

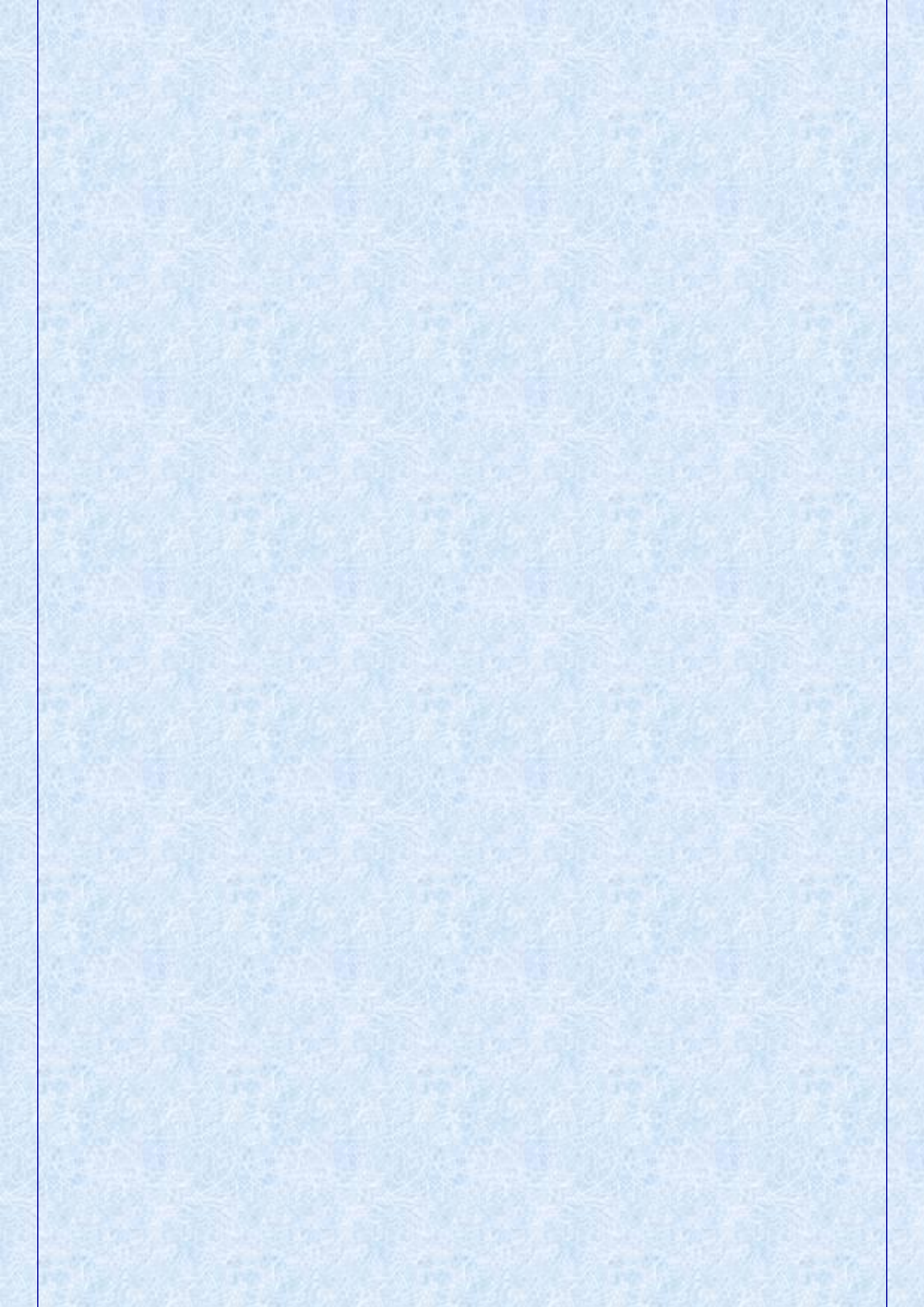
COURS DE VACANCES LONDO AKADEMY

— AOÛT 2023 —



Comment nous rejoindre ?

- 1) Adhérez à notre groupe WhatsApp en précisant ton prénom + nom + classe. C'est gratuit pour les mois de Mai et Juin, écrivez-nous au **+221 77 465 32 33**
- 2) **Abonnez-vous** à notre chaîne YouTube **Londo Akademy** en cliquant sur le lien ci-dessous puis sur l'onglet **S'ABONNER**
- 3) **Pour ceux qui veulent aller très loin**, visitez notre site internet : **www.multilivre.com** pour découvrir et commander nos nouvelles annales corrigées.



COURS DE VACANCES – 2^{nde} S

Chapitre

Encadreur

CALCUL DANS \mathbb{R}

Korka DIALLO

EXERCICE 1

Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{25^2 \times 3^4}{15^3} & 2) \frac{4^3 \times 6^2}{3^4 \times 2^5} & 3) \frac{(-6)^5 \times 9^{-3}}{-2^3 \times 3^4} & 4) \frac{15^8 \times 18^{-4}}{12^7 \times 25^{-5}} \\
 5) \frac{28^7 \times 63^{-4} \times 98^5}{-(81)^2 \times (-42)^5} & 6) \frac{(28 \times 12^{-2})^3 \times 105^{-3}}{[7^{-2} \times (-60)^{-4}]^2 \times 63^4} \div \left(\frac{5}{3}\right)^5 & & 7) \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^6 \times \left(\frac{3^{-2}}{5}\right)^3 \div \left(-\frac{4}{9}\right)^6
 \end{array}$$

EXERCICE 2

Soit a , b et c des réels non nuls.

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{a^2 b^4 c^{-2}}{a^{-1} (bc)^{-3}} \div \left(\frac{a^3 b c^{-1}}{a^4 b^2 c^{-2}}\right)^{-2} & 2) \left(-\frac{2}{3} a^3 b^4 c^3\right) \div \left(\frac{4}{15} a^4 b c^3\right) \\
 3) [(a^7 b)^3 c^2] \div [(abc^2)(a^2 b^3)^5] & 4) \left(\frac{a^3 b}{c}\right)^3 \times \frac{[(a^2)^5 b^{-2} (c^{-3})^2]^{-2}}{[a^2 b (c^{-3})^3]^{-1}}
 \end{array}$$

EXERCICE 3

Rendre rationnel les dénominateurs des expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 a) \frac{5}{3-\sqrt{8}} & b) \frac{\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}} & c) \frac{1}{\sqrt{3}-6} + \frac{1}{\sqrt{3}+6} \\
 d) \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} & e) \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} & f) \frac{1-5\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}} + \frac{1+5\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}
 \end{array}$$

EXERCICE 4

On donne $A = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

- 1) Calculer A^2 .
- 2) En déduire la valeur de A .

EXERCICE 5

Rendre rationnel le dénominateur des quotients suivants : $X = \frac{\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$ et $Y = \frac{2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

EXERCICE 6

Comparer les réels a et b suivants :

$$\begin{array}{l}
 a) a = 14 - 6\sqrt{3} \text{ et } b = 3 - \sqrt{5} \\
 b) a = \sqrt{16 - 5\sqrt{7}} \text{ et } b = \sqrt{7} - 3 \\
 c) a = \sqrt{39} + \sqrt{21} \text{ et } b = \sqrt{26 + \sqrt{33}}
 \end{array}$$

EXERCICE 7

- 1) Démontrer que pour $a > b \geq 0$, on a :

$$\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 = 2(a + b)$$

2) Dans chacun des cas suivants calculer x^2 et en déduire x :

a) $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

b) $x = \sqrt{12 - 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 + 3\sqrt{7}}$

c) $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

EXERCICE 8

Soit a et b deux réels non nuls de même signe on pose $m = \frac{a+b}{2}$, $n = \sqrt{ab}$ et $\frac{2}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

1) Calculer $m - p$. En déduire que si : $a < 0$ et $b < 0$ alors $m \leq p < n$.

2) Démontrer les égalités suivantes :

$$m^2 - n^2 = \frac{(a-b)^2}{4} \text{ et } n^2 - p^2 = \frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

3) En déduire que si $a > 0$ et $b > 0$ alors $p \leq n \leq m$.

EXERCICE 9

1) Démontrer que : $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

2) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

3) En déduire que : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

EXERCICE 10

Soient x, y et z trois réels.

1) On suppose que $xyz = 1$. Simplifier l'expression :

$$A = \frac{x}{x + xy + 1} + \frac{y}{y + yz + 1} + \frac{z}{z + zx + 1}$$

2) Soient a, b et c trois réels. On suppose que $xyz \neq 0$. Démontrer que si :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (xa + yb + zc)^2 + (ya + zb + xc)^2 + (za + xb + yc)^2$$

EXERCICE 11

1) Soient a, b et c trois réels.

On pose $x = 2a + 2b + c$, $y = 2a + b + 2c$ et $z = 3a + 2b + 2c$.

a) Calculer $x^2 + y^2$ et z^2 .

b) On suppose que : $a^2 = b^2 + c^2$. Comparer alors $x^2 + y^2$ et z^2 .

2) On suppose maintenant que a, b et c sont trois réels non nuls.

a) Développer $(a + b + c)(ab + bc + ca)$.

b) Développer $(a + b + c)^2$ et $(a + b + c)^3$.

c) En déduire que si $a + b + c = 0$ alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

d) Calculer $S = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$ lorsque $ab + bc + ca = 0$.

EXERCICE 12

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1) Calculer $(a - b)^2$. En déduire que $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

2) Montrer que $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

3) Démontrer que pour tout réels non nuls x et y on a : $\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2$.

(On pourra calculer $\left(\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right|\right)^2$).

EXERCICE 13

1) Démontrer que : $a^4 + b^4 = (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)$.

2) Soient x et y deux réels tels $0 < y \leq x$. Comparer les réels $\frac{x-y}{x+y}$ et $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

EXERCICE 14

Soient a, b, c et d quatre réels.

1) Démontrer que : $(a^2 + b^2)(d^2 + c^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$

2) En déduire une écriture en une différence deux carrés les produits 13×41 et 82×40 .

EXERCICE 15

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{[(-12)^{-8}]^{-2} \times 75^{-4} \times (-4)^{-9}}{(25^{-2}) \times 18^6 \times 10^4}$$

$$B = \frac{ab^{-2}(a^{-1}b^2)^4(ab^{-1})^2}{a^{-2}b(a^2b^{-1})^3a^{-1}b^5}$$

Calculer B pour $a = 10^{-3}$ et $b = -10^{-2}$.

2) Soient x, y et z trois réels et a, b et c trois entiers naturels tels que $b = \frac{a+c}{2}$ et $y^2 = xz$.
Démontrer que $x^b y^c z^a = x^c y^a z^b$.

3) Soient a et b deux réels. On pose $x = |a - b|$ et $y = ||a| - |b||$. Comparer x et y .

4) Soient a et b deux réels. On suppose que $|a + b| = |a| + |b|$. Démontrer que $|ab| = ab$. Que peut-on dire des signes de a et b ?

EXERCICE 16

1) Soient x et y deux réels tels que $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases}$.

a) Démontrer que $|xy| < 1$. En déduire que $1 + xy > 0$.

b) Développer $(1 - x)(1 - y)$ et $(1 + x)(1 + y)$.

c) Démontrer que $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

2) Soit x un réel tel que $x \neq -1$.

a) Montrer que $\frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x} - 1 + x$.

b) En déduire que si $|x| \leq \frac{1}{2}$ alors :

(i) $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 2$

(ii) $0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2$

(iii) $1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + 2x^2$

c) Donner un encadrement de $\frac{1}{1,1}$; $\frac{1}{1,01}$ et $\frac{1}{0,99}$.

EXERCICE 17

- 1) Soient a, b et c trois réels de l'intervalle $]0 ; 1]$.
- a) Démontrer que $(ab - 1)(bc - 1)(ac - 1) \leq 0$.
- b) En déduire que $a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc$.
- 2) Soient maintenant quatre réels x, y, z et t tels que : $0 < x \leq y \leq z \leq t$.
- a) Démontrer que $(z - x)(t - y)(yt - xz) \geq 0$.
- b) En déduire que $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{t}{z} + \frac{x}{t}$.

EXERCICE 18

- 1) Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$A = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$$

- a) Rendre rationnel le dénominateur de A .
- b) Mettre A sous forme d'une somme de deux fractions ayant le même numérateur 1.
- c) Calculer alors :

$$B = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{4} + 4\sqrt{5}}$$

- 2) Soient a et b deux réels positifs tels que $a > b$ et m un réel strictement positif. Comparer $A = \sqrt{a+m} - \sqrt{a}$ et $B = \sqrt{b+m} - \sqrt{b}$.

EXERCICE 19

Soit a un réel tel que $a > 0$.

- 1) Montrer que :
- a) Si $a < \sqrt{2}$ alors $\sqrt{2} < \frac{2}{a}$.
- b) Si $a > \sqrt{2}$ alors $\sqrt{2} > \frac{2}{a}$.
- c) En déduire que pour tout réel a tel que $a > 0$ on a $\sqrt{2}$ est compris entre a et $\frac{2}{a}$.
- 2) Montrer que pour tout réel $a > 0$ on a : $\sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$.
- 2) De l'encadrement $1 < \sqrt{2} < 2$, montrer que : $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.
- 3) En déduire que : $\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$.

EXERCICE 20

Soient a, b et c trois réels quelconques ; m, n et p trois réels positifs. Montrer que :

$$a < b < c \Rightarrow a < \frac{am + nb + pc}{m + n + p} < c$$

EXERCICE 21

Soient a, b et c trois réels deux à deux différents.

- 1) Montrer que :

$$\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = \frac{(c-a)^2 + (b-c)^2 + (a-b)^2}{2(b-c)(c-a)(a-b)}$$

- 2) En déduire que $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \neq 0$ et :

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}$$

3) Montrer que :

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$$

EXERCICE 22

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1) Calculer $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$ exprimer alors $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$ en fonction de $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$.

2) En déduire que si $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{5}$ alors $\left|\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right| = 1$.

EXERCICE 23

On donne $x = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ et $y = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

1) Montrer que x est bien défini puis calculer $(1 - \sqrt{5})^2$ et $(1 + \sqrt{5})^2$.

2) Calculer x^2 ; y^2 et xy .

3) En déduire $x + y$.

EXERCICE 24

1) Ecrire le réel $A = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}}}$ sans radical au dénominateur.

2) Soit $B = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2}$.

a) Déterminer le signe de B .

b) Calculer B^2 puis en déduire B .

3) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

b) Exprimer, à l'aide de l'expression du a), $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$.

c) Démontrer que :

$$\frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{8\sqrt{9} + 9\sqrt{8}} = 1 - \frac{1}{3}$$

Dakar, le 21 août 2023