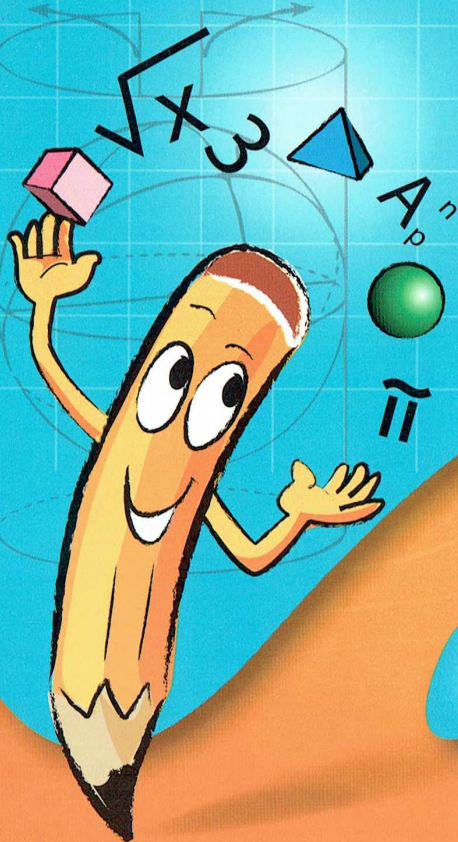


3

3^{ème} année secondaire

Maths

Section mathématiques



Géométrie et
probabilité

Résumé de cours
Exercices et problèmes
Solutions détaillées



© **Kounouz Edition**

77, Av. Mohamed V Nabeul

Tél.: 72 286 635 - Fax : 72 271 760

E-Mail : info@kounouz-edition.com

Site Internet = <http://www.Kounouz-Edition.com>

Avant Propos

Cet ouvrage est conforme au nouveau programme officiel de la 3^{ème} année secondaire, section Mathématique, applicable à partir de l'année scolaire 2006-2007.

*Le cours est bien entendu, nécessaire, et ses principaux résultats doivent être parfaitement connus avant toute chose. Mais il ne saurait suffire. Combien d'élèves a-t-on vu qui malgré une bonne maîtrise de leurs cours, ne parvenaient même pas à démarrer un exercice ? Dans la plupart des cas, ils manquent tout simplement de méthode. **Le cours sans les méthodes, c'est le savoir sans le savoir – faire : ça ne sert à rien.** Cet ouvrage est par conséquent nécessaire pendant l'année scolaire afin d'assimiler utilement le cours en vue des exercices, et à plus forte raison indispensable dans la perspective de la préparation aux devoirs et aux épreuves du Bac.*

Ce livre est un véritable outil de travail :

- **Les résumés de cours** : rappellent les résultats essentiels illustrés d'application directes pour surmonter les difficultés du cours.
- **Les réflexes** : La plupart des élèves bloque souvent sur les mêmes difficultés, connaître les astuces et les réflexes qui les débloquent améliorera leur compétence.
- **Des exercices groupés par thèmes et par ordre de difficulté croissante.**
- **Des problèmes** puisés dans des situations réelles, de la vie courante, dans des contextes mathématiques ou en rapport avec l'environnement et ce en conformité avec les objectifs du nouveau programme.
- **Tous les exercices et les problèmes sont corrigés intégralement et commentés dans un langage simple et rigoureux.**

🔑 Une règle d'or :

Attachez vous à résoudre les exercices sans regarder le corrigé (éviter même le "petit coup d'œil"). Si au bout de 10 minutes vous n'y parvenez pas, lisez la solution puis refaites l'exercice quelques jours après, pour voir si vous avez vraiment compris.

Nous souhaitons que cet ouvrage vous permettrait d'acquérir les bons réflexes, ceux qui vous donneront l'aisance nécessaire pour aborder, avec confiance et sérénité, les devoirs de mathématiques.

*Nous concluons cet avant - propos par une remarque frappée au coin du bon sens, empruntée au mathématicien George Polya, dont chacun devinera sans peine les destinataires : « **De même que apprendre à nager , il faut se mettre à l'eau , pour savoir résoudre des problèmes , il faut en résoudre** ».*

Sommaire

N°	Chapitre	Résumé de cours	Enoncés page	Solutions page
I	<i>Produit scalaire dans le plan</i>	5	8	15
II	<i>Angles orientés</i>	33	37	43
III	<i>Trigonométrie</i>	55	59	66
IV	<i>Rotations</i>	93	96	101
V	<i>Nombres complexes</i>	115	119	125
VI	<i>Dénombrement</i>	138	141	147
VII	<i>Divisibilité dans \mathbb{N}</i>	158	162	166
VIII	<i>Nombres premiers</i>	175	177	180
IX	<i>Vecteurs de l'espace</i>	184	188	192
X	<i>Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace</i>	201	204	208
XI	<i>Equations de droites et de plans .Equation d'une sphère</i>	218	223	231
XII	<i>Probabilités</i>	269	271	278
XIII	<i>Statistiques</i>	293	298	301

Chapitre I

Produit scalaire dans le plan

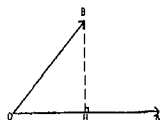
■ Définitions

1) On appelle produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le réel défini par

* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \cdot \overline{OH}$ avec $\vec{u} = \overline{OA}$, $\vec{v} = \overline{OB}$

et H le projeté orthogonal de B sur (OA)



2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cos \widehat{AOC}$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$

et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

■ Propriétés Algébriques

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs, les réels α et β Soit

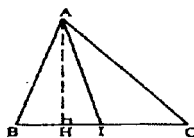
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	$\vec{u} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ ^2 = (\vec{u})^2$
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$	$\vec{u} \cdot (\alpha \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$
$(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v})$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2\ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ $	$\ \vec{u} - \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - 2\ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ $
$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$	$ \vec{U} \cdot \vec{V} \leq \ \vec{U}\ \times \ \vec{V}\ $
$ \vec{U} \cdot \vec{V} = \ \vec{U}\ \times \ \vec{V}\ \Leftrightarrow \vec{U}$ et \vec{V} sont colinéaires	

■ Théorème de la médiane:

I le milieu de [BC] on a pour tout point A du plan :

* $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

* $AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{IA} = 2\overline{BC} \cdot \overline{IH}$



avec H le projeté orthogonal de A sur (BC)

Propriété : Pour tout point A, B, C on a : $\overline{AB} = (\overline{AC} + \overline{CB})$

$\overline{AB}^2 = (\overline{AC} + \overline{CB})^2 = AC^2 + CB^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC}$

On obtient alors $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot BC \cos \widehat{ACB}$ Formule d'El Kaschi

■ **Propriétés analytiques** : Dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) on

considère $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ on a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$	$\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$	$\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur
La distance d'un point $A(x_0, y_0)$ à une droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$ est le réel $\frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$.	

Réflexes :

Situations	Réflexes
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$	a) On utilise $\ \vec{AB}\ \cdot \ \vec{AC}\ \cos \widehat{BAC}$ b) On utilise $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$ avec H projeté \perp de C sur (AB) (on peut projeté seulement soit sur (AB) où sur (AC)) c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy'$ d) On utilise la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire
Démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs	On démontre que leur produit scalaire est nul
Calculer une distance AB	a) On écrit $AB^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$ b) Mesure de la médiatrice (théorème de la médiane)
Calculer un angle \widehat{BAC}	1) On applique la formule $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cos \widehat{BAC}$ pour calculer $\cos \widehat{BAC}$

<p>Déterminer une ligne de niveau des applications</p> $M \mapsto \overline{MA} \cdot \overline{MB}$ $M \mapsto MA^2 + MB^2$ $M \mapsto MA^2 - MB^2$	<p>transformer les expressions à l'aide de la relation de Chasles (En faisant intervenir le milieu [AB] et se référer aux théorèmes de cours.</p>
$M \mapsto \frac{MA}{MB} = k \text{ avec } k > 0$	<p>*Si $k = 1$ alors l'ensemble est la médiatrice [AB] *Si $k \neq 1$ alors l'ensemble est le cercle $\xi_{[IJ]}$ tel que I et J sont les barycentres respectives de $\{(A, 1), (B, -k)\}$ et $\{(A, 1), (B, k)\}$.</p>
$M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$ <p>$(\alpha + \beta \neq 0)$</p>	<p>Transformer l'expression à l'aide de la relation de Chasles. (En faisant intervenir G et G' les barycentres respectives de $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ et $\{(A, \alpha); (B, -\beta)\}$</p>

ENONCES

1 QCM

Indiquer la bonne réponse par a, b ou c en justifiant votre réponse.

1) A et B deux points du plan tel que $\overline{AB} = 2$

Soit M un point de (AB) vérifiant $\overline{AM} \cdot \overline{MB} = -4$ alors

a) $M \in [AB]$ b) $M \in [BA] - [BA]$ c) $M \in [AB] - [AB]$

2) ABCD est un carré de centre O de cote 1 cm. Alors $\overline{OB} \cdot \overline{OD}$ est égal à :

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $-\frac{1}{2}$

3) ABC un triangle tel que $AB = 2$ et $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$

alors $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ est égal à : a) 8 b) $4\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

4) \vec{a} et \vec{b} deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 2 et 1

$(2\vec{a} - \vec{b})^2$ est égal à : a) 15 b) 0 c) 17

5) $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$ si et seulement si :

a) $\vec{u} = \vec{v}$ b) $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$ c) $\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v}$

2 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1) Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

2) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

3) A, B et C sont trois points distincts. Si $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$ alors les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

4) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ alors $\vec{v} = \vec{w}$

5) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right]$

6) A, B, C trois points distincts. $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$

3 Vrai - Faux

ABCD un rectangle tel que $AB = 5$ et $BC = 3$ et ABE un triangle équilatéral extérieur à ABCD, I est le milieu de [AB]

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et justifiez votre réponse.

a) $\overline{AB} \cdot \overline{AI} = \overline{AB} \cdot \overline{AE} = \frac{25}{2}$

b) $\overline{DB} \cdot \overline{AD} = -3\sqrt{34}$

c) $\cos \widehat{BDE} = -\frac{5}{7}$

d) $\overline{EI} \cdot \overline{DC} = 0$

4 QCM

Indiquer la réponse exacte par a, b ou c

ABC est un triangle équilatéral de côté 4. I le milieu de [AC] et H le milieu de [BC] et D le projeté orthogonal de I sur (AH).

1) a) $\overline{DC} \cdot \overline{AB} = 0$ b) $\overline{DB} \cdot \overline{DC} = 0$ c) $\overline{AD} \cdot \overline{BH} = 0$

2) a) $\overline{AB} \cdot \overline{AI} = AH \times AD$ b) $\overline{AB} \cdot \overline{AI} = 8$ c) $\overline{AB} \cdot \overline{AI} = 4$

3) Dans un repère orthonormé, $\overline{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overline{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

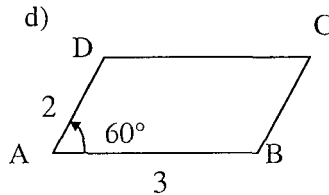
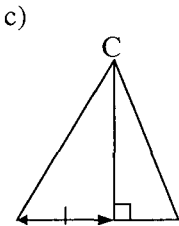
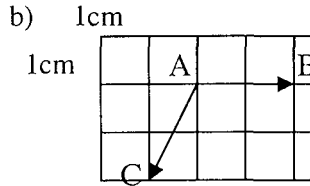
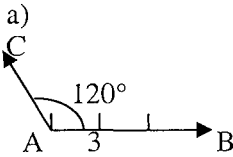
a) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6$

b) $BC = 26$

c) $\overline{BC} \cdot \overline{AB} = 19$

5

Dans chaque cas, choisir une méthode adaptée pour calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.



6

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et soient I, J et K les milieux respectifs des côtés [BC] et [CA] et [AB] et G est le centre de gravité du triangle ABC. Calculer les produits scalaires :

$\overline{BC} \cdot \overline{BA}$; $\overline{BC} \cdot \overline{BG}$; $\overline{BC} \cdot \overline{BI}$; $\overline{GB} \cdot \overline{GJ}$; $\overline{GB} \cdot \overline{GC}$; $\overline{JB} \cdot \overline{KC}$ en utilisant deux méthodes :

1) L'une utilisant la définition par projection orthogonale.

2) L'autre utilisant l'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$.

7

Soit I le milieu d'un segment $[AC]$, J celui d'un segment $[BD]$.

- 1) Démontrer l'égalité : $AB^2 + AD^2 + CD^2 + CB^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$.
- 2) Enoncer le résultat géométrique qu'on en déduit en examinant le cas $I = J$.

8

Le triangle OAB est rectangle en O. Une droite D passant par A coupe la hauteur (OH) en M et le cercle de diamètre $[AB]$ en N.

Montrer que : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = AO^2$.

9

Soit A et B deux points du plan :

Montrer que pour tout point M du plan on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2}$$

Soit $E = \{M; M \in P; \text{tel que } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k; k \in \mathbb{R}\}$

- a) Déterminer l'ensemble E.
- b) Pour quelle valeur de k, E est le cercle de diamètre $[AB]$

10

Soit ABC un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur a.

- a) Déterminer l'ensemble D_1 des points du plan tel que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{2}$
- b) Déterminer l'ensemble D_2 des points du plan tels que : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{2}$.
- c) Que représente pour le triangle ABC le point d'intersection de D_1 et D_2

11

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$.

P et Q désignent les projetés orthogonaux respectifs de I et J sur (BC)

tel que: $AI = 0,5$ et $AJ = 1,2$. Evaluer de deux façons $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IJ}$. En déduire PQ.

12

1) Exprimer la longueur de la médiane issue de A dans un triangle ABC en fonctions des longueurs a, b et c, des côtés respectifs $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$.

- 2) Quelle relation doit lier a, b et c pour que les longueurs des trois médianes soient proportionnelles aux longueurs a, b et c ?

13

Les diagonales d'un quadrilatère convexe ABCD se coupent en un point intérieur O. On note R et S les orthocentres des triangles AOB et COD.

- 1) Prouver $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$.

2) Dédire que $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{CD}$.

3) On note P et Q les centres de gravité des triangles AOD et BOC.

Prouver que (PQ) et (RS) sont perpendiculaires.

14 Soit A et B deux points du plan tels que $AB=5$. Déterminer l'ensemble des points M dans chacun des cas :

a) $MA^2 - MB^2 = -5$ b) $MA^2 + MB^2 = -4$

c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\frac{9}{4}$ d) $MA = 3 MB$

15 Soit ABC un triangle et I le milieu de [AC] et G son centre de gravité. Trouver l'ensemble des points M tels que :

a) $(3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} - 6\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ b) $\overrightarrow{MA} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

16 Soit A un point du plan et \vec{u} un vecteur tels que $\|\vec{u}\| = 5$. Déterminer

l'ensemble des points M dans chacun des cas :

1) a) $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 15$ b) $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{5}{2}$ 2) $-\frac{5}{2} \leq \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} \leq 15$.

17 Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 5$

1) Soit G le barycentre de (A, 2); (B, 3). Montrer que :

$$2MA^2 + 3MB^2 = 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2.$$

2) Exprimer les vecteurs \overrightarrow{GA} et \overrightarrow{GB} en fonction de \overrightarrow{AB} , puis les distances GA et GB en fonction de AB.

3) En déduire que $2MA^2 + 3MB^2 = 5MG^2 + \frac{6}{5}AB^2$.

4) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

$$2MA^2 + 3MB^2 = 50.$$

18 Soit ABC un triangle, on désigne par G son centre de gravité.

1) Montrer que pour tout point M du plan on a :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3GM^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

2) On suppose que $AB=3$, $AC=5$ et $BC=6$.

a) Calculer les médianes AA' , BB' et CC' . En déduire GA ; GB et GC.

b) Soit $E = \{M \in P ; MA^2 + MB^2 + MC^2 = k ; k \in \mathbb{R}\}$.

Discuter suivant k l'ensemble E.

c) Etudier les cas : $k = 25$; $k = 1$.

19 Soit A et B deux points donnés du plan P et I le point défini par

$$\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$$

et C un point de la perpendiculaire à la droite (AB) en I.

On donne $AB=3$ et $IC=2$.

- 1) Construire les points A ; B ; I et C.
- 2) a) Montrer que $CA^2 + 2CB^2 = 18$.
b) Déterminer l'ensemble \mathcal{C} des points $M \in P$ tels que :
 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.
- 3) Montrer que partout $M \in P$, $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 18 + 6 \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CI}$
- 4) On considère Δ l'ensemble des points M de P tels que :
 $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 42$.
a) Montrer que Δ est une droite dont on précisera la direction.
b) Montrer que Δ est tangente à \mathcal{C} .

20

Soit ABC un triangle rectangle en A et H sa projection orthogonale sur (BC). Soit K et L la projection orthogonale de H sur (AC) respectivement sur [AB] et I le milieu de [BC].

- 1) Montrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK})$
- 2) Traduire, par la produit scalaire, l'orthogonalité de (AH) et (BC) et en déduire que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.
- 3) Démontrer que (AI) et (KL) sont des droites orthogonales, après avoir justifier les égalités : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$.

21

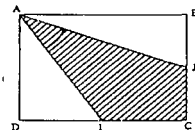
ABCD est un carré de côté a , I le milieu de [DC] et J de celui [BC]. On se propose d'évaluer l'angle $I\hat{A}J$ de mesure θ par deux méthodes.

⇒ **1ère méthode** :

- 1) Exprimer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\cos \theta$ et de a.
- 2) Exprimer \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{AJ} à l'aide des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} et donner une autre expression de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
- 3) En déduire la valeur exacte de $\cos \theta$ et une valeur approchées , à 10^{-2} près par défaut de θ .

⇒ **2ème méthode** :

- 1) Calculer AI^2 , AJ^2 et IJ^2 . et retrouver $\cos \theta$.



22

Soit \mathcal{C} un cercle de diamètre [AB], de centre O et de rayon a. Soit D la tangente au cercle \mathcal{C} au point A et soit $M \in D$ avec $M \neq A$. On appelle D' l'autre droite passant par M et tangente au cercle \mathcal{C} en un point noté N.

- 1) Montrer que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}$. En déduire que (AN) et (OM) sont perpendiculaires. On appelle H le point d'intersection de ces deux droites.
- 2) Soit α une mesure de l'angle $A\hat{O}M$. En exprimant $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ de deux

manières différentes, calculer OH en fonction de a et α .

- 3) Que peut on dire des triangles OAM et OMN ? En déduire une mesure de $\widehat{M\hat{O}N}$, puis de $\widehat{N\hat{O}B}$.
- 4) Soit K le projeté orthogonal de N sur (AB). En exprimant $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux manières différents, calculer OK en fonction de a et de α .
- 5) A quelle condition portant $\cos \alpha$ a-t-on $OK = OH$.
- 6) On suppose que $\alpha = 60^\circ$. Vérifier que α satisfait la condition de 5).
Calculer en fonction de a, $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{ON}$. En déduire que (HK) et (ON) sont perpendiculaires.



Soit ABC un triangle équilatéral de centre G et de coté 6cm, soit $O = A * C$.

- 1) a) Montrer que pour tout $M \in P$, $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 36$.
b) Déterminer et construire l'ensemble $\Omega = \{M \in P / MA^2 + MB^2 + MC^2 = 45\}$.
- 2) Soit $\Delta = \{M \in P / \overline{GM} \cdot \overline{GC} = 6\}$
Montrer que Δ est une droite que l'on construira.
- 3) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})
 $A(-3, 0)$; $B(0, 3\sqrt{3})$; $C(3, 0)$ et $M(x, y)$.
a) Vérifier que le triangle ABC est équilatéral.
b) Calculer les coordonnées de G.
c) Ecrire une équation cartésienne de Δ et vérifier que Δ est tangente à Ω .



Soit ABC un triangle équilatéral direct de coté $a > 0$. Soit D le point qui vérifie $2\overline{DA} - 2\overline{DB} - \overline{DC} = \vec{0}$.

- 1) Vérifier que $\overline{BD} = -2\overline{BA} + \overline{BC}$.
- 2) a) Déterminer $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ en fonction de a.
b) Montrer (AB) parallèle à (DC) et que $\overline{BC} \cdot \overline{BD} = 0$. construire alors D.
- 3) Calculer les distances CD, BD et AD en fonction de a.
- 4) Soit $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$
a) Vérifier que $f(C) = 0$.
b) Exprimer $f(M)$ en fonction de MD et de a.
c) En déduire l'ensemble F des points M qui vérifie $f(M) = 0$.
- 5) Soit $g(M) = 2\overline{MC} \cdot \overline{DB} + a^2$. Déterminer l'ensemble $G = \{M \in P / g(M) = a^2\}$
- 6) I est le point d'intersection de F et G autre que C. Montrer que CDI est un triangle équilatéral.

- 25 ζ le cercle de diamètre $[AB]$ de centre O . M un point de ζ distincts de A et B . On considère M_1 et M_2 images respectives de M par les rotations des centres respectives A et B et l'angle $\frac{\pi}{2}$ (direct). M' le milieu de $[M_1 M_2]$. On cherche à démontrer que M' appartient au cercle ζ et que (OM) et (OM') sont perpendiculaires.
- Exprimer \overline{OM} en fonction de \overline{AM} et \overline{BM} .
 - Exprimer $\overline{OM'}$ en fonction de $\overline{AM_1}$ et $\overline{BM_2}$.
 - Comparer $\|\overline{OM}\|^2$ et $\|\overline{OM'}\|^2$.
 - Démontrer que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = 0$.
 - Conclure.

- 26 ABC un triangle équilatéral et M, N, P sont des points tels que :
 M est le barycentre de $(A, 2)(B, 1)$, N est le barycentre de $(B, 2)(C, 1)$
et P est le barycentre de $(C, 2)(A, 1)$
- Construire M, N et P .
 - Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{MP}$. En déduire MP en fonction du côté a du triangle équilatéral ABC .
 - Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.
 - Quelle est la nature du quadrilatère $MGCP$. Si G est le centre de gravité de triangle ABC ?
 - a) Si S est l'aire de ABC et S_1 est l'aire de MNP . Déterminer une relation entre S_1 et S .
b) On recommence la construction précédente à partir de MNP . On note S_2 l'aire du triangle obtenu et ainsi de suite. Quelle est la nature de la suite (S_n) ainsi obtenue ? Exprimer S_n en fonction de S .
 - Combien de fois faut il effectuer de construction pour obtenir un triangle tel que le rapport de son aire à celle de ABC soit inférieur à 10^{-3} ?

CORRIGES

1

$$1) \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -4 \text{ car } M \in (AB)$$

donc \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont de sens contraires

d'où $M \in [BA) - [AB]$ ainsi la réponse est **b**

$$2) O = B * D \Rightarrow \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD} \text{ d'où } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -OD^2 = -\left(\frac{BD}{2}\right)^2$$

$$\text{or } BD = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} = -\frac{1}{2} \text{ ainsi la réponse est } \mathbf{c}$$

$$3) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A} = 4 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}$$

donc la réponse est **b**

$$4) \text{ On a } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ et } \|\vec{a}\| = 2 \text{ et } \|\vec{b}\| = 1$$

$$\text{alors } (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 4a^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2 = 4 \times 4 + 1 = 17 \text{ ainsi la réponse est } \mathbf{c}$$

$$5) \vec{u}^2 = \vec{v}^2 \Leftrightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v})$$

ainsi la bonne réponse est **c**

2

$$1) \text{ faux : contre exemple: } \vec{u} = -2\vec{v} \text{ alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = -2\vec{v} \cdot \vec{v} = -2\vec{v}^2$$

$$\text{et } \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = \|-2\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| = 2\vec{v}^2 \neq -2\vec{v}^2 \text{ d'où } \vec{u} \cdot \vec{v} \neq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

2) faux : (AH) hauteur de triangle ABC

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AH} \neq \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$$

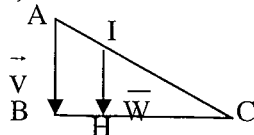
3) vraie : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (AB) \perp (AC)$ d'après le théorème de cours.

4) faux : $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{IH}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$

ABC est un triangle rectangle en B et (IH) \perp (BC) en H

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{w} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{IH}$



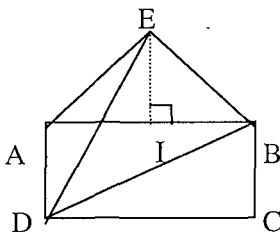
$$5) \text{ vraie : } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\text{ainsi } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right]$$

$$\begin{aligned} 6) \text{ vraie : } AB^2 + AC^2 = BC^2 &\Leftrightarrow ABC \text{ est un triangle rectangle en A} \\ &\Leftrightarrow \overline{AB} \perp \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \end{aligned}$$

3

On a $AB = 5$; $BC = 3$ comme $I = A * B$ et ABE équilatéral alors (EI) hauteur de ABE



$$a) \text{ Vraie : } \overline{AB} \cdot \overline{AI} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} = 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} = \frac{25}{2} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} \text{ car I est le projeté orthogonal de E sur (AB)}$$

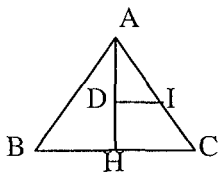
$$b) \text{ faux : } \overline{DB} \cdot \overline{AD} = -\overline{DB} \cdot \overline{DA} = -\overline{DA} \cdot \overline{DA} = -DA^2 = -9 \neq -3\sqrt{34}$$

A est le projeté orthogonal de B sur (AD)

$$c) \text{ faux : l'angle } \widehat{BDE} \text{ est aigu donc son } \cos \widehat{BDE} \text{ est strictement positif.}$$

$$d) \text{ Vraie : } \overline{EI} \cdot \overline{DC} = \overline{EI} \cdot \overline{AB} = 0 \text{ car } \overline{AB} = \overline{DC} \text{ ((EI) hauteur de ABE)}$$

4



$$1) \overline{AD} \cdot \overline{BH} = 0 \text{ car } (AD) \perp (BH) \text{ ainsi la réponse est } \boxed{c}$$

$$2) \overline{AB} \cdot \overline{AI} = AB \cdot AI \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ ainsi la réponse est } \boxed{c}$$

$$3) \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \text{ d'où } \overline{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et on a } \overline{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -3 \times (-4) + (-2) \times 3 = 12 - 6 = 6 \text{ ainsi la réponse est } \boxed{a}$$

$$5) a) \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \hat{BAC} = 3 \times 1 \times \cos 120^\circ = -\frac{3}{2}$$

b) le projeté orthogonal de C sur (AB) est H tel que AH = 1

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = 2 \times (-1) = -2$$

c) Le projeté orthogonal de C sur (AB) est H alors $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = 3 \cdot 2 = 6$

$$d) \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot (\overline{AB} + \overline{AD}) = AB^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 9 + 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 9 + 3\sqrt{3}$$

6) Méthode utilisant le projeté orthogonal :

Calcul du produit scalaire $\overline{BC} \cdot \overline{BA}$ a se projette orthogonalement en I sur la droite (BC) par définition : $\overline{BC} \cdot \overline{BA} = \overline{BC} \overline{BI}$.

$$\text{Or } \overline{BC} = a \text{ et } \overline{BI} = \frac{a}{2} \text{ d'où } \overline{BC} \overline{BI} = \frac{a^2}{2} \text{ et par suite } \overline{BC} \cdot \overline{BA} = \frac{a^2}{2}.$$

- Calcul du produit scalaire $\overline{BC} \cdot \overline{BG}$

G se projette orthogonalement en I sur la droite (BC) d'où

$$\overline{BC} \cdot \overline{BG} = \overline{BC} \overline{BI} = \frac{a^2}{2}.$$

- Calcul du produit scalaire $\overline{BC} \cdot \overline{BI} = \overline{BC} \overline{BI} = \frac{a^2}{2}$.

- Calcul du produit scalaire $\overline{GB} \cdot \overline{GJ}$.

Les vecteurs \overline{GB} et \overline{GJ} étant colinéaire, on obtient : $\overline{GB} \cdot \overline{GJ} = \overline{GB} \overline{GJ}$.

\overline{GB} et \overline{GJ} étant de sens contraires : $\overline{GB} \cdot \overline{GJ} = -\overline{GB} \times \overline{GJ}$ or BJA est un triangle rectangle en J donc :

$$\overline{BJ}^2 + \overline{JA}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{BJ}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AJ}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \text{ d'où } BJ = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Comme G est centre de gravité de ABC donc

$$GJ = \frac{1}{3} BJ = a \frac{\sqrt{3}}{6}; GB = \frac{2}{3} BJ = a \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ d'où } \overline{GB} \cdot \overline{GJ} = -\frac{a\sqrt{3}}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{6} = -\frac{a^2}{6}.$$

$$\text{Par suite : } \overline{GB} \cdot \overline{GJ} = -\frac{a^2}{6}$$

- Calcul du produit scalaire $\overline{GB} \cdot \overline{GC}$: C se projette orthogonalement en J sur la droite (GB) d'où $\overline{GB} \cdot \overline{GC} = \overline{GB} \cdot \overline{GJ}$ (et l'on retrouve le calcul précédent) d'où $\overline{GB} \cdot \overline{GC} = -\frac{a^2}{6}$.

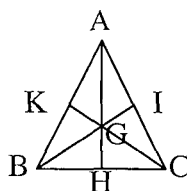
$$\text{d'où } \overline{GB} \cdot \overline{GC} = -\frac{a^2}{6}.$$

- Calcul du produit scalaire $\overline{JB} \cdot \overline{KC}$

Etant donné la position du centre de gravité sur une médiane, on a :

$$\overline{JB} = \frac{3}{2} \overline{GB} \text{ et } \overline{KC} = \frac{3}{2} \overline{GC} \text{ Ce qui permet de ramener au calcul}$$

$$\text{précédent ; en effet } \overline{JB} \cdot \overline{KC} = \left(\frac{3}{2} \overline{GB}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \overline{GC}\right) = \frac{9}{4} \overline{GB} \cdot \overline{GC} = \frac{9}{4} \left(-\frac{a^2}{6}\right) = -\frac{3a^2}{8}$$



2) Méthode utilisant l'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

- Calcul de $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ Soit $\theta \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})(2\pi); \theta = \frac{\pi}{3}$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = BC = a; \|\overrightarrow{BA}\| = BA = a \text{ d'ou : } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \cos \frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

et par suite : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{a^2}{2}$

- Calcul de $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}$ Soit $\theta \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG})(2\pi); \theta = \frac{\pi}{6}$

Le calcul de $BJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ d'ou $BG = \frac{2}{3} BJ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ d'ou :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BG}\| \cdot \cos \frac{\pi}{6} = a \times \frac{a\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2} \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG} = \frac{a^2}{2}$$

- Calcul de $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI}$ Soit $\theta \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI})(2\pi); \theta = 0$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \cos \frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} \text{ D'ou } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI} = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{BI}\| = a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

- Calcul de $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GJ}$ Soit $\theta \equiv (\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GJ})(2\pi); \theta = \pi$

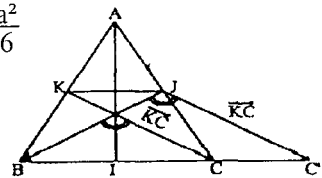
$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GJ} = \|\overrightarrow{GB}\| \cdot \|\overrightarrow{GJ}\| \cdot \cos \pi = \frac{a\sqrt{3}}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{3} \times (-1) = -\frac{a^2}{6} \quad \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GJ} = -\frac{a^2}{6}$$

- Calcul de $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$ Soit $\theta \equiv (\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC})(2\pi); \theta = \frac{2\pi}{3}$ $\|\overrightarrow{GB}\| = \|\overrightarrow{GC}\| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = \|\overrightarrow{GB}\| \cdot \|\overrightarrow{GC}\| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{6}$$

- Calcul de $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{KC}$ $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{JC'}$ $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JC'}$

Soit $\theta \equiv (\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC'})(2\pi); \theta = \frac{2\pi}{3}$.



$$\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JC'} = \|\overrightarrow{JB}\| \cdot \|\overrightarrow{JC'}\| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3a^2}{6} \text{ D'ou } \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{KC} = -\frac{3a^2}{8}$$



Par usage répété de la formule de la médiane on a :

$$AB^2 + AD^2 = \frac{1}{2} BD^2 + 2AJ^2 \text{ et } CD^2 + CB^2 = \frac{1}{2} BD^2 + 2CJ^2$$

et dans le triangle ACJ ; $AJ^2 + JC^2 = 2JI^2 + \frac{1}{2} AC^2$.

On déduit de ces trois relations l'égalité :

$$AB^2 + AD^2 + CD^2 + CB^2 = AC^2 + BD^2 + 4JI^2$$

1) Si $I = J$, autrement dit si le quadrilatère est un parallélogramme ,

on obtient : $AB^2 + AD^2 + CD^2 + CB^2 = AC^2 + BD^2$

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Un quadrilatère est un parallélogramme, si et seulement si :

$$AB^2 + AD^2 + CD^2 + CB^2 = AC^2 + BD^2$$

$$\text{8} \bullet \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$$

or $N \in \mathcal{C}_{[AB]}$ donc $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$ et $\overrightarrow{AN} = \alpha \overrightarrow{AM}$ car A, M et $N \in D$ d'où $\alpha \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$ et par suite $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$ donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$

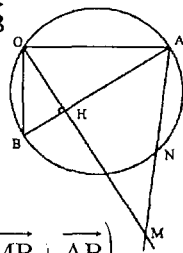
$$\bullet \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

or $\overrightarrow{OM} = \beta \overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$\bullet \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$$

or $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ car $O \in \mathcal{C}_{([AB])}$ d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}^2$

d'où la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}^2$



$$\text{9} \quad MA^2 + MB^2 - AB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB})^2$$

$$= \overrightarrow{MA}^2 + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{MA}^2 + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB})$$

$$= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{MA} \cdot (2\overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$

$$E = \{M, M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k; k \in \mathbb{R}\}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow \frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2} = k$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 - AB^2 = 2k \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2k + AB^2$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2k + AB^2 \text{ avec } I = A * B$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 = \frac{AB^2}{2} + 2k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2 + 4k}{4}$$

$$\bullet \text{1}^{\text{ère}} \text{ cas : } AB^2 + 4k > 0 \Leftrightarrow 4k > -AB^2 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$$

$$\text{d'où } MI = \sqrt{\frac{AB^2 + 4k}{4}} = \frac{\sqrt{AB^2 + 4k}}{2}$$

Donc $M \in$ au cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{AB^2 + 4k}}{2}$ D'où $E = \mathcal{C} \left[I, \frac{\sqrt{AB^2 + 4k}}{2} \right]$

$$\bullet \text{2}^{\text{ème}} \text{ cas : } AB^2 + 4k < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}; \quad E = \emptyset$$

$$\bullet \text{3}^{\text{ème}} \text{ cas : } AB^2 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4} \text{ d'où } M=I \text{ donc } E = \{I\}$$

E est le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si :

$$\sqrt{AB^2 + 4k} = AB \Leftrightarrow AB^2 + 4k = AB^2 \Leftrightarrow 4k = 0 \Leftrightarrow k = 0.$$

Autrement : E est le cercle de diamètre [AB] si et seulement si :

$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \text{ donc \u00e7a correspond bien au cas } k=0.$$

10

a) Soit H le projet orthogonal de M sur l'axe (AB) orient\u00e9 de A vers B donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ On cherche donc l'ensemble des points M tels que H v\u00e9rifie $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{a^2}{2}$ soit $\overrightarrow{AH} = \frac{a^2}{2 \overrightarrow{AB}}$ c'est \u00e0 dire $\overrightarrow{AH} = \frac{a}{2}$.

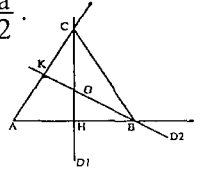
Ainsi D₁ est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

b) Soit de m\u00eame K le projet\u00e9 orthogonal de M sur l'axe (AC) orient\u00e9 de A vers C :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{2} \text{ s'écrit } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK} = \frac{a^2}{2}. \text{ Soit } \overrightarrow{AK} = \frac{a^2}{2 \overrightarrow{AC}} = \frac{a}{2}.$$

D₂ est alors la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

c) Le triangle ABC \u00e9tant \u00e9quilat\u00e9ral, le point d'intersection O de D₁ et D₂ est l'orthocentre ou centre de gravit\u00e9 ou centre du cercle circonscrit au triangle.

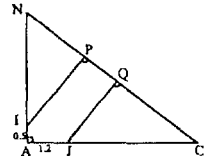


11

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IJ} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AJ} \\ &= 1,5 + 0 + 0 + 4,8 = 6,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QJ}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{QJ} \\ &= 0 + BC \times PQ + 0 = BC \times PQ. \text{ or } BC^2 = BA^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25 \end{aligned}$$

$$\text{d'o\u00f9 } PQ = \frac{6,3}{BC} = \frac{6,3}{5} = 1,26.$$



12

Le pied A' de la m\u00e9diane issue de A dans le triangle ABC est le point tel que $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et en \u00e9levant au carr\u00e9 scalaire :

$$AA'^2 = \frac{1}{4} (AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \text{ D'autre part}$$

$$BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}. \text{ On obtient ainsi une expression du}$$

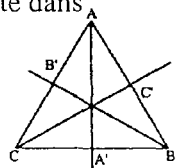
produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AC^2 + AB^2 - BC^2)$, qu'on reporte dans

$$\text{l'écriture de } AA'^2 \text{ pour obtenir } AA'^2 = \frac{1}{4} (2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

Le relation de proportionnalit\u00e9 (plus simple entre les carr\u00e9s)

$$\text{s'écrit donc: } \frac{AA'^2}{a^2} = \frac{BB'^2}{b^2} = \frac{CC'^2}{c^2}.$$

$$\text{Soit } \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{a^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{b^2} = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{c^2}.$$



Le plus simple est d'écrire que ces rapports sont égaux au rapport de la somme des numérateurs à la somme des dénominateurs, qui vaut simplement 3. On en déduit les relations:

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 3c^2; 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 3b^2; 2b^2 + 2a^2 - c^2 = 3a^2.$$

Ces trois relations sont équivalentes à $2b^2 = a^2 + c^2$.

13

1) S est caractérisé par les deux relations :

$$\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{OD} = 0 \text{ ou encore } \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \quad \overrightarrow{DS} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \text{ ou encore } \overrightarrow{DS} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\text{on a : } \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OS}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$$

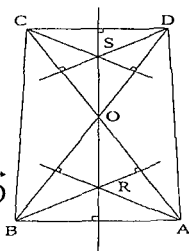
donc la première relation s'écrit : $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$

de même la seconde s'écrit : $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA}$

En retranchant membre à membre les égalités trouvées,

on obtient bien la relation $\overrightarrow{OS} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$

$$\text{d'où } \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$$



2) On démontre de même la relation : $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$; des deux relations établies, on déduit : $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{CD}$

P est le centre de gravité du triangle AOD donc $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA'}$ avec

$$A' = A * D. \text{ Or } \overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) \text{ d'où } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}).$$

De même Q est le centre de gravité du triangle COB, donc

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \text{ les deux relations entraînent par soustraction :}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) \text{ et par conséquent :}$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR}).$$

$$= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OR})$$

$$= -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OR} + \frac{1}{3} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OR})$$

or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OR} = 0$ par définition de R. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OS} = 0$ par définition de S.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OR} = 0$ d'après b), donc $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = 0$ et par suite les droites (PQ) et (RS) sont donc bien perpendiculaires.

14

a) Appelons E_1 l'ensemble des points cherchés et I le milieu de [AB].

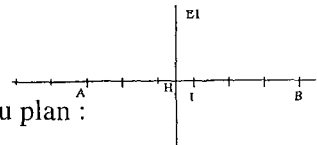
$$\text{Pour tout point M du plan : } MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Si l'on oriente (AB) telle que $\overline{AB} = 5$ alors, H étant le projeté orthogonal de M sur (AB) , $MA^2 - MB^2 = -5$ si et seulement si :

$$2\overline{IM} \cdot \overline{AB} = 2\overline{IH} \cdot \overline{AB} = -5 \text{ c'est à dire } \overline{IH} = -\frac{5}{2AB} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}.$$

L'ensemble E_1 est la droite orthogonale

à (AB) menée par H défini sur (AB) par $\overline{IH} = -\frac{1}{2}$.



b) Soit E_2 l'ensemble cherchée. Pour tout point M du plan :

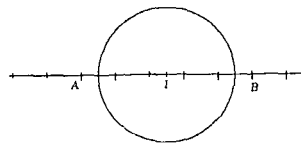
$MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{1}{2}AB^2$ alors $MA^2 + MB^2 = -4$ si et seulement si

$$2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = -4 \text{ c'est à dire } MI^2 = -2 - \frac{25}{4} \text{ or } -2 - \frac{25}{4} < 0 \text{ donc } E_2 = \emptyset.$$

c) Soit E_3 l'ensemble cherchée. Pour tout point M du plan :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 \text{ alors } \overline{MA} \cdot \overline{MB} = -\frac{9}{4}$$

si et seulement si : $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = -\frac{9}{4}$



c'est à dire $MI^2 = \frac{1}{4}AB^2 - \frac{9}{4} = 4$ d'où $MI = 2$

L'ensemble E_3 est le cercle de centre I et de rayon 2 .

d) Soit E_4 l'ensemble cherché : $MA = 3MB \Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\overline{MA} - 3\overline{MB}) \cdot (\overline{MA} + 3\overline{MB}) = 0$ Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 3)$

$$(\overline{MG} + \overline{GA} - 3\overline{MG} - 3\overline{GB}) \cdot (\overline{MG}' + \overline{G'A} - 3\overline{MG}' - 3\overline{G'B}) = 0$$

$$\text{or } \overline{GA} - 3\overline{GB} = \vec{0} \text{ et } \overline{G'A} + 3\overline{G'B} = \vec{0} \text{ d'où } (-2\overline{MG}) \cdot (4\overline{MG}') = 0$$

$\Leftrightarrow -8\overline{MG} \cdot \overline{MG}' = 0$ et par suite $\overline{MG} \cdot \overline{MG}' = 0$ d'où $\overline{MG} \perp \overline{MG}'$ donc $M \in$ au cercle de diamètre $[GG']$. Et par suite E_4 est le cercle de diamètre $[GG']$.

15

a) $I = A * C$ donc $\overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{MI}$

$$(\overline{3MA} + \overline{3MC} - \overline{6MB}) \cdot \overline{MC} = 0 \Leftrightarrow 6(\overline{MI} - \overline{MB}) \cdot \overline{MC} = 0 \Leftrightarrow \overline{BI} \cdot \overline{MC} = 0$$

ou encore $\overline{BI} \cdot \overline{MC} = 0$. L'ensemble cherché est par conséquent la droite passant par C et perpendiculaire à (BI) .

b) G étant le centre de gravité du triangle ABC signifie que :

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG} \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MG} = 0 \Leftrightarrow \overline{MA} \perp \overline{MG}$$

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AG]$.

16

1) a) Notons D_1 l'ensemble recherché.

Soit B le point du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ orientons la droite (AB) telle que $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$. Pour tout point M du plan, appelons H le projeté orthogonal de M sur (AB). $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 15$ c'est à dire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 15$ d'où $\overrightarrow{AH} = \frac{15}{\overrightarrow{AB}} = \frac{15}{5} = 3$. Donc D_1 est la droite orthogonal à (AB) et menée par H défini sur (AB) par $\overrightarrow{AH} = 3$

2) Notons D_2 l'ensemble recherché $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{5}{2}$ c'est à dire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -\frac{5}{2} \text{ d'où } \overrightarrow{AH} = \frac{-\frac{5}{2}}{\overrightarrow{AB}} = -\frac{1}{2}. \text{ Donc } D_2 \text{ est la droite orthogonale à}$$

(AB) et menée par H défini sur (AB) par $\overrightarrow{AH} = -\frac{1}{2}$.

3) $-\frac{5}{2} \leq \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} \leq 15 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \leq 15$

c'est à dire $-\frac{5}{2} \leq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \leq 15$ d'où $-\frac{1}{2} \leq \overrightarrow{AH} \leq 3$.

L'ensemble recherché est la partie du plan comprise entre les droites D_1 et D_2 (droites incluses).

$$\begin{aligned} \nabla 17 \quad 1) \quad 2MA^2 + 3MB^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MG}^2 + 4\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{MG}^2 + 6\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 \\ &= 5\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}) + 2\overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GB}^2 \\ &= 5\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GB}^2 \text{ car } 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0} \text{ (définition du barycentre).} \end{aligned}$$

D'où $2MA^2 + 3MB^2 = 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2$.

on a : $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ d'où $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

c'est à dire $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{GA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ de même $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

On obtient alors en termes de distances, $GA = \frac{3}{5}AB$ et $GB = \frac{2}{5}AB$.

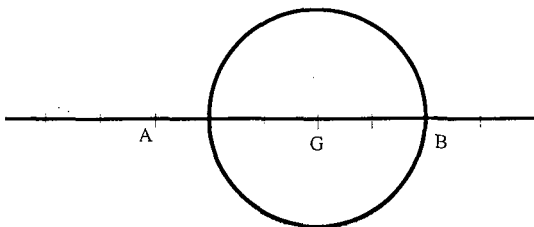
$$\begin{aligned} 3) \quad 2MA^2 + 3MB^2 &= 5MG^2 + 2\left(\frac{3}{5}AB\right)^2 + 3\left(\frac{2}{5}AB\right)^2 \\ &= 5MG^2 + \frac{18}{25}AB^2 + \frac{12}{25}AB^2 = 5MG^2 + \frac{30}{25}AB^2. \end{aligned}$$

Donc pour tout point M du plan : $2MA^2 + 3MB^2 = 5MG^2 + \frac{6}{5}AB^2$.

$$4) 2MA^2 + 3MB^2 = 50 \Leftrightarrow 5MG^2 + \frac{6}{5}AB^2 = 50 \text{ c'est à dire}$$

$$5MG^2 = 50 - \frac{6}{5}AB^2 = 50 - \frac{6 \times 25}{5} = 20 \text{ donc } MG^2 = 4 \Leftrightarrow MG = 2$$

donc l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon 2.



18

$$1) MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} \\ = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_0)$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

$$2) a) AB = 3 ; AC = 5 ; BC = 6.$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2} \text{ avec } A' = B * C.$$

$$2AA'^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} = 9 + 25 - 18 = 16 \text{ d'ou } AA'^2 = 8 \Leftrightarrow AA' = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$BA^2 + BC^2 = 2BB'^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow BB'^2 = \frac{1}{2} \left(BA^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(9 + 36 - \frac{25}{2} \right) = \frac{65}{4} \text{ d'ou } BB' = \frac{\sqrt{65}}{2}.$$

$$CA^2 + CB^2 = 2CC'^2 + \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow CC'^2 = \frac{1}{2} \left(CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow CC'^2 = \frac{1}{2} \left(25 + 36 - \frac{9}{2} \right) = \frac{113}{4} \text{ d'ou } CC' = \frac{\sqrt{113}}{2} \text{ et } AG = \frac{2}{3} \quad AA' = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$CG = \frac{2}{3}CC' = \frac{\sqrt{113}}{3} \text{ et } BG = \frac{2}{3}BB' = \frac{\sqrt{65}}{3}$$

$$b) E = \{M \in P ; MA^2 + MB^2 + MC^2 = k ; k \in \mathbb{R}\}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = k \Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + \frac{32}{9} + \frac{65}{9} + \frac{113}{9} = k \Leftrightarrow 3MG^2 + \frac{70}{3} = k$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 = k - \frac{70}{3} = \frac{3k - 70}{3} \Leftrightarrow MG^2 = \frac{3k - 70}{9}.$$

$$* \text{ 1ère cas : } 3k - 70 > 0 \Leftrightarrow k > \frac{70}{3} \quad MG^2 = \frac{3k-70}{9} \Leftrightarrow MG = \frac{\sqrt{3k-70}}{3}$$

donc M ∈ au cercle \mathcal{C} de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{3k-70}}{3}$ d'ou $E = \mathcal{C}_{\left(G, \frac{\sqrt{3k-70}}{3}\right)}$

$$* \text{ 2ème cas : } 3k - 70 < 0 \Leftrightarrow k < \frac{70}{3} \quad MG^2 = \frac{3k-70}{9} \text{ impossible donc } E = \emptyset.$$

$$* \text{ 3ème cas : } 3k - 70 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{70}{3}. \quad MG^2 = 0 \Leftrightarrow M = G \text{ d'ou } E = \{G\}.$$

c) $k = 25$: $25 > \frac{70}{3}$ donc $E = \mathcal{C}_{\left(G, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)}$ et pour $k = 1$: $1 < \frac{70}{3}$ donc $E = \emptyset$.

19

$$1) \vec{AI} + 2\vec{BI} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} + 2\vec{BA} + 2\vec{AI} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{AI} + 2\vec{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = -\frac{2}{3}\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$$

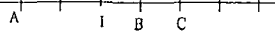
$$2) a) CA^2 + 2CB^2 = 18.$$

on a ACI est rectangle en I donc $AC^2 = CI^2 + AI^2 = 4 + 4 = 8$

on a CIB est rectangle en I donc $CB^2 = CI^2 + IB^2 = 4 + 1 = 5$

$$CA^2 + 2CB^2 = 8 + 5 \times 2 = 18.$$

$$b) \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0 \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot (\vec{MB} + \vec{MC})$$



Soit $I = B * C$.

$$\vec{MA}(\vec{MB} + \vec{MC}) = \vec{MA}(\vec{MI} + \vec{IB} + \vec{MI} + \vec{IC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA}(2\vec{MI}) = 0 \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MI} = 0$$

Donc l'ensemble \mathcal{C} est le cercle de diamètre [AI].

$$3) MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = \vec{MA}^2 + 2\vec{MB}^2 - 3\vec{MC}^2$$

$$= (\vec{MC} + \vec{CA})^2 + 2(\vec{MC} + \vec{CB})^2 - 3\vec{MC}^2$$

$$= \vec{MC}^2 + \vec{CA}^2 + 2\vec{MC} \cdot \vec{CA} + 2\vec{MC}^2 + 2\vec{CB}^2 + 4\vec{MC} \cdot \vec{CB} - 3\vec{MC}^2$$

$$= CA^2 + 2CB^2 + 2\vec{MC} \cdot (\vec{CA} + 2\vec{CB})$$

$$= 18 + 2\vec{MC} \cdot (\vec{CA} + 2\vec{CB}) = 18 + 2\vec{MC} \cdot (\vec{CI} + \vec{CA} + 2\vec{CI} + 2\vec{IB})$$

$$= 18 + 6\vec{MC} \cdot \vec{CI} \left(\text{car } \vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0} \right).$$

$$4) a) MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 42 \Leftrightarrow 18 + 6\vec{MC} \cdot \vec{CI} = 42$$

$$\Leftrightarrow 6\vec{MC} \cdot \vec{CI} = 24 \Leftrightarrow \vec{MC} \cdot \vec{CI} = 4.$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (CI); $\vec{HC} \cdot \vec{CI} = 4$

Soit $\vec{i} = \frac{\vec{CI}}{\|\vec{CI}\|}$ avec (I, \vec{i}) est un repère pour la droite (IC) donc $\vec{CI} = -2$ et

par suite $\vec{HC} = -2$ d'où $\vec{CH} = 2$. Donc Δ est la droite passant par H et \perp à (CI). b) $H \in \mathcal{C}$ et $(CH) \perp \Delta$ donc Δ est tangente en H à \mathcal{C} .

20

$I = B * C$ donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ et $\vec{KL} = \vec{AL} - \vec{AK}$

$$\vec{AI} \cdot \vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AL} - \vec{AK})$$

$$\vec{AI} \cdot \vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{AB} \cdot \vec{AL} + \vec{AC} \cdot \vec{AL} - \vec{AB} \cdot \vec{AK} - \vec{AC} \cdot \vec{AK})$$

or $\vec{AC} \cdot \vec{AL} = 0$, car les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

De même $\vec{AB} \cdot \vec{AK} = 0$ donc $\vec{AI} \cdot \vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{AB} \cdot \vec{AL} - \vec{AC} \cdot \vec{AK})$

2) $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$; on décompose $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ d'où $\vec{AH} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{AH} \cdot \vec{AC} - \vec{AH} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ ou encore } \vec{AB} \cdot \vec{AH} - \vec{AC} \cdot \vec{AH} = 0.$$

3) $\vec{AB} \cdot \vec{AL} = \vec{AB} \cdot (\vec{AH} + \vec{HL}) = \vec{AB} \cdot \vec{AH} + \vec{AB} \cdot \vec{HL}$ or (AB) et (HL) sont

orthogonales, donc $\vec{AB} \cdot \vec{HL} = 0$ d'où $\vec{AB} \cdot \vec{AL} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$. De même

$$\vec{AC} \cdot \vec{AK} = \vec{AC} \cdot (\vec{AH} + \vec{HK}) = \vec{AC} \cdot \vec{AH} + \vec{AC} \cdot \vec{HK} = \vec{AC} \cdot \vec{AH} \text{ car } \vec{AC} \perp \vec{HK}.$$

donc $\vec{AB} \cdot \vec{AL} - \vec{AC} \cdot \vec{AK} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} - \vec{AC} \cdot \vec{AH} = 0$. Par conséquent $\vec{AI} \cdot \vec{KL} = 0$, ce qui signifie que les droites (AI) et (KL) sont orthogonales.

21

1ère méthode :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = AI \times AJ \times \cos(\hat{IAJ}). \text{ Or } AI = AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}a \text{ d'où } \vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{5a^2}{4} \times \cos\theta \quad (1)$$

$$2) \vec{AI} \cdot \vec{AJ} = (\vec{AD} + \vec{DI}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BJ}) = \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{BJ} + \vec{DI} \cdot \vec{AB} + \vec{DI} \cdot \vec{BJ}$$

$$\text{Or } \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \vec{DI} \cdot \vec{BJ} = 0 \text{ et } \vec{AD} = \vec{BC} \text{ et } \vec{AB} = \vec{DC}$$

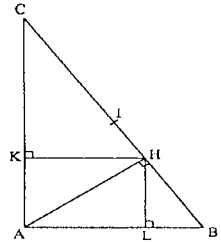
$$\text{d'où } \vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \vec{AD} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{BC}\right) + \frac{1}{2}\vec{DC} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AD}^2 + \frac{1}{2}\vec{DC}^2$$

$$= \frac{1}{2}AD^2 + \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}(a^2 + a^2) = a^2 \quad (2)$$

3) De (1) et (2), il vient $\cos\theta = \frac{4}{5}$ d'où $\theta \approx 36,86^\circ$

* 2^{ème} méthode :

1) On a $AI = AJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ et $IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (1) D'où $AI^2 = AJ^2 = \frac{5a^2}{4}$; $IJ^2 = \frac{a^2}{2}$.



$$\begin{aligned}
 \text{D'autre part } IJ^2 &= \overline{IJ}^2 = (\overline{IA} + \overline{AJ})^2 = \overline{IA}^2 + \overline{AJ}^2 + 2\overline{IA} \cdot \overline{AJ} \\
 &= IA^2 + AJ^2 - 2\overline{IA} \cdot \overline{AJ} = \frac{5a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2}a \times \frac{\sqrt{5}}{2}a \cos\theta \\
 &= \frac{5}{2}a^2 - \frac{5}{2}a^2 \cos\theta \quad (2). \text{ D'après (1) et (2) on trouve } \cos\theta = \frac{\frac{5}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2}{\frac{5}{2}a^2} = \frac{4}{5}.
 \end{aligned}$$



1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overline{OA} \cdot \overline{OA}$ car A est le projeté orthogonal de M sur (OA).

D'où $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = OA^2 = a^2$ car $A \in \mathcal{C}$.

$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = \overline{ON} \cdot \overline{ON}$ (N est le projeté orthogonal de M sur (ON))
 $= ON^2 = a^2$ car $N \in \mathcal{C}$.

Donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overline{ON} \cdot \overrightarrow{OM}$ Par suite $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} - \overline{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$

Ou encore $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}) = 0$ soit qui signifie $(\overrightarrow{OM}) \perp (\overrightarrow{NA})$

2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = OA \cdot OH \cos \widehat{AOH}$

$$= OA \cdot OH \cdot \cos \widehat{AOM} = a \cdot OH \cdot \cos \alpha$$

D'autre part ; d'après la 1^{ère} question H est le projeté orthogonal de A sur (OH)

$$\text{donc } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \overline{OH} \cdot \overline{OH} = \overline{OH}^2$$

De deux égalités on tire : $OH = a \cos \alpha$

3) AOM et OMN sont deux triangles rectangles avec le même hypoténuse et $AO = NO$

donc ces triangles sont isométriques. On en déduit que

$\widehat{M\hat{O}N} = \widehat{M\hat{O}A}$ soit $\widehat{M\hat{O}N} = \alpha$. De plus $\widehat{N\hat{O}B} = \widehat{A\hat{O}B} - (\widehat{A\hat{O}B} + \widehat{M\hat{O}N})$. Soit

$$\widehat{N\hat{O}B} = 180^\circ - 2\alpha$$

4) $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OB} = \overline{ON} \cdot \overline{OB} \cos \widehat{N\hat{O}B} = a^2 \cos(180^\circ - 2\alpha) = -a^2 \cos 2\alpha$

d'autre part, K est le projeté de N sur (OB) alors $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OB} = \overline{OK} \cdot \overline{OB}$

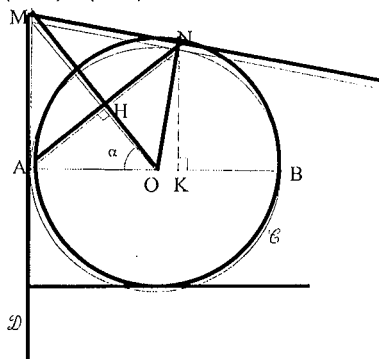
d'où $a^2 |\cos 2\alpha| = \overline{OK} \cdot \overline{OB}$ ou encore $\overline{OK} = a |\cos 2\alpha|$

5) on a : $OH = a \cos \alpha$ et $\overline{OK} = a |\cos 2\alpha|$

$$\text{donc } OH = \overline{OK} \Leftrightarrow \cos \alpha = |\cos 2\alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha = |2\cos^2 \alpha - 1|$$

$$\text{Si } \alpha = 60^\circ \quad \text{alors } \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \left| 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 \right| = \frac{1}{2}$$

d'où $\cos \alpha = |2\cos^2 \alpha - 1|$ par suite $OH = \overline{OK}$.



$(AN) \perp (OH)$ alors H est le projeté orthogonal de N sur (OH) donc

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OH} = OH^2 \text{ d'autre part, } \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OK} = OK^2$$

comme $OK=OH$, on en déduit que $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{ON}$

ou encore $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$ soit $\overrightarrow{ON} \cdot (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OK}) = 0$ d'où $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{KH} = 0$

Les droites (ON) et (KH) sont donc perpendiculaires.

23

$$\begin{aligned} 1) \text{ a) } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overline{MG} \cdot \underbrace{(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC})}_0 = 3MG^2 + 3GB^2 \end{aligned}$$

(ABC équilatéral et G centre de gravité donc $GA = GB = GC$)

$$\text{comme } O = A * C \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \sqrt{3} \cdot \frac{6}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{et } GB = \frac{2}{3} BO = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ ainsi } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 36$$

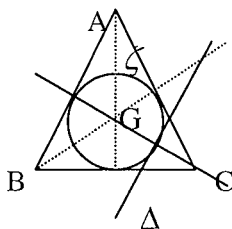
$$\text{b) } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 45 \Leftrightarrow 3MG^2 + 36 = 45 \Leftrightarrow MG^2 = 3 \Leftrightarrow MG = \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre G de rayon $\sqrt{3}$. d'où $\Omega = \xi_{(G, \sqrt{3})}$.

2) (Soit H le projeté orthogonal de M sur (GC) orienté de G vers C)

$$\overline{GM} \cdot \overline{GC} = 6 \text{ s'écrit } \overline{GH} \cdot \overline{GC} = 6 \text{ soit } \overline{GH} = \frac{6}{\overline{GC}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \text{ alors } \Delta \text{ est la}$$

droite orthogonale à (GC) menée par H définie sur (GC) par $\overline{GH} = \sqrt{3}$.



Comme $\overline{GC} = 2\sqrt{3}$ et $\overline{GH} = \sqrt{3}$ alors $H = G * C$

$$3) \text{ a) } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6 \text{ et } BC = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$$

$AC = \sqrt{6^2} = 6 = AB = BC \Rightarrow ABC$ est un triangle équilatéral.

$$\text{b) } \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0} \text{ d'où } x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-3 + 3}{3} = 0$$

$$= 2MD^2 + 2DA^2 + 4\overline{MD} \cdot \overline{DA} - 2MD^2 - 2DB^2 - 4\overline{MD} \cdot \overline{DB} - MD^2 - 2\overline{MD} \cdot \overline{DC} - DC^2$$

$$= -MD^2 + 2DA^2 - 2DB^2 - DC^2 + 2\overline{MD} \cdot \underbrace{(2\overline{DA} - 2\overline{DB} - \overline{DC})}_0$$

$$= -MD^2 + 14a^2 - 6a^2 - 4a^2 = 4a^2 - MD^2$$

c) $f(M) = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - MD^2 = 0 \Leftrightarrow MD^2 = 4a^2 \Leftrightarrow MD = 2a \Leftrightarrow M \in$ au cercle de centre "D" de rayon $2a$. d'où $F = \xi_{(D, 2a)}$.

5) $g(M) = a^2 \Leftrightarrow 2\overline{MC} \cdot \overline{DB} + a^2 = a^2 \Leftrightarrow \overline{MC} \cdot \overline{DB} = 0 \Leftrightarrow \overline{MC} \perp \overline{DB}$
 $\Leftrightarrow M$ appartient à la droite orthogonale à (BD) menée de C or $(BC) \perp (BD)$
d'où $G = (BC)$.

6) On a $G \cap F = \{I, C\} \Rightarrow DC = DI = 2a$ alors DIC est un triangle isocèle de base [IC] comme $(OB) \perp$ à (IC) en B
 $\Rightarrow B$ est le milieu de [IC]. Ainsi $IB = BC = a$ soit $IC = 2a$
Par suite $DC = DI = IC = 2a$ soit DIC est équilatéral.

25

a) $O = A * B$ alors

$$\overline{MO} = \frac{1}{2}(\overline{MA} + \overline{MB}) \text{ (propriété du}$$

parallélogramme)

$$\text{d'où } \overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{BM})$$

b)

$$M' = M_1 * M_2 \text{ alors } \overline{AM'} = \frac{1}{2}(\overline{AM_1} + \overline{AM_2})$$

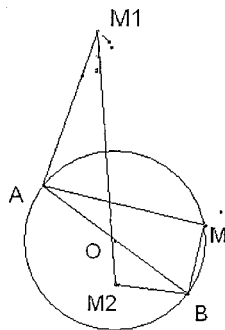
$$\overline{AO} + \overline{OM'} = \frac{1}{2}\overline{AM_1} + \frac{1}{2}\overline{AM_2} + \overline{AO}$$

$$\overline{OM'} = \frac{1}{2}\overline{AM_1} = \frac{1}{2}\overline{AM_2} + \overline{OA} \text{ or } \overline{OA} = \frac{1}{2}\overline{BA}$$

$$\text{D'où } \overline{OM'} = \frac{1}{2}\overline{AM_1} + \left(\frac{1}{2}\overline{AM_2} + \frac{1}{2}\overline{BA}\right) = \frac{1}{2}\overline{AM_1} + \frac{1}{2}\overline{BM_2}.$$

$$\text{c) } \|\overline{OM}\|^2 = \frac{1}{4}(\overline{AM} + \overline{BM})^2 \text{ et } \|\overline{OM'}\|^2 = \frac{1}{4}(\overline{AM_1} + \overline{BM_2})^2 \text{ comme}$$

$$r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}(M) = M_1 \text{ et } r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)}(M) = M_2. \text{ Alors } AM = AM_1 \text{ et } BM = BM_2$$



$$\text{et } \widehat{MBM_2} = \widehat{MAM_1} = \frac{\pi}{2} \text{ par suite } \|\overline{OM}\|^2 = \frac{1}{4}(AM^2 + BM^2 + 2\overline{AM} \cdot \overline{BM})$$

or $M \in \xi_{[AB]}$ donc $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$ d'où

$$\|\overline{OM}\|^2 = \frac{1}{4}(AM^2 + BM^2) \text{ et } \|\overline{OM'}\|^2 = \frac{1}{4}(AM_1^2 + BM_2^2 + 2\overline{AM_1} \cdot \overline{BM_2})$$

Comme $AM_1 = AM$ et $BM_2 = BM$ et $(MA) \perp (MB)$ et $(BM) \perp (BM_2)$

Alors $(MA) \parallel (BM_2)$ or $(AM_1) \perp (AM)$ donc $(BM_2) \perp (AM_1)$

On conclut alors que $\|\overline{OM}\|^2 = \frac{1}{4}(AM^2 + BM^2) = \|\overline{OM'}\|^2$

$$d) \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \frac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{BM}) \cdot \frac{1}{2}(\overline{AM_1} + \overline{BM_2}) = \frac{1}{4}(\overline{AM} + \overline{BM}) \cdot (\overline{AM_1} + \overline{BM_2})$$

$$= \frac{1}{4} \left[\underbrace{\overline{AM} \cdot \overline{AM_1}}_0 + \overline{AM} \cdot \overline{BM_2} + \overline{BM} \cdot \overline{AM_1} + \underbrace{\overline{BM} \cdot \overline{BM_2}}_0 \right]$$

$$= \frac{1}{4} [\overline{AM} \cdot \overline{BM_2} \cos \pi + \overline{BM} \cdot \overline{AM_1} \cos 0] = \frac{1}{4} [-\overline{AM} \cdot \overline{BM} + \overline{BM} \cdot \overline{AM}] = 0$$

$$e) \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = 0 \Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{OM'}$$

$$\text{et } \|\overline{OM}\|^2 = \|\overline{OM'}\|^2 \Rightarrow OM = OM' = \text{rayon du cercle} \Rightarrow M' \in \xi$$

26

$$1) \overline{AM} = \frac{1}{3} \overline{AB} \text{ et } \overline{BN} = \frac{1}{3} \overline{BC} \text{ et } \overline{CP} = \frac{1}{3} \overline{CA}$$

$$2) \overline{AB} \cdot \overline{MP} = \overline{AB} \cdot (\overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CP}) = \overline{AB} \cdot \overline{MA} + \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{CP}$$

$$= \overline{AB} \cdot \left(\frac{1}{3} \overline{BA} \right) + \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \frac{1}{3} \overline{CA} = -\frac{1}{3} \overline{AB}^2 + \frac{2}{3} \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$= -\frac{1}{3} \overline{AB}^2 + \frac{2}{3} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{3} \overline{AB}^2 + \frac{1}{3} \overline{AB}^2 = 0$$

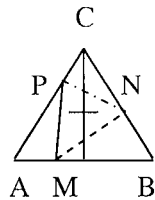
($AB = AC$ car ABC équilatéral)

* Dans le triangle rectangle AMP en M on a: $MP^2 = AP^2 - AM^2$

$$MP^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{1}{3}a^2 \Rightarrow MP = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

3) En utilisant El Kashi dans le triangle CPN

$$\text{on obtient : } PN^2 = CP^2 + CN^2 - 2CP \cdot CN \cos \frac{\pi}{3}$$



$$= \left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}a\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow PN = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$MN = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ par suite } MN = PN = MP = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

où encore MNP est un triangle équilatéral.

4) On a : $(PM) \perp (AB)$ et $(CG) \perp (AB)$ alors $(PM) \parallel (CG)$ de plus $PM = \frac{a}{\sqrt{3}}$

et ABC équilatéral et G son centre de gravité

$$\text{Alors } CG = \left(\frac{2}{3} \text{ hauteur}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\right) = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ (car la hauteur} = \frac{\sqrt{3}}{2} a)$$

* $(PM) \parallel (CG)$ et $PM = CG = \frac{a}{\sqrt{3}}$ alors PMGC est un parallélogramme.

5) a) ABC et MNP sont deux triangles équilatéraux alors la hauteur h de ABC est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2} AB$ et la hauteur h_1 de MNP est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2} MP$

$$\text{d'où } \frac{S}{S_1} = \frac{\frac{AB \times h}{2}}{\frac{MP \times h_1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} AB^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} MP^2} = \frac{AB^2}{MP^2} = \frac{a^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = 3$$

b) L'aire S_2 de triangle équilatéral et $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} MP^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{MP}{\sqrt{3}}\right)^2} = 3$ ainsi de suite on

obtient $\frac{S_n}{S_{n+1}} = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $S_{n+1} = \frac{1}{3} S_n$ c'est le terme général d'une

suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1^{er} terme $S_0 = S$ et $S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot S$

$$\text{c) } \frac{S_n}{S} < 10^{-3} \text{ or } S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n S \text{ Soit } \frac{S_n}{S} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

on utilise la calculatrice $\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-3} \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 4,5 \cdot 10^{-4}$ donc $n \geq 7$

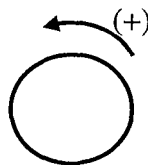
il faut effectuer alors au moins 6 constructions.

Chapitre II

Angles orientés

■ Orientation du plan :

Orienter le plan c'est choisir pour tous les cercles un même sens de rotation appelée « sens positif ». En général, on choisit comme sens Positif le sens inverse des aiguilles d'une montre.



■ Arcs orientés :

• Définition : On appelle arc orienté du cercle ζ un couple (A, B) de points de ζ on note \overrightarrow{AB}

• Longueur d'un arc du cercle :

Soit A et B deux points d'un cercle $\zeta_{(O,R)}$

Si α est une mesure en radian de l'angle \widehat{AOB} alors la longueur ℓ de l'arc \overrightarrow{AB} est $\ell = R \cdot \alpha$. Si $R=1$ alors $\ell = \alpha$.

• Si α est une mesure de l'arc \overrightarrow{AB} alors $-\alpha$ est une mesure de l'arc \overrightarrow{BA} .
On dit que \overrightarrow{BA} est l'arc opposé de \overrightarrow{AB} .

• Définition : Soient A et B deux points du cercle trigonométrique on appelle mesure algébrique de l'arc orienté \overrightarrow{AB} qu'on note $\text{mes } \overrightarrow{AB}$ tout réel de la forme $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ par convention $\text{mes } \overrightarrow{AA} = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

• Propriétés : $\zeta_{(0,1)}$ le cercle trigonométrique

x et y sont deux mesures d'un même arc orienté $\Rightarrow x - y = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Notation $x - y \equiv 0(2\pi)$ on lit $x - y$ est congru à 0 modulo 2π

Quel que soit le nombre réel α et le point A de ζ

Il existe un seul point M de ζ tel que α soit une mesure de \overrightarrow{AM}

Tout arc orienté de ζ possède une seule mesure dans $[0, 2\pi[$

A, B, C de ζ on a alors $\text{mes } \overrightarrow{AB} + \text{mes } \overrightarrow{BC} \equiv \text{mes } \overrightarrow{AC} \pmod{2\pi}$ Relation de Chasles

$\text{mes } \overrightarrow{AB} \equiv -\text{mes } \overrightarrow{BA} \pmod{2\pi}$

■ Angles orientés de deux vecteurs non nuls :

Deux vecteurs non nuls ; O, A et B trois points du plan tels que :

$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$

A L'angle géométrique \widehat{AOB} correspond deux angles orientés de vecteurs distincts : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\vec{v}, \vec{u}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$

■ Mesure principale d'un angle orienté

La valeur absolue de la mesure principale d'un angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) ou encore $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est la mesure de l'angle géométrique \widehat{AOB} positif si on tourne dans le sens positif négatif si non




• La mesure principale d'un angle orienté est sa mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$

■ Mesure d'un angle orienté :

- Un angle orienté de vecteurs à une infinité de mesures.
- Si α est une mesure en rd de (\vec{u}, \vec{v}) alors toute autre mesure est de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

• Notation : $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + 2k\pi \equiv \alpha [2\pi]$.

• Cas particulier

Angle nul		$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 [2\pi]$
Angle droit		$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2} [2\pi]$
Angle plat		$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi [2\pi]$

■ Propriétés des angles orientés :

• A, B et C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est nul ou plat si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0 (2\pi)$ ou $\pi (2\pi)$

• $(AB) \perp (CD)$ si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est droit si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2} (2\pi)$.

• $(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv 0$ ou $\pi (2\pi)$

Relation de « Chasles » : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) (2\pi)$

• $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -(\vec{v}, \vec{u}) [2\pi]$

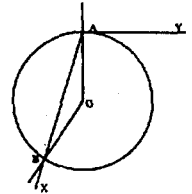
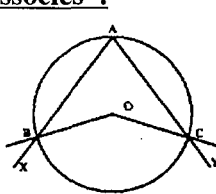
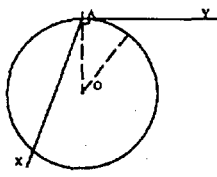
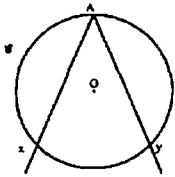
• $(\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi [2\pi]$ et $(-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) [2\pi]$

• Si $S_{\Delta}(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}')$ alors $(\vec{u}', \vec{v}') \equiv -(\vec{u}, \vec{v}) [2\pi]$

• Si $S_i(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}')$ alors $(\vec{u}', \vec{v}') \equiv (\vec{u}, \vec{v}) [2\pi]$

• Toute translation et toute homothétie conserve l'angle orienté.

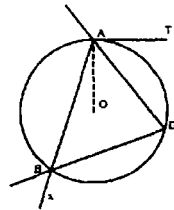
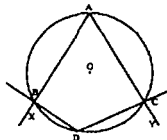
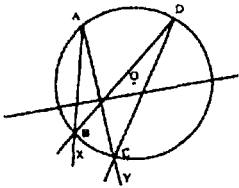
■ Angles inscrits – Angles au centre associés :



* L'angle $(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{Ay})$ est inscrit dans ζ si et seulement si $A \in \zeta$ et $[\overrightarrow{Ax}], [\overrightarrow{Ay}]$ recoupe ζ ou l'une est une tangente à ζ

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{Ay})$ interceptent le même arc \overrightarrow{BC} donc $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est l'angle au centre associé à $(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{Ay})$.

■ Relation entre deux angles inscrits interceptant le même arc :

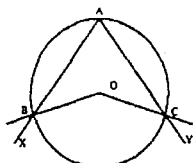


• A et D appartiennent au même arc \overrightarrow{CB} (ou \overrightarrow{BC}) alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) (2\pi)$

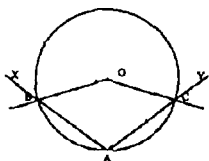
A et D sont situés l'un sur \overrightarrow{BC} et l'autre sur \overrightarrow{CB} alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) + \pi (2\pi)$

$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{Ay})$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ inscrite et interceptent le même arc \overrightarrow{BA} alors $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{Ay}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) (2\pi)$ et si \widehat{TA} est aigu alors $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{Ay}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) + \pi (2\pi)$

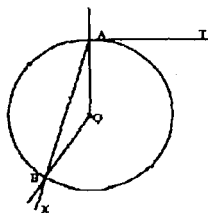
■ Relation entre angles inscrits et angles au centre associés :



$$(\overline{OB}, \overline{OC}) \equiv 2 (\overline{Ax}, \overline{Ay}) \quad (2\pi)$$



$$(\overline{OA}, \overline{OB}) \equiv 2(\overline{AT}, \overline{AY})(2\pi)$$



■ Lieux géométriques :

* Soit $Y = \{M \in P / (\overline{MA}, \overline{MB}) = \alpha + 2k\pi \ (k \in Z)\}$

a) Si $\alpha = 0 + 2k\pi$ alors $Y = (AB) \setminus [AB]$

b) Si $\alpha = \pi + 2k\pi$ alors $Y =]AB[$.

c) Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \pi$ modulo (2π) alors Y égale à \overrightarrow{BA}

est l'arc du cercle situé dans le demi-plan de frontière (BA) ne contenant pas $[AT)$ tel que la tangente (AT) à vérifie $(\overline{AT}, \overline{AB}) = \alpha + 2k\pi$

* Construction de ζ :

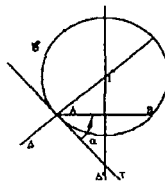
- Tracer Δ' la médiatrice de $[AB]$.

- Construire la tangente (AT) . Vérifions

la relation $(\overline{AT}, \overline{AB}) \equiv \alpha \ (2\pi)$

- Construire Δ la perpendiculaire à (AT) en A.

- Le centre I du cercle est situé sur $\Delta \cap \Delta'$ et le rayon est IA.



ENONCES

1

Indiquer la bonne réponse par a, b ou c et justifier votre réponse.

- 1) ABCD est un carré direct alors $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ est égal à :
- a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ b) $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ c) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$
- 2) Si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{5\pi}{6}(2\pi)$ et $(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ et $(\vec{w}, \vec{t}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ alors (\vec{u}, \vec{t}) est congru à
- a) $0(2\pi)$ b) $\pi(2\pi)$ c) $\frac{3\pi}{2}(2\pi)$
- 3) La mesure principale de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) dont l'une de ces mesure est $\frac{59\pi}{7}$ est
- a) $-\frac{4\pi}{7}$ b) $\frac{11\pi}{7}$ c) $\frac{3\pi}{7}$
- 4) Si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ alors une mesure de $(\vec{v}, -\vec{u})$ est
- a) $\frac{\pi}{3} + \pi$ b) $\frac{\pi}{3} - \pi$ c) $-\frac{\pi}{3} + \pi$

2

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

- 1) Si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha(2\pi)$ alors $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv \pi - \alpha(2\pi)$
- 2) Si A, B, C sont trois points alignés alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0(2\pi)$
- 3) La mesure principale de l'angle plat est $-\pi$
- 4) $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{99\pi}{11}(2\pi)$ alors sa mesure principale est π

3

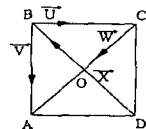
Trouver les mesures principales des angles suivants :

$$\frac{7\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}, -\frac{32\pi}{11}, 572^\circ, -251^\circ$$

4

ABCD est un carré. Donner une mesure des angles orientés suivants :

- 1) (\vec{u}, \vec{v}) ; (\vec{x}, \vec{w}) , (\vec{w}, \vec{v}) ; (\vec{u}, \vec{x}) ; $(\vec{w}, -\vec{w})$



- 2) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO})$; $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BA})$

5

1) A, B, C, D et E sont tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Démontrer que le triangle ACD est rectangle.

2) A, B, C, D, et E sont tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

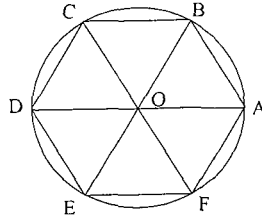
et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{5\pi}{12}[2\pi]$, démontrer que les points A, C et E sont alignés.

6

ABCDEF est l'hexagone régulier de centre O, de la figure ci contre. Déterminer en radian, la mesure principale de chacun des angles suivants :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}); (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{AF}).$$



7

ABC un triangle tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3}(2\pi)$$

1) Dessiner ABC et calculer $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

2) D un point vérifiant $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \alpha(2\pi)$ Exprimer en fonction de α les angles $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})$

8

A, B, C, D et E sont des points du plan tel que $AB = AC = 1$, $AD = 2$ et $AE = 3$.

$$\text{Sachant que } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{25\pi}{12}(2\pi); (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{119\pi}{4}(2\pi) \quad \text{et}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{85\pi}{6}(2\pi). \text{ Montrer que A, D et E sont alignés calculer DE.}$$

2) Sachant que a, b, c. sont des mesures des angles orientés

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$. Déterminer une relation entre a, b, c, pour que A, D, E soient alignés

Que peut-on dire de DE dans le cas où a, b, c vérifient la relation trouvée.

9

ABCD est un parallélogramme.

1) Montrer que $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \pi(2\pi)$

2) On suppose $(AC) \perp (CB)$. On pose $I = A * B$ et $J = B * C$

$$\text{Montrer que } (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})(2\pi)$$

10 ζ_1 et ζ_2 deux cercles sécants en A et B de centres O_1 et O_2 soit un point $M_1 \in \zeta_1 - \{A\}$ et $M_2 \in \zeta_2 - \{A\}$ tel que $(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}) \equiv (\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}) (2\pi) (1)$

- 1) On suppose que $M_1 \neq B$ et $M_2 \neq B$. Montrer que B, M_1 et M_2 sont alignés.
- 2) On suppose que $M_1 = B$ (respectivement $M_2 = B$). Montrer que la droite (BM_2) (respectivement (BM_1)) est tangente à ζ_1 (respectivement à ζ_2) en B.

11 Soit ABC un triangle rectangle en A. Notons ; H le projeté orthogonal de a sur [BC] ; I le projeté orthogonal de H sur [AB] et J le projeté orthogonal de H sur [AC] et A' le milieu [BC].

Montrer que (IJ) est perpendiculaire à (AA') .

Indication : écrire $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AJ}) + (\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AA'})$

12 Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et le point $E \in [BC]$ tel que $BA = BE$.

- 1) Construire les points B' et E' tel que ABB' et AEE' soient deux triangles équilatéraux directs.

- 2) Trouver la mesure principale des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}); (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BE}), (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EB'}) \text{ et } (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB'})$$

- 3) a) Trouver une mesure de $(\overrightarrow{EB'}, \overrightarrow{AE'})$.

b) En déduire que $(EB') \perp (AE')$ et que $BE = B'E'$.

13 ABC un triangle isocèle de sommet principal C tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$.

- 1) a) Construire ABC sachant que $AB = 4$ cm.

b) Trouver la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

- 2) On construit à l'extérieur de ABC les carrés ACDE et CDFG dans le sens direct.

a) Trouver la mesure principale de $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CD})$.

b) En déduire la nature du triangle CGD.

Calculer $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CA})$; déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG})$.

Soit Δ la médiatrice de [AB] on pose $S_{\Delta}([CG]) = [CX]$.

Montrer que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CX}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ en déduire que $[CX] = [CD]$

et que $S_{\Delta}(G) = D$.

- c) Trouver alors la mesure principale de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$?

14 Soit ζ un cercle, B et C deux points distincts de ζ et A un point

variable de distincts de B et C. Quel est le lieu géométrique décrit par H l'orthocentre du triangle ABC.

15 Soit ζ le cercle circonscrit au triangle ABC et I un point de ζ .

- 1) Montrer que les projections orthogonales a, b, c de I sur (BC), (AC) et (AB) respectivement sont alignés.
- 2) Soit la droite Δ passant par a et b : soit $Q \in \zeta$ tel que (AQ) parallèle à Δ . Montrer que I, a et Q sont alignés.

16 Deux cercles ζ et ζ' sont sécants en A et B. M un point de ζ , distinct de A et de B. Les droites (MA) et (MB) recouperont ζ' respectivement en M' et en N'. Montrer que la droite (M'N') est parallèle à la tangente en M au cercle ζ (on suppose $M' \neq A$ et $N' \neq B$)

17 Dans un plan orienté on considère un triangle ABC et trois points E, F, G appartiennent à $[AB]$; $[BC]$ et $[AC]$. ζ et ζ' désignent respectivement les cercles circonscrit aux triangles EBF et CFG.

- 1) On suppose que ζ et ζ' se coupent en f et f'. Montrer que $(\overline{AE}, \overline{AG}) \equiv (\overline{fE}, \overline{fG}) + \pi (2\pi)$
- 2) On suppose que ζ et ζ' sont tangents. Montrer en utilisant la tangente à ζ et ζ' en f que : $(\overline{AE}, \overline{AG}) \equiv (\overline{fE}, \overline{fG}) + \pi (2\pi)$.

On fera une figure pour chacune des deux questions.

18 Soit ABC un triangle équilatéral direct. ABD est un triangle équilatéral indirect.

\mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont les arcs d'extrémités A et B (A et B exclus) du cercle circonscrit à ABC, et $C \in \zeta_1$.

\mathcal{E}_3 et \mathcal{E}_4 sont les arcs d'extrémités A et B (A et B exclus) du cercle circonscrit à ABD, et $D \in \mathcal{E}_3$.

Répondre par vrais ou faux en justifiant dans chaque cas votre réponse.

- 1) \mathcal{E}_2 est l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi - \frac{\pi}{3} (2\pi)$
- 2) \mathcal{E}_3 est l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{5\pi}{3} (2\pi)$
- 3) $\mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4$ est l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3} (2\pi)$
- 4) \mathcal{E}_4 est l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{4\pi}{3} (2\pi)$

19

Soit ζ et ζ' deux cercles sécants en A et B, M et N deux points du cercle. Les droites (AM) et (BN) coupent respectivement en M' et N'. Montrer que les droites (MN) et (M'N') sont parallèles.

20

Soit ζ et ζ' deux cercles sécants en A et B, $M \in \zeta$ ($M \neq A$ et $M \neq B$). La droite (AM) recoupe le cercle ζ' en N les tangentes respectivement aux cercles ζ et ζ' en M et N se coupent en T. Montrer que $(\overline{BM}, \overline{BN}) \equiv (\overline{TM}, \overline{TN}) (2\pi)$.

21

Soient ζ et ζ' deux cercles sécants en A et B de centres respectifs O et O'

1) Soit Δ la droite qui passe par B et recoupe en M et ζ' en M'. Montrer que $(\overline{AM}, \overline{AM'}) \equiv (\overline{AO}, \overline{AO'}) + \pi (2\pi)$.

2) Soit I un point fixe de ζ et ζ' de J tel que $(\overline{AI}, \overline{AJ}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$, les droites (IM) et (JM') se coupent en P. Montrer que $(\overline{IP}, \overline{IA}) \equiv (\overline{JP}, \overline{JA}) (2\pi)$.

22

Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC tel que $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

1) Construire le point D vérifiant l'angle $(\overline{DB}, \overline{DC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et la droite $(DC) \perp (AB)$

2) Soit I le point d'intersection de la droite (AB) et (DC) et J le milieu de [BC], montrer que la droite $(IJ) \perp (AD)$

23

A, B, C et M quatre points distincts d'un cercle (ζ) tel que $A \in \overline{BC}$ et $M \in \overline{CB}$; A', B', C' sont les Projétés orthogonaux respectivement de M sur les droites (BC), (AC) et (AB).

1) a) Montrer que A', B', C', M appartiennent à une même cercle.

b) En déduire que $(\overline{B'A'}, \overline{B'M'}) \equiv (\overline{AB}, \overline{AM}) (2\pi)$.

2) a) Montrer que M, B', C', A appartiennent à un même cercle.

b) En déduire que $(\overline{B'M}, \overline{B'C'}) \equiv (\overline{AM}, \overline{AB}) (2\pi)$.

3) En déduire que A', B', C' sont alignés.

24

On considère ABCD un carré de centre O tel que $(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Soit K le milieu du segment [DC] et soit φ le cercle circonscrit

au triangle AOB.

1) a) Déterminer et construire l'ensemble $E = \{M \in P; (\overline{MC}, \overline{MD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\}$.

b) Soit I le point de E tel que $(\overline{CD}, \overline{CI}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Montrer que le triangle CKI est équilatéral. Dédire la construction de I.

2) a) Soit M un point de $\varphi \cdot \{A, O, B\}$ et $M \in \widehat{AB}$. Montrer que ;

$$(\overline{MA}, \overline{MO}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi].$$

b) Déterminer et construire l'ensemble ;

$$\varphi' = \{M \in P; (\overline{MB}, \overline{MD}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]\}$$

CORRIGES

1

1) La réponse est **b** : $(\overline{BD}, \overline{BA}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$ est $(\overline{DB}, \overline{DC}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$

d'où $(\overline{BD}, \overline{BA}) \equiv (\overline{DB}, \overline{DC}) (2\pi)$

2) La réponse est **a** : $(\vec{u}, \vec{t}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{t}) (2\pi) \equiv \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} (2\pi) \equiv 0 (2\pi)$

3) La réponse est **c** : $\frac{59\pi}{7} = \frac{56\pi}{7} + \frac{3\pi}{7} = 8\pi + \frac{3\pi}{7}$

et $\frac{3\pi}{7} \in]-\pi, \pi[$ donc $\frac{3\pi}{7}$ est sa mesure principale

4) La réponse est **c** : $(\vec{v}, -\vec{u}) \equiv (\vec{v}, \vec{u}) + \pi (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{3} + \pi (2\pi)$

2

1) Vrai : on a $(\vec{u}, -\vec{v}) \equiv \alpha (2\pi) \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \equiv \alpha (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha - \pi (2\pi)$ donc $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v}) (2\pi) \equiv -\alpha + \pi (2\pi)$

2) faux : contre exemple : $A \in [BC] \Rightarrow (\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \pi (2\pi)$

3) faux : la mesure principale appartient à $] -\pi, \pi[$ et $-\pi \notin] -\pi, \pi[$

4) Vrai : $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{99\pi}{11} (2\pi) \equiv 9\pi (2\pi) \equiv \pi (2\pi)$

3

* $\frac{7\pi}{3} \notin]-\pi, \pi[$ donc $\frac{7\pi}{3}$ n'est pas une mesure principale et on

remarque que $\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$ donc la mesure principale de $\frac{7\pi}{3}$ est $\frac{\pi}{3}$.

* $\frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$ donc la mesure principale est $-\frac{\pi}{3}$.

* $572^\circ = 720^\circ - 148^\circ = 2 \times 360^\circ - 148^\circ$ donc la mesure principale est -148°

* $-251^\circ = -360^\circ + 109^\circ$ donc la mesure principale est 109° .

* $\frac{-32\pi}{11} = \alpha + 2k\pi$ avec α est la mesure principale de $\frac{-32\pi}{11}$ et $k \in \mathbb{Z}$;

cherchons k : on sait que $-\pi < \alpha \leq \pi$

$\alpha = \frac{-32\pi}{11} - 2k\pi$ d'où $-\pi < \frac{-32\pi}{11} - 2k\pi \leq \pi$

Ou encore $\pi > \frac{32\pi}{11} + 2k\pi \geq -\pi$. Soit $-\frac{21\pi}{11} > 2k\pi \geq -\frac{43\pi}{11}$.

D'où $-\frac{21}{22} > k \geq -\frac{43}{22}$ donc $k = -1$. Ainsi $\alpha = \frac{-32\pi}{11} + 2\pi = -\frac{10\pi}{11}$.

$$\nabla 4) \left(\vec{u}, \vec{v} \right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]; \left(\vec{x}, \vec{w} \right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]; \left(\vec{w}, \vec{v} \right) = \frac{\pi}{4}[2\pi];$$

$$\left(\vec{u}, \vec{w} \right) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]; \left(\vec{u}, \vec{x} \right) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]; \left(\vec{w}, -\vec{w} \right) \equiv \pi[2\pi].$$

$$2) \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} \right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]; \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} \right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]; \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA} \right) \equiv \pi[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA} \right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]; \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO} \right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]; \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BA} \right) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$$

$$\nabla 5) 1) \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} \right) \equiv \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \right) + \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB} \right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + \frac{5\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ Donc } \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} \right) \text{ est droit par suite } (AD) \perp (AC)$$

ainsi ADC est un triangle rectangle en A.

$$2) \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE} \right) \equiv \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} \right)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{5\pi}{12} + \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + \left(-\frac{2\pi}{3} \right)[2\pi] \equiv -\pi[2\pi] \text{ donc } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AE} \text{ sont colinéaires.}$$

Par suite (AC) // (AE) donc A, C et E alignés.

$\nabla 6$ La figure est formé de 6 triangles équilatéraux et ABCDEF dans le sens direct, alors on a :

$$* \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi], \text{ comme } \frac{\pi}{3} \in]-\pi, \pi] \text{ il s'agit bien de la}$$

mesure principale de l'angle.

$$* \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB} \right) \equiv \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OA} \right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right)[2\pi] \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$$

$$\equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ donc la mesure principale est } -\frac{2\pi}{3}.$$

$$* \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} \right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO} \right) + \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AF} \right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ d'ou la mesure principale est } \frac{2\pi}{3}.$$

• Cherchons une mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right)$; (AC) est la bissectrice de l'angle

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO} \right) \text{ On déduit alors que } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \equiv \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO} \right)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{3} \right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ donc la mesure principale est } \frac{\pi}{6}.$$

*OABC est un parallélogramme

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BA} \text{ alors } \left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{AF} \right) \equiv \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AF} \right)[2\pi]$$

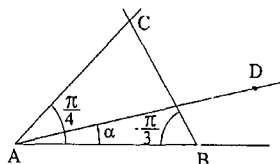
$$\equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) [2\pi] \equiv \pi + \frac{2\pi}{3} [2\pi] \equiv \frac{5\pi}{3} [2\pi]$$

or $\frac{5\pi}{3} \notin]-\pi, \pi]$ n'est pas la mesure principale comme $\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

par suite la mesure principale est $-\frac{\pi}{3}$

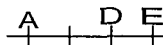


$$\begin{aligned} 1) (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) &\equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) [2\pi] \\ &\equiv \pi + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) [2\pi] \\ &\equiv \pi - \frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) (2\pi) \\ &\equiv \frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) (2\pi) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2) (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) &\equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{4} + \alpha (2\pi) \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) &\equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) (2\pi) \\ &\equiv \frac{\pi}{3} + \pi + \alpha (2\pi) \equiv \frac{4\pi}{3} + \alpha (2\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) 1) (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) &\equiv (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) (2\pi) \\ &\equiv \frac{-119\pi}{4} + \left(\frac{-25\pi}{12}\right) + \left(\frac{-85\pi}{6}\right) (2\pi) \equiv \left(\frac{\pi}{4} - 30\pi\right) + \left(-2\pi - \frac{\pi}{12}\right) + \left(-14\pi - \frac{\pi}{6}\right) (2\pi) \\ &\equiv 0 (2\pi) \text{ donc } \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{AE} \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$



et de même sens par suite A, D et E sont alignés :

$$DE = AE - AD = 1$$

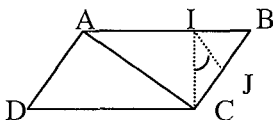
$$\begin{aligned} 2) \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{AE} \text{ sont colinéaires} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \equiv 0 (\pi) \\ &\Leftrightarrow -b - a + c \equiv 0 (\pi) \Leftrightarrow a + b \equiv c (\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv 0 (\pi) \end{aligned}$$

1^{er} cas : $a + b \equiv c [2\pi]$ dans ce cas $[AD]$ et $[AE]$ sont confondues d'ou $E \in [AD]$ ou encore $DE = AE - AD = 1$.

2^{ème} cas : $a + b \equiv c + \pi [2\pi]$ dans ce cas $[AD]$ et $[AE]$ sont opposés alors $DE = AE + AD = 3 + 2 = 5$.



$$\begin{aligned} 1) (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) &\equiv (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}) [2\pi] \text{ or } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}) [2\pi] \equiv \pi [2\pi] \end{aligned}$$



2) Dans le triangle ABC on a : $I = A * B$ et $J = B * C$ alors $\overline{IJ} = \frac{1}{2} \overline{AC}$

$$(\overline{IJ}, \overline{IC}) = \left(\frac{1}{2} \overline{AC}, \overline{IC}\right) (2\pi) \equiv (\overline{AC}, \overline{IC}) (2\pi) \equiv (\overline{CA}, \overline{CI}) (2\pi)$$

Comme ABC est rectangle en C et $I = A * B$ alors

$IA = IB = IC$ donc IAC est isocèle de sommet principal I d'où

$$(\overline{AI}, \overline{AC}) \equiv (\overline{CA}, \overline{CI}) (2\pi) \text{ Or } \overline{AI} = \frac{1}{2} \overline{AB} \text{ . Ainsi}$$

$$(\overline{IJ}, \overline{IC}) \equiv (\overline{CA}, \overline{CI}) [2\pi] \equiv (\overline{AI}, \overline{AC}) [2\pi] \equiv \left(\frac{1}{2} \overline{AB}, \overline{AC}\right) [2\pi] \equiv (\overline{AB}, \overline{AC}) [2\pi]$$

10

1) on a :

$$(\overline{AM_1}, \overline{AM_2}) \equiv (\overline{AM_1}, \overline{BM_1}) + (\overline{BM_1}, \overline{BM_2}) + (\overline{BM_2}, \overline{AM_2}) (2\pi)$$

$$\equiv (\overline{M_1A}, \overline{M_1B}) + (\overline{BM_1}, \overline{BM_2}) + (\overline{M_2B}, \overline{M_2A}) (2\pi) \quad (2)$$

$$\text{Et } (\overline{AO_1}, \overline{AO_2}) \equiv (\overline{AO_1}, \overline{O_2O_1}) + (\overline{O_2O_1}, \overline{AO_2}) (2\pi)$$

$$\equiv (\overline{AO_1}, \overline{O_2O_1}) + (\overline{O_2O_1}, \overline{O_1O_2}) + (\overline{O_1O_2}, \overline{AO_2}) (2\pi)$$

$$\equiv (\overline{AO_1}, \overline{O_2O_1}) + \pi + (\overline{O_1O_2}, \overline{AO_2}) (2\pi) \quad (3) \text{ Or}$$

$$(\overline{O_1A}, \overline{O_1O_2}) \equiv \frac{1}{2} (\overline{O_1A}, \overline{O_1B}) \equiv (\overline{M_1A}, \overline{M_1B}) (2\pi) \quad (4)$$

la mesure de l'angle inscrit est égal à $\frac{1}{2}$ l'angle au centre.

$$(\overline{O_2O_1}, \overline{O_2A}) \equiv \frac{1}{2} (\overline{O_2B}, \overline{O_2A}) \equiv (\overline{M_2B}, \overline{M_2A}) (2\pi) \quad (5)$$

$$\text{D'où } (\overline{AM_1}, \overline{AM_2}) \equiv (\overline{O_1A}, \overline{O_1O_2}) + (\overline{BM_1}, \overline{BM_2}) + (\overline{O_2O_1}, \overline{O_2A}) (2\pi)$$

$$\equiv (\overline{O_1A}, \overline{O_2A}) + (\overline{BM_1}, \overline{BM_2}) (2\pi) \equiv (\overline{AO_1}, \overline{AO_2}) + (\overline{BM_1}, \overline{BM_2}) (2\pi)$$

$$\text{Or } (\overline{AM_1}, \overline{AM_2}) \equiv (\overline{AO_1}, \overline{AO_2}) (2\pi)$$

$$\text{Donc } (\overline{BM_1}, \overline{BM_2}) \equiv 0 (2\pi)$$

par suite B, M₁, M₂ sont alignés.

2) M₁ = B alors la relation (1) s'écrit :

$$(\overline{AB}, \overline{AM_2}) \equiv (\overline{AO_1}, \overline{AO_2}) (2\pi)$$

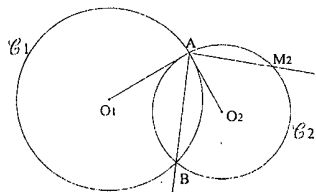
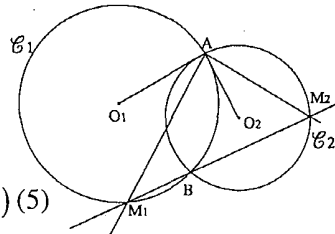
$$\text{La relation (2) donne : } (\overline{AB}, \overline{AM_1}) \equiv (\overline{AB}, \overline{BM_2}) + (\overline{BM_2}, \overline{AM_2}) (2\pi)$$

$$\equiv (\overline{BA}, \overline{BM_2}) + (\overline{M_2B}, \overline{M_2A}) (2\pi)$$

Soit M' ≠ B, M' est le 2^{ème} point d'intersection de

ζ₂ avec la tangente à ζ₁ en B

$$\text{La relation (4) s'écrit : } (\overline{O_1A}, \overline{O_1O_2}) \equiv (\overline{BA}, \overline{BM'}) (2\pi)$$



Et (5) s'écrit : $(\overrightarrow{O_2 O_1}, \overrightarrow{O_2 A}) \equiv (\overrightarrow{M_2 B}, \overrightarrow{M_2 A}) (2\pi)$.

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM_2}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM_2}) - (\overrightarrow{M_2 B}, \overrightarrow{M_2 A}) (2\pi)$$

$$\equiv (\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}) - (\overrightarrow{O_2 O_1}, \overrightarrow{O_2 A}) (2\pi)$$

$$\equiv (\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{O_2 O_1}) (2\pi) \equiv (\overrightarrow{O_1 A}, \overrightarrow{O_1 O_2}) (\pi) \equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM'}) (\pi)$$

D'où $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM_2}) - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 (2\pi)$ Par suite $(\overrightarrow{BM'} , \overrightarrow{BM_2}) \equiv 0 (2\pi)$

d'où

B, M' et M₂ sont alignées. On conclut que (BM₂) est la tangente à ζ en B.

Même démonstration si l'on pose M₂ = B.

11

*ABC rectangle en A

(HJ) ⊥ (AC) et (HI) ⊥ (AB) donc JHIA est un rectangle

$$(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AA'}) \equiv (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AJ}) + (\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AA'})$$

$$2 (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AA'}) \equiv 2 (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IA}) + 2 (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AJ}) + 2 (\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AA'})$$

$$\text{or } 2 (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AJ}) = \pi \text{ et } (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IA}) \equiv (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AH}) \text{ car AIHJ}$$

est un rectangle. ou encore $2 (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IA}) = 2 (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AH})$

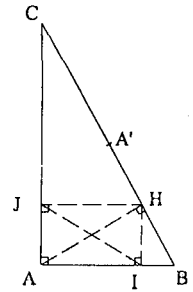
Par suite : $2 (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AA'}) \equiv \pi + \pi + 2 (\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AA'}) [2\pi] \equiv 2 (\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AA'}) [2\pi]$.

$$\equiv 2 (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \text{ car ACA' isocèle.} \equiv -2 \left(\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}) \right) \text{ car AHC est rectangle.}$$

$$\text{D'où } 2 (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AA'}) \equiv 2 (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) - \pi + 2 (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}) + \pi [2\pi]$$

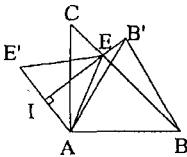
$$\equiv 2 (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi] \equiv \pi [2\pi] \text{ ou encore } (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AA'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On conclut que (IJ) ⊥ (AA').



12

1)



2) ABC est rectangle et isocèle en A donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{4} (2\pi)$

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv \frac{1}{2} \left[\pi - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \right] (2\pi) \text{ Car BA = BE où ABE isocèle}$$

$$\equiv \frac{3\pi}{8} (2\pi) \text{ or } \frac{3\pi}{8} \in]-\pi, \pi] \text{ donc c'est la mesure principale.}$$

$$\text{donc } S_{\Delta}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CX}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CG})$$

$$\text{d'ou } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CX}) \equiv -(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CG})(2\pi) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\text{donc } (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CX}) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(2\pi) \text{ et par suite}$$

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CX}) \equiv 0(2\pi) \text{ donc } [CD] = [CX].$$

D'ou Δ est la bissectrice du secteur $[\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CD}]$ or DCG est équilatéral donc $S_{\Delta}(G) = D$.

$$\text{c) } S_{\Delta}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) \text{ alors } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \equiv -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG})(2\pi)$$

$$\text{et par suite } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi].$$

14

On a $(HC) \perp (AB)$ et $(AH) \perp (BC)$

$$\text{alors } (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{d'ou } (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) \equiv$$

$$(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HA}) (2\pi)$$

$$(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + k\pi$$

Considérons α la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

donc $(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \alpha + k\pi$ alors l'ensemble des points H est le cercle ζ'

privé de A' et C' indiqués sur la figure $[(\overrightarrow{CT}, \overrightarrow{CA}) \equiv \alpha(2\pi)]$.

Dans le cas où $H = B$ ou $H = C$ le cercle $\zeta' - \{A', C'\} = \zeta - \{A, C\}$.

15

Les points I, b, A, c sont situés sur le cercle de diamètre $[IA]$

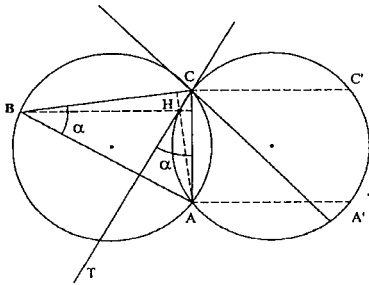
car IbA et IcA sont deux triangles rectangles d'hypoténuse $[IA]$.

$$\text{Alors } (\overrightarrow{bA}, \overrightarrow{bc}) \equiv (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{Ic}) \equiv (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{Ia}) + (\overrightarrow{Ia}, \overrightarrow{Ic}) (2\pi).$$

* Les triangles IaC et IbC sont rectangles d'hypoténuse $[IC]$. Alors

les points I, C, a, b sont situés sur le cercle de diamètre $[IC]$.

$$\text{Alors } (\overrightarrow{bC}, \overrightarrow{ba}) \equiv (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{Ia}) \equiv (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{Ia}) (2\pi).$$



* de même I, a, c, B sont situés sur le cercle de diamètre [IB]. Alors

$$(\overline{Ia}, \overline{Ic}) = (\overline{Ba}, \overline{Bc}) + k\pi = (\overline{BC}, \overline{BA}) + k\pi .$$

$$(\overline{bA}, \overline{bc}) = (\overline{IA}, \overline{Ia}) + (\overline{BC}, \overline{BA}) + k\pi$$

$$(\overline{bC}, \overline{ba}) = (\overline{IC}, \overline{Ia}) + (\overline{IA}, \overline{Ia}) + k\pi$$

* I ∈ ζ et A, B, C appartiennent à ζ.

$$\text{Alors } (\overline{IC}, \overline{IA}) \equiv (\overline{BC}, \overline{BA}) + \pi (\pi)$$

$$\text{comme : } (\overline{bA}, \overline{bc}) \equiv (\overline{bC}, \overline{bc}) + \pi (2\pi).$$

$$\text{D'où } \begin{cases} (\overline{bC}, \overline{bc}) = (\overline{IA}, \overline{Ia}) + (\overline{BC}, \overline{BA}) + k\pi & (1) \\ (\overline{bC}, \overline{ba}) = (\overline{BC}, \overline{BA}) + (\overline{IA}, \overline{Ia}) + k\pi & (2) \end{cases}$$

(1) - (2) donne $(\overline{ba}, \overline{bc}) = k_1\pi, k_1 \in Z$ donc a, b et c sont alignés.

2) On sait que I, a, c, B sont situés sur le cercle de diamètre [IC].

$$\text{Alors } (\overline{ab}, \overline{aI}) \equiv (\overline{Cb}, \overline{CI}) (2\pi).$$

$$Q \in \zeta \text{ donc } (\overline{QA}, \overline{QI}) \equiv (\overline{CA}, \overline{CI}) (2\pi) \equiv (\overline{Cb}, \overline{CI}) (2\pi).$$

Donc $(\overline{QA}, \overline{QI}) \equiv (\overline{ab}, \overline{aI}) (2\pi)$ (angles correspondants) donc $(QI) \parallel (aI)$

D'où Q, a, I sont alignés.

16 (MT) est la tangente à ζ en M.

$$(\overline{M'N'}, \overline{MT}) \equiv (\overline{M'N'}, \overline{M'M}) + (\overline{M'M}, \overline{MT}) (2\pi)$$

$$\equiv (\overline{M'N'}, \overline{M'A}) + (\overline{AM}, \overline{MT}) (2\pi)$$

$$\text{car } (\overline{M'M}) = (\overline{MA}) = (\overline{M'A})$$

$$\text{or } (\overline{M'N'}, \overline{M'A}) \equiv (\overline{BN'}, \overline{BA}) + \pi (2\pi)$$

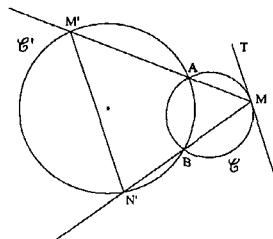
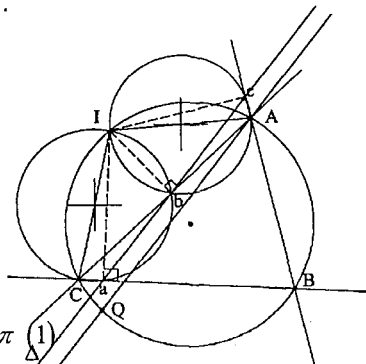
car A, B, M', N' appartiennent à ζ

$$\text{et } (\overline{BN'}, \overline{BA}) \equiv (\overline{BM}, \overline{BA}) + \pi (2\pi).$$

$$\text{Donc } (\overline{M'N'}, \overline{MT}) \equiv (\overline{BM}, \overline{BA}) + (\overline{MA}, \overline{MT}) + \pi (2\pi)$$

$$\text{Or } (\overline{MA}, \overline{MT}) \equiv (\overline{BA}, \overline{BM}) (2\pi) \text{ car } (MT) \text{ tangente à } \zeta \text{ en } M.$$

$$\text{Par suite } (\overline{M'N'}, \overline{MT}) \equiv \pi (2\pi) \text{ d'où } (M'N') \parallel (MT).$$



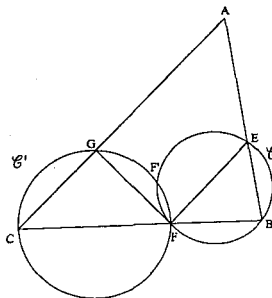
17

1) (AG) = (GC) = (AC). Et (EA) = (AB) = (EB)

$$\begin{aligned} \text{Alors } (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) &\equiv (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{GC}) (2\pi) \\ &\equiv (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{GC}) (2\pi) \\ &\equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{GC}) (2\pi) \\ &\equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}) + (\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CG}) + \pi (2\pi) \end{aligned}$$

comme B, E, F et F' sont sur ζ alors

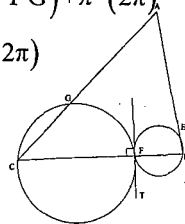
$$(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}) \equiv (\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FF}) + \pi (2\pi)$$



et C, G, F et F' sont sur ζ' alors $(\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CG}) \equiv (\overrightarrow{FF'}, \overrightarrow{FG}) + \pi (2\pi)$

Par suite $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) \equiv (\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FF}) + (\overrightarrow{FF'}, \overrightarrow{FG}) + \pi (2\pi)$

$$\equiv (\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}) + \pi (2\pi).$$



2) $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) \equiv (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{GC}) (2\pi)$

$$\begin{aligned} &\equiv (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{BF}) + (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{GC}) (2\pi) \equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}) + (\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{GC}) + \pi (2\pi) \\ &\equiv (\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FT}) + (\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CG}) (2\pi) \equiv (\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FT}) + (\overrightarrow{FT}, \overrightarrow{FG}) + \pi (2\pi) \equiv (\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}) + \pi (2\pi) \end{aligned}$$

18/1) Faux :

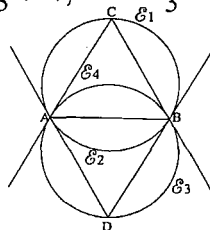
$$E_2 = \left\{ M \in P \text{ telque } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi + \frac{\pi}{3} (2\pi) \right\} \text{ et } \pi + \frac{\pi}{3} \neq \pi - \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

2) Vrai : $\frac{5\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$

alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$

or $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$ et $D \in \mathcal{E}_3$

d'où l'ensemble recherché est \mathcal{E}_3 .



3) Vrai : $\mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4 = \left\{ M \in P / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) (2\pi) \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \right\}$

or $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$ donc c'est le cercle circonscrit à ABD prive de A, B

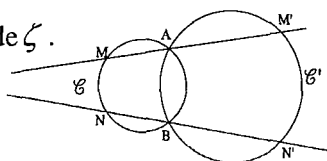
4) Vrai : On a : $\mathcal{E}_4 = \left\{ M \in P / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \right\}$ or $\frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{4\pi}{3} (2\pi)$

19

On sait que M, N, A et B sont 4 points de ζ .

Alors $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA}) \equiv (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}) + \pi (2\pi)$

et que A, B, M' et N' sont 4 points de ζ' .



$$\text{alors } (\overline{M'A}, \overline{M'N'}) \equiv (\overline{BA}, \overline{BN'}) + \pi(2\pi)$$

$$\begin{aligned} * (\overline{MN}, \overline{M'N'}) &\equiv (\overline{MN}, \overline{MA}) + (\overline{MA}, \overline{M'N'}) \quad (2\pi) \\ &\equiv (\overline{BN}, \overline{BA}) + \pi + (\overline{M'A}, \overline{M'N'}) + \pi(2\pi) \text{ car } (MA) = (M'A) \\ &\equiv (\overline{BN}, \overline{BA}) + (\overline{BA}, \overline{BN'}) + \pi(2\pi) \\ &\equiv (\overline{BN}, \overline{BN'}) + \pi(2\pi) \equiv 0 \text{ car } (BN) = (BN') \end{aligned}$$

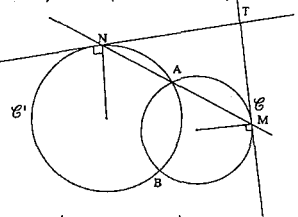
$\equiv 0(2\pi)$ donc \overrightarrow{MN} et $\overrightarrow{M'N'}$ sont colinéaires par suite $(MN) \parallel (N'M')$.



(MT) est la tangente à ζ en M alors $(\overline{BM}, \overline{BA}) \equiv (\overline{MT}, \overline{MA}) \quad (2\pi)$

$$\text{De même } (\overline{BA}, \overline{BN'}) \equiv (\overline{NA}, \overline{NT'}) \quad (2\pi)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } (\overline{BM}, \overline{BN'}) &\equiv (\overline{BM}, \overline{BA}) + (\overline{BA}, \overline{BN'}) \quad (2\pi) \\ &\equiv (\overline{MT}, \overline{MA}) + (\overline{NA}, \overline{NT'}) \quad (2\pi) \text{ or } N \in (MA) \end{aligned}$$



$$\equiv (\overline{MT}, \overline{MN}) + (\overline{MN}, \overline{NT'}) \quad (2\pi) \equiv (\overline{MT}, \overline{NT'}) \quad (2\pi) \equiv (\overline{TM}, \overline{TN'}) \quad (2\pi)$$



$$1) (\overline{AM}, \overline{AM'}) \equiv (\overline{AM}, \overline{MM'}) + (\overline{MM'}, \overline{AM'}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv (\overline{MA}, \overline{MM'}) + (\overline{MM'}, \overline{M'A}) \quad (2\pi) \quad (1). \text{ Comme :}$$

$$2 (\overline{MA}, \overline{MB}) \equiv (\overline{OA}, \overline{OB}) \quad (2\pi)$$

$$\text{Et } 2 (\overline{M'B}, \overline{M'A}) \equiv (\overline{O'B}, \overline{O'A}) \quad (2\pi) \text{ Donc (1) s'écrit :}$$

$$(\overline{AM}, \overline{AM'}) \equiv \frac{1}{2} (\overline{OA}, \overline{OB}) + \frac{1}{2} (\overline{O'A}, \overline{O'B}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - (\overline{AB}, \overline{AO}) + \frac{\pi}{2} - (\overline{AO'}, \overline{AB}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv (\overline{AO}, \overline{AB}) + (\overline{AB}, \overline{AO'}) + \pi(2\pi)$$

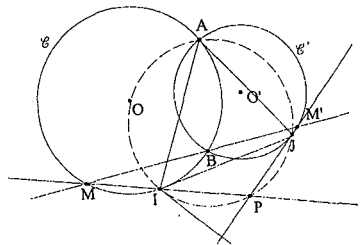
$$\equiv (\overline{AO}, \overline{AO'}) + \pi(2\pi)$$

$$2) (\overline{IP}, \overline{IA}) \equiv (\overline{IM}, \overline{IA}) + \pi(2\pi) \quad (M \in (IP))$$

$$\equiv (\overline{BM}, \overline{BA}) \quad (2\pi) \quad (I, B, M \text{ et } A \in \zeta)$$

$$\equiv (\overline{BM'}, \overline{BA}) + \pi(2\pi) \text{ or } B, M', A \text{ et } J \in \zeta$$

$$\equiv (\overline{JM'}, \overline{JA}) + \pi(2\pi) \equiv (\overline{JP}, \overline{JA}) \quad (2\pi)$$



22

$$1) (\overline{DB}, \overline{DC}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \Rightarrow D \in \overrightarrow{CB}$$

$(DC) \perp (AB) \Rightarrow D \in$ à la $\perp (AB)$ menée de C

$$2) (\overline{AD}, \overline{IJ}) \equiv (\overline{AD}, \overline{DC}) + (\overline{DC}, \overline{IJ})(2\pi) \text{ or } I \in [DC]$$

$$\equiv (\overline{DA}, \overline{DC}) + \pi + (\overline{IC}, \overline{IJ})(2\pi)$$

$$\text{Or } (\overline{DA}, \overline{DC}) \equiv (\overline{BA}, \overline{BC})(2\pi)$$

(inscrits ζ et interceptent le même arc)

et BIC rectangle en I et J le milieu de [BC]

alors JC=IJ=JB d'où

$$(\overline{IC}, \overline{IJ}) \equiv (\overline{CJ}, \overline{CI})(2\pi)$$

donc

$$(\overline{AD}, \overline{IJ}) \equiv (\overline{BA}, \overline{BC}) + \pi + (\overline{CJ}, \overline{CI})(2\pi)$$

$$\equiv (\overline{BI}, \overline{BC}) + \pi + (\overline{CB}, \overline{CI})(2\pi)$$

$$\equiv (\overline{BI}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{CI})(2\pi)$$

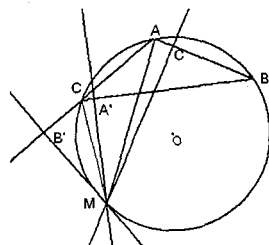
$$\equiv (\overline{BI}, \overline{CI})(2\pi) \equiv (\overline{IB}, \overline{IC})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \text{ ou encore } (AD) \perp (IJ)$$

23

1) a) A'MC et B'MC sont deux triangles rectangles de même hypoténuse [MC]

$$\Rightarrow A' \in \zeta_{[MC]} \text{ et } B' \in \zeta_{[MC]} \Rightarrow A', B', M, C \in \zeta_{[MC]}$$

on dit que A', B', M et C sont 4 points cocycliques



$$b) A', B', M \text{ et } C \text{ sont situés sur } \zeta_{[MC]} \Rightarrow (\overline{B'A'}, \overline{B'M}) \equiv (\overline{CA'}, \overline{CM})(2\pi)$$

(angles inscrits interceptent le même arc $\widehat{MA'}$)

$$\Rightarrow (\overline{B'A'}, \overline{B'M}) \equiv (\overline{CB}, \overline{CM})(2\pi) \text{ } A' \in [CB]$$

$$\equiv (\overline{AB}, \overline{AM})(2\pi) \text{ } (A, B, M, C \in \zeta)$$

2) a) MAB' et MAC' sont deux triangles rectangles

de même hypoténuse [MA] $\Rightarrow B', C' \in \zeta_{[AM]}$ d'ou. A, M, B', C' $\in \zeta_{[AM]}$

$$b) (\overline{B'M}, \overline{B'C'}) \equiv (\overline{AM}, \overline{AC'})(2\pi) \equiv (\overline{AM}, \overline{AB})(2\pi) \text{ car } C' \in [AB]$$

(inscrits dans $\zeta_{[AM]}$ et interceptent le même arc $\overline{MC'}$)

3) On a $(\overline{B'A'}, \overline{B'M}) \equiv (\overline{AB}, \overline{AM}) (2\pi)$ et $(\overline{B'M}, \overline{B'C'}) \equiv (\overline{AM}, \overline{AB}) (2\pi)$

On additionne membre à membre on obtient :

$$(\overline{B'A'}, \overline{B'C'}) \equiv (\overline{AB}, \overline{AB}) (2\pi) \equiv 0 (2\pi) \Rightarrow B', A' \text{ et } C' \text{ sont alignés}$$

24

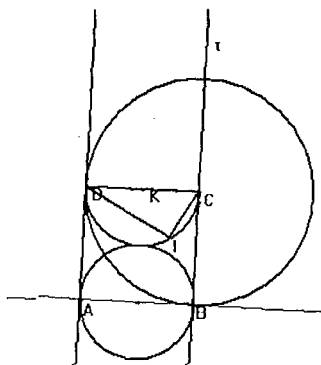
1) a) $E = \{M \in P, (\overline{MC}, \overline{MD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)\}$

E est l'arc capable $\overline{DC} \rightarrow \{C, D\}$ du cercle capable situé dans le demi-plan de frontière (CD) ne contenant pas

[CT] tel que $(\overline{CT}, \overline{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

d'où $E = \overline{DC} \rightarrow \{C, D\}$ passant par

O $\Rightarrow E =$ demi cercle passant par O $\zeta_{[DC]}$



b) $I \in E, (\overline{CD}, \overline{CI}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ (1). *K est le centre de E $\Rightarrow KI=KC$ (2)

(1) et (2) \Rightarrow KIC est équilatéral donc $\begin{cases} KC=KI \\ (\overline{KC}, \overline{KI}) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \Leftrightarrow r_{(K, \frac{\pi}{3})} (c) = I \end{cases}$

2) a) $M \in \zeta - \{O, A, B\}$ et $(\overline{MA}, \overline{MO}) \equiv (\overline{BA}, \overline{BO}) (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi)$

b) $\zeta' = \{M \in P / (\overline{MB}, \overline{MD}) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi)\}$

c'est l'arc $\overline{DB} \rightarrow$ capable privé de $\{B, D\}$ tel que

$$(\overline{BT'}, \overline{BD}) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi) \text{ et on a } (\overline{BA}, \overline{BD}) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi)$$

Le centre du cercle de l'arc \in médiatrice $[BD] \cap (BC) = \{C\}$ du rayon CB.

Chapitre III

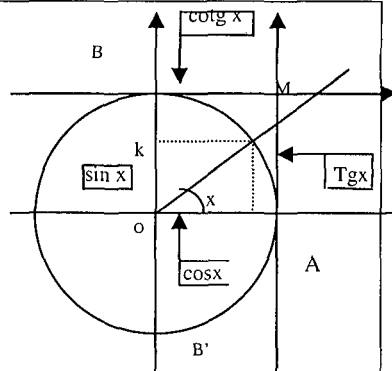
Trigonométrie

■ Définitions :

ζ désigne un cercle Trigonométrique de centre O , $(O, \overline{OA}, \overline{OB})$, un repère orthonormé direct.

Soit x un réel et M un point de ζ , tel que $(\overline{OA}, \overline{OM}) \equiv x(2\pi)$. On appelle :

- $\cos x$, l'abscisse de M donc $\cos x = \overline{OH}$.
- $\sin x$, l'ordonnée de M donc $\sin x = \overline{OK}$
- $\operatorname{tg} x$, le quotient de $\sin x$ par $\cos x$ donc $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \overline{AL}$.
- $\operatorname{cotg} x$, le quotient de $\cos x$ par $\sin x$ donc $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \overline{BN}$



■ Valeurs remarquables :

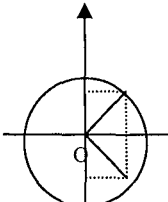
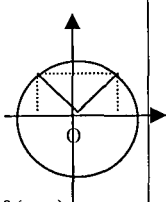
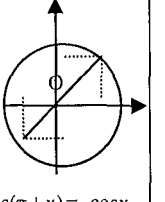
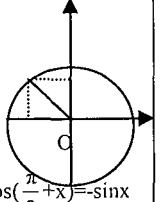
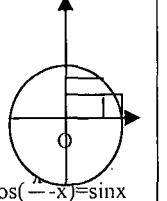
En degrés	0	30	45	60	90
En radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

■ Relations entre les fonctions trigonométriques :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$; $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.
- Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\text{tg}(x + k\pi) = \text{tg} x$.
- Pour tout $x \neq k\pi$; $\text{cotg}(x + k\pi) = \text{cotg} x$.

■ **Formules des « Angles associés » :**

				
$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\text{tg}(-x) = -\text{tg} x$ $\text{cotg}(-x) = -\text{cotg} x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\text{tg}(\pi - x) = -\text{tg} x$ $\text{cotg}(\pi - x) = -\text{cotg} x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\text{tg}(\pi + x) = \text{tg} x$ $\text{cotg}(\pi + x) = \text{cotg} x$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ $\text{tg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\text{cotg} x$	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ $\text{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{cotg} x$ $\text{cotg}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{tg} x$

Remarque: La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

■ **Les formules de transformation:**

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$	

a et b réels tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, pour tout x, on a :

$$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi) \text{ avec } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \cos \varphi = \frac{a}{r} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{r}.$$

■ **Les coordonnées polaires :**

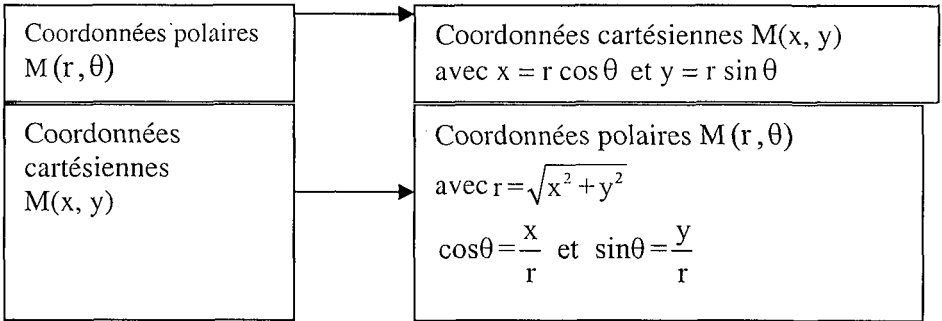
• **Définition :**

$(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé direct. Tout point M de coordonnées cartésiennes

(x, y) peut être repère par l'angle $\theta = (\vec{i}, \overline{OM})$ et $OM = r$

Le couple (r, θ) est appelé les coordonnées polaires de M.

• **Comment passer des coordonnées polaires aux cartésiennes et réciproquement ?**

Exemples :

- 1) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point M ayant pour coordonnées polaires $\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$.
- 2) Déterminer les coordonnées polaires du point W ayant pour coordonnées cartésiennes $(\sqrt{3}, -3)$.

Solution : 1) $r = 3$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$ alors $x = r \cos \theta = 3 \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$

et $y = r \sin \theta = 3 \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{3}{2}$

d'où les coordonnées cartésiennes de M sont $\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2) $x = \sqrt{3}$ et $y = -3$ alors $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}$

$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{3}$

ainsi les coordonnées polaires de M sont $\left(2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$.

• **Propriété :**

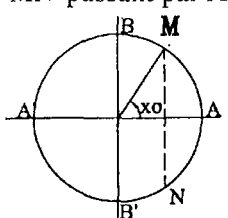
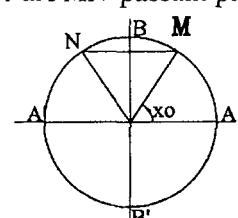
$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls dans la base (\vec{i}, \vec{j}) direct

Alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{xx' - yy'}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

■ **Equations trigonométriques :**

Equations	$\cos x = a$	$\sin x = a$	$\operatorname{tg} x = a$
Si $a \notin [-1, 1]$	Pas de solutions		des solutions
$a \in [-1, 1]$	Si x_0 est une solution particulière de l'équation $\cos x = a$ $\sin x = a$ $\operatorname{tg} x = a$		
Cela revient à résoudre les équations			
$\cos x = \cos x_0$		$\sin x = \sin x_0$	$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$
Donc les solutions sont de la forme			
$x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = -x_0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = \pi - x_0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$x = x_0 + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	

■ **Inéquations trigonométriques :**

Inéquations	$\cos x \geq a$	$\sin x \geq a$
Si $a \in [-1, 1]$	Soit x_0 un réel tel que $\cos x_0 = a$ ou $\sin x_0 = a$ cela revient à résoudre les inéquations :	
	<p>$\cos x \geq \cos x_0$ Soient N et M les points d'abscisse a. Les images des solutions sont situées sur l'arc \widehat{MN} passant par A</p> 	<p>$\sin x \geq \sin x_0$ Soient M et N. Les points d'ordonnées a. Les images des solutions sont situées sur l'arc \widehat{MN} passant par B.</p> 
Donc les solutions sont de la forme :		
$-x_0 + 2k\pi \leq x \leq x_0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$x_0 + 2k\pi \leq x \leq \pi - x_0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	

Même raisonnement pour $\cos x \leq a$, $\sin x \leq a$ et $\operatorname{tg} x \leq a$.

ENONCES

1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos x + \sin x$

- a) Montrer que f est bornée
- b) Montrer que $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- c) Trouver alors un meilleur encadrement de $f(x)$.

2

Montrer que : $\frac{\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}} = \sqrt{2} + 1$; $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12} = 14$.

3

On donne $\cos a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ avec $0 < a < \pi$.

Calculer $\cos 2a$ et en déduire la valeur a .

4

Exprimer en fonction de $\cos 2x$:

$$5\cos^2 x - 3\sin^2 x ; 2\cos^2 x + 3\sin^2 x - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

Ecrire plus simplement : $\cos^3 x + \cos^2 x \sin x + \cos x \sin^2 x + \sin^3 x$

5

On donne $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ et $g(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

- a) Prouver que $f \neq g$
- b) Prouver que les restrictions de f et g sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ sont égales.

6

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $P = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x$.

- 1) a) Montrer que quelque soit $x \in \mathbb{R}$ on a ; $P \cdot \sin x = \frac{1}{16} \sin(16x)$
 b) En déduire la valeur de : $Q = \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \cos \frac{8\pi}{5}$.
- 2) a) Montrer que $4 \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = 1$.
 b) En déduire que $2 \left(\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \right) = 1$.
 c) En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$ et de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

7

QCM

Indiquer la bonne réponse avec justification

- 1) $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ est égal à : a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$

- 2) $\cos \frac{99\pi}{8}$ est égale à : a $\sin \frac{3\pi}{8}$ b $\sin \frac{\pi}{8}$ c $\cos \frac{\pi}{8}$
- 3) $\cos \frac{23\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$ est égal à : a 1 b $2 \cos \frac{\pi}{12}$ c 0
- 4) $\cos(2x + \pi) + \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ est égal à : a $2 \cos 2x$ b $-2 \cos 2x$ c $\cos \frac{3\pi}{2}$

8 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fautive :

- a) $\sin \frac{4\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{6}$ b) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$
- c) $\cos(3a) = \cos a \cdot \cos 2a$ d) $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

9

Indiquer la bonne réponse par a, b ou c avec justification :

- 1) Dans le repère polaire (o, \vec{i}) . A et B sont pour coordonnées polaires $(2, \frac{\pi}{6})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3})$. une mesure de l'angle orienté $(\overline{OA}, \overline{OB})$ est :
 a $\frac{\pi}{2}$ b $\frac{5\pi}{6}$ c $\frac{5\pi}{2}$
- 2) Dans le repère (o, \vec{i}, \vec{j}) le point A $(-2\sqrt{3}, 2)$ un couple de coordonnées de A dans le repère (o, \vec{i}) est :
 a $(2, \frac{5\pi}{6})$ b $(4, \frac{5\pi}{6})$ c $(4, -\frac{\pi}{6})$

10 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fautive justifier votre réponse.

- 1) Les points A $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3})$; B $(5, \frac{7\pi}{3})$; C $(2, \frac{-2\pi}{3})$ repères par leurs coordonnées polaires, sont alignées.
- 2) Dans le repère (O, \overline{OI}) les points A et B de coordonnées polaires $(5, \frac{\pi}{4})$ et $(5, \frac{7\pi}{4})$ sont symétriques par rapport à (OI) .

11

Soit ζ le cercle trigonométrique de centre O et I un point du cercle ζ dans le repère polaire (O, \overline{OI}) placer les points A et B de

coordonnées polaires respectives $(3, \frac{-\pi}{4})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{-2\pi}{3})$.

12 Représenter dans un repère polaire, l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées polaires (r, θ) , Vérifient :

$$a) \begin{cases} r=2 \\ \theta \in [\frac{-\pi}{2}, 0] \end{cases} \quad b) \begin{cases} \theta = \frac{3\pi}{4} \\ r \in]0, +\infty[\end{cases}$$

13 $(O, \overline{OI}, \overline{OJ})$ un R.O.N.D.

a) Placer les points A et B de coordonnées polaires respectives

$$(1, \frac{-\pi}{8}) \text{ et } (\sqrt{3}, \frac{3\pi}{8}).$$

b) Calculer la mesure principale de $(\overline{OA}, \overline{OB})$.

c) Calculer la longueur AB.

d) Calculer $\cos \hat{OBA}$ et $\sin \hat{OBA}$. En déduire \hat{OBA} .

14 (O, \vec{i}, \vec{j}) R.O.N.D on considère les points

$$A(0, \frac{2}{3}); B(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-1}{3}); C(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-1}{3})$$

a) Calculer les coordonnées polaires de ces trois points dans le repère polaire (o, \vec{i}) .

b) Démontrer que ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre O dont on précisera la rayon.

15 (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé direct

1) Soit A un point de coordonnées polaires $(3, \frac{\pi}{3})$.

a) Déterminer les coordonnées polaires de B le milieu du segment [OA].

b) Déterminer les coordonnées polaires du point C tel que le triangle direct OAC soit rectangle et isocèle en C.

2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M de coordonnées

$$\text{polaires } (r, \theta) \text{ qui vérifient : a) } \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad b) \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

16 (O, \vec{i}, \vec{j}) un R.O.N.D. Soit ζ le cercle de centre W passant par O

Soit (r, θ) les coordonnées polaires de W. Montrer que tout M du cercle ζ dont les coordonnées polaires sont (k, α) . Vérifient $2r \cos(\alpha - \theta) = k$.

17

- 1) Montrer que quelque soit $x \in \mathbb{R}$; $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
- 2) Calculer alors $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{11\pi}{21} + \cos \frac{17\pi}{21}$
- 3) Montrer que $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ est constante sur \mathbb{R} .

18

- 1) Soit $A(x) = 1 - \cos 2x + \sin 2x$.
- a) Calculer $A\left(\frac{5\pi}{8}\right)$; $A\left(\frac{49\pi}{6}\right)$.
- b) Montrer que quelque soit $x \in \mathbb{R}$; $A(x) = 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
- c) En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- 2) Soit $B(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
- Montrer que quelque soit $x \in \mathbb{R}$; $B(x) = 1 + \sin 2x$.
- 3) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $A(x) \neq 0$ et $g(x) = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 2x + \sin 2x}$.
- a) Simplifier $g(x)$.
- b) En déduire que $\cotg \frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$.
- c) Calculer $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin 5 \frac{\pi}{8}$.

Equations et inéquations trigonométriques

19

Résoudre ces équations sur $[0, 2\pi[$:

- a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ c) $\sin 2x = \frac{1}{2}$
- d) $\sin 2x + \sin x \cdot \cos x = 0$ e) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

20

Résoudre dans \mathbb{R} :

- a) $\cos 3x = \cos x$; b) $\sin x = \sin 2x$; c) $\cos 3x = \sin x$
- d) $2\cos^2 x - 2\cos 2x + \sin x = 0$; e) $\cos(x+1) = \cos(5x+2)$; f) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

21

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[-\pi, \pi]$ les équations :

- a) $\cos 2x + \cos x = -1$; b) $\sin |x| = -\frac{1}{2}$; c) $2 \sin x = \operatorname{tg} x$

22 Soit f définie par $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$. Déterminer les antécédents de 0 et 2 par f .

23 Résoudre graphiquement les inéquations suivants sur $[0, 2\pi[$:

a) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos x \geq \frac{1}{2}$; c) $2\sin x - \sqrt{3} \leq 0$

d) $2\sin 2x \geq \sqrt{3}$; e) $\sqrt{1 - \cos x} > \sin x$

24 1) Montrer que $\cos^3 x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{16}(2\cos x - \cos 5x - \cos 3x)$.

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $16\cos^3 x \cdot \sin^2 x - 2\cos x = \sin 5x + \sin 3x$

3) Soit $f(x) = 4\sin x \cdot \cos^3 x - \sin 2x$.

a) Montrer que quelque soit $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$

b) En déduire que quelque soit $x \in \mathbb{R}$; $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

4) Résoudre dans \mathbb{R} : $2f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$.

25 Soit m un paramètre réel, la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 2\sqrt{2} - m.$$

1) Préciser l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'ensemble des solutions de l'équation $f_m(x) = 0$ n'est pas vide.

2) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ l'inéquation $f_{\sqrt{2}}(x) \geq 0$ pour $m = \sqrt{2}$.

26 Soit $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

1) a) Déterminer D le domaine de définition de f .

b) Comparer $f(x)$ et $f(\pi + x)$.

2) Montrer que quelque soit $x \in D$; $f(x) = \frac{(\sin x - \cos x)(4 + 2\sin 2x)}{\sin^2 2x}$

3) a) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\sin x - \cos x = 0$.

b) Préciser le signe de $f(x)$ sur $D_f \cap [0, \pi]$.

c) En déduire $Dg \cap [0, \pi]$ où $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

27 1) Montrer que : quelque soit $a \in \mathbb{R}$:

$$\cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$$

2) Vérifier que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$

3) On pose $a = \frac{\pi}{5}$, montrer que $x = \cos a$ est une solution de l'équation

$$4x^2 - 2x - 1 = 0. \text{ Montrer ensuite que } \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \cos \frac{\pi}{5}.$$

4) En déduire $\sin \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\sin \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{\pi}{10}$, $\sin \frac{\pi}{10}$.

28

Pour tout réel x , soit :

$$A(x) = -1 + 2\cos 2x - \cos 4x, B(x) = 1 + 2\cos 2x + \cos 4x \text{ et } f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

1) Transformer $B(x)$ en produit. En déduire D_f le domaine de définition de f .

2) a) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$.

b) En déduire $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$.

3) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\sin x + (\sqrt{2} - 1)\cos x = 1$.

4) Soit $h(x) = \sqrt{\sin x + (\sqrt{2} - 1)\cos x} - 1$. Déterminer $D_h \cap [0, \pi]$. (D_h domaine de définition de h).

29

Montrer que : $\cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} = -2\cos \frac{\pi}{5}$

et que $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 4\cos^2 \frac{\pi}{5} - 2$.

Sachant que $1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$

a) Déduire de cette égalité que $\cos \frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation

$$4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

b) Donner alors la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$.

3) On considère la fonction f définie par : $f(x) = 4\sin x \cdot \cos^3 x - \sin 2x$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$.

b) Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $4f(x) - 1 = 0$.

c) Résoudre dans \mathbb{R} , $f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 4x = \sin x$.

4) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ puis dans \mathbb{R} l'inéquation : $f(x) + \frac{\sqrt{3}}{4} \geq 0$.

30 1) Résoudre dans \mathbb{R} puis $[-\pi, \pi]$ l'équation :

$$\cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x = 2 \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$$

2) Soit : $f : x \mapsto \frac{\cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x - 2 \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)}{1 - 2 \sin^2 x}$.

a) Déterminer D le domaine de définition de f .

b) Montrer que quelque soit $x \in D$, $f(x) = -4 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$.

c) Calculer $f \left(\frac{\pi}{12} \right)$ en déduire $\sin \frac{\pi}{12}$.

3) a) Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$.

b) Résoudre l'inéquation $(\sqrt{3} + 1) \cos x + (\sqrt{3} - 1) \sin x \leq 2$.

CORRIGES

1

a) On sait que $1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ par addition on obtient : $-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2$. (1) d'où f est bornée.

b) $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left[\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right]$.

$$= \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right] = \sin x + \cos x = f(x).$$

c) On a : $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ d'où $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

donc $-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$. Ce qui constitue un meilleur encadrement que (1).

2

$$\frac{\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}} = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right) \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)}{\left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}\right) \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)}$$

$$= \frac{\left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)^2}{\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}}{\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)}$$

$$= \frac{1 + \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{Or } \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \text{ d'où } \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = 2 - \sqrt{3} \text{ d'où } \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{12} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} \text{ d'où } \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{12} = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$\text{par suite } \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12} = (7 - 4\sqrt{3}) + (7 + 4\sqrt{3}) = 14.$$

3

On a $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ or $\cos a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$$\cos 2a = 2 \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^2 - 1 = 2 \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4} \right) - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos 2a = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ a = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

or $a \in]0, \pi[$ donc $a = \frac{\pi}{12}$ ou $a = \frac{11\pi}{12}$ or $\cos a > 0$ d'ou $a = \frac{\pi}{12}$.

4

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ et } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\text{d'ou : } A = 5\cos^2 x - 3\sin^2 x = 5 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) - 3 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\cos 2x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 2x = 1 + 4\cos 2x.$$

$$B = 2\cos^2 x + 3\sin^2 x - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$= [1 + \cos 2x] + 3 \left[\frac{1 - \cos 2x}{2} \right] - 4 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)$$

$$= 1 + \cos 2x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2x - (1 - \cos^2 2x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \cos^2 2x.$$

$$C = \cos^3 x + \cos^2 x \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin^2 x + \sin^3 x.$$

$$= (\cos^3 x + \cos x \cdot \sin^2 x) + (\sin^3 x + \cos^2 x \cdot \sin x)$$

$$= \cos(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin x(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos x + \sin x.$$

5

a) Pour prouver que $f \neq g$, il suffit d'étudier leurs ensembles de définitions ; en effet on a : $D_f = \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ or $2\pi \in D_f$ et $2\pi \notin D_g$ d'ou $D_f \neq D_g$ donc $f \neq g$.

b) Sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ on a $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$.

$$\text{D'ou } f(x) = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} \text{ or } 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$$

$$\text{Ainsi } f(x) = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = g(x).$$

D'ou f et g sont donc égales sur $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



$$1) a) P \cdot \sin x = \sin x [\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x].$$

En utilisant la formule $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$ soit $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x$.

$$\text{On obtient : } P \sin x = (\sin x \cdot \cos x) \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 2x \cdot \cos 2x) \cos 4x \cdot \cos 8x.$$

$$= \frac{1}{4} (\sin 4x \cdot \cos 4x) \cos 8x = \frac{1}{8} \sin 8x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16} \sin (16x).$$

$$b) Q = \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \cos \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos 2 \left(\frac{\pi}{5} \right) \cos 4 \left(\frac{\pi}{5} \right) \cos 8 \left(\frac{\pi}{5} \right)$$

$$\text{Comme : } Q \cdot \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{16} \sin \left(16 \frac{\pi}{5} \right).$$

$$\text{Or } \frac{16\pi}{5} = 3\pi + \frac{\pi}{5} \text{ soit } \sin \left(\frac{16\pi}{5} \right) = \sin \left(3\pi + \frac{\pi}{5} \right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{5} \right) = -\sin \frac{\pi}{5}$$

$$\text{Par suite } Q = \frac{1}{16} \frac{\sin \left(\frac{16\pi}{5} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{5} \right)} = \frac{1}{16} \cdot \frac{-\sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = -\frac{1}{16}.$$

$$2) a) \text{ On peut écrire } \frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5} \text{ alors } \cos \frac{4\pi}{5} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right) = -\cos \frac{\pi}{5}$$

$$\text{et } \frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5} \text{ alors } \cos \frac{8\pi}{5} = \cos \left(2\pi - \frac{2\pi}{5} \right) = \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$\text{comme } Q = \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \cos \frac{8\pi}{5} \text{ s'écrit alors}$$

$$Q = \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \left[-\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \right] = - \left[\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \right]^2$$

$$\text{or } Q = -\frac{1}{16} \text{ d'ou } \left[\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \right]^2 = \frac{1}{16}.$$

$$\text{On sait que } \cos \frac{\pi}{5} \text{ et } \cos \frac{2\pi}{5} \text{ sont positifs par suite } \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$$

$$\text{soit } 4 \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = 1$$

$$b) 4 \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = 1 \text{ utilisant la formule :}$$

$$\cos p \cdot \cos q = \frac{1}{2} [\cos (p + q) + \cos (p - q)]$$

$$\text{On obtient } 4 \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} \right) \right] = 1.$$

$$\text{Soit } 2 \left[\cos \frac{3\pi}{5} + \cos \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right] = 1. \text{ Ou encore } 2 \left[\cos \left(\pi - \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \frac{\pi}{5} \right] = 1$$

$$\text{or } \cos(\pi - x) = -\cos x. \text{ D'ou } 2 \left[\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \right] = 1$$

$$\text{c) On a : } \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \text{ alors } \cos \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Or } \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \text{ d'ou } \cos \frac{\pi}{5} \times \left[\cos \frac{\pi}{5} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4}.$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{5} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{5} - \frac{1}{4} = 0 \text{ soit } 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0.$$

$$\Delta' = 1 + 4 = 5 \text{ alors } \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ ou } \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} < 0 \text{ or } \cos \frac{\pi}{5} > 0$$

$$\text{d'ou } \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

7 QCM

1) La réponse est c :

$$\sin \left(-\frac{19\pi}{6} \right) = \sin \left(-3\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(-\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

2) La réponse est b :

$$\cos \frac{99\pi}{8} = \cos \left(12\pi + \frac{3\pi}{8} \right) = \cos \frac{3\pi}{8} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) = \sin \frac{\pi}{8}$$

3) La réponse est b :

$$\cos \frac{23\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + \cos \frac{\pi}{12} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

4) La réponse est a :

$$\cos \left(2x + \pi \right) + \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos 2x + \cos 2x = 2 \cos 2x$$

8 Vrai -Faux

a) L'affirmation est vraie :

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } \cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \frac{4\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{6}$$

b) L'affirmation est vraie :

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left[\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right] = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

c) L'affirmation est fausse :

$$\cos 3a = \cos (a + 2a) = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a \neq \cos a \cos 2a$$

d) l'affirmation est fausse :

$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \neq \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

9 1) $(\vec{i}, \overline{OA}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\vec{i}, \overline{OB}) = \frac{2\pi}{3}$

d'où $(\overline{OA}, \overline{OB}) = (\overline{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overline{OB}) = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ainsi la réponse est **a** :

2) $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

d'où $A(4, \frac{5\pi}{6})$ par suite la réponse est **b** :

10 1) Vraie : $(\vec{i}, \overline{OA}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\vec{i}, \overline{OB}) = \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$

et $(\vec{i}, \overline{OC}) = \frac{-2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \pi$ donc A, B et C sont situés sur la droite passant par O

de vecteur directeur \vec{u} tel que $(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

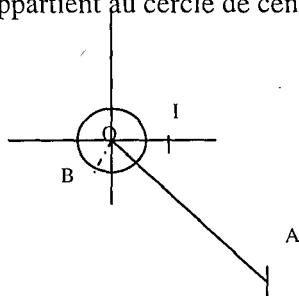
2) Vraie : $\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ donc la mesure principale de $(\vec{i}, \overline{OB}) = \frac{7\pi}{4}$ est $\frac{-\pi}{4} \Rightarrow B(5, \frac{-\pi}{4})$

et $A(5, \frac{\pi}{4})$ par suite A et B sont symétrique par rapport à (OI).

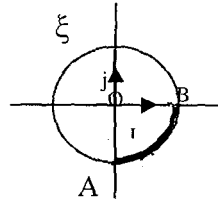
11 $A(3, -\frac{\pi}{4})$ appartient au cercle $\xi(0, 3)$ et tel que l'angle

$$(\overline{OI}, \overline{OA}) = \frac{-\pi}{4} ; B\left(\frac{1}{2}, \frac{-2\pi}{3}\right) \text{ appartient au cercle de centre O de rayon } \frac{1}{2}$$

$$\text{tel que } (\overline{OI}, \overline{OB}) = \frac{-2\pi}{3}$$



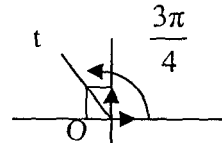
12 a) $r=2$ et $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0 \right]$



$r = 2$ on trace alors le cercle ξ de centre O de rayon 2 et comme l'angle varie dans $\left[\frac{-\pi}{2}, 0 \right]$ donc c'est le quadrant où l'arc \widehat{AB} ainsi l'ensemble recherché est \widehat{AB}

b) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ donc $(\overline{OI}, \overline{OM}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $r > 0$

ainsi l'ensemble recherché est la demi droite $[ot) - \{0\}$



2^{ème} Méthode : $M(r, \frac{3\pi}{4})$ soit (x, y) les coordonnées de M

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} r \\ y = r \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} r = -x \end{cases}$$

l'équation $y = -x$ et l'équation d'une droite et comme $r > 0 \Rightarrow x < 0$
d'où l'ensemble recherché est la demi droite $[Ot)$ d'équation $y = -x$ et $x < 0$.

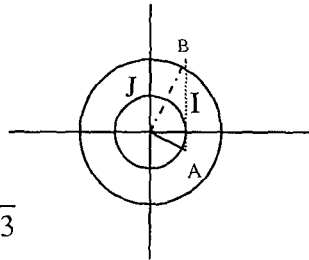
13

a)

b) On a :

* $A(1, -\frac{\pi}{8}) \Leftrightarrow (\overline{OI}, \overline{OA}) = -\frac{\pi}{8}$ et $OA = 1$

* $B(\sqrt{3}, \frac{3\pi}{8}) \Leftrightarrow (\overline{OI}, \overline{OB}) = \frac{3\pi}{8}$ et $OB = \sqrt{3}$



ainsi : $(\overline{OA}, \overline{OB}) = (\overline{OA}, \overline{OI}) + (\overline{OI}, \overline{OB}) = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi]$.

par suite la mesure principale de $(\overline{OA}, \overline{OB})$ est $\frac{\pi}{2}$.

c) $(\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AOB$ est un triangle rectangle en O

$\Leftrightarrow AO^2 + BO^2 = AB^2$

or $OA=1$ et $OB=\sqrt{3} \Leftrightarrow 1+3=AB^2 \Leftrightarrow AB^2=4 \Rightarrow AB=2$.

d) Dans le triangle OBA rectangle en O on a :

$$\cos \widehat{OBA} = \frac{OB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \widehat{OBA} = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{2} \text{ par suite } \widehat{OBA} = \frac{\pi}{6}$$

14 a) $A(0, \frac{2}{3})$ d'où $x=0$ et $y=\frac{2}{3}$

On sait que $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + (\frac{2}{3})^2} = \frac{2}{3}$ et $\cos \theta = \frac{x}{r} = 0$

$\sin \theta = \frac{y}{r} = 1$ d'où $\theta = \frac{\pi}{2}$ d'où $A(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2})$.

• $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\frac{-\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{-1}{3})^2} = \frac{2}{3}$

$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{2}$ alors $\theta = \frac{-5\pi}{6}$ d'où $B(\frac{2}{3}, \frac{-5\pi}{6})$

• $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{-1}{3})^2} = \frac{2}{3}$

$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ alors $\theta = \frac{-\pi}{6}$ d'où $C(\frac{2}{3}, \frac{-\pi}{6})$

b) On a $A(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow OA = \frac{2}{3}$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$

$B(\frac{2}{3}, \frac{-5\pi}{6}) \Leftrightarrow OB = \frac{2}{3}$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = \frac{-5\pi}{6}$

$C(\frac{2}{3}, \frac{-\pi}{6}) \Leftrightarrow OC = \frac{2}{3}$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OC}) = \frac{-\pi}{6}$

par suite $OA = OB = OC = \frac{2}{3} \Rightarrow A, B, C$ appartiennent au cercle ξ

de centre O de rayon $\frac{2}{3}$. d'où ABC est inscrit dans ξ .

de plus $AB = \sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 1} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$BC = \sqrt{(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 + 0^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $AC = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow AB = BC = AC \Rightarrow ABC$ est un triangle équilatéral.

15

1) a) on a : $A(3, \frac{\pi}{3})$ on a $OA = 3$ et $(\vec{i}, \overline{OA}) = \frac{\pi}{3}$

comme B est le milieu de $[OA]$ alors $OB = \frac{3}{2}$ et $(\vec{i}, \overline{OB}) = (\vec{i}, \overline{OA}) = \frac{\pi}{3}$

ainsi les coordonnées polaires de B sont $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3})$

b) OAC est rectangle et isocèle direct en C

$$\Leftrightarrow CO = CA \text{ et } (\overline{OA}, \overline{OC}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi).$$

$$* (\vec{i}, \overline{OC}) = (\vec{i}, \overline{OA}) + (\overline{OA}, \overline{OC}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$$

* OAC rectangle en C $\Leftrightarrow CA^2 + CO^2 = OA^2$ or $OC = CA$

d'où $2CO^2 = OA^2$

$$\text{Soit } 2CO^2 = 9 \text{ par suite } OC = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

finalement les coordonnées polaires de C sont : $(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{7\pi}{12})$.

2) a) 1^{ère} Méthode : $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$(\vec{i}, \overline{OM}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

d'où l'ensemble recherché est la demi droite $[Ox) - \{0\}$

2^{ème} Méthode : soit (x, y) les coordonnées cartésienne de M comme

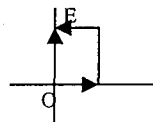
$(r, \frac{\pi}{3})$ sont ces coordonnées polaires

$$\text{alors : } \begin{cases} x = r \cos \frac{\pi}{3} \\ y = r \sin \frac{\pi}{3} \end{cases} \text{ Soit } \begin{cases} x = \frac{1}{2} r \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} r \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} r > 0 \\ y = \sqrt{3} x \end{cases}$$

par suite l'ensemble recherché est la demi droite d'équation

$$y = \sqrt{3} x \text{ et } x > 0$$

b) 1^{ère} Méthode : $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow (\vec{i}, \overline{OM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



l'ensemble recherché est la demi droite $[OE) - \{0\}$ avec $E(1, 0)$

2^{ème} Méthode : $M(x, y)$ d'une part $M(r, \frac{\pi}{2})$

$$\text{d'autre part ainsi } \begin{cases} x = r \cos \frac{\pi}{2} \\ y = r \sin \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = 0 \\ y = r > 0 \end{cases}$$

par suite l'ensemble recherché est la demi droite d'équation $x = 0$ et $y > 0$

16

• $W(r, \theta)$ le centre du cercle ζ et de rayon OW et $O \in \zeta$

alors $OW = r$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OW}) = \theta$

• $W(x, y)$ coordonnées cartésiennes alors $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$
d'où $W(r \cos \theta, r \sin \theta)$

• $M(k, \alpha)$ alors $x_M = k \cos \alpha$ et $y_M = k \sin \alpha$

• $M \in \zeta \Leftrightarrow WM = OW \Leftrightarrow \sqrt{(x_M - x_W)^2 + (y_M - y_W)^2} = \sqrt{x_W^2 + y_W^2}$

$$\Leftrightarrow (k \cos \alpha - r \cos \theta)^2 + (k \sin \alpha - r \sin \theta)^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 \cos^2 \alpha - 2rk \cos \theta \cos \alpha + k^2 \sin^2 \alpha - 2rk \sin \theta \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2rk (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2rk \cos(\alpha - \theta) = 0 \text{ or } k \neq 0 \Leftrightarrow 2r \cos(\alpha - \theta) = k$$

17

$$1) \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \sin x \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x$$

$$\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \sin x \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x.$$

$$\text{d'où } \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos x - \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$$

2) On remarque que $\frac{11\pi}{21} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{7}$ et $\frac{17\pi}{21} = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{3}$

$$\text{d'où } \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{11\pi}{21} + \cos \frac{17\pi}{21} = \cos \frac{\pi}{7} + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{7} + \cos\left(\frac{\pi}{7} - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

3) On a : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

$$\begin{aligned} \text{alors } \left[\cos x + \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) \right]^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) + 2\cos x \cdot \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + 2\cos x \cdot \cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) \\ + 2\cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) &= 0 \quad (1). \end{aligned}$$

En utilisant la formule $2\cos a \cdot \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x) + \cos \left(2x + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos(2x) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) + \left[\cos(2x) + \cos \left(2x + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) \right] - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

18

$$1) \text{ a) } A\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 1 - \cos \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} = 1 - \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 1 + \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$A\left(\frac{49\pi}{6}\right) = 1 - \cos \left(\frac{49\pi}{3} \right) + \sin \left(\frac{49\pi}{3} \right) = 1 - \cos \left(16\pi + \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(16\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 1 - \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

b) On a : $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ soit $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ et $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$.

D'où $A(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 2\sin x (\sin x + \cos x)$.

$$= 2\sqrt{2}\sin x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \right) = 2\sqrt{2}\sin x \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{c) } A\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Autre écriture de } A\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2}\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Par suite } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{A\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$2) B(x) = 2\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \left[\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right] \left[\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) \right]$$

$$= (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\cos x \cdot \sin x = 1 + \sin 2x.$$

$$3) a) g(x) = \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \cdot \sin x}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)}{\sqrt{2} \sin x} = \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot g x$$

b) D'une part : $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot g \frac{\pi}{8}$ d'autre part on a : $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{B\left(\frac{\pi}{8}\right)}{A\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.

$$A\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = 1 \text{ et } B\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ Comme $\cot g \frac{\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = 2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$.

c) $1 + \cot g^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}}$ soit $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 + \cot g^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{2})^2}$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \text{ or } \sin \frac{\pi}{8} > 0 \text{ donc } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$* \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 \text{ donc } \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

or $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ donc $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

$$* \sin \frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Equations et inéquations trigonométriques

19 a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

d'où sur $[0, 2\pi[$ les solutions sont $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

$$b) \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

d'ou sur $[0, 2\pi[$ les solutions sont : $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

$$c) \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

d'ou sur $[0, 2\pi[$ les solutions sont : $\frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$.

d) $\sin 2x + \sin x \cdot \cos x = 0$ en utilise la forme $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ l'équation est équivalente à $\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$ ou encore $\frac{3}{2}\sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Sur $[0, 2\pi[$ les solutions sont : $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

$$e) \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}.$$

Sur $[0, 2\pi[$ les solutions sont : $\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{23\pi}{12}$.



$$a) \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -x + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\text{IR}} = \left\{ k\pi, \frac{k\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{k\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$b) \sin x = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - 2x + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$S_{\text{IR}} = \left\{ -2k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

c) $\cos 3x = \sin x$ on utilise la formule $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ l'équation devient :

$$\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

$$S_{\text{IR}} = \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) $2\cos^2 x - 2\cos 2x + \sin x = 0$ en utilisant la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

On obtient : $2\cos^2 x - 2(2\cos^2 x - 1) + \sin x = 0$.

$$\Leftrightarrow -2\cos^2 x + \sin x + 2 = 0 \text{ or } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow -2(1 - \sin^2 x) + \sin x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \sin x = -\frac{1}{2}.$$

$$* \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

$$* \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}.$$

$$S_{\text{IR}} = \left\{ k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$e) \cos(x+1) = \cos(5x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 5x+2 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x+1 = -5x-2 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x = 1 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 6x = -3 + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} - \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{2} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}.$$

$$S_{\text{IR}} = \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{k\pi}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$f) \operatorname{tg}x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ d'où } S_{\text{IR}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$



a) $\cos 2x + \cos x = -1$ on utilise la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = -1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0.$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\text{IR}} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dans $[-\pi, \pi]$ les solutions sont : $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$.

b) $\sin|x| = -\frac{1}{2}$ or

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-x	\emptyset	x

Si $x \in]-\infty, 0]$ alors l'équation s'écrit $\sin(-x) = -\frac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

comme $x \leq 0$ alors il faudra choisir $k < 0$.

Si $x \in [0, +\infty[$ alors l'équation s'écrit $\sin x = -\frac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (1) \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad (2) \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \text{ comme } x \geq 0 \text{ alors pour (1) il faudra choisir}$$

$k > 0$ et pour (2) le $k \geq 0$. Donc les solutions dans \mathbb{R} sont :

$$\left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^- \right\} \text{ privé de } -\frac{\pi}{6}$$

sur $[-\pi, \pi]$ les solutions sont : $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$.

c) $2\sin x = \operatorname{tg} x$ l'équation existe que lorsque $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $2\sin x - \operatorname{tg} x = 0$

on utilise $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. L'équation s'écrit :

$$\sin x \left[2 - \frac{1}{\cos x} \right] = 0 \Leftrightarrow \sin x \left[\frac{2\cos x - 1}{\cos x} \right] = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \text{ Si } \mathbb{R} = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$S_{[-\pi, \pi]} = \left\{ -\pi, 0, \pi, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right\}.$$

22 $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x \right) = 2\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$ donc :

$$* f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

donc les antécédents de 0 par f sont $\frac{2\pi}{3} + k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$).

$$* f(x) = 2 \Leftrightarrow 2\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi$$

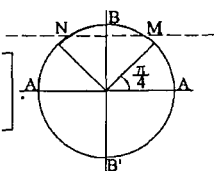
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Donc les antécédents de 2 par f sont $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$).



a) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit M et N les points du cercle trigonométrique

d'ordonnée $\frac{\sqrt{2}}{2}$, les images des solutions de l'inéquation $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit les points de l'arc MBN extrémités incluses.

Donc l'ensemble des solutions sur $[0, 2\pi[$ est $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$.

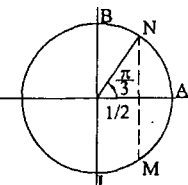


b) $\cos x \geq \frac{1}{2}$ soient M et N les points du

cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{1}{2}$. les images des solutions de l'équation

$\cos x \geq \frac{1}{2}$ sont les points de l'arc MAN extrémités incluses

Donc l'ensemble des solutions sur $[0, 2\pi[$ est $\left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi \right]$.

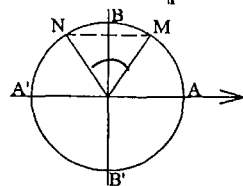


c) $2\sin x - \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Soient M et N les points du c

trigonométrique d'ordonnée $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les images des solutions de l'inéquation $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

sont les points de l'arc MB'N extrémités incluses.



Donc l'ensemble des solutions sur $[0, 2\pi[$ et : $\left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi \right]$.

d) $2\sin x \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On pose $X = 2x$ l'inégalité devient $\sin X \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'après c) on obtient

$$\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{2\pi}{3} \text{ sur } [0, 2\pi[\text{ et sur } \mathbb{R} \text{ on obtient}$$

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq X \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Ou encore $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$ Pour $k = 0$ alors $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

Pour $k = 1$ alors $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$ Donc la solution est $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} \right]$.

e) $\sqrt{1 - \cos x} > \sin x$ elle est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $\cos x \leq 1$
soit $0 \leq 1 - \cos x$.

* Si $x \in [0, \pi]$ alors $\sin x \geq 0$

d'où $\sqrt{1 - \cos x} > \sin x \Leftrightarrow 1 - \cos x > \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos x > 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow (1 - \cos x) - (1 - \cos^2 x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos x - 1) > 0$$

On sait que $\cos x \leq 1 \Leftrightarrow \cos x - 1 \leq 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x - 1$	○	-	-
$\cos x$	+	○	-
$\cos x (\cos x - 1)$	○	○	+

Donc la 1^{ère} solution est $]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

* Si $\pi < x < 2\pi$ on a $\sin x < 0$ donc l'inéquation est vérifiée quelque soit $x \in]\pi, 2\pi[$ donc la 2^{ème} solution est $]\pi, 2\pi[$ finalement : la solution dans $[0, 2\pi[$ est $]\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.

24) 1) $2\cos x - (\cos 5x + \cos 3x) = 2\cos x - 2\cos \frac{5x+3x}{2} \cdot \cos \frac{5x-3x}{2}$
 $= 2\cos x - 2\cos 4x \cdot \cos x = 2\cos x [1 - \cos 4x]$ or $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
 $= 2\cos x [1 - (1 - 2\sin^2 2x)] = 2\cos x [2\sin^2 2x]$

Comme $\sin 2x = 2\cos x \cdot \sin x$

$$D'où $2\cos x - \cos 5x - \cos 3x = 4\cos x [2\cos x \cdot \sin x]^2 = 16\cos^3 x \cdot \sin^2 x$.$$

$$\text{Par suite } \cos^3 x \sin^2 x = \frac{1}{16} [2\cos x - \cos 5x - \cos 3x].$$

2) $16\cos^3 x \cdot \sin^2 x - 2\cos x = \sin 5x + \sin 3x$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - \cos 5x - \cos 3x) - 2\cos x = \sin 5x + \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow -\cos 5x - \cos 3x = \sin 5x + \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow -2\cos 4x \cdot \cos x = 2\sin \frac{5x+3x}{2} \cdot \cos \frac{5x-3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2\cos 4x \cdot \cos x = 2\sin 4x \cdot \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x \cdot \cos x + \sin 4x \cdot \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x [\cos 4x + \sin 4x] = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \cos 4x + \sin 4x = 0$$

* $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$* \cos 4x + \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$$

d'où les solutions dans \mathbb{R} sont : $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $\frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\begin{aligned} 3) \text{ a) } f(x) &= 4\sin x \cdot \cos^3 x - \sin 2x = 2(2\sin x \cdot \cos x) \cos^2 x - \sin 2x \\ &= 2\sin 2x \cdot \cos^2 x - \sin 2x \\ &= \sin 2x (2\cos^2 x - 1) = \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin\left(4x + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(4x + \frac{8\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin 4x + \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + \sin\left(4x + 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \left[\sin 4x + \sin\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin 4x + \sin 4x \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \cos 4x \cdot \sin \frac{2\pi}{3} + \sin 4x \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \cos 4x \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin 4x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 4x \right] = 0 \end{aligned}$$

$$4) 2f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0 \text{ ou encore } \sin 4x - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$$

$$\text{Soit } \sin 4x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 4x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z})$$

Les solutions dans \mathbb{R} sont : $\left[\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

25

1) On remarque $\cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x$ s'écrit de la forme $a \cos 3x + b \sin 3x$
 $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$ et $\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$; $\sin \varphi = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\varphi = -\frac{\pi}{3}$
d'où $\cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ par suite $f_m(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{2} - m$
l'équation $f_m(x) = 0$ est équivalente à $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = m - 2\sqrt{2}$ soit
 $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m - 2\sqrt{2}}{2}$ cette équation admet des solutions lorsque
 $-1 \leq \frac{m - 2\sqrt{2}}{2} \leq 1$ car $-1 \leq \cos x \leq 1$ par suite $-2 + 2\sqrt{2} \leq m \leq 2 + 2\sqrt{2}$.

Donc $f_m(x) = 0$ admet au moins une solution si et seulement si

$$m \in [-2 + 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}].$$

2) $f_{\sqrt{2}}(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}$ $f_{\sqrt{2}}(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

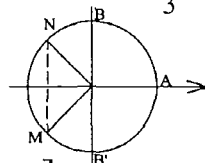
Soient M et N les images des points solutions de l'équation

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ d'ou } MAN \text{ c'est les images des solutions de}$$

l'inéquation : $\cos X \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq X \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $X = x + \frac{\pi}{3}$

par suite $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

soit $\frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$.



Or $x \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ donc les solutions sont : $\left[0, \frac{5\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$.



1) a) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

donc $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi (k \in \mathbb{Z})\right\}$.

b) $f(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos^2(\pi + x)} - \frac{\cos(\pi + x)}{\sin^2(\pi + x)} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = -f(x)$

2) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$
 $= \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x)}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$
 $= \frac{(\sin x - \cos x)\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right)}{\frac{1}{4}\sin^2 2x} = \frac{(\sin x - \cos x)(4 + 2\sin 2x)}{\sin^2 2x}$

3) a) $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ impossible} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Les solutions dans $[0, \pi]$ sont : $\frac{\pi}{4}$.

b) On sait que $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 4 + 2\sin 2x \leq 6$ d'où $4 + 2\sin 2x > 0$.

$$* \sin^2 2x \geq 0 ; \sin x - \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$* \sin x - \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2k\pi$$

$$\text{soit } \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin x - cos x	-	0	+	+
f(x)	-	0	+	+

c) $g(x) = \sqrt{f(x)}$ définie si et seulement si $f(x) \geq 0$

$$D_g \cap [0, \pi] = \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

27

$$\begin{aligned} 1) \cos 5a &= \cos(a + 4a) = \cos a \cdot \cos 4a - \sin a \cdot \sin 4a \\ &= \cos a \cos [2(2a)] - \sin a \cdot \sin (2a \times 2) \\ &= \cos a [2\cos^2 2a - 1] - \sin a [2\sin 2a \cdot \cos 2a] \\ &= \cos a [2(2\cos a - 1)^2 - 1] - \sin a [2(2\sin a \cdot \cos a)(2\cos^2 a - 1)] \\ &= \cos a [8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1] - 4\cos a (2\cos^2 a - 1)(1 - \cos^2 a) \\ &= 8\cos^5 a - 8\cos^3 a + \cos a + 8\cos^5 a - 4\cos^3 a - 8\cos^3 a + 4\cos a \\ &= 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a. \end{aligned}$$

2) On développe la quantité :

$$(x+1)(4x^2 - 2x - 1) = 4x^3 - 2x^2 - x + 4x^2 - 2x - 1 = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

$$\text{d'où } (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2 = (4x^3 + 2x^2 - 3x - 1)(4x^2 - 2x - 1)$$

$$= 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1.$$

3) On pose $x = \cos a$. $(\cos a + 1)(4\cos^2 a - 2\cos a - 1)^2 = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a + 1$

$$\text{En utilisant le 1) on obtient : } (\cos a + 1)(4\cos^2 a - 2\cos a - 1)^2 = \cos 5a + 1$$

$$\text{Pour } a = \frac{\pi}{5} \text{ on a : } \cos 5\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0$$

$$\text{Donc } \left(\cos \frac{\pi}{5} + 1\right) \left(4\cos^2 \frac{\pi}{5} - 2\cos \frac{\pi}{5} - 1\right) = 0 \text{ or } \cos \frac{\pi}{5} \neq -1$$

$$\text{Donc } \cos \frac{\pi}{5} \text{ est une solution de l'équation } 4\cos^2 a - 2\cos a - 1 = 0$$

$x = \cos \frac{\pi}{5}$ est donc bien solution de $4x^2 - 2x - 1 = 0$.

$$\Delta = 4 + 16 = 20.$$

Les solutions donc : $x' = \frac{2 - \sqrt{20}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} < 0$ et $x'' = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} > 0$

Or $\cos \frac{\pi}{5} > 0$ d'où $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

$$4) * \sin^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{5} = 1 \text{ d'où } \sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2$$

$$\text{or } \sin \frac{\pi}{5} > 0 \text{ d'où } \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$* \cos \frac{2\pi}{5} = 2\cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 = 2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 - 1 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$* \sin \frac{2\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{2\pi}{5}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$* \cos \frac{\pi}{5} = 2\cos^2 \frac{\pi}{10} - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{5}}{2} \text{ or } \cos \frac{\pi}{10} > 0$$

$$\text{d'où } \cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$* \sin^2 \frac{\pi}{10} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{10} = 1 - \frac{5 + \sqrt{5}}{8} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} \text{ or } \sin \frac{\pi}{10} > 0$$

$$\text{d'où } \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}.$$

28

$$1) B(x) = 1 + 2\cos 2x + \cos 4x = 1 + 2\cos 2x + (2\cos^2 2x - 1) \\ = 2\cos^2 2x + 2\cos 2x = 2\cos 2x (\cos 2x + 1)$$

$$* B(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ ou } \cos 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ ou } \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } 2x = \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{d'où } D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

$$2) a) A(x) = -1 + 2\cos 2x - \cos 4x = -1 + 2\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1)$$

$$= 2\cos 2x - 2\cos^2 2x = 2\cos 2x (1 - \cos 2x)$$

$$= 2\cos 2x [1 - (1 - 2\sin^2 x)] = 4\cos 2x \cdot \sin^2 x$$

de même pour $B(x) = 2\cos 2x [(2\cos^2 x - 1) + 1] = 4\cos 2x \cdot \cos^2 x$

par suite $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{4\cos 2x \cdot \sin^2 x}{4\cos 2x \cdot \cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$.

$$b) \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{8} = f\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{A\left(\frac{7\pi}{8}\right)}{B\left(\frac{7\pi}{8}\right)} \text{ or } A\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -1 + 2\cos \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{7\pi}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{et } B\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 1 + 2\cos \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{2} = 1 + \sqrt{2} \text{ par suite } f\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$\text{d'où } \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{8} = (\sqrt{2}-1)^2 \text{ or } \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} < 0 \text{ donc } \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}.$$

$$3) \sin x + (\sqrt{2}-1)\cos x = 1$$

$$\sin x - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x \cdot \cos \frac{7\pi}{8}}{\cos \frac{7\pi}{8}} - \frac{\sin \frac{7\pi}{8} \cdot \cos x}{\cos \frac{7\pi}{8}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{7\pi}{8}\right) = \cos \frac{7\pi}{8} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{7\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$\text{ou encore } \begin{cases} x - \frac{7\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{7\pi}{8} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8}\right) + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{9\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad S_{\text{IR}} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \right\}.$$

$$4) \sin x + (\sqrt{2}-1)\cos x - 1 = \frac{\sin x \cdot \cos \frac{7\pi}{8} - \sin \frac{7\pi}{8} \cdot \cos x}{\cos \frac{7\pi}{8}} - 1 = \frac{\sin\left(x - \frac{7\pi}{8}\right)}{\cos \frac{7\pi}{8}} - 1$$

$$\sin x + (\sqrt{2}-1)\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\cos\left(x - \frac{7\pi}{8}\right)}{\cos \frac{7\pi}{8}} - 1 \geq 0$$

$$\text{or } \cos \frac{7\pi}{8} < 0 \text{ donc } \cos\left(x - \frac{7\pi}{8}\right) \leq \cos \frac{7\pi}{8}$$

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x - \frac{7\pi}{8} \leq \frac{9\pi}{8} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{7\pi}{8} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$$

$$D_h \cap [0, \pi] = \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right].$$



1) En utilise la formule $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$\text{On obtient alors : } \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} = 2\cos\pi \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -2\cos\frac{\pi}{5}.$$

$$\text{et } \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 2\cos\pi \cdot \cos\frac{3\pi}{5} = -2\cos\frac{3\pi}{5}$$

$$\text{or } \cos(\pi - x) = -\cos x \text{ donc } -\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\text{par suite : } \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = 2 \left[2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 \right] = 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2.$$

$$2) \text{ a) } 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5}\right) = 0$$

En utilisant 1) l'équation devient :

$$1 + 2 \left[2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 \right] + \left(-2\cos\frac{\pi}{5} \right) = 0 \text{ ou encore } 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0$$

alors $\cos\frac{\pi}{5}$ est une solution de l'équation $4X^2 - 2X - 1 = 0$

$$\text{b) } 4X^2 - 2X - 1 = 0 \text{ on calcule } \Delta' = 1 + 4 = 5.$$

Alors $X' = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} > 0$ et $X'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} < 0$ or $\cos\frac{\pi}{5}$ est une solution positive

de cette équation d'un $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

$$3) \text{ a) } f(x) = 4\sin x \cdot \cos^3 x - \sin 2x = 2\cos^2 x (2\sin x \cdot \cos x) - \sin 2x$$

$$= 2\cos^2 x (\sin 2x) - \sin 2x = \sin 2x (2\cos^2 x - 1) = \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x.$$

$$\text{b) } 4f(x) - 1 = 0 \text{ ou encore } 2\sin 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

$S_{IR} = \left\{ \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z}) \right\}$. Les solutions dans $]-\pi, \pi]$ sont :

$$\frac{\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{-11\pi}{24}, \frac{-23\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{-7\pi}{24}, \frac{-19\pi}{24}$$

$$c) f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 4x = \sin x. \quad \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 4x = \sin x$$

$$\text{ou encore } \sin 4x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos 4x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sin x$$

$$\sin \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{3} = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x - \frac{\pi}{3} = \pi - x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{4\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

donc les solutions dans \mathbb{R} sont : $\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{4\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}; (k \in \mathbb{Z})$.

$$4) f(x) + \frac{\sqrt{3}}{4} \geq 0 \text{ soit } \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \sin 4x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ on pose } X = 4x.$$

$$\text{L'inéquation devient : } \sin X \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soit M et N les points du cercle trigonométrique d'ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ les

images des solutions de l'inéquation $\sin X \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ est l'arc \widehat{MBN}

$$\text{d'où } \sin X \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq X \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

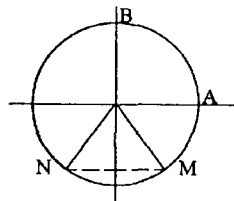
$$\text{or } X = 4x \text{ d'où } -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 4x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ou encore } -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$$

Les solutions dans \mathbb{R} sont : $\left[-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et les solutions

dans $[0, 2\pi]$: sont

$$\text{Pour } k=0; x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3} \right] \text{ or } x \in [0, 2\pi] \text{ donc la solution est } \left[0, \frac{\pi}{3} \right]$$



Pour $k=1$; $x \in \left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6} \right] \subset [0, 2\pi]$ donc la solution $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6} \right]$

Pour $k=2$; $x \in \left[\frac{11\pi}{12}, \frac{4\pi}{3} \right] \subset [0, 2\pi]$ donc c'est une solution.

Pour $k=3$; $x \in \left[\frac{17\pi}{12}, \frac{11\pi}{6} \right] \subset [0, 2\pi]$ donc c'est une solution

Pour $k=4$; $x \in \left[\frac{23\pi}{12}, 2\pi + \frac{\pi}{3} \right]$ or $x \in [0, 2\pi]$ donc la solution est $\left[\frac{23\pi}{12}, 2\pi \right]$

Finalement la solution dans $[0, 2\pi]$ est :

$$\left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{12}, \frac{4\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{17\pi}{12}, \frac{11\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{23\pi}{12}, 2\pi \right]$$

30

$$1) \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x = 2 \left(\frac{1}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x \right) = 2 \cos \left(3x + \frac{\pi}{3} \right)$$

Alors l'équation $\cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x = 2 \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$ est équivalente à :

$$2 \cos \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) \text{ ou encore } \cos \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = x + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x + \frac{\pi}{3} = -x - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = -\pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

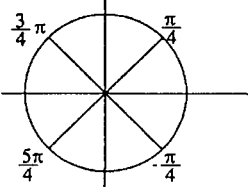
$$S_{\text{IR}} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$S_{[-\pi, \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4} \right\}.$$

$$2) D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - 2\sin^2 x \neq 0\}$$

$$1 - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$


$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x &= 2 \cos \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ donc } \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x = 2 \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2 \cos \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) - 2 \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left[\cos \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 2 \left[-2 \sin \left(\frac{3x + \frac{\pi}{3} + x + \frac{2\pi}{3}}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{3x + \frac{\pi}{3} - \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)}{2} \right) \right] \\ &= -4 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } f(x) &= \frac{-4 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{1 - 2 \sin^2 x} = \frac{-4 \cos 2x \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos(2x)} \\ &= -4 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

$$\text{c) } f\left(\frac{\pi}{12}\right) = -4 \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \right) = -4 \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{12} \text{ d'une part}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\cos \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} - 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right)}{\cos \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } 4 \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{3) a) } \cos \frac{\pi}{12} &= \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(8 - 2\sqrt{12})}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{12}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

$$b) (\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \leq 2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) \cdot \sin x \leq \frac{2\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{12} \right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

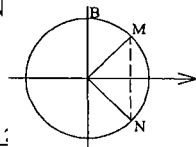
Soient M et N les points du cercle trigonométrique

d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$ les images des solutions c'est l'arc \widehat{MBN}

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{12} \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

d'où l'ensemble des solutions dans \mathbb{R} c'est : $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right]$

avec $k \in \mathbb{Z}$.



Chapitre IV

Rotation

■ Définition :

Une **rotation** r de centre A et d'angle α est une application du plan vers le plan tel que :

* Pour tout $M \in P$ Si $M \neq A$, on associe M' tel que

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \alpha (2\pi) \quad \text{et} \quad AM = AM'.$$

* Si $M = A$ alors $r(A) = A$.

On note : $r(A, \alpha)(M) = M'$.

■ Définition :

Toute application du plan dans lui-même est **une isométrie** si elle conserve les distances.

• Toute rotation est une isométrie.

■ Propriétés des rotations :

Dans ce tableau les images des points A, B, C et D sont respectivement A', B', C' et D' par la rotation de centre O d'angle α .

Une rotation conserve	Signification
Distances	$AB = A'B'$
L'alignement	A, B et C alignés alors A', B' et C' sont alignés
Le parallélisme	$(AB) \parallel (CD)$ alors $(A'B') \parallel (C'D')$
L'orthogonalité	$(AB) \perp (CD)$ alors $(A'B') \perp (C'D')$
Les angles orientés	$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) (2\pi)$
Le contact	Les images de deux courbes tangentes sont deux courbes tangentes
Les intersections de deux courbes	L'image de l'intersection de deux courbes est l'intersection de ces courbes
Le barycentre	C barycentre de $\{(A, \alpha)(B, \beta)\}$ barycentre de $\Rightarrow C'$ est le barycentre de $\{(A', \alpha)(B', \beta)\}$
Le produit scalaire	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'}$
L'équipollence	$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{C'D'}$

■ Propriétés particuliers :

$$\left. \begin{array}{l} r_{(0,\alpha)}(A) = A' \\ r_{(0,\alpha)}(B) = B' \end{array} \right\} \text{ Alors } AB = A'B' \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha (2\pi)$$

Théorème fondamental ($\alpha \neq 0 (2\pi)$)

Si A, B, A', B' sont quatre points tels que $AB = A'B'$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha (2\pi)$ alors il existe une unique rotation telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

Si $\alpha \equiv 0 (2\pi)$ alors il existe une translation tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Une rotation transforme :

- Une droite en une droite.
- Un cercle $C(A, a)$ en un cercle $C'(r(A), a)$.
- Un segment en un segment isométrique.
- Une rotation $r(O, \alpha)$ est une bijection et la réciproque est une rotation de centre O d'angle $-\alpha$, qu'on note $r^{-1}(O, \alpha) = r(O, -\alpha)$.

■ Composées :

- Composées de deux symétries axiales :

S_{Δ} et $S_{\Delta'}$ deux symétries axiales d'axes respectives Δ et Δ' .

<p>Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AA'}$ avec $A \in \Delta$ et $A' \in \Delta'$ et $\Delta \perp (AA')$.</p> <p>$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{AA'}}$</p>	<p>Si Δ est sécante à Δ' alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une rotation de centre A avec $\{A\} = \Delta \cap \Delta'$ d'angle $2 \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'} \right)$.</p> <p>$\overrightarrow{u}$: vecteur directeur de Δ</p> <p>$\overrightarrow{u'}$: vecteur directeur de Δ'</p>
---	---

Cas particulier : Si $\Delta \perp \Delta'$ alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = S_A$ est une symétrie centrale de centre A .

■ Composées de deux rotations :

- La composée d'une rotation d'angle α et d'une rotation d'angle β de même centre A est une rotation de centre A d'angle $\alpha + \beta$
- Si $\alpha + \beta \equiv 0 (2\pi)$ alors $r_{(A,\alpha)} \circ r_{(A,\beta)}$ est une identité du plan

- Recherche de centre de la composée de deux rotations de centre différent

$f = \mathcal{R}(I, \alpha) \circ \mathcal{R}(J, \beta)$

Si $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ alors f est une translation

Si $\alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ alors f est une rotation

* Choisir deux points A et B dont on connaît ou dont on peut facilement construire les images A' et B' par f .

* D la médiatrice de $[AA']$ et D' la médiatrice de $[BB']$

Si D et D' sont sécantes en O , alors O est le centre de la rotation f

Si $D \parallel D'$ alors le centre de la rotation f est le point d'intersection de (AB) et de $(A'B')$.

* Si non sa dépend des énoncés de l'exercice

ENONCES



ABCD est un carré direct de centre O. Soit I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[CD]$.

- 1) Soit r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$. Quelles sont les images par r de A, D, C et J ?
- 2) En déduire que les droites (AJ) et (BI) sont orthogonales.



ABC un triangle direct et H son orthocentre.

- 1) Construire les points D, E, F tel que : $r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}(B) = D$;

$$r_{\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)}(C) = E \text{ et } S_A(E) = F.$$

- 2) Montrer que $r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}(C) = F$.

- 3) Démontrer que les droites (BC) et (DF) sont perpendiculaires.
- 4) Que représente la droite (AH) pour le triangle AED.



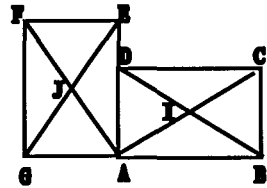
ABCD un parallélogramme. On construit à l'extérieur de ce parallélogramme, les points E et F tels que les triangles AEB et ADF soit équilatéraux.

- 1) Soit r la rotation de centre F qui transforme D en A. Montrer que $r(C) = E$ (on pourra poser $C' = r(C)$ et montrer que $C' = E$).
- 2) En déduire la nature du triangle EFC.



Les deux rectangles ABCD et AEFB sont superposables.

- 1) Démontrer que les droites (GE) et (BD) sont perpendiculaires et $GE = BD$.
- 2) Démontrer que AIJ est rectangle isocèle.



ABC un triangle rectangle isocèle direct de sommet principal A :

- 1) Construire $A' = r_{\left(B, \frac{\pi}{3}\right)}(A)$ puis le point $C' = r_{\left(A, \frac{\pi}{6}\right)}(C)$.

- 2) Démontrer que A, A' et C' sont alignés.



Les triangles ABC et CDE sont équilatéraux directs tel que $C = B * D$ et O désigne le point d'intersection entre les droites (AD) et (BE).

1) Montrer que la rotation $r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$ transforme ABC en CDE.

2) Trouver une autre rotation ayant aussi cette caractéristique.



ABC est un triangle direct quelconque : ABC_1C_2 et CAB_2B_1 sont les deux carrés indirects construits extérieurement à ABC. Soit r la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Soit $B' = r(B)$. Construire B' et justifier que A est le milieu de $[C_2B']$.

2) Soit I le milieu de $[BC]$ et $I' = r(I)$.

Construire I' . Justifier que (AI') est parallèle à (B_2C_2) .

3) Etablir que la médiane issue de A dans ABC est la hauteur issue de A dans AB_2C_2 .



ABCD un carré indirect on construit les triangles équilatéraux directs BCI et DCJ.

1) Soit E le point tel que AEC soit équilatéral direct. Montrer que B, D et E sont alignés.

2) En déduire que A, I et J sont alignés.



ABC un triangle direct quelconque. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés BCRS, CAMN, ABPQ de centre respectifs O_1 , O_2 et O_3 .

1) a) Utiliser une rotation de centre C pour démontrer que les segments $[AR]$ et $[NB]$ sont orthogonaux et de même longueur.

b) En déduire qu'il en est de même des segments $[C'O_1]$ et $[C'O_2]$ ou C' désigne le milieu de $[AB]$

2) Utiliser une rotation de centre C' pour démontrer alors que les segments $[O_1A]$ et $[O_2O_3]$ sont orthogonaux.

3) En déduire que les droites (AO_1) , (BO_2) et (CO_3) sont concourantes.



ABCD est un carré direct donné. Construire un triangle équilatéral AMN tel que N et M appartiennent respectivement aux droites (BC) et (CD).



ABC un triangle équilatéral de centre O et $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$. On

désigne par M, N, P des points appartenant respectivement aux côtes $[AB]$ et $[BC]$ et $[CA]$ tel que $AM = BN = CP$

$(M \neq A \text{ et } M \neq B)$.

- 1) Montrer qu'il existe une seule rotation R qui transforme A en B et M en N .
- 2) a) Déterminer une mesure de l'angle de R .
b) Montrer que O est le centre de R .
- 3) a) Déterminer les images des points N et P par R .
b) En déduire que MNP est équilatéral.
- 4) Soit ζ_1 et ζ_2 les cercles circonscrits respectivement aux triangles APM et BMN .
a) Montrer que $R(\zeta_1) = \zeta_2$.
b) $E \in \zeta_1$ et $r(E) = E'$. Montrer que M, E et E' sont alignés.
- 5) $f = r_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{3})}$.
a) Déterminer la nature de f et préciser son angle.
b) Construire le point D l'image de O par $r_{(B, \frac{\pi}{3})}$.
c) Montrer que $r_{(A, \frac{\pi}{3})}(D) = O$.
d) En déduire le centre de f .



Soit $ABCD$ un carré de centre I tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

- 1) a) Construire le point I' tel que $I' = r_{(A, \frac{\pi}{2})}(I)$.
b) Montrer que les droites (BI) et (DI') sont perpendiculaires.
c) Un point variable M décrit la droite (BC) . Quel est l'ensemble des points M' images de M par $r_{(A, \frac{\pi}{2})}$.
- 2) Soit le point I_1 définie par $r_{(A, \frac{\pi}{4})}(I_1) = I$. Construire I_1 Quelle est la rotation qui transforme I_1 en I' et I en I'' avec $(I'' = S_A(I_1))$.
- 3) Montrer qu'il existe une rotation R qui transforme I' en I et A en C .
Préciser le centre et l'angle de R .



ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$, I est le milieu de $[BC]$; J le point tel que B soit le milieu de $[JC]$, r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 est la rotation de centre B d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

- 1) Soit A' et B' les images respectives des points A et B par l'application $r_1 \circ r_2$.
a) Montrer que I est le milieu de $[AA']$.
b) Montrer que B est le milieu de $[AB']$.

2) En précisant la nature de $r_2 \circ r_1^{-1}$. Montrer que pour tout point M du plan, I est le milieu de $[M_1M_2]$; $M_1 = r_1(M)$ et $M_2 = r_2(M)$.

3) Montrer que $r_2 \circ r_1$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

14 Soit ABC un triangle, BOA isocèle et rectangle en O et ACO' est isocèle et rectangle en O' et tous directs.

1) Soit r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit r' la rotation de centre O' d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'image de B par $r' \circ r$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r' \circ r$.

2) a) I le milieu de $[BC]$. Quelle est l'image de O par $r' \circ r$?

b) En déduire que le triangle OIO' est rectangle et isocèle.

15 Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle et isocèle AB tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$, on note I, J, K les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[AC]$; $[AB]$.

1) On désigne par $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B$ et \mathcal{C}_C les cercles de diamètres respectifs $[AI], [BI]$ et $[CI]$. Soit r la rotation de centre I et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$. Déterminer les images par r de \mathcal{C}_C et \mathcal{C}_A . Par quelle

transformation passe-t-on de \mathcal{C}_C à \mathcal{C}_B .

2) a) A tout point M de \mathcal{C}_A distinct de I, J et K , on note N le point où la droite (MK) recoupe \mathcal{C}_B et P le point où la droite (MJ) recoupe \mathcal{C}_C . On note $P' = r(P)$. Etablir que les points J, P, P' sont alignés (on calculera $(\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PP'})$).

Déterminer alors $P' = r(P)$ et $M' = r(M)$.

b) En déduire que I est le milieu de $[NP]$ et que le triangle MNP est rectangle, isocèle.

16 Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$. \mathcal{C} le cercle de centre O circonscrit au triangle ABC .

I) Soit I, J, K les milieux respectifs de $[BC], [AC]$ et $[AB]$.

1) Soit r la rotation qui transforme A en B et J en K . Déterminer son centre et une mesure en radians de son angle.

2) Déterminer les images de I et K par r .

II) On construit les cercles \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' de même rayon de centre respectifs B et C et tangentes extérieurement l'un de l'autre.

1) Soit M un point de \mathcal{C}' et M' de \mathcal{C}'' , tel que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM'}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$. Montrer que la médiatrice de $[MM']$ passe par un point fixe que l'on précisera.

2) Soit D le point de \mathcal{C} diamétralement opposé à A et M'' l'image de M' par la rotation $R = R_{(D, \frac{2\pi}{3})}$.

a) Déterminer $R(C)$.

b) Montrer que M' et M'' sont deux points diamétralement opposés du cercle (\mathcal{C}') .

17 Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux diamètres perpendiculaires d'un cercle $\mathcal{C}(O, r)$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$. Soient E un point fixe de l'arc AC ne

contenant pas le point B et R la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $R(EC) = (ED)$.

2) Soit $M \in]EC[$ et $N \in]ED[$ tel que $CM = DN$. Montrer que $R(M) = N$.

3) Soit f différent de l'identité $f = S_{(AB)} \circ R$ avec $S_{(AB)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (AB) .

a) Déterminer $f(C)$ et $f(A)$.

b) Trouver la droite Δ tel que $R = S_{(AB)} \circ S_{\Delta}$; puis caractériser f .

4) Soit $I = M * N$. Montrer que $IA = IE$. En déduire que I varie sur une droite fixe lorsque M décrit $]EC[$.

18 Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$, r_1 , r_2 et r_3 désignent des rotations : $r_1 = r_{(A, \frac{\pi}{2})}$ et $r_2 = r_{(B, \frac{\pi}{2})}$ et $r_3 = r_{(C, \frac{\pi}{3})}$

1) On note $C_1 = r_1(C)$; $A_2 = r_2(A)$ et $C_2 = r_2(C)$.

a) Construire A_2 , C_1 , C_2 et trouver la nature du quadrilatère $AC_1C_2A_2$.

b) Montrer que CC_1C_2 est équilatéral dans le sens direct.

2) On note $I = A * C$, $J = B * C$ et $K = A * B$.

a) Vérifier que $r_3(I) = J$ et montrer que $C_1I = C_2J$ et que $(\overrightarrow{C_1I}, \overrightarrow{C_2J}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$.

b) Soit O le point commun de (BC_1) et (AC_2) . Montrer que O est le centre de gravité du triangle CC_1C_2 .

c) On note $K' = r_3(K)$ vérifier que $BK' = BK$ et déduire que $K' = S_{(BC)}(K)$.

CORRIGES

1

1) OAB est un triangle rectangle et isocèle en O,

donc $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

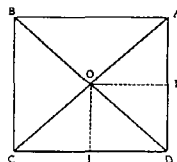
Donc $r(A) = B$ de même $r(C) = D$ et $r(D) = A$.

* On a $r(C) = D$ et $r(D) = A$ or $J = C * D$

et une rotation conserve les milieux.

Alors $r(J) = r(C) * r(D)$ soit $r(J) = D * A$ or $D * A = I$

Ainsi $r(J) = I$.



2) $r(A) = B$ et $r(J) = I$ alors $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{BI}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ par suite $(AJ) \perp (BI)$.

2

$$1) r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(B) = D \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AD \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

$$r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)(C) = E \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AE \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

2) $S_A(E) = F \Leftrightarrow A = E * F$ alors $AE = AF$

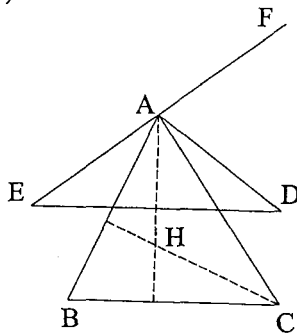
or on a : $AC = AE$ d'où $AC = AF$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) &\equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) (2\pi) \\ &\equiv -\frac{\pi}{2} + \pi (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{aligned}$$

par suite : $AC = AF$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ d'où $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(C) = F$.

3) $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(C) = F$ et $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(B) = D$ alors $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{FD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc $(CB) \perp (FD)$.

4) On a $(AH) \perp (BC)$ et $(BC) \perp (FD)$ alors $(AH) \parallel (DF)$. Dans le triangle EFD on a $A = E * F$ et $(AH) \parallel (FD)$ donc (AH) coupe $[ED]$ en son milieu par suite (AH) représente la médiane issue de A pour le triangle AED.



3

1) ADF équilatéral donc $FA = FD$ et $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$.

Cela prouve que A est l'image de D par la rotation de centre F d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

r est la rotation de centre F d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Posons $r(C)=C'$ comme $r(D)=A$

Donc $DC = AC'$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC'}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$.

$AE = AB$ (AEB équilatéral)

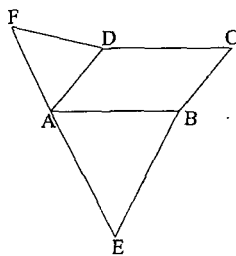
et $AB = DC$ (ABCD parallélogramme)

par suite $AE = DC$

de plus $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) (2\pi)$ car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$ (ABE équilatéral)

donc $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$.



On vient de montrer que $AE = AC'$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC'}) (2\pi)$.

Cela prouve que $C' = E$ et donc $r(C) = E$.

$$2) r\left(F, -\frac{\pi}{3}\right)(C) = E \Leftrightarrow \begin{cases} FC = FE \\ (\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FE}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \quad \text{d'ou EFC est équilatéral.}$$



1) On a $AB = AE$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$. Alors r la rotation de centre A

d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme B en E donc $r(B) = E$.

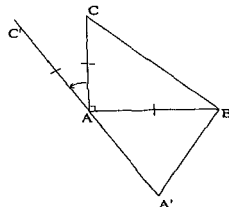
On a $AD = AG$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ alors $r(D) = G$.

Par suite $r(D) = G$ et $r(B) = E$ d'ou $DB = GE$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{GE}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ ou encore $(DB) \perp (GE)$.

2) On a : $I = B * D$ comme r conserve le milieu alors $r(I) = r(B) * r(D) = E * G$ or $E * G = J$.

$$\text{D'ou } r(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} AI = AJ \\ (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \text{ par suite } AI = AJ \text{ et } (AI) \perp (AJ).$$

Finalement AIJ est isocèle et rectangle en A .



5

$$1) r_{(B, \frac{\pi}{3})}(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} BA = BA' \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

$$r_{(A, \frac{\pi}{6})}(C) = C' \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AC' \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi) \end{cases}$$

2) (1) donne ABA' est équilatéral direct donc $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$

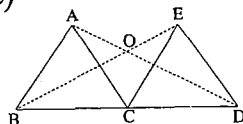
$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC'}) &\equiv (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) (2\pi) \\ &\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (2\pi) \equiv \pi (2\pi). \end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont colinéaires par suite A, A' et C' sont alignés.

6

$$1) (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}) \equiv (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{3} + \pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) (2\pi) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) (1)$$



comme $AC = BC$ (ABC équilatéral) et $CE = CD$ (CED équilatéral) or $BC = CD$ par suite $AC = CE$ (2)

(1) et (2) donnent ACE est un triangle équilatéral direct.

* $ABCE$ est un parallélogramme donc (BE) coupe $[AC]$ en son milieu donc (EB) est une médiane de ACE .

* $ACDE$ est un parallélogramme donc (DA) coupe $[EC]$ au milieu d'où (DA) est une médiane de ACE . On conclut que (DA) et (EB) sont deux médianes de ACE par suite I est le centre du cercle circonscrit à ACE . Par conséquent $OA = OE = OC$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{2\pi}{3} (2\pi), (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}) \equiv \frac{2\pi}{3} (2\pi); (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{2\pi}{3} (2\pi)$.

Donc la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme A en C ; C en E. Reste

à montrer que $r(B) = D$; On a $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) \equiv (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{2\pi}{3} (2\pi)$

$$\left. \begin{aligned} OB &= BE - OE \\ OD &= AD - OA \end{aligned} \right\} \text{alors } OB = OD.$$

D'où $r(B) = D$ finalement la $r_{(O, \frac{2\pi}{3})}$ transforme ABC en CDE .

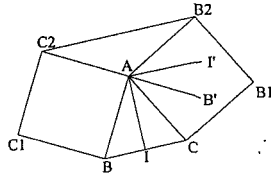
2) On a $CB = CE$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}) \equiv -\frac{2\pi}{3} (2\pi)$ équivaut à $r_{(C, -\frac{2\pi}{3})}(B) = E$

et $CA = CD$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{2\pi}{3} (2\pi)$ équivaut à $r_{(C, -\frac{2\pi}{3})}(A) = D$

or $r_{(C, -\frac{2\pi}{3})}(C) = C.D'$ ou la rotation de centre c d'angle $(-\frac{2\pi}{3})$ transforme ABC en DEC .



$$1) r(B) = B' \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AB' \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$



$$(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC_2}) \equiv (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_2})(2\pi) \equiv (-\frac{\pi}{2}) + (\frac{\pi}{2})(2\pi) \equiv -\pi (2\pi).$$

Donc $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AC_2}$ colinéaires donc A, B' et C_2 sont alignés. Comme $AC_2 = AB$ (ABC_1C_2 carré) et $AB = AB'$ d'où $AB' = AC_2$ par suite $A = B' * C_2$.

$$2) r(I) = I' \Leftrightarrow \begin{cases} AI = AI' \\ (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

* $AC = AB_2$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_2}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ (ACB_1B_2 carré) donc $r(C) = B_2$.

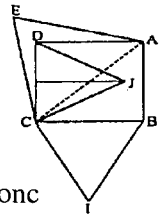
* I étant le milieu de $[BC]$ alors $r(I)$ est le milieu de $r[BC] = [B'B_2]$ d'où $I' = B' * B_2$. D'après le théorème des milieux dans le triangle $C_2B'B_2$ $I' = B' * B_2$ et $A = C_2 * B'$ donc $(AI') \parallel (B_2C_2)$.

3) On a : $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ alors $(AI) \perp (AI')$. Comme $(AI') \parallel (B_2C_2)$ donc $(AI) \perp (B_2C_2)$. Par suite (AI) est la hauteur issue de A pour le triangle AB_2C_2



1) On a $BC = BA$ ($ABCD$ carré)

$EC = EA$ (AEC équilatéral) et $DC = DA$ ($ABCD$ carré) donc B, E et D sont sur la médiatrice de $[AC]$ par suite B, E et D sont alignés.



2) On a BIC équilatéral alors $CI = CB$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CI}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$ donc

$$r_{(C, -\frac{\pi}{3})}(B) = I \text{ de même } r_{(C, -\frac{\pi}{3})}(D) = J \text{ et } r_{(C, -\frac{\pi}{3})}(E) = A.$$

On sait que B, E et D sont alignés et une rotation conserve l'alignement alors I, J et A sont alignés



1) a) $ACNM$ est un carré. Alors $CN = CA$

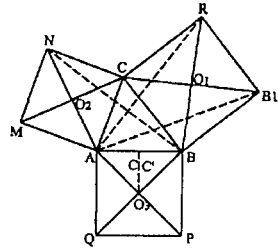
et $(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc $r_{(C, \frac{\pi}{2})}(N) = A$.

* CBSR est un carré alors $CB = CR$

et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CR}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc $r_{(C, \frac{\pi}{2})}(B) = R$.

Comme $r_{(C, \frac{\pi}{2})}(N) = A$ alors

$(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{RA}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et $BN = AR$ d'où $(BN) \perp (AR)$ et $BN = AR$.



b) Dans le triangle ABR on a : $C' = A * B$ et $O_1 = R * B$ donc $\overrightarrow{C'O_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AR}$ d'où

$(C'O_1) \parallel (AR)$. Dans le triangle ABN on a : $C' = A * B$ et $O_2 = A * N$ donc

$\overrightarrow{C'O_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BN}$ d'où $(C'O_2) \parallel (BN)$ or $(BN) \perp (AR)$ d'où $(C'O_2) \perp (AR)$ comme

$(AR) \parallel (C'O_1)$ par suite $(C'O_2) \perp (C'O_1)$.

* $C'O_1 = \frac{1}{2} AR = \frac{1}{2} BN$ or $\frac{1}{2} BN = C'O_2$ par suite $C'O_1 = C'O_2$.

2) * On a : $C'O_1 = C'O_2$ et $(\overrightarrow{C'O_1}, \overrightarrow{C'O_2}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc $r_{(C', \frac{\pi}{2})}(O_1) = O_2$.

* $C'O_3 = C'A$ et $(\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'O_3}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$. Donc $r_{(C', \frac{\pi}{2})}(A) = O_3$ comme

$r_{(C', \frac{\pi}{2})}(O_1) = O_2$ d'où $AO_1 = O_2O_3$ et $(\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{O_3O_2}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ ou encore

$(O_1A) \perp (O_2O_3)$.

3) Ainsi (O_1A) est la hauteur issue de O_1 du triangle $O_1O_2O_3$. On démontre même façon que (O_2B) et (O_3C) sont les deux autres. Ces trois droites sont donc concourantes en tant que hauteurs du triangle $O_1O_2O_3$.

10 1^{er} étape Analyse :

AMN est équilatéral ou encore $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ et $AM = AN$

équivalent $r_{(A, \frac{\pi}{3})}(M) = N$. $M \in (CD)$ alors $r(M) \in r(CD)$ on considère

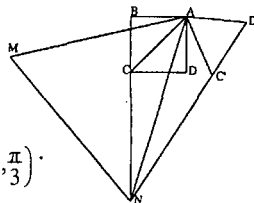
$C' = r(C)$ et $D' = r(D)$ d'où $N \in (C'D')$

or $N \in (BC)$ donc $N \in (C'D') \cap (BC)$.

2^{ème} étape : construction :

- Construire $(C'D')$ image de (CD) par $r_{(A, \frac{\pi}{3})}$.

- Marquer le point $N \in (C'D') \cap (BC)$.



- Construire M tel AMN équilatéral direct.

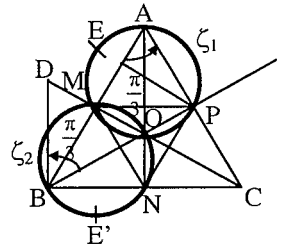
11

1) On a $AM = BN$ et $AM \neq 0$ ($M \neq A$)
alors il existe une seule rotation R tel
que $R(A) = B$ et $R(M) = N$.

2) a) On a $R(A) = B$ et $R(M) = N$
alors l'angle de R est

$$\begin{aligned} \overline{(AM, BN)} &\equiv \overline{(AB, BC)}(2\pi) \equiv \overline{(BA, BC)} + \pi(2\pi) \\ &\equiv -\frac{\pi}{3} + \pi(2\pi) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi) \end{aligned}$$

d'où l'angle de R est $\frac{2\pi}{3}$



b) Soit Ω le centre de R et $R(A) = B$ sig $\Omega A = \Omega B$ et $\overline{(\Omega A, \Omega B)} \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

comme ABC est un triangle équilatéral de centre O

alors $OA = OB$ et $\overline{(OA, OB)} \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ donc $\Omega = O$

3) a) ABC est un triangle équilatéral de centre O

Alors : $OA = OB = OC$ et $\overline{(OA, OB)} \equiv \overline{(OB, OC)} \equiv \overline{(OC, OA)} \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

donc $R(B) = C$ et $R(C) = A$ on sait que $AM = BN = CP$

et $AB = BC = CA$ d'où $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA} = k$ donc $\overline{AM} = k \overline{AB}$ (1)

et $\overline{BN} = k \overline{BC}$ et $\overline{CP} = k \overline{CA}$ (2) Comme R conserve l'équivalence

alors $\overline{R(B)R(N)} = k \overline{R(B)R(C)}$ et $\overline{R(C)R(P)} = k \overline{R(C)R(A)}$

$\overline{C R(N)} = k \overline{CA}$ (3) et $\overline{A R(P)} = k \overline{AB}$ (4)

(1) et (4) donne $R(P) = M$ et d'après (2) et (3) donne $R(N) = P$

b) $R(P) = M$ et $R(N) = P$ et $R(M) = N$ et comme la rotation elle conserve les distances alors $PN = MP$ et $NM = PN$ et $PM = MN$
donc $PN = MN = MP$ par suite MPN est équilatéral.

4) a) $R(\zeta_1)$ est le cercle circonscrit au triangle $R(APM) = BMN$

(car $R(A) = B$, $R(P) = M$ et $R(M) = N$) d'où $R(\zeta_1) = \zeta_2$.

b) $\overline{(ME, ME')} \equiv \overline{(ME, NE')} + \overline{(NE', ME')}(2\pi)$

$$\equiv \frac{2\pi}{3} + \overline{(E'N, E'M)}(2\pi) \quad (R(M) = N \text{ et } R(E) = E')$$

$$\equiv \frac{2\pi}{3} + \overline{(BN, BM)}(2\pi) \quad \text{car } E \in \zeta_1 \Rightarrow R(E) \in (\zeta_1) \Rightarrow E' \in \zeta_2.$$

$$\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \equiv \pi(2\pi)$$

donc \overline{ME} , $\overline{ME'}$ sont colinéaires par suite M, E, E' sont alignés.

5) a) f est la composée de deux rotations comme $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \neq 2k\pi$

Donc f est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) $r_{(B, \frac{\pi}{3})}(O) = D \Leftrightarrow BD = BO$ et $(\overline{BO}, \overline{BD}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$

c) $r_{(B, \frac{\pi}{3})}(O) = D \Leftrightarrow BDO$ est équilatéral direct. or $(\overline{BO}, \overline{BA}) \equiv \frac{\pi}{6}(2\pi)$

donc (BA) est la médiatrice de [OD]. ainsi DA = AO or AO = OB
d'où DA = OB comme OB = OD par suite DA = OD = OA

Soit AOD équilatéral. soit AD = AO et $(\overline{AD}, \overline{AO}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \Leftrightarrow r_{(A, \frac{\pi}{3})}(D) = O$

d) $f(O) = r_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{3})}(O) = r_{(A, \frac{\pi}{3})}[r_{(B, \frac{\pi}{3})}(O)] = r_{(A, \frac{\pi}{3})}(D) = O$

Donc O est le centre de f.

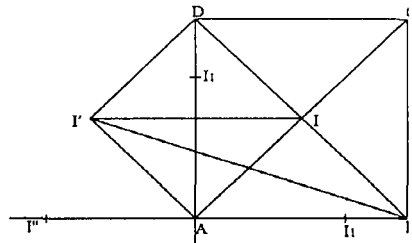
12 1) a) $f = r_{(A, \frac{\pi}{2})}(I)$ a)

$\Leftrightarrow AI = AI'$ et $(\overline{AI}, \overline{AI'}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

b) ABCD est un carré direct alors AB = AD

et $(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ ou encore

$r_{(A, \frac{\pi}{2})}(B) = D$ or $r_{(A, \frac{\pi}{2})}(I) = I'$.



Alors BI = DI' et $(\overline{BI}, \overline{DI'}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

d'où (BI) \perp (DI').

c) $r_{(A, \frac{\pi}{2})}(B) = D$ et on pose $C' = r_{(A, \frac{\pi}{2})}(C)$ alors l'image de la droite (BC) par

$r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}$ est la droite (DC') et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ d'ou $(BC) \perp (C'D)$

or $(BC) \perp (CD)$ d'ou $(DC') = (DC)$.

$M \in (BC) \Leftrightarrow r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}(M) \in r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}(BC) \Leftrightarrow M' \in (DC)$.

Par conséquent l'ensemble décrit par M' est la droite (DC) .

2) $r_{\left(A, \frac{\pi}{4}\right)}(I_1) = I \Leftrightarrow AI_1 = AI$ et $(\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$

et on a $AI = AI'$ et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc $AI' = AI_1$

et $(\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI'}) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (2\pi) \equiv \frac{3\pi}{4} (2\pi)$ ou encore $r_{\left(A, \frac{3\pi}{4}\right)}(I_1) = I'$.

* $S_A(I_1) = I'' \Leftrightarrow (\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI''}) \equiv \pi (2\pi)$ et $AI_1 = AI''$ or $AI_1 = AI$

et $(\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$.

d'ou $AI = AI''$ et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI''}) \equiv (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI_1}) + (\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI''}) (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{4} + \pi (2\pi) \equiv \frac{3\pi}{4} (2\pi)$.

3) $ABCD$ est un carré donc $DA = DC$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc $r_{\left(D, \frac{\pi}{2}\right)}(A) = C$.

On a d'après 1^{ère} question : $BI = DI'$ et $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{DI'}) \equiv \frac{\pi}{2}$ comme I est le milieu de

$[BD]$ alors $BI = ID$ d'ou $DI = DI'$ et $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{DI'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

soit $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{DI'}) + (\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DI'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

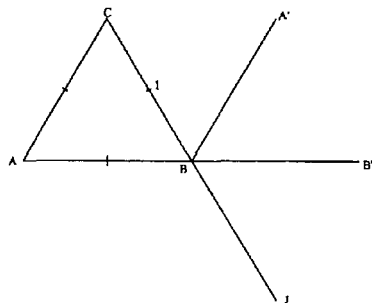
ou encore $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DI'}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{DI'}, \overrightarrow{DI}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

Or $DI = DI'$ d'ou $r_{\left(D, \frac{\pi}{2}\right)}(I') = I$. On conclut que $R = r_{\left(D, \frac{\pi}{2}\right)}$.

13 1) a) $A' = r_2 \circ r_1(A)$
(or r_1 de centre A , $r_1(A) = A$).

d'ou $A' = r_2(A) \Leftrightarrow \begin{cases} BA = BA' \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) \equiv -\frac{2\pi}{3} (2\pi) (1) \end{cases}$

comme $BA = BC$ donc $BA' = BC$.



et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) (2)$ alors (1) + (2) donne $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$ donc $BA' \cdot C$ est équilatéral d'où $BA' = A'C$ et $BA' = BC = BA = AC$ (ABC équilatéral donc $AB = BA' = A'C = AC$ par conséquent $ABA' \cdot C$ est un losange.

On conclut que la diagonale $[BC]$ coupe $[AA']$ en son milieu I.

$$b) \text{ ABC équilatéral direct } \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow r_1(B) = C$$

alors $B' = r_2 \circ r_1(B) = r_2(C)$ d'où $BB' = BC$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}) \equiv -\frac{2\pi}{3} (2\pi)$ comme

$BC = BA$ donc $BB' = BA$ il reste l'alignement de A, B, B'.

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'}) \equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}) (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{2\pi}{3}\right) (2\pi) \equiv -\pi (2\pi)$$

Donc A, B et C alignés de plus $BC = BA$ par conséquent B est le milieu de $[AB']$.

2) r_1^{-1} est la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

$r_2 \circ r_1^{-1}$ est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \equiv -\pi (2\pi)$ donc une symétrie centrale de centre H.

* $r_1(M) = M_1 \Leftrightarrow r_1^{-1}(M_1) = M$ or $M_2 = r_2(M)$ par suite $M_2 = r_2 \circ r_1^{-1}(M_1)$ comme $r_2 \circ r_1^{-1}$ est une symétrie centrale de centre H alors $H = M_1 * M_2$ il reste à prouver que $H = I$.

* Pour déterminer le centre d'une symétrie centrale, il suffit de reconnaître l'image d'un point par cette symétrie.

En examinant la figure, il apparaît que l'on connaît l'image de C par $r_2 \circ r_1^{-1}$;

$r_2 \circ r_1^{-1}(C) = r_2(B) = B$ donc $H = B * C$ or $B * C = I$ par suite $H = I$.

3) La somme des angles r_2 et r_1 est $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \neq 0 (2\pi)$ donc $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Déterminons son centre on a : $r_2 \circ r_1(A) = A'$

et $B' = r_2 \circ r_1(B)$ donc le centre de $r_2 \circ r_1$ appartient à la médiatrice de $[AA']$ et $[BB']$.

La médiatrice de $[AA']$ est (BC) car $ABA' \cdot C$ est un losange d'après 1^{ère} question :

* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA'}$ car $ABA' \cdot C$ est un parallélogramme.

* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{JB'}$ car $B = A * B' = J * C$ donc $ACB' \cdot J$ est un parallélogramme.

On déduit que $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{JB'}$ d'où $BA'B'J$ est un parallélogramme or $BA' = BC$ (BCA' équilatéral) $BC = BJ$ ($B = C * J$) donc $BA' = BJ$ par suite $BA'B'J$ est un losange.

Par conséquent $[A'J]$ est la médiatrice de $[BB']$. En conclusion : J est le point d'intersection des deux médiatrices, le centre de $r_2 \circ r_1$ et J .

14

1) a) On a BOA triangle rectangle et isocèle en O et direct alors $OB = OA$

et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ d'où $r(B) = A$.

et $r'(A) = C$ car $O'A = O'C$

et $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'C}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

donc $r' \circ r(B) = r'(A) = C$.

b) La somme des angles de r et r' est égale à π donc $r' \circ r$ est une symétrie centrale de centre H .

Or $r' \circ r(B) = C$ donc $H = B * C$ par suite $H = I$. On a donc $r' \circ r = S_I$.

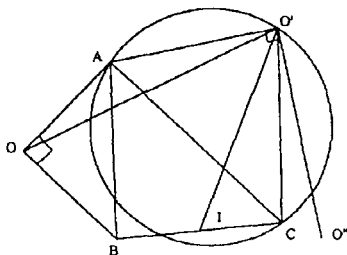
2) a) $r' \circ r(O) = S_I(O) = O''$ tel que $O * O'' = I$.

b) $r' \circ r(O) = r'(O) = O''$ donc $OO'O''$ est isocèle et rectangle en O' .

* $OO'O''$ est rectangle en O' et $I = O * O''$ alors $IO' = IO = IO'$ d'où OIO' est isocèle de sommet principal I .

* $O'O'' = O'O$ et $IO = IO''$ donc (IO') est la médiatrice du segment $[OO'']$ par suite $(IO') \perp (IO)$ donc OIO' est rectangle en I .

Conclusion : OIO' est isocèle et rectangle en I .



15 1) $r(\mathcal{C}_C)$ est le cercle de diamètre $r([IC])$

comme ABC est rectangle

et isocèle en A alors $IC = IA$

et $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

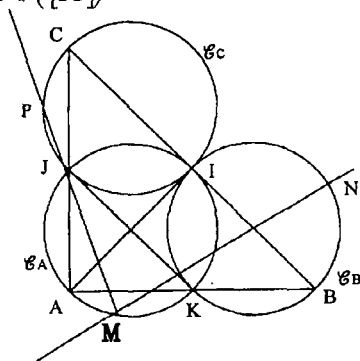
ou encore $r(C) = A$.

I est le centre de la rotation ainsi $r(I) = I$

Par suite $r([IC]) = [IA]$.

On vient de prouver que $r \mathcal{C}_C = \mathcal{C}_A$.

* De même $r(\mathcal{C}_A) = \mathcal{C}_B$.



* $r \circ r (\mathcal{C}_C) = r (\mathcal{C}_A) = \mathcal{C}_B$ comme r est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi (2\pi)$ ou encore c'est la symétrie centrale de centre I puisque

$$r\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \circ r\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = r(1, \pi) = S_I. \text{ D'où } S_I(\mathcal{C}_C) = \mathcal{C}_B.$$

$$2) r(P) = P' \Leftrightarrow IP = IP' \text{ et } (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IP'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

d'où PIP' est rectangle et isocèle en I $(\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PP'}) \equiv (\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PI}) + (\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{PP'}) (2\pi)$.

* On a P, I, J, C sont sur le cercle \mathcal{C}_C alors $(\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PI}) \equiv (\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CI}) (\pi) \equiv \frac{\pi}{4} (\pi)$

PIP' est rectangle et isocèle en I et direct d'où $(\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{PP'}) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi)$

par suite $(\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PP'}) \equiv 0 (2\pi)$ ou encore P, J et P' alignés.

* Déterminons $P' = r(P)$.

$P \in \mathcal{C}_C$ alors $r(P) \in r(\mathcal{C}_C)$ donc $P' \in \mathcal{C}_A$.

P, P', J alignés alors $P' \in (PJ)$

donc $P' \in (PJ) \cap \mathcal{C}_A$ et $P' \neq J$ donc $P' = M$.

On a dans le triangle ABC : $I = B^*C$ et $J = A^*C$ alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{KA}$ donc

IJAK est un parallélogramme or $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AJ}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et $AJ = AK = \frac{1}{2} AB$ donc

AJIK est un carré.

Donc $r(J) = K$ comme $r(P) = M$ d'où $r(PJ) = (MK)$ comme $M \in \mathcal{C}_A \cap (PJ)$

par suite $r(M) \in r(\mathcal{C}_A) \cap r(PJ)$ ou encore $M' \in \mathcal{C}_B \cap (MK)$ par suite $M' = N$.

b) $r(P) = M$ et $r(M) = N$ donc $r \circ r(P) = r(M) = N$. Or $r \circ r = S_I$ d'où

$S_I(P) = N \Leftrightarrow I$ est le milieu de $[PN]$ de plus $r(P) = M$ et $r(M) = N$

d'où $PM = MN$ et $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{MN}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ par suite PMN est isocèle et rectangle

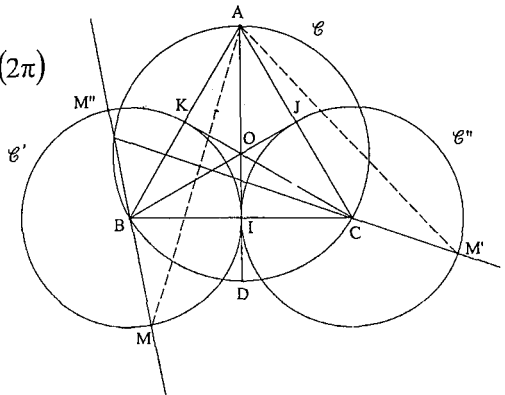
en M.

$$\text{16) } \text{I) } OA = OB \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{2\pi}{3} (2\pi)$$

ou encore $r\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)(A) = B$

$$OJ = OK \text{ et } (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}) \equiv \frac{2\pi}{3} (2\pi)$$

ou encore $r\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)(J) = K$



est la droite perpendiculaire à (EC) en D.

$$R(EC) \perp (EC) \text{ or } (EC) \perp (ED)$$

((CD] diamètre \mathcal{C} et $E \in \mathcal{C}$ d'où $R(EC) = (ED)$.

2) $M \in (EC)$ alors $R(M) \in (ED)$,

$$R(M) = M' \text{ et } R(C) = D \text{ alors } (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{M'D}) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ et } MC = M'D \text{ or on a}$$

$$MC = ND \text{ et } (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{ND}) \equiv (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

donc $(\overrightarrow{ND}, \overrightarrow{M'D}) \equiv (\overrightarrow{ND}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{M'D}) \equiv 0 (2\pi)$ \overrightarrow{ND} et $\overrightarrow{M'D}$ sont colinéaires

de même sens or $MC = ND = M'D$ d'où $\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{M'D}$ par suite $M' = N$ ou encore $R(M) = N$.

3) a) $f(C) = S_{(AB)} \circ R(C) = S_{(AB)}(D) = C$ d'où $f(C) = C$.

$$f(A) = S_{(AB)} \circ R(A) = S_{(AB)}(A) = A \text{ d'où } f(A) = A$$

b) $A \in (AB)$ donc il existe une droite Δ de vecteur directeur \vec{u} tel que

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \text{ or } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \text{ d'où } \vec{u} = \overrightarrow{AC}.$$

Par suite $\Delta = (AC)$ ainsi $R = S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$.

$$* f = S_{(AB)} \circ R = S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = S_{(AC)}.$$

4) $R(M) = N$ équivaut à $AM = AN$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc AMN est un

triangle rectangle et isocèle en A or $I = M * N$ donc $IA = IM = IN$.

* [CD] diamètre de \mathcal{C} et $E \in \mathcal{C}$ alors CED est rectangle en E par suite MEN est rectangle en E et $I = M * N$ donc $EI = IM = IN$ or $IM = IA$.

On conclut que $IE = IA$.

- $IE = IA$ donc I varie sur la médiatrice de [AE].



1) a) $r_1(C) = C_1 \Leftrightarrow AC = AC_1$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

$$A_2 = r_2(A) \Leftrightarrow BA = BA_2 \text{ et } (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA_2}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

$r_2(C) = C_2 \Leftrightarrow BC = BC_2$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC_2}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

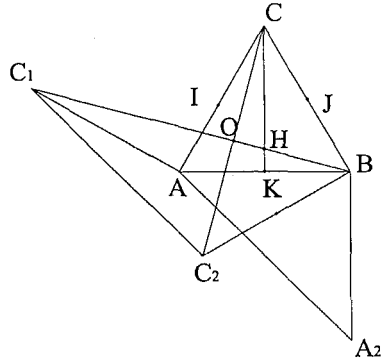
$r_2(A) = A_2$ et $r_2(C) = C_2$ alors $AC = A_2C_2$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_2C_2}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

comme $(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc $(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_2C_2}) \equiv 0 (2\pi)$

d'où $(AC_1) \parallel (A_2C_2)$ et $AC = A_2C_2 = AC_1$

par suite $AC_1C_2A_2$ est un parallélogramme.

b) On sait que ACC_1 est rectangle et isocèle en A par suite
 $CC_1^2 = AC^2 + AC^2 = 2AC^2$
 d'où $CC_1 = \sqrt{2} \cdot AC$
 de même CBC_2 rectangle et isocèle en B
 d'où $CC_2 = \sqrt{2} \cdot BC$,



$AC_1C_2A_2$ est un parallélogramme
 alors $C_1C_2 = AA_2 = \sqrt{2} \cdot AB$
 (on a utilisé le triangle ABA_2).

Comme $AC = BC = AB$ (ABC équilatéral) on déduit que $C_1C_2 = CC_2 = CC_1$
 ou encore CC_1C_2 est équilatéral.

2) a) $CI = CJ = \frac{1}{2} CA$ et $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ donc $r_3(I) = J$

CC_1C_2 équilatéral alors $CC_2 = CC_1$ et $(\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{CC_2}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$

D'où $r_3(C_1) = C_2$ comme $r_3(I) = J$ alors $IC_1 = JC_2$ et $(\overrightarrow{C_1I}, \overrightarrow{C_2J}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$.

b) $C_1C = C_1C_2$ et $BC = BC_2$ donc (BC_1) est la médiatrice de $[CC_2]$

$AC = AC_1$ et $C_2C_1 = C_2C$ donc (AC_2) est la médiatrice de $[CC_1]$

donc O l'intersection des deux médiatrices (BC_1) et (AC_2) le centre de gravité du triangle CC_1C_2 .

c) ABC équilatéral direct $CA = CB$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ donc $r_3(A) = B$.

Or $r_3(K) = K'$ donc $AK = BK'$ or $K = A*B$ d'où $BK = BK'$.

$r_3(K) = K'$ donc $CK = CK'$ or $BK = BK'$.

D'où (BC) est la médiatrice de $[KK']$ ou encore $S_{(BC)}(K) = K'$.

Chapitre V

Les nombres complexes

1) L'ensemble des nombres complexes :

\mathbb{C} est l'ensemble des éléments notés $x + iy$ avec x et y des réels quelconques tels que :

■ $i^2 = -1$.

■ Les règles de calculs dans \mathbb{R} s'applique dans \mathbb{C} .

2) Forme algébrique ou cartésienne d'un nombre complexe :

■ Tout nombre complexe Z s'écrit, de façon unique, sous la forme :

$$Z = x + iy \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des réels.}$$

■ x est la partie réelle de Z qu'on note $\text{Ré}(Z)$.

■ y est la partie imaginaire de Z qu'on note $\text{Im}(Z)$.

3) Propriétés :

Z et Z' deux nombres complexes tels que $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$.

■ $Z + Z' = (x + x') + i(y + y')$; $ZZ' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

■ $Z = Z' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$.

■ Z est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0$.

■ Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Ré}(Z) = 0$.

■ $Z = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$.

4) Nombres complexes conjugués :

■ Le conjugué du nombre complexe $Z = x + iy$

où x et y sont des réels est le nombre $\bar{Z} = x - iy$.

■ Z est réel $\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$.

■ Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Z = -\bar{Z}$.

■ Quels que soient les nombres complexes Z et Z' :

$$\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z}'$$

$$\overline{Z \cdot Z'} = \bar{Z} \cdot \bar{Z}'$$

$$\text{Si } Z' \neq 0 ; \left(\frac{Z}{Z'} \right) = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}'}$$

5) Affixe : d'un point - d'un vecteur :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

■ Affixe d'un point : A tout point M de coordonnées (x, y) , on associe le nombre complexe $Z = x + iy$, appelé affixe du point M , noté $M(Z)$.

■ Affixe d'un vecteur : A tout vecteur $\vec{W} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on associe le nombre

complexe $Z = x + iy$, appelé affixe du vecteur \vec{W} , noté $\text{aff}(\vec{W})$.

* $M \in (O, \vec{u}) \Leftrightarrow Z$ est réel.

* $M \in (O, \vec{v}) \Leftrightarrow Z$ est imaginaire pur.

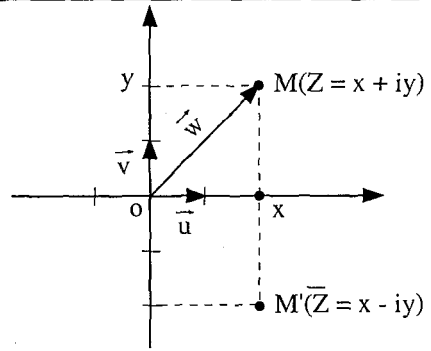
■ A et B deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B

alors l'affixe du vecteur \vec{AB} noté :

$$\text{aff}(\vec{AB}) = Z_B - Z_A = Z_{\vec{AB}}$$

I le milieu de $[AB]$ est d'affixe

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$



6) Module d'un nombre complexe :

■ Le module d'un nombre complexe $Z = x + iy$ est :

$$|Z| = \sqrt{Z \cdot \bar{Z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = OM.$$

■ Quel que soient les nombres complexes on a :

$ Z = 0 \Leftrightarrow Z = 0$	$ Z \cdot Z' = Z \cdot Z' $	$ Z = \bar{Z} $
Si $Z' \neq 0$; $\frac{ Z }{ Z' } = \frac{ Z }{ Z' }$	n entier relatif ; $ Z^n = Z ^n$	
$ Z + Z' \leq Z + Z' $	$ Z = 1 \Leftrightarrow Z \cdot \bar{Z} = 1 \Leftrightarrow \bar{Z} = \frac{1}{Z}$	

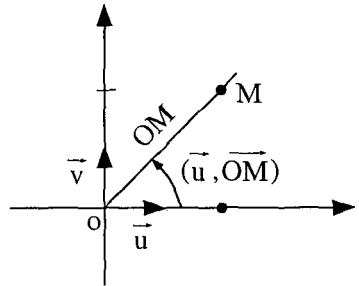
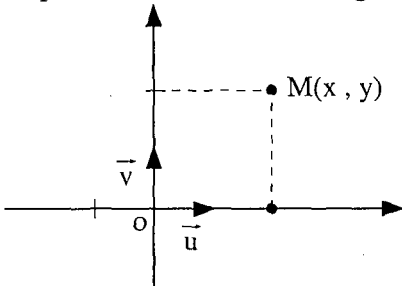
7) Représentation géométrique d'un nombre complexe :

(O, \vec{u}, \vec{v}) un repère orthonormé du plan.

■ Tout point du plan distinct de l'origine O est repéré de deux façons :

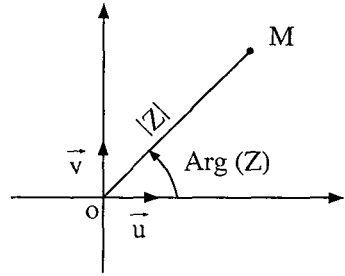
* par ses coordonnées (x, y) .

* par sa distance OM et l'angle (\vec{u}, \vec{OM}) .



■ Soient $M(x, y)$ et $Z = x + iy$ donc $M(Z)$, Le module de $|Z|$ est OM .

* $Z \neq 0$, alors un argument de Z est une mesure en radians de l'angle (\vec{u}, \vec{OM}) ;
noté $\text{Arg}(Z) \equiv (\vec{u}, \vec{OM})(2\pi)$.



8) Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

■ Si $Z \neq 0$, $Z = x + iy$ ou x et y sont deux réels.

$$\text{Arg}(Z) = \theta \text{ et } |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$Z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

L'écriture $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est la forme trigonométrique de Z .

L'écriture $Z = [r, \theta]$ est la forme polaire de Z .

a) 0 n'a pas de forme trigonométrique.

b) Tous les arguments de Z sont de la forme $\theta + 2k\pi$.

9) Propriétés :

Pour tout nombre complexe non nul Z et Z' tels que :

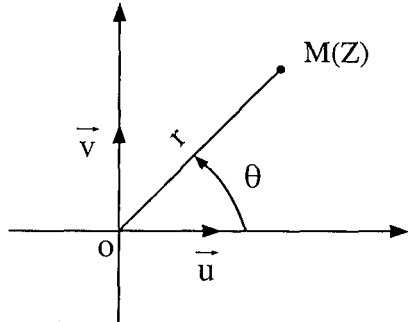
$Z = [r, \theta]$, $Z' = [r', \theta']$. Alors on a :

a) $Z \cdot Z' = [r r', \theta + \theta'] = r r' (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$

b) $Z' \neq 0$; $\frac{Z}{Z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right] = \frac{r}{r'} (\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta'))$

c) $Z^n = [r^n, n\theta] = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

d) $Z = Z' \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \theta = \theta' + 2k\pi$



■ **Equation de la forme $Z^2 = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$**

Si $\alpha = 0$ alors $Z^2 = 0 \Leftrightarrow Z = 0$

Si $\alpha \neq 0$ alors $Z^2 = \alpha \Leftrightarrow Z = i\sqrt{|\alpha|}$ ou $Z = -i\sqrt{|\alpha|}$

▪ **Astuces** : Pour simplifier un rapport, il est souvent intéressant de mettre i en facteur au numérateur avant de se jeter sur l'expression conjuguée du dénominateur.

$$\text{Exemple : } \frac{-10+4i}{2+5i} = \frac{i(10i+4)}{2+5i} = \frac{2i(2+5i)}{2+5i} = 2i$$

▪ **Réflexes** :

Situations	Réflexes
On dit : Ecrire Z sous forme trigonométrique	1) On utilise la méthode direct module et argument (mise en facteurs...) 2) utiliser l'écriture polaire Si on a $\frac{Z_1}{Z_2}$ où $Z_1 Z_2$ où Z_1^2
On dit calculer Z élevé à une grande puissance (Exp. : Z^{2006})	On écrit Z sous forme trigonométrique puis On cherche une mesure principale de l'argument de cette puissance.
On doit déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ Tel que $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ vérifie une propriétés d'appartenance (réel où imaginaire où réel non nul,...) → Si on a module	* On privilège la méthode géométrique : On utilisant Argument et on caractérise l'ensemble chercher à l'aide des ongles orientes * Si non la méthode algébrique on pose $z = x + iy$ et on retrouve l'équation d'une droite, cercle, arc, segment → On remplace par les distance
On doit déterminer la nature d'un triangle	On calcul les 3 distances (les modules) du triangle et précisera la nature des triangles.

Attention : * $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ et non $|a+ib| = \sqrt{a^2+(ib)^2}$

* il faut pas écrire $\overline{z_1+iz_2} = z_1-iz_2$ mais la bonne réponse est $\overline{z_1-iz_2}$ car z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$

• Remarque : il n'y a pas de relation d'ordre dans \mathbb{C} (\geq , $<$).

ENONCÉS

1

Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier cette réponse:

- $i^3 + i^2 + i + 1 = 0$
- $(2+3i)(1-2i) = -4 - i$
- $(i-1)^4$ est un réel
- Le conjugué de $6i - 3$ et $6i + 3$
- La partie imaginaire de $5 - 7i$ est $-7i$.

2

Q.C.M

Indiquer la réponse exacte par a, b ou c avec justification.

- Si z est un nombre complexe alors $\text{Ré}(iz)$ est :
 - $\text{Ré}(z)$
 - $\text{Im}(z)$
 - $-\text{Im}(z)$
- La forme algébrique du nombre complexe $(1+i)^2(2-3i)$ est :
 - $6-4i$
 - $6+4i$
 - $-6-4i$
- z est un nombre complexe non réel le conjugué de $1+i$ est :
 - $-1-iz$
 - $1-i\bar{z}$
 - $1-iz$
- Pour tout complexes z et z' le $\text{Ré}(z.z')$ est égale à :
 - $\text{Ré}(z) \text{Ré}(z')$
 - $\text{Ré}z \times \text{Im}z'$
 - $\text{Ré}z \text{Ré}z' - \text{Im}z. \text{Im}z'$
- L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-i|=2$ est
 - une droite
 - le plan complexe
 - un cercle

3

Indiquer la réponse exact par a, b ou c avec justification

- a et b de signe des réels, le réel $a^2 + b^2$
 - n'admet pas de factorisation.....
 - est égal à $(a+ib)^2$
 - est égal à $(a+ib)(a-ib)$
- l'écriture $-2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ est une forme trigonométrique d'un complexe
 - de module -2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$
 - de module 2 et d'argument $-\frac{\pi}{3}$
 - de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3} + \pi$
- z et z' deux nombres complexes non nuls
un argument du nombre complexe zz' est égal à...
 - $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')$
 - $\text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$
 - $\text{Arg}(z) \times \text{Arg}(z')$
- M, N, P et Q sont 4 points d'affixes respectives m, n, p, q (avec $m \neq n$ et $p \neq q$) une mesure de l'angle $(\overline{MN}, \overline{PQ})$ est

a) $\text{Arg}\left(\frac{n-m}{p-q}\right)$ b) $\frac{n-m}{p-q}$ c) $\text{Arg}\left(\frac{q-p}{n-m}\right)$

4

Dans chaque cas, on présente un calcul ou un raisonnement sur les nombres complexes. Une erreur figure systématiquement. Détecter cette erreur et proposer une solution.

a) $\frac{1+i\sqrt{2}}{2-i} = \frac{(1+i\sqrt{2})(2+i)}{2^2-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{3} + i\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$ b) $|3-i| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{8}$

c) $\overline{Z+2i} = Z-2i$

d) $\frac{-6+2i}{1+3i} = -\frac{2i(1+3i)}{1+3i} = 2i$

5

Mettre sous la forme cartésienne les nombres complexes suivants :

a) $\frac{1+i}{\sqrt{2}i}$ b) $(2-i)^3$ c) $(i-2\sqrt{3})^2 - (2i-1)^2$

d) $(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i)$ e) $(1+i\sqrt{3})^{11}$

6

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

a) $Z^2 + 4 = 0$

b) $(Z-1)^2 = (Z-1)^3$

c) $(Z^2 + 1) = Z - i$

d) $Z^2 - 4iZ = (3Z - 2i)(Z - 4i)$

7

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}$

b) $\frac{1+2i}{1-2i}$

c) $\frac{4+3\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-3)}{1+i\sqrt{3}}$

d) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^2 - (2+i)^2}$

8

1) Calculer le module des nombres complexes suivants :

$a = 1+i\sqrt{3}$; $b = 1-i$; $c = -5i$; $d = -7\sqrt{2}$; $e = 3\sqrt{2}-i\sqrt{7}$

2) Même question :

a) $X = (1-i)(3\sqrt{2}-i\sqrt{7})$, $Y = \frac{-5i}{1-i}$, $Z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-i\sqrt{7}}\right)^3$

b) $z_1 = 1+i - \frac{1}{1-i}$; $z_2 = 2+2i\sqrt{3}$; $z_3 = z_1 z_2$; $z_4 = \frac{z_1^3}{z_2^5}$

9

Calculer module et un argument des nombres complexes suivants, puis les écrire sous forme trigonométrique et polaire.

a) $Z_1 = -\sqrt{3}+i$ b) $Z_2 = 17$ c) $Z_3 = 5i$

$$d) Z_4 = -12i\sqrt{3} + 12 \quad e) Z_5 = -6\sqrt{3} + 6i$$

10 Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes Z_1 et Z_2 : $Z_1 = -3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ et $Z_2 = \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$

11 Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, puis les écrire sous forme trigonométrique :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1+i)} \quad ; \quad Z_2 = \frac{5(-1+i)}{\sqrt{3}-i} \quad ; \quad Z_3 = \left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}} \right)^2$$

12 Soient les points A, B, C, D d'affixes respectives $-2+2i$, $1-3i$, $9-i$, $6+4i$.

a) Déterminer les affixes de E et F définies par :

$$\overline{CE} = \frac{1}{3} \overline{CD} \quad \text{et} \quad \overline{AF} = -\frac{3}{2} \overline{AE}$$

b) Démontrer que B, C et F sont alignés

13 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{6}[(3+4i)z + 5\bar{z}]$

a) exprimer à l'aide de z et \bar{z} le nombre complexe $Z = \frac{f(z)-z}{1+2i}$

b) En déduire que Z est réel.

14 1) Déterminer géométriquement les ensembles suivants :

$$E = \{ M(z) \text{ tel que } |z-2| = |z+3i| \} \quad ; \quad G = \{ M(z) \text{ tel que } |3z-6i| = 9 \}$$

$$F = \{ M(z) \text{ tel que } |iz+2| = |z+5| \}$$

2) Reprendre la question 1) par le calcul en utilisant la forme algébrique.

15 Déterminer la forme trigonométrique de $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}$ puis sa

forme algébrique. En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

16 Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $-2i$; $\sqrt{8}+2i$; $3\sqrt{2}+4i$
Montrer que A, B et C sont alignés.

17 Soit u et v deux nombres complexes et $z = u + iv$

Montrer que si $|z|^2 = u^2 + v^2$ alors $z = 0$ ou $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

18 A, B, C, D quatre points d'affixes respectives :
 $-1+3i$, $1-3i$, $3-5i$ et $7+3i$

a) Déterminer l'affixe de point I milieu de [BD]

b) Calculer IA, IC et ID. Conclure.

- 19** A, B, C, D les points d'affixes respectives : $2+i$, 4 , $3+3i$, $-1+5i$
 a) Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle
 b) Montrer que la droite (AB) est parallèle à la droite (CD).

- 20** Soit (o, \vec{u}, \vec{v}) un R.O.N. soient les points A, B, C, D d'affixes respectives : z_A, z_B, z_C et z_D .

1) Si $z_A=2-i$, $z_B=3+2i$, $z_C = -1+4i$ et $z_D = -2+i$

Montrer que ABCD est un parallélogramme.

2) Si $z_A=2-i$, $z_B=2-2i$, $z_C = 3-i$ et $z_D = 3+5i$

Montrer que ABCD est un trapèze.

- 21** Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $3+2i$, $-1+3i$ et $2+2i$

1) Déterminer l'affixe z_G du point G le barycentre des points pondérés* $\{(A, 2), (B, -3), (C, 5)\}$.

2) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que D est l'image de G par homothétie de centre O de rapport 4.

22 1) soit le nombre complexe $U = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$

a) Calculer $|u|$ puis écris U sous forme algébrique.

b) Montrer que $U^3=1$.

2) On pose $\mathcal{G} = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} + \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. Sans calculer \mathcal{G} montrer que c'est un

nombre réel. En déduire la valeur de \mathcal{G} .

23 1) soit un nombre complexe tel que $|u|=1$ et $u \neq 1$ et $z \in \mathbb{C}$

Montrer que $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ est un réel.

2) Montrer que si $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ est un réel alors Z est un réel ou $|u|=1$.

24 (o, \vec{u}, \vec{v}) R. O. N du plan. A et B les points d'affixes respectives $1+ia$ et $1-ia$ avec a est un nombre complexe $a=a_1+i a_2$

1) Montrer que O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1=0$

2) Montrer que \overline{OA} est orthogonal à \overline{OB} si et seulement si $|a|=1$

3) Déterminer a pour que OAB forme un triangle rectangle et que $a_1 = a_2$

25 Le plan complexe étant rapporté à un R. O. N $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
 A, B et C les points d'affixes

$$z_A = i, z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } z_C = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

- 1) a) Placer les points A, B, C dans le repère.
- b) Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle ζ que l'on précisera.
- c) Montrer que OABC est un losange.

2) Soit $z_1 = -iz_B$ On désigne par z_1 l'affixe du point A_1 .

* On considère les points A_n d'affixe $z_n = (z_1)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$
 et le point A_0 d'affixe 1.

- a) Calculer z_2 et placer les points $A_0, A_1,$ et A_2 dans le même repère.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a A_n appartient au cercle $\zeta_{(0,1)}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $z_{n+1} - z_n = (z_1)^n \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)$

d) En déduire le module de $z_{n+1} - z_n$ et la distance $A_n A_{n+1}$.

e) Montrer alors que $OA_n A_{n+1}$ est un triangle équilatéral

26 Le plan complexe est rapporté au R.O.N (o, \vec{u}, \vec{v}) .

1) Déterminer l'ensemble Δ des points $M(z)$ tel que $|z| = |z-2|$.

2) A tout point $M(z) \in P \setminus \Delta$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{\bar{z}z-1}{z+z-2}$.

- a) Montrer que z' est un nombre réel.
 - b) Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tel que $z' = \lambda, \lambda \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- 3) a) Montrer que $\forall M \in P \setminus \Delta$ on a : $|z'-z| = |z'-1|$. en déduire que le point

M' décrit une droite Δ_M que l'on précisera.

b) Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M' image du point $M(z) \in P \setminus \Delta$ lorsque M est donné.

27 Le plan P complexe est rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v}) .
 On désigne par A, B et C les points dont les affixes respectives sont :

$$2i, -1; i. \text{ Soit } f : P \setminus \{A\} \rightarrow P; M(z) \mapsto M'(z) \text{ tel que } z' = \frac{z+1}{z-2i}.$$

- 1) Déterminer l'affixe du point C' image du point C par f.
 Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?

- 2) Déterminer l'affixe du point C'' antécédent de C par f .
Quelle est la nature du triangle BCC'' ?
- 3) Donner une interprétation géométrique de : $|z'|$ et $\text{Arg } Z'$
- 4) En déduire l'ensemble des points M dont l'image par f à pour affixe un nombre complexe de module 1.



Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N (o, \vec{i}, \vec{j})

On considère M_n d'affixe $z_n = (1+i\sqrt{3})\left(\frac{i}{2}\right)^n$

- 1) exprimer z_{n+1} en fonction de z_n .
- 2) Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous la forme algébrique.
- 3) Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4
- 4) Calculer la distance OM_n en fonction de n .
- 5) a) Montrer que $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$

b) On pose $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$

Déterminer L_n en fonction de n

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} L_n$

CORRIGÉS

1

- a) $i^3 + i^2 + i + 1 = -i - 1 + i + 1 = 0$ donc Vrai
 b) Faux : $(2+3i)(1-2i) = 2-4i+3i+6 = 8-i \neq -4-i$
 c) Vrai : $(i-1)^4 = [(1-i)^2]^2 = (-2i)^2 = 4 \in \mathbb{R}$
 d) Faux : $6i-3 = -6i-3 \neq 6i+3$
 e) Faux : la partie imaginaire $(5-7i)$ est $-7 \neq -7i$

2

- 1) la réponse est **c** : $\text{Ré}(iz) = \text{Ré}(i(x+iy)) = \text{Ré}(ix-y) = -y = -\text{Im}(z)$
 2) $(1+i)^2(2-3i) = 2i(2-3i) = 4i+6$ d'où la réponse est **b**.
 3) $1+\overline{iz} = 1+\overline{i\overline{z}} = 1-i\overline{z}$ donc la réponse est **b**.
 4) $\text{Ré}(zz') = \text{Ré}[(a+ib)(a'+ib')] = aa' - bb' = \text{Ré}z \text{Re}z' - \text{Im}z \text{Im}z'$

Ainsi la réponse est **c**.

- 5) A (i) $M(z)$ on obtient $|z-i|=2 \Leftrightarrow AM=2 \Leftrightarrow M \in \zeta_{(A,2)}$ la réponse **c**

3

- 1) $a^2+b^2 = a^2-i^2b^2 = (a+ib)(a-ib)$ d'où la réponse est **c**
 2) $-2 = [2, \pi]$ et $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = [1, \frac{\pi}{3}]$ alors $-2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = [2, \pi + \frac{\pi}{3}]$

d'où la réponse est **c**

- 3) $\text{Azg}(zz') = \text{Azg}(z) + \text{Arg}(z')$ d'où la réponse est **b**

- 4) $(\overline{MN}, \overline{PQ}) = (\overline{MN}, \overline{u}) + (\overline{u}, \overline{PQ}) = -\text{Arg}(n-m) + \text{Arg}(q-p)$
 $= \text{Arg}\left(\frac{q-p}{n-m}\right)$ d'où la réponse est **c**

4

- a) $\frac{1+i\sqrt{2}}{2-i} = \frac{(1+i\sqrt{2})(2+i)}{2^2-1}$ le dénominateur doit être 2^2+1^2

L'erreur est le signe (-) dans 2^2-1

- b) $|3-i| = \sqrt{3^2+(i)^2}$ faux car $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ ainsi $|3-i| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

- c) $\overline{Z+2i} = \overline{Z}-2i$ il manque le barre sur le Z c'est à dire $\overline{Z+2i} = \overline{Z}+2\overline{i} = \overline{Z}-2i$

- d) $\frac{-6+2i}{1+3i} = \frac{-2i(1+3i)}{1+3i}$ le signe - devant 2i est faux il faut écrire $\frac{2i(1+3i)}{1+3i} = 2i$

5

- a) $\frac{1+i}{\sqrt{2}i} = \frac{(1+i)i}{(\sqrt{2}i)i} = \frac{-1+i}{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

- b) $(2-i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 \cdot (i)^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

$$\begin{aligned} \text{c) } (i-2\sqrt{3})^2 - (2i-1)^2 &= i^2 - 4\sqrt{3}i + (2\sqrt{3})^2 - (2i)^2 + 4i - 1 \\ &= -1 - 4\sqrt{3}i + 12 + 4 + 4i - 1 = 14 + i4(1 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\text{d) } (\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i) = \sqrt{3}^2 - (2i)^2 = 3 - (-4) = 7$$

$$\text{e) } (1+i\sqrt{3})^{11} ?$$

$$(1+i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

$$(1+i\sqrt{3})^3 = (-2+2i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = -2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} - 6 = -8 \in \mathbb{R}$$

$$(1+i\sqrt{3})^{11} = \left[(1+i\sqrt{3})^3 \right]^3 (1+i\sqrt{3})^2$$

$$= (-8)^3 (1+i\sqrt{3})^2 = (-8)^3 (-2+2i\sqrt{3}) = 8^3 \times 2 - 8^3 \cdot 2\sqrt{3}i = 1024 - 1024\sqrt{3}i$$

$$\nabla \text{6 a) } Z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow Z^2 = -4 \Leftrightarrow Z = 2i \text{ ou } Z = -2i \text{ d'où } S_c = \{2i, -2i\}$$

$$\text{b) } (Z-1)^2 = (Z-1)^3 \Leftrightarrow (Z-1)^2 [1 - (Z-1)] = 0$$

$$Z-1=0 \text{ ou } 1-(Z-1)=0$$

$$Z=1 \text{ ou } Z=2. \text{ D'où } S_c = \{1, 2\}$$

$$\text{c) } Z^2 + 1 = Z - i \Leftrightarrow (Z+i)(Z-i) = (Z-i)$$

$$\Leftrightarrow (Z-i)(Z+i-1) = 0 \Leftrightarrow Z-i=0 \text{ ou } Z+i-1=0$$

$$\Leftrightarrow Z=i \text{ ou } Z=1-i \text{ d'où } S_c = \{i, 1-i\}$$

$$\text{d) } Z^2 - 4iZ = (3Z-2i)(Z-4i) \Leftrightarrow Z(Z-4i) = (3Z-2i)(Z-4i)$$

$$\Leftrightarrow (Z-4i)[Z-(3Z-2i)] = 0 \Leftrightarrow Z-4i=0 \text{ ou } -2Z+2i=0$$

$$\Leftrightarrow Z=4i \text{ ou } Z=i \text{ d'où } S_c = \{i, 4i\}$$

$$\nabla \text{7 1) a) } \frac{-2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-2(1+i\sqrt{3})}{1^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{-2(1+i\sqrt{3})}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \frac{(1+2i)^2}{5} = \frac{1+4i-4}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{4+3\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-3)}{1+i\sqrt{3}} &= \frac{[4+3\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-3)][1-i\sqrt{3}]}{1^2+\sqrt{3}^2} \\ &= \frac{(4+3\sqrt{3})+\sqrt{3}(4\sqrt{3}-3)+i[(4\sqrt{3}-3)-\sqrt{3}(4+3\sqrt{3})]}{4} = \frac{16+i[-12]}{4} = 4-3i \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^2 - (2+i)^2} = z$$

$$\text{On a: } (1+2i)^2 = 1+4i-4 = -3+4i$$

$$(1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = (-2i)(1-i) = -2-2i$$

$$(3+2i)^2 = 9+12i-4=5+12i \text{ et } (2+i)^2 = 4+4i-1=3+4i$$

$$\text{D'où } Z = \frac{-3+4i+2+2i}{5+12i-3-4i} = \frac{-1+6i}{2+8i} = \frac{(-1+6i)(2-8i)}{2^2+8^2} = \frac{46}{68} + \frac{20i}{68} = \frac{23}{34} + \frac{5}{17}i$$

$$\sqrt{8} \quad 1) |a| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|b| = |1-i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ et } |c| = |-5i| = \sqrt{5^2} = 5$$

$$|d| = |-7\sqrt{2}| = 7\sqrt{2} \text{ et } |e| = |3\sqrt{2}-i\sqrt{7}| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{18+7} = \sqrt{25} = 5$$

$$2) \bullet |x| = |(1-i)(3\sqrt{2}-i\sqrt{7})| = |1-i| |3\sqrt{2}-i\sqrt{7}| = |b| \cdot |e| = \sqrt{2} \cdot 5 = 5\sqrt{2}$$

$$\bullet |y| = \frac{|-5i|}{|1-i|} = \frac{|-5i|}{|1-i|} = \frac{|c|}{|b|} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet |Z| = \left| \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-i\sqrt{7}} \right)^3 \right| = \frac{|a|^3}{|e|^3} = \left(\frac{|a|}{|e|} \right)^3 = \left(\frac{2}{5} \right)^3 = \frac{8}{125}$$

$$\bullet |Z_1| = \left| 1+i \cdot \frac{1}{1-i} \right| = \left| \frac{(1+i)(1-i)-1}{1-i} \right| = \left| \frac{1-i^2-1}{1-i} \right| = \frac{1}{|1-i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet |Z_2| = |2+2i\sqrt{3}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\bullet |Z_3| = |Z_1 Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4 = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\bullet |Z_4| = \frac{|Z_1^3|}{|Z_2^5|} = \frac{|Z_1|^3}{|Z_2|^5} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3}{4^5} = \frac{1}{2048\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{9} \quad \text{a) } |Z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2 \text{ et } \cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \theta = \frac{5\pi}{6} \equiv \text{Arg } z_1 \text{ donc } Z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \left[2, \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$\text{b) } |Z_2| = |-17| = 17 \text{ et } \cos \theta = \frac{-17}{17} = -1 \text{ et } \sin \theta = 0 \text{ d'où}$$

$$\theta = \pi \equiv \text{Arg } Z_2 \text{ ainsi } Z_2 = 17(\cos \pi + i \sin \pi) = [17, \pi]$$

$$\text{c) } |Z_3| = |5i| = 5 \text{ et } \cos \theta = 0 \text{ et } \sin \theta = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{d'où } \theta = \frac{\pi}{2} \equiv \text{Arg } Z_3 \text{ ainsi } Z_3 = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = [5, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{d) } Z_4 = -12i\sqrt{3} + 12 = 12(1 - i\sqrt{3})$$

$$\text{comme } 12 = [12, 0] \text{ et } (1 - i\sqrt{3}) = 2 \text{ et } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ d'où } \theta = \frac{-\pi}{3}$$

$$1 - i\sqrt{3} = [2, \frac{-\pi}{3}] \text{ alors } Z_4 = [12, 0][2, \frac{-\pi}{3}] = [24, \frac{-\pi}{3}] = 24(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i \sin(\frac{-\pi}{3}))$$

$$|Z_4| = 24 \text{ et } \text{Arg } Z_4 = \frac{-\pi}{3} (2\pi)$$

$$\text{e) } Z_5 = -6\sqrt{3} + 6i = 6(-\sqrt{3} + i) \text{ comme } 6 = [6, 0] \text{ et } -\sqrt{3} + i = Z_1 = [2, 5\frac{\pi}{6}]$$

$$\text{ainsi } Z_5 = [6, 0][2, \frac{5\pi}{6}] = [12, \frac{5\pi}{6}] = 12(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) \text{ d'où}$$

$$|Z_5| = 12 \text{ et } \text{Arg } Z_5 = \frac{5\pi}{6} (2\pi)$$

$$\nabla_{10} Z_1 = -3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \text{ comme } -3 = [3, \pi] \text{ et } (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = [1, \frac{\pi}{4}]$$

$$\text{alors } Z_1 = [3, \pi][1, \frac{\pi}{4}] = [3, \pi + \frac{\pi}{4}] = [3, \frac{5\pi}{4}] = 3(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$$

$$Z_2 = \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) \text{ comme } \sin(\frac{-\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin(\frac{-\pi}{3})) \text{ et } \cos(\frac{-\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{d'où } Z_2 = \sqrt{3}(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i \sin(\frac{-\pi}{3}))$$

$$\nabla_{11} 1) Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1+i)}$$

$$* \sqrt{6} - i\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - i) \text{ comme } |\sqrt{3} - i| = 2 \text{ et } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \theta = \frac{-\pi}{6} \text{ d'où } \sqrt{3} - i = [2, \frac{-\pi}{6}] \text{ où } \sqrt{2} = [\sqrt{2}, 0] \text{ ainsi } \sqrt{6} - i\sqrt{2} = [2\sqrt{2}, \frac{-\pi}{6}]$$

$$* |1+i| = \sqrt{2} \text{ et } \cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ d'où } 1+i = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]$$

$$\text{finalement } z_1 = \frac{[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}]}{[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]} = [1, -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}] = [1, -\frac{5\pi}{12}] = \cos(-\frac{5\pi}{12}) + i \sin(-\frac{5\pi}{12})$$

$$\text{avec } |z_1| = 1 \text{ et } \text{Arg } z_1 \equiv \frac{-5\pi}{12} (2\pi)$$

$$2) z_2 = \frac{5(-1+i)}{\sqrt{3+i}} = \frac{[5, 0][\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}]}{[2, \frac{\pi}{6}]} = \frac{[5\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}]}{[2, \frac{\pi}{6}]} = [\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}] = [\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{12}]$$

$$z_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} (\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}) \text{ avec } |z_2| = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ et } \text{Arg } z_2 \equiv \frac{7\pi}{12} (2\pi)$$

$$z_3 = \left(\frac{\sqrt{2}(1-i)}{1-i\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{2(-2i)}{(1-i\sqrt{3})^2} = \frac{[4, -\frac{\pi}{2}]}{[2, -\frac{\pi}{3}]^2} = \frac{[4, -\frac{\pi}{2}]}{[4, \frac{2\pi}{3}]} = [1, \frac{\pi}{6}]$$

$$\nabla 12) \text{ a) } \overline{CE} = \frac{1}{3} \overline{CD} \Leftrightarrow z_E - z_C = \frac{1}{3} (z_D - z_C) \Leftrightarrow z_E = \frac{1}{3} z_D + \frac{2}{3} z_C$$

$$z_E = \frac{1}{3} (6+4i) + \frac{2}{3} (9-i) = 8 + \frac{2}{3} i$$

$$\text{aff } \overline{AF} = \frac{3}{2} \text{aff } \overline{AE} \Leftrightarrow z_F - z_A = \frac{3}{2} (z_E - z_A) \Leftrightarrow z_F = \frac{3}{2} z_E - \frac{1}{2} z_A$$

$$z_F = \frac{3}{2} (8 + \frac{2}{3} i) - \frac{1}{2} (-2+2i) = 13$$

$$\text{b) } B(1, -3) \quad C(9, -1) \quad F(13, 0)$$

$$\overline{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \overline{CF} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \det(\overline{BC}, \overline{CF}) = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8-8=0 \Rightarrow \overline{BC}, \overline{CE} \text{ sont colinéaires} \Rightarrow B, C, F \text{ sont alignés}$$

$$\nabla 13) \text{ a) } z = \frac{f(z) - z}{1+2i}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}(3+4i)z + \frac{5}{6} - z}{1+2i} = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z} - 6z}{6(1+2i)} = \frac{(-3+4i)z + 5\bar{z}}{6(1+2i)}$$

$$= \frac{((-3+4i)z + 5\bar{z})(1-2i)}{6 \times (1^2 + 2^2)} = \frac{(5+10i)z + 5(1-2i)\bar{z}}{30} = \frac{(1+2i)z + (1-2i)\bar{z}}{6}$$

$$b) \bar{Z} = \left(\frac{(1+2i)z + (1-2i)\bar{z}}{6} \right) = \frac{\overline{(1+2i)z + (1-2i)\bar{z}}}{6} = \frac{(1-2i)\bar{z} + (1+2i)z}{6} = Z$$

$$\bar{\bar{Z}} = Z \Rightarrow Z \text{ est réel.}$$

14

1) $|z-2| = |z+3i|$ On pose A (2) B (-3i) l'égalité devient :

$$|z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{médiatrice de } [AB]$$

donc E = med [AB]

$$* |iz+2| = |z+5|$$

$$\Leftrightarrow \left| i \left(z + \frac{2}{i} \right) \right| = |z+5| \Leftrightarrow |i| |z-2i| = |z+5|$$

$\Leftrightarrow |z-2i| = |z+5|$ On pose A'(2i) B'(-5) l'égalité devient

$$|z_M - z_{A'}| = |z_M - z_{B'}| \Leftrightarrow A'M = B'M \Leftrightarrow M \in \text{médiatrice } [A'B'] \text{ d'où}$$

F = med [A'B'].

$$* |3z-6i| = 9 \Leftrightarrow |3(z-2i)| = 9 \Leftrightarrow |z-2i| = 3$$

$$|z_M - z_{A'}| = 3A'M = 3 \Leftrightarrow M \in \text{Cercle de centre } A' \text{ de rayon } 3.$$

d'où G = $\zeta_{(A',3)}$

$$2) |z-2| = |z+3i|$$

on pose $z = x + iy$ alors $|(x-2) + iy| = |x + i(3+y)|$

$$(x-2)^2 + y^2 = x^2 + (3+y)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$-4x - 6y - 5 = 0 \text{ Soit } 4x + 6y + 5 = 0$$

E est la droite d'équation $4x + 6y + 5 = 0$

$$* |z-2i| = |z+5|$$

$$|x + i(y-2)| = |(x+5) + iy| \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = (x+5)^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 10x + 25 + y^2 \Leftrightarrow 10x + 4y + 21 = 0$$

F est la droite d'équation $10x + 4y + 21 = 0$

$$* |z-2i| = 3 \Leftrightarrow |x + i(y-2)| = 3$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 9$$

d'où G est le cercle de centre I(0,2) de rayon 3.

$$\nabla_{15} \quad Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}$$

$$a = 1 + i\sqrt{3}; |a| = 2 \text{ et } \left(\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ d'où } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

$$b = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \quad ; \quad |b| = 4 \text{ et}$$

$$\left(\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ d'où } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

$$Z = \frac{\left[2, \frac{\pi}{3} \right]}{\left[4, \frac{\pi}{4} \right]} = \left[\frac{2}{4}, \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{12} \right] = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

* Cherchons la forme algébrique de Z :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(1 + i\sqrt{3})(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i)}{(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i)(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i)} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + i(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})}{16} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Par suite } \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8} \text{ et } \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}$$

$$\text{ou encore } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\nabla_{16} \quad A(0, -2); B(\sqrt{8}, 2) \text{ et } C(3\sqrt{2}, 4)$$

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{AC} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{8} & 3\sqrt{2} \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6\sqrt{8} - 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 0$$

Par suite \overline{AB} et \overline{AC} sont colinéaires donc $(AB) \parallel (AC)$ et A en commun par suite A, B et C sont alignés.

$$\nabla_{17} \quad |z|^2 = u^2 + v^2 \text{ or } |z|^2 = z\bar{z} \text{ équivaut à } z\bar{z} = u^2 + v^2$$

$$(u+iv)(\overline{u+iv}) = u^2 + v^2 \Leftrightarrow (u+iv)(u-i\bar{v}) = u^2 + v^2$$

$$(u+iv)(\bar{u}-i\bar{v}) = (u+iv)(u-i\bar{v}) \Leftrightarrow (u+iv)(\bar{u}-i\bar{v}-u+iv) = 0$$

$$u+iv=0 \text{ ou } (\bar{u}-u+i(v-\bar{v}))=0 \Leftrightarrow z=0 \text{ ou } (-2i \operatorname{Im}(u)+2i \operatorname{Im}(v))=0$$

$$z=0 \text{ ou } (\operatorname{Im}(u)=0 \text{ et } \operatorname{Im}(v)=0) \Leftrightarrow z=0 \text{ ou } (u \in \mathbb{R} \text{ et } v \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } (u,v) \in \mathbb{R}$$

$$\nabla 18/a) I=B*D \text{ signifie que } Z_I = \frac{Z_B + Z_D}{2}$$

$$\text{or } Z_B = -1-3i \text{ et } Z_D = 7+3i \text{ d'où } Z_I = \frac{-1+7}{2} + i \frac{-3+3}{2} \text{ par suite } Z_I = 3$$

$$b) IA = |Z_A - Z_I| = |-1+3i-3| = |-4+3i| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$ID = |Z_D - Z_I| = |7+3i-3| = |4+3i| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$IC = |Z_C - Z_I| = |3-5i-3| = |-5i| = \sqrt{25} = 5. \text{ Or } I = B * D \text{ donc } IB = ID.$$

Par suite $IA = IB = ID = IC = 5$, on conclut que A, B, C et D sont situés sur le cercle ζ de centre I de rayon 5.

$$\nabla 19/a) AB = |Z_B - Z_A| = |4-2-i| = |2-i| = \sqrt{5}$$

$$AC = |Z_C - Z_A| = |3+3i-2-i| = |1+2i| = \sqrt{5}$$

$$BC = |Z_C - Z_B| = |3+3i-4| = |-1+3i| = \sqrt{10}$$

D'où $AB = AC = \sqrt{5}$ donc ABC est isocèle de sommet principale A.

* $AB^2 + AC^2 = 5+5 = 10 = BC^2$ d'après Pythagore ABC est triangle rectangle en A.

Conclusion : ABC est rectangle et isocèle.

b) A(2,1) ; B(4,0) ; C(3,3) et D (-1,5).

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} \text{ d'où } \overline{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{CD} \begin{pmatrix} -1-3 \\ 5-3 \end{pmatrix} \text{ d'où } \overline{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \text{ donc } \overline{AB} \text{ et } \overline{CD} \text{ sont colinéaires par suite}$$

(AB) et (CD) sont parallèles.

$$\nabla 20$$

1) Montrer que ABCD est un parallélogramme soit $\overline{AB} = \overline{DC}$

$$\text{aff } \overline{AB} = z_B - z_A = 3+2i-2+i = 1+3i$$

$$\text{aff } \overline{DC} = z_C - z_D = -1+4i+2-i = 1+3i = \text{aff } \overline{AB}$$

d'où $\overline{AB} = \overline{DC}$ ainsi ABCD est un parallélogramme.

$$2) \text{ aff } \overline{AB} = z_B - z_A = 2 - 2i - 2 + i = -i$$

$$\text{aff } \overline{CD} = z_D - z_C = 3 + 5i - 3 + i = 6i$$

$$\text{ainsi : aff } \overline{CD} = -6 \text{ aff } \overline{AB} \text{ d'où } \overline{CD} = -6 \overline{AB}$$

d'où $(CD) \parallel (AB)$ par suite ABCD est un trapèze.

21

1) G barycentre de $\{(A,2), (B,-3) \text{ et } (C,5)\}$

$$\Leftrightarrow 2\overline{GA} - 3\overline{GB} + 5\overline{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow z_G = \frac{2z_A - 3z_B + 5z_C}{2 - 3 + 5}$$

$$z_G = \frac{1}{4}(6 + 4i + 3 - 9i + 10 + 10i) = \frac{19}{4} + \frac{5}{4}i$$

$$2) h_{(0,4)}(G) = D \Leftrightarrow \overline{OD} = 4 \overline{OG} \Leftrightarrow \text{aff } \overline{OD} = 4 \text{ aff } \overline{OG}$$

$$\Leftrightarrow z_D = 4z_G \Leftrightarrow z_D = 19 + 5i$$

22

$$a) |u| = \frac{|1 - i\sqrt{3}|}{|1 + i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}^2}}{\sqrt{1 + \sqrt{3}^2}} = 1$$

$$u = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(1 - i\sqrt{3})^2}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{1 - 2i\sqrt{3} - 3}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b) u^3 = \left(-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\right)^3 = -\frac{1}{8}(1 + i\sqrt{3})^3 = -\frac{1}{8}(1 + 3\sqrt{3}i + 3(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3)$$

$$= -\frac{1}{8}(1 - 9) = 1$$

$$2) g = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} + \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = u + \bar{u}$$

Pour Montrer que $g \in \mathbb{R}$ il suffit de montrer que $v = \bar{v}$

$$\bar{v} = \overline{u + \bar{u}} = \bar{u} + \overline{\bar{u}} = \bar{u} + u = v \text{ donc } v \in \mathbb{R}$$

$$g = u + \bar{u} = 2 \operatorname{Ré}(u) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

23

$$1) \left(\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}\right) = \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}} \text{ or } (|u| = 1 \Leftrightarrow u\bar{u} = 1 \Leftrightarrow \bar{u} = \frac{1}{u})$$

$$D'où \left(\frac{z-\bar{u}z}{1-u} \right) = \frac{\bar{z} - \frac{1}{u}z}{1 - \frac{1}{u}} = \frac{u\bar{z}-z}{u-1} = \frac{z-\bar{u}z}{1-u} \Rightarrow \left(\frac{z-\bar{u}z}{1-u} \right) = \frac{z-\bar{u}z}{1-u} \Rightarrow \frac{z-\bar{u}z}{1-u} \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ On a : } \frac{z-\bar{u}z}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-\bar{u}z}{1-u} = \overline{\left(\frac{z-\bar{u}z}{1-u} \right)} \Leftrightarrow \frac{z-\bar{u}z}{1-u} = \frac{\bar{z}-\bar{\bar{u}}z}{1-\bar{u}} \\ \Leftrightarrow (z-\bar{u}z)(1-\bar{u}) = (\bar{z}-\bar{\bar{u}}z)(1-u) \Leftrightarrow z - \cancel{\bar{u}z} - \cancel{\bar{u}z} + u\bar{\bar{u}}z = \bar{z} - \cancel{\bar{u}z} - \cancel{\bar{u}z} + u\bar{u}z \\ \Leftrightarrow (z-\bar{z}) + u\bar{u}(\bar{z}-z) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(1-u\bar{u}) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(1-|u|^2) = 0 \\ \Leftrightarrow z=\bar{z} \text{ ou } |u|^2=1 \Leftrightarrow z=\bar{z} \text{ ou } |u|=1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } |u|=1$$

24

1) O, A et B sont alignés, signifie que \overline{OA} et \overline{OB} sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow \det(\overline{OA}, \overline{OB}) = 0 \text{ comme aff } \overline{OA} = z_A = 1+ia = 1+i(a_1+ia_2) = 1-a_2+ia_1$$

$$\text{et aff } (\overline{OB}) = z_B = 1-ia = 1-i(a_1+ia_2) = 1+a_2-ia_1$$

$$\overline{OA} \text{ et } \overline{OB} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-a_2 & 1+a_2 \\ a_1 & -a_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1(a_2-1) - a_1(1+a_2) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$$

$$2) \overline{OA} \perp \overline{OB} \Leftrightarrow (1-a_2)(1+a_2) + a_1(-a_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-a_2^2 - a_1^2 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 = 1 \Leftrightarrow |a|^2 = 1 \Leftrightarrow |a| = 1$$

3) OAB est un triangle rectangle et $a_1 = a_2$

$$\Leftrightarrow |a|=1 \text{ et } a_1 = a_2 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 = 1 \text{ et } a_1 = a_2 \Leftrightarrow 2a_1^2 = 1 \text{ et } a_1 = a_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = a_2 \text{ ou } a_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = a_2 \Leftrightarrow \text{d'où } a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ ou } a = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

25

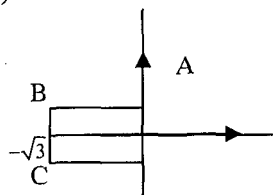
1) a) A(0,1) et B $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ et C $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

$$b) |z_A| = 1 = OA$$

$$|z_B| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 = OB \text{ et } |z_C| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 = OC$$

$$\text{Donc } OA = OB = OC = 1$$

D'où A, B, C appartiennent au $\zeta(0,1)$



$$c) AB = |z_B - z_A| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - i \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = 1$$

or $OA=OB=OC=1$ d'où $OA=OB=OC=AB$ par suite $OABC$ est un losange.

$$2) z_1 = -iz_B = -i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$A_1(z_1)$ et $A_n(z_n)$ et $A_0(1)$ avec $z_1 = z_1^n$

$$a) z_2 = z_1^2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$z_0 = 1$ alors $A_0(1,0)$

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ alors } A_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ alors } A_2\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$b) |z_n| = |z_1|^n = |-iz_B|^n = 1 \text{ car } |i|=1 \text{ et } |z_B|=1$$

d'où $OM_n = |z_n| = 1$ par suite $M_n \in \zeta_{(0,1)}$

$$c) z_{n+1} - z_n = z_1^{n+1} - z_1^n = z_1^n(z_1 - 1) = z_1^n\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = z_1^n\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$d) |z_{n+1} - z_n| = |z_1^n| \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |z_1|^n \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \text{ or } |z_1|^n = 1$$

$$A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = 1$$

$$e) OA_n = |z_n| = 1 \text{ et } OA_{n+1} = |z_{n+1}| = 1$$

et $A_n A_{n+1} = 1$

donc $OA_n = OA_{n+1} = A_n A_{n+1}$ par suite $OA_n A_{n+1}$ est équilatéral.

261 $|z| = |z-2|$ on pose considère le point A d'affixe 2

$$|z_M - z_O| = |z_M - z_A| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \text{Médiatrice de } [OA]$$

Par suite Δ est la médiatrice de $[OA]$.

$$2) a) z' = \frac{\bar{z}z-1}{z+z-2} \text{ et } \bar{z}' = \left(\frac{\bar{z}z-1}{z+z-2}\right) = \frac{\bar{z}.z-1}{z+z-2} = z' \text{ ainsi } z' \in \mathbb{R}.$$

$$b) z' = \lambda \Leftrightarrow \frac{\bar{z}.z-1}{z+z-2} = \lambda \text{ on pose } z = x + iy \text{ alors : } |z|^2 = z.\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-1}{2x-2} = \lambda \Leftrightarrow x^2+y^2-1=2x\lambda-2\lambda \Leftrightarrow x^2-2\lambda x+y^2-1+2\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow (x-\lambda)^2-\lambda^2+y^2-1+2\lambda=0 \Leftrightarrow (x-\lambda)^2+y^2=\lambda^2-2\lambda+1$$

$$\Leftrightarrow (x-\lambda)^2+y^2=(\lambda-1)^2 > 0 \text{ car } \lambda \in \mathbb{R}-\{1\}$$

$$\Leftrightarrow M \in \text{cercle de centre } I(\lambda,0) \text{ de rayon } |\lambda-1|$$

$$3) a) |z'-z| = \left| \frac{\bar{z}z-1}{z+\bar{z}-2} - z \right| = \left| \frac{\bar{z}z-1-z^2-\bar{z}z+2z}{z+\bar{z}-2} \right| = \left| \frac{-(z^2-2z+1)}{z+\bar{z}-2} \right| = \frac{|z-1|^2}{|z+\bar{z}-2|}$$

$$\text{et } |z'-1| = \left| \frac{\bar{z}z-1}{z+\bar{z}-2} - 1 \right| = \left| \frac{\bar{z}z-1-z-\bar{z}+2}{z+\bar{z}-2} \right| = \left| \frac{z(\bar{z}-1)-\bar{z}+1}{z+\bar{z}-2} \right|$$

$$= \left| \frac{z(\bar{z}-1)-(\bar{z}-1)}{z+\bar{z}-2} \right| = \left| \frac{(\bar{z}-1)(z-1)}{z+\bar{z}-2} \right| = \frac{|\bar{z}-1| \cdot |z-1|}{|z+\bar{z}-2|} = \frac{|\bar{z}-1|}{|z+\bar{z}-2|} = \frac{|z-1|^2}{|z+\bar{z}-2|} = |z'-z|$$

$$* |z'-z| = |z'-1| \Leftrightarrow MM' = M'B \text{ avec } z_B = 1$$

$$\Leftrightarrow M' \in \text{Médiatrice de } [BM]$$

M' décrit $\Delta_M =$ médiatrice $[BM]$.

$$b) z' \in \mathbb{R} \text{ d'après 1}^{\text{er}} \text{ question donc } M' \in (o, \bar{u}) \text{ et } M' \in \Delta_M$$

$$\text{D'où } M' \in (o, \bar{u}) \cap \Delta_M$$

$$\nabla 27) 1) f(c) = c' \Leftrightarrow Z' = \frac{Z_c+1}{Z_c-2i} = \frac{i+1}{i-2i} = \frac{i+1}{-i} = -1 + \frac{1}{i} = -1+i \Rightarrow Zc' = -1+i$$

$$* A(0,2) \ C(0,1) \ B(-1,0) \ C'(-1,1)$$

$\overline{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overline{C'B} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où $\overline{AC} = \overline{C'B}$ par suite ACBC' est un parallélogramme

$$2) f(C'') = C \Leftrightarrow Z_c = \frac{Z_{c''}+1}{Z_{c''}-2i} \Leftrightarrow i = \frac{Z+1}{Z-2i} \Leftrightarrow i(Z-2i) = Z+1 \Leftrightarrow iZ+2 = Z+1$$

$$\Leftrightarrow iZ-Z = 1-2 \Leftrightarrow Z = \frac{-1}{i-1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ d'où } Z_{c''} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$BC = |Z_c - Z_B| = |i+1| = \sqrt{2} \Rightarrow BC^2 = 2$$

$$BC'' = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 1 \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} \Rightarrow C''B^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$CC'' = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow C''C^2 = \frac{1}{2}$$

d'où $C''B^2 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = C''C^2 + BC^2$ ainsi BCC'' est un triangle rectangle en C.

$$3) |Z| = \frac{|Z+1|}{|Z-2i|} = \frac{|Z_M - Z_B|}{|Z_M - Z_A|} = \frac{BM}{AM}$$

$$4) |Z|=1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM=AM \Leftrightarrow M \in \text{médiatrice } [AB].$$

d'où l'ensemble recherché est la médiatrice $[AB]$.



$$1) z_{n+1} = (1+i\sqrt{3}) \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} = (1+i\sqrt{3}) \left(\frac{i}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{i}{2}\right) = z_n \cdot \frac{i}{2} \text{ d'où } z_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n$$

$$2) z_0 = 1+i\sqrt{3}$$

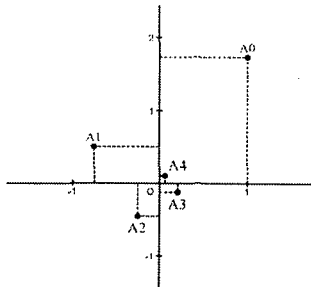
$$z_1 = \frac{1}{2} i z_0 = \frac{1}{2} i(1+i\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \text{ et } z_2 = \frac{1}{2} i z_1 = \frac{1}{2} i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

$$z_3 = \frac{1}{2} i z_2 = \frac{1}{2} i \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8} i\right) \text{ et } z_4 = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16} i$$

4)

$$OM_n = |z_n| = \left| (1+i\sqrt{3}) \left(\frac{i}{2}\right)^n \right| = |1+i\sqrt{3}| \cdot \left|\frac{i}{2}\right|^n$$

$$= \sqrt{1+3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$$



$$5) a) M_n M_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left| \frac{1}{2} i z_n - z_n \right| = |z_n| \cdot \left| \frac{1}{2} i - 1 \right| = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

$$b) L_n = \frac{\sqrt{5}}{2^0} + \frac{\sqrt{5}}{2^1} + \frac{\sqrt{5}}{2^2} + \dots + \frac{\sqrt{5}}{2^n} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \sqrt{5} \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

C'est la sommation de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de

$$\text{raison } q = \frac{1}{2}. \text{ D'où } L_n = \sqrt{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(2\sqrt{5} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{5} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = 2\sqrt{5} \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ puis que } q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[.$$

Chapitre VI

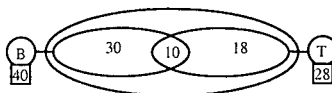
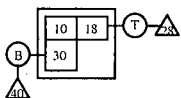
Dénombrement

■ Diagrammes:

On l'utilise lorsqu'on a deux ou trois choix compatibles

Exemple:

Dans un club de 60 joueur de cartes, 40 jouent au bridge et 28 au tarot et 10 jouent à ces deux jeux. On peut utiliser le diagramme de Carrol ou Venn.



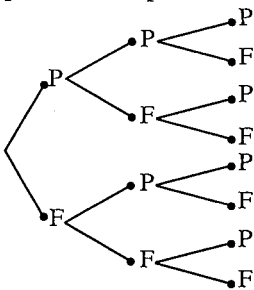
Donc il y a 2 adhérents jouent autre chose.

■ L'arbre de choix

On l'utilise lorsqu'on a des choix successifs.

Exemple :

On jette successivement trois pièces de monnaies bien équilibrées, on utilise l'arbre : à la première branche 2 possibilités pile ou face. Puis deux possibilités pour le second lancer etc....



Donc il y a 8 cas possible ou bien $2 \times 2 \times 2 = 8$

■ Cardinal d'un ensemble fini :

- Définition : le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'élément de cet ensemble . On note : card E.

- Propriétés : Soient E et F deux ensembles finis.

$$\text{Card} (E \cup F) = \text{card} E + \text{card} F - \text{card} (E \cap F) .$$

$$\text{Card} (E \times F) = \text{card} E \times \text{card} F$$

■ Arrangements:

➤ Arrangements sans répétition :

- Définition:

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier tel que : $0 \leq p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de E , une p -liste de E

Ou un p -uplet de E .

Exemple : $E = \{1, 2, 3, 4\}$; $(1, 2, 3)$ est triplet de E .

- Le nombre d'arrangement sans répétition de p éléments pris parmi n éléments est : $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$

- permutations :

une permutation de E est un arrangement sans répétition de n éléments pris parmi n éléments.

Le nombre de permutations est : $n(n-1)(n-2)\dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$

* Convention : $0! = 1$ et $1! = 1$.

* On a également : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

➤ Arrangement avec répétition :

- $n^p = \underbrace{n \times n \dots \times n}_{p \text{ fois}}$: c'est le nombre de façons de disposer p l'élément

pris parmi n , avec des répétitions possibles.

- Théorème : Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments avec $0 \leq p \leq n$ et p et n deux entiers naturels est n^p .

■ Combinaison :

- Définition :

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier tel que : $0 \leq p \leq n$.

Un sous ensemble (non ordonné) de p éléments de E (distincts) s'appelle une combinaison de p élément de E .

Exemple : $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

$\{1, 2\}$ est une combinaison de 2 éléments de E .

- Le nombre de combinaison de p éléments pris parmi n est :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

- Propriétés des C_n^p :

* Pour tout entiers naturels n et p tel que $0 \leq p \leq n$; on a :

$$C_n^n = 1; C_n^1 = C_n^{n-1} = n; C_n^p = C_n^{n-p}; C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p.$$

■ Binôme de Newton :

- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$.

- Nombre de parties d'un ensemble de n éléments est 2^n .

■ **Point Méthode :**

Situation 1 :

On dispose de n objet qu'il faut placer dans n cases, un par case, il s'agit de permutations :

- situation : n objets, n places et sans répétition.
- La formule : $n!$
- Les mots clés : permuter, déplacer, ordonner n objets.

Situation 2 :

Une urne contient n objets : On peut prendre un certain nombre p d'objets de 3 manières :

a) Simultanément cela signifie sans ordre, sans répétition, alors il s'agit des combinaisons .

- Situation : n objets, p places et sans ordre.
 - La formule : C_n^p .
 - Les mots clés : comité, groupe, parties d'un ensemble.
- b) Successivement et sans remise : cela signifie avec ordre et sans répétition, alors il s'agit des arrangements sans répétition.
- Situation : n objets, p places et ordre.
 - La formule : A_n^p .
 - les mots clés : bureau, groupe ordonnés, liste de p objets distincts.
- c) successivement et avec remise, cela signifie avec ordre et répétition, il s'agit des arrangements avec répétitions.

Dans ce cas seulement p peut être supérieur à

- Situation : n objets, p places, ordre et répétition.
- Formule : n^p
- Les mots clés : p -liste

ENONCES

1

Les 100 élèves de terminales Techniques prennent le cours De Math chez Mr x. 80 élèves reconnaissent aimer Les mathématiques et 80 aiment le professeur et 65 les deux.

1) Compléter le tableau ci- contre

2) En déduire combien d'élèves :

- n'aime pas la matière .
- aime au moins la matière .
- aime ni la matière, ni le professeur.

prof \ Matière	aime	n'aime pas	total
aime			
n'aime pas			
total			

2

L'équipe A joue contre l'équipe B lors d'un tournoi, la première équipe qui gagne 2 parties de suites ou un total de trois parties gagne le tournoi.

Quel est le nombre maximum des matchs et le nombre minimum de matchs (utiliser un arbre de choix)

3

Le prince de Toscane demande à Galilée

Pourquoi lorsque l'on lance trois dés on obtient plus souvent la somme dix que la somme neuf bien que ces deux sommes soient obtenues chacune de six façons différentes. Quelle était la réponse de Galilée.

4

1) Une urne contient 12 boules : 5 boules noires, 3 boules blanches et 4 boules rouges. On tire simultanément 5 boules.

- Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - Combien y a-t-il de tirages possibles comportant 2 noires et 3 blanches.
 - Combien y a-t-il de tirages possibles comportant 2 rouges, 1 noire et 2 blanches.
- 2) Même questions lorsque les 5 boules sont tirées successivement avec remise.
- 3) Même question lorsque les 5 boules sont tirées successivement sans remise.

5

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On choisit au hasard 5 cartes du jeu. (on dit que l'on a une main de 5 cartes).

- 1) Combien y a-t-il de mains différentes de 5 cartes ?
- 2) Combien y a-t-il de main de 5 cartes ne contenant que des figures (valets, dames, rois) ?
- 3) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes ne contenant aucun roi ?
- 4) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant au moins un roi ?
- 5) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant exactement un roi et exactement 3 cœurs ?

6

Parmi les élèves d'une classe, 16 étudient l'anglais, 13 l'espagnol, 13 l'allemand, 4 l'anglais et l'espagnol, 6 l'espagnol et l'allemand, 5 l'anglais et l'allemand et 3 les trois langues. Par ailleurs, tous les élèves étudient au moins l'une de ces trois langues.

Combien y a-t-il donc d'élèves dans cette classe ?

7

Un jeu consiste à cocher quatre cartes : un seul pique, un seul cœur, un seul carreau et un seul trèfle sur la grille suivante :

♠	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
♥	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
♦	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
♣	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7

- 1) Quel est le nombre total de grilles ?
- 2) Dans les conditions imposées ci-dessus, quel est le nombre de grilles où :
 - a) Les quatre cartes cochées ont été tirées ?
 - b) Le carte de pique cochée a été tirée.
 - c) Exactement trois cartes cochées ont été tirées.
 - d) La carte de carreau cochée n'a pas été tirée.
 - e) Aucune carte cochée n'a été tirée.
 - f) Au moins une carte cochée a été tirée.

8

On colorie chaque case de la grille ci-dessous avec une des trois couleurs

suyvantes : noir, gris et blanc.

Combien y a-t-il de coloriage possibles ?

Combien y a-t-il de coloriage où :

- a) Une seule couleur a été utilisée.
- b) Le blanc n'a pas été utilisée.
- c) Le blanc a été utilisé ou moins une fois.
- d) Les cases extrêmes sont de la même couleur.

gris	blanche	noire	gris	blanche
------	---------	-------	------	---------

9

Une urne contient 10 jetons :

5 rouges ayant les numéros : 1 - 2 - 3 - 4 - 5.

3 blancs ayant les numéros : 6 – 7 – 8.

2 jaunes ayant les numéros : 0 – 9.

- 1) On tire simultanément 3 jetons de l'urne, combien de tirage peut-on former dans les cas :
 - a) tirages quelconques
 - b) Avoir 3 jetons de même couleur.
 - c) Avoir au moins un jeton portant un numéro pair.
 - d) Avoir la somme des numéros marqués est paire.
- 2) On tire successivement et avec remise 3 jetons.
 - a) Quel est le nombre de tirage possible ?
 - b) Quel est le nombre de tirage sachant que les jetons sont :
 - tous rouges ; ■ tous portant un numéro paire.
 - tous portant des numéros impaires.
 - c) Quel est le nombre de tirage sachant qu'il y ait au moins un jeton rouge.
- 3) Mêmes questions que 2) lorsque les 3 jetons sont tirées successivement et sans remise .

10

1) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « élève » (chacune des lettres devant figurer une seule fois).

- a) Les accents permettant de distinguer les e.
 - b) En supprimant les accents.
- 2) En s'inspirant de la 1^{er} questions, déterminer le nombre d'anagramme des mots : « EUCLIDE » et « ANTICONSTITUTIONNELLEMENT ».

11

Trois personnes se donnent rendez-vous au café d'un village (croyant qu'il a un seul café).

Sachant qu'il y a cinq cafés dans ce villages dénombrer.

- 1) Les cas possibles de voir les 3 personnes dans les 5 cafés.
- 2) Les possibilités où aucune personne n'en rencontre une autre.
- 3) Les trois personnes se rencontrent.
- 4) Les possibilités où deux personnes seulement se rencontrent.

12

1) Une agence de voyages veut organiser des circuits touristiques comprenant dans un ordre donné, les 6 villes grecques : Athènes, Delphes, Olympe, Corinthe, Sparte, Nauplie.

- a) Combien y a-t-il de circuits possibles.
 - b) Si la première ville visitée est Athènes, combien peut-on organiser de circuits.
- 2) a) Cette agence propose aussi des excursions permettant de visiter 2 villes parmi les 6 citées précédemment : les excursions du type, par exemple olympe – Delphes et Delphes – Olympes sont considérés comme différentes.

Combien y a-t-il d'excursions différentes ?

b) L'agence souhaiterait proposer un choix de 56 excursions du même type. Combien doit-elle choisir de villes.

13

On lance trois dès parfaitement équilibrés, on lit les nombres a, b, c apparaissant sur les faces supérieures et on calcule la somme $S = a + b + c$. On observe qu'en jouant un très grand nombre de fois la somme 10 est obtenue plus souvent que la somme 9, alors que les deux sommes se décomposent exactement de 6 manières.

Que pensez-vous de cette observation ? Justifier votre réponse. On pourvue : Calculer le nombre de triplets possibles.

Calculer le nombre de triplets pour lesquels $S = 9$ et $S = 10$.

14

Un journal organise un sondage auprès de ses lecteurs comportent dix questions. A chaque question sont attachées cinq affirmations. Le lecteur devra à chaque question soit ne rien cocher, soit cocher une affirmation soit en cocher deux-mais il devra indiquer alors l'affirmation qu'il préfère. Déterminer le nombre de réponses possibles aux sondages.

15

Pour avoir accès à l'internet, le fournisseur de ce service doit présenter à ses clients un Login et un mot de passe.

1) a) Le Login est formé d'un numéro de six chiffres suivi d'une lettre, répondant aux conditions suivantes :

- il peut y avoir répétition d'un même chiffre plusieurs fois ;
- le premier chiffre de gauche ne peut être un zéro ;
- la lettre ne peut pas être O.

Combien, au maximum, peut-il y avoir de clients.

b) Le mot de passe est composé de quatre lettres prises parmi les vingt-six lettres de l'alphabet (donc O est, cette fois, utilisable), avec répétition possible. Est-ce que tout client peut posséder un mot de passe.

2) Un client veut accéder à l'internet mais il a oublié son mot de passe.

a) Il sait seulement que son mot de passe est formé de quatre lettres distinctes.

Combien de mot de passe a-t-il à essayer ?

b) En réfléchissant plus longuement, il réussit à se rappeler que son code contient également 2 voyelles. Combien a-t-il de code à essayer ?

16

Sur un damier carrée de 3 lignes et 3 colonnes, on veut disposer 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4 (chaque case contient au plus un jeton).

1) De combien de façon peut-on disposer les 4 jetons ?

2) De combien de façon peut-on disposer les 4 jetons si l'on veut que la figure formée par les 4 jetons soit un carré.

3) De combien de façon peut-on disposer les 4 jetons : de sorte que 3

d'entre eux soient sur une même ligne.

17

Le code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1, ..., 9 (ainsi 0027 est un nombre de quatre chiffres).

- a) Quel est le nombre de codes possibles.
- b) Quel est le nombre de codes formé de quatre chiffres distincts.
- 2) a) Le propriétaire de la voiture sait que les quatre chiffres de son code sont 1, 9, 9 et 5, mais il a oublié l'ordre des chiffres ; quel nombre maximal d'essais infructueux peut-il faire avant de retrouver son code.
- b) Mêmes question s'il sait que les quatre chiffres de son code sont 1, 2, 6, 7..
- 3) La voiture est elle-même protégée par un autre antivol : il faut appuyer simultanément sur quatre touches d'un cadron portant dix touches marquées A, B, C, J, pour ouvrir la portière ; combien de possibilités de code.

18

Un candidat à un concours doit répondre à un Q.C.M (question à choix multiple) constitué de 10 questions ; pour chaque question, 4 réponses différentes sont proposées, le candidat doit cocher une seule case, une seule des 4 réponses est exacte.

- 1) Combien de grilles de réponses différentes peut-on obtenir ?
- 2) a) Combien y a-t-il de grilles comportant 8 bonnes réponses exactement.
- b) Combien y a-t-il de grilles comportant p bonnes réponses exactement ($0 \leq p \leq 10$).

- 3) En déduire la valeur de la somme $\sum_{p=0}^{p=10} C_{10}^p 3^{10-p}$

19

On dispose de six jetons sur lesquels on a inscrit respectivement 0, 1, 2, 3, 4, 5 à l'aide de ces jetons combien peut-on former :

- 1) d'entier de quatre chiffres
- 2) d'entier de six chiffres
- 3) d'entier de six chiffres paires
- 4) d'entier de six chiffres dont le chiffre d'unité est 5
- 5) d'entier de trois chiffres et divisible par 9.

20

Trouver l'entier naturel n dans chaque cas :

a) $A_7^7 = 21A_6^{n-2}$; c) $A_n^3 = 72A_{n-2}^1$

b) $C_n^2 + C_{n-3}^2 = 17$.

21

Soient n points distincts d'un cercle avec $n \geq 3$.

- 1) Quand on joint ces points deux à deux, combien détermine-t-on de droites.
- 2) Combien existe-t-il de triangles ayant leurs sommets en ces points ?

22) Dans un plan, on considère n points tels que 3 quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. Combien existe-t-il de cercles passant par 3 points ?

23) 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (1+x)^n$. Calculer $f'(x)$ de 2 façons différentes.

2) a) En déduire que : $n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$

b) En déduire que $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour $x \geq 0$.

24) 1) Montrer que $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$

2) Pour n pair, calculer les valeurs de $C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^n$ et de $C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1}$.

25) Déterminer n de sorte qu'il existe dans la suite des coefficients du développement de $(1+x)^n$ quatre coefficients en progression arithmétique.

26) 1) une urne contient dix boules noires numérotées de 1 jusqu'à 10 et dix boules blanches numérotées de 1 à 10. On tire simultanément 10 boules de l'urne. Combien y a-t-il de tirage possibles ?

2) On suppose que l'urne contient n boules noires numérotées de 1 à n et n boules blanches numérotées de 1 à n , on tire simultanément n boules de l'urne.

a) combien y a-t-il de tirages possibles ?

b) combien parmi ces tirages comporte p boules noires avec $0 \leq p \leq n$?

c) Déduire de ce qui précède une écriture plus simple de

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

CORRIGES

1

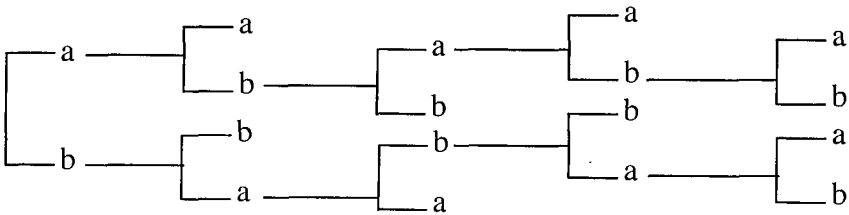
Matière professeur	aime	n'aime pas	total
aime	65	15	80
N'aime pas	15	5	20
total	80	20	100

- 2) a) 15 élèves n'aiment pas la matière
- b) 80 aiment au moins la matière
- c) 5 n'aiment ni la matière, ni le professeur

2

On note a lorsque l'équipe A qui gagne et b lorsque l'équipe B gagne.

1 ^{er} match	2 ^{ème} match	3 ^{ème} match	4 ^{ème} match	5 ^{ème} match
-----------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------



Le nombre maximum des matchs est : 5.
 Le nombre minimum des matchs est : 2.

3

Pour avoir une somme égale à 10 il faut avoir $2 + 3 + 5 = 10$ et les triplets qui correspondent.

Sont six ;(2,3,5) (2,5,3) (3,5,2) (3,2,5)(5,2,3)(5,3,2)

Ou $4 + 1 + 5 = 10$ et les triplets qui correspondent sont six aussi.

Ou $3 + 6 + 1 = 10$ et les triplets qui correspondent sont six aussi.

Ou $2 + 4 + 4 = 10$ et les triplets qui correspondent sont trois :

(2,4,4);(4,4,2);(4,2,4) .

Ou $6 + 2 + 2 = 10$ et les triplets qui correspondent sont trois.

Ou $3 + 3 + 4 = 10$ et les triplet qui correspondent sont trois.

Finalement il y a : $6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 3 = 27$ possibilités.

* pour avoir une somme égale à 9, il faut avoir:

$1+2+6=9$ et il y a 6 cas possibles.

Ou $1+3+5=9$ et il y a 6 cas possibles.

Ou $2+3+4=9$ et il y a 6 cas possibles.

Ou $1+4+4=9$ et il y a 3 cas possibles.

Ou $2+2+5=9$ et il y a 3 cas possibles.

Ou $3+3+3=9$ et il y a 1 cas possible.

Donc il y a $6+6+6+3+3+1=25$ possibilités.

Il fallait beaucoup jouer pour découvrir une telle différence.

4

1) a) Les 5 boules sont tirées simultanément.

Un tirage est donc une combinaison de 5 boules prises parmi 12. Il y a donc $C_{12}^5 = 792$ tirages possibles.

b) Puisque l'on ne tient pas compte de l'ordre. Un tirage est composé de 2 boules noirs prises parmi 5 ($C_5^2 = 10$ choix) et 3 blanches prises parmi 3 ($C_3^3 = 1$ choix) il y a donc $C_5^2 \times C_3^3 = 10$ tirages contenant 2 noirs et 3 blanches.

c) Un tirage est composé de 2 rouges prises parmi 4 ($C_4^2 = 6$ choix) ; de 1 noire prise parmi 5 ($C_5^1 = 5$ choix) et 2 blanches parmi 3 ($C_3^2 = 3$ choix) donc il y a : $C_4^2 \times C_5^1 \times C_3^2 = 90$ tirages contenant 2 rouges, 1 noire et 2 blanches.

2) a) Cette fois, les 5 boules sont tirées successivement et avec remise (on tient compte de l'ordre). Un tirage est donc une « 5 listes » de 5 éléments pris parmi 12. Il y a donc $12^5 = 248832$ tirages possibles.

b) Le tirage est composé de 2 boules noires prises parmi 5 ($5^2 = 25$ choix) et 3 blanches prises parmi 3 ($3^3 = 27$ choix). Comme l'ordre intervient, il faut tenir compte des $C_5^2 = 10$ façons de les répartir (C_5^2 est le nombre de façons de choisir, par exemple, les positions des 2 noirs parmi les 5 qui contient le tirage). Il y a donc $C_5^2 \times 5^2 \times 3^3 = 6750$ tirages contenant 2 noirs et 3 blanches.

c) Le tirage est composé de 2 rouges tirées parmi 4 ($4^2 = 16$ choix), de 1 noir parmi 5 (5 choix) et 2 blanches parmi 3 ($3^2 = 9$ choix). De plus il y a $C_5^2 = 10$ façons de placer les 2 rouges parmi les 5 places libres, puis 3 façons de placer la noire (il reste 3 places libres) et enfin, une façon de placer les 2 blanches restantes. Au total, il y a $C_5^2 \times 3 \times 4^2 \times 5 \times 3^2 = 21600$ tirages contenant 2 rouges, 1 noire et 2 blanches.

3) a) Les 5 boules sont tirées successivement et sans remise. Un tirage est donc

un arrangement de 5 éléments pris parmi 12. Il y a donc

$$A_{12}^5 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95040 \text{ tirages possibles.}$$

b) La méthode est identique à celle du 2^{ème} question, il y a $A_5^2 = 20$ façons de tirer les 2 noires parmi 5 et $A_3^3 = 6$ façons de tirer les trois blanches parmi 3. En tenant compte des C_5^2 manière de les répartir, il y a donc

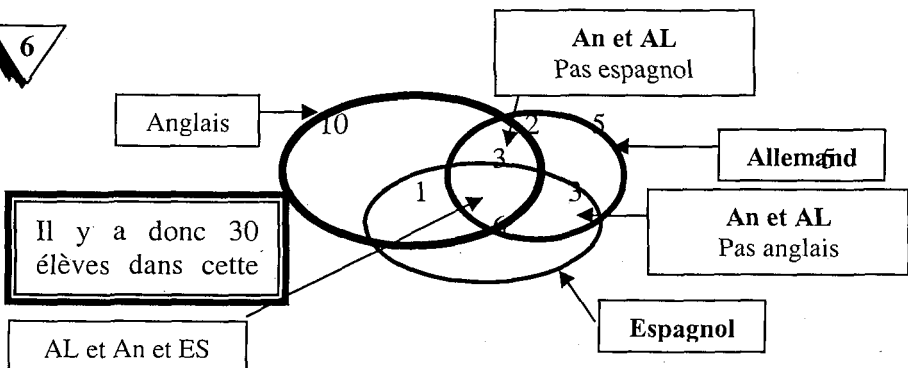
$$C_5^2 \times A_5^2 \times A_3^3 = 1200 \text{ tirages contenant 2 noires et 3 blanches.}$$

c) Le tirage est composé de 2 rouges tirées parmi 4 ($A_4^2 = 12$ choix), 1 noire parmi 5 ($A_5^1 = 5$) et 2 blanches parmi 3 ($A_3^2 = 6$ choix) il y a toujours $C_5^2 \times 3$ façons de les répartir sur 5 positions. Donc il y a: $C_5^2 \times 3 \times A_4^2 \times A_5^1 \times A_3^2 = 10800$ tirages contenant 2 rouges, 1 noire et 2 blanches.

5

- 1) On choisit 5 cartes sans ordre et sans remise. Il y a $C_{32}^5 = 201\ 376$ mains de 5 cartes.
 - 2) Il y a, dans le jeu, 12 figures (4 valets, 4 dames et 4 rois). Tout se passe comme si l'on choisissait les 5 cartes parmi 12 il y a $C_{12}^5 = 792$ mains comportant 5 figures.
 - 3) On retire les rois il reste 28 cartes, on choisit 5 cartes parmi 28, il y a donc $C_{28}^5 = 98280$ mains ne comportant pas de roi.
 - 4) C'est le complémentaire de l'ensemble précédent il y a donc $C_{32}^5 - C_{28}^5 = 103096$ mains contenant au moins un roi.
 - 5) Deux possibilités :
 - un roi qui n'est pas cœur, trois cœurs différents du roi, et une carte qui n'est ni roi ni cœur ; il y a alors $C_3^1 \times C_7^3 \times C_{21}^1 = 2205$ mains.
 - Un roi de cœur, deux autres cœurs et deux cartes qui ne sont ni rois ni cœurs : il y a alors $C_1^1 \times C_7^2 \times C_{21}^2 = 4410$ mains.
- Conclusion : cela fait $2205 + 4410 = 6615$ mains comportant exactement 1 roi et 3 cœurs.

6



7

1) Il y a $8^4 = 4096$ grilles possibles.2) a) $1^4 = 1$; b) $1 \times 8^3 = 512$; c) $(1^3 \times 7) \times 4 = 2$ d) $7 \times 8^3 = 358$; e) $7^4 = 2401$; f) $8^4 - 7^4 = 1695$.

8

1) Il y a $3^5 = 243$ coloriations possibles.2) a) $3 \times 1^4 = 3$; b) $2^5 = 32$; c) $3^5 - 2^5 = 211$; d) $3^4 \times 1 = 81$

9

1) a) Les 3 jetons sont tirés simultanément, un tirage est donc une combinaison de 3 jetons parmi 10 il y a donc $C_{10}^3 = 120$ tirages.b) Les 3 sont rouges ou les trois sont blancs, il y a donc $C_3^3 + C_3^3 = 11$

c) Les numéros pairs sont : 2 - 4 - 6 - 8 - 0.

Les numéros impairs sont : 1 - 3 - 5 - 7 - 9.

Avoir au moins un jeton portant un numéro pair ou encore toutes les tirages possibles sauf qui contiennent 3 impairs il y a donc

 $C_{10}^3 - C_3^3 = 120 - 10 = 110$.

d) Avoir la somme des numéros marqués est paire il suffit d'avoir :

* 2 impaires et 1 pair il y a $C_3^2 \times C_5^1 = 50$.* 3 pairs il y a $C_3^3 = 10$.Il y a donc $C_3^3 + C_3^2 \cdot C_5^1 = 50 + 10 = 60$ choix possibles.2) a) Tirage successifs de 3 jetons parmi 10 avec remise. Le nombre de tirage possible est $10^3 = 1000$.b) * Les trois jetons tirés sont rouges alors il y a $5^3 = 125$ choix.* Tous portant un numéro pair alors il y a $5^3 = 125$ choix.* Tous portant un numéro impair alors il y a $5^3 = 125$ choix.c) Au moins un qui est rouge c'est à dire tous les tirages sauf le cas où on n'a pas de jeton rouge ; il y a donc $10^3 - 5^3 = 875$.3) a) Tirage successif sans remise de 3 jetons parmi 10. Le nombre de tirage possible est $A_{10}^3 = 720$.b) * Tous rouges on a alors $A_3^3 = 60$ * Tous pairs on a alors $A_3^3 = 60$ * Tous impairs on a alors $A_3^3 = 60$ c) Au moins un jeton rouge il y a donc $A_{10}^3 - A_3^3 = 660$

10

1) a) Il y a 5 ! manières de placer les lettres distinctes du mots « élève ».

b) Les 5 lettres du mot « élève » étant placées dans un ordre donné, il y a

3 ! mots obtenus en permettant les trois « e ». Le nombre d'anagrammes

obtenus sans tenir compte des accents est donc : $\frac{5!}{3!} = 20$.

2) Si l'on distingue les deux « E » du mot « EUCLIDE » il y a 7 ! mots possibles.

Si l'on supprime le moyen de distinguer les « E » il y a $\frac{7!}{2!} = 2520$.

* Il y a 25 lettres dans le mot « ANTICONSTITUTIONNELLEMENT » et parmi ces 25 lettres 5 N, 5 T, 3 I, 2 O, 3 E, 2 L.

Si l'on distingue les lettres communes les unes par rapport aux autres il y a 25 ! anagrammes. En ne distinguant pas les lettres multiples, le nombre

d'anagrammes est $\frac{25!}{5!5!3!2!3!2!} = \frac{25!}{(5!)^2 \cdot (2!)^2 \cdot (3!)^2}$.

11

1) Trois personnes se rendent rendez-vous au café du village comme il y a 5 cafés alors le nombre de cas possible est $5^3 = 125$.

2) Aucune personne ne rencontre l'autre il y a $A_3^3 = 60$.

3) Les trois personnes se rencontrent est 5.

4) 2 personnes seulement se rencontrent est le nombre de tous les cas possibles sauf le cas où personne ne rencontre l'autre et les trois personnes se rencontrent il y a alors $125 - (60+5) = 60$.

12

1) a) Le nombre de circuits correspond au nombre de permutations des 6 villes c'est à dire, d'après la situation 1, $6 ! = 720$ circuits possibles.

b) Si la première ville est Athene, il reste 5 villes ; le même raisonnement donne $5 ! = 120$ circuits possibles.

2) a) Si l'on a choisit que deux villes parmi les 6, on a 6 choix pour la première et 5 choix pour la seconde donc $A_6^2 = 30$ excursions possibles.

b) Soit n le nombre de villes proposées, pour que le nombre d'excursions soit égal à 56 il faut que $n(n-1) = 56$ ce qui équivaut à $n^2 - n - 56 = 0$.

$\Delta = 225 = 15^2$ alors $n' = 8$ et $n'' = -7 \notin \mathbb{N}$, l'agence doit donc choisir 8 villes pour pouvoir proposer 56 excursions différentes.

13

1) De chaque dé à 6 faces. Le nombre de triplets possibles est donc de $6 \times 6 \times 6 = 216$.

2) Ecrivons tous les triplets dont la somme est égale à 9 :

- Du type 1 + 2 + 6, il y en a 6 car on peut permuter de $3 ! = 6$.

On peut aussi écrire tous les cas :

1 + 2 + 6 ; 1+6+2 ; 2+1+6 ; 2+6+1 ; 6+1+2 ; 6+2+1.

- Du type 1+3+5 il y en a de même 6.

- Du type 2+3+4 il y en a de même 6.

- Du type 1+4+4 il y en a 3. En effet on a 1 + 4 + 4 ; 4 + 1 + 4 ; 4+4+1.
- Du type 2 + 2 + 5 il y en a 3.
- Du type 3 + 3 + 3 il y en a qu'un. Soit un total de 25.

Ecrivons tous les triplets dont la somme est égale à 10 :

- Du type 1 + 3 + 6 il y en a 6 = 3 !
- Du type 1 + 4 + 5 il y en a 6.
- Du type 2 + 3 + 5 il y en a 6.
- Du type 2 + 4 + 4 il y en a 3.
- Du type 2 + 2 + 6 il y en a 3.
- Du type 3 + 3 + 4 il y en a 3. Soit un total de 27.

14

Il y a pour une question :

1 façon de ne rien cocher. 5 façon de cocher une seule affirmation.

A_3^2 manières de cocher deux affirmations car il est nécessaire d'indiquer une préférence. Il y a donc pour une question $(1+5+ A_3^2)$ manières de répondre donc par 10. Questions : $(1+5+ A_3^2)^{10}$ manières de répondre $A_3^2 = 5 \times 4 = 20$. donc il y a 26^{10} manières de répondre.

15

1) a) Calculons le nombre de Login que l'on peut former :

- Pour le 1^{er} chiffre, il y a 9 choix possibles (le 0 n'est pas admis).
- Pour le 2^{ème} chiffre, il y a 10 choix possibles.
- Pour le 6^{ème} chiffre, il y a 10 choix possibles.
- Pour la lettre, il y a 25 choix possibles (le 0 n'est pas admis).

Il y a ainsi $9 \times 25 \times 10^5$ numéros possibles, donc $225 \cdot 10^5$ clients possibles.

b) Un mot de passe est formé de 4 lettre prises parmi 26 ; avec possibilité de remise ; donc il y a $26^4 = 456976$ mot de passes possibles. Tout client ne peut pas avoir un mot de passe, car $225 \cdot 10^5 > 456976$.

2) a) Le mot de passe du client est formé de 4 lettres distincts il y a $A_{26}^4 = 358800$ mot de passe possible.

b) Il faut d'abord calculer le nombre de façon de placer les voyelles.

Il y a deux voyelles parmi 4 lettres, donc $C_4^2 = 6$ façons de les placer, puis 6 choix pour la 1^{ère} voyelle et 5 pour la seconde. Le client doit donc essayer $6 \times 6 \times 5 \times 20 \times 19 = 68400$ mot de passe.

16

1) Les jetons ont une disposition correspondant à un arrangement de 4 numéros pris parmi 9. Donc, il y a $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ dispositions.

2) Enumérons les dispositions où les jetons formant un carré.

0	0	0
0	0	

	0	
0		0
	0	

0	0	
0	0	

	0	0
	0	0

0	0	
0	0	

	0	0
	0	0

De plus, chaque position est invariante par permutation des pions.

Il y a donc $6 \times 4! = 144$ dispositions.

- 3) Lorsque 3 jetons sont sur une ligne, le 4^{ème} à 6 positions possibles ceci se reproduit pour chacune des 3 lignes, donc 6×3 dispositions. Comme chaque position est invariante par permutation des pions il y a donc $3 \times 6 \times 4! = 432$ dispositions.

17

1) a) Exemples de codes : 2143, 9999, un tel code est un nombre compris entre 0000 et 9999 et qu'il y a donc $10000 = 10^4$.

b) Les codes formés de 4 chiffres distincts sont des arrangements sans répétition donc il y a : $A_{10}^4 = 5040$ codes.

- 2) a) Il y a $4!$ numéros si les chiffres sont distincts or 9 se répète 2 fois donc le nombre de codes possibles avec $9 - 9 - 5 - 1$ est $\frac{4!}{2!} = 12$.

Donc au maximum 11 essais infructueux.

- b) Les chiffres sont distincts deux à deux alors il y a $4! = 24$ codes possibles donc 23 essais infructueux.
- 3) Dans ce cas l'ordre ne joue plus de rôle, puisqu'on appuie simultanément sur les quatre touches, de plus il ne peut y avoir de répétition, toujours pour la même raison. Il y a donc $C_{10}^4 = 210$ codes possibles.

18

1) Exemple de réponse : (3,1,3,2,4,1,2,2,4,3) qui indique que le candidat a coché la troisième case de la 1^{ère} question, la 1^{ère} case de la 2^{ème} question, etc.... Il y a quatre choix pour la première question de même pour les autres questions. Il y a donc $4^{10} = 1048576$ réponses.

- 2) a) Imaginons une urne qui contient 10 boules numérotée de 1 à 10 et tirons simultanément huit boules de cette urne : les numéros obtenus seront les numéros des questions auxquelles on a répondu exactement ; il y a donc C_{10}^8 choix possibles pour les huit bonnes réponses. Quand on a coché ces huit bonnes cases, il reste à répondre à deux questions, pour chacune d'elles, on a le choix entre trois mauvaises réponses c'est à dire $3 \times 3 = 9$ possibilités. Il y a donc en tout $C_{10}^8 \times 9 = 405$ telles grilles.

b) Même raisonnement, si p remplace 8 : il y a en tout $C_{10}^p \cdot 3^{10-p}$

- 3) La somme à calculer est la somme du nombre de cas où il y a $0, \dots, 10$ réponses exactes on obtient dans la totalité des cas, et on a donc

$$\sum_{p=0}^{p=10} C_{10}^p 3^{10-p} = (1+3)^{10} = 4^{10}.$$

19

1) Un entier de 4 chiffres notons le abcd avec $a \neq 0$ on a alors un arrangement.

Le nombre de tous les cas possibles $A_6^4 = 360$ privé du nombre des cas où le chiffre des milliers est 0 ($A_3^3 = 60$) donc il y a $360 - 60 = 300$ nombres de 4 chiffres.

2) Même raisonnement donc il y a $A_6^6 - A_3^5 = 720 - 120 = 600$ nombres de 6 chiffres.

3) Un nombre entier est pair si le chiffre des unités est 0-2-4 : « le nombre d'entiers dont le chiffre des unités est 0, il y en a $A_5^5 = 120$.

Le nombre d'entier dont le chiffre des unités est 2 ; il y en a $A_5^5 - A_4^4 = 96$

Le nombre d'entier dont le chiffre des unités est 4 ; il y en a $A_5^5 - A_4^4 = 96$

finalement le nombre d'entier pair est : $120 + 96 + 96 = 312$.

4) Le chiffre des unités est 5 et le chiffre des milliers est différent de 0 on a alors $A_5^5 - A_4^4 = 96$.

5) Soit X un entier de trois chiffres est divisible par 9 avec $X = abc$ avec $a \neq 0$ et $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. X est divisible par 9 si et seulement si $a + b + c$ est divisible par 9.

- Du type $4 + 0 + 5$ il y en a $A_3^3 - A_2^2 = 4$.

- Du type $2 + 3 + 4$ il y en a $A_3^3 = 6$.

- Du type $3 + 1 + 5$ il y en a $A_3^3 = 6$

Donc le nombre d'entiers de 3 chiffres et divisibles par 9 est : $6 + 6 + 4 = 16$.

20 On sait que $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ et $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$; $p \leq n$

a) $A_7^n = 21A_6^{n-2}$ avec $n \leq 7$ et $n-2 \leq 6$ soit $n \leq 7$.

$$\frac{7!}{(7-n)!} = 21 \cdot \frac{6!}{(6-n+2)!} \text{ ou encore } \frac{7 \cdot 6!}{(7-n)!} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 6!}{(8-n)!}$$

équivalent à : $\frac{1}{(7-n)!} = \frac{3}{(8-n)!}$ on multiplie par $(8-n)!$ l'équation devient

$(8-n) = 3$ soit $n = 5 \leq 7$ donc la solution est $n = 5$.

b) $C_n^2 + C_{n-3}^2 = 17$ avec $n-3 \geq 2$ et $n \geq 2$ soit $n \geq 5$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(n-3)!}{2!(n-3-2)!} = 17 \text{ ou encore } \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{2(n-5)!} = 17$$

et par suite $n(n-1) + (n-3)(n-4) = 34$. Soit $2n^2 - 8n - 22 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 4n - 11 = 0$

$\Delta' = (2)^2 + 11 = 15$, les solutions sont $n' = 2 + \sqrt{15}$ ou $n' = 2 - \sqrt{15}$

n' n'appartiennent pas \mathbb{IN} , donc cette équation n'a pas de solution dans \mathbb{IN} .

c) $A_n^3 = 72A_{n-2}^1$ définie que pour $n \geq 3$.

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 72 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-2-1)!} \text{ soit } n(n-1)(n-2) = 72(n-2)$$

ou encore $(n-2)(n^2-n-72)=0$ équivaut à $n=2 \leq 3$ (à rejeter) ou $(n^2-n-72=0)$

* $n^2-n-72=0 \Delta=1+72 \times 4=289$ donc les solutions $n=-8 \notin \mathbb{N}$ ou $n=9 \geq 3$ finalement la solution est $n=9$.

21

1) Une droite est définie par la donnée de deux de ses points.

En prenant deux à deux les n points donnés du cercle, on détermine C_n^2 droites distinctes (car une droite rencontre un cercle en au plus deux points). Donc les n points du cercle que l'on joint deux à deux détermine

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ droites.}$$

2) Un triangle est définie par la donnée de ses sommets, c'est à dire par la donnée de trois points non alignés. (On ne tient pas compte de l'ordre dans lequel sont énoncés les sommets). Or, les n points donnés du cercle sont distincts et il n'en existe pas trois qui soient alignés (car une droite rencontre un cercle en au plus deux points). Donc les n points donnés du cercle déterminent C_n^3 triangles différents, soit : $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triangles.

22

Par trois points non alignés, ne passe qu'un seul cercle et on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel sont énoncés les points et ceci bien sur pour justifier l'emploi des combinaisons, dans le nombre de cercle est

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

23

1) f est une fonction polynome donc dérivable sur \mathbb{R} et on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$.

Si on développe $f(x)$ par le binome de Newton, on a :

$$f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n \text{ et en dérivant cette somme}$$

$$\text{on a : } f'(x) = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}.$$

2) a) En égalisant les deux écritures de $f'(x)$ et en remplaçant x par 1, on

$$\text{trouve que : } n(1+1)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 \times 1 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} \times 1 + nC_n^n \times 1$$

$$\text{d'où : } n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n.$$

b) Remplaçons C_n^0 par 1 et C_n^1 par n dans l'expression :

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$

$$\text{Nous obtenons : } \left((1+x)^n = 1 + nx + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \right).$$

Il est immédiat que $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour $x \geq 0$.

24

Ce genre d'exercice doit obligatoirement faire penser au binôme de Newton. Restent à trouver les valeurs par lesquelles seront remplacés a et b .

$$1) \text{ On a : } (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \quad (1)$$

Si on remplace x par (-1) on obtient :

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0.$$

2) On suppose que n est pair ($n = 2p$). Remplaçons dans la formule du (1), n par $2p$. On trouve :

$$C_{2p}^0 - C_{2p}^1 + C_{2p}^2 + \dots + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} = 0 \Leftrightarrow C_{2p}^0 - C_{2p}^1 + C_{2p}^2 + \dots + C_{2p}^{2p} = 0 \quad (2).$$

Appliquons la formule (1) au cas $x = 1$

$$\text{on obtient : } (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 \times 1 + C_n^2 \times 1^2 + \dots + C_n^n \cdot 1^n .$$

D'où $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$; remplaçons aussi n par $2p$

$$\text{on obtient : } 2^{2p} = C_{2p}^0 + C_{2p}^1 + C_{2p}^2 + \dots + C_{2p}^{2p} \quad (3).$$

$$3) \text{ (2) + (3) conduit à } 2 C_{2p}^0 + 2C_{2p}^2 + \dots + 2C_{2p}^{2p} = 2^{2p} .$$

$$\text{D'où } C_{2p}^0 + C_{2p}^2 + \dots + C_{2p}^{2p} = \frac{2^{2p}}{2} = 2^{2p-1} .$$

$$\text{(3) - (2) donne : } 2C_{2p}^1 + 2C_{2p}^3 + \dots + 2C_{2p}^{2p-1} = 2^{2p} .$$

$$\text{Où encore } C_{2p}^1 + C_{2p}^3 + \dots + C_{2p}^{2p-1} = 2^{2p-1} .$$

25

Soit $a, a+b, a+2b, a+3b$ les quatre coefficients en question.

Reconstitutions un fragment de triangle de Pascal :

$$2a + b \quad a + 2b \quad a + 3b = 2a + b \quad 2a + 3b \quad 2a + 5b$$

$$4a + 4b \quad 4a + 8b \text{ écrire comme } a + b \quad a + 2 \quad a + 3b$$

$$2a + b \quad 2a + 3b \quad 2a + 5b \quad 4a + 4b \quad 4a + 8b$$

avec a est un coefficient qui existe à l'intersection de la n^e ligne et la p^e colonne du triangle de Pascal.

$$\text{Donc } a = C_n^p ; a + b = C_n^{p+1} ; a + 2b = C_n^{p+2} ; a + 3b = C_n^{p+3}$$

$$2a + b = C_{n+1}^{p+1} ; 2a + 3b = C_{n+1}^{p+2} ; 2a + 5b = C_{n+1}^{p+3}$$

$$4a + 4b = C_{n+2}^{p+2} ; 4a + 8b = C_{n+2}^{p+3}$$

Des conditions nécessaires apparaissent :

$$4a + 4b = 4(a + b) \text{ et donc } C_{n+2}^{p+2} = 4C_n^{p+1} .$$

$$4a + 8b = 4(a + 2b) \text{ et donc } C_{n+2}^{p+3} = 4C_n^{p+2}.$$

$$\text{Soit } \frac{(n+2)!}{(p+2)!(n-p)!} = 4 \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$$

$$\text{et } \frac{(n+2)!}{(p+3)!(n-p-1)!} = 4 \frac{n!}{(p+2)!(n-p-2)!}$$

La simplification des factorielles donne respectivement :

$$\frac{(n+2)(n+1)}{(p+2)(n-p)} = 4 \text{ et } \frac{(n+2)(n+1)}{(p+3)(n-p-1)} = 4.$$

Pour que les deux égalités soient vrais on doit avoir :

$$(p+2)(n-p) = (p+3)(n-p-1) \text{ ou encore } n = 2p + 3.$$

Chacune des relations équivalant alors à :

$$(2p+5)(2p+4) = 4(p+2)(p+3) \text{ soit à } 2p+5 = 2(p+3) \text{ et ce si est}$$

impossible donc il n'existe pas de valeur de n pour laquelle quatre coefficients binomiaux sont en progression arithmétique



1) l'urne contient 20 boules et on tire simultanément 10 boules
alors le nombre de cas possibles est $C_{20}^{10} = 184756$

2) a) l'urne contient $2n$ boules et on tire simultanément n boules

$$\text{alors le nombre de cas possibles est. } C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

b) on tire parmi les $2n$ boules : p noires et $n-p$ blanches alors le

$$\text{nombre de cas possibles est : } C_n^p C_n^{n-p} = C_n^p. C_n^p = (C_n^p) \text{ car } C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$\text{c) on a : } \begin{cases} \text{le nombre de cas où on tire 0 noires et } n \text{ blanches est } (C_n^0)^2 \\ \text{le nombre de cas où on tire 1 noires et } n-1 \text{ blanches est } (C_n^1)^2 \\ \text{le nombre des cas où on tire 2 noires et } n-2 \text{ blanches est } (C_n^2)^2 \\ \vdots \\ \text{le nombre de cas où on tire } n \text{ boules noires et } 0 \text{ blanche est } (C_n^n)^2 \end{cases}$$

on additionne ces cas on trouve tous les cas possibles

$$\text{par suite } (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Chapitre VII

Divisibilité

■ Principe de raisonnement par récurrence.

Soit P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n supérieur ou égal à n_0
Si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- P_{n_0} est vraie
- si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie, alors P_n est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0

■ Méthodes sur la divisibilité sur \mathbb{N} :

• La Division euclidienne :

Soient a, b deux entiers naturels avec $b \neq 0$ il existe un seul couple (q, r)
tel que

$$\boxed{a} = \boxed{b} \times \boxed{q} + \boxed{r} \quad \text{avec } 0 \leq r < b$$

\uparrow
la dividende

\uparrow
Diviseur

\uparrow
quotient

\uparrow
reste

- Si $r = 0$ alors $a = b \cdot q$ on dit que a est un multiple de b
où b est un diviseur de a .

Si un entier $c \neq 0$ et c divise b et a alors c divise
tout entier de la forme $ma + nb$ ($m, n \in \mathbb{N}$)

• Comment montrer que b divise a ?

1^{ère} Méthode

Factoriser en produit de facteurs consécutifs pour prouver une divisibilité

Exemple

Montrer que 2 divise $n^2 + n$

$n^2 + n = n(n+1)$. comme $n, n+1$ sont consécutifs
alors 2 divise $n+1$ ou 2 divise $n \Rightarrow 2$ divise $n^2 + n$.

2^{ème} Méthode

La démonstration par récurrence

Exemple

Montrer par récurrence que $n^3 - n$ est divisible par 6.

*vérifions pour $n = 0$:

$n^3 - n = 0$ divisible par 6 donc la propriété est vraie pour $n = 0$

*Supposons pour tout $n \geq 0$ on a $n^3 - n$ est divisible par 6

Montrons que $(n + 1)^3 - (n + 1)$ est divisible par 6.

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 - n + 3(n^2 + n)$$

comme $n^3 - n$ est divisible par 6 et $3 \times n(n + 1)$ est divisible par $2 \times 3 = 6$ d'où $(n + 1)^3 - (n + 1)$ est divisible par 6.

D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 6.

3^{ème} Méthode

Si d divise c et $c = ma + nb$ il faut retrouver m et n alors d divise a et divise b

Exemple

$$a = 3n - 5 \quad \text{et} \quad b = 2n - 7.$$

Montrer que tout diviseur commun à a et b est un diviseur de 11 ?

k divise a et b alors k divise 2a et 3b d'où k divise $2a - 3b$

et $2a - 3b = 6n - 10 - 6n + 21 = 11$ en déduit que k divise 11 d'où tout diviseur de a et b est un diviseur de 11.

■ PGCD et PPCM :

• Le plus grand commun diviseur de a et b qu'on note **PGCD(a,b)** ou $a \wedge b$

• Le plus petit commun multiple de a et b qu'on note **PPCM(a,b)** ou $a \vee b$

Exemple 1 : Déterminer le PGCD et le PPCM de 360 et 500

On décompose en facteur premier et on procède comme suit

360	2	500	2	$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $500 = 2^2 \times 5^3$
180	2	250	2	$\text{PGCD}(360, 500) = 2^2 \times 5 = 20$
90	2	125	5	$\text{PPCM}(360, 500) = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 = 9000$
45	3	25	5	
15	3	5	5	
5	5	1		
1				

Exemple 2 : Déterminer PGCD et PPCM de $x(x-1)^2$ et $x^3 - x^2$

On factorise $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ et $x(x-1)^2$.

$$\text{PGCD}(x(x-1)^2, x^3 - x^2) = x(x-1)$$

$$\text{PPCM}(x(x-1)^2, x^3 - x^2) = x^2(x-1)^2$$

Méthode d'algorithme d'Euclide : calculer le PGCD (a, b) ?

On divise a par b on obtient $a = bq_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < b$

puis on divise b par r_1 on obtient $b = q_2 r_1 + r_2$ avec $r_2 < r_1$

puis on divise r_1 par r_2 on obtient $r_1 = r_2 q_3 + r_3$

ainsi de suite jusqu'à tomber sur un reste nul

on conclut alors PGCD (a, b) est le dernier reste non nul.

Exemple : PGCD (120, 35) ?

$$120 = 3 \times \boxed{35} + 25 \qquad 25 = \boxed{10} \times 2 + 5$$

$$35 = \boxed{25} \times 1 + 10 \qquad 10 = \boxed{5} \times 2 + 0$$

donc PGCD (120, 35) est 5 car c'est le dernier reste non nul.

■ **Propriétés :**

- Si $a \wedge b = 1$ alors $a \vee b = ab$
- Si a / b alors $a \wedge b = a$ et $a \vee b = b$
- PGCD (ka, kb) = k PGCD(a, b)

■ **les diviseurs d'un entier naturel :**

• **Définition :**

b est un diviseur de a qu'on note b/a signifie que $a = b \cdot q$ avec $q \in \mathbb{N}$

On note : Div (a) l'ensemble des diviseurs de a

Exemple :

• $\text{Div}(2) = \{1, 2\}$

• $\text{Div}(5) = \{1, 5\}$

• **Lemme d'Euclide :** $a, b \in \mathbb{N}^*$

Si $a = b \cdot q + r$ alors PGCD (a, b) = PGCD (b, r)

■ **Systemes de numérotation :**

• **Définition :** $A \in \mathbb{N}$, l'écriture de A dans le système de numérotation de

base b sous la forme $A = \overline{q_n q_{n-1} \dots q_0}$. Signifie que

$$A = q_0 + b q_1 + b^2 q_2 + \dots + b^n q_n$$

Où $A = \sum_{i=0}^n b^i q_i$ avec $(0 \leq q_i \leq b-1 \text{ Si } i \neq n)$ et $1 \leq q_n \leq b-1$

Exemples :

1) Si $b = 5$ (Système à base 5)

$$A = \overline{412} = 2 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^2 = 107$$

2) Si $b = 2$ (Système à base 2) ou binaire

$$A = \overline{1011} = 1 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 11$$

Exemple :

$A = 2031$ écrire A dans la base 5

$$A = 2000 + 30 + 1 = 2 \times 1000 + 30 + 1 \text{ or } 1000 = 10^3 = 5^3 \times 2^3$$

$$= 16 \times 5^3 + 6 \times 5 + 1 = (15+1) \times 5^3 + (5+1)5 + 1$$

$$= 3 \cdot 5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1 = \overline{31111}$$

Remarque :

- * Si $b = 2$ (système à base 2) on dit dans le système binaire.
- * Si $b = 10$ (système à base 10) on dit dans le système décimal.

Réflexes

Situations	Réflexes
Montrer qu'un polynôme en n est divisible par b	<u>On essaye dans l'ordre :</u> 1) Ecrire comme le produit de nombre consécutifs 2) Démonstration par récurrence
Montrer qu'une somme de puissances d'exposants dépendant de n est divisible par b	La démonstration par récurrence
Montrer qu'un diviseur commun à deux nombres a et b divise un nombre c	On essaye d'écrire c sous la forme $na + mb$ avec $n, m \in \mathbb{N}$
Pour déterminer un PGCD de deux entiers	* On essaye d'appliquer la formule : 1) $\text{PGCD}(ka, kb) = k \text{PGCD}(a, b)$ puis on utilise l'algorithme d'Euclide. 2) On décompose en facteurs premiers
Pour déterminer un PPCM de deux entiers	1) On calcule PGCD puis on applique $\text{PPCM}(a, b) = a \vee b = \frac{ab}{a \wedge b}$

ENONCES

1 Q. C.M

Indiquer la réponse exacte par a,b et c , justifier votre réponse.

- 1) les nombres d'entiers premiers compris entre 1 et 80 se terminant par 3 est :
 a) 8 b) 7 c) 6
- 2) $2^4 \times 3^7 \times 5^2 \times 11$ est divisible par le cube de :
 a) 8 b) 9 c) 10
- 3) Le PPCM (984 , 702) est égale à :
 a) 8856 b) 9126 c) 115128
- 4) $n \in \mathbb{N}^*$, PPCM ($n(2n+1)$; $2n+1$) est égale à :
 a) $n(2n+1)$ b) $n(2n+1)^2$ c) $2n+1$

2 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

- 1) Si PPCM de deux entiers naturels est multiple de 15 alors l'un au moins des deux est multiple de 15.
- 2) Le PPCM d deux entiers naturels non nuls est toujours strictement supérieur à leur PGCD.
- 3) le PPCM de deux entiers naturels pairs ne peut jamais être égal à leur produit.
- 4) Le PPCM de deux entiers premiers est égal à leur produit .

3 Donner le PGCD et le PPCM de 1440 , 4536 et 39600.

4 1) Déterminer le PGCD de 2045 et 64.

2) Donner alors une solution particulière de l'équation définie dans \mathbb{N}^2 par $2045x - 64y = 1$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Montrer que $\text{PGCD}(n-1, n^2 - 3n + 6) = \text{PGCD}(n-1, 4)$.

b) En déduire selon n la valeur de PGCD de $n - 1$ et $n^2 - 3n + 6$.

2) Pour quelles valeurs de n la fonction : $\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est elle un entier naturel ?

6 Déterminer les entiers naturels x et y tels que :

$$\begin{cases} x + y = 224 \\ \text{PGCD}(x, y) = 16 \end{cases}$$



$$a = 10n + u \quad b = n + 2u$$

a, b, n , des entiers avec u un chiffre .

Montrer que : a est divisible par 19 si et seulement si b est divisible par 19.



Montrer que si n est pair alors les nombres $A = n(n^2 + 20)$

$$B = n(n^2 - 20) \text{ et } C = n(n^2 + 4) \text{ et } D = n(n^2 - 4) \text{ sont divisibles par 8.}$$



1) Démontrer que pour tout entier naturel n , $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n , $3^{6n} - 2^{6n}$ est divisible par 665.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S(n)$ la somme de tous les diviseurs de n (y compris 1 et n).

1) Calculer $S(8)$, $S(36)$ et $S(152)$

* On dit qu'un nombre n est parfait Si $S(n) = 2n$.

2) Montrer que 28 est un nombre parfait.

3) Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors

$$S(a \times b) = S(a) \times S(b).$$

4) Montrer que si p est premier si et seulement si $S(p) = p + 1$.

5) Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. Quels sont les diviseurs de p^k ?

$$\text{En déduire } S(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

6) Décomposer 496 en produit de facteurs premiers.

Déduire des questions 3 et 5 la valeur $S(496)$. Conclure.

• Système de numérotation dans la base a : Soit une suite définie sur \mathbb{N}^* , par

$$U_1 = 2 \text{ et } U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1.$$

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

a) Montrer que $U_{n+1} - 1 = U_n (U_n - 1)$.

b) En déduire que $U_{n+1}^{-1} = U_n \cdot U_{n-1} \dots U_2 \cdot U_1$.

2) Déduire que deux quelconques de ses termes sont premiers entre eux.



Déterminer x et y pour que le nombre $A = 4x^3 y$ soit divisible par 2 et

par 9.

Un entier égale à la somme de ses diviseurs autre que lui-même est appelé nombre parfaits.

1) Vérifier que 6, 28, 496 sont des nombres parfaits.

2) Montrer que si $2^n - 1$ soit premier. Alors le nombre $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait.

12/ Quels sont les entiers de 3 chiffres qui s'écrivent \overline{xyz} dans le système de base 7 et \overline{zyx} dans le système de base 11.

13 1) Ecrire dans le système décimal :
Les nombres suivantes écrits dans le système binaire :
 $(100)_{\text{deux}}$, $(10100)_{\text{deux}}$, $(111)_{\text{deux}}$

2) Ecrire dans le système décimal les nombres suivants : 166, 588, 1307

14 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Montrer que $X = 4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Montrer que $Y = 2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1$ est divisible par 11.

15 Soit l'entier $N = \overline{53x4}$ dans la système à base 8

- Déterminer x pour que N soit divisible par 7.
- Déterminer x pour que N soit divisible par 6.
- En déduire x pour que N soit divisible à la fois par 6 et 7.

16 1) On appelle diviseur strict d'un entier naturel tout diviseur autre que le nombre lui même. Déterminer les entiers naturels diviseurs stricts de 2220.
2) On appelle nombres amiables deux entiers naturels tels que chacun d'eux soit égal à la somme des entiers naturels diviseurs stricts de l'autre. Vérifier que 220 et 224 sont amiables.

17 1) Déterminer les entiers naturels a et b tel que $a + b = 11994$ et $\text{PGCD}(a, b) = 1999$ (on admet dans cette question que 1999 est un nombre premier).

2) Soit l'équation dans \mathbb{N} : (E) : $X^2 - SX + 11994 = 0$ avec ($S \in \mathbb{N}$)

- Déterminer S pour que 3 soit une solution de l'équation.
Déterminer alors la 2^{ème} solution.
 - Peut-on avoir un entier S tel que 5 est solution de (E).
- 3) Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994.
En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admettent deux solutions entiers.

18 La clé des codes barres :

Le code UPC (Universel Product Code) utilise des nombres de treize chiffres pour désigner un produit de consommation. Les douze premier chiffre désigne le produit, le treizième est un clé de contrôle destinée à délecter une erreur dans

l'un de douze premiers. La clé est calculée de telle sorte que si le nombre s'écrit

$$a_1 a_2 \dots a_{13}, \text{ alors } 3 \times \sum_{i=1}^6 a_{2i} + \sum_{i=0}^6 a_{2i+1} \text{ est divisible par } 10$$

Exemple calculer la clé associée au nombre de douze chiffres 325 039 17 681

$$3 \times (2 + 0 + 9 + 1 + 6 + 1) + (3 + 5 + 3 + 0 + 7 + 8 + k) \text{ est divisible par } 10$$

$$3 \times 19 + 26 + k = 83 + k \text{ qui est divisible par } 10 \text{ d'où } k = 7 \text{ (la clé } k \text{ } 0 \leq k \leq 9)$$

Déterminer la clé de chacun des codes barres suivants : 130 090 003 412 ; 561 111 305 500 ; 156 130 550 001.



On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} - u_n$ est divisible par 4.

En déduire que, pour tout entier naturel k , $u_{2k} - 2$ est divisible par 4 et u_{2k+1} est divisible par 4.

3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

CORRIGES



QCM

- 1) **c** : 6 sont 3, 13, 23, 43, 53, 73.
 2) **b** : 9 car $2^4 \times 3^7 \times 5^2 \times 11 = 2^4 \times (3^2)^3 \times 3 \times 5^2 \times 11$
 Donc 9^3 divise $2^4 \times 9^3 \times 3 \times 5^2 \times 11$
 3) **c** : Le PPCM (984, 702) = 115128
 4) **a** : PPCM ($n(2n+1)$, $2n+1$) = $n(2n+1)$



- 1) Faux : PPCM (6,5) = 30 et pourtant 6 et 5 ne sont pas des multiples de 15.
 2) Faux : PPCM (15,15) = 15 et PGCD (15,15) = 15
 3) Vrai : a, b deux entiers naturels pairs
 Alors PGCD (a, b) est au moins égal à 2 donc PPCM (a, b) sera toujours différents de ab.
 4) Vrai : a, b premier alors PGCD (a, b) = 1
 Alors PPCM (a, b) = ab.



- On décompose en facteurs premiers : 1440, 4536, 39600 on obtient :
 $1440 = 2^5 \times 3^2 \times 5$
 $4536 = 2^3 \times 3^4 \times 7$
 $39600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$
 d'où le PGCD (1440, 4536, 39600) égal à $2^3 \times 3^2 = 72$.



1^{ère} Méthode :

- 1) On décompose en facteurs premiers : 64 et 2045 on obtient :

$$64 = 2^6 \quad \text{et} \quad 2045 = 5 \times 409 \quad \text{alors PGCD (2045, 64) = 1}$$

2^{ème} méthode :

On bien en utilise l'algorithme D'Euclide

$$\begin{array}{r|l} 2045 & 64 \\ 61 & 31 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{r|l} 64 & 61 \\ 3 & 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{r|l} 61 & 3 \\ 1 & 20 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}$$

donc PGCD (2045, 64) est le dernier reste non nul qui est 1.

- 2) $2045 = 61 + 64 \times 31$
 $2045 = 61 + 64 \times 31$ et $64 = 61 + 3$ et $61 = 20 \times 3 + 1$

$$\text{comme } 61 = 2045 - 64 \times 31 \text{ et } 3 = 64 - 61$$

$$3 = 64 - 2045 + 64 \times 31$$

$$3 = 64 \times 32 - 2045$$

$$3 \times 20 = 64 \times 32 \times 20 - 2045 \times 20$$

$$\text{ainsi } 1 = 61 - 20 \times 3$$

$$1 = [2045 - 64 \times 31] - [64 \times 32 \times 20 - 2045 \times 20]$$

$$1 = 2045 \times 21 - 64 \times 31 \times 21$$

$$1 = 2045 \times 21 - 64 \times 651$$

$$\text{donc } x = 21 \text{ et } y = 251$$

5

1) a) Comme $n^2 - 3n + 6 = n^2 - 3n + 2 + 4 = (n-1)(n-2) + 4$

Comme d divise 4 et $n-1$ donc d divise $(n^2 - 3n + 6)$

Soit $d' = \text{PGCD}(n-1, n^2 - 3n + 6)$ alors d' divise $n-1$ et $n^2 - 3n + 6$.

Comme $4 = (n^2 - 3n + 6) - (n-1)(n-6)$. Donc d' divise 4 d'où d' divise 4 et $n-1$ ainsi d' divise d et comme d divise d' alors $d = d'$

finalemt PGCD $(n-1, 4) = \text{PGCD}(n-1, n^2 - 3n + 6)$

b) $\text{PGCD}(n-1, n^2 - 3n + 6) = \text{PGCD}(n-1, 4)$

donc un diviseur de 4 or $\text{Div}(4) = \{1, 2, 4\}$ d'où $d \in \{1, 2, 4\}$.

2) On a $n^2 - 3n + 6 = (n-1)(n-2) + 4$

$$\frac{n^2 - 3n + 6}{n-1} = n-2 + \frac{4}{n-1} \text{ est un entier si et seulement si } n-1 \in \text{Div}(4)$$

$$\Leftrightarrow n-1=1 \text{ ou } n-1=2 \text{ ou } n-1=4$$

$$n=2 \text{ ou } n=3 \text{ ou } n=5$$

$$\text{d'où } n \in \{2, 3, 5\}$$

6

$\text{PGCD}(x, y) = 16$ alors $x = 16k$ et $y = 16k'$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$.

$$x + y = 224 \text{ devient } 16k + 16k' = 224$$

$$k + k' = 14 \text{ comme } k, k' \in \mathbb{N}$$

$$\text{alors } (k, k') \in \{(13, 1); (11, 3); (9, 5); (1, 13); (3, 11); (5, 9)\}$$

$$\text{ainsi } (x, y) \in \{(208, 16); (176, 48); (144, 80); (16, 208); (48, 176); (80, 144)\}$$

7

1) a est divisible par 19

$$\Rightarrow 10n + u \text{ est divisible par 19}$$

$$\Rightarrow 10n + u = 19k, k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u = 19k - 10n$$

$$b = n + 2u = n + 2(19k - 10n) = -19n + 2 \times 19k = 19(2k - n)$$

donc b est divisible par 19

* Si b est divisible par 19

$$\Rightarrow n + 2u = 19k' \Rightarrow n = 19k' - 2u$$

$$a = 10n + u = 10(19k' - 2u) + u$$

$$a = 19(10k' - u) \text{ donc } a \text{ est divisible par } 19.$$

Conclusion : a est divisible par 19 si et seulement si b est divisible par 19.

8

Si n est pair on peut l'écrire $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}$)

$$A = n(n^2 + 20) = 2p(4p^2 + 20) = 8p(p^2 + 5) \text{ d'où } A \text{ est divisible par } 8.$$

$$B = 2p(4p^2 - 20) = 8p(p^2 - 4)$$

$$C = 2p(4p^2 + 4) = 8p(p^2 + 1) \text{ et } D = 8p(p^2 - 1)$$

donc B , C et D sont divisible par 8.

9

1) Pour $n = 0$: $3 + 2^2 = 7$ et 7 est divisible par 7

Supposons que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

Montrons que $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ est divisible par 7

$$\text{On a } 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 3^{2n+1} \cdot 9 + 2^{n+2} \cdot 2 = 3^{2n+1} \cdot 9 + 2^{n+2} \cdot (9 - 7)$$

$$\approx 3^{2n+1} \cdot 9 + 2^{n+2} \cdot 9 - 7 \cdot 2^{n+2} = 9(3^{2n+1} + 2^{n+2}) - 7 \cdot 2^{n+2}$$

Comme $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 et $7 \cdot 2^{n+2}$ est divisible par 7

alors $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ est divisible par 7.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

2) Pour $n = 1$ on a : $3^6 - 2^6 = 665$ qui est divisible par 665

ainsi la propriété est vraie pour $n = 1$

Supposons que $3^{6n} - 2^{6n}$ est divisible par 665 et montrons que

$3^{6(n+1)} - 2^{6(n+1)}$ est divisible par 665

$$3^{6n+6} - 2^{6n+6} = 3^{6n} \cdot 3^6 - 2^{6n} \cdot 2^6 = 3^{6n} \cdot 729 - 2^{6n} \cdot 64$$

$$= 729(3^{6n} - 2^{6n}) + (729 - 64)2^{6n} = 729(3^{6n} - 2^{6n}) + 665 \cdot 2^{6n}$$

comme $3^{6n} - 2^{6n}$ est divisible par 665 et $665 \cdot 2^{6n}$ est divisible par 665

Alors $3^{6(n+1)} - 2^{6(n+1)}$ est divisible par 665 d'après le principe de récurrence

$3^{6n} - 2^{6n}$ est divisible par 665.

10

Les diviseurs de 8 sont : 1, 2, 4, 8

$$1) S(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

Les diviseurs de 36 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

$$S(36) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 + 36 = 91$$

Les diviseurs de 152 sont 1, 2, 4, 8, 19, 38, 76, 152

$$(152 = 2^3 \cdot 19 \text{ donc le nombre de diviseurs est } (3 + 1)(1 + 1) = 8)$$

$$S(152) = 1 + 2 + 4 + 8 + 19 + 38 + 76 + 152 = 300$$

$$2) \text{ Les diviseurs de } 28 \text{ sont } 1, 2, 4, 7, 14, 28$$

$$S(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28$$

donc 28 est un nombre parfait.

- 3) Montrons que a et b sont premiers entre eux et seulement si $S(a \cdot b) = S(a) \cdot S(b)$
 a et b sont premiers entre eux alors tout diviseur de $a \cdot b$ est le produit d'un diviseur de a et d'un diviseur de b .

$S(a \cdot b)$ est la somme de tous les termes de la forme

(diviseur de a) \times (diviseur de b) c'est alors exactement $S(a) \times S(b)$.

- 4) Si p est premier ses diviseurs sont 1 et p donc $S(p) = p + 1$

- 5) Les diviseurs p^k sont 1, p , p^2 , p^3 , ..., p^k .

$$S(p^k) = 1 + p^1 + p^2 + \dots + p^k = \sum_{i=0}^k p^i \text{ c'est la sommation des termes}$$

consécutifs d'une suite géométrique de racine $q = p$, de 1^{ère} terme 1.

$$S(p^k) = \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p} = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

- 6) $496 = 2^4 \times 31$

2^4 et 31 sont premiers entre eux et on a $S(31) = 1 + 31$

$$= 32, S(2^4) = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31$$

$$S(496) = S(2^4) \times S(31) = 31 \times 32 = 992 = 2 \times 496$$

Donc 496 est un nombre parfait.

- 1) a) $U_{n+1} - 1 = U_n^2 - U_n + 1 - 1 = U_n^2 - U_n = U_n (U_n - 1)$.

- b) Vérifier : $U_2 = U_1^2 - U_1 + 1 = 3$ et $U_2 - 1 = 2 = U_1$ ainsi la propriété est

vrai pour $n = 1$. Supposons $U_{n+1} - 1 = U_n \cdot U_{n-1} \dots U_2 \cdot U_1$.

Montrons que $U_{n+2} - 1 = U_{n+1} \cdot U_n \dots U_2 \cdot U_1$.

En effet : $U_{1+2} - 1 = U_{n+1} (U_{n+1} - 1) = U_{n+1} \cdot (U_n \cdot U_{n-1} \dots U_2 \cdot U_1)$

D'après le principe de récurrence on a :

$$\forall x \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} - 1 = U_n \cdot U_{n-1} \dots U_2 \cdot U_1.$$

- 2) $U_{n+1} - 1 = U_n \cdot U_{n-1} \dots U_2 \cdot U_1$

alors U_1, U_2, \dots, U_n sont des diviseurs de $U_{n+1} - 1$

donc il ne divise pas U_{n+1} .



$A = 4x^3 y$ est divisible par 9 et 2

Signifie que $\begin{cases} 4+x+3+y \text{ est divisible par } 9 \\ y \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \end{cases}$

Pour $y = 0 \Rightarrow 7 + x$ est divisible par $9 \Rightarrow x = 2$

Pour $y = 2 \Rightarrow 9 + x$ est divisible par $9 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 9$

Pour $y = 4 \Rightarrow 11 + x$ est divisible par $9 \Rightarrow x = 7$

Pour $y = 6 \Rightarrow 13 + x$ est divisible par $9 \Rightarrow x = 5$

Pour $y = 8 \Rightarrow 15 + x$ est divisible par $9 \Rightarrow x = 3$

ainsi les valeurs de (x, y) sont : $(2, 0)$; $(0, 2)$; $(9, 2)$; $(5, 6)$; $(3, 8)$; $(7, 4)$ les nombres alors sont : 4230, 4032, 4932, 4536, 4338, 4734

1) $\text{Div}(6) = \{1, 2, 3, 6\}$, $1 + 2 + 3 = 6$ alors 6 est parfait.

$\text{Div}(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$, $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ alors 28 est parfait.

$\text{Div}(496) = \{1, 2, 4, 6, 16, 62, 124, 248, 496\}$

$1 + 2 + 4 + 6 + 16 + 62 + 124 + 248 = 496$ alors 496 est parfait.

2) On sait que $2^n - 1$ est premier et que les diviseurs de 2^{n-1} sont : $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ alors les diviseurs du nombre :

2^{n-1} et $2^n - 1, 2(2^n - 1), 2^2(2^n - 1) \dots 2^{n-2}(2^n - 1)$ enfin $2^{n-1}(2^n - 1)$

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + (2^n - 1)(1 + 2 + \dots + 2^{n-2}) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + (2^n - 1) \sum_{k=0}^{n-2} 2^k$$

$$= \frac{1-2^n}{1-2} + (2^n - 1) \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \right) \cdot \text{Somme d'une suite géométrique}$$

de raison $q = 2$)

$$= 2^n - 1 + (1 - 2^n)(1 - 2^{n-1}) = (2^n - 1)[1 - 1 + 2^{n-1}] = (2^n - 1)[2^{n-1}] = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

On conclut que $2^{n+1}(2^n - 1)$ est parfait.



Soit A l'entier qui vérifie les deux conditions :

* \overline{xyz} dans le système de base 7 alors $z + 7y + 7^2x = A$

* \overline{zyx} dans le système de base 11 alors $x + 11y + 11^2z = A$

Ainsi $A = x + 11y + 121z = 49x + 7y + z$

Soit $48x - 4y - 120z = 0$

$12x - y - 30z = 0$

$$y = 12x - 30z \text{ en base } 7 \text{ on a : } \begin{cases} 1 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 6 \\ 0 \leq z \leq 6 \end{cases}$$

comme $y \geq 0 \Rightarrow 12x - 30z \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}z \} z$ donc $x \geq 3 \geq z$

$$x = 3 \Rightarrow y = 36 - 30z \text{ alors } z = 1 \text{ et } y = 6$$

$$n = 5 \Rightarrow y = 60 - 30z \text{ alors } z = 2 \text{ et } y = 0$$

ainsi les entiers sont $\overline{361}$ ou $\overline{502}$ dans le système de base 7



$$1) (100)_{\text{deux}} = 0 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2 = 4 \text{ donc } (100)_{\text{deux}} = (4)_{\text{dix}}$$

$$(10100)_{\text{deux}} = 0 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 = 20 = 2 \times 10 = 0 + 2 \times 10 = (20)_{\text{dix}}$$

$$(111)_{\text{deux}} = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2 = 6 = (6)_{\text{dix}}$$

$$2) 166 = 100 + 60 + 6 = 10^2 \times 1 + 6 \times 10 + 6 = (166)_{\text{dix}}$$

$$588 = 5 \times 10^2 + 8 \times 10 + 8 = (588)_{\text{dix}}$$

$$1307 = 1000 + 300 + 7 = 10^3 + 3 \times 10^2 + 7 = (1307)_{\text{dix}}$$



1) Vérifions pour $n = 1$

$$X = 4 + 15 - 1 = 18 \text{ et } 18 \text{ est divisible par } 9$$

Supposons que la propriété est vraie pour $n \geq 1$ c'est-à-dire X est divisible par 9

Montrons que $4^{n+1} + 15(n+1) - 1$ est divisible par 9

$$\bullet 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 14$$

$$= 4 \cdot (4^n + 15n - 1) - 60n + 15n + 18$$

$$= 4 \cdot (4^n + 15n - 1) - 45n + 18 = 4(4^n + 15n - 1) + 9(2 - 5n)$$

Comme $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9 et $9/9(2 - 5n)$

alors $9/[4^{n+1} + 15(n+1) - 1]$ ainsi d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$X = 4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

2) Montrons par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{N}^*$, y est divisible par 11

Vérifions pour $n = 1$ on a :

$$y = 55 \text{ est divisible par } 11 \Rightarrow y \text{ est divisible par } 11.$$

Supposons que la propriété est vraie pour

$n \geq 1$ c'est-à-dire $y = 2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1$ est divisible par 11.

Montrons que $2^{2n+1} \times 3^{n+3} + 1$ est divisible par 11

$$2^{2n+1} \cdot 3^{n+3} + 1 = 2^2 \cdot 2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} \cdot 3 + 1 = 12 \cdot 2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 1$$

$$= 12(2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1) - 12 + 1 = 12(2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1) - 11$$

Comme $2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1$ est divisible par 11 et 11/11
ainsi d'après le principe de récurrence $y = 2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1$ est divisible
par 11.

15) a) $N = \overline{53x4}$ dans la base 8 alors $N = 4 + 8x + 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^3 = 8x + 2756$
comme $2756 = 393 \times 7 + 5$

alors $N = 8x + 393 \times 7 + 5 = 7x + 393 \cdot 7 + 5 + x$ ainsi N est divisible par 7
si et seulement si $5 + x$ est divisible par 7 or $0 \leq x \leq 7$

donc la seule valeur de x qui convient est 2

b) $N = 8x + 2756$ comme $2756 = 459 \times 6 + 2$ alors $N = 8x + 459 \cdot 6 + 2$
 $= 6x + 459 \cdot 6 + 2x + 2$

N est divisible par 6 si et seulement si $2x + 2$ est divisible par 6 comme
 $0 \leq x \leq 7$ donc $x = 2$ ou $x = 5$

c) N est à la fois divisible par 7 et par 6 si et seulement si ($x = 2$ ou $x = 5$) et
 $x = 2$ alors $x = 2$

16) 1) $2220 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 37^1$ (donc le nombre des diviseurs est $(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 14$ diviseurs) alors les diviseurs stricts de 2220 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 37, 60, 74, 111, 148, 185, 222, 370, 444, 555, 740, 1110

2) Comme $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ alors les diviseurs stricts de 220 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.

alors $S_{220} = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

de même pour 248 on obtient $S_{248} = 220$

On conclut que 220 et 284 sont deux nombres amiables.

17) 1) PGCD (a, b) = 1999 alors on peut trouver deux entiers a' et b' tels que PGCD (a', b') = 1 et $a = a' \cdot 1999$; $b = b' \cdot 1999$
comme $a + b = 11994$ alors $1999a' + 1999b' = 11994$ donc $a' + b' = 6$
comme a' et b' sont premiers entre eux alors $a' = 1$ et $b' = 5$ ou $a' = 5$ et $b' = 1$
ainsi $a = 1999$ et $b = 5 \times 1999 = 9995$ où $a = 9995$ et $b = 1999$.

2) $X^2 - SX + 11994 = 0$

a) $X = 3 \Rightarrow 3^2 - S \cdot 3 + 11994 = 0 \Rightarrow$ ainsi $S = 4001$

$S = X' + X'' = 4001$ or $X' = 3$ d'où $X'' = 4001 - 3 = 3998$

b) Si 5 est une solution de (E) $\Rightarrow 5^2 - S \cdot 5 + 11994 = 0 \Leftrightarrow S = \frac{12019}{5} \notin \mathbb{N}$

donc 5 ne peut pas être une solution de (E) ;

3) n est solution de (E) $\Leftrightarrow n^2 - Sn + 11994 = 0$; $n(S - n) = +11994$

ainsi n est un diviseur de 11994.

En décomposant en facteur premier on retrouve que $11994 = 2 \times 3 \times 1999$

$\text{Div}(11994) = \{1, 2, 3, 6, 1999, 3998, 5997, 11994\}$

Les solutions de (E) sont n et S - n

$$n = 1 \Rightarrow S - n = 11994 \Rightarrow S = 11995$$

$$n = 2 \Rightarrow S - n = 5997 \Rightarrow S = 5999$$

$$n = 3 \Rightarrow S - n = 3998 \Rightarrow S = 4001$$

$$n = 6 \Rightarrow S - n = 1999 \Rightarrow S = 2005$$

18

* Déterminons la clé de 130 090 003 412

$$3 \times (3 + 0 + 0 + 0 + 4) + (1 + 0 + 9 + 0 + 3 + 1) + k$$

$3 \times 9 + 14 + k = 41 + k$ est divisible par 10 et $0 \leq k \leq 9$ donc $k = 9$. La clé est 9

* pour 561 111 305 500 on a

$$3 \times (6 + 1 + 1 + 0 + 5 + 0) + (5 + 1 + 1 + 3 + 5 + 0) + k = 3 \times 13 + 15 + k$$

$$= 54 + k \text{ qui est divisible par } 10 \text{ donc } k = 6.$$

* pour 156 130 550 001

$$3 \times (5 + 1 + 0 + 5 + 0 + 1) + (1 + 6 + 3 + 5 + 0) + k = 3 \times 12 + 15 + k$$

$$= 51 + k \text{ qui est divisible par } 10 \text{ donc } k = 9$$

19

1) Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\text{Nous avons : } u_1 = 5u_0 - 6 = 5 \times 14 - 6 = 64.$$

$$u_2 = 5u_1 - 6 = 5 \times 64 - 6 = 314.$$

$$u_3 = 5u_2 - 6 = 5 \times 314 - 6 = 1564.$$

$$u_4 = 5u_3 - 6 = 5 \times 1564 - 6 = 7814.$$

On peut conjecturer que si n est impair, alors les deux derniers chiffres de u_n sont 6 et 4 et que si n est pair, alors les deux derniers chiffres de u_n sont 1 et 4.

2) a) Pour tout

$$n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5 \times (5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36 = 4(6u_n - 9) + u_n.$$

alors $u_{n+2} - u_n = 4(6u_n - 9)$ Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, 6u_n - 9 \in \mathbb{N}$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_n$ est divisible par 4

• Nous avons : $u_0 = 4 \times 3 + 2$ donc $u_0 - 2$ est divisible par 4. Supposons que, pour un entier naturel k donné, on ait $u_{2k} - 2$ est divisible par 4.

Nous avons : $u_{2k+2} - u_{2k}$ est divisible par 4 donc $u_{2k+2} - 2$ est divisible par 4.

Le raisonnement par récurrence permet donc d'affirmer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} - 2$ est divisible par 4.

• Nous avons : $u_1 = 4 \times 16$ donc u_1 est divisible par 4.

Supposons que, pour un entier naturel k donné, on ait u_{2k+1} est divisible par 4.

Nous avons : $u_{2k+1+2} - u_{2k+1}$ est divisible par 4 donc $u_{2(k+1)+1}$ est divisible par 4.

On en déduit par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_{2k+1} est divisible par 4.

b) Nous avons : $2u_0 = 28$ et $5^{0+2} + 3 = 28$ donc $2u_0 = 5^{0+2} + 3$.

Supposons que, pour un entier naturel k donné, on ait : $2u_k = 5^{k+2} + 3$.

Nous avons : $2u_{k+1} = 2 \times (5u_k - 6) = 5 \times 2u_k - 12 = 5 \times (5^{k+2} + 3) - 12 = 5^{k+1+2} + 3$

donc si $2u_k = 5^{k+2} + 3$ alors $2u_{k+1} = 5^{k+3} + 3$.

On en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

Chapitre VIII

Les nombres premiers

■ Définition :

- Un nombre est dit premier s'il admet 2 diviseurs 1 et lui même.

*Remarque : 1 n'est pas un nombre premier

- Théorème : n un entier naturel supérieur ou égal à 2, si n n'est divisible par aucun entier P tel que $2 \leq P \leq \sqrt{n}$ alors n est premier .

- Exemple : 971 est il premier ?

On essaie de diviser 971 par 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31 on s'arrête à 31 car le nombre qui lui est immédiatement supérieur est 37, et que $37^2 = 1369 > 971$ et l'on se rend compte qu'aucun de ces nombres ne convient On en déduit que 971 est premier.

- Définition : un entier est dit **composé** s'il admet un diviseur premier

$$1 < P \leq \sqrt{n}$$

- Théorème : il existe une infinité de nombres premiers.

• **Théorème Fondamental de l'arithmétique** :

Tout entier naturel non nul et différent de 1 se décompose d'une façon unique sous forme d'un produit de n facteurs premières

$$N = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_n^{\alpha_n} .$$

avec P_1, P_2, \dots, P_n des nombres premiers tels que $P_1 < P_2 < P_n$ et

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

Exemple : $144 = 2^4 \times 3^2$.

Petit théorème de Fermat :

p est un nombre premier, a entier tel que $a > 2$ et non divisible par p.

$$\Rightarrow a^{p-1} - 1 \text{ est divisible par } p .$$

Conséquence : p premier, a un entier supérieur ou égal à 2 alors

$a^p - a$ est divisible par p.

- Propriété : c un nombre premier ; a, b deux entiers naturels

c divise ab et c ne divise pas a \Rightarrow c divise b

Réflexes

Situations	Réflexes
Déterminer le nombre de diviseurs d'un entier N ?	On décompose N en facteurs premiers $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. Le nombre de diviseurs de N est : $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$
Déterminer si un entier naturel n est premier ou non	On effectue les divisions euclidiennes de n par les nombres premiers 2,3,5,7, ..., 17. jusqu'à ce qu'on arrive soit à une division exacte soit à l'essai d'un nombre premier dont le carré est supérieur au nombre donnée (alors le nombre est premier)

ENONCÉS

1

QCM

Indiquer la bonne réponse par a, b ou c en justifiant votre réponse.

1) Parmi ces trois entiers naturel, ce lui qui n'est pas premier est:

a 1781

b 1783

c 1787

2) a et b désignent deux entiers naturels supérieurs à 1 alors PPCM (a, b) = ab il suffit que

a divise b

a et b premiers entre eux

a multiple de b

3) a et b désignent deux entiers naturel a et b tel que a divise b alors $a \wedge b$ est

égal à :

a

b

ab

2

Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1) Deux nombres premiers distincts sont toujours premiers entre eux.

2) Il existe deux nombres premiers strictement supérieur à 2 et consécutifs.

3) Un nombre premier est premier avec tous les entiers naturels non nuls qui le précèdent.

4) P_1, P_2, P_3, P_4 désignent 4 nombres premiers alors $P_1^2 \times P_2 \times P_3^6 \times P_4^4$ est parfait.

3

1) Déterminer les nombres premiers compris entre 1 et 150 dont le chiffre des unités est 3

2) Déterminer les nombres premiers compris entre 1 et 150

4

n désigne un entier naturel et $a = n^2 + 4n + 3$. existe-t-il des valeurs de n telle que a soit un entier naturel premiers.

5

N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a = n^4 + n^2 + 1$. En utilisant le fait que

$a = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2$. Montrer que a n'est pas un nombre premier.

6

a) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier $a = 81\,648$

b) Quel est plus grand entier naturel dont le cube divise a ?

7

1) Calculer la somme suivante avec $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^p x^p.$$

- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $x^{2n+1} + 1$ est divisible par $x + 1$.
- 3) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}$, $(2^{2^p})^k + 1$ est divisible par $2^{2^p} + 1$ si k est impair
- 4) Montrer que si $2^m + 1$ est un nombre premier alors m est une puissance de 2.

8

Soit N un entier naturel impaire non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

- 1) Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
- 2) Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .
- 3) Quelle est la parité de p et de q ?
- 4) a) $250507 = 514^2 - 117^2$ écrire en produit de deux facteurs .
 b) Les deux facteurs sont ils premiers entre eux .
 c) Cette écriture est elle unique ?

9

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers ? »

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1 \dots 1$ où 1 apparaît p fois.

On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$.

- 1) Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?
- 2) Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?
- 3) On se propose de démontrer que si p n'est pas premier alors N_p n'est pas premier.
 On rappelle que, pour tout nombre réel c et tous entier naturel n non nul, $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$.
 a) On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.
 b) On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
 Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.
 c) On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k .

- 4) Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
 Cette condition est-elle suffisante ?

10

- 1) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x : $(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})=x^k-1$.
- Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.
- 2) a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
 b) Dédurre de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.
- 3) Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.
 a) On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. Déterminer $m' \wedge n'$
 b) On suppose u et v strictement positifs tel que $d = mu - nv$
 Montrer que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$.
 Montrer ensuite que $a^d - 1$ est diviseur de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.
- c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, un diviseur commun de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

CORRIGES



- 1) \boxed{a} : $1781 = 13 \times 137$. donc 1781 n'est pas premier
 2) \boxed{b} : a, b premier entre eux alors PGCD (a, b) = 1
 \Rightarrow PPCM (a, b) = ab.
 3) \boxed{b} : a divise b alors $a \wedge b = b$.



- 1) Vrai : a, b premiers distincts leur seul diviseur commun est 1
 \Rightarrow PGCD(a, b) = 1
 \Rightarrow a, b premiers entre eux .
 2) Faux : deux entiers naturels consécutifs, alors l'un est pair et ne peut donc pas être premier.
 3) Vrai : un nombre premier n'a que 1 pour diviseur commun avec les entiers qui le précèdent.
 4) Faux : l'exposant de P_2 n'est pas pair .



- 1) Les nombres recherchés sont : 3, 13, 23, 43, 53, 73, 83, 103, 113.
 2) Les nombres premiers entre 1 et 150 sont:
 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53
 59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109
 113, 127, 131, 137, 139 et 149.



- $a = n^2 + 4n + 3 = (n+1)(n+3)$
 Si $n \geq 1$ alors $n+1 \geq 2$ et $n+3 \geq 4$
 Donc a admet des diviseurs autres que 1, ce n'est pas donc un nombre premier.
 Si $n = 0$ alors $a = 3$ c'est un nombre premier.



- $a = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2$
 $= (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$ donc $n^2 - n + 1$ et $n^2 + n + 1$ sont des diviseurs de a .
 $n \geq 2$ alors $n^2 + n + 1 \geq 7$ et $n^2 - n + 1 > 1$
 donc a admet 2 diviseurs autres que 1
 ce n'est pas donc un nombre premier.



- a) $a = 81648 = 2^4 \times 3^6 \times 7$
 b) Pour déterminer le plus grand entier naturel dont le cube divise 81648.
 Il suffit de chercher pour chaque exposant, quel est le plus grand multiple de 3 qui lui est inférieur ou égal . Le plus grand entier dont le cube divise a est $n = 2 \times 3^2$ car $n^3 = 2^3 \times 3^6$ est un diviseur de a.



1) a^2 a même parité que a ; b^2 a même parité que b .

Comme N est impair, a^2 et b^2 n'ont pas la même parité, donc **a et b n'ont pas la même parité**. On peut aussi remarquer que $N = (a + b)(a - b)$, les deux entiers naturels $(a + b)$ et $(a - b)$ sont impairs, donc a et b n'ont pas de même parité.

2) $N = (a + b)(a - b)$; N , a et b sont des entiers naturels, donc $(a + b)$ et $(a - b)$ sont deux entiers naturels.

En posant $p = a + b$ et $q = a - b$, on a $N = p \times q$, avec p et q deux entiers naturels. (Remarque : on a aussi $N = N \times 1 \dots$)

3) Comme N est impair, p et q sont nécessairement impairs.

4) a) $250507 = 514^2 - 117^2$, donc $250507 = (514 + 117)(514 - 117)$, donc $250507 = 631 \times 397$.

b) 631 et 397 sont premiers entre eux, puisque ce sont deux nombres premiers.

($\sqrt{631} \approx 25, \dots$ et 631 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11, ni par 13, ni par 17, ni par 19, ni par 23 ... ; $\sqrt{397} \approx 19, \dots$ et 397 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11, ni par 13, ni par 17, ni par 19).

c) Cette écriture n'est pas unique si l'on accepte que $250507 = 250507 \times 1$. Elle est unique si aucun des deux facteurs ne doit être égal à 1.



1) Pour tout entier naturel $p \geq 2$ on pose $N_p = 1 \dots 1$ où 1 apparaît p fois, c'est-à-dire $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$. $N_2 = 11$ est premier.

$N_3 = 111$ n'est pas premier car $N_3 = 3 \times 37$.

$N_4 = 1111$ n'est pas premier car $N_4 = 11 \times 101$.

2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$, N_p est la somme de p premiers termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 10.

Par conséquent, pour tout entier naturel $p \geq 2$, $N_p = 1 \times \frac{1-10^p}{1-10}$

$$N_p = \frac{10^p - 1}{9}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$, N_p est entier et $10^p - 1 = 9N_p$ donc $10^p - 1$ est divisible par 9.

3) a) On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$ où $q \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons alors

$$N_p = (10^{2q-1} + 10^{2q-2}) + (10^{2q-3} + 10^{2q-4}) + \dots + (10^1 + 10^0)$$

$$N_p = 10^{2q-2} (10+1) + 10^{2q-4} (10+1) + \dots + (10+1)$$

$$N_p = 11 \times (10^{2q-2} + 10^{2q-4} + \dots + 1).$$

Or $10^{2q-2} + 10^{2q-4} + \dots + 1 \in \mathbb{N}$ donc N_p est divisible par 11.

- b) On suppose que p est un multiple de 3 et on pose $p = 3q$ où $q \in \mathbb{N}^*$.
Nous avons montré que

$$\text{donc } N_p = \frac{10^{3q} - 1}{9} = \frac{(10^3)^q - 1}{9} = \frac{(10^3 - 1) \left[(10^3)^{q-1} + \dots + 10^3 + 1 \right]}{9}$$

$$= \frac{999 \times \left((10^3)^{q-1} + \dots + 10^3 + 1 \right)}{9} = 111 \times \left((10^3)^{q-1} + \dots + 10^3 + 1 \right)$$

et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $(10^3)^{q-1} + \dots + 10^3 + 1 \in \mathbb{N}$

donc N_p est divisible par $N_3 = 111$.

- c) On suppose q non premier et on pose $q = kq$ où k et q sont deux entiers naturels supérieurs à 1.
Nous avons

$$N_p = \frac{10^{kq} - 1}{9} = \frac{(10^k)^q - 1}{9} = \frac{(10^k - 1) \left[(10^k)^{q-1} + \dots + 10^k + 1 \right]}{9}$$

Or $\frac{10^k - 1}{9} = N_k$ et $(10^k)^{q-1} + 1 \in \mathbb{N}^*$, donc N_p est divisible par N_k .

- 4) Une condition nécessaire pour que N_p soit premier est que p soit premier puisque, si p n'est pas premier, N_p n'est pas premier.
Cette condition n'est pas suffisante. En effet, 3 est premier, mais nous avons montré que N_3 est divisible par 3.



- 1) Si $x = 1$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) = 0$
et $x^k - 1 = 0$

donc, si $x = 1$, alors $k \in \mathbb{N}$, $(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) = x^k - 1$

Si $x \neq 1$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1+x+x^2+\dots+x^{k-1}$ est la somme des k premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x .
On en déduit que, pour tout $x \neq 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})=(x-1)\frac{x^k-1}{x-1}$$

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})=x^k-1.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel x ,

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})=x^k-1.$$

2) a) Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et d un diviseur de n .

Il existe donc un entier naturel k non nul tel que $n = dk$.

On en déduit que : $a^n - 1 = a^{dk} - 1 = (a^d)^k - 1$.

En utilisant le résultat de la question précédente dans le cas particulier

où $x = a^d$, on obtient : $a^n - 1 = (a^d - 1)(1 + a^d + \dots + (a^d)^{k-1})$

avec $a^d, \dots, (a^d)^{k-1}$ entiers naturels donc $1 + a^d + \dots + (a^d)^{k-1} \in \mathbb{N}^*$ et,

par suite, $a^d - 1$ divise $a^n - 1$.

b) Puisque $7 = 2^3 - 1$ et que 3 divise 2004, nous pouvons affirmer que 7 divise $2^{2004} - 1$.

De même, on a $63 = 2^6 - 1$ et 6 divise 2004 donc 63 divise $2^{2004} - 1$.

Comme 9 divise 63, on en déduit que 9 divise aussi $2^{2004} - 1$.

3) Soient m et n deux entiers naturels tels que $\text{PGCD}(m, n) = d$.

a) d est le PGCD de m et n , donc on

a $m = dm'$ et $n = dn'$ avec m' et n' premiers entre eux.

b) On suppose que $u > 0$ et $v > 0$.

On a $d = um - vn$ donc

$$(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^{mu} - 1 - a^{nv+d} + a^d$$

$$(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^{mu} - 1 - a^{mu} + a^d$$

$$(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1.$$

d divise m donc d divise mu .

Du résultat de la question 2, on déduit que $a^d - 1$ divise $a^{mu} - 1$.

De la même façon, $a^d - 1$ divise $a^{nv} - 1$.

c) Soit $a = 2$.

Si $mu = 63$ et $nv = 60$, alors on a $d = 3$ pour $m = 9$ et $n = 15$.

Donc $2^3 - 1$ est un diviseur commun de $2^{63} - 1$ et $2^{60} - 1$ c'est à dire 7.

Chapitre VIII

Vecteurs de l'espace

■ Caractérisation d'un vecteur de l'espace :

Si $A \neq B$ et $C \neq D$, on dira que les vecteurs

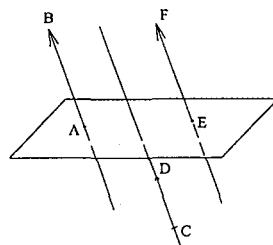
\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux si :

-Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

- $AB = CD$.

-Le sens (de A vers B, de C vers D) sont les mêmes.

On notera $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \dots\dots\dots$



Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est le vecteur dont les représentants sont : $\overline{AA}, \overline{BB}, \dots\dots\dots$

Soit \vec{u} un vecteur et A un point de l'espace, il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

■ Propriétés :

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k, k' deux réels :

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$	$0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$
Relation de Chasles : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$	$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
	$(k \cdot k')\vec{u} = k(k'\vec{u})$

■ Vecteurs colinéaires – vecteurs coplanaires :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

On dit que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

Si A, B et D sont alignés

\vec{u}, \vec{v} deux vecteurs non nuls.

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k

tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

\vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

On dit aussi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement dépendants ou $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ forme une famille liée

Remarque : Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

■ Bases et repères de l'espace :

Tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires de l'espace est appelé base.

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base et \vec{u} un vecteur, il existe un unique triplet

(x, y, z) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x, y et z sont les coordonnées de \vec{u} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Notation : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Si O un point et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base alors $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère.

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère, M un point on appelle coordonnées de M l'unique triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Notation : $M(x, y, z)$ avec x : l'abscisse, y : l'ordonnée et z : la côte

Propriétés : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère

* Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{u}' \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ * Soit $k \in \mathbb{R}$; $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

*Si A (x_A, y_A, z_A) et B (x_B, y_B, z_B) Alors $\overline{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

*Si I est le milieu de $[AB]$ alors I $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\begin{cases} \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0 \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = xz' - x'z = 0 \\ \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z = 0 \end{cases}$

■ Bases orthonormales et repères orthonormaux :

* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base si de plus $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ deux à deux orthogonaux alors c'est une base orthonormale.

* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale et o est un point de l'espace.

* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthogonal et seulement si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et O un point de l'espace.

* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

■ **Définition** : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de \mathcal{W} et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un triplet de vecteurs de \mathcal{W} .

tels que $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$. On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans \mathcal{B} ,

et on note $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a(b'c'' - c'b'') - b(a'c'' - c'a'') + c(a'b'' - b'a'')$.

*Théorème

Un triplet de vecteur de \mathcal{W} forme une base, si et seulement si, son déterminant relativement à une base quelconque de \mathcal{W} est différent de 0.

***Règle de SARRUS pour le calcul déterminant d'ordre 3:**

Soit à calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ D'après SARRUS. On écrit le

déterminant et on recopie les deux premières colonnes puis on fait la somme de produits de 3 facteurs pris sur une même diagonale.

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ \diagdown & & & & & \\ a & a' & a'' & a & a' & \\ \diagup & & & & & \\ b & b' & b'' & b & b' & \\ \diagdown & & & & & \\ c & c' & c'' & c & c' & \end{array}$$

$$\text{le } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''$$

Réflexes:

Situations	Réflexes
Comment démontrer que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ?	<ul style="list-style-type: none"> • On établit une relation vectorielle $\vec{u} = k\vec{v}$ où k est un réel. Pour cela on peut être amené à utiliser la relation de Chasles. • Ou si, dans un repère, $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$, on démontre qu'il existe un réel k tel que : $x = k \times x'$; $y = k \times y'$ et $z = k \times z'$ • Ou si $\vec{u} = \overline{AB}$ et $\vec{v} = \overline{CD}$, on démontre que \vec{u} et \vec{v} ont la même direction c'est à dire que : $(AB) // (CD)$.
Comment démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ?	On démontre que les vecteurs \overline{AB} et \overline{CD} sont colinéaires
Comment démontrer que trois points A, B et C sont alignés ?	On démontre que les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} (ou \overline{AB} et \overline{BC} , ou ...) sont colinéaires c'est à dire que $\overline{AB} = K \overline{CD}$ avec k réels. Ou on démontre que $\det(\overline{AB}, \overline{AC}) = 0$
Comment démontrer que trois vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires ?	<ul style="list-style-type: none"> • On établit que $\vec{u} = \overline{AB}$, $\vec{v} = \overline{AC}$, $\vec{w} = \overline{AD}$ avec A, B, C, D dans un même plan. • ou on établit une relation vectorielle $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ avec a et b réels. • ou $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

ENONCÉS

1 QCM

Indiquer la bonne réponse par a, b ou c et justifier votre réponse.
 ABCDEFGH est un cube, I le milieu de $[AB]$, J et K les centres des faces EFGH et BCGF

1) Le vecteur $\overline{DC} + \overline{AE} + \overline{FG}$ est égal au vecteur ...

a) \overline{AG}

b) \overline{DG}

c) \overline{DF}

2) Les vecteurs \overline{JE} et \overline{JG} sont ...

a) égaux

b) colinéaires

c) orthogonaux

3) Les vecteurs \overline{IJ} , \overline{BC} et \overline{DE} sont ...

a) colinéaires deux à deux

b) coplanaires

c) ni l'un ni l'autre

4) Dans le repère $(A, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AE})$, le point J a pour coordonnées ...

a) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$

b) $(0; 0; 1)$

c) $\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$

5) Les vecteurs \overline{JK} et $\frac{1}{2}\overline{EI}$ sont ...

a) colinéaires

b) orthogonaux

c) ni l'un ni l'autre

2 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) ABCDEFGH est le cube d'arête 1, I le milieu de $[AB]$ J et K les centres des faces EFGH et BCGF

a) Le vecteurs $\overline{BA} + \overline{DB} + \overline{BF}$ est colinéaire au vecteur \overline{GB}

b) Le vecteur \overline{KJ} est colinéaire au vecteur \overline{EB} .

c) Les points A, I, K, J sont coplanaires.

d) Dans le repère $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$, la distance JK est égale à $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

2) Deux vecteurs quelconques de l'espace sont coplanaires.

3) Trois vecteurs dont la somme est égale au vecteur nul sont coplanaires.

4) Si A, B, C, D sont des points coplanaires alors pour tout point M de l'espace, les vecteurs $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}$ et \overline{MD} sont coplanaires.

5) A, B, C, D, E sont des points de l'espace tels que $\overline{AD} = 2\overline{AB}$ et $\overline{AE} = 3\overline{AC}$.

Alors les vecteurs $\overline{AB}, \overline{AC}$ et \overline{DE} sont coplanaires.

3 On donne ABCD un tétraèdre et on rapporte l'espace au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Déterminer les coordonnées des centres de gravités des quatre faces du tétraèdre.

4 ABCD désigne un tétraèdre, I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Prouver que I, J, K et L sont coplanaires.

5 ABCDA'B'C'D' un cube. On note I le milieu de [A'D'], J celui de [AD], K celui de [B'C'] et L celui de [BC].

- 1) a) Démontrer que les points I, J, K, L sont coplanaires.
 - b) Démontrer que $\overrightarrow{D'K}, \overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{B'C'}$ sont coplanaires.
 - c) Comparer $\overrightarrow{IB'}$ et $\overrightarrow{D'K}$
- 2) Démontrer que les plans (IJB') et (D'KL) sont parallèles.

6 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base et m un paramètre réel donné, on donne :

$$\vec{u} = (m+1)\vec{i} + (m+2)\vec{j} + (2m+3)\vec{k} ; \vec{v} = (2m+4)\vec{i} + (m+8)\vec{j} + (6+9m)\vec{k}$$

et $\vec{w} = 2\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k}$

- a) Pour quelle valeur de m, \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ?
- b) Pour m = -1, Montrer que \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

7 ABCD un tétraèdre ; I, J, K et L sont les points définis par :
 $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

- 1) Calculer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$
- 2) Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{IL} et \overrightarrow{JK} et déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{IL} = k \overrightarrow{JK}$.

8 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne

$$\text{les points : } A(1,0,2), B(2,1,\frac{3}{2}); C(3,2,-\frac{5}{2}); D(2,1,-2); E(3,2,1); F(6,5,-11)$$

Montrer que :

- 1) A, B et E sont alignés.
- 2) ABCD est un parallélogramme.
- 3) F appartient au plan(ABC).



ABCD est un tétraèdre ; A', B', C' et D' désignent les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC.

Le point G vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

- 1) Vérifier que $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GA}'$.
- 2) En déduire que G appartient à la droite (AA'). Ecrire alors \overrightarrow{AG} en fonction de \overrightarrow{AA}' .
- 3) En déduire que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en G.
- 4) On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB] ; [CD] ; [AC] ; [BD] ; [AD] et [BC].
 - a) Prouver les égalités : $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$
 - b) En déduire que G est le milieu de [IJ].
 - c) Montrer que (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.
 - d) Montrer que $\overrightarrow{GA}' + \overrightarrow{GB}' + \overrightarrow{GC}' + \overrightarrow{GD}' = \vec{0}$



ABCD A'B'C'D' un cube et le repère $R(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA}')$

- 1) a) Trouver les coordonnées des points D, D', B' et C' dans R.
- b) Soit O le milieu de [B'C']. Trouver les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OC} .
- 2) Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA}')$
 - a) Montrer que \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont non coplanaires.
 - b) Soit le repère $R'(\overrightarrow{A}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ déterminer les coordonnées des points B, C et A' dans R' puis du vecteur \overrightarrow{OC} dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.



Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A (-7, -15, 3) ; B (-4, 20, -1) ; C (4, 5, 30) et D (25, 0, 2).

On appelle I le milieu de [DC] et J celui de [AB]. On appelle K le point

vérifiant $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

- 1) Calculer les distances AB, AC, AD, BC, BD et CD. En déduire la nature du tétraèdre ABCD.

- 2) Soit $G \left(\frac{25}{3}, \frac{25}{3}, \frac{31}{3} \right)$, montrer que G est le centre de gravité du triangle BCD .
- 3) a) Trouver les coordonnées de K .
 b) Montrer que les droites (AG) et (BD) sont orthogonales.
 c) Montrer que A , K et G sont alignés.
 d) Montrer que \overrightarrow{IK} et \overrightarrow{IJ} sont colinéaires.

12

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 cm de longueur.

I , J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[EF]$ et $[FB]$.

P est le plan (IJK) . On se place dans le repère orthonormal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- 1) a) Calculer les coordonnées des points I , J , K et G .

En déduire les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{IJ} , \overrightarrow{JK} et \overrightarrow{AG} .

- b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan P .

- 2) a) L , M et N sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$, $[CD]$ et $[DH]$.

Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{IL} , \overrightarrow{IM} et \overrightarrow{IN} .

- b) Etudier l'orthogonalité des vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{IL} ; \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{IM} , \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{IN} .

En déduire que les points M , N et L appartiennent au plan P .

- 3) a) Calculer les coordonnées du centre O du cube. Montrer que O appartient au plan P .
 b) Montrer que l'hexagone $IJKLMN$ est un hexagone régulier de centre O .

CORRIGES

1 QCM

1) La réponse est **a** :

$$\overline{DC} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{DC} + \overline{AE} + \overline{FG} = \overline{AB} + \overline{AE} + \overline{FG} = \overline{AF} + \overline{FG} = \overline{AG}.$$

2) La réponse est **b** : $J = E * G \Leftrightarrow \overline{JE} = -\overline{JG}$.3) La réponse est **c**4) La réponse est **c** : car $I \in (ACE)$ et $I \notin (AC)$.5) La réponse est **c** : car $\overline{JK} = \frac{1}{2}\overline{EB}$ et \overline{EI} et \overline{EB} ni colinéaires ni perpendiculaires.

2 Vrai - Faux

1) a) Faux: $\overline{BA} + \overline{DB} + \overline{BF} = \overline{DB} + \overline{BA} + \overline{BF} = \overline{DA} + \overline{BF} = \overline{DA} + \overline{AE} = \overline{DE}$ et \overline{DE} et \overline{GB} sont colinéaires.b) Vrai: dans le triangle GEB on a $J = E * G$ et $K = B * G$

$$\text{alors } \overline{KJ} = \frac{1}{2}\overline{BE} = -\frac{1}{2}\overline{EB}.$$

c) Faux: (AI) et (KJ) sont non coplanaires.

$$\text{d) Faux: } \overline{JK} = \frac{1}{2}\overline{EB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) Vrai: on peut toujours avoir deux représentants de \vec{u} et \vec{v} coplanaires.3) Vrai: $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$ donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires.4) Faux: le Cube ABCDA'B'C'D' et $\overline{A'A}, \overline{A'B}, \overline{A'C}$ et $\overline{A'D}$ sont non coplanaires.5) Vrai: $\overline{AD} = 2\overline{AB}$ et $\overline{AE} = 3\overline{AC}$ alors $\overline{AD} - \overline{AE} = 2\overline{AB} - 3\overline{AC}$ donc $\overline{ED} = 2\overline{AB} - 3\overline{AC}$ ainsi $\overline{ED}, \overline{AB}, \overline{AC}$ sont coplanaires.

3

Par définition du repère on a :

$$A(0, 0, 0); B(1, 0, 0); C(0, 1, 0) \text{ et } D(0, 0, 1).$$

G le centre de gravité de ABC alors $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$ on pose : $G(x, y, z)$;

$$\overline{GA} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \overline{GB} \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \overline{GC} \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix}. \text{ La relation } \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0} \text{ équivaut à :}$$

$$\begin{cases} (-x) + (1-x) + (-x) = 0 \\ (-y) + (-y) + (1-y) = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

d'ou $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ de même pour les autres centre de gravité :

G_1 le centre de gravité ABD, alors $G_1\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$.

G_2 le centre de gravité ACD, alors $G_2\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

G_3 le centre de gravité BDC, alors $G_3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.



Dans le triangle ABD on a :

$$I = A * B \text{ et } L = A * D \text{ alors } \overrightarrow{LI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB}.$$

Dans le triangle BCD on a :

$$K = D * C \text{ et } J = B * C \text{ alors } \overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB}.$$

Donc $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{KJ}$ par suite (LI) est parallèle à (KJ) ainsi I, J, K et L sont coplanaires.



1) a) On a $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

or $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (ABCD carré) donc

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BL} \text{ ou encore } \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{AB} \text{ de même on trouve :}$$

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{A'B'} \text{ comme } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \text{ (ABB'A' un carré) d'ou } \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{IK}$$

par suite (JL) // (IK). Par suite I, J, K et L son coplanaires.

b) $\overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'K}$ or $K = B' * C'$ ou encore $\overrightarrow{C'K} = \frac{1}{2} \overrightarrow{C'B'}$.

$$\overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{D'C'} + \frac{1}{2} \overrightarrow{C'B'} \text{ par suite } \overrightarrow{D'K}, \overrightarrow{D'C'} \text{ et } \overrightarrow{C'B'} \text{ sont coplanaires.}$$

c) On a : $\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'B'}$ or $I = A' * D'$ ou encore $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DA'}$.

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{A'B'} \text{ comme } \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'} \text{ et } \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$$

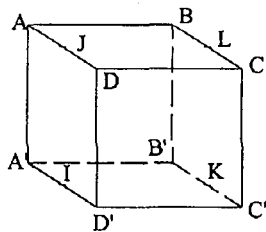
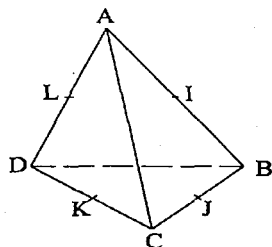
$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{D'C'} \text{ or } \overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{D'C'} + \frac{1}{2} \overrightarrow{C'B'}.$$

Par suite $\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{D'K}$.

2) La droite (IJ) est parallèle à la droite (KL) donc au plan (D'KL). La droite

(IB') est parallèle à la droite (D'K) (car $\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{D'K}$) donc au plan (D'KL).

Les deux droites (IJ) et (IB') du plan (IJB') sont sécantes en I et toutes deux parallèles au plan (D'KL) par suite (IJB') est parallèle au plan (D'KL).





a) \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} m+1 & 2m+4 \\ m+2 & m+8 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} m+1 & 2m+4 \\ 2m+3 & 6+9m \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} m+2 & m+8 \\ 2m+3 & 6+9m \end{vmatrix} = 0$$

équivalent à $(m+1)(m+8) - 2(m+2)^2 = 0$ et $(m+1)(6+9m) - (2m+3)(2m+4) = 0$ et $(m+2)(6+9m) - (m+8)(2m+3) = 0$

ou encore $-m^2 + m = 0$ et $5m^2 + m - 6 = 0$ et $7m^2 + 5m - 12 = 0$.

* $-m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m(-m+1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = 1$.

$m = 0$ n'est pas solution des dernières équations mais $m = 1$ est vérifié pour les équations.

b) Pour $m = -1$, on a : $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

1^{ère} Méthode:

cherchons deux réels α et β tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

$$\begin{cases} 2 = 2\beta \\ 9 = \alpha + 7\beta \\ -1 = \alpha - 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \text{ d'où } \vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v} \text{ par suite } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

2^{ème} Méthode:

$$\text{Dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 9 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

par suite \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.



1) * $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + 0\vec{AC} + 0\vec{AD}$ d'où $I \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$

$$\begin{aligned} * \vec{AJ} &= \vec{AB} + \vec{BJ} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{4}(\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} + 0\vec{AD} \text{ d'où } J \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \vec{AK} &= \vec{AC} + \vec{CK} = \vec{AC} + \frac{3}{8}\vec{CD} = \vec{AC} + \frac{3}{8}(\vec{CA} + \vec{AD}) \\ &= \frac{5}{8}\vec{AC} + \frac{3}{8}\vec{AD} \text{ d'où } K \left(0, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right). \end{aligned}$$

$$* \vec{AL} = \frac{1}{6}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AD} \text{ donc } L \left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$2) \vec{IL} \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} - 0 \\ \frac{1}{6} - 0 \end{pmatrix} \text{ d'ou } \vec{IL} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}; \vec{JK} \begin{pmatrix} 0 - \frac{3}{4} \\ \frac{5}{8} - \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} - 0 \end{pmatrix} \text{ d'ou } \vec{JK} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

on conclut que $\vec{IL} = \frac{4}{9} \vec{JK}$ donc $k = \frac{4}{9}$.

$$\nabla 8) 1) \vec{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ \frac{1}{2}-0 \\ \frac{3}{2}-2 \end{pmatrix} \text{ d'ou } \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \vec{AE} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-0 \\ 1-2 \end{pmatrix} \text{ d'ou } \vec{AE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

on remarque que $\vec{AE} = 2 \vec{AB}$ donc A, B et E sont alignés.

$$2) \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{DC} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

on constate que $\vec{AB} = \vec{DC}$ ou encore ABCD est un parallélogramme.

3) Pour prouver que $F \in (ABC)$,

1^{ère} Méthode: il suffit de trouver x et y tel que $\vec{AF} = x \vec{AB} + y \vec{AC}$ (*). On a :

$$\vec{AF} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix}, \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{La relation (*) devient : } \begin{cases} 5 = x + 2y \\ 5 = x + 2y \\ -13 = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}y \end{cases}$$

$$\text{Ou encore } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 9y = 26 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Donc $F \in (ABC)$ et F (-1, 3) dans (A, \vec{AB}, \vec{AC}) .

2^{ème} Méthode: il suffit démontrer que les vecteurs \vec{AB}, \vec{AC} et \vec{AF} sont linéairement dépendant:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ -13 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{vmatrix} - 13 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{35}{2} - \frac{35}{2} - 0 = 0$$

Donc les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AF} sont linéairement dépendants d'où $F \in (ABC)$



$$1) \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{AD}) \\ = 3 \overrightarrow{GA'} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \text{ or } A' \text{ est le centre de gravité de } BCD. = 3 \overrightarrow{GA'}$$

$$2) \text{ On a } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\text{ou encore } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \text{ or } \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3 \overrightarrow{GA'}$$

D'où $\overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{GA'}$ par suite G, A, A' alignés. Ou encore $G \in (AA')$.

$$\overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{GA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{GA} + 3 \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AA'}$$

3) Par un raisonnement analogue, on prouverait les égalités :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CC'} \text{ et } \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{DD'}$$

d'où G appartient aussi à (BB') ; (CC') et (DD') par suites les droites (AA') ; (BB') ; (CC') et (DD') sont concourantes en G.

$$4) a) \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}) = 2 \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2 \overrightarrow{GI}$$

$$\text{Car } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow I = A * B$$

$$\text{Par suite } \overrightarrow{GI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \text{ de même } \overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$$

$$b) \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0} \text{ équivaut à G est le milieu de } [IJ].$$

c) On démontrerait de même que G est le milieu de $[KL]$ et $[MN]$

Alors les droites (IJ) , (KL) et (MN) sont donc concourants en G.

d) On utilise :

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{GB}; \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{GC} \text{ et } \overrightarrow{GD'} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{GD}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'} = -\frac{1}{3} (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$$



$$1) a) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \text{ or } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ d'où } \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

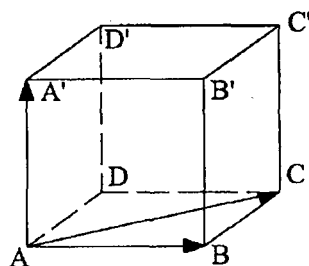
donc D (-1, 1, 0).

$$* \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} \text{ or } \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'} \\ = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AA'} \text{ d'où } D'(-1, 1, 1).$$

$$* \overrightarrow{AB'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$$

D'où B' (1, 0, 1).

$$* \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} \text{ or } \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$



$$= \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) + (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} \text{ d'ou } C' (0, 1, 1).$$

b) On a $C (0, 1, 0)$.

$$O = B' * C' \text{ donc } O \left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{1+1}{2} \right). \text{ D'ou } O \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right). \text{ par suite } \overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2)a) Pour prouver que \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont ils coplanaires il suffit de chercher a et b

$$\text{tel que : } \vec{w} = a \vec{u} + b \vec{v}. \text{ ou encore } \begin{cases} 1 = 2a + 2b \\ 1 = a - b \\ 3 = 0 \text{ impossible} \end{cases}$$

d'ou a et b n'existent pas par suite \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont non coplanaires.

$$b) \vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} ; \vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \text{ et } \vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AA'}.$$

$$\text{On remarque que } \vec{u} + \vec{v} = 4\overrightarrow{AB} \text{ d'ou } \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v}).$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}).$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AA'} \text{ d'ou } 3\overrightarrow{AA'} = \vec{w} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

$$= \vec{w} - \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = -\frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}.$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{AA'} = -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{12}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} \text{ donc } B \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right) \text{ dans } R'$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \text{ donc } C \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ dans } R'.$$

$$\overrightarrow{AA'} = -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{12}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} \text{ donc } A' \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{3} \right) \text{ dans } R'.$$

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}$$

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \right) + \frac{1}{4}\vec{u} - \frac{1}{12}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w} = \frac{3}{8}\vec{u} - \frac{11}{24}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w}$$

d'ou $\overline{OC} \begin{pmatrix} 3/8 \\ -11/24 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

11

$$1) AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}.$$

$$AC = 25\sqrt{2} = AD = BC = BD = CD.$$

On a donc $AB = AC = AD = BC = BD = CD$ on en déduit que ABCD est un tétraèdre régulier.

$$2) \overline{GB} \begin{pmatrix} 37/3 \\ 35/3 \\ 3/3 \\ 34/3 \end{pmatrix}; \overline{GC} \begin{pmatrix} 13/3 \\ 10/3 \\ 3/3 \\ 59/3 \end{pmatrix}; \overline{GD} \begin{pmatrix} 50/3 \\ 3/3 \\ 25/3 \\ 25/3 \end{pmatrix}$$

d'ou $\overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, G est donc le centre de gravité du triangle BCD.

$$3) a) \text{ On pose } K(x, y, z); \overline{KA} \begin{pmatrix} -7-x \\ -15-y \\ 3-z \end{pmatrix}; \overline{KB} \begin{pmatrix} -4-x \\ 20-y \\ -1-z \end{pmatrix}; \overline{KC} \begin{pmatrix} 4-x \\ 5-y \\ 30-z \end{pmatrix} \text{ et } \overline{KD} \begin{pmatrix} 25-x \\ -y \\ 2-z \end{pmatrix}.$$

$$\overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KC} + \overline{KD} = \vec{0}.$$

$$\begin{cases} -7-x-4-x+4-x+25-x=0 \\ -15-y+20-y+5-y-y=0 \\ 3-z-1-z+30-z+2-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = \frac{17}{2} \end{cases} \text{ d'ou } K\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{17}{2}\right).$$

$$b) \text{ On a } \overline{AG} \begin{pmatrix} 46/3 \\ 70/3 \\ 22/3 \end{pmatrix}; \overline{BD} \begin{pmatrix} 29 \\ -20 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \left(\frac{46}{3} \times 29\right) + \left(-\frac{70}{3} \times 20\right) + \left(\frac{22}{3} \times 3\right) = 0.$$

Alors les vecteurs \overline{AG} et \overline{BD} sont orthogonaux par suite les droites (AG) et (BD) sont orthogonales.

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \text{ d'ou } N\left(0, 1, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Or } I\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) \text{ d'ou } \overrightarrow{IL} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IN} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } * \overrightarrow{IL} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; (1 \times 1) + (0 \times 1) + (-1 \times 1) = 0 \text{ donc } \overrightarrow{IL} \text{ est orthogonal à } \overrightarrow{AG}.$$

$$* \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + (-1 \times 1) = 0 \text{ donc } \overrightarrow{IM} \text{ et } \overrightarrow{AG} \text{ sont orthogonaux.}$$

$$* \overrightarrow{IN} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; (0 \times 1) + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) = 0 \text{ donc } \overrightarrow{IN} \text{ et } \overrightarrow{AG} \text{ sont orthogonaux.}$$

Les points M, N et L appartiennent au plan perpendiculaire à la droite (AG) et passant par I c'est à dire le plan P.

$$3) \text{ a) } O \text{ le centre de cube ou encore } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} \text{ d'ou } O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{IO} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + (0 \times 1) + \left(-\frac{1}{2} \times 1\right) = 0 \text{ d'ou } O \text{ appartient au plan P.}$$

b) Montrons que les points I, J, K, L, M et N appartiennent à un même cercle de centre O.

On calcule les distances OI, OJ, OK, OL, OM et ON à partir des coordonnées.

$$OI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = OJ = OK = OL = OM = ON \text{ d'ou } I, J, L, K, M \text{ et } N$$

appartiennent au cercle de centre O de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Montrons que $IJ = JK = KL = LM = MN = NI$.

Comme les points I, J, K, L, M et N sont les milieux des arêtes, les distances IJ, JK, KL, LM, MN, et NI sont toutes égales à la moitié de la mesure d'une

diagonale d'une face c'est à dire $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ceci prouve que l'hexagone IJKLMN est régulier de côté $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chapitre X

Produit scalaire et Produit vectoriel de l'espace

I) Produit scalaire :

• Définitions :

$$\bullet (\mathbf{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ est dit repère orthonormé si : } \begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j}; \vec{i} \perp \vec{k} \text{ et } \vec{j} \perp \vec{k} \end{cases}$$

Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme une base orthonormé.

• On appelle produit scalaire de deux vecteurs \vec{U} et \vec{U}' , le réel ainsi défini :

$$1) \vec{U} \cdot \vec{U}' = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{U}'\| \cdot \cos \alpha$$

Lorsque \vec{U} et \vec{U}' sont non nul et l'angle α en radians.

2) Si l'un au moins de vecteurs \vec{U} et \vec{U}' est nul alors $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$

• **Théorème:** $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base orthonormé ; $\vec{U} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{U}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans B.

$$\vec{U} \cdot \vec{U}' = xx' + yy' + zz'$$

• Théorèmes :

Soient \vec{U} ; \vec{V} et \vec{W} trois vecteurs de l'espace et α, β deux réels, on a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$$

$$\vec{W} \cdot (\vec{U} + \vec{V}) = \vec{U} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{W}$$

$$(\alpha \vec{U}) \cdot \vec{V} = \alpha (\vec{U} \cdot \vec{V})$$

$$(\vec{U} + \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + \vec{V}^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V}$$

$$(\vec{U} - \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + \vec{V}^2 - 2\vec{U} \cdot \vec{V}$$

$$(\vec{U} + \vec{V}) \cdot (\vec{U} - \vec{V}) = \vec{U}^2 - \vec{V}^2$$

II) Produit vectoriel :

• Définition :

\vec{u} et \vec{v} deux vecteurs, le produit vectoriel des vecteurs

\vec{u} et \vec{v} , note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (où $\vec{u} \times \vec{v}$) est le vecteur défini ainsi :

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

- Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, soient $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{OC} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est défini de la façon suivante.

→ C appartient à la normale en O au plan (AOB).

→ $OC = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \hat{A}OB$ avec $\theta \in]0, \pi[$.

→ $(O, \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$ est un repère direct.

• **Propriétés :**

• $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.

• $\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k\vec{u} \wedge \vec{v}$.

• Si ABCD est un parallélogramme alors

$\|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\| = \text{aire de } ABDC = 2 \times \text{aire du triangle } ABC$

• $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} .

■ **Expression dans une base orthonormale directe :**

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z$$

Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ avec $Y = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = x'z - xz'$

$$Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Exemple :

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, Déterminer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$ et $2\vec{u} \wedge 3\vec{v}$.

$$X = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{et} \quad Y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \quad \text{et} \quad Z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{d'où} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ +2 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{u} \wedge 3\vec{v} = 6 \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} \quad \text{d'où} \quad 2\vec{u} \wedge 3\vec{v} \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Propriété:

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal : • si $\vec{u}(x, y, z)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

• si $M(x, y, z)$ alors $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

• Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$; $\vec{u} \perp \vec{u}'$ si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$

ENONCES

1

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace dans chaque cas :

- a) $\frac{MA}{MB} = 1$ (A et B sont deux points distincts).
- b) $\vec{U} \cdot \vec{AM} = (\vec{U}$ un vecteur donné non nul et A un point de l'espace)
- c) $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{-9}{4}$ (avec [AB] de longueur 3)

2

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé . Soit D la droite passant par A(0,8,-6) et

de vecteur directeur $\vec{U} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Soit B(3,7, -2) et t un paramètre réel $M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \vec{AM} = t\vec{U}$.

- 1) Exprimer les coordonnées de M en fonction de t.
- 2) Calculer BM^2 . Pour quelle valeurs de t la distance BM est minimale, Calculer ce minimum et donner les coordonnées de M_1 correspondant.
- 3) Vérifier que $(BM_1) \perp D$.

3

Indiquer la réponse exacte par a, b ou c . Justifier votre réponse.

1) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$ est égale à :

- a) $\vec{0}$ b) $-2\vec{u} \wedge \vec{v}$ c) $\vec{u}^2 - \vec{v}^2$

2) $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur orthogonal au plan P et $\vec{n}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ vecteur orthogonal au

plan P' et P est parallèle à P' alors:

- a) $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ b) $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$ c) $\vec{n} \perp \vec{n}'$

3) A $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$; B $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ et M(x, y, z) alors $\vec{MA} \wedge \vec{MB}$

est de coordonnées:

a)
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} y \\ -z \\ 0 \end{pmatrix}$$



Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs coplanaires $\Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{w}$.
- $\|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\| =$ l'aire du triangle ABC.
- $(\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{w} - \|\vec{w}\|^2 \cdot \vec{u}$ avec $\vec{u}(a, 0, 0)$ $\vec{w}(b, c, 0)$
dans R.O.N($o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)



Dans l'espace on considère une base O.N. ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}.$$

Calculer les coordonnées de $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$. comparer les résultats.



Déterminer le réel a tel que $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + a\vec{k}$ soient colinéaires.



Soit dans l'espace un repère ($o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) orthonormé direct

$$A(1, 0, 1) \quad ; \quad B(2, 0, 0) \quad ; \quad C(0, 2, -1).$$

- Calculer l'aire du triangle ABC.
- Déterminer les coordonnées du vecteurs \vec{n} normal au plan (ABC)



Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct on considère les points : $A(1, 0, 0)$; $B(1, -1, 1)$; $C(-2, 0, 1)$.

- Déterminer le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $2, -2, 1$.
- On associe à tout point M de l'espace le vecteur $\vec{V} = 2\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}$.
Exprimer le vecteur \vec{V} en fonction du vecteur \overline{MG} .
- a) Le point M de coordonnées (x, y, z) . Déterminer $\overline{AB} \wedge \vec{V}$.
b) Calculer $\overline{AB} \cdot \vec{V}$.
- Déterminer le point M tel que $\overline{AB} \wedge \vec{V} = \overline{OA}$ et $\overline{AB} \cdot \vec{V} = 0$.

9

($\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) R.O.N direct. On considère la droite D passant par A de vecteur directeur \vec{u} . Soit M un point quelconque de l'espace.

1) Montrer que distance de M à D est égale à $\frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

2) Application : A(4, -2, 6) $\vec{u}(1, -2, 2)$ M(0, 2, 0). Calculer d(M, D).

10

($\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) R.O.N direct. On donne les points A(3, 2, -1) et H(1, -1, 3).

1) Calculer AH.

2) Déterminer une équation de plan P passant par H et orthogonal à (AH).

3) On donne les points B(-6, 1, 1) C(4, -3, 3) et D(-1, -5, -1).

a) Montrer que B, C, D appartiennent au plan P.

b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.

d) Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\frac{145}{3}$.

(Formule du volume de tétraèdre $\frac{1}{3}$ Base \times hauteur).

4) a) Calculer l'aire de ABC.

b) Calculer la distance de D au plan (ABC).

11

On considère les points A, B, C de coordonnées respectives (2, 0, 1) (3, -2, 0) et (2, 8, -4) dans un R.O.N.D ($\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

1) Soit M(x, y, z). Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.

2) Déterminer les réels x, y, z tels que
$$\begin{cases} -x + y = -4 + 2z \\ -x - y = -11 + z \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$$

3) Montrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées du point N.

4) a) Montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à $\frac{1}{6} \text{CN}^2$.

b) En prenant M = C et en utilisant la question 1°)

Calculer l'aire du triangle ABC.

c) En déduire la distance de N au plan ABC.

12

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un R.O.N.D et $M(x, y, z)$

H son projeté orthogonal sur le plan (ABC) et K son projeté orthogonal sur la droite (AB) .

- 1) a) Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 1, 1, 1. Déterminer les coordonnées de G.
- b) Montrer que $(OG) \perp (ABC)$.
- c) Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

2) a) Montrer que $\left| \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OG} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} MH$.

b) Calculer la distance de M au plan ABC en fonction de x, y et z.

3) a) Interpréter géométriquement $\left\| \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} \right\|$

Exprimer la distance MK en fonction de cette norme.

b) En déduire que $MK = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}$.

4) On se place dans le plan $(OAB) : z = 0$ et on considère l'ensemble Γ des points de plan (OAB) qui sont équidistants du point O et du plan (ABC) .

- a) Montrer que Γ ne contient aucun point de la droite (AB) .
- b) $M(x, y, 0)$ un point de (OAB) et n'appartient pas à (AB) .

En utilisant les questions 2) et 3) Calculer $\frac{MH}{MK}$.

13

On donne, dans le plan, un quadrilatère convexe ABCD

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en E.

Soit F le point tel que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$.

- 1) Comparer les distances BD et EF puis les aires des triangles ABD et AEF.
- 2) Montrer que le quadrilatère ABCD et le triangle AFC ont même aire.
- 3) Montrer que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}$.

En déduire l'aire du quadrilatère ABCD à l'aide d'une expression faisant intervenir les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BD} .

CORRIGES

$$\nabla 1 \quad a) \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1 \Leftrightarrow MA = MB$$

l'ensemble des points M vérifiant $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1$ est la médiatrice du segment [AB].

$$b) \overline{U} \cdot \overline{AM} = 2. \text{ Soit I le point tel que } \overline{AI} = \overline{U}.$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AI). D'où $\overline{U} \cdot \overline{AM} = \overline{AI} \cdot \overline{AM} = \overline{AI} \cdot \overline{AH}$

$$\text{Donc } \overline{U} \cdot \overline{AM} = 2 \Leftrightarrow \overline{AI} \cdot \overline{AH} = 2 \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{2}{\overline{AI}}$$

D'où l'ensemble recherché est le plan orthogonal à la droite (AI) au point H

$$\text{défini par } \overline{AH} = \frac{2}{\overline{AI}}$$

$$c) \overline{MA} \cdot \overline{MB} = -\frac{9}{4}$$

Si on appelle I le milieu de [AB] alors $\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$.

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA}) \cdot (\overline{MI} + \overline{IB}) = -\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + \overline{MI} \cdot (\overline{IA} + \overline{IB}) + \overline{IA} \cdot \overline{IB} = -\frac{9}{4} \text{ or } \overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + \overline{IA} \cdot (-\overline{IA}) = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow MI^2 = -\frac{9}{4} + IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = -\frac{9}{4} + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow MI = 0 \Leftrightarrow M = I$$

d'où l'ensemble recherché est {I}.

$$\nabla 2 \quad 1) \overline{AM} = t \cdot \overline{U} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 2t \\ y - 8 = -3t \\ z + 6 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = -3t + 8 \\ z = 2t - 6 \end{cases}$$

D'où M(2t, -3t + 8, 2t - 6).

$$2) BM^2 = (x - 3)^2 + (y - 7)^2 + (z + 2)^2 = (2t - 3)^2 + (-3t + 8 - 7)^2 + (2t - 6 + 2)^2 \\ = (2t - 3)^2 + (-3t + 1)^2 + (2t - 4)^2$$

D'où $MB^2 = 17t^2 - 34t + 26$. Soit $f(t) = 17t^2 - 34t + 26$.

f dérivable sur \mathbb{R} , $f'(t) = 34t - 34$ et on a $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

f	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	○	+
$f(t)$			

f' s'annule en 1 et change de signe au voisinage de 1 donc BM^2 est minimal pour $t = 1$ d'où BM est minimal pour $t = 1$

$BM = \sqrt{17 - 34 + 26} = 3$ et les coordonnées de $M_1(2, 5, -4)$.

$$3) \overline{BM_1} \begin{pmatrix} 2-3 \\ 5-7 \\ -4+2 \end{pmatrix} \text{ d'où } \overline{BM_1} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\overline{BM_1} \cdot \vec{U} = -2 + 6 - 4 = 0$ par suite $(\overline{BM_1}) \perp D$.

3

$$1) (\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = \underbrace{\vec{u} \wedge \vec{u}}_0 - \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{u} - \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_0$$

$$= -\vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{v} = -2\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

ainsi la réponse est **b**.

2) $P // P' \Leftrightarrow \vec{n}$ et \vec{n}' sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$

d'où la réponse est **b**.

$$3) \overline{MA} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x \\ -\frac{1}{2} - x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad \overline{MB} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x \\ \frac{1}{2} - x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad \text{alors } \overline{MA} \wedge \overline{MB} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } X = \begin{vmatrix} -y & -y \\ -z & -z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et } Z = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} - x \\ -y & -y \end{vmatrix} = -y(-\frac{1}{2} - x) + y(\frac{1}{2} - x) = y$$

$$\text{et } Y = \begin{vmatrix} -z & -z \\ -\frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} = -z(\frac{1}{2} - x) + z(-\frac{1}{2} - x) = -z$$

ainsi la réponse est **a**.

4

1) Vraie : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires $\Rightarrow \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

or $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$ donc $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$.

2) faux : $\|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\| = 2 \times \text{aire } ABC \neq \text{aire } ABC.$

3) Vrai: $\vec{u} \wedge \vec{w} (0, 0, ac) \Rightarrow (\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w}$ a pour coordonnées
 $(0 - ac^2, acb - 0, 0 - 0)$

$\Rightarrow (\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} (-ac^2, acb, 0).$ On aussi $\vec{u} \cdot \vec{w} = ab$ et $\|\vec{w}\|^2 = b^2 + c^2.$

d'où $(\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{w} - \|\vec{w}\|^2 \cdot \vec{u}$ a donc pour coordonnées $(-a^2c, abc, 0)$

donc $(\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{w} - \|\vec{w}\|^2 \cdot \vec{u}.$

5 on a : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

$X = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$ et $Y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$ et $Z = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

d'où $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ or $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Des calculs analogues donnent : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

on a donc $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}).$

6 \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ or $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (-2a - 4)\vec{i} + (-2 - a)\vec{j}$ ce vecteur est nul

donc $-2a - 4 = 0$ et $-2 - a = 0 \Leftrightarrow a = -2$

7 1) aire $ABC = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\|$ or $\overline{AB}(1, 0, -1)$ $\overline{AC}(-1, 2, -2)$

d'où $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ et aire $ABC = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 9 + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

2) \vec{n} le vecteur normal à $(ABC) \Rightarrow \vec{n} \perp \overline{AB}$ et $\vec{n} \perp \overline{AC}$

$$\Rightarrow \vec{n} = \overline{AB} \wedge \overline{AC} \Rightarrow \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla 8) 1) \overline{OG} = \frac{1}{2+(-2)+1} (2\overline{OA} - 2\overline{OB} + \overline{OC}) = 2\overline{OA} - 2\overline{OB} + \overline{OC}$$

$$\text{alors } x_G = 2x_A - 2x_B + x_C = -2 \quad \text{et} \quad y_G = 2y_A - 2y_B + y_C = 2$$

$$\text{et } z_G = 2z_A - 2z_B + z_C = -1 \quad \text{d'où } G(-2, 2, -1).$$

$$2) \vec{V} = 2\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC} = 2(\overline{MG} + \overline{GA}) - 2(\overline{MG} + \overline{GB}) + (\overline{MG} + \overline{GC}) \\ = \overline{MG} + \underbrace{2\overline{GA} - 2\overline{GB} + \overline{GC}}_0 = \overline{MG}$$

$$3) a) \overline{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{V} \begin{pmatrix} -2-x \\ 2-y \\ -1-z \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} \wedge \vec{V} \text{ a pour coordonnées}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2-y \\ 1 & -1-z \end{vmatrix} = 1+z-2+y = y+z-1; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1-z \\ 0 & -2-x \end{vmatrix} = -2-x \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & -2-x \\ -1 & -1-z \end{vmatrix} = -2-x$$

$$\text{d'où } \overline{AB} \wedge \vec{V} \begin{pmatrix} y+z-1 \\ -2-x \\ -2-x \end{pmatrix}$$

$$b) \overline{AB} \cdot \vec{V} = -2+y-1-z = y-z-3.$$

$$4) \overline{AB} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow y-z-3=0$$

$$\overline{AB} \wedge \vec{V} = \overline{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-1=1 \\ -2-x=0 \\ -2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-1=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z-1=1 \\ y-z-3=0 \end{cases} \quad \text{on additionne membre à membre on obtient } 2y-4=1$$

soit $y = \frac{5}{2}$ d'où $z = -\frac{1}{2}$. Un seul point répond au problème c'est le point

de coordonnées $(-2, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$.

9

1) Soit H le projeté orthogonal de M sur D alors $d(M, D) = MH$.

$$\overline{MA} \wedge \vec{u} = (\overline{MH} + \overline{HA}) \wedge \vec{u} = \overline{MA} \wedge \vec{u} + \underbrace{\overline{HA} \wedge \vec{u}}_0 = \overline{MH} \wedge \vec{u}$$

car (H, A des points de D $\Rightarrow \overline{HA}$ et \vec{u} colinéaires)

$$\|\overline{MA} \wedge \vec{u}\| = \|\overline{MH} \wedge \vec{u}\| = \|\overline{MH}\| \cdot \|\vec{u}\| \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = \|\overline{MH}\| \cdot \|\vec{u}\| \text{ car } \overline{MH} \perp \vec{u}$$

$$\text{ainsi } MH = \frac{\|\overline{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = d(M, D).$$

$$2) \overline{MA} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ alors } \overline{MA} \wedge \vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \|\overline{MA} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{16+4+16} = 6 \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+4} = 3 \text{ d'où } d(M, D) = \frac{6}{3} = 2.$$

10

$$1) \overline{AH} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ alors } AH = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

2) (AH) \perp P donc \overline{AH} vecteur normal de P : $-2x - 3y + 4z + 1 = 0$
or $H \in P$ donc $-2+3+12+d=0 \Leftrightarrow d=-13$ d'où

$$P: -2x - 3y + 4z - 13 = 0.$$

3) a) Les coordonnées de B, C et D vérifient l'équation de P :

$$(-2 \times -6 - 3 \times 1 + 4 \times 1 - 13 = 16 - 16 = 0 \Rightarrow B \in P) \text{ de même pour C et D.}$$

$$b) \overline{BC} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{BD} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overline{BC} \wedge \overline{BD} \text{ a pour coordonnées } (20, 30, -40).$$

$$c) \text{l'aire (BCD)} = \frac{1}{2} \|\overline{BC} \wedge \overline{BD}\| = \frac{1}{2} \sqrt{20^2 + 30^2 + 40^2} = 5\sqrt{29}.$$

$$d) V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} (\text{aire BCD}) \times AH = \frac{1}{3} 5\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} = \frac{145}{3}.$$

$$4) a) \text{Aire (ABC)} = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\|$$

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}; \overline{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{AB} \wedge \overline{AC} (6, 38, 46)$$

$$\text{d'où l'aire}(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 38^2 + 46^2} = \sqrt{899}.$$

b) Le volume de ABCD = $\frac{1}{3}$ aire(ABC) \times hauteur issue de D

$$= \frac{1}{3} \text{aire}(ABC) \times d(D, (ABC)) \Rightarrow d(D, (ABC)) = \frac{3V}{\text{aire} ABC} = \frac{145}{\sqrt{899}} = 5\sqrt{\frac{29}{31}}$$

11) $\overline{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \overline{BM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z \end{pmatrix}$ alors les coordonnées de $\overline{AM} \wedge \overline{BM}$ sont :

$$X = \begin{vmatrix} y & y+2 \\ z-1 & z \end{vmatrix} = yz - (z-1)(y+2) = y - 2z + 2$$

$$Y = \begin{vmatrix} z-1 & z \\ x-2 & x-3 \end{vmatrix} = (z-1)(x-3) - z(x-2) = -x - z + 3$$

$$Z = \begin{vmatrix} x-2 & x-3 \\ y & y+2 \end{vmatrix} = (x-2)(y+2) - y(x-3) = 2x + y - 4$$

$$\text{d'où } \overline{AM} \wedge \overline{BM} \begin{pmatrix} y-2z+2 \\ -x-z+3 \\ 2x+y-4 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{cases} -x + y = -4 + 2z & (1) \\ -x - y = -11 + z & (2) \\ 2x + y - z = 8 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \text{ donne } -2x = -15 + 3z \Rightarrow 2x = 15 - 3z$$

$$(1) - (2) \text{ donne } 2y = 7 + z \Rightarrow y = \frac{7+z}{2}$$

$$\text{On remplace dans (3) on obtient : } (15-3z) + \frac{7+z}{2} - z = 8 \Rightarrow z = 3$$

$$\text{d'où } 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \text{ et } y = 5$$

la seule solution de ce système est : (3, 5, 3).

$$3) \text{ On sait que } \overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} \begin{pmatrix} y-2z+2 \\ -x-z+3 \\ 2x+y-4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-8 \\ z+4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2z+2 = x-2 \\ -x-z+3 = y-8 \\ 2x+y-4 = z+4 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} -x+y=2z-4 \\ -x-y=z-11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \\ z=3 \end{cases}$$

D'où il existe un unique point $N(3, 5, 3)$ solution du système de la question 2).

4) a) $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ alors $\overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{AN}$ et à $\overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{CN} \perp (ABN) \Rightarrow CN$ est la hauteur de tétraèdre ainsi le volume $(ABCN)$

$$= \frac{1}{3} \text{aire}(ABN) \times CN = \frac{1}{3} \times \frac{\|\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN}\|}{2} \times CN = \frac{1}{6} \|\overrightarrow{CN}\| \cdot CN = \frac{1}{6} CN^2.$$

b) En remplaçant les coordonnées de M par celles de C

$$\text{On obtient } \begin{cases} X=8+8+2=18 \\ Y=-2+4+3=5 \\ Z=4+8-4=8 \end{cases}$$

$$\text{L'aire de } ABC = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{18^2 + 5^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{413}}{2}.$$

c) Le tétraèdre $ABCN$ a pour base ABC et pour hauteur issue de N appelons h la distance de N au plan ABC

$$\text{Volume de } (ABCN) = \frac{1}{3} \text{aire}(ABC) \times h \text{ or Volume de } (ABCN) = \frac{1}{6} CN^2$$

$$\text{D'où } \frac{1}{3} h \times \text{aire}(ABC) = \frac{1}{6} CN^2$$

$$\text{Soit } h = \frac{\frac{1}{2} CN^2}{\text{aire}(ABC)} \text{ or } \overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow CN = \sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}$$

$$\text{D'où } h = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{59^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{413}} = \frac{59}{\sqrt{413}} \approx 2,9.$$

$$\nabla 12) \text{ a) } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{1+1+1}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\text{d'où } x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C); \quad y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \text{ et}$$

$$z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C)$$

$$\text{or } A(1, 0, 0); \quad B(0, 1, 0) \text{ et } C(0, 0, 1) \text{ donc } G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$$\text{b) } \overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{donc } \overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow (\text{OG}) \perp (\text{ABC}).$$

$$\text{c) } (\text{OG}) \perp (\text{ABC}) \text{ alors } \overrightarrow{OG} \text{ est un vecteur normal à } (\text{ABC})$$

$$\text{d'où } (\text{ABC}): \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + d = 0 \quad \text{or } A \in (\text{ABC}) \Rightarrow d = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ainsi } (\text{ABC}): \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{où encore } (\text{ABC}): x + y + z - 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ a) } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OG} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot \overrightarrow{OG} \text{ or } \overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{HA} \text{ car } (\text{HA}) \subset (\text{ABC}) \\ &= \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{OG} + \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{OG}}_0 = \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{OG} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \left| \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OG} \right| = \left| \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{OG} \right| \text{ or } (\text{MH}) \perp (\text{ABC}) \text{ et } (\text{OG}) \perp (\text{ABC})$$

$$\text{donc } (\text{MH}) \parallel (\text{OG}) \text{ d'où } \overrightarrow{MH} \text{ et } \overrightarrow{OG} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\text{donc } (\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{OG}) \equiv 0 \quad \text{où } \pi(2\pi) \Rightarrow \left| \cos(\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{OG}) \right| = 1$$

$$\text{par suite } |\overline{\text{MA}} \cdot \overline{\text{OG}}| = \|\overline{\text{MH}}\| \cdot \|\overline{\text{OG}}\| \cdot \underbrace{\left| \cos(\overline{\text{MH}}, \overline{\text{OG}}) \right|} = \text{MH} \cdot \text{OG} = \text{MH} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{b) } \overline{\text{MA}} \cdot \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \cdot \overline{\text{OG}} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ alors } \overline{\text{MA}} \cdot \overline{\text{OG}} = \frac{1}{3}(1-x-y-z)$$

$$|\overline{\text{MA}} \cdot \overline{\text{OG}}| = \frac{1}{3}|1-x-y-z| \text{ d'autre part } |\overline{\text{MA}} \cdot \overline{\text{OG}}| = \frac{\text{MH}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{d'où } \text{MH} = \sqrt{3} |\overline{\text{MA}} \cdot \overline{\text{OG}}| = \frac{\sqrt{3}}{3} |1-x-y-z|.$$

3) a) La norme de $\|\overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}}\|$ représente l'aire du parallélogramme

ayant les segments [MA] et [MB] pour côté consécutifs or le double de l'aire du triangle AMB.

K étant le projeté orthogonal de M sur (AB)

$\Rightarrow (\text{MK}) \perp (\text{AB}) \Rightarrow \text{MK}$ est la hauteur du triangle AMB dont l'aire

est $\frac{\text{MK} \times \text{AB}}{2}$. or $\text{AB} = \sqrt{2}$.

On peut donc écrire l'aire du triangle AMB est $\frac{\|\overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}}\|}{2} = \frac{\text{MK} \cdot \sqrt{2}}{2}$

$$\text{Soit } \text{MK} = \frac{\|\overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}}\|}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{b) } \overline{\text{MA}} \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \text{ et } \overline{\text{MB}} \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Les coordonnées de $\overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}}$ sont :

$$\text{X} = \begin{vmatrix} -y & 1-y \\ -z & -z \end{vmatrix} = z \text{ et } \text{Y} = \begin{vmatrix} -z & -z \\ 1-x & -x \end{vmatrix} = z \text{ et } \text{Z} = \begin{vmatrix} 1-x & -x \\ -y & 1-y \end{vmatrix} = 1-x-y$$

$$\Rightarrow \overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}} \begin{pmatrix} z \\ z \\ 1-x-y \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}}\| = \sqrt{z^2 + z^2 + (1-x-y)^2}$$

$$\text{ainsi } \text{MK} = \frac{\sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}}{\sqrt{2}}$$

4) a) On a $(AB) \subset (ABC) \Rightarrow$ la distance de tout point de (AB) au plan (ABC) est nul et $(O \notin (AB))$ la distance O à droite (AB) n'est pas nul $\Rightarrow \Gamma$ ne contient aucun point de (AB) .

b) On a $\text{MK} = \frac{\sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}}{\sqrt{2}}$ or remplaçant z par 0

$$\text{On obtient } \text{MK} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1-x-y)^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

$$M \notin (AB) \Rightarrow \text{MK} \neq 0 \Rightarrow \frac{\text{MH}}{\text{MK}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}|1-x-y-z|}{\frac{1}{\sqrt{2}}|x+y-1|} \text{ or } z=0 \text{ d'où } \frac{\text{MH}}{\text{MK}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

13

1) On a $\overline{\text{BD}} = \overline{\text{BE}} + \overline{\text{ED}} = \overline{\text{DF}} + \overline{\text{ED}}$
 $= \overline{\text{ED}} + \overline{\text{DF}} = \overline{\text{EF}} \Rightarrow \text{BD} = \text{EF}$

$$\text{aire}(\text{ABD}) = \frac{1}{2} \text{BD} \times \text{AH} \text{ et } \text{aire}(\text{AEF}) = \frac{1}{2} \text{EF} \times \text{AH}$$

H est le projeté orthogonal de A sur $(\text{BD}) = (\text{EF})$ et comme $\text{BD} = \text{EF}$ alors $\text{aire}(\text{ABD}) = \text{aire}(\text{AEF})$.

2) Aire de $(\text{ABCD}) =$ l'aire $\text{ABD} +$ l'aire BCD on sait que

$$\text{aire}(\text{ABD}) = \text{aire}(\text{AEF}) \text{ on a } \text{aire}(\text{BCD}) = \frac{1}{2} \text{BD} \times \text{CK} \text{ et } \text{aire}(\text{CEF}) = \frac{1}{2} \text{EF} \times \text{CK}$$

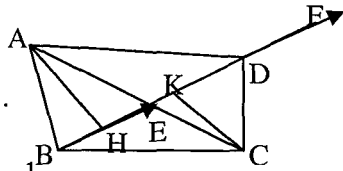
$$\text{l'aire } \text{CEF} = \frac{1}{2} \text{EF} \times \text{CK} \text{ (K le projeté } \perp \text{ de C sur } (\text{BD}) = (\text{EF})) \text{ d'où}$$

$$\text{l'aire } \text{BCD} = \text{aire}(\text{CEF}). \text{ donc Aire } \text{ABCD} = \text{aire}(\text{AEF}) + \text{aire}(\text{CEF}) = \text{aire}(\text{AFC}).$$

3) On a $\overline{\text{BD}} = \overline{\text{EF}}$ alors $\overline{\text{AC}} \wedge \overline{\text{BD}} = \overline{\text{AC}} \wedge \overline{\text{EF}} = \overline{\text{AC}} \wedge (\overline{\text{EA}} + \overline{\text{AF}})$

$$= \underbrace{\overline{\text{AC}} \wedge \overline{\text{EA}} + \overline{\text{AC}} \wedge \overline{\text{AF}}}_{\text{0}} \text{ car A, C, E alignés. d'où } \overline{\text{AC}} \wedge \overline{\text{BD}} = \overline{\text{AC}} \wedge \overline{\text{AF}}.$$

$$\bullet \text{ aire } \text{ABCD} = \text{aire}(\text{AFC}) = \frac{1}{2} \|\overline{\text{AC}} \wedge \overline{\text{AF}}\| = \frac{1}{2} \|\overline{\text{AC}} \wedge \overline{\text{BD}}\|.$$



Chapitre XI

Equations de droites et de plans

Equation d'une sphère

■ Equations paramétriques et équations cartésiennes d'une droite:

* Une droite est déterminée par la donnée de deux points
ou un point et un vecteur directeur.

* Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère, $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A(x_0, y_0, z_0)$

$$M(x, y, z) \in \Delta(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$$

$$\Delta: \begin{cases} x = \alpha a + x_0 \\ y = \alpha b + y_0 \\ z = \alpha c + z_0 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} ; c' \text{ est une représentation paramétrique de la droite } \Delta,$$

ou encore les équations paramétriques de Δ .

* Remarques:

Si on a une représentation paramétrique d'une droite on peut avoir un vecteur directeur et un point.

$$\text{Exemples: } \Delta: \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3\alpha - 5 \\ z = 6\alpha + 3 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

On a alors $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur de Δ et $A(1, -5, 3)$ est un point de Δ

2) D'après la première équation du système, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ les deux

$$\text{autres équations deviennent } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - 5 \\ z = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 3x - 2y - 13 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

ce système est appelé les équations cartésiennes de Δ .

■ $\Delta: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une **représentation cartésienne** de la droite

Δ si et seulement si $ab'-a'b \neq 0$ ou $ac'-a'c \neq 0$ ou $bc'-b'c \neq 0$.

Si et seulement si a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels

Exemple: si Δ a pour représentation cartésienne $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$ on pose l'une

des inconnues x ou y ou z par α , on retrouve la représentation paramétrique :

$$\text{Si on pose } x = \alpha \text{ le système devient } \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha - (1 - \alpha) \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

■ Equations paramétriques d'un plan

* Un plan est déterminé par la donnée de 3 points non alignés ou 1 point et 2 vecteurs non colinéaires.

* P est le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et deux vecteurs non colinéaires

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \text{ d'où } P: \begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

C'est une représentation paramétrique du plan.

■ Equation cartésienne du plan P :

$$P : ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

* **Remarques :**

1) Pour passer de l'équation cartésienne à une représentation paramétrique, il suffit de poser $x = \alpha$ et $y = \beta$ et en remplacer dans l'équation de plan pour avoir le système.

2) Pour passer du paramétriques au cartésienne on choisit deux équations pour avoir α et le β et on remplace dans la troisième, on obtient une équation cartésienne.

■ Vecteur d'un plan:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ est un vecteur du plan } P : ax + by + cz + d = 0$$

Si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

■ Positions de deux plans:

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}), P'(B, \vec{u}', \vec{v}')$$

- Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de P' alors $P // P'$.

Si de plus $A \in P'$ alors $P = P'$

- Si l'un des vecteurs \vec{u} ou \vec{v} n'est pas un vecteurs de P' alors P est sécant à P' .

■ Positions droites et plans:

$$D\left(A, \vec{u}\right), P\left(B, \vec{v}, \vec{w}\right)$$

- $D // P$ si et seulement si \vec{u} est un vecteur de P si de plus $A \in P$ alors $D \subset P$.

- D et P sont sécants si et seulement si \vec{u} n'est pas un vecteur de P .

■ Orthogonalité – distance d'un point à un point :

■ Un vecteur non nul est dit **normal d'un plan P** s'il est orthogonal à tous les vecteurs de P . Si $(\vec{U}; \vec{V})$ est une base de P et \vec{n} un vecteurs normal de P alors $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$

■ Une droite D est orthogonal à P si et seulement si \vec{W} le vecteur directeurs de D est colinéaire au vecteurs normal de P .

■ a, b, c et d quatre réels données, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant : $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un plan de vecteurs

$$\text{normal } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

■ P et P' deux plans, d'équations respectives :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ et } a'x + b'y + c'z + d' = 0 \text{ dans un repère orthonormal.}$$

$$* P \perp P' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0.$$

■ Dans un repère orthonormé, P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$

La distance d' d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ au plan P est donnée par :

$$d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

■ Intersection de deux plans :

$$P : ax + by + cz + d = 0 ; P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P ; \vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P'.$$

P et Q sont strictement parallèles $\Leftrightarrow \vec{n} = \alpha \cdot \vec{n}'$ et $\alpha d' \neq d$.

* P et Q sont parallèles $\Leftrightarrow \vec{n} = \alpha \cdot \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n}$ et \vec{n}' sont colinéaires.

* P et Q sont sécantes \Leftrightarrow P et Q non parallèles $\Leftrightarrow \vec{n}$ et \vec{n}' non colinéaires.

■ Intersection droite et plan :

P : $ax + by + cz + d = 0$; $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur normal de P. $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ est un vecteur

directeur de la droite Δ qui passe par $A(x_A, y_A, z_A)$.

* $\Delta // P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \alpha a + \beta b + \delta c = 0$

Si de plus $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ alors $A \in P$ donc $\Delta \subset P$

et si $ax_A + by_A + cz_A + d \neq 0$ alors $A \notin P$ donc Δ est parallèle strictement à P.

* Δ coupe P $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$

Sphère :

■ Définition :

Soit R un réel strictement positif, I un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que :

$IM = R$ est la sphère de centre I et de rayon R, noté : $S(I, R)$

■ Théorème :

Soient A et B deux points de l'espace. La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble de points M de l'espace tels que $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$.

■ Equation cartésienne d'une sphère :

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé, le point $A(x_A, y_A, z_A)$ de l'espace et r un réel strictement positif.

La sphère S de centre A de rayon r est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel

que : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$,

c'est l'équation cartésienne de S.

* En développant cette équation on obtient alors une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

■ Positions Sphère et plan :

$P : ax + by + cz + d = 0$ et S de centre I de rayon R .

* Si $d(I, P) = R \Rightarrow S \cap P = \{H\}$ H est le projeté orthogonal de I sur P .

On dit que P est tangent à S .

* Si $d(I, P) > R \Rightarrow S \cap P = \emptyset$. On dit que P est extérieur à S .

* Si $d(I, P) < R \Rightarrow S \cap P$ est un cercle de centre H de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.

On dit P et S sont sécants.

Le point H vérifie $\overrightarrow{IH} = \alpha \vec{n}$ où \vec{n} vecteur normal de P et $H \in P$.

Remarque : Si $d(I, P) = 0$ alors $S \cap P$ est le cercle de centre I et de rayon R .

■ Théorème :

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est :

* Une sphère de centre $I\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right)$ de rayon $R = \sqrt{h}$

$$\text{si } h = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d > 0.$$

* Un singleton $\left\{ I\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right) \right\}$ si $h = 0$.

* Le vide si $h < 0$.

ENONCES



Dans l'espace rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points $A(2, -3, 4)$; $B(1, 0, 2)$; $C(2, -1, 2)$; $D(1, -1, 3)$.

- 1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- 2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) , vérifier que $O \notin (AB)$.
- b) Ecrire une équation cartésienne du plan P passant par O et contenant la droite (AB) .



Soit $ABCD$ un tétraèdre ; $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ est un repère de l'espace noté R . Soient P le point défini par : $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ et G le point défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

- 1) Déterminer les coordonnées de P et G .
- 2) Déterminer une représentation paramétrique de (PG) et une équation cartésienne du plan $Q = (BCD)$.
- 3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection (PG) et Q .
- 4) Soient $M(1, 1, -1)_R$; $N(0, 2, -1)_R$ et $L(2, -1, 1)_R$. Montrer que M, N et L déterminent un plan P . Ecrire une équation cartésienne de P .
- 5) Montrer que P et Q sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de $P \cap Q$.



Dans l'espace rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 1, -1)$; $B(m, 2, m)$ et $C(1, 2, -4)$ où m désigne un paramètre réel.

- 1) Déterminer l'ensemble des réels m , pour que les points A, B, C ne soient pas alignés.
- 2) Pour les valeurs de m obtenues dans 1) on désigne par P_m le plan passant par les points A, B et C .
 - a) Trouver une équation cartésienne du plan P_m .
 - b) Démontrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe D dont on déterminera une représentation paramétrique.



On considère les ensembles:

$$D = \left\{ M(x, y, z) \in \xi; \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5} \right\}$$

$$\text{et } D' = \left\{ M(x, y, z) \in \xi, \frac{x+2}{4} = \frac{y+3}{3} = z+1 \right\}.$$

- 1) Montrer que D et D' sont deux droites.
- 2) Montrer que D et D' ne sont pas coplanaires
- 3) soit $A(1, -1, 3)$, Ecrire une équation cartésienne du plan P vérifiant: $A \in P, D // P$ et $D' // P$.
- 4) On considère le plan P' d'équation cartésienne: $x - 2y + z - 1 = 0$. Etudier l'intersection des deux plans P et P'.

5 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de ξ , on donne $A(1, 2, -1)$

$$D_1 : \begin{cases} x = 2 - 4\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}; D_2 : \begin{cases} x = -1 - \beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = 3 - 3\beta \end{cases} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}$$

- 1) Déterminer une représentation paramétrique du plan P passant par A et parallèle à D_1 et à D_2 .
- 2) Donner une équation cartésienne du plan P.
- 3) Etudier la position de D_1 et D_2 .
- 4) Soit $B_m(m+6, m, m+1)$ avec m un paramètre réel
 - a) Pour quelle valeur de m, $B_m \in D_1$.
 - b) Déterminer une représentation paramétrique de (AB_m) .
- 5) Pour quelle valeur de m, on a $(AB_m) // D_2$.
- 6) Déterminer m pour que $(AB_m) \subset P$.

6 $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant un repère de ξ et $A(m-1, m, m+1)$ un point de ξ .

Soit D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$

- 1) Pour quelle valeur de m, $A \in D$.
- 2) Dans la suite de l'exercice, on suppose que $m \neq 2$. Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A et contenant la droite D.
- 3) Soit D_m la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -1 + m\gamma \\ y = 1 + (m-1)\gamma \\ z = 1 + m\gamma \end{cases}; \gamma \in \mathbb{R}.$$

- a) Etudier la position relative de D et D_m .
- b) Ecrire une équation cartésienne du plan Q_m contenant D_m et parallèle à D.

c) Démontrer que $A \in P \cap Q_m$ puis déterminer une représentation paramétrique de $P \cap Q_m$.

7

Soit P_m le plan d'équation: $(m+1)x+(2m-1)y+(m-1)z+2+m=0$ où $m \in \mathbb{R}$

- 1) Montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe D , dont on donnera une représentation paramétrique.
- 2) Montrer que D est incluse dans le plan $Q:x+2y+z+1=0$.
- 3) Tout plan contenant D est il un plan P_m .
- 4) Soit le point $A(\cos t, 0, \sin t)$. Déterminer m pour que $A \in P_m$.

8

Soient P_m le plan d'équation: $mx+(3m-2)y-z-m+2=0$ et D_a la droite de \mathcal{C} d'équation: dans le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

$$\begin{cases} x - y + a - 1 = 0 \\ -3y + z + 1 + 3a = 0 \end{cases} \quad \text{où } (m, a) \in \mathbb{R}^2$$

- 1) Déterminer un vecteur directeur de D_a .
- 2) Déterminer m pour que P_m soit parallèle à D_a . Déterminer alors $P_m \cap D_a$.
- 3) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m contient une droite fixe Δ que l'on déterminera.
- 4) Déterminer a pour qu'il existe un plan Q qui contient Δ et D_a . Déterminer alors l'équation cartésienne de Q .

9

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé. Soit P et P' deux plans d'équations respectives : $2x - y + z + 1 = 0$ et $-6x + 3z + 2 = 0$

- a) Montrer que P et P' sont strictement parallèles.
- b) Déterminer une représentation paramétrique de Δ la perpendiculaire à P passant par $A(1, 0, -1)$.

10

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé.

Le plan $P : 2x - y + z + 1 = 0$ et le plan $P' : y + z - 8 = 0$

- a) Montrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.
- b) Soit $A(-1, 5, 3)$. Montrer que A est un point de P' .
Déterminer la distance de A au plan P .

11

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé. Soient les points $A(2, -3, 4)$;

$B(-3, 1, 2)$ et le vecteur $\vec{U} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

- 1) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A de

vecteur directeur \vec{U} .

- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par B et perpendiculaire à D.
- 3) a) Soit H le projeté orthogonal de A sur P. Déterminer les coordonnées de H.
 - b) Calculer la distance de A au plan P.
- 4) a) Quel est le projeté orthogonal de B sur D ?
 - b) Calculer la distance de B à la droite D.

12

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé.

- 1) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par $A(1, -1, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
- 2) Soit P' le plan d'équation $x - y + z + 2 = 0$.
 - a) Montrer que $P \perp P'$.
 - b) Calculer la distance de $H(0, 1, -3)$ à la droite $D = P \cap P'$.
- 3) a) Donner un système d'équations paramétriques de D.
 - b) Déterminer les coordonnées du point M de la droite D pour le quel HM est minimal.

13

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé, on considère les points $A(1, 2, 0)$;

$B(0, 2, 1)$ et les vecteurs $\vec{U} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que les droites D_1 passant par A de vecteur directeur \vec{U} et D_2 la droite passant par B de vecteurs directeurs \vec{V} sont non coplanaires.
- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant D_1 et parallèle à D_2 .
- 3) Trouver une équation du plan Q contenant D_2 et perpendiculaire à P.
- 4) Déterminer les coordonnées du point I intersection de D_1 et Q.
- 5) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par I et perpendiculaire à P.
 - b) J désigne le point d'intersection de Δ et D_2 . Calculer IJ.

14

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé.

On considère la famille de plan $P_m(m-1)x + (2m-1)y + mz + 2m + 3 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1) Existe-t-il une valeur de m pour que $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit un vecteur normal de P_m ?

2) Pour quelle valeurs de m , P_m est perpendiculaire au plan Q ;

$$Q : x + 2y - z + 1 = 0$$

3) Pour quelle valeur de m , $P_m \perp D$

$$\text{avec } D = \left\{ M(x, y, z) \in \xi / \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z+2 \right\}.$$

15

On considère les plans $P_m : 2x - 3my + 2z + m - 1 = 0$; $m \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe Δ parallèle au plan (O, \vec{i}, \vec{k}) .

2) Soit la droite $D : \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$

a) D et Δ sont-elles coplanaires ?

b) Trouver une équation du plan contenant D et parallèle à Δ .

3) a) Existe-il un plan P_m parallèle à a droite $(0, \vec{j})$.

b) Soit le point $A \left(\cos^2 \alpha, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \cos \alpha \right)$ avec $\alpha \in [0, \pi]$

Peut-on déterminer α pour que $A \in P_m$?

16

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien.

1) Montrer que l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace.

Vérifiant $(x + 2y - z + 2)^2 + (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$ est une droite D dont on déterminera un vecteur directeur.

2) Démontrer que l'ensemble des points $M(x, y, z)$

Vérifiant $(x + 2y - z + 2)^2 - (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$ est la réunion de 2 plans. P et Q dont-on donnera les équations cartésienne.

Prouver $D = P \cap Q$

3) A tout $m \in \mathbb{R}$, on associe le plan P_m d'équation cartésienne :

$$P_m : (1 + 3m)x + (2 + m)y + (2m - 1)z + 2 - m = 0.$$

Montrer que tout plan P_m contiennent D .

Tout plan contenant D est-il un plan P_m ?

17

L'espace étant rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites D et D' de représentation paramétriques :

$$D : \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -2 + 3\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1) Déterminer la position de D et D'.
 - 2) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant A(0,-1,2) et parallèle à D et à D'.
 - 3) le plan $P_m : (-m + 1)x + 2(m + 2)y - (m + 1)z + 1 = 0$.
Montrer que tous les P_m contiennent une droite fixe Δ .
 - 4) Déterminer $P_2 \cap P$.
 - 5) a) Déterminer m pour que D soit parallèle à P_m .
b) Dans le cas où D n'est pas parallèle à P_m .
Déterminer les coordonnées du point I_m d'intersection de D et P_m .
- * De l'exercices 18 jusqu'à 28 Les repères sont orthonormés.**

18

Soit S la sphère de centre A(1,-2,0) de rayon $\sqrt{14}$.

Soit P_m l'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation :

$x - 2y + 2z + m = 0$ ou m est un paramètre réel.

- a) Montrer que P_m est un plan pour tout valeur de m.
- b) Calculer en fonction de m la distance de A à P_m .
- c) Discuter selon les valeurs de m la position de S et P_m .
- d) Pour $m = 4$, déterminer $S \cap P_m$.

19

Soit la sphère S : $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0$.

Soit D la droite passant par A(3, -3, 1) et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la droite est tangente à la sphère S.

20

Soit A et B deux points distincts de l'espace tel que : $AB = a$ et I désigne le milieu de [AB].

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

- a) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = k (k \in \mathbb{R})$
- b) $\frac{MA}{MB} = 2$.

21

Soient A(0,4, -1) ; B(-2,4,-5) ; C(1, 1, -5) et D(1,0, -4).

- a) Déterminer une équation du plan médiateur de [AB].
- b) Déterminer le centre et le rayon de la sphère S passant par les 4 points A, B, C et D.
- c) le plan Q : $x + y + z - 1 = 0$ est il sécant à la sphère ?

Quel est le rayon du cercle d'intersection de S et Q ?

22

Soient $A(6, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$ et $C(0, 0, 6)$.

- Déterminer les coordonnées de G tel que $\overline{OG} + 2\overline{AG} + 3\overline{BG} = \vec{0}$.
- déterminer l'ensemble S des points M de l'espace définis par $(\overline{MO} + 2\overline{MA} + 3\overline{MB}) \cdot \overline{MC} = 0$.
- Soit P le plan d'équation $3x + 4y + \frac{17}{2}z = 0$. Déterminer la distance du centre I de S à P. Que peut-on en déduire pour S et P ?

23

Soit A et B deux points distincts tel que $AB = a$; ($a > 0$).

- Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 = k$. (k un réel positif).
- Traiter analytiquement ce problème lorsque $A(1, -5, 2)$ et $B(-2, 1, 2)$.

24

Soient les points $A(4, 0, 0)$ et $B(0, 0, 4)$ et $C(0, 4, 0)$.

- Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
- Ecrire une équation de la sphère S de diamètre [BC].
- Soit I est le milieu [AC], vérifier que $I \in S$.
- Soit P le plan perpendiculaire à (BC) passant par I.
Ecrire une équation cartésienne de P et déterminer $S \cap P$.

25

Soit la famille des sphère S_m , $m \in \mathbb{R}$

$$S_m: x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0.$$

- Déterminer le centre ω_m et le rayon R_m .
- Quelle est l'ensemble des points ω_m quand m varie dans \mathbb{R} ?
- Montrer qu'il existe un cercle $\zeta(\Omega, r)$ tel que pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\zeta \subset S_m$.
- Démontrer que pour tout point M_0 n'appartenant pas au plan du cercle ζ il existe une sphère S_m et une seule passant par M_0 .
- Démontrer qu'il existe deux sphère S_m tangentes au plan $Q: z = 0$.

26

$A(1, 1, 3)$ et $B(3, 5, 1)$.

- Soit Q le plan médiateur de [AB]. Donner une équation cartésienne de Q
- A tout réel m, on associe le plan P_m d'équation :
$$P_m: (m+2)x - (m+1)y - mz + 3m - 1 = 0.$$
 - Déterminer l'ensemble E_1 des réels m tels que P_m et Q sont parallèles.
 - Déterminer l'ensemble E_2 des réels m tels que P_m et Q sont perpendiculaires.

$$3) \text{ Soient } S = \left\{ M(x, y, z) \in \xi / x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - \frac{5}{2} = 0 \right\}.$$

- Montrer que S est une sphère dont-on précisera le centre I et le rayon.
- Déterminer suivants les valeurs de m , les positions de plan P_m et de la sphère S .
- Déterminer $P_1 \cap S$.

27

Soient P et Q les plans d'équations : $P : x + 2y - 2 = 0$
 et $Q : 2x + z - 8 = 0$.

- Montrer que P et Q sont sécants et donner la représentation paramétrique de $\Delta = P \cap Q$.
- On considère S_m l'ensemble points de l'espace E tel que :
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2y + 2(2m - 3)z - 12m + 1 = 0$.
 - Montrer que S_m est une sphère pour tout réel m . Préciser son centre I_m et son rayon.
 - Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m vraie dans \mathbb{R} .
- Montrer que S_0 et Q sont sécants et déterminer leurs intersection.
 - Déterminer $S_0 \cap \Delta$.

28

Soient $A(1, -2, 3)$; $B(-2, 1, -8)$ et $C(0, 0, -2)$.

- Montrer que l'ensemble P des points M de l'espace vérifiant :
 $MA^2 - MC^2 = 10$ est un plan orthogonal à (AC) .
- Soit la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 2z = 0$
 Montrer $S \cap P$ est un cercle dont-on précisera le centre et le rayon.
- Soit le point G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 - Déterminer les coordonnées de G .
 - Donner une équation cartésienne du plan Q tangent à S en G .
- Donner une représentation paramétrique de Δ , la droite d'intersection de P et Q puis préciser $S \cap \Delta$

CORRIGES

$$\nabla_1 \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC} + \beta \overrightarrow{AD}$

$$\begin{cases} -1 = -\beta \\ 3 = 2\alpha + 2\beta \\ -2 = -2\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ -2 = -2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = -2 \text{ vrai} \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ par suite les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD}

sont coplanaires.

2) a) Soit $M(x, y, z) \in (AB)$ signifie qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$ or

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \\ z-4 \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = -3 + 3\alpha \\ z = 4 - 2\alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ est une représentation}$$

paramétrique de la droite (AB) . Supposons que: $O(0,0,0) \in (AB)$ signifie que :

$$\begin{cases} 0 = 2 - \alpha \\ 0 = -3 + 3\alpha \\ 0 = 4 - 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ impossible donc } O(0,0,0) \notin (AB).$$

b) on a: $O \in P$ et $(AB) \subset P$ avec $O \notin (AB)$ d'où $P(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Soit

$M(x, y, z) \in P$ signifie qu'il existe $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda + \beta & (1) \\ y = -3\lambda & (2) \\ z = 4\lambda + 2\beta & (3) \end{cases} \text{ avec } (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

L'équation (2) donne $y = -3\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{-y}{3}$ en remplaçant dans (1) on obtient

$x = -\frac{2}{3}y + \beta \Leftrightarrow \beta = x + \frac{2}{3}y$. En remplaçons λ et β dans (3) on obtient:

$$z = -\frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y \Leftrightarrow 2x - z = 0. \text{ donc l'équation cartésienne du plan P}$$

est : $2x - z = 0$.

2 Dans le repère $R : (\vec{B}, \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD})$ on a :

$B(0,0,0)$; $A(1,0,0)$; $C(0,1,0)$ et $D(0,0,1)$

$$1) \text{ Soit } P(x,y,z); 2\vec{PA} + \vec{PB} \begin{pmatrix} 2(1-x) - x \\ -2y - y \\ -2z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 2 \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix}$$

$$2\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2 = 0 \\ -3y = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ d'où } P\left(\frac{2}{3}, 0, 0\right)_R$$

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{GB} + \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BG} = \frac{1}{4}(\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD}) \text{ d'où } G\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)_R$$

2) Soit $M(x,y,z) \in (PG)$ signifie qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{PM} = \alpha \vec{PG}$ or

$$\vec{PG} \begin{pmatrix} \frac{-5}{12} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{5}{12}\alpha \\ y = \frac{1}{4}\alpha \\ z = \frac{1}{4}\alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} ;$$

est une représentation paramétrique de la droite (PG) .

$Q = (BCD)$ donc $Q(\vec{B}, \vec{BC}, \vec{BD})$. Soit $M(x,y,z) \in Q$ signifie qu'il existe

$$(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \vec{BM} = \lambda \vec{BC} + \beta \vec{BD} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \beta \end{cases} \text{ donc une équation}$$

cartésienne du plan Q est : $x=0$.

$$3) \text{ Soit } K(x,y,z) \in (PG) \cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{5}{12}\alpha \\ y = \frac{1}{4}\alpha \\ z = \frac{1}{4}\alpha \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{5}{12}\alpha = 0 \\ y = \frac{1}{4}\alpha \\ z = \frac{1}{4}\alpha \end{cases}$$

La première équation donne $\alpha = \frac{8}{5}$ d'où $y = \frac{2}{5}$, $z = \frac{2}{5}$

$$\text{donc } (PG) \cap Q = \left\{ K\left(0, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) \right\}.$$

4) (MLN) est un plan si est seulement si les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{ML} ne sont pas colinéaires. Montrons que \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{ML} ne sont pas colinéaires:

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \left| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

donc \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{ML} ne sont pas colinéaires et par suite (MNL) est un plan .

Soit $E(x,y,z) \in (MNL)$ signifie qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{tel que } \overrightarrow{EM} = \alpha \overrightarrow{MN} + \beta \overrightarrow{ML} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha + \beta & (1) \\ y = 1 + \alpha - 2\beta & (2) \\ z = -1 + 2\beta & (3) \end{cases}; \text{ l'équation (3) donne}$$

$\beta = \frac{z+1}{2}$, en remplaçant dans (2) on obtient: $\alpha = y + z$ et on remplace dans (1)

α et β par leur expression: $x = 1 - y - z + \frac{z+1}{2}$ d'où :

$2x + 2y + z - 3 = 0$ donc l'équation cartésienne du plan P est: $2x + 2y + z - 3 = 0$.

$$5) \text{ Soit } M(x,y,z) \in P \cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

est une équation cartésienne d'une droite D, donc P et Q sont sécants et on a $P \cap Q = D$.

Déterminons une représentation paramétrique de la droite D.

Posons $y = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ d'où $z = 3 - 2\alpha$

et par suite D: $\begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=3-2\alpha \end{cases}$ donc $P \cap Q$ est la droite passant par $I(0,0,3)$ et de

vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.



1) Soit $A(1,1,-1)$; $B(m,2,m)$; $C(1,2,-4)$

A, B et C ne soient pas alignés si et seulement si \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} m-1 \\ 1 \\ m+1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires si et seulement si

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ m+1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=1 \\ -3-m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-4 \end{cases} \text{ impossible}$$

donc \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires pour tout $m \in \mathbb{R}$.

Par suite A, B et C ne soient pas alignés pour tout $m \in \mathbb{R}$.

2) a) on a A, B et $C \in P_m$ et A, B et C ne soient pas alignés pour tout $m \in \mathbb{R}$ donc

$P_m(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

Soit $M(x, y, z) \in P_m$ signifie qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{tel que } \vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha(m-1) & (1) \\ y = 1 + \alpha + \beta & (2) \\ z = -1 + \alpha(m+1) - 3\beta & (3) \end{cases}$$

l'équation (1) donne $\alpha(m-1) = x-1$.

1^{er} cas si $m \neq 1$, $\alpha = \frac{x-1}{m-1}$ et $\beta = y-1 - \frac{x-1}{m-1}$.

En remplaçant dans (3): $z = -1 + \frac{(x-1)}{m-1}(m+1) - 3y + 3 + 3 \frac{(x-1)}{m-1}$

$$(m-1)z = -(m-1) + (x-1)(m+1) - 3y(m-1) + 3(m-1) + 3(x-1)$$

$$(m+4)x - 3(m-1)y - (m-1)z + m - 6 = 0$$

Donc si $m \neq 1$, l'équation cartésienne du plan P_m est:
 $(m+4)x - 3(m-1)y - (m-1)z + m - 6 = 0$.

$$\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas:}} \text{ Si } m = 1 \text{ on a: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = -1 + 2\alpha - 3\beta \end{cases}$$

Donc l'équation cartésienne de P_1 est: $x=1$.

En remplaçant dans P_m : $(m+4)x - 3(m-1)y - (m-1)z + m - 6 = 0$ m par 1 on trouve P_1 :
 $5x - 5 = 0 \Leftrightarrow P_1: x = 1$.

Donc pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m : $(m+4)x - 3(m-1)y - (m-1)z + m - 6 = 0$

b) Soit $M(x, y, z) \in P_m$ signifie que :

$$(m+4)x - 3(m-1)y - (m-1)z + m - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow mx + 4x - 3my + 3y - mz + z + m - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m[x - 3y - z + 1] + 4x + 3y + z - 6 = 0$$

est vrai pour tout $m \in \mathbb{R}$ si est seulement si $\begin{cases} x - 3y - z + 1 = 0 \\ 4x + 3y + z - 6 = 0 \end{cases}$

$$\text{On pose } z = \alpha, \begin{cases} x - 3y = \alpha - 1 & (1) \\ 4x + 3y = 6 - \alpha & (2) \end{cases}$$

(1)+(2) donne $5x = 5 \Leftrightarrow x=1$, en remplaçant dans (1) on trouve:

$$y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\alpha \text{ d'ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique d'une droite D passant par $I\left(1, \frac{2}{3}, 0\right)$ et

$$\text{de vecteur directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc tous les P_m contiennent une droite fixe D définie précédemment.

$$\nabla \text{ Soit } M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} \\ \frac{z+2}{5} = \frac{y-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-9=2y-2 \\ 3z+6=5y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y + \frac{7}{3} \\ z = \frac{5}{3}y - \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}\beta + \frac{7}{3} \\ y = \beta \\ z = \frac{5}{3}\beta - \frac{11}{3} \end{cases} \text{ d'ou } D : \begin{cases} x = \frac{2}{3}\beta + \frac{7}{3} \\ y = \beta \\ z = \frac{5}{3}\beta - \frac{11}{3} \end{cases} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R} \text{ Et par suite l'ensemble } D \text{ est}$$

la droite passant par $A\left(\frac{7}{3}, 0, -\frac{11}{3}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

$$\text{Soit } M(x,y,z) \in D' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{4} = \frac{y+3}{3} \\ z+1 = \frac{y+3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6 = 4y+12 \\ 3z+3 = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}y+2 \\ z = \frac{1}{3}y \end{cases}$$

on pose : $y = \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}\alpha + 2 \\ y = \alpha \\ z = \frac{1}{3}\alpha \end{cases} \text{ d'ou } D' : \begin{cases} x = \frac{4}{3}\alpha + 2 \\ y = \alpha \\ z = \frac{1}{3}\alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} ;$$

par suite l'ensemble D' est la droite passant par $B(2,0,0)$ et de vecteur directeur

$$\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \neq 0 \text{ donc } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

$$\text{Soit } M(x,y,z) \in D' \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}\alpha + 2 = \frac{2}{3}\beta + \frac{7}{3} & (1) \\ y = \beta = \alpha & (2) \\ z = \frac{1}{3}\alpha = \frac{5}{3}\beta - \frac{11}{3} & (3) \end{cases}$$

D'après (2) $\alpha = \beta$ en remplaçant dans (1) on obtient:

$$4\beta + 6 = 2\beta + 7 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2} = \alpha \text{ en remplaçant dans (3):}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{5}{6} - \frac{11}{3} = -\frac{17}{6} \text{ impossible.}$$

Donc $D' \cap D = \emptyset$ et \vec{u} et \vec{v} non colinéaires donc D et D' ne sont pas coplanaires.

3) $D // P$ et $D' // P$ alors \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs directeurs de P non colinéaires. Par suite $P = (A, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M(x, y, z) \in P$ signifie qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{u} \text{ d'où } P : \begin{cases} x = \frac{2}{3}\beta + 4\alpha + 1 & (1) \\ y = \beta + 3\alpha - 1 & (2) \\ z = \frac{5}{3}\beta + \alpha + 3 & (3) \end{cases} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$(1) - (2) - (3) \Leftrightarrow x - y - z = -2\beta - 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}(-x + y + z - 1)$$

$$(3) \Leftrightarrow \alpha = z - 3 - \frac{5}{3}\beta = z - 3 - \frac{5}{6}(-x + y + z - 1)$$

$$\text{Et par suite } \alpha = \frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z - \frac{13}{6}$$

$$\text{D'où } y = \frac{1}{2}(-x + y + z - 1) + 3\left(\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z - \frac{13}{6}\right) - 1$$

$$\text{D'où } P: 2x - 2y + z - 8 = 0.$$

$$4) \text{ Soit } M(x, y, z) \in P' \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z - 8 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{On pose } z = \delta \text{ alors } \begin{cases} 2x - 2y = 8 - \delta & (1) \\ x - 2y = 1 - \delta & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \text{ donne } x = 7, \text{ remplaçant dans (2), on obtient: } y = 3 + \frac{1}{2}\delta$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 + \frac{1}{2}\delta \\ z = \delta \end{cases} \text{ avec } \delta \in \mathbb{R},$$

est la représentation paramétrique d'une droite Δ passant par $I(7, 3, 0)$ et de

$$\text{vecteur directeur } \vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } P \cap P' = \Delta.$$

$$\nabla 5 \quad 1) A(1,2,-1)$$

$$D_1: \begin{cases} x=2-4\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=3+2\alpha \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}; \quad D_2: \begin{cases} x=-1-\beta \\ y=2+2\beta \\ z=3-3\beta \end{cases} \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R}.$$

$\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_1 ; $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_2 .

Le plan est définie tel que $A \in P, D_1 // P, D_2 // P$.

$D_1 // P$ et $D_2 // P$ signifie que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs directeurs du plan P donc $P: (A, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $M(x,y,z) \in P$ signifie qu'il existe $(t, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + \gamma\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4t - \gamma + 1 & (1) \\ y = t + 2\gamma + 2 & (2) \\ z = 2t - 3\gamma - 1 & (3) \end{cases} \text{ est une représentation paramétrique}$$

du plan P .

$$2) 2 \times (1) + (2) \text{ donne } 2x + y = -7t + 4 \Leftrightarrow t = \frac{-2x - y + 4}{7}$$

$$(1) \text{ donne } \gamma = -4t - x + 1 = \frac{8x + 4y - 16}{7} - x + 1$$

$$\text{d'où } \gamma = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7}y - \frac{9}{7}.$$

En remplaçant dans (3) t et γ par leur expression on trouve:

$$z = 2 \left(\frac{-2x - y + 4}{7} \right) - 3 \left(\frac{x + 4y - 9}{7} \right) - 1$$

D'où l'équation cartésienne du plan P est: $x + 2y + z - 4 = 0$

3) Etudions la position de D_1 et D_2 :

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 1 = -7 \neq 0 \text{ donc } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires et par suite } D_1$$

et D_2 ne sont pas parallèles.

$$\text{Soit } M(x,y,z) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 4\alpha = -1 - \beta & (1) \\ y = \alpha + 1 = 2 + 2\beta & (2); \\ z = 3 + 2\alpha = 3 - 3\beta & (3) \end{cases}$$

L'équation (1) donne: $\beta = 4\alpha - 3$, en la remplaçant dans (2) on trouve:

$\alpha = 1 + 2(4\alpha - 3) \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{7}$ et par suite $\beta = \frac{20}{7} - 3 = -\frac{1}{7}$, remplaçons dans

(3): $3 + 2\frac{5}{7} = 3 - 3\left(-\frac{1}{7}\right) \Leftrightarrow \frac{10}{7} = \frac{3}{7}$ impossible donc $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ et par suite les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

4) $B_m(m+6, m, m+1)$

$$a) B_m \in D_1 \text{ signifie que } \begin{cases} m+6 = 2-4\alpha \\ m = 1+\alpha \\ m+1 = 3+2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+6 = 2-4(m-1) \\ \alpha = m-1 \\ m+1 = 3+2m-2 \end{cases}$$

d'où $m=0$, donc $B_m \in D_1$ si et seulement si $m=0$.

$$b) \overrightarrow{AB_m} = \begin{pmatrix} m+5 \\ m-2 \\ m+2 \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur de la droite } (AB_m).$$

Soit $M(x, y, z) \in (AB_m)$ signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB_m} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (m+5)\lambda + 1 \\ y = (m-2)\lambda + 2 \\ z = (m+2)\lambda - 1 \end{cases} \text{ est une représentation paramétrique de}$$

la droite (AB_m) .

5) $(AB_m) // D_2$ si et seulement si $\overrightarrow{AB_m}$ et \vec{v} sont colinéaires:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} m+5 & -1 \\ m-2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} m+5 & -1 \\ m+2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} m-2 & 2 \\ m+2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+10+m-2=0 \\ -3m-15+m+2=0 \\ -3m+6-2m-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{8}{3} \\ m = -\frac{13}{2} \\ m = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ impossible}$$

donc pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB_m}$ et \vec{v} ne sont pas colinéaires et par suite les droites (AB_m) et D_2 ne sont pas parallèles $m \in \mathbb{R}$.

$$6) (AB_m) \subset P \text{ si et seulement si } \begin{cases} A \in P \\ \overrightarrow{AB_m} \text{ est un vecteur directeur de } P \end{cases}$$

$A(1, 2, -1) \in P \Leftrightarrow 1+2 \cdot 2-1-4=0$ vrai donc $A \in P$.

\overrightarrow{AB}_m est un vecteur directeur de P si et seulement si :

$$m+5+2m-4+m+2=0 \Leftrightarrow 4m+3=0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$$

d'où pour $m = -\frac{3}{4}$ on a (\overrightarrow{AB}_m) est incluse dans P.

$$\nabla A(m-1, m, m+1); D: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 \end{cases} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$1) A \in D \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = 2 - \lambda \\ m = 1 + \lambda \\ m+1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 - \lambda \\ m = 1 + \lambda \\ m = 2 \end{cases}$$

Donc $A \in D$ si et seulement si $m=2$

2) $A \in P$ et $D \subset P$, soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite D. $D \subset P$ signifie

que \vec{u} est un vecteur de P.

$B(2, 1, 3) \in D$ donc $B \in P$ donc $P = (A, \overrightarrow{AB}, \vec{u})$.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-m \\ 1-m \\ 2-m \end{pmatrix}$ est un vecteur de P. Soit P : $ax + by + cz + d = 0$

$$A \in P \Leftrightarrow (m-1)a + bm + (m+1)c + d = 0 \quad (1)$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur de P} \Leftrightarrow -a + b = 0 \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-m \\ 1-m \\ 2-m \end{pmatrix} \text{ est un vecteur de P} \Leftrightarrow (3-m)a + (1-m)b + (2-m)c = 0 \quad (3)$$

l'équation (2) donne : $a = b$, en remplaçant dans (3) on obtient :

$$(4-2m)b + (2-m)c = 0 \Leftrightarrow c = -2b = -2a \text{ pour } m \neq 2.$$

$$\text{L'équation (1) donne : } (m-1)a + am + (m+1)(-2a) + d = 0$$

$$\text{d'où } d - 3a = 0 \Leftrightarrow d = 3a.$$

Pour $a = 1$, on a : $b = 1$, $c = -2$ et $d = 3$

D'où P : $x + y - 2z + 3 = 0$ est l'équation cartésienne du plan P.

$$3) D_m: \begin{cases} x = -1 + m\gamma \\ y = 1 + (m-1)\gamma \\ z = 1 + m\gamma \end{cases}; \gamma \in \mathbb{R}$$

$\vec{v} \begin{pmatrix} m \\ m-1 \\ m \end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite D_m .

a) Etudions la position des deux droites D et D_m :

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} m & -1 \\ m-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} m & -1 \\ m & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+m-1=0 \\ -m=0 \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ m=0 \end{cases} \text{ impossible}$$

donc pour tout $m \in \mathbb{R}$, \vec{u} et \vec{v} ne sont pas coplanaires et par suite D et D_m ne sont pas parallèles.

$$\text{Soit } M(x, y, z) \in D \cap D_m \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-\lambda=-1+m\gamma & (1) \\ y=1+\lambda=1+(m-1)\gamma & (2) \\ z=3=1+m\gamma & (3) \end{cases}$$

$$(1) - (3) \text{ donne } -1-\lambda=-2 \Leftrightarrow \lambda=1.$$

$$(1) \text{ donne } 1=-1+m\gamma \Leftrightarrow m\gamma=2. \text{ Si } m \neq 0, m\gamma=2 \Leftrightarrow \gamma=\frac{2}{m}.$$

$$(2) \text{ donne } 2=1+(m-1)\cdot\frac{2}{m} \Leftrightarrow m=2(m-1) \Leftrightarrow m=2 \text{ or } m \neq 2 \text{ donc } m=0$$

et on la remplace dans (3) on trouve que $3=1$ impossible donc $D \cap D_m = \emptyset$ et par suite D et D_m ne sont pas coplanaires.

b) $D_m \subset Q_m$ alors \vec{v} est un vecteur de Q_m et $C(-1, 1, 1) \in D_m \subset Q_m$.

$D \parallel Q_m$ alors \vec{u} est un vecteur de Q_m par suite $Q_m \left(C, \vec{u}, \vec{v} \right)$.

$$Q_m : ax + by + cz + d = 0.$$

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ deux vecteurs de } Q_m \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ ma + (m-1)b + mc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ (2m-1)a + mc = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = a \text{ et } c = \frac{1-2m}{m}a \text{ si } m \neq 0.$$

$$C \in Q_m \Leftrightarrow -a + b + c + d = 0 \text{ d'ou } d = -c = \frac{2m-1}{m}a$$

$$\text{d'ou } Q_m : ax + ay + \frac{1-2m}{m}az + \frac{2m-1}{m}a = 0.$$

$$\text{Ou encore } Q_m : x + y + \frac{1-2m}{m}z + \frac{2m-1}{m} = 0.$$

c) On a ; $A(m-1, m, m+1)$

$$* (m-1) + m + \frac{1-2m}{m}(m+1) + \frac{2m-1}{m} = (2m-1) \left[1 - \frac{m}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right] = 0$$

donc $A \in Q_m$.

* $(m-1) + m - 2(m+1) + 3 = 2m - 1 - 2m - 2 + 3 = 0$ donc $A \in P$.

On conclut que $A \in P \cap Q_m$ et que $P \cap Q_m = \Delta$ est une droite.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \frac{1-2m}{m}z + \frac{2m-1}{m} = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

on pose $y = \alpha$, le système devient $\begin{cases} x + \frac{1-2m}{m}z = \frac{1-2m}{m} - \alpha & (1) \\ x - 2z = -\alpha - 3 & (2) \end{cases}$

(1) - (2) donne :

$$\left(\frac{1-2m}{m} + 2\right)z = \frac{1-2m}{m} - \alpha + \alpha + 3 \Leftrightarrow z = 1 + m$$

donc $x = -\alpha - 3 + 2z = -\alpha - 3 + 2 + 2m = -\alpha - 1 + 2m$.

Finalement $\Delta : \begin{cases} x = -\alpha - 1 + 2m \\ y = \alpha \\ z = 1 + m \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$.

7 $(m+1)x + (2m-1)y + (m-1)z + 2 + m = 0$

$$\Leftrightarrow m(x + 2y + z + 1) + x - y - z + 2 = 0$$

l'équation est vraie pour tout $m \in \mathbb{R}$ donc elle est équivalente à :

$$\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \text{ on pose } y = \alpha \text{ le système devient } \begin{cases} x + z = -1 - 2\alpha \\ x - z = \alpha - 2 \end{cases}$$

on additionne membre à membre $2x = -3 - \alpha$ d'où $x = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}$

et $z = -1 - 2\alpha + \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\right)$ donc $z = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}$

Le système équivaut à $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2} \\ y = \alpha \\ z = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$

C'est une représentation paramétrique d'une droite D de vecteur directeur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ et passe par le point de coordonnées } \left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Donc tous les plans P_m passent par la droite D .

$$2) \text{ Soit } M \in (x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2} \\ y = \alpha \\ z = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) + 2\alpha + \left(-\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right) + 1 = 2\alpha - 2\alpha - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

donc $M \in Q$ par suite $D \subset Q$.

3) $D \subset Q$, Q est-il un plan P_m , c'est à dire existe-t-il m_0 tel que $Q = P_{m_0}$.

On a $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $1 + 2(-1) + 1 = 0$ alors \vec{v} est un vecteur de Q donc de

$$P_{m_0} \Leftrightarrow (m_0 + 1) - (2m_0 - 1) + (m_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ impossible}$$

donc il n'existe pas un réel m_0 tel que $Q = P_{m_0}$.

On conclut que : Q contient D et n'est pas un plan P_m .

d'où tout plan contenant D n'est un plan P_m .

$$4) A \in P_m \Leftrightarrow (m+1)\cos t + (m-1)\sin t + 2 + m = 0 \\ \Leftrightarrow m(\cos t + \sin t + 1) + \cos t - \sin t + 2 = 0$$

$$\text{Si } \cos t + \sin t + 1 \neq 0 \text{ alors } m = \frac{-\cos t + \sin t - 2}{\cos t + \sin t + 1}.$$

$$\nabla 8) 1) D_a : \begin{cases} x - y + a - 1 = 0 \\ -3y + z + 1 + 3a = 0 \end{cases} \text{ ou } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{on pose } y = \alpha \text{ d'où } D_a : \begin{cases} x = \alpha - a + 1 \\ y = \alpha \\ z = 3\alpha - 1 - 3a \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_a .

2) D_a est parallèle à P_m alors \vec{u} est un vecteur de P_m .

$$\Leftrightarrow m + (3m - 2) - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}.$$

* 1^{ère} cas : $m = \frac{5}{4}$ alors $D_a \parallel P_m$

$$\text{Soit } A(-a + 1, 0, -1 - 3a) \in D_a, A \in P_{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \frac{5}{4}(-a + 1) + 1 + 3a + 2 - \frac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4}a = -3 \Leftrightarrow a = -\frac{12}{7}.$$

Si $a = \frac{12}{7}$ comme $D_a // P_m$ et $A \in D \cap P_m$ alors $D_a \cap P_m = D_a$

Si $a \neq \frac{12}{7}$ comme $D_a // P_m$ et $(A \in D \text{ et } A \notin P_m)$ donc $D_a \cap P_m = \emptyset$

* 2^{ème} cas : $m \neq \frac{5}{4}$ alors D_a est sécante à P_m donc $D_a \cap P_m = \{E\}$.

$$E \in D_a \cap P_m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - a + 1 \\ y = \alpha \\ z = 3\alpha - 1 - 3a \end{cases} \text{ et } mx + (3m - 2)y - z - m + 2 = 0$$

on obtient : $m(\alpha - a + 1) + (3m - 2)\alpha - 3\alpha + 1 + 3a - m + 2 = 0$

$$\alpha(m + 3m - 2 - 3) - a m + 3 + 3a = 0$$

$$\alpha(4m - 5) - ma + 3 + 3a = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{ma - 3 - 3a}{4m - 5}$$

$$\text{d'où } E \left(\frac{ma - 3 - 3a}{4m - 5} - a + 1, \frac{ma - 3 - 3a}{4m - 5}, \frac{3ma - 9 - 9a}{4m - 5} - 1 - 3a \right)$$

3) Soit $M(x, y, z) \in P_m \Leftrightarrow mx + (3m - 2)y - z - m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow m(x + 3y - 1) - 2y - z + 2 = 0$ l'équation est vraie pour tout $m \in \mathbb{R}$.

$$\text{Donc } \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ -2y - z + 2 = 0 \end{cases} \text{ on pose } y = \beta \text{ d'où } \begin{cases} x = -3\beta + 1 \\ y = \beta \\ z = -2\beta + 2 \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

C'est une représentation paramétrique d'une droite Δ de vecteur directeur

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est passe par le point } B(1, 0, 2).$$

$$4) \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ comme } \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$$

alors \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires.

Δ et D_a incluse dans $Q \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont deux vecteurs de Q et $B \in Q$.

$$M \in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$$\text{d'où } Q : \begin{cases} x = \alpha - 3\beta + 1 & (1) \\ y = \alpha + \beta & (2) \\ z = 3\alpha - 2\beta + 2 & (3) \end{cases} (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$(1) - (2) \text{ donne : } x - y = -4\beta + 1 \text{ d'où } \beta = \frac{-x + y + 1}{4}$$

(2) donne $\alpha = y - \beta = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}$; on remplace dans (3) on obtient :

$$z = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}y - \frac{3}{4} + \frac{2x}{4} - \frac{2y}{4} - \frac{2}{4} + 2 ; \text{ d'où : } Q: 5x + 7y - 4z + 3 = 0.$$



a) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal de P. $\vec{N} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ un vecteur normal de P'.

On remarque $\vec{N} = -3\vec{n}$ donc \vec{N} et \vec{n} sont colinéaires par suite les plans sont parallèles.

b) $\Delta \perp P$ donc \vec{n} est un vecteur directeur de Δ

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\text{d'où une représentation paramétrique de } \Delta \text{ est : } \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha - 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$



a) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P, $\vec{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P'

$$\vec{n} \cdot \vec{N} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{N} \text{ d'où } P \perp P'.$$

b) $5 + 3 - 8 = 8 - 8 = 0$ donc $A \in P'$

$$d(A, P) = \frac{|2 \cdot (-1) - 5 + 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$



1) $M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{U}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \alpha + 2 \\ y = 2\alpha - 3 \\ z = 3\alpha + 4 \end{cases} \text{ d'où } D : \begin{cases} x = -\alpha + 2 \\ y = 2\alpha - 3 \\ z = 3\alpha + 4 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

2) $P \perp D$ donc \vec{U} est un vecteur normal de P.

$$\text{d'où } P : -x + 2y + 3z + d = 0$$

$$B \in P \Leftrightarrow -(-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -11$$

$$\text{Par suite } P : -x + 2y + 3z - 11 = 0.$$

3) a) H est le projeté orthogonal de A sur P alors $(AH) \perp P$ d'où \overline{AH} et \overline{U} sont

$$\text{colinéaires donc il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overline{AH} = \alpha \cdot \overline{U} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\alpha + 2 \\ y_H = 2\alpha - 3 \\ z_H = 3\alpha + 4 \end{cases}$$

$$H \in P \Leftrightarrow -x_H + 2y_H + 3z_H - 11 = 0.$$

En remplaçant x_H , y_H et z_H par leur valeur on obtient :

$$\alpha - 2 + 4\alpha - 6 + 9\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow 14\alpha = 7 \Leftrightarrow \alpha = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \text{ par suite } H\left(\frac{3}{2}; -2; \frac{11}{2}\right)$$

$$b) d(A, P) = \frac{|-2 - 6 + 12 - 11|}{\sqrt{1 + 2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

4) a) D une droite perpendiculaire à P en H alors tout point du plan P se projette orthogonalement sur D en H donc le projeté de B sur D est H.

$$b) d(B, D) = BH = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 3\right)^2 + (-2 - 1)^2 + \left(\frac{11}{2} - 2\right)^2} = \frac{\sqrt{166}}{2}.$$



1) $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ est un vecteur normal de P donc $P : 2x + y - z + d = 0$.

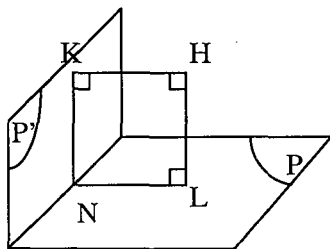
$A \in P \Leftrightarrow 2 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$ par suite $P : 2x + y - z - 1 = 0$.

2) a) $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P' et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P.

$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 - 1 - 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{n}'$ d'où $P \perp P'$

$$b) d(H, P) = \frac{|1 + 3 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = d$$

$$d(H, P') = \frac{|-1 - 3 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = d'.$$



Soit K le projeté orthogonal de H sur P'

et L le projeté orthogonal de H sur P

et N le projeté orthogonal de H sur D.

$$\text{On a : } \left. \begin{array}{l} (HL) \perp P \\ (NL) \subset P \end{array} \right\} \Rightarrow (HL) \perp (LN) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} (HK) \perp P' \\ (KN) \subset P' \end{array} \right\} \Rightarrow (HK) \perp (KN) \quad (2)$$

On a : $(HL) \perp P$ et $(HK) \perp P'$ donc \overline{HL} est le vecteur normal de P

et \overline{HK} est un vecteur normal de P' comme $P \perp P'$ alors $\overline{HK} \perp \overline{HL}$
 d'où $(HK) \perp (HL)$ (3) donc (1), (2) et (3) entraîne que $KHLN$ est un rectangle.

D'après Pythagore dans le triangle HLN on a : $HL^2 + LN^2 = HN^2$

or $HL = d(H, P)$ et $LN = HK = d(H, P')$ par suite $HN = \sqrt{d^2 + d'^2} = \sqrt{\frac{17}{6}}$.

$$3) a) M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{On pose } z = \alpha ; \begin{cases} x - y = -\alpha - 2 & (*) \\ 2x + y = \alpha + 1 & (**) \end{cases}$$

$$(*) + (**) \text{ donne } 3x = -1 \text{ donc } x = -\frac{1}{3}$$

$$(*) y = \alpha + 2 - \frac{1}{3} = \alpha + \frac{5}{3} \text{ d'où } D : \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \alpha + \frac{5}{3} \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$b) HM^2 = x^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2$$

$$\text{or } M \in D \text{ d'où } HM^2 = \frac{1}{9} + \left(\alpha + \frac{5}{3} - 1\right)^2 + (\alpha + 3)^2$$

$$\text{ou encore } HM^2 = 2\alpha^2 + \frac{22}{3}\alpha + \frac{86}{9}. \text{ On pose } f(x) = 2x^2 + \frac{22}{3}x + \frac{86}{9}$$

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, f'(x) = 4x + \frac{22}{3} \text{ alors } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}$$

x	$-\infty$	$-\frac{11}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘		↗

$$HM \text{ est minimal pour } \alpha = -\frac{11}{6} \text{ par suite } M\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{11}{6}\right).$$

$$\nabla 13 \quad 1) * \vec{U} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$$

donc \vec{U} et \vec{V} sont non colinéaires.

$$* D_1 : \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = \alpha + 2 \\ z = 4\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}; D_2 : \begin{cases} x = \beta \\ y = 2\beta + 2 \\ z = 5\beta + 1 \end{cases}; \beta \in \mathbb{R}$$

$$M \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta = 2\alpha + 1 \\ y = 2\beta + 2 = \alpha + 2 \\ z = 5\beta + 1 = 4\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha + 1 \\ 2\beta + 2 = \alpha + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4\beta + 1 \\ 2\beta = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{3} \\ \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{On a : } 5\beta + 1 = 4\alpha \cdot -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \text{ impossible}$$

Donc $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ et comme \vec{U} et \vec{V} sont non colinéaires alors D_1 et D_2 sont non coplanaires.

2) $D_1 \subset P \Leftrightarrow A \in P$ et \vec{U} est un vecteur directeur de P

$D_2 // P \Leftrightarrow \vec{V}$ est un vecteur directeur de P .

Soit \vec{n} un vecteur normal de P , $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\vec{n} \perp \vec{U} \text{ et } \vec{n} \perp \vec{V} \Leftrightarrow 2a + b + 4c = 0 (*) \text{ et } a + 2b + 5c = 0 (**)$$

$$(*) - 2(**) \Leftrightarrow 2a + b + 4c - 2a - 4b - 10c = 0 \Leftrightarrow b = -2c \text{ d'où } a = -c.$$

$$A \in P \Leftrightarrow a + 2b + d = 0 \Leftrightarrow d = 5c$$

$$\text{D'où } P : -cx - 2cy + zc + 5c = 0 \text{ ou encore } P : -x - 2y + z + 5 = 0.$$

3) $Q \perp P \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$ avec \vec{n}' est vecteur normal de P'

$$\text{et } \vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de } P.$$

$D_2 \subset Q \Leftrightarrow B \in Q$ et \vec{V} vecteur directeur de Q .

$$\vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow -a - 2b + c = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n}' \perp \vec{V} \Leftrightarrow a + 2b + 5c = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow c = 0 ; a = -2b$$

$$B \in Q \Leftrightarrow 2b + c + d = 0 \text{ or } c = 0 \Rightarrow d = -2b.$$

$$Q : -2bx + by + 0 \cdot z - 2b = 0$$

$$Q : -2x + y - 2 = 0.$$

$$4) I(x, y, z) \in D_1 \cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = \alpha + 2 \\ z = 4\alpha \\ -2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$-2x + y - 2 = 0$ on remplace x et y par leur valeur

$$-4\alpha - 2 + \alpha + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{2}{3} \text{ d'où } I\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right).$$

$$5) a) \Delta \perp P \Leftrightarrow \vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta$$

$$M(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \text{il existe } \gamma \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \overline{IM} = \gamma \cdot \vec{n}$$

$$D'ou \Delta : \begin{cases} x = -\gamma - \frac{1}{3} \\ y = -2\gamma + \frac{4}{3} \\ z = \gamma - \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \beta = -\frac{1}{3} - \gamma \quad (1) \end{cases}$$

$$b) J \in \Delta \cap D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 2\beta = \frac{4}{3} - 2\gamma \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 5\beta + 1 = -\frac{8}{3} + \gamma \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta - \frac{1}{3} - \gamma \quad (1) ; \text{ on remplace dans (2) on obtient} \\ 2 + 2\left(-\frac{1}{3} - \gamma\right) = \frac{4}{3} - 2\gamma \quad (2) \end{cases}$$

On remplace dans (3) : $5\left(-\frac{1}{3}-\gamma\right)+1=-\frac{8}{3}+\gamma$

$$-\frac{2}{3}-5\gamma=-\frac{8}{3}+\gamma \Leftrightarrow 6\gamma=2 \Leftrightarrow \gamma=\frac{1}{3}$$

D'où $\beta=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$ donc $J\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

$$IJ = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}+\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

14

1) \vec{V} est un vecteur normal de P_m si et seulement si :

$$\vec{V} \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} m-1 \\ 2m-1 \\ m \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ 2 & 2m-1 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 2 & 2m-1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ impossible}$$

donc il n'existe aucune valeur de m .

2) $\vec{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} m-1 \\ 2m-1 \\ m \end{pmatrix}$

$P_m \perp Q$ si et seulement si $\vec{N} \perp \vec{n} \Leftrightarrow m-1+4m-2-m+0 \Leftrightarrow m=\frac{3}{4}$.

3) D : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z+2$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} \Leftrightarrow (x-1)=2(y+2) \Leftrightarrow 3x-2y-7=0$$

$$\frac{y+2}{3} = z+2 \Leftrightarrow y-3z-4=0$$

$$D: \begin{cases} 3x-2y-7=0 \\ y=-3z-4=0 \end{cases}$$

On pose $y = \alpha$ d'où $3x = 2\alpha + 7$ et $3z = \alpha - 4$ par suite D :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}\alpha + \frac{7}{3} \\ y = \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \frac{1}{3}\alpha - \frac{4}{3} \end{cases}$$

c'est la représentation paramétrique de la droite D de vecteur directeur $\vec{U} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$P_m \perp D \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{n} sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & m-1 \\ 1 & 2m-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2m-1 \\ \frac{1}{3} & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & m-1 \\ \frac{1}{3} & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

15 $1) 2x - 3my + 2z + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m(-3y + 1) + 2x + 2z - 1 = 0$ vraies pour tout réel m , donc l'équation est

équivalente à $\begin{cases} -3y+1=0 \\ 2x+2z-1=0 \end{cases} \quad (1).$

On pose $x = \alpha$ alors $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\alpha + \frac{1}{2} \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

c'est la représentation paramétrique d'une droite Δ passant par le point

$I \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le plan $(O, \vec{i}, \vec{k}) : y = 0$ donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur normal de (O, \vec{i}, \vec{k})

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc $(O, \vec{i}, \vec{k}) // \Delta$

2) a) D : $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$

on pose $y = \beta$ d'où $\begin{cases} x = 2\beta - 1 \\ y = \beta \\ z = \beta + 1 \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$, c'est une représentation paramétrique

de D , de vecteur directeur $\vec{V} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par $K(-1, 0, 1)$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc \vec{U} et \vec{V} sont non colinéaires.

$$M \in D \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\beta - 1 = \alpha & (1) \\ y = \beta = \frac{1}{3} & (2) \\ z = \beta + 1 = -\alpha + \frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \beta = \frac{1}{3} \text{ donc } (1) \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$$

Vérifions dans (3) : $\frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ impossible d'où $D \cap \Delta = \emptyset$

$D \cap \Delta = \emptyset$ et (\vec{U} et \vec{V} non colinéaires) donc D et Δ sont non coplanaires.

b) Soit Q le plan contenant D et parallèle à Δ alors $\vec{K} \in Q$ et \vec{V} et \vec{U} sont des vecteurs directeurs de Q .

$$\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } Q \text{ donc } \vec{N} \cdot \vec{V} = 0 \text{ et } \vec{N} \cdot \vec{U} = 0$$

$$\Leftrightarrow a - c = 0 \text{ et } 2a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = c \text{ et } b = -3c$$

$$K \in Q \Leftrightarrow -a + c + d = 0 \Leftrightarrow d = 0 \text{ d'où } Q : cx - 3cy + cz = 0$$

$$\text{par suite } Q : x - 3y + z = 0$$

$$3) \text{ a) Soit } \vec{N} \begin{pmatrix} 2 \\ -3m \\ 2 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P_m ; P_m // (O, \vec{j}) \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{j}$$

$$\Leftrightarrow -3m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ donc le plan } P_0 // (O, \vec{j})$$

$$\text{b) } A \in P_m \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha - m - \cos \alpha + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 = 0$$

$$2 - 1 - 1 = 0 \text{ donc } \cos \alpha = 1 \text{ ou } \cos \alpha = -\frac{1}{2} ; \text{ or } \alpha \in [0, \pi]$$

$$\text{d'où } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\nabla 16 \quad 1) (x + 2y - z + 2)^2 + (3x + y + 2z - 1)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - z + 2 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + y + 2z - 1 = 0$$

$$\text{On pose } z = \alpha \quad \text{on obtient : } x + 2y = \alpha - 2 \quad \text{et} \quad 3x + y = -2\alpha + 1$$

ou encore $x + 2y = \alpha - 2$ et $-6x - 2y = 4\alpha - 2$ on additionne membre à membre on

$$\text{obtient : } -5x = 5\alpha - 4 \quad \text{d'où} \quad x = -\alpha + \frac{4}{5}$$

$$3x + y = -2\alpha + 1 \Leftrightarrow y = -3x - 2\alpha + 1 \quad \text{d'où} \quad y = 3\alpha - \frac{12}{5} - 2\alpha + 1 = \alpha - \frac{7}{5}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \frac{4}{5} \\ y = \alpha - \frac{7}{5} \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

C'est une représentation paramétrique d'une droite D passant par le point

$$I\left(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5}, 0\right) \quad \text{et de vecteur directeur } \overrightarrow{W} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) (x + 2y - z + 2)^2 - (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2y - z + 2 + 3x + y + 2z - 1)(x + 2y - z + 2 - 3x - y - 2z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 3y + z + 1)(-2x + y - 3z + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y + z + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -2x + y - 3z + 3 = 0$$

$4x + 3y + z + 1 = 0$ c'est une équation cartésienne d'un plan de même $-2x + y - 3z + 3 = 0$

d'où l'ensemble recherché est la réunion de deux plans P et Q,

P : $4x + 3y + z + 1 = 0$ et Q : $-2x + y - 3z + 3 = 0$

$$M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 & (1) \\ 3x + y + 2z - 1 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) + (2) \\ (2) - (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou encore} \begin{cases} 4x + 3y + z + 1 = 0 \\ -2x + y - 3z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in P \cap Q \quad \text{donc} \quad P \cap Q = D.$$

3) 1^{ère} méthode :

$$M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \frac{4}{3} \\ y = \alpha - \frac{7}{5} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\left(-\alpha + \frac{4}{3}\right)(1+3m) + \left(\alpha - \frac{7}{5}\right)(2+m) + \alpha(2m-1) + 2 - m = 0 \cdot \alpha + 0 = 0$$

donc $M \in P_m$ pour toute valeur de m d'où $D \subset P_m$.

2^{ème} méthode :

$$(1+3m)x + (2+m)y + (2m-1)z + 2 - m = 0$$

$m(3x + y + 2z - 1) + x + 2y - z + 2 = 0$, l'équation est vraie pour toute valeur de m dans \mathbb{R} , donc l'équation est équivalente à :

$$\begin{cases} 3x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \text{ se sont les équations de P et Q donc c'est une représentation}$$

cartésienne de D d'où $D \subset P_m$.

Soit R le plan passant par I de vecteur directeur \vec{W} et $\vec{V} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1+3m \\ 2+m \\ 2m-1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P_m .

$\vec{V} \cdot \vec{n} = 2(1+3m) - 3(2m-1) = 5 \neq 0$ donc \vec{V} n'est pas un vecteur de P_m

par suite R est un plan contenant D et $R \not\subset P_m$.

donc tout plan contenant D ne peut pas être en général un plan de P_m .



1) D passe par $A(-1, 2, -2)$ de vecteur directeur $\vec{U} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

D' passe par $B(1, 5, 1)$ de vecteur directeur $\vec{V} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

* $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ donc \vec{U} et \vec{V} non colinéaires

D'où D et D' sont non coplanaires ou sécantes

$$* M \in D \subset D' \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2\alpha = 1 + \lambda & (1) \\ y = 2 - \alpha = 5 - \lambda & (2) \\ z = -2 + 3\alpha = 1 - 3\lambda & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 1 - 3\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{5}{3}$$

$$(1) \Rightarrow \lambda = -2 - 2\alpha = -2 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$$

Vérifions dans (3) : $-2 - 5 = 1 - 4$ impossible donc $D \cap D' = \emptyset$.

Conclusion : $D \cap D' = \emptyset$ et \vec{U} et \vec{V} non colinéaires alors D et D' sont non coplanaires.

$$2) \text{ Soit } \vec{N} \text{ vecteur normal de } P, \vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$D // P \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{U} = 0 \Leftrightarrow -2a - b + 3c = 0 \quad (4)$$

$$D' // P \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow a - b - 3c = 0 \quad (5)$$

$$(4) + (5) \Rightarrow -a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b$$

$$(5) \Rightarrow 3c = a - b = -3b \Leftrightarrow c = -b$$

$$A \in P \Leftrightarrow -b + 2c + d = 0 \Leftrightarrow d = b - 2c \text{ d'où } d = 3b$$

$$P : -2bx + by - bz + 3b = 0 \text{ d'où } P : -2x + y - z + 3 = 0$$

$$3) (-m + 1)x + 2(m + 2)y - (m + 1)z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(-x + 2y - z) + x + 4y - z + 1 = 0$$

L'équation est vraie pour tout $m \in \mathbb{R}$ donc elle est équivalente

$$\text{à : } \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x + 4y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

On additionne membre à membre $6y - 2z + 1 = 0$ ou encore $z = 3y + \frac{1}{2}$

on pose $y = \beta$ donc $z = 3\beta + \frac{1}{2}$

$$x = 2y - z = 2y - 3y - \frac{1}{2} = -y - \frac{1}{2} = -\beta - \frac{1}{2}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\beta - \frac{1}{2} \\ y = \beta \\ z = 3\beta + \frac{1}{2} \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$$

C'est une représentation paramétrique d'une droite Δ passant par le point de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ et de vecteur directeur $\overline{W} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$4) M \in P_2 \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z + 3 = 0 \\ -x + 8y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{II}) \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} -6x + 3y - 3z + 9 = 0 \\ -x + 8y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{on pose } y = \delta : (\text{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\delta + \frac{8}{5} \\ y = \delta \\ z = 3\delta - \frac{1}{5} \end{cases} ; \delta \in \mathbb{R}$$

c'est une représentation paramétrique d'une droite Δ' passant par le point

$$H(\frac{8}{5}, 0, -\frac{1}{5}) \text{ de vecteur directeur } \overline{W} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$5) a) D // P_m \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \text{ avec } \vec{n} \begin{pmatrix} -m+1 \\ 2m+4 \\ -m-1 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P_m.$$

$$\Leftrightarrow (-2) \cdot (-m+1) + (-1)(2m+4) + 3(-m-1) = 0 \Leftrightarrow m = -3.$$

$$b) D \text{ et } P_m \text{ sont sécants } \Leftrightarrow m \neq -3$$

$$I_m \in D \cap P_m \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -2 + 3\alpha \\ (-m+1)x + 2(m+2)y - (m+1)z + 1 = 0 \end{cases}$$

On remplace x , y et z par leur valeur dans la 4^{ème} équation on obtient :

$$(-m+1)(-1-2\alpha) + (2m+4)(2-\alpha) - (m+1)(-2+3\alpha) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(-3m-9) = -7m-10 \text{ or } m \neq -3 \text{ d'où } \alpha = \frac{-7m-10}{-3m-9} = \frac{7m+10}{3m+9}$$

$$\text{donc } I_m \left(-\frac{17m+29}{3m+9} ; \frac{-m+8}{3m+9} ; \frac{15m+12}{3m+9} \right).$$



$$a) P_m : x - 2y + 2z + m = 0.$$

$(1, -2, 2) \neq (0, 0, 0)$ donc pour toute valeur de m , P_m est un plan.

$$b) d(A, P_m) = \frac{|1+4+m|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{|5+m|}{\sqrt{9}} = \frac{|5+m|}{3}$$

$$c) d^2 - R^2 = \frac{(5+m)^2}{9} - 14 = \frac{25+m^2+10m}{9} - 14 = \frac{m^2+10m-101}{9}$$

$$\Delta' = 5^2 + 101 = 126 \text{ alors } \sqrt{\Delta'} = 3\sqrt{14}$$

$$m' = -5 - 3\sqrt{14} \text{ ou } m'' = -5 + 3\sqrt{14}$$

m	$-\infty$	m'	m''	$+\infty$	
$d^2 - R^2$	+	\emptyset	-	\emptyset	+

Si $m \in]-\infty, -5 - 3\sqrt{14}[\cup]-5 + 3\sqrt{14}, +\infty[$ alors $d > R$ donc P_m est extérieur à S .

Si $m \in]-5 - 3\sqrt{14}, -5 + 3\sqrt{14}[$ alors $d < R$ donc P_m et S sont sécants.

Si $m = -5 - 3\sqrt{14}$ ou $m = -5 + 3\sqrt{14}$ alors $d = R$ donc P_m est tangente à S .

d) Pour $m = 4$, $4 \in]-5 - 3\sqrt{14}, -5 + 3\sqrt{14}[$ donc P_m est sécant à S .

d'où $S \cap P_m$ est un cercle de centre Ω de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5}$

$\Omega(x, y, z)$ est le projeté orthogonal de A sur P_4 et $\vec{n}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur

normal de plan P_4 alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{A\Omega} = \alpha \vec{n}_4$

$$d'où \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\alpha - 2 \text{ or } \Omega \in P_4 \text{ donc } (\alpha + 1) - 2(-2\alpha - 2) + 2(2\alpha) + 4 = 0 \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = -1$ donc $x = \alpha + 1 = 0$; $y = -2\alpha - 2 = 0$ et $z = -2$ d'où $\Omega(0, 0, -2)$

$P_4 \cap S = \zeta$ cercle de centre $\Omega(0, 0, -2)$ de rayon $\sqrt{5}$

19

$M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \overline{AM} = \alpha \vec{U}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$$D'où D : \begin{cases} x = -2\alpha + 3 \\ y = \alpha - 3 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$N(x, y, z) \in D \cap S \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\alpha + 3 \\ y = \alpha - 3 \quad \text{et } x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases}$$

On remplace x , y et z par leurs valeurs dans l'équation de S , on obtient :

$$(-2\alpha + 3)^2 + (\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1)^2 - (-2\alpha + 3) + 2(\alpha - 3) - 4(2\alpha + 1) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 9(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Donc D est tangente à S en un point $H(1, -2, 3)$.

20 a) $\overline{MA} \cdot \overline{BM} = k \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA}) \cdot (\overline{MI} + \overline{IB}) = k$
 $\Leftrightarrow MI^2 + \overline{IA} \cdot \overline{IB} + \overline{MI} \cdot (\overline{IA} + \overline{IB}) = k$ or $\overline{IA} = -\overline{IB}$
 $\Leftrightarrow MI^2 = k - \overline{IA} \cdot \overline{IB} \Leftrightarrow MI^2 = k + IA^2 = k + \frac{a^2}{4}$

Si $k + \frac{a^2}{4} < 0$ ou encore $k < -\frac{a^2}{4}$ alors l'ensemble recherché est le vide.

Si $k + \frac{a^2}{4} = 0$ ou encore $k = -\frac{a^2}{4}$ alors $MI^2 = 0 \Leftrightarrow M = I$

donc l'ensemble recherché est $\{I\}$.

Si $k + \frac{a^2}{4} > 0$ ou encore $k > -\frac{a^2}{4}$ alors l'ensemble recherché est la sphère de

centre I et de rayon $\sqrt{k + \frac{a^2}{4}}$.

b) $\frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow (\overline{MA} + 2\overline{MB}) \cdot (\overline{MA} - 2\overline{MB}) = 0$

Soit G le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2) \Leftrightarrow \overline{GA} + 2\overline{GB} = \vec{0}$

Soit G' le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -2) \Leftrightarrow \overline{G'A} - 2\overline{G'B} = \vec{0}$

d'où $\overline{MA} + 2\overline{MB} = 3\overline{MG}$ et $\overline{MA} - 2\overline{MB} = -\overline{MG}'$

par suite $\frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow (3\overline{MG}) \cdot (-\overline{MG}') = 0 \Leftrightarrow \overline{MG} \cdot \overline{MG}' = 0$

$\Leftrightarrow \overline{MG} \perp \overline{MG}'$ d'où l'ensemble recherché est la sphère de diamètre $[GG']$

21 a) P le plan médiateur de $[AB]$ passe par I le milieu de $[AB]$ et de vecteur normal $\overline{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $I(-1, 4, -3)$ d'où $P : -2x - 4z + d = 0$

$$I \in P \Leftrightarrow 2 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -14 \text{ donc } P : -2x - 4z - 14 = 0$$

ou encore $P : x + 2z + 7 = 0$.

b) Soit H le centre de la sphère S comme A, B, C et D appartiennent à S

Alors $HA = HB = HC = HD = \text{rayon}$ donc $H \in P$ et $H \in P'$ et $H \in P''$

avec P' le plan médiateur de $[BC]$ et P'' le plan médiateur de $[CD]$

$$B * C = I'(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -5) \text{ et } C * D = I''(1, \frac{1}{2}, \frac{9}{2})$$

$$\overline{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\overline{BC} normal de P' d'où $P' : 3x - 3y + d = 0$

$$I' \in P' \Leftrightarrow -\frac{3}{2} - \frac{15}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = 9$$

$P' : x - y + 3 = 0$ de même $P'' : -y + z + 5 = 0$

$$H \in P \cap P' \cap P'' \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z + 7 = 0 & (1) \\ x - y + 3 = 0 & (2) \\ -y + z + 5 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x = y - 3 \text{ et } (3) \Leftrightarrow z = y - 5$$

On remplace dans (1) $\Rightarrow (y - 3) + 2y - 10 + 7 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

D'où $x = -1$ et $z = -3$ donc $H(-1, 2, -3)$, le rayon est $R = HA = 3$.

c) $Q : x + y + z - 1 = 0$

$$d = d(H, Q) = \frac{|-1 + 2 - 3 - 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} < R \text{ donc } Q \text{ est sécant à } S.$$

le rayon du cercle est $\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}$.



$$1) \overline{OG} + 2\overline{AG} + 3\overline{BG} = \vec{0}$$

$$\text{On pose } G(x, y, z) \text{ alors } \overline{OG} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \overline{AG} \begin{pmatrix} x-6 \\ y \\ z \end{pmatrix}; \overline{BG} \begin{pmatrix} x \\ y-6 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\overline{OG} + 2\overline{AG} + 3\overline{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2(x-6) + 3x = 0 \\ y + 2y + 3(y-6) = 0 \\ z + 2z + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \text{ d'où } G(2, 3, 0)$$

$$2) (\overline{MO} + 2\overline{MA} + 3\overline{MB}) \cdot \overline{MC} = 0$$

$$\overline{MC} \cdot (\overline{MG} + \overline{GO} + 2\overline{MG} + 2\overline{GA} + 3\overline{MG} + 3\overline{GB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC} \cdot 6\overline{MG} = 0 \text{ car } \overline{GO} + 2\overline{GA} + 3\overline{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC} \cdot \overline{MG} = 0 \text{ donc } S \text{ est la sphère de diamètre } [CG]$$

$$\overline{MC} \cdot \overline{MG} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 6z = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 + (z-3)^2 = \frac{49}{4}$$

donc S est de centre $I(1, \frac{3}{2}, 3)$ de rayon $\frac{7}{2}$.

$$3) d(I, P) = \frac{\left| 3 + 6 + \frac{17}{2} \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{7}{2} = \text{rayon de } S \text{ donc } P \text{ est tangent à } S.$$



1) Soit G le barycentre des points pondérés : $(A, 1)$ et $(B, 2)$

$$\Leftrightarrow \overline{GA} + 2\overline{GB} = 0 \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{BG} = \frac{1}{3}\overline{BA}$$

$$MA^2 + 2MB^2 = k \Leftrightarrow (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + 2(\overline{MG} + \overline{GB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2 + 2\overline{MG} \cdot \underbrace{(\overline{GA} + 2\overline{GB})}_0 = k$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + \frac{4}{9}AB^2 + 2 \cdot \frac{1}{9}BA^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 = k - \frac{2}{3}AB^2 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{3k - 2a^2}{9}$$

On a $k > 0$

• Si $3k - 2a^2 < 0$ ou encore $0 < k < \frac{2a^2}{3}$ alors l'ensemble recherché est le vide.

• Si $3k - 2a^2 = 0$ ou encore $k = \frac{2a^2}{3}$ alors l'ensemble recherché est $\{G\}$

• Si $3k - 2a^2 > 0$ ou encore $k > \frac{2a^2}{3}$

alors l'ensemble recherché est la sphère de centre G , de rayon $\frac{\sqrt{3k - 2a^2}}{3}$

2) $M(x, y, z)$; $A(1, -5, 2)$; $B(-2, 1, 2)$

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10y - 4z + 30.$$

$$MB^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z + 9.$$

$$MA^2 + 2MB^2 = k \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x + 6y - 12z + 48 = k$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 16 - \frac{k}{3} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \frac{k}{3} - 10$$

- Si $\frac{k}{3} - 10 > 0$ ou encore $k > 30$ alors l'ensemble est la sphère de centre

$$W(-1, -1, 2) \text{ de rayon } \sqrt{\frac{k}{3} - 10}.$$

- Si $\frac{k}{3} - 10 = 0$ ou encore $k = 30$

Alors l'ensemble est réduit au singleton $\{W(-1, -1, 2)\}$.

- Si $0 < k < 30$ alors l'ensemble recherché est le vide.

24

$$\text{a) } AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = BC = AC$$

donc ABC est un triangle équilatéral.

$$\text{b) } M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \overline{BM} \perp \overline{CM} \Leftrightarrow x^2 + y(y-4) + (z-4)z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 4z = 0 \text{ d'où } S: x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 4z = 0$$

$$\text{c) } I(2, 2, 0); 4 + 4 + 0 - 8 - 0 = 0 \text{ donc } I \in S$$

$$\text{d) } \overline{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de P d'où } P: 4y - 4z + d = 0$$

$$I \in P \Leftrightarrow 8 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8 \text{ d'où } P: y - z - 2 = 0.$$

S est la sphère de centre $H = B * C$ (donc $H(0, 2, 2)$) et de rayon :

$$\frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}. \text{ Et } d(H, P) = \frac{|2 - 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2}$$

donc $S \cap P$ est le cercle de centre L le projeté orthogonal de H sur P et de

$$\text{rayon } \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6}.$$

$$\overline{HL} = \alpha \cdot \vec{n}; \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de P d'où } \begin{cases} x = 0 \\ y = 4\alpha + 2 \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -4\alpha + 2 \end{cases}$$

$$\text{or } L \in P \Leftrightarrow (4\alpha + 2) - (-4\alpha + 2) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \text{ donc } L(0, 3, 1).$$

On conclut que $S \cap P = \zeta(L(0, 3, 1); \sqrt{6})$.

25

$$\text{a) } x^2 + y^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 + (y + (m-1))^2 - (m-1)^2 + \left(z + \frac{(m+4)}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y + m - 1)^2 + \left(z + \frac{m+4}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}m^2 + 4$$

donc S_m est la sphère du centre $W_m\left(-\frac{m}{2}; -m+1; -\frac{m-4}{2}\right)$

de rayon $R_m = \sqrt{\frac{3}{2}m^2 + 4}$.

b) $W_m\left(-\frac{m}{2}; -m+1; -\frac{m-4}{2}\right)$;

Soit $H_m = \left\{W_m\left(-\frac{m}{2}; -m+1; -\frac{m-4}{2}\right) \text{ avec } m \in \mathbb{R}\right\}$.

$$M(x, y, z) \in H_m \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{m}{2} \\ y = -m+1; m \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{m}{2}-2 \end{cases}$$

C'est une représentation paramétrique d'une droite D passant par $A(0, 1, -2)$

De vecteur directeur $\vec{U} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Donc l'ensemble H_m des points W_m lorsque m varie pour tout $m \in \mathbb{R}$

c) $x^2 + y^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m(x+2y+z) + x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{R}$

Si et seulement si $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0 \end{cases}$

$x+2y+z=0$ est l'équation d'un plan R

$x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$.

C'est l'équation d'une sphère S de centre $I(0, 1, -2)$ est de rayon 2.

Donc il faut chercher $R \cap S$:

$d(I, R) = \frac{|2-2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = 0$ donc $R \cap S$ est le plus grand cercle de centre

$I = \Omega(0, 1, -2)$ et de rayon 2.

$$\begin{aligned} \text{d) } M_0 \in S_m &\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + mx_0 + 2(m-1)y_0 + (m+4)z_0 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m(x_0 + 2y_0 + z_0) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Comme M_0 n'appartient pas au plan du cercle ζ c'est-à-dire :

$x_0 + 2y_0 + z_0 \neq 0$ d'où l'équation est équivalente à :

$$m = -\frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1}{x_0 + 2y_0 + z_0} \text{ donc il existe qu'une seule sphère passant par } M_0.$$

$$\text{e) } d(W_m, Q) = \frac{\left| -\frac{m}{2} - 2 \right|}{\sqrt{1}} = \left| \frac{m}{2} + 2 \right|$$

Q est tangent à S_m si et seulement si $\left| \frac{m}{2} + 2 \right| = R_m$

$$\text{Ou encore } \left(\frac{m}{2} + 2 \right)^2 = R_m^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}m^2 + 4 = \frac{m^2}{4} + 2m + 4.$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{5}{4}m - 2\right) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{8}{5}$$

Donc il existe deux sphères S_0 et $S_{\frac{8}{5}}$ tangentes à Q.

26

1) Q est le plan médiateur de $[AB]$ alors \overline{AB} est un vecteur normal de Q et passe par $I = A * B$.

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} \text{ donc } \overline{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}; I = A * B \text{ alors } I\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \text{ d'où } I(2, 3, 2).$$

\overline{AB} est un vecteur normal de Q alors Q : $2x + 4y - 2z + d = 0$

$$I \in Q \Leftrightarrow 4 + 12 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

donc Q : $2x + 4y - 2z - 12 = 0$ ou encore Q : $x + 2y - z - 6 = 0$

2) a) $P_m // Q \Leftrightarrow \overline{AB}$ et \vec{n} sont colinéaires avec \vec{n} est un vecteur normal de P_m .

$$\vec{n} \begin{pmatrix} m+2 \\ -m-1 \\ -m \end{pmatrix}; \overline{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \text{ et } \overline{AB} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m+2 & 2 \\ -m-1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} m+2 & 2 \\ -m & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} -m-1 & 4 \\ -m & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m+2) + 2(m+1) = 0 \text{ et } -2(m+2) + 2m = 0 \text{ et } 2m + 2 + 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{5}{3} \text{ et } -4 = 0 \text{ impossible 'd'où } E_1 = \emptyset$$

$$b) P_m \perp Q \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow 2(m+2) + 4(-m-1) - 2(-m) = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot m = 0 \text{ d'où } E_2 = \mathbb{R}$$

$$3) a) x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + z^2 - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{9}{2}$$

c'est l'équation d'une sphère de centre I (1,1,0) de rayon $\sqrt{\frac{9}{2}}$.

$$b) d(I, P_m) = \frac{|(m+2) - (m+1) + 3m - 1|}{\sqrt{(m+2)^2 + (m+1)^2 + m^2}} = \frac{|3m|}{\sqrt{3m^2 + 6m + 5}}$$

$$d^2 - R^2 = \frac{9m^2}{3m^2 + 6m + 5} - \frac{9}{2} = 9 \frac{(-m^2 - 6m - 5)}{2(3m^2 + 6m + 5)}$$

$$-m^2 - 6m - 5 = 0 \text{ et } -1 + 6 - 5 = 0 \text{ donc } m = -1 \text{ ou } m = -5.$$

m	$-\infty$	-5	-1	$+\infty$	
$-m^2 - 6m - 5$	-	○	+	○	-
$d^2 - R^2$	-	○	+	○	-

Si $m \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$ alors P_m est sécant à S.

Si $m \in]-5, -1[$ alors P_m et S sont extérieurs.

Si $m = -5$ ou $m = -1$ alors S et P_m sont tangents.

$$4) P_1 : 3x - 2y - z + 2 = 0$$

$$S : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{9}{2}$$

$$d(I, P_1) = \frac{3}{\sqrt{14}} < \frac{9}{2} \text{ d'où } P_1 \cap S \text{ est un cercle de centre H de rayon}$$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{9}{14}} = \sqrt{\frac{549}{28}}$$

* H est le projeté orthogonal de I sur P_1 , donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overline{IH} = \alpha \vec{n} \text{ et } H \in P_1, \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P_1, \overline{IH} = \alpha \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3\alpha + 1 \\ y_H = -2\alpha + 1 \\ z_H = -\alpha \end{cases}$$

$$H \in P_1 \Leftrightarrow 3x_H - 2y_H - z_H + 2 = 0. \text{ Donc } 3(3\alpha + 1) - 2(-2\alpha + 1) + \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{14}$$

d'où $H\left(\frac{5}{14}, \frac{10}{7}, \frac{3}{14}\right)$ donc $P_1 \cap S = \zeta(H, r)$.

$$\nabla_{27} \quad 1) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P; \quad \vec{n}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } Q.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \text{ donc } \vec{n} \text{ et } \vec{n}^1 \text{ ne sont pas colinéaires,}$$

par suite P et Q sont sécants d'où $P \cap Q = \Delta$.

$$\Delta: \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 & (1) \\ 2x + z - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

On pose $x = \alpha$; alors (1) $\Rightarrow y = -\frac{\alpha}{2} + 1$ et (2) $\Rightarrow z = -2\alpha + 8$

$$\text{D'où une représentation paramétrique de } \Delta \text{ est } \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\frac{1}{2}\alpha + 1; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -2\alpha + 8 \end{cases}$$

$$2) \text{ a) } x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2y + 2(2m - 3)z - 12 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 - m^2 + (y-1)^2 - 1 + (z+(2m-3))^2 - (2m-3)^2 - 12m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y-1)^2 + (z+(2m-3))^2 = 5m^2 + 9$$

c'est l'équation d'une sphère d'où S_m est la sphère de centre

$I_m(m, 1, -2m + 3)$ de rayon $\sqrt{5m^2 + 9}$.

b) Soit $D_m = \{I_m(m, 1, -2m + 3) \text{ avec } m \in \mathbb{R}\}$

$$M(x, y, z) \in D_m \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = 1 \\ z = -2m + 3 \end{cases}; m \in \mathbb{R}$$

c'est une représentation paramétrique d'une droite de vecteur directeur :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et passe par le point } A(0, 1, 3).$$

$$3) \text{ a) } S_0 \text{ de centre } I_0(0, 1, 3) \text{ de rayon } 3.$$

$$d(I_0, Q) = \frac{|3-8|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} < 3 \text{ donc } S_0 \text{ et } Q \text{ sont sécants d'où } S_0 \cap Q = \zeta$$

$$\text{cercle de centre } H \text{ de rayon } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$$

H le projeté orthogonal de I_0 sur Q donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overline{I_0 H} = \alpha \cdot \vec{n} \text{ et } H \in Q \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2\alpha \\ y_H = 1 \\ z_H = \alpha + 3 \end{cases} \text{ et } 2x_H + z_H - 8 = 0.$$

$$\text{donc } 2(2\alpha) + (\alpha + 3) - 8 = 0 \Leftrightarrow 5\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

d'où ζ est de centre $H(2, 1, 4)$.

$$b) M(x, y, z) \in S_0 \cap \Delta \Leftrightarrow M \in S_0 \text{ et } M \in \Delta$$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\frac{1}{2}\alpha + 1 \\ z = -2\alpha + 8 \end{cases}$$

$$\text{et } M \in S_0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (-\frac{1}{2}\alpha + 1 - 1)^2 + (-2\alpha + 8 - 3)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{4}\alpha^2 - 20\alpha + 16 = 0$$

$$\Delta' = 16 \text{ d'où } \alpha = \frac{8}{3} \text{ ou } \alpha = \frac{8}{7} \text{ donc } S_0 \cap \Delta = \{L(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{8}{3}), L(\frac{8}{7}, \frac{3}{7}, \frac{40}{7})\}$$

28

$$1) * MA^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14$$

$$MC^2 = x^2 + y^2 + (z+2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4.$$

$$MA^2 - MC^2 = 10 \Leftrightarrow -2x + 4y - 10z + 10 = 10 \Leftrightarrow -x + 2y - 5z = 0$$

D'où l'ensemble recherché est le plan P d'équation : $-x + 2y - 5z = 0$.

$$\text{de vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$* \overline{AC} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & +2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ d'où } \overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ donc } \overline{AC} = \vec{n}$$

donc \overline{AC} est un vecteur normal à P d'où $(AC) \perp P$.

$$2) x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (z+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z+1)^2 = \frac{9}{4}$$

donc S est la sphère de centre $I(1, -\frac{1}{2}, -1)$ de rayon $R = \frac{3}{2}$

$$d(I, P) = \frac{|-1 - 1 + 5|}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} = \frac{3}{\sqrt{30}} < \frac{3}{2}$$

$$d' où S \cap P \text{ est un cercle de centre de rayon } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{30}} = \sqrt{\frac{39}{20}}$$

$$H(x, y, z) \text{ est le projeté orthogonal de } I \text{ sur } P \text{ donc } \overline{IH} = \alpha \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 2\alpha - \frac{1}{2} \\ z = -5\alpha - 1 \end{cases}$$

$$H \in P \Leftrightarrow x_H - 2y_H + 5z_H = 0 \Leftrightarrow -\alpha + 1 - 4\alpha + 1 - 25\alpha - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{10} \text{ d'où } H\left(\frac{11}{10}, -\frac{7}{10}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$3) \overline{GA} + \overline{GB} - 3\overline{GC} = \vec{0}$$

$$a) \text{ Soit } G(x, y, z) \in \xi, \overline{GA} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -2 & -y \\ 3 & -z \end{pmatrix}; \overline{GB} \begin{pmatrix} -2 & -x \\ 1 & -y \\ -8 & -z \end{pmatrix}; \overline{GC} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -2 & -z \end{pmatrix}$$

$$\overline{GA} + \overline{GB} - 3\overline{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x) + (-2-x) - 3(-x) = 0 \\ (-2-y) + (1-y) - 3(-y) = 0 \\ (3-z) + (-8-z) - 3(-2-z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 1 \text{ et } z = -1 \text{ d'où } G(1, 1, -1).$$

$$b) \overline{IG} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de } Q \text{ d'où } Q : \frac{3}{2}y + d = 0$$

$$G \in Q \Leftrightarrow \frac{3}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{3}{2} \text{ d'où } Q : \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0 \text{ ou encore } Q : y - 1 = 0$$

$$4) \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P, \vec{n}_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } Q$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ alors } \vec{n} \text{ et } \vec{n}_Q \text{ sont non colinéaires, donc } P \text{ et } Q$$

sont sécants ; $P \cap Q = \Delta$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ x-2y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1 \\ z=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\alpha \end{cases} \text{ d'où } \Delta \begin{cases} x=\alpha \\ y=1 \\ z=-\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5} \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

$M(x, y, z) \in S \cap \Delta \Leftrightarrow M \in S \text{ et } M \in \Delta$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{5}\alpha + \frac{2}{5} \end{cases} \text{ et } M \in S \text{ donc } (\alpha-1)^2 + \left(\frac{1}{2}+1\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\alpha + \frac{7}{5}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 26\alpha^2 - 64\alpha + 74 = 0 \Leftrightarrow 13\alpha^2 - 32\alpha + 37 = 0$$

$$\Delta' = 16^2 - 13 \cdot 37 < 0 \text{ donc } S \cap \Delta = \emptyset$$

Chapitre XII

Probabilités

■ **Vocabulaire :**

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers probabilisable obtenu lors d'une expérience aléatoire.

On appelle	Représente	Notation
Eventualité ou issue	Un élément de Ω	$\omega_i \in \Omega; 1 \leq i \leq n$
Evènement A	Une partie de Ω	$A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\} 1 \leq k \leq n; A \subset \Omega$
Evènement élémentaire	Un singleton	$\{\omega_i\}$
A et B	Evènement formée Par les élément qui sont dans A et B.	$A \cap B$
A ou B	Evènement formée Par les élément qui sont dans A ou B	$A \cup B$
A et B Evènements Incompatibles	Evènement ne pouvant être réalisés en même temps	$A \cap B = \phi$
Evènement Contraire de A	Evènement formé de tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A	\bar{A}

■ **Définition :**

Soit Ω l'univers, $P(\Omega)$ c'est l'ensemble de tous les parties de Ω .

On appelle probabilité toute application $P : P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} P(\Omega) = 1 \\ \forall A \text{ et } B \text{ de } P(\Omega) \text{ tel que } A \cap B = \phi \end{cases} \text{ on a } p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Evènements	Probabilités
L'univers Ω	$P(\Omega) = \sum_{i=1}^n p(\omega_i) = 1$
ϕ	$P(\phi) = 0$
\bar{A}	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$A \cup B$ avec $A \cap B = \phi$	$P(A \cup B) = P(A) + p(B)$
$A \cup B$ avec $A \cap B \neq \phi$	$P(A \cup B) = P(A) + p(B) - p(A \cap B)$

+

■ **Equiprobabilité :**

* On dit qu'on a équiprobabilité si les événements élémentaires ont la même probabilité c'est à dire $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \dots = p(\omega_n)$.

*
$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}$$

* Remarque : $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ alors $p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) = 3p(\omega_1)$.

■ **Événements indépendants:** On dit que A et B sont deux événements dépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Réflexes:

Situations	Réflexes
On lance un dé 2 fois où 2 dés où on tire successivement 2 jetons numérotés Et on s'intéresse au leur somme où au produit	On utilise un tableau à double entrée
Lorsque il y a l'expression "au moins" dans un évènement A	Il faut appliquer $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
Dans une question figure le mot "où"	Il faut appliquer $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
Comment reconnaître une situation d'équiprobabilité ?	Toutes les fois que la situation est équivalente à une des situations de référence suivantes : <ul style="list-style-type: none"> • effectuer un tirage dans une urne comprenant la même proportion de boules de chaque couleur. • lancer un dé ou une pièce « bien équilibré (e) ». • choisir un élément « au hasard » dans un ensemble.
Comment calculer la probabilité d'un évènement A ?	<ul style="list-style-type: none"> • En effectuant la somme des probabilités des issues qui réalisent A. • Ou dans le cas de la loi équirépartie, en appliquant la forme : $p(A) = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}$ • Ou en utilisant la formule de $p(A \cup B)$ ou $p(\bar{A})$

ENONCES

1 QCM

Indiquer la bonne réponse par a, b ou c avec justification

- On lance un dé équilibré, la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 est : a $\frac{1}{2}$ b $\frac{1}{6}$ c $\frac{2}{3}$
- A et B sont deux évènements incompatibles
 $p(A) = 0,15$ et $p(B) = 0,43$ alors $p(A \cup B)$ est égale à :
 a 0,0645 b 0,58 c 0,43
- l'évènement A a pour probabilité $\frac{3}{5}$ Alors $p(\bar{A})$ est égale à :
 a 0,6 b 0,5 c 0,4
- A, B deux événements de Ω tel que $p(A) = \frac{5}{6}$, $p(B) = \frac{1}{6}$ alors $A \cup B$
 a égal à Ω b $A \cup B$ n'est jamais égale à Ω c $A \cup B$ peut être égale à Ω

2 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fautive. Justifier votre réponse

- On lance deux pièces de monnaie. On peut obtenir 0 fois où 1 fois où 2 fois "Pile". La probabilité d'avoir "0 fois pile" est $\frac{1}{3}$
- A et B sont deux évènements incompatibles $p(A) = 0,6$ alors $p(B) \leq 0,4$
- un évènement a pour probabilité 0,2
alors l'évènement contraire a pour probabilité 0,8
- Dans une situation d'équiprobabilité, tous les évènements ont la même probabilité
- A et B deux évènements quelconques alors $p(A) + p(B) \geq p(A \cup B)$

3

Un dé est truqué de telle manière que la probabilité d'obtenir chaque numéros de 1 à 6 soit proportionnelle à ce numéro.

- Quelle est la probabilité de sortie de chaque face.
- On lance une fois le dé, quelle est la probabilité d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 4.

4

On considère une urne dans laquelle se trouvent : 1 boule portant le numéros 1, 2 boules portant le numéros 2 ; 3 boules portant le numéros 3 et n boules portant le numéros n.

- 1) Combien l'urne contient-elle de boules.
- 2) On tire au hasard une boule de l'urne, tous les tirages sont supposés équiprobables.
 - a) On suppose que n est pair. Exprimer en fonction de n la probabilité pour que la boule tirée porte : (i) un numéro pair ; (ii) un numéro impair.
 - b) Dans cette question, on suppose seulement que le nombre total de boules dans l'urne est 21. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à 4 ?

5

On lance deux fois de suite un dé cubique ordinaire (non truqué) de façon à former un nombre de deux chiffres : le résultat du premier lancer donne le chiffre des dizaines, celui du second lancer celui des unités. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « le nombre obtenu est pair ».

B : « Le deux chiffres du nombre obtenu sont identiques ».

C : « Le nombre obtenu est strictement supérieur à 52 ».

D : « Le nombre obtenu contient au moins un 6 ».

6

Un sac contient dix jetons, cinq portant le numéro 1, quatre de numéros 2 et un le numéro 3. L'expérience consiste à tirer du sac successivement et sans remis, trois jetons. Ceux-ci sont alignés de gauche à droite de façon à obtenir un nombre de trois chiffres. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Quelles sont les probabilités :

a) d'obtenir un nombre dont les trois chiffres sont deux à deux distincts.

b) d'obtenir un nombre 111.

c) d'obtenir le nombre 122.

d) d'obtenir un nombre dont au moins des chiffres est 1.

7

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

- 1) On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - a) 3 boules blanches et 2 boules noires.
 - b) des boules de couleurs différentes.
- 2) On tire successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - a) 3 boules blanches et 2 boules noires dans cet ordre.
 - b) 3 boules blanches et 2 boules noires dans un ordre quelconque.
- 3) On tire successivement 3 boules en remettant la boule après chaque tirage si elle est blanche, en ne la remettant pas si elle est noire. Quelle est la probabilité de tirer :
 - a) Exactement une boule blanche.

b) Au moins une boule blanche.

8

On met dans un sac six jetons de couleur identique au toucher ; deux blancs, deux bleus, un rouge et un vert. Déterminer la probabilité d'obtenir les trois couleurs : bleu, blanc, rouge dans chacun des cas suivants :

- a) On tire simultanément trois jetons du sac.
- b) On tire successivement trois jetons du sac en remplaçant le jeton dans le sac après chaque tirage.
- c) On tire successivement trois jetons du sac sans remise.

9

Pour jouer aux fléchettes, on dispose d'un disque de liège de 20 cm de diamètre, sur lequel on a tracé deux cercles concentriques, de rayons respectifs 2 et 6 cm définissant ainsi trois zones C_1, C_2 et C_3

un joueur s'apprête à lancer une fléchette. On sait que :

- Le joueur atteint la cible 3 fois sur 4.
- La probabilité d'atteindre une zone de la cible est proportionnelle à l'aire de cette zone. Quelles sont les probabilités p_1, p_2 et p_3 de tomber dans les zones C_1, C_2 et C_3 respectivement.

10

On lance une fois un dé numéroté de 1 à 6. Ce dé est pipé de manière à ce que la probabilité d'obtenir 2 soit la même que celle d'obtenir 4 et que celle d'obtenir 6. La probabilité d'obtenir 1 est le double de celle d'obtenir 6. Les probabilités d'obtenir 3 et 5 sont égales chacune aux deux tiers de la probabilité d'obtenir 1.

Quelle est la probabilité de l'évènement E: « obtenir un nombre impair » .

11

Un sac contient six boules rouges numérotées de 1 à 6 et trois boules blanches numérotées de 4 à 6. On extrait simultanément deux boules numérotées a et b. On admet l'équiprobabilité de sortie de tous les paires de boules possibles.

- 1) Quelle est la probabilité pour que l'on ait $a = b$.
- 2) Quelle est la probabilité pour que les deux boules tirées.
 - a) Soient de couleurs différentes.
 - b) Soient de même couleur.
 - c) Portent des numéros de même parité.
- 3) Quelle est la probabilité pour que l'on ait $a+b \equiv 0(4)$
- 4) Quelle est la probabilité d'extraire 2 boules dont une et une seulement porte un numéro impair et une seulement rouge.

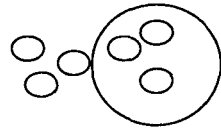
12

On considère un hexagone régulier, on appelle H l'ensemble de ses sommets soit $H = \{A, B, C, D, E, F\}$.

- 1) On choisit au hasard trois sommets dans l'ensemble H .
 - a) Quelle est la probabilité d'obtenir un triangle équilatéral.
 - b) Quelle est la probabilité d'obtenir un triangle isocèle non équilatéral.
 - c) Quelle est la probabilité d'obtenir un triangle rectangle.
- 2) On répète trois fois l'expérience de la première question :
 - a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois un triangle équilatéral.
 - b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois un triangle équilatéral.

13

Le matériel d'un jeu de triboulet se compose de : - 3 boules : une bleue, une rouge, une verte, notées respectivement B, R, V .



- une cuvette comportant 3 trous déposés comme sur la figure ci-contre, appelés : haut, gauche et droit ; le banquier lance les trois boules. Celle-ci s'immobilisent en tombant chacune dans un trou. La configuration dans laquelle la boule verte est tombée dans le trou du haut, la bleue dans le trou de gauche et la rouge dans le trou droit est notée (V, B, R) .

- 1) Déterminer le nombre de configurations possibles.
- 2) On suppose que toutes les configurations sont équiprobables. Quelle est la probabilité de chacune d'elle ?
- 3) Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :
 - E_1 : la boule verte est tombée dans le trou du haut.
 - E_2 : la boule bleue est tombée dans le trou du droit.
 - E_3 : la boule verte est tombée dans le trou du haut et la bleue dans le trou droit.
 - E_4 : la boule bleue n'est pas tombée dans le trou du haut.

14

Soit une urne contenant quatre boules blanches portant les numéros 1, 2, 3 et 4 et trois boules noires portant les numéros 1, 2 et 3.

On extrait au hasard de cette urne successivement et sans remise 2 boules. Soit alors les évènements suivants.

- A : « les 2 boules sont blanches ».
- B : « les 2 boules sont de la même couleur ».
- C : « les 2 boules portent le même n° ».
- D : « les 2 n° sont pairs ».
- E : « les 2 n° ont même parité ».
- F : « il ya au plus un n°4 ».
- G : « la première boule est la noire n°1 ».

Calculer leurs probabilités ainsi que celle des événements :

\bar{A} , $C \cap G$ et $A \cup E$

15

Une mère a quatre enfants, calculer les probabilités des événements suivants si on suppose que la probabilité qu'un enfant soit une fille et celle que ce soit un garçon sont les mêmes :

- A : « elle n' a pas de garçon ».
- B : « elle a au moins un garçon ».
- C : « elle a au plus deux garçon ».
- D : « elle a des garçons et des filles ».
- E : « elle n'a qu'un garçon ».
- F : « elle a autant de garçon que de filles ».

16

Le jardinier a mélangé trois oignons de tulipes rouges avec trois oignons de tulipes jaunes. Il les plante régulièrement en cercle en les prenant au hasard. On considère les événements suivants.

- A : « les fleurs jaunes forment un triangle rectangle ».
- B : « les fleurs rouges forment un triangle rectangle ».
- C : « les fleurs jaunes forment un triangle équilatéral ».
- D : « les fleurs jaunes forment un triangle isocèle ».

Déterminer les probabilités des événements suivants : A, B, C, D.

17

Une urne contient 6 boules : 3 numérotés 1, deux numérotées 2 et une numérotées 3. On tire une première boule au hasard puis sans remettre cette boule on tire une seconde boule au hasard. Le résultat d'un tel tirage est le couple (a, b) où a et b sont les nombres respectivement inscrits sur la 1^{ère} boule et la seconde boule.

- 1) Calculer la probabilité de chacun résultat possible.
- 2) Calculer la probabilité des événements suivants :
 - A : « les deux numéros tirés sont égaux (a = b) ».
 - B : « le 1^{er} nombre tiré est strictement supérieur au second (a > b) ».
 - C : « le 1^{er} nombre est inférieur au second (a ≤ b) ».
- 3) On note X la valeur absolue de la différence des deux nombres tirés (X = | a - b |)
 - a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X.
 - b) Pour tout élément i de E, calculer la probabilité de l'évènement (X = i) .

18

Une urne contient deux boules rouges et n boules noires avec n un entier naturel supérieur à 2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

- 1) On tire simultanément deux boules de l'urne.
 - a) Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : avoir 2 Boules rouges et B : avoir 2 Boules de mêmes couleurs.

b) Déterminer n pour que $p(A) = \frac{1}{15}$

2) pour la suite de l'exercice on prend $n = 4$

Les deux boules rouges sont numérotées : **1,2**

Les 4 boules Noires sont numérotées : **0, 1, 1,2**

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

a) Déterminer la probabilité d'avoir deux boules de mêmes couleurs.

b) Déterminer la probabilité d'avoir deux boules de même parité

c) Déterminer la probabilité d'avoir au moins une boules qui porte le **1**.

d) Déterminer la probabilité d'avoir une seule boule noire et une seule qui porte le numéro **1**.

3) Un joueur tire successivement et avec remise de 3 Boules de l'urne il gagne 10 dinars pour chaque boule qui porte le numéro **1**, 20 dinars pour chaque boule qui porte le numéro **2**.

On perd 5 dinars pour chaque boule qui porte le numéro **0**.

a) Déterminer la probabilité de gagner 40 dinars.

b) Déterminer la probabilité de gagner une somme supérieur ou égale à 40.

19

Un sac contient n boules ($n \geq 7$) parmi lesquelles 5 blanches et n-5 noires.

1) On tire successivement deux boules du sac, sans remettre la première boule tirée avant de tirer la deuxième boule.

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements :

E_1 : Tirer deux boules de même couleur.

E_2 : Tirer une seule boule blanche.

b) Trouver n pour que $p(E_1) < p(E_2)$

2) On suppose dans cette question $n = 8$.

Les cinq boules blanches sont marquées : -2 ; -2 ; -2 ; 3 ; 3.

Les trois boules noires sont marquées 3 ; 3 ; 3.

On tire simultanément trois boules du sac, calculer la probabilité de :

A : Obtenir trois boules portant le même réel.

B : Obtenir un produit négatif.

C : Obtenir trois boules de même couleur ou bien qu'elles portent le même réel.

3) On suppose $n = 50$ et la répartition des 50 boules suivant les nombres qu'elles portent est donnée par le tableau suivant :

x_i = nombre marqué sur la boule	-2	1	0	2	3
N_i = nombre de boules	10	15	2	12	11

Déterminer le mode, la moyenne arithmétique, la variance et l'écart-type

de la série statistique donnée par ce tableau.



Une boîte contient 100 rondelles de 16 types différents. Le tableau suivant donne leur répartition suivant leur épaisseur et leur diamètre (en mm)

épaisseur \ diamètre	1	2	3	4
8	5	6	9	0
10	5	10	11	4
12	6	15	3	2
15	7	6	5	6

1) On tire au hasard une rondelle de la boîte.

Calculer la probabilité d'avoir :

- une rondelle d'épaisseur 3mm
- une rondelle de diamètre 10 mm.
- une rondelle d'épaisseur 2 mm et de diamètre 12mm.
- une rondelle de diamètre supérieur à 11mm.

2) On tire simultanément 2 rondelle de la boîte.

Calculer la probabilité d'avoir :

- au moins une rondelles d'épaisseur 1.
- à plus une rondelle de diamètre 8mm

CORRIGES



1) La réponse est c : $p(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ or $A \cap B = \emptyset$
 $= p(A) + p(B) = 0,58$ d'où la réponse est b

3) La réponse est c : $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$

4) La réponse est c : on lance un dé normal

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow p(A) = \frac{5}{6}$ et $B = \{1\} \Rightarrow p(B) = \frac{1}{6}$
 et $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



1) fausse : $p(0 \text{ fois le pile}) = p(F, F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}$

2) Vraie : $p(A) = 0,6$ et $p(\Omega) = 1$

$A \cup B \subset \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
 $\Rightarrow p(B) = p(A \cup B) - p(A) \leq 1 - p(A) = 0,4$

3) Vraie : $p(A) = 0,2$ et $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 0,8$

4) fausse : On lance le dé normal

$p(\{1, 2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(\{1, 2, 3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$

5) Vraie : On sait que

$\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
 $\Rightarrow p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B)$
 $\Rightarrow p(A) + p(B) \geq p(A \cup B)$ car $p(A \cap B) \geq 0$



1) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Notons p_i la probabilité de sortie de la face numéro i . d'après l'énoncé, $p_2 = 2p_1$; $p_3 = 3p_1$; $p_4 = 4p_1$; $p_5 = 5p_1$ et $p_6 = 6p_1$ (proportionnalité des probabilités). Comme $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$, on en déduit : $p_1 + 2p_1 + 3p_1 + 4p_1 + 5p_1 + 6p_1 = 1 \Leftrightarrow 21p_1 = 1$ d'où $p_1 = \frac{1}{21}$

Ainsi les probabilités cherchées sont :

$P_1 = \frac{1}{21}$; $p_2 = \frac{2}{21}$; $p_3 = \frac{3}{21}$; $p_4 = \frac{4}{21}$; $p_5 = \frac{5}{21}$ et $p_6 = \frac{6}{21}$

2) Soit A l'événement : « obtenir un résultat supérieur ou égal à 4 » alors

$A = \{4, 5, 6\}$ d'où $p(A) = p_4 + p_5 + p_6$ C'est à dire $p(A) = \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$



1) Le nombre de boules dans l'urne est $N = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) On tire une boule de l'urne et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

a) On suppose que n est paire ($n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$)

Soit N_1 le nombre de boules portant un numéro pair et N_2 le nombre de boules portant un numéro impair on a :

$$N_1 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2p = 2(1 + 2 + 3 + \dots + p) = \frac{2p(p+1)}{2} = p(p+1)$$

$$\text{donc } N_1 = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{n(n+2)}{4}$$

$$\text{et } N_2 = N - N_1 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+2)}{4} = \frac{2n^2 + 2n - n^2 - 2n}{4} = \frac{n^2}{4}$$

(i) soit A l'événement : « la boule tirée porte un numéro pair ».

On a : $\text{card } A = N_1 = \frac{(n+2)}{4}$ or l'univers Ω associé à cette expérience est

l'ensemble de tous les tirages possibles d'une boule de l'urne donc

$$\text{card } \Omega = N = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ d'où } p(A) = \frac{N_1}{N} = \frac{\frac{n(n+2)}{4}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

(ii) soit B l'événement : « La boule tirée porte un numéro impair ».

$$\text{On a : } \text{card } B = N_2 = \frac{n^2}{4} \text{ donc } p(B) = \frac{N_2}{N} = \frac{\frac{n^2}{4}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n}{2(n+1)}$$

b) Si le nombre total de boules dans l'urne est 21 alors $n = 6$, donc $\text{card } \Omega = 21$

Soit C l'événement : « la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à 4 ». On a $\text{card } C = C_5^1 + C_6^1 = 11$ (5 boules numérotées 5 et 6 boules numérotées 6).

$$\text{D'où } p(C) = \frac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} = \frac{11}{21}$$



Ω étant l'ensemble de tous les nombres que l'on peut former, alors $\text{card } \Omega = 36$. Le dé étant ordinaire (non truqué), l'expérience satisfait à

l'hypothèse d'équiprobabilité. Les résultats possibles sont représentés dans le tableau suivant :

1 ^{er} \ 2 ^{ème}	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Par lecture du tableau on a :

$$\text{Card A} = 18 \text{ d'où } p(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ et Card B} = 6 \text{ d'où } p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Card C} = 10 \text{ d'où } p(C) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \text{ et Card D} = 11 \text{ d'où } p(D) = \frac{11}{36}$$



On a un tirage successif et sans remise de trois jetons parmi 10 donc card $\Omega = A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

a) Soit A l'événement : « On obtient trois chiffres deux à deux distincts ». Pour réaliser A nous devons tirer un jeton portant un numéro 1, un jeton portant un numéro 2 et le jeton portant le numéro 3. Donc card A = $(C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1) \times 3!$ où 3 est le nombre de permutation de

L'ensemble des trois jetons. On a : card A = 120, d'où $p(A) = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$.

b) Soit B l'événement : « on obtient le nombre 111 ».

$$\text{On a : Card B} = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ d'où } p(B) = \frac{60}{720} = \frac{1}{12}$$

c) Soit C_1 l'événement : « On obtient le nombre 122 ». C'est l'ensemble des suites formées d'un jeton portant le numéro 1 et deux jetons portant le numéros 2 ($C_4^1 \times C_3^2$ possibilités) d'où card $C_1 = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60$

$$\text{et par suite } p(C_1) = \frac{60}{720} = \frac{1}{12}$$

d) Soit l'événement : « on obtient un nombre dont au moins un des chiffres est 1 ». L'événement contraire de C est \bar{C} : « on obtient un nombre dont aucun des chiffres n'est 1 ».

\bar{C} est l'ensemble des suites de trois éléments distincts, de l'ensemble des cinq jetons qui ne portent pas le numéro 1 ;

$$\text{card } \bar{C} = A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ d'où } p(\bar{C}) = \frac{60}{720} = \frac{1}{12} \text{ donc } p(C) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$



On a : 8 boules noires et 12 boules blanches.

1) On tire simultanément 5 boules de l'urne, l'univers Ω associé à cette épreuve est donc l'ensemble de tous les tirages de 5 boules de l'urne donc $\text{card } \Omega = C_{20}^5$.

a) Soit A l'événement : « On tire 3 boules blanches et 2 boules noires ».

$$\text{Donc } \text{card } A = C_8^2 \cdot C_{12}^3 \text{ d'où } p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{C_8^2 \cdot C_{12}^3}{C_{20}^5} = \frac{385}{969}$$

b) Soit B l'événement : « tirer 5 boules de couleurs différentes » donc

\bar{B} est l'événement : « tirer 5 boules de même couleur ». On a :

$$\text{card } \bar{B} = C_{12}^5 + C_8^5 \text{ donc } p(\bar{B}) = \frac{C_{12}^5 + C_8^5}{C_{20}^5} = \frac{53}{969}. \text{ Ainsi } p(B) = 1 - \frac{53}{969} = \frac{916}{969}$$

2) On tire successivement 5 boules de l'urne en remettant la boule tirée après chaque tirage. L'univers Ω associé à cette épreuve est l'ensemble des tirages obtenus donc $\text{card } \Omega = 20^5$

a) Soit C l'événement : « on obtient 3 boules blanches et 2 boules noires dans cet ordre ». On a

$$\text{card } C = (C_{12}^1)^3 \times (C_8^1)^2 \text{ donc } p(C) = \frac{12^3 \times 8^2}{20^5} = \frac{108}{3125}$$

b) Soit D l'événement : « on obtient 3 boules blanches et 2 boules noires dans un ordre quelconque ». On a :

$$\text{card } D = \frac{5!}{2!3} \times \text{card } C = 10 \times \text{card } C \text{ d'où } p(D) = 10 \times p(C) = \frac{216}{625}. \text{ Où } 5! \text{ est le}$$

nombre de permutation de l'ensemble des 5 boules et on a divisé par $2!3!$ car on a 2 boules de même couleur noires et 3 boules de même couleur blanche.

3) a) On tire successivement 3 boules en remettant la boule après chaque tirage si elle est blanche, en ne la remettant pas si elle est noire. La probabilité d'avoir une boule blanche au premier tirage est :

$$\frac{C_{12}^1}{C_{20}^1} \times \frac{C_8^1}{C_{20}^1} \times \frac{C_7^1}{C_{19}^1} = \frac{12}{20} \times \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \text{ celle d'avoir une boule blanche au}$$

second tirage est : $\frac{C_8^1}{C_{20}^1} \times \frac{C_7^1}{C_{19}^1} \times \frac{C_{12}^1}{C_{19}^1} = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{12}{19}$. Enfin la probabilité

d'avoir une boule blanche au dernier tirage est : $\frac{C_8^1}{C_{20}^1} \times \frac{C_7^1}{C_{19}^1} \times \frac{C_{12}^1}{C_{18}^1} = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{12}{18}$.

Donc la probabilité d'avoir une boule blanche est :

$$\begin{aligned} & \frac{12}{20} \times \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{8}{20} \times \frac{12}{19} \times \frac{7}{19} + \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{12}{18} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{7}{19} + \frac{2}{5} \times \frac{12}{19} \times \frac{7}{19} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{19} \times \frac{2}{3} = \frac{42}{475} + \frac{408}{1805} + \frac{68}{285} = \frac{14974}{27075} = 0,55 \end{aligned}$$

b) Soit l'événement E : « Avoir au moins un boule blanche ».

l'événement contraire \bar{E} est : « avoir aucune boule blanche » c'est à dire avoir les 3 boules tirées noires.

donc $p(\bar{E}) = \frac{C_8^1}{C_{20}^1} \times \frac{C_7^1}{C_{19}^1} \times \frac{C_6^1}{C_{18}^1} = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{6}{18} = \frac{14}{285}$ d'où $p(E) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - \frac{14}{285} = \frac{271}{285}$



a) Les éléments de Ω sont l'ensemble de 3 jetons pris parmi 6.

Donc $\text{card } \Omega = C_6^3 = 20$.

Soit A l'événement : « on obtient les trois couleurs bleu, blanc et rouge ». Pour réaliser A nous devons choisir un jeton parmi les deux blancs ; un jeton parmi les deux bleus et le jeton rouge on a

$\text{card } A = C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 4$. Donc $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

b) l'univers Ω_1 associé à l'épreuve est l'ensemble des suites de trois éléments (distincts ou non) de l'ensemble des six jetons on a $\text{card } \Omega_1 = 6^3 = 216$. Si B désigne l'événement : « on obtient les trois couleurs bleu, blanc et rouge », on a $\text{card } B = (C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1) \times 3!$ où 3! est le nombre de

permutations de l'ensemble des trois jetons d'où $p(B) = \frac{4 \times 3!}{216} = \frac{1}{9}$

c) l'univers Ω_2 associé à l'épreuve est l'ensemble des suites des trois éléments distincts de l'ensemble des six jetons.

On a $\text{card } \Omega_2 = C_6^1 \times C_5^1 \times C_4^1 = 120$. Soit l'événement C : « On obtient les trois couleurs bleu, blanc et rouge ».

On a : $\text{card } C = (C_2^1 \times C_2^1 \times C_4^1) \times 3!$. Donc $p(C) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.



Les cercles ont pour rayons respectifs 2, 6 et 10 cm ; ainsi les zones C_1 , C_2 et C_3 ont pour aires :

$$a_1 = 10^2 \pi - 6^2 \pi = 64 \pi \text{ cm}^2; \quad a_2 = 6^2 \pi - 2^2 \pi = 32 \pi \text{ cm}^2;$$

$$a_3 = 2^2 \pi = 4 \pi \text{ cm}^2$$

les probabilités p_1, p_2 et p_3 sont alors proportionnelle à a_1, a_2 et a_3 donc

$$\text{il existe un réel } \alpha \text{ tel que : } \frac{p_1}{a_1} = \frac{p_2}{a_2} = \frac{p_3}{a_3} = \alpha$$

donc $p_1 = \alpha a_1 = 64 \pi \alpha$; $p_2 = \alpha a_2 = 32 \pi \alpha$; $p_3 = \alpha a_3 = 4 \pi \alpha$. Notons p_0 la probabilité de manquer la cible.

D'après l'énoncé, $p_0 = \frac{1}{4}$ (car le joueur atteint la cible 3 fois sur 4 donc

il manque la cible 1 fois sur 4) Comme $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, on en

$$\text{déduit : } \frac{1}{4} + 64 \pi \alpha + 32 \pi \alpha + 4 \pi \alpha = 1 \text{ c'est à dire}$$

$$\frac{1}{4} + 100 \pi \alpha = 1 \Leftrightarrow 100 \pi \alpha = \frac{3}{4} \text{ d'où } \alpha = \frac{3}{400 \pi}$$

Ainsi les probabilités cherchées sont :

$$p_1 = 64 \pi \times \frac{3}{400 \pi} = \frac{192}{400}; \quad p_2 = 32 \pi \times \frac{3}{400 \pi} = \frac{96}{400} \text{ et } p_3 = 4 \pi \times \frac{3}{400 \pi} = \frac{12}{400}$$

$$\text{Soit après simplification : } p_1 = \frac{12}{25}; \quad p_2 = \frac{6}{25} \text{ et } p_3 = \frac{3}{100}$$

10 Posons $x = p(\{6\})$. l'énoncé se traduit de la manière suivante :

$$p(\{1\}) = 2x; \quad p(\{2\}) = p(\{4\}) = p(\{6\}) = x;$$

$$p(\{3\}) = p(\{5\}) = \frac{2}{3} p(\{1\}) = \frac{4}{3} x$$

La relation $p(\Omega) = 1$ équivaut à : $p(\{1\}) + p(\{2\}) + \dots + p(\{6\}) = 1$.

$$\text{Soit à } 2x + 3x + 2 \times \frac{4}{3} x = 1 \text{ ou encore } \frac{23}{3} x = 1 \text{ d'où } x = \frac{3}{23}$$

Résumons ces résultats dans un tableau :

Evènement	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
Probabilité	$\frac{6}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{3}{23}$

L'évènement E : « obtenir un nombre impair ».

$$p(E) = p(\{1\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) = \frac{6}{23} + \frac{4}{23} + \frac{4}{23} = \frac{14}{23}$$

11 On a un tirage simultané de deux boules parmi 9 donc $\text{card } \Omega = C_9^2 = 36$.

1) Soit l'évènement A : « obtenir deux boules tel que l'on ait $a = b$ ».

Il ya deux boules qui porte le n° 4 et deux autres qui porte le n° 5 et deux autres boules qui porte le n°6.

Donc card A = $C_2^2 + C_2^2 + C_2^2 = 3$ d'où $p(A) = \frac{1}{12}$.

2) a) Soit l'événement B : « obtenir deux boules de couleurs différents ». C'est à dire obtenir une boule rouge parmi les 6 et une boule blanche parmi les 3. Donc card B = $C_6^1 \times C_3^1 = 18$ et par suite $p(B) = \frac{1}{12}$

b) Soit l'événement C : « obtenir deux boules de même couleur » en remarque que $C = \bar{B}$ (l'événement contraire de B) et par suite

$p(C) = 1 - p(B) = \frac{1}{2}$

c) Soit l'événement D : « obtenir deux boules de même parité ». On remarque qu'il ya 5 boules paires et 4 boules impaires donc

card D = $C_4^2 + C_5^2 = 16$ d'où $p(D) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

3) Soit l'événement E : « obtenir deux boules tels que $a + b \equiv 0 \pmod{4}$ ». $a + b \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow a + b = 4$ ou $a + b = 8$ ou $a + b = 12$

Donc $\{a, b\} \in \{\{1, 3\}; \{4, 4\}; \{2, 6\}; \{6, 6\}; \{3, 5\}\}$

d'où $p(E) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 + C_2^2 + 2C_1^1 \times C_2^1 + C_2^2}{36} = \frac{5}{36}$

4) Soit l'événement F : « obtenir deux boules, dont une et une seulement porte un numéro impaire et une seulement rouge ».

D'après le tableau suivant : On a card F : $C_3^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_3^1 = 9$

D'où $p(F) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Couleur \ Parité	Pair	impair
Rouge	3	3
Bleu	2	1

12

1) \Rightarrow A partir du sommet A nous avons un seul triangle équilatéral : ACE. \Rightarrow A partir du sommet B nous avons un seul triangle équilatéral : BDF. Ce qui fait 2 triangles équilatéraux.

\Rightarrow A partir du sommet A nous avons un seul triangle Isocèle non équilatéral : ABF ; de même à partir de chaque sommet. Ce qui fait 6 triangles isocèles non équilatéraux.



\Rightarrow Un triangle rectangle est inscrit dans un demi cercle, Il faut donc partir d'un diamètre.

A partir de [AD] il ya ABD, ACD, AED, AFD, ce qui en fait 4.

De même avec les diamètre [CF] et [BE].

CE qui fait $4 \times 3 = 12$ triangles rectangles.

Il y a $C_6^3 = 20$ façon de choisir 3 sommets au hasard. Tous les tirages sont équiprobables, nous pourrons appliquer la formule du cours.

a) La probabilité d'obtenir un triangle équilatéral est égal à $\frac{C_1^1}{C_6^3} = \frac{1}{20}$.

b) La probabilité d'obtenir un triangle isocèle non équilatéral est égale à $\frac{C_6^1}{C_6^3} = \frac{3}{10}$.

c) La probabilité d'obtenir un triangle rectangle est égale à $\frac{C_{12}^1}{C_6^3} = \frac{13}{5}$.

2) a) les tirages sont indépendants nous pouvons appliquer la formule du cours. La probabilité d'obtenir trois fois un triangle équilatéral est égale à $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^3}$.

b) Faisons un tableau pour voir les différents cas répondant à la

question, en notant E l'événement obtenir un triangle équilatéral et \bar{E} l'événement contraire.

1 ^{er} tirage	2 ^{ème} tirage	3 ^{ème} tirage
E	\bar{E}	\bar{E}
\bar{E}	E	\bar{E}
\bar{E}	\bar{E}	E

On a $p(E) = \frac{1}{10}$ et celle $p(\bar{E}) = \frac{9}{10}$

Nous avons dans les trois cas comme probabilité $\frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10}$.

La probabilité d'obtenir exactement une fois un triangle équilatéral est égale à $3 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{243}{10^3}$.



1) Le nombre de configuration possible pour que les 3 boules tombent dans les 3 trous est le nombre de permutation des 3 boules dans les 3 trous donc il y a $A_3^3 = 3! = 6$ configuration toutes équiprobables.

2) La probabilité de chacune des configurations est : $\frac{1}{6}$.

3) Soit l'événement E_1 : « la boule verte est tombée dans le trou du haut ». Si la boule verte est tombée dans le trou du haut donc elle a C_1^1

possibilité, Il reste 2 trous donc la deuxième boule à C_2^1 possibilités, il reste 1 trou donc la dernière boule à C_1^1 possibilité

donc $\text{card } E_1 = C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 1 \times 2 \times 1 = 2$ D'où $p(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

⇒ Soit l'événement E_2 : « La boule bleue est tombée dans le trou du haut ». En appliquant le même raisonnement que précédemment

On a : $\text{card } E_2 = 1 \times 2 \times 1 = 2$ d'où $p(E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

⇒ Soit l'événement E_3 : « La boule verte est tombée dans le trou du haut et la bleue dans le trou droit ». Dans ce cas la boules verte à C_1^1 possibilité et la boule bleue à aussi C_1^1 possibilité (car les deux trou sont (fixé), il reste qu'un seul trou dont la 3^{ème} boule a aussi C_1^1 possibilité

donc $\text{card } E_3 = C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 = 1$ d'où $p(E_3) = \frac{1}{6}$

\overline{E}_4 : « La boule bleue n'est pas tombée dans le trou du haut ».

\overline{E}_4 : « la boule bleue a tombée dans le trou du haut » donc en appliquant le même raisonnement on a :

$p(\overline{E}_4) = \frac{2}{6}$ d'où $p(E_4) = 1 - p(\overline{E}_4) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$



Soit l'épreuve E : « on tire successivement et sans remise deux boules parmi sept boules ». L'univers Ω associé à E est l'ensemble des arrangements de deux Eléments d'un ensemble à 7 éléments.

Donc $\text{card } \Omega = A_7^2 = 7 \times 6 = 42$

• A est l'événement : « les 2 boules sont blanches ».

Donc $\text{card } A = A_4^2 = 4 \times 3 = 12$. D'où $p(A) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$

• B est l'événement : « les 2 boules sont de la même couleur ». C 'est à dire « Avoir 2 boules blanches ou 2 noires ».

Donc $\text{card } B = \text{card } A + A_3^2 = 12 + 3 \times 2 = 18$ d'où $p(B) = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$

• C est l'événement : « les 2 boules portent le même n° » c'est à dire « Avoir 2 boules portent le n° 1 ou le n° 2 ou le n° 3 ». Or il ya 2 boules qui portant le n° 1 et 2 boules qui portent le n°2 et 2 boules qui portent le n°3 donc $\text{card } C = A_2^2 + A_2^2 + A_2^2 = 2 + 2 + 2 = 6$ d'où $p(C) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$

• D est l'événement : « les 2 n° sont pairs ».

Or il ya 3 n° pairs donc $\text{card } D = A_3^2 = 3 \times 2 = 6$ d'ou $p(D) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$

• E est l'événement : « les 2 n° ont même parité » c'est à dire « les n° 2 sont paire ou sont impairs ». Or il ya 3 n° paires et 4 n° impaires donc

$\text{card } E = \text{card } D + A_4^2 = 6 + 4 \times 3 = 18$ d'ou $p(A) = \frac{1}{12}$

• f est l'événement : « il ya au plus n°4 ». C'est à dire avoir les ns° 1, 2, 3, 4 donc $H = \{A, B, C, D, E, F\}$ d'ou $p(F) = 1$.

• G est l'événement : « la première boule est la noire n° 1 » donc

$\text{card } G = A_1^1 \times A_6^1 = 1 \times 6 = 6$ d'ou $p(G) = \frac{1}{7}$

• $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{5}{7}$

• $C \cap G$: « La 1^{er} boule est la noire n°1 et la 2^{ème} est la blanche n°1 ».

dont $\text{card } (C \cap G) = A_1^1 \times A_1^1 = 1 \times 1 = 1$ d'ou $p(C \cap G) = \frac{1}{42}$.

• $p(A \cup E) = p(A) + p(E) - p(A \cap E)$ or $A \cap E$: « les deux boules sont blanches et de même parité » donc $\text{card } (A \cap E) = A_2^2 + A_2^2 = 4$ (car il y a deux boules blanches impaires et deux boules blanches paires)

D'où $p(A \cup E) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{4}{42} = \frac{13}{21}$.

15

L'univers Ω dans notre cas est l'ensemble des applications d'un ensemble à 4 élément (4 enfants) dans un ensemble à 2 élément (les deux sexes). Donc $\text{card } \Omega = 2^4 = 16$.

• A : « elle ne c'est pas de garçon ». C'est à dire que les quatre enfants sont des filles d où $\text{card } A = 1^4 = 1$ d'ou $p(A) = \frac{1}{16}$.

• B : « elle a au moins un garçon ». En remarque que $B = \bar{A}$ avec \bar{A} est l'événement contraire de l'événement A d'ou $p(B) = 1 - p(A) = \frac{15}{16}$.

• C : « elle a au plus deux garçons » c'est à dire elle a 2 garçons et 2 filles où 1 garçon et 3 filles où 4 filles donc :

$\text{card } C = (1^2 \times 1^2) \times \frac{4!}{2! \times 2!} + (1 \times 1^3) \times \frac{4!}{3!} + \text{card } A$

d'ou $\text{card } C = 1 \times 6 + 1 \times 4 + 1 = 11$.

• $4!$ est le nombre de permutations des 4 enfants et on a divisé par $2! \times 2!$ car on a deux enfants de même sexe garçons et deux autres de même sexe et qui sont des filles.

• Même explication pour $\frac{4!}{3!}$. Donc $p(C) = \frac{11}{16}$.

• D : « elle a des garçons et des filles ».

• \bar{D} : « elle a que des garçon ou que des filles » $\text{card } \bar{D} = 2 \times 1^4 = 2$.

D'où $p(\bar{D}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ et donc $p(D) = 1 - p(\bar{D}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

• E : « elle n'a qu'un garçon » c'est à dire elle a 1 garçon et 3 filles donc $\text{card } E = 1 \times 1^3 \times \frac{4!}{3!} = 1 \times 4 = 4$ d'où $p(E) = \frac{1}{4}$.

• F : « elle a autant de garçons que de filles ». C'est à dire elle a 2 garçons et deux filles donc

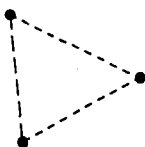
$\text{card } F = (1^2 \times 1^2) \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 1 \times 6 = 6$ d'où $p(F) = \frac{3}{8}$

16

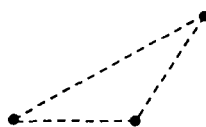
L'univers Ω est l'ensemble des permutations de six oignons donc $\text{card } \Omega = 6! = 720$. Le jardinier les prend au hasard, il ya équiprobabilité il ya trois types de dispositions des oignons :



Type I



Type II



Type III

- l'événement A : « les fleurs jaunes forment un triangle rectangle » les fleurs jaunes forment un triangle rectangle lorsque deux d'entre elles sont diamétralement apposées, comme dans la première disposition. Le sommet de l'angle droit du triangle à six places possibles, pour une de ces places il ya deux triangles (par symétrie). Il ya donc 12 réarrangements des places possibles pour cette configuration. Dans chaque cas, on ne peut permuer $3! = 6$ manières les oignons jaunes d'une part, les rouges d'autre part. Donc $\text{card } A = 12 \times 6 \times 6 = 432$ d'où $p(A) = \frac{432}{720} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

• B : « les fleurs rouges forment un triangle rectangle ». Lorsque les fleurs jaunes forment un triangle rectangle, les rouges forment aussi un triangle rectangle donc $\text{card } A = \text{card } B$ et par suite $p(B) = p(A) = 0,6$.

• C : « les fleurs jaunes forment un triangle équilatéral » les fleurs jaunes forment un triangle équilatéral lorsque la disposition est du deuxième type. Il ya deux triangles possibles. Pour chacun des triangles, on peut permuter de $3! = 6$ manière les oignons jaune d'une part, les rouges d'autre part

d'où card C = $2 \times 6 \times 6 = 72$. Donc $p(C) = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$

• D : « les fleurs jaunes forment un triangles isocèle ». Les fleurs jaunes forment un triangle isocèle lorsque la déposition est du deuxième ou du troisième type. Pour le troisième type, il y a six triangles possibles, déterminés par la place du sommet de l'angle obtus. Pour chacun des triangles, on peut permuter de $3! = 6$ manières les oignons jaunes d'une part, les rouges d'autre part

donc card D = $(2+6) \times 6 \times 6 = 288$ d'où $p(D) = \frac{288}{720} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

On peut remarquer aussi que l'événement D est égal à l'événement contraire \bar{A} .



* On tire deux boules de l'urne successivement et sans remise, donc l'univers Ω est l'ensemble des arrangements de deux éléments d'un ensemble a 6 éléments, d'où card $\Omega = A_6^2 = 6 \times 5 = 30$.

1) les résultats des tirages possibles sont :

$$\{(1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (2,1) ; (2,2) ; (2,3) ; (3,1) ; (3,2)\} ;$$

$$p\{(1,1)\} = \frac{A_3^2}{A_6^2} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} ; p\{(1,2)\} = \frac{A_3^1 \times A_2^1}{A_6^2} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

$$p\{(1,3)\} = \frac{A_3^1 \times A_1^1}{A_6^2} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} ; p\{(2,1)\} = \frac{A_2^1 \times A_3^1}{A_6^2} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

$$p\{(2,2)\} = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} ; p\{(2,3)\} = \frac{A_2^1 \times A_1^1}{A_6^2} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

$$p\{(3,1)\} = \frac{A_1^1 \times A_3^1}{A_6^2} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} ; p\{(3,2)\} = \frac{A_1^1 \times A_2^1}{A_6^2} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

2) Soit A l'événement : « les deux nombres tirés sont égaux (a = b) »

on a : $A = \{(1,1); (2,2)\}$.

Donc $p(A) = p\{(1,1)\} + p\{(2,2)\} = \frac{6}{30} + \frac{2}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

* Soit B l'événement : « la 1^{ère} nombre tiré est strictement supérieur au second(a>b) ». On a :

$B = \{(2,1); (3,1); (3,2)\}$; donc $p(B) = p\{(2,1)\} + p\{(3,1)\} + p\{(3,2)\}$

$$p(B) = \frac{6}{30} + \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{11}{30}$$

* Soit C l'événement : « la 1^{ère} nombre tiré est inférieur au second

($a \leq b$) ». On a : $C = \overline{B}$ donc $p(C) = 1 - p(B) = 1 - \frac{11}{30} = \frac{19}{30}$.

3) On note X la valeur absolue de la différences des deux nombres tirés c'est à dire $X = |a-b|$.

a) L'ensemble des valeurs possibles de X est $E = \{0, 1, 2\}$.

$$* p(x=0) = p\{(1,1)\} + p\{(2,2)\} = \frac{6}{30} + \frac{2}{30} = \frac{8}{30}$$

$$* p(x=1) = p\{(1,2)\} + p\{(2,1)\} + p\{(2,3)\} + p\{(3,2)\} = \frac{6}{30} + \frac{6}{30} + \frac{2}{30} + \frac{2}{30} = \frac{16}{30}$$

$$* p(x=2) = p\{(1,3)\} + p\{(3,1)\} = \frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{6}{30}$$



1) urne contient : n boules noires et deux boules rouges.

$$p(A) = \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} = \frac{1}{\frac{(n+2)!}{2!n!}} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

B : avoir deux boules de mêmes couleurs. C'est à dire 2 rouges ou 2noires

$$p(B) = \frac{C_2^2 + C_n^2}{C_{n+2}^2} \text{ or } C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2(1 + \frac{(n-1)}{2})}{(n+2)(n+1)} = \frac{2+n^2-n}{(n+2)(n+1)}$$

$$b) p(A) = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow 30 = (n+2)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 28 = 0, \Delta = 9 + 4 \times 28 = 121$$

$$n' = \frac{-3+11}{2} = 4 \text{ et } n'' = \frac{-3-11}{2} \notin \mathbb{N} \text{ d'ou } n = 4$$

2) L'urne contient : 4 Noires et 2 Rouges soit $N_0 N_1 N_1 N_2$ et $R_1 R_2$

a) E : avoir 2 boules de mêmes couleurs $p(E) = \frac{A_4^2 + A_2^2}{A_6^2} = \frac{13}{30}$

b) F : avoir deux boules de même parité, ou encore 2 pairs ou 2

impairs $p(F) = \frac{A_3^2 + A_3^2}{A_6^2} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

c) H : avoir au moins une boule qui porte le $n^o 1$

\overline{H} : aucune des boules ne porte $n^o 1$.

$$p(\bar{H}) = \frac{A_3^2}{A_6^2} = \frac{6}{30} \Rightarrow p(H) = 1 - p(\bar{H}) = 1 - \frac{6}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

d) k : avoir 1 boule noire et 1 seule boule qui porte n°1

c'est à dire $N_1 R_2$ ou $N_2 R_1$ ($\bar{1}$: n'est pas 1)

$$p(k) = \frac{A_2^1 A_1^1 \times 2 + A_1^1 A_2^1 \times 2}{A_6^2} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

3) On tire 3 boules successivement et avec remise

pour une boule qui porte 1 on gagne 10 d

pour une boule qui porte 2 on gagne 20d

pour une boule qui porte 0 on perd 5d

a) L : le joueur gagne 40d (10 ;, 10, 20) ou (20, 10, 10) ou (10, 20, 10)

$$p(L) = \frac{3^2 \times 2^1 \times 3}{6^3} = \frac{1}{4}$$

b) I : le joueur gagne une somme supérieur ou égale à 40.

(10, 10, 20) ou (20, 10, 10) ou (10, 20, 10) ou (20, 20, 10)

ou (10, 20, 20) ou (20, 10, 20) ou (20, 20, 20)

$$p(I) = \frac{3^2 \times 2 \times 3 + 2^2 \times 3^1 \times 3 + 2^3}{6^3} = \frac{98}{216} = \frac{49}{108}$$



1) a) L'urne contient : 5 blanches et n-5 noires

$$p(E_1) = \frac{A_5^2 + A_{n-5}^2}{A_n^2} = \frac{20 + (n-5)(n-6)}{n(n-1)} = \frac{n^2 - 11n + 50}{n(n-1)}$$

$$p(E_2) = 2 \cdot \frac{A_5^1 A_{n-5}^1}{A_n^2} = \frac{10(n-5)}{n(n-1)}$$

$$b) p(E_1) < p(E_2) \Leftrightarrow \frac{n^2 - 11n + 50}{n(n-1)} < \frac{10n - 50}{n(n-1)} \text{ or } n > 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 11n + 50 < 10n - 50 \Leftrightarrow n^2 - 21n + 100 < 0$$

x	-∞	7,29	13,75	+∞
x ² -21x + 100	+	○	-	○
		+		+

⇒ Les entiers dans [7,29 ; 13,75] qui sont supérieur ou égal à 7 sont 8, 9 jusqu'à 13.

2) les 5 boules blanches portent : -2, -2, -2, 3, 3

les 3 noires portent : 3, 3, 3.

$$p(A) = \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_8^3} = \frac{11}{56} \text{ et } p(B) = \frac{C_3^1 \times C_5^2 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{31}{56}$$

D : avoir 3 boules de mêmes couleurs $p(D) = \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_8^3} = \frac{11}{56}$

$p(C) = p(D \cup A) = p(D) + p(A) - p(A \cap D) = \frac{11}{56} + \frac{11}{56} - \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{20}{56}$

3) Le mode est 1 qui correspond à l'effectif le plus grand 15.

$\bar{X} = 1,04$ et $V(x) = 3$ et $T_x = 1,73$

20

Diamètre \ Epaisseur	1	2	3	4	Totaux
8	5	6	9	0	20
10	5	10	11	4	30
12	6	15	3	2	26
15	7	6	5	6	24
totaux	23	37	28	12	100

1) a) A événement : avoir une rondelle d'épaisseur 3 mm
on lit le total de la colonne qui correspondent à 3 mm d'épaisseur

alors $p(A) = \frac{28}{100} = 0,28$

b) B événement : avoir une rondelle de diamètre Ko mm $p(B) = \frac{30}{100} = 0,3$

c) C événement : avoir une rondelle de épaisseur 2 mm et de diamètre 12 mm on lit le nombre situé à l'intersection de la colonne 2 mm

et la ligne de 12 mm alors $p(C) = \frac{15}{100} = 0,15$

d) D : avoir une rondelle de diamètre supérieur à 11 mm on additionne les

totaux des lignes qui correspond à 12 mm et 15 mm alors $p(D) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

2) a) il ya 23 pièces d'épaisseur 1

E : avoir au moins une rondelles d'épaisseur 1.

\bar{E} : aucun des rondelles n'est d'épaisseur 1.

$p(\bar{E}) = \frac{C_{87}^2}{C_{100}^2} = \frac{3741}{4950} = \frac{1247}{1650}$ et $p(E) = 1 - p(\bar{E}) = \frac{403}{1650}$

b) F : au plus une rondelle de diamètre 8 mm c'est à dire 0 ou une

$p(E) = \frac{C_{80}^2 + C_{20}^1 C_{80}^1}{C_{100}^2} = \frac{4760}{4950} = \frac{476}{495}$

Chapitre XIII

Statistiques

I) Statistiques à une variable quantitative :

N : effectif total, $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

• Variable continue :

Classe	$[a_0, a_1[$	$[a_{p-1}, a_p[$
Effectifs n_i	n_1	n_p
Fréquence f_i	$\frac{n_1}{N}$	$\frac{n_p}{N}$

Centre de classe $[a_{k-1}, a_k[$ est $x_k = \frac{a_{k-1} + a_k}{2}$

• Variable discontinue où discrète :

Valeur x_i	x_1	x_2	x_p
Effectifs n_i	n_1	n_2	n_p
Fréquences f_i	$\frac{n_1}{N}$	$\frac{n_2}{N}$	$\frac{n_p}{N}$

• La Fréquence en pourcentage est $\frac{n_i}{N} \times 100$

Paramètres de position :

■ **Moyenne simple:** $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$

■ **Moyenne pondérés:** Moyenne de la série (x_i, n_i)

$$\bar{X} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \dots + n_k \cdot x_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i \text{ et } N = \sum_{i=1}^n n_i$$

Paramètres de dispersion :

■ Variance:

* Variance de la série x : $V_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

* Variance de la série (x_i, n_i) : $V_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$

■ **Ecart - type:** Dans tous les cas on a : $\sigma_x = \sqrt{V_x}$.

Remarque :

- Une série ayant un faible écart-type est une série dont les valeurs sont peu dispersées.
- Une série ayant un écart-type important est une série dont les valeurs sont très dispersées.

■ Diagramme en boîte :

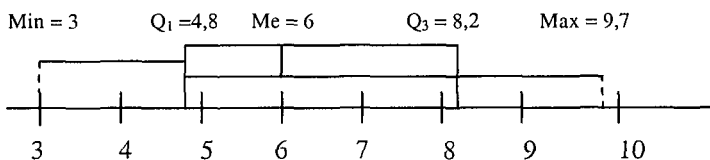
Les deux quartiles Q_1 , Q_3 et la médiane Me d'une série statistique associés aux valeurs extrêmes (minimum et maximum) permettent d'appréhender certaines caractéristiques de la répartition des données. On les représente souvent par un diagramme en boîte.

Exemple :

Voici la liste des températures relevées sous abri à différents moments d'une journée, rangées par ordre croissant et exprimées en degrés Celsius.

3- 3,8 - 4,5 - 5- 5,5 - 5,7 - 5,8- 6,2- 7- 7, 3- 8,2 - 9- 9,2 - 9,5 - 9,7

Voici le diagramme en boîte de cette série .



Ce diagramme est souvent employé pour comparer la répartition de deux séries.

■ L'écart interquartile :

L'écart interquartile relatif d'une série statistique à une variable quantitative est égale au quotient de l'écart interquartile par la médiane de la série. C'est un nombre sans unité qui peut être exprimé en pourcentage.

On utilise l'écart interquartile relatif lorsqu'on veut comparer les dispersions autour de la médiane de deux séries statistiques dont les valeurs respectives ont des ordres de grandeur différents. Plus L'écart interquartile relatif est faible plus la dispersion autour de la médiane est faible.

Soit une série statistique de valeurs (x_1, x_N) de moyenne \bar{x} et l'écart type σ . Soit a, b deux réels et Y la série statistique de valeur $(ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_N + b)$. On désigne par \bar{Y} et σ' la moyenne et l'écart type de y alors $\bar{Y} = a\bar{x} + b$ avec $\sigma' = |a|\sigma$

X une série statistique de moyenne \bar{X} d'écart type σ .

On dit que X est une distribution normale ou gaussienne lorsque le polygone des effectifs est tel que environ

- 68 % des effectifs sont situés dans $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$
- 95 % des effectifs sont situés dans $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$
- 99 % des effectifs sont situés dans $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$

Dans ce cas, le polygone des effectifs à la forme d'une cloche symétrique par rapport à la moyenne.

Le réel $\frac{\sigma}{\bar{X}}$ est dit l'écart type relatif de X il peut être exprimé en pourcentage

■ Statistiques à deux variables :

- Etude de deux caractères sur une même population 1^{er} type de tableau à double entrée

$y \backslash x$	x_1	x_2	x_p
y_1	n_{11}	n_{12}	n_{1p}
y_2	n_{22}	n_{22}	n_{2p}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
y_q	n_{q1}	n_{q2}	n_{qp}

Les x_i et les y_i peuvent être remplacés par des classes pour une variable continue.

- **Nuage des points** : Dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) on place les x_i sur l'axe de abscisses et y_i sur l'axe des ordonnées on place les points de coordonnées (x_i, y_i) l'ensemble des points représenté s'appelle **nuage de points**.
- Le point $G(\bar{X}, \bar{Y})$ s'appelle **le point moyen**.

Comment Calculer \bar{X} et \bar{Y} ? (La notation n_{12} : 1 correspond 1^{ère} ligne et 2^{ème} colonne)

x \ y	x_1	x_2	x_p	Distribution marginale de Y
y_1	n_{11}	n_{12}	n_{1p}	$n_{11} + n_{12} + \dots + n_{1p} = N_1$
y_2	n_{21}	n_{22}	n_{2p}	N_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
y_q	n_{q1}	n_{q2}	n_{qp}	N_q
Distribution marginale de X	N'_1	N'_2	N'_p	N

$N'_1 = n_{11} + n_{21} + n_{31} + \dots + n_{q1}$ (on fait la somme des effectifs)

N : le nombre total de l'effectif.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i N'_i}{N} \quad \text{et} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^q y_i N_i}{N}$$

- Si on a des classes on utilise leur centre.
- On peut réaliser le même tableau avec les fréquences

Exemple : $f_{2p} = \frac{n_{2p}}{N}$

2^{ème} type de tableau d'un série à deux caractères :

X	x_1	x_2	x_p
Y	y_1	y_2	y_p

- Le nuage de points : l'ensemble des points $M_i(x_i, y_i)$ placer dans un repère orthogonal.

- Le point moyen $G(\bar{X}, \bar{Y})$ avec $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i}{N}$ et $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^p y_i}{N}$.

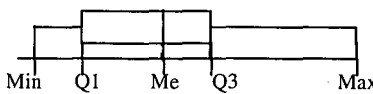
■ Droite d'ajustement affine:

On note P_1 le nuage de points de la 1^{ère} moitié de la série (x, y) et P_2 le nuage de la 2^{ème} moitié de la série. (On divise le tableau statistique en 2 parties quelconques).

- G_1 le point moyen de P_1 et G_2 le point moyen de P_2

La droite (G_1, G_2) est appelée la droite de Mayer ou bien la droite d'ajustement affine du nuage de points représentant la série double (x, y) et elle passe par le point moyen G .

Réflexes :

Situation	Réflexes
Comment déterminer la médiane Me d'une série statistique ?	1) On ordonne les données dans l'ordre croissant : $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 2) Si $n = 2q + 1$ alors $Me = x_{q+1}$ et si $n = 2q$ alors $Me = \frac{1}{2} (x_q + x_{q+1})$
Comment déterminer les quartiles d'une série statistique ?	1) On ordonne les données dans l'ordre croissant : $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 2) $Q_1 = x_i$ où i est le plus petit supérieur ou égal à $\frac{n}{4}$; $Q_3 = x_j$ où j est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{3n}{4}$.
Comment construire un diagramme en boîte ?	1) On détermine le minimum, le maximum, la médiane Me et les quartiles Q_1 et Q_3 de la série. 2) On construit la boîte le long d'une graduation comme ci-dessous. <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">  <p>Le diagramme en boîte est représenté sur une graduation. Les points suivants sont marqués et étiquetés : Min (à l'extrême gauche), Q1 (à gauche de la médiane), Me (à l'intérieur de la boîte, correspondant à la médiane), Q3 (à droite de la médiane), et Max (à l'extrême droite). La boîte elle-même s'étend de Q1 à Q3.</p> </div>
Comment résumer une série statistique ?	Par une mesure de tendance centrale associée à une mesure de dispersion : (moyenne ; écart-type) ou (médiane ; écart interquartile).
Comment retrouver la droite d'ajustement linéaire ? (droite de Mayer)	On divise le tableau en deux parties, on calcule \bar{x}_1 et \bar{y}_1 de la première partie. Puis \bar{x}_2 et \bar{y}_2 celle de la 2 ^{ème} partie. $G_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ et $G_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ alors la droite de Mayer est (G, G_2) puis on écrit son équation $y = ax + b$
Comment estimer la valeur de la variable de la variable y pour une valeur X_0 donnée de X, lors de l'ajustement linéaire de y en X ?	Une estimation de la valeur y est $y_0 = aX_0 + b$

ENONCES

1 QCM

Indiquer la réponse exacte par a, b ou c

- 1) On considère la série statistique

Valeur	10	14	25	30
effectif	400	200	300	100

La variance de cette série est :

- a) 65,12 b) 57,41 c) 57,47

- 2) On considère la série statistique:

x	10	15	20	25
y	5	7	13	5

Les coordonnées du point moyen G est de cette série est :

- a) (7,5 ; 17,5) b) (17,5 ; 7,5) c) (8,75 ; 3,75)

2 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse:

- 1) La variance et l'écart type dans une série statistique sont toujours positifs.
 2) Si f_i est la fréquence de la valeur x_i , alors la variance V est égale à

$$\sum_{i=1}^p (f_i x_i)^2 - (\bar{X})^2.$$

3

Dans une classe de 3^{ème} économie de 33 élèves, les notes du dernier contrôle de mathématiques sont donnée dans le tableau suivant :

x_i	2	4	6	8	10	11	12	13	15	16
n_i	1	4	3	5	5	4	2	3	3	3

- 1) Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.
 2) Pour augmenter la moyenne de la classe le professeur décide d'augmenter toutes les notes d'un point.
 Calculer la moyenne et l'écart type de cette nouvelle série.
 3) Pour augmenter la moyenne de la classe le professeur décide d'augmenter toutes les notes de 10% (on admet de pouvoir noter au 10^{ème} de point).
 Calculer la moyenne et l'écart type de cette nouvelle série.
 4) Compare les deux résultats. Quelle augmentation préférez vous ?

4

Au service de livraison d'une sociétés. On note le nombre de Km parcouru pour chaque livraison on obtient le tableau suivant au cours d'une semaine. Où x_i représente la longueur du parcourt en km et n_i le nombre de livraison.

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
[0, 4[6	[8, 12[50	[16, 20[72	[24, 28[15
[4, 8[30	[12, 16[61	[20, 24[55	[28, 32[3

- 1) Calculer la moyenne et l'écart type .
- 2) Déterminer la médiane, le premier et le 3^{ème} quartile .

5

Dans une entreprise, on fait une étude sur les nombres du personnel ayant contracté un prêt pour l'achat de leur résidence principale. L'étude porte sur le nombre de pièces suivants la catégorie socio - professionnelle. On obtient le tableau suivant :

Catégorie Socio – professionnelle	Nombre de pièces				
	1	2	3	4	5
Ouvriers	6	6	14	11	0
Employés	2	8	27	12	4
Techniciens	2	6	8	14	4
Cadres	4	12	16	23	19

- 1) Réaliser un tableau donnant les fréquences marginales.
- 2) Quel est le pourcentage de personnes ayant obtenu un prêt pour résidence principale de 3 pièces ?
- 3) Quels est le pourcentage de cadre ayant obtenu un prêt ?

6

On considère le série statistique à double caractères x et y donnée par le tableau si dessous :

y \ x	[0, 12[[12, 18[[18, 24[[24, 48[
-5	0	2	4	6
-4	0	2	1	3
0	4	0	0	1
1	6	3	5	0
2	3	0	0	0

On désigne par y_i le centre des classes c_i .

- 1) Représenter le nuage des points.
- 2) Calculer la valeur moyenne de x et y .
- 3) Placer le point moyen G .

7

Le tableau ci-dessous donne pour 22 pays de l'Union Européenne.

- Leur PIB en dollars par habitant pour l'année 2003 ;
- Leur taux d'équipement des ménages en accès à Internet en 2004.

(Source : EUROSTAT)

pays	PIB en\$	Internet en %
Rép. Tchèque	13 300	19
Danemark	33 000	69
Allemagne	25 200	60
Estonie	9 800	31
Grèce	11 853	17
Espagne	17 680	34
France	24 837	34
Irlande	23 710	40
Italie	20 220	34
Chypre	12 700	53
Lettonie	7 700	15

pays	PIB en \$	Internet en %
Lituanie	8 700	12
Luxembourg	38 860	59
Hongrie	11 900	14
Pays-Bas	23 134	71
Autriche	23 401	45
Pologne	9 210	26
Portugal	10 560	26
Slovénie	16 000	47
Slovaquie	11 060	23
Finlande	26 372	51
Royaume-Uni	23 942	56

- Représenter cette série à deux variables par un nuage de points.
- Déterminer le point moyen G du nuage en arrondissant l'abscisse à la centaine, et placer G sur le graphique.
- Utiliser ce nuage de points pour caractériser la liaison entre PIB et taux d'équipement internet pour ces 22 pays.

6

Dans le tableau ci-après, i désigne le numéro de l'observation, X_i désigne le taux d'alphabétisation des femmes (%) et Y_i le taux de mortalité infantile ‰.

I pays	1 Inde	2 Koweït	3 Mauritanie	4 France	5 Ghana	6 Congo	7 Venezuela	8 Japon	9 Madagascar
X_i	25,7	69,6	17	98,7	42,8	55,4	87,8	100	61,6
Y_i	95	34	127	7,7	90	73	25,1	5	120

- Construire le nuage de points associés à cette série statistique double.

On prendra 1 cm pour 10% et 1 cm pour 1 ‰ en ordonnées.

- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série (X_i, Y_i) avec $1 \leq i \leq 9$ plus celui de la série (X_i, Y_i) avec $1 \leq i \leq 8$.

Pour laquelle des séries un ajustement affine est-il le plus approprié ? Justifier la réponse.

* Dans la suite on élimine les données concernant Madagascar, considérant la série (X_i, Y_i) avec $1 \leq i \leq 8$

- déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de Y en X. (les résultats à 10^{-2} près).

CORRIGES

1

1) La réponse est **[b]** car $V = \frac{\sum n_i^2 n_i}{1000} - (\bar{X})^2 = 57,41$.

2) La réponse est **[b]** car $\bar{X} = 17,5$ et $\bar{Y} = 7,5$

2

1) Vraie : $\sigma = \sqrt{V}$ ou σ et V sont toujours positifs.

$$2) \text{ Faux : } V = \frac{\sum_{i=1}^p x_i^2 n_i}{N} - (\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^p x_i^2 \frac{n_i}{N} - (\bar{X})^2$$

$$= \sum_{i=1}^p x_i^2 f_i - \bar{X}^2 \neq \sum_{i=1}^p (x_i f_i)^2 - \bar{X}^2$$

3

1) à l'aide de la calculatrice on trouve $\bar{X} = 9,88$ et $\sigma = 3,88$.

2) Si on augmente toutes les notes de 1 point on a :

x_i	3	5	7	9	11	12	13	14	16	17
n_i	1	4	3	5	5	4	2	3	3	3

à l'aide de la calculatrice on trouve $\bar{X} = 10,88$ et $\sigma = 3,88$

on remarque que lorsque on augmente 1 point la moyenne augmente aussi 1 point mais l'écart type reste le même.

3) Si on augmente de 10% les notes on obtient :

x_i	2,2	4,4	6,6	8,8	11	12,1	13,2	14,3	16,5	17,6
n_i	1	4	3	5	5	4	2	3	3	3

On trouve $\bar{X} = 10,87$ et $\sigma = 4,27$

La moyenne et l'écart type ont été multipliés par 1,1.

4) On voit que pour les notes inférieures à 10 la première augmentation est plus intéressante, alors que les notes supérieures à 10 c'est la deuxième. Pour les copies ayant obtenu 10, les deux méthodes conduisent au même résultat.

Alors que pour la moyenne de la classe, on obtient le même résultat dans les deux cas.

4

1) Résumons tous les calculs dans un tableau :

Classes	x_i (centres)	n_i	$x_i n_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
[0, 4[2	6	12	4	24

[4, 8[6	30	180	36	1080
[8, 12[10	50	500	100	5000
[12, 16[14	61	854	196	11956
[16, 20[18	72	1296	324	23328
[20, 24[22	55	1210	484	26620
[24, 28[26	15	390	676	10140
[28, 32[30	3	90	900	2700
Total		292	4532		80824

La moyenne $\bar{X} = \frac{4532}{292} = 15,52$

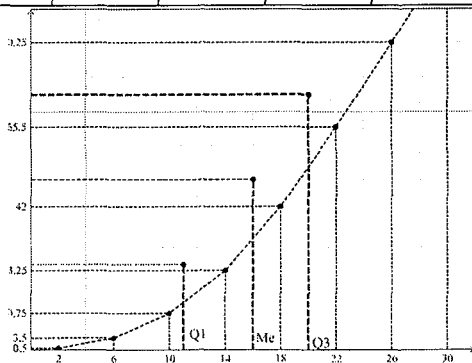
La variance $V = \frac{80824}{292} - (15,52)^2 \approx 35,92$ et $\sigma = \sqrt{V} \approx 5,99$

2) Résumons le calcul dans un tableau :

Classe	[0,4[[4,8[[8,12[[12,16[[16,20[[20,24[[24,28[[28,32[
f_i^{\wedge} en %	2	12	29	50	75	94	99	100

Lorsque une série statistique est regroupée par classe il est d'usage de travailler avec les fréquences f_i^{\wedge} ou f_i^{\wedge} plutôt qu'avec les effectifs.

- La médiane: 50% des livraisons ont un parcours d'où plus de 16 km donc $M_e = 16$.
- $Q_3 = 20$, 75% des livraison ont un par cours de 20km.
- Pour $Q_1 = 11$.



Nombre De pièce Catégorie	1	2	3	4	5	total	Fréquence
Ouvriers	6	6	14	11	0	37	$\frac{37}{198} = 0,187$
Employés	2	8	27	12	4	53	$\frac{53}{198} = 0,268$
Techniciens	2	6	8	14	4	34	$\frac{34}{198} = 0,171$
Cadres	4	12	16	23	19	74	$\frac{74}{198} = 0,374$
Total	14	32	65	60	27	N = 198	
Fréquences	$\frac{14}{198} = 0,071$	$\frac{32}{198} = 0,162$	$\frac{65}{198} = 0,328$	$\frac{60}{198} = 0,303$	$\frac{27}{198} = 0,136$		

- 2) Pour 3 pièces la fréquence marginale est 0,328 soit 32,8%.
 3) Pour les cadres la fréquence marginale est 0,374 soit 37,4%.

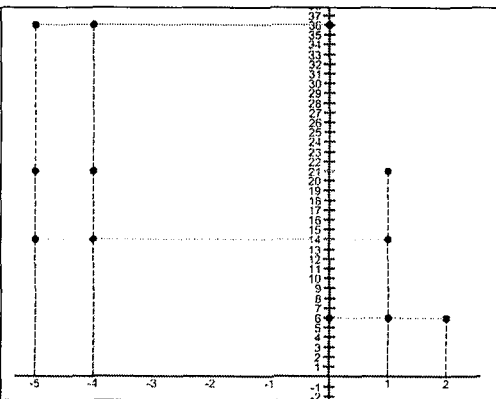
6

1)

c_i	[0, 12[[12, 18[[18, 24[[24, 48[
y_i	6	15	21	36

2)

$y_i \backslash x_i$	6	15	21	36	DMX
-5	0	2	4	6	12
-4	0	2	1	3	6
0	4	0	0	1	5
1	6	3	5	0	14
2	3	0	0	0	3
D.MY	13	7	10	10	



x_i	-5	-4	0	1	2
n_i	12	6	5	4	3

y_i	6	15	21	36
n_i	13	7	10	10

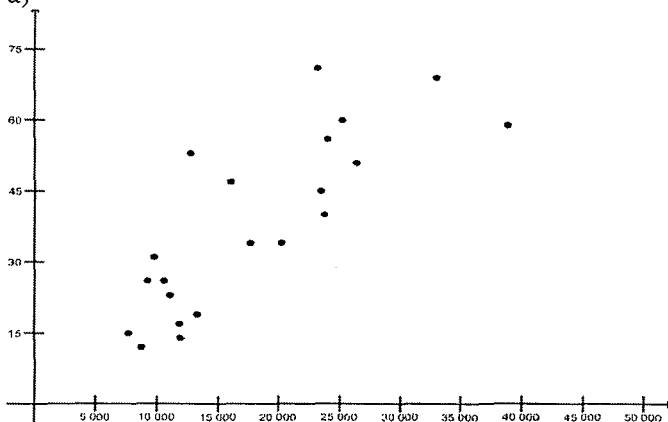
à l'aide de la calculatrice

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i n_i}{40} = -1,6 \quad \text{et} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^4 y_j n_j}{40} = 18,825$$

3) $G(\bar{X}, \bar{Y})$ donc $G(-1,6 ; 18,825)$

7

a)



b) La moyenne des PIB est d'environ 18 300\$ (en effet, $\frac{403139}{22} = 18\,324,5$), et la moyenne des taux d'équipement est 38%

(en effet, $\frac{836}{22} = 38$). On considère donc que le point G a pour coordonnées (18 300 ; 38).

c) La forme du nuage laisse penser que la fonction f qui modéliser la liaison entre les deux variables est croissante, c'est-à-dire que le taux d'équipement Internet a tendance à augmenter en même temps que la richesse du pays. Cependant cette ne semble pas très forté.

Exercices corrigés

pour s'entraîner toute l'année

تمارين وحلول

Proposent pour chacune des notions fondamentales du programme:

- > Des rappels de cours
- > Des exercices progressifs et classés par thèmes couvrant la totalité du programme
- > Tous les corrigés des exercices et des problèmes détaillés et commentés.

هذه المجموعة مقترحة لمعالجة كل المعطيات الأساسية المبرمجة:

- < ملخصات شاملة ومركزة لجميع الدروس
- < تمارين متدرجة ومنظمة حسب المعاور وتهتم كل البرامج
- < فروض مراقبة وتأليفية مقترحة تمكن التلميذ من تقييم مكتسباته
- < إصلاح لكل التمارين والمسائل الرياضية إصلاحا مفصلاً ومحللاً.

Dans la même collection ضمن نفس السلسلة

Cycle de l'enseignement de base

مرحلة التعليم الأساسي

التاسعة أساسي

< جبر
< هندسة

الثامنة أساسي

< جبر وهندسة + فروض مراقبة وتأليفية

السابعة أساسي

< جبر وهندسة + فروض مراقبة وتأليفية

Cycle de l'enseignement secondaire

مرحلة التعليم الثانوي

1^{ère} Année

- > Algèbre
- > Géométrie
- > Devoirs de contrôle et de synthèse

2^{ème} Année

- Section Sciences et technologie de l'informatique
 - > Analyse
 - > Géométrie
 - > Devoirs de contrôle et de synthèse
- Section Economie et Services
 - > Résumé de cours + Exercices corrigés + Devoirs de contrôle et de synthèse

3^{ème} Année

- Section Mathématiques
 - > Analyse
 - > Géométrie et probabilités
- Section sciences expérimentales
 - > Analyse et géométrie
- Section techniques
 - > Analyse et géométrie
- Section Sciences de l'Informatique
 - > Analyse et géométrie
- Section Economie et Gestion
 - > Résumé de cours + Exercices corrigés + Devoirs de contrôle et de synthèse

BAC

- Section Mathématiques
 - > Analyse
 - > Géométrie et probabilités
 - > Problèmes corrigés et commentés
- Section sciences expérimentales
 - > Analyse
 - > Géométrie et probabilités
- Section techniques
 - > Analyse
 - > Géométrie et probabilités
- Section sciences de l'informatique
 - > Analyse
 - > Géométrie et probabilités
- Section Economie et Gestion
 - > Résumé de cours et exercices corrigés



كنوز للنشر والتوزيع

www.Kounouz-Edition.Com

Prix 7⁰.800



ISBN: 9973 - 879 - 08 - 2