ELHAJJAJI MATHS

ETUDE DES FONCTIONS

Exercices d'entrainements

correction des examens:

- 2004 ORDINAIRE
- 2016 ORDINAIRE
- 2020 ORDINAIRE
- 2022 ORDINAIRE
- 2006 RATTRAPAGE
- 2019 RATTRAPAGE
- 2021 RATTRAPAGE1
- 2021 RATTRAPAGE2

2BAC SC.EXP

2 متجدد 2

2BAC SC.EXP

بقلم :

الأستاذ : البشير الحجاجي

نسألكم الدعاء

EXERCICE 1

Simplifier les expressions suivantes :

$A=(e^x)^{-2}.e^{x-1}$; $B=\dfrac{e^{x-1}}{e^{3x-2}}$; $C=\sqrt{\dfrac{27e^{3x}}{3e^x}}$

CORRECTION

$$A=(e^x)^{-2}.e^{x-1}$$
$$=e^{-2x}.e^{x-1}$$
$$=e^{-2x+x-1}$$
$$=e^{-x-1}$$

$\boxed{(e^a)^b=e^{ab}}$

$\boxed{e^a e^b=e^{a+b}}$

$\boxed{\dfrac{e^a}{e^b}=e^{a-b}}$

$$B=\frac{e^{x-1}}{e^{3x-2}}$$
$$=e^{x-1-(3x-2)}$$
$$=e^{x-1-3x+2}$$
$$=e^{-2x+1}$$

$$C=\sqrt{\frac{27e^{3x}}{3e^x}}$$
$$=\sqrt{\frac{27}{3}e^{3x-x}}$$
$$=\sqrt{9e^{2x}}$$
$$=\sqrt{9}\sqrt{e^{2x}}$$
$$=3\sqrt{(e^x)^2}$$
$$=3e^x$$

$\boxed{(e^a)^b=e^{ab}}$

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 ~ $(e^x)^2=e^{x-2}$ 2 ~ $e^{3x}-2=0$ 3 ~ $e^x+1=0$

CORRECTION

1 ~ $(e^x)^2=e^{x-2}$

$$e^{2x}=e^{x-2}$$
$$2x=x-2$$
$$2x-x=-2$$
$$x=-2$$

$\boxed{(e^a)^b=e^{ab}}$

$\boxed{e^a=e^b \Leftrightarrow a=b}$

D'où $S=\{-2\}$

2 ~ $e^{3x}-2=0$

$e^{3x}=2$

$3x=\ln 2$

$x=\frac{1}{3}\ln 2$

$e^{a}=b \Leftrightarrow a=\ln b$ avec $b>0$

D'où $S=\left\{\frac{1}{3}\ln 2\right\}$

3 ~ $e^{x}+1=0$

$e^{x}=-1$

$(\forall x\in\mathbb{R});\ e^{x}>0$

Et puisque : $(\forall x\in\mathbb{R});\ e^{x}>0$

Alors, l'équation $e^{x}=-1$, n'admet aucune solution

D'où : $S=\{\}$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 ~ $\dfrac{e^{-x}-2}{e^{-x}-3}=\dfrac{1}{2}$ 2 ~ $e^{2x}+3e^{x}-4=0$ 3 ~ $4e^{-x}-e^{x}=3$

CORRECTION

1 ~ $\dfrac{e^{-x}-2}{e^{-x}-3}=\dfrac{1}{2}$ (E)

Déterminons d'abord l'ensemble de définition de cette équation :

$x\in D_E \Leftrightarrow e^{-x}-3\neq 0$

$\Leftrightarrow e^{-x}\neq 3$

$\Leftrightarrow -x\neq \ln 3$

$\Leftrightarrow x\neq -\ln 3$

$e^{a}=b \Leftrightarrow a=\ln b$ avec $b>0$

Donc : $D_E=\mathbb{R}\setminus\{-\ln 3\}$

Soit $x\in D_E$

$\dfrac{e^{-x}-2}{e^{-x}-3}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(e^{-x}-2)=e^{-x}-3$

$\Leftrightarrow 2e^{-x}-4=e^{-x}-3$

$\Leftrightarrow 2e^{-x}-e^{-x}=-3+4$

$\Leftrightarrow e^{-x}=1$

$\Leftrightarrow -x=\ln 1$

$\Leftrightarrow -x=0$

$\Leftrightarrow x=0$

$e^{a}=b \Leftrightarrow a=\ln b$ avec $b>0$

Et puisque : $0\in D_E$

Alors $S=\{0\}$

2 ~ $e^{2x}+3e^{x}-4=0$

$(e^{x})^2+3e^{x}-4=0$ (E)

Posons : $t=e^{x}$

L'équation (E) devient $t^2+3t-4=0$

Son discriminant $\Delta=b^2-4ac=9+16=25$

$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-4 \end{cases}$

Puisque $\Delta>0$

Alors l'équation $t^2+3t-4=0$ admet deux solutions distinctes distinctes :

$t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2}=1$

$t_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-5}{2}=-4$

Si $\Delta>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc $e^{x}=1$ ou $e^{x}=-4$

- $e^{x}=1 \Leftrightarrow x=\ln 1=0$
- $e^{x}=-4$

Cette équation n'admet aucune solution, car :

$(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,e^{x}>0$ et $-4<0$

$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,e^{x}>0}$

D'où $S=\{0\}$

3 ~ $4e^{-x}-e^{x}=3$

Remarque

Pour ce type des équations (contenant e^{x} et e^{-x}),
il faut penser à multiplier les deux membres par e^{x},
pour avoir $e^{x}\cdot e^{-x}=e^{x-x}=e^{0}=1$

$4e^{-x}-e^{x}=3 \Leftrightarrow e^{x}(4e^{-x}-e^{x})=3e^{x}$

$\Leftrightarrow 4e^{x}\cdot e^{-x}-e^{x}\cdot e^{x}=3e^{x}$

$\Leftrightarrow 4-e^{2x}=3e^{x}$

$\Leftrightarrow e^{2x}+3e^{x}-4=0$

Et d'après l'équation précédente

on aura : $S=\{0\}$

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 ~ $e^{6x}+3e^{3x}-4=0$ $\quad$ **2** ~ $e^{x}+3\sqrt{e^{x}}-4=0$ $\quad$ **3** ~ $e^{2x}-3e^{x}=0$

CORRECTION

$\boxed{1}$ ~ $e^{6x}+3e^{3x}-4=0$

$(e^{3x})^2+3e^{3x}-4=0$ (*)

On pose $t=e^{3x}$

L'équation (*) devient $t^2+3t-4=0$

Et d'après l'exercice précédente, on aura:

$t=1$ ou $t=-4$

Donc $e^{3x}=1$ ou $e^{3x}=-4$

- $e^{3x}=1 \Longleftrightarrow 3x=\ln 1$
$\Longleftrightarrow 3x=0$
$\Longleftrightarrow x=0$

- $e^{3x}=-4$

$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R});e^x>0}$

Et puisque: $(\forall x\in\mathbb{R});e^x>0$

Alors, l'équation $e^{3x}=-4$, n'admet aucune solution

D'où $S=\{0\}$

$\boxed{2}$ ~ $e^x+3\sqrt{e^x}-4=0$

$\sqrt{e^x}^2+3\sqrt{e^x}-4=0$ (**)

On pose $t=\sqrt{e^x}$

L'équation (**) devient $t^2+3t-4=0$

Et d'après l'exercice précédente, on aura:

$t=1$ ou $t=-4$

Donc $\sqrt{e^x}=1$ ou $\sqrt{e^x}=-4$

- $\sqrt{e^x}=1 \Longleftrightarrow e^x=1$
$\Longleftrightarrow x=\ln 1$
$\Longleftrightarrow x=0$

- $\sqrt{e^x}=-4$

$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R});e^x>0}$

Et puisque: $(\forall x\in\mathbb{R});e^x>0$

Alors, l'équation $e^{3x}=-4$, n'admet aucune solution

D'où $S=\{0\}$

$\boxed{3}$ ~ $e^{2x}-3e^x=0$

$e^x\cdot e^x-3e^x=0$

$e^x(e^x-3)=0$

$e^x=0$ ou $e^x-3=0$

$\boxed{e^a=b\Longleftrightarrow a=\ln b \text{ avec } b>0}$

- $e^x-3=0 \Longleftrightarrow e^x=3$
$\Longleftrightarrow x=\ln 3$

- $e^x=0$

$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R});e^x>0}$

puisque: $(\forall x\in\mathbb{R});e^x>0$

Alors, l'équation $e^x=0$, n'admet aucune solution

D'où $S=\{\ln 3\}$

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivante:
$e^{x}+e^{1-x}-(e+1)=0$

CORRECTION

$e^{x}+e^{1-x}-(e+1)=0$
$e^{x}+e^{1}.e^{-x}-(e+1)=0$
$e^{x}+e.e^{-x}-(e+1)=0$
$e^{x}\left(e^{x}+e.e^{-x}-(e+1)\right)$
$e^{2x}+e.e^{-x}.e^{x}-(e+1)e^{x}=0$
$e^{2x}+e-(e+1)e^{x}=0$
$e^{2x}-(e+1)e^{x}+e=0$ (E)
Posons: $t=e^{x}$
L'équation (E) devient: $t^{2}-(e+1)t+e=0$
Son discriminant $\Delta=b^{2}-4ac$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-(e+1) \\ c=e \end{cases}$$

$=(e+1)^{2}-4e$
$=e^{2}+2e+1-4e$
$=e^{2}-2e+1$
$=(e-1)^{2}$

Puisque $\Delta>0$
Alors l'équation $t^{2}-(e+1)t+e=0$ admet deux solutions distinctes distinctes:

$t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{e+1+(e-1)}{2}=\frac{2e}{2}=e$

$t_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{e+1-(e-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

Si $\Delta>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc $e^{x}=e$ ou $e^{x}=1$
- $e^{x}=e \Leftrightarrow x=\ln e=1$ $\boxed{\ln e=1}$
- $e^{x}=1 \Leftrightarrow x=\ln 1=0$ $\boxed{\ln 1=0}$

D'où $S=\{0;1\}$

EXERCICE 6

Démontrer que pour tout reél x,

a- $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$; b- $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}=e^x\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$

CORRECTION

a- $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$

$=\dfrac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$

$=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

Il suffit de factoriser par e^x pour avoir e^{-x}

b- $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}=\dfrac{e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$

$=\dfrac{e^{2x}}{e^x}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^x}}$

$=e^{2x-x}\cdot\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$

$=e^x\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$

Il suffit de factoriser par e^x au dénominateur pour avoir e^{-x} et par e^{2x} au numérateur pour avoir e^{-2x}

EXERCICE 7

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le systeme : $\begin{cases}3e^x+2e^y=7\\2e^x+3e^y=8\end{cases}$

CORRECTION

On pose : $X=e^x$ et $Y=e^y$

Le système (S_1) devient :

$\begin{cases}3X+2Y=7\\2X+3Y=8\end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3.3-2.2=5\neq 0$

$D_X=\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}=7.3-2.8=5$

$D_Y=\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=3.8-2.7=10$

Donc $\begin{cases} X=\frac{D_X}{D}=\frac{5}{5}=1 \\ Y=\frac{D_Y}{D}=\frac{10}{5}=2 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} e^x=1 \\ e^y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln 1=0 \\ y=\ln 2 \end{cases}$

D'où : $S=\{(0;\ln 2)\}$

Ça sera mieux d'utiliser la méthode de Cramer. (Les déterminants)

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$

$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-bc'$

$D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$

Si $D\neq 0$

Alors $x=\frac{D_x}{D}$ et $y=\frac{D_y}{D}$

EXERCICE 8

Démontrer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ 2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$

CORRECTION

1. Montrons que : $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

On pose : $t=e^x$

Alors : $x=\ln t$

Si $x\to+\infty$

Alors $t\to+\infty$ Car $\lim_{t\to+\infty} \ln t=+\infty$

Donc $\lim_{x\to+\infty} e^x=\lim_{t\to+\infty} t=+\infty$

$\lim_{t\to+\infty} \ln t=+\infty$

2. Montrons que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$

On pose : $t=e^x$

Alors : $x=\ln t$

Si $x\to+\infty$

Alors $t\to+\infty$ Car $\lim_{t\to+\infty} \ln t=+\infty$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t}=0^+$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln t}$

$=\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln t}{t}}$

$=+\infty$ Car $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t}=0^+$

EXERCICE 9

Démontrer les limites suivantes

1) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ 2) $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

CORRECTION

1) Montrons que : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

On pose : $t = e^x$

Alors : $x = \ln t$

Si $x \to -\infty$

Alors $t \to 0^+$ Car $\lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$

Donc $\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{t \to 0^+} t = 0^+$

$\lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$

2) Montrons que : $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

On pose : $t = e^x$

Alors : $x = \ln t$

Si $x \to -\infty$

Alors $t \to 0^+$ Car $\lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$

Donc $\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{t \to 0^+} t \ln t = 0$

$\lim_{t \to 0^+} t \ln t = 0$

EXERCICE 10

Démontrer que : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

CORRECTION

On pose : $t = e^x$

Alors : $x = \ln t$

Si $x \to 0$

Alors $t \to 1$

Donc $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{t-1}{\ln t} = \lim_{t \to 1} \frac{1}{\frac{\ln t}{t-1}} = 1$

Car $\lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$

$\lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$

EXERCICE 11

Calculer les limites suivantes:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\tan x}$

CORRECTION

Remarque

Pour calculer une limite de type $\lim_{x\to x_0}\frac{e^{u(x)}-1}{v(x)}$ avec $\lim_{x\to x_0}u(x)=\lim_{x\to x_0}v(x)=0$

Il suffit de suivre les étapes suivantes :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{u(x)}-1}{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{e^{u(x)}-1}{u(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}$$

On a : $\lim_{x\to x_0}\frac{e^{u(x)}-1}{u(x)}=1$ (changement de variable)

Donc, il suffit de calculer $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}$

1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{e^{-x}-1}{-x}$

On pose $t=-x$

Si $x\to 0$

Alors $t\to 0$

Donc, on aura $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}-\frac{e^{t}-1}{t}$
$=-1$

$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1}$

D'où $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=-1$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}-2.\frac{e^{-2x}-1}{-2x}$

$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1}$

On pose $t=-2x$

Si $x\to 0$

Alors $t\to 0$

Donc, on aura $\lim_{x\to 0}-2.\frac{e^{-2x}-1}{-2x}=\lim_{t\to 0}-2.\frac{e^{t}-1}{t}$
$=-2$

D'où $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x}=-2$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\tan x}$

On a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1}$

Car $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{ax}=1}$

$\boxed{\sin 0=0}$

Calculons $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$

On pose $t=\sin x$

Si $x\to0$

Alors $t\to0$

Donc, on aura $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{t}-1}{t}$
$=1$

$\boxed{\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{t}-1}{t}=1}$

D'où $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\tan x}=1.1=1$

EXERCICE 12

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{x^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x^2-x}-1}{x-1}$ 3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{\sqrt{x+3}-2}-1}{x-1}$

CORRECTION

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}}$

On a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

Calculons $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{1-\cos x}$

On pose $t=1-\cos x$

Si $x\to0$

Alors $t\to0$

Donc, on aura $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{t}-1}{t}$
$=1$

$\boxed{\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{t}-1}{t}=1}$

D'où $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x^2-x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x^2-x}-1}{x^2-x}\cdot\dfrac{x^2-x}{x-1}$

On a $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}x=1$

Calculons $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-x}-1}{x^2-x}$

On pose $t=x^2-x$

Si $x\to 1$

Alors $t\to 0$

Donc, on aura $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-x}-1}{x^2-x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}$

$=1$

D'où $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-x}-1}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-x}{x-1}=1.1=1$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sqrt{x+3}-2}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sqrt{x+3}-2}-1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

On a $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}^2-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$=\frac{1}{4}$

Calculons $\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sqrt{x+3}-2}-1}{\sqrt{x+3}-2}$

On pose $t=\sqrt{x+3}-2$

Si $x\to 1$

Alors $t\to 0$

Donc, on aura $\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sqrt{x+3}-2}-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}$

$=1$

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1}$$

D'où $\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sqrt{x+3}-2}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sqrt{x+3}-2}-1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=1.\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

EXERCICE 13

Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{2}{1-e^{x}}$ 3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

CORRECTION

1. $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$

Ici, si on remplace x par 1, on aura e^{∞} car $\frac{1}{0}=\infty$
Mais $e^{-\infty}=0$ et $e^{+\infty}=+\infty$
Donc, il faut distinguer les deux cas : $x\to 1^-$; $x\to 1^+$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$

On pose $t=\frac{1}{x-1}$
Si $x\to 1^-$
Alors $t\to -\infty$

Donc, on aura $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to -\infty} e^{t}=0$

$\boxed{\lim\limits_{t\to -\infty} e^{t}=0}$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$

On pose $t=\frac{1}{x-1}$
Si $x\to 1^+$
Alors $t\to +\infty$

Donc, on aura $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to +\infty} e^{t}=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{1-e^{x}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-e^{x}$	$+$	0	$-$

$\boxed{\frac{2}{0^+}=+\infty}$ $\boxed{\frac{2}{0^-}=-\infty}$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2}{1-e^{x}}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{1-e^{x}}=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

On pose $t=\frac{1}{x}$
Si $x\to 0^+$
Alors $t\to +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{e^{t}}{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to +\infty} t e^{t}=+\infty$

$\boxed{\lim\limits_{t\to +\infty} e^{t}=+\infty}$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

On pose $t=\frac{1}{x}$
Si $x\to 0^-$
Alors $t\to -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{e^t}{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to -\infty} t e^t = 0$

$\lim\limits_{t\to -\infty} t e^t = 0$

EXERCICE 14

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x + x$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} 1 + e^x$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x - x}{e^x + x}$

CORRECTION

Il suffit de remplacer

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x + x = -\infty$

Car $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{t\to -\infty} e^t = 0$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} 1 + e^x = 1$

Car $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$

3. $$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x - x}{e^x + x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)}{x\left(\frac{e^x}{x} + 1\right)}$$

$$= \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\frac{e^x}{x} - 1}{\frac{e^x}{x} + 1}$$

$$= \frac{0-1}{0+1}$$ Car $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$

$$= -1$$

EXERCICE 15

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x+1)e^x$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x-1)^2 e^x$

CORRECTION

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = 0$ Car $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x - 1 = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x+1)e^x = \lim\limits_{x\to -\infty} x e^x + e^x = 0$

Car $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x e^x = 0$

Ici, si on remplace, on va trouver $-\infty . 0$. Dans ce cas, il suffit de développer, puis utiliser

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x-1)^2 e^x = \lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 - 2x + 1)e^x$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x - 2x e^x + e^x$

$= 0$ Car $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x = 0$

EXERCICE 16

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-\ln x$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{\frac{1}{x}}-x$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x e^{\frac{1}{x-1}}-x$

CORRECTION

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0^{+}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^{x}}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)$
$=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{\frac{1}{x}}-x=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

On pose $t=\frac{1}{x}$

Si $x\to-\infty$

Alors $t\to0$

Donc, on aura $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{t}-1}{t}$
$=1$

$$\lim_{t\to0}\frac{e^{t}-1}{t}=1$$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{\frac{1}{x}}-x=1$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x e^{\frac{1}{x-1}}-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x-1}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{x-1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}$

On pose $t=\frac{1}{x-1}$

Si $x \to +\infty$

Alors $t \to 0$

Donc, on aura $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t}$
$=1$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1}$$

D'où $\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x-1}} - x = 1.1 = 1$

EXERCICE 17

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} e^{3x}-2e^{x}+1$ 2) $\lim_{x\to-\infty} e^{3x}-2e^{x}+1$ 3) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}-2e^{2x}+1$

CORRECTION

1) $\lim_{x\to+\infty} e^{3x}-2e^{x}+1$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{3x}\left(1-2\frac{e^x}{e^{3x}}+\frac{1}{e^{3x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{3x}\left(1-\frac{2}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{3x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (e^x)^3\left(1-\frac{2}{(e^x)^2}+\frac{1}{(e^x)^3}\right)$$

$$= +\infty$$

Car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Si on remplace, on vas trouver $+\infty-(+\infty)$
Dans ce cas, il suffit de factoriser par e^x ou bien par e^{3x}

$\boxed{\frac{2}{+\infty}=0}$ $\boxed{\frac{1}{+\infty}=0}$ $\boxed{\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty}$

2) $\lim_{x\to-\infty} e^{3x}-2e^{x}+1 = \lim_{x\to-\infty} (e^x)^3-2e^x+1 = 1$

Il suffit de remplacer

Car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\boxed{\lim_{t\to-\infty} e^t = 0}$

3) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}-2e^{2x}+1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x}-2(e^x)^2+1 = +\infty$

Car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

$\boxed{\frac{1}{0^+}=+\infty}$

EXERCICE 18

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ 2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x-1}$ 3) $\lim_{x\to-\infty} e^{x^2}-e^{x-1}$

CORRECTION

$\boxed{1}$ $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

Posons : $t = \frac{1}{x}$

Si $x \to 0^-$

Alors $t \to -\infty$

Donc, on aura $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} e^{t} = 0$

$\boxed{2}$ $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

Posons : $t = \frac{1}{x}$

Si $x \to 0^+$

Alors $t \to +\infty$

Donc, on aura $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty$

$\boxed{3}$ $\lim_{x \to -\infty} e^{x^2} - e^{x-1}$

On a $\lim_{x \to -\infty} e^{x-1} = \lim_{x \to -\infty} e^{x} \cdot e^{-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e} e^{x} = 0$

$\boxed{\lim_{t \to -\infty} e^{t} = 0}$

Calculons $\lim_{x \to -\infty} e^{x^2}$

On pose $t = x^2$

Si $x \to -\infty$

Alors $t \to +\infty$

Donc, on aura $\lim_{x \to -\infty} e^{x^2} = \lim_{x \to +\infty} e^{t} = +\infty$

$\boxed{\lim_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty}$

EXERCICE 19

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f, g et h suivantes :

$\boxed{1}$ $f(x) = e^{3x} - e^{-x+1} - 1$ $\boxed{2}$ $g(x) = \frac{2}{e^{3x}+1}$ $\boxed{3}$ $h(x) = x - 1 - 2x e^{-x}$

CORRECTION

$\boxed{1}$ $f(x) = e^{3x} - e^{-x+1} - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{3x} - e^{-x+1} - 1\right)' \\ &= \left(e^{3x}\right)' - \left(e^{-x+1}\right)' - 1' \\ &= (3x)' \cdot e^{3x} - (-x+1)' \cdot e^{-x+1} \\ &= 3e^{3x} + e^{-x+1} \end{aligned}$$

$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$

Donc : $f'(x) = 3e^{3x} + e^{-x+1}$

$\boxed{2}$ ~ $g(x)=\dfrac{2}{e^{3x}+1}$

$$g'(x)=-\frac{2\left(e^{3x}+1\right)'}{\left(e^{3x}+1\right)^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{u}\right)'=-\frac{au'}{u^2}\ ,\ a\in\mathbb{R}}$$

$$=-\frac{2(3x)'.e^{3x}}{\left(e^{3x}+1\right)^2}$$

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}}$$

$$=\frac{-6e^{3x}}{\left(e^{3x}+1\right)^2}$$

$\boxed{3}$ ~ $h(x)=x-1-2xe^{-x}$

$$h'(x)=\left(x-1-2xe^{-x}\right)'$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}}$$

$$=1-0-2\left(xe^{-x}\right)'$$

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}}$$

$$=1-2\left(x'.e^{-x}+x\left(e^{-x}\right)'\right)$$

$$=1-2\left(e^{-x}+x(-x)'.e^{-x}\right)$$

$$=1-2\left(e^{-x}-x.e^{-x}\right)$$

$$=1-2(1-x)e^{-x}$$

EXERCICE 20

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f , g et h suivantes :

$\boxed{1}$ ~ $f(x)=\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}+1}$ $\boxed{2}$ ~ $g(x)=xe^{-x^2+1}$ $\boxed{3}$ ~ $h(x)=e^{\frac{2x+1}{x-1}}$

CORRECTION

$\boxed{1}$ ~ $f(x)=\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}+1}$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}}$$

$$f'(x)=\left(\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)'$$

$$=\frac{\left(2e^{x}-1\right)'\left(e^{x}+1\right)-\left(e^{x}+1\right)'\left(2e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{x}\left(e^{x}+1\right)-e^{x}\left(2e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^{x}\left[2\left(e^{x}+1\right)-\left(2e^{x}-1\right)\right]}{\left(e^{x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^{x}\left(2e^{x}+2-2e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$$

$\boxed{2}$ ~ $g(x)=x\,e^{-x^2+1}$

$$g'(x)=\left(x\,e^{-x^2+1}\right)'$$
$$=x'.\,e^{-x^2+1}+x.\left(e^{-x^2+1}\right)'$$
$$=e^{-x^2+1}+x.(-x^2+1)'\,e^{-x^2+1}$$
$$=e^{-x^2+1}-2x^2.e^{-x^2+1}$$
$$=(1-2x^2)\,e^{-x^2+1}$$

$$(u.v)'=u'.v+u.v'$$

$$\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}$$

$\boxed{3}$ ~ $h(x)=e^{\frac{2x+1}{x-1}}$

$$h'(x)=\left(e^{\frac{2x+1}{x-1}}\right)'$$
$$=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'.e^{\frac{2x+1}{x-1}}$$
$$=\frac{(2x+1)'(x-1)-(x-1)'(2x+1)}{(x-1)^2}.e^{\frac{2x+1}{x-1}}$$
$$=\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}.e^{\frac{2x+1}{x-1}}$$
$$=\frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}.e^{\frac{2x+1}{x-1}}$$
$$=\frac{-3}{(x-1)^2}.e^{\frac{2x+1}{x-1}}$$

$$\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$$

EXERCICE
2004 Session Normale

I - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$

1 - a - Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$

b - En déduire que f est une fonction impaire.

2 - Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3 - a - Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

b - Dresser le tableau de variations de f

c - En déduire que : $\forall x\in[0;+\infty[$; $1-\frac{2}{e^x+1}\leqslant\frac{1}{2}x$

4 - Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)=0$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

5 - Représenter (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

6 - a - Sachant que : $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$, montrer que :

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\ln\frac{e+1}{2}$$

b - Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=-1$ et $x=0$

II - Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1} ; n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1 - Montrer par recurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n>0$

2 - a - En utilisant le résultat de la question I-3-c, montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n$

b - Montrer que (u_n) est décroissante.

3 - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

RÉPONSE

1 - a - Vérifions que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a : $\dfrac{1}{e^{-x}+1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^{x}}+1}=\dfrac{1}{\dfrac{1+e^{x}}{e^{x}}}=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}=\dfrac{e^{x}+1-1}{1+e^{x}}=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}+1}-\dfrac{1}{e^{x}+1}=1-\dfrac{1}{e^{x}+1}$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\dfrac{1}{e^{-x}+1}=1-\dfrac{1}{e^{x}+1}$

b. Déduisons que f est impaire.

Rappel

f impaire $\Longleftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall x\in D_f\ ; -x\in D_f \\ (ii)\ \forall x\in D_f\ ; f(-x)=-f(x) \end{cases}$

(i) entraîne que D_f est symétrique par rapport à 0

Pour montrer la condition (ii), ça sera mieux de calculer $f(-x)+f(x)$ et trouver 0 $\boxed{f(-x)+f(x)=0 \Longleftrightarrow f(-x)=-f(x)}$

On a $D_f=\mathbb{R}$

Donc $-x\in D_f$, pour tout $x\in D_f$.

Soit $x\in D_f$

Pour calculer $f(-x)$, il faut juste remplacer x par $-x$ dans l'expression de $f(x)$

On a : $f(-x)+f(x)=1-\dfrac{1}{2}(-x)-\dfrac{2}{e^{-x}+1}+1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{2}{e^{x}+1}$

$$=1+\cancel{\frac{1}{2}x}-\frac{2}{e^{-x}+1}+1-\cancel{\frac{1}{2}x}-\frac{2}{e^{x}+1}$$

$$=2-\frac{2}{e^{-x}+1}-\frac{2}{e^{x}+1}$$

$$=2-2\left(\frac{1}{e^{-x}+1}+\frac{1}{e^{x}+1}\right)$$

$$=2-2\left(1-\cancel{\frac{1}{e^{x}+1}}+\cancel{\frac{1}{e^{x}+1}}\right) \quad \text{car : } \frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$$

$$=2-2$$

$$=0$$

On a : $f(-x)+f(x)=0$

Donc : $f(-x)=-f(x)$

D'où f est impaire

Remarques

Si f est paire ou bien impaire, il suffit de l'étudiée sur l'intervalle $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^{+}$ (La partie positive de D_f)

Pour cela, dans notre exercice, même que $D_f=\mathbb{R}$, les questions posées sont presque dans l'intervalle $[0;+\infty[$

2- Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Il suffit de remplacer x par $+\infty$ et le fait que $\boxed{\frac{a}{\infty}=0}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$$
$$= -\infty$$

Car $\lim_{x \to +\infty} 1-\frac{1}{2}x = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Remarque

$\boxed{y=1-\frac{1}{2}x}$ est une équation cartésienne d'une droite et $\lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{e^x+1} = 0$
Donc la droite (Δ): $y=1-\frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

3- a- Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a :
$$f'(x) = \left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right)'$$
$$= -\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'$$
$$= -\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{-(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-((e^x)^2+2e^x+1)+4e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^x)^2-2e^x-1+4e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^x)^2+2e^x-1}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-((e^x)^2-2e^x+1)}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^x-1)^2}{2(e^x+1)^2}$$

$\boxed{a'=0}$ $\boxed{(ax)'=a}$

$\boxed{(k u)' = k . u' \text{ tel que } k \in \mathbb{R}}$

$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$

Pour $\left(\frac{2}{e^x+1}\right)'$, vous pouvez utiliser $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v-u.v'}{v^2}}$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

b- Dressons le tableau de variations de f

Étudions d'abord le signe de $f'(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2 = 0$

Puisque $-\frac{1}{2} < 0$ et $\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2 \geqslant 0$

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) \leqslant 0$

☞ $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow e^x - 1 = 0 \Longleftrightarrow e^x = 1 \Longleftrightarrow x = 0$

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$

Remarques

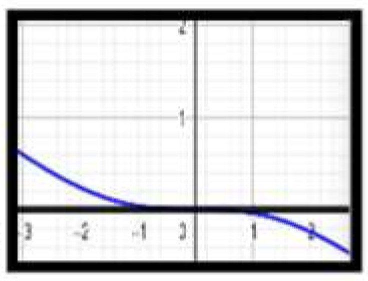
☞ On a $f'(0) = 0$

→ Donc (C_f) admet une tangente horizontale au point $O(0;0)$ $(f(0) = 0)$

☞ On a f' s'annule en 0 et ne change pas le signe.

→ Donc le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion,

(mais cette condition est suffisante et n'est pas nécessaire)



c- Déduisons que : $\forall x \in [0;+\infty[$; $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leqslant \frac{1}{2}x$

On a f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Soit $x \in [0;+\infty[$

$x \in [0;+\infty[$

$$\begin{aligned} x \geqslant 0 &\Rightarrow f(x) \leqslant f(0) \\ &\Rightarrow f(x) \leqslant 0 \quad (\text{car } f(0) = 0) \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} \leqslant 0 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{2}{e^x + 1} \leqslant \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

> f est strictement décroissante sur I si et seulement si $(\forall (x;y) \in I^2)$;
> $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

D'où : $\forall x \in [0;+\infty[$; $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leqslant \frac{1}{2}x$

4 - Montrons que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 0$

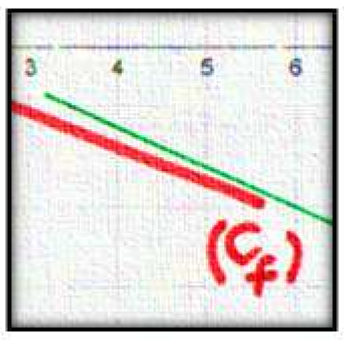
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{e^x + 1} = 0$$

$\left(\text{car } \lim_{x \to +\infty} e^x = 0\right)$

Interprétation géométrique

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)=0$

Donc la droite (Δ) d'équation $y=-\frac{1}{2}x+1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$



Remarque

On peut remarquer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{2}{e^x+1}$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)<0$

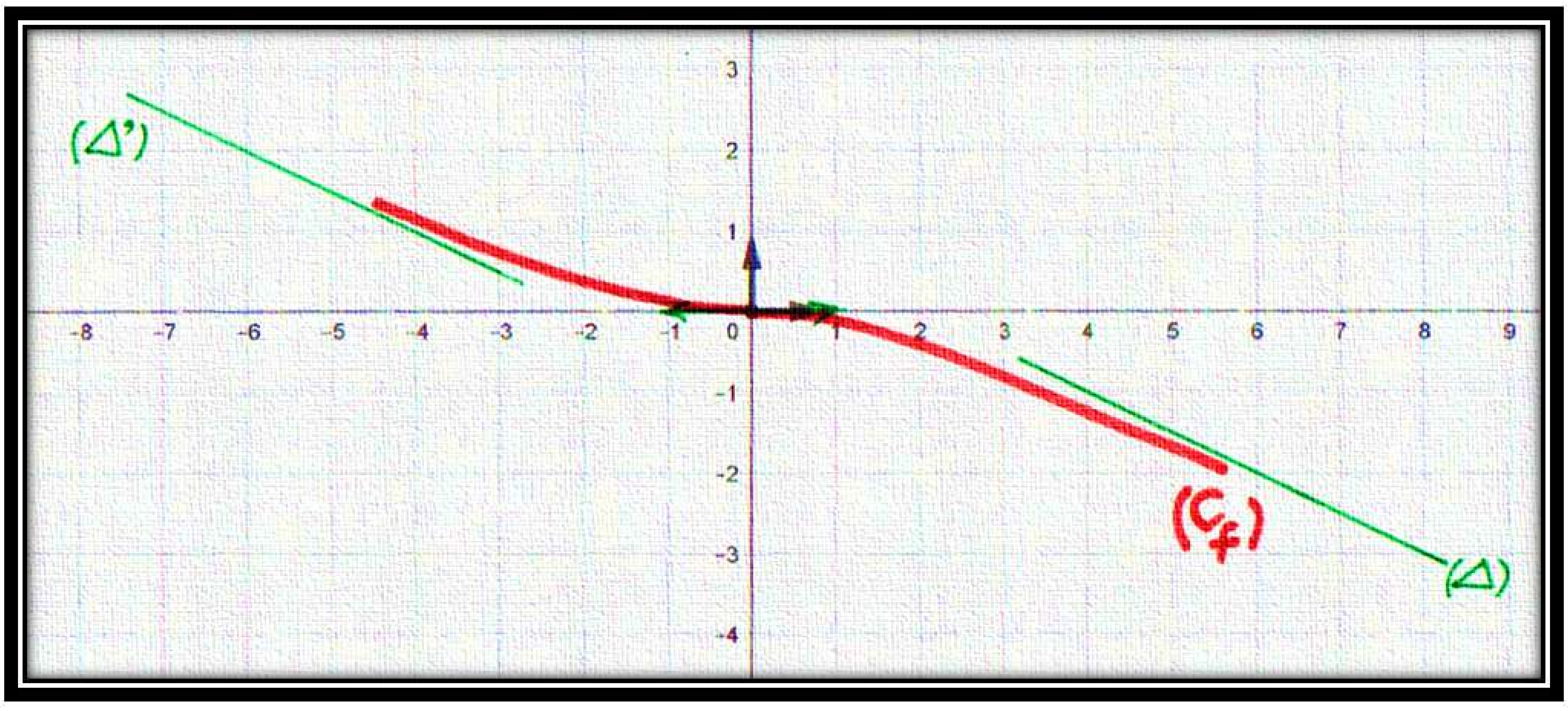
Donc (C_f) est au dessus de (Δ) sur $\mathbb{R}$

5 - Représentation de (C_f)

Explications

D'après les résultats précédents, on a :

- On a $f'(x)=0$
  Donc (C_f) admet une tangente horizontale au point $O(0;0)$
- (Δ) d'équation $y=-\frac{1}{2}x+1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
- (C_f) est au dessus de (Δ)
- La droite (Δ) passe par $A(0;1)$ et $B(2;0)$
- On a f est impaire.
  - Donc (C_f) est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$
  - La droite (Δ) passe par $A(0;1)$ et $B(2;0)$
  - Donc son symétrie (Δ') passe par $A'(0;-1)$ et $B'(-2;0)$



⑥ a. Montrons que : $\int_{-1}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\ln\frac{e+1}{2}$

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$
$$=-\int_{-1}^{0}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$
$$=-\int_{-1}^{0}\frac{(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1}dx$$
$$=-\int_{-1}^{0}\left(\ln|e^{-x}+1|\right)'dx$$
$$=-\left[\ln|e^{-x}+1|\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\left(\ln 2-\ln(e+1)\right)$$
$$=\ln(e+1)-\ln 2$$
$$=\ln\frac{e+1}{2}$$

Ici, il faut penser à $\int\frac{u'}{u}=\left[\ln|u|\right]$
or $(e^{-x}+1)'=-e^{-x}$
Donc, il faut multiplier le numérateur par -1

$(e^{-x})'=-e^{-x}$

$(e^{-x}+1)'=-e^{-x}$

D'où : $\int_{-1}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\ln\frac{e+1}{2}$

b. Calculons l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=-1$ et $x=0$

Rappel

l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=a$ et $y=b$ est :

$$\mathcal{A}=\int_{a}^{b}|f(x)|dx\ (u.a)\ (\text{unité d'aires})$$

Et après, il faut savoir le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[a;b]$

$\mathcal{A}=\int_{-1}^{0}|f(x)|\,dx\ (u.a)$

On a : $(\forall x\in[-1;0])$; $f(x)\geq 0$ car sur l'intervalle $[-1;0]$, on a (C_f) est au dessus de l'axe des abscisses

Donc : $(\forall x\in[-1;0])$; $|f(x)|=f(x)$

$\boxed{a=(ax)'}$

$\boxed{ax^n=\left(a\cdot\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\right)'}$

Donc : $$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\int_{-1}^{0}|f(x)|\,dx\ (u.a)\\&=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx\ (u.a)\\&=\int_{-1}^{0}\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right)dx\ (u.a)\\&=\int_{-1}^{0}\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx-\int_{-1}^{0}\frac{2}{e^x+1}\,dx\ (u.a)\\&=\int_{-1}^{0}\left((x)'-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot x^2\right)'\right)dx-2\int_{-1}^{0}\frac{1}{e^x+1}\,dx\ (u.a)\\&=\left[x-\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{0}-2\ln\frac{e+1}{2}\ (u.a)\\&=\left(0-\frac{1}{4}\cdot 0^2\right)-\left(-1-\frac{1}{4}(-1)^2\right)-2\ln\frac{e+1}{2}\ (u.a)\\&=\frac{5}{4}-2\ln\frac{e+1}{2}\ (u.a)\end{aligned}$$

D'où : $\mathcal{A}=\frac{5}{4}-2\ln\frac{e+1}{2}\ (u.a)$

II ~ On pose : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=1-\dfrac{2}{e^{u_n}+1}\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

$\boxed{1}$ ~ Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n>0$

Initialisation

Pour $n=0$

On a : $u_0=1$

Donc : $u_0>0$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$.

Supposons que : $u_n>0$

Montrons que : $u_{n+1}>0$

On a : $u_n>0$ (D'après la supposition)

Donc : $u_n>0\Rightarrow e^{u_n}>1$
$\Rightarrow e^{u_n}+1>2$

On peut juste utiliser l'encadrement

$\Rightarrow \frac{1}{e^{u_n}+1}<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2}{e^{u_n}+1}<1$

$\Rightarrow -\frac{2}{e^{u_n}+1}>-1$

$\Rightarrow 1-\frac{2}{e^{u_n}+1}>0$

$\Rightarrow u_{n+1}>0$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

$\boxed{2}$-a- Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n$

Soit $n\in\mathbb{N}$

D'après le résultat de la question I-3-c, on a : $\forall x\in[0;+\infty[\ ;\ 1-\frac{2}{e^{x}+1}\leqslant\frac{1}{2}x$

Et puisque : $u_n\in[0;+\infty[$; pour tout $n\in\mathbb{N}$

Alors : $1-\frac{2}{e^{u_n}+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n$

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n$

b- Montrons que (u_n) est décroissante

1ère méthode :

Soit $n\in\mathbb{N}$

On a $u_n>0$ et $u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{1}{2}$ et $u_n>0$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ et $u_n>0$

D'où (u_n) est une suite décroissante

Si : $(\forall n\in\mathbb{N});\begin{cases} u_n>0 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n}<1 \end{cases}$

Alors (u_n) est décroissante

2ème méthode

Soit $n\in\mathbb{N}$

On a : $u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n \Rightarrow u_{n+1}-u_n\leqslant\frac{1}{2}u_n-u_n$

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n\leqslant-\frac{1}{2}u_n$

Et puisque : $u_n>0$

Alors : $-\frac{1}{2}u_n<0$

Donc : $u_{n+1}-u_n<0$

D'où (u_n) est une suite décroissante

$\boxed{3}$- Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Remarque

On a deux méthode pour reponde à cette question :
Télescopage ou bien la récurrence.

Ici, on va utiliser la récurrence

Initialisation

Pour $n=0$

On a $u_0=1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

Donc $u_0 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0$

Donc, la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Montrons que : $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a : $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (D'après la supposition)

Donc : $\frac{1}{2} u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $\frac{1}{2} u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Et puisque : $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$ (D'après le résultat de la question 2 ~ a)

Alors, on aura : $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Donc : $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Calculons $\lim\limits_{n} u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

D'une part, on a : $u_n > 0$

D'autre par : $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Et puisque : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $\left(\text{car } -1 < \frac{1}{2} < 1\right)$

Alors, d'après les critères de convergence on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2006 RATTRAPAGE

I - Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x)=(x-1)e^x+x+1$

1 - Calculer $g'(x)$, pour tout $x\in[0;+\infty[$, puis en déduire que g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

2 - Montrer que : $\forall x\in[0;+\infty[\,;\ g(x)\geqslant 0$ (Remarquer que $g(0)=0$)

II - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{xe^x}{(e^x-1)^2}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 - Montrer que f est une fonction impaire.

2 - a - Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

b - Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu (Remarquer que : $f(x)=\dfrac{x}{e^x(1-e^{-x})^2}$)

3 - a - Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[\,;\ f'(x)=\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^3}\cdot g(x)$

b - Dresser le tableau de variations de f

4 - Représenter (C_f)

REPONSE

1 - On a : $g(x)=(x-1)e^x+x+1$

Calculons $g'(x)$

On a g est dérivable sur $[0;+\infty[$

(comme étant produit et somme des fonctions dérivables)

Soit $x\in[0;+\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left((x-1)e^x+x+1\right)' \\ &= (x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'+1+0 \\ &= 1.e^x+(x-1)e^x+1 \\ &= e^x+xe^x-e^x+1 \\ &= xe^x+1 \end{aligned}$$

D'où : $\forall x\in[0;+\infty[\,;\ g'(x)=xe^x+1$

Remarque

Normalement il faut calculer $g'(x)$ sur l'intervalle ouvert $]0;+\infty[$

Mais ici, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ partout, en particulier elle est sur $[0;+\infty[$

La monotonie de g.

Étudions le signe de $g'(x)$

Soit $x \in [0;+\infty[$

On a : $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ e^x > 0 \end{cases}$

Donc : $xe^x \geqslant 0 \Rightarrow xe^x + 1 \geqslant 1$

$\Rightarrow g'(x) > 0$

D'où g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$\boxed{2}$ - Montrons que : $\forall x \in [0;+\infty[\ g(x) \geqslant 0$

Remarque

Ici, on peut utiliser le tableau de variations ou bien la definition.
Mais, puisqu'il ne demande pas de dresser le tableau de variations, ça sera mieux d'utiliser la définition

On a g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Soit $x \in [0;+\infty[$

$x \geqslant 0 \Rightarrow g(x) \geqslant g(0)$

$\Rightarrow g(x) \geqslant 0$

D'où : $\forall x \in [0;+\infty[\ g(x) \geqslant 0$

f est strictement croissante sur I si et seulement si $(\forall (x;y) \in \mathrm{I}^2)$;

$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$

II - On a : $f(x) = \dfrac{xe^x}{(e^x - 1)^2}$

$\boxed{1}$ - Montrons que f est une fonction impaire.

Rappel

f impaire $\Longleftrightarrow \begin{cases} (i) \ \forall x \in D_f \ ; -x \in D_f \\ (ii) \forall x \in D_f \ ; f(-x) = -f(x) \end{cases}$

On a $D_f = \mathbb{R}^*$

Donc $-x \in D_f$, pour tout $x \in D_f$

Soit $x \in D_f$

$$f(-x) = \frac{-xe^{-x}}{(e^{-x} - 1)^2}$$

$$= \frac{-xe^{-x}}{\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)^2}$$

$$= \frac{-xe^{-x}}{\left(\frac{1 - e^x}{e^x}\right)^2}$$

Pour calculer $f(-x)$, il faut juste remplacer x par $-x$ dans l'expression de $f(x)$

$$= \frac{\frac{-xe^{-x}}{(e^{x}-1)^2}}{(e^{x})^2}$$

$$= \frac{-x}{e^{x}} \cdot \frac{(e^{x})^2}{(e^{x}-1)^2}$$

$$= -\frac{xe^{x}}{(e^{x}-1)^2}$$

$$= -f(x)$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = (b-a)^2}$$

$$\boxed{\frac{-x}{e^{x}} \cdot \frac{(e^{x})^2}{(e^{x}-1)^2} = \frac{-x}{\cancel{e^{x}}} \cdot \frac{\cancel{e^{x}}\, e^{x}}{(e^{x}-1)^2} = -\frac{xe^{x}}{(e^{x}-1)^2}}$$

D'où f est impaire.

2 -a- Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{x}}{(e^{x}-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{x}}{\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)^2 . x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x}}{\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= +\infty$$

Remarques

Ici, si on remlace x par 0, on trouvera $\frac{0}{0}$

Dans ce cas, il faut juste penser à :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x}-1}{x} = 1}$$

Car : $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Interprétation géométrique

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à (C_f)

b- Montrons que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

On a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{x}(1-e^{-x})^2}$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{x}} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{e^{x}}{x}} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)^2}$$

Il suffit de remplacer x par $+\infty$ et le fait que $\boxed{\frac{a}{\infty}=0}$

Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$ (propriété)

et $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)^2 = 1$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x} = +\infty$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Interprétation géométrique

On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Donc la droite d'équation $y=0$ l'axe des abscisses est une asymptote horizonale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

$\boxed{3}$ a. Montrons que : $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x-1)^3} \cdot g(x)$

Soit $x \in]0;+\infty[$

On a

Ici, on a plusieurs propriétés. Mais la priorité est à $\boxed{\frac{u}{v}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$

$(e^x)' = e^x$

$$f'(x) = \left(\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}\right)'$$

$$= \frac{(xe^x)'(e^x-1)^2 - xe^x((e^x-1)^2)'}{((e^x-1)^2)^2}$$

$$= \frac{(x'e^x + x(e^x)')(e^x-1)^2 - xe^x \cdot 2(e^x-1)'(e^x-1)}{(e^x-1)^4}$$

$$= \frac{(e^x + xe^x)(e^x-1)^2 - 2xe^x \cdot e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^4}$$

$$= \frac{e^x(1+x)(e^x-1)^2 - 2xe^x \cdot e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^4}$$

$$= \frac{e^x\cancel{(e^x-1)}[(1+x)(e^x-1) - 2xe^x]}{\cancel{(e^x-1)}(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{e^x(e^x - 1 + xe^x - x - 2xe^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{e^x(e^x - xe^x - 1 - x)}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{-e^x(xe^x - e^x + x + 1)}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{-e^x \cdot g(x)}{(e^x-1)^3}$$

D'où : $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x-1)^3} \cdot g(x)$

b. Le tableau de variations de f

Etudions d'abord le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$

On a : $f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x-1)^3} \cdot g(x)$

On a : $x>0 \Rightarrow e^{x}>1 \Rightarrow (e^{x}-1)>0 \Rightarrow (e^{x}-1)^{3}>0$

D'après le résultat de la question I-2

on a : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ g(x)\geqslant 0$

Et puisque : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;-e^{x}<0$ (car : $\forall x\in [0;+\infty[\ ;e^{x}>0$)

Alors : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f'(x)\leqslant 0$

D'où f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Remarques

On a f est impaire

Donc : $\forall x\in]0;+\infty[; f(x)=-f(x)$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

Alors, par un changement de variable $t=-x$

on aura $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

De même, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

Donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

D'où

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

4-Représentation de la courbe (C_f)

Explications

. On a $y=0$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

. On a $x=0$ est une asymptote verticale à (C_f)

. Cette courbe n'admet aucune tangente.

. On a f est impaire.

Donc (C_f) est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$

EXERCICE3 : 2022 ORDINAIRE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

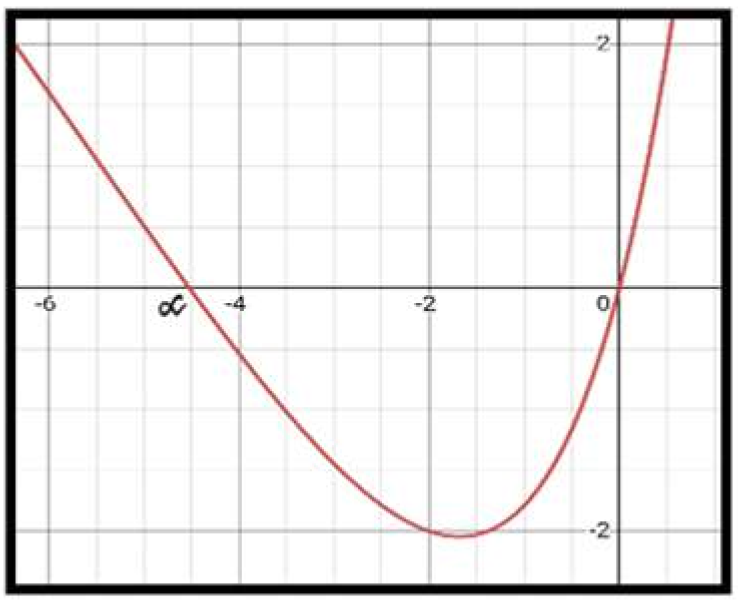
1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter le résultat obtenu graphiquement.
3. a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

   b. Étudier le signe de $(f(x)-x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis en déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ)
4. a. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$

   b. Vérifier que : $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   c. Dresser le tableau de variations de f
5. a. Montrer que : $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$, où $g(x)=(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

   b. A partir de la courbe ci-contre de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque $g(\alpha)=0$)



   c. Étudier la concavité de la courbe (C_f) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions
6. Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prend : $\ln 4\simeq 1,4$; $\alpha\simeq -4,5$ et $f(\alpha)\simeq -3,5$)
7. a. Montrer que la fonction f admet une fonction

réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b- Calculer $(f^{-1})'(\ln 4)$

8- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < u_n < \ln 4$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d- Calculer la limite de la suite (u_n)

REPONSE

1- Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\left(e^{x}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2$$
$$= +\infty$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Remarques

$e^{\frac{x}{2}} = (e^x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^x}$

$f(x) = x\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$$
$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2$$
$$= -\infty$$

Il suffit de remplacer

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 = (-1)^2 = 1$

2- Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2$$
$$= +\infty \quad \text{car } \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Interprétation géométrique

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) ~a~ Montrons que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

Remarque

Au voisinage de $-\infty$

On a $e^x \simeq 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

Donc, on aura : $f(x)\simeq x$

Rappel

Pour montrer qu'une droite (Δ) d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de ∞, il faut juste calculer $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)$ et trouver ~ forcement ~

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0}$$

On a

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)$$
$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2-x$$
$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2-1\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2-2e^{\frac{x}{2}}+1-1\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty} xe^{x}-2xe^{\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty} xe^{x}-4\cdot\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

Ici, si on remplace, on trouvera $0.\infty$ c'est une F.I

Donc, il faut penser à utiliser $\lim\limits_{t\to-\infty} t^n e^t=0$

Donc ; il faut juste développer

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$

On pose : $t=\frac{x}{2}$

Si : $x\to-\infty$

Alors : $t \to -\infty$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{t \to -\infty} t\, e^{t} = 0$

Donc, on aura bien $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0$

D'où la droite (Δ) : $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

b) Étudions le signe de $(f(x) - x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f(x) - x &= x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 - x \\
&= x\left(\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 - 1\right) \\
&= x\left(\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2e^{\frac{x}{2}} + 1 - 1\right) \\
&= x\left(\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2e^{\frac{x}{2}}\right) \\
&= x e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 2\right)
\end{aligned}
$$

On a : $e^{\frac{x}{2}} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc le signe de $(f(x) - x)$ dépend du signe de : $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 2\right)$

- $x = 0$
- $e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff e^{\frac{x}{2}} = 2$
  $\iff \frac{x}{2} = \ln 2$
  $\iff x = 2\ln 2$
  $\iff x = \ln 2^2$
  $\iff x = \ln 4$
- $e^{\frac{x}{2}} - 2 > 0 \iff e^{\frac{x}{2}} > 2$
  $\iff \frac{x}{2} > \ln 2$
  $\iff x > 2\ln 2$
  $\iff x > \ln 2^2$
  $\iff x > \ln 4$

x	$+\infty$	0		$\ln 4$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$e^{\frac{x}{2}} - 2$	$-$		$-$	0	$+$
$x\left(e^{\frac{x}{2}} - 2\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Attention

ATTENTION!!!

Pour étudier le signe de $e^{ax} - b$ avec $b > 0$, il faut faire attention au nombre a, et surtout lorsque $a < 0$

En effet :

$e^{ax} - b > 0 \iff e^{ax} > b$ avec $b > 0$
$\iff ax > \ln b$
$\iff x < \frac{\ln b}{a}$ car $a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{\ln b}{a}$	$+\infty$
$e^{ax} - b$	$+$	0	$-$

D'où :

x	$+\infty$	0		$\ln 4$		$+\infty$
$(f(x)-x)$	$+$	0	$-$		$+$	

La position relative de (C_f) et (Δ)

Rappel

> Pour étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=ax+b$, il faut étudier le signe de $(f(x)-(ax+b))$
>
> Si : $\forall x\in I$; $f(x)-(ax+b)\geqslant 0$
>
> Alors la courbe (C_f) est au dessus de la droite (Δ)
>
> Si : $\forall x\in I$; $f(x)-(ax+b)\leqslant 0$
>
> Alors la courbe (C_f) est au dessous de la droite (Δ)
>
> Les solutions de l'équation $f(x)=(ax+b)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (Δ)

x		0		$\ln 4$		$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$	0	$+$	
La position relative	(C_f) est au dessus de (Δ)	$O(0;0)$ point d'intersection	(C_f) est au dessous de (Δ)	$A(\ln 4, \ln 4)$ point d'intersection	(C_f) est au dessus de (Δ)	

Remarque

> Pour calculer $f(0)$ et $f(\ln 4)$, ça sera mieux de remplacer dans $y=x$
>
> Donc $f(0)=0$ et $f(\ln 4)=\ln 4$
>
> Car aux points d'abscisses 0 et $\ln 4$, on a (C_f) et (Δ) sont sécantes.

Remarques et astuces

La droite $(\Delta): y=x$ joue un rôle important dans l'étude de la suite (u_n) définie par: $u_{n+1}=f(u_n)$ (Question 8)

4 – a – Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R}); f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\right)'$$
$$=x'\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+x\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\right)'$$
$$=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+x.2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)'\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^{2-1}$$
$$=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+x.2\left(\frac{x}{2}\right)'.e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$$
$$=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+x.2\,\frac{1}{2}.e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$$
$$=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+x.e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R}); f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$

Ici, on a trois propriétés utilisées uv, u^n et e^u
Mais la priorité est à uv

$\boxed{(u.v)'=u'.v+u.v'}$ $\left(x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\right)'$

$\boxed{(u^n)'=n.u'.u^{n-1}}$ $\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\right)'$

$\boxed{(e^u)'=u'.e^u}$ $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'$

$\left(\frac{x}{2}\right)'=\left(\frac{1}{2}x\right)'=\frac{1}{2}$

b – Vérifions que : $(\forall x\in\mathbb{R}); x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0$

(Autrement dit : x et $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$ ont le même signe.)

- $x=0$
- $e^{\frac{x}{2}}-1=0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}=1$
  $\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\ln 1$
  $\Leftrightarrow x=0$
- $e^{\frac{x}{2}}-1>0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}>1$
  $\Leftrightarrow \frac{x}{2}>\ln 1$
  $\Leftrightarrow x>0$

x	$+\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$e^{\frac{x}{2}}-1$	$-$		$+$
$x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$	$+$	0	$+$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right) \geq 0$

Déduisons le signe de $f'(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$

D'après la question précédente, on a : $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right) \geq 0$

Et puisque $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 \geq 0$ (carré parfait)

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) \geq 0$

c~ Le tableau de variations de f

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) \geq 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

D'où

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		

Remarques

On a $f'(0)=0$

Donc (C_f) admet une tangente horizontale au point $O(0;0)$ $(f(0)=0)$

On a f' s'annule en 0 et ne change pas le signe.

Donc le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion,

(mais cette condition est suffisante et n'est pas nécessaire)

$\boxed{5}$ ~a~ Montrons que : $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$, où $g(x)=(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a f' est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x)=\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\right)'$$

$$=\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+x\left(e^{x}-e^{\frac{x}{2}}\right)\right)'$$

Pour $\left(xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\right)$

On a $(uvw)'$

Donc, ça sera mieux de développer le $e^{\frac{x}{2}}$

$xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)=x\left(e^{x}-e^{\frac{x}{2}}\right)$

$$=\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\right)'+\left(x\left(e^x-e^{\frac{x}{2}}\right)\right)'$$

$$=2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)'\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^{2-1}+x'\left(e^x-e^{\frac{x}{2}}\right)+x\left(e^x-e^{\frac{x}{2}}\right)'$$

$$=2\left(\frac{x}{2}\right)'.e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+\left(e^x-e^{\frac{x}{2}}\right)+x\left(e^x-\left(\frac{x}{2}\right)'.e^{\frac{x}{2}}\right)$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+\left(e^x-e^{\frac{x}{2}}\right)+x\left(e^x-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)$$

$$=e^x-e^{\frac{x}{2}}+e^x-e^{\frac{x}{2}}+xe^x-\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}$$

$$=2e^x-2e^{\frac{x}{2}}+xe^x-\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}$$

$$=2e^x-2e^{\frac{x}{2}}+xe^x-\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}$$

$$=2e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+xe^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(4e^{\frac{x}{2}}-4+2xe^{\frac{x}{2}}-x\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left((2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4\right)$$

D'où : $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$, où $g(x)=(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4$,

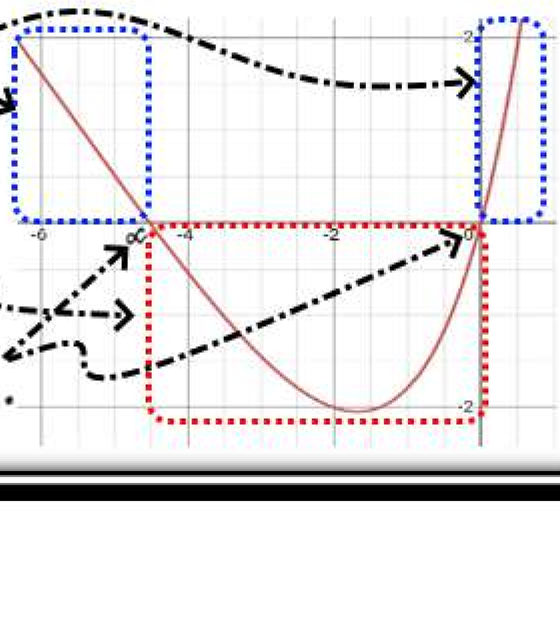
b- Déterminons le signe de $g(x)$

Remarques

Pour étudier le signe d'une fonction g à partir de sa courbe représentative, il suffit d'étudier la position relative de la courbe (C_g) et l'axe des abscisses ($y=0$)

En effet :

- $g(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow (C_g)$ est au dessus de l'axe des x.
- $g(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow (C_g)$ est au dessous de l'axe des x.
- $g(x)=0 \Leftrightarrow$ L'intersection de (C_g) et l'axe des x.



D'après la courbe représentative de g, on a :

(C_g) est au dessus de l'axe des abscisses sur les deux intervalles $]-\infty;\alpha]$ et $[0;+\infty[$

Donc : $\forall x\in]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$; $g(x)\geqslant 0$

(C_g) est au dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[\alpha;0]$

Donc : $\forall x\in[\alpha;0]$; $g(x)\leqslant 0$

(C_g) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses α et 0

Donc : $g(x)=0 \Longleftrightarrow x=\alpha$ ou $x=0$

Conclusion

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c- La concavité de (C_f).

Étudions le signe de (C_f).

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$

Puisque : $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}>0$

Alors le signe de $f''(x)$ est le signe de $g(x)$

Et d'après le résultat de la question précédente, on aura :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
La concavité de (C_f)			$B(\alpha;f(\alpha))$ point d'inflexion		$O(0;0)$ point d'inflexion		

Remarques

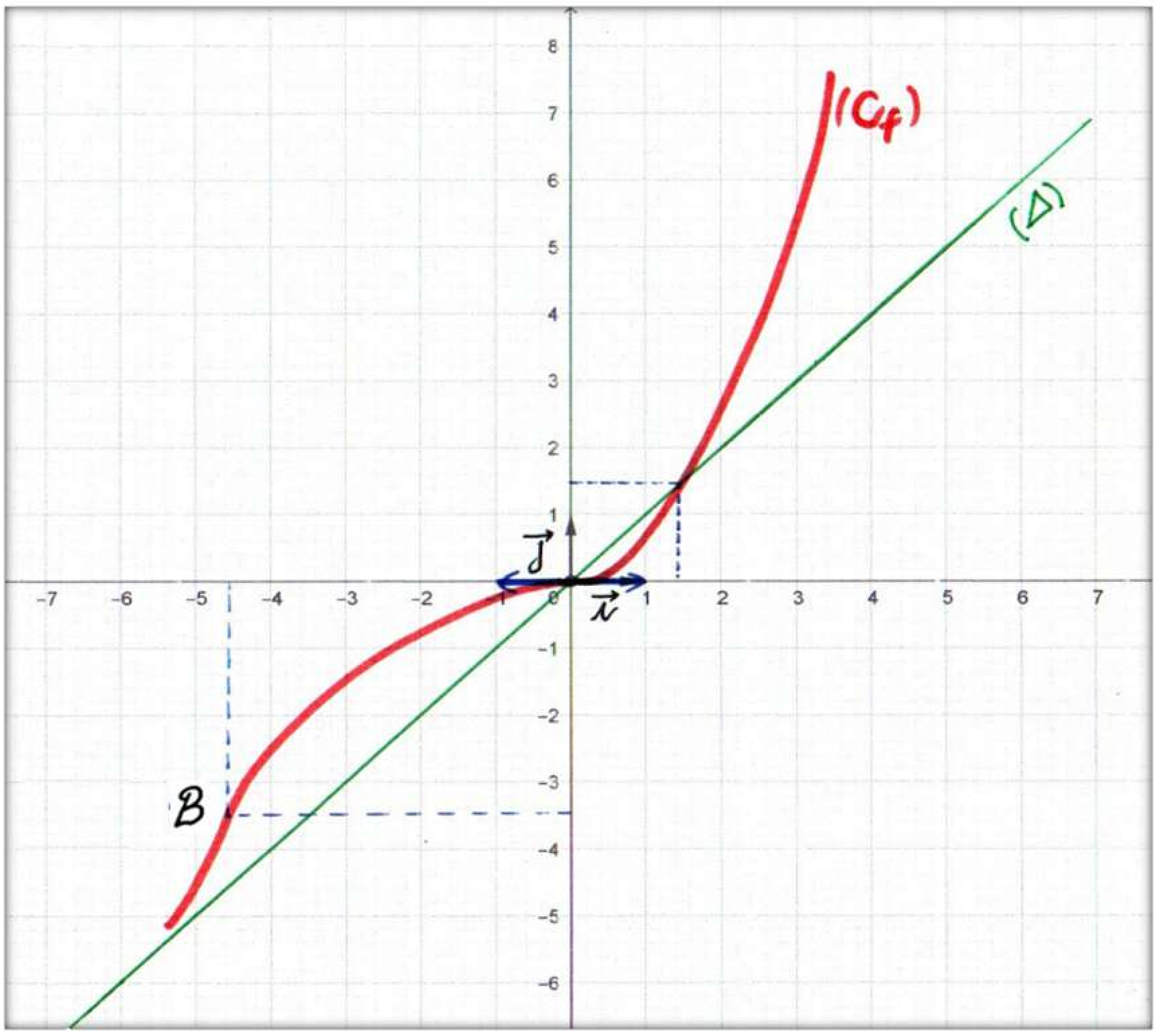
- On a f'' s'annule en α et en 0 et change son signe
  Donc les deux points B et O d'abscisses respective α et 0 sont les points d'inflexions de la courbe.
- Remarquons que f' s'annule en 0 et ne change pas le signe
  Donc le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de (C_f)

Mais, on peut trouver autres points d'inflexions de (C_f)
(à partir de f'')
C'est pour cela, on dit que c'est une condition suffisante et n'est pas nécessaire شَرْطٌ كَافٍ وَلَيْسَ لَازِمٌ

6. Représentation de (C_f)

Explications

- On a : (Δ): $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$
- (Δ) passe par $O(0;0)$ et $C(1;1)$
- Respecter la position relative de (C_f) et (Δ)
- Respecter la concavité et les points d'inflexions de (C_f)
- $f'(0)=0$ et $f(0)=0$
  - (C_f) admet une tangente horizontale au point $O(0;0)$
- (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$
- $O(0;0)$ et $A(\ln 4; \ln 4)$ sont les points d'intersection de (C_f) et (Δ)



7. a. Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

On a f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J tel que : $J=f(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} &= f(]-\infty;+\infty[) \\ &=]\lim_{x\to-\infty} f(x) ; \lim_{x\to+\infty} f(x)[\\ &=]-\infty;+\infty[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Donc : $J=\mathbb{R}$.

b. Calculons $(f^{-1})'(\ln 4)$

On sait que $(f^{-1})'(\ln 4)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(\ln 4))}$

On a : $f(\ln 4)=\ln 4$

Donc : $f^{-1}(\ln 4)=\ln 4$

Donc : $(f^{-1})'(\ln 4)=\dfrac{1}{f'(\ln 4)}$

On a : $f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $f'(\ln 4)=\left(e^{\frac{\ln 4}{2}}-1\right)^2+\ln 4\, e^{\frac{\ln 4}{2}}\left(e^{\frac{\ln 4}{2}}-1\right)$ $\boxed{e^{\frac{\ln 4}{2}}=e^{\frac{1}{2}\ln 4}=e^{\ln\sqrt{4}}=e^{\ln 2}=2}$

$$\begin{aligned} &=(2-1)^2+\ln 4 . 2(2-1) \\ &=1+2\ln 4 \end{aligned}$$

D'où : $(f^{-1})'(\ln 4)=\dfrac{1}{1+2\ln 4}$

8. On pose : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) ; n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a. Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; 0<u_n<\ln 4$

Initialisation

Pour $n=0$ On a $u_0=1$

Donc $0<u_0<\ln 4$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que : $0<u_n<\ln 4$

Montrons que : $0<u_{n+1}<\ln 4$

Ici, il faut juste utiliser le fait que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;\ln 4]$

On a : $0<u_n<\ln 4$ (D'après la supposition)

Et puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;\ln 4]$

Alors : $f(0)<f(u_n)<f(\ln 4)$

Donc : $0<u_{n+1}<\ln 4$ (car $f(0)=0$ et $f(\ln 4)=\ln 4$)

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N});0<u_n<\ln 4$

b- Montrons que (u_n) est décroissante

Ici, il suffit d'utiliser le résultat de la position relative.

Soit $n\in\mathbb{N}$

$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$

Et d'après le résultat de la question 3-b

On a : $\forall x\in[0;\ln 4], f(x)-x\leqslant 0$

Et puisque : $u_n\in[0;\ln 4]$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

Alors : $f(u_n)-u_n\leqslant 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$

D'où (u_n) est une suite décroissante

c- Déduisons que (u_n) est convergente.

On a (u_n) est décroissante et minorée par 0

Donc (u_n) est une suite convergente.

d- Calculons $\lim_{n} u_n$.

Soit $\mathbf{I}=[0;\ln 4]$

Vérifions d'abord que $f(\mathbf{I})\subset\mathbf{I}$

On a f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbf{I}$

Donc : $f(\mathbf{I})=f([0;\ln 4])=[f(0);f(\ln 4)]$

Donc : $f(\mathbf{I})\subset\mathbf{I}$

Rappel

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$u_{n+1}=f(u_n);n\in\mathbb{N}$ avec $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\in\mathbf{I}$

Si : $\begin{cases} u_0\in\mathbf{I} \\ f \text{ est continue sur l'intervalle } \mathbf{I} \\ f(\mathbf{I})\subset\mathbf{I} \\ (u_n) \text{ est convergente} \end{cases}$

Alors la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation $\boxed{f(x)=x}$

On a $u_{n+1}=f(u_n)$ et $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n\in I$

Puisque : $\begin{cases} u_0\in I \\ f \text{ est continue sur l'intervalle } I \\ f(I)\subset I \\ (u_n) \text{ est convergente} \end{cases}$

Alors la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation $\boxed{f(x)=x}$

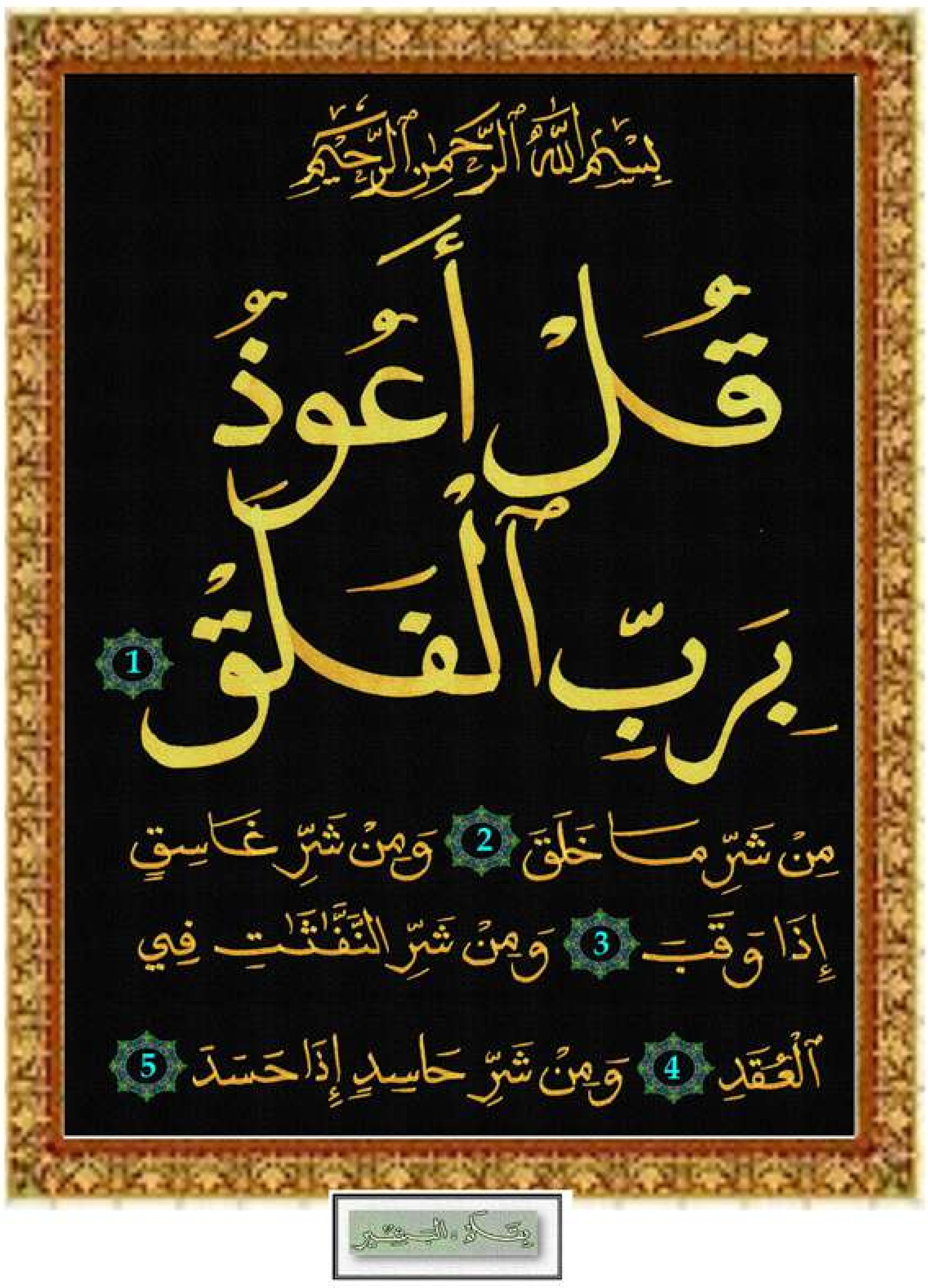
Et d'après le résultat de la question 3-b, on aura

$x=0$ ou $x=\ln 4$

Et puisque (u_n) est décroissante et : $(\forall n\in\mathbb{N});\ 0<u_n<\ln 4$

Alors $x=0$

Et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1cm)

I- 1- a- Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b- Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

2- a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$; puis interpréter géométriquement ce résultat.

3- a- Montrer que : $f'(x)=2(e^{x}-1)^2$; pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b- Dresser le tableau de variations de f (Remarquer que $f'(0)=0$)

c- Montrer qu'il existe un unique reél α de l'intervalle $]1;\ln 4[$ tel que $f(\alpha)=0$

4- a- Montrer que la courbe (C_f) est au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4;+\infty[$ et qu'elle est en dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty;\ln 4[$

b- Montrer que la courbe (C_f) admet un seul point d'inflexion de coordonnées $(0;-5)$

c- Tracer la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prendra $\ln 4\simeq 1{,}4$ et $\alpha\simeq 1{,}3$)

5- a- Montrer que : $\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^{x})\,dx=-\frac{9}{2}$

b- Calculer, en cm^2, l'aire du plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$.

II - 1 - a - Résoudre l'équation différentielle

(E): $y'' - 3y' + 2y = 0$

b - Déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie les deux conditions : $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$

2 - Soit h la fonction définie sur l'intervalle $I =]\ln 4 ; +\infty[$ par : $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$

a - Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$.

b - Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$, puis déterminer $(h^{-1})'(\ln 5)$

REPONSE

I - 1 - a - Montrons que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Remarque

Ici, pour calculer les limites au voisinage de ∞ et pour éviter le changement de variable, ça sera mieux d'écrire $f(x)$ sous forme :

$$e^{2x} = e^x \cdot e^x = (e^x)^2$$

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x = \boxed{2x - 2 + e^x(e^x - 4)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2x - 2 + e^x(e^x - 4)\right) = -\infty$$

Car : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 2) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{t \to -\infty} e^t = 0}$$

b - Montrons que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

Rappel

Pour montrer qu'une droite (D) d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de ∞, il faut juste verifier que : $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-2))=\lim_{x\to-\infty}(2x-2+e^x(e^x-4))-(2x-2))$$
$$=\lim_{x\to-\infty}e^x(e^x-4)$$
$$=0$$

car : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$

$\underbrace{\underbrace{e^x}_{\to 0}\underbrace{(e^x-4)}_{\to -4}}_{\to 0(-4)=0}$

2 – a – Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-2+e^x(e^x-4))=+\infty$$

car : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$

b – Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2+e^x(e^x-4)}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}-\frac{2}{x}+\frac{e^x}{x}\cdot(e^x-4)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2}{x}+\frac{e^x}{x}\cdot(e^x-4)\right)$$
$$=+\infty$$

Il faut juste séparer les termes

avec : $\begin{cases}\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\\ \frac{ab}{c}=\frac{a}{c}\cdot b=a\cdot\frac{b}{c}\end{cases}$

$\underbrace{\underbrace{2-\frac{2}{x}}_{\to 2}+\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{(e^x-4)}_{\to+\infty}}_{\to 2+\infty\cdot(+\infty)=+\infty}$

Car : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}2-\frac{2}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\end{cases}$

Interprétation géométrique

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3 - a - Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=2(e^x-1)^2$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\boxed{(ax)'=a}$

$\boxed{a'=0}$

$\boxed{(e^{u(x)})'=u'(x).e^{u(x)}}$

$\boxed{(e^x)'=e^x}$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=(2x-2+e^{2x}-4e^x)' \\
&=2-0+(2x)'.e^{2x}-4(e^x)' \\
&=2+2e^{2x}-4e^x \\
&=2(e^{2x}-2e^x+1) \\
&=2((e^x)^2-2e^x+1) \\
&=2(e^x-1)^2
\end{aligned}
$$

$e^{2x}=e^x\cdot e^x=(e^x)^2$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=2(e^x-1)^2$

b - Le tableau de variations de f

Étudions le signe de $f'(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a : $f'(x)=2(e^x-1)^2$

On a : $(e^x-1)^2\geqslant 0$ et $2>0$

Donc : $f'(x)\geqslant 0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2(e^x-1)^2=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

Remarque

On a f' s'annule en 0 et ne change pas le signe.
Donc le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion.
C'est une condition suffisante, mais n'est pas nécessaire

c - Montrons qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1;\ln 4[$ tel que $f(\alpha)=0$

C'est juste une application directe du théorème des valeurs intermediaire

On peut calculer $f(1)$ et $f(\ln 4)$, car f est définie sur $\mathbb{R}$.

Enoncé

Si : $\begin{cases} f \text{ est continue sur l'intervalle fermé } [a;b] \\ f(a).f(b)<0 \end{cases}$ → l'un est positif / l'autre est négatif.

Alors :

- ⊛ l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α de l'intervalle ouvert $]a;b[$
- ⊛⊛ Il existe au moins un réel $\alpha \in]a;b[$ tel que $f(\alpha)=0$
- ⊛⊛⊛ La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α avec $\alpha \in]a;b[$

⊛, ⊛⊛ et ⊛⊛⊛ sont équivalents

Pourquoi $\alpha \in]a;b[$ et non pas $\alpha \in [a;b]$?

On a : $\begin{cases} f(a)\neq 0 \text{ et } f(b)\neq 0 \text{ car } f(a).f(b)<0 \\ f(\alpha)=0 \end{cases}$

Donc $\alpha \neq a$ et $\alpha \neq b$

Et par suite $\alpha \in]a;b[$

Si de plus f est strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$

Alors α est unique.

On a f est continue sur l'intervalle $[1;\ln 4]$

(Composée et somme des fonctions continues)

Et $f(1)=2.1-2+e^{2.1}-4e^{1}=e^{2}-4e=e(e-4)$

→ $f(1)<0$ car $2<e<4$

$$f(\ln 4)=2.\ln 4-2+e^{2\ln 4}-4e^{\ln 4}$$
$$=2.\ln 4-2+e^{\ln 4^2}-4.4$$
$$=2.\ln 4-2+16-16$$
$$=2.\ln 4-2$$

$=2(\ln 4-1)$

On a : $f(\ln 4)>0$ car $\ln 4>1$ (car $4>e$)

Donc : $f(1)\cdot f(\ln 4)<0$

Et puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;\ln 4]$

Alors, d'après TVI, il existe un unique reél α tel que $f(\alpha)=0$

et $\alpha\in]1;\ln 4[$

4 - a - La position relative de la courbe (C_f) et la droite (D).

Rappel

Pour étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=ax+b$, il faut étudier le signe de $(f(x)-(ax+b))$

- Si : $\forall x\in I$; $f(x)-(ax+b)\geqslant 0$

  Alors la courbe (C_f) est au dessus de la droite (Δ)
- Si : $\forall x\in I$; $f(x)-(ax+b)\leqslant 0$

  Alors la courbe (C_f) est au dessous de la droite (Δ)
- Les solutions de l'équation $f(x)=(ax+b)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (Δ)

Étudions le signe de $f(x)-y$ où $y=2x-2$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-y=2x-2+e^{2x}-4e^{x}-(2x-2)$$
$$=e^{2x}-4e^{x}$$
$$=e^{x}(e^{x}-4)$$

Puisque : $e^{x}>0$

Alors le signe de $f(x)-y$ dépend du signe de $e^{x}-4$

- $e^{x}-4=0\Longleftrightarrow e^{x}=4\Longleftrightarrow x=\ln 4$
- $e^{x}-4>0\Longleftrightarrow e^{x}>4\Longleftrightarrow x>\ln 4$

x	$-\infty$		$\ln 4$		$+\infty$
$e^{x}-4$		$-$	0	$+$	

Donc : $\begin{cases} (\forall x\in]\ln 4;+\infty[);f(x)-y>0 \\ (\forall x\in]-\infty;\ln 4[);f(x)-y<0 \end{cases}$

D'où (C_f) est au dessus de (D) sur $]\ln 4;+\infty[$ et elle est au dessous de (D) sur $]-\infty;\ln 4[$

b - Montrons que (C_f) admet un seul point d'inflexion de coordonnées $(0;-5)$

Remarque

On a f' s'annule en 0 et ne change pas le signe.
Donc le point $A(0;f(0))$ est un point d'inflexion, mais il se peut qu'il existe un point d'inflexion autre que A.
Pour cela, il faut calculer et étudier le signe de $f''(x)$

Calculons $f''(x)$

On a f' est dérivable sur $\mathbb{R}$
Soit $x\in\mathbb{R}$.

$(k.u)'=k.u'$ tel que $k\in\mathbb{R}$

$(u^n)'=n.u'.u^{n-1}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' \\ &= \left(2(e^x-1)^2\right)' \\ &= 2.2(e^x-1)'.(e^x-1) \\ &= 4e^x(e^x-1) \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}); f''(x)=4e^x(e^x-1)$

Le signe de $f''(x)$

On a $4e^x>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Donc le signe de $f''(x)$ est le signe de (e^x-1)

$e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=\ln 1 \Leftrightarrow x=0$
$e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>\ln 1 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Puisque f'' s'annule en 0 et change le signe
Alors le point $A(0;f(0))$ est le seul point d'inflexion de (C_f)

c- Représentation de la droite (D) et la courbe (C_f)

Explications

Au voisinage de $+\infty$
On a (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Au voisinage de $-\infty$
On a la droite $(D): y=2x-2$ est une asymptote oblique à (C_f)

La droite $(\mathcal{D})$ passe par $B(0;-2)$ et $I(1;0)$

$f(x)=y \Longleftrightarrow x=\ln 4$

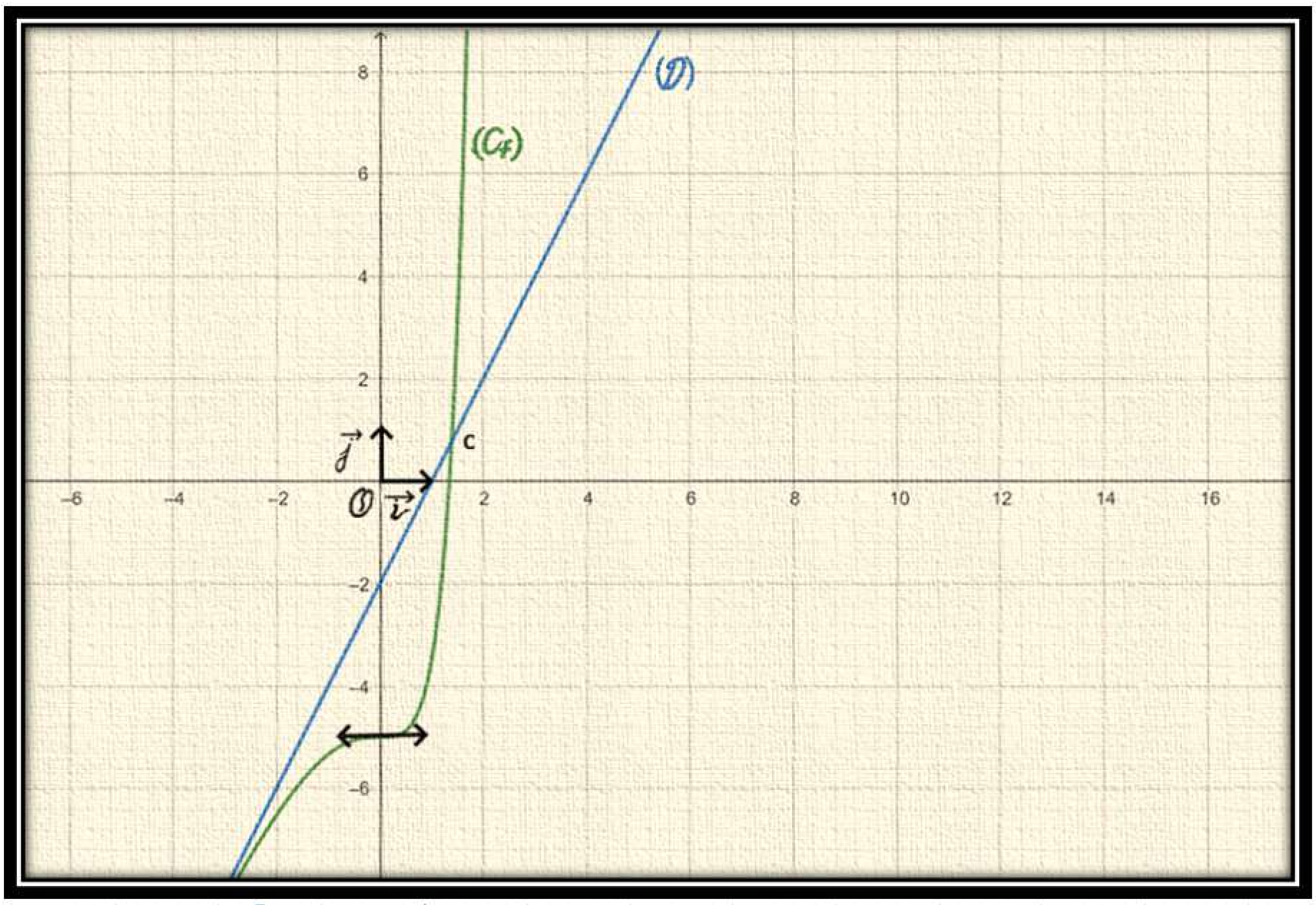
$(\mathcal{D})$ coupe (C_f) au point $C(\ln 4 ; 2\ln 4-2)$

Respecter la position relative de $(\mathcal{D})$ et (C_f)

$f'(0)=0$

Donc (C_f) admet une tangente horizontale au point $A(0;-5)$

(C_f) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α tel que $\alpha \in]1 ; \ln 4[$ $\quad (\alpha \simeq 1,3)$



$\boxed{5}$ - a - Montrons que : $\displaystyle\int_0^{\ln 4} (e^{2x}-4e^x)\,dx = -\frac{9}{2}$

$$\int_0^{\ln 4} (e^{2x}-4e^x)\,dx = \int_0^{\ln 4} \left(\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right)' - 4(e^x)'\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^{\ln 4} - 4\left[e^x\right]_0^{\ln 4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2\ln 4} - e^0\right) - 4\left(e^{\ln 4} - e^0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\ln 4^2} - 1\right) - 4(4-1)$$

$$= \frac{1}{2}(16-1) - 12$$

$$= -\frac{9}{2}$$

$$\boxed{\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]}$$

b - Calculons, en cm^2, l'aire du plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 4$.

Rappel

- L'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (D) d'équation $y=ax+b$, et les deux droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est :

  $\mathcal{A}=\int_a^b |f(x)-y|dx$ (u.a) et $a<b$

  avec (u.a) désigne l'unité des aires $\left(u.a=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\right)$
- Pour enlever la valeur absolue, il faut savoir le signe de $f(x)-y$ (la position relative de (C_f) et la droite (D).)
- Il faut avoir deux droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$.
- L'équation de l'axe des ordonnées est $x=0$

$$\mathcal{A}=\int_0^{\ln 4} |f(x)-y|dx \ (u.a)$$

$|a-b|=\begin{cases} a-b \ ; \ a\geq b \\ b-a \ ; \ a\leq b \end{cases}$

D'après le résultat de la question 4 - a

on a : $(\forall x\in]-\infty;\ln 4]) ; f(x)-y\leq 0$

Donc : $(\forall x\in [0;\ln 4]) ; f(x)-y\leq 0$

Donc : $|f(x)-y|=y-f(x)=2x-2-\left(2x-2+e^{2x}-4e^{x}\right)=-\left(e^{2x}-4e^{x}\right)$

Donc $\mathcal{A}=-\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^{x}\right)dx$ (u.a)

$\int ku=k\int u \quad (k\in\mathbb{R})$

Et d'après le résultat de la question précédente :

$\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^{x}\right)dx=-\frac{9}{2}$ (u.a)

$u.a=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|^2=(1cm)^2=cm^2$

Donc : $\mathcal{A}=-\left(-\frac{9}{2}\right)$ (u.a)

Donc : $\mathcal{A}=\frac{9}{2}\,cm^2$

II - 1 - a - Résolvons l'équation différentielle (E): $y''-3y'+2y=0$

Voir le résumé page

Son équation caractéristique : $(e): r^2-3r+2=0$

son discriminant est : $\Delta=b^2-4ac \quad (a=1, b=-3, c=2)$

$\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1$

Puisque $\Delta>0$

Alors l'équation (e) admet deux solutions distinctes :

$r_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-1}{2}=1$ et $r_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+1}{2}=2$

D'où, les solutions de (E) sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto \alpha e^{x}+\beta e^{2x}$ avec $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

b- Déterminons la fonction g solution de l'équation différentielle (E) telles que : $g(0)=-3$ et $g'(0)=-2$

(Il faut juste déterminer les valeurs de α et β)

On a g est une solution de (E)

Donc $g(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{2x}$

On a $g(0)=-3 \Longleftrightarrow \alpha e^{0}+\beta e^{0}=-3$

$\Longleftrightarrow \alpha+\beta=-3$ ⊛

Pour la deuxième condition, il faut calculer $g'(x)$

On a g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$

$\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}$

$(e^{x})'=e^{x}$

$$\begin{aligned} g'(x)&=\left(\alpha e^{x}+\beta e^{2x}\right)' \\ &=\alpha(e^{x})'+\beta(e^{2x})' \\ &=\alpha e^{x}+\beta(2x)'e^{2x} \\ &=\alpha e^{x}+2\beta e^{2x} \end{aligned}$$

On a $g'(0)=-2 \Longleftrightarrow \alpha e^{0}+2\beta e^{0}=-2$

$\Longleftrightarrow \alpha+2\beta=-2$ ⊛⊛

D'après ⊛ et ⊛⊛ on obtient le système suivant

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ \alpha+2\beta=-2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha=-3-\beta\\ -3-\beta+2\beta=-2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha=-3-1\\ \beta=3-2=1\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=1\end{cases}$$

Rappel

Pour résoudre un système, on a plusieures méthodes, mais la méthode la plus utilisée est la méthode de Cramer (Les déterminants D; D_x et D_y.)

Ça sera mieux d'utiliser la méthode de Cramer. (Les déterminants)

$\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$

$D=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$

$D_x=\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}=cb'-bc'$

$D_y=\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}=ac'-a'c$

si $D\neq0$

Alors $x=\frac{D_x}{D}$ et $y=\frac{D_y}{D}$

D'où : $g(x)=-4e^{x}+e^{2x}$; pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$- Soit h la fonction définie sur l'intervalle $I=]\ln 4;+\infty[$ par : $h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)$

Remarquons d'abord que h est bien définie sur I

$e^{2x}-4e^{x}=f(x)-y$ avec $y=2x-2$ (la droite (D))

Et d'après le résultat de la question $\boxed{4}$-a- de la première partie, on a : $(\forall x\in]\ln 4;+\infty[);f(x)-y>0$

Donc : $(\forall x\in]\ln 4;+\infty[);e^{2x}-4e^{x}>0$

D'où h est bien définie sur l'intervalle I

(Mais ce n'est pas obligé de prouver ceci)

a- Montrons que h admet une fonction réciproque h^{-1}

La continuité de h sur I

On a : $h(x)=\ln(g(x))$

Et puisque g est une solution de l'équation différentielle (E)

Alors g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc g est continue sur $\mathbb{R}$

Donc g est continue sur I

Et puisque : $(\forall x\in I);g(x)>0$

(D'après le résultat de la question $\boxed{4}$-a- de I)

> Si u est une fonction continue sur un intervalle I, avec : $(\forall x\in I);\ u(x)>0$
> Alors la fonction $x\longmapsto \ln(u(x))$ est continue sur I

Alors $h:x\longmapsto \ln(g(x))$ est continue sur I

La monotonie de h

Ici, on peut écrire $h(x)$ sous la forme : $h(x)=\ln\left(e^{x}(e^{x}-4)\right)$ puis utiliser la définition, ou bien on calcule $h'(x)$

On a h est dérivable sur I

Soit $x\in I$

On a $h'(x)=\left(\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)\right)'$

$$=\frac{\left(e^{2x}-4e^{x}\right)'}{e^{2x}-4e^{x}}$$

$$=\frac{(2x)'\cdot e^{2x}-4(e^{x})'}{e^{2x}-4e^{x}}$$
$$=\frac{2e^{2x}-4e^{x}}{e^{2x}-4e^{x}}$$
$$=\frac{2e^{x}(e^{x}-2)}{e^{2x}-4e^{x}}$$

Donc : $(\forall x\in I)$; $h'(x)=\dfrac{2e^{x}(e^{x}-2)}{e^{2x}-4e^{x}}$

Puisque : $e^{2x}-4e^{x}>0$ et $2e^{x}>0$, pour tout $x\in I$

Donc le signe de $h'(x)$ est le signe de $(e^{x}-2)$

On a : $x>\ln 4 \Rightarrow e^{x}>4$
$\Rightarrow e^{x}-2>4-2$
$\Rightarrow e^{x}-2>2$
$\Rightarrow e^{x}-2>0$

Donc : $(\forall x\in I)$; $h'(x)>0$

Donc h est strictement croissante sur I

Calculons : $\lim\limits_{\substack{x\to \ln 4\\ x>\ln 4}} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to \ln 4\\ x>\ln 4}} h(x)=\lim\limits_{x\to \ln 4^{+}} \ln(e^{x}(e^{x}-4))$

On pose $t=e^{x}(e^{x}-4)$

Si : $x\longrightarrow \ln 4^{+}$

Alors : $t\longrightarrow 0^{+}$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x\to \ln 4^{+}} \ln(e^{x}(e^{x}-4))=\lim\limits_{t\to 0^{+}} \ln t=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{x}(e^{x}-4))$

On pose $t=e^{x}(e^{x}-4)$

Si : $x\longrightarrow+\infty$

Alors : $t\longrightarrow+\infty$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{x}(e^{x}-4))=\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t=+\infty$

Conclusion

دُعاءُ

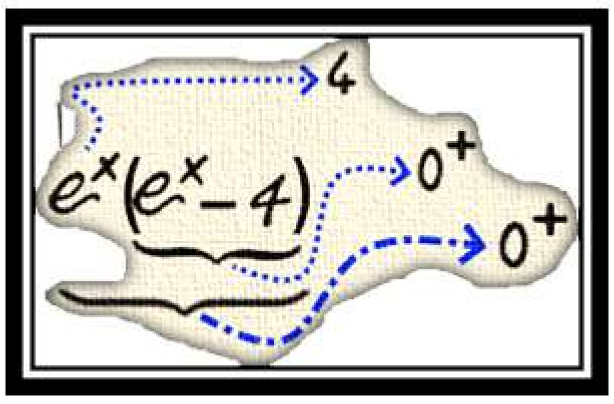
أَبِي وَ أُمِّي

اللَّهُمَّ حَرِّمْ جَسَدَ أُمِّي وَ أَبِي عَلَى النَّارِ
وَ أَمِّنْهُمْ مِنْ عَذَابِكَ يَوْمَ تَبْعَثُ عِبَادَكَ

Normalement pour : $f(x)=\ln(u(x))$; on aura toujours $u(x)>0$

$f(x)=\ln(u(x)) \longrightarrow u(x)>0$

$f(x)=\ln|u(x)| \longrightarrow u(x)\neq 0$



$\lim\limits_{t\to 0^{+}} \ln t=-\infty$

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t}=+\infty$

On a h est continue et strictement croissante sur l'intervalle I

Donc h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J tel que : $J = h(]\ln 4 ; +\infty[)$

$$=]\lim_{x \to \ln 4^+} h(x) ; \lim_{x \to +\infty} h(x)[$$
$$=]-\infty ; +\infty[$$
$$= \mathbb{R}$$

6. Vérifions que : $h(\ln 5) = \ln 5$

On a : $h(x) = \ln(e^x(e^x - 4))$, pour tout $x \in I$

Donc : $h(\ln 5) = \ln\left(e^{\ln 5}\left(e^{\ln 5} - 4\right)\right)$
$$= \ln(5(5-4))$$
$$= \ln 5$$

D'où : $h(\ln 5) = \ln 5$

$\boxed{f^{-1}(\beta) = \alpha}$

Soit $f(\alpha) = \beta$
Si f est dérivable en α avec $f'(\alpha) \neq 0$
Alors f^{-1} est dérivable en β et on a
$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))} = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

Calculons : $(h^{-1})'(\ln 5)$

On a : $h(\ln 5) = \ln 5$

Donc : $h^{-1}(\ln 5) = \ln 5$

$$(h^{-1})'(\ln 5) = \frac{1}{h'(\ln 5)}$$

On a : $h'(x) = \dfrac{2e^x(e^x - 2)}{e^{2x} - 4e^x} = \dfrac{2e^x(e^x - 2)}{e^x(e^x - 4)}$

Donc : $h'(\ln 5) = \dfrac{2.5(5-2)}{5(5-4)} = 6$ $\quad \boxed{e^{\ln 5} = 5}$

D'où : $(h^{-1})'(\ln 5) = \dfrac{1}{6}$

Première partie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1. a. Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ et interpréter le résultat géométriquement

   b. Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement.

2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b. Montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3. a. Montrer que : $f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)}{x^3}e^{x-4}$, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

   b. Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\ x^2-2x+4>0$

   c. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0;2]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $[2;+\infty[$

   d. Dresser le tableau de variations de f

4. Représenter (C_f)

5. a. Vérifier que la fonction $H : x\longmapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une primitive de la fonction $h : x\longmapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2;4]$

   b. Vérifier que : $f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$

   c. Calculer l'intégrale : $\int_2^4 e^{x-4}dx$

   d. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=2$ et $x=4$.

Deuxième partie

1 - On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[2;4]$ par : $g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$

a - Calculer $g(4)$

b - Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2;4]$:

$$g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)$$

c - Vérifier que : $\forall x\in[2;4]$; $e^{x-4}-1\leqslant 0$; puis en déduire que pour tout $x\in[2;4]$; $g(x)\leqslant 0$

2 - a - Vérifier que : $\forall x\in[2;4]$; $f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)\cdot g(x)$

b - En déduire que : $\forall x\in[2;4]$; $f(x)\leqslant x$

3 - Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=f(u_n) ; n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a - Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $2\leqslant u_n\leqslant 4$

b - Déterminer la monotonie de (u_n) et en déduire qu'elle est convergente

c - Calculer la limite de la suite (u_n)

REPONSE

1 - a - Vérifions que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

Remarque

Au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et pour éviter le changement de variable, ça sera mieux d'écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}=2+8\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)e^{x}\cdot e^{-4}=2+\frac{8}{e^4}\left(1-\frac{2}{x}\right)e^{x}$$

Avec e^4 est un constant positif.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)&=\lim_{x\to-\infty} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}\\&=\lim_{x\to-\infty} 2+8\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)^2e^{x}\cdot e^{-4}\\&=\lim_{x\to-\infty} 2+\frac{8}{e^4}\left(1-\frac{2}{x}\right)^2e^{x}\\&=2\end{aligned}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0 \end{cases}$

Interprétation géométrique

On a : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Donc la droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$

Remarque

Au voisinage de $-\infty$, on a : $\begin{cases} \frac{8}{e^4}\left(1-\frac{2}{x}\right)e^x \longrightarrow 0^+ \\ \frac{8}{e^4}\left(1-\frac{2}{x}\right)e^x > 0 \end{cases}$

Donc $f(x)-2>0$

Donc (C_f) est au dessus de la droite d'équation $y=2$

b- Vérifions que : $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$$
$$= +\infty$$

Car : $\begin{cases} \lim_{x \to 0} \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 = +\infty \\ \lim_{x \to 0} e^{x-4} = e^{-4} \end{cases}$

Ici, c'est pas la peine d'écrire $f(x)$ sous forme de $f(x) = 2+\frac{8}{e^4}\left(1-\frac{2}{x}\right)e^x$ car $x \longrightarrow 0$ et non pas $x \longrightarrow \infty$

Remarque

On a $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x-2}{x}\right) = \pm\infty$

Mais : $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 = +\infty$

Interprétation géométrique

On a $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à (C_f)

$\boxed{2}$ -a- Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2+\frac{8}{e^4}\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x$$
$$= +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{8}{e^4}\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{8}{e^4} \end{cases}$

b- Montrons que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{8}{e^4}\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\frac{8}{e^4}\left(1-\frac{2}{x}\right)^2\cdot\frac{e^x}{x}$$
$$=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty}$$

Car : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^4}\left(1-\frac{2}{x}\right)^2=\frac{8}{e^4}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\end{cases}$

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3 - a - Montrons que : $f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)}{x^3}e^{x-4}$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$

$$f'(x)=\left(2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}\right)'$$
$$=0+8\left(\left(\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\right)' e^{x-4}+\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\left(e^{x-4}\right)'\right)$$
$$=8\left(2\left(\frac{x-2}{x}\right)'\left(\frac{x-2}{x}\right)^{2-1}e^{x-4}+\left(\frac{x-2}{x}\right)^2(x-4)'e^{x-4}\right)$$
$$=8\left(2\frac{\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix}}{x^2}\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}+\left(\frac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}\right)$$
$$=8\left(2\frac{2}{x^2}\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}+\left(\frac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}\right)$$
$$=8\left(\frac{4}{x^2}\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}+\left(\frac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}\right)$$
$$=8\left(\frac{4(x-2)}{x^3}e^{x-4}+\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}\right)$$

$$\boxed{(k u)'=k.u' \text{ tel que } k\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{(u.v)'=u'.v+u.v'}$$

$$\boxed{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}}$$

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}}$$

$$\boxed{\left(u^r\right)'=r.u'.u^{r-1}}$$

$$=8\left(\frac{4(x-2)}{x^3}e^{x-4}+\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}\right)$$
$$=8\frac{(x-2)}{x^3}e^{x-4}\left(4+x(x-2)\right)$$
$$=8\frac{(x-2)}{x^3}\left(4+x^2-2x\right)e^{x-4}$$
$$=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)}{x^3}e^{x-4}$$

D'où : $f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)}{x^3}e^{x-4}$, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

b- Vérifions que : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x^2-2x+4>0$

C'est le début d'une identité remarquable

On peut aussi calculer le discriminant Δ et trouver $\Delta<0$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a : $x^2-2x+4=x^2-2x+1+3$
$=(x-1)^2+3$

Puisque : $(x-1)^2\geqslant 0$

Alors : $(x-1)^2+3\geqslant 3$

Et $3>0$

Donc : $(x-1)^2+3>0$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,x^2-2x+4>0$

c- La monotonie de f

Étudions le signe de $f'(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}^*$

On a : $f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)}{x^3}e^{x-4}$
$=\frac{8x(x-2)(x^2-2x+4)}{x^4}e^{x-4}$

Le x^3 du dénominateur peut être positif ou négatif. Pour cela, ça sera mieux de multiplier le nominateur et le dénominateur par x

Puisque : $\frac{8(x^2-2x+4)}{x^4}e^{x-4}>0$

Alors le signe de $f'(x)$ est le signe de $x(x-2)$

- $x=0$
- $(x-2)=0 \Longleftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ou tout simplement

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	signe de a		signe de $-a$		signe de a

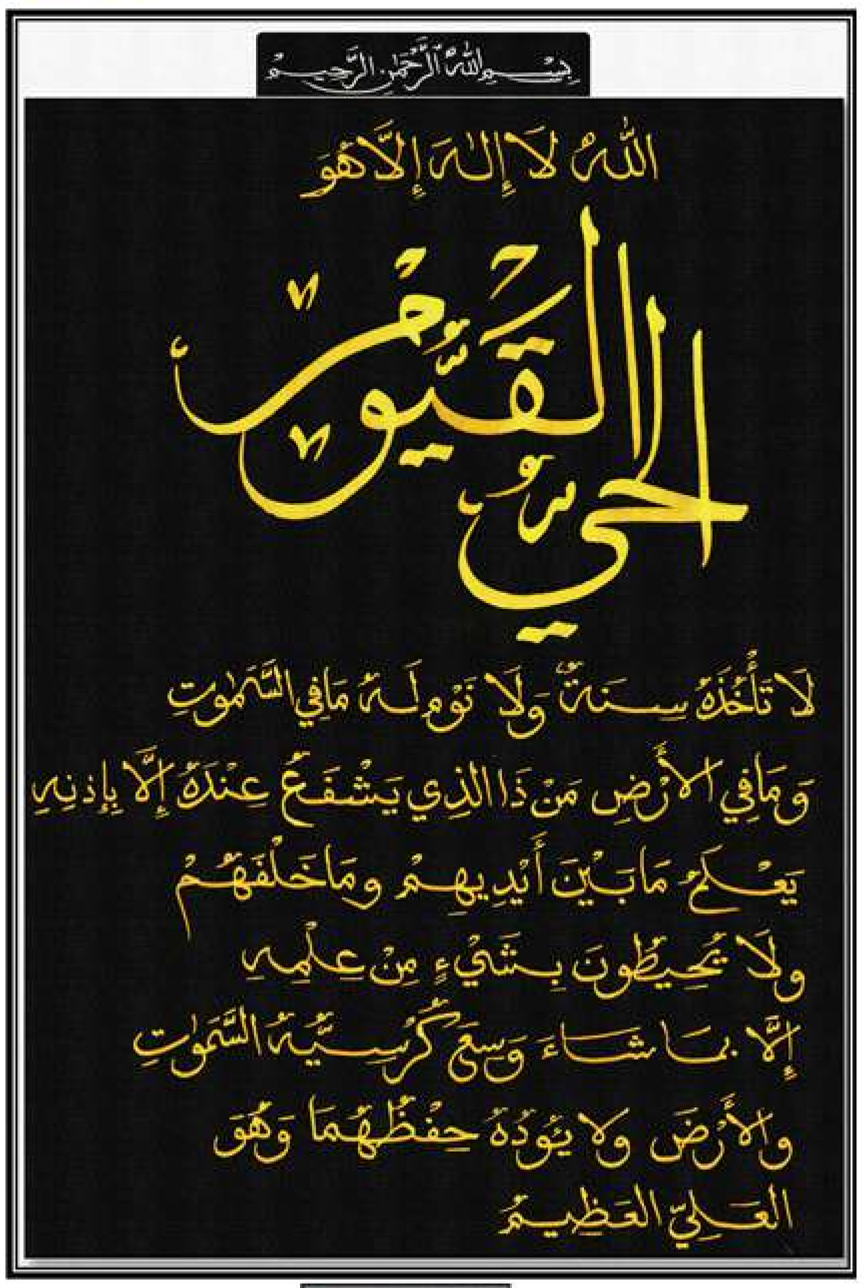
Donc :

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$-$	0	$+$

Attention : $0\notin D_f$ (Les deux barres)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(2)=2$



$\boxed{4}$ - Représentation de (C_f)

Explications

- On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

  $x=0$ asymptote verticale à (C_f)

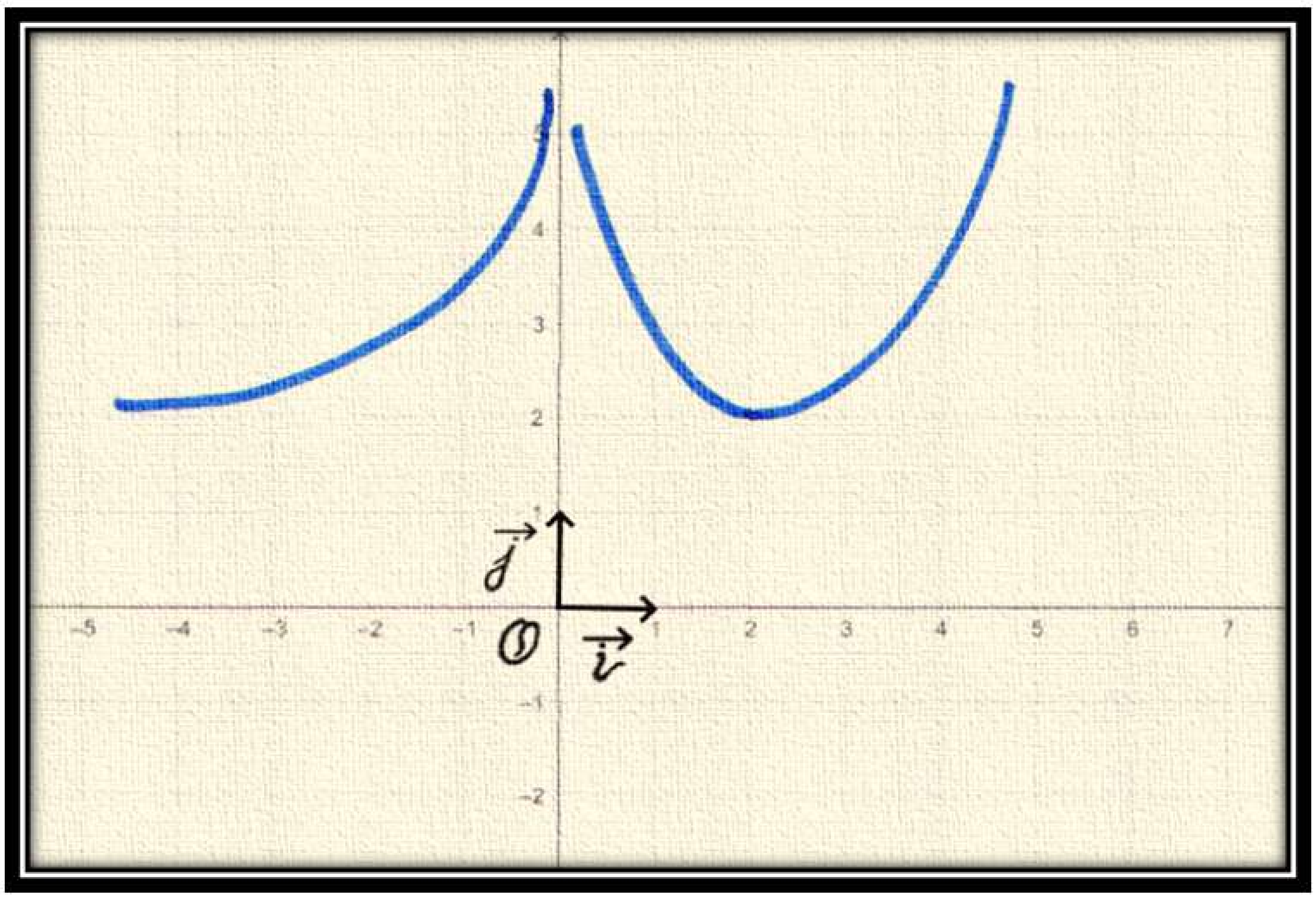
- La droite $y=2$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$ et (C_f) est au dessus de $(\Delta) : y=2$

- Au voisinage de $+\infty$, on a (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonneés et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- D'après le tableau de variations de f, on a $f'(2)=0$

  Donc (C_f) admet une tangente horizontale au point $A(2;2)$ $(f(2)=2)$

البشير الحجاجي



⑤ a- Vérifions que $H : x \longmapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2;4]$

Rappel

Pour montrer qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I, il suffit de vérifier que : $\forall x \in I \,;\, F'(x) = f(x)$

On a H est dérivable sur $[2;4]$

Soit $x \in [2;4]$

La priorité est a $(uv)'$

$$H'(x) = \left(\frac{1}{x}e^{x-4}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{x-4} + \left(\frac{1}{x}\right)(x-4)' e^{x-4}$$
$$= -\frac{1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}e^{x-4}$$
$$= -\frac{1}{x^2}e^{x-4} + \frac{x}{x^2}e^{x-4}$$
$$= \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$$
$$= h(x)$$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}$

Donc : $\forall x \in [2;4] \,;\, H'(x) = h(x)$

D'où H est une primitive de h sur $[2;4]$

b- Vérifions que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \,;\, f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$

On a : $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$
$$= 2 + 8\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}$$

$$=2+8\frac{x^2-4x+4}{x^2}e^{x-4}$$
$$=2+\frac{8x^2-32x+32}{x^2}e^{x-4}$$
$$=2+\left(\frac{8x^2}{x^2}+\frac{-32x+32}{x^2}\right)e^{x-4}$$
$$=2+\left(8+\frac{-32(x-1)}{x^2}\right)e^{x-4}$$
$$=2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R}^*;\ f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$

$\int u'e^{u}=\left[e^{u}\right]$

c~ Calculons : $\int_2^4 e^{x-4}dx$

On a : $\int_2^4 e^{x-4}dx=\int_2^4(x-4)'e^{x-4}dx=\left[e^{x-4}\right]_2^4=e^{4-4}-e^{2-4}=e^0-e^{-2}=1-e^{-2}$

D'où : $\int_2^4 e^{x-4}dx=1-e^{-2}$

c~ Calculons l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=2$ et $x=4$

Remarque

Remarquons d'abord que : $\forall x\in[2;4];\ f(x)\geq 0$

Donc : $\forall x\in[2;4];\ |f(x)|=f(x)$

Il faut prendre par considération les deux résultats précédents.

$$\mathcal{A}=\int_2^4|f(x)|dx\ (u.a)$$
$$=\int_2^4 f(x)dx\ (u.a)$$
$$=\int_2^4 2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}dx\ (u.a)$$
$$=\int_2^4 2dx+8\int_2^4 e^{x-4}dx-32\int_2^4\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}dx$$
$$=\int_2^4(2x)'dx+8(1-e^{-2})-32\int_2^4 H'(x)dx\ (u.a)$$
$$=[2x]_2^4+8-8e^{-2}-32[H(x)]_2^4\ (u.a)$$
$$=2.4-2.2+8-8e^{-2}-32(H(4)-H(2))\ (u.a)$$
$$=8-4+8-8e^{-2}-32\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{-2}\right)(u.a)$$
$$=12-8e^{-2}-8+16e^{-2}\ (u.a)$$

$H(4)=\frac{1}{4}e^{4-4}=\frac{1}{4}e^0=\frac{1}{4}$

$H(2)=\frac{1}{2}e^{2-4}=\frac{1}{2}e^{-2}$

$=4+8e^{-2}\ (u.a)$ $\boxed{u.a=\|\vec{i}\|^2=1cm^2}$

D'où : $\mathcal{A}=\left(4+8e^{-2}\right)cm^2$

Deuxième partie

$\boxed{1}$ - a - Calculons $g(4)$

On a : $g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$, pour tout $x\in[2;4]$

Donc : $g(4)=8(4-2)e^{4-4}-4^2=16-16=0$

b - Vérifions que : $\forall x\in[2;4]\ ;\ g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)$

On a :

$$\begin{aligned}-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)&=-(x^2-8x+16)e^{x-4}+x^2e^{x-4}-x^2\\&=-\cancel{x^2e^{x-4}}+8xe^{x-4}-16e^{x-4}+\cancel{x^2e^{x-4}}-x^2\\&=8xe^{x-4}-16e^{x-4}-x^2\\&=8(x-2)e^{x-4}-x^2\\&=g(x)\end{aligned}$$

D'où : $\forall x\in[2;4]\ ;\ g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)$

c - Vérifions que : $\forall x\in[2;4]\ ;\ e^{x-4}-1\leqslant 0$

Soit $x\in[2;4]$

$$\begin{aligned}x\leqslant 4&\Longleftrightarrow x-4\leqslant 0\\&\Longleftrightarrow e^{x-4}\leqslant e^0\\&\Longleftrightarrow e^{x-4}\leqslant 1\\&\Longleftrightarrow e^{x-4}-1\leqslant 0\end{aligned}$$

D'où : $\forall x\in[2;4]\ ;\ e^{x-4}-1\leqslant 0$

Déduisons que : $\forall x\in[2;4]\ ;\ g(x)\leqslant 0$

Soit $x\in[2;4]$

$$\text{On a : }\begin{cases}x^2>0\\e^{x-4}-1\leqslant 0\\-(x-4)^2\leqslant 0\\e^{x-4}>0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}-(x-4)^2e^{x-4}\leqslant 0\\x^2(e^{x-4}-1)\leqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow -(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)\leqslant 0\\&\Longleftrightarrow g(x)\leqslant 0\end{aligned}$$

D'où : $\forall x\in[2;4]\ ;\ g(x)\leqslant 0$

$\boxed{2}$ - a - Vérifions que : $\forall x\in[2;4]\ ;\ f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)\cdot g(x)$

Soit $x\in[2;4]$

$f(x)-x=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}-x$

$=8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}-x+2$

$=8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}-(x-2)$

$=8\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}-(x-2)$

$=\frac{x-2}{x^2}\left(8(x-2)e^{x-4}-x^2\right)$

$=\frac{x-2}{x^2}\cdot g(x)$

D'où : $\forall x\in[2;4]\,;\ f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)\cdot g(x)$

b- Déduisons que : $\forall x\in[2;4]\,;\ f(x)\leqslant x$

Soit $x\in[2;4]$

On a : $x\in[2;4] \Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$

$\Rightarrow 0\leqslant x-2\leqslant 2$

$\Rightarrow x-2\geqslant 0$

Et puisque $x^2\geqslant 0$ et $g(x)\leqslant 0$ (d'après le résultat de la question précédente)

Alors : $\left(\frac{x-2}{x^2}\right)\cdot g(x)\leqslant 0$

D'où : $\forall x\in[2;4]\,;\ f(x)\leqslant x$

$\boxed{3}$- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=f(u_n)\,;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a- Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\ 2\leqslant u_n\leqslant 4$

Initialisation

Pour $n=0$

On a $u_0=3$

Donc $2\leqslant u_0\leqslant 4$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que : $2\leqslant u_n\leqslant 4$

Montrons que : $2\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$

On a : $2\leqslant u_n\leqslant 4$ (D'après la supposition)

Et puisque f est strictement croissante sur $[2;4]$

Alors : $f(2)\leqslant f(u_n)\leqslant f(4)$

Donc : $2\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$

$f(2)=2+8\left(\frac{2-2}{2}\right)^2 e^{2-4}=2$

$f(4)=2+8\left(\frac{4-2}{4}\right)^2 e^{4-4}=4$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\ 2\leqslant u_n\leqslant 4$

b- La monotonie de (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

Et puisque : $\forall x \in [2;4] ; f(x) \leq x$ (D'après le résultat de la question 2-b)

Et : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in [2;4]$

Alors : $f(u_n) \leq u_n$

Donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

D'où (u_n) est une suite décroissante.

Déduisons que (u_n) est convergente.

Puisque (u_n) est décroissante et minoreé par

Alors (u_n) est convergente.

c- Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Rappel

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N}$ avec $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in \mathrm{I}$

Si : $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ f \text{ est continue sur l'intervalle } \mathrm{I} \\ f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I} \\ (u_n) \text{ est convergente} \end{cases}$

Alors la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation $\boxed{f(x) = x}$

Soit $\mathrm{I} = [2;4]$

Vérifions d'abord que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$

On a f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I

Donc : $f(\mathrm{I}) = f([2;4]) = [f(2) ; f(4)] = [2;4]$

Donc : $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in \mathrm{I}$

Puisque : $\begin{cases} u_0 \in I \\ f \text{ est continue sur l'intervalle } I \\ f(I) \subset I \\ (u_n) \text{ est convergente} \end{cases}$

Alors la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation $\boxed{f(x)=x}$

$$f(x)=x \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x^2}\right)\cdot g(x)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x^2}\right)=0 \text{ ou } g(x)=0$$
$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ ou } g(x)=0$$

Résolvons l'équation $g(x)=0$

$$g(x)=0 \Leftrightarrow -(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)=0$$

Et puisque : $\begin{cases} -(x-4)^2 \leqslant 0 \\ (e^{x-4}-1) \leqslant 0 \\ e^{x-4}>0 \\ x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(x-4)^2e^{x-4} \leqslant 0 \\ x^2(e^{x-4}-1) \leqslant 0 \end{cases}$

Si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$
Alors $a+b=0 \Rightarrow a=0$ et $b=0$

Alors: $g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-4)^2e^{x-4}=0 \\ x^2(e^{x-4}-1)=0 \\ x \in [2;4] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ e^{x-4}-1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=4$$

$$e^{x-4}-1=0 \Leftrightarrow e^{x-4}=1 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$$

Donc, on aura : $f(x)=x \Leftrightarrow x=2$ ou $x=4$

Et puisque (u_n) est décroissante et $2 \leqslant u_n \leqslant 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors $\lim u_n = 2$

Remarque

Si (u_n) est décroissante

Alors: $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leqslant u_0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leqslant 3$

Et par suite : $\forall n \in \mathbb{N};\ 2 \leqslant u_n \leqslant 3$

2020 ORDINAIRE 1

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$
par : $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$

1) a) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

b) Montrer que g est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$

c) En déduire que : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ 0\leqslant \ln x\leqslant 2\sqrt{x}$
(Remarquer que : $2\sqrt{x}-2\leqslant 2\sqrt{x}$)

d) Montrer que : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ 0\leqslant \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}\leqslant \dfrac{8}{\sqrt{x}}$

Puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

2) a) Montrer que la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par :
$G(x)=x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ est une primitive de la fonction g.

b) Calculer l'integrale $\int_1^4 g(x)\,dx$

REPONSE

1) a) Montrons que : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

On a g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Soit $x\in]0;+\infty[$

$(k\,u)'=k.u'$ tel que $k\in\mathbb{R}$

$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned} g'(x)&=(2\sqrt{x}-2-\ln x)'\\ &=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-0-\frac{1}{x}\\ &=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\\ &=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\\ &=\frac{\sqrt{x}-1}{x}\end{aligned}$$

D'où : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

b) La monotonie de g sur l'intervalle $[1;+\infty[$

Étudions le signe de $g'(x)$ sur $[1;+\infty[$

Soit $x\in[1;+\infty[$

On a : $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$

Puisque : $x>0$

Alors le signe de $g'(x)$ est le signe de $\sqrt{x}-1$

On a $x\geqslant 1 \Rightarrow \sqrt{x}\geqslant 1$

$\Rightarrow \sqrt{x}-1\geqslant 0$

Donc : $\forall x\in[1;+\infty[\,;\, g'(x)\geqslant 0$

D'où g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

Normalement il faut étudier le signe de $g'(x)$ sur $]1;+\infty[$; mais ici g est dérivable en 1.
Donc pas de problème.

c- Déduisons que : $\forall x\in[1;+\infty[\,;\,0\leqslant \ln x\leqslant 2\sqrt{x}$

Remarque

Ici, il nous demande de montrer que $\ln x$ est compris entre un nombre (0) et une fonction $(x\longmapsto 2\sqrt{x})$

- Pour montrer que $\ln x\geqslant 0$, on peut juste utiliser le fait que $x\geqslant 1$
- Pour montrer que $\ln x\leqslant 2\sqrt{x}$, il faut étudier une telle fonction (g dans notre cas)

Soit $x\in[1;+\infty[$

- $x\geqslant 1 \Rightarrow \ln x\geqslant \ln 1$

$\Rightarrow \ln x\geqslant 0$

Donc : $\forall x\in[1;+\infty[\,;\, \ln x\geqslant 0$ ⊛

- On a g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

Donc : $x\geqslant 1\Rightarrow g(x)\geqslant g(1)$

$\Rightarrow 2\sqrt{x}-2-\ln x\geqslant 0 \qquad (g(1)=0)$

$\Rightarrow 2\sqrt{x}-2\geqslant \ln x$

$\Rightarrow \ln x\leqslant 2\sqrt{x}-2$

Et puisque : $2\sqrt{x}-2\leqslant 2\sqrt{x}$

Alors : $\ln x\leqslant 2\sqrt{x}$

Donc : $\forall x\in[1;+\infty[\,;\, \ln x\leqslant 2\sqrt{x}$ ⊛⊛

D'après ⊛ et ⊛⊛, on déduit que : $\forall x\in[1;+\infty[\,;\,0\leqslant \ln x\leqslant 2\sqrt{x}$

d- Montrons que : $\forall x\in[1;+\infty[\,;\,0\leqslant \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leqslant \frac{8}{\sqrt{x}}$

Soit $x \in [1;+\infty[$

D'après le résultat de la question précédente, on a :

$0 \leqslant \ln x \leqslant 2\sqrt{x}$

$0 \leqslant \ln x \leqslant 2\sqrt{x} \Rightarrow 0^3 \leqslant (\ln x)^3 \leqslant (2\sqrt{x})^3$

$\Rightarrow 0 \leqslant (\ln x)^3 \leqslant 8x\sqrt{x}$

$\Rightarrow \dfrac{0}{x^2} \leqslant \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leqslant \dfrac{8x\sqrt{x}}{x^2}$

$\Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leqslant \dfrac{8}{\sqrt{x}}$

$\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2}\sqrt{x} = x\sqrt{x} \quad (x \geqslant 0)$

$\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

D'où : $\forall x \in [1;+\infty[\,; 0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leqslant \dfrac{8}{\sqrt{x}}$

Déduisons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

On a : $\forall x \in [1;+\infty[\,; 0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leqslant \dfrac{8}{\sqrt{x}}$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8}{\sqrt{x}} = 0$

Alors, d'après le théorème de gendarme

on aura bien $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} = 0$

2 - a - Montrons que la fonction $G : x \longmapsto x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)$

est une primitive de g sur $]0;+\infty[$

Rappel

Pour montrer qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I, il suffit de vérifier que : $\forall x \in I\,;\, F'(x) = f(x)$

On a G est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$

$G'(x) = \left(x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)\right)'$

$= x'\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right) + x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)'$

$= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + x\left(0 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)$

$= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + x\left(\frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)$

$= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + \frac{2x}{3\sqrt{x}} - 1$

$$=-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+x\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+\frac{2x}{3\sqrt{x}}-1$$
$$\boxed{\frac{x}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}}$$
$$=-2-\ln x+\frac{4}{3}\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x}$$
$$=-2-\ln x+\frac{6}{3}\sqrt{x}$$
$$=-2-\ln x+2\sqrt{x}$$
$$=2\sqrt{x}-2-\ln x$$

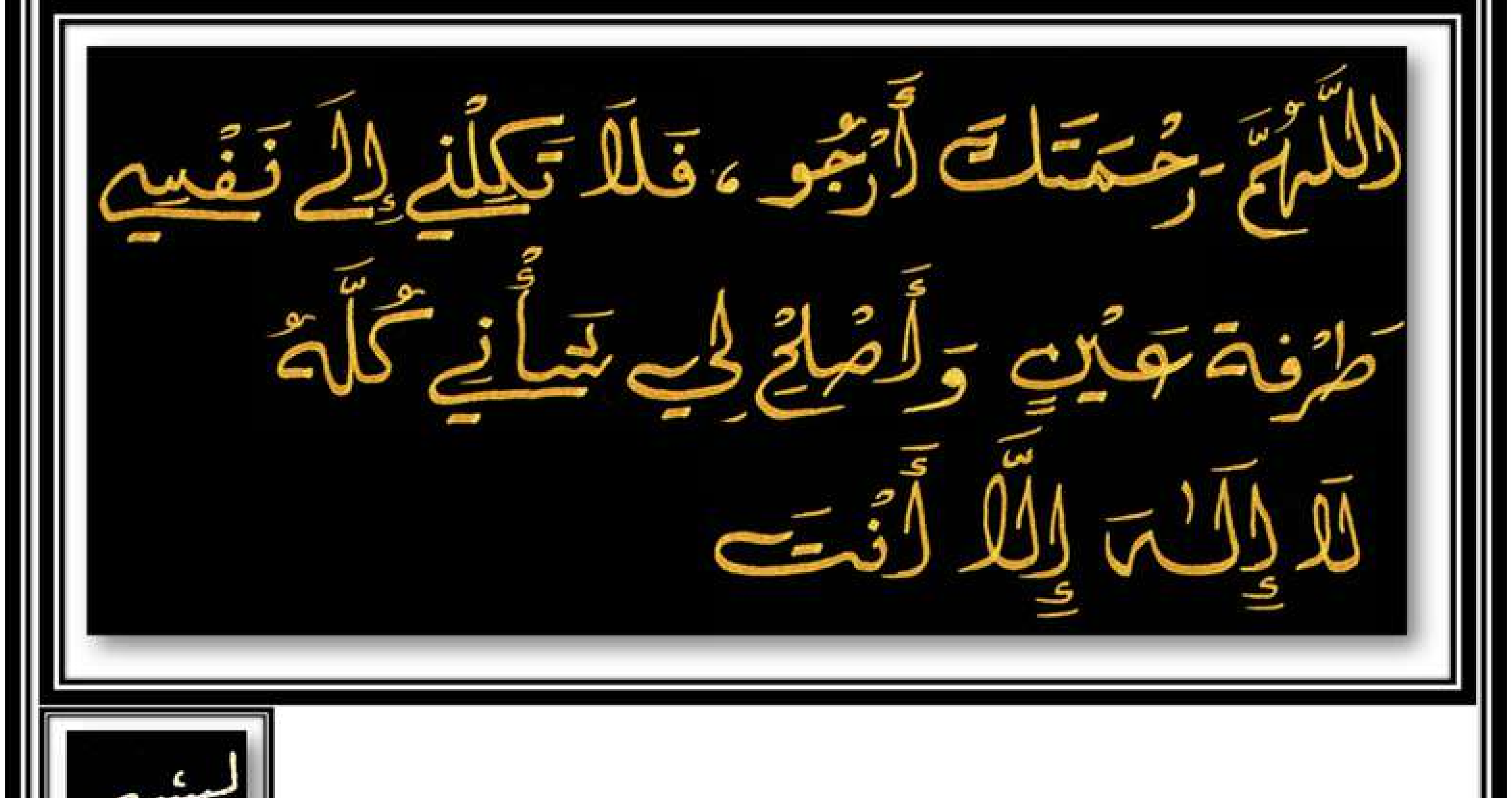
Donc : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ G'(x)=g(x)$

D'où G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$

6- Calculons l'intégrale : $\int_1^4 g(x)dx$

$$\int_1^4 g(x)dx=[G(x)]_1^4$$
$$=G(4)-G(1)$$
$$=4\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{4}-\ln 4\right)-1\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{1}-\ln 1\right)$$
$$=-4+\frac{16}{3}.2-4\ln 4+1-\frac{4}{3}$$
$$=-3+\frac{32-4}{3}-4\ln 4$$
$$=\frac{19}{3}-4\ln 4$$

D'où : $\int_1^4 g(x)dx=\frac{19}{3}-4\ln 4$



2021 RATTRAPAGE 1

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x+\ln x$

1. Montrer que h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
2. Déterminer $h(]0;+\infty[)$
3. a. En déduire que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$

   b. Montrer que : $0<\alpha<1$
4. a. Vérifier que : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\frac{1}{\alpha}$

   b. En déduire que : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)>2$

REPONSE

1. Montrons que h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

On a h est dérivable sur $]0;+\infty[$

Soit $x\in]0;+\infty[$

$h'(x)=(x+\ln x)'=1+\frac{1}{x}$

Donc : $\forall x\in]0;+\infty[\;;\; h'(x)=1+\frac{1}{x}$

Puisque $x>0$

Alors : $\begin{cases} 1>0 \\ \frac{1}{x}>0 \end{cases}$

Donc : $\forall x\in]0;+\infty[\;;\; 1+\frac{1}{x}>0$

D'où h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

2. Déterminons $h(]0;+\infty[)$

Calculons d'abord $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$

$\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x+\ln x=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\ln x=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Puisque h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Alors : $h(]0;+\infty[)=]\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)[=]-\infty;+\infty[$

$\boxed{3}$ - a - Déduisons que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$

Rappel

> Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $\mathbf{I}$ et si $f(\mathbf{I})=\mathbf{J}$
> Alors pour tout $y\in\mathbf{J}$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution α sur $\mathbf{I}$

On a h est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Et on a : $h(]0;+\infty[)=]-\infty;+\infty[$

Puisque : $0\in]-\infty;+\infty[$

Alors l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$

b - Montrons que : $0<\alpha<1$

On a $h(]0;1])=]\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) ; h(1)]=]-\infty;1]$

Et puisque : $0\in]-\infty;1]$

Alors l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique β sur $]0;1]$

> Ici, on ne peut pas utiliser **TVI** car, on a pas le droit de calculer $h(0)$
> Il faut donc appliquer le rappel précédent

Et puisque α est l'unique solution de l'equation $h(x)=0$

Alors $\beta=\alpha$

D'où : $0<\alpha<1$ ($\alpha\neq 1$ car $h(\alpha)=0$ et $h(1)=1$)

4 - a - Vérifions que : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\frac{1}{\alpha}$

On a : $h(x)=x+\ln x$, pour tout $x\in]$

Donc : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}+\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\frac{1}{\alpha}-\ln\alpha$ car $\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\ln\alpha$

Et puisque $h(\alpha)=0$ car α est la solution de l'équation $h(x)=0$

Alors : $\alpha+\ln\alpha=0$

Donc : $\ln\alpha=-\alpha$

Donc, on aura : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}+\alpha$

D'où : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}+\alpha$

b- Déduisons que : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)>2$

On a : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)-2=\frac{1}{\alpha}+\alpha-2$

$$=\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{\alpha}$$

$$=\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}$$

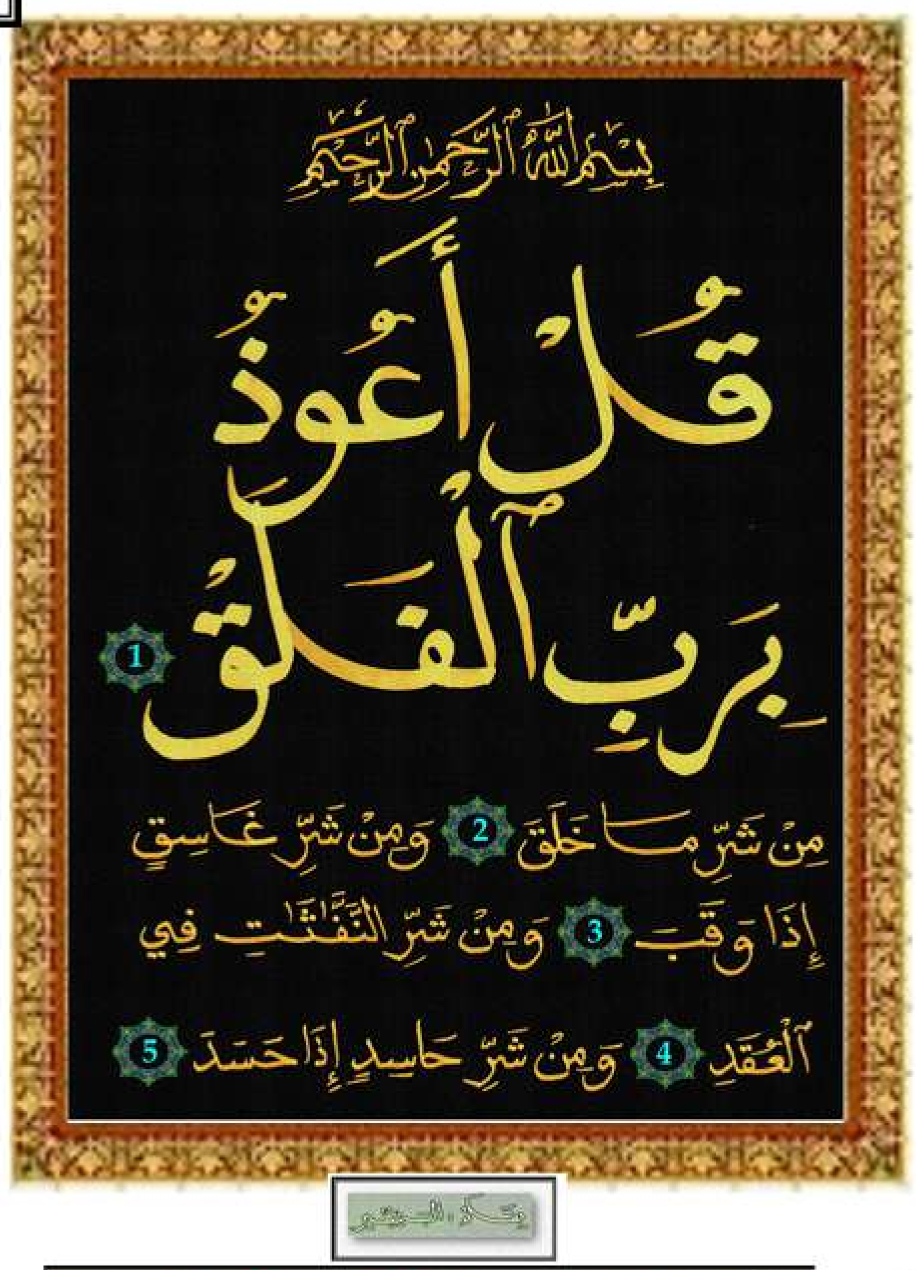
Et puisque : $0<\alpha<1$

Alors : $(1-\alpha)^2>0$ et $\alpha>0$

Donc : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)-2>0$

D'où : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)>2$

$(1-\alpha)^2\geqslant 0$ (carré parfait)
Mais $1-\alpha\neq 0$ car $\alpha<1$
Donc $(1-\alpha)^2>0$



2021 RATTRAPAGE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2-xe^{-x+1}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis donner une inteprétation géométrique au résultat obtenu.

2- a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3- a- Montrer que : $f'(x)=(x-1)e^{-x+1}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

b- Dresser le tableau de variations de f

4- a- Calculer $f''(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b- Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 2

5- Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

(On prend $f(2)\simeq 1{,}25$)

6- Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x-1}\geq x$

7- a- En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $\int_0^2 xe^{-x}dx$

b- En déduire que : $\int_0^2 f(x)dx=4-e+3e^{-1}$

8- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty;1]$

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b- Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

c- À partir de la courbe représentative de g^{-1}, déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$

REPONSE

1- Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Remarque

Pour le calcul des limites, ça sera mieux toujours d'écrire $f(x)$ sous forme

$f(x) = 2 - xe^{-x+1} = 2 - xe^{-x} \cdot e = 2 - \frac{x}{e^x} \cdot e$

Pourquoi ?

Juste pour éviter le changement de variable

Et n'oublier surtout pas que e est juste un nombre réel constant.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{x}{e^x} \cdot e = \lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \cdot e = 2$$

$\boxed{\frac{+\infty}{+\infty}}$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$

$\boxed{\frac{a}{\infty} = 0}$

Car : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Interprétation géométrique

On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

Donc, la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

Remarque

On peut remarquer aussi qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$-xe^{-x+1} < 0$

Donc : $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) - 2 < 0$

Donc (C_f) est au dessous de la droite $(\Delta) : y = 2$ au voisinage de $+\infty$

2 - a - Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2 - \frac{x}{e^x}\cdot e$$
$$= +\infty$$

Car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} \longrightarrow -\infty \quad (x \to -\infty,\ e^x \to 0^+)$$

b - Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \frac{x}{e^x}\cdot e}{x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} - \frac{x}{e^x}\cdot\frac{e}{x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} - \frac{e}{e^x}$$
$$= 0$$

Car : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

La plupart du temps, pour calculer $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, il suffit de factoriser ou bien séparer

Interprétation géométrique

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$

3 - a - Montrons que : $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(2 - x e^{-x+1}\right)'$$
$$= 0 - \left(x' e^{-x+1} + x.\left(e^{-x+1}\right)'\right)$$
$$= -\left(e^{-x+1} + x.(-x+1)' e^{-x+1}\right)$$
$$= -\left(e^{-x+1} - x\, e^{-x+1}\right)$$
$$= x e^{-x+1} - e^{-x+1}$$
$$= (x-1) e^{-x+1}$$

Attention aux parenthèses

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$

b- Dressons le tableau de variations de f

Étudions d'abord le signe

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$

Puisque : $e^{-x+1} > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe $(x-1)$

Il faux d'abord étudier le signe de $f'(x)$

$e^{\square} > 0$

$x-1=0 \iff x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

D'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

$f(1) = 2 - 1e^{-1+1}$
$= 2-1$
$= 1$

4- a- Calculons $f''(x)$

On a f' est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left((x-1)e^{-x+1}\right)' \\ &= (x-1)'e^{-x+1} + (x-1).(-x+1)'e^{-x+1} \\ &= e^{-x+1} - (x-1).e^{-x+1} \\ &= \left(1-(x-1)\right)e^{-x+1} \\ &= (1-x+1)e^{-x+1} \\ &= (2-x)e^{-x+1} \end{aligned}$$

$(-x+1)' = -1$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} ; f''(x) = (2-x)e^{-x+1}$

Le but de calcul de $f''(x)$ est la concavite et les points d'inflexion de (C_f)

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}$

Il faut toujours factoriser si possible

b- Montrons que (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 2

Rappel

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$
Si f'' s'annule en x_0 et change son signe,
alors le point $A(x_0;f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f)

Étudions le signe de $f''(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $f''(x) = (2-x)e^{-x+1}$

Puisque e^{-x+1}

Alors le signe de $f''(x)$ est le signe de $(2-x)$

$2-x=0 \iff x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

$2-x=-x+2$

Ici $a=-1$

Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

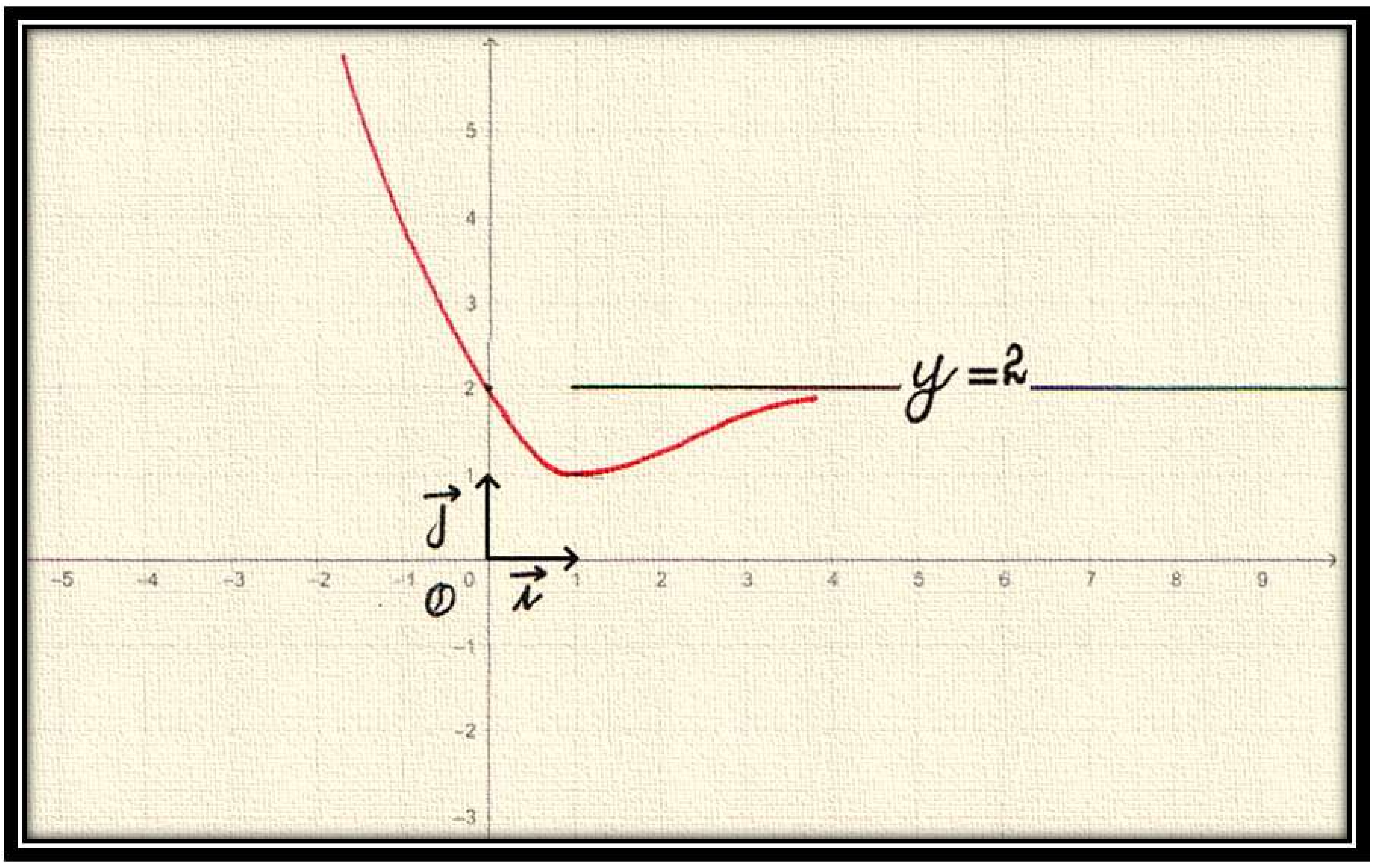
Puisque f'' s'annule en 2 et change son signe.

Alors le point $A(2;f(2))$ est le seul point d'inflexion de (C_f)

5 . Représentation de (C_f)

Explications

- $y=2$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$
- Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ Alors, forcement, la courbe (C_f) va couper l'axe des ordonnées en $B(0;f(0))$ avec $f(0)=2$
- Il faut respecter les coordonnée du point d'inflexion $A(2;f(2))$ avec $f(2) \simeq 1,25$



⑥ - La valeur minimale de f

D'après le tableau de variations de la fonction f, on a 1 est la valeur minimale absolue de f sur $\mathbb{R}$.

Déduisons que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x-1} \geq x$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a 1 est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; f(x) \geq 1$

On a : $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow 2 - xe^{-x+1} \geq 1$

$\Leftrightarrow xe^{-x+1} \leq 2-1$

$\Leftrightarrow xe^{-x+1} \leq 1$

$\Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{e^{-x+1}}$

$\boxed{\dfrac{1}{e^{a}} = e^{-a}}$

$\Leftrightarrow x \leq e^{-(-x+1)}$

$\Leftrightarrow x \leq e^{x-1}$

$\Leftrightarrow e^{x-1} \geq x$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; e^{x-1} \geq x$

⑦ - a - Calculons par parties l'integrale : $\int_0^2 x e^{-x} dx$

Rappel

$$\boxed{\int u'v = [uv] - \int uv'}$$

Il faut juste bien choisir u' et v

Dans notre cas, u' joue le rôle de $x \longmapsto e^{-x}$

$$\begin{cases} u'(x)=e^{-x} \\ v(x)=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x)=-e^{-x} \\ v'(x)=1 \end{cases}$$

$x \longmapsto \frac{1}{a} e^{ax}$ est une primitive de $x \longmapsto e^{ax}$

Dans notre cas, $a=-1$

$$\boxed{-e^{-x}=\left(e^{-x}\right)'}$$

$$\int_0^2 x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}.1\, dx$$

$$= -\left[x e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 \left(e^{-x}\right)' dx$$

$$= -\left[x e^{-x} + e^{-x}\right]_0^2$$

$$= -\left[(x+1)e^{-x}\right]_0^2$$

$$= -\left(3e^{-2} - e^{0}\right)$$

$$= 1 - 3e^{-2}$$

D'où : $\int_0^2 x e^{-x} dx$

b- Déduisons que : $\int_0^2 f(x) dx = 4 - e + 3e^{-1}$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 2 - x e^{-x+1} dx$$

$$= \int_0^2 2\, dx - \int_0^2 x e^{-x+1} dx$$

$$= \int_0^2 2\, dx - \int_0^2 x e^{-x}.e\, dx$$

$$= \int_0^2 (2x)'\, dx - e\int_0^2 x e^{-x} dx$$

$$= [2x]_0^2 - e\left(1 - 3e^{-2}\right)$$

$$= 4 - e + 3e.e^{-2}$$

$$= 4 - e + 3e^{-1}$$

Si $k \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

D'où : $\int_0^2 f(x) dx = 4 - e + 3e^{-1}$

8- a- Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1}.

On a g est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J tel que : $J = f(I)$

$$= f(]-\infty;1])$$

$$= \left]f(1); \lim_{x \to -\infty} f(x)\right[$$

$$= [1; +\infty[$$

Il suffit d'appliquer Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

b. Représentation de la courbe $(C_{g^{-1}})$

Explications

- D'abord, il faut utiliser (C_f) sur l'intervalle I
- $(C_{g^{-1}})$ et (C_f) sont symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $y=x$
- La droite (Δ) change les rôles de x et y

En effet

- L'image du point $B(1;1)$ est lui même
- (C_f) coupe l'axe des ordonnées au point $A(0;2)$
- $(C_{g^{-1}})$ coupe l'axe des abscisses au point $A'(2;0)$

- Au voisinage de $-\infty$, on a (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- Au voisinage de $+\infty$, $(C_{g^{-1}})$ admet une branche parabolique de direction l'axe abscisses

c. Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$

Au voisinage de $+\infty$, $(C_{g^{-1}})$ admet une branche parabolique de direction l'axe abscisses

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 0$