

# *Cahier d'activité de la classe de 2nde S*

*Auteur :*

***Adekoulé Emmanuel ILEDI***

*Professeur Adjoint*

Tel : (+229) 67 39 92 89/ 95 37 13 89

E-mail : [iledi.emmanuel@yahoo.fr](mailto:iledi.emmanuel@yahoo.fr)

**Version : SEPTEMBRE 2022**

# PROGRAMME D'ETUDES DE LA CLASSE DE 2<sup>nde</sup> S

## SA N°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

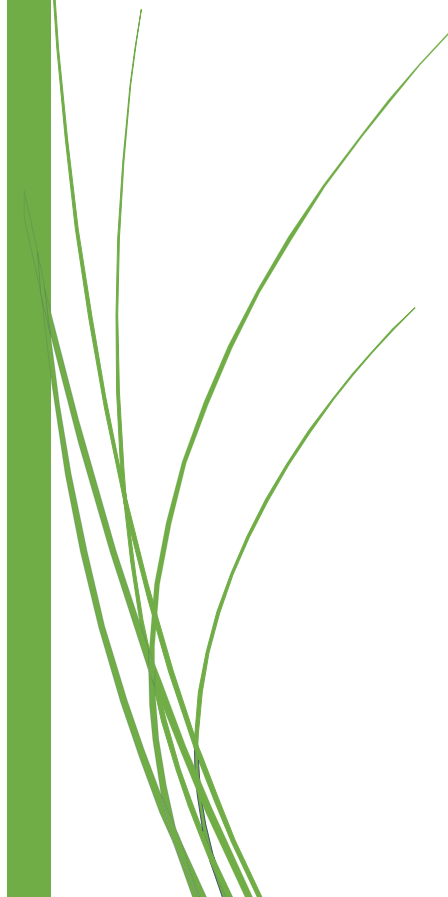
1. Représentation dans le plan d'objets de l'espace.
2. Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace.
3. Positions relatives de deux plans de l'espace.
4. Positions relatives de deux droites de l'espace.
5. Étude du parallélisme de deux droites

## SA N°2 : ORGANISATION DES DONNEES

1. Calculs dans  $\mathbb{R}$ .
2. Généralités sur les fonctions.
3. Études de quelques fonctions.
4. Applications.
5. Polynômes et fractions rationnelles.
6. Équations - Inéquations dans  $\mathbb{R}$ .
7. Statistique.

## SA N°3 : LIEUX GEOMETRIQUES DANS LE PLAN

1. Vecteurs du plan.
2. Droites du plan.
3. Homothétie.
4. Symétrie orthogonale - symétrie centrale - translation.
5. Angles inscrits - relations métriques dans un triangle.
6. Angles orientés - trigonométrie.
7. Produit scalaire.
8. Rotation.
9. Cercle dans le plan.
10. Équations - Inéquations dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

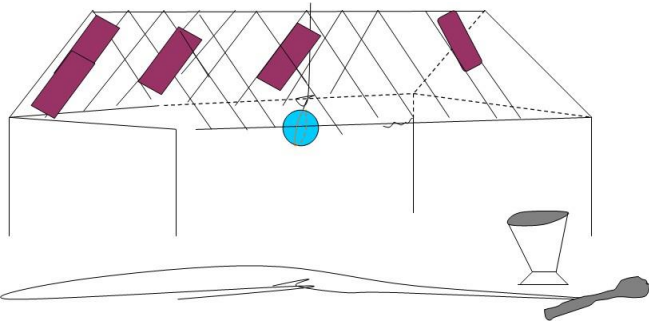


## SA N°1 : LIEUX GEOMETRIQUES DANS LE PLAN

### Situation de départ

#### Texte : Un motif spécial de décoration du mur

Un vent violent a décoiffé la toiture du domicile de Kodjo, un élève en classe de 2<sup>nde</sup> C au Lycée Mathieu Bouké. Pour l'informer, son frère lui adresse le message ci-dessous: "Voici ce qu'est devenue la toiture de notre maison après le passage du grand vent qui a précédé la pluie de la nuit dernière".



A la vue de ce dessin un ami de Kodjo voudrait étudier cette représentation de la toiture.

**Tâche :** Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques.

Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes posés ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

### Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

### Séquence n°1 : Représentation dans le plan d'objets de l'espace

#### Activité 1

L'un des amis de Coffi a reconnu parmi les solides déposés sur le bureau du professeur un objet ayant la forme du toit de la maison.

#### Définition

La **perspective cavalière** est une technique de représentation d'un objet de l'espace par une figure plane.

### Règles de représentation en perspective cavalière

- **Règle 1 :** Les arêtes de l'objet à supports parallèles sont représentées par des segments de supports parallèles sur le dessin.
- **Règle 2 :** Les faces de l'objet qui sont dans un plan vertical de face sont représentées sans déformation.
- **Règle 3 :** Les arêtes cachées de l'objet sont représentées par des traits en pointillés sur le dessin.
- **Règle 4 :** Les arêtes de l'objet à supports perpendiculaires au plan vertical de face sont représentées par des segments à supports parallèles faisant un angle de mesure  $\alpha$  avec la représentation de l'horizontale sur le dessin. ( $\alpha$  est appelé l'inclinaison des fuyantes sur l'horizontale).
- **Règle 5 :** Les longueurs des segments du dessin, représentant les arêtes de l'objet ayant des supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont multipliées par un coefficient  $c$ . ( $c$  est appelé coefficient de réduction)

#### Consigne 1.1

En te servant des règles de la perspective cavalière, représente un pavé droit  $ABCDEFGH$  en perspective cavalière sachant qu'il est posé sur la face  $ABFE$  et que la face  $ABCD$  est dans le plan vertical de face. On donne  $AB = 6\text{cm}$ ,  $AE = 5\text{cm}$  et  $AD = 3\text{cm}$ .

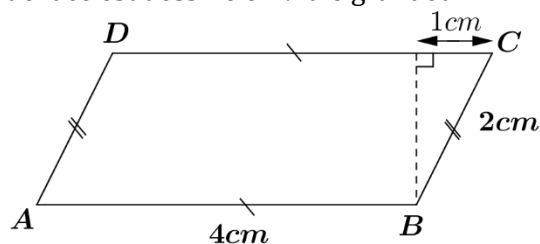
On prendra  $c = \frac{1}{2}$  et  $\alpha = 30^\circ$

#### Retenons

Le couple  $(\alpha, c)$  est appelé le **code de la perspective**

#### Consigne 1.2

Le parallélogramme ci-dessous est la représentation en perspective cavalière d'un carré situé dans un plan horizontal. Le segment  $[AB]$ , vu de face est dessiné en vraie grandeur.



Détermine par calcul, le code de cette perspective.

## Séquence n°2 : Positions relatives d'une droite et d'un plan

### Activité 1.2

La charpente de la maison se présente partiellement comme suit :

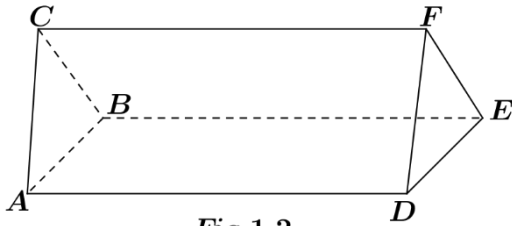


Fig 1.2

A la vue de la figure, Jean l'ami de Kodjo voudrait reconnaître les différentes positions relatives d'une droite et d'un plan.

### 2.1 Quelques axiomes

#### Rappels

1. Par deux points distincts A et B de l'espace, il passe une droite unique notée (AB).
2. Par trois points non alignés A, B et C de l'espace, il passe un plan unique noté (ABC).
3. Si A et B sont deux distincts d'un plan (P) alors (P) contient la droite (AB) et on note  $(AB) \subset (P)$ .

### 2.2 Positions relatives

#### Consigne 2.1

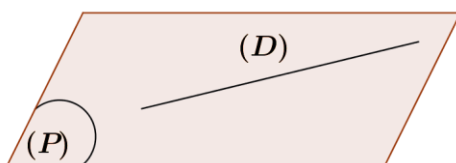
On considère le plan (ABC) de la figure 1.2 de l'activité 1.2.

1. (a) Donne la position relative de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).  
(b) Détermine  $(DE) \cap (ABC)$ .
2. (a) Donne la position relative de la droite (CF) par rapport au plan (ABC).  
(b) Détermine  $(CF) \cap (ABC)$ .
3. (a) Donne la position relative de la droite (CB) par rapport au plan (ABC).  
(b) Détermine  $(CB) \cap (ABC)$ .

#### Propriété

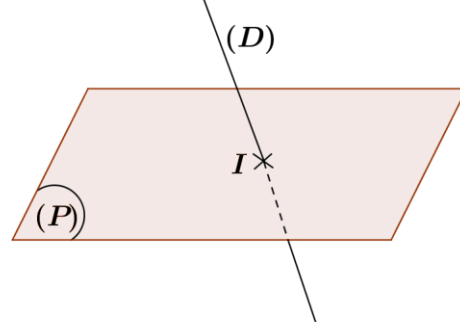
Etant donné une droite (D) et un plan (P) les différentes positions relatives sont :

1. (D) est incluse dans le plan (P) c'est-à-dire  $(D) \cap (P) = (D)$ .



(D) est incluse dans (P)

2. (D) et (P) sont sécants c'est-à-dire leur intersection est réduite à un seul point I et on note  $(D) \cap (P) = \{I\}$ .



(D) et (P) sont sécante en un point I  
On note  $(D) \cap (P) = \{I\}$

3. (D) et (P) sont disjoints c'est-à-dire  $(D) \cap (P) = \{\}$  ou  $(D) \cap (P) = \emptyset$



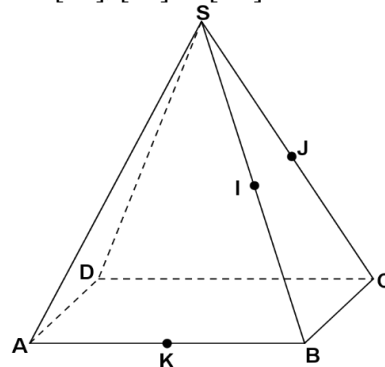
(D) et (P) sont disjoints  
On note  $(D) \cap (P) = \{\}$

#### Définition

1. On dit qu'une droite (D) et un plan (P) sont **parallèles** et on note  $(D) \parallel (P)$  lorsque la droite (D) est incluse dans le plan (P) ou lorsque la droite (D) et le plan (P) sont disjoints.
2. On dit qu'une droite (D) et un plan (P) sont **sécants** lorsque leur intersection est réduite à un point. On note  $(D) \cap (P) = \{A\}$  avec A le point d'intersection de (D) et (P).

#### Consigne 2.2

SABCD est une pyramide telle que ABCD est un parallélogramme. I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes [SB], [SC] et [AB].



1. Montre que la droite (IJ) et le plan (SKB) sont sécants.

2. Montre que (IK) et le plan (SAB) sont parallèles.

### 2.3 Point logique

#### Consigne 2.3

On considère la figure 1.2 de l'activité 1.2.

- Dis si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.
  - $(P_1)$  : "La droite (AB) est parallèle au plan (DEF)"
  - $(P_2)$  : "Le plan (ADF) contient la droite (AB)"
  - $(P_3)$  : "La droite (AD) est parallèle à la droite (CF) alors la droite (AD) est parallèle au plan (CFEB)"
- Soit la phrase suivante :  
 $(P_4)$  : "La droite (AB) n'est pas parallèle au plan (DEF)"  
 Que représente  $(P_4)$  pour  $(P_1)$  ?

#### Notions de proposition, implication, équivalence logique, connecteurs logiques « et » & « ou »

- On appelle **proposition** toute phrase qui soit vraie ou fausse.

##### Exemples :

- " $22 > 7$ " est une proposition vraie.
- " $15 < 4$ " est une proposition fausse.
- " $x \in \mathbb{R}, x > 6$ " n'est pas une proposition. Elle devient une proposition si la valeur de  $x$  est connue.

- On appelle **négation d'une proposition** ( $P$ ), la proposition notée ( $nonP$ ) ou  $(\neg P)$  ou  $(\bar{P})$  qui est vraie lorsque  $P$  est fausse, et fausse lorsque  $P$  est vraie.

##### Table de vérité

P	$nonP$
Vrai	Faux
Faux	Vrai

- Soit  $P$  et  $Q$  sont deux propositions. Soit la phrase "Si  $P$  est vérifiée alors  $Q$  est vérifiée".

On dit que  $P$  implique  $Q$  et on note  $P \Rightarrow Q$ .

" $\Rightarrow$ " est le symbole de l'implication.

- Pour que  $Q$  soit vérifiée, il suffit que  $P$  le soit. On dit que  $P$  est **une condition suffisante** pour que  $Q$  soit vérifiée.
- Il faut que  $Q$  soit vérifiée pour que  $P$  le soit. On dit que  $Q$  est **une condition nécessaire** pour que  $P$  soit vérifiée.

##### Table de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

- Soit  $P$  et  $Q$  sont deux propositions. Soit la phrase "P est vérifiée si et seulement si Q est vérifiée".

On dit que  $P$  équivaut à  $Q$  et on note  $P \Leftrightarrow Q$ .

" $\Leftrightarrow$ " est le symbole de l'équivalence logique.

##### Table de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Vrai

- Soit  $P$  et  $Q$  sont deux propositions. La proposition « $P$  ou  $Q$ » notée  $P \vee Q$  est vraie si l'une au moins des deux propositions  $P$  et  $Q$  est vraie.

Le symbole " $\vee$ " est appelé **disjonction inclusive**.

##### Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

- Soit  $P$  et  $Q$  sont deux propositions. La proposition « $P$  et  $Q$ » notée  $P \wedge Q$  est vraie si les deux propositions  $P$  et  $Q$  sont simultanément vraies.

Le symbole " $\wedge$ " est appelé **conjonction**.

##### Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

- Les symboles  $\wedge, \vee, \Rightarrow$  et  $\Leftrightarrow$  sont appelés des **connecteurs logiques**

### Séquence n°3 : Positions relatives de deux d'un plan

#### Activité 1.3

On considère la charpente de l'activité 2.

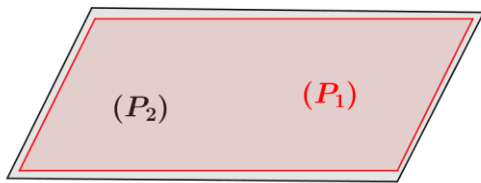
#### Consigne 3.1

- Détermine :  $(ABC) \cap (DEF)$  ;  $(ABC) \cap (ABD)$  et  $(ABD) \cap (ABE)$ .
- Que peut-on dire des plans :  $(ABC)$  et  $(DEF)$  ;  $(ABC)$  et  $(ABD)$  et  $(ABD)$  et  $(ABE)$  ?

#### Propriété

Etant donné deux plans ( $P$ ) et ( $Q$ ) les différentes positions relatives sont :

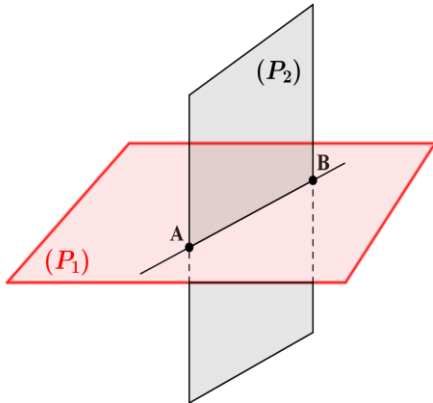
- $(P)$  et  $(Q)$  sont confondus.  
 Dans ce cas ils ont au moins trois points communs non alignés.



$(P_1)$  et  $(P_2)$  sont confondus. On note :

$$(P_1) \cap (P_2) = (P_1) \text{ ou } (P_1) \cap (P_2) = (P_2)$$

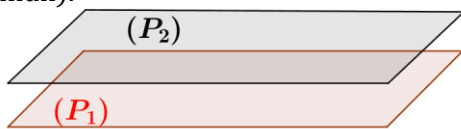
2. L'intersection de  $(P)$  et  $(Q)$  est une droite. Dans ce cas,  $(P)$  et  $(Q)$  ont deux points communs distincts et ne sont pas confondus.



$(P_1)$  et  $(P_2)$  sécants suivant la droite  $(AB)$ .

$$(P_1) \cap (P_2) = (AB)$$

3.  $(P)$  et  $(Q)$  sont disjoints (aucun point commun).



$(P_1)$  et  $(P_2)$  sont disjoints. On note :

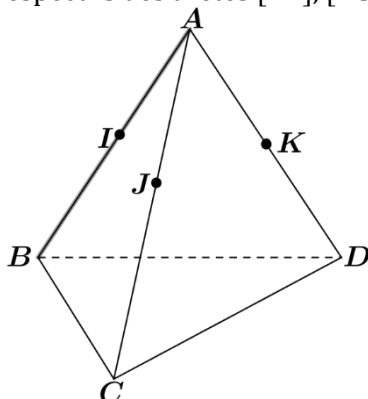
$$(P_1) \cap (P_2) = \{\}$$

### Définition

1. On dit que deux plans sont **parallèles** lorsqu'ils sont confondus ou disjoints.
2. On dit que deux plans sont **sécants** lorsqu'ils ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite.

### Evaluation formative

ABCD est un tétraèdre. Les points I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[AD]$ .



1. Montre que les plans  $(IJK)$  et  $(BCD)$  sont parallèles.
2. Montre que les plans  $(IJK)$  et  $(ACD)$  sont sécants.

### Séquence n°4 : Positions relatives de deux droites de l'espace

#### Activité 1.4

On considère la charpente de l'activité 2.

#### 4.1 Droites coplanaires-droites non coplanaires

##### Consigne 4.1 : Découverte

1. Indique les positions relatives des droites  $(AB)$  et  $(BC)$ ;  $(AD)$  et  $(CF)$ ;  $(EF)$  et  $(AC)$ .
2. Les droites  $(AB)$  et  $(BC)$ ;  $(AD)$  et  $(CF)$ ;  $(EF)$  et  $(AC)$  sont-elles dans un même plan?

### Définition

1. Des points, des droites de l'espace qui appartiennent à un même plan sont dits **coplanaires**.
2. Des points, des droites de l'espace qui ne sont pas coplanaires sont dits **non coplanaires**.
3. Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.

### Propriété

1. Deux droites non coplanaires sont disjointes.
2. Deux droites coplanaires sont soit parallèles soit sécantes.

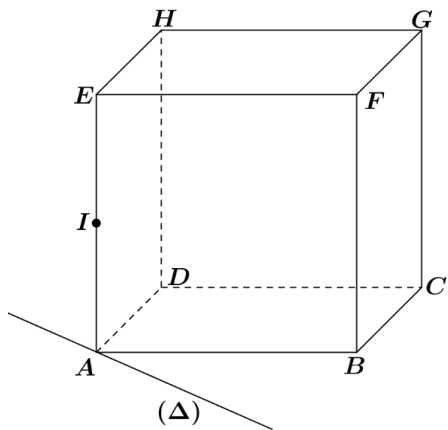
#### 4.2 Position relative

### Propriété

1. Deux droites sont dites **parallèles** lorsqu'elles sont confondues ou lorsqu'elles sont coplanaires et disjointes.
2. Deux droites sont dites **sécantes** lorsque leur intersection est réduite à un point.

### Consigne 4.2 : Application

ABCDEFGH est un cube et I est le milieu de  $[AE]$ .  $(\Delta)$  est la parallèle à  $(BD)$  passant par A.



1. Justifie que les droites (AB) et (FI) sont sécantes.
2. Montre que  $(\Delta)$  et (FH) sont coplanaires.

### 4.3 Caractérisation d'un plan

#### Activité 1.5

On considère la charpente de l'activité 2.

#### Consigne 4.3

Combien y-a-t-il de plan(s) ?

1. Passant par les points A, B et C.
2. Passant par le point D et contenant la droite (EF). Contenant les droites (BE) et (BC)
3. Contenant les droites (AD) et (FC)

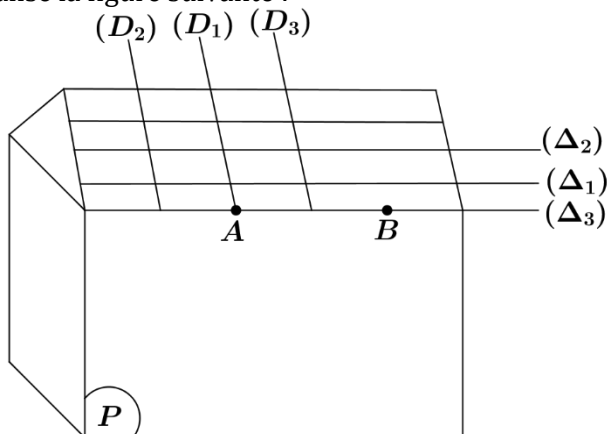
#### Propriété

1. Trois points non alignés définissent un plan et un seul.
2. Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite définissent un plan et un seul.
3. Deux droites sécantes définissent un plan et un seul.
4. Deux droites strictement parallèles définissent un plan et un seul.

### Séquence n°5 : Etude du parallélisme de deux droites de l'espace

#### Activité 1.6

Jean l'ami de Kodjo en observant la case décoiffée réalise la figure suivante :



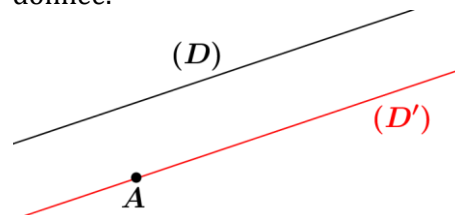
### 5.1 Parallélisme de deux droites de l'espace

#### Consigne 5.1

1. Combien de droite peut-on tracer passant par le point B et parallèle à  $(D_3)$ ?
2. (a) Donne la position relative des droites  $(D_1)$  et  $(D_3)$ .  
(b) Donne la position relative des droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .  
(c) Que peut-on dire des droites  $(D_2)$  et  $(D_3)$  ?

#### Propriété

1. Par un point donné de l'espace, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.



2. Deux droites de l'espace parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

#### Point de logique : Raisonnement par absurde

Pour démontrer qu'une propriété P est vraie, on suppose que cette propriété est fausse. Puis par un raisonnement logique utilisant des théorèmes ou des techniques de calcul connus, on arrive à une contradiction. Ce qui prouve que la supposition faite n'est pas bonne, donc la propriété P est vraie.

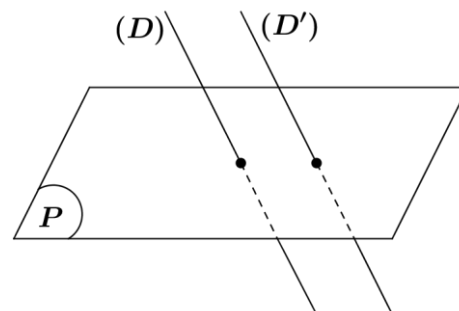
#### Consigne 5.2

$(D_1)$  et  $(D_2)$  deux droites parallèles et (P) un plan sécant à  $(D_1)$  en A (figure de l'activité 6). (Q) est le plan déterminé par les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ , distinct de (P).

1. Montre que (P) et (Q) sont sécants suivant une droite  $(\Delta)$ .
2. Montre que  $(\Delta)$  est sécante à  $(D_2)$ .
3. Déduis-en que (P) est sécant à  $(D_2)$ .

#### Propriété

Lorsque deux droites de l'espace sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.



**Point de logique : Raisonnement par disjonction de cas**

Si pour démontrer une propriété, on examine plusieurs cas qu'on épuise l'un après l'autre, on dit qu'on mène un raisonnement par disjonction de cas.

**5.2 Parallélisme d'une droite et d'un plan de l'espace**

**Point de logique : Démonstration d'une implication**

Pour démontrer qu'une implication ( $p \Rightarrow q$ ) est vraie :

1. On peut supposer que l'hypothèse  $p$  est vraie et par des enchaînements de propositions déduites aboutir à la conclusion  $q$  : **c'est le raisonnement par la méthode directe.**
2. On peut supposer que l'hypothèse  $q$  est fausse et par des enchaînements de propositions déduites aboutir à ce que l'hypothèse  $p$  est fausse : **c'est le raisonnement par contraposée.**

**Point de logique : Démonstration de l'équivalence logique**

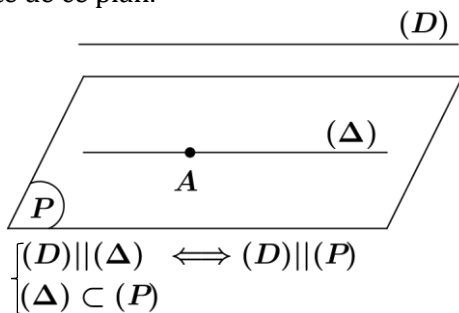
Pour démontrer qu'une équivalence ( $p \Leftrightarrow q$ ) est vraie, on démontre que la double implication ( $p \Rightarrow q$ ) et ( $q \Rightarrow p$ ) est vraie.

**Consigne 5.3**

Démontre qu'une droite ( $D$ ) est parallèle à un plan ( $P$ ) si et seulement si il existe dans ( $P$ ) une droite parallèle à ( $D$ ).

**Propriété**

Une droite donnée de l'espace est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

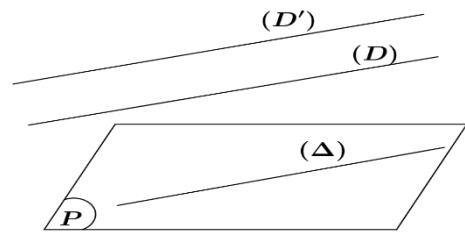


**Consigne 5.4**

On considère les droites  $(\Delta_1)$ ,  $(\Delta_2)$  et ( $P$ ) un plan tel que  $(\Delta_1) \parallel (P)$  et  $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$   
 Démontre que  $(\Delta_2)$  est parallèle à ( $P$ ).

**Propriété**

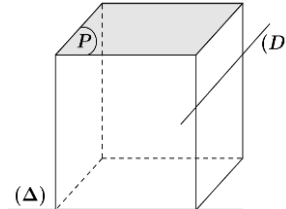
Si une droite ( $D$ ) est parallèle à un plan ( $P$ ) alors toute droite parallèle à ( $D$ ) est parallèle à ( $P$ ).



$(D') \parallel (D) \text{ or } (D) \parallel (P) \text{ donc } (D') \parallel (P)$

**Remarque**

Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles entre elles.



$(D) \parallel (P) \text{ et } (\Delta) \parallel (P)$   
 mais  $(D)$  et  $(\Delta)$  ne sont pas parallèles

**Consigne 5.5**

$(P)$  et  $(Q)$  sont deux plans sécants suivant une droite  $(\Delta)$ . On considère une droite  $(D)$  parallèle à  $(P)$  et à  $(Q)$ .  
 Démontre que  $(D)$  est parallèle à  $(\Delta)$ .

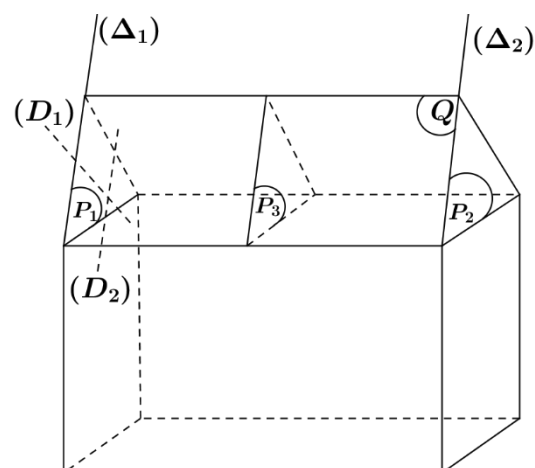
**Propriété**

Une droite de l'espace parallèle à deux plans sécants de l'espace est parallèle à leur droite d'intersection.

**5.3 Parallélisme de deux plans de l'espace**

**Activité 1.7**

Pour réfléchir la toiture de la maison, le menuisier propose à Kodjo le plan représenté par la figure suivante :

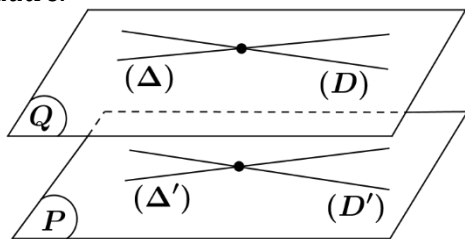


**Consigne 5.6**

On considère les plans  $(P_1)$  et  $(P_2)$  de la figure de l'activité 7,  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont deux droites sécantes de  $(P_1)$ .  
 Démontre que  $(P_1)$  et  $(P_2)$  sont parallèles si et seulement si  $(D_1) \parallel (P_2)$  et  $(D_2) \parallel (P_2)$ .

**Propriété**

Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un d'eux contient deux droites sécantes parallèles à l'autre.



**Consigne 5.7**

On considère les plans  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  et  $(P_3)$  de la figure de l'activité 7, tels que  $(P_1) \parallel (P_2)$ , et  $(P_1) \parallel (P_3)$ . Soit  $(D_1)$  et  $(D_2)$  deux droites sécantes de  $(P_1)$ .

Démontrer que  $(P_2) \parallel (P_3)$  (On pourra raisonner par l'absurde).

**Propriété**

Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

**Consigne 5.8**

Soit A un point donné de l'espace et  $(P_1)$  un plan contenant les droites sécantes  $(D'_1)$  et  $(D'_2)$ . Soit  $(D_1)$  et  $(D_2)$  les parallèles respectives des droites  $(D'_1)$  et  $(D'_2)$  passant par A.

Démontre qu'il existe un plan et un seul passant par A et parallèle à  $(P_1)$ .

**Propriété**

Par un point donné de l'espace, il passe un plan et un seul parallèle à un plan donné.

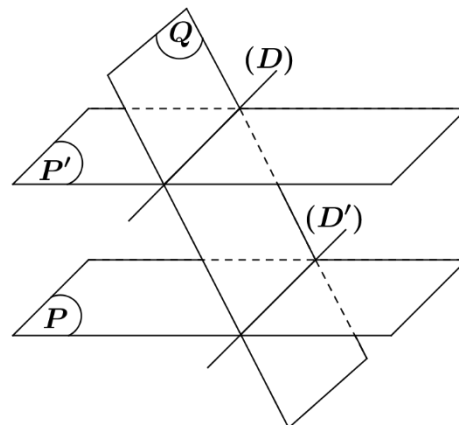
**Consigne 5.9**

ABCDEFGH est un cube.

- Démontre que  $(ADE) \parallel (BFC)$ .
- (a) Montre que les plans  $(ABH)$  et  $(ADE)$  sont sécants puis précise leur droite d'intersection  $(\Delta_1)$ .  
(b) Montre que les plans  $(ABH)$  et  $(BFC)$  sont sécants puis précise leur droite d'intersection  $(\Delta_2)$ .
- Démontre que  $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$ .
- Que peut-on conclure?

**Propriété**

Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



**Données :**  $(P) \parallel (P')$  et  $(Q)$  sécante à  $(P')$  suivant la droite  $(D)$ .

**Conclusion :**  $(Q)$  sécante à  $(P)$  suivant la droite  $(D')$  et on a  $(D) \parallel (D')$ .

**Consigne 5.10**

ABCDEFGH est un cube.

- Démontre que  $(ABC) \parallel (EFH)$ .
- (a) Montre que  $(EG) \parallel (ABC)$ .  
(b) Montre que  $(EG) \parallel (EFH)$ .
- Que peut-on conclure?

**Propriété**

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

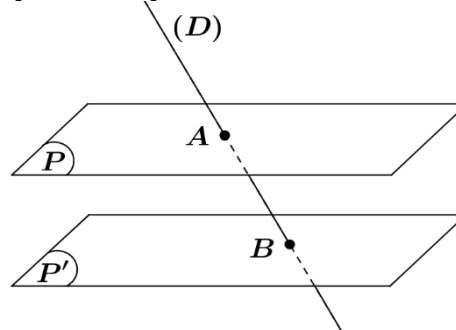
**Consigne 5.11**

ABCDEFGH est un cube.

- Démontre que  $(ABC) \parallel (EFH)$ .
- (a) Montre que la droite  $(AG)$  et le plan  $(ABC)$  sont sécants.  
(b) Montre que la droite  $(AG)$  et le plan  $(EFH)$  sont sécants.
- Que peut-on conclure?

**Propriété**

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.



**5.4 Construction des intersections**

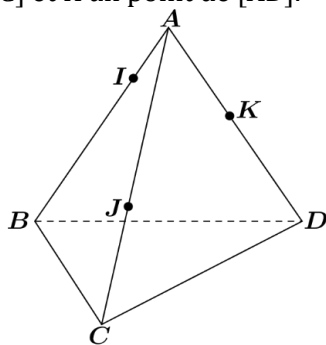
**Retenons**

- Pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan, on peut :
  - chercher l'intersection de cette droite avec une droite du plan.

- travailler dans un plan annexe contenant la droite.
2. Pour déterminer l'intersection de deux plans, on peut déterminer les intersections de deux droites de l'un des plans avec l'autre plan.
  3. Pour trouver la droite d'intersection de deux plans, il suffit :
    - soit de trouver deux points communs,
    - soit de trouver un point commun et une droite parallèle à ces deux plans.

**Consigne 5.12**

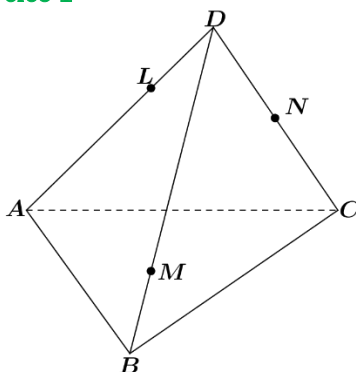
ABCD est un tétraèdre, I un point de [AB], J un point de [AC] et K un point de [AD].



- (a) Détermine l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).
- (b) Détermine l'intersection de la droite (JK) avec le plan (BCD).
- (c) Déduis-en l'intersection des plans (IJK) et (BCD).

**Evaluations formatives**

**Exercice 1**



ABCD est un tétraèdre. On considère les points  $L \in [AD]$ ;  $M \in [DB]$  et  $N \in [DC]$  tels que les droites (AB) et (LM) sont sécantes en I; les droites (AC) et (LN) sont sécantes en J; les droites (BC) et (MN) sont sécantes en K.

1. Construire les points I; J et K.
2. Démontre que les points I; J et K sont alignés.

**Exercice 2**

ABCDEFGH est un cube.

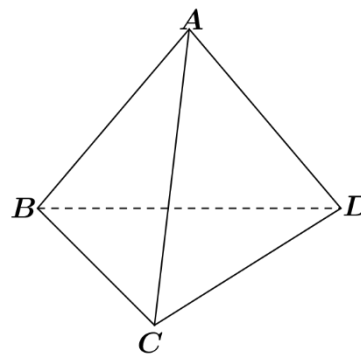
1. Quelle est la nature du quadrilatère AEGC?
2. I est le milieu de [AB]; J est le milieu de [BC]. Démontre que (IJ) est parallèle à (EG).
3. Détermine la droite d'intersection des plans (GEI) et (BCG).  
(On fera un dessin en perspective cavalière)

**Exercice 3**

ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AD]. J est le milieu de [BD].  $K \in [DC]$ , mais K n'est pas le milieu de [DC].

1. Démontre que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).
2. Construire la droite (d) d'intersection des plans (IJK) et (ABC).
3. Que peut-on dire des droites (d) et (AB)?  
(On fera un dessin en perspective cavalière)

**Exercice 4**

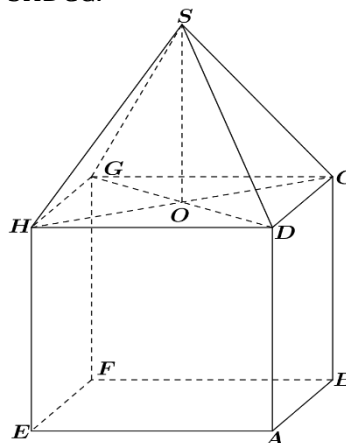


ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB]; J est le milieu de [AC]; K est le milieu de [DC] et L est le milieu de [BD].

1. Détermine la nature du quadrilatère IJKL.
2. Détermine la position relative du plan (IJKL) et de la droite (BC).
3. Détermine la position relative du plan (IJKL) et de la droite (AD).
4. Peut-on conclure que les droites (BC) et (AD) sont parallèles ?

**Exercice 5**

ABCDEFGH est un cube surmonté de la pyramide SHDCG.



Les points I ; J et K sont les milieux respectifs de [SD] ; [SC] et [SH].

1. Donne dans cette représentation la position relative :
  - (a) Des droites (IS) et (AB) ; des droites (IK) et (BE) et des droites (IS) et (AE).
  - (b) De la droite (IJ) au plan (GDC).
  - (c) Des plans (SIJ) et (GDC).
2. Trouve dans cette représentation :
  - (a) Deux plans non confondus contenant chacun la droite (IJ).
  - (b) Deux droites sécantes non coplanaires à la droite (IJ).
3. Justifie que (FGH) // (BCD).
4.
  - (a) Place le point L, intersection de la droite (SG) et du plan (IJK).
  - (b) Justifie que L est milieu de (SG).
  - (c) Démontre que (IL) // (ABE).
  - (d) Justifie que (IJL) // (ABE).
5.
  - (a) Place le point Q intersection de (SD) et (FA) et le point M intersection de (SC) et (BF).
  - (b) Que représente la droite (QM) pour les plans (ABE) et (SDC) ? Justifie ta réponse.
  - (c) Démontre que (QM) // (IJ).

## SA N°2 : ORGANISATION DES DONNEES

### Situation de départ :

#### Texte : Zoé et les mathématiques

Dans une classe de 2<sup>nde</sup> d'un lycée de la place, c'est le moment de la remise des copies d'un devoir surveillé de mathématique. Le professeur a fabriqué des petits cartons carrés de côtés distincts sur chacun desquels il écrit la note de chaque élève et le lui remet avec sa copie.

Zoé, une élève de la classe, a ramassé les cartons de ses camarades pour en observer la forme. Elle constate que ces cartons peuvent être découpés dans un carton carré d'un mètre de côté, sur lequel on trace une diagonale [AO]. Il suffit alors de fixer un point de la diagonale et de mener à partir de ce point une parallèle à chacun des côtés issus du point O.

Zoé, très émerveillée par sa trouvaille, est curieuse de savoir s'il y a une formule mathématique à la base du calcul de l'aire de ces petits cartons carrés distribués par le professeur.

Par ailleurs, les notes obtenues sont les suivantes :

7	8	8	8	9	9	10	10	10	12
12	12	12	12	13	13	15	15	15	8
7	8	10	12	7	13	18	9	12	10

Zoé se demande quel pourcentage d'élèves ont une note plus petite ou égale à la moyenne des notes et comment ces dernières sont-elles dispersées autour de cette moyenne

**Tâche :** Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques.

Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés;
- Analyser chacun des problèmes posés;
- Mathématiser chacun des problèmes posés;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème;
- Améliorer au besoin ta production.

### Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

### Séquence 1 : Calculs dans $\mathbb{R}$

#### Activité 2.1

Avant d'amorcer toute analyse, Zoé désire réactualiser ses connaissances sur les nombres

réels qu'elle a étudiés en classe de 3<sup>ème</sup>.

### 1.1 Présentation de l'ensemble $\mathbb{R}$

#### Définition

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels. C'est l'ensemble des nombres réels.

Les principaux sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  sont :  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$  et les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Nous avons les inclusions successives :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**NB :**  $\pi$  n'est pas un nombre rationnel.

On note :

- $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}_-$  l'ensemble des nombres réels négatifs.
- $\mathbb{R}^*$  l'ensemble des nombres réels non nuls.
- $\mathbb{R}_+^*$  l'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
- $\mathbb{R}_-^*$  l'ensemble des nombres réels négatifs non nuls.

On a :  $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$

#### Définition

Un ensemble A est contenu ou inclus ou encore est une partie d'un ensemble B si et seulement si tout élément de A est élément de B et on note  $A \subset B$ .

### 1.2 Les intervalles de $\mathbb{R}$

#### Définition

Soit  $a$  et  $b$  deux réels. On distingue deux types d'intervalles : **les intervalles bornés et les intervalles non bornés.**

- Les intervalles  $[a; b[$ ;  $]a; b[$ ;  $]a; b]$  sont dits bornés.
- Les intervalles  $[a; \rightarrow[$ ;  $]a; \rightarrow[$ ;  $\leftarrow[$ ;  $\leftarrow[$ ;  $\leftarrow[$ ;  $\leftarrow[$  sont dits non bornés.

Désormais, les intervalles  $[a; \rightarrow[$ ;  $]a; \rightarrow[$ ;  $\leftarrow[$ ;  $\leftarrow[$ ;  $\leftarrow[$ ;  $\leftarrow[$  seront notés respectivement  $[a; +\infty[$ ;  $]a; +\infty[$ ;  $]-\infty; a[$ ;  $]-\infty; a[$ .

**NB :**  $+\infty$  (plus l'infini) et  $-\infty$  (moins l'infini) ne sont pas des nombres réels, ce sont des symboles.

#### Remarque

$\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$ ;  $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ ;  $\mathbb{R}_- = ]-\infty; 0]$ ;  
 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .

#### Propriété

Soit  $x$ ,  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$

$$1. \quad x \in ]-\infty; a] \Leftrightarrow x \leq a$$

2.  $x \in ] - \infty ; a[ \Leftrightarrow x < a$
3.  $x \in [a ; +\infty[ \Leftrightarrow x \geq a$
4.  $x \in ]a ; +\infty[ \Leftrightarrow x > a$
5.  $x \in ]a ; b[ \Leftrightarrow a < x < b$
6.  $x \in ]a ; b] \Leftrightarrow a < x \leq b$
7.  $x \in [a ; b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$
8.  $x \in [a ; b[ \Leftrightarrow a \leq x < b$

### Consigne 1.1

1. Traduis par une inégalité, l'appartenance de  $x$  aux intervalles suivants :
  - (a)  $] \frac{7}{3} ; 9[$
  - (b)  $[7 ; +\infty[$
  - (c)  $] - \infty ; -4[$
  - (d)  $[3 ; 8]$
2. Ecris sous forme d'intervalles, les inégalités suivantes :
  - (a)  $x < 6$
  - (b)  $\sqrt{3} < x \leq 4$
  - (c)  $-4 \leq x < 1$
  - (d)  $x \geq -9$

### Consigne 1.2

Soit  $A = ] - \infty ; 3[$  et  $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x\}$   
 Détermine  $A \cap B$  et  $A \cup B$

### Centre et rayon d'un intervalle fermé ou ouvert

Soit  $a$  et  $b$  des nombres réels avec  $a < b$ .

1. On appelle **centre**  $c$  de l'intervalle  $[a ; b]$  ou  $]a ; b[$  le nombre réel  $c = \frac{a+b}{2}$ .
2. On appelle **rayon**  $r$  de l'intervalle  $[a ; b]$  ou  $]a ; b[$  le nombre réel positif  $r = \frac{|b-a|}{2}$ .

### Consigne 1.3

Détermine le centre et le rayon de l'intervalle  $] -1 ; 3[$ .

## 1.3 Opération dans $\mathbb{R}$

### 1.3.1 Quotient

#### Définition

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels avec  $b$  non nul. Le quotient de  $a$  par  $b$  est le nombre réel  $q$  tel que  $a = q \times b$ . On a donc  $q = \frac{a}{b}$ .

#### Remarque

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

1. Une fraction  $\frac{a}{b}$  existe dans  $\mathbb{R}$  ( $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ ) si son dénominateur est différent de 0 ( $b \neq 0$ ).
2. Si  $b \neq 0$  alors l'inverse de  $b$  est  $\frac{1}{b}$ .

### Opérations sur les nombres réels

Soit  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels non nuls

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$        $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$        $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$        $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

$$\bullet \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

### 1.3.2 Puissances

#### Définition

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $a$  un nombre réel, par définition :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$$

De plus, si  $a \neq 0$ ,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

#### Exemples :

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \text{ et } 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$$

$$4^{-7} = \frac{1}{4^7} \text{ et } \frac{1}{2^{-6}} = 2^6$$

#### Propriété

Pour tous nombres entiers naturels  $m$  et  $n$ , et pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  non nuls, on a :

1.  $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2.  $a^n \times b^n = (ab)^n$
3.  $(a^n)^m = a^{n \times m}$
4.  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5.  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6.  $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
7.  $(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
8.  $a^0 = 1$

#### Attention !

$$(-a)^n \neq -a^n$$

### Consigne 1.4

1. Calcule  $A$  et  $B$  en présentant le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

$$A = \left(3 + \frac{4}{5}\right) \times \frac{1}{3 + \frac{4}{5}} - \frac{\frac{4}{8}}{\frac{5}{7} - \frac{4}{5}} ; B = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

2. Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels non nuls Simplifie les expressions suivantes :

$$A = \frac{(27a^3b^6)^{n+1}}{(3ab^2)^{3n+3}} \quad B = \frac{(a^n b^{3n})^4}{(a^4 b^{12})^{n+1}}$$

$$C = \frac{(8a^4 b^7)^3}{(4a^2 b^5)^4}$$

### 1.3.3 Racines carrées

#### Définition

Soit  $a$  un nombre réel positif. On appelle **racine carrée de  $a$**  et on note  $\sqrt{a}$  l'unique nombre réel dont le carré est  $a$ .

#### Remarque

Soit  $a$  un nombre réel.

$\sqrt{a}$  existe si  $a \geq 0$ . On a  $\sqrt{a} \geq 0$

### Propriété

Pour tous nombres réels positifs  $a$  et  $b$  et pour tous nombres entiers naturels  $m$  et  $n$ , on a :

- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

### Propriété

Pour tous nombres réels positifs  $a$  et pour tout nombre réel  $x$ , on a :

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

### Consigne 1.5 : Approfondissement

1. Calcule :  $A = 3\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{5}{3}}}$  et

$$B = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{(\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}})(\sqrt{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}})}$$

- Détermine le réel  $x$  dans l'expression suivante :  $\sqrt{7 + \sqrt{x}} = 3$
- (a) Démontre que pour tous nombres entiers naturels  $\alpha$  et  $\beta$ , avec  $\alpha > \beta$ , on a :

$$\sqrt{\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \text{ et}$$

$$\sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

(b) Déduis-en une écriture simplifiée du nombre  $X = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

4. Soit  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(a)  $a^2 + a - 1 = 0$  et que  $\frac{1}{a} = a + 1$

(b) Déduis-en que  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{5}$

## 1.4 Ordre dans $\mathbb{R}$

### 1.4.1 Inégalité dans $\mathbb{R}$

#### Définition

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

- $a \leq b$  si et seulement si  $b - a \geq 0$
- $a < b$  si et seulement si  $b - a > 0$

#### Remarque

- $\leq$  et  $\geq$  sont des inégalités larges.
- $<$  et  $>$  sont des inégalités strictes.

#### Propriété

- Si  $a \leq b$  et  $b \leq a$  alors  $a = b$
- Si  $a \leq b$  et  $b \leq c$  alors  $a \leq c$

### Consigne 1.6

- Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs.
  - Montre que  $(a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$
  - Sachant que  $a\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$  et  $b = 2 - \sqrt{7}$ , montre que  $a = -b$

- Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels positifs ou nuls.

Montre que  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2} \sqrt{a + b}$

- Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels positifs
  - Montre que  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$
  - $ab \leq a^2 + b^2$

### 1.4.2 Ordre et opération dans $\mathbb{R}$

#### Propriétés

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

- $\forall c \in \mathbb{R}$ , si  $a \leq b$  alors  $a + c \leq b + c$
- $\forall c \in \mathbb{R}_+$ , si  $a \leq b$  alors  $ac \leq bc$
- $\forall c \in \mathbb{R}_-$ , si  $a \leq b$  alors  $ac \geq bc$
- En particulier, si  $a \leq b$  alors  $-a \geq -b$

#### Propriétés

- Pour tout nombres réels  $a, b, c$  et  $d$ , si  $a \leq b$  et  $c \leq d$  alors  $a + c \leq b + d$
- Pour tout nombres réels  $a, b, c$  et  $d$  positifs, si  $a \leq b$  et  $c \leq d$  alors  $ac \leq bd$
- Soit  $a, b, c, d, x$  et  $y$  des réels tels que  $a \leq x \leq b$  et  $c \leq y \leq d$  :
  - Si  $a, b, c$  et  $d$  sont positifs alors  $ac \leq xy \leq bd$
  - Si  $a, b, c$  et  $d$  sont négatifs alors  $bd \leq xy \leq ac$
  - Si  $a$  et  $b$  sont positifs alors  $a^2 \leq x^2 \leq b^2$
  - Si  $a$  et  $b$  sont négatifs alors  $b^2 \leq x^2 \leq a^2$
  - Si  $c$  et  $d$  sont non nuls alors  $\frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c}$

#### Remarque

Il n'existe pas de règle pour « soustraire » ou « diviser » membre à membre deux inégalités ; l'inégalité obtenue peut en effet être vraie ou fausse.

#### Exemples :

- $\begin{cases} 2 \leq 3 \\ 1 \leq 5 \end{cases}$  mais  $2 - 1 \geq 3 - 5$  et  $\frac{2}{1} \geq \frac{3}{5}$
- $\begin{cases} 2 \leq 6 \\ 3 \leq 5 \end{cases}$  et on a :  $2 - 3 \leq 6 - 5$  et  $\frac{2}{3} \leq \frac{6}{5}$

#### Retenons

- Pour faire l'encadrement de  $x - y$ , on encadre d'abord  $(-y)$  puis on fait l'encadrement  $x + (-y)$ .
- Pour faire l'encadrement de  $\frac{x}{y}$ , on encadre d'abord  $\frac{1}{y}$  puis on fait l'encadrement de  $x \left( \frac{1}{y} \right)$ .

### Consigne 1.7

On donne les réels  $a$  et  $b$  vérifiant :  $4 < a < 10$  et  $-6 < b < -2$ . Donne un encadrement de :

- $\frac{a-b}{2a^2}$

2.  $\frac{a+b}{ab}$
3.  $\frac{b(a+b)}{2a}$
4.  $\frac{a^2+b^2}{ab}$
5.  $\frac{a^2}{b^2}$

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

1. Démontre pour tous  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a \geq b \geq 0$ , l'égalité

$$\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 = 2(a + b).$$

2. Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Compare  $\sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  tout en justifiant ta réponse.
3. (a) Rend rationnel le dénominateur du nombre  $A = \frac{2-\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$ .  
(b) Donne un encadrement du nombre  $B = \frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$  par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 3. On donne  $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$  et  $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$
4. On pose  $C = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ . Justifie que  $C = 2\sqrt{2}$ .

#### 1.4.3 Partie entière

##### Définition

On appelle partie entière d'un réel  $x$  noté  $E(x)$ , l'entier relatif  $n$  tel que  $n \leq x < n + 1$ . Autrement,  $E(x) \leq x < E(x) + 1$

Exemples :  $E(3,2) = 3$  et  $E(-2,4) = -3$

##### Application

Détermine les nombres entiers relatifs suivants :  $E(4,2)$  ;  $E(\pi)$  ;  $E(0)$  ;  $E(-8,7)$  et  $E(-6)$

##### Propriété

Pour tout nombre réel  $x$  et pour tout entier relatif  $k$ , on a :

1.  $E(x) \in \mathbb{Z}$
2.  $E(x) \leq x < E(x) + 1$  et  $x - 1 < E(x) \leq x$
3.  $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
4.  $x \in [k; k + 1[ \Leftrightarrow E(x) = k$

#### Consigne 1.8

Soit  $x$  un nombre réel. Démontre que :

$$-\frac{1}{2} \leq x - E\left(x + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$$

#### Consigne 1.9

Détermine l'ensemble des réels  $x$  vérifiant :

- (a)  $E(x) = -4$
- (b)  $E(-3x + 5) = -3$
- (c)  $E(2x + 3) = 7$

### 1.5 Majorant et minorant – maximum et minimum

#### Consigne 1.10

Dans ces travaux de recherche, Zoé a considéré les ensembles suivants :  $A = [-9 ; 3[$  ;  $B = [-3 ; 4]$  et  $C = \{-6 ; 3 ; 5,2 ; -14 ; 18\}$

1. (a) Trouve deux nombres réels plus petits que tous les éléments de l'ensemble  $C$ . Peux-tu en trouver d'autres?  
(b) Trouve deux nombres réels plus grands que tous les éléments de l'ensemble  $A$ . Peux-tu en trouver d'autres?
2. (a) Donne le minorant de  $A$  qui appartient à  $A$ .  
(b) Donne le majorant de  $B$  qui appartient à  $B$ .

#### Définition

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

1. On dit qu'un nombre  $M$  est un **majorant** de  $A$  si pour tout élément  $x$  appartenant à  $A$ ,  $x \leq M$ .
2. Un ensemble qui admet un majorant est dit **majoré**.
3. On dit qu'un nombre  $m$  est un **minorant** de  $A$  si pour tout élément  $x$  appartenant à  $A$ ,  $x \geq m$ .
4. Un ensemble qui admet un minorant est dit **minoré**.
5. Lorsque le majorant  $M \in A$ , on dit que  $M$  est le **maximum** de  $A$ .
6. Lorsque le minorant  $m \in A$ , on dit que  $m$  est le **minimum** de  $A$ .
7. L'ensemble  $\mathbb{N}$  est minoré mais n'admet pas de majorant. 0 est le minorant de  $\mathbb{N}$ .

#### Consigne 1.11

Soit  $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

1. Démontre que 1 est le maximum de  $A$ .
2. Démontre que l'ensemble  $A$  est minoré, mais n'admet pas de minimum.

#### Consigne 1.12

Soit  $B = \left\{ \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$

1. Montre que  $B$  est non vide.
2. Démontre que 1 est le minimum de  $B$ .
3. Démontre que l'ensemble  $B$  est majoré par 1, mais n'admet pas de maximum.

#### Consigne 1.13

On considère les ensembles suivants :

$E_1 = \left\{ \frac{2n+1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$  et  $E_2 = \left\{ \frac{3n+7}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

1. (a) Résous dans  $\mathbb{N}$ , l'équation  $\frac{2n+1}{n+1} = 1$  et l'inéquation  $\frac{2n+1}{n+1} \geq 1$ .  
(b) Peux-tu dire que  $1 \in E_1$  ?

- (c) Quel est le minimum de  $E_1$  ?  
 (d) Trouve cinq éléments de  $E_1$  supérieur à 10.  
 (e) Montre que  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$  puis déduis-en un majorant de  $E_1$ .  
 (f) 2 est-il l'élément maximum de  $E_1$  ?
- Résous dans  $\mathbb{N}$ , l'équation  $\frac{3n+7}{n+2} = \frac{7}{2}$  et l'inéquation  $\frac{3n+7}{n+2} \leq \frac{7}{2}$ .
  - Déduis - en ce que représente  $\frac{7}{2}$  pour  $E_2$ .

## 1.6 Valeur absolue

### 1.6.1 Définition

#### Définition

Soit  $x$  un nombre réel. La valeur absolue de  $x$  notée

$|x|$  est définie par  $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

#### Remarque

La valeur absolue de  $x$  est le plus grand des deux nombres  $x$  et  $-x$ . On écrit donc

$$|x| = \text{Sup}(x; -x) = d(x; 0)$$

#### Propriété

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  et pour tout nombre réel positif  $r$ , on a :

- $|a|=0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a|=|-a|$
- $|a|=|b| \Leftrightarrow a = b$  ou  $a = -b$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $|ab| = |a| \times |b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$  avec  $b \neq 0$ .
- $|a + b| \leq |a| + |b|$  (inégalité triangulaire)
- $|a| > r \Leftrightarrow a > r$  ou  $a < -r$
- $|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$

#### Consigne 1.14

Résous dans  $\mathbb{R}$  :

- $|2x - 1| = |x - 3|$
- $|2x - 1| = -1$
- $|x^2 - 1| = 0$
- $|2x - 1| \leq 3$
- $|3x - 4| > 5$

### 1.6.2 Distance de deux nombres

#### Définition

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels.

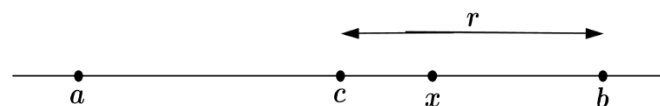
Le réel positif  $|x - y|$  est appelé distance de  $x$  à  $y$ .

On note  $d(x; y) = |x - y|$ .

#### Retenons

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ . On désigne par  $c$  le centre,  $r$  le rayon de  $[a; b]$ .

Caractérisons  $d(c; x)$  avec  $x \in [a; b]$ .



$\forall x \in [a; b]; d(c; x) \leq r$  donc

$$x \in [a; b] \Leftrightarrow |x - c| \leq r \text{ soit } \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$$

## 1.7 Calculs approchés

### 1.7.1 Valeur approchée

#### Retenons

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels et  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif.

$y$  est une valeur approchée de  $x$  à  $\varepsilon$  près et on note  $x \approx y$  à  $\varepsilon$  près signifie que  $|x - y| \leq \varepsilon$ .

$\varepsilon$  est appelée l'incertitude de cette valeur approchée.

#### Remarque

Dans l'expression  $\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2}$  est une valeur approchée de  $x$  à  $\frac{b-a}{2}$  près.

#### Remarque

Soit  $y$  une valeur approchée de  $x$  à  $\varepsilon$  près.

Alors on a :  $y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$ . Ceci est un encadrement de  $x$  et ayant pour amplitude  $2\varepsilon$ .  $y$  est le centre de l'intervalle  $[y - \varepsilon; y + \varepsilon]$ . On ne sait pas si  $y$  est plus grand ou plus petit que  $x$ . Alors :

- Si  $y < x$ , on dit que  $y$  est une valeur approchée de  $x$  à  $\varepsilon$  près par défaut.
- Si  $y > x$ , on dit que  $y$  est une valeur approchée de  $x$  à  $\varepsilon$  près par excès.

#### Consigne 1.15

Soit le nombre réel  $x$  tel que  $13,07 \leq x \leq 13,08$ .

- Trouve une valeur approchée de  $x$ .
- Trouve l'incertitude de cette valeur approchée.
- Donne un encadrement du nombre réel  $x$  sachant que 11,3 est une valeur approchée de  $x$  à  $10^{-3}$  près.

### 1.7.2 Notation scientifique

#### Consigne 1.16

Zoé obtient le nombre 0,005372 en faisant certaines manipulations sur les notes.

- Écris ce nombre sous la forme  $a \times 10^p$  où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $1 \leq |a| < 10$
- Comment appelle-t-on cette écriture pour le nombre 0,005372?

#### Définition

Un nombre décimal  $A$  est exprimé en notation scientifique lorsqu'il est sous la forme

$A = a \times 10^p$  où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $a$  un nombre décimal tel que  $1 \leq |a| < 10$ .

**Définition**

Soit  $x$  un nombre réel écrit en notation scientifique  $a \times 10^p$  et  $\alpha$  l'arrondi d'ordre 0 de  $a$ . Le nombre décimal  $\alpha \times 10^p$  est appelé **ordre de grandeur du nombre  $x$** .

**Consigne 1.17**

Donne la notation scientifique puis l'ordre de grandeur de chacun des nombres suivants :  
 $A=15,39$  ;  $B=245,2835$  et  $C=720347,637$

**Evaluation formative**

Montre que  $1+2 \times 10^{-3}$  est une valeur approchée de  $(1 + 2 \times 10^{-3})^2$  à  $10^{-6}$ .

**Séquence n°2 : Généralités sur les fonctions**

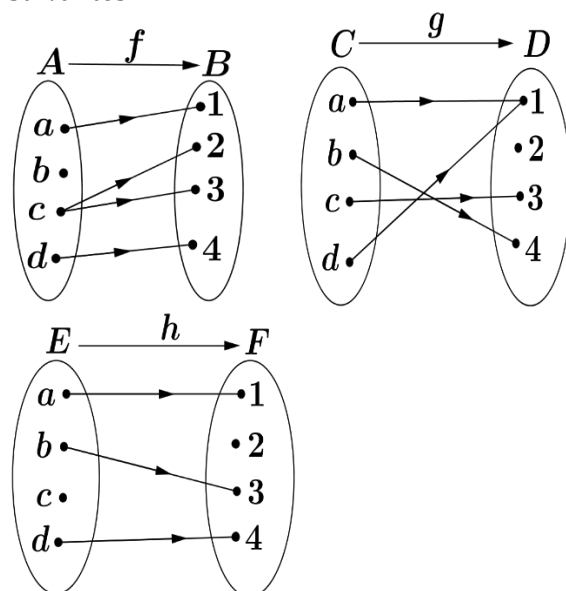
**Activité 2.2**

Zoé considère la correspondance entre l'ensemble des élèves de la classe et l'ensemble des notes obtenues à l'issue du devoir. Son professeur lui fait comprendre qu'elle est entrain de définir par ce biais une fonction. Zoé voudrait en savoir davantage sur la notion de fonction.

**2.1 Notion de fonction numérique**

**Consigne 2.1**

On considère les correspondances  $f$ ,  $g$  et  $h$  suivantes :



1. Précise l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de chacune des correspondances  $f$ ,  $g$  et  $h$ .
2. Parmi ces correspondances, précise celles qui à chaque élément de l'ensemble de départ associe au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.
3. Donne un nom à ces correspondances retenues.

**Définition**

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles non vides. On appelle **fonction de  $A$  vers  $B$**  toute correspondance qui, à chaque élément de  $A$  associe au plus un (0 ou 1) élément de  $B$ .

**Vocabulaire**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f : A \rightarrow B$   
 $x \mapsto f(x)$

1. L'écriture ci-dessus est lue : « $f$  est la fonction définie de  $A$  vers  $B$ , qui à  $x$  on associe  $f(x)$ .»
2.  $A$  est appelé l'ensemble de départ de  $f$ .
3.  $B$  est appelé l'ensemble d'arrivée de  $f$ .
4.  $x$  est la variable ;  $f(x)$  est l'image de  $x$  par  $f$ .
5. Si  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est une fonction à variable réelle ou  $f$  est une fonction numérique.

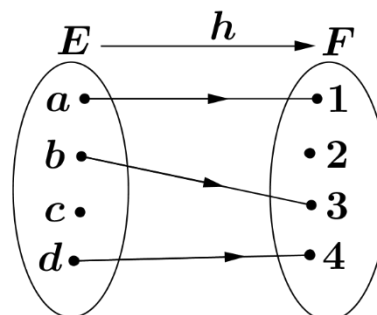
**Retenons**

1. Lorsque  $v$  est l'**image** de  $u$  par  $f$ , on dit que  $u$  est un **antécédent** de  $v$  par  $f$ . On écrit  $v = f(u)$ .
2. Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une fonction  $f$  est un ensemble de nombres réels, on dit que  $f$  est une **fonction numérique**.
3. Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique  $f$  est un ensemble de nombres réels, on dit que  $f$  est une **fonction numérique d'une variable réelle**.

**2.2 Ensemble de définition d'une fonction numérique**

**Consigne 2.2**

On considère la fonction ci - dessous



1. Donne l'ensemble  $\mathcal{D}$  des éléments de  $A$  ayant d'image par  $h$  dans  $B$ .
2. Donne un nom à cet ensemble.
3. Écris en compréhension l'ensemble  $\mathcal{D}$ .

**Définition**

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles non vides et  $f$  une fonction de  $A$  vers  $B$ . On appelle **ensemble ou domaine de définition de  $f$** , l'ensemble des éléments de  $A$  qui une image par  $f$ . On le note habituellement  $D_f$ .

On écrit :  $D_f = \{x \in A / f(x) \in B\}$

**Retenons**

Soit  $P$  et  $Q$  deux fonctions polynômes et  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  :

$$f : \begin{matrix} A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix}$$

- Si  $f$  est sous la forme  $f(x) = P(x)$ , alors on a :  $D_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$
- Si  $f$  est sous la forme  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , alors on a :  $D_f = \{x \in A / Q(x) \neq 0\}$ .
- Si  $f$  est sous la forme  $f(x) = \sqrt{P(x)}$ , alors on a :  $D_f = \{x \in A / P(x) \geq 0\}$ .
- Si  $f$  est sous la forme  $f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$ , alors on a :  $D_f = \{x \in A / P(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\}$ .
- Si  $f$  est sous la forme  $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ , alors on a :  $D_f = \{x \in A / Q(x) > 0\}$ .
- Si  $f$  est sous la forme  $f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$ , alors on a :  $D_f = \{x \in A / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\}$ .

### Consigne 2.3

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2 + 3$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-4}{x^2-5}$$

$$f_5 : \mathbb{R} \rightarrow [-1; +\infty[ \\ x \mapsto x + 3$$

$$f_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{E(x)-2}$$

$$f_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{4x+1}{\sqrt{4-3x}}$$

$$f_{11} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+3}{|x+1|-1}$$

$$f_{13} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+2}{|x+1|+|x-1|}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+3}{x-2}$$

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x+2}$$

$$f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-5}{E(x)+x}$$

$$f_8 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sqrt{2x-10}}{x-7}$$

$$f_{10} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sqrt{x-10}}{\sqrt{1-x}}$$

$$f_{12} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+2}{|x+1|-|x-1|}$$

$$f_{14} : \mathbb{R} \rightarrow [-2; 4[ \\ x \mapsto 2x + 1$$

### 2.3 Représentation graphique d'une fonction

#### Définition

Le plan est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $f$  une fonction d'une variable réelle d'ensemble de définition  $D_f$ .

On appelle **représentation graphique de  $f$**  ou **courbe représentative de  $f$** , l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x; f(x))$  où  $x \in D_f$ .

#### Remarque

La courbe représentative d'une fonction  $f$  est habituellement notée  $(C_f)$ .

Un point  $M(x; y) \in (C_f) \Leftrightarrow x \in D_f, y = f(x)$  ( $C_f$ ) est la courbe d'équation  $y = f(x)$  lorsque  $f$  est une fonction numérique d'une variable réelle.

### Consigne 2.4

On considère les fonctions numériques d'une variable réelle définies comme suit :

$$f(x) = 2x - 3 \text{ et } g(x) = x^2 - 4$$

1. Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions  $f$  et  $g$ .
2. Complète les tableaux suivants :

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

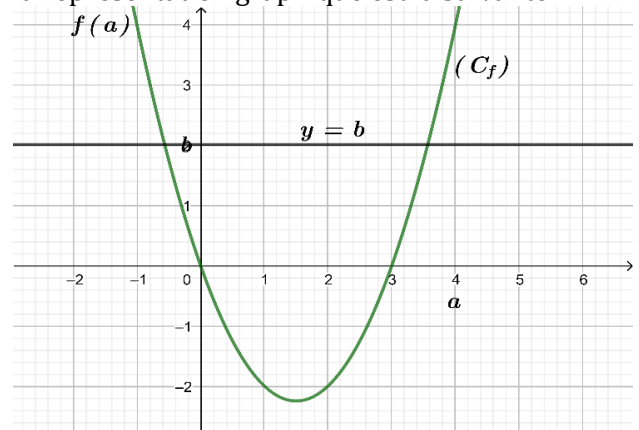
$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

3. Dans deux différents plans munis chacun d'un repère orthonormé, représente les points de coordonnées  $(x; f(x))$  et  $(x; g(x))$  en utilisant les valeurs contenues dans les tableaux ci-dessus.
4. Trace l'allure des représentations graphiques  $(C_f)$  et  $(C_g)$

### 2.4 Etude graphique

#### 2.4.1 Image et antécédent d'un nombre réel par une fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormé repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $f$  la fonction numérique dont la représentation graphique est la suivante :

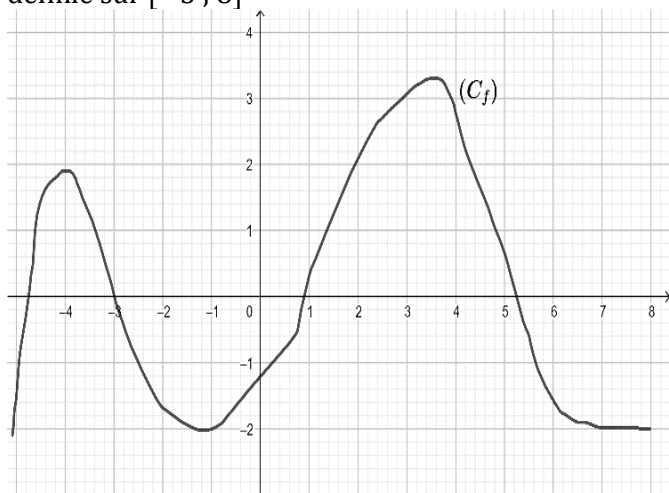


#### Retenons

1. **Lecture de l'image de  $a, a \in D_f$**   
L'image de  $a$  par  $f$  est l'ordonnée du point d'abscisse  $a$ . Le point  $M(a; f(a))$  est l'intersection de  $(C_f)$  et de la droite d'équation  $x = a$ .
2. **Lecture des antécédents**  
Les antécédents de  $b$  sont les abscisses des points d'intersection de  $(C_f)$  et de la droite d'équation  $y = b$ .

**Consigne 2.5**

(C<sub>f</sub>) est la courbe représentative d'une fonction f, définie sur [-5 ; 8]



- Détermine graphiquement l'image par f de chacun des nombres réels suivants : -3 ; -2 ; 3 et 4.
- Détermine graphiquement les antécédents par f de chacun des nombres réels suivants : -2 ; 0 et 4.

**2.4.2 Image directe d'un ensemble**

**Propriété**

Soient A et B deux ensembles non vides, f est une fonction de A vers B. Soit E une partie non vide de A. On appelle image directe de E par f, l'ensemble des images par f des éléments de E. On la note f(E) et on a :  $f(E) = \{f(x), x \in E\}$

**2.4.3 Image réciproque d'un ensemble**

**Propriété**

Soient A et B deux ensembles non vides, f est une fonction de A vers B. Soit F une partie non vide de B. On appelle image réciproque de F par f, l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de F. On la note  $f^{-1}(F)$  et on a :  $f^{-1}(F) = \{x, f(x) \in F\}$ .

**Consigne 2.6**

Soit la fonction affine f définie par  $f(x) = -2x + 3$

- Détermine l'image directe par f de [-1 ; 6].
- Détermine l'image réciproque par f de [-4 ; 5].

**2.5 Egalité de deux fonctions – coïncidence de fonctions sur un sous-ensemble de ℝ**

**Consigne 2.7**

On considère les fonctions f, g et h définies par :

$f(x) = x ; g(x) = \sqrt{x^2}$  et  $h(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ .

- Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g et h.
- Démontre que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = h(x)$ .

- Démontre que :  $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = g(x)$

**Définition**

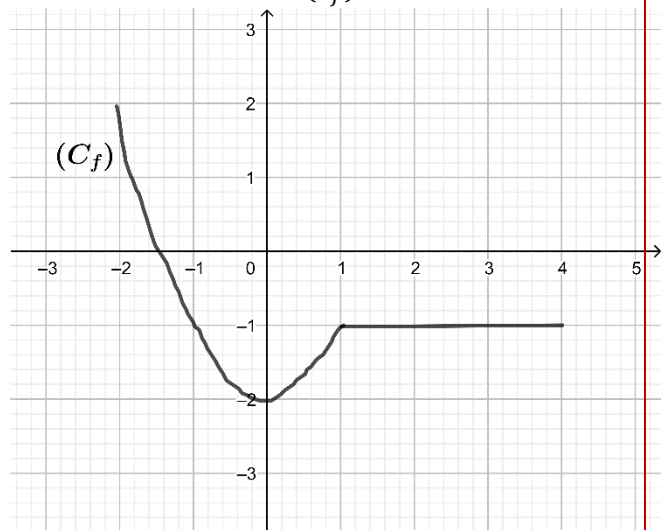
- Deux fonctions numériques f et g sont **égales** lorsqu'elles ont même ensemble de définition et que  $\forall x \in D_f = D_g, f(x) = g(x)$ .
- On dit que deux fonctions numériques f et g **coïncident sur un intervalle I** si et seulement si f et g sont définies sur I et que  $\forall x \in I, f(x) = g(x)$  ( $I \subset D_f$  et  $I \subset D_g$ ).

**2.6 Variation d'une fonction**

**2.6.1 Sens de variation d'une fonction**

**Consigne 2.8**

On considère la courbe (C<sub>f</sub>) ci-dessous.



Donne les intervalles où l'allure de la courbe (C<sub>f</sub>) est :

- ascendante. Dans ce cas, on dit que la fonction f est strictement croissante.
- descendante. Dans ce cas, on dit que la fonction f est strictement décroissante.
- ni ascendante ni descendante. Dans ce cas on dit que la fonction f est constante.

**Définition**

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle I.

- On dit que **f est croissante sur I** lorsque pour tout éléments  $x_1$  et  $x_2$  de I tels que  $x_1 < x_2$ , on a :  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Lorsque  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ , on dit que **f est strictement croissante sur I**

Tableau de variation

$x$	$a$	$b$
$f(x)$		

- On dit que **f est décroissante sur I** lorsque pour tout éléments  $x_1$  et  $x_2$  de I tels que  $x_1 < x_2$ , on a :  $f(x_1) \geq f(x_2)$ . Lorsque  $\forall x_1,$

$x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ , on dit que **f est strictement décroissante sur I**

Tableau de variation

$x$	$a$	$b$
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

(une flèche descendante relie  $f(a)$  à  $f(b)$ )

3. On dit que **f est constante sur I** lorsque pour tout éléments  $x_1$  et  $x_2$ , de I, on a :  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Tableau de variation

$x$	$a$	$b$
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

(une flèche horizontale relie  $f(a)$  à  $f(b)$ )

### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle I.

- $f$  est une fonction monotone sur I lorsqu'elle est soit croissante soit décroissante sur I.
- $f$  est une fonction strictement monotone sur I lorsqu'elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur I.

### Retenons

Étudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle I, c'est déterminer les plus grands intervalles de I sur lesquels la fonction est strictement monotone ou constante.

### Consigne 2.9

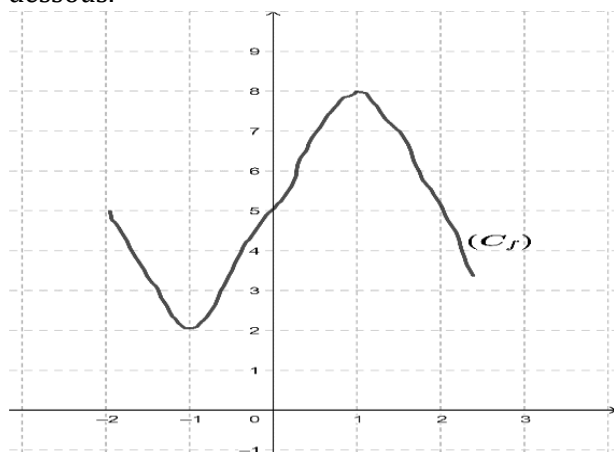
On considère la fonction  $f(x) = -x^2 + 6x + 13$ .

- Vérifie que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -(x - 3)^2 + 4$ .
- Étudie le sens de variation de  $f$  sur chacun des intervalles  $] -\infty; 3]$  et  $[3; +\infty[$ .

### 2.6.2 Maximum - minimum d'une fonction

#### Consigne 2.10

On considère la courbe  $(C_f)$  d'une fonction  $f$  ci-dessous.



- Détermine graphiquement l'abscisse du point de la courbe  $(C_f)$  qui possède la plus grande ordonnée.
- Détermine graphiquement l'abscisse du point de la courbe  $(C_f)$  qui a la plus petite ordonnée.

### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle E. Soit  $a \in E$ ,

- Lorsque  $\forall x \in E, f(x) \leq f(a)$ , on dit que  $f(a)$  est le **maximum** de  $f$  sur E.
- Lorsque  $\forall x \in E, f(x) \geq f(a)$ , on dit que  $f(a)$  est le **minimum** de  $f$  sur E.

### Retenons

Le tableau de variations d'une fonction est un tableau récapitulatif des résultats suivants : ensemble de définition, sens de variation, maximums et minimums éventuels, images aux bornes.

### Consigne 2.11

$f$  est une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

$x$	-4	2	5	9
$f(x)$	7	-4	8	1

(des flèches indiquent : 7 à -4 (descendante), -4 à 8 (croissante), 8 à 1 (descendante))

- Étudie le sens de variation de  $f$ .
- $f$  admet-elle un minimum? un maximum?
- Donne une allure de la courbe de  $f$ .
- Résous graphiquement l'équation  $f(x) = 2$ .

### Consigne 2.12

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 - x + 2$$

- Vérifie que si :  $u \in \mathbb{R}_+, v \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(u) - f(v) = (u - v)(u^2 + v^2 + uv - 1)$ .
- Déduis - en que  $f$  est strictement décroissante sur  $\left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$  et strictement croissante sur  $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[$ .
- Dresse le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; 10]$  et déduis-en le minimum de  $f$  sur cet intervalle.

## Séquence n°3 : Applications

### Activité 2.4

#### 3.1 Définition

#### Consigne 3.1

On considère les ensembles :  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ,  
 $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$  et  
 $C = \{-7; -5; -1; 0; 2; 4\}$ .

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :

$$f: A \rightarrow B \quad \text{et} \quad g: C \rightarrow B$$

$$x \mapsto 2x \quad \text{et} \quad x \mapsto |x|$$

1. Détermine  $D_f$  et  $D_g$ .
2. Compare  $D_f$  et  $A$  puis  $D_g$  et  $C$ .

### Définition

1. Une fonction  $f: A \rightarrow B$  est une application lorsque  $D_f=A$ ,  $D_f$  étant le domaine de définition de  $f$ .
2. Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles non vides. On appelle application de  $A \rightarrow B$  toute correspondance  $f$  de  $A \rightarrow B$ , qui à chaque élément de  $A$  associe un et un seul élément de  $B$ .

### Retenons

Toute application est une fonction tandis que toute fonction n'est pas nécessairement une application.

### Consigne 3.2

Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{|x|-1}$$

$f$  est-elle une application ?

### 3.2 Applications injectives

#### Consigne 3.3

On considère les ensembles :  $A=\{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ ,  
 $B=\{-3 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$  et  $C=\{-4 ; -3 ; -2 ; 0 ; 1 ; 2\}$ .  
 Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :

$$f: A \rightarrow B \quad \text{et} \quad g: A \rightarrow C$$

$$x \mapsto |x| \quad \text{et} \quad x \mapsto -x$$

1. Justifie que  $f$  et  $g$  sont des applications.
2. Peux-tu trouver deux éléments qui ont la même image par  $f$  ? par  $g$  ?

### Définition

Soit  $f$  une application de  $A$  vers  $B$ . On dit que  $f$  est **injective** ou **une injection** lorsque deux éléments quelconques de  $A$  ont des images distinctes dans  $B$ .  
 $f$  injective  $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$ , si  $x \neq y$  alors  $f(x) \neq f(y)$ .

### Propriété

Soit  $f$  une application de  $A$  vers  $B$ ,  $f$  est **injective** si et seulement si pour tous éléments  $a$  et  $b$  de  $A$ , on a :  $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$ .

### Consigne 3.4

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -3x + 5$$

Démontre que  $f$  est injective.

### 3.3 Applications surjectives

#### Consigne 3

On considère les ensembles :

$$A=\{-4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}, B=\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\} \text{ et}$$

$$C=\{-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 9 ; 16\}.$$

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :

$$f: A \rightarrow B \quad \text{et} \quad g: A \rightarrow C$$

$$x \mapsto |x| \quad \text{et} \quad x \mapsto x^2$$

Peux-tu trouver un élément de :

1.  $B$  qui n'a pas d'antécédents par  $f$  dans  $A$  ?
2.  $C$  qui n'a pas d'antécédents par  $g$  dans  $A$  ?

### Définition

Soit  $f$  une application de  $A$  vers  $B$ . On dit que  $f$  est **surjective** ou est **une surjection** lorsque tout élément de  $B$  est l'image d'au moins un élément de  $A$ .

### Propriété

Soit  $f$  une application de  $A$  vers  $B$ ,  $f$  est **surjective** si et seulement si pour tout élément  $y \in B$ , l'équation  $f(x) = y$  d'inconnue  $x$  admet au moins une solution dans  $A$ .

### Consigne 3.6

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 4x - 2 \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x+4}{x-2}$$

Vérifie si  $f$  et  $g$  sont surjectives.

### 3.4 Applications bijectives

#### Consigne 3.7

On considère les ensembles :  $A=\{-2 ; 0 ; 1 ; 3\}$  et  $B=\{-3 ; -1 ; 0 ; 2\}$ .

Soit  $f$  l'application définie par :

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto x - 1$$

1. Peux-tu trouver un élément de  $B$  qui n'admet pas d'antécédent par  $f$  dans  $A$  ?
2. Combien d'antécédent possède chaque élément de  $B$  ?
3. Comment appelle-t-on cette application ?

### Définition

1. Soit  $f$  une application de  $A$  vers  $B$ . On dit que  $f$  est **bijective** ou est **une bijection** lorsque tout élément de  $B$  est l'image d'un unique élément de  $A$ .
2. Toute application qui est à la fois injective et surjective est dite **bijective**.

### Propriété

Soit  $f$  une application de  $A$  vers  $B$ ,  $f$  est **bijective** si et seulement si pour tout élément  $y \in B$ , l'équation  $f(x) = y$  d'inconnue  $x$  admet une solution unique dans  $A$ .

### Définition : Bijection réciproque

Soit  $f$  une application bijective de  $A$  sur  $B$ .

$f$  admet une **bijection réciproque** notée  $f^{-1}$  définie de B sur A.

$$f^{-1}: A \rightarrow B$$

$$y \mapsto x$$

### Consigne 3.8

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x - 3$

$f$  est-elle une bijection ? si oui, définis la bijection réciproque de  $f$ .

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \quad \text{et} \quad g: [2; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \frac{2x-3}{2(x-1)} \quad \text{et} \quad x \mapsto 3\sqrt{2x-4}$$

- Démontre que  $f$  est une application.
- $f$  est-elle injective ?
- $f$  est-elle bijective ? Si oui définis sa bijection réciproque  $f^{-1}$ .
- Démontre que  $g$  est une application bijective.

#### Exercice 2

On considère la fonction suivante :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x-3}{x-2}$

- $f$  est-elle une application ? si non, précise le plus grand sous-ensemble A de  $\mathbb{R}$  pour que  $f$  soit une application.
- $f$  est-elle une injection de A sur  $\mathbb{R}$  ?
- $f$  est-elle une surjection de A sur  $\mathbb{R}$  ? si non, précise le plus grand sous-ensemble B de  $\mathbb{R}$  pour que  $f$  soit une surjection de A sur B.
- Déduis-en que  $f$  est une bijection de A sur B puis précise sa bijection réciproque  $f^{-1}$ .

#### Exercice 3

On considère la fonction suivante :

$$g: [3; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{2x-6}$$

- Justifie que  $g$  est une application injective.
- $g$  est-elle une application surjective ? si non, précise le plus grand sous-ensemble B de  $\mathbb{R}$  pour que  $g$  soit une surjection.
- Déduis-en que  $g$  est une bijection puis précise sa bijection réciproque  $g^{-1}$ .

## Séquence n°4 : Etudes de quelques fonctions

### Activité 2.5

Le professeur de Zoé, afin de réinvestir les connaissances acquises sur l'étude des fonctions se propose d'amener Zoé et ses camarades à étudier quelques fonctions élémentaires à savoir la fonction carrée, la fonction cube, la fonction racine carrée et la fonction inverse respectivement définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^3 \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

### 4.1 Fonctions élémentaires

#### 4.1.1 Fonction carrée

##### Consigne 4.1

- Détermine le domaine de définition  $D_f$  de  $f$  de l'activité 2.5.
- Étudie le sens de variation de  $f$  sur  $]-\infty; 0]$  et sur  $[0; +\infty[$ .
- Dresse le tableau de variation de  $f$  sur  $[-3; 3]$ .
- Donne l'allure de la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

#### 4.1.2 Fonction cube

##### Consigne 4.2

- Détermine le domaine de définition  $D_g$  de  $g$  de l'activité 2.5.
- (a) Démontre que  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a :  
 $g(a) - g(b) = (a - b) \left[ \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \right]$ .  
 (b) déduis-en le sens de variation de  $g$  sur  $D_g$ .
- Dresse le tableau de variation de  $g$  sur  $[-2; 2]$ .
- Donne l'allure de la courbe  $(C_g)$  de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

#### 4.1.3 Fonction racine carrée

##### Consigne 4.3

- Détermine le domaine de définition  $D_h$  de  $h$  de l'activité 2.5.
- Étudie le sens de variation de  $h$  sur  $[0; +\infty[$ .
- Dresse le tableau de variation de  $h$  sur  $[0; 9]$ .
- Donne l'allure de la courbe  $(C_h)$  de  $h$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

#### 4.1.4 Fonction inverse

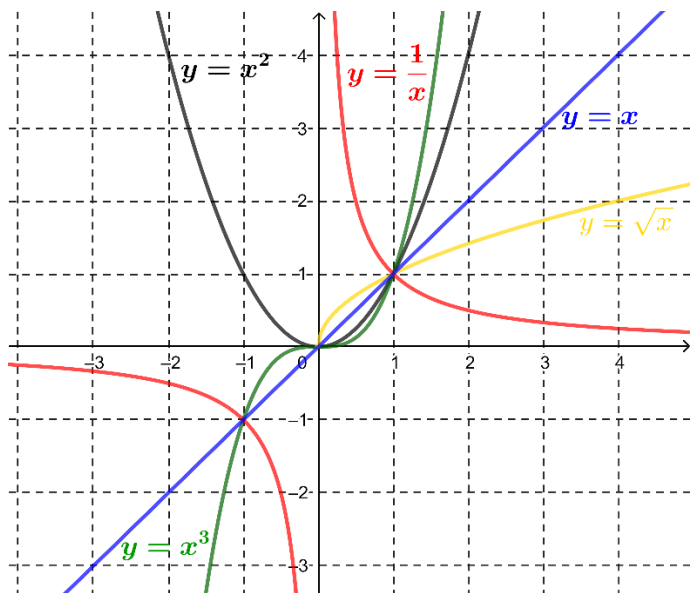
##### Consigne 4.4

- Détermine le domaine de définition  $D_k$  de  $k$  de l'activité 2.5.
- Étudie le sens de variation de  $k$  sur  $]-\infty; 0]$  et sur  $]0; +\infty[$ .
- Dresse le tableau de variation de  $k$  sur  $[-4; 0[ \cup ]0; 4]$ .
- Donne l'allure de la courbe  $(C_k)$  de  $k$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

### 4.2 Comparaison des nombres $a, a^2, a^3, \sqrt{a}$ et $\frac{1}{a}$

##### Consigne 4.5

Les courbes représentatives des fonctions élémentaires étudiées ci-haut sont les suivantes :



En exploitant les courbes tracées,

1. Compare :  $a, a^2, a^3, \sqrt{a}$  et  $\frac{1}{a}$  si  $a \in ]0; 1[$ .
2. Compare :  $a, a^2, a^3, \sqrt{a}$  et  $\frac{1}{a}$  si  $a \in ]1; +\infty[$ .
3. Compare :  $a, a^2, a^3, \sqrt{a}$  et  $\frac{1}{a}$  si  $a = 1$ .

### Propriétés

Soit  $a$  un nombre réel.

1. Si  $a \in ]0; 1[$  alors  $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$ .
2. Si  $a \in ]1; +\infty[$  alors  $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$ .
3. Si  $a = 1$  alors  $a = a^2 = a^3 = \sqrt{a} = \frac{1}{a}$ .

### 4.3 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

#### Consigne 4.6

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = x + 1.$$

1. Construis dans un repère orthonormé les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  des fonctions  $f$  et  $g$ .
2. Dédus-en les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
3. Dédus graphiquement les solutions de l'équation (E) :  $x^2 - x - 1 = 0$  et l'inéquation (I) :  $x^2 - x - 1 < 0$

#### Retenons

Pour résoudre graphiquement l'équation  $x^2 - x + 1 = 0$  on pourra tracer les courbes d'équations  $y = x^2$  et  $y = x - 1$  puis étudier leur intersection.

Pour résoudre graphiquement l'inéquation  $x^2 - x + 1 < 0$  on pourra tracer les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  d'équations respectives  $y = x^2$  et  $y = x - 1$  puis déterminer graphiquement l'intervalle pour lequel la courbe  $(C_f)$  est en dessous de la courbe  $(C_g)$ .

#### Consigne 4.7 : Application

Résous graphiquement l'équation (E) :  $x^2 + x - 2$  et l'inéquation (I) :  $x^2 + x - 2 > 0$ .

### Séquence n°5 : Polynômes et fractions rationnelles

#### Activité 2.6

##### 5.1 Polynômes

##### 5.1.1 Notion de polynômes

#### Consigne 5.1

On considère les fonctions suivantes :  $f(x) = 3x^5$  et  $g(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$

1. (a) Quel nom donne-t-on à la fonction  $f$  ?  
(b) Que représente les nombres 3 et 5 dans l'écriture de  $f(x)$  ?
2. (a) Quel nom donne-t-on à la fonction  $g$  ?  
(b) Précise son degré.

#### Définition

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Toute fonction numérique définie par  $f(x) = ax^n$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) est appelé **monôme** de coefficient  $a$  et de degré  $n$ .
2. On appelle **polynôme** toute somme algébrique de monômes.

#### Remarque

1. Tout monôme est aussi un polynôme.
2. Tout polynôme est défini sur  $\mathbb{R}$ .
3. La fonction nulle ( $x \mapsto 0$ ) est appelée **polynôme nul**.

##### 5.1.2 Racine d'un polynôme

#### Consigne 5.2

On considère le polynôme suivant :

$$P(x) = x^2 + 2x - 3.$$

1. Calcule  $P(-1)$ ,  $P(1)$  et  $P(-3)$ .
2. Que constates-tu ?
3. Propose une définition du zéro d'un polynôme.

#### Définition

On dit que  $\alpha$  est une **racine** ou un **zéro** d'un polynôme  $P$  si et seulement si  $P(\alpha) = 0$ .

#### Remarque

Déterminer les racines d'un polynôme revient à résoudre l'équation  $P(x) = 0$ .

#### Consigne 5.3

1. Dans chacun des cas suivants, justifie que  $\alpha$  est une racine du polynôme  $P$  :

- (a)  $P(x) = x^2 - 15x + 50$  ;  $\alpha = 10$   
 (b)  $P(x) = 4x^4 - 5x^3 - 14x^2 - 9x + 1$  ;  $\alpha = 1$   
 (c)  $P(x) = 2x^6 - 5x^4 - 6x^2 + 9$  ;  $\alpha = \sqrt{3}$

2. Détermine les racines du polynôme  
 $Q(x) = (2x + 1)(x - 3) - (4x + 5)(3 - x)$ .

### 5.1.3 Méthode de factorisation d'un polynôme

#### 5.1.3.1 Identification des coefficients d'un polynôme

#### Consigne 5.4

$P(x)$  est un polynôme du second degré tel que

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Remplir le tableau suivant :

$P(x)$	$-3x^2 + 1$	$2x^2 + x$	$5x^2 + x + 1$	$4x^2 - x\sqrt{3} + 1$
$a$				
$b$				
$c$				

#### 5.1.3.2 Forme canonique

#### Consigne 5.5

Soit le polynôme du second degré  $P(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ .

- (a) Réécris le polynôme  $P(x)$  en mettant le nombre  $a$  en facteur.  
 (b) Développe puis réduis l'expression  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ .
- (a) Détermine le nombre réel  $\beta$  tel que  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \beta = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ .  
 (b) Dédus-en que  $P(x) = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$
- Montre que  $P(x)$  peut se mettre sous la forme  $P(x) = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \alpha \right]$  avec  $\alpha$  à préciser.

#### Retenons

L'écriture  $P(x) = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$  est appelée la **forme canonique** du polynôme  $P(x) = ax^2 + bx + c$ .

#### Consigne 5.6 : Application

Détermine la forme canonique de chacun des polynômes suivants :

- (a)  $E(x) = x^2 + 20x - 800$ .  
 (b)  $Q(x) = -3x^2 + 5x + 3$   
 (c)  $K(x) = 2x^2 + 2x + 1$   
 (d)  $G(x) = -x^2 - x + 2$   
 (e)  $P(x) = -2x^2 + 7x + 4$   
 (f)  $G(x) = x^2 - 11x - 3$

#### 5.1.3.3 Factorisation d'un polynôme du second degré

#### Retenons

Pour factoriser un polynôme du second degré  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , on peut procéder comme suit :

- Mettre  $P(x)$  sous la forme canonique  $P(x) = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \beta \right]$ ;
- Si  $\beta > 0$  alors  $P(x)$  n'est pas factorisable ;
- Si  $\beta < 0$  alors  $P(x)$  est factorisable : on met donc  $P(x)$  sous la forme  $P(x) = a[(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)]$ .

#### Consigne 5.7

Factorise  $P(x)$  dans les cas suivants :

- (a)  $P(x) = x^2 + 4x - 5$   
 (b)  $P(x) = -2x^2 + x - 8$   
 (c)  $P(x) = 6x^2 - 5x + 9$

#### 5.1.3.4 Factorisation par $x - \alpha$

#### Consigne 5.8

Soit le polynôme du second degré  $Q(x) = x^3 - 7x - 6$

- Justifie que 3 est un zéro du polynôme  $Q$ .
- (a) Détermine les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $Q(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$ . (On pourra développer l'expression  $(x - 3)(ax^2 + bx + c)$  et procéder par identification des coefficients)  
 (b) Dédus-en une factorisation de  $Q(x)$ .

#### Information

**On dit qu'on a factorisé le polynôme  $Q(x)$  par la méthode d'identification des coefficients.**

- (a) Retrouve les réels  $a, b$  et  $c$  en effectuant la division de  $Q(x)$  par  $x - 3$ .  
 (b) Dédus-en une factorisation de  $Q(x)$ .

#### Information

**On dit qu'on a factorisé le polynôme  $Q(x)$  par la méthode de la division euclidienne.**

#### Propriété

Le polynôme  $P$  de degré  $n, n \geq 1$ , admet pour zéro le nombre réel  $\beta$  si et seulement si il existe un polynôme  $Q$  de degré  $n - 1$  tel que pour tout nombre réel  $x : P(x) = (x - \beta)Q(x)$ .

#### Evaluation formative

Dans chacun des cas suivants, vérifie que  $\alpha$  est une racine de  $P(x)$  puis factorise  $P(x)$ .

- (a)  $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$  ;  $\alpha = 2$   
 (b)  $P(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 8$  ;  $\alpha = 4$

#### 5.1.4 Etude de signe d'un binôme du premier degré

#### Retenons : Signe de l'expression $ax + b, (a \neq 0)$

Pour étudier le signe de l'expression  $ax + b$ , on procède comme suit :

- résoudre l'équation  $ax + b = 0$ , on trouve donc  $x = -\frac{b}{a}$ .
- utiliser le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	○	signe de $a$

**Consigne 5.8**

Etudie le signe de  $f$  dans les cas suivants :

- (a)  $f(x) = 2x - 3$
- (b)  $f(x) = -x + 2$

**5.1.5 Etude de signe d'un polynôme du second degré**

**Retenons : Signe de l'expression**

$P(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

Pour étudier le polynôme du second  $P$ , on peut procéder comme suit :

1. mettre sous la forme canonique  $P(x) = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \beta \right]$ ;
2. ensuite, chercher si possible la forme factorisée de  $P(x)$  :
  - Si  $\beta > 0$  alors  $P$  n'est pas factorisable et donc  $P(x)$  a le même signe que  $a, \forall x \in \mathbb{R}$  ;
  - Si  $\beta < 0$  alors  $P(x)$  est factorisable : on met donc  $P(x)$  sous la forme  $P(x) = a[(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)]$  puis on résous l'équation  $P(x) = 0$ . On utilise ensuite le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$+\infty$	
$P(x)$	signe de $a$	○	signe contraire de $a$	○	signe de $a$

Dans le tableau ci-dessus,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les racines de  $P$  et  $\alpha_1 < \alpha_2$

- Si  $\beta = 0$  alors on résous l'équation  $P(x) = 0$  puis on utilise le tableau suivant :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	signe de $a$	○	signe de $a$

**Consigne 5.9 : Application**

Etudie le signe  $P(x)$  dans les cas suivants :

- (a)  $P(x) = x^2 - 4x - 5$ .
- (b)  $P(x) = -2x^2 - 4x - 2$ .
- (c)  $P(x) = 3x^2 + 2x + 10$ .

**Evaluation Formative**

Dans chacun des cas suivants, met  $P(x)$  sous la forme canonique, détermine les racines éventuelles de  $P$  puis étudie le signe de  $P(x)$ .

1.  $P(x) = x^2 + 2x - 1$ .
2.  $P(x) = -x^2 + x - 1$ .
3.  $P(x) = x^2 - 7x + 6$ .
4.  $P(x) = 4x^2 + 12x + 9$ .

**5.2 Fractions rationnelles**

**Définition**

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions polynômes.

La fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$  est appelée **fonction rationnelle**.

On appelle **fraction rationnelle**, le quotient de deux fonctions polynômes.

Définition : Zéro d'une fonction rationnelle

On appelle zéro d'une fraction rationnelle  $f$ , le réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

**Remarque**

On fonction rationnelle  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  est nulle si  $u(x) = 0$  et  $v(x) \neq 0$ .

**Consigne 5.10**

On considère la fraction rationnelle  $f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$

1. Détermine le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
2. Factorise les polynômes  $-x^2 - x + 2$  et  $x^2 - 1$ .
3. Simplifie  $f(x)$  sur  $D_f$ .
4. Étudie le signe de  $f(x)$ .

**Evaluations formatives**

**Exercice 1**

Dans chacun des cas suivants, vérifie que  $P(x)$  est factorisable par  $x - \beta$  ; détermine le quotient  $Q(x)$  de  $P(x)$  par  $x - \beta$  ; factorise  $P(x)$  si possible  $Q(x)$  puis  $P(x)$  et étudie le signe de  $P(x)$  :

1.  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$  et  $\beta = 2$ .
2.  $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$  et  $\beta = \frac{3}{2}$ .
3.  $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$  et  $\beta = -3$ .
4.  $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$  et  $\beta = \sqrt{3}$ .

**Exercice 2**

Dans chacun des cas suivants, détermine  $a$  pour que  $P$  soit factorisable par  $Q$ , factorise  $P$  puis étudie son signe.

1.  $P(x) = ax^3 - 4x^2 + 7x - 6$  et  $Q(x) = x - 2$ .
2.  $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax - 2$  et  $Q(x) = x + 2$ .
3.  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + a$  et  $Q(x) = x^2 - 4$ .

**Exercice 3**

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = -5x^2 + 2x + 7 \text{ et}$$

$$v(x) = x^3 - 7x - 6.$$

- (a) Sachant que 3 est une racine de  $v(x)$ , factorise  $v(x)$ .  
(b) Détermine le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
- Simplifie  $f(x)$  sur  $D_f$  puis étudie le signe de  $f(x)$ .

#### Exercice 4

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x - 3}.$$

- Détermine le domaine de définition de  $D_g$  de  $g$ .
- Simplifie  $g(x)$  sur  $D_g$ .
- Etudie le signe de  $g(x)$ .

### Séquence n°6 : Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$

#### Activité 2.6

##### 6.1 Equations équivalentes

#### Consigne 6.1

On considère les équations suivantes :

$$(E_1): 3x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ et } (E_2): \frac{2x+1}{x-1} = \frac{x-11}{2x-1}.$$

- Parmi les nombres 1 ; -2 et  $\frac{2}{3}$ , trouve ceux qui sont solutions de  $(E_1)$ .
- Vérifie si les nombres -1 et 2 sont solutions de  $(E_2)$ .

#### Consigne 6.2

- Transforme l'équation  $(E_2)$  sous la forme  $P(x) = 0$  avec  $P(x)$  un polynôme à préciser.
- Résous dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $(E_3): P(x) = 0$ .

#### Information

On dit que les équations  $(E_2)$  et  $(E_3)$  sont équivalentes.

#### Définition

Deux équations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont même ensemble solution.

##### 6.2 Equations du type $|x - a| = b$

#### Consigne 6.3

Résous dans  $\mathbb{R}$ , les équations suivantes :

$$(E_1): |3x - 2| = 4, (E_2): |x - 1| = -4 \text{ et}$$

$$(E_3): |2x - 4| = x + 8.$$

##### 6.3 Equations du second degré à une inconnue

#### Définition

On appelle équation du second degré à une inconnue toute équation de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ .

#### Consigne 6.4 : Identification d'une équation du second degré à une inconnue

Parmi les équations ci-dessous, identifie celles qui sont des équations du second degré à une inconnue.

$$(E_1): x^2 + 2x = 3, (E_2): 3x^2 + y + 1 = 0,$$

$$(E_3): x^4 - 3x^2 + 3 = 0, (E_4): x^2 - 6 = 0,$$

$$(E_5): 2z^2 + 3z + 1 = 0, (E_6): |x^2 - 2x| + 3 = 0$$

#### Consigne 6.5 : Résolution d'équation du second degré à une inconnue

Résous dans  $\mathbb{R}$ , les équations suivantes :

$$(E_1): x^2 + 2x = 3 \text{ et } (E_2): x^2 + x + 6 = 0.$$

#### Consigne 6.6 : Problème conduisant à une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ .

- Godjoy** dépense le quart de son salaire à la nourriture, le tiers à la location et il lui reste 50.000 F CFA.  
Quel est le montant du salaire de **Godjoy**?
- Adébola** dépense dans un premier magasin le quart de la somme dont elle dispose. Dans un second magasin, elle dépense la moitié du reste. Et après avoir ensuite acheté un objet à 500 F, il lui reste 400 F.  
De quelle somme disposerait **Adébola** au départ ?

##### 6.4 Inéquations du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ .

#### Consigne 6.7

On considère les inéquations suivantes :

$$(I_1): 8x - 4 > 0; (I_2): \frac{(x-1)^2}{3x-5} \leq 1 \text{ et}$$

$$(I_3): \frac{(x-3)(x-2)}{3x-5} \leq 0.$$

- Le nombre -2 est-il solution de  $(I_1)$  ? de  $(I_2)$  ?
- Transforme l'inéquation  $(I_2)$  en l'inéquation  $(I_3)$ .

#### Information

On dit que les inéquations  $(I_2)$  et  $(I_3)$  sont équivalentes.

#### Définition

Deux inéquations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont même ensemble solution.

#### Consigne 6.8

Résous dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations suivantes :

$$(I_1): -2x + 3 < 0; (I_2): -x^2 + 4x - 3 \geq 0;$$

$$(I_3): -x^2 + 4x - 3 \geq 2x + 2; (I_4): 2x^2 - x + 6 < 0$$

$$(I_5): \frac{(x-1)^2}{3x-5} \leq 1; (I_6): \frac{(x-1)^2}{3x-5} \leq 1;$$

$$(I_7): \frac{1}{x^3+x^2-x-1} < \frac{1}{1-x} - \frac{2}{x+1} \text{ et } (I_8): \frac{3}{x^2+x-2} \geq \frac{2x^2}{x^2-1}$$

### Consigne 6.9 : Problème conduisant à une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ .

**Démiladé**, un producteur de spectacle loue une salle à 53170F pour organiser un spectacle. Chaque billet d'entrée est vendu à 200F.

A partir de quel nombre de spectateurs aura-t-il un bénéfice ?

#### 6.5 Inéquations du type $|x - a| \leq b$

##### Remarque

Pour tout nombre réel  $a$ , on :

$$(a > 0 \text{ et } |x| \leq a) \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

##### Consigne 6.10

Résous dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$(I_1): |2x - 1| \leq 6 \text{ et } (I_2): |-2x + 3| < x + 2.$$

#### Evaluations formatives

##### Exercice 1

On considère l'équation suivante :

$$\frac{(x-2)(2x-7)(x^2-9)(7x-\sqrt{3})}{x-3} = 0.$$

- Le réel 1 est-il solution de cette équation ?
- Quelle est la contrainte sur l'inconnue. En déduire l'ensemble de validité de cette équation.
- Résoudre cette équation dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ , et  $\mathbb{Z}$ .
- Les équations ou inéquations suivantes sont-elles équivalentes ? Justifie les réponses.
  - $|x - 2| = 5$  et  $(x - 2)^2 = 25$ .
  - $|x - 2| = x$  et  $(x - 2)^2 = x^2$ .
  - $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x-1}{2x+1}$  et  $(2x + 1)^2 = (x - 1)^2$
  - $\frac{2x+1}{x-1} \leq \frac{x-1}{2x+1}$  et  $(2x + 1)^2 \leq (x - 1)^2$

##### Exercice 2

- Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :
  - $(3x - 1)(2x + 9) + 1 - 9x^2 = (1 - 3x)(5x - 8)$
  - $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x-1}{2x+1}$
- Résous dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :
  - $\frac{x^2-7}{x-3} \leq \frac{2x(5-x)}{x^2-9}$
  - $\frac{4x-1}{x-1} < \frac{2x+3}{x+1}$

#### Séquence n°7 : Statistique

##### Activité 2.7

Zoé veut étudier les notes et les poids de ses camarades. Pour cela, il considère deux séries statistiques :

**Série 1** : Notes obtenues par les élèves de la 2<sup>nde</sup> (voir situation de départ).

**Série 2** :

Le relevé des poids des élèves de la 2<sup>nde</sup> a donné les résultats suivants :

50	62	62	70	54	64	72	54	50	62
70	54	72	62	74	51	63	60	52	73
58	63	71	70	61	50	64	57	60	51

#### 7.1 Présentation d'une série statistique

##### 7.1.1 Série statistique à caractère quantitatif discret

##### Consigne 7.1

- Dresse le tableau des effectifs et des fréquences de la série 1.
- Dresse le tableau des effectifs cumulés (croissants et décroissants) de la série 1.
- Dresse le tableau des fréquences cumulées (croissantes et décroissantes) de la série 1.

##### 7.1.2 Série statistique à caractère quantitatif continu

##### Consigne 7.2

- Dresse le tableau des effectifs et des fréquences de la série 2, en regroupant les modalités en des classes d'amplitudes égale à 5, la première classe étant  $[50;55[$ .
- Dresse le tableau des effectifs cumulés (croissants et décroissants) de la série 2.
- Dresse le tableau des fréquences cumulées (croissantes et décroissantes) de la série 2.

#### 7.2 Représentations graphiques

##### Consigne 7.3

- Représente le diagramme en bâtons des effectifs de la série 1.
- Représente le diagramme en bâtons des effectifs cumulés de la série 1.
- Représente le diagramme en bâtons des fréquences cumulées de la série 1.

##### Consigne 7.4

Représente l'histogramme de la série 2.

#### 7.3 Paramètre de position de tendance centrale

##### 7.3.1 Mode - Classe modale

##### Définition

**Le mode d'une série statistique** est la modalité ayant le plus grand effectif.

Dans le cas d'une série à caractère quantitatif continu dont les valeurs sont regroupées en classes, **la classe modale** est la classe de plus grand effectif.

##### Consigne 7.5

Détermine le mode de la série 1 et la classe modale de la série 2.

##### 7.3.2 Moyenne

##### Définition

**La moyenne d'une série statistique** (d'effectif total  $N$ ) est le réel  $\bar{x}$  tel que :  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i$  avec  $n_i$  l'effectif associé à la valeur du caractère  $x_i$ .

Dans le cas d'une **série à caractère quantitatif continu** dont les valeurs sont regroupées en classes,  $x_i$  désigne le centre de chaque classe.

On peut aussi calculer la moyenne avec les fréquences :  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p f_i x_i$  avec  $f_i$  la fréquence associée à la valeur du caractère  $x_i$ .

$$\text{Fréquence}(\%) = \frac{\text{effectif de chaque modalité}}{\text{effectif total}} \times 100$$

### Consigne 7.6

1. Détermine la moyenne des séries 1 et 2.
2. Détermine la moyenne de la série continue obtenue à la consigne 7.2.

### 7.3.3 Médiane

#### Définition

On considère que les  $N$  données sont classées, et numérotées par ordre croissant :  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p$ . Chaque valeur est répétée autant de fois que son effectif.

La **médiane d'une série statistique** est un réel noté  $M_e$  qui partage la série en deux sous-séries de même effectif :

1. Si  $N$  est impair, la médiane est la donnée de rang  $\frac{N+1}{2}$ , on a :  $M_e = X_{\frac{N+1}{2}}$ .
2. Si  $N$  est pair, la médiane est la donnée de rang  $\frac{N}{2}$  et  $\frac{N}{2} + 1$ , on a :  $M_e = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$ .

Dans le cas d'une **série à caractère continu**, la médiane peut s'obtenir de manière graphique en prenant la valeur correspondant à 0,5 sur le polygone des fréquences cumulées croissantes. On le détermine aussi par la méthode d'interpolation linéaire.

### Consigne 7.7

Détermine les médianes des séries 1 et 2. Pour la série 2, on utilisera la méthode d'interpolation linéaire.

### 7.4 Paramètre de position non centrale

#### Définition : Quartiles

Le **premier quartile**  $Q_1$  est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 25% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.

Le **deuxième quartile**  $Q_2$  est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 50% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale. **La médiane est encore le deuxième quartile**  $Q_2$ .

Le **troisième quartile**  $Q_3$  est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 75% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.

### Retenons

Dans le cas d'une série à **caractère discret** d'effectif total  $N$ , les quartiles s'obtiennent en ordonnant les valeurs dans l'ordre croissant puis :

1. Si  $N$  est multiple de 4 alors  $Q_1$  est la valeur de rang  $\frac{N}{4}$  et  $Q_3$  est la valeur de rang  $\frac{3N}{4}$ .
2. Si  $N$  n'est pas multiple de 4 alors  $Q_1$  est la valeur de rang immédiatement supérieur à  $\frac{N}{4}$  et  $Q_3$  est la valeur de rang immédiatement supérieur à  $\frac{3N}{4}$ .

Dans le cas d'une série à **caractère continu**, les quartiles peuvent s'obtenir à partir du polygone des fréquences cumulées croissantes où  $Q_1$  est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale 25%,  $Q_2$  est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale 50% et  $Q_3$  est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale 75%.

### Consigne 7.8

Détermine les quartiles de la série 1.

### 7.5 Paramètre de dispersion

#### 7.5.1 Etendue

#### Définition

L'**étendue** est la différence entre la plus grande valeur du caractère et la plus petite.

### Consigne 7.9

Détermine l'étendue des séries 1 et 2.

### 7.5.2 Ecart interquartile

#### Définition

L'**intervalle interquartile** est l'intervalle  $[Q_1; Q_3]$ . L'écart interquartile est le nombre  $Q_3 - Q_1$ . C'est la longueur de l'intervalle interquartile.

### Consigne 7.10

Détermine l'intervalle interquartile puis l'écart interquartile de la série 1.

### 7.5.3 Variance – Ecart-type

#### Définition

1. On appelle variance d'une série quelconque à caractère quantitatif discret le nombre : 
$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^p f_i (x_i - \bar{x})^2$$
2. On appelle écart-type de cette série le nombre  $\sigma = \sqrt{V}$

#### Propriété

On peut calculer la variance de la façon suivante :

$$V = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p x_i^2 \times n_i \right) - \bar{x}^2$$

### Consigne 7.11

Détermine la variance et l'écart-type de la série 1.

### 7.5.4 Ecart moyen

#### Définition

L'écart moyen d'une série statistique à caractère quantitatif discret est la moyenne des distances à la moyenne.

Soit  $e_m$  l'écart-moyen d'une série statistique, on a :

#### Consigne 7.12

Détermine l'écart moyen absolu de la série 1.

### 7.6 Polygone des effectifs et des fréquences

#### Définition

1. Le polygone des effectifs d'une série statistique à caractère quantitatif discret  $(x_i, n_i)$  est une ligne brisée que l'on obtient en joignant par des segments de droites les points successifs de coordonnées  $(x_i, n_i)$  où  $x_i$  est la modalité d'effectif  $n_i$ . Dans le cas d'une série statistique à caractère quantitatif continu,  $x_i$  désigne le centre des classes.

2. Le polygone des effectifs cumulés est celui obtenu en joignant par des segments de droites les points successifs de coordonnées  $(x_i, n_i)$  où  $x_i$  est la modalité d'effectif cumulé  $n_i$  (croissant ou décroissant) selon le cas.

#### Remarque

On définit de la même manière le polygone des fréquences et les polygones des fréquences cumulées.

#### Consigne 7.13

1. Construis le polygone des effectifs des séries 1 et 2.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés des séries 1 et 2.

#### Consigne 7.14

1. Construis le polygone des fréquences des séries 1 et 2.
2. Construis le polygone des fréquences cumulées des séries 1 et 2.

### 7.7 Diagramme cumulatif des effectifs et des fréquences

#### Définition

$(x_i, n_i)$  est une série statistique à caractère quantitatif.

Pour obtenir le diagramme cumulatif des effectifs cumulés croissants, il suffit de représenter graphiquement la fonction  $f$  définie par  $f(x_i) = n_i$ , pour tout  $x_i \in [x_i; x_{i+1}]$ ,  $x_i$  et  $x_{i+1}$  étant deux modalités successives et  $n_i$  l'effectif cumulé croissant de la modalité  $x_i$ .

#### Consigne 7.15

1. Construis le diagramme cumulatif des effectifs de la série 1.
2. Construis le diagramme cumulatif des fréquences de la série 1.

### 7.8 Détermination graphique des médianes et des quartiles

#### Consigne 7.16

En utilisant le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série 2, détermine graphiquement la médiane et les quartiles de cette série.

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

Les dernières notes de l'élève Dupont en maths sont : 10 ; 13 ; 7 ; 9 et 6.

Il espère remonter sa moyenne grâce au prochain devoir. Quelle note doit-il obtenir pour avoir au moins 10 de moyenne pour le trimestre ?

#### Exercice 2

On considère la série suivante :

Valeur	1	5	13	17
Effectif	2	1	3	2

1. Calculer la moyenne de la série.
2. Calculer la médiane et l'écart interquartile de la série.

#### Exercice 3

On donne la répartition des salaires d'une entreprise de 40 personnes selon leur montant :

Salaires	Effectif
[2000 ; 6000[	10
[6000 ; 10000[	14
[10000 ; 14000[	12
[14000 ; 18000[	4

1. Décrire la population et le caractère étudié.
2. Calculez la fréquence de chacun des groupes de salaires de l'entreprise.
3. Représentez graphiquement la série statistique étudiée par un histogramme.
4. Quelle est la classe modale ? l'étendue ?
5. Complétez le tableau des effectifs par les effectifs cumulés croissants et décroissant ; les fréquences et les fréquences cumulées.
6. Dessinez le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants. En déduire à 100 francs près la médiane de la série.
7. Calculez le salaire moyen dans l'entreprise. Comparez à la médiane.

#### Exercice 4

On observe 100 fois le nombre d'arrivées (variable X) de clients à un bureau de poste

pendant un intervalle de temps (10 minutes) et on obtient les valeurs suivantes :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
5	5	5	6	6	6	6	6	6	6

1. Dresse le tableau des effectifs, effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Calculer les valeurs de tendance centrale de la distribution : la moyenne, le mode et les quartiles  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$ .
3. Calculer les valeurs de la dispersion de la distribution : variance, l'écart-type et l'intervalle interquartile.

### Exercice 5

Dans une classe, il y a 20 filles et 15 garçons. La taille moyenne de l'ensemble des élèves est de  $1,7m$  ; la taille moyenne des garçons est de  $1,8 m$ . Quelle est la taille moyenne des filles de la classe ?

## SA n°3 : Lieux géométriques dans le plan

### Situation de départ

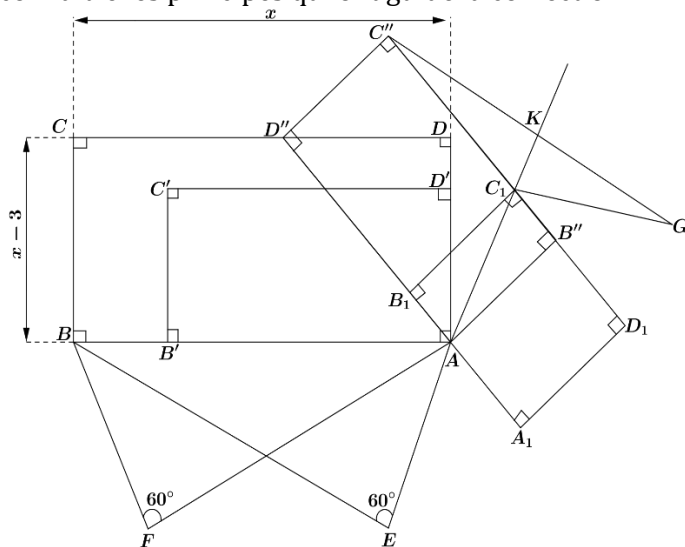
#### Texte :

Séro a terminé la classe de seconde C. Il est en vacances au village.

Pour faire face aux dépenses liées à la rentrée, il fabrique, en plusieurs exemplaires, avec des tiges fines de différentes couleurs, un objet d'art dont le plan est représenté par la figure ci-dessous.

Les exemplaires ainsi produits seront vendus aux jeunes de sa commune pour décorer le salon de leurs cases.

Son jeune frère Sofiano ayant vu le plan voudrait connaître les principes qui ont guidé la confection.



**Tâche :** Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques.

Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés;
- Analyser chacun des problèmes posés;
- Mathématiser chacun des problèmes posés;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème;
- Améliorer au besoin ta production.

#### Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

### Séquence n°1 : Vecteurs du plan

#### Activité 3.1

##### 1.1 Notion de vecteur

#### Retenons

Tout couple (A, B) de point du plan représente le vecteur noté  $\overrightarrow{AB}$  caractérisé par :

- **sa direction** : celle de la droite (AB) ;

- **son sens** : celui du parcours de A vers B ;
- **sa longueur** : celle du segment [AB]

Si le couple (A, B) est un représentant du vecteur noté  $\vec{u}$  alors on notera  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

**NB :** On note un vecteur par une lettre surmontée d'une flèche :  $\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$

#### Retenons

Un vecteur a une infinité de représentant et l'ensemble des vecteurs du plan est appelé **plan vectoriel** noté  $\mathcal{V}$ .

#### Propriété

1. Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.
2.  $\vec{u}$  étant un vecteur et  $O$  un point donné du plan, il existe un point unique  $M$  du plan tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ .
3.  $\vec{u}$  étant un vecteur et  $\beta$  un nombre réel.  $\beta\vec{u}$  ( $\beta \neq 0$ ) est un vecteur qui a même direction que le vecteur  $\vec{u}$ .
  - si  $\beta > 0$  alors  $\beta\vec{u}$  a même sens que  $\vec{u}$ .
  - si  $\beta < 0$  alors  $\beta\vec{u}$  a le sens contraire de celui de  $\vec{u}$ .
  - la longueur de  $\beta\vec{u}$  est :  $\|\beta\vec{u}\| = |\beta| \times \|\vec{u}\|$ . Le symbole  $\|\ \|$  se lit norme.
4.  $\vec{u}$  étant un vecteur et  $\beta$  un nombre réel.  $\beta\vec{u} = \vec{0}$  si et seulement si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\beta = 0$ .

#### Consigne 1.1

Soit A un point du plan et  $\vec{u}$  un vecteur du plan.

Construis le point B du plan tel que  $\overrightarrow{AB} = -3\vec{u}$ .

### 1.2 Opérations sur les vecteurs

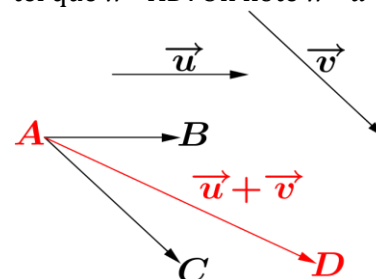
#### 1.2.1 Somme de vecteurs

#### Définition

Soit A un point du plan et soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. On désigne par B et C les points du plan tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ .

Soit D le point du plan tel que [BC] et [AD] aient le même milieu.

On appelle vecteur somme de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le vecteur  $\vec{w}$  tel que  $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ . On note  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ .



#### Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan, on :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

**Propriété**

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .
- $(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}$ .
- $\alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}$ .
- $\alpha (\beta \vec{v}) = \beta (\alpha \vec{v}) = \alpha \beta \vec{v}$ .

**Consigne 1.2**

Soit EGH un triangle quelconque.

- Construis les points A et B tels que :  $\vec{EA} = \vec{GH}$  et  $\vec{HB} = 2\vec{GE}$ .
- Démontre que le point A est le milieu du segment [HB].

**1.3 Combinaison linéaire****Consigne 1.3**

Pour justifier la nécessité de maîtriser l'outil vectoriel dans la réalisation du plan de l'objet d'art, Séro explique à son frère qu'il peut prendre seulement les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  comme base pour reconstruire toute la figure.

Détermine les nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tel que :

$$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}.$$

**1.3.1 Définition****Définition**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.

Tout vecteur de la forme  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels, est appelé **combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$**  de coefficients respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Consigne 1.4**

EFG est un triangle.

- Construis le point H tel que  $\vec{EH} = -3\vec{EF} + 2\vec{EG}$ .
- Ecris le vecteur  $\vec{FH}$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{EG}$ .

**1.3.2 Vecteurs colinéaires****Définition**

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires lorsque l'un d'eux est le vecteur nul ou lorsqu'ils ont la même direction.

NB : Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

**Propriété**

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$ .

- si  $k > 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont même sens.
- si  $k < 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de sens contraire.

**Consigne 1.5 : Application**

- Soit  $\vec{u} \left( 2; -\frac{1}{2} \right)$  et  $\vec{v} \left( -\frac{1}{2}; \frac{1}{8} \right)$  deux vecteurs du plan.  
Justifie que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- Vérifie si les vecteurs  $\vec{t}(4; 3)$  et  $\vec{w}(-7; 2)$  sont colinéaires.
- Soit  $\vec{u}$ ;  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan tels que : 
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \end{cases}$$
  
Démontre que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires au vecteur  $\vec{w}$ .

**Propriété**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires
- si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels tels que :  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$  alors  $\alpha = \beta = 0$ .

**Consigne 1.6**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires et  $\alpha$  un réel.

Détermine  $\alpha$  sachant que  $(\alpha + 2) \vec{u} + (\alpha^2 - 4) \vec{v} = \vec{0}$ .

**1.3.3 Points alignés****Définition**

Soit A, B, C trois points du plan. Les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.

**Consigne 1.7 : Application**

- Soit EFG un triangle quelconque. A est le milieu de [EF] et B est le milieu de [AG].  
(a) Construis le point C tel que :  $\vec{GC} = \frac{1}{3} \vec{GF}$ .  
(b) Démontre que les points E, B et C
- Soit ABC un triangle quelconque.  
(a) Place les points I, J et K tels que :  $\vec{BI} = \frac{3}{2} \vec{BC}$  ;  $\vec{CJ} = \frac{1}{3} \vec{CA}$  et  $\vec{AK} = \frac{2}{5} \vec{AB}$ .  
(b) Démontre que les points I, J et K sont alignés.

**1.3.4 Droites parallèles****Définition**

Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires.

**Consigne 1.8 : Application**

Soit ABC un triangle.

- Construis les points M et N tels que :  $\vec{AM} = \frac{1}{3} \vec{AB}$  et  $\vec{AN} = -\frac{2}{3} \vec{AC}$ .
- Démontre que les droites (BN) et (MC) sont parallèles.

## 1.4 Bases du plan vectoriel

### 1.4.1 Définition

#### Définition

On appelle base de l'ensemble  $\mathcal{V}$ , tout couple  $(\vec{i}; \vec{j})$  de vecteurs non colinéaires.

#### Consigne 1.9 : Application

ABC est un triangle.

Démontre que  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  est une base de  $\mathcal{V}$ .

### 1.4.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base.

#### Propriété

Soit  $(\vec{i}; \vec{j})$  une base de  $\mathcal{V}$ .

1. Pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe un et un seul couple de nombres réels  $(x; y)$  tel que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .
2. Le seul couple  $(x; y)$  de nombres réels tel que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  est appelé coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ . On écrit  $\vec{u}(x; y)$  ou  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ .

#### Consigne 1.10

On donne le triangle ABC et on désigne par E le milieu de [BC].

Détermine les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AE}$  dans la base  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ .

#### Consigne 1.11

Le plan vectoriel est muni d'une base  $(\vec{i}; \vec{j})$ . Soit les vecteurs  $\vec{u}(2; 1)$  et  $\vec{v}(3; -2)$ .

1. Démontre que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base de  $\mathcal{V}$ .
2. Quelles sont les coordonnées des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$  ?
3. Soit  $\vec{t}(2; 3)$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ .  
Détermine les coordonnées de  $\vec{t}$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

## 1.5 Déterminant d'un couple de vecteurs relativement à une base

#### Définition

Soit  $(\vec{i}; \vec{j})$  une base de  $\mathcal{V}$ ,  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$ .

On appelle **déterminant de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$**  et on note

$\det(\vec{u}; \vec{v})$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$  le nombre réel

$$xy' - x'y. \text{ On a : } \det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

#### Consigne 1.12

Dans le plan muni de la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ , on considère les vecteurs  $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$  et  $\vec{w} = -9\vec{i} + 12\vec{j}$ .

Détermine  $\det(\vec{u}; \vec{v})$  et  $\det(\vec{u}; \vec{w})$ .

#### Propriété

Soit  $(\vec{i}; \vec{j})$  une base de  $\mathcal{V}$ .

1. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** si et seulement si  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ .
2. Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si  $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$ .
3. Deux droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  dirigées respectivement par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **parallèles** si et seulement si  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ .
4. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

$$\text{On a : } (AB) // (CD) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0.$$

#### 5. Equation cartésienne d'une droite

Soit  $A(x_0; y_0)$  un point du plan et  $\vec{u}(a; b)$  un vecteur directeur d'une droite (D).

Si  $A \in (D)$  alors le couple  $(A, \vec{u})$  est un repère de (D).

Soit  $M(x; y)$  un point du plan.

$$M \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$$

En effet,

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0. \end{aligned}$$

En posant  $t = ay_0 - bx_0$ , on a :  $bx - ay + t = 0$ .

Cette écriture est appelé **équation cartésienne de la droite (D)**.

#### Consigne 1.13

Dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ , on considère les vecteurs

$\vec{u}(-\frac{4}{5}; \beta)$  et  $\vec{v}(3; 7)$  et le point  $A(1; 3)$ .

1. Détermine  $\beta$  pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires.
2. Détermine l'équation cartésienne de la droite (D) passant par A et dirigée par le vecteur  $\vec{v}$ .

## 1.6 Caractérisation vectorielle

### 1.6.1 du centre de gravité

#### Retenons

Soit A, B et C un triangle et G le point de concours des trois médianes.

G est appelé le centre de gravité du triangle ABC, on a alors :  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

#### Propriété

Soit A, B et C trois points du plan.

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$
- Si G est le centre de gravité du triangle ABC

$$\text{alors on a : } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

#### Consigne 1.14

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. Soit C' le milieu du côté [AB]. On sait que  $GC = 2GC'$ .

1. Déterminer une relation entre les vecteurs  $\overrightarrow{GC}$  et  $2\overrightarrow{GC'}$ .

2. (a) Exprime les vecteurs  $\overrightarrow{GA}$  et  $\overrightarrow{GB}$  en fonction de  $\overrightarrow{GC}$ .  
 (b) Déduis-en la valeur de la somme  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ .

### 1.6.2 du milieu d'un segment

#### Retenons

Soit un point I milieu d'un segment [AB].

$$\begin{aligned} \text{I milieu de [AB]} &\Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IB} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \end{aligned}$$

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan.

- Si I est le milieu du segment [AB] alors  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .
- Si I est un point vérifiant  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ , alors I est le milieu du segment [AB].
- Si I est le milieu du segment [AB] alors on a : 
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

### 1.6.3 du segment de droite

#### Retenons

Soit [AB] un segment de droite.

$$M \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \text{ avec } t \in [0; 1].$$

### 1.6.4 du demi-droite

#### Retenons

Soit [AB] un segment de droite.

$$M \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

Soit  $(\vec{i}; \vec{j})$  une base du plan.

1. on considère les vecteurs  $\vec{u} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ . Justifie que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
2. Dans chacun des cas suivants, préciser si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires ou non.
  - (a)  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
  - (b)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

#### Exercice 2

Soit ABCD un trapèze tel que  $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$ . On désigne par I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [CD]. Soit O le point défini par  $\overrightarrow{DO} = 3\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$ .

1. Justifie que la base  $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$  est une base.
2. Détermine dans la base  $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$ , les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DI}; \overrightarrow{DO}$  et  $\overrightarrow{DJ}$ .

3. Montre que les points O, B, et C d'une part et les points O, I et J d'autre part, sont alignés.

#### Exercice 3

Soit OABC un quadrilatère.

Construire les points I, J et K tel que OABI, OBCJ et OCAK soient des parallélogrammes.

Montrer que O est le centre de gravité du triangle IJK.

#### Exercice 4

Soit OAB un triangle et I le milieu de [AB].

1. Montre que pour tout point M du plan on a  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ .
2. Construis les points C et D tels que  $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OB}$ .
3. Montre que les droites (CD) et (OI) sont parallèles.

#### Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, déterminer si possible le réel m pour que les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires.

- (a)  $\vec{u}(m; 2)$  et  $\vec{v}((5; -3)$ .
- (b)  $\vec{u}(m; m - 1)$  et  $\vec{v}((6; 1)$ .
- (c)  $\vec{u}(1; m + 2)$  et  $\vec{v}((m - 2; -1)$ .
- (d)  $\vec{u}(m + 1; -1)$  et  $\vec{v}((-3; 0)$ .

#### Exercice 6

Soit ABC un triangle et E le point défini par  $3\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ .

1. Montre que  $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$  puis construis E.
2. Construis le point F tel que  $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ .
3. Montre que les points A, C et F sont alignés.

### Séquence n°2 : Droites dans le plan

#### Activité 3.2

**Sofiano** remarque que les différentes droites du plan occupent des fonctions différentes les unes par rapport aux autres. Son frère lui affirme que ces différentes positions peuvent être étudiées à l'aide des équations de ces droites.

### 2.1 Représentation paramétrique d'une droite dans le plan muni d'un repère

#### Consigne 2.1

1. En utilisant le plan de la situation de départ, construis la droite ( $\Delta$ ) passant par E et de vecteur directeur  $\overrightarrow{BF}$ .
2. Peux-tu tracer une autre droite passant par E et de vecteur directeur  $\overrightarrow{BF}$  ?

#### Propriété

1. Pour tout point  $A$  et pour tout vecteur non nul  $\vec{u}$ , il existe une droite et une seule passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .
2. Soit  $(D)$  une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$  et  $A$  un point de  $(D)$ . Pour tout point  $M$  du plan on a :  $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires).

### Consigne 2.2

Le plan est muni d'un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ . Soit  $(D)$  la droite de repère  $(A ; \vec{u})$  avec  $A(x_A ; y_A)$  et  $\vec{u}(a ; b)$ . Soit  $M(x ; y)$  un point du plan.

1. Traduis par une égalité vectorielle l'appartenance du point  $M$  à la droite  $(D)$ .
2. En utilisant les coordonnées, trouve une relation pour  $x$  et  $y$ .

### Propriété

Le plan est muni d'un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ . Soit  $a, b, x_0, y_0$  des nombres réels tels que  $(a, b) \neq (0 ; 0)$ .

L'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées

$(x ; y)$  vérifient  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + at \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$  est la droite  $(D)$  passant par le point  $A(x_0, y_0)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{u}(a ; b)$ .

### Définition

Le plan est muni d'un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ . Soit  $(D)$  la droite passant par le point  $A(x_0, y_0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(a ; b)$ .

Le système  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + at \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$  est appelé **une représentation paramétrique** ou **système d'équations paramétriques** de la droite  $(D)$  dans le repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

### Consigne 2.3 : Application

Trouve une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  dans chacun des cas suivants :

- (a)  $(D)$  passe par les points  $A(3 ; -1)$  et  $B(4 ; 1)$ .
- (b)  $(D)$  passe par le point  $C(-2 ; 5)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}(1 ; 1)$ .

## 2.2 Equation cartésienne d'une droite dans le plan muni d'un repère

### Consigne 2.4 : Démonstration de la propriété

Le plan est muni d'un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ . Soit  $A(x_0 ; y_0)$  un point de la droite  $(D)$  et  $\vec{u}(a ; b)$  un vecteur directeur de  $(D)$ . Soit  $M(x ; y)$  un point du plan.

1. Justifie qu'il existe les nombres réels  $a, b$ , et  $c$  tels que  $M \in (D) \Leftrightarrow ax+by+c=0$ .
2. Déduis - en qu'un vecteur directeur de la droite  $(D)$  d'équation  $ax+by+c=0$  est  $\vec{u}(-b ; a)$ .

### Propriété

Le plan est muni d'un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

1. Soit  $(D)$  une droite.  
Il existe des nombres réels  $a, b$ , et  $c$  tels que pour tout point  $M(x, y)$  du plan, on ait :  $M \in (D) \Leftrightarrow ax+by+c=0$ .
2. Soit  $a, b$ , et  $c$  des nombres réels tels que  $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ . L'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées  $(x ; y)$  vérifient l'équation  $ax + by + c = 0$  est une droite de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

### Définition

Soit  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  un repère du plan,  $(D)$  est une droite du plan.

Toute équation du type  $ax+by+c=0, (a ; b) \neq (0 ; 0)$  est appelée équation cartésienne de  $(D)$  dans le repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

### Retenons

Soit  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  un repère du plan.

Une équation cartésienne de la droite  $(D)$  passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  s'obtient en considérant un point  $M(x, y)$  et en annulant le déterminant des vecteur  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$ .

$$M \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u})=0$$

### Remarque

- Soit  $(D)$  une droite d'équation cartésienne  $ax+by+c=0$ . Pour tout nombre réel  $k$  non nul,  $kax+kby+kc=0$  est une autre équation cartésienne de la droite  $(D)$ . **Toute droite admet donc une infinité d'équations cartésiennes.**
- Soit  $(D)$  une droite d'équation cartésienne  $ax+by+c=0$ . Toute droite  $(D')$  parallèle à  $(D)$  admet une équation du type  $ax+by+d=0$  (puisqu'elles ont même vecteur directeur). On peut déterminer le nombre réel  $d$  en substituant dans l'équation de  $(D')$  les coordonnées d'un point de  $(D)$ .

### Consigne 2.5 : Détermination d'une équation cartésienne d'une droite.

Le plan est muni d'un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ . Dans chacun des cas suivants, détermine une équation cartésienne de la droite  $(D)$  :

- (a)  $(D)$  passe par les points  $A(-1 ; 2)$  et  $B(1 ; 4)$ .
- (b)  $(D)$  passe par le point  $C(2 ; -5)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}(1 ; 1)$ .
- (c)  $(D)$  passe par le point  $C(2 ; -5)$  et parallèle à la droite  $(D') : 7x - 4y + 3 = 0$ .

### Consigne 2.6 : Détermination d'une équation cartésienne d'une droite à partir d'une représentation paramétrique de cette dernière.

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est :  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ .  
Détermine une équation cartésienne de (D).

**Consigne 2.7 : Détermination d'une représentation paramétrique d'une droite à partir d'une équation cartésienne de cette dernière.**

Soit (D) la droite d'équation cartésienne  $-x + 5y - 8 = 0$ .  
Détermine une représentation paramétrique de la droite (D).

**Consigne 2.8 : Détermination du point d'intersection de deux droites sécantes.**

Soit (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ) un repère orthonormé du plan.  
On donne les droites :  $(D_1) : 2x + y - 1 = 0$  ;  
 $(D_2) : x - y + 2 = 0$  ;  $(D_3) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$  et  
 $(D_4) : \begin{cases} x = 1 - 6\beta \\ y = 4\beta \end{cases}, (\beta \in \mathbb{R})$

- (a) Démontre que les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont sécantes.  
(b) Détermine les coordonnées de leur point d'intersection.
- (a) Démontre que les droites  $(D_1)$  et  $(D_3)$  sont sécantes.  
(b) Détermine les coordonnées de leur point d'intersection.
- (a) Démontre que les droites  $(D_3)$  et  $(D_4)$  sont sécantes.  
(b) Détermine les coordonnées de leur point d'intersection.

**2.2.1 Vecteur normal à une droite**

**Définition : Vecteur normal à une droite**

- On appelle **vecteur normal à une droite** (D) tout vecteur non nul dont la direction est perpendiculaire à celle de (D).
- Soit (D) une droite dont l'équation cartésienne dans un repère est  $ax + by + c = 0, (a; b) \neq (0; 0)$ . Un vecteur normal à (D) est  $\vec{n}(a; b)$ .

**Propriété**

- Soit (D) et (D') deux droites ayant respectivement  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  pour vecteurs normaux. On a :  
(a)  $(D) // (D') \Leftrightarrow \vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires.  
(b)  $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$ .
- Pour tout point A et pour tout vecteur non nul  $\vec{n}$ , il existe une seule droite passant par A et de vecteur normal  $\vec{n}$ .
- Soit (D) une droite,  $\vec{n}$  un vecteur normal à (D) et A un point de (D). Pour tout point M du plan on a :  $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$ .

**Consigne 2.9**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ).  
Détermine une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A(2 ; 7) et d'un vecteur normal  $\vec{n}(-3; 2)$ .

**2.3 Distance d'un point à une droite**

**Propriété**

Soit (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ) un repère orthonormé du plan et (D) une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ . Soit  $M_0(x_0; y_0)$  un point du plan.  
La distance de  $M_0$  à (D) est  $d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

**Consigne 2.10 : Application**

Soit (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ) un repère orthonormé du plan. On considère la droite (D) :  $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ .

- Détermine une équation cartésienne de (D).
- Calcule la distance du point A(-2; 2) à la droite (D).

**Evaluations formatives**

**Exercice 1**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ).  
Dans chacun des cas suivants, détermine une équation cartésienne de la droite (D) :

- (D) passe par A( $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{3}$ ) et admet  $\vec{n}(2; -7)$  pour vecteur normal.
- (D) passe par B(4; 1) et est perpendiculaire à la droite d'équation  $3x + 5y - 8 = 0$ .
- (D) est la médiatrice du segment [CD] où C(-3; 2) et D(0; 5).

**Exercice 2**

Le plan est muni d'un repère (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ). Dans chacun des cas suivants, détermine une représentation paramétrique de la droite (D) :

- (D) passe par A(-2; 3) et admet  $\vec{u}(2; -5)$  pour vecteur directeur.
- (D) passe par A(-2; 3) et B(1; 2).
- (D) a pour équation cartésienne  $x - 2y + 8 = 0$ .

**Exercice 3**

Dans le plan muni d'un repère (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ), on considère les points B(-4; 5), C(2; -1) et D(0; 3).  
On désigne par  $\mathcal{V}$  l'ensemble des vecteurs du plan.

- (a) Détermine une équation cartésienne de la droite ( $\Delta$ ) passant par le centre de gravité du triangle OBC et dirigé par le vecteur  $\vec{e} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ .  
(b) Le point D appartient-il à la droite ( $\Delta$ ) ?
- (a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (BC).  
(b) Justifie que les droites ( $\Delta$ ) et (BC) sont sécantes en un point I dont tu préciseras les coordonnées.

- Justifie que  $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j}$  est un vecteur normal à la droite (BC) puis à l'aide des vecteurs  $\vec{e}$  et  $\vec{n}$ , prouve que les droites (Δ) et (BC) ne sont pas perpendiculaires.
- Détermine la distance du point D à la droite (BC).
- On pose  $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{OC}$ .
  - Justifie que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base de  $\mathcal{V}$  puis exprime les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  en fonction de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
  - Détermine dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ , les coordonnées du vecteurs  $\vec{w} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$ .

### Séquence n°3 : Homothétie

#### Activité 3.3

Sofiano, dans ses analyses réalise qu'il existe une similitude entre les rectangles ABCD et AB'C'D'. Son frère Séro confirme cette affirmation en lui précisant que les dimensions du rectangle AB'C'D' font les deux tiers de » celles du rectangle ABCD. Des informations de Séro, il ressort que  $\vec{AB} = -\frac{3}{2}\vec{B'A}$  et  $\vec{BC} = \frac{3}{2}\vec{AD}$ .

#### 3.1 Définition

##### Consigne 3.1 : Notion d'homothétie

Exprime les vecteurs  $\vec{AB'}$  et  $\vec{AD'}$  respectivement en fonction des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$ .

##### Information

On dit que les points B' et D' sont respectivement les images des points B et D par l'homothétie de centre A et de rapport  $\frac{2}{3}$ .

##### Définition

O est un point du plan et k un nombre réel non nul. On appelle **homothétie de centre O et de rapport k** noté  $h(O, k)$  l'application du plan qui à tout point M associe le point M' défini par :  $\vec{OM'} = k\vec{OM}$ .

- Si M' est l'image de M par une homothétie, on dit que M' est l'**homothétique** de M.
- Le centre d'une homothétie est sa propre image.

#### Consigne 3.2

- Traduis par des égalités vectorielles les phrases suivantes :
  - « M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 5 » ;
  - « Le point C a pour image D par l'homothétie de centre S et de rapport  $\frac{1}{2}$  » ;
  - « L'homothétie de centre I et de rapport -3 transforme A en B.
- Interpréter, en utilisant une homothétie, les égalités vectorielles suivantes :  $\vec{BC} = 4\vec{BC}$  ;  $2\vec{MN} = -5\vec{MP}$  ;  $\frac{3}{2}\vec{RS} = \vec{RG}$ .

#### Consigne 3.3

A, B et C sont trois points du plan deux à deux distincts tels que  $\vec{AC} = 5\vec{BC}$ .

Détermine le rapport de :

- l'homothétie h de centre A tel que  $h(C) = B$ .
- l'homothétie h de centre B qui transforme A en C.
- l'homothétie h de centre C tel que  $h(A) = B$ .

#### Consigne 3.4

Soit ABCD un parallélogramme. Construis les images des quatre sommets de ce parallélogramme par l'homothétie de centre A et de rapport  $-\frac{1}{2}$ .

#### Remarque

Un point, son image par une homothétie et le centre de cette homothétie sont alignés.

### 3.2 Les homothéties particulières

#### Propriété

- L'homothétie de centre O et de rapport 1 est l'application identique du plan. L'application identique du plan est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M. On la note  $Id_{\mathcal{P}}$ .  

$$Id_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$Id_{\mathcal{P}} : M \mapsto M$$
 $h(O; 1)$  est l'identité du plan.
- Toute homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie de centre O.

### 3.3 Transformations du plan

#### 3.3.1 Définition

##### Définition

Toute application f du plan dans lui-même pour laquelle tout point M' est l'image d'un unique point M est appelé **transformation du plan**.

##### Remarque

- Homothétie, translation, symétries orthogonale et centrale sont des transformations du plan.
- Par contre, les projections ne sont pas des transformations du plan.

#### 3.3.2 Transformation réciproque d'une transformation

##### Définition

Soit f une transformation du plan. On appelle **transformation réciproque de f**, la transformation notée  $f^{-1}$  du plan qui à tout point M' associe un unique antécédent.

##### Propriété

Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul et différent de 1.

L'homothétie de centre O et de rapport k est une transformation du plan dont la transformation

réciproque est l'homothétie de centre O et de rapport  $\frac{1}{k}$ .

$$h(O, k)(M) = M' \text{ signifie } M = h\left(O, \frac{1}{k}\right)(M').$$

### 3.4 Point invariant

#### Définition

On appelle **point invariant**, tout point qui est égal à sa propre image par l'application considérée.

#### Propriété

Le seul point invariant par une homothétie de rapport différent de 1 est son centre.

#### Remarque

Lorsque le rapport est égal à 1, tout point du plan est invariant.

### 3.5 Propriété fondamentale

#### Propriété

$h(O, k)$  étant l'homothétie de centre O et de rapport k, M' et N' les homothétiques respectifs de deux points M et N par h, on a :  $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ .

### 3.6 Homothétie et configuration du plan

#### Propriété

- L'image par l'homothétie :
  - d'une droite est une droite qui lui est parallèle ;
  - d'une demi-droite est une demi-droite ;
  - d'un segment de droite est un segment de droite.
- L'homothétie conserve :
  - l'alignement des points ;
  - le milieu d'un segment ;
  - le parallélisme ;
  - l'orthogonalité ;
  - les angles inscrits (non orientés)

#### Propriété

L'homothétie de rapport k multiplie :

- les longueurs par  $|k|$  ;
- les aires par  $k^2$  ;
- les volumes par  $|k^3|$ .

### 3.7 Construction d'images

#### Consigne 3.5 : Homothétie déterminé par son rapport, un point et son image

Soit A, A' et M trois points distincts du plan.

- En utilisant la propriété caractéristique, construire l'image M' du point M par l'homothétie de rapport  $\frac{3}{2}$  qui transforme A en A'.
- Déterminer et construire le centre de cette homothétie.

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

Soit ABCD un parallélogramme de centre O, B' le symétrique de A par rapport à B et D' le symétrique de A par rapport à D.

- Déterminer l'homothétie h de rapport 2 qui transforme B en B'.
- Quelle est l'image de D par h ? Justifie.
- En déduire que les points B', C et D' sont alignés.

#### Exercice 2

Soit O et O' deux points du plan tels  $OO' = 6$  cm. Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  les cercles de centre O et O' puis de rayons 2 cm et 3 cm respectivement. Il existe deux homothéties  $h_1$  et  $h_2$  qui transforment C en C'.

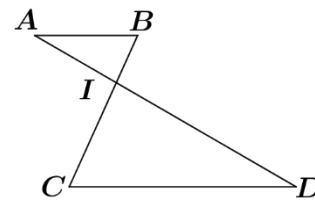
- Déterminer les rapports de ces homothéties. ( $h_1$  est celle de rapport positif).
- Montrer que leurs centres appartiennent à (OO').
- (a) Soit A' un point de  $\mathcal{C}'$ . Construire les points  $A_1$  et  $A_2$  de  $\mathcal{C}$  qui ont pour image A'.  
(b) En déduire la construction des centres de  $h_1$  et  $h_2$ .

#### Exercice 3

Soit O, A, B et C quatre points distincts du plan.

- Construire les points A', B' et C' tels que :  $\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$  ;  $\overrightarrow{OB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$  ;  $\overrightarrow{OC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ .
- Justifier chacune des affirmations suivantes
  - Les points O, A et A' sont alignés.
  - Les points O, B et B' sont alignés.
  - Les points O, C et C' sont alignés.
  - Les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.
  - $A'C' = \frac{1}{2}AC$

#### Exercice 4



Dans la figure ci-dessus,  $ID = 2IA$  et  $(AB) \parallel (CD)$ .

- Montrer que D et C sont les images respectives des points A et B par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
- Montrer que C et D sont les images respectives des points A et B par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

#### Exercice 5

Soit ABC un triangle. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport  $\frac{1}{3}$ . On note I = h(B) et J le point vérifiant  $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ .

Montre que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles et que  $IC = BJ$ .

#### Exercice 6

Soit A, B et C trois points non alignés du plan. A tout point M du plan associe le point M' défini par  $3\overrightarrow{AM'} - 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ . On définit ainsi une application f du plan dans lui-même.

1. Détermine les images de A, B et C par f.
2. Trouve un point invariant par f.
3. Démontre que f est une homothétie dont tu donneras le centre et le rapport.

### Séquence n°4 : Symétrie orthogonale – Symétrie centrale – Translation

#### Activité 3.4

#### 4.1 Utilisation de la symétrie orthogonale, de la symétrie centrale et de la translation dans les activités géométriques

##### 4.1.1 Symétrie orthogonale

##### Consigne 4.1

ABCD est un parallélogramme de centre I. A' et C' sont les symétriques respectifs des points A et C par rapport à (BD).

1. Fais une figure.
2. Démontre que A'BC'D est un parallélogramme.
3. Démontre que AA'CC' est un rectangle.

##### 4.1.2 Symétrie centrale

##### Consigne 4.2

On considère un carré ABCD de centre O tel que  $AB=4\text{cm}>0$ . E milieu de [DC], F est le symétrique de A par rapport à E et G le symétrique de B par rapport à E.

1. Fais une figure.
2. Montre que la droite (AC) est parallèle à (FD).
3. Montre que la droite (BD) est perpendiculaire à (FD).
4. Quelle est la nature du triangle BDF ?
5. Détermine l'image du carré ABCD par la symétrie centrale de centre E puis calcule son aire.

##### 4.1.3 Translation

##### Consigne 4.3

On considère un carré ABCD inscrit dans un cercle (C) de centre O. On pose  $t_{\overrightarrow{AB}}(C)=E$ .

1. Montre que C est le milieu de [DE].
2. Montre que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ .
3. Construis l'image (C') de (C) par la translation  $t_{\overrightarrow{AB}}$ .
4. Quelle est la nature du quadrilatère ABED ?

##### Consigne 4.4

On considère un triangle rectangle ABC tel que  $AB=4\text{cm}$ ,  $AC=3\text{cm}$  et  $BC=5\text{cm}$  inscrit dans un

cercle (C) de centre I. On pose  $t_{\overrightarrow{AI}}(C)=C'$  et  $t_{\overrightarrow{AI}}(B)=B'$ .

1. Détermine  $t_{\overrightarrow{AI}}(A)$ .
2. Montre que les droites (B'I) et (C'I) sont perpendiculaires.
3. Calcule les distances IC', IB' et B'C'.
4. Construis l'image (C') de (C) par la translation  $t_{\overrightarrow{AI}}$ .
5. Détermine le rayon de (C').

#### Propriété 1

1. La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires est la symétrie centrale dont le centre est le point de concours des deux axes.
2. La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation.
3. La composée de deux symétries centrales de centres distincts est une translation.

#### Propriété 2

Étant donné deux points distincts I et J du plan, si M et N sont des points du plan tels que  $S_I[S_J(M)]=N$  alors  $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{JI}$ .

#### Propriété 3

La composée de deux translations est une translation dont le vecteur est la somme des vecteurs des deux translations.

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

Soit ABC un triangle et M un point de (AB).

1. Construire les points D et N images respectives de B et M par la translation t de vecteur  $\overrightarrow{AC}$ .
2. Montrer que C, D et N sont alignés.

#### Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme et t une translation qui transforme (AB) en (CD) et (AD) en (BC).

Montre que t a pour vecteur  $\overrightarrow{AC}$ .

#### Exercice 3

Soient A et B deux points du plan. On considère l'application f du plan dans lui-même, qui a tout point M associe le point N tel que  $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}$ .

1. Exprime  $\overrightarrow{MN}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$ .
2. En déduire que f est une translation dont on précisera le vecteur.

#### Exercice 4

ABC est un triangle rectangle en B ; I est le milieu de [BC] ; J est le milieu de [AB] ; H est le projeté orthogonal de B sur (AC).

1. Démontre que (IJ) est la médiatrice de [BH].

2. En utilisant une symétrie orthogonale, démontre que  $(HI) \perp (HJ)$ .

### Exercice 5

ABC est un triangle et M un point du plan. On pose :  $M_1 = S_A(M)$ ,  $M_2 = S_B(M_1)$  et  $M' = S_C(M_2)$ .

1. Prouve que  $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{M_2M'} = 2\overrightarrow{CD}$ , D étant le milieu de  $[MM']$ .
2. Déduis-en que ABCD est un parallélogramme.
3. Que peux-tu dire alors à propos de la composée :  $S_C \circ S_B \circ S_A$  ?

## Séquence n°5 : Angles inscrits – relations métriques dans un triangle

### Activité 3.5

#### 5.1 Sinus d'un angle

##### Consigne 5.1

ABC est un triangle quelconque. On désigne par H le projeté orthogonal de C sur (AB).

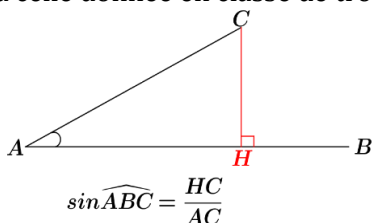
1. Fais une figure dans chacun des cas suivants :
  - (a) l'angle  $\widehat{BAC}$  est aigu.
  - (b) l'angle  $\widehat{BAC}$  est obtus.
2. Sachant que deux angles supplémentaires ont même sinus, exprime  $\sin \widehat{BAC}$  dans les deux cas.
3. Que peut-on conclure ?

##### Définition : Sinus d'un angle

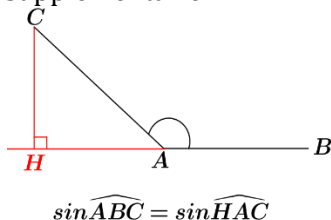
Soit  $\widehat{BAC}$  un angle, H le projeté orthogonal de C sur (AB), K est le projeté orthogonal de B sur (AC). On pose :  $\sin \widehat{BAC} = \frac{HC}{AC} = \frac{KB}{AB}$ .

##### Remarque

- Pour un angle aigu, cette définition correspond à celle donnée en classe de troisième.



- Le sinus d'un angle obtus est égal au sinus de son supplémentaire.



- Deux angles ayant même sinus ont même mesure ou supplémentaires.

##### Consigne 5.2

ABC est un triangle tel que  $AB=c$ ,  $AC=b$  et  $BC=a$ . On désigne par R le rayon du cercle circonscrit au

triangle ABC et  $\mathcal{A}$  l'aire de ce triangle. On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

1. Exprime  $\mathcal{A}$  en fonction de AB et HC.
2. Démonstre alors qu'on a les égalités suivantes :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bcsin\hat{A} = \frac{1}{2} acsin\hat{B} = \frac{1}{2} absin\hat{C}$$

3. Déduis-en que  $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$ .

##### Propriété

ABC est un triangle tel que  $AB=c$ ,  $AC=b$  et  $BC=a$ . R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et  $\mathcal{A}$  l'aire de ce triangle. On a :

1.  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bcsin\hat{A} = \frac{1}{2} acsin\hat{B} = \frac{1}{2} absin\hat{C}$ .
2.  $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$ . (*C'est le théorème des sinus*)

##### Consigne 5.3

ABC est un triangle tel que  $BC=8\text{cm}$ ,  $\text{mes}\hat{B} = \text{mes}\hat{C} = 50^\circ$ .

1. Calcule le périmètre du triangle ABC, son aire et le rayon de son cercle circonscrit.
2. Soit O le centre de ce cercle. Calcule  $\text{mes}\widehat{BOC}$ .

##### Consigne 5.4

ABC est un triangle tel que  $BC=5\text{cm}$ ,  $\text{mes}\hat{B} = 50^\circ$  et  $\text{mes}\hat{C} = 75^\circ$ .  
Calcule AB et AC.

#### 5.2 Radian

##### Définition

**Le radian** est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur un cercle un arc dont la longueur est égale au rayon du cercle.

##### Retenons

La mesure en radian d'un angle  $\widehat{AOB}$  est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1. On la notera  $\text{mes}\widehat{AOB}$ .

##### Conversion

Pour convertir des degrés en radians ou des radians en degrés, il suffit de savoir que :

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

On déduit immédiatement de cette égalité :

$$1 \text{ rad} = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ degré} \text{ et } 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$$

##### Consigne 5.5

1. Convertis en radian(s) :  $20^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$  et  $270^\circ$ .
2. Convertis en degrés :  $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$ ,  $\frac{2\pi}{5} \text{ rad}$ ,  $\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$  et  $\frac{\pi}{12} \text{ rad}$ .

### Longueur d'un arc de cercle

Dans un cercle de rayon  $r$ , la longueur  $l$  d'un arc intercepté par un angle au centre de mesure  $\theta$  rad, vérifie :  $l = r\theta$ .

#### Consigne 5.6

1. Calcule la longueur d'un arc de cercle de rayon 3 intercepté par un angle au centre mesurant  $\frac{2\pi}{3}$  rad.
2. Dans un cercle, un angle au centre de mesure  $\frac{5\pi}{6}$  rad intercepte un arc de longueur 6. Détermine le rayon du cercle.
3. Dans un cercle de rayon 4, détermine la mesure en radian(s) puis en degrés de l'angle au centre interceptant un arc de longueur  $\frac{3}{2}$ .

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

A, B et C sont trois points distincts d'un cercle  $(C)$ .  $A'$  est le milieu de l'arc  $\widehat{BC}$ ,  $B'$  celui de  $\widehat{AC}$  et  $C'$  celui de  $\widehat{AB}$ .  
Démontre que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes.

#### Exercice 2

On donne un cercle  $(C)$  de centre O et A un point de  $(C)$ . Soit B un point du diamètre perpendiculaire à la droite  $(OA)$ . La droite  $(AB)$  coupe  $(C)$  au point C.

1. Prouve que  $mes\widehat{OBA} = \frac{1}{2}mes\widehat{AOC}$ .
2. La tangente à  $(C)$  en C coupe  $(OB)$  au point D. Prouve que le triangle CDB est isocèle.

#### Exercice 3

Un triangle ABC est tel que  $BC=5$ cm,  $mes\widehat{ABC} = mes\widehat{ACB} = 30^\circ$ .  
Calcule :

1. le périmètre du triangle ABC ;
2. l'aire du triangle ABC ;
3. le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

#### Exercice 4

ABC est un triangle tel que  $mes\widehat{ABC} = 60^\circ$  et  $mes\widehat{CAB} = 45^\circ$ .  $(C)$  est le cercle de centre O et de rayon  $R=1$ cm, circonscrit au triangle ABC. Détermine la longueur de chacun des côtés du triangle ABC.

#### Exercice 5

ABC est un triangle tel que  $mes\widehat{ABC} = 50^\circ$ ,  $mes\widehat{CAB} = 80^\circ$  et  $mes\widehat{ACB} = 50^\circ$ .  $\mathcal{A}$  est l'aire du triangle ABC tel que  $\mathcal{A} = 2$ cm<sup>2</sup>. Détermine la longueur de chacun des côtés du triangle ABC.

#### Exercice 6

Soit ABC un triangle isocèle de base  $[BC]$ . On pose  $a=BC$ ,  $b=CA=AB$ . Soit  $r$  le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC et  $R$  celui de son cercle circonscrit et  $\mathcal{A}$  son aire.

1. Démontre que si le triangle ABC est équilatéral, alors  $R = 2r$ .
2. On suppose que le triangle ABC est isocèle.
  - (a) Démontre que  $r = \frac{2\mathcal{A}}{a+2b}$ .
  - (b) Démontre que  $R = \frac{ab^2}{4\mathcal{A}}$ .
  - (c) Démontre que  $\cos\widehat{B} = \frac{a}{2b}$ .

### Séquence n°6 : Angles orientés – Trigonométrie

#### Activité 3.6

Afin d'étudier les configurations géométriques du plan de l'objet d'art, Sofiano considère le plan contenant les triangles ABE et BFA. Il pose  $BF=1$ ,  $BF < FA$  et  $BF < AB$ . Le cercle de centre F et de rayon BF coupe les demi-droites  $[BA]$  et  $[FA]$  en J et I. Il imagine un mobile au point I qui doit suivre le cercle pour le point J. Il pose  $\vec{u} = \vec{FB}$  et  $\vec{v} = \vec{FA}$ .

#### 6.1 Orientation du plan et angles orientés

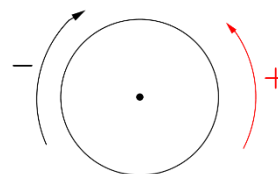
##### Consigne 6.1

1. Précise les sens de parcours possibles du mobile.
2. On suppose que le mobile parcourt le cercle dans le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre (**On dit que le cercle est orienté dans le sens direct ou sens positif**)  
Quel est la mesure en radian de l'angle  $\widehat{BFI}$  ?

**Information :** Le couple de vecteurs  $(\vec{u}; \vec{v})$  est appelé un angle orienté noté  $(\vec{u}; \vec{v})$  et dont une mesure est :  $+\frac{\pi}{3}$ .

#### Retenons : Orientation du plan

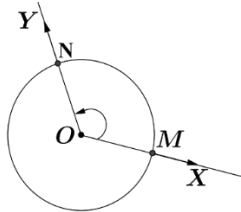
Sur un cercle donné, il existe deux sens de parcours. Orienter le plan, c'est choisir **un sens positif ou direct** ou **trigonométrique**, de parcours des cercles du plan. Par convention on choisit le sens trigonométrique (*le sens contraire des aiguilles d'une montre*) comme sens positif. L'autre sens (*sens des aiguilles d'une montre*) est dit **négatif** ou **rétrograde**.



#### Définition : Angles orientés

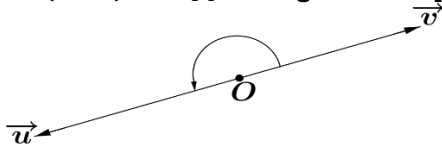
Soit  $(\vec{u}; \vec{v})$  un couple de vecteurs non nuls ; X, Y et O les points du plan tels que  $\vec{OX} = \vec{u}$  et  $\vec{OY} = \vec{v}$ . Soit

Met N les points d'intersection respectifs des demi-droites  $[OX)$  et  $[OY)$  avec un cercle de centre O.

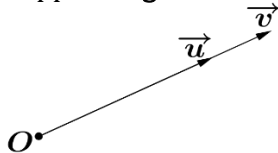


$\widehat{MON}$  et  $\widehat{NOM}$  désigne un même angle. L'arc  $\widehat{MN}$  peut être parcouru de M vers N ou de N vers M. L'ensemble des couples  $(\vec{u}; \vec{v})$  de vecteurs non colinéaires pour lesquels l'arc  $\widehat{MN}$  garde la même mesure et est parcouru dans le même sens de M vers N est appelé **angle orienté** noté  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraire, alors  $(\vec{u}; \vec{v})$  est appelé **angle orienté plat** ;



- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens, alors  $(\vec{u}; \vec{v})$  est appelé **angle orienté nul**.



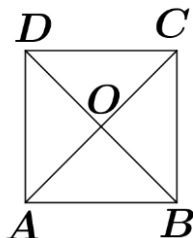
### Remarque

Le couple  $(\vec{OM}; \vec{ON})$  est un représentant de l'angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

- Si le déplacement se fait de M vers N (le sens contraire des aiguilles d'une montre), on dit que c'est un déplacement de sens direct ou positif ou trigonométrique. Dans le cas contraire, on parle de déplacement de sens indirect ou négatif ou rétrograde.
- Les angles  $(\vec{u}; \vec{v})$  et  $(\vec{v}; \vec{u})$  sont dits opposés.

### Consigne 6.2

On considère le carré ABCD suivant :



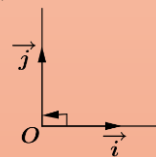
1. Quel est le sens des triplets suivants : (A, B, C), (A,D,C), (D, O, C) et (C, B, D).
2. Trouver le sens des angles orientés suivants :  $(\vec{OA}; \vec{OB})$  ;  $(\vec{DC}; \vec{DB})$  ;  $(\vec{CB}; \vec{DC})$  et  $(\vec{AC}; \vec{OB})$ .
3. Donne la mesure de chacun des angles orientés suivants :  $(\vec{OA}; \vec{OB})$  ;  $(\vec{DC}; \vec{DB})$  ;  $(\vec{CB}; \vec{DC})$  et  $(\vec{DB}; \vec{DC})$ .

## 6.1.1 Repère orthonormé direct

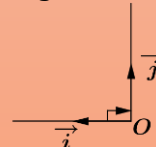
### Définition

Soit le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- Le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  est direct si l'angle  $(\vec{i}; \vec{j})$  est l'angle droit direct.

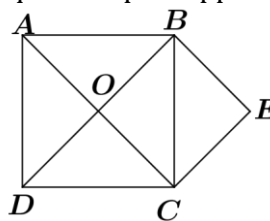


- Le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  est indirect si l'angle  $(\vec{i}; \vec{j})$  est l'angle droit indirect.



### Consigne 6.3

On considère le carré ABCD ci-dessous, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. E le symétrique de O par rapport à (BC).

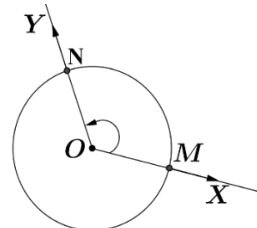


Quel est la nature des repères suivants :  $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ ,  $(O, \vec{OC}, \vec{OB})$ ,  $(A, \vec{AD}, \vec{AB})$ ,  $(O, \vec{OD}, \vec{OC})$ ,  $(C, O, E)$  et  $(E, B, C)$  ?

## 6.1.2 Mesure principale d'un angle orienté

### Définition

$(\vec{OX}; \vec{OY})$  est un angle orienté. M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites  $[OX)$  et  $[OY)$  avec un cercle de centre O.



La mesure principale en radian de l'angle orienté  $(\vec{OX}; \vec{OY})$ , noté  $mes(\vec{OX}; \vec{OY})$  est définie par :

- Si  $(\vec{OX}; \vec{OY})$  est un angle nul alors  $mes(\vec{OX}; \vec{OY})=0$  ;
- Si  $(\vec{OX}; \vec{OY})$  est un angle plat alors  $mes(\vec{OX}; \vec{OY})=\pi$  ;
- Si  $(\vec{OX}; \vec{OY})$  n'est ni nul ni plat, alors on a :  
 ✓  $mes(\vec{OX}; \vec{OY})=mes(\vec{OX}; \vec{OY})$  lorsque le sens de déplacement de M vers N sur l'arc  $\widehat{MN}$  est le sens direct ;

- ✓  $mes(\widehat{\overrightarrow{OX}; \overrightarrow{OY}}) = -mes(\overrightarrow{OX}; \overrightarrow{OY})$  lorsque le sens de déplacement de M vers N sur l'arc  $\widehat{MN}$  est le sens indirect.

### Définition

On appelle mesure principale d'un angle orienté  $\alpha$  le nombre réel  $\beta$  défini par :  $\alpha = \beta + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $\beta \in ]-\pi; \pi]$ .

### Méthode de détermination de la mesure principale d'un angle orienté

Déterminer la mesure principale  $\beta$  d'un angle orienté dont une mesure  $\alpha$  est connue, consiste à écrire  $\beta = \alpha + 2k\pi$  où  $-\pi < \beta \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Cette écriture peut être immédiate.
- Sinon, on détermine tout d'abord  $k$  à l'aide des inégalités  $-\pi < \alpha + 2k\pi \leq \pi$  ;
- Puis l'on détermine  $\beta$  à l'aide de l'égalité  $\beta = \alpha + 2k\pi$ .

### Remarque

- La mesure principale de l'angle plat est  $\pi$  et non  $-\pi$ .
- L'angle droit direct a pour mesure principale  $\frac{\pi}{2}$  et l'angle droit indirect a pour mesure principale  $-\frac{\pi}{2}$ .
- Soit  $a$  un nombre entier relatif non nul.
  - ✓ Si  $|a|$  est pair alors la mesure principale d'un angle de mesure  $a\pi$  est 0.
  - ✓ Si  $|a|$  est impair alors la mesure principale d'un angle de mesure  $a\pi$  est  $\pi$ .

### Consigne 6.4

Détermine la mesure principale de chacun des angles suivants :  $-\frac{\pi}{3}$  ;  $121 - \frac{119\pi}{4}$  ;  $\frac{126\pi}{5}$  et  $-\frac{141\pi}{4}$ .

### Définition

Deux angles orientés sont égaux si leurs mesures principales sont égales.

### Consigne 6.5

Vérifie si les angles orientés de mesures  $\frac{814\pi}{13}$  et  $\frac{1945\pi}{13}$ .

### Propriétés

1. Pour toute demi-droite  $[OX)$  du plan et pour tout nombre réel  $\alpha$  élément de  $]-\pi; \pi]$ , il existe une unique demi-droite  $[OY)$  telle que :  $mes(\widehat{\overrightarrow{OX}; \overrightarrow{OY}}) = \alpha$ .
2. Pour tous vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , on a :  $mes(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = -mes(\widehat{\vec{v}; \vec{u}})$

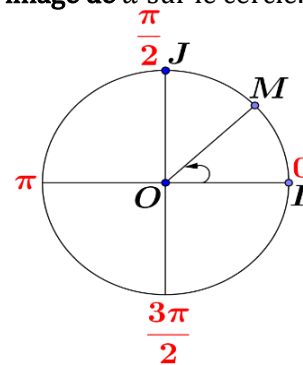
## 6.2 Trigonométrie

### 6.2.1 Le cercle trigonométrique

### Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Le **cercle trigonométrique**, est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 sur lequel on a choisi le sens direct.

A tout point  $M$  du cercle trigonométrique, on associe le nombre réel  $\alpha$ , mesure principale de l'angle orienté  $(\vec{OI}; \vec{OM})$ . Réciproquement, à tout nombre réel  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$  est associé un point  $M$  du cercle trigonométrique tel que  $\alpha$  soit la mesure principale de l'angle orienté  $(\vec{OI}; \vec{OM})$ . Le point  $M$  est appelé **image de  $\alpha$**  sur le cercle.



### Consigne 6.6

Placer sur le cercle trigonométrique les images des nombres suivants :  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $-\frac{\pi}{4}$  et  $-\frac{2\pi}{3}$ .

### Consigne 6.7

$M$  est l'image sur le cercle trigonométrique de  $\frac{1903\pi}{4}$ .

Détermine la mesure principale de  $(\vec{i}; \vec{OM})$  et place le point  $M$ .

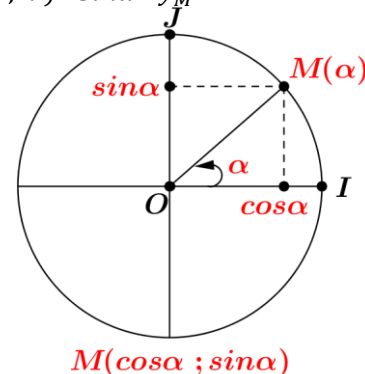
## 6.2.2 Lignes trigonométriques

### 6.2.2.1 Sinus et cosinus d'un angle orienté

### Définition

Soit  $(\vec{u}; \vec{v})$  un angle orienté de mesure principale  $\alpha$  et  $M$  l'image de  $\alpha$  sur le cercle trigonométrique. On a :

- Le cosinus de  $(\vec{u}; \vec{v})$  ou de  $\alpha$  est l'abscisse de  $M$  :  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos\alpha = x_M$ .
- Le sinus de  $(\vec{u}; \vec{v})$  ou de  $\alpha$  est l'ordonnée de  $M$  :  $\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \sin\alpha = y_M$ .

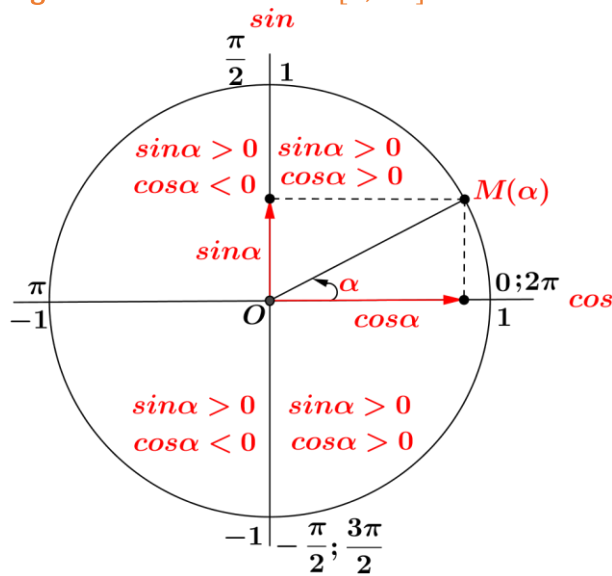


### Propriété

Pour tout réel  $x$ , on a :

- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

**Signe de  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$  sur  $[0; 2\pi]$**



**Consigne 6.8**

1. Calcule  $\cos x$  sachant que  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ .
2. Démontre que  $\sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x = 1$ .

**6.2.2.2 Angles orientés**

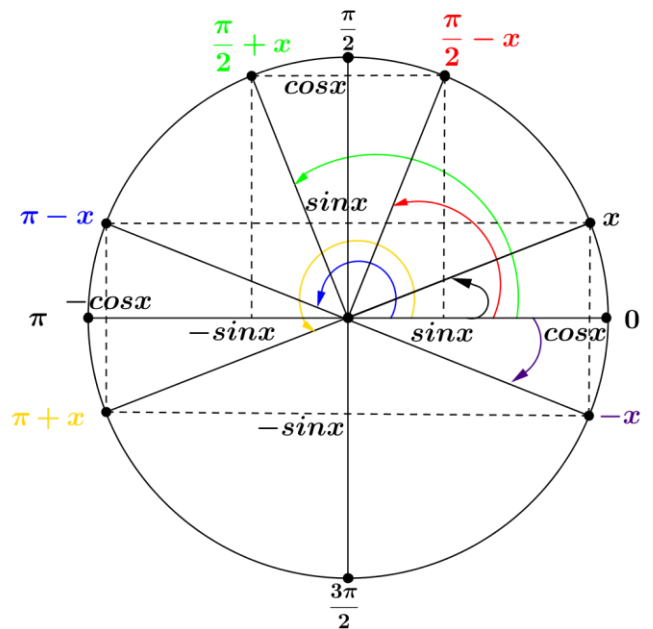
**Définition**

Soit  $\hat{\alpha}$  un angle orienté de mesure  $\alpha$ .  
Les angles orientés de mesure  $-\alpha, \pi - \alpha, \pi + \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha$  sont dit associés à  $\hat{\alpha}$ .

**Propriété**

Pour tout réel  $\alpha$ , on a :

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$	
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$	



**Consigne 6.9**

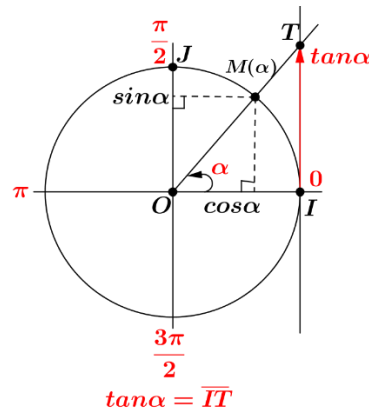
Démontre que :  $\cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{4\pi}{10} + \cos \frac{6\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10} = 0$  et  $\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5} = 0$ .

**6.2.2.3 Tangente d'un angle orienté**

**Définition**

Soit  $(\vec{u}; \vec{v})$  un angle orienté non droit de mesure principale  $(\alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha \neq -\frac{\pi}{2})$ . La tangente de l'angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$  ou de  $\alpha$  est le nombre réel noté  $\tan(\vec{u}; \vec{v})$  défini par :

$$\tan(\vec{u}; \vec{v}) = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



**Remarque**

- $\cos \alpha, \sin \alpha$  et  $\tan \alpha$  sont appelés lignes trigonométriques de l'angle orienté de mesure  $\alpha$ . Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques des angles remarquables

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

- $\tan$  n'est pas définie pour les nombres réels  $\alpha$  de la forme :  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Consigne 6.10

Soit un nombre réel  $x \in ]-\pi; \pi]$  tel que  $x \neq \frac{\pi}{2}$  et  $x \neq -\frac{\pi}{2}$ .

Démontre que :  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

#### Propriété

Pour tout nombre réel  $x \in ]-\pi; \pi]$  tel que  $x \neq \frac{\pi}{2}$  et  $x \neq -\frac{\pi}{2}$ , on a :  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

1. Pour tout nombre réel  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \pi]$ , mets sous la forme la plus simple possible, les expressions suivantes :

$$A = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(9\pi - x).$$

$$B = \cos(-x) + \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x).$$

$$C = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$D = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cotan(-x).$$

$$E = \cotan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \tan(\pi - x) + \cos(-x) + \sin(-x).$$

2. Sachant que  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ , calcule  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ,  $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ ,  $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$  et  $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$ .

3.  $x$  est un réel tel que  $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$  et  $\sin x = \frac{1}{3}$ . Calcule  $\cos x$ .

#### Exercice 2

1.  $x$  étant la mesure principale d'un angle orienté, démontre les identités suivantes :

$$(a) \sin^4 x - \cos^4 x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 3$$

$$(b) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

$$(c) (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x.$$

$$(d) (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$$

$$(e) \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$(f) \sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = 1.$$

2.  $x$  étant la mesure principale d'un angle orienté non droit, démontre que :

$$\tan^x x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x.$$

#### Exercice 3

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels. On rappelle que :

- Si  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  alors  $\sin \alpha = \cos \beta$  ;
- $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

$$1. \text{ Démontre que : } 16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = 1$$

2.  $x$  étant un nombre réel distinct de  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Soit  $A = 16\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cos(8x)$ .

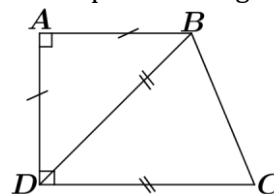
(a) En calculant  $A \times \sin x$ , prouve que  $A = \frac{\sin 16x}{\sin x}$ .

(b) Déduis-en la valeur exacte du nombre :

$$B = \cos\frac{\pi}{15} \cos\frac{2\pi}{15} \cos\frac{4\pi}{15} \cos\frac{8\pi}{15}.$$

#### Exercice 4

On considère le trapèze rectangle ABCD ci-dessous.



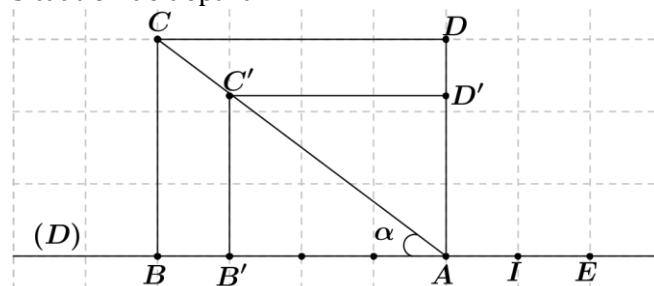
Calcule les mesures principales des angles :

$(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$  ;  $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB})$  ;  $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BC})$  et  $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{DB})$ .

### Séquence n°7 : Produit scalaire

#### Activité 3.7

On considère le modèle de décoration de la situation de départ.



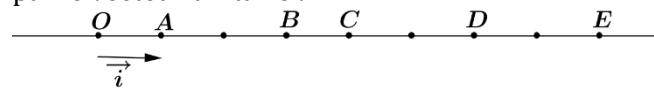
#### 7.1 Mesure algébrique

##### Définition

Soit (D) une droite orientée par l'un de ces vecteurs directeurs unitaires  $\vec{i}$ . A et B sont deux points de (D). On appelle **mesure algébrique du couple (A, B) relativement à  $\vec{i}$** , l'unique nombre réel noté  $\overline{AB}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \times \vec{i}$ .

#### Consigne 7.1

On considère la droite graduée ci-dessous dirigée par le vecteur unitaire  $\vec{i}$ .



Calcule relativement à  $\vec{i}$ , les mesures algébriques suivantes :  $\overline{OA}$  ;  $\overline{CA}$  ;  $\overline{CE}$  et  $\overline{BA}$ .

#### Propriété

Soit (D) une droite orientée par l'un de ces vecteurs directeurs unitaires  $\vec{i}$ . A, B et C sont des points de (D),  $\beta$  est un nombre réel.

- $|\overline{AB}| = AB$
- $\overline{AB} = -\overline{BA}$
- Lorsque les points A et B sont distincts :

- ✓  $\overrightarrow{AB} = AB$  si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{i}$  sont de même sens.
- ✓  $\overrightarrow{AB} = -AB$  si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{i}$  sont de sens contraire.
- $\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow A$  et  $B$  sont confondus.
- $\overrightarrow{AC} = \beta \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \beta \overrightarrow{AB}$ .
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  (**Relation de Chasles**)

## 7.2 Définition du produit scalaire par la projection orthogonale

### Consigne 7.2

La droite (D) est munie du repère (A, I).

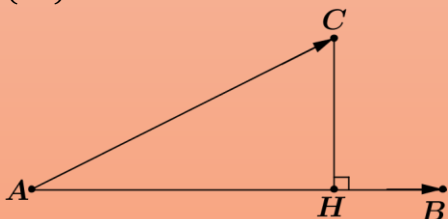
1. Donne le projeté orthogonal de C' sur (D).
2. Calcule  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$

Information : Le produit  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$  où B' est le projeté orthogonal de C' sur (D), est appelé **produit scalaire** du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  par le vecteur  $\overrightarrow{AC'}$ .

#### Définition

A, B et C sont trois points du plan. On appelle **produit scalaire du vecteur  $\overrightarrow{AB}$**  par le vecteur  $\overrightarrow{AC}$ , le nombre réel noté  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ , lu  $\overrightarrow{AB}$  scalaire  $\overrightarrow{AC}$  défini par :

1. Si  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$  alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .
2. Si  $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$  alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$  où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



#### Remarque

1. Si l'angle  $\widehat{BAC}$  est aigu,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$  ;
2. Si l'angle  $\widehat{BAC}$  est obtus,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$  ;
3. Si l'angle  $\widehat{BAC}$  est droit,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

#### Retenons

Plus généralement, si A, B, C et D sont quatre points du plan, tels que A et B sont distincts, alors on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{HH'}$  où H et H' sont les projetés orthogonaux respectifs des points C et D sur la droite (AB).

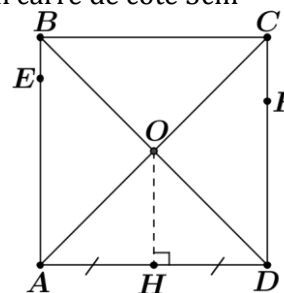
### Consigne 7.3

ABC est un triangle isocèle en A tel que AB=3 et BC=4. O est le milieu du segment [BC].

Calcule  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

### Consigne 7.4

ABCD est un carré de côté 3cm



Calcule  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$  ;  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO}$  ;  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$  ;  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$ .

## 7.3 Propriétés du produit scalaire

### Consigne 7.4

1. (a) Exprime AB en fonction de AC et  $\cos \alpha$ .  
(b) Sachant que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}$ , déduis-en que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .
2. Justifie que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
3. Justifie que pour tout nombre réel  $\beta$ , on a :  
 $(\beta \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \beta (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$ .

#### Propriété

1. A, B et C étant trois points du plan.

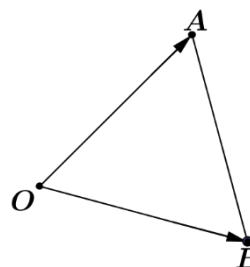
- Si  $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$  et  $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  alors  
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .
- Si A=B ou si A=C alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

L'expression  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  est appelée **expression trigonométrique du produit scalaire**.

2. Pour tout couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  de vecteurs,  
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .
3. Pour tout couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  de vecteurs et pour tout nombre réel  $\beta$ ,  $(\beta \vec{u}) \cdot \vec{v} = \beta (\vec{u} \cdot \vec{v})$ .
4. Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$ , on a :  
 $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .

### Consigne 7.5

Sur la figure ci-dessous, le triangle OAB est équilatéral et OA=2.



Calcule  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$

#### Définition : Carré scalaire

On appelle carré scalaire d'un vecteur  $\vec{u}$  le nombre réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$ .

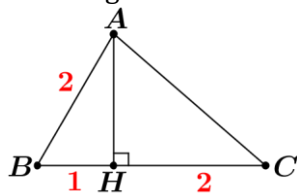
### Consigne 7.6

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.

- (a) Calcule  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ .  
(b) Dédus-en que  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ .
- Démontre que  $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ .

### Consigne 7.7

On considère la figure ci-dessous :



Calcule les produits scalaires suivants :

$$(\vec{AB} + \vec{AH}) \cdot \vec{AB} \text{ et } (\vec{AH} + \vec{HC}) \cdot \vec{AB}.$$

### 7.4 Orthogonalité – base orthogonale – base orthonormée

#### Définition

- La **norme d'un vecteur**  $\vec{u}$  est le réel noté  $\|\vec{u}\|$  défini par  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ .
- On appelle **vecteur unitaire** tout vecteur de norme égale à 1.

Pour déterminer un vecteur unitaire  $\vec{i}$  à partir d'un vecteur  $\vec{u}$  non nul, on peut utiliser l'une des formules suivantes :

$$\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$$

ou

$$\vec{i} = \frac{-\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$$

#### Remarque

On peut également définir le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

#### Définition

- Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire est égal à zéro.  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux  $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- Deux droites sont perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

#### Remarque

Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

#### Définition : Base orthogonale – Base orthonormée

- Une base du plan est dite **orthogonale** lorsque les vecteurs de la base sont orthogonaux.
- Une base du plan est dite **orthonormée** lorsqu'elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires.

### Expression analytique du produit scalaire

Soit  $(\vec{i}; \vec{j})$  une base orthonormée,  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  deux vecteurs de cette base. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Notons donc que :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

### Consigne 7.8

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ,  $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

Calcule  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $\vec{w} \cdot \vec{v}$ .

### 7.5 Applications du produit scalaire au triangle

#### Consigne 7.9 : Théorème de la médiane

ABC est un triangle quelconque et I le milieu de [BC].

- (a) En utilisant la relation de Chasles, démontre que :  $\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 = 2AI^2 + IB^2 + IC^2$ .  
(b) Exprime  $IB^2$  et  $IC^2$  en fonction de BC.  
(c) Dédus-en que :  $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$ .
- Démontre que  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$ .

#### Théorème de la médiane

ABC est un triangle quelconque et I le milieu de [BC], on :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

et

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$$

#### Consigne 7.10 : Application

ABC est un triangle tel que  $AB=6$ ,  $AC=8$  et  $BC=12$ . Calcule AI où I est le milieu de [BC].

#### Consigne 7.11 : Théorème d'AL-KASHI

ABC étant un triangle quelconque avec  $AB=c$ ,  $AC=b$  et  $BC=a$ .

Démontre que  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \widehat{BAC}$

#### Théorème d'AL-KASHI

ABC étant un triangle quelconque avec  $AB=c$ ,  $AC=b$  et  $BC=a$ , on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \hat{C}$$

#### Consigne 7.12 : Application

ABC est un triangle tel que  $AC=9$ ,  $AB=5$  et  $mes \hat{A} = \frac{\pi}{3}$ . Calcule BC.

## Evaluations formatives

## Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que  $AB=3$  et  $BC=4$ . Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC), K le projeté orthogonal de H sur (AC).

- Calculer  $AH$ .
- Calculer  $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$  de deux manières différentes.
- En déduire la valeur de  $AK$ .
- Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

## Exercice 2

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :  $AB=6\text{cm}$  ;  $AC=8\text{cm}$  ; H projeté orthogonal de A sur (BC).

- Calcule  $AH$ ,  $BH$  et  $CH$ .
- Calcule  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ .
- Que vaut  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et pourquoi ?

## Exercice 3

On considère un triangles ABC tel que  $AB=8\text{cm}$  ;  $AC=7\text{cm}$  et  $\widehat{ABC}=120^\circ$ .

- Calcule BC.
- Calcule les longueurs des médianes de ce triangle.

## Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{k})$ . On considère les points  $A(2 ; -3)$  et  $B(2 ; 1)$ .

- Détermine une équation de l'ensemble (C) des points M du plan tels que :  $AM^2 + BM^2 = 40$ .
- Soit I le milieu du segment [AB]. Démontre que pour tout point M du plan, on a :  $AM^2 + BM^2 = 2MI^2 + 8$ .
- Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 5$ .

## Exercice 5

Soit ABC un triangle tel que :  $BC=6\text{cm}$  ;  $AC=5\text{cm}$  et  $AB=3\text{cm}$ . H est le pied de la hauteur issue de A et K le pied de la hauteur issue de C.

- Calcule  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
- (a) Exprime  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  en fonction de  $BH$ .  
(b) Déduis-en  $BH$ .
- (a) Démontre que  $BK \times BA = BH \times BC$ .  
(b) Déduis-en  $BK$ .
- Détermine une mesure de l'angle  $\widehat{BCA}$ .
- Calcule l'aire du triangle ABC.

## Exercice 6

Soit ABCD un carré de centre O et de côté  $a$ . Calcule en fonction de  $a$  les produit scalaire suivants :

- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

2.  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

3.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}$ .

4.  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CO}$ .

5.  $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$ .

6.  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA}$ .

## Exercice 7

Dans les cas suivants :

- Dire si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux :  
(a)  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  (b)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- Dire si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires :  
(a)  $A \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $D \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  
(b)  $A \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $D \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Déterminer la ou les valeurs de  $a$  pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient orthogonaux :  
(a)  $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ .  
(b)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ a+1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a+5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .  
(c)  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ -3+a \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ .

## Exercice 8

Soit (C) un cercle de centre O et A, B et C trois points distincts de C. On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), D l'intersection entre la hauteur (AH) et le cercle C et E le point du cercle diamétralement opposé à A.

- Fais une figure.
- Montre que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH}$ .

## Exercice 9

Soit ABCD un carré, I le milieu de [AB], J le milieu de [AD] et K le milieu de [ID].

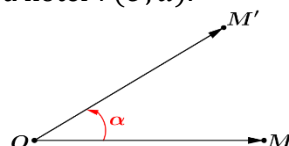
- Fais une figure.
- Montrer que les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

## Séquence n°8 : Rotation

## Activité 3.8

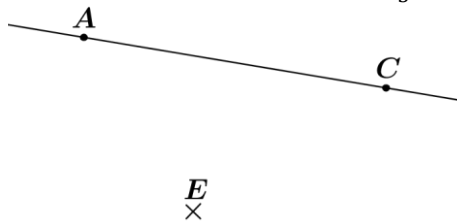
## Définition

O est un point du plan orienté,  $\alpha$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $] -\pi ; \pi ]$ .  
La rotation de centre O et d'angle  $\alpha$  est l'application du plan dans lui-même qui laisse O invariant et qui, à tout point M distinct de O, associe le point M' défini par :  $OM = OM'$  et  $\widehat{MOM'} = \alpha$ . On pourra noter  $r(O, \alpha)$ .



### Consigne 8.1

Construis l'image de chacun des points  $A$  et  $C$  par la rotation de centre  $E$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .



### Remarque

Soit  $r(O, \alpha)$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ .

1. Si  $\alpha=0$  alors  $r(O, \alpha)$  est l'identité du plan.
2. Si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  alors  $r(O, \alpha)$  est appelée un quart de tour direct.
3. Si  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  alors  $r(O, \alpha)$  est appelée un quart de tour indirect.
4. Si  $\alpha = \pi$  alors  $r(O, \alpha)$  est appelée la symétrie centrale de centre  $O$  ou demi-tour de centre  $O$ .
5. L'image du point  $O$  par une rotation de centre  $O$  est le point  $O$  lui-même. On dit que le point  $O$  est **invariant**.

### Consigne 8.2

( $D$ ) et ( $D'$ ) sont deux droites sécantes en  $O$ , de **vecteurs** directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $mes(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ . Soit  $M, M_1$  et  $M_2$  des points du plan tels que :  $S_D(M) = M_1$  et  $S_{D'}(M_1) = M_2$ .

1. Fais une figure.
2. Démontre que  $OM = OM_2$  et vérifie que  $mes(\vec{OM}, \vec{OM_2}) = mes(\vec{u}, \vec{v})$ .
3. Déduis-en que  $M_2$  est l'image de  $M$  par une transformation du plan à préciser.

### Propriété

1. ( $D$ ) et ( $D'$ ) étant deux droites sécantes en  $O$ ,  $S_D$  et  $S_{D'}$  les symétries orthogonales d'axes respectifs ( $D$ ) et ( $D'$ ), l'application  $S_{D'} \circ S_D$  est une rotation de centre  $O$ .
2.  $r$  étant une rotation de centre  $O$ , on peut trouver deux droites ( $D$ ) et ( $D'$ ) sécantes en  $O$  telles que la rotation  $r$  soit l'application  $S_{D'} \circ S_D$ .

### Consigne 8.3 : Application

Soit ABCD un carré tel que  $mes(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$ .

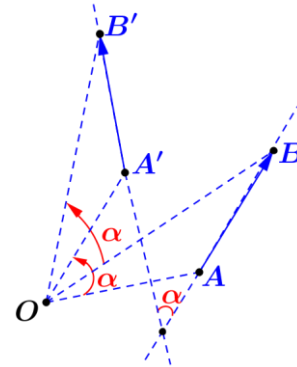
Définir le centre et l'angle des rotations :

1.  $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$  ;
2.  $S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$  ;
3.  $S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$ .

### Propriété

Soit  $r(O, \alpha)$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ ,  $A$  et  $B$  deux points distinct du plan d'images respectives

$A'$  et  $B'$ , on a :  $AB = A'B'$  et  $mes(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = \alpha$ .



### Propriété

L'image par une rotation :

1. d'une droite est une droite ;
2. d'une demi-droite est une demi-droite ;
3. d'un segment de droite est un segment de droite de même mesure ;
4. d'un cercle est un cercle de même rayon et de centre le transformé du centre.

### Propriété

1. Toute rotation transforme :
  - une droite en une droite ;
  - un segment en un segment de même mesure ;
  - une demi-droite en une demi-droite ;
  - un cercle en un cercle de même rayon ;
  - le milieu d'un segment en le milieu du segment image ;
  - deux droites parallèles en deux droites parallèles et deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.
2. Toute rotation conserve :
  - l'alignement des points ;
  - les angles orientés ;
  - les distances ;
  - les aires.

### Remarque

La rotation conserve aussi les angles géométriques (angles non orientés).

### Consigne 8.4 : Application

1. Soit ABC un triangle. Construire l'image  $A'B'C'$  de ABC par la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .
2. Soit  $O$  un point du plan et  $D$  une droite. Construire l'image de la droite  $D$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .
3. Soit ABC un triangle.
  - (a) Construire à l'extérieur de ce triangle les points  $E$  et  $F$  tels que  $ABE$  et  $ACF$  soient

deux triangles équilatéraux.

- (b) Montrer que  $EC = BF$ . (On pourra considérer la rotation directe de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ ).

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (C) et tel que C est l'image de B par la rotation directe  $r$  de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

1. Montre que  $mes\widehat{AMB} = \frac{2\pi}{3}$ .
2. Soient M un point de (C) situé sur l'arc  $\widehat{AB}$  qui ne contient pas le point C et  $I = r(M)$ .
  - (a) Montrer que  $mes\widehat{AIC} = \frac{2\pi}{3}$ .
  - (b) Montrer que  $I \in [CM]$ .
  - (c) Montrer que  $MA + MB = MC$ .

#### Exercice 2

Soient ABCD est un carré tel que D est l'image de B par le quart de tour direct de centre A et M un point de la droite (BC). La perpendiculaire en A à (AM) coupe (CD) en  $M'$ . On désigne par  $r$  le quart de tour direct de centre A.

- (a) Déterminer les images des droites (AM) et (BC) par  $r$ .
- (b) Quelle est la nature du triangle  $AMM'$  ?

#### Exercice 3

Soit ABC un triangle équilatéral tel que :  $mes(\widehat{AB}, \widehat{AC}) = \frac{\pi}{3}$ , G son centre de gravité et  $A', B'$  et  $C'$  les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

1. Quels sont les points :  $r_{(B, \frac{\pi}{3})}(C)$ ,  $r_{(A, \frac{\pi}{3})}(B)$  et  $r_{(C, \frac{\pi}{3})}(A)$  ?
2. Détermine le centre et l'angle de la rotation qui transforme A en B, B en C et C en A.
3. (a) Construis les points P, Q et R tels que :  $P = r_{(B, \frac{\pi}{3})}(C)$ ,  $Q = r_{(C, \frac{\pi}{3})}(B)$  et  $R = r_{(A, \frac{\pi}{3})}(A)$ .  
(b) Démontre que le triangle PQR est équilatéral.

#### Exercice 4

Soit ABC un triangle équilatéral direct, (C) son cercle circonscrit, M un point de l'arc  $\widehat{AC}$ , I le point du segment [MB] tel que  $MI = MA$ .

1. Démontre que le triangle AMI est équilatéral.
2. Détermine l'image de I par la rotation de centre A transformant B en C.
3. Déduis-en que :  $MA + MC = MB$ .

#### Exercice 5

Soit un triangle ABC et H son orthocentre. On note  $r$  le quart de tour direct de centre A et  $r'$  le quart de

tour indirecte de centre A.

1. Construis  $B', C'$  et D tels que  $B' = r(B)$ ,  $C' = r'(C)$  et  $D = r(C)$ .
2. Démontre que (BC) est perpendiculaire à  $(B'D)$ .
3. Quelle est l'image de la droite (AH) par l'homothétie  $h$  de centre  $C'$  et de rapport 2 ?
4. Démontre que (AH) est une médiane du triangle  $AB'C'$ .

#### Exercice 6

Soit OAB un triangle rectangle en O et isocèle tel que  $OA = 5\text{cm}$ . La rotation  $r$  de centre O qui transforme A en B est telle que  $r(B) = C$  et  $r(C) = D$ .

1. Démontre que O est le milieu des segments [AC] et [BD].
2. Calcule AB puis déduis-en BC.
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

### Séquence n°9 : Cercle dans le plan

#### Activité 3.9

#### 9.1 Equation cartésienne d'un cercle dans le plan muni d'un repère orthonormé

#### Consigne 9.1

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Soit (C) le cercle de centre  $A(x_0, y_0)$  et rayon  $r$  ( $r > 0$ ).

1. Écris une égalité traduisant l'appartenance d'un point  $M(x, y)$  au cercle (C).
2. Déduis alors une relation liant  $x, y, x_0, y_0$  et  $r$ .  
*La relation ainsi établie est appelée équation cartésienne du cercle (C).*

#### Equation cartésienne d'un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  $I(a; b)$  est un point du plan. (C) est un cercle de centre I et de rayon  $r$  ( $r > 0$ ).

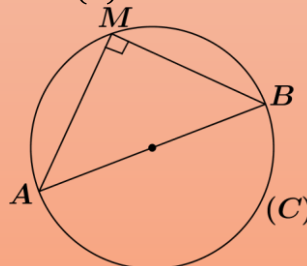
Une équation cartésienne de (C) est :

$$(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

#### Cercle défini par un de ses diamètres

Soit A et B deux points distincts du plan. (C) est le cercle de diamètre [AB]. Pour tout point M du plan, on :

$$M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

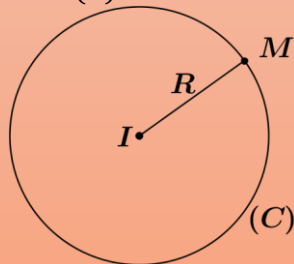


### Cercle défini par son centre et son rayon

Soit  $I$  un point du plan,  $R$  un nombre réel avec  $R > 0$ ,  $(C)$  le cercle de centre  $I$  et de rayon  $R$ .

Pour tout point  $M$  du plan, on :

$$M \in (C) \Leftrightarrow IM=R$$



#### Consigne 9.2

On donne un plan muni d'un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ , les points  $A(-1; 4)$  et  $B(3; 1)$ .

Détermine une équation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$ .

#### Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

1. L'ensemble des points  $M$  du plan tel que  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  avec  $a, b$  et  $r$  sont des nombres réels et  $r > 0$ , est le cercle de centre de coordonnées  $(a, b)$  et de rayon  $r$ .
2. L'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient la relation :  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  avec  $a, b$  et  $c$  étant des nombres réels est soit **vide**, soit **un singleton**, soit **un cercle**.

#### Consigne 9.3

On donne dans le plan muni d'un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ , les points  $A(-1; 2)$  et  $B(3; 1)$ .

1. Détermine l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan vérifiant :
  - (a)  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ .
  - (b)  $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 15 = 0$ .
  - (c)  $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y + 5 = 0$
2. Détermine et construis l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 2$ .

### 9.2 Positions relatives de droites et de cercles

#### Consigne 9.4

$(D)$  est une droite du plan et  $(C)$  un cercle de centre  $I$  et de rayon  $r$ . Soit  $d = d(I, (D))$ .

1. Construis dans chacun des cas suivants la droite  $(D)$  et le cercle  $(C)$  :
  - (a)  $d < r$ .
  - (b)  $d = r$ .
  - (c)  $d > r$ .
2. Dédus-en la position relative de  $(D)$  et  $(C)$  dans chaque cas.

#### Propriété

$I$  étant un point du plan,  $(C)$  le cercle de centre  $I$  et de rayon  $r$ ,  $(D)$  une droite et  $d$  la distance de  $I$  à  $(D)$ .

1. Si  $d < r$  alors  $(D)$  et  $(C)$  se coupent en **deux points**.
2. Si  $d = r$  alors  $(D)$  et  $(C)$  ont **un et un seul point en commun**.
3. Si  $d > r$  alors  $(D)$  et  $(C)$  n'ont **aucun point commun**.

#### Consigne 9.5

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ . On donne  $A(3 ; 1)$ ,  $B(-1 ; -3)$  et  $C(1 ; -1)$ . Soit  $(D_1)$  la droite de repère  $(C, \vec{u})$ , la droite  $(D_2) : 2x + y - 5 = 0$  et la droite  $(D_3) : 5x - y + 11 = 0$ . Soit  $(C)$  le cercle de diamètre  $[AB]$ .

Etudie la position relative de :  $(D_1)$  et  $(C)$ ,  $(D_2)$  et  $(C)$ ,  $(D_3)$  et  $(C)$ .

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

1. On donne les points  $A\left(\frac{-1}{6}\right)$ ,  $B\left(\frac{3}{2}\right)$  et  $C\left(\frac{1}{-2}\right)$ .
  - (a) Démontre que les points  $A, B$  et  $C$  sont non alignés.
  - (b) Détermine les coordonnées du centre  $I$  du cercle  $(C)$  circonscrit au triangle  $ABC$ .
  - (c) Détermine une équation cartésienne de  $(C)$ .
2. On donne les points  $E\left(\frac{3}{-1}\right)$  et  $F\left(\frac{-1}{-3}\right)$ . Soit  $(C')$  le cercle de diamètre  $[EF]$ .
  - (a) Détermine une équation cartésienne de  $(C')$ .
  - (b) Détermine les points d'intersection du cercle  $(C')$  avec la droite  $(D)$  passant par  $G\left(\frac{1}{-1}\right)$  et dirigée par  $\vec{u}\left(\frac{1}{-3}\right)$ .

#### Exercice 2

Dans le plan muni du repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ , un cercle  $(\mathcal{C})$  a pour centre  $A\left(\frac{3}{-2}\right)$  et pour rayon  $r = 3$ .

1. Détermine une équation de  $(\mathcal{C})$ .
2. Calcule la distance de  $A$  à la droite  $(D)$  d'équation  $x + y - 4 = 0$ .
3. (a) Précise la position relative de la droite  $(D)$  et du cercle  $(\mathcal{C})$ .  
(b) Détermine les coordonnées des points d'intersection de  $(D)$  et  $(\mathcal{C})$ .

### Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

Soit les points  $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Détermine l'ensemble (E) des point M du plan tel que :  $MA^2 + MB^2 = 11$

### Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

Détermine l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  vérifiant :

- $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ .
- $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ .
- $(x - 2)(x + 1) + y(y - 1) = 0$ .
- $3x^2 + 3y^2 - 6x + 1 = 0$ .
- $x^2 + y^2 + 3x - 7y + 8 = 0$ .
- $(x + y)(x - y) + 2y^2 = x + y + 1$ .

### Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- Détermine une équation cartésienne du cercle (C) de centre  $\Omega(2; 1)$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .
- Soit les points  $A \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Démontre que la droite (AB) est tangente au cercle (C) en un point K dont tu détermineras les coordonnées.
- Détermine une équation de la droite  $(D_1)$  tangente au cercle (C) en  $I \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et vérifie que cette droite passe par le point B.
- (a) Détermine une équation de la droite  $(D_2)$  passant par A et tangente au cercle (C), autre que (AB).  
(b) Soit C le point d'intersection des droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ . Démontre que le triangle ABC est rectangle en C et détermine une équation cartésienne du cercle circonscrit ç ce triangle.

## Séquence n°10 : Equations et inéquations dans

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### Activité 3.10

#### 10.1 Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues

##### Définition

Soit  $a, b, c, a', b'$  et  $c'$  six nombres réels. Le système  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  est appelé système d'équations du premier degré à deux

##### Définition

Soit le système  $(\Sigma) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ .

Le nombre  $det(\Sigma) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$  est appelé déterminant du système  $(\Sigma)$ .

#### Méthode de résolution à l'aide du déterminant : méthode de CRAMER

Soit le système  $(\Sigma) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  d'équations du premier degré à deux inconnues  $x$  et  $y$ , où  $a, b, c, a', b'$  et  $c'$  sont des réels donnés.

Pour résoudre le système  $(\Sigma)$ , on calcule :

Le déterminant du système

$$det(\Sigma) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Le déterminant principal en  $x$

$$det(x) = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

Le déterminant principal en  $y$

$$det(y) = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

- Si  $det(\Sigma) \neq 0$ , alors le système  $(\Sigma)$  admet un unique couple  $(x; y)$  solution tel que  $x = \frac{det(x)}{det(\Sigma)}$  et  $y = \frac{det(y)}{det(\Sigma)}$ . et l'ensemble solution de ce système est  $S = \left\{ \left( \frac{det(x)}{det(\Sigma)}, \frac{det(y)}{det(\Sigma)} \right) \right\}$ .
- Si  $det(\Sigma) = 0$  et  $\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}$  ou  $\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ , alors le système n'admet pas de solution :  $S = \emptyset$ .
- Si  $det(\Sigma) = 0 ; det(x) = 0$  et  $det(y) = 0$  alors le système admet un infinité de solution :  
 $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c\}$

#### Consigne 10.1 : Application

- Résous chacun des systèmes suivants par la méthode du déterminant :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ -4x + 6y = -1 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 4x - 8y = 8 \end{cases}$$

- Résous et discute suivant les valeurs du paramètre  $m$ , les système suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} mx + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} 2x - my = m - 1 \\ (5 - m)x - 3y = 11 - 5m \end{cases}$$

#### 10.2 Systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

##### Consigne 10.3

Résous graphiquement l'inéquation :  $2x + 3y \leq 4$

##### Consigne 10.4

Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x - 2y + 2 < 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x + 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

#### 10.3 Programmation linéaire

**Remarque**

Soit  $B$  le bénéfice réalisé après une vente.

Soit  $B = ax + by$ .

On a :  $y = \frac{B}{b} - \frac{a}{b}x$

Soit  $(\Delta_B)$  :  $y = \frac{B}{b} - \frac{a}{b}x$

Pour  $B = 0$ , on a :  $(\Delta_0)$  :  $y = -\frac{a}{b}x$ .

Pour obtenir le bénéfice maximal, on trace dans un repère orthonormé la droite  $(\Delta_0)$  :  $y = -\frac{a}{b}x$ .

On cherche la parallèle à cette droite de manière à avoir l'ordonnée à l'origine maximale. De cette ordonnée, on détermine les coordonnées du point permettant d'obtenir le bénéfice maximal.

**Consigne 10.5**

Un artisan fabrique des objets A et des objets B. La réalisation d'un objet A demande 30 euros de matière première et 125 euros de main-d'œuvre. La réalisation d'un objet B demande 70 euros de matière première et 75 euros de main-d'œuvre. Les profits réalisés sont de 54 euros par objet A et de 45 euros par objet B. On note  $x$  le nombre d'objets A fabriqués et  $y$  le nombre d'objets B fabriqués en une journée. La dépense journalière en matière première ne doit pas dépasser 560 euros. La dépense journalière en main-d'œuvre ne doit pas dépasser 1250 euros.

1. Écris un système d'inéquations traduisant les contraintes du problème.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique : 1 cm). Représente graphiquement l'ensemble des points  $M(x; y)$  dont les coordonnées vérifient les contraintes.
3. Exprime le bénéfice journalier en fonction de  $x$  et de  $y$ .
4. Trace la droite correspondant à un bénéfice de 540 euros.
5. Trace la droite correspondant au bénéfice maximum.
6. (a) Détermine la production d'objets A et B qui assurerait ce bénéfice maximum. On précisera cette production journalière.  
(b) En déduire le montant du bénéfice.

**Evaluations formatives****Exercice 1**

Résous les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 5x - 2y = 17 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 4x - 12y = 4 \\ 7x - 21y = 7 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} 9x - 5y = 39 \\ 15x - 3y = 81 \end{cases} \quad (S_4) : \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

**Exercice 2**

Résous les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \\ x - 3y = 7 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 3y = 2. \\ x + y = 2 \end{cases}$$

**Exercice 3**

Résous graphiquement les inéquations suivantes :

$$(I_1) : 2x - 3y \leq 5 \quad (I_2) : 5y - 2x \geq 1$$

**Exercice 4**

Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ 2x + y - 2 \leq 0 \\ y \leq 1 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} y \leq 2x \\ 2x + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

**Exercice 4**

Un artisan sculpteur produit des objets A et des objets B. La confection d'un objet A nécessite 6000 F de matières premières, coûte 25 000 F de main-d'œuvre et sa vente génère un bénéfice de 10 800 F. La confection d'un objet B nécessite 14 000 F de matières premières, coûte 15 000 F de main-d'œuvre et sa vente génère un bénéfice de 9 000 F. chaque jour, l'artisan limite ses frais d'investissement à 250 000 F pour la main-d'œuvre et à 112 000 F pour les matières premières. On désigne par  $x$  le nombre d'objets A et par  $y$  le nombre d'objets B fabriqués en une journée.

1. Exprime en fonction de  $x$  et  $y$ , la dépense journalière pour la main-d'œuvre et la dépense journalière pour les matières premières puis écris un système d'inéquations traduisant les contraintes du problème.
2.  $(x; y)$  représente les coordonnées d'un point M, détermine graphiquement l'ensemble des points du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'artisan.
3. Exprime en fonction de  $x$  et  $y$ , le bénéfice journalier  $g$  réalisé, puis détermine la production journalière pour laquelle  $g$  est maximal.