecrire l'expression analytique de f .
- 2- On désigne par (E') l'image de (E) par f . Montrer que l'équation cartésienne de (E') est : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- 3-
 - a. Montrer que (E) est une ellipse.
 - b. On note A, A', B et B' les sommets de (E), préciser leurs coordonnées.
 - c. Préciser les foyers F et F' de (E) puis tracer (E) et (E').

Devoir n°2

Exercice n°1

Le plan (P) est rapporté à un repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1- On note $Z = x + iy$ l'affixe du point M de coordonnées (x, y) .
 - a- Vérifier que l'ensemble des points M tels que $\bar{Z} + Z + 4 = 0$ est une droite (D). Tracer (D)
 - b- Démontrer que pour tout point M, la distance de M à la droite (D) est : $\frac{1}{2} |\bar{Z} + Z + 4|$
- 2- On note A le point d'affixe $1 + i$ et (P') le plan de (P) privé de la droite (D).
 Soit E l'ensemble des points M d'affixe Z de (P') tel que $\left| \frac{Z-1-i}{\bar{Z}+Z+4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$
 Démontrer que E est une ellipse dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice n°2

Partie I : Le plan P est orienté non rapporté à un repère orthonormé. On donne un segment [OA], A est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. B est le symétrique de C par rapport à O.

I désigne le centre de gravité du triangle ABC.

- 1- Faire la figure
- 2- On considère l'ellipse (E) de foyer B et C passant par A.
 - a- Construire les points de (E) situés sur les demi-droite [CI) et [BI)
 - b- Tracer (E)
 - c- Calculer l'excentricité
- 3- Construire (E') l'image de (E) par la similitude plane directe de centre C qui transforme A en O.

Partie II : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$.

- 1- Ecrire l'équation cartésienne de (E).
- 2- Ecrire l'équation cartésienne de (E').

Exercices d'application

Exercice 1

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Trouver l'équation cartésienne de l'ellipse de foyer F(0,2), de directrice (D) : $x=5$ et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Donner la nature et les éléments caractéristiques des courbes d'équations :

$$\text{a) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{b) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \text{c) } 2x^2 + y^2 = 2 \quad \text{d) } x^2 + x + 2y^2 + 4y = 0$$

Exercice 3

Tracer l'ellipse (C) d'équation : $x^2 + 4y^2 = 25$.

- 1- Déterminer une équation de la tangente à (C) aux points de (C) d'abscisse 4.
- 2- Déterminer une équation des tangentes à (C) ayant pour coefficient directeur $\frac{3}{8}$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, donner la définition bifocale de l'ellipse (C).

a) (C) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ b) (C) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Exercice 5

Soit F et F' deux points du plan tels que : $FF' = 6$

Déterminer, dans un repère convenablement choisi, l'équation réduite de l'ellipse définie par : $MF + MF' = 8$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de l'ellipse (C).

a) $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y = 10$
b) $4x^2 + y^2 - 8x + 6y - 3 = 0$
c) $3x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'ellipse dont on donne une représentation paramétrique.

a) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\theta - 1 \\ y = \frac{3}{4}\sin\theta + 2 \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$
b) $\begin{cases} x = 2\cos\theta - 3 \\ y = 3\sin\theta + 1 \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$

Exercice 8

- 1- Soit $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $A'\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer une équation de l'ensemble (C) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 1$
- 2- Déterminer une équation de l'image de (C) :
 - a) Par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{i})$ et de rapport $\frac{2}{3}$;
 - b) Par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{j})$ et de rapport 2.

Exercice 9

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'ensemble (H) des points M(Z) tels que : $|Z + 2\bar{Z} + 1| = \sqrt{2}|Z + \bar{Z}|$

- 1- Donner la nature de (H)
- 2- Caractériser (H)
- 3- Tracer (H) et ses directrices.

Exercice 10

Le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M du plan d'affixe Z, $Z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $Z' = \frac{1}{2}(Z + \frac{1}{Z})$

- 1- On pose $Z = x + iy$ où x et y sont des réels.
 - a- Exprimer en fonction de x et y la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de Z'.
 - b- Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que M' appartienne à l'axe des réels
- 2- On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2. On écrit Z sous la forme $Z = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
 - a- Exprimer x' et y' en fonction de t
 - b- En déduire que M' décrit une ellipse (C) dont on déterminera le centre et les sommets.

Exercice 11

- 1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y'' + 4y = 0$ et déterminer les solutions particulières f et g vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 4$.
- 2- Soit (II) la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = g(\theta) \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$

Déterminer la nature de (II) et ses éléments caractéristiques. Tracer (II).

Exercice n°12

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ensemble des points M(x, y)

tel que : $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t - \sin t \\ y = \sqrt{2}\cos t + \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

- 1- a- Vérifier qu'une équation cartésienne de (E) est : $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0$
- b- Vérifier que l'équation (1) est équivalente à

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{x+y-4}{4}\right)^2 \quad (2)$$

c- Interpréter géométriquement chaque membre de (2). En déduire que (E) est une conique dont on précisera la nature.

d- Montrer que O est centre de symétrie de (E) et préciser ses éléments : foyers, excentricité, directrices.

2- Soit f l'application du plan orienté qui, à chaque point d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que $Z' = \frac{1-i}{2}Z$

a- Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques

b- Déterminer l'image de (E) par f. Préciser les éléments remarquables de cette image et la construction.

Exercice 13

Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (E) dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x(t) = -1 + 2\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1- Définir la fonction vectorielle F associée à (E).

2- Montrer que F est périodique de période $T = 2\pi$

3- a) par quelle transformation ponctuelle le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$

b) En déduire que F peut être étudiée sur $[0, \pi]$

4- Étudier les variations de x et y sur $[0, \pi]$

5- Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0, \pi]$

6- Tracer (E).

Exercice 14

Soit (C) une ellipse de foyers F, F' et de centre O. On note a la longueur du demi grand axe et $c=OF$.

Montrer que $M \in (C) \Leftrightarrow MF \times MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2$

NB : c'est la définition trifocale de l'ellipse.

Exercice 15

Soit (C) une ellipse de centre O, soit M sur (C), on note M' le symétrique de M par rapport à l'axe focal.

La normale à M coupe (en général) la droite (OM') en un unique point P. Quel est le lieu de P lorsque M décrit (C) ?

Exercice 16

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère l'ensemble C_α de points M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telles que : $x^2 + y^2 + 2\alpha xy - 1 = 0$

- 1- Quelle est la nature de C_α si $|\alpha| < 1$?
- 2- Préciser l'ensemble C_0 .
- 3- Préciser les ensembles C_1 et C_{-1} .
- 4- On considère le repère $R_\theta = (o, \vec{u}, \vec{v})$ obtenu par rotation d'angle θ de $\mathbb{R}$, on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de M dans ce repère. Comment choisir $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour que le terme en XY de l'équation C_α dans ce repère soit nulle ? quelle est alors l'équation de C_α
- 5- En déduire les paramètres a, b, c et e lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$.

Exercices 17

Soit (C) une ellipse de centre O, A et B deux points de (C) non alignés avec O, les tangentes en A et B se coupent en M. Montrer que M, O et le milieu I de [A, B] sont alignés.

Exercices 18

Soit (δ) une ellipse, pour $M \in (\delta)$ différent des sommets, la normale en M coupe le grand axe en C et le petit axe en C'. Montrer que le milieu de [C, C'] décrit également une ellipse (privée des sommets). Calculer son excentricité en fonction de celle de (δ) .

TRANSFORMATIONS DE L' ESPACE EN TERMINALE "C"

Rédigé par

NGO MASSEMBLA MARIE NOEL

en vue de l'obtention du

Diplôme De Professeur d'Enseignement Secondaire Deuxième Grade

dirigé par

Dr MBA Alphonse (Chargé de Cours)

M. MEGAMTCHE Luc Calvin (PLEG)

ENS, le 20 juillet 2014

♣ Résumé ♣

Dans ce mémoire , le travail est fait en deux grandes parties . Dans la première partie on élabore un cours détaillé et bien structuré sur les applications de l'espace , en terminale C , et on propose une série de trente exercices variés et regroupés en thèmes . En plus des thèmes prévus par les programmes officiels , nous étudions les rotations de l'espace et les vissages comme compléments de cours . Dans la deuxième partie qui est la réflexion pédagogique nous étudions la classifications des isométries de l'espace . Pour le faire , on utilise la classification par points invariants. De cette classification ,Il ressort que toute isométrie de l'espace distincte de l'application identique, et qui admet pour ensemble des points invariants :un plan ,est une réflexion ; une droite , est une rotation ; un singleton , est une symétrie centrale ; l'ensemble vide ,est une translation ,un vissage , ou une symétrie glissée .

♣ Abstract ♣

In this dissertation, the work has been divided into two main parts . In the first part, we have given a detailed lesson on the application of space as used in Terminale" C". We have also proposed a series of thirty exercises that are varied and regrouped as fonction of the objectives used . A part from themes found in the official programme, we have studied spatial rotation and [*vissages*] as a complement to the lesson . In the second part, which is based on pedagogic reasoning and understanding , we have studied the classification of space isometry. To do this, we have used classification by invariant points. From this classification , it is realized that, all space isometry is different from identical application, and it has a set of invariant points ; of which : plane is a reflection ; a straight line is a rotation ; a singleton is a central symmetry ; an empty set is a translation, a *vissage*, or a glided symmetry .

♣ Table des matières ♣

Dédicace	i
Remerciements	ii
Déclaration sur l'honneur	iii
Résumé	iv
Abstract	v
INTRODUCTION GENERALE	1
1 COURS SUR LES APPLICATIONS DE L'ESPACE EN TERMINALE C	2
1.1 Présentation générale de la ressource	2
1.1.1 Pré-requis	2
1.1.2 Objectifs généraux.	2
1.1.3 Objectifs pédagogiques spécifiques.	2
1.1.4 Schema pédagogique de la ressource	3
1.1.5 Généralités	3
1.2 TRANSLATIONS ET HOMOTHETIES	4
1.2.1 Translations	4
1.2.2 Homothéties de l'espace	8
1.3 PROJECTIONS DANS L'ESPACE	17
1.3.1 Projection sur un plan	17
1.3.2 Projection sur une droite (Δ) parallèlement à un plan (Π).	22
1.4 REFLEXIONS	27
1.4.1 Activité	27
1.4.2 Définition	29
1.4.3 Propriétés	29

1.4.4	Expression analytique d'une réflexion de plan	30
1.4.5	Composée de deux réflexions de plans parallèles	31
1.4.6	Exercice d'application	32
1.5	ROTATIONS DANS L'ESPACE	33
1.5.1	Demi-tour	33
1.5.2	Rotations	38
1.6	EXERCICES	40
1.6.1	INTRODUCTION	40
1.6.2	ENONCES DES EXERCICES	41
1.6.3	Projections	42
1.6.4	Reflexions	44
1.6.5	Demi-tours et Rotations	46
2	REFLEXION PEDAGOGIQUE	50
2.1	ORIGINE ET MOTIVATIONS	50
2.2	CLASSIFICATION DES ISOMETRIES PAR POINTS INVARIANTS	51
2.2.1	Rappels et présentation d'un vissage	51
2.2.2	Classification des Isometries par points invariants	54
2.2.3	Tableaux recapitulatifs de la classification des isométries.	57
	CONCLUSION GENERALE	59
	Bibliographie	60

♣ INTRODUCTION GENERALE ♣

La quête permanente pour l'amélioration de l'enseignement des mathématiques et les progrès faits en didactique des mathématiques, ont permis, la création de plusieurs projets didactiques dont le but est non seulement de rendre plus accessibles les connaissances mathématiques, mais aussi de diffuser des connaissances mathématiques nécessaires aux occupations des hommes. Autrement dit, arrimer l'enseignement des mathématiques aux TICE (Technologie de l'information et de la communication pour l'enseignement) ; d'une part, et d'autre part, dispenser des savoirs mathématiques utiles pour résoudre les problèmes de la vie courante. C'est dans cette optique, que le projet PReNUM-AC (Production de Ressources Numériques pour l'enseignement des mathématiques au secondaire en Afrique Centrale), nous a permis de produire une ressource sur les applications de l'espace en terminale C, en vue d'améliorer le cours contenu dans les différents manuels au programme. Ainsi ce mémoire comporte deux grandes parties, la première est une ressource, qui traite tout le cours sur les applications de l'espace en classe de terminale C-E du programme officiel de mathématiques en vigueur au Cameroun. L'objectif principal de la ressource étant de produire un cours bien structuré et accessible à tous, un effort particulier a été fait, tant dans le domaine pédagogique que dans le domaine technique, afin de rendre l'ensemble encore plus claire. Ainsi, de nombreux exercices adaptés aux différents objectifs pédagogiques ont été proposés ; des innovations pédagogiques ont été introduites. La deuxième partie qui est réflexion pédagogique est un complément de cours inspiré des difficultés que les enseignants ont à illustrer par des exemples précis, une conception active de la pédagogie des mathématiques relative à ce cours. C'est pourquoi dans cette partie nous étudierons la classification des isométries par points invariants, pour donner aux enseignants un outil pouvant les aider à implanter facilement le cours sur les applications de l'espace en terminale "C". L'ouvrage comprend 2 chapitres : un chapitre pour le cours subdivisé en sept parties clairement différenciées et représentant chacune une notion ; et un autre pour la réflexion pédagogique. La conclusion de ce mémoire retrace la quintessence de ce qui y a été développé et envisage des perspectives attenantes .

COURS SUR LES APPLICATIONS DE L'ESPACE EN TERMINALE C

1.1 Présentation générale de la ressource

1.1.1 Pré-requis

. Pour mieux aborder ce cours, l'élève doit connaître les notions suivantes :

- Transformations affines du plan.
- Orthogonalité dans l'espace.
- Vecteurs de l'espace.
- Géométrie analytique dans l'espace.
- Isométrie du plan .

1.1.2 Objectifs généraux.

- Proposer à nos collègues et à leurs élèves un cours utile et agréable à la bonne compréhension des applications de l'espace.
- Apporter des améliorations et des compléments sur le cours contenu dans les manuels au programme , afin de permettre aux élèves d'assimiler ces nouvelles notions et d'aborder ainsi dans de bonnes conditions , le cours de géométrie et d'algèbre linéaire fait à université.

1.1.3 Objectifs pédagogiques spécifiques.

A la fin de ce cours, l'élève devra être capable de :

- Reconnaître par des propriétés bien claires chacune des applications de l'espace et les caractériser.
- Donner l'expression analytique de chacune de ces applications de l'espace.

1.1. Présentation générale de la ressource

- De faire la composition entre ces applications
- Définir une rotation de l'espace , déterminer son angle.
- Définir et reconnaître un vissage
- utiliser la classification des isométries de l'espace pour résoudre les exercices.

1.1.4 Schema pédagogique de la ressource

1. Activités d'approches

Elles introduisent des notions nouvelles et ressortent l'objectif général de la notion à enseigner. En général leurs conclusions seront mises en évidence.

2. Définitions

Bien structurées, elles seront écrites dans un langage accessible à tous.

3. Propriétés

Elles énonceront tous les résultats du programme et seront illustrées d'exemples et complétées par des remarques et commentaires.

4. Exercices d'application

Chacun de ces exercices porte sur un savoir faire énoncé en titre. La solution proposée fait ressortir clairement le point méthode et explique aussi la démarche suivie pour trouver une solution.

1.1.5 Généralités

Dans les classes précédentes, nous avons étudié le parallélisme et l'orthogonalité des droites et des plans de l'espace. Dans ce chapitre nous utiliserons ces notions pour définir des applications de l'espace et étudier leurs propriétés. Dans cette ressource, l'espace ξ est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $\vec{\mathcal{W}}$ désigne l'ensemble des vecteurs de l'espace.

- Le vocabulaire et les résultats concernant les applications du plan s'étendent à l'espace.
- Une transformation de l'espace est une application bijective de ξ dans ξ .
 - Une isométrie de l'espace ξ est une application de ξ dans ξ qui conserve les distances.
 - Une application affine de ξ est une application de ξ dans ξ dont l'application linéaire associée conserve le coefficient de colinéarité.

1.2. TRANSLATIONS ET HOMOTHETIES

- Une application de ξ dans ξ est une application affine si et seulement si elle vérifie l'une ou l'autre des conditions suivantes :
- Elle conserve le barycentre de n points pondérés ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$)
 - Son expression analytique est de la forme :
$$\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$$
- Les propriétés des applications affines du plan s'étendent à l'espace. En particulier :
- Une application affine de ξ est déterminée par la donnée d'un repère de ξ et de son image ;
 - L'ensemble des points invariants par une application affine est $\emptyset$, un singleton, une droite, un plan, ou ξ
 - L'image d'une droite par une application affine est un singleton ou un plan ;
 - A toute application affine de ξ est associé un endomorphisme φ de $\vec{\mathcal{W}}$ dans lui-même telle que pour tous points A et B de ξ on a : $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$
- Toute isométrie de l'espace ξ est une transformation affine.
- Une isométrie conserve l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité.
- Une isométrie conserve les aires et les volumes.

1.2 TRANSLATIONS ET HOMOTHETIES

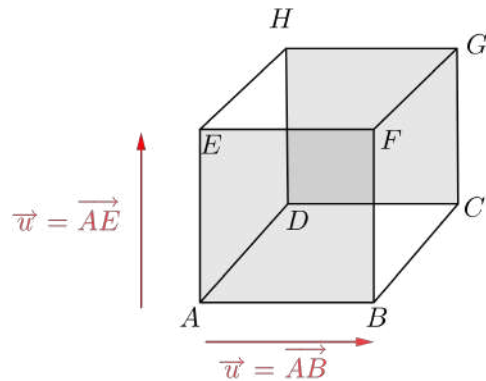
1.2.1 Translations

Activité

Soit $ABCDEFGH$, un cube

1. Déterminer les images par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$ des points A, B, C, D .
2. Déterminer les images par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ des points A, D, H, D
3. On considère le repère orthonormal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Donner coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ dans ce repère.
4. Définir analytiquement la translation de vecteurs $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$

Solution



1. Les points E, F, G et H sont les images respectives des points A, B, C et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.
2. Les points B, C, G et F sont les images respectives des points A, D, H, D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Donnons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1, 0, 0)$.
De même, on a $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} = (0, 0, 1)$.
4. Donnons l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$.
Posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$.
alors, on a $\overrightarrow{u}(1, 0, 1)$.

Ainsi soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y', z')$ son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

On a :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \iff \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \\ z' = z + 1 \end{cases}$$

1.2. TRANSLATIONS ET HOMOTHETIES

est l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ et on note $t_{\vec{u}}$, l'application de l'espace dans lui même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. C'est à dire que $t_{\vec{u}}(M) = M'$

Remarque 1.2.1. - Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $M' = M$, est l'application identique et tous les points de l'espace sont invariants par $t_{\vec{0}}$.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, la translation de vecteur $\vec{u}$ n'admet aucun point invariant.

Propriétés

P1) (Propriété fondamentale) Une application t de l'espace est une translation si et seulement si l'image de tout couple de point (M, N) est un couple de points (M', N') tels que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Conséquence

On a $MN = M'N'$; ainsi t , conserve la distance est une isométrie.

P2) L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.

Par une translation :

P3) L'image d'une figure plane est une figure plane qui lui est superposable.

P4) L'image d'un solide de l'espace est un solide de l'espace qui lui est isométrique

P5) L'image d'un plan est un plan qui lui est parallèle.

P6) L'application réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

P7) La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Expression analytique d'une translation

Soit t une translation de vecteur $\vec{u}(a, b, c)$, $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $M'(x', y', z')$ son image par la translation $t_{\vec{u}}$; on a

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

et les coordonnées de $M'(x', y', z')$ vérifient :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

Proposition

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}(a, b, c)$ est :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

Exemple 1.2.1. Donnez l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}(1, -2, -1)$. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $M'(x', y', z')$ son image par $t_{\vec{u}}$. On a :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff \begin{pmatrix} x' - x \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z - 1 \end{cases}$$

Exercices d'application

Exercice 1.2.1. Soit t une translation de vecteur non nul $\vec{u}$.

1. Caractériser les plans $(\mathcal{P})$ tels que $t(\mathcal{P}) = (\mathcal{P})$.
2. Caractériser les droites $(\mathcal{D})$ telles que $t(\mathcal{D}) = (\mathcal{D})$.

Solution

1. L'ensemble des plans $(\mathcal{P})$ tels que $t(\mathcal{P}) = (\mathcal{P})$ est l'ensemble des plans parallèles à la direction de $\vec{u}$
2. L'ensemble des droites $(\mathcal{D})$ telles que $t(\mathcal{D}) = (\mathcal{D})$ est l'ensemble des droites dirigées par le vecteur $\vec{u}$.

Exercice 1.2.2. Soient les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations respectives $2x + 3y + 2 = 0$ et $2x + 3y + z - 2 = 0$.

1.2. TRANSLATIONS ET HOMOTHÉTIES

1. Vérifier que ces 2 plans sont parallèles.
2. En déduire qu'il existe une translation dont on déterminera le vecteur de translation qui transforme $(\mathcal{P})$ en $(\mathcal{P}')$.

Solution

1. Vérifions que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles. Un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ est $\vec{n}(2, 3, 1)$ qui est aussi le vecteur normal de $(\mathcal{P}')$.
Donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles.
2. Soit $A(1, -3)$ un point de l'espace appartenant au plan $(\mathcal{P})$. Alors on a $t(A) \in (\mathcal{P}')$ puisque $t((\mathcal{P})) = (\mathcal{P}')$.

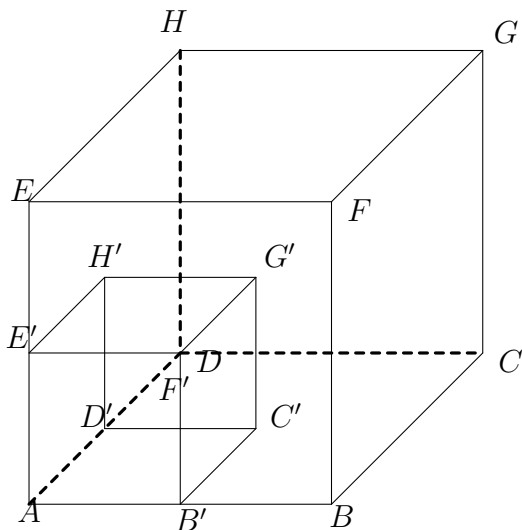
1.2.2 Homothéties de l'espace

Activité

Soit $ABCDEFGH$ un cube, h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. On donne $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $B(0, 0, 1)$, $C(1, 1, 0)$, $F(1, 0, 1)$, $G(1, 1, 1)$, $H(0, 1, 1)$, dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

1. Construire les images par h de tous les sommets du cube. Quelles sont les caractéristiques du solide obtenu ?
2. Déterminer l'expression analytique de h' , homothétie de centre $G(1, 1, 1)$ et de rapport $k = 2$ dans le repère (A, B, D, E) .

solution



1.2. TRANSLATIONS ET HOMOTHÉTIES

1. Déterminons les images par h de tous les sommets du cube .

On a : $h(A) = A, h(B) = B', h(C) = C', h(D) = D', h(F) = F', h(G) = G', h(H) = H'$, avec : $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$. Ainsi :

Le solide obtenu est un cube d'arête $A'B' = \frac{1}{2}AB$.

2. Donnons l'expression analytique de $h'(G, 2)$, homothétie de centre G et de rapport 2

Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$, $M'(x', y', z')$ son image par h' . On a :

$$\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 1 \\ z' - 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y - 1 \\ z' = 2z - 1 \end{cases} \quad \text{dans } (A, B, D, E).$$

Définition-exemple

Soit O un point de $\mathcal{E}$ et k un nombre réel non nul. On appelle homothétie de centre O et de rapport k et on note $h(O, k)$, l'application h du plan dans lui même qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

Cas particuliers

- Si $k = 1$ alors $M' = M$, h est l'application identique et tous les points de $\mathcal{E}$ sont invariants.
- Si $k = -1$, l'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie de centre O .

Remarque 1.2.2. Le rapport d'une homothétie est toujours non nul.

Propriétés

Propriété caractéristique

Soit k un nombre réel non nul et différent de 1. Une application de $\mathcal{E}$ dans lui même est une homothétie de rapport k si et seulement si l'image de tout couple de points (M, N) est un couple (M', N') tel que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

1.2. TRANSLATIONS ET HOMOTHÉTIES

Autres propriétés

- P_1) Tout homothétie de l'espace conserve : le parallélisme, l'orthogonalité, les angles orientés, le contact.
- P_2) Les homothéties ne conservent pas la distance, ne conservent pas les aires, ne conservent pas les volumes. Donc les homothéties ne sont pas des isométries.
- P_3) Les homothéties transforment :
- Une droite $(\mathcal{D})$ en une droite parallèle à $(\mathcal{D})$.
 - Un solide en un solide de même nature
 - Un plan en un plan parallèle.
 - Un parallélogramme en un parallélogramme.
- P_4) Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 , les volumes par $|k|^3$.
- P_5) L'application réciproque de l'homothétie de centre O et de rapport k est l'homothétie de même centre et de rapport $\frac{1}{k}$, $k \neq 0$
- P_6) Les homothéties de l'espace sont des transformations bijectives de l'espace.

Expression analytique d'une homothétie

L'expression analytique de l'homothétie de rapport k non nul est donnée de la manière suivante dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $h(\Omega, k)$ l'homothétie de centre $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et de rapport $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$ et $M'(x', y', z')$ son image par h . On a :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \\ z' - z_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \\ z' = kz + (1 - k)z_0 \end{cases}.$$

Exemple 1.2.2. L'espace est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Définir analytiquement l'homothétie de centre $I(1, -2, 5)$ et de rapport $k = \frac{3}{2}$.
2. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application définie analytiquement par
$$\begin{cases} x' = -2x - 4 \\ y' = -2y + 1 \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$$

Solution

1. Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$ et $M'(x', y', z')$ son image par h . On a

$$\overrightarrow{IM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' + 2 \\ z' - 5 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 2 \\ z - 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{3}{2}y + 1 \\ z' = \frac{3}{2}z - \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{dans } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

2. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'application h d'expression

$$\text{analytique } \begin{cases} x' = -2x - 4 \\ y' = -2y + 1 \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$$

Cette expression analytique a la forme caractéristique de l'expression analytique d'une homothétie de rapport $k = -2$.

Déterminons l'ensemble des points invariants pour avoir les coordonnées du centre Ω .

$$\begin{cases} x = -2x - 4 \\ y = -2y + 1 \\ z = -2z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -4 \\ 3y = 1 \\ 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

D'où $\Omega \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc h est l'homothétie de centre $\Omega \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et de rapport $k = -2$.

Composée de deux homothéties

Composée de deux homothéties de même centre

Activité

On donne le point $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $h_1 = h(A, -3)$, $h_2 = h(A, \frac{1}{2})$, $h_3 = h(A, \frac{1}{3})$.

Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'expression analytique de $h_1 \circ h_2$ et $h_1 \circ h_3$.

Solution

1. $h_1 \circ h_2$ est l'homothétie de centre A et de rapport $k = -\frac{3}{2}$. Elle a pour expression analy-

$$\text{tique : } \begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{2}y + 5 \\ z' = -\frac{3}{2}z - 5 \end{cases} \quad \text{dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

2. $h_1 \circ h_3$ est l'homothétie de centre A et de rapport $k = -1$ donc la symétrie de centre A .

$$\text{Elle a pour expression analytique : } \begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -y + 4 \\ z' = -z - 4 \end{cases} \quad \text{dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

Théorème 1.1. Soit h_1 et h_2 deux homothéties de centre O et de rapport k_1 et k_2 respectivement. Alors :

1. $h_1 \circ h_2$ est une homothétie de centre O et de rapport $k_1 k_2$, si $k_1 k_2 \neq \{-1, 1\}$.
2. $h_1 \circ h_2$ est une symétrie de centre O , si $k_1 k_2 = -1$.
3. $h_1 \circ h_2$ est l'application identique, si $k_1 k_2 = 1$.

Composée de deux homothéties de centres distincts

Activité

L'espace est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $O_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $O_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $O_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et les homothéties $h_1(O_1, \frac{1}{2})$; $h_2(O_2, 2)$; $h_3(O_3, -4)$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_1 \circ h_3$ et $h_2 \circ h_1$.

Solution

$h_1 \circ h_3$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = -2$.

Pour déterminer les coordonnées de Ω , nous allons d'abord écrire l'expression analytique de $h_1 \circ h_3$. Pour cela, nous définirons analytiquement h_1 et h_3 .

En effet, soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$ et $M'(x', y', z')$ son image par $h_1 \circ h_3$. On a $M' = h_1 \circ h_3(M)$ i.e $M' = h_1[h_3(M)] = h_1(M_1)$ avec $M_1 = h_3(M)$.

1.2. TRANSLATIONS ET HOMOTHETIES

Déterminons les coordonnées de M_1 puis celles de M' . On a :

$$M_1 = h_3(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{O_3 M_1} = -4\overrightarrow{O_3 M} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 - 1 \\ z_1 + 1 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \\ z + 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_1 = -4x \\ y_1 = -4y + 5 \\ z_1 = -4z - 5 \end{cases}.$$

De même, on a

$$M' = h_1(M_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1 M'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{O_1 M} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2} \\ z' = \frac{1}{2}z_1 \end{cases} \quad \text{dans } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}). \text{ Ainsi en rempla-}$$

çant x_1, y_1 et z_1 par leur valeur respective prise dans l'expression analytique de h_1 on a :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(-4x) + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}(-4x + 5) - \frac{1}{2} \\ z' = \frac{1}{2}(-4x - 5) - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x + \frac{1}{2} \\ y' = -2y + 2 \\ z' = -2z - \frac{5}{2} \end{cases}$$

dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Ω le centre de l'homothétie est le seul point invariant par $h_1 \circ h_3$. Ainsi on a :

$$\begin{cases} x' = -2x + \frac{1}{2} \\ y' = -2y + 2 \\ z' = -2z - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

Conclusion : $h_1 \circ h_3$ est l'homothétie de centre $\Omega \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$ et de rapport $k = -2$.

$h_2 \circ h_1$ est une translation (car on a $k_1 \times k_2 = 1$) de vecteur $\overrightarrow{O_1 O'_1}$. Calculons les coordonnées de O'_1 . On a :

$$\begin{aligned} O'_1 &= h_2 \circ h_1(O_1) \\ &= h_2(O_1) \end{aligned}$$

l'expression analytique de h_2 nous permet d'obtenir facilement les coordonnées de O'_1 . $h_2(O_2, 2)$ a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y \\ z' = 2z - 1 \end{cases}$$

donc $O' \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{u} = \overrightarrow{O_1 O'_1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le vecteur de translation, dont l'expression analytique est :

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \\ z' = z - 1 \end{cases}$$

dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Théorème 1.2. Si h_1 est une homothétie de centre O_1 et de rapport k_1 , h_2 une homothétie de centre $O_2 \neq O_1$ et de rapport k_2 . Alors :

$h_2 \circ h_1$ est une homothétie de centre Ω (à déterminer) et de rapport $k_1 k_2$ si $k_1 k_2 \neq 1$; et une translation, si $k_1 k_2 = 1$. En outre $h_1 \circ h_2 \neq h_2 \circ h_1$.

Remarque 1.2.3. 1. Le centre de l'homothétie $h_2 \circ h_1$, est le point invariant par $h_2 \circ h_1$.

2. Le vecteur de la translation est déterminé en cherchant l'image d'un point par $h_2 \circ h_1$.

Composée d'une homothétie et d'une translation.

activité

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit t la translation de vecteur $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ et soit h l'homothétie de centre $\Omega(1, -3, 4)$ et de rapport $-\frac{2}{3}$.

1- Définir analytiquement l'application $f = h \circ t$.

2- Démontrer qu'il existe un point A et un seul, invariant par f puisque f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

3- Reconnaître de même l'application $g = t \circ h$. A-t-on $t \circ h = h \circ t$?

Solution

1- Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$ et $M'(x', y', z')$ son image par $h \circ t$ on a :

$$\begin{aligned} M' &= h \circ t(M) \\ &= h[t(M)] \\ &= h(M_1) \quad \text{avec } M_1 = t(M) \end{aligned}$$

Définissons analytiquement h et t

$M_1 = t(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$, donc les coordonnées de M_1 vérifient :

$$\begin{cases} x_1 = x - 2 \\ y_1 = y + 1 \\ z_1 = z - 3 \end{cases}$$

Par ailleurs on a $M' = h(M_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\Omega M_1}$ donc les coordonnées de M' vérifient :

$$\begin{cases} x' = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{5}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}y_1 - 5 \\ z' = -\frac{2}{3}z_1 + \frac{20}{3} \end{cases}$$

En remplaçant x_1 par sa valeur on a

$$\begin{cases} x' = -\frac{2}{3}x + 3 \\ y' = -\frac{2}{3}y - \frac{17}{3} \\ z' = -\frac{2}{3}z + \frac{26}{3} \end{cases}$$

qui est l'expression analytique de $h \circ t$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

2- Démontrons que l'ensemble des points invariants est un singleton.

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}x + 3 \\ y = \frac{2}{3}y - \frac{17}{3} \\ z = \frac{2}{3}z + \frac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -2x + 9 \\ 3y = -2y - 17 \\ 3z = -2z + 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = -\frac{17}{5} \\ z = \frac{26}{5} \end{cases}$$

Ainsi f est une homothétie de centre $A\left(\frac{9}{5}, -\frac{17}{5}, \frac{26}{5}\right)$ et de rapport $k = -\frac{2}{3}$

3- Déterminons l'application $t \circ h$.

$k \neq 0$, alors $t \circ h$ est une homothétie. Déterminons son centre I .

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $M''(x'', y'', z'')$ son image par $t \circ h$ on a $M'' =$

$$t \circ h(M_2). \text{ Les coordonnées } x'', y'', z'' \text{ de } M'' \text{ vérifient : } \begin{cases} x'' = x_2 - 2 \\ y'' = y_2 + 1 \\ z'' = z_2 - 3 \end{cases} \text{ où } x_2, y_2, \text{ et } z_2 \text{ vérifient :}$$

1.2. TRANSLATIONS ET HOMOTHÉTIES

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \\ y_2 = -\frac{2}{3}y - 5 \\ z_2 = -\frac{2}{3}z + \frac{20}{3} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x'' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \\ y'' = -\frac{2}{3}y - 4 \\ z'' = -\frac{2}{3}z + \frac{11}{3} \end{cases} \text{ est l'expression analytique de } t \circ h \text{ dans le}$$

repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminons les coordonnées du centre I . Posons $I(x_o, y_o, z_o)$. I est le seul

point invariant par $t \circ h$ donc ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x_o = -\frac{2}{3}x_o - \frac{1}{3} \\ y_o = -\frac{2}{3}y_o - 4 \\ z_o = -\frac{2}{3}z_o + \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -\frac{1}{5} \\ y_o = -\frac{12}{5} \\ z_o = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

d'où $t \circ h$ est l'homothétie de centre $I(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{11}{5})$ et de rapport $k = -\frac{2}{3}$ il est donc clair que lorsque $k \neq 1$, on a aussi $t \circ h \neq h \circ t$.

Théorème 1.3. Si h est une homothétie de centre O et de rapport $k \neq 1$ et t une translation de vecteur $\vec{u}$, alors $h \circ t$ est une homothétie de rapport $k \neq 1$ et une translation si $k = 1$

N B :- Si t est une translation de vecteur $\vec{v}$ l'application réciproque de t est une translation de vecteur $-\vec{v}$ et l'application réciproque de l'homothétie de rapport k est l'homothétie de même centre et de rapport $\frac{1}{k}$. par suite, l'application réciproque de l'application $h \circ t$ est l'application $(h \circ t)^{-1} = t^{-1} \circ h^{-1}$ l'homothétie de rapport $\frac{1}{k}$.

Exercices d'application

Exercice 1.2.3. Soit $ABCDEFGH$ un cube et f l'application qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

Démontrer que f est une translation

translation de vecteur $\overrightarrow{FH}$

Indication : Il suffit de montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est indépendant du point M .

Exercice 1.2.4. Soient les points $A(1, -2, 1)$ $B(-1, 0, 2)$ $A'(0, 1, 1)$ $B'(4, -3, -1)$

1- Démontrer qu'il existe une homothétie h , dont on précisera le centre et le rapport telle que $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$. **Indications :** exprimer $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ pour avoir le rapport k , puis définir analytiquement h et en déduire les coordonnées de son centre Ω , en déterminant l'ensemble des points invariants.

Solution : $h(\Omega, -2)$ avec $\Omega(\frac{2}{3}, -1, 1)$.

1.3 PROJECTIONS DANS L'ESPACE

1.3.1 Projection sur un plan

activité

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère dans l'espace ξ le plan (P) d'équation cartésienne $2x + y + 2z - 4 = 0$ et la

droite (D) de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Démontrer que la droite (D) et le plan (P) sont sécants en un point A dont on déterminera les coordonnées.

2. Soit P l'application de ξ dans ξ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$

dont les coordonnées sont données par :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(5x + y + 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + 2y - 2z + 4) \\ z' = \frac{1}{3}(-4x - 2y - z + 8) \end{cases}$$

- (a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par l'application P est le plan (P)

- (b) Démontrer que l'ensemble des antécédents du point A par l'application P est une droite parallèle à (D)

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.

4. Soit $B(1, 0, 1)$ un point de (P)

Déterminer l'ensemble des antécédents du point B par l'application P puis conclure.

Solution

1. Soit $\vec{u}(1, -1, -2)$ un vecteur directeur de (D) et $\vec{n}(2, 1, 2)$ un vecteur normal à

(P) On sait que (P) et (D) sont sécants si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$. Ainsi, on a

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$ Donc (D) et (P) sont sécants. Soit $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ Leur point

d'intersection. les valeurs de x_0, y_0, z_0 prise dans la représentation paramétrique de (D) vérifient :

1.3. PROJECTIONS DANS L'ESPACE

On a : $2(-1 + \lambda) + 1 - \lambda + 2(1 - 2\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow -3 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ d'où

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Démontrons que l'ensemble des points invariants par l'application P est le plan (P)

Soit $M(x, y, z)$ un point de ξ . M est invariant par P signifie que $P(M) = M$, on trouve que l'ensemble des points invariants est le plan d'équation : $2x + y + 2z - 4 = 0$.

3. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe dont on précisera .

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} . \text{ En remplaçant } x' \ y' \ z' \text{ par leur valeur prise dans l'expression}$$

analytique on a :

$$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5x + y + 2z - 4) - x \\ \frac{1}{3}(-2x + 2y - 2z + 4) - y \\ \frac{1}{3}(-4x - 2y - z + 8) - z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} 2x + y - 2z - 4 \\ -2x - y - 2z + 4 \\ -4x - 2y - 4z + 8 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow (2x + y + 2z - 4) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ C'est à dire que } \overrightarrow{MM'} \text{ a la direction du vecteur } \vec{u}(1, -1, -2)$$

(vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D})$). On dit que la droite $(\mathcal{D})$ est la direction de la projection P sur le plan (P)

4. Déterminons l'ensemble des antécédents du point B .

Soit $M(x, y, z)$ un point de ξ , antécédent de B par P . Alors les coordonnées de M vérifient :

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{3}(5x + y + 2z - 4) \\ 0 = \frac{1}{3}(-2x + 2y - 2z + 4) \\ 1 = \frac{1}{3}(-4x - 2y - z + 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y + 2z - 7 = 0 \\ -4x - 2y - z + 5 = 0 \end{cases} .$$

Donc l'ensemble des antécédents est une droite de l'espace (comme intersection de deux plans non parallèles) de vecteur directeur $\vec{u}(1, -1, -2)$ qui est le vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D})$.

Conclusion

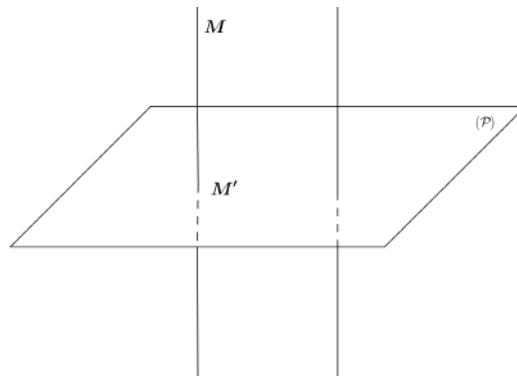
→ L'application P définie ici est la projection sur le plan (P) parallèlement à $(\mathcal{D})$ C'est pourquoi (P) est l'ensemble des points invariants et $(\mathcal{D})$ est la direction de l'ensemble des antécédents.

1.3. PROJECTIONS DANS L'ESPACE

→ La méthode suivie ici pour déterminer l'ensemble des points invariants (P) ainsi que la direction (D) est celle que nous suivrons dans le cours.

Définition

Soit (P) un plan de l'espace ξ et (D) une droite non parallèle à (P) . On appelle projection sur le plan (P) parallèlement à (D) l'application P de ξ dans ξ qui à tout point M de l'espace associe le point M' , point d'intersection de (P) avec la parallèle (D) passant par M .



Remarque 1.3.1. 1. L'image d'un point par une projection est appelée projeté de M .

Exemple : Sur la figure ci-dessus, M' est le projeté de M .

2. La projection sur un plan (P) parallèlement à une droite (D) est dite orthogonale lorsque (P) est orthogonale à (D) .
3. Pour toute projection P de l'espace, on a $P \circ P = P$. De même, toute application de l'espace vérifiant $f \circ f = f$ est une projection de l'espace.

Propriétés

Propriété immédiate

Soit P une projection sur un plan (P) parallèlement à une droite (D) .

- L'ensemble des points invariants par P est le plan (P)
- L'ensemble des antécédents par la projection P est la parallèle à (D) .

Autres propriétés

- i) **Conservation du coefficient de colinéarité.** Soient A, B et C trois points et A', B', C' leurs images respectives par une projection. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$ alors on a : $\overrightarrow{A'C'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$

Conséquences

1.3. PROJECTIONS DANS L'ESPACE

C_1) 3 points alignés ont aussi leurs images alignés par une projection.

C_2) Toute projection de l'espace est une application affine, d'application linéaire associée une projection vectorielle $\vec{P}$.

ii) Image d'une droite, d'un plan.

Proposition 1.1. .

1. Soit P une projection sur un plan parallèlement à une droite $(\mathcal{D})$. Soit (AB) une droite. A' et B' les images respectives des points A et B par P .
 - Si $A' \neq B'$ alors l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$
 - Si $A'=B'$ alors l'image de la droite (AB) est le singleton $\{A'\}$
2. Soit P une projection, $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ deux droites parallèles, alors leurs images $(\mathcal{D}'_1)$ et $(\mathcal{D}'_2)$ par P sont parallèles.
3. Soit P la projection sur le plan (P) parallèlement à une droite $(\mathcal{D})$. L'image par P d'un plan parallèle à $(\mathcal{D})$ est la droite d'intersection de ce plan avec le plan (P)

Exercice d'application

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'application P de ξ dans ξ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point

$M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -x - y + 2z - 1 \\ y' = -2x + 2z - 1 \\ z' = -2x - y + 3z - 1 \end{cases}, \text{ et le point } A(4, -5, 5)$$

1. Calculer les coordonnées de $M''(x'', y'', z'')$ définis par $P \circ P(M) = M''$ puis déterminer la nature de P .
2. Quelle est l'image par P de la droite d'équation : $x - 1 = y - 2 = z - 3$
3. Quelle est l'image par P de la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$
4. Quelle est l'image par P du plan d'équation : $3x - y - 2z + 2 = 0$

Solution :

1. Calculons $P \circ P(M) = M''$.

On a $P \circ P(M) = P(P(M)) = P(M') = M''$ donc x'', y'' et z'' vérifient :

$$\begin{cases} x'' = -x' - y' + 2z' - 1 \\ y'' = -2x' + 2z' - 1 \\ z'' = -2x' - y' + 3z' - 1 \end{cases} \quad \text{on trouve que :} \quad \begin{cases} x'' = -x - y + 2z - 1 = x' \\ y'' = -2x + 2z - 1 = y' \\ z'' = -2x - y + 3z - 1 = z'. \end{cases}$$

Donc $P \circ P(M) = P(M)$. D'où P est une projection de ξ

2. Déterminons l'ensemble des points invariants et la direction (qui est l'ensemble des antécédents de A' par P).

i) Ensemble des points invariants par P. Soit $M(x, y, z)$ un point de ξ . M est invariant par P signifie que $P(M) = M$ on trouve que l'ensemble des points invariants est le plan : $2x + y - 2z + 1 = 0$

ii Déterminons l'ensemble des antécédents du point A'

On a $A(4; -5; 5)$ Les coordonnées du point A' sont obtenu à partir de l'expression analytique de P . D'où $A'(10; 1; 11)$

Ainsi l'ensemble $(\mathfrak{D})$ des antécédents de A' vérifie :

$$\begin{cases} 10 = -x - y + 2z - 1 \\ 1 = -2x + 2z - 1 \\ 11 = -2x - y + 3z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z + 11 = 0 \\ 2x + y - 3z + 12 = 0 \end{cases}.$$

3. Déterminons l'image par P de la droite d'équation $x - 1 = y - 2 = z - 3$

La droite ainsi définie passe par le point $B(1; 2; 3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 1; 1)$.

Donc son image passe par $B' = P(B)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}' = \vec{P}(\vec{v})$, Avec $B'(2; 3; 4)$ et $\vec{v}' = \vec{0}$.

Ainsi, comme $P(\vec{v}) = \vec{0}$ alors l'image de cette droite est le singleton $\{B'\}$

4. Déterminons l'image par P de la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \quad .(\lambda \in \mathbb{R}).$$

La droite ainsi définie passe par le point $C(1; 2; 3)$ et dirigée par $\vec{v}(2; 1; 2)$. On a $\vec{v}' = P(\vec{v}) = (1; 0; 1) \neq \vec{0}$. On a $C'(2; 3; 4)$, comme $\vec{v}' \neq \vec{0}$, l'image de cette droite est la droite passant par $C'(2; 3; 4)$ et dirigée par $\vec{v}' = (1; 0; 1)$.

5. Déterminons l'image par P du plan d'équation $3x - y - 2z + 2 = 0$.

1.3. PROJECTIONS DANS L'ESPACE

Le plan donné passe par le point $I(0; 0; 1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1; 1; 1)$ et $\vec{w}(1; 3; 0)$.

On a $P(\vec{u}) = \vec{0}$ et $P(\vec{w})(-4; -2; -5) \neq \vec{0}$. Par suite, $P(P)$ est la droite passant par $I' = P(I) = (1; 1; 2)$, et dirigée par $P(\vec{w}) = (-4; -2; -5)$.

Commentaire On pouvait aussi déterminer l'image par P du plan en calculant $\vec{P}(\vec{n})$ avec $\vec{n}$ vecteur normal du plan.

1.3.2 Projection sur une droite (Δ) parallèlement à un plan (Π) .

Activité

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère dans l'espace ξ , le plan (Π) d'équation cartésienne $2x + y + 2z - 4 = 0$ et la

$$\text{droite } (\Delta) \text{ de représentation paramétrique } \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

1. Soit q l'application de ξ dans ξ définie par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}(2x + y + 2z + 1) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z + 4) \\ z' = \frac{1}{3}(4x + 2y + 4z - 1) \end{cases}$$

2. Démontrer que pour tout point M de l'espace ξ $q \circ q(M) = q(M)$.
3. Démontrer que l'ensemble des points invariants par q est la droite définie à l'énoncé.
4. Démontrer que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ est un plan dont on précisera une base (deux vecteurs directeurs).
5. Vérifier que l'ensemble des antécédents du point A par l'application q est un plan parallèle à celui de l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$.

Solution.

1. Démontrons que pour tout point M de l'espace ξ $q \circ q(M) = q(M)$

$$\text{On a } q \circ q(M) = q(q(M)) = q(M') = M''$$

Ainsi on a

$$\begin{cases} x'' = -\frac{1}{3}(2x' + y' + 2z' + 1) = x' \\ y'' = -\frac{1}{3}(2x' + y' + 2z' + 4) = y' \\ z'' = \frac{1}{3}(4x' + 2y' + 4z' - 1) = z' \end{cases}$$

1.3. PROJECTIONS DANS L'ESPACE

Donc $q \circ q(M) = q(M)$. D'où q est une projection de l'espace.

2. Démontrons que l'ensemble des points invariants par q est la droite définie à l'énoncé.

Soit $M(x, y, z)$ un point de ξ . M est invariant par q signifie que $q(M) = M$. On trouve que l'ensemble des points invariants est :
$$\begin{cases} -5x - y - 2z - 1 = 0 \\ 4x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}, \text{ système d'équations cartésiennes de la droite } (\Delta) \text{ passant par le point } A(-1, 2, 1) \text{ et dirigée par le vecteur } \vec{u}(1, -1, -2) \text{ qui sont les caractéristiques de la droite définie à l'énoncé.}$$

3. Démontrons que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ est un plan dont on précisera deux vecteurs directeurs.

$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}$. En remplaçant $x' y' z'$ par leur valeur prise dans l'expression analytique, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{cases} x' - x = \frac{1}{3}(-5x - y - 2z - 1) \\ y' - y = \frac{1}{3}(2x - 2y + 2z + 4) \\ z' - z = \frac{1}{3}(4x + 2y + z - 1) \end{cases} \quad \text{posons : } X = x' - x; Y = y' - y; Z =$$

$z' - z$ et cherchons quatre réels a, b, c, d tels que $a(x' - x) + b(y' - y) + c(z' - z) + d = 0$ c'est à dire que $aX + bY + cZ + d = 0$. Il est facile de remarquer que $2X + Y + 2Z = 0$ donc il suffit de prendre $a = 2; b = 1; c = 2$ et $d = 0$. Ainsi on déduit que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est contenu dans le plan d'équation cartésienne : $2X + Y + 2Z = 0$ les vecteurs $\vec{u}_1(-1, 0, 1)$ et $\vec{v}_2(1, -2, 0)$ forment une base de ce plan.

4. Vérifions que l'ensemble des antécédents du point $A(-1, 2, 1)$ est un plan parallèle au plan trouvé à la question précédente. l'ensemble des antécédents du point A est défini

$$\text{par : } \begin{cases} -1 = -\frac{1}{3}(2x + y + 2z + 1) \\ 2 = \frac{1}{3}(2x + y + 2z + 4) \\ 1 = \frac{1}{3}(4x + 2y + 4z - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y - 2z = 0 \\ 2x + y + 2z - 2 = 0 \\ 4x + 2y + 4z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{ce système est}$$

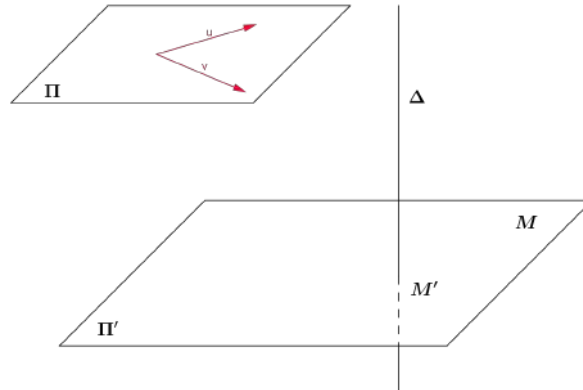
équivalent à l'équation : $2x + y + 2z - 2 = 0$. Il est évident que cette équation cartésienne est celle d'un plan parallèle au plan d'équation cartésienne $2X + Y + 2Z = 0$

Définition

Soit (Δ) une droite de ξ et (Π) un plan non parallèle à (Δ) . On appelle projection sur (Δ)

1.3. PROJECTIONS DANS L'ESPACE

parallèlement à (Π) l'application q de ξ dans ξ qui à tout point M du plan associe le point M' , intersection de Δ avec le plan parallèle à (Π) passant par M .



$$q(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\Delta) \\ (MM') // (\Pi) \end{cases}$$

Propriétés

i) Propriété immédiate

Soit (Δ) une droite et (Π) un plan. Soit q la projection sur (Δ) parallèlement à (Π) .

L'ensemble des points invariants par q est la droite (Δ) et l'ensemble des antécédants est le plan P parallèle à (Π) .

ii) Autres propriétés.

Les autres propriétés sont les même que celles énoncées pour les projections sur un plan.

Expressions analytiques d'une projection.

1. Projection sur un plan P parallèlement à une droite $(\mathcal{D})$.

Soit P la projection sur un plan P parallèlement à une droite $(\mathcal{D})$. L'expression analy-

tique de P s'obtient à partir des propriétés suivantes : $M' = P(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in P \\ (MM') // (\mathcal{D}) \end{cases}$

2. Projection sur une droite (Δ) parallèlement à un plan (Π) .

Soit q , la projection sur une droite (Δ) parallèlement à un plan (Π) .

L'expression analytique de q est obtenue ainsi qu'il suit :

$$M' = q(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\Delta) \\ (MM') // (\Pi) \end{cases}$$

1.3. PROJECTIONS DANS L'ESPACE

APPLICATION Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit le plan d'équation : $x - 3y + z - 1 = 0$ et $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}; \vec{u})$ la droite passant par $A(1, 0, 1)$ et dirigée par $\vec{u}(-2, 1, 1)$. définissons analytiquement les projections P sur le plan (P) parallèlement à la droite $(\mathfrak{D})$; puis la projection q sur la droite $(\mathfrak{D})$ parallèlement au plan (P) .

Solution La projection P est caractérisée par deux propriétés : pour tout point $M(xy, z)$ de ξ d'image $M'(x', y', z')$ par la projection P , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$; et le point M' appartient au plan (P) . Soit λ , un nombre réel, la première propriété s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x - 2\lambda \\ y' = y + \lambda \\ z' = z + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \text{ La deuxième s'écrit : } x' - 3y' + z' - 1 = 0, \text{ le réel } \lambda \text{ est donc}$$

tel que l'on a $x - 2\lambda - 3(y + \lambda) + z - 1 = 0$ c'est à dire que : $\lambda = \frac{1}{4}(x - 3y + z - 1)$ en reppotant cette valeur de λ dans le système précédent, nous obtenons l'expression analytique

$$\text{de la projecton } P : \begin{cases} x' = \frac{1}{4}(2x + 6y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{4}(x + y + z - 1) \\ z' = \frac{1}{4}(x - 3y + 5z - 1) \end{cases} . \text{ la projection } q \text{ est caractérisé par deux}$$

propriétés : pour tout point $M(x, y, z,)$ de ξ et d'image $M'(x', y', z')$ par la projection q , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur normal du plan (P) ; et le point M' appartient à la droite $(\mathfrak{D})$. La première propriété s'écrit : $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x' - x) - 3(y' - y) + (z' - z) = 0$. la

$$\text{deuxième s'écrit : } \overrightarrow{AM'} = \lambda' \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 2\lambda' \\ y' = y + \lambda' \\ z' = z + \lambda' \end{cases} \quad (\lambda' \in \mathbb{R}). \text{ de ces deux expressions on}$$

obtient l'égalité suivante : $(1 - 2\lambda') - 3\lambda' + (1 + \lambda') = x - 3y + z$ doù $\lambda' = \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 2)$.

en remplaçant cette valeur de λ' dans le système précédent on a l'expression analytique de la

$$\text{projection } q : \begin{cases} x' = \frac{1}{4}(2x + 6y + 2z) \\ y' = \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 2) \\ z' = \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 6) \end{cases} \quad (\lambda' \in \mathbb{R}).$$

Exercice d'application

On considère l'application f de l'espace ξ dans lui même qui à tout point $M(x, y, z)$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(x - 2y + 2z) \\ y' = -\frac{2}{9}(x - 2y + 2z) \\ z' = \frac{2}{9}(x - 2y + 2z) \end{cases}$$

1. Démontrer que l'image M' de tout point M appartient à une droite $(\mathcal{D})$ dont on déterminera un repère $(A, \vec{u})$
2. Démontrer que pour tout point M d'image M' , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonale à $\vec{u}$.
En déduire que f est la projection orthogonale sur $(\mathcal{D})$.

Solution

1. Démontrons que l'image M' de tout point M appartient à une droite de l'espace dont on précisera le repère. en observant l'expression analytique de l'application f on remarque que son système d'équation est équivalent au système suivant :
$$\begin{cases} 2x' + y' = 0 \\ y' + z' = 0 \end{cases}, \text{ qui est}$$
 un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point O (origine du repère) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1, 2, -2)$.

2. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$. On a :
$$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}.$$

En remplaçant $x' y' z'$ par leur valeur respective prise dans l'expression analytique, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{cases} x' - x = \frac{1}{9}(-8x - 2y + 2z) \\ y' - y = \frac{1}{9}(-2x - 5y - 4z) \\ z' - z = \frac{1}{9}(2x - 4y - 5z) \end{cases} \quad \text{posons : } X = x' - x; Y = y' - y; Z = z' - z$$

et cherchons trois réels a, b, c tels que $a(x' - x) + b(y' - y) + c(z' - z) = 0$ c'est à dire que $aX + bY + cZ = 0$. Il est facile de remarquer que $X - 2Y + 2Z = 0$ donc il suffit de prendre $a = 1; b = -2; c = 2$. l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ est contenu dans un plan de vecteur normal $\vec{n}(1, -2, 2)$ colinéaire au vecteur $\vec{u}(-1, 2, -2)$; d'où $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{u}$. On conclut alors que l'application f est la projection orthogonale sur la droite $(\mathcal{D})$.

1.4 REFLEXIONS

1.4.1 Activité

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(3x + 6y - 2z - 14) \\ y' = \frac{1}{7}(6x - 2y + 3z + 21) \\ z' = \frac{1}{7}(-2x + 3y + 6z - 7) \end{cases}.$$

1. Vérifier que $f \circ f(M) = M$
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f ;
3. On suppose que l'ensemble des points invariants est le plan (P) d'équation : $2x - 3y + z + 7 = 0$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au plan (P) ;
4. Soit $I(x_1, y_1, z_1)$ le milieu du segment $[MM']$, montrer que I appartient au plan (P) ;
5. Conclure sur la nature et les éléments caractéristiques de f ;
6. Soit Q le plan d'équation cartésienne : $x - 2y + z - 3 = 0$. Donner l'expression analytique de la réflexion $S_{(Q)}$, de base Q .

Solution

1. Vérifions que $f \circ f(M) = M$ soit $M(x, y, z)$ un point de $\xi, M'(x', y', z')$ son image par f ; et $M''(x'', y'', z'')$ celle de M' par f . On a :

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{7}(3x' + 6y' - 2z' - 14) \\ y'' = \frac{1}{7}(6x' - 2y' + 3z' + 21) \\ z'' = \frac{1}{7}(-2x' + 3y' + 6z' - 7) \end{cases}$$
 On trouve que $(x'' = x, y'' = y, \text{ et } z'' = z)$; ainsi on a donc $f \circ f(M) = M$, on dit que f est une application involutive.

2. Déterminons l'ensemble des points invariants par f soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace, M est invariant par f signifie que $f(M) = M$.

On trouve que l'ensemble des points invariants par f est le plan (P) d'équation cartésienne : $2x - 3y + z + 7 = 0$. On dit que (P) est la base de l'application f .

3. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au plan (P) . soit $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ son image par f . On a :

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}. \text{ En remplaçant } x', y', z' \text{ par leur valeur prise dans l'expression ana-}$$

lytique, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}(-4x + 6y - 2z - 14) \\ \frac{1}{7}(6x - 9y + 3z + 21) \\ \frac{1}{7}(-2x + 3y - z - 7) \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{7}(-2x + 3y - z - 7)(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$. Donc le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur normal de (P). D'où $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à (P).

4. Soit $I(x_1, y_1, z_1)$ le milieu du segment $[MM']$, montrons que I appartient au plan (P)

Exprimons les coordonnées du point I en fonction de $x, y, et z$.

$$\text{Ainsi on a : } \begin{cases} x_1 = \frac{x'+x}{2} = \frac{1}{7}(5x + 3y - z - 7) \\ y_1 = \frac{y'+y}{2} = \frac{1}{7}(3x + \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}z + \frac{21}{2}) \\ z_1 = \frac{z'+z}{2} = \frac{1}{7}(-x + \frac{3}{2}y + \frac{13}{2}z - \frac{7}{2}) \end{cases}.$$

On remarque que : $2x_1 - 3y_1 + z_1 + 7 = 0$, d'où le point I appartient au plan (P)

Conclusion : Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au plan (P) et le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (P) qui est l'ensemble des points invariants. Alors l'application f est la reflexion de base (P).

5. Soit (Q) le plan d'équation cartésienne : $x - 2y + z - 3 = 0$. Donnons l'expression analytique de la reflexion $S_{(Q)}$, de base (Q). Soit $M(xy, z)$ un point de ξ d'image $M'(x', y', z')$ par la réflexion de plan (Q). On a $M' = S_{(Q)}(M)$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au plan (Q), et le milieu du segment $[MM']$ appartient au plan (Q). Soit λ , un

$$\text{nombre réel, la première propriété s'écrit : } \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y - 2\lambda \\ z' = z + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Le milieu du segment $[MM']$ est le point de coordonnées :

$$(\frac{x'+x}{2}, \frac{y'+y}{2}, \frac{z'+z}{2}) = (x + \frac{\lambda}{2}, y - \lambda, z + \frac{\lambda}{2}).$$

Ainsi la seconde propriété est vérifiée si et seulement si

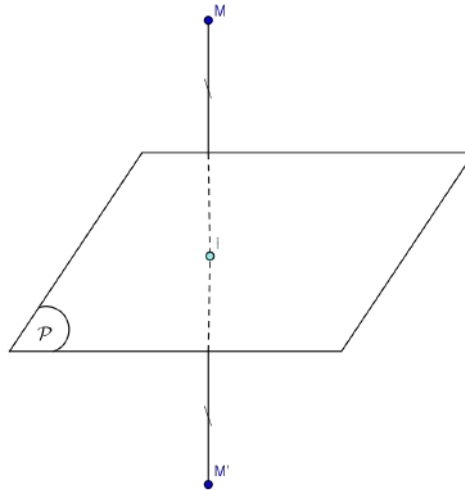
$$(x + \frac{\lambda}{2}) - 2(y - \lambda) + (z + \frac{\lambda}{2}) - 3 = 0 \text{ c'est à dire que } \lambda = -\frac{1}{3}(x - 2y + z - 3).$$

En remplaçant cette valeur de λ dans le système précédent on obtient l'expression ana-

$$\text{lytique de la reflexion } S_{(Q)} \text{ de base (Q) : } \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z - 9) \\ z' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 3) \end{cases}$$

1.4.2 Définition

Soit (P) un plan, on appelle réflexion ou symétrie orthogonale par rapport au plan (P) et on note $S_{(P)}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M non situé sur (P) associe le point M' tel que (P) soit le plan médiateur du segment $[MM']$



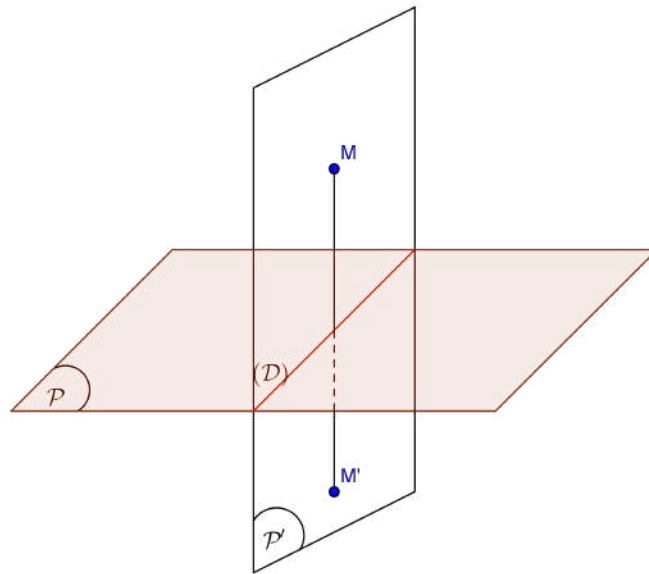
Remarque 1.4.1. - L'ensemble des points invariants de $S_{(P)}$ est le plan (P) .

- L'application réciproque de $S_{(P)}$ est $S_{(P)}$ donc $S_{(P)} \circ S_{(P)} = Id_{\mathcal{E}}$.

1.4.3 Propriétés

(P_1) Soit (P) un plan et $S_{(P)}$ la réflexion de plan (P)

(P_1) Si (Q) est un plan perpendiculaire à (P) et $(\mathcal{D})$ leur droite d'intersection, alors (Q) est globalement invariant par $S_{(P)}$ et la restriction de $S_{(P)}$ au plan (Q) est la symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$



(P_1) Si $(\mathcal{D}')$ est une droite orthogonale à (P) en un point I alors $(\mathcal{D}')$ est globalement invariante par $S_{(P)}$ et la restriction de $S_{(P)}$ à $(\mathcal{D}')$ est la symétrie de centre I .

(P_1) La réflexion de plan P est une isométrie.

(P_1) Toute réflexion de plan (P) est une application affine.

(P_1) L'image d'un plan par une réflexion de plan (P) est un plan

(P_1) l'image d'une figure plane par une réflexion de plan (P) est une figure plane de même nature.

(P_1) l'image d'un solide par une réflexion est un solide de même nature.

1.4.4 Expression analytique d'une réflexion de plan

activité

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. (P) le plan d'équation cartésienne $(P) : x - y + z + 2 = 0$.

Ecrire l'expression analytique de la réflexion $S_{(P)}$ de base P

Solution

Soit $S_{(P)}$ la réflexion de plan (P) , soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$ et $M'(x', y', z')$ son image par rapport à $S_{(P)}$.

On a : $\overrightarrow{MM'}$ colinéaire à $\vec{n}$ (vecteur normal à (P)) car (P) est plan médiateur du segment

1.4. REFLEXIONS

$[MM']$ et I milieu du segment $[MM'] \in (P)$; d'où $\exists \alpha \in \mathbb{R} / \overrightarrow{MM'} = \alpha \vec{n}$

$$\frac{x'+x}{2} - \frac{y'+y}{2} + \frac{z'+z}{2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' + x = \alpha \\ y' + y = -\alpha \\ z' + z = \alpha \\ x' + x - y' - y + z' + z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \alpha + x \\ y' = -\alpha + y \\ z' = \alpha + z \\ x' + x - y' - y + z' + z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{3}(2x - 2y + 2z + 4).$$

d'où

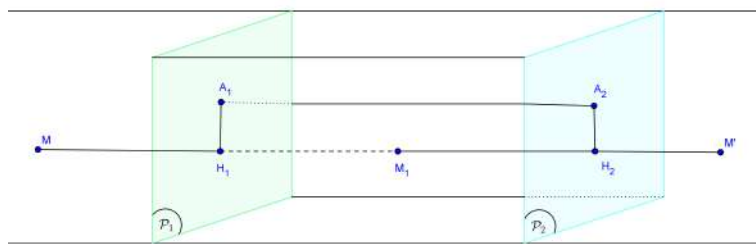
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}(x - 2y + 2z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z + 4) \\ z' = -\frac{1}{3}(2x - 2y + z + 4) \end{cases}$$

qui est l'expression analytique de $S_{(P)}$ dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.4.5 Composée de deux réflexions de plans parallèles

Activité

Soit (P_1) et (P_2) 2 plans parallèles, $S_{(P_1)}$ et $S_{(P_2)}$ deux réflexions de plan (P_1) et (P_2) respectivement. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(P_1)} \circ S_{(P_2)}$



Soit A_1 un point de (P_1) et A_2 son projeté orthogonal sur (P_2) , alors le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ est un vecteur normal à (P_1) et (P_2) .

Soit M un point de $\mathcal{E}$ M_1 son image par $S_{(P_1)}$ et M_2 son image par $S_{(P_2)}$ (comme l'indique la figure ci-dessus), designons par H_1 et (H_2) les milieux respectifs des segments $[MM_1]$ et $[M_1M_2]$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{H_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1H_2} \\ &= 2\overrightarrow{H_1H_2}. \end{aligned}$$

1.4. REFLEXIONS

Donc $S_{(P_1)} \circ S_{(P_2)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{2H_1H_2}$.

Propriétés

- P1) La composée de deux réflexions de plans parallèles est une translation de vecteur $2\vec{u}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{H_1H_2}$ (vecteur normal à ces deux plans) avec $H_1 \in (P_1)$ et H_2 son projeté orthogonal sur (P_2) .
- P2) Réciproquement, toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est la composée de deux réflexions de plans parallèles ayant $\vec{u}$ pour vecteur normal.

1.4.6 Exercice d'application

On considère dans l'espace $\mathcal{E}$ un plan $(\mathcal{P})$.

1. le plan $(\mathcal{P})$ a pour équation cartésienne : $x + 2y - z + 2 = 0$. Définir analytiquement la réflexion de plan $(\mathcal{P})$.
2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère l'application f qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ dont les coordonnées vérifient :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 6) \end{cases}$$
 - a- Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est un plan (P) .
 - b- Pour tout point M d'image M' par f démontrer que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (P) .
 - c- Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à (P) .
 - d- En déduire la nature de l'application f .

1.5 ROTATIONS DANS L'ESPACE

1.5.1 Demi-tour

activité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère l'application f définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(-8x + 4y + z + 12) \\ y' = \frac{1}{9}(4x + 7y + 4z - 4) \\ z' = \frac{1}{9}(x + 4y - 8z + 8) \end{cases}$$

1. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) dont on déterminera un repère $(A, \vec{u})$
2. Pour tout M d'image $M' = f(M)$, démontrer que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D) .
3. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux. En déduire la nature de l'application f .

Solution

1. Démontrons que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) dont on déterminera le repère $(A, \vec{v})$ soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace, M est invariant par f signifie que $f(M) = M$.

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = -8x + 4y + z + 12 \\ 9y = 4x + 7y + 4z - 4 \\ 9z = x + 4y - 8z + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -17x + 4y + z + 12 = 0 \\ x + 4y - 17z + 8 = 0 \end{cases} \quad \text{qui est}$$

une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(\frac{22}{18}, \frac{35}{18}, 1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1, 4, 1)$.

2. Démontrons que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à la droite (D) . Il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$. Le milieu I du segment $[MM']$ est le point de coordonnées $(\frac{x'+x}{2}, \frac{y'+y}{2}, \frac{z'+z}{2})$; en remplaçant $x', y', \text{ et } z'$ par leur valeur prise

$$\text{dans l'expression analytique on a } (\frac{x'+x}{2}, \frac{y'+y}{2}, \frac{z'+z}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{x+4y+z+12}{18} \\ \frac{4x+16y+4z-4}{18} \\ \frac{x+4y+z+8}{18} \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a $\overrightarrow{AI} = \frac{x+4y+z-10}{18}(1, 4, 1)$; d'où I appartient à la droite (D) .

1.5. ROTATIONS DANS L'ESPACE

3. Démontrons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux, et déduisons la nature de l'application f . Il suffit de montrer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est contenu dans un plan de vecteur

normal $\vec{u}$. On a : $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}$. En remplaçant $x' y' z'$ par leur valeur respective

prise dans l'expression analytique, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = \begin{cases} x' - x = \frac{1}{9}(-17x - 4y + z + 12) \\ y' - y = \frac{1}{9}(4x - 2y + 4z - 4) \\ z' - z = \frac{1}{9}(x + 4y - 17z + 8) \end{cases} \quad \text{posons : } X = x' - x ; Y = y' - y ;$$

$Z = z' - z$ et cherchons quatre réels a, b, c et d tels que :

$$a(x' - x) + b(y' - y) + c(z' - z) + d = 0 \text{ c'est à dire que } aX + bY + cZ + d = 0.$$

Il est facile de remarquer que $X + 4Y + Z - 4 = 0$ donc il suffit de prendre $a = 1$; $b = 4$; $c = 1$ et $d = -4$. le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est contenu dans le plan de vecteur normal $\vec{u}(1, 4, 1)$ d'où $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{u}$. On conclut alors que l'application f est la symétrie orthogonale d'axe (D) , perpendiculaire au plan contenant la droite (MM') : On dit que f est le demi-tour d'axe (D) .

Définition

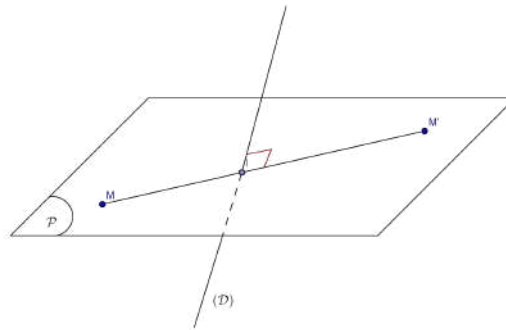
Soit (D) une droite de l'espace, on appelle demi-tour ou symétrie orthogonale d'axe (D) et on note $S_{(D)}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point M' tel que :

- Si M appartient à (D) alors $M' = M$ c'est-à-dire M est invariant
- Si M n'appartient pas à (D) alors (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.

Propriétés

(P_1) : Soit (D) une droite de $\mathcal{E}$ et (P) un plan de $\mathcal{E}$ orthogonal à (D) en un point I alors :

- (P) est globalement invariant par $S_{(D)}$.
- La restriction de $S_{(D)}$ à (P) est la symétrie de centre I .



- (P_2) -La composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant une droite (D) est le demi-tour d'axe (D).
- Tout demi-tour d'axe (D) est la composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant la droite (D).

Expression analytique d'un demi-tour

activité

L'espace est rapporté à un repère orthonormé directe $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne $A(1, -1, 2)$ et $\vec{u}(-1, 1, 1)$. Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe ($\mathcal{D}$), droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$ et $M'(x', y', z')$ son image par le demi-tour d'axe ($\mathcal{D}$) de repère $(A, \vec{u})$.

On a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ I \text{ milieu de } [MM'] \in (\mathcal{D}) \end{cases}$$

$(x' - x) + (y' - y) + (z' - z) = 0$ (1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une représentation paramétrique de la droite ($\mathcal{D}$) est :

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Ainsi $I \in (\mathcal{D})$ signifie que :

$$\begin{cases} \frac{x'+x}{2} = 1 - \lambda \\ \frac{y'+y}{2} = -1 + \lambda \\ \frac{z'+z}{2} = 2 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + x = 2 - 2\lambda \\ y' + y = -2 + 2\lambda \\ z' + z = 4 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 - 2\lambda - x \\ y = -2 + 2\lambda - y \\ z = 4 + 2\lambda - z \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

En remplaçant x' , y' et z' dans (1), On obtient :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}(-x - 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z - 6) \\ z' = -\frac{1}{3}(-2x + 2y - z + 12) \end{cases}$$

qui est l'expression analytique de $(\mathcal{D})$ dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Remarque

Pour déterminer l'expression analytique d'un demi tour, d'axe $(\mathcal{D})$ il faut :

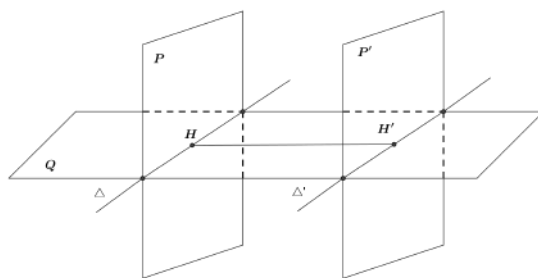
- Déterminer une représentation paramétrique ou une équation cartésienne de son axe ;
- Utiliser les deux propriétés suivantes : le milieu du segment $[MM']$ appartient à l'axe $(\mathcal{D})$ et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D})$

Composée de deux demi-tours

Soient (D) et (D') deux droites de l'espace distinctes, et coplanaires, et $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ les demi-tours d'axes respectifs $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$.

Etudions l'application $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ Désignons par (Q) le plan déterminé par $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$, par (P) (resp. (P')) les plans contenant $S_{(D)}$ (resp. $S_{(D')}$) et perpendiculaires à (Q) . Soit $S_{(P)}$, $S_{(P')}$ et $S_{(Q)}$ les réflexions d'axes (P) , (P') et (Q) respectivement. On a les plans (P) et (Q) sécants suivants la droite (D) d'où $S_{(D)} = S_{(Q)} \circ S_{(P)}$. De même on a $S_{(D')} = S_{(P')} \circ S_{(Q)}$. Par suite on a $S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_{(P')} \circ S_{(P)}$. Nous distinguons deux cas pour poursuivre notre étude : les droites (D) et (D') sont parallèles ; les droites (D) et (D') sont sécantes.

Premier cas : (D) et (D') sont parallèles Dans ce cas les plans (P) , et (P') sont parallèles. (comme l'indique la figure 1 ci-dessous). l'application $S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_{(P')} \circ S_{(P)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{HH'}$.



Deuxième cas : (D) et (D') sont sécantes. Désignons par K le point d'intersection des droites (D) et (D') , les plans (P) et (P') sont sécants ; leur intersection est la droite (Δ) perpendiculaire au plan (Q) . Orientons la droite (Δ) par un vecteur unitaire $\vec{n}$. alors on a : $S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_{(P')} \circ S_{(P)}$ est donc la rotation d'axe (Δ) .

Théorème 1.4. 1. La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est une Translation.
2. La composée de deux demi-tours d'axes sécants est une Rotation.

Composée d'un demi-tour et d'une réflexion

activité

Soit K un point de l'espace. Nous notons par S_K la symétrie de centre K . Démontrer les propriétés suivantes :

1. S_K est une isométrie.
2. S_K admet un unique point invariant, son centre K
3. Soient (P) un plan passant par K et (D) la perpendiculaire à (P) en K . Soient $S_{(P)}$ la réflexion de base (P) , et $S_{(D)}$ le demi-tour d'axe (D) . On a : $S_K = S_{(P)} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ S_{(P)}$.

Théorème 1.5. La composée d'un demi-tour d'axe (Δ) et d'une réflexion de plan (P) perpendiculaire à (Δ) en un point K est la symétrie de centre k .

Exercice d'application.

Soit (D) une droite de l'espace et $S_{(D)}$, le demi-tour d'axe (D)

1. Démontrer que (D) est bijective et définir sa bijection réciproque. quel est l'ensemble des points invariant par $S_{(D)}$?

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, définir analytiquement le demi-tour d'axe (D) de repère $(A, \vec{u})$ avec $A(-1, 2, 1)$ et $\vec{u}(1, 2, -3)$

1.5.2 Rotations

Dans tout ce paragraphe l'espace $\mathcal{E}$ est orienté.

Activité

L'espace est reporté à un repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'application définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z \\ y' = y \\ z' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

1. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite $(\mathcal{D})$ de repère cartésien $(O, \vec{j})$;
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$;
3. Préciser les éléments géométriques de f puis conclure sur la nature de f

solution

1. Démontrons que l'ensemble des points invariants par f est la droite $\mathcal{D}$ de repère cartésien $(O; \vec{j})$ Pour tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$, on a :

$$M = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z \\ y = y \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

D'où l'ensemble des points invariants est la droite $(\mathcal{D})$ de repère $(O, \vec{j})$.

2. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$.

On a $\overrightarrow{MM'} = (-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z)\vec{i} + (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z)\vec{k}$ et $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{j} = 0$.

Ainsi M' appartient au plan $(\mathfrak{P})$ passant par M et perpendiculaire à la droite $(\mathcal{D})$, car tous les plans perpendiculaires à $(\mathcal{D})$ admettent la base $(\vec{k}, \vec{i})$ comme base orthonormale directe. D'où le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$.

3. Précisons les éléments géométriques de f puis concluons sur la nature de f .

L'ensemble des points invariants par f est la droite $\mathcal{D}$ définie ci-dessus donc f est une

1.5. ROTATIONS DANS L'ESPACE

rotation d'axe $(\mathfrak{D})$.

Determinons son angle ; Le plan $(\mathfrak{P})$ coupe la droite $(\mathfrak{D})$ en un point K de coordonnées $(0, y, 0)$. Nous avons : $\overrightarrow{KM} = x\vec{i} + z\vec{k}$ et $\overrightarrow{KM'} = (-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z)\vec{i} + (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z)\vec{k}$ c'est à dire que $KM^2 = x^2 + y^2$ et $KM'^2 = x^2 + y^2$, l'égalité $KM = KM'$ est vérifiée.

Il reste à déterminer l'angle θ . Pour cela on va calculer $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

On a $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KM'} = KM \times KM' \cos(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = KM^2 \cos(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'})$.

Nous avons aussi $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KM'} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2$. Il en résulte : $\cos(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \frac{1}{2}$.

De même nous avons $\overrightarrow{KM} \wedge \overrightarrow{KM'} = KM \times KM' \sin(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'})\vec{j} = KM^2 \sin(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'})\vec{j}$.

Nous avons aussi : $\overrightarrow{KM} \wedge \overrightarrow{KM'} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2)\vec{j}$

Il en résulte que : $\sin(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nous déduisons : $\theta = -\frac{\pi}{3}$

Nous concluons que f est la rotation d'axe $(\mathfrak{D})$ orientée par $\vec{j}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Définition

Soit $(\mathfrak{D})$ une droite de $\mathcal{E}$ et $\vec{n}$ un vecteur unitaire de $(\mathfrak{D})$ θ un réel. Soit M un point de l'espace. On appelle rotation d'axe $(\mathfrak{D})$ et d'angle θ et on note $r_{(\mathfrak{D}),\theta}$, l'application de $\mathcal{E}$ dans lui même qui vérifie :

- Si M appartient à $(\mathfrak{D})$, alors $r_{(\mathfrak{D}),\theta}(M) = M$
- Si M n'appartient pas à $(\mathfrak{D})$, le point M' est tel que M' appartient au plan passant par M et perpendiculaire à $(\mathfrak{D})$ en un point K tel que : $KM = KM'$ et $(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) \equiv \theta[2\pi]$

Propriétés

- (P_1) Tout plan $(\mathfrak{Q})$ perpendiculaire à l'axe d'une rotation est globalement invariant par cette rotation.
- (P_2) l'ensemble des points invariants par une rotation distincte de l'application identique est son axe.
- (P_3) La rotation d'axe $(\mathfrak{D})$ orienté par $\vec{u}$ et d'angle π est le demi-tour d'axe $(\mathfrak{D})$
- (P_4) Toute rotation de l'espace est une isométrie de l'espace.
- (P_5) Toutes les autres propriétés des rotations de l'espace sont les mêmes que celles des rotations du plan.

1.6. EXERCICES

Exercice D'application

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'application f qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{2}x - y + z + 4) \\ y' = \frac{1}{2}(x + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})y + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})z) \\ z' = \frac{1}{2}(-x + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})y + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})z) \end{cases} \quad \text{Montrer que } f \text{ est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.}$$

Solution

Un point $M(x, y, z)$ est invariant par f si et seulement si : $f(M) = M$

On trouve que l'ensemble des points invariants par f est :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y - z = 2 + \sqrt{2} \end{cases} . \text{ Qui est l'équation cartésienne de la droite } (\mathfrak{D}) \text{ orientée par le vecteur}$$

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$. donc f est une rotation d'axe $(\mathfrak{D})$. Le Vecteur unitaire $\vec{i}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Par conséquent, si nous appelons θ une mesure de l'angle de f , nous aurons : $\cos \theta = \vec{i} \cdot \varphi(\vec{i})$

et $\sin \theta \vec{u} = \vec{i} \wedge \varphi(\vec{i})$ Où φ est l'endomorphisme associée à f . Or : $\varphi(\vec{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$,

d'où : $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin \theta \vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}$ Par suite $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où une mesure de l'angle de f est $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Nous concluons que f est la rotation d'axe la droite $(\mathfrak{D})$ orientée par le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

1.6 EXERCICES

1.6.1 INTRODUCTION

Cette deuxième partie , est conçue pour que les élèves puissent s'exercer au maximum , afin de comprendre la totalité des notions développées sur les applications de l'espace ; et pour que les enseignants puissent trouver facilement des exercices correspondant à un objectif bien précis . Ainsi cette partie propose des exercices variés , et classés par thèmes correspondant à chacune des applications . Ces exercices devraient être faits par tous , parce qu'ils présentent peu de difficultés techniques ou conceptuelles . Nous espérons que cette fiche d'exercices sera pour nos collègues et leurs élèves , un outil de travail utile et agréable .

1.6.2 ENONCES DES EXERCICES

Translations et Homothéties

Exercice 1.6.1. : L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les transformations f et g d'expression analytiques respectives :

$$\begin{cases} x' = -2x - 4 \\ y' = -2y + 1 \\ z' = -2z + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z - 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et g .
- 2) Déterminer l'expression analytique, la nature et les éléments caractéristiques des transformations $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 1.6.2. : L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les points $A(-1, 2, -2)$ et $B(0, -1, 3)$, h_1 l'homothétie de centre A et de rapport -3 , h_2 de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.

- 1) Déterminer les expressions analytiques de $h_2 \circ h_1$ et $h_1 \circ h_2$.
- 2) En déduire les éléments caractéristiques de ces transformations.

Exercice 1.6.3. : On considère dans l'espace E , un carré $ABCD$, de centre O et de côté a , contenu dans un plan P .

Soient S un point de E n'appartenant pas au plan P et A', B', C', D' les milieux respectifs des segments $[SA], [SB], [SC], [SD]$.

- 1) Démontrer que :
 - les points A', B', C' et D' appartiennent à un même plan P' parallèle au plan P et $P' \neq P$;
 - le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré ; on note O' son centre ;
 - les points S, O, O' sont alignés.

Dessiner un croquis de la figure ainsi obtenue.

- 2) Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan (P) tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4a^2$.

Déterminer l'ensemble décrit par le milieu M' du segment $[SM]$ quand le point M décrit l'ensemble ω .

Exercice 1.6.4. : Dans l'espace, on considère trois points non alignés, A, B, C et un point O .

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C . Soient A', B', C' les points définis par les

1.6. EXERCICES

relations :

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

- 1) Montrer que $[A, A'], [B, B'], [C, C']$ ont le même milieu I et calculer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$.
- 2) soient A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs des segments $[B, C], [C, A], [A, B]$. Montrer qu'il existe une homothétie f de centre G et une seule transformant A en A_1, B en B_1 , et C en C_1 ; préciser le rapport de f .
- 3) Montrer qu'il existe une homothétie g de centre O et une seule transformant A_1 en A', B_1 en B', C_1 en C' ; préciser le rapport de g .
- 4) Déterminer que $g \circ f$ est la symétrie centrale de centre I .

1.6.3 Projections

Exercice 1.6.5. : L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit P le plan d'équation : $3x + y + 4z - 8 = 0$.

Écrire l'expression analytique de la projection orthogonale de base P .

Exercice 1.6.6. : Écrire l'expression analytique de la projection orthogonale de base la droite passant par $A(1, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Exercice 1.6.7. : soit f l'application définie par son expression analytique :

$$\begin{cases} x' = -y + z + 3 \\ y' = -x + z + 3 \\ z' = -x - y + 2z + 3 \end{cases}$$

Démontrer que f est une projection. On précisera sa base et sa direction.

Exercice 1.6.8. :

- 1) Soit f l'application définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = 3x + y - z + 1 \\ y' = -2x + z - 1 \\ z' = 4x + 2y - z + 2 \end{cases}$$

Démontrer que f est une projection. On donnera une équation cartésienne de sa base et un vecteur $\vec{v}$ qui définit sa direction.

1.6. EXERCICES

2) Soit g l'application définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y - 2z + 2 \\ y' = -4x - y + 2z - 2 \\ z' = 8x + 4y - 3z + 4 \end{cases}$$

Déterminer le milieu du segment $[M, g(M)]$.

On dit que g est la symétrie de base P et de direction celle de $\vec{v}$.

Exercice 1.6.9. : Soit f l'application définie analytiquement par :
$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = -2x - y - 2z + 2 \\ z' = x + y + 2z - 1 \end{cases}$$

On désigne par g l'application qui, à tout point M de E , associe le milieu du segment $[M, f(M)]$.

- 1) Écrire l'expression analytique de g .
- 2) Démontrer que g est une projection. On précisera sa base et sa direction.
- 3) Que peut-on dire de l'application f ?

Exercice 1.6.10. : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace, $A(1, 1, 1)$ un point de l'espace. A tout point M de l'espace on associe le point M' défini par :
$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OM}).$$

- 1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $M = M'$.
- 2) a) Calculer les coordonnées (x', y', z') de M' en fonction des coordonnées (x, y, z) de M .
(Retrouver le résultat de 1).
b) Justifier que l'application ainsi définie est une application affine.
- 3) Montrer que pour tout point M situé hors de la droite (OA) .
a') La droite (MM') est perpendiculaire au plan (OAM) .
b') $MM' = OA \times MH$ Où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (OA) .

Exercice 1.6.11. : L'espace $(\mathcal{E})$ est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} ; \begin{cases} x' = 1/3(-x + 2y - 2z + 2) \\ y' = 1/3(2x + 2y + z - 1) \\ z' = 1/3(-2x + y + 2z + 1) \end{cases}$$

- 1) Prouver que pour tout $M \in (\mathcal{E})$, $\overrightarrow{MM'}$ a la direction fixe de $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.6. EXERCICES

- 2) Déterminer $(\mathcal{P})$ l'ensemble des points invariants de f .
- 3) Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ et que le milieu de $[MM']$ appartient à $(\mathcal{P})$.

Quelle est la nature de f ?

- 4) Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; soit $(\Delta) = \text{droite } (A; \vec{n})$ Soit $B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; soit $(\Delta_1) = \text{droite parallèle à } (\Delta) \text{ passant par } ab$.

4.1) Vérifier que $A \in (\mathcal{P}), B \in (\mathcal{P})$. Trouver les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}'$ du plan $(\mathcal{P}')$ contenant (Δ) et (Δ_1) .

4.2) Déterminer $f \circ S_{(\mathcal{P})}; S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}; f \circ S_{(\Delta)}; S_{(AB) \circ S_{(\Delta)}}$.

- 5) Trouver l'expression analytique de la projection orthogonale sur (Δ) .
- 6) Trouver l'expression analytique de la projection orthogonale sur $(\mathcal{P})$.

1.6.4 Reflexions

Exercice 1.6.12. : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal, l'application f est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - 2y - z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y - 2z + 8) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 12) \end{cases}$$

Démontrer que f est une réflexion dont on précisera les éléments caractéristiques .

Exercice 1.6.13. : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal, on donne les points : $A(3, 0, 5)B(1, 0, 0)C(0, 2, 1)$.

Écrire l'expression analytique de la réflexion de base le plan (ABC) .

Exercice 1.6.14. : On considère un cube $ABCDEFGH$.

Soient I le milieu de l'arête $[H, D]$ et J le point tel que D soit le milieu du segment $[J, H]$.

Faire une figure et déterminer l'image de J par la réflexion de base le plan (ACI) .

Exercice 1.6.15. : L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z + 2 \\ y' = 2x - y + 2z + 4 \\ z' = -x + y - 2 \end{cases}$$

1.6. EXERCICES

- 1) Déterminer la nature de f , et donner ses éléments caractéristiques.
- 2) Quelle est l'image par f de la droite passant par le point $A(1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2, 1, 3)$?
- 3) Quelle est l'image par f du plan d'équation $x + y - 3z + 1 = 0$?

Exercice 1.6.16. : L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -x + z \\ y' = -2x + y + z + 2 \\ z' = z + 4 \end{cases}$$

- 1) Démontrer que f est une application involutive.
- 2) Quelle est l'ensemble des points invariants par f ?
- 3) Soit g la symétrie affine d'endomorphisme associé l'endomorphisme φ de f et qui laisse invariant le point $A(0, 1, 2)$. Soit t la translation de vecteur $\vec{u}(2, 4, 4)$. Vérifier que $f = t \circ g = g \circ t$

Exercice 1.6.17. : L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit f l'application de E dans E qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel

$$\text{que : } \begin{cases} x' = 3x - 4z - 4 \\ y' = 2x - y - 2z - 2 \\ z' = 2x - 3z - 4 \end{cases}$$

- 1) Déterminer $f \circ f$, puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
- 2) Déterminer l'image de la droite passant par $A(1, 0, 1)$ et dirigée par $\vec{u}(2, -1, 1)$ par f .
- 3) Déterminer l'image du plan (P) d'équation : $2x - y + z - 1 = 0$ par f .
- 4) Déterminer l'image de la sphère de centre $\Omega(2, 1, -1)$ et de rayon 3 par f .

Exercice 1.6.18. : L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P) le plan d'équation : $2x - y + z - 2 = 0$ et S la symétrie orthogonale par rapport au plan (P) .

- 1) Déterminer l'expression analytique de S .
- 2) Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(2, 1, -1)$. Déterminer l'image de (D) par S .

1.6. EXERCICES

3) Soit (Q) le plan d'équation : $x+y+z-2=0$. Déterminer l'image de (Q) par S .

Exercice 1.6.19. : L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Soit la S réflexion de plan (P) d'équation : $y+3z-5=0$.

Déterminer l'expression analytique de S .

b) Soit f l'application de E dans E qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M''(x'', y'', z'')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{5}(-4y + 3z + 8) \\ z' = \frac{1}{5}(3y + 4z + 1) \end{cases}$$

Montrer $f \circ f = Id_E$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ S$.

1.6.5 Demi-tours et Rotations

Exercice 1.6.20. : Soit $(\mathcal{D})$ la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y' = 2 + -\lambda \\ z' = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \text{ soit } A(2, 2, -1).$$

Déterminer les coordonnées des images respectives O' et A' des points O et A par le demi-tour d'axe $(\mathcal{D})$.

Exercice 1.6.21. : L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit :

$$\begin{cases} x' = -3x + 4z \\ y' = -y + 2 \\ z' = -2x + 3z \end{cases}$$

l'expression analytique d'une application f .

- 1) Montrer que l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points invariants par f est une droite dont on précisera un repère.
- 2) Montrer que pour tout point M , la droite (MM') est parallèle à un plan dont on précisera un vecteur normal.
- 3) Montrer que le milieu du segment $[MM']$ appartient à la droite $(\mathcal{D})$.

1.6. EXERCICES

4) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 1.6.22. : L'espace $(\mathcal{E})$ est muni du repère orthonormal directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} ; \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y - z + 12) \end{cases}$$

1) Déterminer que (Δ) l'ensemble des points invariants de f est la droite de repère $(A, \vec{u})$ avec $A(1; -1; 2)$ et $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

2) Démontrer que pour tout $M \in (\mathcal{E}')$, $M' = f(M)$; le milieu K de $[MM']$ appartient à (Δ) et $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$

3) Quelle est la nature et la caractéristique de f .

4) Soient $B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.1) Vérifier que $B \in (\Delta)$ et que $C \notin (\Delta)$.

4.2) Soit $(\mathcal{P})$ le plan (ABC) et $(\mathcal{P}')$ le plan contenant (Δ) et perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

4.2.1) Trouver une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ et une équation cartésienne de $(\mathcal{P}')$.

4.2.2) Justifier que $f = S_{(\mathcal{P})} \circ S_{(\mathcal{P}')}.$

4.3) Soit H le projeté orthogonale de C sur (Δ) et (π) le plan parallèle à $(\mathcal{P}')$ passant par C .

4.3.1) Trouver les coordonnées de H .

4.3.2) Déterminer $S_{(\mathcal{P}')} \circ S_{(\pi)}$

Exercice 1.6.23. : L'espace est muni du repère orthonormal directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$.

Soit le plan $(\mathcal{P})$ le plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Donner un système d'équation paramétriques de $(\mathcal{P})$. Trouver un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.

2) Trouver une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$

3) Soit $(\mathcal{P}') =$ plan d'équation : $3x + y + z + 2 = 0$.

3.1) Prouver que $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$.

1.6. EXERCICES

3.2) Trouver un système d'équation paramétriques de la droite (Δ) intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

4) Soit $E \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

4.1) Justifier que $E \notin (\Delta)$.

4.2) Calculer les distances $d_1 = d(E, (\mathcal{P}))$ et $d_2 = d(E, (\mathcal{P}'))$. En déduire la distance $d = d(E, (\Delta))$.

4.3) Trouver directement $d = d(E, (\Delta))$.

5) Trouver les coordonnées du point R projeté orthogonal de E sur le plan $(\mathcal{P}')$.

6) Trouver les coordonnées du point Q projeté orthogonal du point A sur la droite (Δ) .

7) On note $S_{(\mathcal{P}')}$ la réflexion de plan $(\mathcal{P}')$. Trouver l'expression analytique de $S_{(\mathcal{P}')}$

8) Trouver l'expression analytique du demi-tour $S_{(AE)}$ d'axe la droite (AE)

Exercice 1.6.24. : L'espace $\mathcal{E}$ est orienté et rapporté au repère orthonormal directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

L'application f est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}y \\ z' = z \end{cases}$$

Démontrer que f est une rotation dont on déterminera les éléments géométriques

Exercice 1.6.25. : Même exercice que l'exercice précédent avec

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = x \\ z' = x \end{cases}$$

Exercice 1.6.26. : Même exercice que l'exercice précédent avec

$$\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x - 2 \\ z' = z \end{cases}$$

Exercice 1.6.27. : Même exercice que le précédent avec

1.6. EXERCICES

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z \end{cases}$$

Exercice 1.6.28. : L'espace $\mathcal{E}$ est orienté et rapporté au repère orthonormal directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

L'application f est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = z + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases}$$

- (a) Démontrer que f est une isométrie. L'isométrie f possède-t-elle des points invariants ?
- (b) Démontrer que f est un vissage dont précisera les éléments caractéristiques .

Exercice 1.6.29. : L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormal.

On désigne par f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - 2y - z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y - 2z + 8) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 4) \end{cases} .$$

- (a) Montrer que f est une isométrie de $\mathcal{E}$
- (b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f et déduire la nature de f

Exercice 1.6.30. : Reprendre les questions de l'exercice précédent pour les applications g et h respectivement définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z + 2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z + 2) \end{cases} . \text{ et } \begin{cases} x' = -x - 3 \\ y' = -y - 5 \\ z' = -z + 2 \end{cases} .$$

REFLEXION PEDAGOGIQUE

2.1 ORIGINE ET MOTIVATIONS

La situation qui est à l'origine de cette réflexion pédagogique naît des différents entretiens avec les enseignants d'une part, et d'autre part, de la difficulté à élaborer un cours sur les applications de l'espace, plus accessible aux élèves.

En effet, chaque fois où nous avons conçu une activité introductrice pour l'étude d'une application donnée de l'espace, déduire sa nature n'était pas très évident pour l'élève. Pourtant, cela nous aurait été plus facile si on avait au préalable étudié la classification des isométries de l'espace par l'ensemble des points invariants. par ailleurs, l'état des lieux révèle que les enseignants éprouvent d'énormes difficultés à enseigner, et même à faire comprendre le cours sur les applications de l'espace aux élèves. Ils présentent principalement quatre difficultés qui sont :

- i) **L'absence des activités d'approche dans les livres au programme** (CIAM en particulier), ce qui ne permet pas à l'enseignant d'aborder facilement le cours ; et à l'élève de s'imprégner facilement de la notion enseignée .
- ii) **L'insuffisance des exercices d'application et d'entraînement dans les livres au programme**, ce qui ne permet pas à l'élève de bien assimiler le cours et même de bien cerner les contours qui jalonnent la notion d'isométrie de l'espace .
- iii) **La représentation des figures en dimension 3 est très complexe** , ce qui ne permet pas toujours à l'élève de bien visualiser les droites et plans orthogonaux ainsi que l'orientation de l'espace.
- iv) **Le manque de formation des enseignants à l'usage des TICE** , entraîne la non maîtrise par ces derniers des logiciels de l'enseignement de la géométrie tel que Géogébra.

Au vue de cet états des lieux , il nous semble légitime de proposer des solutions permettant de faciliter la tâche aux enseignants et aux élèves. **Proposition de quelques solutions aux difficultés ci-dessus mentionnées**

2.2. CLASSIFICATION DES ISOMETRIES PAR POINTS INVARIANTS

- i) En ce qui concerne l'absence des activités d'approche dans les manuels au programme, nous avons proposé dans le cadre de notre ressource sur les applications de l'espace des modèles d'activités d'imprégnation permettant à l'élève et à l'enseignant d'avoir d'entrée de vue les points essentiels de l'application concernée, ainsi que la méthode de résolution des exercices et problèmes relatifs à cette application dans l'espace .
- ii) Pour remédier au problème de l'insuffisance des exercices d'application et d'entraînement, nous avons proposé dans le chapitre précédent de nombreux exercices et problèmes portant sur un savoir faire de chacune des notions étudiées .
- iii) Concernant la complexité de la représentation des figures en dimension 3 , nous conseillons aux enseignants de se former à l'utilisation des logiciels d'enseignement de la géométrie tel que le Géogébra .
- iv) Enfin nous proposons aussi comme solution , l'étude de la classification des isometries par l'ensemble des points invariants.

2.2 CLASSIFICATION DES ISOMETRIES PAR POINTS INVARIANTS

2.2.1 Rappels et présentation d'un vissage

Rappels

Nous avons étudié au chapitre un, que les translations, les réflexions et les rotations sont des isométries , car conservent les distances. Ce qui est la définition principale des isométries . Nous donnons dans ce paragraphe , l'exemple d'une isométrie distincte d'une translation qui n'admet pas de points invariants . Mais avant rappelons ces deux résultats fondamentaux sur les isométries .

Propriétés

Toute **isométrie** affine f de l'espace $\mathcal{E}$ vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

- (1) f est une application affine dont l'endomorphisme associé est une isométrie vectorielle .

2.2. CLASSIFICATION DES ISOMETRIES PAR POINTS INVARIANTS

- (2) f est une application affine dont l'endomorphisme associé transforme une base orthonormée en une base orthonormée .

Présentation d'un vissage

Activité

Soient $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites non coplanaires de l'espace $\mathcal{E}$, $S_{(\mathcal{D})}$ et $S_{(\mathcal{D}')}$ les demi-tours d'axes respectifs $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Etudions l'application $g = S_{(\mathcal{D}')} \circ S_{(\mathcal{D})}$.

- i) Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la droite $(\mathcal{D})$ et $\vec{v}$ un vecteur unitaire de la droite $(\mathcal{D}')$, et $\vec{n}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Désignons par (P) le plan déterminé par $(\mathcal{D})$ et $\vec{n}$, par (P') le plan déterminé par $(\mathcal{D}')$ et $\vec{n}$ (voir figure ci-dessous).

Justifier que les plans (P) et (P') sont sécants et que leur droite d'intersection est la perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ en un point K et à $(\mathcal{D}')$ en un point K' (comme l'indique la figure ci-dessous) . La droite (KK') est appelée perpendiculaire commune à $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$

- ii) soit $(\mathcal{D}'')$ la parallèle à $(\mathcal{D}')$ passant par K .

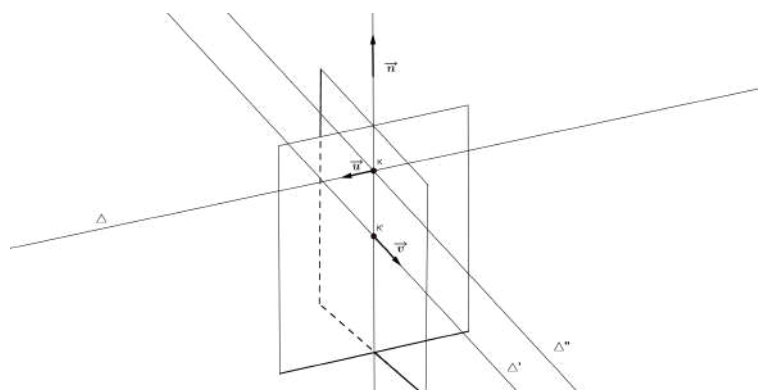
L'application $S_{(\mathcal{D}')} \circ S_{(\mathcal{D}'')}$, est une translation de vecteur $\overrightarrow{KK'}$ (comme composée de symétries orthogonales d'axes parallèles). et on note : $t = S_{(\mathcal{D}')} \circ S_{(\mathcal{D}'')}$.

De l'égalité $t = S_{(\mathcal{D}')} \circ S_{(\mathcal{D}'')}$, Nous déduisons : $S_{(\mathcal{D}')} = t \circ S_{(\mathcal{D}'')}$ puis $g = S_{(\mathcal{D}')} \circ S_{(\mathcal{D})} = t \circ S_{(\mathcal{D}'')} \circ S_{(\mathcal{D})}$.

L'application $f = S_{(\mathcal{D}'')} \circ S_{(\mathcal{D})}$, est la rotation d'axe (KK') dirigée par $\vec{n}$ et d'angle $2(\vec{u}, \vec{v})$

.

L'application g est donc la composée de la rotation f par la translation t ; le vecteur de la translation t est un vecteur directeur de l'axe de f . On dit que g est **un vissage**.



Définition

On appelle vissage d'axe $(\mathfrak{D})$, d'angle α et de vecteur $\vec{u}$ et on note $t \circ r$, la composée de la rotation d'axe $(\mathfrak{D})$ d'angle α par la translation t de vecteur $\vec{u}$.

NB : $t \circ r = r \circ t$.

Exercice d'application

Soit $\mathcal{E}$ l'espace orienté et rapporté au repère orthonormé direct $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On définit l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M(x, y, z,)$ associe le point $M'(x', y', z')$

$$\text{tel que : } \begin{cases} x' = -z + 2 \\ y' = -x + 1 \\ z' = y - 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isometrie
2. f admet-elle un point invariant ?
3. Montrer que f est un vissage dont on déterminera les éléments caractéristiques

Solution

Montrons que f est une isometrie Soit φ l'endomorphisme associée à f .

On a $\varphi(\vec{i}) = -\vec{j}$, $\varphi(\vec{j}) = \vec{k}$, $\varphi(\vec{k}) = -\vec{i}$

Par suite, φ transforme une base orthonormée en une base orthonormée, d'où f est une isometrie

.

Déterminons l'ensemble des points invariants par f . Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace, M est invariant par f signifie que :

$$\begin{cases} x = -z + 2 \\ y = -x + 1 \\ z = y - 1 \end{cases} \quad \text{ce qui équivaut à } x = x + 2, \text{ impossible donc } f \text{ n'admet pas de point invariant.}$$

Montrons que f est un vissage dont on déterminera le vecteur et l'axe. Si f est un vissage, la direction de son axe est l'ensemble des vecteurs $u(x, y, z)$ tels que $\vec{u} = \varphi(\vec{u})$, c'est à dire tels que :

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -x \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow -x = y = z$$

Un vecteur directeur de l'axe est $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

L'axe (D) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{MM'}$ soit colinéaire à $\vec{u}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour composantes :

$$\begin{cases} x' - x = -z - x + 2 \\ y' - y = -x - y + 1 \\ z' - z = y - z - 1 \end{cases}$$

Ce vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u}$ si et seulement si

$$\frac{-z-x+2}{1} = \frac{-x-y+1}{-1} = \frac{y-z-1}{-1} \text{ ce qui équivaut à :}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = \frac{4}{3} \\ x + y = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Ce qui détermine l'axe (D) du vissage.

Enfin le vecteur du vissage est $\overrightarrow{MM'}$ où M appartient à (D) c'est à dire : $\frac{2}{3}\vec{u}$.

2.2.2 Classification des Isometries par points invariants

Dans tout ce paragraphe, nous notons par $Inv(f)$ l'ensemble des points invariants par un application f donnée .

Soit A un point de l'espace.

Etudions l'ensemble $\mathfrak{I}_A$ des isometries de l'espace qui admettent A pour point invariant.

Considérons un élément f de $\mathfrak{I}_A$; nous notons M' le point $f(M)$. Nous distinguerons quatre cas .

Premier cas : supposons que f admette 4 points invariants A, B, C , et D non coplanaires

$$Inv(f) = \mathcal{E}$$

Soit M un point de $\mathcal{E}$ et M' son image par f .

Si $M \neq M'$, chacun des quatre points invariants A, B, C, D appartiendrait au plan médiateur du segment $[MM']$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

On a donc, pour tout point M de l'espace, $M = M'$. Il en résulte que $f = Id_{\mathcal{E}}$

Conclusion : Toute isometrie de l'espace qui admet quatre points invariants non coplanaires est l'application identique.

2.2. CLASSIFICATION DES ISOMETRIES PAR POINTS INVARIANTS

Deuxième cas : supposons que f admette trois points invariants A, B, C , non alignés et que $f \neq Id_{\mathcal{E}}$ (inv est le plan (ABC)).

Soit M un point de $\mathcal{E}$ et M' son image par f on a $f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C$. Soit M un point de l'espace n'appartenant pas au plan (ABC) , alors le plan (ABC) est le plan médiateur du segment $[MM']$

Démontrons que tout point D du plan (ABC) est invariant par f .

Soit D' l'image de D par f . Pour tout point M d'image M' par f on a $MD = M'D'$ car f est une isométrie. Or D appartient au plan médiateur du segment $[MM']$ donc on a $MD = M'D$. De l'égalité $MD = M'D'$, on déduit que $D = D'$. Par suite tout point du plan (ABC) est invariant par f . D'où f est la réflexion de plan (ABC) .

Conclusion : Toute isométrie de l'espace distincte $Id_{\mathcal{E}}$ et dont l'ensemble des points invariants est un plan, est une réflexion de base ce plan.

Troisième cas : supposons que f admette deux points invariants distincts $A, B, f \neq Id_{\mathcal{E}}$ (inv(f) points est la droite (AB)).

Soit C un point extérieure à la droite (AB) .

Si on a $f(C) = C$ alors f admet trois points invariants non alignés. Dans ce cas f est la réflexion de plan (ABC) .

Supposons que $C' = f(C) \neq C$ (c'est à dire que tout point extérieur à la droite (AB) est non invariant).

Désignons par $(\mathcal{P})$ le plan médiateur du segment $[CC']$, et par $S_{(\mathcal{P})}$ la réflexion de base $(\mathcal{P})$.

On a $f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C'$. Donc les points A et B appartiennent au plan $(\mathcal{P})$. Ainsi on a : $S_{(\mathcal{P})} \circ f(A) = A, S_{(\mathcal{P})} \circ f(B) = B, S_{(\mathcal{P})} \circ f(C) = S_{(\mathcal{P})}(C') = C$. On constate que les points A, B, C , sont invariants par $S_{(\mathcal{P})} \circ f$. Donc $S_{(\mathcal{P})} \circ f$ est soit $Id_{\mathcal{E}}$, soit la réflexion $S_{(ABC)}$ de plan (ABC) .

- Si $S_{(\mathcal{P})} \circ f = Id_{\mathcal{E}}$ alors on a $f = S_{(\mathcal{P})}$

- Si $S_{(\mathcal{P})} \circ f = S_{(ABC)}$ alors on a $f = S_{(\mathcal{P})} \circ S_{(ABC)}$. Dans ce cas, f est la rotation d'axe (AB) .

Conclusion : Toute isométrie de l'espace distincte de $Id_{\mathcal{E}}$ et dont l'ensemble des points invariants est une droite (AB) , est soit, une réflexion dont la base contient la droite (AB) ; soit la rotation d'axe (AB) .

Quatrième cas : supposons que f admette un unique point invariant $A, f \neq Id_{\mathcal{E}}$ (inv(f) est le singleton $\{A\}$).

Soit B un point de l'espace distinct de A , alors on a $B \neq f(B)$.

2.2. CLASSIFICATION DES ISOMETRIES PAR POINTS INVARIANTS

Désignons par S la réflexion de base, le plan médiateur du segment $[MM']$. On a $S \circ f(A) = A$ et $S \circ f(B) = S(B') = B$. Ainsi $S \circ f$ est une application qui fixe A et B , alors $S \circ f$ est soit une réflexion S_1 dont la base contient la droite (AB) , soit la rotation r , d'axe (AB) .

Si l'on avait $S \circ f = S_1$ on aurait $f = S \circ S_1$, dans ce cas f serait soit une rotation, soit une translation. Ceci est incompatible avec l'hypothèse : f admet un unique point invariant.

On a donc $S \circ f = r$, rotation d'axe (AB) il en résulte que $f = S \circ r$.

Conclusion : Toute isométrie de l'espace distincte de $Id_{\mathcal{E}}$ et dont l'ensemble des points invariants est le singleton A , est la composée d'une rotation dont l'axe passe par A , par une réflexion dont la base passe par A . C'est aussi la symétrie de centre A .

Exercice 1 d'application

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormal.

On désigne par f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - 2y - z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y - 2z + 8) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 4) \end{cases} .$$

1. Montrer que f est une isométrie de $\mathcal{E}$
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f et déduire la nature de f

Solution

Montrons que f est une isométrie de $\mathcal{E}$

Soit φ l'endomorphisme associé à l'application f on a : $\varphi(\vec{i}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$; $\varphi(\vec{j}) = -2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$; $\varphi(\vec{k}) = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Ainsi on a :

$\|\varphi(\vec{i})\| = 3$, $\|\varphi(\vec{j})\| = 3$, $\|\varphi(\vec{k})\| = 3$ d'où on a $\|\varphi(\vec{i})\| = \|\varphi(\vec{j})\| = \|\varphi(\vec{k})\|$. De plus on a $\varphi(\vec{i}) \cdot \varphi(\vec{j}) = 0$; $\varphi(\vec{i}) \cdot \varphi(\vec{k}) = 0$; $\varphi(\vec{j}) \cdot \varphi(\vec{k}) = 0$. Par suite l'endomorphisme φ transforme une base orthonormale en une autre base orthonormale : Il en résulte que f est une isométrie.

Déterminons l'ensemble des points invariants et déduisons la nature de f .

Un point $M(x, y, z)$ est invariant par f si et seulement si :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x - 2y - z + 4) \\ y = \frac{1}{3}(-2x - y - 2z + 8) \\ z = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x - 2y - z + 4 \\ y = -2x - y - 2z + 8 \\ z = -x - 2y + 2z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y + z - 4 = 0. \text{ Ainsi}$$

l'ensemble des points invariants par f est le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne : $x + 2y + z - 4 = 0$.

2.2. CLASSIFICATION DES ISOMETRIES PAR POINTS INVARIANTS

On déduit d'après l'étude précédente que f est la réflexion de plan ($\mathcal{P}$).

2.2.3 Tableaux récapitulatifs de la classification des isométries.

I Tableau récapitulatif de la classification des isometries du plan. Soit E l'ensemble des points invariants par une isométrie f du plan ($\mathcal{P}$), on a le tableau suivant :

Ensemble des points invariants par f	Déplacements	Antidéplacements
$E = (\mathcal{P})$	$f = Id_{(\mathcal{P})}$	
E est une droite (D)		f est la symétrie d'axe (D)
E est le singleton I	f est la rotation de centre I et d'angle non nul.	
E est l'ensemble vide.	f est une translation de vecteur non nul	f est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation (on parle de symétrie glissée).

Remarque 2.2.1. : Au vu de ce tableau nous remarquons que, dans le plan, tout antidéplacement est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissée.

Tableau récapitulatif de la classification isometries de l'espace.

Soit E l'ensemble des points invariants par une isométrie f de l'espace. On a le tableau suivant :

2.2. CLASSIFICATION DES ISOMETRIES PAR POINTS INVARIANTS

Ensemble des points invariants par f	Déplacements	Antidéplacements
$E = \mathcal{E}$	$f = Id_{\mathcal{E}}$	
E est un plan($\mathcal{P}$)	$f = Id_{\mathcal{E}}$	f est la réflexion de plan($\mathcal{P}$)
E est une droite (D)	f est la rotation d'axe (D) ou $f = Id_{\mathcal{E}}$	f est une réflexion dont la base contient la droite (D)
E est le singleton A		f est la symétrie de centre A
E est l'ensemble vide.	f est une translation de vecteur non nul ou f est un vissage	

En définitive , la devolution des compétences relatives à l'utilisation des applications de l'espace, se heurte à un problème didactique , élucider par l'absence : des activités d'approche , des exercices d'application , de la formation des enseignants au TICE (Technologie de l'information et de la communication pour l'enseignement) , de certains préliminaires importants tels que la classification des isometries dont une étude détaillée constitue le point culminant de ce chapitre . En dépit de quelques insuffisances liées à son contenu , le cours sur les applications de l'espace en terminale C reste un prérequis important pour le cours géométrie à l'université .

♣ CONCLUSION GENERALE ♣

Dans ce mémoire , il était question pour nous de proposer une leçon complète sur la notion d'application de l'espace, en terminale "C" et une réflexion pédagogique , dont l'objet est d'améliorer le cours contenu dans les manuels au programme . Au niveau de la réflexion pédagogique nous avons choisi comme thème : "la classification des isométries de l'espace par l'ensemble points invariants", afin de faciliter la tâche aux enseignants et à leurs élèves. En effet , la question essentielle sinon fondamentale , était l'existence de points fixes pour une isométrie de l'espace . Puisque , en présence de points fixes il est facile de déduire la nature d'une isométrie ; Surtout que la présence de son endomorphisme associé ne suffit pas pour conclure sur sa nature . Nous pouvons citer en exemple les vissages , qui ne sont pas des rotations mais ont pour endomorphisme associé les rotations vectorielles ; il en est de même des symétries glissées (composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation) qui ne sont pas des symétries orthogonales , mais ont pour endomorphisme associé des symétries vectorielles. Il s'agit donc là , d'une remarque importante que l'on observe dans le lien entre la géométrie affine euclidienne et l'algèbre linéaire . A cet effet , serait-il important de s'attarder sur le lien et la différence entre les applications de l'espace et l'algèbre linéaire ? cette question pourrait sans doute faire l'objet d'une réflexion pédagogique .

♣ Bibliographie ♣

- [1] André ANTIBI, Raymond BARRA, *Mathématiques Première S Analyse- Algèbre- Géométrie-Probabilité*, NOUVEAU TRANSMATH NATNAN 1991.
- [2] Francis NASSIET et al. *Mathématiques Terminales S*, DIMATHEME, Didier, 1994.
- [3] Guy BONTEMPS et al. *Maths Terminales S, Enseignement Obligatoire* ; FRACTALE, Bordas, 2002.
- [4] Jacques CHEVALLET. *Mathématiques Terminale C-E Tome 2*, FERNAND NATHAN , 1983
- [5] MEGAMTCHE Luc Calvin et al, *Majors EN MATHEMATIQUES T^{le}C*, ASVA EDUCATION, 2012.
- [6] MINESEC ARRETE N°53/D/43/MINEDUC/SG/IGP/ESG. *portant définition des programmes officiels de mathématiques des classes du second cycle de l'enseignement secondaire générale*
- [7] SALIOU TOURE et al. *Mathématiques en Terminale Scientifique, Option Sciences Mathématiques*, CIAM, Edicef, 1999.