ANTOINE GILDAS MBA OBIANG

MATHS

EN AFRIQUE

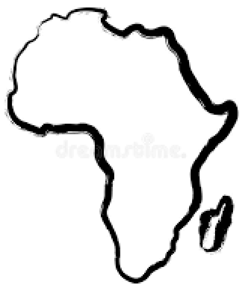
Terminales
C , D, SI

COURS ET POINTS MÉTHODES

EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS ET DÉTAILLÉS

SUJETS ET CORRIGÉS DES BACS AFRICAINS

Exercices et Problèmes
Corrigés et détaillés
Cours et Points Méthodes



MATHÉMATIQUES EN AFRIQUE
EN TERMINALES C,D&SI

COLLECTION MATHS EN AFRIQUE
ÉDITION 2023

AVANT PROPOS

Dans le souci d'apporter un ouvrage adapté au programme en vigueur en terminales scientifiques, j'avais à coeur de mettre à disposition des lycéens du Gabon et des pays d'Afrique francophone cet outil de travail : **Mathématiques en Afrique tome 1**.

Celui-ci participe d'une collection intitulée **Collection maths en Afrique** qui ambitionne de donner à chaque lycéen du Gabon et d'Afrique francophone des outils d'assimilation du cours, de le soutenir dans son travail personnel pour une préparation efficace et sereine à l'épreuve de mathématiques au baccalauréat.

Le présent volume, de la collection, est rédigé à l'attention des élèves de terminales séries C,D et SI. Il a pour objectifs de :

- ☞ fournir des outils permettant d'organiser une préparation optimale à l'épreuve de mathématiques au baccalauréat;
- ☞ permettre aux futurs étudiants d'acquérir une culture mathématique très solide afin de faciliter la transition lycée - université;
- ☞ proposer des exercices de synthèse, ceux-ci permettent de vérifier si les notions présentées sont assimilées et de déjouer les pièges qui s'y rapportent.

Les mathématiques sont, comme toute autre discipline à caractère scientifique, à la portée de l'élève qui veut non seulement les apprivoiser, mais aussi et surtout faire les efforts constants afin de combler ses propres lacunes, d'approfondir ses acquis et d'affermir ses aptitudes. Mon souhait le plus cher est de contribuer à l'amélioration des performances de chaque élève de terminale avant et après le baccalauréat.

L'auteur

Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer.

Francis BACON *philosophe, scientifique (1561- 1626).*

Table des matières

Ce qui permet d'en déduire :

- si $k+IA^2=0$ alors (E) est réduit au singleton $\{I\}$
- si $k+IA^2>0$ alors (E) est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+IA^2}$. En particulier si $k=0$ alors (E) est le cercle de diamètre $[AB]$.
- si $k+IA^2<0$ alors (E) l'ensemble vide.

□

Exercice 13. ABC est un triangle quelconque.

1. Construire sur la même figure .
   a) l'ensemble E_1 des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
   b) l'ensemble E_2 des points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$
2. Démontrer que E_1 et E_2 ont deux points communs si et seulement si :

$$0<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<AB^2$$

Solution.

1. a) D'après la **proposition 2**, l'ensemble E_1 des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

est le cercle de diamètre $[AB]$.
b) D'après la **proposition 1**, l'ensemble E_2 des points M tels que :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$$

est la droite orthogonale à la droite (AB) passant par C.

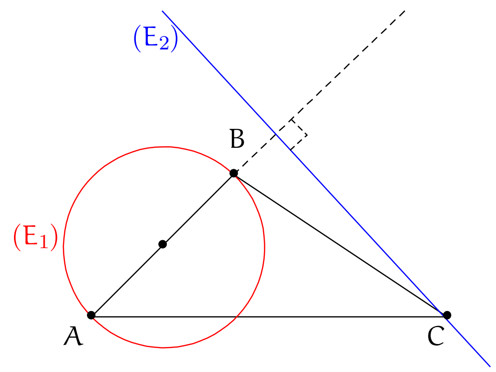


Figure.

2. Démontrer que E_1 et E_2 ont deux points communs si et seulement si :

$$0<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<AB^2$$

Condition nécessaire : *on suppose que* E_1 *et* E_2 *ont deux points communs et on montre la double inégalité* $0<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<AB^2$. Dans ce cas, on a la représenta– tion suivante .

5 Isométries du plan et de l'espace

5.1 Isométries du plan

Point Méthode.
Soit f *une symétrie glissante.*

☞ ***Premier cas*** : *on donne trois points distincts, A, B et C tels que :*

$$\begin{cases} f(A) = B \\ f(B) = C \end{cases}$$

Dans ce cas, on détermine d'abord :

1. *un vecteur directeur* $\vec{u}$ *de l'axe* (Δ),
2. *on en déduit l'axe* (Δ).

On a : $f \circ f(A) = f(B) = C$ *donc* $2\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ *donc* $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Détermination de l'axe (Δ).

- $f(A) = B$ *donc le milieu I de* $[AB]$ *appartient à l'axe* (Δ),
- $f(B) = C$ *donc le milieu J de* $[BC]$ *appartient à l'axe* (Δ),

Donc $(\Delta) = (IJ)$ *avec* $I \neq J$

☞ ***Deuxième cas*** : *on donne quatre points distincts A, B, C et D tels que :*

$$\begin{cases} f(A) = B \\ f(C) = D \end{cases}$$

Dans ce cas, on détermine d'abord :

1. *l'axe* (Δ),
2. *on en déduit un vecteur directeur* $\vec{u}$ *de l'axe* (Δ).

Détermination de l'axe (Δ).

- $f(A) = B$ *donc le milieu I de* $[AB]$ *appartient à l'axe* (Δ),
- $f(C) = D$ *donc le milieu J de* $[CD]$ *appartient à l'axe* (Δ),

Donc $(\Delta) = (IJ)$ *avec* $I \neq J$.

Détermination d'un vecteur directeur $\vec{u}$ ***de l'axe*** (Δ).

On choisit un point $K \in (\Delta)$ *puis on détermine* $L = f(K)$.
On a : $L = t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}(K) = t_{\vec{u}}(K)$ *par suite* $\vec{u} = \overrightarrow{KL}$.

5.1.1 Détermination d'un déplacement

Proposition.
Étant donnés les points A,B,A' *et* B' *tels que* $A'B' = AB$ *et* $A \neq B$, *il existe un déplacement* f *et un seul tel que :* $A' = f(A)$ *et* $B' = f(B)$.

- *si* $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, *ce déplacement est la translation de vecteur* $\overrightarrow{AA'}$.
- *si* $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, *ce déplacement est une rotation d'angle* $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$.

5.2 Applications de l'espace

5.2.1 Translations et homothéties

Dans cette partie, on note $\mathscr{E}$ l'espace muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{E}$. On appelle application identique de $\mathscr{E}$, et on note $\mathbf{id}_{\mathscr{E}}$ l'application de $\mathscr{E}$ dans lui−même qui a tout point M associe lui−même c'est−à−dire pour tout $M \in \mathscr{E}$, $\mathbf{id}_{\mathscr{E}}(M) = M$.

■ **Définition et propriété caractéristique des translations.**

Définition. *Soit $\vec{u}$ un vecteur $\mathscr{W}$.*
On appelle translation de vecteur $\vec{u}$, et on note $t_{\vec{u}}$, l'application de E dans lui−même qui a tout point M associe le point M′ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, $t_{\vec{u}}$ est l'application identique.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, aucun point n'est invariant par $t_{\vec{u}}$.

Propriété caractéristique. *Soit f une application de $\mathscr{E}$ dans lui−même.*
f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M′ et N′, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

On en déduit que :

☞ Toute translation de $\mathscr{E}$ est une isométrie.

☞ Toute translation linéaire associée à une translation est l'application identique de $\mathscr{W}$.

■ **Expression analytique d'une translation.**

Proposition. *L'espace est muni du repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *est :* $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$

Remarque.
Toutes les propriétés relatives aux translations dans le plan(sauf la détermination complexe) s'étendent de façon évidente aux translations de l'espace.

■ **Définition et propriété caractéristique des homothéties.**

Définition. *Soit O un point de $\mathscr{W}$ et k un nombre réel non nul.*
On appelle homothétie de centre O et de rapport k, et on note $h_{(O,k)}$, l'application de $\mathscr{E}$ dans lui−même qui a tout point M associe le point M′ tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

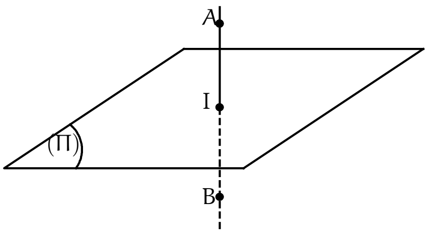
- Si $k = 1$, h est l'application identique.
- Si $k \neq 1$, O est le seul point invariant.
- Si $k = -1$, h est la symétrie de centre O.

5.3 Symétries orthogonales

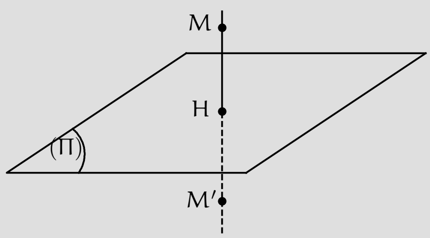
Dans cette partie, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

5.3.1 Réflexions

Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$ et I le milieu de $[AB]$.
L'ensemble des points équidistants de A et B est le plan (Π) orthogonal à la droite (AB) en I.
Ce plan (Π) s'appelle plan médiateur de $[AB]$.



Définition.
Soit (Π) un plan de $\mathscr{E}$.
On appelle réflexion de plan (Π), et on note S_Π L'application de $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :
- *si $M \in (\Pi)$, alors $M' = M$;*
- *si $M \notin (\Pi)$, alors (Π) le plan médiateur de $[MM']$.*



■ Expression analytique d'une réflexion.

Point Méthode.
Soit (Π) un plan d'équation $ax + by + c + d = 0$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal de (Π).
Soit M un point de $\mathscr{E}$ et M' son image par S_Π.
Pour déterminer l'expression analytique de S_Π on raisonne en deux étapes :

1. *Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires,*
2. *Le milieu I de $[MM']$ appartient à (Π).*

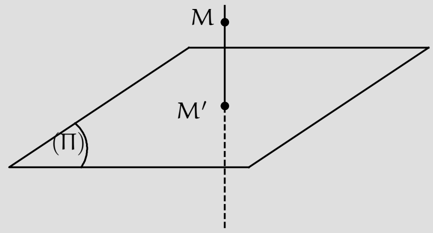
Exercice 26.
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct. On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $2x - y + z - 3 = 0$. Déterminer l'expression analytique de chacun des transformations suivantes :

1. Réflexion du plan $(\mathcal{P})$;
2. Projection orthogonale sur $(\mathcal{P})$.

■ Projection orthogonale sur un plan

Définition.

Soit (Π) *un plan de* $\mathscr{E}$.
On appelle projection orthogonale sur (Π),
L'application de $\mathscr{E}$ *dans lui−même qui, à tout point* M *associe le point* M' *tel que :*
- ■ *si* $M \in (\Pi)$, *alors* $M' = M$;
- ■ *si* $M \notin (\Pi)$, *alors* $(MM') \perp (\Pi)$ *et* $M' \in (\Pi)$



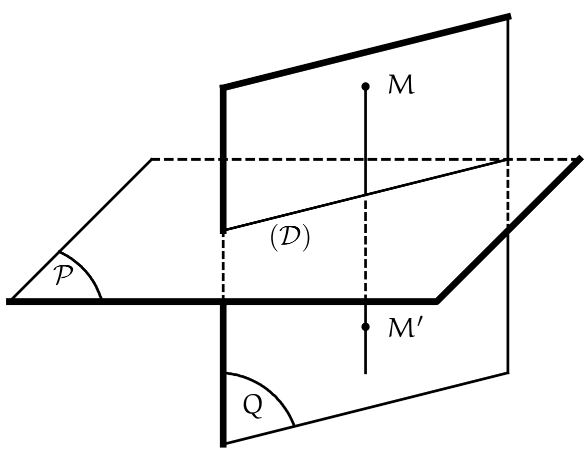
On en déduit que :

☞ Toute projection orthogonale est idempotent c'est-à-dire $p \circ p = p$.

☞ Toute projection orthogonale est une application affine, donc conserve le barycentre, l'allignement, le parallélisme.

5.4 Demi-tours

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace $\mathscr{E}$.



Les plans $\mathcal{P}$ et Q sont secants suivant la droite $(\mathcal{D})$.

- Pour tout plan Q perpendiculaire à $\mathcal{P}$, la restriction de la réflexion au plan Q est une réflexion plane d'axe la droite $(\mathcal{D}) = \mathcal{P} \cap Q$.
- La réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$ est l'isométrie dont l'ensemble des points invariants est le plan $\mathcal{P}$.
- Soit $S_{\mathcal{P}}$ la réflexion de plan $\mathcal{P}$, $S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$.

Pour la suite, on considère que les plans $\mathcal{P}$ et Q sont perpendiculaires suivant la droite $(\mathcal{D})$. Dans ce cas, on en déduit la définition suivante :

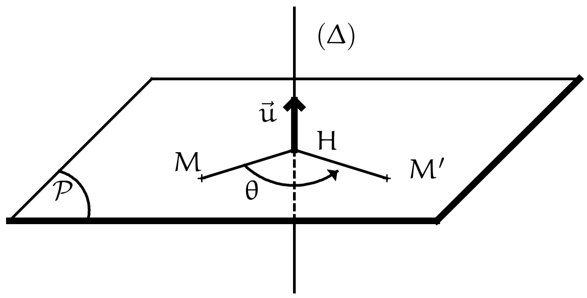


Figure.

☞ Pour tout plan $\mathcal{P}$ orthogonal à (Δ) la restriction de la rotation r au plan $\mathcal{P}$ est une rotation plane de centre $\Omega = \mathcal{P} \cap (\Delta)$ d'angle θ.
☞ En particulier si M_1 est défini par $\overrightarrow{HM_1} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur unitaire de (Δ) alors

$$\overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{HM}\cos\theta + \overrightarrow{HM_1}\sin\theta$$

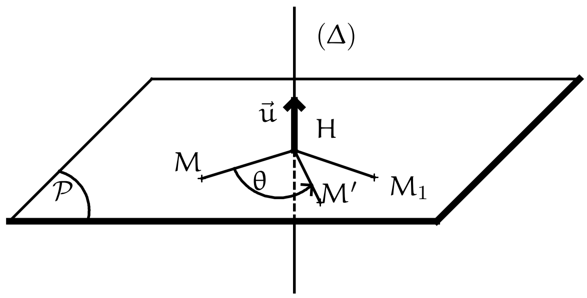


Figure.

☞ Une rotation d'axe $(\Delta, \vec{u})$ est une isométrie dont l'ensemble des points invariants est la droite (Δ).

☞ Une rotation d'axe $(\Delta, \vec{u})$ et d'angle π est appelée demi-tour.

Théorème. *Soit $\mathcal{P}$ et Q deux plans sécants suivant une droite (Δ).*

- *La composée de deux réflexions par rapport à $\mathcal{P}$ et Q est une rotation d'axe (Δ).*
- *Réciproquement, pour tout plan $\mathcal{P}$ passant par (Δ), il existe un unique plan Q tel que la rotation d'axe (Δ) s'écrive $r = S_{\mathcal{P}} \circ S_Q$.*

☞ Si $\mathcal{P} \perp Q$ alors $S_{\mathcal{P}} \circ S_Q$ est le demi-tour d'axe $(\Delta) = \mathcal{P} \cap Q$.

5.4.2 Symétrie centrale

Soit A un point de l'espace $\mathscr{E}$ la symétrie par rapport au point A est une isométrie de $\mathscr{E}$ ayant un seul point invariant.

l'image d'un point $M(x, y, z)$ de (Δ) a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} x' &= -x-y+2z-1=(1+2\lambda)-(2+\lambda)+2(3+2\lambda)-1=\lambda+2 \\ y' &= -2x+2z-1=-2(1+2\lambda)+2(3+2\lambda)-1=3 \\ x' &= -2x-y+3z-1=-2(1+2\lambda)-(2+\lambda)+3(3+2\lambda)-1=\lambda+4 \end{aligned}$$

Lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, l'image de (Δ) est la droite de représentation paramé– trique :

$$\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3 \\ z = 4+\lambda \end{cases} \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

elle passe par le point $A(2, 3, 4)$ et elle a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

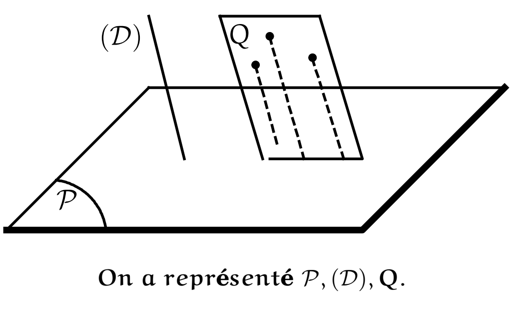
3. Une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{L})$: $x-1=y-2=z-3$ est, en appelant t la valeur commune de $x-1$, $y-2$, $z-3$:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases} \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

elle passe par le point $B(1, 2, 3)$et elle a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puisque $(\mathcal{L})$ a pour direction celle de la projection f donc son image est le singleton $\{B'\}=\{f(B)\}$.

4. Soit Q le plan d'équation : $3x-y-2z+2=0$. Le plan vectoriel associé à la direction de Q a pour équation : $3x-y-2z=0$. Ce plan contient le vec– teur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc Q est parallèle à $(\mathcal{D})$.



On a représenté $\mathcal{P}, (\mathcal{D}), \mathbf{Q}$.

L'image de Q est l'intersection de Q et $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} 3x-y-2z+2 = 0 \\ 2x+y-2z+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}z-\frac{3}{5} \\ y = \frac{2}{5}z+\frac{1}{5} \end{cases}$$

C'est la droite passant par $C\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$ dirigé par $\vec{w}=\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{2}{5}\vec{j}+\vec{k}$.

6.2 Division Euclidienne

Proposition. *Soit* b *un entier non nul. Pour tout* $a \in \mathbb{Z}$, *il existe des entiers* q *et* r *uniques tels que* $a = bq + r$ *et* $0 \leq r < |b|$. *L'entier* q *s'appelle le quotient de* a *par b et l'entier* r *s'appelle le reste de la division de a par b.*

☞ b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

☞ Si b>0, le quotient q est l'unique entier tel que $q \leq \frac{a}{b} < q+1$: c'est la partie entière du nombre rationnel $\frac{a}{b}$.

Proposition. *Nombre chiffres d'un entier naturel donné p.*
Soient n *et* p *deux entiers naturels tels que* $10^n \leqslant p < 10^{n+1}$. *On a :*

1. *p s'ecrit avec* $n+1$ *chiffres*
2. $n = E(\log(p))$ *où la fonction* E *désigne la fonction partie entière.*

Exercice 33. Extrait bac blanc Lycée Djoué Dabany
Déterminer les entiers naturels n tels que le nombre 3^n s'écrive avec le même nombre de chiffres que 122^{72}.

Solution. Déterminons le nombre de chiffres du nombre 122^{72}.

On a $n = E(\log(122^{72})) = 150$ par suite, le nombre 122^{72} s'ecrit avec 151 chiffres dans son écriture décimale. On cherche les entiers n tel que

$$E(\log(122^{72})) = E(\log(3^n))$$

c'est−à−dire $E(n\log(3)) = 150$. Or par définition de la partie entière on a, $E(n\log(3)) = 150 \Leftrightarrow n\log(3) \in [150; 151[\Leftrightarrow n \in \{315; 316\}$. Ainsi, on en déduit que les nombres entiers 122^{72} et 3^n s'ecrivent avec le même nombre de chiffre décimal si $n \in \{315; 316\}$.

6.2.1 PGCD

Définition. *Soient a,b∈$\mathbb{Z}$ des entiers non tous deux nuls. Le plus grand entier qui divise a et b s'appelle le pgcd de a et b et se note* $\text{pgcd}(a,b)$.
On dit que a *et* b *sont premiers entre eux si* $\text{pgcd}(a,b) = 1$.

☞ Si $a > 0$, alors $\text{pgcd}(a,0) = a$.

☞ Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(a,1) = 1$.

☞ Si $a|b$ et $a \neq 0$, alors $\text{pgcd}(a,b) = |a|$.

Proposition. *Soit* p *un nombre premier. Pour tout entier* $n \in \mathbb{Z}$, *on a*

$$\text{pgcd}(n,p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ ne dive pas } n \\ p & \text{si } p|n \end{cases}$$

6.2.2 Algorithme d'Euclide

Proposition. *Pour tous entiers a et b strictement positifs, on a*

$$\text{pgcd}(a,b)=\text{pgcd}(b,r)$$

où r *est le reste de la division euclidienne de a par b.*

On exploite cette proposition pour calculer le pgcd. Soient a et b des entiers positifs. Faisons les divisions successives :

$$\begin{array}{rcl} a & = & b\,q_1+r_1 \\ b & = & r_1q_2+r_2 \\ r_1 & = & r_2q_3+r_3 \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n-2} & = & r_{n-1}q_n+r_n \\ r_{n-1} & = & r_nq_{n+1}+0 \end{array} \quad 0=r_{n+1}<r_n<\ldots<r_2<r_1<|b|.$$

Puisque les restes sont positifs ou nuls et diminuent strictement, le dernier est nul. Le dernier reste non nul est un nombre $r_n>0$ tel que $r_n|r_{n-1}$, donc

$$\text{pgcd}(a,b)=\text{pgcd}(b,r_1)=\text{pgcd}(r_1,r_2)=\ldots=\text{pgcd}(r_{n-1},r_n)=r_n$$

Cette méthode de calcul du pgcd s'appelle *l'algorithme d'Euclide*.

6.2.3 Les théorèmes de Bézout et de Gauss

Théorème. *Soient* $a,b\in\mathbb{Z}$ *des entiers non tous deux nuls. Alors il existe* $u,v\in\mathbb{Z}$ *tels que* $au+bv=\text{pgcd}(a,b)$(*relation de Bézout*).

Notations. Pour tout entier a, on note $a\mathbb{Z}$ l'ens emble des multiples de a. Si a et b sont des entiers, on note $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers de la forme $au+bv$, où $u,v\in\mathbb{Z}$.

Exercice 34. Conséquence du théorème de Bézout
Soient a et b des entiers non tous deux nuls. Montrer que :

1. $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\text{pgcd}(a,b)\mathbb{Z}$
2. En déduire que a et b sont premiers entre eux si il existe des entiers u, $v\in\mathbb{Z}$ tel que $au+bv=1$.

Solution.
Posons $d=\text{pgcd}(a,b)$.

1. D'après le théorème de Bézout, $d\in a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$, donc $d\mathbb{Z}\subset a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$. Récipro– quement, a et b sont multiple de d, donc tout entier $ak+bl\in a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est un multiple de d, c'est–à–dire appartient $d\mathbb{Z}$.

2. D'après 1, en déduit que

   $\text{pgcd}(a,b)=1\Leftrightarrow a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\Leftrightarrow$ il existe des entiers $u,v\in\mathbb{Z}$ tel que $au+bv=1$

6.2.6 Décomposition en facteurs premiers

Nous avons montré à la page 51 que tout entier au moins égal à 2 est produit de nombres premiers. Nous allons voir que cette factorisation est essentiellement unique.

Proposition. *Pour tout entier* $a > 1$, *il existe une unique suite de nombres premiers* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *tels que* $a = p_1 p_2 \cdot \cdots \cdot p_k$ *et* $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_k$.

En regroupant les termes égaux dans la décomposition, on voit que tout nombre entier $a > 1$ s'écrit de manière unique à l'ordre près des facteurs :

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

où les p_i sont des nombres premiers deux à deux différent et $n_i \ge 1$.

6.2.7 Valuation p – adique

Par commodité, on étend la décomposition précédente en considérant un pro– duit sur tous les nombres premiers, y compris ceux qui ne divise pas l'entier a qu'on affecte de l'exposant 0 : par convention en effet, si q est un entier non nul, alors $q^0 = 1$. Notons $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On écrit :

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(a)} \text{ où } \nu_p(a) \in \mathbb{N}$$

Dans ce produit, il n'y a bien sûr qu'un nombre fini de facteurs différents de 1. Car il n'y a qu'un nombre fini d'exposant non nuls.

Définition. *Soit* a *un entier et* $p \in \mathbb{P}$
L'entier $\nu_p(a)$ *s'appelle l'exposant de* p *dans la décomposition de* a *en facteurs premiers.*

☞ $1188 = 11 \times 2^2 \times 3^3$ donc $\nu_{11}(1188) = 1; \nu_2(1188) = 2$ et $\nu_3(1188) = 3$.

☞ Pour tout entiers naturels a, b et p un nombre premier, $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$.

Proposition. *Soient* a *et* b *deux entiers tels que* $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(a)}$ *et* $b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(b)}$. *Alors*

$$\operatorname{pgcd}(a,b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\nu_p(a), \nu_p(b))} \quad \text{et} \quad \operatorname{ppcm}(a,b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\nu_p(a), \nu_p(b))}$$

6.2.8 Nombre de diviseurs d'un entier

Soit $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ un entier décomposé en facteurs premiers. Pour qu'un entier positif d divise a, il faut et il suffit que la décomposition de d soit de la forme

$$d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \text{ où } 0 \le \alpha_i \le n_i \text{ pour tout } 1 \le i \le k$$

Il y a $n_1 + 1$ valeurs posibles pour α_1, $n_2 + 1$ valeurs posibles pour α_2, etc, donc on en déduit la proposition suivante :

Proposition. *Soient et b deux entiers tels que* $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$. *Alors le nombre*

$$N = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_k + 1)$$

est le nombre des diviseurs positifs de a.

☞ Le nombre $1188 = 11 \times 2^2 \times 3^3$ admet 24 diviseurs psotifs car $(1+1)(2+1)(3+1) = 24$.

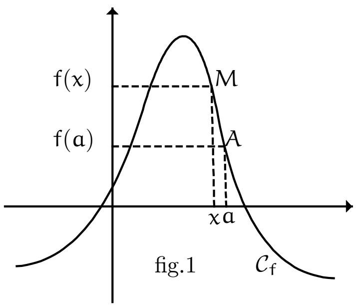
7 Continuité et dérivabilité

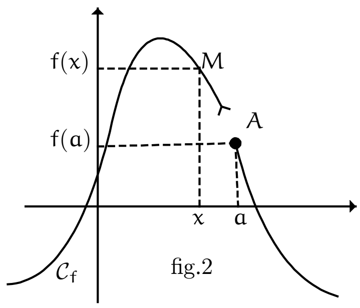
7.1 Continuité

7.1.1 Continuité d'une fonction en un point

Introduction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $A(a, f(a))$ le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. Pour tout réel x de l'intervalle I, on considère le point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x.





☞ **figure 1**. f est une fonction continue en a.

✍ *Intuivement la figure* **fig 1** *permet de conjecturer que pour tout réel* a *de* I, *on peut rendre* $f(x)$ *aussi proche que l'on veut de* $f(a)$ *pourvu que x soit suffisamment proche de* a.

☞ **figure 2**. f n'est pas une fonction continue en a.

✍ *Intuivement la figure* **fig 2** *permet de conjecturer la courbe* $\mathcal{C}_f$ *présente un saut au point A d'abscisse* a *par conséquent M n'est pas proche de A lorsque* x *est proche de a .*
On a la définition suivante :

Définition. *Soit* $f : D \to \mathbb{R}$ *une fonction numérique et* a *un point où la fonction est définie. On dit que* f *est continue en* $A(a, f(a))$ *si on a simultanément les deux conditions* :
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe*
- $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

- ☞ Cette définition implique nécessairement que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ exis–tent et sont égales.
- ☞ Par abus de langage, on dira que la fonction f est continue au point $x = a$ ou en $x = a$ lorsqu'elle est continue au point $A(a, f(a))$.

La fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

n'est pas continue en 1.
On a représenté sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci–dessous :

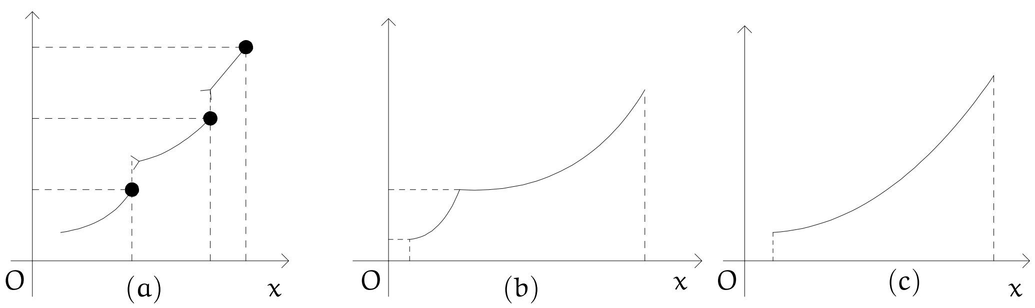
d'où $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{\sqrt{7}}{2}; +\infty\right[$.

2. f est dérivable sur $]0;\pi[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x$ donc on en déduit que f est décroissante sur $]0;\pi[$ par suite, $f(]0;\pi[) =]f(\pi); f(0)[=]0;2[$.

7.3 Théorème des fonctions réciproques

On s'intéresse au comportement d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ monotone définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ supposé d'interieur non vide. Plus précisement, on voudrait savoir :

- quelle condition imposer à f pour que l'application $f : I \to f(I)$ soit bijec− tive;
- lorsque f^{-1} existe, si l'on peut déduire la continuité ou la dérivablité de f^{-1} de celle de f.



Trois cas de figures.

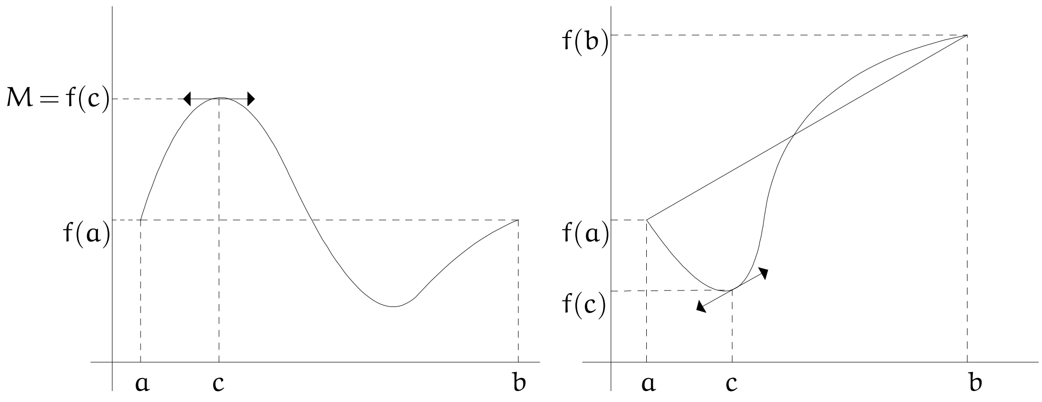
On a représenté des grapphes de fonctions monotones.

- Le graphe (a) est celui d'une fonction strictement monotone sur I qui n'est pas continue sur I (mais seulement continue par morceaux). On constate que f(I) n'est pas un intervalle, mais $f : I \to f(I)$ est bijective.
- Le graphe (b) est celui d'une fonction monotone et continue sur I, mais non strictement monotone. Dans ce cas f(I) est un intervalle, mais la fonction $f : I \to f(I)$ n'est pas bijective.
- Le graphe (c) est celui d'une fonction strictement monotone et continue sur I. Dans ce cas tout est parfait : f(I) est un intervalle (d'apès le théo− rème des valeurs intermédiaires) et $f : I \to f(I)$ est bijective. Ce dernier graphe correspond aux hypothèses de théorème suivant on l' on admet :

Théorème. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue strictement monotone définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *Posons* $J = f(I)$. *Alors*

- J *est un intervalle*
- f *induit une bijection de* I *sur* J,
- $f^{-1} : J \to I$ *est continue strictement monotone et de même sens que* f.
- *Si f est dérivable en* $x_0 \in I$ *et si* $f'(x_0) \neq 0$, *alors* f^{-1} *est dérivable en* $f(x_0)$ *et :*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$



Interprétation graphique.

7.4.1 Inégalité des accroissements finis version 1

Théorème. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ *est une application continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a,b[$ *et s'il existe deux réels* m *et* M *tels que* $m \leq f'(x) \leq M$ *pour tout* $x \in]a,b[$, *alors* :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Exercice 54. Application de l'inégalité des accroissements finis version 1

1. Déterminer un encadrement du nombre :
$$\sqrt{33} - \sqrt{32}$$
2. Démontrer que pour tout nombre réel a de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{4}]$, on a :
$$a \leq \tan a \leq 2a$$
3. Démontrer que pour tout nombre réel a et b de $[0; \frac{\pi}{4}]$ on a :
$$\frac{b-a}{\cos^2(a)} \leqslant \tan(b) - \tan(a) \leqslant \frac{b-a}{\cos^2(b)}$$

Solution.

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Posons $I = [32; 33]$. La fonction f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ par suite en déduit pour tout $x \in I$,
$$\frac{1}{2\sqrt{33}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{32}}$$
L'inégalité des accroissements finis nous permet d'obtenir l'inégalité pour tout $x \in I$,
$$\frac{1}{2\sqrt{33}} \leq \sqrt{33} - \sqrt{32} \leq \frac{1}{2\sqrt{32}}$$
2. Considérons la fonction f . $x \longmapsto \tan x$. Posons $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Il s'ensuit que f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. On en déduit que pour tout $x \in I$, $1 \leq f'(x) \leq 2$ par l'inégalité des accroissements finis on en déduit l'inégalité :

et

$$\arg(a)=\begin{cases}\dfrac{\theta-2\pi}{4}\,[2\pi] \text{ si } \theta\in]0;2\pi[\\ \dfrac{\theta+2\pi}{4}\,[2\pi] \text{ si } \theta\in]-2\pi;0[\end{cases}$$

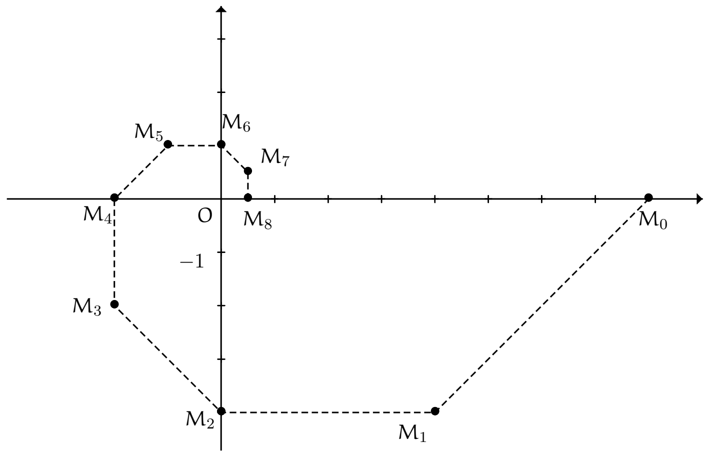
2. Dans cette question on prend $\theta=\pi$.

a) On a d'après **1** que $|a|=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(a)=\dfrac{\pi-2\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Dans le plan complexe P rapporté au repère orthogonal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on définit l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe az. L'expression complexe de f est $z'=az$, $a\in\mathbb{C}$ et $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\theta}{4}}$. Alors f est la simulitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

c) K est le point d'affixe $z_K=8$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $z_{n+1}=az_n$.
On a :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_n	8	$4(1-i)$	$-4i$	$-2(1+i)$	-2	$-1+i$	i	$\frac{1}{2}(1+i)$	$\frac{1}{2}$



d) On a : $OM_{n+1}=\left|\frac{z_n}{2}(1-i)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$
et

$$M_nM_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|=|az_n-z_n|=|z_n|\left|\frac{1}{2}(1-i)-1\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$$

Donc pour tout n, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle isocèle en M_{n+1} par suite on en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n=\dfrac{OM_n\times M_nM_{n+1}}{2}=\dfrac{1}{4}|z_n|^2$ de ce fait, il s'ensuit que $A_{n+1}=\dfrac{1}{4}|z_{n+1}|^2=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}|z_n|^2=\dfrac{1}{8}|z_n|^2=\dfrac{1}{2}A_n$ donc la suite (A_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $A_0=16$ donc pour tout $n\geqslant 0$, $A_n=16\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

On a alors $\dfrac{z_1}{z_2}=\lambda$, donc

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv 0[2\pi] &\Leftrightarrow \arg(z_1)-\arg(z_2)\equiv 0[2\pi]\\ &\Leftrightarrow \arg(z_1)\equiv\arg(z_2)[2\pi]\end{aligned}$$

Lorsqu'on a l'égalité, z_1 et z_2 ont le même argument, modulo 2π.

II. 1) Montrons par récurrence que l'on a :

$$\forall n\geq 2, \forall(z_1,z_2,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\quad \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|$$

- **Initialisation :** pour $n=2$, on a $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ d'après la question **A.I.2**. Donc, (H_2) est vraie.
- **Hérédité :** supposons l'hypothèse vraie au rang n.
  On choisit le $(n+1)$-uplet $(z_1,z_2,\dots,z_n,z_{n+1})$ de nombres complexes.
  On a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}|z_k|+z_{n+1}\right|\\ \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{n}|z_k|+|z_{n+1}|\\ \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{n+1}|z_k|\end{aligned}$$

  L'hypothèse reste donc encore vraie au rang $n+1$.
  Donc pour tout $(z_1,z_2,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|$.

2) Soit $z_1,z_2,\dots,z_n$ des nombres complexes tous non nuls.

Supposons que $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \exists\lambda_k\in\mathbb{R}_+,\ z_k=\lambda_k z_1$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k z_1\right|\\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)z_1\right|\\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)|z_1| \text{ car } \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\geq 0\\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k|z_1|)\\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k z_1|\\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \sum_{k=1}^{n}|z_k|\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ et montrons par récur– rence que l'on a : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ z_k = \lambda_k z_1$.

- **Initialisation** : pour $n=2$, on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire démontré en **A.I.3**. Donc, (H_2) est vraie.

- supposons l'hypothèse vraie au rang n.
On choisit le $(n+1)$-uplet $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, de nombres complexes non nuls tels que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| \\
\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \\
\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| + |z_{n+1}| \\
\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right|
\end{aligned}$$

d′ ou $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. On en déduit

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{\cancel{n}+1}| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{\cancel{n}+1}|$$

D′après l′hypothèse de récurrence à l'ordre n, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$. De l′égalité

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| + |z_{n+1}|$$

on en déduit d'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre 2,qu′il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} z_k$. Donc, $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} z_k = \left(\lambda \sum_{k=1}^{n} z_k\right) z_1$.
En posant $\lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda\lambda_k$ qui est positif comme somme de termes positifs, on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ z_k = \lambda_k z_1$$

L'hypothèse reste donc encore vraie au rang $n+1$.
On en conclut donc que (H_n) est vraie pour tout $n \geq 2$. Ainsi, on a montré si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes tous non nuls,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ z_k = \lambda_k z_1$$

On a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{array}{rcl} \arg(z_k) & = & \arg(\lambda_k)+\arg(z_1)[2\pi] \\ \arg(z_k) & = & \arg(z_1)[2\pi] \end{array}$$

ce qui signifie que les points d'affixe z_k ont le même argument modulo 2π. Ils sont situés sur une même droite.

Partie B - On se place désormais dans le plan complexe $\mathcal{P}$, d'origine O. Soit un entier $n \geq 3$.

I. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $z_k = e^{2ik\pi/n}$. Le n-uplet $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ des racines n-ième de l'unité vérifie clairement les conditions (i), (ii) et (iii). Montrons qu'il vérifie également (iv) :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{|z_k|}=\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{2ik\pi/n}}{1}=\sum_{k=1}^{n}(e^{2i\pi/n})^k=e^{2i\pi/n}\times\frac{1-(e^{2i\pi/n})^n}{1-e^{2i\pi/n}}=\frac{1-1}{1-e^{2i\pi/n}}=0$$

II. 1) Pour tout nombre entier k de l'intervalle $[\![1,n]\!]$ et tout point M(z) du plan, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=1}^{n}\overline{u_k}(z-z_k) & = & \sum_{k=1}^{n}\overline{\left(\frac{z_k}{|z_k|}\right)}(z-z_k) \\
\sum_{k=1}^{n}\overline{u_k}(z-z_k) & = & \sum_{k=1}^{n}\overline{\left(\frac{z_k}{|z_k|}\right)}z-\sum_{k=1}^{n}\overline{\left(\frac{z_k}{|z_k|}\right)}z_k \\
\sum_{k=1}^{n}\overline{u_k}(z-z_k) & = & z\sum_{k=1}^{n}\overline{\left(\frac{z_k}{|z_k|}\right)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{z}_k z_k}{|z_k|} \\
\sum_{k=1}^{n}\overline{u_k}(z-z_k) & = & z\times 0-\sum_{k=1}^{n}\frac{|z_k|^2}{|z_k|} \\
\sum_{k=1}^{n}\overline{u_k}(z-z_k) & = & -\sum_{k=1}^{n}|z_k|
\end{array}$$

2) u_k est un nombre complexe de norme 1, on a donc $|u_k| = |\overline{u_k}|$, d'où :

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=1}^{n}|z-z_k| & = & \sum_{k=1}^{n}|\overline{u_k}||z-z_k| \\
\sum_{k=1}^{n}|z-z_k| & = & \sum_{k=1}^{n}|\overline{u_k}(z-z_k)| \\
\sum_{k=1}^{n}|z-z_k| & \geq & \left|\sum_{k=1}^{n}\overline{u_k}(z-z_k)\right| \\
\sum_{k=1}^{n}|z-z_k| & \geq & \left|-\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right|
\end{array}$$

donc $\sum\limits_{k=1}^{n}|z-z_k| \geq \sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|$ $(\star)$

3) Supposons tout d'abord que M soit distinct de tous les A_k.

Exercice 77. Problème bac C Togo 2023

Partie A

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1}=u_n^2+u_n$.

1. a) Démontrer que (u_n) est une suite croissante.
   b) Démontrer que si (u_n) est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
2. Démontrer que si $u_0^2+u_0>0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
3. Démontrer par récurrence que si $u_0^2+u_0<0$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $-1<u_n<0$.
4. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. soit F l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=z^2+z$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par F, puis l'ensemble des points invariants par $F\circ F$.
2. Soit A,B et I les points d'affixes respectifs i, $-1-i$ et $-\dfrac{1}{2}$.
   a) Déterminer F(A) et F(B).
   b) Soit M_0 un point du plan. Démontrer que $F(M)=F(M_0)$ si, et seulement si $M=M_0$ ou $M=S(M_0)$ où S est une transformation simple du plan que l'on précisera.

Partie C

Le plan complexe est rapporté d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$(pour les figures prendre $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=4\text{cm}$).

1. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient $x^2-y^2+x+1=0$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient $y^2+x=0$.
   a) Donner la nature des coniques $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$.
   b) Préciser les éléments caractéristiques et les asymptotes éventuelles.
2. Représenter ces coniques sur une même figure. (On admettra qu'elles sont tangentes au points d'abscisse $x=-1$.
3. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{P}_1$ les ensembles des points du plan dont les coordonnées vérifients : $\mathcal{H}_1 \begin{cases} -1<x<0 \\ x^2-y^2+x+1>0 \end{cases}$ et $\mathcal{P}_1 \begin{cases} -1<x<0 \\ y^2+x<0 \end{cases}$
   a) Hachurer $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{P}_1$ sur la figure précédente. (On ne cherchera pas à le justifier par calcul).
   b) Démontrer que $\mathcal{P}_1$ est inclus dans $\mathcal{H}_1$ puis que $\mathcal{P}_1$ est inclus dans D(K, 1), ensemble des points M tels que $KM<1$, K étant le point d'affixe -1.
   c) Démontrer que si M appartient à $\mathcal{H}_1$ alors F(M) appartient à $\mathcal{P}_1$.
4. Soit M_0 un point de $\mathcal{H}_1$. On définit la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $M_{n+1}=F(M_n)$. En utilisant les questions 3b) et 3c), montrer que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, z_n étant l'affixe de M_n.

Exercice 79. Extrait bac Maths Tunisie 2023
Le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A,B et C les points du plan d'affixes respectives i, $1+i$ et $-1+i$. A tout point M du plan P d'affixe $z \neq i$, on associe le point M' de plan P d'affixe $z' = \dfrac{iz+2}{z-i}$.

1. Montrer que pour tout $z \neq i$, $(z-i)(z'-i) = 1$.
2. En déduire que $z' \neq i$.
   Soit $z \neq i$, M le point d'affixe z et M' d'affixe z'.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M = M'$.
4. a) Montrer que les points A, M et M' sont alignés si, et seulement si $(z-i)^2$ est un réel.
   b) En déduire l'ensemble des points M tels que les points A, M et M' soient alignés.
5. Montrer que pour tout point M d'affixe $z \neq i$,

$$AM \cdot AM' = 1 \text{ et } \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AB})} [2\pi]$$

   Dans la figure ci-dessus, ζ est le cercle de centre A et de rayon 1. K et Q sont les points d'affixes respectives $z_K = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_Q = 1 + re^{i\frac{\pi}{4}}$, $r > 1$. H est le point de ζ tel que le triangle AHQ est rectangle en H et E est le projeté orthogonal de H sur la droite (AK).

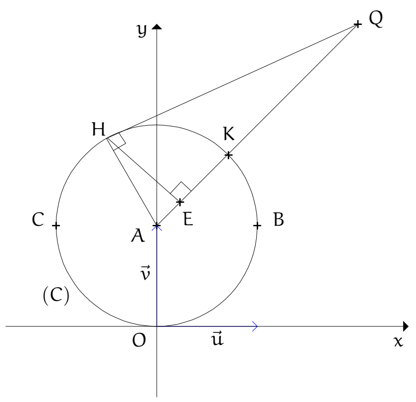


Figure .

6. a) Soit le point K' d'affixe z'_K. Calculer la distance AK' et donner une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK'})}$.
   b) Placer le point K' sur la figure ci-dessus.
   c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la demi-droite [AK) privée du point A.
7. a) Montrer que $AQ \cdot AE = 1$.
   b) Construire alors dans la figure ci-dessus le point Q' d'affixe z'_Q.

donc $a=1$, $b=-5-3i$ et $c=2+9i$.

Soit Δ le discrimant du trinôme $z^2-(5+3i)z+2+9i$. On a $\Delta=8-6i$. Déterminons une racine carrée de Δ.
Soit $\gamma\in\mathbb{C}$ tel que $\sqrt{\Delta}=\gamma$ c'est–à–dire $\gamma^2=\Delta$. En posant $\gamma=x+iy$ avec $(x, y)\in\mathbb{R}^2$ il s'ensuit que :

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= 8\\ x^2+y^2 &= 10\\ 2xy &= -6\end{cases}$$

d'où $x=\pm3$ et $y=\pm1$. Il suffit de prendre $\gamma=3-i$. Ainsi, on en déduit que les solutions de l'équation $z^3-(7+3i)z^2+\lambda z-4-18i=0$ sont les nombres complexes

$$z_1=2,\quad z_2=\frac{5+3i+3-i}{2}=4+i,\quad z_3=\frac{5+3i-3+i}{2}=1+2i$$

c) On a $z_A=2$, $z_B=4+i$ et $z_D=1+2i$. Placer les points sur la figure ci–dessus :

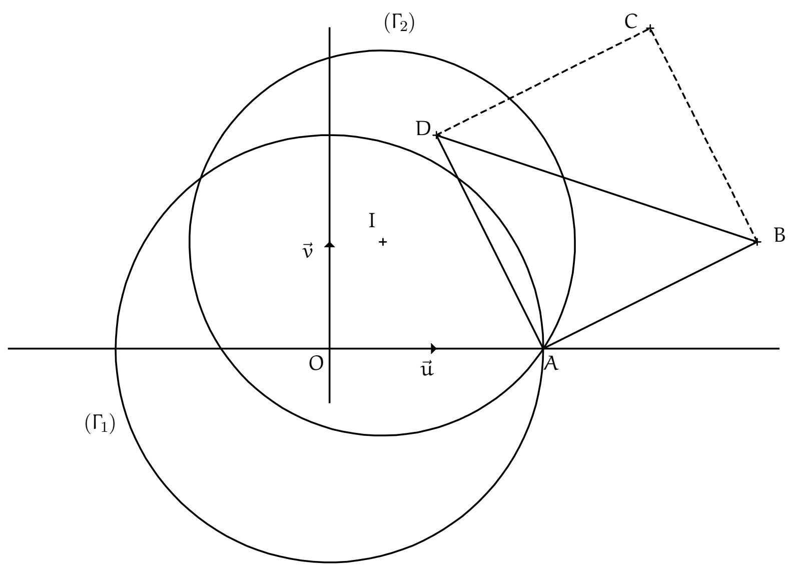


Figure.

On a $AB=|z_A-z_B|=|-2-i|=\sqrt{5}$; $AD=|-1+2i|=\sqrt{5}$ et $BD=|3-i|=\sqrt{10}$. Ainsi, on en déduit : $AB=AD$ et $BD^2=AB^2+AD^2$ donc le triangle ABD est rectangle isocèle en A.

Autre Méthode

On a :

$$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1+2i-2}{4+i-2}=\frac{-1+2i}{2+i}=i$$

Ainsi, ABD est un triangle isocèle rectangle en A.
Un point M du plan de coordonnées (x,y) appartient à (BD) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires ce qui est aussi équivalent à

$$\begin{vmatrix} -3 & x-4\\ 1 & y-1\end{vmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; x+3y=7$$

Exercice 89. Extrait bac C Gabon 2021

Le but de l'exercice est de déterminer la forme du développement d'un nombre rationnel en fraction continue simple finie.

1. On considère les nombres $a=49,\ b=17$ et les égalités (1) et (2) suivantes : (1) $49=17\times 2+15$ (2) $\dfrac{49}{17}=2+\dfrac{1}{\frac{17}{15}}$

   a) Expliquer simplement pourquoi l'égalité (1) implique l'égalité (2).
   b) Soit l'égalité suivante : $17=15\times 1+2$
   Expliquer simplement cette égalité implique les égalités (3) et (4) suivantes :
   (3) $\dfrac{17}{15}=1+\dfrac{2}{15}=1+\dfrac{1}{\frac{15}{2}}$ (4) $\dfrac{49}{17}=2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{15}{2}}}$
   c) Soit l'égalité : $15=2\times 7+1$
   Expliquer simplement cette égalité implique les égalités (5) et (6) suivantes :
   (5) $\dfrac{15}{2}=7+\dfrac{1}{2}$ (6) $\dfrac{49}{17}=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{7+\frac{1}{2}}}$

   L'égalité (6) est nommée développement de $\dfrac{49}{17}$ en fraction continue simple finie. Ce développement, noté $[2;1;7;2]$, permet d'écrire plus simplement l'égalité (6) : $\dfrac{49}{17}=[2;1;7;2]$

2. a) Calculer le nombre rationnel r tel que : $r=[3;2;5;7]$
   b) Calculer le nombre rationnel s dont le développement est $[3;2;5;6;1]$.
   c) Le développement d'un nombre rationnel en fraction continue simple finie est-il unique ? Justifier.

3. a) Ecrire le développement de $\dfrac{16}{9}$ en fraction continue simple finie.
   b) Ecrire le développement de $\dfrac{2021}{2019}$ en fraction continue simple finie.

4. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. L'application de l'algorithme d'Euclide au couple (a,b) permet d'écrire les égalités suivantes où n est un entier naturel tel que $n\geq 3$:

$$\begin{array}{rcl} a & = & bq_1+r_1 \\ b & = & r_1q_2+r_2 \\ r_1 & = & r_2q_3+r_3 \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n-2} & = & r_{n-1}q_n+r_n \\ r_{n-1} & = & r_nq_{n+1}+0 \end{array} \quad 0=r_{n+1}<r_n<\ldots<r_2<r_1<b$$

   a) Que veut l'entier naturel r_n ? Justifier.
   b) Ecrire le développement de $\dfrac{a}{b}$ en fraction continue simple finie. On déterminera une égalité analogue à l'égalité (6).

Synthèse–Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. On a $P(0)$ et $P(1)$ vérifiées par définition de (λ, μ). Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$ donc

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & a u_{n+1} + b u_n \\ u_{n+2} & = & a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ u_{n+2} & = & \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} \end{array}$$

car ${r_1}^2 = a r_1 + b$ et ${r_2}^2 = a r_2 + b$. Ainsi on a $P(n+2)$ vraie. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Supposons maintenant que l'equation admette une solution double $r \neq 0$

Analyse–Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$. On cherche $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation. Pour $n=0$ et $n=1$, on obtient $\begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$. Ce systleme admet une unique solution $(\lambda, \mu) = \left(u_0, \frac{u_1 - r u_0}{r}\right)$. Ainsi, le couple (λ, μ) est unique.

Synthèse–Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$. On a $P(0)$ et $P(1)$ vérifiées par définition de (λ, μ). Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$ et $u_{n+1} = \lambda r^{n+1} + \mu (n+1) r^{n+1}$ donc

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & a u_{n+1} + b u_n \\ u_{n+2} & = & a(\lambda r^{n+1} + \mu (n+1) r^{n+1}) + b(\lambda r^n + \mu n r^n) \\ u_{n+2} & = & \lambda r^{n+2} + \mu (n+2) r^{n+2} \end{array}$$

car $r^2 = ar + b$ et $r = \frac{a}{2}$. Ainsi on a $P(n+2)$ vraie. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. □

Propriété 2. *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Cas réel)*
Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ *et* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite définie par* $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ *et* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

L'equation $r^2 - ar - b = 0$ *est appelée l'equation caractéristique.*

- *Si l'equation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes* r_1 *et* r_2, *alors* :

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- *Si l'equation caractéristique admet une solution réelle double r, alors* :

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$$

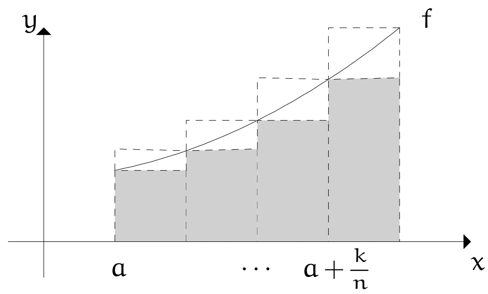
- *Si l'quation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées* $r_1 = r e^{i\theta}$ *et* $r_2 = r e^{-i\theta}$ *(avec* $r > 0$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$*), alors* :
  $\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$

9.2.2 Méthode des rectangles

Soient I un intervalle (non vide, non réduit à un point) et f une fonction dérivable sur I telle que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq M$ où M est un nombre réel positif.

On fixe deux réels $a, b \in I$, tel que $a \leq b$. Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ on pose

$$\begin{aligned} x_k &= a + k\frac{b-a}{n}, \text{ pour } k = 0, 1, \dots n \\ s_n &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) \end{aligned}$$



cas particulier.

Proposition.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, telle que $|f'|$ admet un majorant M sur cet intervalle. Lorsque l'on partage $[a;b]$ en n intervalles de même amplitude et d'extrémités $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b$, on a :

- *la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $s_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.*
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| s_n - \displaystyle\int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \dfrac{M}{2n}(b-a)^2$

Démonstration.

■ **Montrons d'abord l'inégalité :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| s_n - \displaystyle\int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \dfrac{M}{2n}(b-a)^2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx\right) &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx\right) &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Puisque $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ et de l'égalité précédente on en déduit :

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ s_n &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \\ s_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dx\right) \end{aligned}$$

$$I_0 = [\ln|u(x)|]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\Big[\tan\Big(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big] = \ln\left(\frac{\tan(\frac{\pi}{6})\tan(\frac{\pi}{4})}{1-\tan(\frac{\pi}{6})\tan(\frac{\pi}{4})}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$ d'où $I_0 = \ln(\sqrt{3}+2)$ et d'après 1b) $I_2 - I_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $I_2 = \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ par suite on a $I_4 = \frac{-5\sqrt{3}}{8} + \ln(\sqrt{3}+2)$ car $I_4 - I_2 = -\frac{1}{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3$.

9.2.3 Théorème de comparaison somme et intégrale

Soit $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante sur $[1;+\infty[$. Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = f(1)+f(2)+\cdots+f(n) = \sum\limits_{j=0}^{n} f(j)$.

Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $j > 0$.

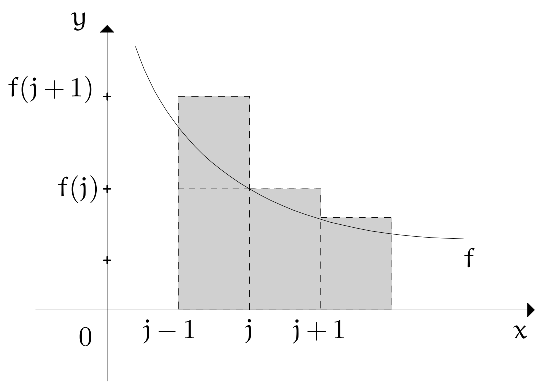


Figure.

Proposition. *Soit* $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue décroissante sur* $[1;+\infty[$. *Alors :*

- *Pour tout* $j \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_j^{j+1} f(x)\,dx \le f(j) \le \int_{j-1}^{j} f(x)\,dx$
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $(n>1)$ *définie par* $u_n = S_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\int_j^{j+1} f(x)\,dx$ *est convergente.*

Démonstration.

■ **Montrons d'abord l'inégalité :** $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_j^{j+1} f(x)\,dx \le f(j) \le \int_{j-1}^{j} f(x)\,dx$.

L'application f étant décroissante, nous avons :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [j;j+1],\quad f(j+1) \le f(x) \le f(j)$$
$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [j-1;j],\quad f(j) \le f(x) \le f(j-1)$$

d'où :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [j;j+1],\quad f(j+1) \le \int_j^{j+1} f(x)\,dx \le f(j) \quad (*)$$
$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [j-1;j],\quad f(j) \le \int_{j-1}^{j} f(x)\,dx \le f(j-1) \quad (**)$$

De $(*)$ et $(**)$ on en déduit : $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_j^{j+1} f(x)\,dx \le f(j) \le \int_{j-1}^{j} f(x)\,dx$

■ **Montrons la convergence de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

9.2.5 Lien entre primitive et intégrale

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a<b)$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ une application fonction continue et positive sur $[a,b]$.

Théorème. *La foncton* $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ *est la primitive de la fonction* f *sur l'intervalle* $[a,b]$ *telle que* $F_a(a)=0$.

Démonstration.
☞ On étudie le cas où f est croissante sur $[a,b]$.

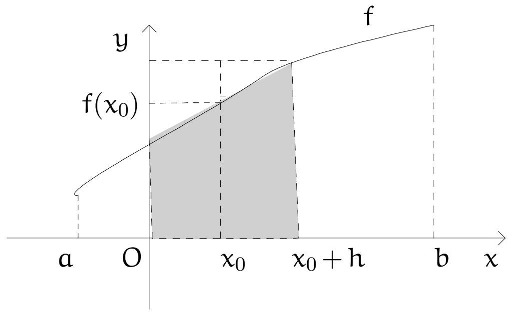


Figure.

x_0 et x_0+h, avec $h\neq 0$, sont deux nombres réels de l'intervalle $[a,b]$.

- **Si $h>0$**, alors $\int_a^{x_0+h} f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$, soit :

$$F_a(x_0+h)-F_a(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

  f est croissante sur $[a,b]$ donc on peut encadrer $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ par des aires des rectangles de longeurs h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$.
  Ainsi, $f(x_0)\times h \le F_a(x_0+h)-F_a(x_0) \le f(x_0+h)\times h$ et par suite :

$$f(x_0) \le \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \le f(x_0+h)$$

- **Si $h<0$**, alors on établit de la même façon que :

$$f(x_0+h) \le \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \le f(x_0)$$

- **Conclusion** : f est continue en x_0 donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$ et le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h}=f(x_0)$. Ainsi, F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0)=f(x_0)$ avec la définition de l'intégrale, $F_a(a)=0$ et finalement F_a est la primitive de la fonction f sur $[a,b]$ telle que $F_a(a)=0$. □

✍ Pour toute primitive F de f sur l'intervalle $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

coolLibri.com

IMPRIMÉ EN FRANCE
Achevé d'imprimer en août 2023
chez Messages SAS
111, rue Nicolas Vauquelin - 31100 Toulouse
05 31 61 60 42
www.coollibri.com

COLLECTION MATHS EN AFRIQUE
ÉDITION 2023