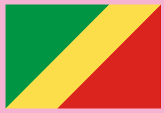
Annales du bac 2021-2022

**Inclus sujet et corrigé du bac D 2021*

Mathématiques

Série D



Rép. du Congo

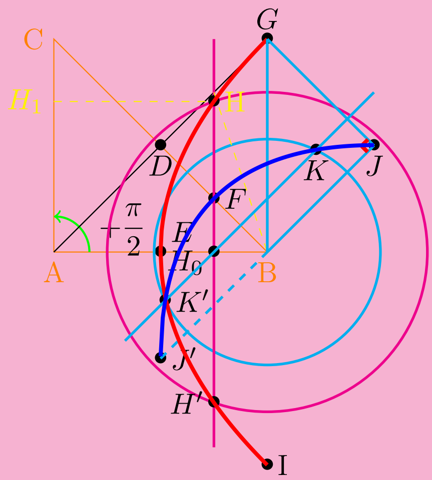
Valérien Eberlin

Professeur de mathématiques - France

Mathématiques

$$\begin{array}{ccc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \sum_{k=0}^{k=n}\psi = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^b \psi$$



- ✓ Tous les sujets du bac 2009 - 2021
- ✓ Des corrigés clairs et détaillés
- ✓ Des hyperliens pour une meilleure navigation interne en pdf

SOMMAIRE

Sujet bac 2010 - Série D

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1

4 points

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires toutes indiscernables au toucher.
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note leur couleur.
On définit sur l'univers Ω de cette expérience aléatoire, la variable aléatoire réelle X par :

$X = -1$, si les deux boules tirées sont blanches ;

$X = 0$, si l'une est blanche et l'autre est noire ;

$X = 1$, si les deux boules tirées sont noires.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. **a.** Définir la fonction de répartition F de X.

   b. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthogonal (on prendra 1 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée pour unités graphiques).

Exercice 2

4 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$ et $z_3 = -2i$.

1. Écrire une équation de degré 3 dont z_1, z_2 et z_3 sont solutions.
2. Écrire les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous la forme trigonométrique.
3. **a.** Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   b. Montrer qu'une mesure de chacun des angles du triangle ABC est $\frac{\pi}{3}$ radians.

   c. En déduire la nature du triangle ABC.

Problème

12 points

Partie A

Soit g la fonction de la variable réelle x définie sur $]-\infty; 0[$ par :

$$g(x) = 2\ln(-x)$$

1. Étudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation.
2. Calculer $g(-1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\left]-\infty\,;0\right[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1+2x\ln|x| & \text{si } x<0 \\ (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x=0$.
   b. Pour $x \in \left]-\infty\,;0\right[$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que qu'il existe deux solutions et deux seulement α et β de l'équation $f(x)=0$ vérifiant les inégalités suivantes :

$$1<\alpha<\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad -4<\beta<-3$$

(on ne cherchera pas à calculer α et β)

5. Étudier les branches infinies à $(\mathscr{C})$.
6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
7. α désigne le réel tel que : $1<\alpha<\dfrac{3}{2}$
   a. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de l'ensemble des points M des coordonnées (x,y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

   b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I=\left]-\infty\,;-1\right]$.

1. Montrer que h définit une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. On note h^{-1} la réciproque de h.
2. Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
3. Tracer $(\mathscr{H})$ la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

Sujet bac 2011 - Série D

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui, à tout vecteur $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u}' = f(\overrightarrow{u})$ dont les composantes (x', y', z') dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont définies par :

$$\begin{cases} x' = -x + ay + 2z \\ y' = x + 2y + z \qquad a \in \mathbb{R} \\ z' = x + y \end{cases}$$

1 Écrire la matrice de l'application f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2 Pour quelles valeurs de a, f est-elle bijective ?

3 Dans la suite, on pose $a = 1$.

- **a.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ invariants par f.
- **b.** Déterminer le noyau $\text{Ker}f$ de f et l'image $\text{Im}f$ de f. En déduire une base pour chacun des sous-espaces.

4 Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de composantes $(1, \alpha, \beta)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Calculer α et β pour que $\overrightarrow{u} \in \text{Ker}f$.

Exercice 2 4 points

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$(E) \ : \quad Z^2 - (1 + 3\,i)Z + 4 + 4\,i = 0$$

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
On appellera Z_1 la solution imaginaire pure et Z_2 l'autre solution.

2 Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives 3 ; $4\,i$; $-2 + 3\,i$; $1 - i$.

- **a** Placer les points A, B, C et D dans le plan.
- **b** Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DA}$.
- **c** En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Problème 12 points

Partie A

1 Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1-t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$$

2 Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1+t}\,dt$.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = -x + \ln(x+1)^2 \quad \text{où ln désigne le logarithme népérien}$$

1 Donner l'ensemble de définition E_f de f.

2 Déterminer les variations de f.

3 Dresser le tableau de variation de f.

4 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2\,;3[$.

5 Calculer $f(x)$ et $f'(x)$ pour les valeurs de x suivantes : -2 ; $-\dfrac{3}{2}$; 0 ; 5.

6 Étudier les branches infinies à $(\mathscr{C})$, courbe représentative de f.

7 Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f dans un plan $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, ainsi que les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses -2 et 0.

Partie C

Soit h, la fonction définie par $h(x) = -f(x)$ pour tout $x \in \,]-1\,;+\infty[$.

1 Dresser le tableau de variation de h.

2 Tracer $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction h dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

Sujet bac 2012 - Série D

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

On considère la série statistique à double variable X et Y définie par le tableau ci-après :

X	-2	0	1	a	4
Y	-10	-8	b	0	12

1 Déterminer les réels a et b pour que le point moyen G du nuage statistique, ait pour coordonnées $(1; -2)$.

2 Dans la suite, on prendra $a = 2$ et $b = -4$.

a. Représenter graphiquement les points du nuage de cette série statistique

b. Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y.

c. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, puis interpréter le résultat.

Exercice 2 4 points

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$(E) \; : \quad z^2 + 8\sqrt{3} - 8i = 0$$

a. En utilisant la forme trigonométrique.

b. En utilisant la forme algébrique.

On pourra admettre que $8 + 4\sqrt{3} = \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2$

2 Placer les images des solutions z_1 et z_2 de (E) sur un cercle trigonométrique.

3 Déduire de ce qui précède, la valeur exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

Problème 12 points

Partie A

1 Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.

2 Déterminer la solution particulière u, sachant que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

Partie B

Soit f, la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - 2x + x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique : 2 cm.

3 Préciser l'ensemble de définition de f.

4 Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$.

5 Étudier les variations de f. On dressera un tableau de variation de f.

6 Pour $x \leqslant 0$, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses et écrire une équation cartésienne de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ en ce point.

7 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]6;7[$. On ne demande pas de calculer α.

8 **a.** Étudier les branches infinies à $(\mathscr{C})$.

b. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f et la droite $(\mathscr{T})$.

Partie C

Soit h la fonction numérique de la variable réelle x, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = -f(x)$$

9 **a.** Dresser le tableau de variation de h.

b. Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de h dans le même repère que $(\mathscr{C})$ de f.

c. Calculer en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $(\mathscr{D})$ limité par les courbes $(\mathscr{C})$; $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x = -1$; $x = 0$.

Sujet bac 2013 - Série D

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

Les caractères X et Y sont distribués suivant le tableau à double entrée ci-après :

$X \backslash Y$	-1	0	2
-2	4	0	2
-1	3	5	0
0	2	1	2

1. Dresser la loi marginale de X et celle de Y.
2. Trouver les coordonnées du point moyen $G(X, Y)$.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique.

Exercice 2 4 points

Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E) : Z^3 + 8 = 0$.
   On donnera les solutions de (E) sous la forme algébrique.

Soit A, B, et C les points d'affixes des complexes : $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $Z_B = -2$; $Z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

2. **a.** Calculer le module et un argument de U tel que : $U = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.

Soit S, la rotation définie dans $(\mathscr{P})$ telle que : $S(A) = C$ et $S(C) = B$.

3. **a.** Déterminer l'expression complexe de S.
   b. Déterminer les éléments caractéristiques de S.

Problème 12 points

Partie A

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x^2 - \ln x$$

1 Étudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation.

2 Calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x - e^{1-x} \text{ si } x \leq 1 \\ \dfrac{2x - x^2 + \ln x}{x} \quad \text{si} > 1 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$, la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique : 2 cm.

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2 **a.** Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x = 1$.

b. Pour $x \in]1; +\infty[$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

3 Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4 Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f et étudier la position de la droite (Δ) par rapport à cette courbe.

5 Écrire l'équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ de f en $x = 0$.

6 Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f.

7 Construire dans le même repère, la courbe $(\mathscr{C})$ de f, la droite (Δ) et la tangente $(\mathscr{T})$.

8 Calculer l'aire $\mathscr{A}(D)$ du domaine du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et les axes $x = \dfrac{3}{2}$ et $x = e$.

On prendra $\ln 2 \approx 0,7$; $e \approx 2,7$.

Sujet bac 2014 - Série D

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 — 5 points

1 Qu'appelle t-on conjugué d'un nombre complexe ?

2 **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) : $Z^3 = 1$.
On donnera les résultats sous forme algébrique.

b. Justifier que les solutions sont deux à deux conjuguées.
Modification : Il s'agit plutôt de montrer que les solutions non réelles sont conjuguées entre elles.

3 Montrer que $Z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ est solution de l'équation $(E') : Z^3 = 8$.

4 Soit z'_0, z'_1, z'_2 les solutions de (E') où z'_1 et z'_2 sont deux complexes conjugués.

a Utiliser les solutions de (E) pour déduire les solutions de l'équation (E') .

b Montrer que $\dfrac{z'_1}{z'_2}$ est solution de (E).

Exercice 2 — 5 points

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ qui associe à tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, l'élément (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x \end{cases}$$

1 Déterminer $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$, $f(\vec{k})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$.

2 Déduire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3 **a.** Quelles conditions faut-il remplir pour qu'un ensemble $\mathscr{E}$ soit un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b. Montrer alors que l'ensemble $\mathscr{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4 Déterminer le noyau de f et en donner une base $(\overrightarrow{e_1})$.

5 Déterminer l'image de f, puis une base de $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

Exercice 3 — 7 points

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, on considère la fonction g de la variable réelle x, définie par :

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} - x$$

.

1. Préciser l'ensemble de définition de g.
2. Déterminer $g'(x)$, la fonction dérivée de g puis en déduire son signe.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Démontrer que l'équation $\dfrac{e^x}{\mathrm{e}^x + 1} = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left]-\infty; +\infty\right[$.
5. Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$. Unité graphique 2 cm.
   - **a.** Montrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h'(x) > 0$
   - **b.** Dresser le tableau de variation de h.
   - **c.** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq h(x) \leq 1$.
6. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

   - **a.** Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que (u_n) est majorée par 1.
   - **b.** Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que (u_n) est croissante.
   - **c.** En déduire la convergence de (u_n), puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

Exercice 4 — 3 points

On considère la série statistique (x, y) définie par le tableau suivant :

x \ y	1	3
-1	1	2
0	0	a
2	2	0

1. Déterminer les séries marginales de x et y.
2. Déterminer le réel a pour que l'on ait $G\left(\dfrac{1}{6}; 2\right)$ où G désigne le point moyen de la série (x, y).
3. On donne $a = 1$. Calculer la variance de x, la variance de y et la covariance de la série (x, y).

Sujet bac 2015 - Série D

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 5 points

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et on rappelle que $i^2 = -1$.

1 Déterminer les racines carrées du nombres complexe $u = 6 + 6i\sqrt{3}$.

2 Soit l'équation (E) définie dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$(E) \ : \ 4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = 0$$

a. Vérifier que $Z_0 = -\dfrac{1}{2}$ est solution de l'équation (E).

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3 Le plan complexe $\mathbb{C}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On donne les trois points A, B, C d'affixes respectives $Z_A = -\dfrac{1}{2}$, $Z_B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et $Z_C = 1 + i\sqrt{3}$.

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S.

Exercice 2 5 points

Soit $\mathscr{E}$ le plan vectoriel rapporté à sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$.
On donne les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathscr{E}$ telle que $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = \vec{0}$.

1 Vérifier que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathscr{E}$.

2 Écrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

3 Soit $\overrightarrow{u'} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$ l'image de $\overrightarrow{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ par l'endomorphisme f telle que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$.

a. Montrer que $f(\vec{i}) = 3\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -2\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$.

b. Exprimer les coordonnées x' et y' de $\overrightarrow{u'}$ en fonction des coordonnées x et y de $\overrightarrow{u}$.

c. Calculer $f \circ f(\overrightarrow{u})$.

d. En déduire la nature de f.

e. Déterminer les caractéristiques de f.

Exercice 3 6 points

On considère la fonction numérique f à variable réelle x, définie telle que

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$$

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1 Montrer que f est définie sur $]0\,;\,1[\cup]1;+\infty[$.

2 Vérifier que la dérivée f' de f est $f'(x)=\dfrac{-1-\ln x}{(x\ln x)^2}$.

3 **a.** Étudier le signe de f'.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Étudier les branches infinies à $(\mathscr{C})$.

d. Tracer $(\mathscr{C})$.

4 **a.** Montrer que f peut encore s'écrire $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$

b. Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_e^3 f(x)dx$.

c. En déduire l'aire $\mathscr{A}$ du domaine du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$ de f, l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x=e$ et $x=3$. Unité graphique : 2 cm.

Exercice 4 — 4 points

On considère la série statistique (x_i, y_j, n_{ij}) représentée par le tableau à double entrée suivant :

X \ Y	-1	1
-1	2	1
0	3	2
2	1	1

1 Déterminer les deux séries marginales.

2 Déterminer les coordonnées $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ du point moyen du nuage statistique.

3 Calculer l'inertie du nuage par rapport au point moyen G.

4 Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Sujet bac 2016 - Série D

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 5 points

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application S définie par :

$$z' = (1+i)z$$

1. Déterminer la nature, le rapport et l'angle de l'application S.
2. Soit le point A d'affixe $z_A = 2i$. Déterminer les affixes des points B et C définis par $S(A) = B$ et $S(B) = C$.
3. Placer les points A, B, et C dans un repère du plan.
4. Soit le point I milieu du segment $[OC]$. Montrer que le triangle ABI est rectangle et isocèle en B.
5. Écrire une équation de troisième degré dont les affixes z_A, z_B et z_C définies ci-dessus sont solutions.

Exercice 2 5 points

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est rapporté à sa base canonique $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par :

$$f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad \text{et} \quad f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$$

1. Calculer $f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{i})$.
2. En déduire la nature de l'application f.
3. **a.** Qu'est ce qu'un automorphisme ?
   b. Prouver que f est un automorphisme involutif.
   c. Caractériser l'application f.
4. Soit les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j}$.
   a. Montrer que $\mathscr{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 3 7 points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, on considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

On note $(\mathscr{C})$, la courbe de f dans le plan.

1 Calculer les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$.

2 Déduire que la fonction f admet deux asymptotes que l'on précisera.

3 **a.** Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$.

b. Donner le sens de variation de f.

c. Dresser son tableau de variation.

4 Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que ses asymptotes.

5 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = -f(x)$.
Construire la courbe $(\mathscr{C}')$ de g dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

6 Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la portion du plan délimitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 4 — 3 points

Soit le tableau statistique à double entrée :

X \ Y	0	1	2
-1	1	m	1
1	1	0	2
2	2	3	n

1 Déterminer les lois marginales de X et de Y en fonction de n et m.

2 Déterminer m et n sachant que le point moyen du nuage statistique est $G(1;1)$.

3 On pose $m = 1$ et $n = 1$.

a. Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de Y en X sachant que la covariance de X et Y est égale à $-\dfrac{1}{12}$, la variance de X est $\dfrac{1}{2}$ et celle de Y est $\dfrac{1}{6}$.

b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Sujet bac 2017 - Série D

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 5 points

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
On considère le polynôme P défini par : $P(Z) = Z^3 + Z^2 - 2$.

1
- **a.** Montrer que 1 est une racine de $P(Z)$.
- **b.** Vérifier que $P(Z)$ peut s'écrire sous la forme : $P(Z) = (Z-1)(Z^2 + 2Z + 2)$.
- **c.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

2 On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$Z_A = 1$; $Z_B = -1 + i$; $Z_C = -1 - i$

- **a.** Construire le triangle ABC.
- **b.** Déterminer l'affixe Z_D du point D telle que $ABCD$ soit un parallélogramme.

3 Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$

- **a.** Montrer que l'expression complexe de R est telle que :
$$Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) Z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
- **b.** Soit M et M' les points d'affixes respectives $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$.
Exprimer les coordonnées x' et y' du point M' en fonction de x et y.

Exercice 2 5 points

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel $\mathscr{E}$, f désigne l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ tel que :

$$\begin{cases} 5f(\vec{i}) = a\,\vec{i} + 4\,\vec{j} \\ f(\vec{j}) = \dfrac{4}{5}\,\vec{i} - \dfrac{3}{5}\,\vec{j} \end{cases} \qquad (1)$$

1 Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2 Déterminer l'expression analytique de f.

3 Déterminer le réel a pour que f soit une symétrie vectorielle.

4 On pose $a = 3$.

- **a.** Déterminer les élements caractéristiques de f (base et direction).
- **b.** Déterminer un vecteur directeur $(\vec{e_1})$ de la base.

c. Déterminer un vecteur directeur $(\overrightarrow{e_2})$ de la direction.

d. Soit $\overrightarrow{e_1} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ deux vecteurs.
Démontrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

e. Donner la matrice de f relativement à la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Exercice 3 7 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln(x)$.

1 Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

2 **a.** Calculer la dérivée g' de g sur $]0\,;+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variation de g.

3 **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{3}{2}\,;2\right[$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - (x-1)\ln(x).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

2 **a.** Montrer que la dérivée f' de f est $f'(x) = -g(x)$.

b. Dresser le tableau de variation de f.
On prendra $\alpha = 1,7$ et $f(\alpha) = 1,3$.

3 On admet que l'équation $f(x) = 0$, admet deux solutions x_0 et x_1 avec $x_0 \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$ et $x_1 \in \left]\frac{7}{2}\,;4\right[$.

a. Étudier la branche infinie à $(\mathscr{C})$.
Remplacer la question par : « Étudier les branches infinies à $(\mathscr{C})$. »

b. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

4 Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de la fonction h définie par $h(x) = -f(x)$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

Exercice 4 3 points

On rappelle que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau :

X	$]-\infty; x_1[$	$[x_1; x_2[$	$[x_2; x_3[$	$\cdots$	$[x_n; +\infty[$
$F(X)$	0	P_1	$P_1 + P_2$	$\cdots$	$P_1 + P_2 + \cdots + P_n$

où P_i est la probabilité associée à la valeur x_i.
Soit la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X, définie par le tableau ci-après :

X	$]-\infty; 2[$	$[2; 3[$	$[3; 4[$	$[4; 5[$	$[5; 6[$	$[6\,;.+\infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	1

1 Donner les valeurs exactes prises par X.

2 Établir la loi de probabilité de X.

3 Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Sujet bac 2018 - Série D

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 5 points

Le plan complexe $\mathbb{C}$ étant rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$Z_A = 1 + 2i \quad ; \quad Z_B = -1 + 2i \quad ; \quad Z_C = 1 - i \quad ; \quad Z_D = 1$$

1 **a.** Déterminer l'affixe $Z_{\overrightarrow{BC}}$ du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

b. Déterminer l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

c. Trouver l'affixe du point A' image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2 **a.** Prouver qu'une mesure, en radian, de l'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ est $-\dfrac{\pi}{2}$.

b. Écrire l'expression analytique de la rotation R de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$.

c. Trouver l'affixe du point C' image du point C par la rotation R.

3 Déterminer le rapport et l'angle de la similitude plane directe S de centre A et qui transforme B en A.

Exercice 2 5 points

Soit $\mathscr{E}$ un plan vectoriel rapporté à sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$.
On considère les deux droites vectorielles $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'équations cartésiennes respectives $x - 2y = 0$ et $x + y = 0$ de ce plan.

1 Vérifier que les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont engendrées respectivement par les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = -\vec{i} + \vec{j}$.

2 Prouver que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathscr{E}$.

3 Montrer que les sous-espaces vectoriels $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{E}$.

4 Soit f un endomorphisme de $\mathscr{E}$ défini par : $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_2}$.
Exprimer les vecteurs $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 3 6 points

Soit la fonction numérique f à variable réelle x, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{-1 + \ln x} & \text{si} \quad x > 0 \\ e^{-2x} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm.

1 Déterminer l'ensemble de définition de f.

2 Vérifier que la fonction f est continue en $x = 0$.

3 Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$.

4 **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b. Dresser le tableau de variation de f.

5 **a.** Préciser les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

b. Tracer $(\mathscr{C})$.

6 Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$; $x = 0$.

Exercice 4 — 4 points

Le tableau ci-dessous représente le couple (x, y) des deux caractères d'une série statistique.
x est le nombre de jours et y le poids en mg d'une larve.

x	1	2	3	4	5	6
y	0,2	1,4	1,8	2	2,6	3

1 Calculer les coordonnées $\overline{x}$ et $\overline{y}$ du point moyen G.

2 Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de y en x.

3 Estimer le poids de la larve au 7ème jour.

Sujet bac 2019 - Série D

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 5 points

1 On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$(E) \quad : \quad Z^2 - 4Z + 8 = 0$$

.

a. Résoudre l'équation (E).

b. Écrire la solution dont la partie imaginaire est négative sous la forme trigonométrique.

2 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $2-2i$ et $2+2i$.

a. Écrire sous forme algébrique, le complexe $U = \dfrac{Z_B}{Z_A}$

b. En déduire la nature du triangle OAB.

3 On considère l'application f du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z$

a. Préciser la nature de f.

b. Écrire sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique, l'affixe $Z_{A'}$ du point A' tel que $A' = f(A)$.

c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 2 5 points

L'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est rapporté à sa base canonique $\mathscr{B}(\vec{i}, \vec{j})$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ défini par son expression analytique : quelque soit le vecteur $\vec{u}(x, y)$ de $\mathscr{E}$, l'image de $\vec{u}$ par f est le vecteur $\vec{u'}(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$

1 Déterminer $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$.

2 En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

3 Soit $\vec{V}(3\,;-4)$ un vecteur de $\mathscr{E}$.
Donner son image $\vec{V'}$ par l'endomorphisme f.

4 Montrer que f est un endomorphisme bijectif.

5
a. Calculer $f \circ f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{j})$.
b. En déduire la nature de f.
c. Déterminer alors la base et la direction de f.

Exercice 3 7 points

Partie I

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique : 2 cm .

1 Calculer la dérivée $g'(x)$ et donner son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Sachant que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, dresser le tableau de variation de g.

Partie II

Dans le même repère défini dans la partie I, on considère la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}$

1
a. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $f(x) = g(x)$.
b. En déduire la position relative des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

2
a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier son signe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
c. Établir le tableau de variation de f.

3 En remarquant que les axes de coordonnées sont asymptotes aux courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, tracer soigneusement ces deux courbes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné.

Partie III

On note h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ et $k(x) = f(x) - g(x)$.

1 Démontrer que h est une primitive de k sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Calculer en cm^2, l'aire A de la portion du plan comprise entre les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2021

Exercice 4 3 points

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	a	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	b

1 Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

2 **a.** Déterminer les réels a et b tels que : $E(X) = \frac{3}{2}$.

b. Calculer la variance de X et l'écart-type

3 Donner la fonction de répartition de X

Sujet bac 2020 - Série D

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 5 points

1 Trouver dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les nombres z_1, z_2 et z_3 tels que :
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -3 + i \\ i\overline{z_2} = 1 - 2i \\ z_2 \times z_3 = -1 - 2i \end{cases}$$

2 On considère le polynôme complexe P tel que : $P(z) = z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i$.

a. Vérifier que $z = i$ est une racine de $P(z)$.

b. Trouver le nombre complexe z_0 tel que : $P(z) = (z-i)(z-z_0)(z+2-i)$.

c. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3 Dans le plan complexe, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectifs $z_A = -1$; $z_B = -2 + i$ et $z_C = i$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation R de centre A et qui transforme B en C.

b. En déduire l'angle de la rotation R.

Exercice 2 5 points

Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

1 **a.** Prouver que la famille $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Écrire les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

2 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par :
$$\begin{cases} f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \\ f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v} \end{cases}$$

a. Calculer $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b. Montrer que $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$.

c. En déduire la nature de f.

d. Donner alors la base $\mathscr{E}$ et la direction $\mathscr{D}$ de f.

Exercice 3 7 points

Partie A

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $h(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{2-x} + 1$.

1 a. Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, calculer $h'(x)$.
  b. En déduire le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
  c. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.
  Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.

2 En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 + \mathrm{e}^{2-x})$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 a. Montrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = h(x)$.
  b. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ sachant que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3 a. Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
  b. Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

4 a. Préciser la nature de la branche infinie de f au voisinage de $-\infty$.
  b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
  c. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ).

5 Construire (Δ), les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ où $(\mathscr{C}')$ représente la courbe de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 4 3 points

Une entreprise fabrique des pièces pour un client. Le contrat stipule que le produit fabriqué doit être soumis à deux tests distincts de normes de qualité A et B.
La pièce est acceptée s'il a satisfait à ces deux tests qui sont indépendants l'un de l'autre.
On note :
A l'événement « le produit est conforme à la norme de qualité A ».
Et B l'événement « le produit est conforme à la norme de qualité B ».
Une étude a démontré que la probabilité de l'événement A est $P(A) = 0,9$ et celle de l'événement B est $P(B) = 0,95$.

1 Calculer $P(A \cap B)$ avec $A \cap B$ l'événement « le produit est conforme à la norme A et à la norme B ».

2 Soit C l'événement « le produit n'est pas accepté par le client ; donc il est déclaré non conforme ».
Montrer que $P(C) = 0,145$.

3 On suppose que le stock du client étant trop bas, il accepte de prendre le produit s'il satisfait soit au test A ou au test B, donc il appartient à $A \cup B$.
Calculer $P(A \cup B)$.

Sujet bac 2021 - Série D

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 5 points

1 On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) : $z^3 + 8i = 0$ où z désigne l'inconnue.

a. Vérifier que le nombre $a = 2i$ est une solution de (E).

b. Prouver que l'équation (E) peut s'écrire : $(z - 2i)(z^2 + 2iz - 4) = 0$.

c. Achever la résolution de l'équation.

2 Dans un plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $2i$, $-\sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} - i$.

a. Calculer le module et un argument du complexe : $U = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

b. En déduire la nature du triangle ABC.

3 On note I le point d'affixe $-i$ et S la similitude plane directe de centre A qui transforme C en I.

a. Donner l'écriture complexe de S.

b. Déterminer l'angle et le rapport de S.

Exercice 2 5 points

L'espace vectoriel étant rapporté à une base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{0}$ et $f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_2}$, avec $\overrightarrow{v_1} = \vec{i} + 5\vec{j}$ et $\overrightarrow{v_2} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$.

Attention ! Une erreur dans la définition du vecteur $\overrightarrow{v_1}$. Prendre plutôt $\overrightarrow{v_1} = -\vec{i} + 5\vec{j}$.

1 **a.** Montrer que $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \dfrac{2\vec{i}}{5} - \vec{j}$.

b. En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2 Prouver que f n'est pas bijective.

3 Soit $\overrightarrow{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ image du vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ par f.

a. Exprimer les coordonnées x' et y' du vecteur $\overrightarrow{u'}$ en fonction de x et y du vecteur $\vec{u}$.

b. Montrer que $f \circ f(\vec{i}) = f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{j}) = f(\vec{j})$.

c. En déduire la nature de f.

d. Donner les éléments caractéristiques de f.

Exercice 3 7 points

f est une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$.
$(\mathscr{C})$ est sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Unité graphique : 2 cm.

Partie A

1. f' désignant la fonction dérivée de f, montrer que $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter.
6. Construire $(\mathscr{C})$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = -f(x)$ et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Comment peut-on déduire $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$?
2. Sans étudier g, dresser son tableau de variation.
3. Construire $(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

Partie C

On désigne par H la fonction définie par $H(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$.

1. Montrer que H est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. Calculer en cm^2, l'aire de la portion du plan délimitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Exercice 4 3 points

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente.
Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous où X représente le nombre d'exemplaires du produit et Y représente le prix de vente du produit en milliers de francs CFA.

X \ Y	1	2	3
0	6	3	1
1	4	11	3
2	1	10	16
3	0	5	13
4	2	1	4

1 Déterminer les séries marginales respectives de X et de Y.

2 Déterminer les variances de X et de Y sachant que le point moyen G est $G(1,93\,;\,2,3)$.

3 On donne $\text{cov}(X,Y) = 0,44$.
Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite de régression $(\mathscr{D})$ de Y en fonction de X.

4 Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Correction bac 2010 - Série D

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1

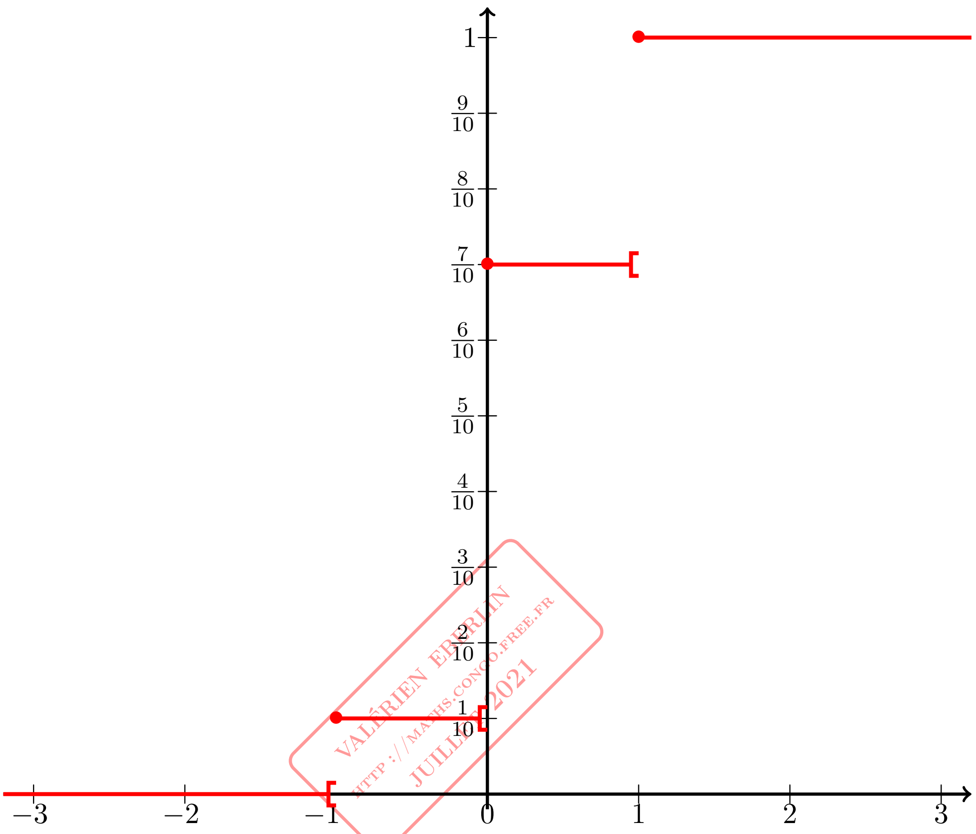
X	-1	0	1
p	$\dfrac{C_2^2.C_3^0}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{C_2^1.C_3^1}{C_5^2}=\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{C_2^0.C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$

2 $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=i}^{3}x_ip_i=-1\times\dfrac{1}{10}+0\times\dfrac{6}{10}+1\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{10}$.

3 **a.** La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par le tableau :

X	$]-\infty;-1[$	$[-1;0[$	$[0;1[$	$[1;+\infty[$
$F_X(x)$	0	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{7}{10}$	1

b.



Exercice 2

1 On peut prendre pour polynôme de degré 3, le polynôme : $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$.
En remarquant que $\overline{z_2} = -z_1$, on a :

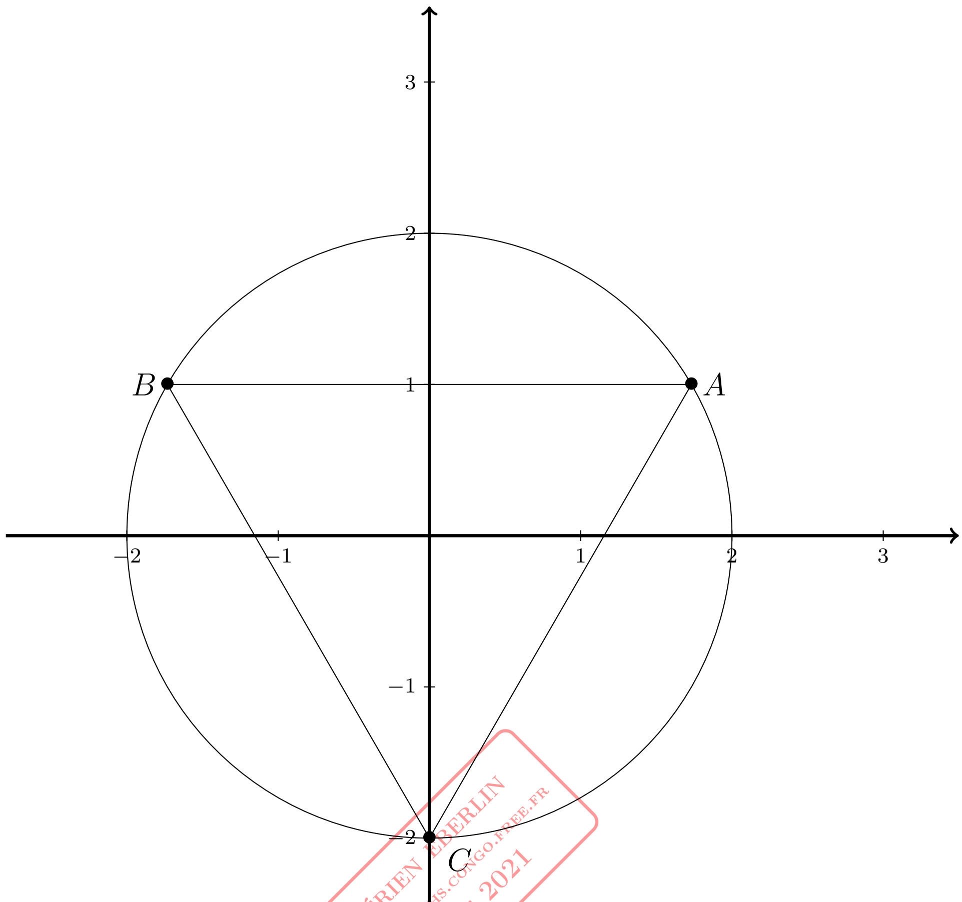
$$\begin{aligned}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) &= (z-z_1)(z+\overline{z_1})(z-z_3)\\ &= (z^2+(\overline{z_1}-z_1)z-|z_1|^2)(z-z_3)\\ &= (z^2-2iz-4)(z-z_3)\\ &= z^3+(-z_3-2i)z^2+(2iz_3-4)z+4z_3\\ &= z^3-8i\end{aligned}.$$

2 $\sqrt{3}+i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\right)$.

$-\sqrt{3}+i = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$.

$-2i = 2\times(-i) = 2(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))$.

3 **a.**



b. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi] \equiv \arg\left(\dfrac{-\sqrt{3}-3i}{-2\sqrt{3}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)\ [2\pi] \equiv \arg\left(\dfrac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

La somme des angles dans un triangle étant égale à 180°, on en déduit que l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

c. Le triangle ABC est équilatéral.

Problème

Partie A

1 La fonction g est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et on a : $g'(x) = \dfrac{2}{x}$.
$\forall\, x \in]-\infty; 0[,\quad g'(x) < 0$.
La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0
$g'(x)$			$-$		||
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ||

2 $g(-1) = 2\ln(1) = 0$.

<u>Signes de g</u>
g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.
De plus, $g(-1) = 0$.
On en déduit que :
$g(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty; -1[$;
$g(x) < 0$ pour tout $x \in]-1; 0[$.

Partie B

1 La fonction $x :\mapsto -2x + 1 + 2x\ln|x|$ existe pour tout $x < 0$.
La fonction $x :\mapsto (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - 1$ existe pour tout $x \geq 0$.
Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2 **a.** Continuité en 0

$\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} (-2x+1+2x\ln|x|) = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} ((x+2)\,\mathrm{e}^{-x}-1) = 1 = f(0).$

Comme $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = f(0)$, alors la fonction f est continue en 0.

Dérivabilité en 0

$\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0_-} (-2+2\ln|x|) = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0_+} \mathrm{e}^{-x} + 2\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x} = -1.$

Comme $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ n'est pas une valeur finie, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

b. $|x| = -x$ si $x<0$.

La fonction f s'écrit $f(x) = -2x+1+2x\ln(-x)$ si $x<0$.

D'où : $\forall x \in]-\infty;0[,\quad f'(x) = -2+2\times\ln(-x)+2x\times\dfrac{-1}{-x} = 2\ln(-x) = g(x).$

3

f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et on a : $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x<0 \\ -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

On en déduit que :

- pour tout $x\in]-\infty;-1[$, $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$;
- pour tout $x\in]-1;0[$, $f'(x)<0$ et f est strictement décroissante sur $]-1;0[$.
- pour tout $x>0$, $f'(x) = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}<0$ et f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\ln|x|\left(\dfrac{-2}{\ln|x|}+\dfrac{1}{x\ln|x|}+2\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}-1\right] = -1.$

x	$-\infty$		β		-1		0		α		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	||		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2021

4 Montrons qu'il existe α vérifiant $1 < \alpha < \frac{3}{3}$, solution de l'équation $f(x) = 0$

$f(1) \approx 0,10$ et $f(\frac{3}{2}) \approx -0,22$.
La fonction f est continue, strictement décroissante sur $\left]1; \frac{3}{2}\right[$.
De plus, $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

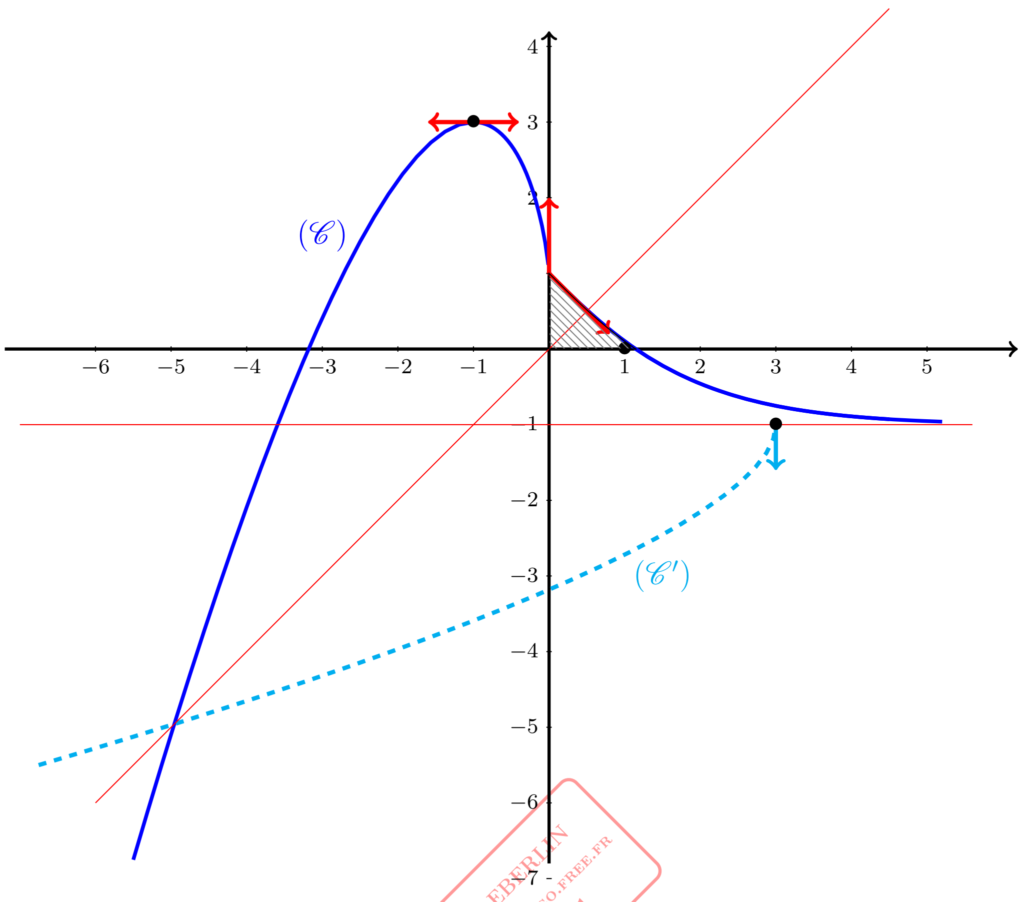
Montrons qu'il existe β vérifiant $-4 < \beta < -3$, solution de l'équation $f(x) = 0$

$f(-4) \approx -2,09$ et $f(-3) \approx 0,41$.
La fonction f est continue, strictement croissante sur $\left]-4; -3\right[$.
De plus, $f(-4) \times f(-3) < 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\beta \in \left]-4; -3\right[$ tel que $f(\beta) = 0$.

5 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2 + \dfrac{1}{x} + 2\ln|x|\right) = +\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une direction asymptotique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

6



VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

7 **a.** $\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} [f(x) - 0]\, dx = \int_0^{\alpha} [(x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - 1]\, dx = -\alpha + \int_0^{\alpha} (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\, dx.$

Intégrons $\displaystyle\int_0^{\alpha} (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\, dx$.

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$\int_0^{\alpha} (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \Big[-(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

D'où $\mathscr{A}(\alpha) = \Big[-(\alpha+3)\,\mathrm{e}^{-\alpha} - \alpha + 3\Big]\,\mathrm{cm}^2$.

b. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \mathscr{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0}\Big[-(\alpha+3)\,\mathrm{e}^{-\alpha} - \alpha + 3\Big] = 0.$

Partie C

1 h est une fonction continue, strictement croissante sur $]-\infty;-1]$.
Donc h réalise une bijection de $]-\infty;-1]$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)\,;\,h(-1)\right] =]-\infty;3]$.

J est l'intervalle $]-\infty;3]$.

2

Comme h et h^{-1} ont le même sens de variation, on en déduit le tableau de variation de h^{-1}.

x	$-\infty$	3
$(h^{-1})'(x)$	$+$	
$h^{-1}(x)$	$-\infty$	-1

Correction bac 2011 - Série D

► Voir le sujet. ► Retour au sommaire.

Exercice 1

1 La matrice de l'application f est :
$$\begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 L'endomorphisme f est bijectif si le déterminant de sa matrice associée est non nul.
$$\begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a - 1$$
D'où, f est bijectif si $a \neq 1$.

3 **a.** $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3\,;\ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$.

Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\mathscr{B}$. Alors x, y, z vérifient le système (S) : $\begin{cases} x = -x + y + 2z \\ y = x + 2y + z \\ z = x + y \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 & E_1 \\ x + y + z = 0 & E_2 \\ x + y - z = 0 & E_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 & E_1 \\ 3y + 4z = 0 & E_2' = E_1 + 2E_2 \\ 3y = 0 & E_3' = E_1 + 2E_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs invariants par l'endomorphisme f est l'ensemble $\{(0, 0, 0)\}$.

b. $\operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3\,;\ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}\}$.

Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\operatorname{Ker} f$. Alors x, y, z vérifient le système : $\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 0 & E_1 \\ x + 2y + z = 0 & E_2 \\ x + y = 0 & E_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + 2z = 0 & E_1 \\ 3y + 3z = 0 & E_2' = E_1 + E_2 \\ 2y + 2z = 0 & E_3' = E_1 + E_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Finalement, $\overrightarrow{u}(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\operatorname{Ker} f$ se décompose en : $(x, y, z) = (z, -z, z) = z(1, -1, 1)$.

On en déduit que $\operatorname{Ker} f$ est la droite engendré par le vecteur $(1, -1, 1)$, d'équation $\begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$.

c. $\operatorname{Im} f = \{f(\overrightarrow{u}) \ ;\ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3\}$.

Soit $\overrightarrow{u'}(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de Imf. Alors il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$.

(x',y',z') vérifie le système (S) : $\left\{\begin{array}{rl|l} -x+y+2z &= x' & E_1 \\ x+2y+z &= y' & E_2 \\ x+y \quad\;\; &= z' & E_3 \end{array}\right.$

$$S \iff \left\{\begin{array}{rl|l} -x+y+2z &= x' & E_1 \\ 3y+3z &= x'+y' & E_2' = E_1+E_2 \\ 2y+2z &= x'+z' & E_3' = E_1+E_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl|l} -x+y+2z &= x' & E_1 \\ 3y+3z &= x'+y' & E_2' \\ 0 &= x'-2y'+3z' & E_3'' = -2E_2'+3E_3' \end{array}\right.$$

Finalement, $(x',y',z') \in (S) \iff x'-2y'+3z' = 0$.
Les coordonnées (x',y',z') de Imf vérifient $x' = 2y'-3z'$.
D'où : $(x',y',z') = (2y'-3z', y', z') = y'(2,1,0) + z'(-3,0,1)$.
On en déduit que Imf est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\{(2,1,0),(-3,0,1)\}$, d'équation $x-2y+3z=0$

4

$$\overrightarrow{u} \in \ker f \iff f\big((1,\alpha,\beta)\big) = \overrightarrow{0} \iff \left\{\begin{array}{l} -1+\alpha+2\beta = 0 \\ 1+2\alpha+\beta = 0 \\ 1+\alpha \quad\;\; = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha+2\beta = 1 \\ 2\alpha+\beta = -1 \\ \alpha = -1 \end{array}\right.$$

En remplaçant α par -1 dans l'une des deux premières équations, on obtient $\beta = 1$.

$\overrightarrow{u} \in$ Ker f si $\alpha = -1$ et $\beta = 1$.

Exercice 2

1 L'équation (E) a pour discriminant $\Delta = (1+3i)^2 - 4(4+4i) = -24-10i$.

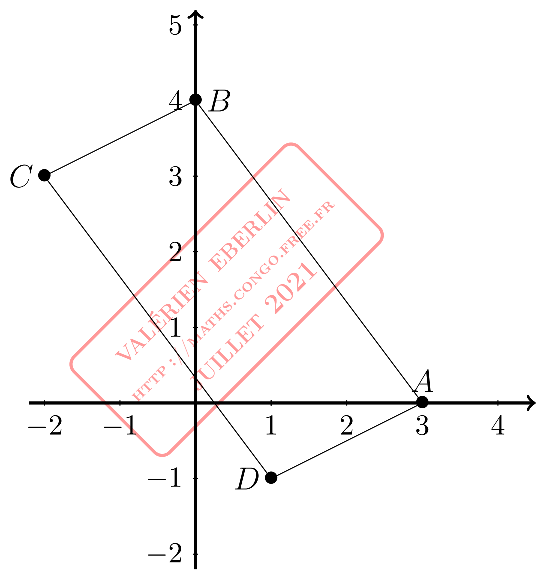
Cherchons un nombre complexe $z = x+iy$ tel que $z^2 = -24-10i$.
$x^2-y^2+2ixy = -24-10i$. Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, $x^2-y^2 = -24$ et $xy = -5$.
D'autre part, comme $|z|^2 = |-24-10i|$ alors $x^2+y^2 = 26$.

On obtient le système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{ll} x^2-y^2 = -24 & (1) \\ x^2+y^2 = 26 & (2) \\ xy = -5 & (3) \end{array}\right.$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2) on obtient, $x^2 = 1$. On en déduit que $x = -1$ ou $x = 1$;
En multipliant l'équation (1) par -1, puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on obtient $y^2 = 25$. On en déduit que $y = -5$ ou $y = 5$;
L'équation (3) nous indique que x et y sont de signes contraires.
D'où $\Delta = (-1+5i)^2$.

Les solutions de l'équation (E) sont $Z_1 = \frac{1+3i-1+5i}{2} = 4i$ et $Z_2 = \frac{1+3i+1-5i}{2} = 1-i$.

2 **a.**



b. $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = -3+4i$; $Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D = -3+4i$; $Z_{\overrightarrow{CB}} = Z_B - Z_C = 2+i$; $Z_{\overrightarrow{DA}} = Z_A - Z_D = 2+i$.

c. Comme $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$, alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Problème

Partie A

1 $a + \dfrac{b}{1+t} = \dfrac{at+a+b}{1+t}$. On cherche a tel que $\dfrac{1-t}{1+t} = \dfrac{a+b+at}{1+t}$.

Par identification, $a+b=1$ et $a=-1$

D'où $a=-1$ et $b=2$.

2 $\displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1+t}\,dt = \int_0^x \left(-1+\frac{2}{1+t}\right)dt = \Big[-t+2\ln(1+t)\Big]_0^x = -x+2\ln(1+x) = -x+\ln(1+x)^2.$

Partie B

1 La fonction $x \mapsto -x+\ln(x+1)^2$ existe si et seulement si $x+1 \neq 0$. Donc $E_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2 La fonction f est dérivable sur E_f et on a : $\forall x \in E_f,\quad f'(x) = -1+\dfrac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{-x+1}{x+1}$.

Tableau de signes

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x+1}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$f'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty; -1[$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.
$f'(x) > 0$ pour tout $x \in]-1; 1[$ et f est strictement croissante sur $]-1; 1[$.
$f'(x) < 0$ pour tout $x \in]1; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

3 Tableau de variation

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x\left(1 - 2\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to -1_-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1_+} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0		$-$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-1+\ln 4$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4 $f(2) \approx 0,197$; $f(3) \approx -0,227$.
La fonction f est continue, strictement décroissante sur $]2; 3[$.
De plus, $f(2) \times f(3) < 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]2; 3[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

5 $f(-2) = 2$; $f'(-2) = -3$.
$f(-\dfrac{3}{2}) \approx 0,11$; $f'(-\dfrac{3}{2}) = -5$.
$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$.
$f(5) \approx -1,4$; $f'(5) \approx -0,67$.

6
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-1 + 2\dfrac{\ln|x+1|}{x}\right) = -1$.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \Big[f(x) - (-x)\Big] = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x+1)^2 = +\infty$.

  Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \Big[f(x) - (-x)\Big] = +\infty$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ admet une direction asymptotique (branche parabolique) de direction, la droite d'équation $y = -x$ en $-\infty$.

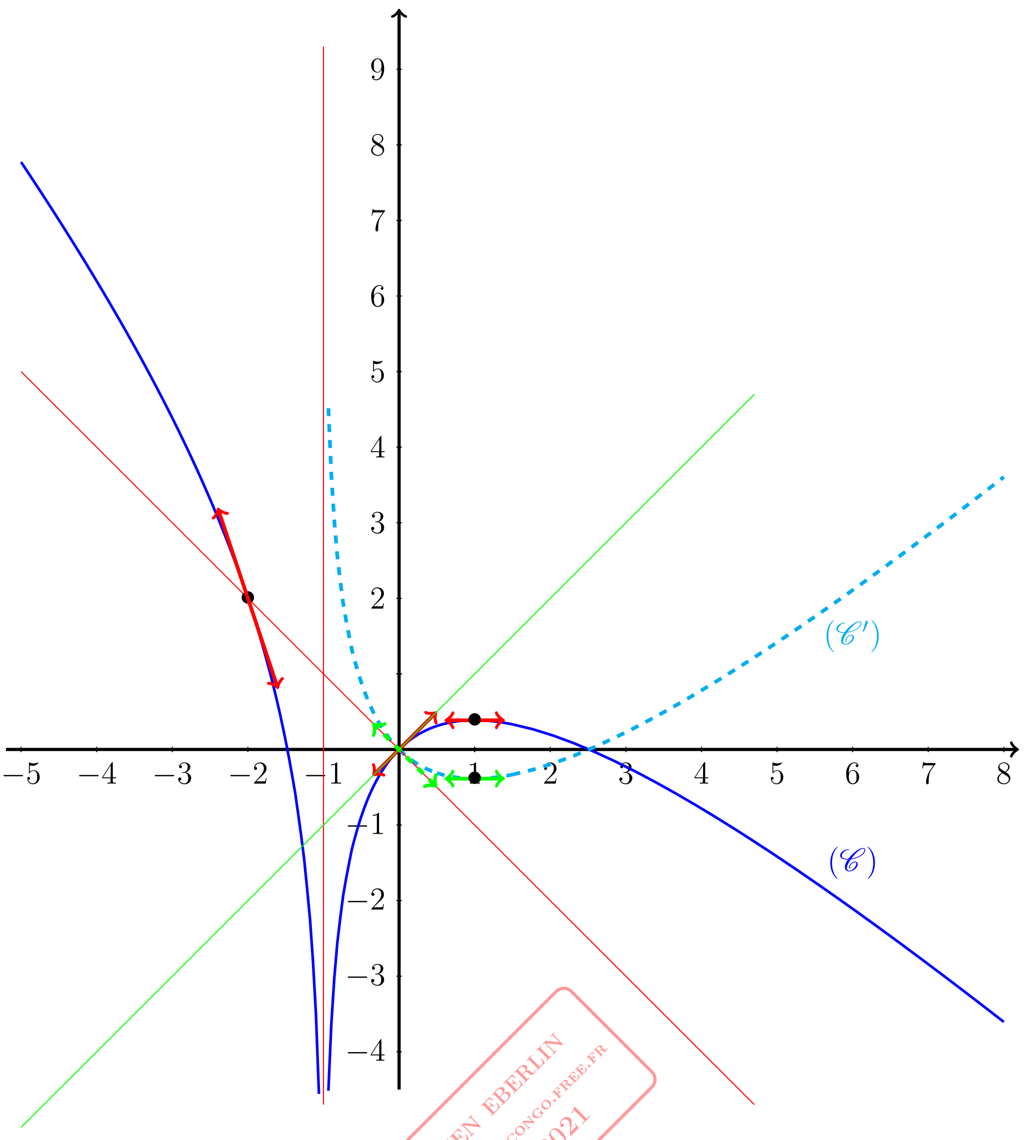
- On obtient de même : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big[f(x) - (-x)\Big] = +\infty$ et on en déduit que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une direction asymptotique de direction, la droite d'équation $y = -x$ en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-1_-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1_+} f(x) = -\infty$. la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

7 Équation de la tangente en $x = -2$

L'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ en $x = -2$ est donnée par la formule :
$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$. D'où $y = -3x - 4$.

Équation de la tangente en $x = 0$

L'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ en $x = 0$ est donnée par la formule : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$. D'où $y = x$.



Partie C

1 Tableau de variation de h

x	-1		1		α		$+\infty$
$h'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$			
$h(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$1-\ln 4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2 Voir graphique.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

Correction bac 2012 - Série D

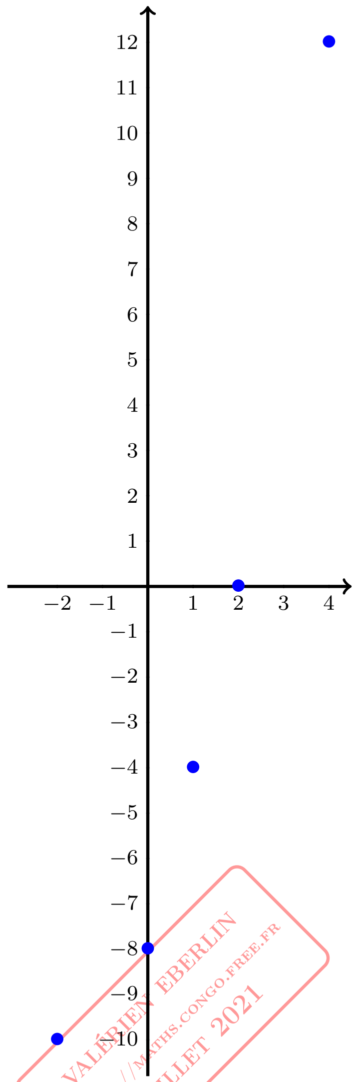
▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 $\overline{X} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{a+3}{5}$ et $\overline{Y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{b-6}{5}$.

Les coordonnées du point moyen vérifient :

$$\begin{cases} \frac{a+3}{5} = 1 \\ \frac{b-6}{5} = -2 \end{cases} \quad \text{D'où} \quad a = 2 \text{ et } b = -4.$$



2 **a.** Voir graphique.

b. Pour $a = 2$ et $b = -4$, $\overline{X} = 1$, $\overline{Y} = -2$.

L'équation de régression linéaire de X en Y est donnée par l'équation :

$X = aY + b$ où $a = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{V}(Y)}$ et $b = \overline{X} - a\overline{Y}$.

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - \overline{X}.\overline{Y}\\ &= \frac{1}{5}(-2\times(-10) + 0\times(-8) + 1\times(-4) + 2\times 0 + 4\times 12) - 1\times(-2)\\ &= 14,8\end{aligned}.$$

$$\begin{aligned}\text{V}(Y) &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i^2 - \overline{Y}^2\\ &= \frac{1}{5}((-10)^2 + (-8)^2 + (-4)^2 + 0^2 + 12^2) - (-2)^2\\ &= 60,8\end{aligned}$$

D'où : $a = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(Y)} = 0,243$ et $b = 1 - 0,243\times(-2) = 1,486$.

L'équation de la droite de régression linéaire de X en Y est : $X = 0,243Y + 1,486$.

c. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{V}(X)}\sqrt{\text{V}(Y)}}$.

$$\begin{aligned}\text{V}(X) &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \overline{X}^2\\ &= \frac{1}{5}((-2)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2) - 1^2\\ &= 4\end{aligned}$$

D'où $\rho_{X,Y} = \dfrac{14,8}{\sqrt{4}\sqrt{60,8}} = 0,949$.

Interprétation

Le coefficient de corrélation linéaire est proche de 1. Cela indique qu'il existe une relation linéaire forte entre les variables X et Y. Ce coefficient est également positif, cela signifie que lorsqu'une variable augmente, l'autre variable augmente aussi.

Exercice 2

1 **a.** Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, une solution de l'équation (E).

$$z^2 = -8\sqrt{3}+8i \iff r^2\,\mathrm{e}^{i2\theta} = 16\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}} \iff \begin{cases} r^2 = 16\\ 2\theta \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]\end{cases} \iff \begin{cases} r = 4\\ \theta_k = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

D'où les solutions :

$z_1 = 4\,\mathrm{e}^{i\theta_0} = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}} = 4\left(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})\right)$.

$z_2 = 4\,\mathrm{e}^{i\theta_1} = 4\,\mathrm{e}^{i(\frac{5\pi}{12}+\pi)} = 4\left(\cos(\frac{5\pi}{12}+\pi) + i\sin(\frac{5\pi}{12}+\pi)\right) = 4\left(-\cos(\frac{5\pi}{12}) - i\sin(\frac{5\pi}{12})\right)$.

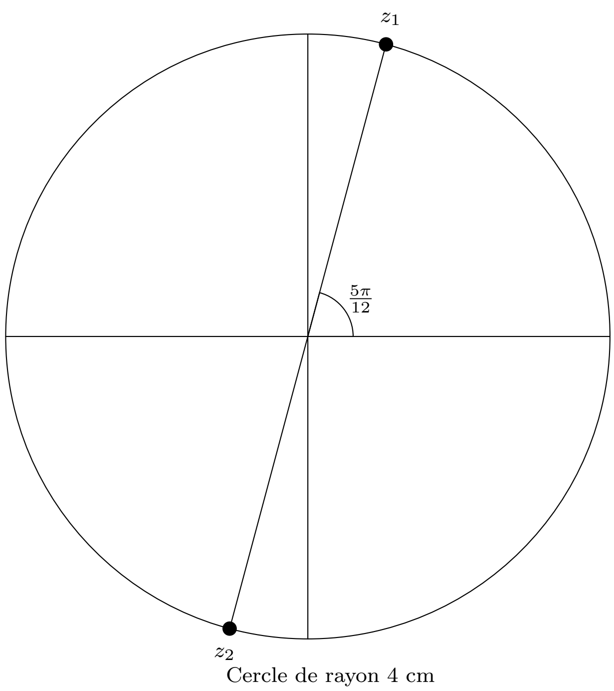
b. On cherche un nombre complexe $z = x + iy$ tel que $z^2 = -8\sqrt{3} + 8i$.
$x^2 - y^2 + 2ixy = -8\sqrt{3} + 8i$. Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, $x^2 - y^2 = -8\sqrt{3}$ et $xy = 4$.
D'autre part, comme $|z|^2 = |-8\sqrt{3} + 8i|$ alors $x^2 + y^2 = 16$.

On obtient le système d'équations : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8\sqrt{3} & (1) \\ x^2 + y^2 = 16 & (2) \\ xy = 4 & (3) \end{cases}$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on obtient :
$x^2 = 8 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2$. On en déduit que $x = \sqrt{2} - \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{2} + \sqrt{6}$;

En multipliant l'équation (1) par -1, puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on obtient $y^2 = 8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$. On en déduit que $y = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ ou $y = -\sqrt{2} - \sqrt{6}$;
L'équation (3) nous indique que x et y sont de même signe.
Les solutions de l'équation $z^2 = -8\sqrt{3} + 8i$ sont : $-\sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ et $\sqrt{2} - \sqrt{6} - i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.
En comparant les signes des parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2, on en déduit que :
$z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ et $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6} - i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

2



Cercle de rayon 4 cm

3 De l'égalité $-\sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 4\left(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})\right)$, on en déduit que :
$\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Problème

Partie A

1 L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est : $r^2 + 2r + 1 = 0$. Elle admet une racine double $r_1 = r_2 = -1$.
Donc la solution générale de l'équation différentielle est : $y(x) = (c_1 x + c_2)\,\mathrm{e}^{-x}$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

2 u est de la forme $u(x) = (c_1 x + c_2)\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

$$\begin{cases} u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2\,\mathrm{e}^{-0} = 1 \\ c_1\,\mathrm{e}^{-0} - c_2\,\mathrm{e}^{-0} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

La solution particulière est la fonction u définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $u(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B

3 La fonction $x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ existe sur $]-\infty; 0]$.
La fonction $x \mapsto 1 - 2x + x\ln x$ existe si et seulement si $x > 0$.
Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

4 <u>Continuité en 0</u>

$\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = f(0) = (0+1)\,\mathrm{e}^{-0} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} (1 - 2x + x\ln x) = 1.$

Comme $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$, la fonction f est continue en 0.

<u>Dérivabilité en 0</u>

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0_-} \frac{(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} = 1 + \lim_{x \to 0_-} \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} = 1 - \lim_{X \to 0_+} \frac{\mathrm{e}^{X} - 1}{X} = 1 - 1 = 0$$

où l'on a posé $X = -x$.

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0_+} (-2 + \ln x) = -\infty.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ n'est pas une valeur finie, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

5 La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et on a :
$\forall\, x < 0, \quad f'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x}.$
$\forall\, x > 0, \quad f'(x) = -1 + \ln x.$

<u>Signe de f'</u>

$f'(x) = 0 \iff -1 + \ln x = 0 \iff x = \mathrm{e}$
$f'(x) < 0$ pour tout $x \in]0; \mathrm{e}[$;
$f'(x) > 0$ pour tout $x \in]\mathrm{e}; +\infty[$.
$f'(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$;

<u>Tableau de variation</u>

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = -\infty.$

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2021

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln x\left(\frac{1}{x\ln x} - \frac{2}{\ln x} + 1\right) = +\infty.$$

x	$-\infty$		0		e		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$1-\mathrm{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6

Point d'intersection avec l'axe des abscisses pour $x \leq 0$

Si $x \leq 0$, $\quad f(x) = 0 \iff (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$

$\iff x = -1$

Le point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses est le point $(-1, 0)$.

Équation de la tangente

L'équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ est donnée par la formule $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$
D'où $(\mathscr{T})$: $y = \mathrm{e}\,x + \mathrm{e}$.

7 $f(6) \approx -0,25$; $f(7) \approx 0,62$.

La fonction f est continue, strictement croissante sur $]6\,;\,7[$.

De plus, $f(6) \times f(7) < 0$.

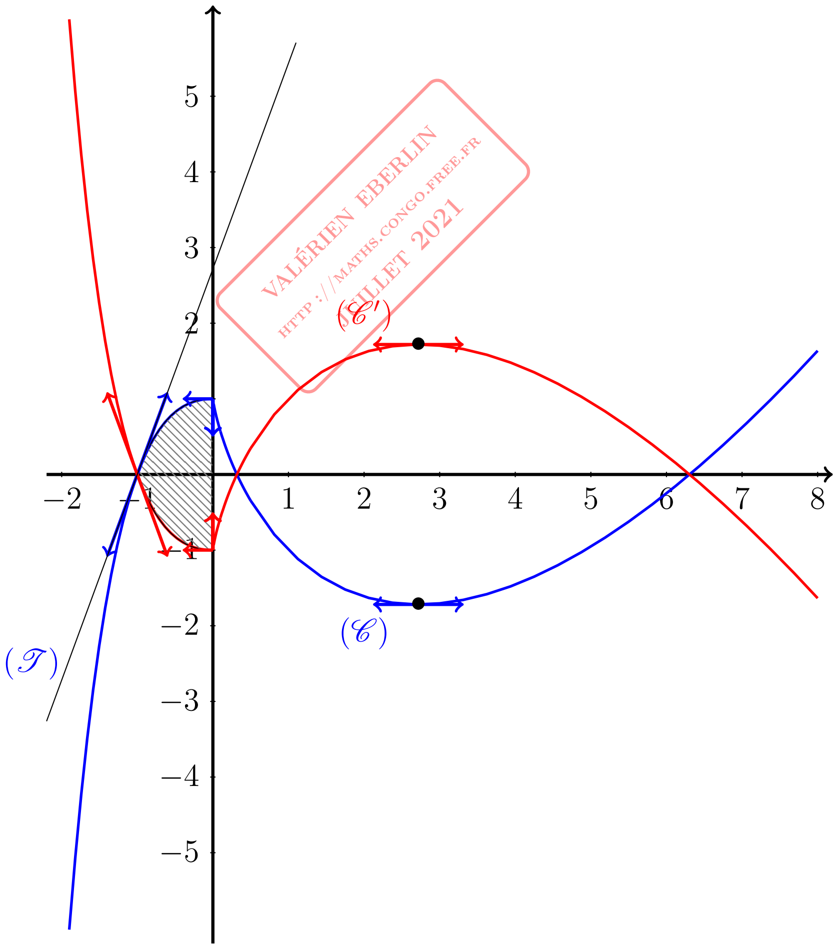
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]6\,;\,7[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

8 **a.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 2 + \ln x\right) = +\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP ://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

b.



Partie C

9 **a.**

x	$-\infty$		0		e		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0		$-$		
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-1+\mathrm{e}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b. Voir graphique.

c. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left[f(x) - h(x)\right]\,dx = 2\int_{-1}^{0} (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx.$

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = 1+x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$\mathscr{A} = 2\int_{-1}^{0}(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = -2\Big[(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}\,dx.$

D'où $\mathscr{A} = 2(-2+\mathrm{e})$ u.a $= 8(-2+\mathrm{e})\,\mathrm{cm}^2$

Correction bac 2013 - Série D

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.
Dans ce cas, on a : $\sum\limits_i n_{i\bullet} = \sum\limits_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

1

X	-2	-1	0
$n_{i\bullet}$	6	8	5

Y	-1	0	2
$n_{\bullet j}$	9	6	4

2 $\overline{X} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{3} n_{i\bullet}x_i = \dfrac{6\times(-2)+8\times(-1)+5\times 0}{19} = -\dfrac{20}{19}$.

$\overline{Y} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{3} n_{\bullet j}y_j = \dfrac{9\times(-1)+6\times 0+4\times 2}{19} = \dfrac{-1}{19}$.

Le point moyen a pour coordonnées $G\left(-\dfrac{20}{19}, -\dfrac{1}{19}\right)$.

3 L'équation de régression linéaire de Y en X est donnée par l'équation :

$Y = aX + b$ où $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} n_{ij}x_iy_j - \overline{X}.\overline{Y}$ où n_{ij} est le coefficient associé au couple (x_i, y_j)

$= \dfrac{8+0-8+3+0+0+0+0+0}{19} - \dfrac{20}{19^2} = \dfrac{37}{361}$

$\mathrm{V}(X) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{3} n_{i\bullet}x_i^2 - \overline{X}^2 = \dfrac{6(-2)^2+8\times(-1)^2+5\times 0^2}{19} - \left(-\dfrac{20}{19}\right)^2 = \dfrac{208}{361}$

Ainsi, $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} = \dfrac{37}{208}$ et $b = \dfrac{-1}{19} - \dfrac{37}{208}\times\dfrac{-20}{19} = \dfrac{7}{52}$.

D'où l'équation de la droite de régression linéaire $Y = \dfrac{37}{208}X + \dfrac{7}{52}$.

4 Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}}$.

$V(Y) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{3} n_{\bullet j}y_j^2 - \overline{Y}^2 = \dfrac{9\times(-1)^2+6\times 0^2+4\times 2^2}{19} - \left(\dfrac{-1}{19}\right)^2 = \dfrac{474}{361}$.

D'où $\rho_{X,Y} = \dfrac{\frac{37}{361}}{\sqrt{\frac{208}{361}}\sqrt{\frac{474}{361}}} = 0,117$.

Exercice 2

1 Posons $Z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$.

$$Z^3 = -8 \iff r^3\,\mathrm{e}^{i3\theta} = 8\,\mathrm{e}^{i\pi} \iff \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta \equiv \pi\,[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta_k = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où les solutions suivantes :

$z_0 = 2\,\mathrm{e}^{i\theta_0} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

$z_1 = 2\,\mathrm{e}^{i\theta_1} = 2\,\mathrm{e}^{i\pi} = -2$.

$z_2 = 2\,\mathrm{e}^{i\theta_2} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{3})\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

2 **a.** $U = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \dfrac{-2i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}} = \dfrac{(-2i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})}{(-3 - i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où $|U| = 1$ et $\arg(U) = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On peut choisir comme argument de U la valeur $\dfrac{\pi}{3}$.

b. Comme $\left|\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = 1$ alors $|Z_C - Z_A| = |Z_B - Z_A|$. D'où $AC = AB$.

D'autre part, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right)\,[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Le triangle ABC est isocèle en A et a un angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$. C'est donc un triangle équilatéral.

3 **a.** Soit $Z' = aZ + b$ l'expression complexe de la rotation S.

$$\begin{cases} S(A) = C \\ S(C) = B \end{cases} \iff \begin{cases} Z_C = aZ_A + b & (1) \\ Z_B = aZ_C + b & (2) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (2) par -1 puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (1), il s'ensuit que :

$a = \dfrac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_C} = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En remplaçant a par $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'expression $b = Z_C - aZ_A$, on trouve :

$b = 1 - i\sqrt{3} - (-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(1 + i\sqrt{3}) = 0$.

D'où l'expression de la rotation S : $Z' = \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$.

b. $Z' = \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)Z = \mathrm{e}^{i(\frac{4\pi}{3})}\,Z$.

S est de la forme $Z' - Z_O = a(Z - Z_O)$ avec $a = \mathrm{e}^{i(\frac{4\pi}{3})}$ et $Z_O = 0$. C'est donc la rotation de centre $Z_O = 0$ et d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$.

Problème

Partie A

1 La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$g'(x) = -\dfrac{2x^2+1}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Signe de g'

$g'(x) < 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Tableau de variation

$\lim\limits_{x\to 0_+} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	
$g(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

2 g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
De plus, $g(1) = 0$.
On en déduit que :
$g(x) > 0$ pour tout $x \in]0;1[$.
$g(x) < 0$ pour tout $x \in]1;+\infty[$.

Partie B

1 La fonction $x :\mapsto 1 + x - \mathrm{e}^{1-x}$ existe sur $]-\infty;1]$;
la fonction $x :\mapsto \dfrac{2x - x^2 + \ln x}{x}$ existe sur $]1;+\infty[$.
Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2 **a.** Continuité de la fonction f au point $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = f(1) = 1.$

$\lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1_+} \dfrac{2x - x^2 + \ln x}{x} = 1.$

Comme $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = f(1)$, alors la fonction f est continue au point $x = 1$.

Dérivabilité de la fonction f au point $x = 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1_-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1_-} \frac{x - \mathrm{e}^{1-x}}{x-1} \\ &= 1 + \lim_{u\to 0_+} \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u} \quad \text{où l'on a posé } u = 1 - x \\ &= 2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1_+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1_+}\frac{x-x^2+\ln x}{x(x-1)}\\
&= -1+\lim_{x\to 1_+}\frac{\ln x}{x(x-1)}\\
&= -1+\lim_{x\to 1_+}\frac{\ln x-\ln 1}{(x-1)}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1_-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1_+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, alors la fonction f n'est pas dérivable au point $x=1$.

b. Pour tout $x\in\,]1;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

3 f est dérivable sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et on a :
$\forall x\in\,]-\infty;1[,\quad f'(x)=1+\mathrm{e}^{1-x}$.
$\forall x\in\,]1;+\infty[,\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

Signe de f'

$f'(x)>0$ pour tout $x\in\,]-\infty;1[$;
$f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]1;+\infty[$. Par conséquent, $f'(x)<0$ pour tout $x\in\,]1;+\infty[$.

Tableau de variation de f

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x-\mathrm{e}^{1-x})=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x+\dfrac{\ln x}{x}\right)=-\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\parallel$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4 (Δ) asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(2-x)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, alors la droite (Δ) d'équation $y=-x+2$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

Position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ)

$f(x)-(2-x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

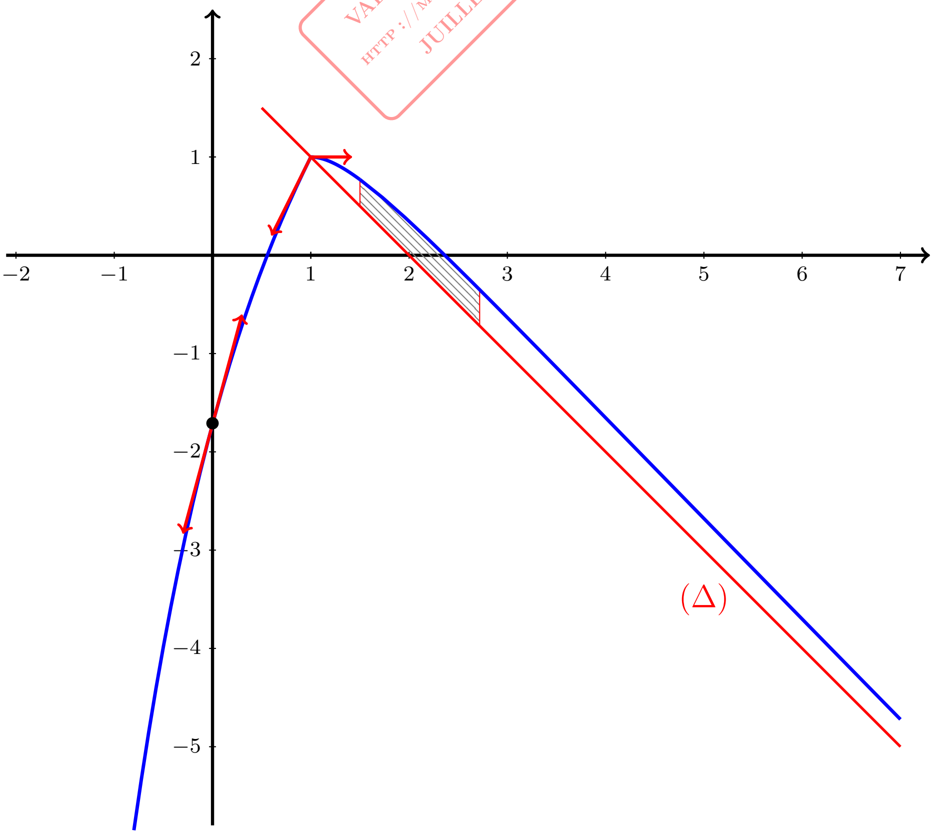
Comme la fonction $x:\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ est strictement positive pour $x>1$. , alors la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (Δ) pour $x>1$.

5 L'équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ en $x=0$ est donnée par la formule : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$. D'où $(\mathscr{T})$: $y=(1+\mathrm{e})x+1-\mathrm{e}$.

6

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1-\dfrac{\mathrm{e}^{1-x}}{x}\right)=1-\mathrm{e}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}=1+\mathrm{e}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{u}}{u}=+\infty$ où l'on a posé $u=-x$.
  La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.
- La droite (Δ) d'équation $y=2-x$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

7



8 $\mathscr{A}(D)=\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}\left[f(x)-(2-x)\right]dx=\int_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx.$

Si l'on choisit $\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases}u'(x)=\dfrac{1}{x}\\ v(x)=\ln x\end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties : $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx=\left[(\ln x)^2\right]_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}-\int_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx.$

D'où $\mathscr{A}(D)=\dfrac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}=\dfrac{1-\left(\ln\frac{3}{2}\right)^2}{2}$ u.a $=2\left[1-\left(\ln\frac{3}{2}\right)^2\right]$ cm^2

Correction bac 2014 - Série D

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle conjugué du nombre complexe z, le nombre $\overline{z} = x - iy$.

2 **a.** Posons $Z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$.

$$Z^3 = 1 \iff r^3\,\mathrm{e}^{i3\theta} = 1\,\mathrm{e}^{i0} \iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta \equiv 0\,[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta_k = \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où les solutions suivantes :

$z_0 = 1\,\mathrm{e}^{i\theta_0} = \mathrm{e}^{i0} = 1$.

$z_1 = 1\,\mathrm{e}^{i\theta_1} = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_2 = 1\,\mathrm{e}^{i\theta_2} = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) - i\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Montrons que les solutions non réelles, sont conjuguées entre elles.

On a $\overline{z_1} = \overline{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_2$.

3 On peut remarquer que $Z_1 = 2 \times z_2$. On en déduit que $Z_1^3 = 2^3 \times z_2^3$.
Or z_2 est solution de l'équation (E) c'est à dire $z_2^3 = 1$.
Ainsi, $Z_1^3 = 2^3 \times z_2^3 = 8 \times 1 = 8$.

4 **a.** Soit z est une solution de l'équation (E). Alors $z^3 = 1$.
On en déduit que $(2z)^3 = 8 \times z^3 = 8$. Ce qui signifie que $2z$ est solution de l'équation (E').
Les solutions de l'équation (E') sont donc les doubles des solutions de l'équation (E).
D'où : $z'_0 = 2z_0 = 2$; $z'_1 = 2z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z'_2 = 2z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

b. Comme z'_1 et z'_2 sont des solutions de l'équation (E') alors ${z'_1}^3 = 8$ et ${z'_2}^3 = 8$.

On en déduit que : $\left(\dfrac{z'_1}{z'_2}\right)^3 = \dfrac{{z'_1}^3}{{z'_2}^3} = \dfrac{8}{8} = 1$.

Donc $\dfrac{z'_1}{z'_2}$ est une solution de l'équation (E).

Exercice 2

1 $f(\vec{i})$ est le vecteur de coordonnées : $\begin{cases} x' = 0 + 0 = 0 \\ y' = 1 + 0 + 0 = 1 \\ z' = 1 \end{cases}$ Donc $f(\vec{i}) = \vec{j} + \vec{k}$

$f(\vec{j})$ est le vecteur de coordonnées : $\begin{cases} x' = 1+0 = 1 \\ y' = 0+1+0 = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$ Donc $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$

$f(\vec{k})$ est le vecteur de coordonnées : $\begin{cases} x' = 0+1 = 1 \\ y' = 0+0+1 = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$ Donc $f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}$

2

$$\begin{array}{ccc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{i} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{j} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{k} \end{array}$$

3 **a.** Un sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si :

(i) $\mathscr{E} \neq \emptyset$

(ii) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u} \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathscr{E}$ alors $\vec{u} + \vec{v} \in \mathscr{E}$.

(iii) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathscr{E}$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda\overrightarrow{u} \in \mathscr{E}$.

b. (i) $(0,0,0) \in \mathscr{H}$ car $0-0+0=0$. D'où $\mathscr{H} \neq \emptyset$.

(ii) Soit $\overrightarrow{u}\,(x,y,z) \in \mathscr{H}$ et $\overrightarrow{v}\,(x',y',z') \in \mathscr{H}$.
$\overrightarrow{u}\,(x,y,z) \in \mathscr{H} \iff x-y+z=0$.
$\overrightarrow{v}\,(x',y',z') \in \mathscr{H} \iff x'-y'+z'=0$.
On a : $(x+x')-(y+y')+(z+z') = \underbrace{(x-y+z)}_{=0} + \underbrace{(x'-y'+z')}_{=0} = 0$.
Donc le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ de coordonnées $(x+x', y+y', z+z')$ appartient à $\mathscr{H}$.

(iii) Soit $\overrightarrow{u}\,(x,y,z) \in \mathscr{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\overrightarrow{u}\,(x,y,z) \in \mathscr{H} \iff x-y+z=0$.
On a : $\lambda x - \lambda y + \lambda z = \lambda\underbrace{(x-y+z)}_{=0} = 0$.
Donc le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à $\mathscr{H}$.

4 Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, un élément du noyau de f. Alors, $f\big((x,y,z)\big) = \overrightarrow{0}$.

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=-y \\ x=0 \end{cases}$$

Un vecteur (x,y,z) du noyau s'écrit : $(x,y,z) = (0,y,-y) = y(0,1,-1)$.
Le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1} = (0,1,-1)$, d'équation : $\begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$.

5 Soit $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, un élément de l'image de f. Alors, il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f\big((x,y,z)\big) = (x',y',z')$.

$$f\big((x,y,z)\big) = (x',y',z') \iff \begin{cases} y+z=x' \\ x+y+z=y' \\ x=z' \end{cases}.$$

L'on relève sans difficulté que : $x' - y' + z' = 0$.

Les coordonnées (x', y', z') de l'image de f vérifient $y' = x' + z'$.
D'où : $(x', y', z') = (x', x' + z', z') = x'(1, 1, 0) + z'(0, 1, 1)$.

On en déduit que l'image de f est le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (0, 1, 1)$, d'équation $x - y + z = 0$.

Exercice 3

1 Comme $e^x + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction $x : \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1} - x$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$.

2 La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \dfrac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} - 1 = -\dfrac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$.
Les fonctions $x : \mapsto e^x$ et $x : \mapsto e^{2x}$ étant strictement positives, on en déduit que g' est strictement négative sur $\mathbb{R}$.

3 Tableau de variation de g

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - x \right) = -\infty.$$
$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - x \right) = +\infty$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

4 La fonction g est continue, strictement décroissante sur $]-\infty\,; +\infty[$.
De plus, $0 \in]\lim\limits_{x \to +\infty} g(x); \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)[=]-\infty\,; +\infty[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty\,; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
On en déduit que $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$ et α est solution de l'équation $\dfrac{e^x}{e^x + 1} = x$.

5 **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.
La fonction $x \mapsto e^x$ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) > 0$.

b. Tableau de variation de h

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0.$$

VALÉRIEN EBERLIN HTTP ://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2021

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	1

c. h est strictement croissante sur $]-\infty\,;+\infty[$.
De plus, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x)=1$.
Donc : $\forall\, x\in\mathbb{R},\quad 0\leq h(x)\leq 1$.

6 **a.** Notons $\mathscr{P}_n$, la propriété : $u_n\leq 1$.
Montrons par récurrence que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.

Initialisation

$u_0=0\leq 1$.

$u_1=h(u_0)=\dfrac{\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0+1}=\dfrac{1}{2}\leq 1$.

Donc les propriétés $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vérifiées.

Hérédité

Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que $u_n\leq 1$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $u_{n+1}\leq 1$.

On a : $u_n\leq 1$.
D'après 5. c., $h(u_n)\leq 1$. D'où $u_{n+1}\leq 1$.
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n.

b. Notons $\mathscr{P}_n$, la propriété : $u_n\leq u_{n+1}$.
Montrons par récurrence que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.

Initialisation

$u_0=0$ et $u_1=h(u_0)=\dfrac{1}{2}$. D'où $u_0\leq u_1$.

Donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que $u_n\leq u_{n+1}$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $u_{n+1}\leq u_{n+2}$.

On a $u_n\leq u_{n+1}$.
Comme h est une fonction croissante, alors $h(u_n)\leq h(u_{n+1})$. D'où $u_{n+1}\leq u_{n+2}$.
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n.

c. La suite (u_n) est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

Pour justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$, les étapes (i) ; (ii) et (iii) sont nécessaires.

(i) Montrons d'abord que : $\forall\, x \in [0;1],\ 0 < h'(x) \leq \dfrac{\mathrm{e}}{4}$

Soit $x \in [0;1]$.
Alors $x \geq 0$. On en déduit que $\mathrm{e}^x \geq 1$ et $\mathrm{e}^x + 1 \geq 2$.
Par croissance de la fonction carré sur $[0;1]$, on a $(\mathrm{e}^x + 1)^2 \geq 4$.
Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;1]$, on a $\dfrac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \leq \dfrac{1}{4}$.

D'où $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \leq \dfrac{\mathrm{e}^x}{4}$.

$\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}$ (car $x \leq 1$). On en déduit que $0 < \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{4}$.

D'où $0 < h'(x) \leq \dfrac{\mathrm{e}}{4}$

(ii) Montrons que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
h est continue et dérivable sur $[0;1]$.
De plus, $|h'(x)| = h'(x) \leq \dfrac{\mathrm{e}}{4}$ pour tout $x \in [0;1]$.
D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall\, x \in [0;1],\ \forall\, y \in [0;1],\ |h(x) - h(y)| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|x - y|$$

Comme $h(\alpha) = \alpha$, on en déduit d'après 5.c., que $\alpha \in [0;1]$.
De plus, d'après 5. c. et par définition de la suite (u_n) , on en déduit que $u_n \in [0;1]$.
Ainsi, on peut appliquer l'inégalité précédente en $x = u_n$ et $y = \alpha$.
On a alors :

$$|h(u_n) - h(\alpha)| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|$$

Mais $h(u_n) = u_{n+1}$ par définition de la suite (u_n) et rappelons que $h(\alpha) = \alpha$.
On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|$.

(iii) Montrons que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$

Soit $\mathscr{P}_n$, la propriété : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
Montrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n$.

Initialisation

D'après (ii), on a $|u_1 - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_0 - \alpha|$.
La propriété $\mathscr{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.
D'après (ii), $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|$ et par hypothèse de récurrence, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
Ainsi, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Justifions enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
Par passage à la limite, $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 4

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable x, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable y.
Dans ce cas, on a : $\sum\limits_i n_{i\bullet} = \sum\limits_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

1

x	-1	0	2
$n_{i\bullet}$	3	a	2

y	1	3
$n_{\bullet j}$	3	$a+2$

2 $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{3} n_{i\bullet} x_i = \dfrac{3\times(-1) + a\times 0 + 2\times 2}{a+5} = \dfrac{1}{5+a}$.

$\overline{y} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{2} n_{\bullet j} y_j = \dfrac{3\times 1 + (a+2)\times 3}{5+a} = \dfrac{3a+9}{a+5}$.

On cherche a tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5+a} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3a+9}{a+5} = 2 \end{cases} \quad \text{D'où } a = 1.$$

3 Pour $a = 1$, $\overline{x} = \dfrac{1}{6}$ et $\overline{y} = 2$.

Variance de x.

$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}\, x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{3(-1)^2 + 1\times 0^2 + 2\times 2^2}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{65}{36}$$

Variance de y.

$$V(y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\bullet j}\, y_j^2 - \overline{y}^2 = \frac{3\times 1^2 + 3\times 3^2}{6} - 2^2 = 1$$

Covariance de la série (x, y).

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} n_{ij} x_i y_j - \overline{x}.\overline{y} \quad \text{où } n_{ij} \text{ est le coefficient associé au couple } (x_i, y_j)$$

$$= \frac{-1 - 6 + 0 + 0 + 4 + 0}{6} - \frac{1}{6}\times 2 = -\frac{5}{6}$$

Correction bac 2015 - Série D

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 Les racines carrées de u sont les nombres complexes z tels que $z^2 = u$.
Posons $z = x + iy$.
On a : $x^2 - y^2 + 2ixy = 6 + 6i\sqrt{3}$. Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, $x^2 - y^2 = 6$ et $xy = 3\sqrt{3}$.
D'autre part, comme $|z|^2 = |u|$ alors $x^2 + y^2 = 12$.

On obtient le système d'équations suivant : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 6 & (1) \\ x^2 + y^2 = 12 & (2) \\ xy = 3\sqrt{3} & (3) \end{cases}$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on obtient, $x = -3$ ou $x = 3$;
En multipliant l'équation (1) par -1, puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on en déduit que $y = -\sqrt{3}$ ou $y = \sqrt{3}$.
L'équation (3) nous indique que x et y sont de même signe.
D'où les nombres complexes $\alpha_1 = 3 + i\sqrt{3}$ et $\alpha_2 = -3 - i\sqrt{3}$ sont les racines de u.

2 **a.**

$$\begin{aligned} 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 6i\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (9 + 3i\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}\right) - 4 &= -\frac{4}{8} - 6i\sqrt{3} \times \frac{1}{4} + (9 + 3i\sqrt{3})\frac{1}{2} - 4 \\ &= \frac{-4 - 12i\sqrt{3} + 36 + 12i\sqrt{3} - 32}{8} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b. Cherchons a, b et c tels que :

$4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = \left(Z + \frac{1}{2}\right)(aZ^2 + bZ + c)$.

Dans l'expression $\left(Z + \frac{1}{2}\right)(aZ^2 + bZ + c)$:

- Le terme de plus haut degré est a. On en déduit que : $a = 4$;
- Le terme constant est $\frac{1}{2}c$. On en déduit que : $\frac{1}{2}c = -4$. D'où $c = -8$;
- Le terme de degré 2 est $b + \frac{1}{2}a$. On en déduit que : $b + \frac{1}{2}a = -6i\sqrt{3}$. D'où $b = -2 - 6i\sqrt{3}$.

Donc $4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = \left(Z + \frac{1}{2}\right)(4Z^2 - 2(1 + 3i\sqrt{3})Z - 8)$.

Résolvons l'équation $4Z^2 - 2(1 + 3i\sqrt{3})Z - 8 = 0$

L'équation $4Z^2 - 2(1 + 3i\sqrt{3})Z - 8 = 0$ admet pour discriminant réduit :

$\Delta' = (1+3i\sqrt{3})^2 + 32 = 6 + 6i\sqrt{3}$. D'où $\Delta' = u$.
D'après 1., l'on peut écrire Δ' sous forme d'un carré : $\Delta' = (3+i\sqrt{3})^2$.
On en déduit que les solutions de l'équation $4Z^2 - 2(1+3i\sqrt{3})Z - 8 = 0$ sont :
$Z_2 = \dfrac{1+3i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_3 = \dfrac{1+3i\sqrt{3}+3+i\sqrt{3}}{4} = 1+i\sqrt{3}$.

Solutions de l'équation (E)

Les solutions de l'équation (E) : $Z_1 = -\dfrac{1}{2}$; $Z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_3 = 1+i\sqrt{3}$.

3 **a.** Soit $Z' = aZ + b$, l'expression complexe de la similitude S.

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases} \iff \begin{cases} Z_B = aZ_A + b & (1) \\ Z_C = aZ_B + b & (2) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (1) par -1 puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), il s'ensuit que :

$$a = \frac{Z_C - Z_B}{Z_B - Z_A} = \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - i\sqrt{3}.$$

En remplaçant a par $1-i\sqrt{3}$ dans l'expression $b = Z_B - aZ_A$, on trouve :

$$b = Z_B - aZ_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + (1-i\sqrt{3})\frac{1}{2} = 0.$$

D'où l'expression de la similitude S : $Z' = (1-i\sqrt{3})Z$.

b. On a : $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$

La similitude S s'écrit : $Z' - Z_0 = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_0)$ avec $Z_0 = 0$.
C'est donc une similitude plane directe de centre $Z_0 = 0$, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Exercice 2

1 $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$.

Comme le déterminant de la famille $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est non nul, alors la famille $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ est également une base de $\mathscr{E}$.

2

$$\begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{e_1} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{e_2} \end{array}$$

3 **a.**

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} \\ f(\vec{e_2}) = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} & E_1 \\ 2f(\vec{i}) + 3f(\vec{j}) = \vec{0} & E_2 \end{cases} \iff \begin{cases} f(\vec{i}) = 3\vec{i} + 3\vec{j} & E_1' = 3E_1 - E_2 \\ f(\vec{j}) = -2\vec{i} - 2\vec{j} & E_2' = -2E_1 + E_3 \end{cases}$$

b.

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) = \vec{u'} &\iff f(x\vec{i} + y\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ &\iff xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ &\iff x(3\vec{i} + 3\vec{j}) + y(-2\vec{i} - 2\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ &\iff (3x - 2y)\vec{i} + (3x - 2y)\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \end{aligned}$$

VALÉRIEN EBERLIN http://maths.congo.free.fr JUILLET 2021

D'où les coordonnées de $\overrightarrow{u'}$: $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$

c.

$$\begin{aligned} f \circ f(\overrightarrow{u}) &= f((3x-2y)\overrightarrow{i} + (3x-2y)\overrightarrow{j}) \\ &= f((3x-2y)\overrightarrow{i}) + f((3x-2y)\overrightarrow{j}) \\ &= (3x-2y)f(\overrightarrow{i}) + (3x-2y)f(\overrightarrow{j}) \\ &= (3x-2y)(3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) + (3x-2y)(-2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}) \\ &= (3x-2y)\overrightarrow{i} + (3x-2y)\overrightarrow{j} \\ &= \overrightarrow{u'} \\ &= f(\overrightarrow{u}) \end{aligned}$$

d. f est un endomorphisme tel que $f \circ f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u})$ pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathscr{E}$. C'est donc une projection vectorielle de base l'ensemble des vecteurs invariants par f et de direction son noyau.

e. Base de f

La base de f est l'ensemble des éléments invariants par f : $\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$.
Soit $\overrightarrow{u}(x\,,y)$ un élément de la base de f.

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \iff \begin{cases} 3x - 2y = x \\ 3x - 2y = y \end{cases} \iff x - y = 0.$$

On en déduit que la base de f est la droite vectoriel d'équation $x - y = 0$, engendrée par la vecteur $(1, 1)$.

Direction de f

La direction de f est l'ensemble $\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}\}$.
Soit $\overrightarrow{u}(x\,,y)$ un élément de la direction de f.

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \iff 3x - 2y = 0.$$

On en déduit que la direction de f est la droite vectorielle d'équation $3x - 2y = 0$, engendrée par le vecteur $(2, 3)$.

Exercice 3

1

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\ln x} \text{ existe } &\iff \ln x \ \text{ existe et } \ x\ln x \neq 0 \\ &\iff x > 0 \ \text{ et } x \neq 1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition de f est $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2 $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[,\quad f'(x) = -\dfrac{\ln x + x\dfrac{1}{x}}{(x\ln x)^2} = \dfrac{-\ln x - 1}{(x\ln x)^2}.$

3 **a.** f' est du signe de $-1-\ln x$ et s'annule pour $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

D'où le tableau de signes :

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		1		$+\infty$
$(x\ln x)^2$	$\|$		$+$		0	$+$	
$-1-\ln x$	$\|$	$+$	0		$-$		
$\dfrac{-1-\ln x}{(x\ln x)^2}$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

b. $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x\ln x} = -\lim_{u\to+\infty} \frac{u}{\ln u} = -\infty$ où l'on a posé $u = \dfrac{1}{x}$.

$\displaystyle\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} \frac{1}{x\ln x} = \lim_{x\to 1_-} \frac{1}{\ln x} = -\infty.$

$\displaystyle\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{x\ln x} = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{\ln x} = +\infty.$

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$\|$	$-\infty \nearrow$	$-\mathrm{e}$	$\searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow$	0

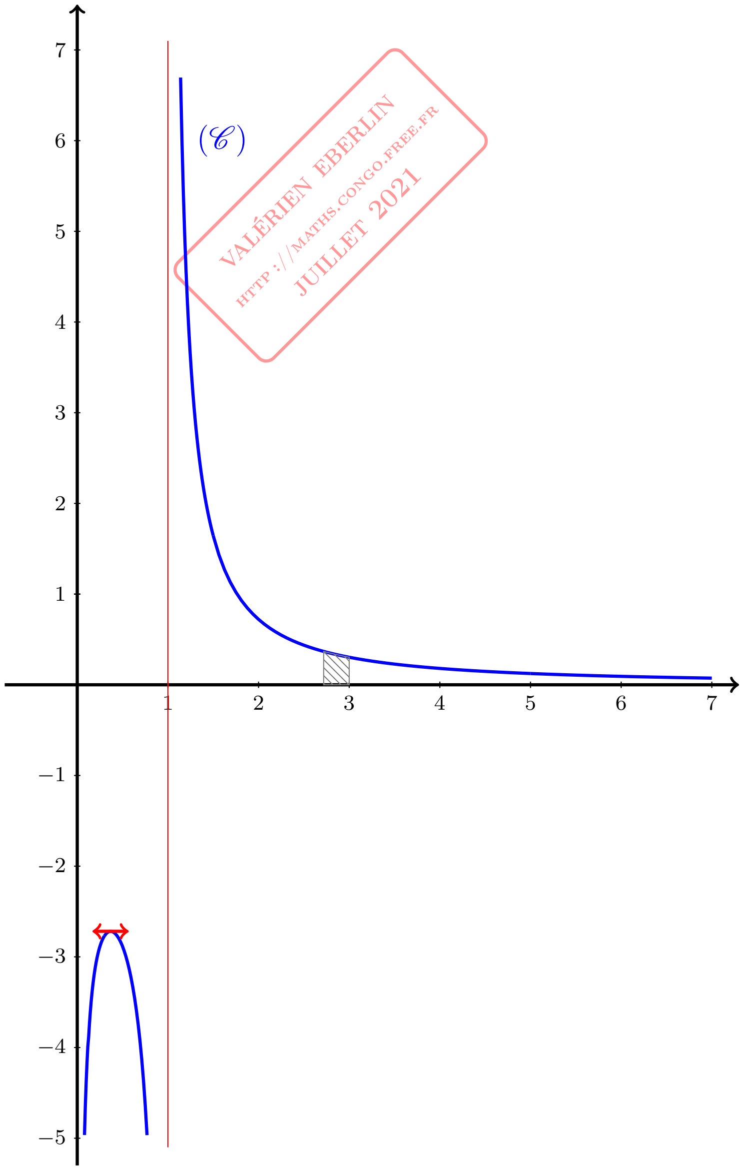
c. <u>Branches infinies</u>

$\displaystyle\lim_{x\to 0_+} f(x) = -\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$;

$\displaystyle\lim_{x\to 1_-} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 1_+} f(x) = +\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$;

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

d.



4 **a.** Pour b, c, et d nombres réels tous non nuls, on sait que $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$.

D'où $\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln x}{1}} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$.

b. En remarquant que $\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = \ln x$, on en déduit que :

$I = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{3} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int_{\mathrm{e}}^{3} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx = \Big[\ln(\ln x)\Big]_{\mathrm{e}}^{3} = \ln(\ln 3) - \ln(\ln \mathrm{e}) = \ln \ln 3.$

c. $\mathscr{A} = \ln(\ln 3)\ \text{u.a} = 4 \ln(\ln 3)\ \ \text{cm}^2$.

Exercice 4

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.
Dans ce cas, on a : $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

1

Loi marginale de X.

X	-1	0	2
$n_{i\bullet}$	3	5	2

Loi marginale de Y.

Y	-1	1
$n_{\bullet j}$	6	4

2

Les coordonnées du point moyen en fonction de m et n,

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}x_i = \frac{3\times(-1)+5\times 0+2\times 2}{10} = 0,1.$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\bullet j}y_j = \frac{6\times(-1)+4\times 1}{10} = -0,2.$$

3 L'inertie du nuage I_G qui est une mesure de la dispersion du nuage autour du point moyen G, est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} I_G &= \sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}(x_i-\overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{2} n_{\bullet j}(y_j-\overline{Y})^2 \\ &= 3(-1-0,1)^2+5(0-0,1)^2+2(2-0,1)^2+6(-1+0,2)^2+4(1+0,2)^2 \\ &= 20,5 \end{aligned}.$$

4 Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}}$.

$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{10}\left[3\times(-1)^2+5\times 0^2+2\times 2^2\right] - 0,1^2 = 1,09$$

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\bullet j}y_j^2 - \overline{Y}^2 = \frac{1}{10}\left[6\times(-1)^2+4\times 1^2\right] - (-0,2)^2 = 0,96$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} n_{ij}x_iy_j - \overline{X}.\overline{Y} \\ &= \frac{1}{10}(2-1+0+0-2+2) - 0,1\times(-0,2) \\ &= 0,12 \end{aligned}.$$

D'où $\rho_{X,Y} = \dfrac{0,12}{\sqrt{1,09}.\sqrt{0,96}} = 0,117$

Correction bac 2016 - Série D

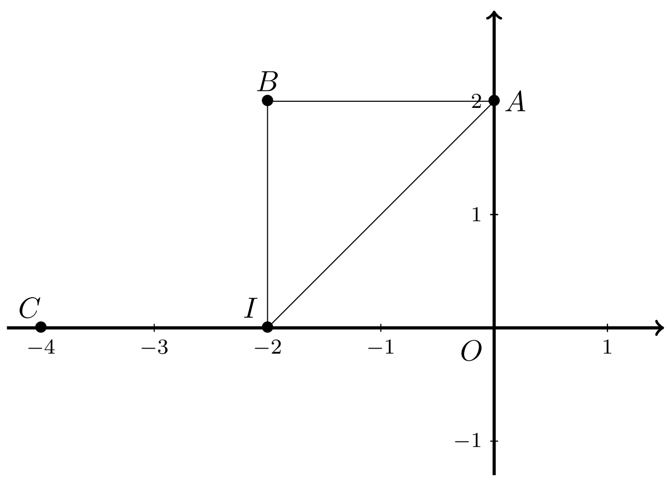
▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 $1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$. D'où $z'=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,z$.
L'application S est de la forme $z'-z_0=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_0)$.
C'est donc une similitude plane directe de centre $z_0=0$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2 Les affixes z_B et z_C des points B et C sont respectivement donnés par :
$z_B=(1+i)\times 2i=-2+2i$.
$z_C=(1+i)(-2+2i)=-4$.

3



4 I a pour affixe : $z_I=\dfrac{z_O+z_C}{2}=-2$.
$|z_A-z_B|=2$ et $|z_I-z_B|=2$. On en déduit que $BA=BI$.
De plus, $(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA})\equiv\arg\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_I-z_B}\right)\,[2\pi]=\arg(i)\,[2\pi]=\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On en déduit que $(BI)\perp(BA)$.
Par conséquent, le triangle ABI est rectangle isocèle en B.

5 z_A, z_B et z_C annule le polynôme $(z-z_A)(z-z_B)(z-z_C)$.

$$\begin{aligned}(z-z_A)(z-z_B)(z-z_C)&=(z-2i)(z+4)(z+2-2i)\\&=\left[z^2+(4-2i)z-8i\right](z+2-2i)\\&=z^3+\left[(2-2i)+(4-2i)\right]z^2+\left[(4-2i)(2-2i)-8i\right]z-8i(2-2i)\\&=z^3+(6-4i)z^2+(-20i+4)z-16i-16\end{aligned}$$

Exercice 2

1 Calculons $f(\vec{i})$

$f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. On en déduit que : $\vec{i} = \dfrac{1}{3}f(\vec{j}) + \dfrac{2}{3}\vec{j}$.

$$\begin{aligned}
\text{D'où } f(\vec{i}) &= f\Big(\frac{1}{3}f(\vec{j}) + \frac{2}{3}\vec{j}\Big)\\
&= \frac{1}{3}f^2(\vec{j}) + \frac{2}{3}f(\vec{j}) \text{ car } f \text{ est un endomorphisme sur } \mathbb{R}\\
&= \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}(3\vec{i} - 2\vec{j})\\
&= 2\vec{i} - \vec{j}
\end{aligned}$$

D'où $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Calculons $f \circ f(\vec{i})$

$$\begin{aligned}
f\big(f(\vec{i})\big) &= f\big(2\vec{i} - \vec{j}\big)\\
f \circ f(\vec{i}) &= 2f(\vec{i}) - f(\vec{j})\\
&= 2(2\vec{i} - \vec{j}) - (3\vec{i} - 2\vec{j})\\
&= \vec{i}
\end{aligned}$$

2 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
De plus, $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$.
On en déduit que f est une symétrie vectorielle.

3 **a.** Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

b. Comme $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$, on en déduit que $f^{-1} = f$ et par conséquent f est bijectif.
D'où f est un automorphisme involutif.

c. Déterminons d'abord l'expression analytique de f.

Soit $M = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $M'(x', y')$ son image par f. Alors,

$$\begin{aligned}
f(x\vec{i} + y\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} &\iff xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j}\\
&\iff x(2\vec{i} - \vec{j}) + y(3\vec{i} - 2\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j}\\
&\iff (2x + 3y)\vec{i} + (-x - 2y)\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}
\end{aligned}$$

D'où l'expression analytique de f : $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$

Base de f

La base de f est l'ensemble : $\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$.
Soit $\overrightarrow{u}(x\,, y)$ un élément de la base de f.

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \iff \begin{cases} 2x + 3y = x \\ -x - 2y = y \end{cases} \iff x + 3y = 0.$$

La base de f est la droite vectoriel d'équation $x + 3y = 0$, engendrée par le vecteur $(-3, 1)$.

Direction de f

La direction de f est l'ensemble : $\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}\}$.
Soit $\overrightarrow{u}(x\,, y)$ un élément de la direction de f.

$$f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u} \iff \begin{cases} 2x+3y = -x \\ -x-2y = -y \end{cases} \iff \quad x+y=0.$$

La direction de f est la droite vectorielle d'équation $x+y=0$, engendrée par le vecteur $(-1,1)$.

4 **a.** $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Comme le déterminant de la famille $\mathscr{B}' = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ dans la base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est non nul, alors $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b.

Du système d'équations : $\begin{cases} 2\vec{i} - \vec{j} = \overrightarrow{u} \\ -3\vec{i} + \vec{j} = \overrightarrow{v} \end{cases}$, on en déduit que $\vec{i} = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

D'où
$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}) &= f\big(2\vec{i} - \vec{j}\big) \\ &= 2f(\vec{i}) - f(\vec{j}) \\ &= 2(2\vec{i} - \vec{j}) - (3\vec{i} - 2\vec{j}) \\ &= \vec{i} \\ &= -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

D'autre part, le calcul direct de $f(\overrightarrow{v})$ donne :
$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}) &= f\big(-3\vec{i} + \vec{j}\big) \\ &= -3f(\vec{i}) + f(\vec{j}) \\ &= -3(2\vec{i} - \vec{j}) + (3\vec{i} - 2\vec{j}) \\ &= -3\vec{i} + \vec{j} \\ &= \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

Ainsi la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est :
$$\begin{array}{cc} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{u} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{v} \end{array}$$

Exercice 3

1 $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

2 Comme $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = +\infty$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

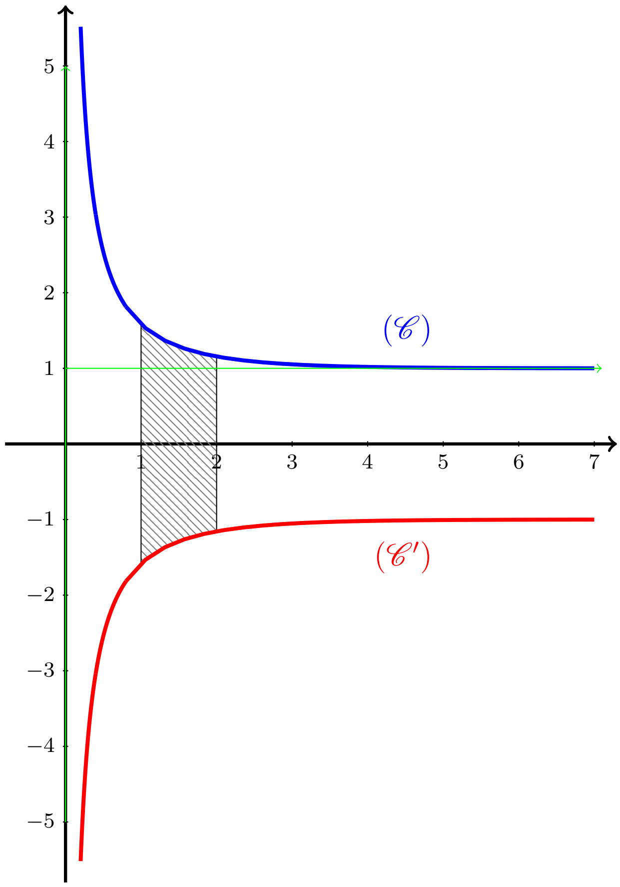
3 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1) - \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \dfrac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$	1

4



5 Voir figure ci-dessous.

6 $\displaystyle\int_1^2 (f(x)-g(x))\,dx = 2\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\,dx = 2\Big[\ln(\mathrm{e}^x-1)\Big]_1^2 = 2\ln(\mathrm{e}+1)\text{ u.a} = 2\ln(\mathrm{e}+1)\text{ cm}^2$

Exercice 4

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.
Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

1

Loi marginale de X.

X	-1	1	2
$n_{i\bullet}$	$m+2$	3	$n+5$

Loi marginale de Y.

Y	0	1	2
$n_{\bullet j}$	4	$m+3$	$n+3$

2

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}x_i = \frac{(m+2)\times(-1)+3\times 1+(n+5)\times 2}{m+n+10} = \frac{-m+2n+11}{m+n+10}.$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{\bullet j}y_j = \frac{4\times 0+(m+3)\times 1+(n+3)\times 2}{m+n+10} = \frac{m+2n+9}{m+n+10}.$$

Les coordonnées du point moyen $(\overline{X}, \overline{Y})$ en fonction de m et n vérifient :

$\dfrac{-m+2n+11}{m+n+10} = 1$ et $\dfrac{m+2n+9}{m+n+10} = 1$. D'où $n = 1$ et $m = 1$.

3 **a.** L'équation de régression linéaire de Y en X est donnée par l'équation : $Y = aX + b$ où $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

Les calculs de a et b donnent : $a = \dfrac{\frac{-1}{12}}{\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{6}$; $b = 1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{7}{6}$.

D'où l'équation de la droite de régression linéaire $Y = -\dfrac{1}{6}X + \dfrac{7}{6}$.

b. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}} = \frac{-\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{6}}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Correction bac 2017 - Série D

► Voir le sujet. ► Retour au sommaire.

Exercice 1

1 **a.** $P(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0$. Donc 1 est une racine du polynôme P.

b. Il suffit de développer et de réduire l'expression.

$$\begin{aligned}(Z-1)(Z^2+2Z+2) &= Z^3 + 2Z^2 + 2Z - Z^2 - 2Z - 2\\ &= Z^3 + 2Z^2 - Z^2 + 2Z - 2Z - 2.\\ &= Z^3 + Z^2 - 2\end{aligned}$$

c. $P(Z) = 0$ si $Z = 1$ ou $Z^2 + 2Z + 2 = 0$.

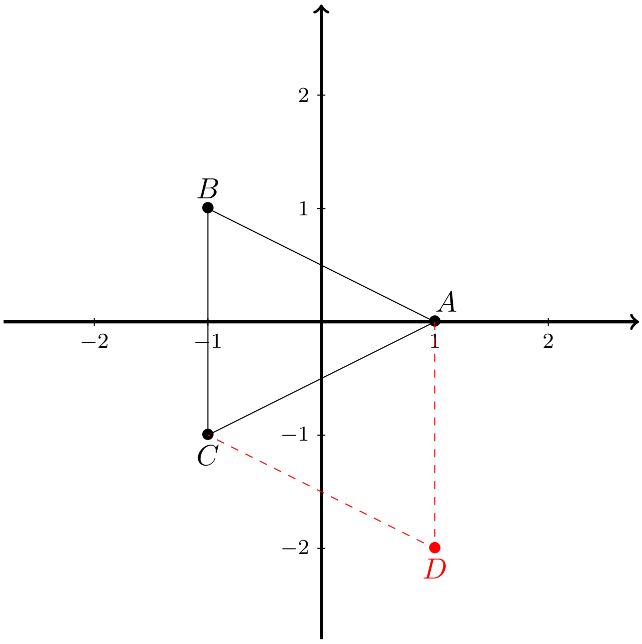
Résolution de l'équation $Z^2 + 2Z + 2 = 0$

L'équation $Z^2 + 2Z + 2 = 0$ admet pour discriminant réduit $\Delta' = i^2$.

On en déduit que les racines de l'équation $Z^2 + 2Z + 2 = 0$ sont : $Z = -1 - i$ et $Z = -1 + i$.

L'ensemble des solutions de l'équation $P(Z) = 0$ est : $\{1, -1-i, -1+i\}$

2 **a.**



b. $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ce qui se traduit par $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$. D'où : $Z_D = 1 - 2i$.

3 **a.** L'expression complexe de la rotation R, de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est donnée par :

$Z' - Z_A = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_A)$.

D'où :

$Z' = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_A) + Z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(Z-1) + 1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b.

$$\begin{aligned} x'+iy' &= \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+iy)+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on a : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Exercice 2

1

$$\begin{array}{cc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{i} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{j} \end{array}$$

2 Soit $\overrightarrow{u'} = x'\vec{i}+y'\vec{j}$ l'image de $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}$ par l'endomorphisme f.

$$\begin{aligned} x'\vec{i}+y'\vec{j} &= f(x\vec{i}+y\vec{j}) \\ &= xf(\vec{i})+yf(\vec{j}) \\ &= x\left(\frac{a}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}\right)+y\left(\frac{4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}\right) \\ &= \left(\frac{a}{5}x+\frac{4}{5}y\right)\vec{i}+\left(\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y\right)\vec{j} \end{aligned}$$

D'où l'expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{a}{5}x+\frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y \end{cases}$

3 $(\vec{i},\vec{j})$ est une base de $\mathscr{E}$.

f est une symétrie vectorielle si et seulement si $f\circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f\circ f(\vec{j}) = \vec{j}$

Déterminons $f\circ f(\vec{i})$ et $f\circ f(\vec{j})$

$f(\vec{i})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = \frac{a}{5}\times 1+\frac{4}{5}\times 0 = \frac{a}{5} \\ y' = \frac{4}{5}\times 1-\frac{3}{5}\times 0 = \frac{4}{5} \end{cases}$

Et, $f\circ f(\vec{i}) = f\left(\left(\frac{a}{5},\frac{4}{5}\right)\right)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x'' = \frac{a}{5}\times\frac{a}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{a^2}{25}+\frac{16}{25} \\ y'' = \frac{4}{5}\times\frac{a}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{4a}{25}-\frac{12}{25} \end{cases}$

Donc $f\circ f(\vec{i}) = \left(\frac{a^2}{25}+\frac{16}{25}, \frac{4a}{25}-\frac{12}{25}\right)$.

De même,

$f(\vec{j})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = \dfrac{a}{5} \times 0 + \dfrac{4}{5} \times 1 = \dfrac{4}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5} \times 0 - \dfrac{3}{5} \times 1 = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$

Et, $f \circ f(\vec{j}) = f\Big((\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})\Big)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x'' = \dfrac{a}{5} \times \dfrac{4}{5} + \dfrac{4}{5} \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{4a}{25} - \dfrac{12}{25} \\ y'' = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5} \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) = 1 \end{cases}$

Donc $f \circ f(\vec{j}) = \left(\dfrac{4a}{25} - \dfrac{12}{25}\,,\,1\right)$.

Déterminons a pour que f soit une symétrie vectorielle

Du calcul précédent, on en déduit que :

$$f \circ f(\vec{j}) = \vec{j} \iff \left(\dfrac{4a}{25} - \dfrac{12}{25}\,,\,1\right) = (0,1) \iff \dfrac{4a}{25} - \dfrac{12}{25} = 0 \iff a = 3.$$

En remplaçant a par 3 dans l'expression $f \circ f(\vec{i})$, on a bien :

$$f \circ f(\vec{i}) = \left(\dfrac{3^2}{25} + \dfrac{16}{25}\,,\,\dfrac{4 \times 3}{25} - \dfrac{12}{25}\right) = (1,0) = \vec{i}.$$

Donc f est une symétrie vectorielle si $a = 3$.

4 **a.** Base de f

La base de f est l'ensemble : $\{\vec{u} \in \mathscr{E} \;/\; f(\vec{u}) = \vec{u}\}$.

Soit $\vec{u}(x\,,y)$ un élément de la base de f.

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \iff \begin{cases} \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y = x \\ \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y = y \end{cases} \iff x - 2y = 0.$$

La base de f est la droite vectoriel d'équation $x - 2y = 0$.

Direction de f

La direction de f est l'ensemble : $\{\vec{u} \in \mathscr{E} \;/\; f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$.

Soit $\vec{u}(x\,,y)$, un élément de la direction de f.

$$f(\vec{u}) = -\vec{u} \iff \begin{cases} \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y = -x \\ \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y = -y \end{cases} \iff 2x + y = 0.$$

La direction de f est la droite vectorielle d'équation $2x + y = 0$.

b. $e_1 = (2,1)$.

c. $e_2 = (-1,2)$.

d. $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$

Comme le déterminant de la famille $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est non nul, alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$.

e. Comme $\vec{e_1}$ est une base de la base de f, alors $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$.

Comme $\vec{e_2}$ est une base de la direction de f, alors $f(\vec{e_2}) = -\vec{e_2}$.

D'où la matrice de f dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{e_1} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{e_2} \end{array}
\end{array}$$

Exercice 3

Partie A

1 $\lim\limits_{x \to 0_+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2 **a.** $\forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) = \dfrac{1+x}{x^2}$.

b. $\forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) > 0$.

D'où le tableau de variation :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$+$		
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3 **a.** $g(\frac{3}{2}) \approx -0,26$ et $g(2) \approx 0,19$.

La fonction g est continue, strictement croissante sur $]\frac{3}{2}; 2[$.

De plus, $g(\frac{3}{2}).g(2) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]\frac{3}{2}; 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b. g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

De plus, $g(\alpha) = 0$.

On en déduit que :

$g(x) < 0$ pour tout $x \in]0; \alpha[$;

$g(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$.

Partie B

1 $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} (x - x\ln x + \ln x) = \lim\limits_{x \to 0_+} \ln x = -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\ln x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 + \frac{1}{x} \right) = -\lim_{x \to +\infty} x \ln x = -\infty.$$

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

2 **a.** Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 1 - \ln x - (x-1) \times \dfrac{1}{x} = -g(x)$.

b. f' est de signes contraires de g et s'annule en $x = \alpha$.

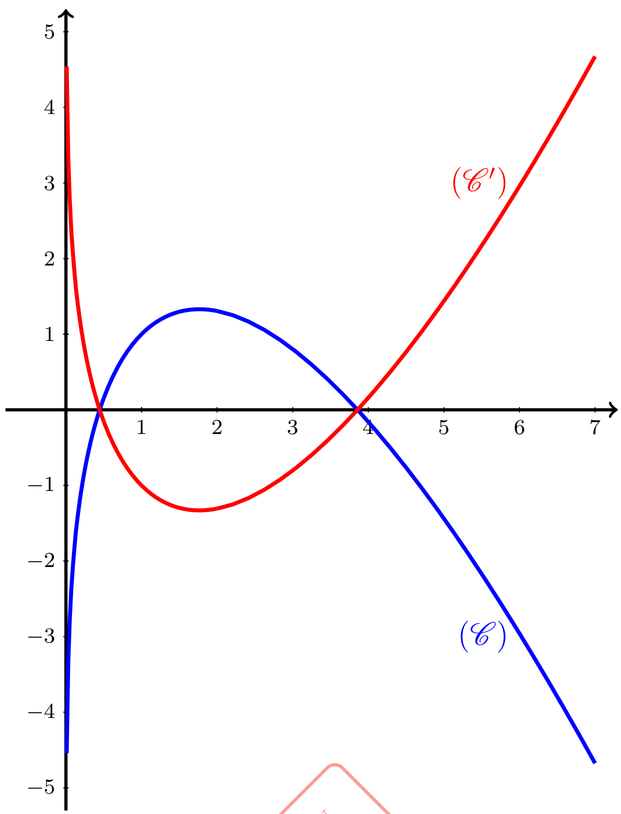
D'où le tableau de variation :

x	0	x_0	$1{,}7$	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$1{,}3$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

3 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \ln x + \dfrac{\ln x}{x}\right) = -\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une direction asymptotique (branche parabolique) de direction (Oy) en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = -\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b.



Exercice 4

1 $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

2 $P_1 = \frac{1}{6}$.

$P_2 = (P_1 + P_2) - P_1 = \frac{5}{24} - \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.

$P_3 = (P_1 + P_2 + P_3) - (P_1 + P_2) = \frac{7}{24} - \frac{5}{24} = \frac{1}{12}$.

$P_4 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - (P_1 + P_2 + P_3) = \frac{1}{3} - \frac{7}{24} = \frac{1}{24}$.

$P_5 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

x_i	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{3}$

3 $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i P_i = 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{24} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{24} + 6 \times \frac{2}{3} = 5$.

Correction bac 2018 - Série D

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 **a.** $Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = 2 - 3i$.

b. L'expression complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est donnée par : $Z' = Z + 2 - 3i$.
En remplaçant Z par $x + iy$ et Z' par $x' + iy'$, on a :

$$\begin{aligned} x' + iy' &= x + iy + 2 - 3i \\ &= x + 2 + i\,(y - 3) \end{aligned}.$$

D'où, l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$: $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$.

c. $Z_{A'} = Z_A + 2 - 3i = 3 - i$.

2 **a.** $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg\left(\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_A}\right)[2\pi] = \arg(-i)\,[2\pi] = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

b. L'expression complexe de la rotation R de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est donnée par :
$Z' - Z_A = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_A)$ soit encore $Z' = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_A) + Z_A$.

En remplaçant Z par $x + iy$ et Z' par $x' + iy'$, on a :

$$\begin{aligned} x' + iy' &= -i(x + iy - 1 - 2i) + 1 + 2i \\ &= y - 1 + i\,(-x + 3) \end{aligned}$$

D'où l'expression analytique de la rotation R : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$.

c. Les coordonnées du point C' sont données par : $\begin{cases} x_{C'} = y_C - 1 = -2 \\ y_{C'} = -x_C + 3 = 2 \end{cases}$.

On en déduit que l'affixe du point C' est : $Z_{C'} = -2 + 2i$.

3 Soit $Z' = aZ + b$, l'expression complexe de la similitude directe S.

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = A \end{cases} \iff \begin{cases} Z_A = aZ_A + b & (1) \\ Z_A = aZ_B + b & (2) \end{cases}.$$

En multipliant l'équation (1) par -1 puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on obtient $a = 0$.

Donc il n'existe pas de similitude S telle que $S(A) = A$ et $S(B) = A$.

Exercice 2

1 Montrons que $(\mathscr{D}_1)$ est engendrée par e_1

Soit (x, y) un vecteur de $(\mathscr{D}_1)$. Alors x et y vérifient $x = 2y$.
D'où : $(x, y) = (2y, y) = y(2, 1)$.

Donc tout élément de $(\mathscr{D}_1)$ s'écrit sous la forme $\lambda\overrightarrow{e}_1$ où $\overrightarrow{e}_1 = (2,1) = 2\vec{i} + \vec{j}$.
Ainsi $(\mathscr{D}_1)$ est la droite engendrée par le vecteur $2\vec{i} + \vec{j}$.

<u>Montrons que $(\mathscr{D}_2)$ est engendrée par e_2</u>
Soit (x, y) un vecteur de $(\mathscr{D}_2)$. Alors x et y vérifient $x = -y$.
D'où $(x, y) = (-y, y) = y(-1, 1)$.
Donc tout élément de $(\mathscr{D}_2)$ s'écrit sous la forme $\lambda\overrightarrow{e}_2$ où $e_2 = (-1, 1) = -\vec{i} + \vec{j}$.
Ainsi $(\mathscr{D}_2)$ est la droite engendrée par le vecteur $-\vec{i} + \vec{j}$.

2 $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$.

Comme le déterminant de la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est non nul, alors $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathscr{E}$.

3 (i) $\overrightarrow{e_1} \in (\mathscr{D}_1)$ et $\overrightarrow{e_2} \in (\mathscr{D}_2)$.
De plus, d'après 2., $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathscr{E}$.
Par conséquent $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ engendre $\mathscr{E}$. Donc $(\mathscr{D}_1) + (\mathscr{D}_2) = \mathscr{E}$.

(ii) Soit $x = (x_1, x_2) \in (\mathscr{D}_1) \cap (\mathscr{D}_2)$.
$x \in (\mathscr{D}_1) \iff x_1 = 2x_2$.
$x \in (\mathscr{D}_2) \iff x_1 = -x_2$.
On en déduit que $x_1 = x_2 = 0$. D'où $(\mathscr{D}_1) \cap (\mathscr{D}_2) = \{0\}$.

D'après (i) et (ii), les sous-espaces vectoriels $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont supplémentaires dans $(\mathscr{E})$.

4

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j} \\ -f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j} \end{cases} \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix}. \iff \begin{cases} 3f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} \\ 3f(\vec{j}) = 4\vec{i} - \vec{j} \end{cases} \begin{vmatrix} E_1' = E_1 - E_2 \\ E_2' = E_1 + 2E_2 \end{vmatrix}.$$

On en déduit que : $\begin{cases} f(\vec{i}) = \dfrac{1}{3}\vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j} \\ f(\vec{j}) = \dfrac{4}{3}\vec{i} - \dfrac{1}{3}\vec{j} \end{cases}$

Exercice 3

1 Si $x > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{-1 + \ln x}$ existe si et seulement si $-1 + \ln x \neq 0$ c'est à dire si et seulement si $x \in \left]0; \mathrm{e}\right[\cup \left]\mathrm{e}; +\infty\right[$.
Si $x \leq 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ existe.

Donc l'ensemble de définition de f est $]-\infty; \mathrm{e}[\cup]\mathrm{e}; +\infty[$.

2 $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = f(0) = \mathrm{e}^{-2\times 0} = 1$

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} \left(\frac{\ln x - 1 + 1}{-1 + \ln x} \right) = \lim_{x \to 0_+} \left(1 + \frac{1}{-1 + \ln x} \right) = 1.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$, la fonction f est continue en 0.

3 $\displaystyle\lim_{x\to 0_-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0_-}\frac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{x}=-2\lim_{u\to 0_+}\frac{\mathrm{e}^{u}-1}{u}=-2$ où l'on a posé $u=-2x$.

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0_+}\frac{\dfrac{\ln x}{-1+\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to 0_+}\frac{1}{x(-1+\ln x)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{-u}{1+\ln u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{-u}{\ln u}=-\infty$$

où l'on a posé $u=\dfrac{1}{x}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0_+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ n'est pas une valeur finie, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

4 **a.** f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;\mathrm{e}[\cup]\mathrm{e};+\infty[$.

$\forall\, x\in]0\,;\mathrm{e}[\cup]\,\mathrm{e}\,;+\infty[,\quad f'(x)=\dfrac{-1}{x(-1+\ln x)^2}$.

$\forall\, x\in]-\infty;0[,\quad f'(x)=-2\,\mathrm{e}^{-2x}$.

b. Signes de f'

$\forall\, x\in]0\,;\mathrm{e}[\cup]\,\mathrm{e}\,;+\infty[,\quad f'(x)<0$.

$\forall\, x\in]-\infty;0[,\quad f'(x)<0$.

Tableau de variation

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-2x}=+\infty\,;\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{-1+\ln x}=1.$

$\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}_-}f(x)=\lim_{x\to \mathrm{e}_-}\frac{\ln x}{-1+\ln x}=\lim_{x\to \mathrm{e}_-}\frac{1}{-1+\ln x}=-\infty.$

$\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}_+}f(x)=\lim_{x\to \mathrm{e}_+}\frac{\ln x}{-1+\ln x}=\lim_{x\to \mathrm{e}_+}\frac{1}{-1+\ln x}=+\infty.$

x	$-\infty$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

5 **a.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}=-2\times\lim_{u\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{u}}{u}=-\infty$ où l'on a posé $u=-2x$.

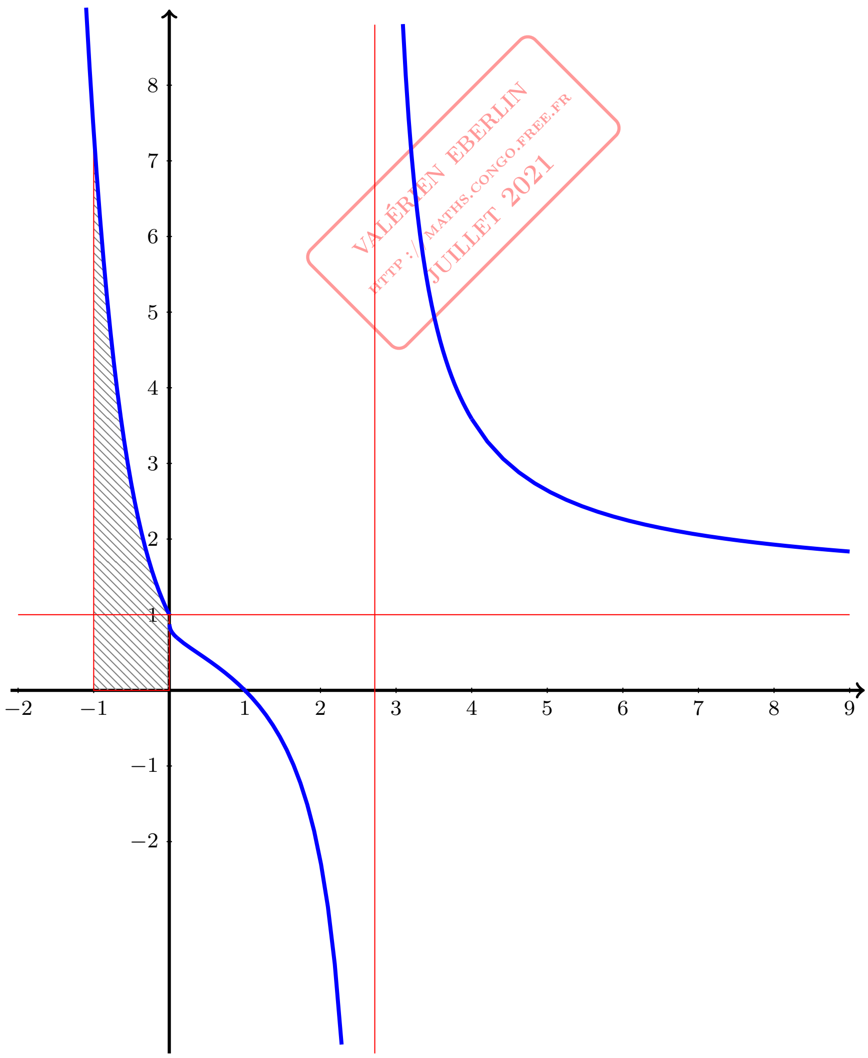
La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}_-}f(x)=-\infty\,;\ \lim_{x\to \mathrm{e}_+}f(x)=+\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x=\mathrm{e}$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

b.



6 $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-2x}\,dx = \Big[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big]_{-1}^{0}\ \text{u.a} = \frac{(\mathrm{e}^2-1)}{2} \times 4\,\text{cm}^2 = 2(\mathrm{e}^2-1)\,\text{cm}^2$

Exercice 4

1 $\displaystyle\overline{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5.$

$\displaystyle\overline{y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = \frac{1}{6}(0,2+1,4+1,8+2+2,6+3) = 1,833.$

2 L'équation de régression linéaire de y en x est donnée par l'équation : $y = ax+b$ où $a = \dfrac{\text{Cov}(x,y)}{\text{V}(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(x,y) &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \overline{x}.\overline{y} \\
&= \frac{1}{6}(1\times 0,2 + 2\times 1,4 + 3\times 1,8 + 4\times 2 + 5\times 2,6 + 6\times 3) - 3,5\times 1,833 \\
&= 1,4845
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(x) &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \overline{x}^2 \\
&= \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - 3,5^2 \\
&= 2.9166
\end{aligned}$$

D'où : $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)} = 0,50$ et $b = 1,833 - 0,50\times 3.5 = 0,083$.

L'équation de la droite de régression linéaire est : $y = 0,5x + 0,083$.

3 Pour $x = 7$, $\quad y = 0,5\times 7 + 0,083 = 3,583$.

Au 7ème jour, le poids de la larve est estimé à 3,58 mg.

Correction bac 2019 - Série D

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 **a.** L'équation Z^2-4Z+8 a pour discriminant réduit :$\Delta' = (-2)^2-1\times 8 = -4 = (2i)^2$.
Elle admet donc deux racines distinctes : $Z_1 = \frac{2-2i}{1} = 2-2i$ et $Z_2 = \frac{2+2i}{1} = 2+2i$.

b. $|Z_1| = 2\sqrt{2}$.
D'où $Z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$.

2 **a.** $U = \dfrac{Z_B}{Z_A} = \dfrac{2+2i}{2-2i} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i$.

b. $\left|\dfrac{Z_B-Z_O}{Z_A-Z_O}\right| = |i| = 1$. On en déduit que $OA = OB$.
$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \arg\left(\dfrac{Z_B-Z_O}{Z_A-Z_O}\right)[2\pi] = \arg(i)\,[2\pi] = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On en déduit que le triangle OAB est rectangle en O.
Donc OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

3 **a.** $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}\,Z \iff (Z'-Z_O) = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z-Z_O)$ où $Z_O = 0$.
f est donc une rotation de centre $Z_O = 0$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

b. Forme trigonométrique de $Z_{A'}$

D'après 1. b., $Z_A = 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}$.
D'où : $Z_{A'} = e^{\frac{i\pi}{3}}\,Z_A = e^{\frac{i\pi}{3}} \times 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\right)$.
Forme algébrique de $Z_{A'}$

$$Z_{A'} = e^{\frac{i\pi}{3}}\,Z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-2i) = (1+\sqrt{3}) + i(-1+\sqrt{3}).$$

c. En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires de la forme géométrique et trigonométrique de $Z_{A'}$, on en déduit que : $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.
D'où $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 2

1 $f(\vec{i})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = 2\times 1 + 3\times 0 = 2 \\ y' = -1 - 2\times 0 = -1 \end{cases}$.
D'où $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j}$.

$f(\vec{j})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = 2\times 0 + 3\times 1 = 3 \\ y' = -0 - 2\times 1 = -2 \end{cases}$.
D'où $f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

2

$$\begin{array}{cc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{i} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{j} \end{array}$$

3 $f(\overrightarrow{V})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = 2 \times 3 + 3 \times (-4) = -6 \\ y' = -3 - 2 \times (-4) = 5 \end{cases}$.

L'image du vecteur $\overrightarrow{V}$ est le vecteur $V'(-6;5)$.

4 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$

Comme le déterminant de la matrice associée à l'endomorphisme f est non nul, alors f est un endomorphisme bijectif (automorphisme).

5 **a.** Calcul de $f \circ f(\vec{i})$

$f \circ f(\vec{i}) = f\big((2;-1)\big)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x'' = 2 \times 2 + 3 \times (-1) = 1 \\ y'' = -2 - 2 \times (-1) = 0 \end{cases}$.

D'où $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$.

Calcul de $f \circ f(\vec{j})$

$f \circ f(\vec{j}) = f\big((3;-2)\big)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x'' = 2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0 \\ y'' = -3 - 2 \times (-2) = 1 \end{cases}$.

D'où $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$.

b. $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathscr{E}$.
De plus, $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$.
Donc f une symétrie vectorielle.

c. Base de f
La base de f est l'ensemble : $\{\overrightarrow{u} \in \mathscr{E} \;/\; f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$.
Soit $\overrightarrow{u}(x\,,y)$ un élément de la base de f.

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \iff \begin{cases} 2x + 3y = x \\ -x - 2y = y \end{cases} \iff x + 3y = 0.$$

La base de f est la droite vectorielle d'équation $x + 3y = 0$.

Direction de f
La direction de f est l'ensemble : $\{\overrightarrow{u} \in \mathscr{E} \;/\; f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}\}$.
Soit $\overrightarrow{u}(x\,,y)$ un élément de la direction de f.

$$f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u} \iff \begin{cases} 2x + 3y = -x \\ -x - 2y = -y \end{cases} \iff x + y = 0.$$

La direction de f est la droite vectorielle d'équation $x + y = 0$.

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2021

Exercice 3

Partie I

1 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) < 0.$

2

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Partie II

1 **a.** $f(x) = g(x) \iff \dfrac{\ln x}{x} = 0 \iff x = 1.$

b. $\forall x \in]0;1[, \quad f(x) - g(x) = \dfrac{\ln x}{x} < 0.$ On en déduit que la courbe $(\mathscr{C})$ est en dessous de la courbe $(\mathscr{C}')$ sur $]0;1[$.

$\forall x \in]1;+\infty[\ f(x) - g(x) = \dfrac{\ln x}{x} > 0.$ On en déduit que la courbe $(\mathscr{C})$ est en dessus de la courbe $(\mathscr{C}')$ sur $]1;+\infty[$.

2 **a.** $\displaystyle\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{u \to +\infty} (-u \ln u + u) = \lim_{u \to +\infty} u \ln u \left(-1 + \frac{1}{\ln u}\right) = -\infty$ où l'on a posé $u = \dfrac{1}{x}$.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{\ln x}{x^2}.$

<u>Tableau de signes</u>

$f'(x)$ est du signe de $-\ln x$ et s'annule pour $x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
x^2	‖		$+$		
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP ://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

c.

<u>Tableau de variation</u>

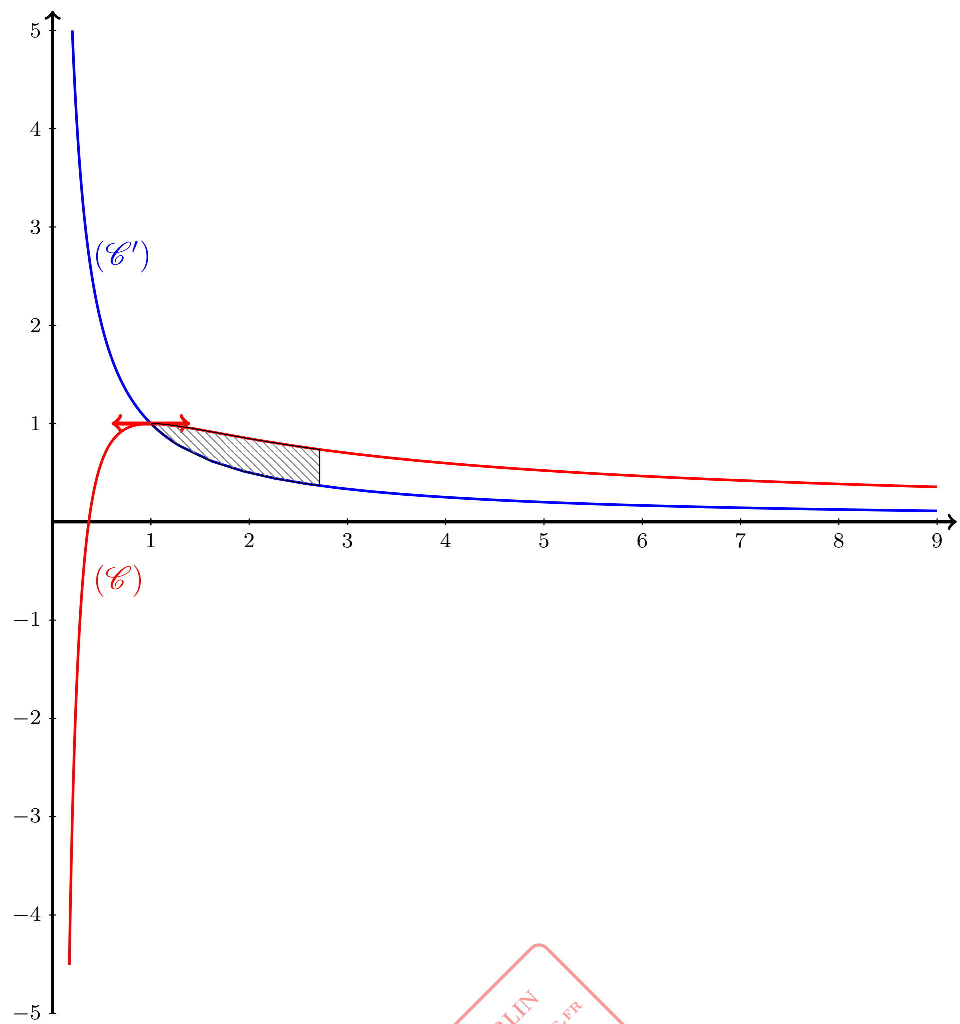
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3 Asymptotes

$\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = -\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

Tracés de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$



Partie III

1 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ h'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2.\dfrac{1}{x}.\ln x = \dfrac{\ln x}{x} = k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc h est une primitive de k sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^{\mathrm{e}} h'(x)\,dx = [h(x)]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\,\text{u.a} = \frac{1}{2} \times 4\,\text{cm}^2 = 2\,\text{cm}^2$.

Exercice 4

1 $\displaystyle \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, p(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + a \times \frac{3}{8} + 3 \times b = \frac{3}{8}(1 + a + 8b)$.

2 **a.** $\mathrm{E}(X) = \dfrac{3}{2} \iff \dfrac{3}{8}(1 + a + 8b) = \dfrac{3}{2} \iff a + 8b = 3$.

D'autre part, comme p est une probabilité, alors $\dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8} + b = 1$. On en déduit que $b = \dfrac{1}{8}$.

En remplaçant b par $\dfrac{1}{8}$ dans l'équation $a + 8b = 3$, on obtient $a = 2$.

b. $\displaystyle \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p(X = x_i) - \mathrm{E}(X)^2 = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 0,86$.

3

X	$]-\infty\,;0[$	$[0\,;\,1[$	$[1\,;\,2[$	$[2\,;\,3\,[$	$[3\,;+\infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

Correction bac 2020 - Série D

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 $i\overline{z}_2 = 1-2i \iff \overline{i\overline{z}_2} = \overline{1-2i} \iff -iz_2 = 1+2i \iff z_2 = -2+i$.
En remplaçant z_2 par $-2+i$ dans la première équation $z_1 + z_2 = -3+i$, on en déduit $z_1 = -1$.
En remplaçant z_2 par $-2+i$ dans la dernière équation $z_2 \times z_3 = -1-2i$, on en déduit que $z_3 = \dfrac{-1-2i}{-2+i} = \dfrac{(-1-2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = i$.
D'où $z_1 = -1$; $z_2 = -2+i$ et $z_3 = i$.

2 **a.** $P(i) = i^3 + (3-2i)i^2 + (1-4i)i - 1 - 2i = -i - (3-2i) + (1-4i)i - 1 - 2i = 0$.

b. Dans l'expression $(z-i)(z-z_0)(z+2-i)$, le terme de degré 0 est $iz_0 \times (2-i)$.
On en déduit, par identification, que $z_0(1+2i) = -1-2i$.
D'où $z_0 = \dfrac{-1-2i}{1+2i} = -1$.

c. $P(z) = 0 \iff (z-i)(z+1)(z+2-i) = 0 \iff z = i,\ z = -1$ et $z = -2+i$.
D'où l'ensemble des solutions $\{i\,;\,-1\,;\,-2+i\}$.

3 **a.** L'expression complexe de la rotation R est de la forme $z' - z_A = a(z - z_A)$ où a est un nombre complexe tel que $|a| = 1$.
Comme $R(B) = C$ alors $z_C - z_A = a(z_B - z_A)$. On en déduit que $a = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1+i}{-1+i} = -i$.
D'où l'écriture complexe de R : $z' = -i(z+1) - 1 = -iz - i - 1$.

b. Comme $a = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, on en déduit que l'angle de rotation de R est $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

1 **a.** $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$.

Comme le déterminant de la famille $\{\vec{u},\vec{v}\}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est non nul, alors la famille $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est également une base de $\mathbb{R}^2$.

b.

$$\left\{\begin{array}{rl} \vec{i}+\vec{j} = \vec{u} & \Big| E_1 \\ -\vec{i}+2\vec{j} = \vec{v} & \Big| E_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 3\vec{i} = 2\vec{u} - \vec{v} & \Big| E'_1 = 2E_1 - E_2 \\ 3\vec{j} = \vec{u} + \vec{v} & \Big| E'_2 = E_1 + E_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \vec{i} = \dfrac{2}{3}\vec{u} - \dfrac{1}{3}\vec{v} \\ \vec{j} = \dfrac{1}{3}\vec{u} + \dfrac{1}{3}\vec{v} \end{array}\right.$$

2 **a.** $f(\vec{i}) = f\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{u} - \frac{1}{3}\overrightarrow{v}\right) = \frac{2}{3}f(\overrightarrow{u}) - \frac{1}{3}f(\overrightarrow{v}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{v} = \frac{2}{3}(\vec{i}+\vec{j}) + \frac{1}{3}(-\vec{i}+2\vec{j}) = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}$

$f(\vec{j}) = f\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{v}\right) = \frac{1}{3}f(\overrightarrow{u}) + \frac{1}{3}f(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{u} - \frac{1}{3}\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}(\vec{i}+\vec{j}) - \frac{1}{3}(-\vec{i}+2\vec{j}) = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$

b. $f \circ f(\vec{i}) = f\left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}\right) = \frac{1}{3}f(\vec{i}) + \frac{4}{3}f(\vec{j}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}\right) = \vec{i}$

$f \circ f(\vec{j}) = f\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}\right) = \frac{2}{3}f(\vec{i}) - \frac{1}{3}f(\vec{j}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}\right) = \vec{j}$

c. f est un endomorphisme tel que $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$ où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. C'est donc une symétrie vectorielle.

d. La symétrie vectoriel f est telle que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On en déduit que :

- la base $\mathscr{E}$ est l'espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$;
- la direction $\mathscr{D}$ est l'espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{v}$.

Exercice 3

Partie A

1 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{2-x}$.

b. $h'(x)$ s'annule en $x = 2$ et est du signe de $x - 2$ sur $\mathbb{R}$.
$h'(x) > 0$ pour tout $x \in]2; +\infty[$.
$h'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty; 2[$.

c.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

2 h est strictement décroissante de $]-\infty; 2]$ sur $[0; +\infty[$. On en déduit que : $\forall x \in]-\infty; 2]$, $0 \leq h(x) < +\infty$.
Et, h est strictement croissante de $[2; +\infty[$ sur $[0; 1[$. On en déduit que : $\forall x \in [2; +\infty[$, $0 \leq h(x) \leq 1$.
Donc $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie B

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x . \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \mathrm{e}^{2-x})}_{=1} = +\infty.$

2 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (1 + \mathrm{e}^{2-x}) + x(-\mathrm{e}^{2-x}) = (1-x)\,\mathrm{e}^{2-x} + 1 = h(x)$.

b.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x) = h(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	4	$\nearrow$ $+\infty$

3 **a.** f est une fonction continue, strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$.
Donc f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,;\, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty; +\infty[$.

b. f et f^{-1} ont même sens de variation.
Comme f admet une tangente horizontale en $x = 2$, alors f^{-1} admet une tangente verticale en $f(2) = 4$. D'où f^{-1} n'est pas dérivable en 4.
On en déduit le tableau de variation de f^{-1}.

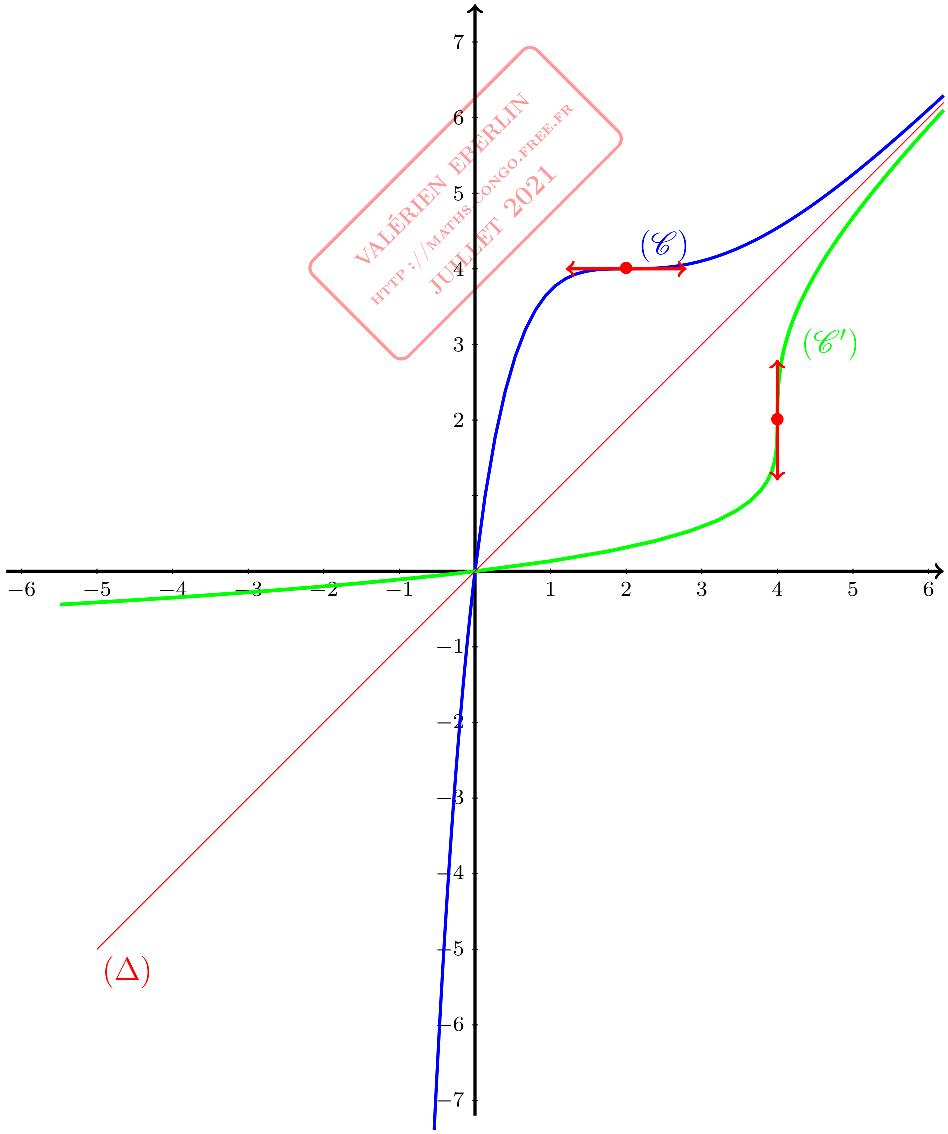
x	$-\infty$	4	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
$f^{-1}(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	2	$\nearrow$ $+\infty$

4 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (1 + \mathrm{e}^{2-x}) = +\infty$.
On en déduit que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{2-x} = 0$.
On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

c. On a : $f(x) - x = x\,\mathrm{e}^{2-x}$.
$\forall x > 0, \quad f(x) - x > 0$. Alors la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (Δ) sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall x < 0, \quad f(x) - x < 0$. Alors la courbe $(\mathscr{C})$ est en dessous de la droite (Δ) sur $\mathbb{R}_-$.

5



Exercice 4

1

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) \times p(B) \\ &= 0,9 \times 0,95 \\ &= 0,855 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} p(C) &= 1 - p(A \cap B) \\ &= 1 - 0,855 \\ &= 0,145 \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0,9 + 0,95 - 0,855 \\ &= 0,995 \end{aligned}$$

Correction bac 2021 - Série D

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 **a.** Comme $(2i)^3 + 8i = 8i^3 + 8i = -8i + 8i = 0$, alors $a = 2i$ est une solution de l'équation $(E) : z^3 + 8i = 0$.

b.

$$\begin{aligned}(z-2i)(z^2+2iz-4) &= z^3 + 2iz^2 - 4z - 2iz^2 + 4z + 8i\\ &= z^3 + 2iz^2 - 2iz^2 - 4z + 4z + 8i\\ &= z^3 + 8i\end{aligned}$$

c. Factorisons l'expression $z^2 + 2iz - 4$

Le discriminant réduit étant : $\delta = i^2 + 4 = 3$, on en déduit que les solutions de l'équation $z^2 + 2iz - 4 = 0$ sont : $z_1 = \dfrac{-i-\sqrt{3}}{1} = -i - \sqrt{3}$ et $z_2 = \dfrac{-i+\sqrt{3}}{1} = -i + \sqrt{3}$.

Solutions de l'équation (E)

$$\begin{aligned}z^3 + 8i = 0 &\iff (z-2i)(z^2+2iz-4) = 0\\ &\iff z - 2i = 0 \text{ ou } z^2 + 2iz - 4 = 0\\ &\iff z = 2i \text{ ou } z = -i - \sqrt{3} \text{ ou } z = -i + \sqrt{3}\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (E) sont l'ensemble $S = \{2i\ ;\ -i - \sqrt{3}\ ;\ -i + \sqrt{3}\}$.

2 **a.** $u = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} - 3i} = -\dfrac{(\sqrt{3} - 3i)(\sqrt{3} - 3i)}{(\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En remarquant que $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$, on en déduit que :

- $|u| = 1$;
- $\arg(u) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

b.

Comme $|u| = \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$. Alors $|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$ c'est à dire $AC = AB$.

Le triangle ABC étant isocèle en A, on en déduit que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ [2\pi]$

Or $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi] = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (D'après 2.a.).

Donc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Donc le triangle ABC est équilatéral.

3 **a.** Soit $z' = az + b$, l'expression complexe de la similitude directe S.

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(C) = I \end{cases} \iff \begin{cases} a \times 2i + b = 2i & (1) \\ a(\sqrt{3} - i) + b = -i & (2) \end{cases}.$$

En multipliant l'équation (2) par -1 puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (1), on obtient $a = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

En remplaçant a par $\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ dans l'équation (1), on obtient $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.
D'où l'écriture complexe de S :

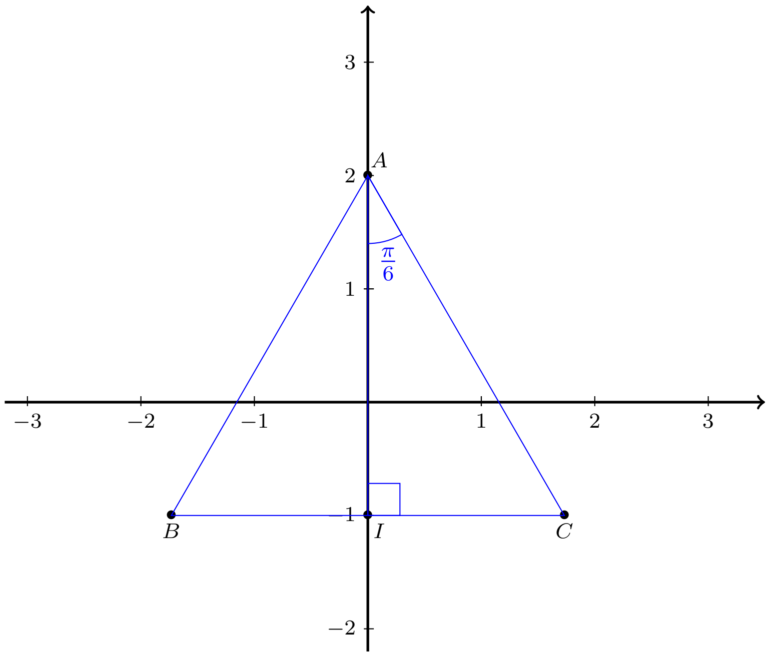
$$z' = \left(\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

b. $|a| = \left|\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où $a = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.

S est la similitude d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de rapport $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Autre méthode</u>



- <u>Angle et rapport de la similitude S</u>

  Comme $S(A) = A$ et $S(C) = I$, alors $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})$ est l'angle de la similitude S et $k = \frac{AI}{AC}$ son rapport.
  Or le triangle ABC est équilatéral et I est le pied de la hauteur issue de A.
  Donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}) \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ et $\frac{AI}{AC} = \cos(\frac{\pi}{6})$ avec $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

  L'angle de la similitude S est $-\frac{\pi}{6}$ et son rapport est $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Expression complexe de la similitude S

  L'expression complexe de la similitude S étant de la forme $z'-z_A = k\,\mathrm{e}^{i\theta}(z-z_A)$, on a :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}(z-z_A)+z_A \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)(z-2i)+2i \\ &= \left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2

1 **a.**

$$\begin{cases} f(\vec{v_1}) = \vec{0} \\ f(\vec{v_2}) = \vec{v_2} \end{cases} \iff \begin{cases} -f(\vec{i})+5f(\vec{j}) = \vec{0} \\ -2f(\vec{i})+5f(\vec{j}) = -2\vec{i}+5\vec{j} \end{cases} \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} f(\vec{i}) = 2\vec{i}-5\vec{j} \\ -5f(\vec{j}) = -2\vec{i}+5\vec{j} \end{cases} \begin{vmatrix} E_1' = E_1-E_2 \\ E_2' = -2E_1+E_2 \end{vmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} f(\vec{i}) = 2\vec{i}-5\vec{j} \\ f(\vec{j}) = \frac{2}{5}\vec{i}-\vec{j} \end{cases}$$

b.

$$\begin{array}{cc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{5} \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{i} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{j} \end{array}$$

2 $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(mat(f)) = \begin{vmatrix} 2 & \frac{2}{5} \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1)-(-5)\times\frac{2}{5} = 0$.

Comme le déterminant de la matrice de f est nul, alors l'endomorphisme f n'est pas bijectif.

3 **a.**

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) = \vec{u'} &\iff f(x\vec{i}+y\vec{j}) = x'\vec{i}+y'\vec{j} \\ &\iff xf(\vec{i})+yf(\vec{j}) = x'\vec{i}+y'\vec{j} \\ &\iff x(2\vec{i}-5\vec{j})+y(\frac{2}{5}\vec{i}-\vec{j}) = x'\vec{i}+y'\vec{j} \\ &\iff (2x+\frac{2}{5}y)\vec{i}+(-5x-y)\vec{j} = x'\vec{i}+y'\vec{j} \end{aligned}.$$

D'où les coordonnées de $\vec{u'}$: $\begin{cases} x' = 2x+\frac{2}{5}y \\ y' = -5x-y \end{cases}$

b.

$$\begin{aligned}f(f(\vec{i})) = f(2\vec{i} - 5\vec{j}) = 2f(\vec{i}) - 5f(\vec{j}) &= 2(2\vec{i} - 5\vec{j}) - 5\left(\frac{2}{5}\vec{i} - \vec{j}\right)\\ &= 4\vec{i} - 10\vec{j} - 2\vec{i} + 5\vec{j}\\ &= 2\vec{i} - 5\vec{j}\\ &= f(\vec{i})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(f(\vec{j})) = f(\frac{2}{5}\vec{i} - \vec{j}) = \frac{2}{5}f(\vec{i}) - f(\vec{j}) &= \frac{2}{5}(2\vec{i} - 5\vec{j}) - \left(\frac{2}{5}\vec{i} - \vec{j}\right)\\ &= \frac{4}{5}\vec{i} - 2\vec{j} - \frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j}\\ &= \frac{2}{5}\vec{i} - \vec{j}\\ &= f(\vec{j})\end{aligned}$$

c. f est un endomorphisme tel que $f \circ f(\vec{u}) = f(\vec{u})$ pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$. C'est donc une projection vectorielle de base l'ensemble des vecteurs invariants par f et de direction, le noyau de f.

d. <u>Base de f</u>

La base de f est l'ensemble des éléments invariants par f : $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(\vec{u}) = \vec{u}\}$.
Soit $\vec{u}(x\,,y)$ un élément de la base de f.

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \iff \begin{cases} 2x + \dfrac{2}{5}y = x \\ -5x - y = y \end{cases} \iff \quad 5x + 2y = 0.$$

On en déduit que la base de f est la droite vectorielle d'équation $5x + 2y = 0$, engendrée par le vecteur $(-2\,;5)$.

<u>Direction de f</u>

La direction de f est l'ensemble $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(\vec{u}) = \vec{0}\}$.
Soit $\vec{u}(x\,,y)$ un élément de la direction de f.

$$f(\vec{u}) = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x + \dfrac{2}{5}y = 0 \\ -5x - y = 0 \end{cases} \iff \quad 5x + y = 0.$$

On en déduit que la direction de f est la droite vectorielle d'équation $5x + y = 0$, engendrée par le vecteur $(-1\,;5)$.

Exercice 3

Partie A

1 La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et est de la forme u^2 où u est la fonction logarithme.
Or la dérivée de u^2 est donnée par : $(u^2)' = 2u.u'$.

On en déduit que $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad f'(x) = 2(\ln x).\dfrac{1}{x}$.

2 $f'(x)$ s'annule en $x = 1$ et est du signe de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.
$f'(x) < 0$ pour tout $x \in]0;1[$.
$f'(x) > 0$ pour tout $x \in]1\,;+\infty[$.

La fonction f est décroissante sur $]0;1[$ puis croissante sur $]1\,;+\infty[$.

3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2 = \underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)}_{-\infty} \times \underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)}_{-\infty} = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)}_{+\infty} \times \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)}_{+\infty} = +\infty.$

4

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

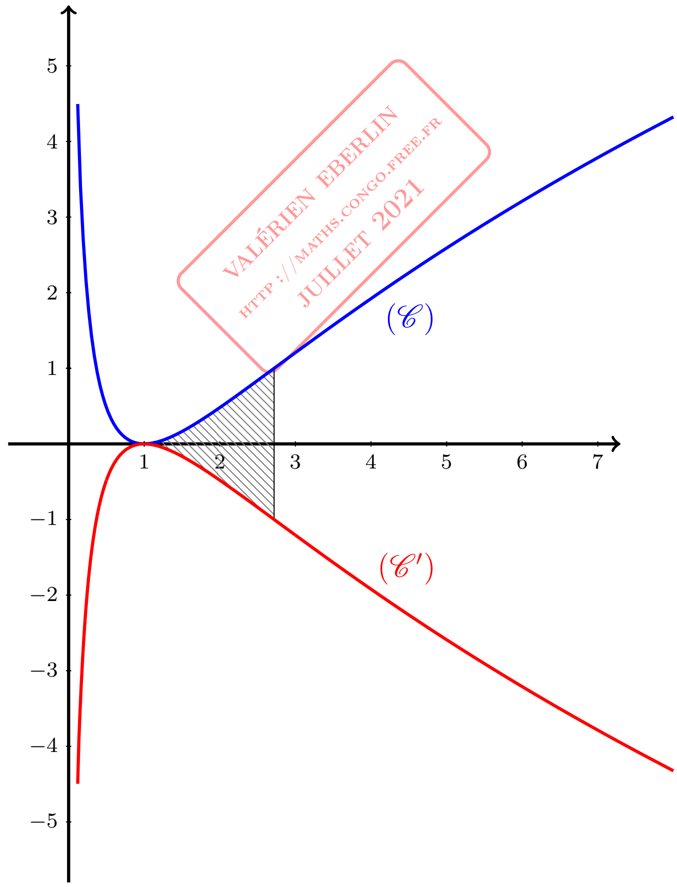
5 Posons $x = \dfrac{1}{u^2}$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{\left(\ln \dfrac{1}{u^2}\right)^2}{\dfrac{1}{u^2}} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} (-2\ln u)^2 u^2 = 4\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} (u\ln u)^2 = 0$$

car $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} (u\ln u) = 0$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

6



Partie B

1 Si (x, y) est un point de la courbe $(\mathscr{C})$, alors $(x, -y)$ est un point de la courbe $(\mathscr{C}')$.
Les points de la courbe $(\mathscr{C}')$ s'obtiennent à partir de ceux de la courbe $(\mathscr{C})$ par la symétrie axiale d'axe (Oy).

2

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP ://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

Partie C

1 La fonction H définie sur $]0\,;+\infty[$, est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et l'on a :

$$\begin{aligned} H'(x) &= (\ln x)^2 + x.\frac{2\ln x}{x} - 2\ln x - 2x.\frac{1}{x} + 2 \\ &= (\ln x)^2 + 2\ln x - 2\ln x - 2 + 2 \\ &= (\ln x)^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Comme $H'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, alors H est une primitive de la fonction f.

2

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} (f(x) - g(x))\,dx &= \int_1^{\mathrm{e}} (f(x) - (-f(x)))\,dx \\ &= 2\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,dx \\ &= 2\left[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= 2(\mathrm{e} - 2) \end{aligned}$$

D'où l'aire $\mathscr{A}$ de la portion cherché est : $\mathscr{A} = 2(\mathrm{e}-2) \times 4\,\text{cm}^2 = 8(\mathrm{e}-2)\,\text{cm}^2$.

Exercice 4

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.
Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

1

Loi marginale de X.

X	0	1	2	3	4
$n_{i\bullet}$	10	18	27	18	7

Loi marginale de Y.

Y	1	2	3
$n_{\bullet j}$	13	30	37

2

On sait que $\overline{X} = 1,93$ et $\overline{Y} = 2,3$.

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}x_i^2 - \overline{X}^2 \\ &= \frac{1}{80}\left[10 \times (0)^2 + 18 \times 1^2 + 27 \times 2^2 + 18 \times 3^2 + 7 \times 4^2\right] - 1,93^2 \\ &= 1,275 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(Y) &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\bullet j} y_j^2 - \overline{Y}^2 \\
&= \frac{1}{80}\left[13\times(1)^2 + 30\times 2^2 + 37\times 3^2\right] - 2,3^2 \\
&= 0,535
\end{aligned}$$

3 L'équation de la droite de régression linéaire de Y en X est donnée par :

$$Y = aX + b \text{ où } a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} \text{ et } b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

Ainsi, $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} = \dfrac{0,44}{1,275} = 0,345$ et $b = 2,3 - 0,345\times 1,93 = 1,634$.

Donc l'équation de la droite de régression linéaire est : $Y = 0,345X + 1,634$.

4 Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}}$.

D'où $\rho_{X,Y} = \dfrac{0,44}{\sqrt{1,275}.\sqrt{0,535}} = 0,533$.