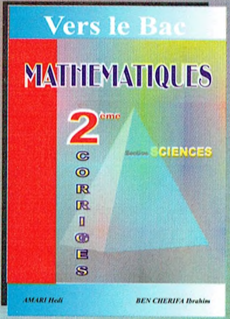
COLLECTION

Vers le Bac



Rappels de Cours
Exercices types
Solutions bien rédigées

Dans la même Collection

Physique Chimie	1ère Année
Physique Chimie	2ème Année (toutes sections)
Physique Chimie	3ème Année (toutes sections)
Physique Chimie	4ème Année (toutes sections)
Mathématiques	1ère Année
Mathématiques	3ème Année (toutes sections)
Mathématiques	4ème Année (toutes sections)

ISBN 997331856-9

PRIX : 6,500 D

MATHEMATIQUES

2ème Année Secondaire

Vers le Bac

MATHEMATIQUES

2ème

Section SCIENCES

C O R R I G E S

AMARI Hedi

BEN CHERIFA Ibrahim

Préface

- Cet ouvrage a été conçu pour être durant toute l'année scolaire un outil de travail complet pour les classes de 2ème année secondaire section sciences.
- Il se compose de deux parties :
  - 1ère Partie .
  - 2ème Partie.
- Chaque chapitre comporte :
  - Un rappel de cours (résultats à retenir) .
  - Exercices types corrigés .
  - Exercices non corrigés .
- Cet ouvrage qui est conforme au nouveau programme a pour but la formation de l'élève et la préparation intensive à l'examen .

Les auteurs : ***AMARI Hédi*** et ***BEN CHERIFA Brahim***

PREMIERE PARTIE

CALCUL DANS $\mathbb{R}$

Résultats à retenir :

❑ <u>Calcul sur les puissances</u> : Pour tous réels non nuls a et b et tous entiers relatifs m et n :

$$(a\times b)^n = a^n \times b^n ,\ (a^n)^m = a^{n.m} \ ,\ a^n.a^m = a^{n+m} ,\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

❑ <u>Produits remarquables</u> : Pour tous réels a et b on a :

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$; $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

❑ <u>Calcul sur les radicaux</u> :

* Soit a un réel positif ; $\sqrt{a}$ est l'unique réel tel que $\sqrt{a}^2 = a$.

* Pour tous réels a et b positifs on a : $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ et

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$$

* Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

❑ <u>Encadrements</u> :

* Pour tous réels a et b positifs on a : ($a\le b$) équivaut à ($a^2\le b^2$)

et ($0<a<b$) équivaut à ($0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$)

* Pour tous réels a et b on a : ($a\le b$) équivaut à ($-b\ge -a$)

et ($a\le b$) équivaut à ($a+c\le b+c$) avec ($c\in\mathbb{R}$)

* si ($a\le b$ et $c>0$) alors ($ac\le bc$)

* si ($a\le b$ et $c<0$) alors ($ac\ge bc$)

* si ($0\le a\le b$ et $0\le c\le d$) alors ($0\le ac\le bd$)

❑ Notation scientifique : Soit x un nombre décimal positif :
L'écriture $x = a.10^p$ tel que : $1 \le a < 10$ et p un entier relatif, s'appelle notation scientifique de x.

❑ Partie entière d'un réel : Soit $x \in \mathbb{R}$; il existe un unique entier relatif n tel que $n \le x < n+1$ on note $n = E(x)$ on a ainsi :

$$E(x) \le x < E(x)+1$$

❑ Pourcentages – proportions :
* Soit a, b, c et d quatre réels non nuls on dit que (a,b) et (c,d) sont proportionnels s'il existe un réel k tel que : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$
k est appelé le rapport de proportionnalité.

❑ Valeur absolue :
* $|x| = x$ si $x \in \mathbb{R}_+$ et $|x| = -x$ si $x \in \mathbb{R}_-$
* $|-x| = |x|$
* $|x.y| = |x|.|y|$
* $|x| \in \mathbb{R}_+$
* Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$ alors : $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
* Soit Δ une droite munie d'un repère (O,I) soit A et B deux points de Δ d'abscisse respectifs : x_A et x_B on a : AB $= |x_B - x_A|$
* $|x| \le a$ $(a \in \mathbb{R}_+)$ équivaut à $-a \le x \le a$

❑ Valeur approchée d'un réel :
* On dit que le réel x est une valeur approchée d'un réel a à la précision : $k.10^{-p}$ ($p \in IN$) si $|x-a| \le k.10^{-p}$.

EXERCICES CORRIGES

Calcul sur des puissances :

Exercice 1 : Ecrire sous la forme d'un entier :

$a = 2^3 \times 2$, $b = \frac{3^4}{3^2}$, $c = (3^2)^4$, $d = 2^{(3^2)}$, $e = (2^3)^2$, $f = \frac{3^4}{9^2}$

Exercice 2 : Simplifier :

$A = \frac{2,3.10^3 - 0,17.10^4}{0,5.10^{-2}}$ $\qquad$ $B = \frac{11.10^{13}.10^4}{3 \times (10^2)^5}$

Exercice 3 : Calculer :

$A = (\frac{3}{2})^5.4^3(\frac{5}{3})^6$ $\qquad$ $B = 5^2 \times 10^{-3} \times 25^{-2}$

$C = (\frac{5}{9})^{-3} \times (\frac{9}{10})^7 \times (\frac{5}{2})^{13} \times 2^{-6} \times 4^7 \times 9^{-2}$

Exercice 4 : Déterminer les entiers relatifs x, y et z dans chacun des cas suivants :

① $180 = 2^x.3^y.5^z$ ② $72 = x^3.y^2$ ③ $2^x.3^y.5^z = 648\,000$

Exercice 5 : Ecrire sous forme de fraction irréductible :

$A = \frac{15^3 \times 4}{6^2 \times 5^3}$, $B = \frac{1}{(\frac{2}{3})^2} \times 2^7$, $C = (\frac{3}{4} \times \frac{2}{9})^2$, $D = \frac{(-18)^3 \times 5}{15^2 \times 3}$

Exercice 6 : Pour tout entier relatif n, on pose :

$f(n) = \frac{3^n + 3^{-n}}{2}$ et $g(n) = \frac{3^n - 3^{-n}}{2}$

① Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ puis $g(0)$, $g(1)$ et $g(-1)$

② a) Comparer $f(n)$ et $f(-n)$ puis $g(n)$ et $g(-n)$.
b) Simplifier $f(n) + g(n)$.

③ Montrer que pour tout entier relatif n : $[f(n)]^2 - [g(n)]^2 = 1$.

④ Montrer que $f(2n) = [f(n)]^2 + [g(n)]^2$

Calcul sur des puissances :

Exercice 7 : Calculer :

$a=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$, $b=(\sqrt{3}-1)^3(\sqrt{3}+1)^3$, $c=(2+3\sqrt{7})(2-3\sqrt{7})$

Exercice 8 : Calculer et simplifier :

$A=(a+\frac{1}{a})^2-(a^2+\frac{1}{a^2})^2$ où $a\neq 0$

$B=\frac{(a+2b)^2+(ab-2)^2}{a^2+4}$ où a et b deux réels

$C=(2+\frac{x}{2})^2-\frac{x^2}{4}$ où $x\in\mathbb{R}$

Exercice 9 : ① Factoriser x^3+8 et x^2-4

② Simplifier le quotient $A=\frac{x^3+8}{x^2-4}$ où x est un réel différent de 2 et -2.

Exercice 10 : Factoriser les expressions suivantes :

$A=(x+1)^3-x-1$ $B=(x+2)^3-3(x^2-4)-2(5x+10)$

$C=(x+7)^2-36$ $D=(x^2+6x+9)-1$

Exercice 11 :

On pose $A=(5x+3)(3-10x)-(5x+3)^2+2(5x+3)(5x-1)$

① Développer et réduire A

② Montrer que $A=-(5x+3)(5x+2)$

Exercice 12 : Développer puis simplifier :

$A=(3+4x^2)^2(4-2x)-(4x+1)(4x^2+2x)^2$

$B=8(3x-2)^3-(12x+1)(6x+1)^2$

Calcul sur les radicaux :

Exercice 13 : Calculer et simplifier :

$A=(2\sqrt{5}-7)(\sqrt{3}+3\sqrt{5})-(\sqrt{3}+2\sqrt{5})^2$

$B=(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4})^2+(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$

Exercice 14 :

① Ecrire les quotients suivants de façon que son dénominateur ne contient plus de radicaux : $a=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ et $b=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

② Que vaut alors : $a-b$

③ Soit x un réel positif différent de 1. Montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{2}{1-x}$$

Exercice 15 :

① Montrer que : $\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ et $\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

② Soit n un entier naturels supérieur à 2. Montrer que : $\frac{n-1}{1+\sqrt{n}}=\sqrt{n}-1$

Exercice 16 : Soit $a=\frac{\sqrt{3}+2}{7\sqrt{5}-1}$ et $b=\frac{\sqrt{3}-2}{7\sqrt{5}+1}$

① Calculer ab et $a+b$.

② En déduire : a^2+b^2.

Exercice 17 : Soit $a=\sqrt{8+\sqrt{15}}+\sqrt{8-\sqrt{15}}$

① Calculer a^2. ② En déduire a.

Exercice 18 : ① Développer et simplifier : $a=(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$.

② Simplifier alors : $b=\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{3}$.

Exercice 19 : ① Développer $x=(\sqrt{6}-1)^3$ et $y=(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2$

② On pose : $z=(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}-1)^3$. Calculer et simplifier z.

Exercice 20 : Soit $a=\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ et $b=\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

① Calculer ab. ② Développer et simplifier : $(3+\sqrt{5})^2+(3-\sqrt{5})^2$.

③ Montrer que : $a+b=7$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}=3$.

Encadrement :

Exercice 21 : Sachant que : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, trouver un encadrement des nombres suivants : $1+\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}+1$ et $\dfrac{3+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 22 : Sachant que : $2,7 \le a \le 2,8$ et $1,1 \le b \le 1,2$

Encadrer : $a+b$; ab ; $-b+a$ et $2a-3b$.

Exercice 23 : Soit x un réel tel que $-2 < x+1 < -1$

① Déterminer un encadrement de x.

② Encadrer $\dfrac{1}{2x-4}$ et $1-4x^2$.

③ En déduire un encadrement de $\dfrac{1-4x^2}{2x-4}$

Exercice 24 : Soit x un réel strictement positif.

① Montrer que : $\dfrac{2}{x^2+1} \le \dfrac{1}{x}$

② En déduire que : $\dfrac{2x+2}{x^2+1} \le \dfrac{1}{x}+1$

Exercice 25 : Les deux questions sont indépendantes :

① x et y étant deux réels strictement positifs. Montrer que : $3 < \dfrac{8x+3y}{2x+y} < 4$

② Soit $x \neq 1$. Comparer $1+x$ et $\dfrac{1}{1-x}$ selon les valeurs de x.

Exercice 26 : x, y et z trois réels strictement positifs tel que $x \ge y \ge z$

Montrer que : $(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8yz^2$.

Exercice 27 : Soit $x \in]1,+\infty[$. Montrer que l'on a :

a) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} < \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ b) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1} > \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Notation scientifique :

Exercice 28 : Ecrire en notation scientifique :

$a = 15,8\times10^{-2}$ $b = 135,33\times10^{-3}$

$c = 0,005\times10^{-5}$ $d = 0,08\times10^{3}$

Exercice 29 : Ecrire en notation scientifique :

$a = 10^3+10^2$ $b = 10^{-1}+10^3$ $c = 10-10^{-1}$

Partie entière :

Exercice 30 : Calculer :

E(2,7) ; E($\dfrac{\pi}{2}$) ; E(-3,2) ; E(-4,7) ; E($\sqrt{2}$) ; E(7) et E(-6)

Exercice 31 : Trouver l'ensemble des réels x tels que :

a) $E(x) = 1$ b) $E(x) = -2$ c) $E(x) = 0,5$

Exercice 32 : Montrer l'inégalité suivante pour tout réel x :

$$x-1 < E(x) \le x$$

Pourcentage, proportion :

Exercice 33 : Un objet coûte 216^{D} après deux réductions successives la première de 10% et la deuxième de 20%. Calculer le prix de l'objet avant les deux réductions.

Exercice 34 : Dans une classe de 30 élèves il y a 12 redoublants.

Calculer le pourcentage des redoublants.

Exercice 35 : Dans une population il y a 60 hommes et 40 femmes. Parmi les hommes, il y a 35% qui ne sont pas des sportifs. Parmi les femmes il y a 20% qui sont sportives.

① Calculer le nombre des hommes sportifs.

② Calculer le nombre des femmes sportives.

③ Calculer le pourcentage des sportifs dans cette population.

Exercice 36 : Le périmètre d'un carré est-il proportionnel à :

a) Son coté

b) La longueur de sa diagonale

c) Son aire

Exercice 37 : Trouver x dans chacun des cas tel qu'on ait un tableau de proportionnalité :

a)

2	x
8	12

b)

3	5
x	20

Valeur absolue :

Exercice 38 : Simplifier l'expression $E = |x+1| - |x| + 2x + 4$ dans chacun des cas suivants :

a) $x \in]-\infty,-1]$ b) $x \in [-1,0]$ c) $x \in [0,+\infty[$

Exercice 39 : Soit x un réel tel que : $|x| < 1$

Montrer que : $\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right| < 1$

Exercice 40 : Soit (O,I) un repère d'une droite Δ et soient A et B deux points de Δ d'abscisses respectives 2 et – 4.

① Calculer AB

② Trouver le point M de Δ distinct de O tel que : $AM^2 + BM^2 = 20$

③ Trouver l'ensemble des points M de Δ tel que : $OM \leq 2$.

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 41 : Soient a et b deux réels. Développer :

$$(a+b-1)^2 + (b+1-a)^2 + (1+a-b)^2$$

Exercice 42 : Factoriser :

$A = (x^2-3x)^2 - 4x^2$ $B = x^2 - 14x + 49 + (3x-1)(x-7)$

$C = (10x^2 - 17y^2)^2 - (6x^2 + 8y^2)^2$ $D = (x^2 + y^2 - 1)^2 - 4x^2y^2$

Exercice 43 : Résoudre dans $\Re$ l'équation suivante :

$$\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^2 + 4\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right) + 4 = 0$$

Exercice 44 : Soient a et b deux réels non nuls.

① Démontrer que : $\dfrac{1}{a^2b} - \dfrac{2}{a^4+b^2} = \dfrac{(a^2-b)^2}{a^2b(a^4+b^2)}$

② On suppose de plus que a et b sont positifs.

On pose : $Q = \dfrac{\dfrac{a-b}{a+b} - \dfrac{a+b}{a-b}}{\dfrac{b}{a+b}}$. Montrer que $Q = \dfrac{4a}{b-a}$

Exercice 45 : Soient x et y deux réels tels que :

$2x + 3y = 10$ et $4x^2 - 9y^2 = 60$

① Calculer $2x - 3y$

② En déduire x et y.

Exercice 46 : Soit $A = \sqrt{7+2\sqrt{5}} + \sqrt{7-2\sqrt{5}}$

① Calculer : $(7+2\sqrt{5})(7-2\sqrt{5})$

② a) Calculer A^2
b) En déduire A.

③ On pose : $B = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
a) Justifier que $B < 0$. b) Calculer B^2 et en déduire **B**.

Exercice 47 : Soit n un entier naturel non nul.

① Montrer que : $1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n+1}{n}$

② En utilisant le résultat de ①, calculer :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times......\times\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

Exercice 48 : Soit $n\in IN$.

① Calculer : $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2$

② En utilisant ①, calculer $(1^2-2^2-3^2+4^2)+(5^2-6^2-7^2+8^2)+(9^2-10^2-11^2+12^2)+\dots\dots\dots+(1997^2-1998^2-1999^2+2000^2)$

Exercice 49 :

① Démontrer que quels que soient les réels a, b, c et d on a :

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

② Démontrer que quels que soient les réels a et b :

$$(a^2+1)(b^2+1)=(ab+1)^2+(a-b)^2$$

Exercice 50 : On considère 3 réels x, y et z.

On pose : $E=(x-y)(x-z)+(y-x)(y-z)+(z-x)(z-y)$

① Montrer que : $E=(x-y)(x-z)+(y-z)^2$

② On suppose que : $x>y$ et $x>z$. Montrer que $E>0$.

Exercice 51 : Soit ABC un triangle. E un point du segment [AB] et F un point du segment [AC] tels que (EF) et (BC) sont des droites parallèles.

On donne : $AE=2\sqrt{3}-1$, $AF=2+\sqrt{3}$ et $EB=1$.

① Calculer FC.

② Si de plus ABC est rectangle en A, calculer FE. (On donnera les résultats sous la forme : $a+b\sqrt{3}$)

SOLUTIONS

Solution 1 :

$a=8\times2=16$; $b=3^{4-2}=3^2=9$; $c=3^{2\times4}=3^8=6561$

$d=2^9=512$; $e=2^6=64$; $f=\dfrac{3^4}{(3^2)^2}=\dfrac{3^4}{3^4}=1$.

Solution 2 :

$A=\dfrac{2300-1700}{5.10^{-3}}=\dfrac{600}{5}.10^3=120.10^3=12.10^4$; $B=\dfrac{11.10^{17}}{3\times10^{10}}=\dfrac{11}{3}.10^7$

Solution 3 :

$A=\dfrac{3^5\times4^3\times5^6}{2^5\times3^6}=\dfrac{3^5}{3^6}\times\dfrac{(2^2)^3}{2^5}\times5^6=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2^6}{2^5}\times5^6=\dfrac{1}{3}\times2\times5^6=\dfrac{31250}{3}$

$B=5^2\times5^{-3}\times2^{-3}\times(5^2)^{-2}=5^{-1}\times5^{-4}\times2^{-3}=5^{-5}\times2^{-3}=\dfrac{1}{5^5\times2^3}=\dfrac{1}{25}.10^{-3}$

$C=\dfrac{5^{-3}\times9^7\times5^{13}\times2^{-6}\times(2^2)^7\times9^{-2}}{9^{-3}\times10^7\times2^{13}}=\dfrac{5^{10}\times9^5\times2^8}{9^{-3}\times10^7\times2^{13}}=\dfrac{5^{10}\times9^8}{10^7\times2^5}$

$=\dfrac{5^{10}\times9^8}{5^7\times2^7\times2^5}=\dfrac{5^3\times9^8}{2^{12}}$

Solution 4 :

① $180=2^2\times3^2\times5^1$ ② $72=2^3\times3^2$

③ $648\,000=2^3\times3^4\times10^3=2^3\times3^4\times2^3\times5^3=2^6\times3^4\times5^3$

Solution 5 :

$A=\dfrac{3^3\times5^3\times2^2}{3^2\times2^2\times5^3}=3$, $B=\dfrac{\frac{1}{2^2}}{3^2}\times2^7=\dfrac{3^2\times2^7}{2^2}=3^2\times2^5=9\times32=288$

$C=\left(\dfrac{1}{2\times3}\right)^2=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$.

$D=\dfrac{-(3^2\times2)^3\times5}{5^2\times3^2\times3}=-\dfrac{3^6\times2^3\times5}{5^2\times3^3}=-\dfrac{3^3\times2^3}{5}=-\dfrac{216}{5}$

Solution 6 :

① * $f(0)=\dfrac{3^0+3^0}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$; $f(1)=\dfrac{3^1+3^{-1}}{2}=\dfrac{3+\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{10}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{3}$

$f(-1)=\dfrac{3^{-1}+3}{2}=f(1)=\dfrac{5}{3}$.

* $g(0)=\dfrac{3^0-3^0}{2}=0$; $g(1)=\dfrac{3^1-3^{-1}}{2}=\dfrac{3-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{8}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{3}$

$g(-1)=\dfrac{3^{-1}-3^1}{2}=-\dfrac{3^1-3^{-1}}{2}=-g(1)=-\dfrac{4}{3}$

② a) * $f(n)=\dfrac{3^n+3^{-n}}{2}=\dfrac{3^{-n}+3^n}{2}=f(-n)$

* $g(n)=\dfrac{3^n-3^{-n}}{2}=-\dfrac{3^{-n}-3^n}{2}=-g(-n)$.

b) $f(n)+g(n)=\dfrac{3^n+3^{-n}}{2}+\dfrac{3^n-3^{-n}}{2}=\dfrac{3^n+3^n}{2}=3^n$.

③ $[f(n)]^2-[g(n)]^2=\left(\dfrac{3^n+3^{-n}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3^n-3^{-n}}{2}\right)^2$

$=\dfrac{3^{2n}+2\times3^n.3^{-n}+3^{-2n}}{4}-\dfrac{3^{2n}-2\times3^n.3^{-n}+3^{-2n}}{4}$

$=\dfrac{3^{2n}+2+3^{-2n}-3^{2n}+2-3^{-2n}}{4}=\dfrac{4}{4}=1$

④ On a d'une part $f(n)=\dfrac{3^n+3^{-n}}{2}$ et d'autre part $[f(n)]^2+[g(n)]^2=$

$\dfrac{3^{2n}+2+3^{-2n}}{4}+\dfrac{3^{2n}-2+3^{-2n}}{4}=\dfrac{2\times3^{2n}+2\times3^{-2n}}{4}=\dfrac{3^{2n}+3^{-2n}}{2}$

d'où $[f(n)]^2+[g(n)]^2=f(2n)$.

Solution 7 :

$a=(\sqrt{3})^2-1^2=3-1=2$; $b=[(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)]^3=a^3=2^3=8$

$c=2^2-(3\sqrt{7})^2=4-9\times7=4-63=-59$

Solution 8 :

$A=a^2+2.a.\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}-(a^4+2a^2.\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^4})=a^2+\dfrac{1}{a^2}-a^4-\dfrac{1}{a^4}$

$B=\dfrac{a^2+4ab+4b^2+a^2b^2-4ab+4}{a^2+4}=\dfrac{a^2+4b^2+a^2b^2+4}{a^2+4}$

$=\dfrac{(a^2+4)+b^2(a^2+4)}{a^2+4}=\dfrac{(a^2+4)(1+b^2)}{a^2+4}=1+b^2$

$C=4+2.2.\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}=4+2x$

Solution 9 :

① * $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)$

* $x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$

② $A=\dfrac{x^3+8}{x^2-4}=\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

Solution 10 :

$A=(x+1)^3-(x+1)=(x+1)[(x+1)^2-1]$

$=(x+1)[(x+1+1)(x+1-1)]=(x+1)(x+2)x$

$B=(x+2)^3-3(x+2)(x-2)-10(x+2)$

$=(x+2)[(x+2)^2-3(x-2)-10]=(x+2)(x^2+4x+4-3x+6-10)$

$=(x+2)(x^2+x)=(x+2)(x+1)x$

$C=(x+7)^2-6^2=[(x+7)+6][(x+7)-6]=(x+13)(x+1)$

$D=(x^2+2.3.x+3^2)-1=(x+3)^2-1^2$

$=[(x+3)+1][(x+3)-1]=(x+4)(x+2)$

Solution 11 :

① $A=15x-150x^2+9-30x-(25x^2+30x+9)+2(25x^2-5x+15x-3)$

$=-125x^2-25x-6$

② $A=(5x+3)[(3-10x)-(5x+3)+(10x-2)]=(5x+3)(-5x-2)$

$=-(5x+3)(5x+2)$

Solution 12 :

$A = (9+24x^2+16x^4)(4-2x)-(4x+1)(16x^4+16x^3+4x^2)$

$= 36-18x+96x^2-48x^3+64x^4-32x^5 - 64x^5-64x^4-16x^3-16x^4-16x^3-4x^2$

$= -96x^5-16x^4-80x^3+92x^2-18x+36$

$B = 8(27x^3-54x^2+36x-8)-(12x+1)(36x^2+12x+1)$

$= -216x^3-612x^2+264x-65$

Solution 13 :

$A = 2\sqrt{15}+6\sqrt{5}^2-7\sqrt{3}-21\sqrt{5}-\sqrt{3}^2-4\sqrt{3}\sqrt{5}-4\sqrt{5}^2$

$= 2\sqrt{15}+30-7\sqrt{3}-21\sqrt{5}-3-4\sqrt{15}-20 = -2\sqrt{15}-21\sqrt{5}-7\sqrt{3}+7$

$B = \dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}+\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{16} = \dfrac{16}{16} = 1$

Solution 14 :

① $a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2-1^2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}^2-1^2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

② $a-b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

③ $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \dfrac{-2}{x-1} = \dfrac{2}{1-x}$

Solution 15 :

①* $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$

* $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1^2-\sqrt{3}^2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{-2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

② $\dfrac{n-1}{1+\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}^2-1^2}{1+\sqrt{n}} = \dfrac{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}{1+\sqrt{n}} = \sqrt{n}-1$

Solution 16 :

① $a.b = \dfrac{\sqrt{3}+2}{7\sqrt{5}-1}.\dfrac{\sqrt{3}-2}{7\sqrt{5}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}{(7\sqrt{5}-1)(7\sqrt{5}+1)} = \dfrac{\sqrt{3}^2-2^2}{(7\sqrt{5})^2-1^2} = \dfrac{-1}{244}$

$a+b = \dfrac{\sqrt{3}+2}{7\sqrt{5}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{7\sqrt{5}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}+2)(7\sqrt{5}+1)+(\sqrt{3}-2)(7\sqrt{5}-1)}{(7\sqrt{5}-1)(7\sqrt{5}+1)}$

$= \dfrac{7\sqrt{15}+\sqrt{3}+14\sqrt{5}+2+7\sqrt{15}-\sqrt{3}-14\sqrt{5}+2}{(7\sqrt{5})^2-1^2} = \dfrac{14\sqrt{15}+4}{244} = \dfrac{7\sqrt{15}+2}{122}$

② On a : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ donc $a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$.

Or $a+b = \dfrac{7\sqrt{15}+2}{122}$ et $a.b = \dfrac{-1}{244}$ d'où $a^2+b^2 = (\dfrac{7\sqrt{15}+2}{122})^2+\dfrac{1}{122}$

$a^2+b^2 = \dfrac{7^2\times 15+28\sqrt{15}+4}{14884}+\dfrac{1}{122} = \dfrac{739+28\sqrt{15}}{14884}+\dfrac{1}{122} = \dfrac{861+28\sqrt{15}}{14884}$

Solution 17 : $a = \sqrt{8+\sqrt{15}}+\sqrt{8-\sqrt{15}}$

① $a^2 = \sqrt{8+\sqrt{15}}^2+2\sqrt{8+\sqrt{15}}\sqrt{8-\sqrt{15}}+\sqrt{8-\sqrt{15}}^2$

$= 8+\sqrt{15}+2\sqrt{(8+\sqrt{15})(8-\sqrt{15})}+8-\sqrt{15} = 16+2\sqrt{8^2-\sqrt{15}^2}$

$= 16+2\sqrt{64-15} = 16+2\sqrt{49} = 16+14 = 30.$

② On a : $a^2 = 30$ et $a \in \mathbb{R}_+$ donc $a = \sqrt{30}$

Solution 18 :

① $a = \sqrt{3}^2+2\sqrt{3}.\sqrt{5}+\sqrt{5}^2 = 3+2\sqrt{15}+5 = 8+2\sqrt{15}$.

② $b = \sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{3} = \sqrt{a}-\sqrt{3} = (\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{3} = \sqrt{5}$

Solution 19 :

① * $x = \sqrt{6}^3-3\sqrt{6}^2.1+3\sqrt{6}.1^2-1^3 = 9\sqrt{6}-19$

* $y = (2\sqrt{2})^2+2(2\sqrt{2}).(3\sqrt{3})+(3\sqrt{3})^2 = 8+12\sqrt{6}+27 = 35+12\sqrt{6}$

② $z = x+y = 9\sqrt{6}-19+35+12\sqrt{6} = 16+19\sqrt{6}$

Solution 20 : Soit $a = \dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ et $b = \dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

① $a.b = \dfrac{(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})}.\dfrac{(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})} = 1$

② $(3+\sqrt{5})^2 + (3-\sqrt{5})^2 = (9+6\sqrt{5}+5)+(9-6\sqrt{5}+5) = 28$

③ $a+b = \dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{(3+\sqrt{5})^2+(3-\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \dfrac{28}{3^2-\sqrt{5}^2} = \dfrac{28}{4} = 7$

$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{(3+\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}} + \sqrt{\dfrac{(3-\sqrt{5})^2}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}$

$= \sqrt{\dfrac{(3+\sqrt{5})^2}{4}} + \sqrt{\dfrac{(3-\sqrt{5})^2}{4}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = 3$

Solution 21 :

* On a : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ signifie que $2,414 < 1+\sqrt{2} < 2,415$
* On a : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ signifie que $3\times 1,414 < 3\sqrt{2} < 3\times 1,415$ signifie que $4,242 < 3\sqrt{2} < 4,245$
* On a : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ signifie que $-1,415 < -\sqrt{2} < -1,414$ signifie que $-0,415 < -\sqrt{2}+1 < -0,414$
* On a : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ signifie que $4,414 < 3+\sqrt{2} < 4,415$ signifie que $1,10350 < \dfrac{3+\sqrt{2}}{4} < 1,10375$

Solution 22 : * $2,7 \le a \le 2,8$ et $1,1 \le b \le 1,2$ donc $3,8 \le a+b \le 4$

* On a : $2,7 \le a \le 2,8$ et $1,1 \le b \le 1,2$ donc $2,7\times 1,1 \le ab \le 2,8\times 1,2$

d'où $2,97 \le ab \le 3,36$

* On a : $1,1 \le b \le 1,2$ signifie que $-1,2 \le -b \le -1,1$

donc $2,7-1,2 \le a-b \le 2,8-1,1$ d'où $1,5 \le a-b \le 1,7$

* On a : $2,7 \le a \le 2,8$ signifie que $5,4 \le 2a \le 5,6$

et $1,1 \le b \le 1,2$ signifie que $-3,6 \le -3b \le -3,3$ donc $1,8 \le 2a-3b \le 2,3$

Solution 23 :

① On a : $-2 < x+1 < -1$ signifie que $-3 < x < -2$

② * On a : $-3 < x < -2$ signifie que $-6 < 2x < -4$

signifie que $-10 < 2x-4 < -8$ d'où $-\dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{2x-4} < -\dfrac{1}{10}$

* On a : $-3 < x < -2$ donc $4 < x^2 < 9$

signifie que $-36 < -4x^2 < -16$ d'où $-35 < 1-4x^2 < -15$.

③ On a : $\dfrac{1-4x^2}{2x-4} = (1-4x^2).\dfrac{1}{2x-4}$ or d'après ② on a :

$-35 < 1-4x^2 < -15$ et $-\dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{2x-4} < -\dfrac{1}{10}$

donc $(-15)\times(-\dfrac{1}{10}) < \dfrac{1-4x^2}{2x-4} < (-35)\times(-\dfrac{1}{8})$ d'où : $1,5 < \dfrac{1-4x^2}{2x-4} < 4,375$

Solution 24 :

① On a : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x(x^2+1)} = \dfrac{(x-1)^2}{x(x^2+1)}$ or $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$(x-1)^2 \in \Re_+$ et $(x^2+1) \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\dfrac{2}{x^2+1} \le \dfrac{1}{x}$.

② On a d'après ① : $\dfrac{2}{x^2+1} \le \dfrac{1}{x}$ et comme $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc $(x+1) \in \mathbb{R}_+$

alors $\dfrac{2}{x^2+1}(x+1) \le \dfrac{1}{x}(x+1)$ d'où $\dfrac{2x+2}{x^2+1} \le \dfrac{x+1}{x}$ et par suite

$\dfrac{2x+2}{x^2+1} \le \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x}$ ce qui donne $\dfrac{2x+2}{x^2+1} \le \dfrac{1}{x} + 1$

Solution 25 :

① * $4 - \dfrac{8x+3y}{2x+y} = \dfrac{y}{2x+y} \ge 0$ car $x \ge 0$ et $y \ge 0$ donc $\dfrac{8x+3y}{2x+y} < 4$

* $\dfrac{8x+3y}{2x+y} - 3 = \dfrac{2x}{2x+y} \ge 0$ car $x \ge 0$ et $y \ge 0$ donc $3 < \dfrac{8x+3y}{2x+y}$

Conclusion : $3 < \dfrac{8x+3y}{2x+y} < 4$

② $1+x-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{(1+x)(1-x)-1}{1-x}=-\dfrac{x^2}{1-x}$.

* Si $x<1$ alors $1-x>0$ donc $-\dfrac{x^2}{1-x}\leq 0$ d'où $1+x<\dfrac{1}{1-x}$.

* Si $x>1$ alors $1-x<0$ donc $-\dfrac{x^2}{1-x}\geq 0$ d'où $1+x>\dfrac{1}{1-x}$.

Solution 26 :

* $x\geq y$ donc $x+y\geq 2y\geq 0$
* $y\geq z$ donc $y+z\geq 2z\geq 0$
* $x\geq z$ donc $x+z\geq 2z\geq 0$

En multipliant membre à membre on obtient : $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8yz^2$.

Solution 27 :

a)

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\frac{x+1-x}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

Or $x+1\geq x$ d'où $\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}$ et par suite $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\geq 2\sqrt{x}$

d'où $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$ et $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$\sqrt{x-1}<\sqrt{x+1}$ d'où $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}<\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

éq à $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}>\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ d'où $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}<\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Solution 28 :

$a=158\times10^{-3}$ $b=13533\times10^{-5}$ $c=5\times10^{-8}$ $d=80$

Solution 29 :

$a=10^2\times10+10^2=10^2(10+1)=11\times10^2$

$b=0,1+1000=1000,1=10001\times10^{-1}$

$c=10-0,1=9,9=99\times10^{-1}$

Solution 30 :

$E(2,7)=2$; $E(\frac{\pi}{2})=1$ (car $\frac{\pi}{2}\approx 1,57$) ; $E(-3,2)=-4$

$E(-4,7)=-5$; $E(\sqrt{2})=1$; $E(7)=7$ et $E(-6)=-6$

Solution 31 :

On sait que pour tout réel x ; $E(x)\leq x<E(x)+1$

a) L'ensemble des réels x tels que $E(x)=1$ est l'ensemble des réels x tels que : $1\leq x<2$ donc l'ensemble demandé est l'intervalle $[1\,;2[$.

b) $E(x)=-2$ signifie que $-2\leq x<-1$ donc l'ensemble demandé est l'intervalle $[-2\,;-1[$.

c) L'ensemble des réels x tels que $E(x)=0,5$ est l'ensemble vide car $E(x)\in\mathbb{Z}$ et $0,5\notin\mathbb{Z}$

Solution 32 :

pour tout réel x, on a : ; $E(x)\leq x<E(x)+1$

signifie que $E(x)\leq x$ et $x<E(x)+1$ signifie que $E(x)\leq x$ et $x-1<E(x)$

d'où $x-1<E(x)\leq x$

Solution 33 : Soit x le prix de l'objet avant les deux réductions.

Après la première réduction de 10% le prix de l'objet devient :

$y=x-10\%x=90\%x=\dfrac{90}{100}x$. Après la deuxième réduction de 20% le prix devient : $z=y-20\%y=80\%y=\dfrac{80}{100}y$

donc $z=\dfrac{80}{100}.\dfrac{90}{100}x=\dfrac{72}{100}x$ or $z=216^D$ d'où $\dfrac{72}{100}x=216$

d'où $x=\dfrac{216\times100}{72}=300$

<u>**Conclusion**</u> : **Le prix de l'objet avant les deux réductions était 300^D.**

Vérification : $10\%\times300^D=30^D$ et $300^D-30^D=270^D$

$20\%\times270^D=54^D$ et $270^D-54^D=216^D$

Solution 34 :

On a : $\dfrac{12}{30} = 0{,}4$ donc le pourcentage de redoublants est 40%.

Solution 35 :

① Le nombre des hommes sportifs est : $60 \times \dfrac{65}{100} = 39$.

② Le nombre des femmes sportives est : $40 \times \dfrac{20}{100} = 8$.

③ Le nombre des sportifs est : $39 + 8 = 47$ donc le pourcentage des sportifs dans cette population est $\dfrac{47}{100} = 47\%$.

Solution 36 :

a) Soit p le périmètre du carré et c son coté. On sait que $p = 4c$ donc $\dfrac{p}{c} = 4$ le rapport $\dfrac{p}{c}$ est constant donc le périmètre d'un carré est-il proportionnel à son coté.

b) Soit L la diagonale du carré et c son coté. On sait que $L = \sqrt{2}\,c$ et $p = 4c$ donc $\dfrac{p}{L} = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$ le rapport $\dfrac{p}{L}$ est constant donc le périmètre d'un carré est-il proportionnel à la longueur de sa diagonale.

c) Soit s l'aire du carré de coté c. On sait que $s = c^2$ et $p = 4c$ $\dfrac{p}{s} = \dfrac{4}{c}$ le rapport $\dfrac{p}{s}$ n'est pas constant donc le périmètre d'un carré n'est pas proportionnel à son aire.

Solution 37 :

a) On a : $\dfrac{2}{8} = \dfrac{x}{12}$ donc $24 = 8x$ d'où $x = 3$.

b) On a : $\dfrac{3}{x} = \dfrac{5}{20}$ donc $60 = 5x$ d'où $x = 12$.

Solution 38 :

a) $x \in]-\infty,-1]$ donc $x \leq -1$ on a : $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ d'où

$|x+1| = -(x+1) = -x-1$ et $|x| = -x$ et $E = -x-1+x+2x+4 = 2x+3$

b) $x \in [-1,0]$ donc $-1 \leq x \leq 0$ on a : $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$ d'où $|x+1| = x+1$

et $|x| = -x$ soit $E = x+1+x+2x+4 = 4x+5$

c) $x \in [0,+\infty[$ donc $x \geq 0$ on a : $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ d'où $|x+1| = x+1$

et $|x| = x$ et $E = x+1-x+2x+4 = 2x+5$

Solution 39 :

Pour comparer deux réels positifs il suffit de comparer leurs carrés.

On a : $\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right|^2 - 1 = \dfrac{4x^2+4x+1}{x^2+4x+4} - 1 = \dfrac{3x^2-3}{x^2+4x+4} = \dfrac{3(x^2-1)}{(x+2)^2}$

On a : $|x| < 1$ signifie que $x^2 < 1$ donc $x^2 - 1 < 0$ et par suite

$\dfrac{3(x^2-1)}{(x+2)^2} < 0$ d'où : $\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right| < 1$

Solution 40 :

① Calculer $AB = |x_B - x_A| = |-4-2| = |-6| = 6$

② $AM^2 + BM^2 = 20$ signifie que $(x_M-2)^2 + (x_M+4)^2 = 20$ signifie que $(x_M^2 - 4x_M + 4) + (x_M^2 + 8x_M + 16) = 20$ signifie que $2x_M^2 + 4x_M + 20 = 20$ signifie que $x_M^2 + 2x_M = 0$ signifie que $x_M(x_M+2) = 0$ signifie que $x_M = 0$ ou $x_M = -2$ or $M \neq O$ donc $x_M \neq 0$

Conclusion : $x_M = -2$ M est le symétrique de A par rapport à O.

③ $OM \leq 2$ signifie que $|x_M - x_O| \leq 2$ signifie que $|x_M| \leq 2$ signifie que $-2 \leq x_M \leq 2$ soit A' d'abscisse -2 et A étant d'abscisse 2 d'où l'ensemble est le segment : $[A'A]$

PROBLEMES DU 1er DEGRE ET PROBLEMES DU 2nd DEGRE

Résultats à retenir :

A- Equations et inéquations du premier degrés :

- $ax+b=0$ où a et b sont deux réels donnés et, x est l'inconnue est appelée : *équation du 1er degré à une inconnue.*
- x_0 est une solution de l'équation (E) : $ax+b=0$ signifie que $ax_0+b=0$
- $\begin{cases} ax+b=0 \\ a\neq 0 \end{cases}$ signifie que $x=-\frac{b}{a}$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation est $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

- $ax+b\leq 0$, où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ est appelée : *inéquation du 1er degré à une inconnue.*
- si $a\neq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $(ax+b)$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

- Exemple d'une équation se ramenant à $ax+b=0$.

$* \; x^2+ax=(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}$

exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2+7x-8=0$

On a : $x^2+7x-8=0$ éq à : $(x+\frac{7}{2})^2-\frac{49}{4}-8=0$

éq à $(x+\frac{7}{2})^2=\frac{81}{4}=(\frac{9}{2})^2$ d'où $x+\frac{7}{2}=\frac{9}{2}$ ou $x+\frac{7}{2}=-\frac{9}{2}$

et par suite $x=1$ où $x=-8$ $\quad S_{\mathbb{R}}=\{-8\ ,\ 1\}$

B- Equations et inéquations du second degrés :

- Une équation du second degré s'écrit sous la forme :

$(E): a\,x^2+b\,x+c=0$ *où* $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ *et* $c\in\mathbb{R}$

Méthode de résolution :

- On calcule $\Delta=b^2-4ac$

⇨ si $\Delta<0$: l'équation (E) n'admet pas de solutions réelles.

⇨ si $\Delta=0$: l'équation (E) admette une solution double: $x_0=\frac{-b}{2a}$

⇨ si $\Delta>0$: l'équation (E) a deux solutions distinctes x' et x'' :

$$x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

⇨ si $ac<0$ alors $\Delta>0$.

Somme et produit des racines :

- Soit $(E): a\,x^2+b\,x+c=0$ et $\Delta=b^2-4ac\geq 0$

On pose : $S=x'+x''=\frac{-b}{a}$: somme des solutions de (E).

$P=x'x''=\frac{c}{a}$: produit des solutions de (E).

Cas où on connaît une solution particulière x_0 :

- Soit $(E): a\,x^2+b\,x+c=0$

⇨ si $a+b+c=0$ alors $x'=1$ est une solution de (E) et $x''=\frac{c}{a}$.

⇨ si $a-b+c=0$ alors $x'=-1$ est une solution de (E) et $x''=\frac{-c}{a}$.

⇨ si x_0 est une solution de (E) c'est à dire $(a\,x_0^2+b\,x_0+c=0)$

alors l'autre solution est donné par : $P=\frac{c}{a}$ ou par $S=\frac{-b}{a}$.

Exemple : $(E): x^2+4x-12=0$

$* \; x_0=2$ est une solution de (E) car $2^2+4.2-12=0$.

$P=x'x''=\frac{c}{a}$ alors $x'x''=-12$ or $x'=x_0=2$ donc $x''=-6$.

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 : Résoudre dans ℝ :

① $2x-1=3x$ ② $-x+2(x+3)=0$

③ $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}(x-1)=0$ ④ $3(\frac{1}{2}-2x)+\frac{2}{5}=0$

Exercice 2 : Résoudre dans ℝ :

① $\frac{x+1}{6}+\frac{2x}{3}=\frac{1}{2}$ ② $\frac{2x-1}{3x-4}=\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}=\frac{1}{x^2-x}$ ④ $\frac{3x+2}{x+3}=\frac{6x-5}{2x+7}$

Exercice 3 : Résoudre dans ℝ :

① $x^2-9=0$ ③ $(x-3)(2x-1)=4x^2-4x+1$

② $4x^2-4x+1=0$ ④ $x^2-4-(x-2)(2x+3)+(x+1)(3x+4)=0$

Exercice 4 : Résoudre dans ℝ :

① $|2x-3|=0$ ② $|x-2|=|2x+1|$

③ $|x-1|+|x|-3x=0$ ④ $2x|x-2|-(x-2)|x|=0$

Exercice 5 : Résoudre dans ℝ :

① $3\sqrt{x}=2$ ② $x-2\sqrt{x}=0$

③ $x-4\sqrt{x}+4=0$ ④ $\sqrt{4x^2-4x+1}=|x-1|$

Exercice 6 : Résoudre dans ℝ :

① $2x+1\le\sqrt{5}x$ ② $(x-1)(x-3)\ge 0$ ③ $\frac{2x+1}{x-1}\ge 1$

④ $|2x+1|\le|x|-2x$ ⑤ $x^2-6x+9\le 2x-6$

⑥ $x>\sqrt{6x-9}$ ⑦ $\frac{(2x+1)(x-1)(x+2)}{(x-2)(x-3)}>0$

Exercice 7 : Résoudre dans ℝ :

① $27x^3(x+3)\le 12(x^2+3x)$ ② $\frac{4x^2-9}{x-2}\le 4x+3$

③ $|(x-2)(x-3)|\le x-3$ ④ $\frac{2|x-1|-3}{|x|-1}<0$

Exercice 8 : On considère une plaque métallique sous forme d'un carré de coté a avec a > 8 cm. On enlève de chaque coin de cette plaque un carré de 4 cm de coté. On obtient une forme géométrique dont l'aire est égale à 336 cm². Déterminer le coté a de la plaque.

Exercice 9 : Résoudre dans ℝ :

① $x^2+3x-5=0$ ② $3x^2+x-4=0$

③ $x^2+x\sqrt{2}+\frac{1}{2}=0$ ④ $\frac{3}{2}x^2-\frac{31}{2}x+5=0$

⑤ $4x^2+2x+5=0$ ⑥ $\sqrt{2}x^2-x\sqrt{-1+4\sqrt{3}}-\sqrt{2}=0$

⑦ $x^2-6x+9=0$ ⑧ $x^2-3|x-2|-4=0$

⑨ $x^2+3|x|-10=0$ ⑩ $|x^2-1|-2x-2=0$

Exercice 10 : Résoudre dans ℝ :

① $x(x^2-x)-(x-1)(3x+2)=0$ ② $(x^2+x)^2=4$

③ $(x^2-6x+9)=x^4$ ④ $(2x+3)(4x-1)=5x+7$

⑤ $(x+1)(x+2)=(x+3)(x+4)+(x+5)(x+6)$

⑥ $(x^2-2x+3)(x^2+2x+2)=0$

⑦ $x+1=\frac{1}{x}$ ⑧ $3x+\frac{1}{2x}=\frac{5}{2}$

Exercice 11 : Les équations ci-dessous ont au moins une solution simple. Trouver cette solution et en déduire l'autre.

① $x^2+5x-6=0$ ② $x^2-4x-5=0$

③ $7x^2-9x+2=0$ ④ $x^2+x-6=0$ ⑤ $x^2+x-\frac{3}{4}=0$

Exercice 12 : Soit l'équation $(E) : a x^2 + b x + c = 0$ où : $a \neq 0$, $c \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. On note x' et x'' les solutions de (E)

Calculer en fonction de a, b et c les expressions :

① $A = x' + x''$; $B = x'.x''$; $C = x'x''(x' + x'')$

② $D = x'^2 + x''^2$; $E = x'^3 + x''^3$; $F = \dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$;

$G = (2x' + 1)(2x'' + 1)$.

Exercice 13 : soit $(E) : (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 8 = 0$

① on pose $X = x^2 + x$, former une équation (E') du second degré à inconnue X.

② Résoudre (E').

③ En déduire toute les solutions de (E).

④ Utiliser le même raisonnement pour résoudre

$$(*) : \frac{2}{(x^2+1)^2} - \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{2} = 0$$

Exercice 14 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $\sqrt{x^2 + x} = |3x - 1|$ ② $x - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

③ $\sqrt{3x^2 - 2x} = 2x - 1$ ④ $\sqrt{x^2 + 3} = x + 1$

⑤ $\sqrt{1 + \sqrt{x^4 + x^2}} = 2x - 1$ ⑥ $3|x - 2| - 7\sqrt{x - 2} + 2 = 0$

Exercice 15 : Soit ABC un triangle rectangle en A, On pose : $AB = 10$ cm et $AC = 4$ cm. Soit $D \in [AB]$ *et* $E \in [AC]$ tel que $BD = 2AE$

① On pose $AE = x$, exprimer l'aire $A_{(x)}$ du triangle DAE en fonction de x.

② Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $A_{(x)}$, exprimé en cm^2 est égale à $\dfrac{25}{4}$?

③ Trouver x tel que $A_{(x)} = \dfrac{9}{4}$.

Exercice 16 : soit $(E_m) : x^2 - mx - 2 = 0$ *ou* $m \in \mathbb{R}$

① Montrer que (E_m) a deux racines x' et x''.

② Montrer que les racines x' et x'' sont de signe contraires.

③ a) Calculer en fonction de m : $A = \dfrac{1}{4 - x'} + \dfrac{1}{4 - x''}$ *où* $m \neq \dfrac{7}{2}$.

b) Trouver m pour que $A = 10$.

Exercice 17 : Factoriser :

A= $2x^2 + x - 3$. B= $-3x^2 + x + 4$.

C= $x^4 + x^2 - 6$. D= $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$.

Exercice 28 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1. $x^2 - 5x - 6 \leq 0$. ② $-2x^2 + 5x - 2 > 0$.

③ $(x^2 + 5x)^2 \geq 4(x + 2)^2$. ④ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \leq 0$.

Exercice 19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

① $\sqrt{x^2 + x} \leq |3x - 1|$. ② $\sqrt{3x^2 + 5x - 8} \geq 2x - 2$.

③ $\sqrt{x^2 - x + 1} \geq x - 1$. ④ $|-2x^2 + 5x - 3| \leq 3$.

Exercice 20 : ① Factoriser le trinôme : $t^2 - 2t - 15$.

② En déduire la résolution de l'inéquation : $x^4 - 2x^2 - 15 \leq 0$

③ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x \leq \sqrt{2x + 15}$.

Exercice 21 : A/ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $x + 1 \leq \dfrac{x - 4}{x - 2}$ ② $\dfrac{x - 4}{x - 2} \leq 2x + 2$

B/ En déduire l'ensemble des réels x vérifiant :

$$(*) : x + 1 \leq \frac{x-4}{x-2} \leq 2x + 2 .$$

Exercice 22 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(2x^2 + x)^2 - 2(2x^2 + x) - 3 \leq 0$ (on pourra poser $X = 2x^2 + x$)

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 23 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $(x+1)(2x+3)=0$

② $(2x-1)(3x+4)-4x+2=0$

③ $x^2+(x+4)^2=2(x-1)(x+2)$

④ $(x+4)^3+x^3+(x+3)^3=3x(x+3)(3x+4)$

Exercice 24 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $(2x-1)^2-4(3x+2)^2=0$

② $x^2+(x-2)^2=0$

③ $x^2+3x-4=0$ (on montrera que : $x^2+3x=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$)

④ $(x-1)^3+x^2-1=0$ (on montrera que : $x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$)

Exercice 25 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $\left||x-2|-1\right|=3$

② $|x|+|2x+1|+|1-3x|=14$

③ $(\frac{1+x}{3-x})^2-625=0$

④ $(\frac{3x-1}{2x-1})^2-4(\frac{3x-1}{2x-1})+4=0$

Exercice 26 :

① Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} 5(2-x)\geq 0 \\ 2x+6\geq 0 \end{cases}$

② Soit (E) : $\sqrt{5(2-x)}=\sqrt{2x+6}$

a) Déterminer le domaine de l'équation (E)

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$

Exercice 27 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $(3-5x)(2x+7)+(4-x)(7+x)+11x^2=0$

② $(2x-1)(3x+4)+(2-4x)(x^2+4)=0$

③ $x^2+6x+9=(2x+1)(2x+6)$

Exercice 28 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $(x-4)^2=\frac{x^3}{x+8}$

② $|2x-4|+|x-1|+|x|=6x$

③ $\sqrt{4x-4}=x$

④ $\sqrt{x^2+6x+9}=1-x$

Exercice 29 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $(2x-1)(x^2-4)(x+1)\geq 0$

③ $|x^2-1|\leq|x-1|$

② $x^2-3-(x-\sqrt{3})(3x+1)<0$

④ $\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}\geq 0$

Exercice 30 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $x|x-1|+3x-3=0$

② $|x^2-x|+|x-2|-5=0$

③ $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{5}{6}$

④ $\frac{4x-1}{x+3}=\frac{2-5x}{5x-1}$

⑤ $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{x+5}{x+3}$

⑥ $x^2-(2+\sqrt{3})x-2\sqrt{3}=0$

Exercice 31 : Soit θ un paramètre réel de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $x^2-2x\sin\theta-\cos^2\theta=0$

② $x^2-2x+\cos\theta(2-\cos\theta)=0$

③ $x^2+2x+\sin^2\theta=0$

Exercice 32 : Soit a un paramètre réel, résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

① $x(x+a)=2(2+a)$

② $x^2-ax-1+a=0$

③ $x^2-ax-1=0$

④ $x^2-(a+2)x+1=0$

⑤ $(a+1)x^2-ax-1=0$

⑥ $\frac{ax}{x+2}=x+2a+5$

Exercice 33 : Déterminer les nombres x' et x'' dans chacun des cas :

① $\begin{cases} x' + x'' = 27 \\ x'x'' = 50 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x' + x'' = \dfrac{9}{2} \\ x'x'' = 5 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 2x' + x'' = 2 + \sqrt{3} \\ x'x'' = \sqrt{3} \end{cases}$

④ $\begin{cases} \dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = 5 \\ x'x'' = \dfrac{1}{6} \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x'^2 + x''^2 = 5 \\ x' - x'' = 1 \end{cases}$

Exercice 34 :

Ⓘ Soit l'équation $(E) : x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

① En posant $X = x^2$, former une équation (E') du second degré à inconnue X.

② Résoudre (E') .

③ En déduire la résolution de (E) .

Ⓘⓘ En procédant comme dans Ⓘ résoudre chacune des équations :

① $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$ ② $\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 = 0$

③ $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$

Exercice 35 : Simplifier les fractions après avoir déterminer l'ensemble sur lequel ait un sens :

① $\dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$. ② $\dfrac{-2x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 2x}$.

③ $\dfrac{-x^2 + a^2}{x^2 - 3ax + 2a^2}$. Où a est un réel non nul.

Exercice 36 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

① $-3x^2 + 5x + 8 \le 0$ ② $x^2 - x\sqrt{2} + \dfrac{1}{2} \ge 0$

③ $x^2 - 6x + 9 \le x^4$. ④ $2x + 1 \le \dfrac{1}{2x}$

Exercice 37 :

① Factoriser le trinôme : $3x^2 - x - 2$

② Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x(x^2 - x) \le 3x^2 - x - 2$

Exercice 38 : Soit a un réel $\neq 2$

① Factoriser le trinôme : $x^2 - (a + 2)x + 2a = 0$

② Résoudre suivant les valeurs de a l'inéquation : $x^2 - (a + 2)x + 2a \ge 0$.

Exercice 39 :

① Montrer que :

$3x^3 - 8x^2 - 20x + 16 = (x + 2)(3x^2 - 14x + 8)$.

② Résoudre l'inéquation : $3x^3 - 8x^2 \ge 4(5x - 4)$.

Exercice 40 : Soit : $(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) - 24 \ge 0$

Résoudre cette inéquation . (on pourra poser : $X = (x^2 + 3x)$)

SOLUTIONS

Solution 1 :

① $2x-1=3x$ équivaut à $3x-2x=-1$ équivaut à $x=-1$

d'où $S_{\Re}=\{-1\}$

② $-x+2(x+3)=0$ équivaut à $-x+2x+6=0$ d'où $x=-6$

et par suite $S_{\Re}=\{-6\}$

③ $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}(x-1)=0$ équivaut à $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}=0$ équivaut à

$\frac{11}{15}x=\frac{2}{5}$ d'où $x=\frac{6}{11}$ donc $S_{\Re}=\left\{\frac{6}{11}\right\}$

④ $3(\frac{1}{2}-2x)+\frac{2}{5}=0$ équivaut à $\frac{3}{2}-6x+\frac{2}{5}=0$ équivaut à $6x=\frac{19}{10}$

d'où $x=\frac{19}{60}$ et par suite $S_{\Re}=\left\{\frac{19}{60}\right\}$

Solution 2 :

① $\frac{x+1}{6}+\frac{2x}{3}=\frac{1}{2}$ équivaut à $\frac{3x+3+12x}{18}=\frac{1}{2}$ d'où $\frac{15x+3}{18}=\frac{1}{2}$

et par suite $15x+3=9$ ou encore $x=\frac{2}{5}$ alors $S_{\Re}=\left\{\frac{2}{5}\right\}$

② $\frac{2x-1}{3x-4}=\frac{1}{3}$ *cette équation a un sens lorsque* $x\neq\frac{4}{3}$

Pour $x\in\Re-\left\{\frac{4}{3}\right\}$, on a $\frac{2x-1}{3x-4}=\frac{1}{3}$ équivaut à $6x-3=3x-4$

d'où $3x=-1$ d'où $x=\frac{-1}{3}$ alors $S_{\Re}=\left\{\frac{-1}{3}\right\}$

③ $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}=\frac{1}{x^2-x}$, *cette équation a un sens lorsque* $x\neq 0$ *et* $x\neq 1$

Pour $x\in\Re-\{0,1\}$, on a : $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}=\frac{1}{x^2-x}$ équivaut à

$\frac{x-1+2x}{x(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)}$ équivaut à $3x-1=1$ d'où $3x=2$

et par suite $x=\frac{2}{3}$ d'où $S_{\Re}=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

④ $\frac{3x+2}{x+3}=\frac{6x-5}{2x+7}$, *cette équation a un sens lorsque* $x\neq-3$ *et* $x\neq\frac{-7}{2}$

L'équation s'écrit : $(3x+2)(2x+7)=(x+3)(6x-5)$

Après développement on obtient : $6x^2+25x+14=6x^2+13x-15$

Et par suite : $12x=-29$ d'où $x=\frac{-29}{12}$ alors. $S_{\Re}=\left\{\frac{-29}{12}\right\}$

Solution 3 :

① $x^2-9=0$ équivaut à : $(x-3)(x+3)=0$ équivaut à :

$(x-3)=0$ ou $(x+3)=0$ d'où $x=3$ ou $x=-3$

$S_{\Re}=\{-3,3\}$

② $4x^2-4x+1=0$ équivaut à : $(2x-1)^2=0$ équivaut à

$(2x-1)=0$ d'où $x=\frac{1}{2}$; alors $S_{\Re}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

③ $(x-3)(2x-1)=4x^2-4x+1$ éq à $(x-3)(2x-1)=(2x-1)^2$

éq à $(x-3)(2x-1)-(2x-1)^2=0$ éq à

$(2x-1)[(x-3)-(2x-1)]=0$ éq à

$(2x-1)(x-3-2x+1)=0$ éq à $(2x-1)(-x-2)=0$

èq à $2x-1=0$ ou $-x-2=0$ éq à $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-2$

alors $S_{\Re}=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$

④ $x^2-4-(x-2)(2x+3)+(x+1)(3x+4)=0$ éq à

$(x-2)(x+2)-(x-2)(2x+3)+(x+1)(3x+4)=0$ éq à

$(x-2)[(x+2)-(2x+3)]+(x+1)(3x+4)=0$ éq à

$(x-2)(x+2-2x-3)+(x+1)(3x+4)=0$ éq à

$(x-2)(-x-1)+(x+1)(3x+4)=0$ éq à

$(x+1)\left[-(x-2)+(3x+4)\right]=0$ éq à

$(x+1)(-x+2+3x+4)=0$ éq à $(x+1)(2x+6)=0$ éq à

$x+1=0$ ou $2x+6=0$ éq à $x=-1$ ou $x=-3$

alors $S_{\Re}=\{-3,-1\}$

Solution 4

① $|2x-3|=0$ éq à $2x-3=0$ éq à $x=\dfrac{3}{2}$ d'où $S_R=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

② On sait que $|a|=|b|$ éq à $a=b$ ou $a=-b$

d'où $|x-2|=|2x+1|$ éq à $x-2=2x+1$ ou $x-2=-2x-1$

* $x-2=2x+1$ éq à $x=-3$

* $x-2=-2x-1$ éq à $3x=1$ d'où $x=\dfrac{1}{3}$ d'où $S_{\Re}=\left\{-3,\dfrac{1}{3}\right\}$

③ $|x-1|+|x|-3x=0$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$-x+1$		$x-1$
$\lvert x\rvert$	$-x$		x		x

* *1er cas* : $x\in\left]-\infty,0\right]$

l'équation s'écrit : $1-x-x-3x=0$ éq à $x=\dfrac{1}{5}$ or $\dfrac{1}{5}\notin\left]-\infty,0\right]$

donc l'équation n'a pas de solution dans $\left]-\infty,0\right]$.

* *2ème cas* : $x\in[0,1]$

l'équation s'écrit : $-x+1+x-3x=0$ éq à $x=\dfrac{1}{3}$.

* *3ème cas* : $x\in\left[1,+\infty\right[$

l'équation s'écrit : $x-1+x-3x=0$ éq à $x=-1$, or $-1\notin\left[1,+\infty\right[$

d'où $S_{\Re}=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

④ $2x|x-2|-(x-2)|x|=0$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$-x+2$		$x-2$
$\lvert x\rvert$	$-x$	0	x		x

* *1er cas* : $x\in\left]-\infty,0\right]$

l'équation s'écrit : $2x(-x+2)-(x-2)(-x)=0$ éq à

$2x(2-x)+(2-x)(-x)=0$ éq à $x(2-x)=0$ éq à

$x=0$ ou $x=2$.

donc 0 est une solution de l'équation dans $\left]-\infty,0\right]$

* *2ème cas* : $x\in[0,2]$

l'équation s'écrit : $2x(2-x)-(x-2)x=0$ éq à $x(2-x)=0$

éq à $x=0$ ou $x=2$ or $0\in[0,2]$ et $2\in[0,2]$

* *3ème cas* : $x\in\left[2,+\infty\right[$

$2x(x-2)-(x-2)x=0$ éq à $x(x-2)=0$

éq à $x=0$ ou $x=2$ or $0\notin\left[2,+\infty\right[$ et $2\in\left[2,+\infty\right[$

d'où $S_{\Re}=\{0,2\}$.

Solution 5

① Pour $x\in\Re_+$, on a : $3\sqrt{x}=2$ éq à $9x=4$ éq à

$x=\dfrac{4}{9}$ d'où $S_{\Re}=\left\{\dfrac{4}{9}\right\}$

② $x-2\sqrt{x}=0$ éq à $\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}=0$ éq à $\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)=0$

éq à $\sqrt{x}=0$ *ou* $\sqrt{x}-2=0$ éq à $x=0$ *ou* $\sqrt{x}=2$

éq à $x=0$ *ou* $x=4$ d'où $S_{\Re}=\{0,4\}$

③ $x-4\sqrt{x}+4=0$ éq à $\sqrt{x}^2-4\sqrt{x}+4=0$ éq à $(\sqrt{x}-2)^2=0$

éq à $\sqrt{x}-2=0$ éq à $\sqrt{x}=2$ d'où : $x=4$ alors $S_{\Re}=\{4\}$

④ $\sqrt{4x^2-4x+1}=|x-1|$ éq à $\sqrt{(2x)^2-2.2x+1^2}=|x-1|$

éq à $\sqrt{(2x-1)^2}=|x-1|$ éq à $|2x-1|=|x-1|$ (car $\sqrt{a^2}=|a|$)

éq à $2x-1=x-1$ *ou* $2x-1=-x+1$ éq à $x=0$ *ou* $x=\dfrac{2}{3}$

d'où $S_{\mathfrak{R}}=\left\{0,\dfrac{2}{3}\right\}$

Solution 6 :

① $2x-1\leq\sqrt{5}\,x$ éq à $2x-\sqrt{5}\,x\leq 1$ éq à $x\,(2-\sqrt{5})\leq -1$

or $2-\sqrt{5}<0$ d'où $x\geq\dfrac{-1}{2-\sqrt{5}}$ ou encore $x\geq\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

d'où $S_{\mathfrak{R}}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}-2};+\infty\right[$

②

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où $(x-1)(x-3)\geq 0$ éq à $x\in\,]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

d'où $S_{\mathfrak{R}}=]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

③ ⇨ Il faut que $x\neq 1$.

$\dfrac{2x+1}{x-1}\geq 1$ éq à $\dfrac{2x+1}{x-1}-1\geq 0$ éq à $\dfrac{2x+1-(x-1)}{x-1}\geq 0$ éq à

$\dfrac{2x+1-x+1}{x-1}\geq 0$ éq à $\dfrac{x+2}{x-1}\geq 0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+2}{(x-1)}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

donc $\dfrac{x+2}{x-1}\geq 0$ éq à $x\in\,]-\infty,-2]\cup]1,+\infty]$

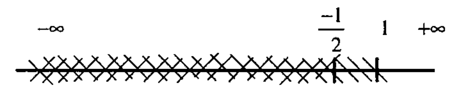
d'où $S_{\mathfrak{R}}=]-\infty,-2]\cup]1,+\infty]$

④. $|2x+1|\leq|x|-2x$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\lvert 2x+1\rvert$		$-2x-1$		$2x+1$		$2x+1$	
$\lvert x\rvert$		$-x$		$-x$		x	

* *1er cas* : $x\in\left]-\infty,\dfrac{-1}{2}\right]$; l'inéquation s'écrit : $-2x-1\leq -x-2x$

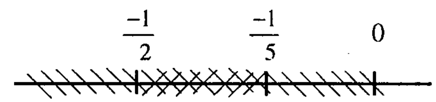
éq à $-1\leq -x$ éq à $x\leq 1$



donc tout réel $x\in\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ est solution de l'inéquation.

* *2ème cas* : $x\in\left[\dfrac{-1}{2},0\right]$; l'inéquation s'écrit : $2x+1\leq -x-2x$

éq à $5x\leq -1$ éq à $x\leq\dfrac{-1}{5}$



donc tout réel $x\in\left[\dfrac{-1}{2},\dfrac{-1}{5}\right]$ est solution de l'inéquation.

* *3ème cas* : $x\in[0,+\infty[$; l'inéquation s'écrit : $2x+1\leq x-2x$

éq à $2x+1\leq -x$ éq à $3x\leq -1$ éq à $x\leq\dfrac{-1}{3}$ or $x\in[0,+\infty[$

donc tout réel $x\in[0,+\infty[$; n'est pas solution de cette inéquation.

Conclusion : $S_{\mathfrak{R}}=\left]-\infty,\dfrac{-1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-1}{2},\dfrac{-1}{5}\right]=\left]-\infty,\dfrac{-1}{5}\right]$

⑤ $x^2 - 6x + 9 \le 2x - 6$ éq à $(x-3)^2 - 2(x-3) \le 0$ éq à $(x-3)(x-3-2) \le 0$ éq à $(x-3)(x-5) \le 0$

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-3)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où $S_{\Re} = [3, 5]$

⑥ $x > \sqrt{6x-9}$, ⇨ il faut que : $\begin{cases} x \ge 0 \\ et \\ 6x - 9 \ge 0 \end{cases}$ éq à $x \ge 0$ *et* $x \ge \frac{3}{2}$

ou encore $x \ge \frac{3}{2}$

Dans $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$; on a :

* $x > \sqrt{6x-9}$ éq à $x^2 > 6x - 9$ éq à $x^2 - 6x + 9 > 0$ éq à $(x-3)^2 > 0$ éq à $x - 3 \ne 0$ éq à $x \ne 3$ donc $S_{\Re} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[- \{3\}$.

⑦ $Q = \dfrac{(2x+1)(x-1)(x+2)}{(2-x)(x-3)}$

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		2		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Q		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	

$S_{\Re} =]-\infty, -2] \cup \left[\frac{-1}{2}, 1\right] \cup]2, 3[$

Solution 2

① $27x^3(x+3) \le 12(x^2 + 3x)$ éq à $27x^3(x+3) - 12(x^2+3x) \le 0$

éq à $3x(x+3)\left[9x^2 - 4\right] \le 0$ éq à $3x(x+3)(3x-2)(3x+2) \le 0$

x	$-\infty$		-3		$-2/3$		0		$2/3$		$+\infty$
$3x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_{\Re} = \left[-3, \frac{-2}{3}\right] \cup \left[0, \frac{2}{3}\right]$

② $\dfrac{4x^2 - 9}{x - 2} \le 4x + 3$, ⇨ il faut que : $x \ne 2$

$\dfrac{4x^2 - 9}{x-2} \le 4x + 3$ éq à $\dfrac{4x^2-9}{x-2} - (4x+3) \le 0$ éq à $\dfrac{4x^2 - 9 - (4x+3)(x-2)}{x-2} \le 0$ éq à $\dfrac{4x^2 - 9 - (4x^2 - 5x - 6)}{x-2} \le 0$

éq à $\dfrac{5x-3}{x-2} \le 0$

x	$-\infty$		$3/5$		2		$+\infty$
$5x-3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{5x-3}{x-2}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

$S_{\Re} = \left[\frac{3}{5}, 2\right[$

③ $|(x-2)(x-3)| \le x - 3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

* ***1[er] cas*** : $x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$; l'inéquation s'écrit :

$(x-2)(x-3) \le x - 3$ éq à $(x-2)(x-3) - (x-3) \le 0$ éq à $(x-3)\left[(x-2) - 1\right] \le 0$ éq à $(x-3)(x-3) \le 0$ éq à $(x-3)^2 \le 0$ éq à $x = 3$ car, on sait que $a^2 \le 0$ signifie que $a = 0$.

* $2^{ème}$ cas : $x \in [2,3]$; l'inéquation s'écrit :

$-(x-2)(x-3) \leq x-3$ éq à $-(x-2)(x-3)-(x-3) \leq 0$ éq à $(x-3)[-(x-2)-1] \leq 0$ éq à $(x-3)(-x+1) \leq 0$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$-x+1$	$+$	0	$-$		$-$
$(x-3)(-x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

donc $(x-3)(-x+1) \leq 0$ éq à $x \in]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$

or $x \in [2,3]$ d'où $x = 3$.

Conclusion : $S_{\mathfrak{R}} = \{3\}$

④ $\dfrac{2|x-1|-3}{|x|-1} < 0$

⇨ cette inéquation a un sens lorsque $|x| \neq 1$ signifie $x \neq 1$ *et* $x \neq -1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\|x-1\|$	$-x+1$		$-x+1$		$x-1$
$\|x\|$	$-x$		x		x

* 1^{er} cas : $x \in]-\infty,0] \setminus \{-1\}$; l'inéquation s'écrit :

$\dfrac{2(-x+1)-3}{-x-1} < 0$ éq à $\dfrac{2x+1}{x+1} < 0$

x	$-\infty$	-1		$-1/2$	$+\infty$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{2x+1}{x+1}$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

donc $\dfrac{2x+1}{x+1} < 0$ éq à $x \in \left]-1,\dfrac{-1}{2}\right[$ or $x \in]-\infty,0]-\{-1\}$

d'où $x \in \left]-1,\dfrac{-1}{2}\right[$

* $2^{ème}$ cas : $x \in [0,1[$; l'inéquation s'écrit :

$\dfrac{2(-x+1)-3}{x-1} < 0$ éq à $\dfrac{-2x-1}{x-1} < 0$

x	$-\infty$	$-1/2$		1	$+\infty$
$-2x-1$	$+$	0	$-$		$-$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{-2x-1}{x-1}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

donc $\dfrac{-2x-1}{x-1} < 0$ éq à $x \in \left]-\infty,\dfrac{-1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$ or $x \in [0,1[$

d'où l'inéquation n'admet pas de solutions dans $[0,1[$

* $3^{ème}$ cas : $x \in]1,+\infty[$; l'inéquation s'écrit :

$\dfrac{2(x-1)-3}{x-1} < 0$ éq à $\dfrac{2x-5}{x-1} < 0$

x	$-\infty$	$+1$		$5/2$	$+\infty$
$2x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{2x-5}{x-1}$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

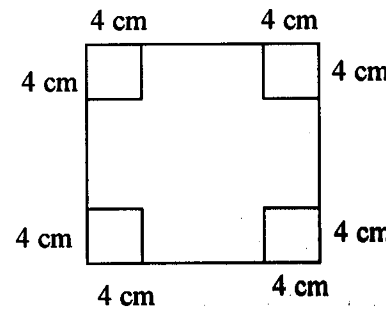
donc $\dfrac{2x-5}{x-1} < 0$ éq à $x \in \left]1,\dfrac{5}{2}\right[$ or $x \in]1,+\infty[$ d'ou $x \in \left]1,\dfrac{5}{2}\right[$

car $\left]1,\dfrac{5}{2}\right[\subset]1,+\infty[$ Conclusion : $S_{\mathfrak{R}} = \left]-1,\dfrac{-1}{2}\right[\cup \left]1,\dfrac{5}{2}\right[$

Solution 8 :

L'aire de la plaque métallique est a^2
L'aire de la forme géométrique qui reste est $S = a^2 - 16 \times 4 = a^2 - 64$

On a : $a^2 - 64 = 336$ d'où $a^2 = 400$ et par suite $a = 20$ cm



Solution 9 :

① $x^2 + 3x - 5 = 0$.

□ $\Delta = (3)^2 - 4(1)(-5) = 29 > 0$, d'où l'équation a deux solutions x' *et* x''.

$x' = \dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}$ *et* $x'' = \dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}$ d'où $S_{\mathfrak{R}} = \left\{ \dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{29}}{2} \right\}$

② $3x^2 + x - 4 = 0$

□ $\Delta = (1)^2 - 4(3)(-4) = 49 > 0$; d'où $x' = \dfrac{-1-\sqrt{49}}{6} = \dfrac{-1-7}{6} = \dfrac{-4}{3}$

et $x'' = \dfrac{-1+\sqrt{49}}{6} = 1$ alors $S_{\mathfrak{R}} = \left\{ \dfrac{-4}{3}, 1 \right\}$

Remarque : on a $a + b + c = 3 + 1 + (-4) = 0$ donc $x' = 1$ et $x'' = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-4}{3}$

③ $x^2 + x\sqrt{2} + \dfrac{1}{2} = 0$

□ $\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4(\dfrac{1}{2}) = 0$, d'où l'équation a une solution double

$x' = x'' = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ alors $S_{\mathfrak{R}} = \left\{ \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \right\}$

④ $\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{31}{2}x + 5 = 0$

□ $\Delta = (\dfrac{-31}{2})^2 - 4(\dfrac{3}{2})(5) = \dfrac{961}{4} - 30 = \dfrac{841}{4}$; $\Delta = (\dfrac{29}{2})^2$

d'où $x' = \dfrac{\frac{31}{2} - \frac{29}{2}}{2.(\frac{3}{2})} = \dfrac{31-29}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $x' = \dfrac{\frac{31}{2} + \frac{29}{2}}{2.(\frac{3}{2})} = \dfrac{30}{3} = 10$

$S_{\mathfrak{R}} = \left\{ \dfrac{1}{3}, 10 \right\}$

⑤ $4x^2 + 2x + 5 = 0$

□ $\Delta = (2)^2 - 4(4)(5) = 4 - 80 = -76 < 0$, donc l'équation n'a pas de solutions $S_{\mathfrak{R}} = \phi$

⑥ $\sqrt{2}.x^2 - x\sqrt{-1 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{2} = 0$

□ $\Delta = -1 + 4\sqrt{3} + 8 = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$, d'où

$x' = \dfrac{\sqrt{4\sqrt{3}-1} - 2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $x' = \dfrac{\sqrt{4\sqrt{3}+1} + 2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

donc $S_{\mathfrak{R}} = \{x', x''\}$.

⑦ $x^2 - 6x + 9 = 0$

□ $\Delta = 36 - 36 = 0$ d'où $x' = x'' = \dfrac{6}{2} = 3$, alors $S_{\mathfrak{R}} = \{3\}$

⑧ $x^2 - 3|x - 2| - 4 = 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	$-$	0	$+$
$\lvert x - 2\rvert$	$-x + 2$		$x - 2$

1er cas : $x \in \left]-\infty, 2\right]$: l'équation s'écrit :

$x^2 - 3(-x + 2) - 4 = 0$ éq à $x^2 + 3x - 10 = 0$

□ $\Delta = 49$ d'où $x' = \dfrac{-3-7}{2} = -5$ et $x'' = \dfrac{-3+7}{2} = 2$

or -5 *et* $2 \in \left]-\infty, 2\right]$ donc l'équation a dans $\left]-\infty, 2\right]$ deux racines -5 *et* 2.

2ème cas : $x \in \left[2, +\infty\right[$: l'équation s'écrit :

$x^2 - 3(x - 2) - 4 = 0$ éq à $x^2 - 3x + 2 = 0$.

On a $a + b + c = 0$ $(1 + -3 + 2 = 0)$ d'où $x' = 1$ *et* $x'' = 2$

$1 \notin \left[2, +\infty\right[$ *et* $2 \in \left[2, +\infty\right[$

Conclusion : $S_{\mathfrak{R}} = \{-5, 2\}$

⑨ $x^2 + 3|x| - 10 = 0$. On pose : $|x| = X$

$X^2 + 3X - 10 = 0$; □ $\Delta = 49$ d'où $X' = 2$ et $X'' = -5$.

- $X' = 2$ éq $|x| = 2$ éq $x = 2$ *ou* $x = -2$.
- $X'' = -5$. éq $|x| = -5$ ce qui est impossible d'où $S_{\mathfrak{R}} = \{-2, 2\}$.

⑩ $\left|x^2-1\right|-2x-2=0$. On a : $\left|x^2-1\right|=\left|(x-1)(x+1)\right|$

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

<u>1er cas</u> : $x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$; on a : $(x-1)(x+1)\geq 0$ donc

$\left|(x-1)(x+1)\right|=(x-1)(x+1)$; l'équation s'écrit :

$(x-1)(x+1)-2(x+1)=0$ éq à $(x+1)(x-1-2)=0$ éq à

$(x+1)(x-3)=0$ éq à $x=-1$ *ou* $x=3$; -1 *et* 3 appartiennent à $\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$.

<u>2ème cas</u> : $x\in[-1,1]$; l'équation s'écrit :

$-(x-1)(x+1)-2(x+1)=0$ éq à $(x+1)\left[-(x-1)-2\right]=0$

éq à $(x+1)(-x-1)=0$ éq à $x=-1$

or $-1\in[-1,1]$ alors $S_{\Re}=\{-1,3\}$

Solution 10 :

① $x(x^2-x)-(x-1)(3x+2)=0$ éq à

$x^2(x-1)-(x-1)(3x+2)=0$

éq à $(x-1)(x^2-3x-2)=0$ éq à $x-1=0$ *ou* $x^2-3x-2=0$

♦ $x-1=0$ éq à $x=1$

♦ $x^2-3x-2=0$. ; □ $\Delta=9+8=17>0$ d'où $x'=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ *et*

$x''=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$. alors $S_{\Re}=\left\{\dfrac{3-\sqrt{17}}{2},1,\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

② $(x^2+x)^2=4$ éq à $x^2+x=2$ *ou* $x^2+x=-2$.

(1) ♦ $x^2+x=2$ éq à $x^2+x-2=0$

on a : $a+b+c=0$ donc $x'=1$ *et* $x''=-2$

(2) ♦ $x^2+x=-2$ éq à $x^2+x+2=0$. □ $\Delta=1-8=-7<0$

donc cette équation (2) n'a pas de solutions réelles.

<u>Conclusion</u> : $S_{\Re}=\{-2,1\}$.

③ $(x^2-6x+9)=x^4$ éq à $(x-3)^2=x^4$ éq à $x-3=x^2$ *ou* $x-3=-x^2$

(1) ♦ $x-3=x^2$ éq à $x^2-x+3=0$.□ $\Delta=1-12=-11<0$

donc cette équation (1) n'a pas de solutions réelles.

(2) ♦ $x-3=-x^2$ éq à $x^2+x-3=0$. □ $\Delta=1+12=13>0$

$x'=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ *et* $x''=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ d'où $S_{\Re}=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

④ $(2x+3)(4x-1)=5x+7$ éq à $8x^2-2x+12x-3=5x+7$ éq à

$8x^2+10x-3=5x+7$ éq à $8x^2+5x-10=0$

□ $\Delta=25-4(8)(-10)=25+320=345$.

D'où $x'=\dfrac{-5-\sqrt{345}}{16}$ *et* $x''=\dfrac{-5+\sqrt{345}}{16}$. Alors $S_{\Re}=\{x',x''\}$.

⑤ $(x+1)(x+2)=(x+3)(x+4)+(x+5)(x+6)$ éq à

$(x^2+3x+2)=(x^2+7x+12)+(x^2+11x+30)$ éq à

$x^2+3x+2=2x^2+18x+42$ d'où on obtient : $x^2+15x+40=0$

□ $\Delta=(15)^2-4(40)=225-160=65$

d'où : $x'=\dfrac{-15-\sqrt{65}}{2}$ *et* $x''=\dfrac{-15+\sqrt{65}}{2}$. alors $S_{\Re}=\{x',x''\}$.

⑥ $(x^2-2x+3)(x^2+2x+2)=0$ éq à

$x^2-2x+3=0$ *ou* $x^2+2x+2=0$

♦ $x^2-2x+3=0$. □ $\Delta=4-12=-8<0$

♦ $x^2+2x+2=0$. □ $\Delta=4-8=-4<0$

$S_{\Re}=\phi$.

⑦ $x+1=\dfrac{1}{x}$; ⇨ il faut que la solution $x\neq 0$

Pour $x\in\Re^*$, $x+1=\dfrac{1}{x}$ éq à $x(x+1)=1$ éq à $x^2+x-1=0$

□ $\Delta=5$; d'où $x'=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *et* $x''=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, donc $S_{\Re}=\{x',x''\}$

⑧ $3x + \frac{1}{2x} = \frac{5}{2}$; ⇨ il faut que $x \neq 0$

Pour $x \in \Re^*$, $3x + \frac{1}{2x} = \frac{5}{2}$ éq $\frac{6x^2+1}{2x} = \frac{5}{2}$ éq $6x^2 + 1 = 5x$ éq

$6x^2 - 5x + 1 = 0$

❑ $\Delta = 25 - 4.(6).1 = 1$ d'où $x' = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ *et* $x'' = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}$

$S_\Re = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

Solution 11 :

① $x^2 + 5x - 6 = 0$

On a : $a + b + c = 1 + 5 - 6 = 0$ d'où $x' = 1$ *et* $x'' = \frac{c}{a} = -6$

② $x^2 - 4x - 5 = 0$. On a : $a - b + c = 1 + 4 - 5 = 0$ d'où

$x' = -1$ *et* $x'' = \frac{-c}{a} = 5$. D'où $S_\Re = \{-1, 5\}$

③ $7x^2 - 9x + 2 = 0$. On a : $a + b + c = 0$ d'où $x' = 1$ et par suite

$x'' = \frac{c}{a} = \frac{2}{7}$. D'où $S_\Re = \{1, \frac{2}{7}\}$.

④ $x^2 + x - 6 = 0$

On remarque que : $x' = 2$ est une solution , car : $2^2 + 2 - 6 = 0$.

Or $S = x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$ d'où $x'' = -1 - x' = -1 - 2 = -3$

$$S_\Re = \{-3, +2\}$$

⑤ $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$.

On remarque que : $x' = \frac{1}{2}$ est une solution , Or $S = x' + x'' = \frac{-b}{a} = -1$

d'où $x'' = -1 - x' = -1 - \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$. $S_\Re = \left\{\frac{-3}{2}, -1\right\}$

Solution 12 :

① ♦ $A = x' + x'' = \frac{-b}{a}$; ♦ $B = x'x'' = \frac{c}{a}$;

♦ $C = x'x''(x' + x'') = \frac{c}{a}.\frac{-b}{a} = \frac{-bc}{a^2}$

② ♦ $D = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$;

♦ $E = x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'^2x'' - -3x'x''^2 = \frac{-b^3}{a^3} - 3x'x''(x' + x'')$;

$E = \frac{-b^3}{a^3} + 3\frac{cb}{a^2}$.

♦ $F = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x'' + x'}{x'x''} = \frac{-b}{a}.\frac{a}{c} = \frac{-b}{c}$

♦ $G = (2x' + 1)(2x'' + 1) = 2x'x'' + 2x' + 2x'' + 1$

$= 2x'x'' + 2(x' + x'') + 1 = \frac{2c}{a} - \frac{2b}{a} + 1$.

Solution 13 : ① ⇨ On pose $X = x^2 + x$

l'équation (E) se transforme en (E') : $X^2 + 2X - 8 = 0$

② ❑ $\Delta = 4 - 4(1)(-8) = 36$; on a $X = 2$ ou $X = -4$

③ • si $X = 2$ éq à $x^2 + x = 2$ éq à $x^2 + x - 2 = 0$

d'où $x = 1$ *ou* $x = -2$

• si $X = -4$ éq à $x^2 + x + 4 = 0$ ❑ $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$

$S_\Re = \{-2, 1\}$

④ $\frac{2}{(x^2+1)^2} - \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{2} = 0$; ⇨ On pose : $\frac{1}{x^2+1} = X$

l'équation s'écrit : $2X^2 - 2X + \frac{1}{2} = 0$ ❑ $\Delta = 4 - 4(2)(\frac{1}{2}) = 0$

d'où $X' = X'' = \frac{1}{2}$; si $X = \frac{1}{2}$ éq $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}$ éq $x^2 + 1 = 2$

éq $x^2 = 1$ d'où $x = 1$ *ou* $x = -1$ donc $S_\Re = \{-1, 1\}$

Solution 14 :

① $\sqrt{x^2+x} = |3x-1|$; ⇨ il faut que $x^2+x \geq 0$.

On a : $\sqrt{x^2+x} = |3x-1|$ éq à $x^2+x=(3x-1)^2$ éq à

$x^2+x = 9x^2-6x+1$ éq à $8x^2-7x+1=0$

□ $\Delta = 49-32=17$ d'où $x' = \dfrac{7-\sqrt{17}}{16}$ ou $x'' = \dfrac{7+\sqrt{17}}{16}$

or x^2+x doit être supérieure ou égale à 0.

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$-$		$+$	
$x(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

• $x^2+x \geq 0$ si $x \in]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[= E$

donc $S_{\Re} = \left\{\dfrac{7+\sqrt{17}}{16}, \dfrac{7-\sqrt{17}}{16}\right\}$

② $x - 3\sqrt{x} + 4 = 0$; ⇨ On pose : $\sqrt{x} = X$; l'équation s'écrit :

$X^2 - 3X + 4 = 0$; □ $\Delta = 9-4(4) = -7$, $S_{\Re} = \phi$.

③ $\sqrt{3x^2-2x} = 2x-1$; ⇨ il faut que : $3x^2-2x \geq 0$ et $2x-1 \geq 0$

x		0		$1/2$		$2/3$	
$3x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3x^2-2x$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$

donc $x \in \left[\dfrac{2}{3},+\infty\right[$

Pour $x \in \left[\dfrac{2}{3},+\infty\right[$ $\sqrt{3x^2-2x} = 2x-1$ éq à $3x^2-2x = (2x-1)^2$ éq à

$3x^2-2x = 4x^2-4x+1$ éq à $x^2-2x+1=0$ éq à $(x-1)^2=0$

éq à $x=1$; or $1 \in \left[\dfrac{2}{3},+\infty\right[$; $S_{\Re} = \{1\}$

④ $\sqrt{x^2+3} = x+1$.

⇨ il faut que $x^2+3 \geq 0$ et $x+1 \geq 0$ donc il faut que $x \in [-1,+\infty[$

Pour $x \in [-1,+\infty[$; $\sqrt{x^2+3} = x+1$ éq à $x^2+3 = (x+1)^2$ éq à

$x^2+3 = x^2+2x+1$ éq à $2x+1=3$ éq à $2x=2$ éq à $x=1$.

Or $1 \in [-1,+\infty[$, $S_{\Re} = \{1\}$.

⑤ $\sqrt{1+\sqrt{x^4+x^2}} = 2x-1$, ⇨ il faut que $2x-1 \geq 0$ éq à $x \geq \dfrac{1}{2}$

éq à $x \in \left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[= E_1$

l'équation s'écrit : $1+\sqrt{x^4+x^2} = (2x-1)^2$ éq à

$1+\sqrt{x^4+x^2} = 4x^2-4x+1$ éq à $\sqrt{x^4+x^2} = 4x^2-4x$

⇨ il faut que $4x^2-4x \geq 0$ éq à $4x(x-1) \geq 0$

		0		1	
$4x$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$4x(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

donc il faut que : $x \in]-\infty,0] \cup [1,+\infty[= E_2$ or $E_1 \cap E_2 = [1,+\infty[$

donc, il faut que : $x \in [1,+\infty[$ et $\sqrt{x^4+x^2} = 4x^2-4x$

$\sqrt{x^4+x^2} = 4x^2-4x$ éq : $x^4+x^2 = (4x^2-4x)^2$ éq

$x^4+x^2 = 16x^4-32x^3+16x^2$ éq $15x^4-32x^3+15x^2=0$ éq

$x^2(15x^2-32x+15)=0$ éq $x^2=0$ *ou* $15x^2-32x+15=0$.

• $x^2=0$ éq à $x=0$ or $0 \notin [1,+\infty[$.

• $15x^2-32x+15=0$; □ $\Delta = (32)^2-4(15)(15) = 1024-900 = 124$

$x' = \dfrac{32-\sqrt{124}}{30}$ *et* $x'' = \dfrac{32+\sqrt{124}}{30}$;

or $x' \notin [1,+\infty[$ et $x'' \in [1,+\infty[$, donc $S_{\Re} = \left\{\dfrac{32+\sqrt{124}}{30}\right\}$.

⑥ $3|x-2| - 7\sqrt{x-2} + 2 = 0$; ⇨ il faut que $x - 2 \geq 0$ d'où : $x \geq 2$

⇨ On pose : $\sqrt{x-2} = X$ donc $X^2 = x - 2$; l'équation s'écrit :

$3X^2 - 7X + 2 = 0$; □ $\Delta = 49 - 4(3)(2) = 25$,

d'où : $X = \dfrac{7-5}{6} = \dfrac{1}{3}$ *ou* $X = 2$.

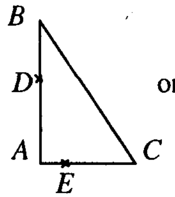
• si $X = \dfrac{1}{3}$ éq à $\sqrt{x-2} = \dfrac{1}{3}$ éq $x - 2 = \dfrac{1}{9}$ d'où $x = 2 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{19}{9}$.

or $\dfrac{19}{9} \in [2, +\infty[$

• si $X = 2$ éq à $\sqrt{x-2} = 2$ d'où $x - 2 = 4$ et par suite $x = 6$

or $6 \in [2, +\infty[$ donc : $S_{\mathfrak{R}} = \left\{ \dfrac{19}{9}, 6 \right\}$

Solution 15 :



on a : $AC = 4$ et $AB = 10$

① L'aire $A_{(x)} = \dfrac{AE.AD}{2}$,

or $AE = x$ et $AD = AB - BD = 10 - 2AE = 10 - 2x$.

d'où : $A_{(x)} = \dfrac{(10-2x)x}{2} = x(5-x)$.

② $x(5-x) = \dfrac{25}{4}$ éq à $x^2 - 5x + \dfrac{25}{4} = 0$ éq à $(x - \frac{5}{2})^2 = 0$ éq à $x = \frac{5}{2}$

<u>Conclusion</u> : $x = \frac{5}{2}$

③ $A_{(x)} = \dfrac{9}{4}$ éq à $x(5-x) = \dfrac{9}{4}$ éq à $x^2 - 5x + \dfrac{9}{4} = 0$

□ $\Delta = 25 - 9 = 16$ d'où $x' = \dfrac{5-4}{2} = \dfrac{1}{2}$; $x'' = \dfrac{9}{2}$.

Or $x \in [0, 4]$ et $x'' = \dfrac{9}{2} = 4{,}5 \notin [0, 4]$ <u>Conclusion</u> : $x = \dfrac{1}{2}$.

Solution 16 :

① On a : $\Delta = m^2 + 8 > 0$, donc E a deux racines distinctes x' et x''.

② $x'.x'' = \dfrac{c}{a} = -2$, donc $x'.x'' < 0$; donc x' et x'' sont de signe contraire.

③ a) $A = \dfrac{1}{4-x'} + \dfrac{1}{4-x''} = \dfrac{4-x''+4-x'}{(4-x')(4-x'')} = \dfrac{8-(x'+x'')}{16-4x'-4x''+x'x''}$.

$= \dfrac{8-s}{16-4s+p}$.

Or $s = \dfrac{-b}{a} = m$ et $p = \dfrac{c}{a} = -2$ d'où $A = \dfrac{8-m}{16-4m-2} = \dfrac{8-m}{14-4m}$

b) $A = 10$. éq $\dfrac{8-m}{14-4m} = 10$ éq $8 - m = 140 - 40m$ éq

$8 - 140 = -39m$ éq $-132 = -39m$ éq $m = \dfrac{132}{39}$.

Solution 17 :

□ Déterminons les solutions de l'équation : $2x^2 + x - 3 = 0$.

On a : $a + b + c = 2 + 1 + (-3) = 0$; donc $x' = 1$ et $x'' = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-3}{2}$.

D'où: $A = 2(x-1)(x + \frac{3}{2}) = (x-1)(2x+3)$.

□ $B = -3x^2 + x + 4$.

On a : $a - b + c = 0$; donc les solutions de l'équation sont :

$x' = -1$ et $x'' = \dfrac{-c}{a} = \dfrac{4}{3}$.

D'où : $B = -3(x+1)(x - \frac{4}{3}) = (x+1)(-3x+4)$.

□ Posons $X = x^2$; l'équation $x^4 + x^2 - 6 = 0$ devient :

$X^2 + X - 6 = 0$

⇨ $\Delta = 25 = 5^2$ d'où : $X' = \dfrac{-1-5}{2} = -3$; $X'' = \dfrac{-1+5}{2} = 2$

d'où : $X^2 + X - 6 = (X+3)(X-2)$, or $X = x^2$ donc :

$C = (x^2+3)(x^2-2) = (x^2+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

❑ $D = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}^2 = (x-\sqrt{2})^2$.

Solution 18 :

① $x^2 - 5x - 6 \le 0$.

On a : $a - b + c = 1 + 5 - 6 = 0$;

donc les solutions de l'équation : $x^2 - 5x - 6 = 0$ sont :

$x' = -1$ et $x'' = -\dfrac{c}{a} = 6$., d'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
signe (x^2-5x-6)		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_{\Re} = [-1, 6]$

② $-2x^2 + 5x - 2 > 0$.

❑ $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$; $x' = \dfrac{-5-3}{-4} = 2$; $x'' = \dfrac{-5+3}{-4} = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		2		$+\infty$
$-2x^2+5x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_{\Re} = \left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$

③ $(x^2+5x)^2 \ge 4(x+2)^2$ éq à $(x^2+5x)^2 - 4(x+2)^2 \ge 0$

éq à $[x^2+5x-(2x+4)].[x^2+5x+2x+4] \ge 0$

éq à $(x^2+3x-4).(x^2+7x+4) \ge 0$.

- Pour le trinôme x^2+3x-4, on a: $a+b+c=0$, donc $x' = 1$ et $x'' = -4$.
- Pour le trinôme x^2+7x+4, on a : $\Delta = 49 - 16 = 33$, donc

$x' = \dfrac{-7-\sqrt{33}}{2} = 2$ et $x'' = \dfrac{-7+\sqrt{33}}{2}$. d'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{-7-\sqrt{33}}{2}$		-4		$\frac{-7+\sqrt{33}}{2}$		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x^2+7x+4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_{\Re} = \left]-\infty, \dfrac{-7-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[-4, \dfrac{-7+\sqrt{33}}{2}\right] \cup [1, +\infty[$

④ L'inéquation n'a un sens que lorsque $x \in \Re^* \setminus \{-1, -2\}$.

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \le 0$ éq à $\dfrac{(x+1)(x+2) + x(x+2) + x(x+1)}{x(x+1)(x+2)} \le 0$

éq à $\dfrac{3x^2+6x+2}{x(x+1)(x+2)} \le 0$.

Soit Δ le discriminant du trinôme $3x^2+6x-2$, on a : $\Delta = 12 = (2\sqrt{3})^2$,

d'où $x' = \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{6} = -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x'' = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		-2		$-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$		-1		$-1+\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$+\infty$
$3x^2+6x+2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)(x+2) = x^2+3x+2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x^2+6x-2}{x(x+1)(x+2)}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$S_{\Re} =]-\infty, -2[\cup \left[\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, -1\right[\cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, 0\right[$

Solution 19 :

① Il faut que $x^2 + x \ge 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'inéquation n'a un sens que lorsque $x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$

- Pour tout réel $x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$, l'inéquation est équivalente à :

$(\sqrt{x^2+x})^2 \le |3x-1|^2$ éq à $x^2 + x \le 9x^2 - 6x + 1$ éq à

$8x^2 - 7x + 1 \ge 0$, $\Delta = 17$, $x' = \dfrac{7-\sqrt{17}}{16}$, $x'' = \dfrac{7+\sqrt{17}}{16}$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{7-\sqrt{17}}{16}$		$\frac{7+\sqrt{17}}{16}$		$+\infty$
$8x^2-7x+1$		$+$				$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_{\Re} =]-\infty, -1] \cup \left[0, \dfrac{7-\sqrt{17}}{16}\right] \cup \left[\dfrac{7+\sqrt{17}}{16}, +\infty\right[$.

② L'inéquation n'a un sens que lorsque $3x^2+5x-8 \geq 0$.

On a : $a+b+c=0$, donc :

x	$-\infty$		$-8/3$		1		$+\infty$
$3x^2+5x-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc il faut que $x \in \left]-\infty, \frac{-8}{3}\right] \cup [1,+\infty[$

- Etudions le signe de $2x-2$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2x-2$		$-$	0	$+$	

1er cas : si $x \in]-\infty,-1[$ on a $2x-2<0$, donc tout $x \in \left]-\infty, \frac{-8}{3}\right]$ est solution de cette inéquation.

2ème cas : si $x \in [1,+\infty[$ on a $2x-2 \geq 0$,

donc l'inéquation est équivalente à $(\sqrt{3x^2+5x-8})^2 \geq (2x-2)^2$ éq à

$3x^2+5x-8 \geq 4x^2-8x+4$ éq à $x^2-13x+12 \leq 0$.

On a : $a+b+c=0$, d'où: $x'=1$, $x''=12$

x	$-\infty$		1		12		$+\infty$
$x^2-13x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $x \in [1,12]$.

Conclusion : $S_{\mathfrak{R}} = \left]-\infty, \frac{-8}{3}\right] \cup [1,12]$

③ • On a pour tout $x \in \mathfrak{R}$; $x^2-x+1>0$; car $\Delta=-3<0$, donc cette inéquation a un sens pour tout $x \in \mathfrak{R}$.

- Etudions le signe de $x-1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

1er cas : si $x \in]-\infty,1]$, on a $x-1 \leq 0$;

donc tout $x \in]-\infty,1]$ est solution de cette inéquation.

2ème cas : si $x \in [1,+\infty[$ on a $2x-2 \geq 0$, donc l'inéquation est équivalente à $(\sqrt{x^2-x+1})^2 \geq (x-1)^2$ éq à $x^2-x+1 \geq x^2-2x+1$ éq à $x \geq 0$; or $x \in [1,+\infty[$ donc tout $x \in [1,+\infty[$ est solution de cette inéquation. *Conclusion* : $S_{\mathfrak{R}} =]-\infty,1] \cup [1,+\infty[= \mathfrak{R}$

④ $\left|-2x^2+5x-3\right| \leq 3$

Etudions le signe de $-2x^2+5x-3$; on a : On a : $a+b+c=0$,

d'où: $x'=1$, $x''=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$, d'où :

x	$-\infty$		1		$3/2$		$+\infty$
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\left|-2x^2+5x-3\right|$		$2x^2-5x+3$	0	$-2x^2+5x-3$	0	$2x^2-5x+3$	

1er cas : si $x \in]-\infty,1] \cup \left[\frac{3}{2},+\infty\right[$, l'inéquation devient :

$2x^2-5x+3 \leq 3$ éq à $2x^2-5x \leq 0$ éq à $x(2x-5) \leq 0$

x	$-\infty$		0		$5/2$		$+\infty$
$2x^2-5x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $x \in \left[0,\frac{5}{2}\right]$ or $x \in]-\infty,1] \cup \left[\frac{3}{2},+\infty\right[$

d'où $x \in [0,1] \cup \left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$.

2ème cas : si $x \in \left[1,\frac{3}{2}\right]$; l'inéquation.devient : $-2x^2+5x-3 \leq 3$

éq à $-2x^2+5x-6 \leq 0$; $\Delta=-23<0$, donc pour tout $x \in \left[1,\frac{3}{2}\right]$

$-2x^2+5x-6<0$, donc tout $x \in \left[1,\frac{3}{2}\right]$ est une solution de cette inéquation.

Conclusion : $S_{\mathfrak{R}} = [0,1] \cup \left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right] \cup \left[1,\frac{3}{2}\right] = \left[0,\frac{5}{2}\right]$.

Solution 20 : ① $t^2-2t-15=P$, $\Delta=4-4(-15)=64$;

le trinôme s'annule en : $t'=\frac{2-8}{2}=-3$, $t''=5$, donc :

$t^2-2t-15=a(t-t')(t-t'')$; or $a=1$, $t'=-3$ et $t''=5$.

Conclusion : $t^2-2t-15=(t+3)(t-5)$

② $x^4 - 2x^2 - 15 \leq 0$ éq à $(x^2+3)(x^2-5) \leq 0$ (d'après ce qui précède)

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
x^2+3	+		+		+
x^2-5	+	0	−	0	+
$(x^2+3)(x^2-5)$	+	0	−	0	+

$S_{\mathfrak{R}} = [\sqrt{-5}, \sqrt{5}]$

③ $x \leq \sqrt{2x+15}$; ⇨ Il faut que $2x+15 \geq 0$ éq $2x \geq -15$

éq $x \geq \dfrac{-15}{2}$ donc : $x \in \left[\dfrac{-15}{2}, +\infty\right[$

• $x \leq \sqrt{2x+15}$

1er cas : $x \in \left[\dfrac{-15}{2}, 0\right]$ on a : $x \leq 0$ et $\sqrt{2x+15} \geq 0$; donc pour tout

$x \in \left[\dfrac{-15}{2}, 0\right]$ on a : $x \leq \sqrt{2x+15}$

2ème cas : $x \in [0, +\infty[$, $x \leq \sqrt{2x+15}$ éq à $x^2 \leq 2x+15$ éq à

$x^2 - 2x - 15 \leq 0$; or :

x		-3		5	
$x^2-2x-15$	+	0	−	0	+

donc $x \in [-3, 5]$ et comme $x \in [0, +\infty[$, alors $x \in [0, 5]$.

$S_{\mathfrak{R}} = \left[\dfrac{-15}{2}, 5\right]$

Solution 21 : A/

① $x + 1 \leq \dfrac{x-4}{x-2}$ éq à $x + 1 - \dfrac{x-4}{x-2} \leq 0$ éq à $\dfrac{x^2 - x - 2 - x + 4}{x-2} \leq 0$

éq à $\dfrac{x^2-2x+2}{x-2} \leq 0$.

• $x^2 - 2x + 2 = 0$; □ $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$
• $x - 2 = 0$ éq à $x = 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-2x+2		+		+	
$x-2$		−	0	+	
$\dfrac{x^2-2x+2}{x-2}$		−	‖	+	

$S_{\mathfrak{R}} =]-\infty, 2[$

② $\dfrac{x-4}{x-2} \leq 2x+2$ éq $\dfrac{x-4}{x-2} - (2x+2) \leq 0$ éq

$\dfrac{x-4-(2x+2)(x-2)}{x-2} \leq 0$ éq $\dfrac{x-4-(2x^2-4x+2x-4)}{x-2} \leq 0$ éq

$\dfrac{x-4-(2x^2-2x-4)}{x-2} \leq 0$ éq $\dfrac{-2x^2+3x}{x-2} \leq 0$.

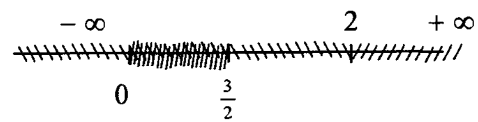
x	$-\infty$		0		$3/2$		2		$+\infty$
$-2x^2+3x$		−	0	+	0	−		−	
$x-2$		−		−		−	0	+	
$\dfrac{-2x^2+3x}{x-2}$		+	0	−	0	+	‖	−	

$S_{\mathfrak{R}} = \left[0, \dfrac{3}{2}\right] \cup]2, +\infty[$

B/ $x + 1 \leq \dfrac{x-4}{x-2} \leq 2x+2$ éq $x + 1 \leq \dfrac{x-4}{x-2}$ et $\dfrac{x-4}{x-2} \leq 2x+2$

• D'après A) ① et ② , on a :

$x \in]-\infty, 2[$ et $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \cup]2, +\infty[$.



$S_{\mathfrak{R}} = \left[0, \dfrac{3}{2}\right]$

Solution 22 : On pose $X = 2x^2 + x$; l'inéquation s'écrit :

$X^2 - 2X - 3 \leq 0$.

Signe du trinôme : $T_{(X)} = X^2 - 2X - 3$.

$\Delta = 4 + 12 = 16$; $X' = \dfrac{2-4}{2} = -1$, $X'' = 3$

X	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$X^2 - 2X - 3$		+	0	−	0	+	

donc : $X^2 - 2X - 3 \le 0$ éq à $X \in [-1, 3]$

$-1 \le X \le 3$ éq $-1 \le 2x^2 + x \le 3$ éq $\begin{cases} -1 \le 2x^2 + x \\ et \\ 2x^2 + x \le 3 \end{cases}$

éq $\begin{cases} 2x^2 + x + 1 \ge 0 & (1) \\ et \\ 2x^2 + x - 3 \le 0 & (2) \end{cases}$

(1) : $2x^2 + x + 1 \ge 0$,

$\Delta = 1 - 4(2) = -7 < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x^2 + x + 1$		+	

donc on a : pour tout x réel : $2x^2 + x + 1 \ge 0$

(2) : $2x^2 + x - 3 \le 0$

$\Delta = 1 - 4(2)(-3) = 25$; $x' = \dfrac{-1-5}{4} = \dfrac{-3}{2}$ et $x'' = \dfrac{-1+5}{4} = 1$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 + x - 3$		+	0	−	0	+	

$2x^2 + x - 3 \le 0$ éq $x \in \left[\dfrac{-3}{2}, 1\right]$

$S_{\Re} = \left[\dfrac{-3}{2}, 1\right]$

NOTION DE POLYNOMES

Résultats à retenir :

❑ Soit a_0, a_1, a_2, …., a_n des réels, la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ est appelée fonction polynôme, les réels a_0, a_1, a_2, …., a_n sont appelés les coefficients de *f*.

❑ Si $a_n \ne 0$ alors l'entier *n* est appelé le degré du polynôme *f*, on écrit $d°(f) = n$.

❑ On convient que le polynôme nul n'a pas de degré.

❑ Soit *f* et *g* deux polynômes et α un réel.

* On appelle somme de *f* et *g* le polynôme noté $f + g$ et défini pour tout réel *x* par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

* On appelle produit du polynôme *f* par le réel α le polynôme noté αf et défini pour tout réel *x* par $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

* On appelle produit des polynômes *f* et *g* le polynôme noté *fg* et défini pour tout réel *x* par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$.

❑ Soit *P* et *Q* deux polynômes. On dit que le polynôme *P* est factorisable par le polynôme *Q* s'il existe un polynôme *R* tel que $P(x) = Q(x) \times R(x)$.

❑ Soit *f* et *g* deux fonctions polynômes.

La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est appelée fonction rationnelle.

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 : Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

① Quel est le degré du polynôme f ?
② Calculer $f(2)$
③ Trouver le polynôme $g(x)$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2).g(x)$

Exercice 2 : Soit $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

① Calculer $f(1)$.
② Factoriser $f(x)$.
③ Résoudre dans $\Re$ l'équation : $f(x) = 0$.

Exercice 3 : Soit $f(x) = x^3 - 6x - 9$ et $g(x) = x^2 + 3x + 3$

① Comparer $(x-3).g(x)$ et $f(x)$.
② Simplifier le quotient : $\dfrac{x^3 - 6x - 9}{x^2 + 3x + 3}$.

Exercice 4 : Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 - 4}$

① Donner l'ensemble de définition D de f.
② Trouver les réels a et b tels que pour tout x élément de D on a :
$f(x) = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$.

Exercice 5 : Soit $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$

① Montrer que 2 et (-2) sont deux zéros du polynôme f.
② Déterminer le polynôme Q tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$f(x) = (x^2 - 4).Q(x)$
③ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) \leq 0$.

Exercice 6 : Soit $g(x) = 3x^4 - 16x^3 - 15x^2 + 16x + 12$

① Trouver le polynôme Q(x) tel que, $g(x) = (3x^2 - x - 2).\text{Q}(x)$
② Résoudre dans $\Re$ l'équation : $g(x) = 0$.

③ Soit $h(x) = 3x^4 + (a+b)x^3 - (b+c)x^2 + 16x + c$. Trouver les réels a,b et c tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $h(x) = g(x)$.

Exercice 7 : Soit $f(x) = \dfrac{x^7 - 1}{x - 1}$

① Déterminer l'ensemble de définition D de f.
② Soit $g(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Montrer que pour tout $x \in$ D ; $f(x) = g(x)$.
③ Simplifier le quotient $\dfrac{x^{14} - 1}{x - 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Exercice 8 : Soit $f(x) = 4x^5 - 5x + 1$ et $g(x) = 4x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1$

① Calculer $f(1)$.
② Trouver les réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1).g(x)$

Exercice 9 : $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 3x} - \dfrac{2(x+1)^2}{x^2 + 2x}$

① Déterminer l'ensemble de définition D de f.
② Simplifier l'écriture de $f(x)$.
③ Résoudre dans $\Re$ l'inéquation : $\dfrac{1}{x^2 + 3x} \leq \dfrac{2(x+1)^2}{3x^2 + 6x}$.

Exercice 10 : Soit a,b et c trois réels distincts et

$$f(x) = (b-c)(x-a)[(x+a)^2 + (b+c)^2] + (c-a)(x-b)[(x+b)^2 + (c+a)^2] + (a-b)(x-c)[(x+c)^2 + (a+b)^2]$$

① Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$.
② Quel est le coefficient du monôme x^3 dans l'expression $f(x)$.
③ En déduire que f est la fonction nulle.

Exercice 11 : Soit $f(x) = (x-1)(x+2)(x-2)(x-3)$
et $g(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$

① Calculer $g(1)$, $g(-2)$, $g(2)$ et $g(3)$.
② Déterminer le degré du polynôme f et le coefficient de son terme du plus haut degré.
③ En déduire que $f = g$.

Exercice 12 : Trois cubes ont pour arrêtes mesurées en cm :
x, $x+1$ et $x+2$ où $x \in \mathbb{R}_+^*$.

① On note $v(x)$ le volume total des trois cubes ; montrer que :
$v(x) = 3x^3 + 9x^2 + 15x + 9$.

② Soit $f(x) = x^3 - 6x - 9$.

a) Calculer $f(3)$.

b) Trouver le polynôme $g(x)$ tel que $f(x) = (x-3).g(x)$

③ a) Développer : $(x+3)^3$

b) Déterminer x pour que le contenu des trois cubes d'arrêtes x, $x+1$ et $x+2$ remplisse exactement le cube d'arrête $(x+3)$.

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 13 : Soit $f(x) = 3x^2 - x - 2$

① Factoriser $f(x)$.

② Soit $g(x) = 3x^4 - x^2 - 2$. Factoriser $g(x)$.

③ Résoudre dans $\mathfrak{R}$ l'équation : $g(x) \le 0$.

Exercice 14 : Soit $h(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$

① Calculer $h(1)$.

② Déterminer le polynôme $P(x)$ tel que : $h(x) = (x-1).P(x)$

③ Résoudre dans $\mathfrak{R}$ l'inéquation : $h(x) \ge 0$.

④ Simplifier le quotient $\dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 2}{x^3 - 1}$ pour $x \ne 1$.

Exercice 15 : Soit $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 24$

① Trouver les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = (x^2+3x)^2 + a(x^2+3x) + b$

② Résoudre ainsi l'inéquation : $f(x) \ge 0$.

Exercice 16 : ① Soit u un réel . Factoriser $u^2 - 9u + 1$

② Soit le polynôme $f(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16$. Montrer que pour tout $x \ne 0$, $\dfrac{f(x)}{x^2} = (x + \dfrac{4}{x})^2 - 9(x + \dfrac{4}{x}) + 1$.

③ Montrer alors que $f(x) = (x-2)^2(x^2 - 5x + 4)$

④ Résoudre ainsi l'inéquation : $x^4 - 9x^3 + 28x^2 \le 36x - 16$.

Exercice 17 : Soit $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x - 3$

① Trouver les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = (ax^2 + bx)^2 - 2(ax^2 + bx) - 3$

② Factoriser le trinôme : $u^2 - 2u - 3$.

③ Factoriser alors $f(x)$.

④ Résoudre ainsi l'inéquation : $f(x) \le 0$.

Exercice 18 : On considère la fonction : $f(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^2} - \dfrac{2}{x^2+1} + \dfrac{1}{2}$

① Trouver le polynôme $P(x)$ tel que : $f(x) = \dfrac{P(x)}{2(x^2+1)^2}$

② Trouver le réel a tel que : $P(x) = (x^2+ax)^2 + 2(x^2+ax) - 8$

③ Résoudre ainsi l'équation : $f(x) = 0$

SOLUTIONS

Solution 1 : ① Le degré du polynôme f est 3.

② $f(2)=0$.

③ $f(x)=(x-2).(ax^2+bx+c)$ équivaut à

$x^3+3x^2-4x-12=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$ équivaut à

$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=3 \\ c-2b=-4 \\ -2c=-12 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=6 \end{cases}$ d'où $f(x)=(x-2).(x^2+5x+6)$

Solution 2 : ① $f(1)=0$.

② 1 est zéro de f donc $f(x)=(x-1).(ax^2+bx+c)$ équivaut à

$x^3+6x^2+5x-12=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$ équivaut à $\begin{cases} a=1 \\ b-a=6 \\ c-b=5 \\ -c=-12 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a=1 \\ b=7 \\ c=12 \end{cases}$ d'où $f(x)=(x-1).(x^2+7x+12)$

③ $f(x)=0$ équivaut à $(x-1).(x^2+7x+12)=0$

équivaut à $x-1=0$ ou $x^2+7x+12=0$

* $x^2+7x+12=0$; on a $\Delta=1$ donc $x'=\dfrac{-7-1}{2}=-4$ et $x''=\dfrac{-7+1}{2}=-3$

d'où $S_{\mathbb{R}}=\{-4;-3;1\}$

Solution 3 :

① On a : $(x-3).g(x)=(x-3)(x^2+3x+3)=\ x^3-6x-9$.

② $\dfrac{x^3-6x-9}{x^2+3x+3}=\dfrac{(x-3)(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}=x-3$

Solution 4 :

① $f(x)$ n'existe que lorsque $x^2-4\neq 0$ or $x^2-4=0$ équivaut à $(x-2)(x+2)=0$ équivaut à $x=2$ où $x=-2$ d'où $D_f=\Re-\{-2,2\}$.

② Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$, $f(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$ équivaut à

$\dfrac{2x+1}{x^2-4}=\dfrac{a(x+2)+b(x-2)}{x^2-4}$

équivaut à $2x+1=(a+b)x+2(a-b)$ équivaut à $\begin{cases} a+b=2 \\ 2(a-b)=1 \end{cases}$ équivaut à

$\begin{cases} b=2-a \\ 2a-2(2-a)=1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b=2-a \\ 4a-4=1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b=2-a \\ 4a=5 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a=\dfrac{5}{4} \\ b=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ d'où $f(x)=\dfrac{5}{4(x-2)}+\dfrac{3}{4(x+2)}$.

Solution 5 : ① On a : $f(2)=0$ et $f(-2)=0$ donc 2 et (-2) sont deux zéros du polynôme f.

② Puisque 2 et (-2) sont deux zéros de f donc il existe un polynôme du $2^{\text{ème}}$ degrés $Q(x)=ax^2+bx+c$ tel que tout $x\in\Re$, on a

$f(x)=(x^2-4).(ax^2+bx+c)$

$x^4+x^3-3x^2-4x-4\ =(x^2-4).(ax^2+bx+c)$ équivaut à

$x^4+x^3-3x^2-4x-4\ =ax^4+bx^3+(c-4a)x^2-4bx-4c$ équivaut à

$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c-4a=-3 \\ -4b=-4 \\ -4c=-4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$ d'où $f(x)=(x^2-4).(x^2+x+1)$

③ $f(x)\leq 0$ équivaut à $(x^2-4).(x^2+x+1)\leq 0$

On a : $x^2+x+1>0$ pour tout $x\in\Re$ car $\Delta=-3<0$ et $a=1>0$

donc le signe de $f(x)$ est celui de x^2-4. or $x^2-4=0$ équivaut à $(x-2)(x+2)=0$ équivaut à $x=2$ où $x=-2$ d'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe (x^2-4)		+	0	−	0	+	

donc $f(x)\le 0$ équivaut à $x\in[-2,2]$ d'où $S_{\mathfrak{R}}=[-2,2]$

Solution 6 :

① $g(x)=(3x^2-x-2).(ax^2+bx+c)$ équivalent à

$$3x^4-16x^3-15x^2+16x+12$$
$$=3ax^4+(3b-a)x^3+(3c-b-2a)x^2-(c+2b)x-2c$$

équivaut à $\begin{cases}3a=3\\3b-a=-16\\3c-b-2a=-15\\-c-2b=16\\-2c=12\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}a=1\\b=-5\\c=-6\end{cases}$

d'où $g(x)=(3x^2-x-2).(x^2-5x-6)$

② $g(x)=0$ équivaut à $3x^2-x-2=0$ où $x^2-5x-6=0$

* $3x^2-x-2=0$ équivaut à $x=1$ où $x=-\frac{2}{3}$

* $x^2-5x-6=0$ équivaut à $x=-1$ où $x=6$ d'où $S_{\mathfrak{R}}=\left\{-1;\frac{-2}{3};1;6\right\}$

③ $h(x)=g(x)$ équivaut à

$$3x^4+(a+b)x^3-(b+c)x^2+16x+c=3x^4-16x^3-15x^2+16x+12$$

équivaut à $\begin{cases}a+b=-16\\-b-c=-15\\c=12\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}a=-19\\b=3\\c=12\end{cases}$

Solution 7 : ① Il faut que $x-1\neq 0$ signifie que $x\neq 1$ donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

② Ca revient à montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

on a : $(x-1)f(x)=(x-1)g(x)$

$(x-1).g(x)=(x-1).(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$=x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=x^7-1$

$=(x-1)f(x)$ ce qui prouve que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $f(x)=g(x)$.

③ Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a : $\frac{x^{14}-1}{x-1}=\frac{(x^7)^2-1^2}{x-1}=\frac{(x^7-1)(x^7+1)}{x-1}$

$=f(x).(x^7+1)=g(x).(x^7+1)=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^7+1)$.

Solution 8 : Soit $f(x)=4x^5-5x+1$ et $g(x)=4x^4+ax^3+bx^2+cx-1$

① $f(1)=0$.

② $f(x)=(x-1).g(x)$ éq. à $4x^5-5x+1=(x-1).(4x^4+ax^3+bx^2+cx-1)$

éq. à $4x^5-5x+1=4x^5+(a-4)x^4+(b-a)x^3+(c-b)x^2+(-c-1)x+1$

éq. à $\begin{cases}a-4=0\\b-a=0\\c-b=0\\-c-1=-5\end{cases}$ équivaut à $a=b=c=4$

Solution 9 : ① Il faut que $x^2+3x\neq 0$ et $x^2+2x\neq 0$

* $x^2+3x=0$ équivaut à $x(x+3)=0$ équivaut à $x=0$ ou $x=-3$

* $x^2+2x=0$ équivaut à $x(x+2)=0$ équivaut à $x=0$ ou $x=-2$

d'où $D_f=\mathbb{R}^*\setminus\{-2;-3\}$.

②

$$f(x)=\frac{3(x^2+2x)-2(x+1)^2(x^2+3x)}{(x^2+3x)(x^2+2x)}=\frac{3x^2+6x-2(x^2+2x+1)(x^2+3x)}{(x^2+3x)(x^2+2x)}$$

$$=\frac{3x^2+6x-2x^4+-6x^3-4x^3-12x^2-2x^2-6x}{(x^2+3x)(x^2+2x)}=\frac{-2x^4-10x^3-11x^2}{(x^2+3x)(x^2+2x)}$$

$$=\frac{-x^2(2x^2+10x+11)}{x^2(x+3).(x+2)}=\frac{-2x^2-10x-11}{(x+3).(x+2)}$$

③ $\frac{1}{x^2+3x}\le\frac{2(x+1)^2}{3x^2+6x}$ éq. à $\frac{1}{x^2+3x}-\frac{2(x+1)^2}{3x^2+6x}\le 0$ éq. à

$\frac{3}{x^2+3x}-\frac{2(x+1)^2}{x^2+2x}\le 0$ éq. à $f(x)\le 0$ éq. à $\frac{-2x^2-10x-11}{(x+3).(x+2)}\le 0$

éq. à $\dfrac{2x^2+10x+11}{(x+3).(x+2)} \geq 0$ On pose : $Q(x) = \dfrac{2x^2+10x+11}{(x+3).(x+2)}$

x	$-\infty$		$\frac{-5-\sqrt{3}}{2}$		-3		-2		$\frac{-5+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$2x^2+10x+11$		+	0	−		−		−	0	+	
$(x+3)$		−		−	0	+		+		+	
$(x+2)$		−		−		−	0	+		+	
$Q(x)$		+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	

$S_{\mathfrak{R}} = \left]-\infty, \frac{-5-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left]-3,-2\right[\cup \left[\frac{-5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$

Solution 10 :

① * $f(a) = (c-a)(a-b)[(a+b)^2+(c+a)^2]$
$+(a-b)(b-c)[(b+c)^2+(a+b)^2] = 0$

* $f(b) = (b-c)(b-a)[(b+a)^2+(b+c)^2]$
$+(a-b)(a-c)[(a+c)^2+(a+b)^2] = 0$

* $f(c) = (b-c)(c-a)[(c+a)^2+(b+c)^2]$
$+(c-a)(c-b)[(c+b)^2+(c+a)^2] = 0$

② En développant $f(x)$ on obtient :

$f(x) = (b-c)^3x + (c-a)x^3 + (a-b)x^3 + mx^2 + px + q$ (m, p et q des réels)

d'où le coefficient de x^3 est $A = b - c + c - a + a - b = 0$

③ Comme le coefficient en x^3 est nul et a, b et c sont 3 zéros de f donc $f(x) = A(x-a)(x-b)(x-c)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ et par suite f est la fonction nulle.

Solution 11 :

① $g(1) = 0$, $g(-2) = 0$, $g(2) = 0$ et $g(3) = 0$.

② x^4 est le terme du plus haut degrés de f donc le degrés de f est 4 et le coefficient de son terme du plus haut degrés est 1.

③ f et g sont deux polynômes du 4ème degrés, de même coefficient du terme du plus haut degrés et de mêmes zéros (1 ; -2 ; 2 et 3) donc $f = g$.

Solution 12 :

①

$v(x) = x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$= 3x^3 + 9x^2 + 15x + 9$.

② a) $f(3) = 0$.

b) $f(x) = (x-3).(ax^2+bx+c)$

$x^3 - 6x - 9 = ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c$ éq. à $\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = 0 \\ c - 3b = -6 \\ -3c = -9 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$ d'où $f(x) = (x-3).(x^2+3x+3)$

③a) $(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

b) $v(x) = (x+3)^3$ équivaut à $3x^3 + 9x^2 + 15x + 9 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

équivaut à $2x^3 - 12x - 18 = 0$ équivaut à $x^3 - 6x - 9 = 0$ équivaut à

$f(x) = 0$ équivaut à $(x-3).(x^2+3x+3) = 0$ équivaut à $x = 3$ où

$x^2 + 3x + 3 = 0$ or l'équation $x^2 + 3x + 3 = 0$, n'a pas de solution dans $\mathfrak{R}$

car ($\Delta = -3 < 0$) d'où $x = 3$.

ARITHMÉTIQUE

Résultats à retenir :

❑ ***Division euclidienne :***

* a et b désignent deux entiers naturels tels que b est différent de zéro : On admet l'existence d'un couple unique (q,r) d'entiers naturels tels que : $a = b\,q + r$ avec $0 \leq r < b$.

* Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver le couple (q , r) d'entiers naturels tels que : $a = b\,q + r$ avec $0 \leq r < b$.
a est le dividende , b est le diviseur , q est le quotient et r est le reste

❑ ***Divisibilité par 2 et 5 :***

* Un entier est divisible par 2 (respectivement par 25) si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2 (respectivement par 5) .

* Le reste de la division euclidienne d'un entier par 2 (respectivement par 5) est égal au reste de la division euclidienne de son chiffre des unités par 2 (respectivement par 5).

❑ ***Divisibilité par 4 et 25 :***

* Un entier est divisible par 4 (respectivement par 25) , si seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25) .

* Le reste de la division euclidienne d'un entier par 4 (respectivement par 25) est égal au reste de la division euclidienne par 4 (respectivement par 25) du nombre formé par ces deux derniers chiffres .

❑ ***Divisibilité par 3 et 9 :***

* Un entier est divisible par 3 (respectivement par 9) si est seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9)

* Le reste de la division euclidienne d'un entier par 3 (respectivement par 9) est égal au reste de la division euclidienne de la somme de ses chiffres par 3 (respectivement par 9) .

❑ ***Divisibilité par 8 :***

* Un entier , supérieur ou égal à 100 , est divisible par 8 si est seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8 .

* Le reste de la division euclidienne d'un entier par 8 est égal au reste de la division euclidienne par 8 du nombre formé par ses trois derniers chiffres .

❑ ***Divisibilité par 11 :***

Soit n un entier naturel , on désigne par S_1 la somme de ses chiffres de rang impaires (de droite à gauche) et par S_2 la somme de ses chiffres de rang pairs . Soit $d = S_1 - S_2$.

➪ 1er cas : $d \geq 0$

* n est divisible par 11 si et seulement si d est divisible par 11 .

* Le reste de la division euclidienne de n par 11 est égal au reste de la division euclidienne de d par 11 .

➪ 2ème cas : $d < 0$

Soit p le plus entier naturel tel que $d + 11p$ soit positif ou nul .

* n est divisible par 11 si est seulement si $d + 11\,p$ est divisible par 11

* Le reste de la division euclidienne de n par 11 est $d + 11\,p$.

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 :

Pour chacun des entres suivants , vérifier s'il est divisible par 2 ou 5 ou 3 : 10^4 ; 111111 ; 2345 ; 1267 ; 12810 .

Exercice 2 :

Pour chacun des entiers suivants : vérifier s'il est divisible par 9 ou 8 ou 25 : 12456 ; 167825 ; 141750 ; 134678 ;

Exercice 3 :

Pour chacun des entiers suivants : vérifier s'il est divisible par 11 : 14894 ; 314678 ; 11112 ; 431111 ; 5789345617

Exercice 4 :

Dans chacun des cas suivant , déterminer l'entier x pour que le nombre n soit divisible par 11 .

① n = 134x78
② n = 567834x
③ n = 783x416x
④ n = 15x9431x

Exercice 5 :

Déterminer le reste r de la division euclidienne de x par y dans chacun des cas suivants :

① $x = 73431$, $y = 3$
② $x = 126781$, $y = 4$
③ $x = 314678$, $y = 8$
④ $x = 1131148$, $y = 9$
⑤ $x = 123467$, $y = 11$
⑥ $x = 237891$, $y = 25$

Exercice 6 : Soit n ∈ *IN*

① Montrer que (n(n+1)) est divisible par 2
(On distingue deux cas : n est paire et n impaire)

② Trouver l'entier naturel n tel que : (3n + 8) est divisible par (n+1)
Indication : on écrira : 3n + 8 = 3 (n+1) +5

③ Soit n 5 ; Déterminer le reste de la division euclidienne de (3 n + 8) par (n + 1)

Exercice 7 : Soit n est entier naturel :

① vérifier que $2n^2 + 7n + 4 = (2n+1)(n+3) + 1$

② Déterminer le reste de la division euclidienne de $2n^2 + 7n + 4$ par (n+3)

Exercice 8 : Soit a , b ,c trois entiiers naturels

① Montrer que si c divise 3a+4b et c divisé 4a+3b alors c divise 7b et c divise 7a .

② Déterminer tous les entiers naturels c tel que c divise c + 13

Exercice 9 :

Soit n est entier naturel tel que n ≤ 61

① La division euclidienne de n par 5 donne un quotient noté q et un reste égale à 2 . Exprimer n à l'aide de q .

② La division euclidienne de n par 11 donne un quotient noté q' et un reste égale à 3 . Exprimer n à l'aide de q' .

③ En déduire une relation entre q et q'.

1) Déterminer ainsi les valeurs possibles de n .

Exercice 10 : Soit n est entier naturel , le reste de la division euclidienne de n par 11 est 3 .

①Quel est le reste de la division euclidienne de (n + 7) et de (n + 9) par 11 ?

② Quel est le reste de la division euclidienne de $n^2 + 2n$ par 11 ?

Exercice 11 : Soit n est entier naturel et q le quotient de n par 3 .

① Exprimer n en fonction de q .(On distinguera 3 cas)

② Soit $x = 2n(n+1)(2n+1)$. Montrer que x est divisible par 3 .

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 12 :

Pour chacun des entiers suivants , vérifier s'il est divisible par 25 et déterminer son reste de la division euclidienne par 25 : 32461 ; 867300 ; 788375 ; 314683945 .

Exercice 13 :

Pour chacun des entiers suivants , vérifier s'il est divisible par 11 et déterminer son reste de la division euclidienne par 11 :5876431,13478312 , 7853126789 .

Exercice 14 :

Déterminer l'entier a dans chacun des cas suivants :

① 178a934 est divisible par 3 .

② 3a857a8 est divisible par 9 .

③ 457896a est divisible par 11 .

Exercice 15 :

Déterminer les chiffres a et b dans chacun des cas suivants :

① a87943b est divisible par 3 et par 11 .

② 4367ab est divisible par 9 et par 11 .

③ 5a6b est divisible par 4 et par 9 .

④ 783a2b est divisible par 3 et par 25 .

Exercice 16 :

Déterminer les entiers n tel que : $2n^2 + 5n + 2$ est divisibles par $4n + 2$.

Exercice 17 :

① Déterminer les reste possibles de la divisions euclidienne d'un entier n par 3 .

② On note q le quotidien de la division euclidienne de n par 3 . Exprimer n en fonction de q .

③ En déduire que pour tout entier n , l'entier $x = (n+1)(n^2+2n+6)$ est divisible par 3 .

SOLUTIONS

Solution 1 :

- $10^4 = 10000$
  - * le chiffre des unités de 10^4 est 0 est divisible par 2 donc 10^4 est divisible par 2 .
  - * le chiffre des unités de 10^4 est 0 est divisible par 5 donc 10^4 est divisible par 5 .
- 111111
  - * La somme des chiffres de ce nombres est 6 , 6 est divisibles par 3 donc 111111 est divisible par 3 .
  - * Le chiffre des unités de 111111 est 1 . 1 n'est pas divisible par 2 et par 5 donc 111111 n'est pas divisible par 2 et par 5 .
- 2345 est divisibles par 5
  non divisibles par 2
  non divisibles par 3 (la somme de ces chiffres est $2+3+4+5 = 14$ et 14 n'est pas divisible par 3)
- 1267 n'est pas divisible ni par 5 ni par 3 .
- 12810 est divisible par 2 , par 3 et par 5 (la somme de ces chiffres est 12 qui est divisibles par 3 alors 12810 est divisibles par 3).

Solution 2 :

- 12456
  - *Divisibilité par 9 : La somme de ses chiffres est 18 et 18 est divisibles par 9 donc 12456 est divisible par 9 .
  - *Divisibilité par 8 : 12456 > 100 : le nombre formé par ses trois derniers chiffres est 456 et 456 est divisible par 8 donc 12456 est divisivble par 8.
  - *Divisibilité par 25 : le nombre formé par sse deux derniers chiffres est 56 et 56 n'est pas divisible par 25 donc 12456 n'est pas divisible par 25 .
- 167825 :
  - *La somme de ses chiffres est 29 et 29 n'est pas divisible par 9 donc 167825 n'est pas divisible par 9 .

*Le nombre formé par ses trois derniers chiffres est 825 et 825 n'est pas divisible par 8 donc 167825 n'est pas divisible par 8 .

*Le nombre formé par ses deux derniers chiffres est 25 et 25 est divisible par 25 donc 167825 est divisible par 25 .

- 141750

*La somme de ces chiffres est 18 et 18 est divisible par 9 donc 141750 est divisible par 9 .

*141750 > 100 : le nombre 750 n'est pas divisible par 8 donc 141750 n'est pas divisible par 8 .

*141750 est divisible par 25 car le nombre formé par ses deux derniers chiffres est 50 (50 est divisible par 25) .

- 134678 n'est pas divisible ni par 8 , ni par 25 .

Solution 3 :

- 14894

$S_1 = 1 + 8 + 4 = 13$ $\quad S_2 = 9 + 4 = 13$

$d = S_1 - S_2 = 0 \geq 0$

d est divisible par 11 donc 14894 est divisible par 11

- 314678

$S_1 = 8 + 6 + 1 = 15$ $\quad S_2 = 7 + 4 + 3 = 14$

$d = S_1 - S_2 = 1 > 0$

d n'est pas divisible par 11 donc 314678 n'est pas divisible par 11

- 11112

$S_1 = 2 + 1 + 1 = 4$ $\quad S_2 = 1 + 1 = 2$

$d = S_1 - S_2 = 2 > 0$, d n'est pas divisible par 11 donc 11112 n'est pas divisible par 11 .

- 431111

$S_1 = 1+1+3 = 5$ $\quad S_2 = 1+1+4 = 6$

$d = S_1 - S_2 = 5 - 6 = -1 < 0$

$d + 11 \times 1 = -1 + 11 = 10$ n'est pas divisible par 11

donc 431111 n'est pas divisible par 11

- $x = 5789345617$

$S_1 = 7 + 6 + 4 + 9 + 7 = 33$

$S_2 = 1 + 5 + 3 + 8 + 5 = 22$

$d = S_1 - S_2 = 11$ est divisible par 11 donc x **est divisible par** 11 .

Solution 4 :

① $S_1 = 8 + x + 3 = 11 + x$

$S_2 = 7 + 4 + 1 = 12$

$d = S_1 - S_2 = x - 1$

1er cas : $x = 0$ donc $d = -1$ donc n n'est pas divisible par 11

2ème cas : $x = 1$: $d = 0$ donc n est divisible par 11

3ème cas : $2 \leq x \leq 9$ alors d n'est pas divisible par 11

Conclusion : $x = 1$

② $S_1 = x + 3 + 7 + 5 = x + 15$

$S_2 = 4 + 8 + 6 = 18$

$d = S_1 - S_2 = x - 3$ $\quad$ et $\quad 0 \leq x \leq 9$

donc $\quad x = 3$

③ $S_1 = x + 1 + x + 8 = 2x + 9$

$S_2 = 6 + 4 + 3 + 7 = 20$

$d = S_1 - S_2 = 2x - 11$ pour $x = 0 \Rightarrow d = -11 \Rightarrow d + 11$ est un multiple de 11 et pour tout $x \in \{ 1, 2, \ldots, 9 \}$ n'est pas un multiple de 11

Conclusion $x = 0$

④ $S_1 = x + 3 + 9 + 5 = x + 17$

$S_2 = 1 + 4 + x + 1 = x + 6$

$d = S_1 - S_2 = 11$

d est un multiple de 11 donc n est un multiple de 11 pour tout $x \in \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

Solution 5 :

① Le reste de la division euclidienne de x par 3 est égal au reste de la division euclidienne de la somme de ses chiffres par 3 .

On a : $S = 7 + 3 + 4 + 3 + 1 = 18$

Le reste de la division euclidienne de S par 3 est 0

Conclusion : Le reste de la division euclidienne de x par 3 est 0

② Le reste de la division euclidienne de x par 4 est égale au reste de la division euclidienne de 81 par 4 .

Or $81 = 4 \times 20 + 1$ $\qquad$ **Conclusion** : $r = 1$

③ $x > 100$

Le reste de la division euclidienne de x par y est égal au reste de la division de 678 par 8 . $\quad$ Or $678 = 8 \times 84 + 4$ donc $r = 4$

④ le reste de la division euclidienne de x par 9 est égal au reste de la division euclidienne de S par 9 ($S = 1 + 1 + 3 + 1 + 1 + 4 + 8 = 19$)

Or $S = 2 \times 9 + 1$

$r = 1$

⑤ $S_1 = 7 + 4 + 2 = 13 \quad S_2 = 6 + 3 + 1 = 10$

$d = S_1 - S_2 = 3 > 0$

le reste de la division euclidienne de x par 11 est égale au reste de la division euclidienne de d par 11

$r = 3$

⑥ Le reste de la division euclidienne de x par 25 est égale au reste de 91 par 25 donc $r = 16$

Solution 6 :

① 1er cas : $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$

$N = n(n+1) = 2k(2k+1) = 2q$ (où $q = k(2k+1)$)

donc N est divisible par 2

2ème cas : n est impair donc n s'était sous la forme $2k + 1$

$N = n(n+1)$

$= (2k+1)(2k+2) = 2p$ (où $p = (2k+1)(k+1)$)

Donc N est divisible par 2

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n(n+1)$ est divisible par 2

② $3n + 8 = 3(n+1) + 5$

$3n + 8$ est divisible par $n+1$ si $(3n+8) = k(n+1)$ où $k \in \mathbb{N}$

$k = \frac{3n+8}{n+1}$ d'où $k = \frac{3(n+1)+5}{n+1} = 3 + \frac{5}{n+1}$

pour que $k \in \mathbb{N}$ il faut que : $\frac{5}{n+1} \in \mathbb{N}$

donc $n = 0$ ou $n = 4$

③ $3n + 8 = 3(n+1) + 5$

On a : $0 < 5 < n+1$ car $n \geq 5$

Donc le reste de la division euclidienne de $3n + 8$ par $(n+1)$ est 5 .

Solution 7 :

① $(2n+1)(n+3) + 1 = (2n^2 + 6n + n + 3) + 1 = 2n^2 + 7n + 4$

② On a : $2n^2 + 7n + 4 = q(n+3) + 1$ où $q = 2n + 1$ Le reste est 1

Solution 8 :

① C divise $(3a+4b)$ signifie $3a + 4b = kc$ où $k \in \mathbb{N}$

C divise $(4a + 3b)$ signifie : $4a + 3b = k'c$ où $k' \in \mathbb{N}$

On a : $\begin{cases} 3a + 4b = k \\ 4a + 3b = k'c \end{cases}$ alors $\begin{cases} 9a + 12b = 3kc \\ 16a + 12b = 4k'c \end{cases}$

D'où : $7a = (4k' - 3k)c = k''.c$ $(k'' = 4k' - 3k)$

D'où : C divise 7a

② C divise $(c + 13)$ Signifie $C + 13 = Kc$ où $k \in \mathbb{N}$

$k = \frac{c+13}{c} = 1 + \frac{13}{c}$ On a : $k \in \mathbb{N}$ donc il faut que : $\frac{13}{c} \in \mathbb{N}$

D'où : $c = 1$ ou $c = 13$

Solution 9 :

① $n = 5q + 2$

② $n = 11q' + 3$

③ $n = 5q + 2$ et $n = 11q' + 3$

donc $11q' + 3 = 5q + 2$ d'où : $5q - 11q' = 1$

$0 \leq n \leq 61$ signifie que $0 \leq 11q' + 3 \leq 61$ signifie que $-3 \leq 11q' \leq 58$

Signifie que $\frac{-3}{11} \leq q' \leq \frac{58}{11}$ donc $q' \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

si $q' = 0$ alors $q = \frac{1}{5}$ impossible (car $q \in \mathbb{N}$)

si $q' = 1$ alors $q = \frac{12}{5} \notin \mathbb{N}$

$q' = 2$ alors $q = \frac{23}{5} \notin \mathbb{N}$

$q' = 3$ alors $q = \frac{34}{5} \notin \mathbb{N}$

$q' = 4$ alors $q = 9$ d'où : $n = 47$

$q' = 5$ alors $q = \frac{56}{5} \notin \mathbb{N}$ **Conclusion** : $n = 47$

Solution 10 :

On a $n = 11q + 3$ ($q \in \mathbb{N}$)

① $n + 7 = 11q + 10$ et $0 \leq 10 < 11$

donc le reste de la division euclidienne de $(n + 7)$ par 11 est 10 .

$$\begin{aligned} n + 9 &= 11q + 12 \\ &= 11q + 11 + 1 \\ &= 11(q+1) + 1 \\ &= 11k + 1 \end{aligned}$$

Le reste de la division euclidienne de $(n + 9)$ par 11 est 1

② $$\begin{aligned} n^2 + 2n &= (11q + 3)^2 + 2(11q + 3) \\ &= 121q^2 + 66q + 9 + 22q + 6 \\ &= 121q^2 + 88q + 15 \\ &= 11(11q^2 + 8q + 1) + 4 \end{aligned}$$

Le reste de la division euclidienne de $n^2 + 2n$ par 11 est 4

Solution 11 :

① $n = 3q$ ou $n = 3q + 1$ ou $n = 3q + 2$

② $x = 2n(n+1)(2n + 1)$

Si $n = 3q$ alors $x = 6q(3q+1)(6q+1)$

D'où : $x = 3k$

Où $k = 2(3q+1)(6q+1)$

D'où x est divisible par 3

Si $n = 3q + 1$

$$\begin{aligned} x &= (6q + 2)(3q+2)(6q+3) \\ &= 3(6q+2)(3q+2)(2q+1) \\ &= 3k' \qquad (k' = (6q+2)(3q+2)(2q+1)) \end{aligned}$$

Donc x est divisible par 3

Si $n = 3q + 2$

$$\begin{aligned} x &= 2(3q+2)(3q+3)(6q+5) \\ &= 3(2)(3q+2)(q+1)(6q+5) \\ &= 3k'' \end{aligned}$$ d'où x est divisible par 3 .

CALCUL VECTORIEL

Résultats à retenir :

❑ On appelle base de $\mathcal{V}$ tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

❑ Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$; $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

❑ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sont colinéaires ssi $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' = 0$.

❑ Soit A un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Soient B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

❑ Etant donné un vecteur $\vec{u}$ et un réel α, on a : $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$.

❑ $\|\vec{u}\| = 0$ équivaut à $\vec{u} = \vec{0}$.

❑ si $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que le vecteur est unitaire ou normé.

❑ Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

❑ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de l'ensemble des vecteurs du plan. $\vec{u} \perp \vec{v}$ équivaut à $xx' + yy' = 0$.

❑ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

❑ Une équation cartésienne d'une droite Δ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est de la forme : $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$.
Un vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{u} = -b\,\vec{i} + a\,\vec{j}$.

❑ Deux droites $\Delta : ax + by + c = 0$ et $\Delta' : a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles ssi $ab' - a'b = 0$.

- ❑ Soient A, B, C et D quatre points du plan.
Si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

- ❑ Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

- ❑ Deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

- ❑ Un point M appartient à une droite (AB) si et seulement si, il existe un réel x tel que : $\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}$

- ❑ Si I est milieu de [AB], alors pour tout M du plan :
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

- ❑ G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si :
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- ❑ (Les points A,B et C sont alignés) équivaut à (Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires).

- ❑ Forme vectorielle du théorème de Thalès
Soit ABC un triangle et M un point de (AB), distinct de A. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.
Si $\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AN}=x\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}=x\,\overrightarrow{BC}$

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 : ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre I. On construit les points D et E tel que $IADB$ et $IBEC$ soient des parallélogrammes.

① Soit F le point du plan / $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{ID}$. Montrer que $(CF)\perp(AB)$

② a) Montrer que $(IE)\perp(BC)$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DE}$.
b) Montrer que F est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 2 : Soit $ABCD$ un carré de coté 1 et soient P et R les points tels que : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

① On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Déterminer les cordonnées des points P et R.

② Soit Q le point tel $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{RQ}$
a) Trouver les cordonnées du point Q.
b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{CQ}$.

③ Montrer que $\overrightarrow{PR}\perp\overrightarrow{CQ}$.

Exercice 3 : Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.
Soient les points $A(1,5)$; $B(-3,1)$ et $C(3,1)$.

① Montrer que A,B et C ne sont pas alignés.

② Soit Δ_1 : la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) et Δ_2 : la droite passant par B et perpendiculaire à (AC). Déterminer le point H intersection de Δ_1 et Δ_2.

③ Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 4 : Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.
On considère les points A (-2,3) ,B(1 ,-2) et C (2,5).

① Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

② Déterminer les équations cartésiennes des deux médianes du triangle ABC issues respectivement de B et C .

③ En déduire les coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC.

④ Déterminer les coordonnées de $\vec{j}$ dans la base $\mathscr{B}'=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Exercice 5 :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan ; A (2,3) ; B (1,5) ; C (0,1) et D (1,-1).

① Montrer que ABCD est un parallélogramme .

② Soient I et J les points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Déterminer les coordonnées des points I et J .

③La parallèle à la droite (BC) passant par I coupe (CD) en K .
Déterminer les coordonnées du point K.

④Montrer que les droites (AC) et (JK) sont parallèles.

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 6 : $\mathcal{R}\ (O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan .

On considère les points : A (0,2), B (3,-1), C (1,2) et D (3,0).

①Déterminer les coordonnées des points L et M tels que :
L=A*D et M=B*C.

②Soit I l'image de A par la translation de vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et J l'image de D par la translation de vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

a) Déterminer les coordonnées des points I et J.
b) En déduire les coordonnées du point K = I * J .

③ Montrer que L , K et M sont alignés.

Exercice 7 : $\mathcal{R}\ (O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

Soient les points : A (3,0), B (1,-1), C (1,2) et D (3,3).

① Montrer que A5CD est un parallélogramme .

② Soit I et J deux points du plan tels que: $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

Déterminer les coordonnées des points I et J .

③La parallèle à (BC) passant par I coupe (CD) en K .
Déterminer les coordonnées du point I.

④ La parallèle à (AB) passant par J coupe (BC) en L .
Déterminer les coordonnées du point L .

⑤ Démontrer que les droites (AC), (IL) et (JK) sont concourantes .

Exercice 8 : Soit ABC un triangle

① Quel est le point M du plan telque : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}$

② Quel est le point N telque : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AN}=\vec{0}$

③ Montrer que A est le milieu de [MN]

④ a) Construire les points P et Q telque : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{CB}$

b) Montrer que $\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{MP}$

Exercice 9 : ABCD est parallélogramme de centre O

On Pose E est le milieu de [BC] et F le milieu de [CD] .

① Démontrer que OECF est un parallélogramme .

② Soit P le point telque : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}$ .Quelle est la nature de AEPF ?

③ Montrer que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OP}$

④ Donner une représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AO}$

Exercice 10 : Le plan est rapporté à un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne les points $A(0,1)$; $B(1,4)$; $C(6,5)$ et $D(3,-4)$.

① Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Que peut-on dire des droites (AB) et (CD).

② a) Soit E le point / $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{BE}$ .Trouver les coordonnées de E.
b) Montrer que A, E et D sont alignés.

Exercice 11 : Soit $ABCD$ un quadrilatère, G le centre de gravité de ABC et K le point / $\overrightarrow{KC}=3\overrightarrow{DK}$

① Montrer que $\overrightarrow{KC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

②a) Soit $H=G*D$. Montrer que $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{DH}$.
b) Soit $I=A*B$. Montrer que I, H et K sont alignés.

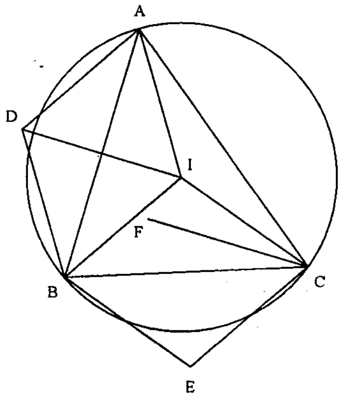
Exercice 12 : Soit ABC un triangle et O le centre du cercle circonscrit au triangle. G le centre de gravité de ABC.

① Soit A' le milieu de $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

② a) Soit H le point / $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ .Montrer que (AH) est une hauteur de ABC.
b) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

SOLUTIONS

Solution 1 :



ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre I. On construit les points D et E tel que $IADB$ et $IBEC$ soient des parallélogrammes.

① On a $IADB$ est un parallélogramme et de plus $IA = IB$ donc $IADB$ est un losange donc : $(ID) \perp (AB)$ or $(ID) // (CF)$ d'où $(CF) \perp (AB)$

② a) On a : $(CF) \perp (AB)$ donc (CF) est une hauteur issue de C dans le triangle ABC.

On a : $IBEC$ est un parallélogramme et de plus $IB = IC$ donc $IBEC$ est un losange d'où $(IE) \perp (BC)$.

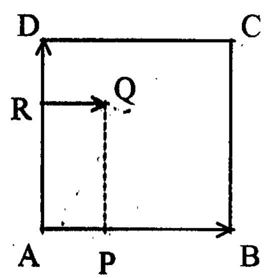
b) On a : $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{ID}$ signifie que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{ID}$ or $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{ED}$

d'où $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{ID}$ alors $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{IE}$ on a : $\begin{cases} (AF) // (IE) \\ (BC) \perp (IE) \end{cases}$

d'où $(AF) \perp (BC)$ ainsi (AF) est la hauteur issue de A dans ABC.

(AF) et (CF) sont deux hauteurs dans le triangle ABC d'où F est l'orthocentre du triangle ABC.

Solution 2 :



① On a : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AD}$ d'où $P(\frac{1}{3}, 0)$

$\overrightarrow{AR} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ d'où $R(0, \frac{2}{3})$

② a) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AQ}$

d'où $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

d'où $Q(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

b) $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} 0-1/3 \\ 2/3-0 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix} 1/3-1 \\ 2/3-1 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

③ $(-\frac{1}{3} \times \frac{-2}{3}) + \frac{2}{3} \times \frac{-1}{3} = 0$ d'où $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{CQ}$.

Solution 3 :

① $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -4 & +2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 16 + 8 = 24 \neq 0$

d'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A,B et C ne sont pas alignés.

② Soit $H(x,y)$ On a : $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ or $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

d'où $(x-1).6 + (y-5).0 = 0$ d'où $x = 1$

On a : $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ On a : $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$

d'où $2.(x+3) - 4(y-1) = 0$ signifie que $2x - 4y + 10 = 0$ or $x = 1$
d'où $12 - 4y = 0$ et par suite $y = 3$ d'où $H(1,3)$

③ On a : $(AH) \perp (BC)$ et $(BH) \perp (AC)$ sont des hauteurs dans ABC et par suite leur point d'intersection H est l'orthocentre du triangle ABC.

Solution 4 :

① Pour montrer que A, B et C ne sont pas alignés, il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 20 = 26 \neq 0$;

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'est pas nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A, B et C ne sont pas alignés.

②* Soit I = A * B , on a $I(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

La médiane issue de C est alors la droite (IC).

Un vecteur directeur de (IC) est $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}5/2\\9/2\end{pmatrix}$, donc une équation de (IC)

Est de type: $\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}y+c=0$ or C(2,5) ∈ (IC) d'où c = $\frac{7}{2}$.

et par suite une équation cartésienne de la médiane issue de C est :

$\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}y+\frac{7}{2}=0$ ou encore $9x-5y+7=0$.

* Soit J = A * C , on a I (0,4).

Le vecteur $\overrightarrow{JB}\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (JB) : médiane issue de B ; donc (JB): $-6x-y+c=0$,orB (1,-2)∈(JB) d'où c = 4 et par suite une équation cartésienne de la médiane (JB) est : $-6x-y+4=0$ ou encore 6x + y - 4 = 0 .

③ Le centre de gravité du triangle ABC est l'intersection des deux médianes (IC) et (JB) .

G(x,y) ∈ (IC)⋂(JB) signifie que $\begin{cases}9x-5y+7=0 & (1)\\6x+y-4=0 & (2)\end{cases}$

(2) donne y = 4 - 6x ; en remplaçant y dans (1) on obtient :

$9x-5(4-6x)+7=0$ éq à $9x-20+30x+7=0$ éq à $39x=13$ d'où x = $\frac{1}{3}$

(2) donne y=4 - 6. $\frac{1}{3}=2$ d'où G($\frac{1}{3}$,2)

④ soit $\vec{j}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$: on a $\vec{j}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$ or $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}-5\vec{j}$

et $\overrightarrow{AC}=4\vec{i}+2\vec{j}$ d'où $\vec{j}=x(3\vec{i}-5\vec{j})+y(4\vec{i}+2\vec{j})=(3x+4y)\vec{i}+(2y-5x)\vec{j}$

et par suite $\begin{cases}3x+4y=0\\2y-5x=1\end{cases}$ éq à $\begin{cases}3x+4y=0 & (1)\\-4y+10x=-2 & (2)\end{cases}$

(1)+(2) donne $13x=-2$ d'où $x=-\frac{2}{13}$. **En remplaçant *x* par** $-\frac{2}{13}$ dans (1),

on obtient : $y=\frac{3}{26}$ et par suite $\vec{j}\begin{pmatrix}-2/13\\3/26\end{pmatrix}$

Solution 5 : ① On a: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et par suite ABCD est un parallélogramme.

②On a : * $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ Soit I(x,y) on a ainsi $\begin{cases}x-2=-\frac{3}{4}\\y-3=\frac{3}{2}\end{cases}$ et par conséquent $\begin{cases}x=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\\y=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\end{cases}$ d'où I($\frac{5}{4}$,$\frac{9}{2}$)

On a : * $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Soit J (α , β) et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ on a : $\begin{cases}\alpha-2=-\frac{1}{4}\\\beta-3=-1\end{cases}$

d'où $\begin{cases}\alpha=\frac{7}{4}\\\beta=2\end{cases}$ et par suite J($\frac{7}{4}$,2)

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan ; A (2,3) ; B (1,5) ; C (0,1) et D (1,-1).

③* Soit Δ la droite passant par I et parallèle à (BC)

Cherchons une équation cartésienne de Δ :

M(x,y)∈ Δ éq à det ($\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{BC}$) = 0 éq à $\begin{vmatrix}x-\frac{5}{4} & -1\\y-\frac{9}{2} & -4\end{vmatrix}=0$ éq à

$-4(x-\frac{5}{4})+y-\frac{9}{2}=0$ éq à $-4x+y+5-\frac{9}{2}=0$ d'où Δ : $-4x+y+\frac{1}{2}=0$

* Equation cartésienne de (CD) :

M(x,y)∈ (CD) éq det det ($\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CD}$) = 0 éq à $\begin{vmatrix}x & 1\\y-1 & -2\end{vmatrix}=0$ éq à

$-2x-y+1=0$ éq à $-2x-y+1=0$ d'où (CD) : $-2x-y+1=0$

$K(x,y) \in \Delta \cap (CD)$ éq $\begin{cases} -4x + y + \dfrac{1}{2} = 0 & (1) \\ -2x - y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

(1)+(2) donne : $-6x + \dfrac{3}{2} = 0$ d'où $x = \dfrac{1}{4}$.

(1) s'écrit : $-1 + y + \dfrac{1}{2} = 0$ d'où $y = \dfrac{1}{2}$ Conclusion : $K(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2})$

④ On a : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ on a : $\begin{vmatrix} -2 & -3/2 \\ -2 & -3/2 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$

D'où les droites (AC) et (JK) sont parallèles.

BARYCENTRE

Résultats à retenir :

- Soit A et B deux points du plan et α, β deux réels tel que : $\alpha + \beta \neq 0$; alors il existe un unique point G vérifiant : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Le point G est appelé barycentre des points pondérés (A,α) ; (B,β).
- $G \in (AB)$
- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}.\ \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}.\ \overrightarrow{BA}$
- Pour tout point M du plan on a :
  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta).\overrightarrow{MG}$
- Si $\alpha = \beta$ alors G est le milieu du segment $[AB]$.
- Soit A,B,C et C 3 points du plan, α, β et γ réels / $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
  - ⇨ G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) signifie que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ de plus : pour tout point M du plan
    On a : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma).\overrightarrow{MG}$
  - ⇨ L'isobarycentre de 3 points un alignés est le centre de gravité du triangle ABC ($\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$)
    G est le barycentre de (A,1), (B,1) et (C,1).

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 : Soit A et B deux points du plan.
On note G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, -3)$.

① Montrer que $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$.

② Soit M un point du plan.

Exprimer : $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

③ Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tel que :

$\left\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=AB$.

Construire E dans le cas où $AB = 2$ cm.

Exercice 2 : Soit A, B, C trois points non alignés.

On appelle G le barycentre des points pondérés $(B,-2)$ et $(C,3)$.

① Ecrire une égalité vectorielle définissant G.

Construire G.

② a) montrer qu'il existe un point K tel que :

$\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

b) Que représente K pour le segment $[AG]$.

③ Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que :

$\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=AG$.

Exercice 3 : Soit $ABCD$ un carré.

① Construire le barycentre I des points $(A,1)$; $(D,1)$ puis le barycentre J des points $(B,2)$; $(C,2)$.

② a) Montrer qu'il existe un point G vérifiant :

$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) Construire le point G.

③ Construire l'ensemble E des points M du plan tel que :

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right\|$

Exercice 4 : Soit $ABCD$ un parallélogramme.

① a) Construire le barycentre G des points pondérés $(A,5)$; $(B,-2)$ puis le barycentre K des points pondérés $(C,1)$ et $(D,2)$.

b) Montrer que : G est l'image de A par $t_{\overrightarrow{CK}}$.

② Déterminer l'ensemble E des points M tels que :

$\left\|5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\right\|$.

③ Soit M un point du plan.

On pose $\vec{u}=5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}+2\overrightarrow{DM}$.

a) Montrer que $\vec{u}$ est un vecteur indépendant de M.

b) Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{KG}$.

Exercice 5 : Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.

① a) Construire le point G : barycentre des points pondérés $(B,1)$; $(C,-2)$

b) Soit M un point quelconque du plan.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{MG}$.

② Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tels que :

$\left\|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{3}{2}a$.

Exercice 6 : Soit ABC un triangle quelconque et D le point d'intersection de (BC) et de la bissectrice intérieure du secteur $[AB, AC]$.

On pose $AB=c$, $BC=a$ et $CA=b$.

① Exprimer de deux manières les aires $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ des triangles ABD et ACD

② Montrer que $\frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}$.

③ Sachant que D est un point du segment $[BC]$, montrer que D est le barycentre des points pondérés (B,b) ; (C,c).

Exercice 7 : Soit ABC un triangle quelconque.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,3)$; E est le barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(C,2)$ et F le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(C,2)$.

① Montrer qu'il existe un point unique I tel que : $3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

② a) Démontrer que les points A, I et E sont alignés.

b) Démontrer que les points B, I et F sont alignés.

c) Montrer que la droite (CG) passe par I.

Exercice 8 : Soit $[AB]$ un Segment .

On appelle I le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,1)$ et J le barycentre de $(A,3)$ et $(B,-1)$ et K le milieu de $[IJ]$.

① a) Exprimer $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ puis $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BJ}$ puis $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

c) Montrer alors que K est le barycentre des points pondérés $(A,9)$; $(B,-1)$.

② Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$8AB \leq \left\| 9\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} \right\| \leq 16AB .$$

Exercice 9 : Soit $ABCD$ un parallélogramme et I le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,1)$ et J le barycentre des points pondérés $(C,2)$ et $(D,1)$ et K le barycentre des points pondérés $(B,-1)$ et $(C,2)$.

① Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

② Exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

③ Montrer que I , J et K sont alignés .

④ a) Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que :

$$\left\| 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} \right\| .$$

b) Déterminer l'ensemble F des points M du plan tels que :

$$\left\| 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} \right\| \leq \left\| 2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} \right\| .$$

Exercice 10 : Soit $ABCD$ un quadrilatère .

On appelle I , J , K ,L, M et N les milieux des segments respectifs : $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$; $[DA]$; $[AC]$ et $[BD]$.

① Justifier qu'il existe un point unique G tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} .$$

② Montrer que $G = I * K$ et que $G = J * L$ et que $G = M * N$.

③ On appelle G_1 le centre de gravité du triangle BCD .

Montrer que G , G_1 et A sont alignés .

Exercice 11 : Soit ABC un triangle. On note : D : le symétrique de C par rapport à B ; E : le symétrique de C par rapport à A et F : le milieu du segment [AB]

G le barycentre du système de points (A,2) ; (B,2) ; (C,-1)

① a) Exprimer D comme barycentre des points B et C

b) Exprimer E comme barycentre des points A et C

② En écrivant la relation vectorielle définissant G et en faisant intervenir le point D , montrer que G est le barycentre des points (A,2) ,(D,1) .

③ a) Exprimer G comme barycentre des points B et E

b) Montrer que G est le point d'intersection des droites (AD) et (BE)

④ Montrer que les droites (AD) , (BE) , (CF) sont concourantes .

Exercice 12 :

ABC un triangle équilatéral de côté a . (a > 0) On note G le centre de gravité de ABC .

① Soit A' le milieu de [BC]

Montrer que : G est le barycentre des points (A,1) : (A',k) où k est un réel à préciser .

② (E) ensemble des points M du plan / $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{3}a$

a) Déterminer (E)

b) Que représente (E) pour le triangle ABC

③ Déterminer (T) : ensemble des points M / $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| \leq a\sqrt{3}$

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 13 : Soit A,B,C trois points non alignés et D le barycentre du système de points pondérés (A,1) , (B,2), (C,4)

① Construire les points E,F,G sachant :

* E barycentre des points : (B,2) ; (C,4)
* F barycentre des points : (C,4) ; (A,1)
* G barycentre des points : (A,1) ; (B,2)

② Démontrer que D est un point commun aux trois droites (AE) ; (BF) ; (CG)

Exercice 14 : ABC un triangle équilatéral On pose AB = a

Déterminer l'ensemble des points M / $a\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| \le a\sqrt{3}$

Exercice 15 : Soit A ,B et C trois points non alignés.

① Construire le barycentre E des points pondérés $(A,1)$ et $(B,-2)$.

② Soit F le barycentre des points pondérés $(E,-1)$ et $(C,3)$.
Construire F .

③ a) Montrer qu'il existe un seul point G tel que : $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
b) Vérifier que E , F et G sont alignés .

Exercice 16 : Soit $ABCD$ un carré .

① Construire le barycentre I des points pondérés $(A,2)$ et $(B,-1)$.

② Construire le barycentre J des points pondérés $(C,2)$ et $(D,1)$.

③ Montrer qu'il existe un unique point K du plan tel que :
$2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$. Construire K.

④ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$3\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}\right\|$.

Exercice 17 : Soit $ABCD$ un parallélogramme .

① On appelle E le barycentre des points $(A,-1)$ et $(B,3)$. Construire E .

② a) Montrer qu'il existe un unique point :G, tel que :
$-\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
b) Justifier que G est le centre de gravité du triangle ECD.

③ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$\left\|-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\right\| = 6$

Exercice 18 : Soit ABC un triangle .

Soit G le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,3)$. E le barycentre des points $(B,3)$ et $(C,1)$ et F e barycentre des points $(C,1)$ et $(A,3)$.

① Montrer qu'il existe un unique point I vérifiant : $3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

② Démontrer que B,I et F sont alignés, ainsi que C ,I et G .

③ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

SOLUTIONS

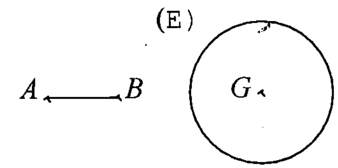
Solution 1 : ① G est le barycentre de $(A , 2)$, $(B , -3)$ signifie que
$2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ éq $2\overrightarrow{GA} - 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ éq $-\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
éq $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$.
<u>ou bien</u> :
si G est le barycentre des points (A,α) ; (B,β) alors : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}.\overrightarrow{AB}$

dans notre cas : $\alpha = 2$ et $\beta = -3$ d'où $\overrightarrow{AG} = \dfrac{-3}{-1}.\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$

② $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$
$= 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}$
$= -\overrightarrow{MG} + \vec{0} = -\overrightarrow{MG}$

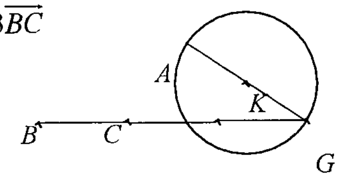
③ $M \in (\mathrm{E})$ éq $\left\|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\| = AB$ éq $\left\|-\overrightarrow{MG}\right\| = AB$ (d'après ↑)
éq $GM = AB$ éq $M \in \mathscr{C}(G, AB)$

Conclusion :
(E) est le cercle de centre G
et de rayon $r = AB$.



Solution 2 :

① a) G le barycentre de $(B,-2)$; $(C,3)$.éq $-2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
b) On a : $\overrightarrow{BG} = \dfrac{3}{-2+3}\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}$



② a) $\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ éq $\overrightarrow{KA} - 2(\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GB}) + 3(\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$
éq $\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KG} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{KG} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ éq
$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KG} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ éq $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KG} + \vec{0} = \vec{0}$ éq $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}$
d'où $K = A * G$
b) K représente le milieu du segment $[AG]$

③ $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=AG$

éq $\left\|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}-2(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB})+3(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC})\right\|=AG$

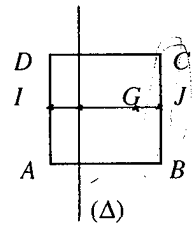
éq $\left\|2\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}\right\|=AG$ éq $\left\|2\overrightarrow{MK}+\vec{0}\right\|=AG$ éq $MK=\dfrac{AG}{2}$

éq $M\in\mathscr{C}\left(K,\dfrac{AG}{2}\right)$.

(E) est le cercle de centre K et de rayon : $r=\frac{1}{2}AG$.

(E) est le cercle de diamètre $[AG]$.

Solution 3 :



① • I est le barycentre des points $(A,1)$; $(D,1)$
donc $I=A*D$ car $\alpha=\beta$

• J est le barycentre des points $(B,2)$; $(C,2)$
donc $J=B*C$ car $\alpha=\beta$

② a) $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ éq $(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD})+2(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=\vec{0}$

éq $(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{ID})+2(\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC})=\vec{0}$ éq

$2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}+4\overrightarrow{GJ}+2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ or $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

d'où on a $2\overrightarrow{GI}+4\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$ éq $\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$ éq G est le barycentre des points $(I,1)$ et $(J,2)$

on a : $\overrightarrow{IG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$

③ $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right\|$ éq

$\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}\right\|=$

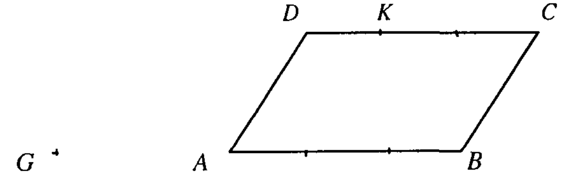
$=3\left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right\|$ éq

$\left\|6\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right\|=3\left\|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}\right\|$ éq

$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=3\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ éq $MG=MI$ éq $M\in\Delta$ où Δ est la médiatrice de $[IG]$. (E) est donc la médiatrice de $[IG]$.

Solution 4 :

① G est le barycentre des points $(A,5)$; $(B,-2)$ signifie que
$5\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ et par suite $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-2}{3}\overrightarrow{AB}$



K est le barycentre des points $(C,1)$ et $(D,2)$ signifie que $\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

Donc $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

On a : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-2}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$, or $ABCD$ est un parallélogramme d'où :

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ et par suite $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ or $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ d'où $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CK}$

éq $t_{\overrightarrow{CK}}(A)=G$

② $\left\|5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\right\|$ éq

$\left\|5(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})\right\|=\left\|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC}+2(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD})\right\|$ éq

$\left\|3\overrightarrow{MG}+5\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KD}\right\|$ éq

$\left\|3\overrightarrow{MG}+\vec{0}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MK}+\vec{0}\right\|$ éq $MG=MK$ éq M appartient à la méd($[KG]$).

D'où (E) est la médiatrice de $[GK]$.

③ a) $\vec{u}=5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}+2\overrightarrow{DM}$

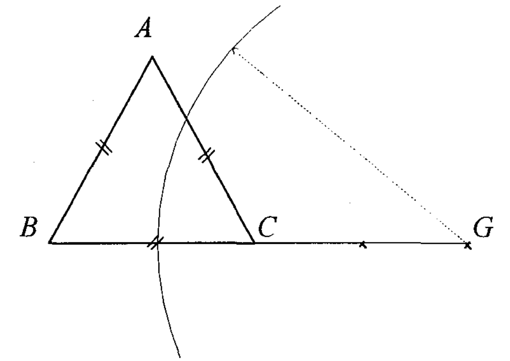
$=5(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KM})+2(\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KM})$

On a : $\vec{u}=3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{KM}=3\overrightarrow{KG}$ d'où $\vec{u}$ est un vecteur indépendant de M

b) On a : $\vec{u}=3\overrightarrow{KG}$.

Solution 5 :

① a) G est le barycentre des points $(B,1)$; $(C,-2)$ signifie :
$\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{BG}=\dfrac{-2}{1-2}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}$



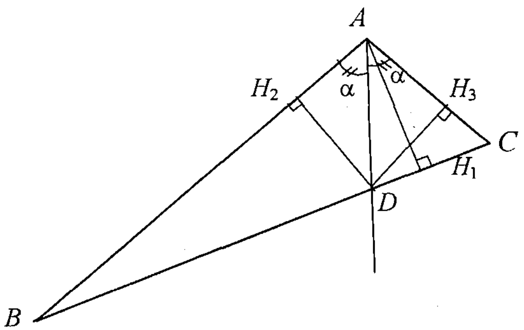
b) $\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})$

$$=-\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{MG}+\vec{0}=-\overrightarrow{MG}$$

② $\left\|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{3}{2}a$ éq $\left\|-\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{3}{2}a$ éq $GM=\frac{3}{2}a$

éq $M\in\mathscr{C}(G,\frac{3}{2}a)$ (E_1) est le cercle de centre G et de rayon $r=\frac{3}{2}a$.

Solution 6 :



① Soit : H_1 : le projeté $\perp$ de A sur (CD)
H_2 : le projeté $\perp$ de D sur (AB)
H_3 : le projeté $\perp$ de D sur (AC)

On a : $a_1=\frac{1}{2}DH_2.AB=\frac{1}{2}AH_1.BD$ et $a_2=\frac{1}{2}DH_3.AC=\frac{1}{2}AH_1.DC$

② On a : (AD) étant la bissectrice intérieure du secteur $[AB,AC]$ donc $DH_2=DH_3$ et par suite $\frac{DH_2}{DH_3}=1$ d'où $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$ donc $\frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}$

③ On a : $D\in[BC]$ et $b.DB=c.DC$

$D\in[BC]$ donc $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens contraires donc $\overrightarrow{DB}=\alpha\,\overrightarrow{DC}$ où $\alpha\in\Re_-$ d'où $DB=|\alpha|DC$ donc $|\alpha|=\frac{c}{b}$ et par suite $\alpha=\frac{-c}{b}$ .on a : $\overrightarrow{DB}=\frac{-c}{b}\overrightarrow{DC}$ éq $b.\overrightarrow{DB}+c.\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

D'où D est le barycentre des points (B,b) et (C,c).

Solution 7 :

① On a : $3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ éq $3(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GA})+3(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GB})+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$
éq $6\overrightarrow{IG}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ éq $3\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$
d'où I est le barycentre de$(G,3)$ et $(C,1)$.

② a) On a : E est le barycentre de $(B,3)$; $(C,2)$ donc $3\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}$
on a : $3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ éq $3\overrightarrow{IA}+3(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EB})+2(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EC})=\vec{0}$
éq $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IE}=\vec{0}$ et par suite I est le barycentre de $(A,3)$; $(E,5)$
donc $I\in(AE)$ et par suite A , I , E sont alignés.

b) on a : $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ éq $3(\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FA})+2(\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FC})+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
éq $5\overrightarrow{IF}+3\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FC}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ or $3\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ car F est le barycentre des points $(A,3)$ et $(C,2)$.
Donc $5\overrightarrow{IF}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et par suite I le barycentre des points $(F,5)$ et $(B,3)$ donc $I\in(FB)$ et par suite B , I , F sont alignés.

c) On a : I barycentre des points $(G,3)$ et $(C,1)$ donc $I\in(GC)$.

Solution 8 :

① a) • I : barycentre des points $(A,3)$ et $(B,1)$ donc $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
et par suite $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

• J: barycentre des points $(A,3)$ et $(B,-1)$ donc $\overrightarrow{AJ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$

• K est le milieu de $[IJ]$ donc $\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{KJ}=\vec{0}$ éq

$(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AI})+(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AJ})=\vec{0}$ éq $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}$ éq

$2\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ éq $2\overrightarrow{AK}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB}$ éq $\overrightarrow{AK}=\frac{-1}{8}\overrightarrow{AB}$

b) On a : • $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}$

• $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{KJ}=\vec{0}$ éq $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BJ}=\vec{0}$ éq $2\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{BJ}$

éq $2\overrightarrow{BK}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ éq $2\overrightarrow{BK}=\frac{-9}{4}\overrightarrow{AB}$ éq $\overrightarrow{BK}=\frac{-9}{8}\overrightarrow{AB}$

c) On a : $\overrightarrow{AK}=\frac{-1}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BK}=\frac{-9}{8}\overrightarrow{AB}$ d'où $9\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BK}$ éq

$9\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BK}=\vec{0}$ éq K est le barycentre des points $(A,9)$ et $(B,-1)$.

② $8AB\le\left\|9\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}\right\|\le 16AB$ éq

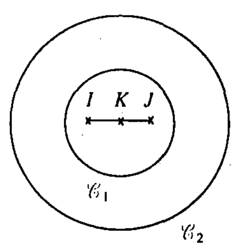
$8AB\le\left\|9(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KM})-\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{KM}\right\|\le 16AB$ éq

$8AB\le\left\|9\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BK}+8\overrightarrow{KM}\right\|\le 16AB$ éq $8AB\le\left\|8\overrightarrow{KM}\right\|\le 16AB$ éq

$8AB\le 8KM\le 16AB$ éq $AB\le KM\le 2AB$.

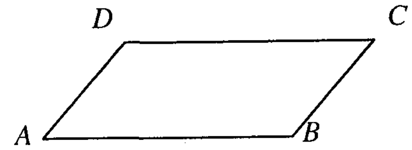
On note :

- $\mathscr{C}_1$: le cercle de centre K et de rayon AB .
- $\mathscr{C}_2$: le cercle de centre K et de rayon $2AB$.
- M est situé entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$: c'est la partie hachurée.



Solution 9 :

①



I : barycentre des points $(A,2)$ et $(B,1)$ donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

J : barycentre des points $(C,2)$ et $(D,1)$ signifie que $2\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=0$ et par suite $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

On a : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

② K est le barycentre des points $(B,-1)$ et $(C,2)$.

$\overrightarrow{BK}=\frac{2}{-1+2}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}$.

On a : $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK}$ or $\overrightarrow{IB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ d'où

$\overrightarrow{IK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$

③ On a : $\overrightarrow{IK}=2(\frac{-1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{IJ}$ d'où I , J et K sont alignés .

④ a) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\|$ éq

$\left\|2(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM})+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right\|=\left\|2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JM})+\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JM}\right\|$ éq

$\left\|3\overrightarrow{IM}\right\|=\left\|3\overrightarrow{JM}\right\|$ éq $IM=JM$ éq M appartient à la médiatrice de $[IJ]$

d'où Δ est la médiatrice de $[IJ]$.

b) $\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right\|\le\left\|2\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right\|$ éq $IM\le JM$ éq M appartient au demi-plan de frontière Δ contenant le point I .

Solution 10 :

① $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ éq

$\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$ éq $2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GK}=\vec{0}$

éq $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$ éq $G=I*K$

② • $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ éq $(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD})=\vec{0}$ éq

$2\overrightarrow{GJ}+2\overrightarrow{GL}=\vec{0}$ d'où $G=J*L$

• $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ éq $(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD})=\vec{0}$ éq

$2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ d'où $G=M*N$

③ G_1 est le centre de gravité du triangle BCD signifie que :

$\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1D}=\vec{0}$

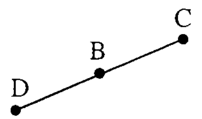
on a : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ éq

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1D}=\vec{0}$ éq $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_1}=\vec{0}$

éq A, G, G_1 sont alignés .

Solution 11 :

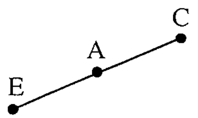
① a)



On a : $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DB}$

Donc $2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ et par suite D est le barycentre des points (B,2) ; (C , -1)

b)



On a : $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{EA}$

D'où : $2\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ et par suite E est le barycentre des points (A,2) ; (c , -1)

② On a : $2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{AG}+2(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DG})-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DG})=\vec{0}$

$2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DG}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{AG}+(\underbrace{2\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}})+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$ d'où : G est le barycentre des points (A,2) , (D,1) .

③ On a : $2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{CG}=\vec{0}$ signf

a) $2(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG})+2\overrightarrow{BG}-(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EG})=\vec{0}$ sig

$2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{EG}=\vec{0}$ sig

$\underbrace{2\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{CE}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{BG}=\vec{0}$ sig $\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

Et par suite G est le barycentre {(E,1) ; (B,2) }

b) On a : G barycentre des points (A,2) , (D,1) alors G,A, D sont alignés et par suite G ∈(AD)

c) On a : G barycentre des points (B,2) ; (E,1) donc G,B,E sont alignés et par suite G ∈ (BE) d'où G ∈(AD) ⋂ (BE)

④ On a : $2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

$2(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG})+2(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG})-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ sig $2\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{FG}+2\overrightarrow{BF}+2\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$2(\underbrace{\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}}_{\vec{0}})+4\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ sig $4\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

D'où : G , F ,C sont alignés et par suite G∈(CF)

Conclusion : (AD),(BE) , (CF) se coupent au point G et par suite elles sont concourants .

Solution 12 : ① On a : $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$ sig

$\overrightarrow{AG}+(\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{A'G})+(\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{A'G})=\vec{0}$

$\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{A'G}+(\underbrace{\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CA'}}_{\vec{0}})=\vec{0}$ sig $\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{A'G}=\vec{0}$

D'où : G est le barycentre {(A,1) : (A',2)}

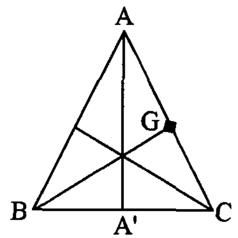
② a) $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=a\sqrt{3}$

$\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\|=a\sqrt{3}$

sig $\|3\overrightarrow{MG}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\|=a\sqrt{3}$ sig $3\|\overrightarrow{MG}\|=a\sqrt{3}$ sig $MG=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

(E) est le cercle de centre G et de rayon $r=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

b)



L'intersection des médianes représente le point G : centre de gravité de ABC

On a : $\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{A'G}=\vec{0}$ alors

$$AG = 2A'G = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

D'où : (E) est le cercle circonscrit au triangle ABC

③ $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| \le a\sqrt{3}$ sig

$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| \le a\sqrt{3}$ sig

$MG \le \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

(T) est le disque de centre G et de rayon $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

TRANSLATIONS

Résultats à retenir :

o Soit $\vec{u}$ un vecteur , on dit que $t_{\vec{u}}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ si pour tout point M du plan $t_{\vec{u}}(M) = M'$ éq $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

⇨ $t_{\vec{0}} = id$: l'application identique de $\mathcal{P}$.

⇨ $t_{\vec{u}}(M) = M'$ éq $t_{-\vec{u}}(M') = M$.

⇨ Soient M et N deux points et $M' = t_{\vec{u}}(M)$; $N' = t_{\vec{u}}(N)$

alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

o La translation $t_{\vec{u}}$ conserve les milieux, les barycentres.

⇨ transforme un segment en un segment qui lui est isométrique.
⇨ transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.
⇨ conserve le parallélisme , l'orthogonalité.
⇨ transforme un cercle de centre O en un cercle de même rayon et de centre O' = image de O par $t_{\vec{u}}$.

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 : A, B, C trois points du plan.

① Déterminer : $t_{\overrightarrow{AB}}(A)$.

② Soit D l'image de B par $t_{\overrightarrow{AC}}$.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$.

Exercice 2 : l'unité étant le cm .

① a) Construire un parallélogramme $ABCD$ de centre O tels que : $AB = 6$, $AC = 3$, et $BC = 4,5$.

b) Construire les points suivants :
E, symétrique de B par rapport à (AC) .
F, symétrique de E par rapport à O .
G, image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

② Montrer que $GDAF$ est un parallélogramme .

Exercice 3 : A, B, C trois points alignés et E et F deux points tels que $AEFB$ soit un parallélogramme et G le point image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

① Montrer que $AFGB$ est un parallélogramme .
② Placer le point H image de C par $t_{\overrightarrow{AF}}$.
③ a) Déterminer les images des points A ,et B par $t_{\overrightarrow{AF}}$.
b) Montrer que F , G , H sont alignés .

Exercice 4 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et A un point du plan . On pose :
$B = t_{\vec{u}}(A)$; $C = t_{\vec{v}}(B)$ et $D = t_{-\vec{u}}(C)$

① Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$.
② Déterminer $t_{-\vec{v}}(D)$.
③ Quelle condition doivent vérifier $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour que :
a) $ABCD$ soit un losange ?
b) $ABCD$ soit un carré ?

Exercice 5 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ coupent $\mathscr{C}$ respectivement en A et B et C et D de sorte que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

① Construire l'image $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ par $t_{\overrightarrow{AB}}$. (on pose $O' = t_{\overrightarrow{AB}}(O)$)
② Construire les images A' , B', C' , D' de A , B , C , D par $t_{\overrightarrow{AB}}$.
③ Montrer que les quadrilatères $AOO'B$, $ADD'B$, $COO'D$ sont des parallélogrammes.
④ Déterminer $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$.

Exercice 6 : Soit A et B deux points du plan ,
et $f : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$

$$M \longrightarrow M' \text{ tel que } \overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$$

① a) Déterminer et construire les points A' et B' image de A et B par f .
b) Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.
② Montrer que f est une translation que l'on précisera.

Exercice 7 : A, B et C sont trois points distincts , (Δ) est une droite passant par A distincte de (AB) , M est un point de Δ et N le symétrique de M par rapport à A . On désigne par M' l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et par N' l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

① Construire une figure soignée .
②a) Montrer que $BM'CN'$ est un parallélogramme .
b) Démontrer alors que $[M'N']$ et $[BC]$ ont le même milieu.

Exercice 8 : Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un rectangle $ABCD$ et un point M non situé sur (AB) . C', D' et M' sont les projetés orthogonaux respectifs de C , D, M sur les droites (AM) , (BM) et (AB).

① Déterminer l'image de (MM') par $t_{\overrightarrow{AD}}$.
② Soit Δ_1 la hauteur issue de B dans le triangle ABM et Δ_2 la hauteur issue de A dans le triangle ABM .
Déterminer les images des droites Δ_1 et Δ_2 par $t_{\overrightarrow{AD}}$.
③ Montrer que : (CC') , (DD') et (MM') sont concourantes.

Exercice 9 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle fixe de centre O et de rayon R .
$[AB]$ une corde fixe de ce cercle .
M un point variable de $\mathscr{C}$ et N le point tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

① Déterminer l'ensemble décrit par N lorsque M varie .
② Soit C et D deux points du plan n'appartenant pas à $\mathscr{C}$ et tel que $CD < 2R$; construire deux points E et F du cercle $\mathscr{C}$ tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice 10 : Soit un triangle ABC et un carré $BCDE$ construit extérieurement au triangle.

① Quelle est l'image de B par la translation $t_{\overrightarrow{BE}}$.

② Quelle est l'image par la translation $t_{\overrightarrow{BE}}$ de la hauteur du triangle ABC issue de A ?

③ Construire la hauteur issue de B et son image par $t_{\overrightarrow{BE}}$.

④ Montrer que les perpendiculaires menées de A sur (BC), de D sur (AB) et de E sur (AC) sont concourantes.

Exercice 11 : ABC : un triangle quelconque.

① Construire le point D tel que : $2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$.

② Soit M un point quelconque du plan. Montrer $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

③ $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$; $M \longrightarrow M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

Montrer que f est une translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 12 : Soit $ABCD$ un losange, Soit $\mathscr{C}_1$ = le cercle de centre B et passant par A et $\mathscr{C}_2$ = le cercle de centre D et passant par A.

① On note $t_{\overrightarrow{BD}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Montrer que $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par $t_{\overrightarrow{BD}}$.

② Soit $A' = t_{\overrightarrow{BD}}(A)$; montrer que $A' \in \mathscr{C}'$

Exercice 13 : Soit ABC un triangle

$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$; $M \longrightarrow M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

① Construire les points A' et B' images de A et B par f.

② Montrer que f est une translation que l'on précisera.

Exercice 14 : A et B deux points distincts, $I = A * B$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre B et de rayon $\dfrac{AB}{4}$.

Soit M un point variable de $\mathscr{C}$ et M' le point tel que : $AIMM'$ soit un parallélogramme.

① Montrer que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$.

② Déterminer l'image de B par $t_{\overrightarrow{IA}}$.

③ Déterminer et construire l'ensemble des points M' quand M varie sur $\mathscr{C}$.

Exercice 15 : Soit ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC).

① Construire B' et C' image de B et C par $t_{\overrightarrow{AH}}$.

② Soit $H' = t_{\overrightarrow{AH}}(H)$.

Montrer que H' est le projeté orthogonale de A sur $(B'C')$.

Exercice 16 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle fixe de centre O et de rayon R. $[AB]$ une corde fixe de ce cercle. M un point variable de $\mathscr{C}$ et N le point tel que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

① Déterminer l'image du point M par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

② Déterminer et construire l'image du cercle $\mathscr{C}$ par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

③ Que décrit le point N lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

Exercice 17 : CAB un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r. Soit D le symétrique du point C par rapport à A et E le barycentre des points $(A,1)$; $(B,-2)$.

① Déterminer l'image du point A par $t_{\overrightarrow{CA}}$.

② a) Montrer que $(AB) \parallel (ED)$.

b) En déduire l'image de (AB) par $t_{\overrightarrow{CA}}$.

③ Soit F le point du plan tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.

a) Trouver $t_{\overrightarrow{CA}}(B)$

b) Vérifier que F, E et D sont alignés. Que représente F pour le segment $[DE]$.

Exercice 18 :

Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centres respectifs O et O' ; et de même rayon, sécants en A et B. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
Soit M un point de $\mathscr{C}$ et $M' = t(M)$

① Démontrer que $t(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.

② Quelle est la nature de $AOBO'$.

③ On pose $E = t_{\overrightarrow{OO'}}(A)$. montrer que $O' = B * E$.

④ Montrer que A est l'orthocentre du triangle MBM'.

Exercice 19 : On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R.
[BC] une corde de $\mathscr{C}$ et $I = B * C$.

① Soit A un point variable de $\mathscr{C}$ distinct de B et C. Trouver l'ensemble des points M tel que $BCAM$ soit un parallélogramme.

② On note H : l'orthocentre du triangle ABC èt par D le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$.

a) Montrer que CHBD est un parallélogramme.

b) Montrer alors que : $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OI}$.

c) Quel est alors l'ensemble des points H ?

Exercice 20 : Soit $ABCD$ un rectangle et M ùn point intérieur de ce rectangle tel que (MA) non perpendiculaire à (MB).
On note H : l'orthocentre du triangle ABM .

① Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
E = le projeté orthogonal de C sur (AM) et F = le projeté orthogonal de D sur (BM) et soit I : le point d'intersection de (CE) et (DF).
Déterminer l'image de (BH) par t.

② Déterminer l'image de (MH) par t.

③ En déduire que I, M et H sont alignés.

Exercice 21 : ABC un triangle, (Δ) est une droite passant par A distincte de (AB) , M est un point de Δ et N le symétrique de M par rapport à A .

① Soit $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$ et $N' = t_{\overrightarrow{AC}}(N)$. Montrer que $BM'CN'$ est un parallélogramme

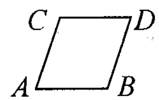
② Démontrer alors que $[M'N']$ et $[BC]$ ont le même milieu.

SOLUTIONS

Solution 1 :

① $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$.

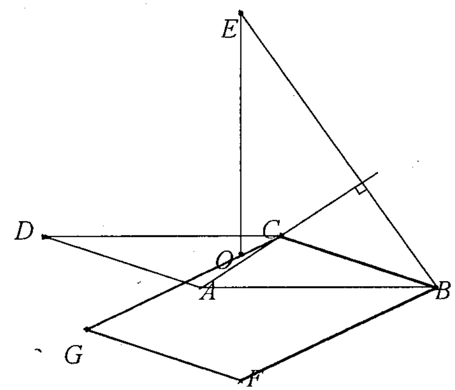
② $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = D$ éq $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.



donc $ABDC$ est un parallélogramme .

Solution 2 :

① a)

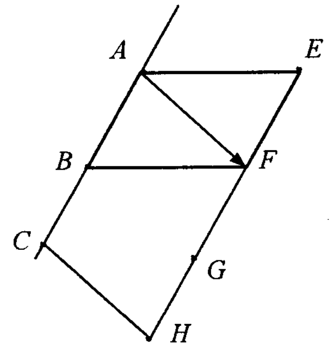


- $AC = 3$ éq $C \in \mathscr{C}(A,3)$. • $BC = 4,5$ éq $C \in \mathscr{C}(B\,;4,5)$.
  d'où la construction du point C .

b) $E = S_{AC}(B)$; $F = S_o(E)$; $G = t_{\overrightarrow{BC}}(F)$ éq $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$.

② On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$
et par suite $GDAF$ est un parallélogramme .

Solution 3 :



$t_{\overrightarrow{EF}}(F) = G$ éq $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG}$
D'où $F = E * G$

① On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG}$ et par suite $AFGB$ est un parallélogramme .

② $t_{\overrightarrow{AF}}(C) = H$ éq $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AF}$ d'où la construction du point H .

③ a) $t_{\overrightarrow{AF}}(A) = F$; $t_{\overrightarrow{AF}}(B) = G$ car $AFGB$ est un parallélogramme .

b) On a : A, B, C trois points alignés et comme $t_{\overrightarrow{AF}}$ conserve l'alignement, donc $t_{\overrightarrow{AF}}(A)$, $t_{\overrightarrow{AF}}(B)$ et $t_{\overrightarrow{AF}}(C)$ sont alignés et par suite F, G, H sont alignés .

Solution 4 :

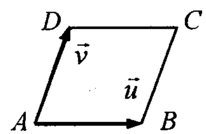
① On a : • $t_{\vec{u}}(A) = B$ éq $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

• $t_{-\vec{u}}(C) = D$ éq $-\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ éq $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$

On a alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et par suite $ABCD$ est un parallélogramme .

② $t_{\vec{v}}(B) = C$ éq $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ donc :



$\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et par suite $-\vec{v} = \overrightarrow{DA}$ d'où $t_{-\vec{v}}(D) = A$.

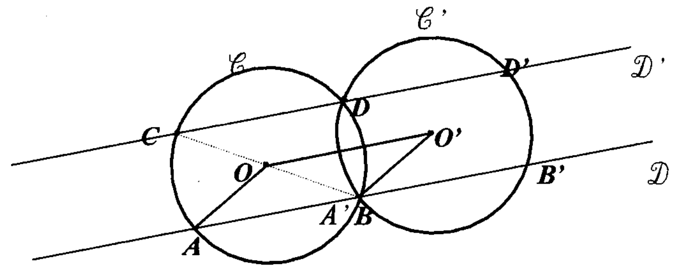
③ a) $ABCD$ est un parallélogramme .

on a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. ; $ABCD$ est un losange si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même norme , c'est à dire : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

b) $ABCD$ est un carré si : $\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| . \\ \text{et} \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux .} \end{cases}$

Solution 5 :

①



$t_{\overrightarrow{AB}}(O) = O'$ éq $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$ donc $OABO'$ est un parallélogramme .

$\mathscr{C}$ 'est le cercle de centre O' et de même rayon que $\mathscr{C}$.

$A \in \mathscr{C}$ et $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ donc $B \in \mathscr{C}'$.

$\mathscr{C}$ 'est donc le cercle de centre O' et passant par B .

② Voir figure pour la construction des images A' , B', C' , D' de A , B , C , D par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

③ • $t_{\overrightarrow{AB}}(O) = O'$ et $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ donc $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$ et par suite $AOO'B$ est un parallélogramme .

• $t_{\overrightarrow{AB}}(D) = D'$ et $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ donc $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB}$ et par suite $ADD'B$ est un parallélogramme .

• $t_{\overrightarrow{AB}}(O) = O'$ et $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$ donc $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{CD}$ et par suite $COO'D$ est un parallélogramme .

④ on a : B et D appartiennent à $\mathscr{C}$.

• $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ et $A \in \mathscr{C}$ donc $B \in \mathscr{C}'$.

• $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$ et $C \in \mathscr{C}$ donc $D \in \mathscr{C}'$. donc $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = \{B, D\}$

Solution 6 :

① a) $f(M) = M'$ éq $\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$

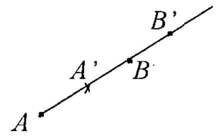
• $f(A) = A'$ éq $\overrightarrow{A'A} - \overrightarrow{A'B} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$ éq $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{A'B} = \vec{0}$

d'où $A' = A * B$.

• $f(B) = B'$ éq $\overrightarrow{B'A} - \overrightarrow{B'B} + 2\overrightarrow{BB'} = \vec{0}$

éq $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BB'} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$ éq $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



b) On a : $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'}$

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}$.

② On a : $\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$ éq

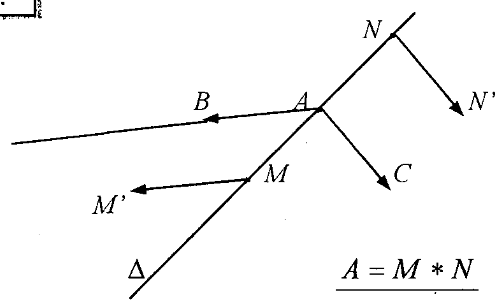
$\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{M'M} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$ éq $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$

éq $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$ éq $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d'où $M' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(M)$.

donc f est une translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Solution 7 :

①



② a) On a : $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'$ éq $ABM'M$ est un parallélogramme .

$t_{\overrightarrow{AC}}(N) = N'$ éq $ACN'N$ est un parallélogramme .

ainsi on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{NN'}$.

• $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ éq $\overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{MA}$.

• $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{NN'}$ éq $\overrightarrow{N'C} = \overrightarrow{NA}$.

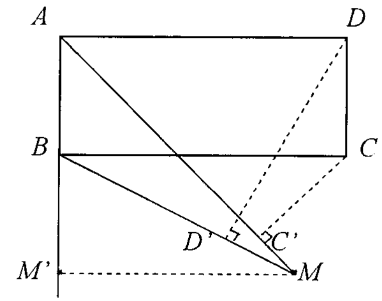
or $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN}$ car $A = M * N$

d'où $\overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{CN'}$ d'où $BM'CN'$ est un parallélogramme .

b) On a : $BM'CN'$ est un # d'où $M'*N' = B * C$.

d'où les segments $[M'N']$ et $[BC]$ ont même milieu.

Solution 8 :



① On a : $(MM')//(AD)$ d'où $t_{\overrightarrow{AD}}(MM') = (MM')$.

② Δ_1 : est la droite passant par B et perpendiculaire à la droite (AM) .

On pose : $t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta_1) = \Delta'_1$.

On a : $t_{\overrightarrow{AD}}(B) = C$ d'où Δ'_1 est la droite qui passe par C et parallèle à Δ_1 .

On a : $\Delta_1 \perp (AM)$ et $(AM) \perp (CC')$ d'où $\Delta_1 // (CC')$.

d'où Δ'_1 est la droite qui passe par C et // à (CC') d'où $\Delta'_1 = (CC')$.

<u>Conclusion</u> : $t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta_1) = (CC')$.

Δ_2 : est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BM) .

or $(BM) \perp (DD')$ d'où Δ_2 est la droite qui passant par A et // à (DD') .

$t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta_2) = \Delta'_2$ alors Δ'_2 est la droite qui passe par $t_{\overrightarrow{AD}}(A) = D$ et // (DD')

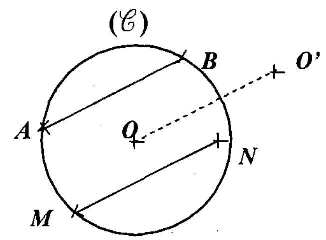
d'où $\Delta'_2 = (DD')$.

③ Δ_1 , Δ_2 et (MM') sont les trois hauteurs du triangle ABM
donc sont concourantes en H orthocentre du triangle ABM, et par suite leurs images Δ'_1 , Δ'_2 , (MM') par $t_{\overrightarrow{AD}}$ sont concourantes en $H' = t_{\overrightarrow{AD}}(H)$.

Conclusion : (CC') , (DD') et (MM') sont concourantes en H' .

Solution 9 :

①

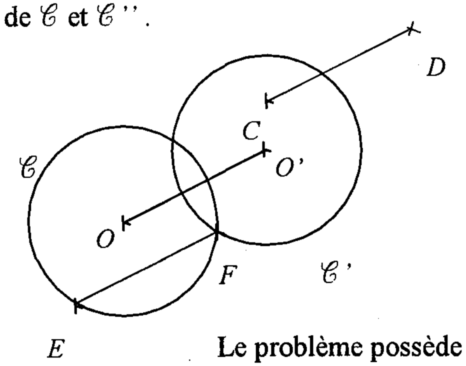


On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ éq $t_{\overrightarrow{AB}}(N) = N$ puisque M décrit $\mathscr{C}$ donc N décrit le cercle $\mathscr{C}' = t_{\overrightarrow{AB}}(\mathscr{C})$.

$\mathscr{C}$: étant le cercle de centre O et de rayon R alors $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre $O' = t_{\overrightarrow{AB}}(O)$ et de rayon R .

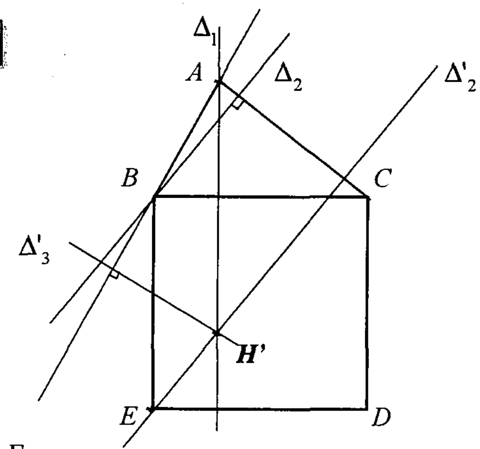
② $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ éq $t_{\overrightarrow{CD}}(E) = F$.

$E \in \mathscr{C}$ donc $F \in t_{\overrightarrow{CD}}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}''$ où $\mathscr{C}''$ est le cercle de centre $O'' = t_{\overrightarrow{CD}}(O)$ et de rayon R et comme $F \in \mathscr{C}$ d'où F est un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}''$.



Le problème possède deux solutions.

Solution 10 :



① $t_{\overrightarrow{BE}}(B) = E$.

② Soit Δ_1 : la hauteur issue de A dans le triangle ABC .
donc Δ_1 est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) et comme $(BC) \perp (BE)$ d'où $\Delta_1 \,//\, (BE)$; d'où $t_{\overrightarrow{BE}}(\Delta_1) = \Delta_1$ car $\Delta_1 \,//\, (BE)$.

③ Soit Δ_2 : la hauteur issue de B dans le triangle ABC .
donc Δ_2 est la droite passant par B et perpendiculaire à (AC) .
d'où Δ'_2 est la droite qui passe par E (car : $t_{\overrightarrow{BE}}(B) = E$) et parallèle à Δ_2 ; d'où la construction de Δ'_2 .

④ Les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H.
(H est l'orthocentre du triangle ABC) .

- Δ_1 est la hauteur issue de A dans le triangle ABC .
- Δ_2 est la hauteur issue de B dans le triangle ABC .
- Soit Δ_3 la hauteur issue de C dans le triangle ABC .

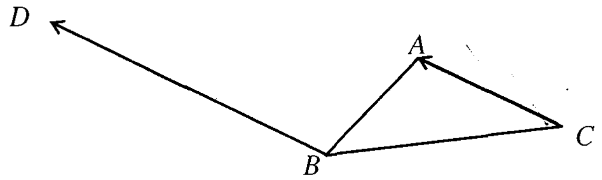
$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 = \{H\}$$

Soit $\Delta'_1 = t_{\overrightarrow{BE}}(\Delta_1)$; $\Delta'_2 = t_{\overrightarrow{BE}}(\Delta_2)$; $\Delta'_3 = t_{\overrightarrow{BE}}(\Delta_3)$

Δ_3 étant la droite qui passe par C et $\perp$ à (AB) , donc Δ'_3 est la droite qui passe par $t_{\overrightarrow{BE}}(C) = D$ (car $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$) et perpendiculaire à (AB) d'où Δ'_1 et Δ'_2 et Δ'_3 sont concourantes en H' .tel que $H' = t_{\overrightarrow{BE}}(H)$.

Solution 11 :

① $2\,\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BD}$ signifie que $D=t_{2\overrightarrow{CA}}(B)=t_{\vec{u}}(B)$ où $\vec{u}=2\,\overrightarrow{CA}$



② $2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\,\overrightarrow{MC}=2\,(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB})-3\,\overrightarrow{MC}$

$=2\,\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\ \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}$

③ $\overrightarrow{MM'}=2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\,\overrightarrow{MC}$ signifie que $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{CD}$ (d'après ②)

$t_{\overrightarrow{CD}}(M)=M'$ d'où $f=t_{\overrightarrow{CD}}$

HOMOTHETIES

Résultats à retenir :

❑ On appelle homothétie de centre I et de rapport $k\in\mathbb{R}^*$, l'application h : $P\to P$; $M\to M'$ tel que $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$

❑ Toute homothétie de rapport $k\neq 1$ a un seul invariant qui est son centre.

⇨ Si $h_{(I,k)}(M)=M'$ et $h_{(I,k)}(N)=N'$ alors $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

et on a : $M'N'=|k|MN$ et si $M\neq N$ alors $M'\neq N'$ $(MN)//(M'N')$.

❑ Soit A et B deux points du plan et α,β deux réels tel que : $\alpha+\beta\neq 0$; alors il existe un unique point G vérifiant :

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. Le point G est appelé barycentre des points pondérés (A,α) ; (B,β) .

⇨ Si G est le barycentre des points pondérés $(A,\ \alpha)$ et (B,β) et si A', B' et G' sont les images respectives des points A , B et G par une homothétie alors G' est le barycentre des points pondérés $(A',\ \alpha)$ et (B',β).

❑ Une homothétie conserve le milieu d'un segment.

❑ Une homothétie conserve l'alignement.

❑ Une homothétie de centre I et de rapport k est une bijection du plan sur lui même. Son application réciproque est l'homothétie de centre I et de rapport $\dfrac{1}{k}$.

❑ L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

❑ L'homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

❑ L'image d'un segment $[AB]$ par une homothétie h est le segment $[A'B']$ avec $A'=h$ (A) et $B'=h\,(B)$.

❑ L'image d'un cercle de centre A et de rayon r par $h_{(I,k)}$ est un cercle de centre $A'=h\,(A)$ et de rayon $r'=|k|\,r$.

⇨ $h_{(O,1)}=Idp$ ⇨ $h_{(O,-1)}=S_O$

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 : Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O' sécants en A et B. On désigne par M et N les points diamétralement opposés à A respectivement sur les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2 .

① a) Déterminer les images des points O et O' par h.
b) Donner l'image du segment $[OO']$ par h.

② En déduire une relation vectorielle entre $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{OO'}$

③ a) Déterminer l'image de (AB) par h.
b) Montrer que $(OO') \perp (AB)$.
c) En déduire que $(AB) \perp (MN)$.
d) Montrer alors que B , M , et N sont alignés.

Exercice 2 : Soit ABC un triangle et O un point qui n'appartient ni à la droite (AB) ni à la droite (AC).
Soit $I \in [OA]$ tel que $I \neq O$ et $I \neq A$. La parallèle à (AB) passant par I coupe (OB) en J ; La parallèle à (AC) passant par I coupe (OC) en K .

① Faire une figure.

② Soit h l'homothétie de centre O, qui transforme A en I .
a) Donner le rapport de h en fonction des distances OA et OI.
b) Montrer que l'image de la droite (AB) par h est la droite (IJ) .
c) Déterminer l'image de la droite (OB) .
d) En déduire que $h(B) = J$.

③ a) Déterminer les images des droites (AC) et (OC) par h.
b) En déduire $h(C)$.
c) Démontrer alors que $(JK) // (BC)$.

Exercice 3 : Soit ABC un triangle et O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC . Soit I, le milieu de $[BC]$; D le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A ; J le symétrique de A par rapport à B et, K le symétrique de A par rapport à C ; H le projeté orthogonal de D sur la droite (JK).

① Construire une figure soignée.

② Soit h l'homothétie de centre A, qui transforme B en J.
a) Donner le rapport de h.
b) Déterminer l'image de C par h.
c) En déduire que les droites (BC) et (JK) sont parallèles.

③ a) Montrer que $H = J * K$.
b) En déduire que A, I et H sont alignés.

Exercice 4 : Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$;
M un point n'appartenant ni à la droite (AB) ni à (CD) ; la parallèle à (AM) passant par C et la parallèle à (BM) passant par D se coupent en N .

① Soit O le point d'intersection des droites (AC) et (BD) et h l'homothétie de centre O, qui transforme A en C . Montrer que $h(B) = D$.

② a) Déterminer les images des droites (AM) et (BM) par h .
b) En déduire h (M).

③ Montrer que les droites (AC), (BD) et (MN) sont concourantes.

Exercice 5 : Soit A *et* B deux points du plan .
Soit $h : P \to P$

$$M \to M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$$

① Déterminer et construire les points A' et B' images respectives de A et B par h.

② Soit $I = A * B$ et $J = A' * B'$. Déterminer $h(I)$.

③ Soit G le barycentre des points pondérés $(A,2)$, $(B,3)$.
Montrer que $h(G) = G$.

④ a) Soit M un point quelconque et $M' = h(M)$.
Exprimer $\overrightarrow{GM'}$ en fonction de $\overrightarrow{GM}$.
b) En déduire que h est une homothétie (préciser le centre et le rapport).

⑤ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MM' = 2$ avec $M' = h(M)$.

Exercice 6 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle fixe de centre O et de rayon r ;
$[AB]$ une corde fixe de $\mathscr{C}$. M un point variable de $\mathscr{C}$ et N l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

① Soit I le milieu du segment $[AN]$. Montrer que I est l'image de N par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

② Soit G le centre de gravité du triangle BMN.

a) Montrer que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IN}$.

b) Exprimer alors $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

③ a) Déterminer l'ensemble décrit par le point I lorsque M varie sur $\mathscr{C}$.

b) Déterminer alors l'ensemble décrit par le point G.

Exercice 7 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle ; A, B et M trois points distincts du cercle.

Soit $I = A * B$ et J le point tel que $\overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{BM} = \vec{0} = 0$.

① Soit $K = I * B$. Montrer que $(MK) // (JI)$.

② Soit P le point d'intersection des droites (AM) et (JI). Soit h l'homothétie de centre A , qui transforme K en I.

a) Déterminer le rapport de h.

b) Montrer que $h(P) = M$.

Exercice 8 : Soit un triangle AMB rectangle en M ; les points A et B sont fixes et M variable.

① Déterminer l'ensemble décrit par M.

② Soit G le centre de gravité du triangle AMB et O le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$.

b) Soit A l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$. Quelle est l'image de M par h.

c) Déterminer l'ensemble des points G lorsque M varie.

Exercice 9 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle fixe de centre O et de rayon r.

$[AB]$ une corde fixe de $\mathscr{C}$ et M un point variable de ce cercle.

① Soit C le point tel que $AMCB$ soit un parallélogramme.
Quel est l'ensemble décrit par le point C lorsque M varie.

② Soit G le centre de gravité du triangle MBC et A' le symétrique de A par rapport à B. Démontrer que G est l'image de M par une homothétie h de centre A' dont on précisera le rapport.

③ En déduire l'ensemble décrit par G.

Exercice 10 : A et B sont deux points fixes, $O = A * B$ et $\mathscr{C}$ le cercle fixe de diamètre $[OB]$ et $\mathscr{D}$ la droite perpendiculaire en B à (AB).

① Faire une figure.

② Soit f l'application du plan $\mathscr{P}$ Dans lui même, qui à tout point M on associe le point M' barycentre des points $(A,1)$; $(B,1)$ et $(M,2)$.

a) Montrer que f est une homothétie de centre O et dont on précisera le rapport.

b) Déterminer les images par f du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 11 : ABC : un triangle quelconque et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $I = B * C$.

$$f_\alpha : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$$

$$M \longrightarrow M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = 2\alpha\,\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

① Démontrer que f_1 est une translation que l'on précisera.

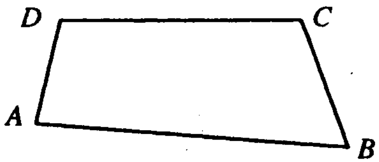
② Soit $\alpha \neq 1$ et G le barycentre des points $(A, 2\alpha)$; $(B, -\alpha)$ et $(C, -1)$. Montrer que f_α est une homothétie de centre G et dont on précisera le rapport.

③ Montrer $\overrightarrow{CG} = k\overrightarrow{AI}$ où k est un réel à préciser.
(On suppose toujours que $\alpha \neq 1$).

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 12 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère comme l'indique la figure ci-contre.



Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en I. La parallèle à (BC) passant par I coupe (AB) en J, la parallèle à (CD) passant par I coupe (AD) en K.

① Soit h l'homothétie de centre A et qui transforme J en B.
Déterminer les images des droites (AE), (AT), (AD) et (AC) par h.

② a) Montrer que $h(I) = C$.
   b) En déduire l'image de la droite (KI) par h.

③ a) Montrer que $h(K) = D$.
   b) En déduire que $(JK) // (AD)$.

Exercice 13 : Soit A et B deux points du plan.

Soit $f : P \to P$; $M \to M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$

① Soit G le barycentre des points $(A,2)$ et $(B,-1)$. Montrer que $f(G) = G$.

② a) Soit M un point du plan et $M' = f(M)$.
Montrer que $\overrightarrow{GM'} = k\overrightarrow{GM}$ où k est un réel que l'on précisera.
   b) Déterminer alors la nature de f et ses éléments caractéristiques.

Exercice 14 : Soit ABC un triangle quelconque. Soit I le point du plan tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et J le point du plan tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

① Soit h l'homothétie de centre A et qui transforme I en B.
   a) Trouver le rapport de h.
   b) Déterminer $h(J)$.
   c) Montrer que $(AT) // (BC)$.

② Soit $O = I * J$ et $K = B * C$. Montrer que A, O, et K sont alignés.

③ Soit M un point quelconque du plan et $M' = h(M)$.
   a) Exprimer MM' en fonction de AM.
   b) Trouver l'ensemble des points M du plan tels que $MM' = \frac{3}{2}$

Exercice 12 : Soit O, A, O' et A' quatre points du plan distincts tels que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{O'A'}$. Soit h l'homothétie qui transforme O en O' et A en A'.

① a) Déterminer le rapport de h.
   b) On note I le centre de h.

② Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et passant par A.
Déterminer et construire le cercle $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par h.

③ Soit B le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$, et B' le point de $\mathscr{C}'$ diamétralement opposé à A' Montrer que $h(B) = B'$.

④ Soit M un point du plan et $M' = h(M)$.
a) Exprimer $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$.
b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $MM' = a$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit ABC un triangle. Soit I le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(C,1)$. La droite parallèle à (BC) et passant par I coupe (AB) en J.
Soit h l'homothétie de centre A et de rapport

① Déterminer $h(I)$ et $h(J)$.

② En déduire une relation entre $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 13 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle fixe de centre O. $[AB]$ une corde fixe de ce cercle. M un point variable de $\mathscr{C}$ et N l'image de M par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

① Déterminer et construire l'ensemble des points N lorsque M varie sur $\mathscr{C}$.

② Soit $I = A * N$ et $J = B * N$.
   a) Montrer que I est l'image de N par une homothétie h_1 de centre A et dont on précisera le rapport.
   b) Montrer que J est l'image de N par une homothétie h_2 de centre B et dont on précisera le rapport.
   c) Déterminer l'ensemble des points I puis l'ensemble des points J lorsque M varie sur $\mathscr{C}$.

③ Soit G le centre de gravité de BMN

a) Vérifier que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IN}$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

b) Déterminer le lieu géométrique du point G lorsque M varie sur $\mathscr{C}$.

Exercice 14 : ABC : un triangle rectangle en A, H est le projeté orthogonal de A sur (BC) ; I et J sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC). Les droites (AH) et (IJ) se coupent en O. La parallèle à (IJ) passant par A coupe (IH) en M et (JH) en N. Soit h l'homothétie de centre H qui transforme I en M.

① Quelle est l'image de (IJ) par h ?

② Quel est le rapport de h ?

③ En déduire que I et J sont les milieux respectifs de $[HM]$ et $[HN]$.

④ Démontrer que (BC) est tangente en H au cercle circonscrit au triangle HMN.

Exercice 15 : Soit ABC un triangle quelconque et G son centre de gravité. $A' = B * C$; $B' = A * C$ et $C' = A * B$. Soit M un point quelconque distinct de A', B' et C'.

Soit Δ_1 : la parallèle à (MA') menée de A.

Δ_2 : la parallèle à (MB') menée de B.

Δ_3 : la parallèle à (MC') menée de C.

① Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -2.

a) Montrer que $h(A') = A$, $h(B') = B$,

b) Déterminer $h(C')$.

② Montrer que l'image de $(A'M)$ par h est la droite Δ_1.

③ Déterminer les images des droites (MB') et (MC') par h.

④ Montrer que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes en un point N.

⑤ Montrer que G, M et N sont alignés.

Exercice 16 : Soit ABC un triangle de façon que $[BC]$ est fixe et le point A varie de sorte que la médiane $[AI]$ ($I = B * C$) ait une longueur constante a. $M = A * B$; $N = A * C$ et $P = M * N$.

① Quel est l'ensemble $\mathscr{C}$ des points A.

② Trouver les ensembles des points M, N et P lorsque A varie.

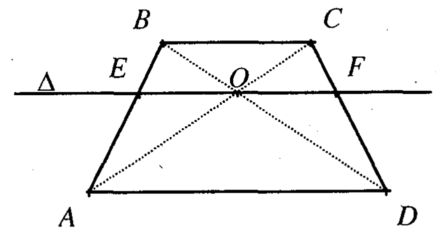
③ Les droites (PC) et (AB) se coupent en R.

a) Montrer que $\overrightarrow{RM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{RB}$.

b) Montrer que R est l'image de M par une homothétie de B et dont on précisera le rapport.

c) Quel est alors l'ensemble des points R lorsque A varie.

Exercice 17 : $ABCD$ un trapèze de bases $[AD]$ et [BC]. Ses diagonales se coupent en O.



La droite Δ parallèle à (AD), passent par O coupe (AB) en E et (CD) en F.

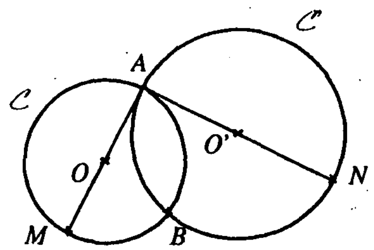
① Soit h_1 l'homothétie de centre A qui transforme O en C. Déterminer $h_1(\Delta)$. En déduire $h_1(E)$.

② Soit h_2 l'homothétie de centre D qui transforme O en B. Déterminer $h_2(\Delta)$. En déduire $h_2(F)$.

③ Montrer alors que O est le milieu de $[EF]$.

SOLUTIONS

Solution 1 :



① a) • On a : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AO}$ donc $h(O)=M$.

• On a : $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AO'}$ donc $h(O') = N$.

b) On sait que l'image d'un segment par une homothétie est un segment et on a : $h(O)=M$ et $h(O') = N$ d'où $h([OO']) = [MN]$.

② On a $h(O)=M$ et $h(O') = N$ donc $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{OO'}$.

③a) On sait que l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle, donc l'image de (AB) par h est une droite Δ telle que Δ // (AB) ; or $h(A) \in \Delta$ et $h(A) = A$ donc $\Delta = (AB)$.

b) On a : $OA = OB$ donc $O \in$ med $[AB]$ et $O'A = O'B$

donc $O' \in$ med $[AB]$ donc (OO') = med $[AB]$ d'où $(AB) \perp (OO')$.

c) • On a : $h(A) = A$ donc $h(AB) = (AB)$.

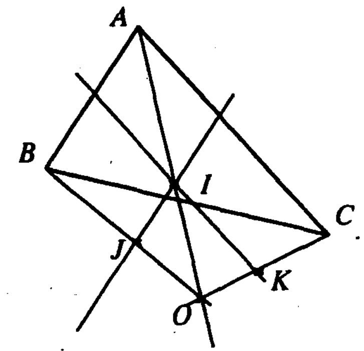
• D'autre pan on a : $h(O)=M$ et $h(O') = N$ donc $h(OO') = (MN)$.

et comme les droites (AB) et (OO') sont perpendiculaires alors leurs images par h sont perpendiculaires (car on sait qu'une homothétie conserve l'orthogonalité) d'où $(MN) \perp (AB)$.

d) On a : B est un point du cercle de diamètre $[AN]$ donc $(BN) \perp (AB)$. Or $(MN) \perp (AB)$ d'où (BN) // (MN) et par suite $(BN) = (MN)$ et par conséquent B, M et N sont alignés.

Solution 2 :

①



② a) On a $h(A) = I$, soit k le rapport de h donc $\overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{OA}$ et comme

$\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont de même sens donc $OI = kOA$ et par suite $k = \dfrac{OI}{OA}$

b) On a $h(A) = I$. L'image de (AB) par h est une droite Δ qui lui est parallèle, donc Δ est la parallèle à (AB) passant par $h(A) = I$ d'où $\Delta = (IJ)$.

c) L'image de la droite (OB) par h est une droite Δ' telle que Δ' // (OB) or $h(O) = O$ donc $O \in \Delta'$, donc Δ' est la parallèle à (OB) passant par O d'où $\Delta' = (OB)$.

d) On a : $B \in (OB) \cap (AB)$ donc $h(B) \in h(OB) \cap h(AB)$ or $h(OB) = (OB)$ et $h(AB) = (IJ)$ donc $h(B) \in (OB) \cap (IJ)$ donc $h(B) = J$.

③ a) • $h(AC)$ est la droite parallèle à (AC) et passant par $h(A) = I$ donc $h(AC) = (IK)$.

• $h(OC)$ est la droite parallèle à (OC) et passant par $h(O) = O$ donc $h(OC) = (OC)$.

b) On a $C \in (OC) \cap (AC)$ donc $h(C) \in h(OC) \cap h(AC)$.

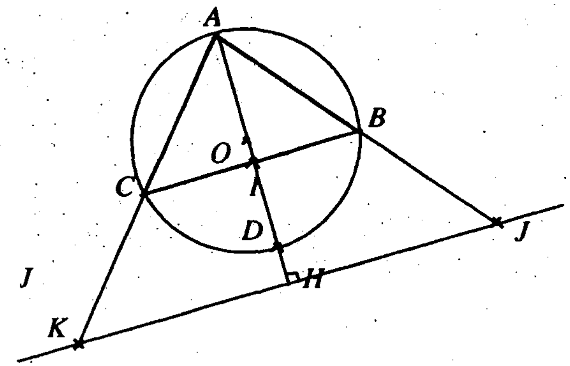
Or $h(OC) = (OC)$ et $h(AC) = (IK)$ donc $h(C) \in (OC) \cap (IK)$ d'où $h(C) = K$.

c) On a $h(B) = J$ et $h(C) = K$ donc $h(BC) = (JK)$.

et par suite (BC) //(JK).

Solution 3 :

①



② a) Soit k le rapport de h. On a $h(B) = J$ donc $\overrightarrow{AJ} = k\overrightarrow{AB}$

donc $k = \dfrac{AJ}{AB} = 2$ car $B = A * J$. donc 2 est le rapport de h.

b) On $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$ donc $h(C) = K$.

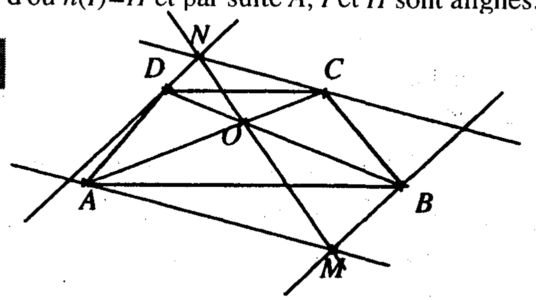
c) on a $h(B) = J$ et $h(C) = K$ donc $\overrightarrow{JK} = 2\overrightarrow{BC}$ et par suite $(BC) // (JK)$.

③a) On a $h(O) = D$ car $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$; $h(B)=J$ et $h(C)=K$ donc $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{OB}$

et $\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{OC}$ d'où $DJ=2OB$ et $DK=2OC$ *or* $OB=OC$ donc $DJ=DK$ et par suite D $\in$ med [JK] et comme H est le projeté orthogonal de D sur $[JK]$ alors $H = J * K$.

b) On a $I = B * C$ donc $h(I) = h(B) * h(C)$ *or* $h(B)=J$ *et* $h(C)=K$ donc $h(I)=J*K=H$ d'où $h(I)=H$ et par suite A, I et H sont alignés.

Solution 4 :



① • On a $h(A) = C$ donc l'image de la droite (AB) par h est la droite parallèle à (AB) et passant par C donc $h(AB) = (DC)$

• De même on a $h(O) = O$ donc $h(OB) = (OB)$ et comme

$B \in (OB) \cap (AB)$ donc $h(B) \in h(OB) \cap h(AB)$ or $h(AB) = (DC)$

$h(OB) = (OB)$ alors $h(B) \in (OB) \cap (DC)$ d'où $h(B) = D$.

② a) • L'image de la droite (AM) par h est la droite parallèle à (AM) et passant par $h(A) = C$ d'où $h(AM) = (CN)$.

• L'image de la droite (BM) par h est la droite parallèle à (BM) et passant par $h(B) = D$ d'où $h(BM) = (DN)$.

b) On a $M \in (AM) \cap (BM)$ donc $h(M) \in h(AM) \cap h(BM)$

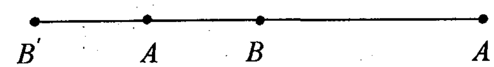
$h(AM) = (CN)$ et $h(BM) = (DN)$ d'où $h(M)=N$.

③On a $h(M) = N$ donc O, M, et N sont alignés donc $O \in (MN)$; d'autre part on a $O \in (AC) \cap (BD)$ donc les droites (AC), (BD) et (MN) sont concourantes en O.

Solution 5 :

① • Soit $A'=h(A)$ donc $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AA} + 3\overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{AB}$.

• Soit $B'=h(B)$ donc $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BB}$ d'où $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BA}$.



②On a $I = A * B$ donc $h(I) = h(A) * h(B)$ d'où $h(I) = A' * B'$ et par suite $h(I) = J$.

③Soit $G' = h(G)$, donc $\overrightarrow{GG'} = 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ car G est le barycentre des points $(A, 2)$ et $(B, 3)$ d'où $G' =$ G et par suite $h(G) = G$.

④ a) On a $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ éq à

$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$

éq $\overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}$ or $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{MG}$

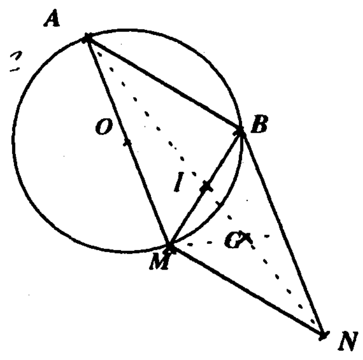
b) On a pour tout $M \in \mathscr{P}$; $h(M) = M'$ éq à $\overrightarrow{GM'} = -4\overrightarrow{GM}$ donc h est une homothétie de centre G et de rapport -4.

⑤ On $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'}$ or $\overrightarrow{GM'} = -4\overrightarrow{GM}$ d'où $\overrightarrow{MM'} = 5\overrightarrow{MG}$ et par suite $MM' = 5MG$.

$MM' = 2$ signifie que $5MG = 2$ ou encore $MG = \dfrac{2}{5}$ signifie que

M appartient au cercle de centre G et de rayon $\dfrac{2}{5}$

Solution 6 :



① On a $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ donc $h_{(A,\frac{1}{2})}(N)=I$.

② a) G est le centre de gravité du triangle BMN donc $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

éq à $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

éq à $3\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$;or $I=B*M$

d'où $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et par suite $3\overrightarrow{GI}=-\overrightarrow{IN}$

d'où $3\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IN}$, alors $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IN}$.

b) On a $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IN}$,or on a $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IN}$ d'où $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{IG}$ éq à

$\overrightarrow{AI}=3(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AG})$ d'où $4\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AG}$ d'où $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$.

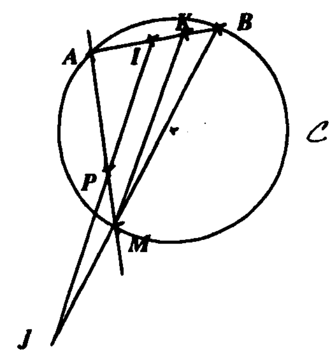
③ a) On a $I=h_{(A,\frac{1}{2})}(N)$ or $N=t_{\overrightarrow{AB}}(M)$ et comme M décrit $\mathscr{C}$, alors N décrit le cercle $\mathscr{C}'$ de rayon r et de centre $O'=t_{\overrightarrow{AB}}(O)$ donc I décrit le cercle $\mathscr{C}''$ image de $\mathscr{C}'$ par $h_{(A,\frac{1}{2})}$, donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $O''=h_{(A,\frac{1}{2})}(O')$ et de rayon $\frac{r}{2}$.

b) On a $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$ donc $G=h_{(A,\frac{4}{3})}(I)$ et comme I décrit le cercle $\mathscr{C}''$ alors G décrit le cercle $\mathscr{C}_1$ image de $\mathscr{C}''$ par $h_{(A,\frac{4}{3})}$.

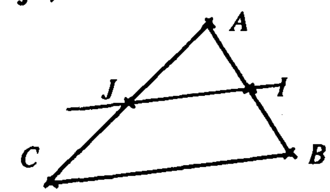
$\mathscr{C}_1$ est alors le cercle de centre $O_1=h_{(A,\frac{4}{3})}(O'')$ et de rayon $\frac{4}{3}.\frac{r}{2}=\frac{2}{3}r$

Solution 7 : ① Dans le triangle IJB on a :
$K=I*B$ et $M=B*J$;

car $\overrightarrow{BJ}=2\overrightarrow{BM}$ donc (MK) // (IJ).



Rappel : Dans un triangle ABC
si $I=A*B$ et $J=A*C$ alors (IJ) // (BC)

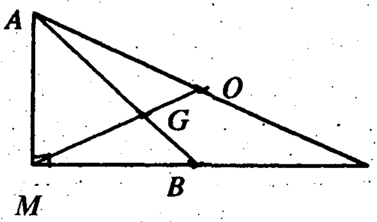


② a) Soit α le rapport de h ; on a $h(K)=I$
donc $\overrightarrow{AI}=\alpha\overrightarrow{AK}$ or $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont de même sens d'où $AI=\alpha\,AK$ et par suite $\alpha=\frac{AK}{AI}=\frac{AI+IK}{AI}$ or $IK=\frac{1}{2}IB=\frac{1}{2}AI$ d'où $\alpha=\frac{\frac{3}{2}AI}{AI}=\frac{3}{2}$ donc le rapport de h est $\frac{3}{2}$.

b) • On a $h(A)=A$ donc $h(AM)=(AM)$.
• D'autre part on a $h(I)=K$ donc l'image de la droite (IJ) par h est la droite parallèle à (IJ) et passant par K donc $h(IJ)=(KM)$.
•Ona $P\in(AM)\cap(IJ)$ donc $h(P)\in h(AM)\cap h(IJ)$ d'où

$h(P)\in(AM)\cap(KM)$ et par suite $h(P)=M$ car $(AM)\cap(KM)=\{M\}$.

Solution 8 :



① Le triangle MAB est rectangle en M donc M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et par suite M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].

② a) On a $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GM}=\vec{0}$

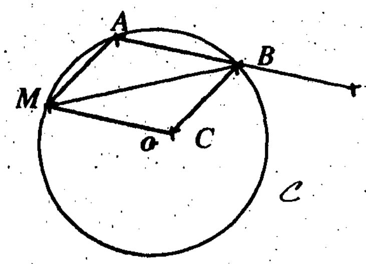
éq à $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OM}=\vec{0}$

éq à $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}$; or $O=A*B$ d'où $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ et par suite $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$.

b) On a $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$ donc $h(M)=G$.

c) On sait que l'image d'un cercle $\mathscr{C}$ (I,r) par une homothétie de rapport k est un cercle $\mathscr{C}'$ $(I', |k|r)$ avec $I'=h(I)$ et comme M décrit le cercle de diamètre $[AB]$ c'est à dire M décrit le cercle de centre O (car $O=A*B$) et de rayon $\frac{AB}{2}$ et puisque $h(M)=G$ alors G décrit le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O car $h(O)=O$ et de rayon : $\frac{1}{3}.\frac{AB}{2}=\frac{AB}{6}$.

Solution 9 :



① On a $AMCB$ est un parallélogramme signifie que $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$ signifie que $t_{\overrightarrow{AB}}(M)=C$. Et comme M décrit le cercle $\mathscr{C}$ alors C décrit le cercle $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

② G est le centre de gravité du triangle MBC donc $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

éq à $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'M}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$

éq à $3\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'M}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$; or $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}$ donc $\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{MC}$ et par suite $BA'CM$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{BM}$.

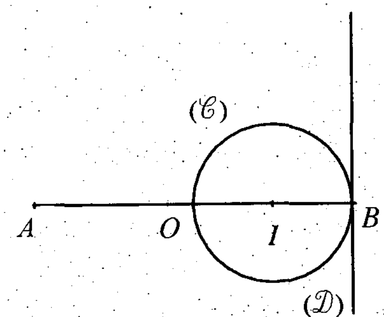
On a : $3\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'M}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$ donc $3\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'M}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

éq à $\overrightarrow{A'G}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'M}$ et par suite $G=h_{(A',\frac{2}{3})}(M)$.

① M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r et on a $G=h_{(A',\frac{2}{3})}(M)$

donc G décrit le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $O'=h_{(A',\frac{2}{3})}(O)$ et de rayon $\frac{2}{3}r$.

Solution 10 :



① Voir figure ci contre.

② a) On a : $\overrightarrow{AM'}+\overrightarrow{BM'}+2\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

signifie que :

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM'}+2\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

signifie que $2\overrightarrow{OM'}+2\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

signifie que $2\overrightarrow{OM'}+2(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OM'})=\vec{0}$

signifie que $\overrightarrow{OM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$

d'où $M'=h_{(O,\frac{1}{2})}(M)$

<u>**Conclusion**</u> : f est une homothétie de centre O et rapport $\frac{1}{2}$.

b) * $f(O)=O$ car O est le centre de f.

* $f(\mathscr{C})$ est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $f(O)=O$ et de rayon

$r'=\frac{1}{2}r=\frac{1}{4}OB$ ($r=\frac{1}{2}OB$ est le rayon de $\mathscr{C}$)

* $\mathscr{D}'=f(\mathscr{D})$ est la droite parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par $f(B)$.

Posons $B'=f(B)$. signifie que $\overrightarrow{OB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ d'où $B'=I$ milieu de $[OB]$

$\mathscr{D}'$ est la droite passant par I et parallèle à $\mathscr{D}$

C'est la médiatrice de $[OB]$

Exercice 11 :

① $f_1(M) = M'$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ signifie $\overrightarrow{MM'} = 2\cancel{\overrightarrow{MA}} - \cancel{\overrightarrow{MA}} - \overrightarrow{AB} - \cancel{\overrightarrow{MA}} - \overrightarrow{AC}$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Or $I = B * C$ d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ soit $\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{AI}$.

f_1 est la translation de vecteur $\vec{u} = -2\overrightarrow{AI}$

② $\overrightarrow{MM'} = 2\alpha\,(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})$

Signifie que $\overrightarrow{MM'} = (2\alpha - \alpha - 1)\overrightarrow{MG} + \underbrace{2\alpha\overrightarrow{GA} - \alpha\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}$

Signifie que $\overrightarrow{MM'} = (\alpha - 1)\overrightarrow{MG}$ signifie que $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = (\alpha - 1)\overrightarrow{MG}$

Signifie que $\overrightarrow{GM'} = (2 - \alpha)\overrightarrow{GM}$ signifie que $M' = h_{(G, 2-\alpha)}(M)$.

Conclusion : f est l'homothétie de centre G et rapport $(2 - \alpha)$

③ On a : $2\alpha\overrightarrow{GA} - \alpha\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ signifie que
$2\alpha(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA}) - \alpha(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ signifie que
$(\alpha - 1)\overrightarrow{GC} + 2\alpha\overrightarrow{CA} - \alpha\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ signifie que $(\alpha - 1)\overrightarrow{GC} + \alpha(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$
signifie que $(\alpha - 1)\overrightarrow{GC} + \alpha(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$
signifie que $(\alpha - 1)\overrightarrow{GC} + \alpha(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}) = \vec{0}$
Or $I = B * C$ d'où $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IA}$ et puisque $\alpha \neq 1$ alors
$(\alpha - 1)\overrightarrow{GC} + 2\alpha\overrightarrow{IA} = \vec{0}$ et par suite $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2\alpha}{1 - \alpha}\overrightarrow{AI}$.

ROTATIONS

Résultats à retenir :

❑ Soient O un point du plan et α un réel appartenant à $]0, \pi[$.
L'application du plan dans le plan qui laisse Invariant le point O et qui à tout point M distinct de O,
associe le point M' tel que $\begin{cases} OM' = OM \\ \widehat{MOM'} = \alpha \end{cases}$ (Voir figure 1);
est appelée rotation directe de centre O et d'angle α.

M' est l'image de M par la rotation directe de Centre O et d'angle α.

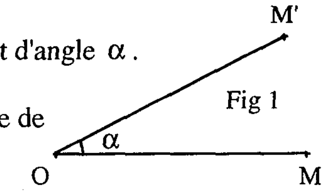


Fig 1

❑ Soient O un point du plan et α un réel appartenant à $]0, \pi[$.
L'application du plan dans le plan qui laisse Invariant le point O et qui à tout point M distinct de O,
associe le point M' tel que $\begin{cases} OM' = OM \\ \widehat{MOM'} = \alpha \end{cases}$ (Voir figure 2);
est appelée rotation indirecte de centre O et d'angle α.

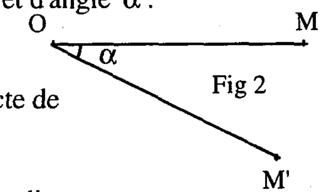


Fig 2

M' est l'image de M par la rotation indirecte de Centre O et d'angle α.

❑ Une rotation r conserve les angles et les distances :
Soient A, B et C trois points non alignés. On désigne par A', B' et C' leurs images respectives par r. On a : $AB = A'B'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

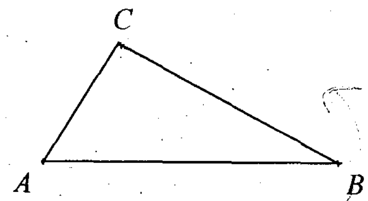
❑ Image d'un segment – image d'une droite. On pose $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$.

* L'image du segment $[AB]$ par r est le segment $[A'B']$
* L'image de la droite (AB) par r est la droite $(A'B')$.

- Une rotation conserve les milieux et les barycentres.
- L'image d'un cercle par une rotation est un cercle, c'est-à-dire : $\Gamma = \mathscr{C}(I,R)$ alors $\Gamma' = r(\Gamma) = \mathscr{C}(I',R)$ où $I' = r(I)$.
- Une rotation conserve le contact.
- Une rotation conserve les aires.

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 : Soit ABC un triangle comme l'indique la figure suivante :



① a) Recopier la figure.

b) Construire le point D image du point A par le quart de tour r direct de centre B puis le point E image de C par le même quart de tour.

② a) Construire F l'image du point C par le quart de tour direct de centre A.

b) Montrer que : $AF = DE$.

③ Montrer que $(AF) // (DE)$.

Exercice 2 : Soit $[AB]$ un segment du plan.

① Construire le point C image de B par la rotation directe r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

② Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et M un point de l'arc $\widehat{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$ ne contenant pas A, distinct de B et C.

a) Déterminer $\widehat{AMB}$.

b) Soit $D \in [MA]$ tel que : $MD = MC$. Démontrer que MCD est triangle équilatéral.

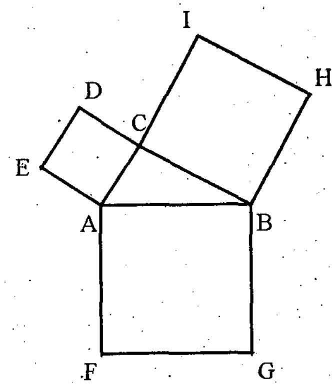
③ Soit r' la rotation indirecte de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) Déterminer $r'(B)$ et $r'(M)$.

b) En déduire l'image du cercle (Γ) circonscrit au triangle CMB.

④ Démontrer que $MA = MB + MC$.

Exercice 3 : On considère la figure ci contre dans laquelle $ACDE$, $BAFG$ et $CBHI$ sont trois carrés.



① Montrer que le quart de tour direct r de centre C transforme le segment $[BD]$ en $[AI]$.

② Montrer que les droites (BD) et (AI) sont perpendiculaires.

③ a) Déterminer l'image de la droite (AH) par le quart de tour r' direct de centre B.

b) Montrer alors que : $AH = GC$.

Exercice 4 : Soit $[AB]$ un segment du plan.

① a) Construire le point C image de B par la rotation directe r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Soit M un point variable du plan distinct de A et B et tel que : $(MA) \perp (MB)$; on pose $M' = r(M)$. Que décrit le point M' lorsque M varie.

② Soit $I = B * C$ et Ω le point de concours des bissectrices intérieures du triangle ABC.

a) Faire une figure.

b) Construire le point A' image de A par la rotation directe r' de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

c) Montrer que $\Omega A = \Omega A'$.

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 5 : Soit $[AB]$ un segment du plan.

① a) Construire le point D image de B par la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Soit C le point tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ quelle est la nature de $ABCD$.

② Sur les côtés $[AD]$ et $[AB]$, on place respectivement les points I et J tels que : $AI = BJ$. On désigne par H le point d'intersection des droites (BI) et (DJ).

a) Faire une figure.

b) Soit r' la rotation directe de centre O ($O = A*C = B*D$) et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

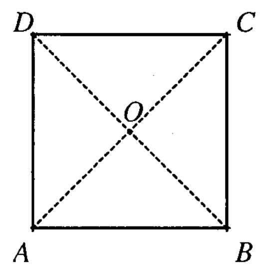
c) Déterminer les images des points A et D par r'.

③a) Soit $I' = r'(I)$. Vérifier que : $I' \in [AB]$ et que $BI' = BJ$ en déduire que $I' = J$.

b) Montrer que : $(IH) \perp (JC)$ et $(JH) \perp (IC)$.

c) Que représente alors le point H pour le triangle CIJ.

Exercice 6 : Soit ABCD un carré de centre O comme l'indique la figure ci contre.



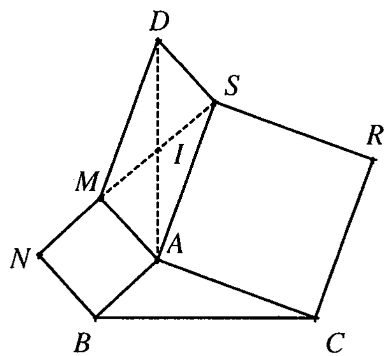
① a) Construire les points E et F images respectives de D et B par la rotation directe r de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Construire le point G tel que : $r(G) = A$.

② a) Démontrer que : B, D et G sont alignés.

b) En déduire que : A, E et F sont alignés.

Exercice 7 : Dans le plan, on considère un triangle ABC. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ACRS$ et $BAMN$, puis le parallélogramme $MASD$ dont on notera I son centre.



① a) Construire le point S' image de S par le quart de tour direct r de centre A..

② Soit I' l'image de I par r. Montrer que $I' = B * S'$.

③ En déduire que :

a) $(AD) \perp (BC)$ b) $AD = BC$

Exercice 8 : Soit ABC un triangle équilatéral tel que C soit l'image de B par la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On note O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. (faire une figure)

① Soit r la rotation directe qui transforme A en B et J en K.

a) Déterminer le centre de r .

b) Déterminer alors l'angle de r .

② a) démontrer que $r(K) = I$.

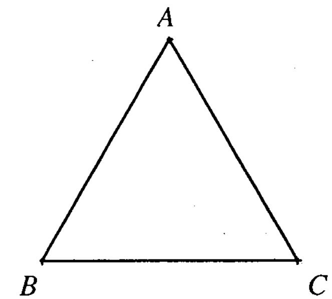
b) Déterminer $r(I)$.

c) En déduire la nature du triangle IJK.

② Soit D le point diamétralement opposé à A et r' la rotation indirecte de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que $r'(B) = C$.

Exercice 9 :

Soit ABC un triangle équilatéral comme l'indique la figure ci contre



① a) Construire le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et passant par B .

b) Vérifier que $C \in \mathscr{C}$.

c) On note I : le symétrique de B par rapport à(AC). Montrer que $I \in \mathscr{C}$

② Quelle est la nature de $ABCI$.

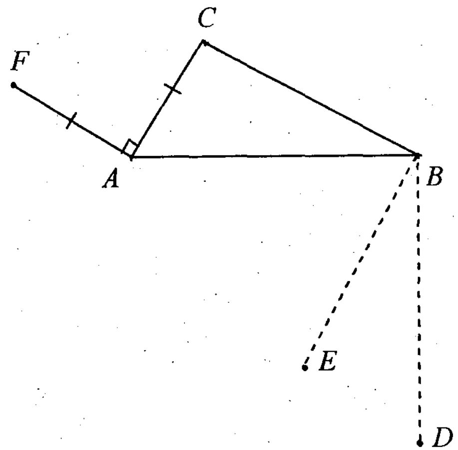
③ Soit R la rotation indirecte de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que $R(C) = A$.

b) Soit $D = R(A)$. Construire D et montrer que $A = B * D$

SOLUTIONS

Solution 1 :



① a) Voir figure

b) D = l'image de A par le r

signifie que : $\begin{cases} BA = BD \\ \widehat{ABD} = \pi/2 \end{cases}$

E = l'image de C par le r

signifie que : $\begin{cases} BC = BE \\ \widehat{CBE} = \pi/2 \end{cases}$

② a) On a : $AC = AF$ et $\widehat{CAF} = \pi/2$

b) On a : $r : A \to D$ et $C \to E$

r conserve les distances donc $AC = DE$.

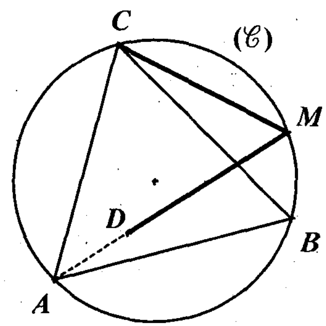
Or on a : $r' : A \to A$ et $C \to F$ alors AC = AF d'où $AF = DE$

③ On a : $r : A \to D$ et $C \to E$ donc $(AC) \perp (DE)$ car l'angle de r est $\frac{\pi}{2}$

$r' : A \to A$ et $C \to F$ donc $(AC) \perp (AF)$

Conclusion : $(AF) \,//\, (DE)$.

Solution 2 :



① $r : A \to A$ et $B \to C$

on a : $\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{BAC} = \pi/3 \end{cases}$ signifie que ABC triangle équilatéral de sens direct.

② a) $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ car M et C appartiennent à un même arc $\overset{\frown}{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$. Or $\widehat{ACB} = \pi/3$ d'où $\widehat{AMB} = \pi/3$

b) On a : $\widehat{CMD} = \widehat{CMA} = \widehat{CBA} = \pi/3$ et de plus $MC = MD$ donc MCD est un triangle équilatéral.

③ a) On a : $r'(B) = A$ et $r'(M) = D$.

b) (Γ) cercle circonscrit au triangle CMB.

$r' : C \to C$, $M \to D$ et $B \to A$

$\Gamma' = r'(\Gamma)$ est le cercle circonscrit au triangle CAD.

④ On a : $r' : M \to D$ et $B \to A$ donc $MB = DA$ car r' conserve les distances. Or MCD est un triangle équilatéral donc $MC = MD$

d'où $MB + MC = DA + MD = MA$ car $D \in [MA]$.

Solution 3 :

① $\begin{cases} CB = CI \\ \widehat{BCI} = \pi/2 \end{cases}$ d'où $r(B) = I$ $\begin{cases} CD = CA \\ \widehat{DCA} = \pi/2 \end{cases}$ d'où $r(D) = A$

d'où r([BD]) = [AI].

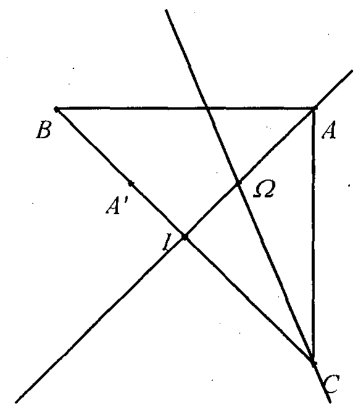
② $r : B \to A$ et $D \to I$ $(BD) \perp (AI)$ car l'angle de r est $\pi/2$

③ a) $r'(H) = C$ car $BH = BC$ et $\widehat{HBC} = \pi/2$

$r'(A) = G$ car $BA = BG$ et $\widehat{ABG} = \pi/2$ d'où $r'(AH) = (GC)$.

b) $r' : A \to G$ et $H \to C$ r' conserve les distances donc $AH = GC$.

Solution 4 :



① a) Voir figure

b) $(MA) \perp (MB)$ signifie que M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ privé de A et B. On a $M' = r(M)$ et $r(A) = C$, $r(B) = B$

M' décrit le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[BC]$ privé de B et C.

② a) Voir figure.

b) On a : $CA = CA'$ donc CAA' est un triangle isocèle de sommet principal C.

$(C\Omega)$ bissectrices intérieure du secteur $[CA, CA')$ donc $(C\Omega)$ est la médiatrice de $[AA']$.

c) d'après b) on en déduit que $\Omega A = \Omega A'$.

DEUXIEME PARTIE

SUITE ARITHMÉTIQUE

Résultats à retenir :

○ ***Suite arithmétique :*** une suite U est une suite arithmétique de raison r si pour tout entier n on a : $U_{n+1} = U_n + r$

○ ***Modes de présentation d'une suite:*** Une suite peut être définie par :

⇨ Son terme général.

Ou

⇨ Son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à l'aide du terme précédent. Cette relation est appelée relation de récurrence.

○ ***Terme général :***

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r .

On a :

- $U_n = U_0 + n\,r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $U_n = U_p + (n - p)\,r$, où n et p sont deux entiers naturels

En particulier $U_n = U_1 + (n-1)\,r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

○ ***Représentation graphique :*** Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r .

Les points A_n de coordonnées (n, U_n) , sont sur la droite de pente r et d'ordonnée à l'origine le premier terme U_0 .

○ ***Somme de n termes consécutifs :*** La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est $S = n \times \dfrac{a+b}{2}$, où a est le premier terme de cette somme et b le dernier terme .

S=nbre de terme $\times \dfrac{\text{Le premier terme de la somme + le dernier terme}}{2}$,

en particulier : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 :

Soit la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0 = 1$ et de raison 3

① Calculer le $20^{ème}$ terme de cette suite

② Calculer n tel que $U_n = 301$

③ Trouver l'ensemble E des entiers n tel que $\dfrac{50}{3} \le U_n \le 27$

Exercice 2 :

Soit (U_n) une suite arithmétique dont le $9^{ème}$ terme est -11 et le $25^{ème}$ terme est – 43

① Calculer r et U_0

② Calculer : $U_8 + U_9 + \dots + U_{24}$

Exercice 3 : Soit $x \in \mathbb{R}$

Démontrer que les nombres : $x^2 - 4x + 2$, $x^2 - 2x$, $x^2 - 2$ sont en progression arithmétique .

Exercice 4 :

Trois réels a ,b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique
Déterminer a , b ,c tel que : $a + b + c = 21$ et $abc = -105$ et $a > 0$

Exercice 5 :

Trois nombres en progression arithmétiques ont un produit 23664 .
Déterminer ces nombres sachant que le plus petit est 24 .

Exercice 6 :

Trois nombres a , b , c forment une suite arithmétique de raison $r > 0$

① Exprimer a et c en fonction de b et de r

② a) Déterminer b pour que $a + b + c = 9$

b) Déterminer alors r pour que $a^2 + b^2 + c^2 = 35$

c) Calculer a et c

Exercice 7 :

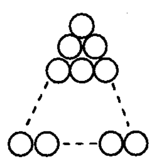
Calculer : $A = 3 + 8 + 13 + \dots + 498 + 503$

$B_n = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 8 :

Mr Ali a acheté une voiture de 60000^D le vendeur lui propose de la payer par traites mensuelles sur 2 ans sans intérêts . Les traites augmentent de 100 D de mois en mois . Déterminer les montants de traites

Exercice 9 :



Déterminer le nombre de rangées que comporte une pile triangulaire contenant 78 tourneaux.

Exercice 10 :

Les longueurs de côtés d'un triangle rectangle forment une progression arithmétique de raisons 5 . Déterminer les longueurs de ses cotés.

Exercice 11 :

On considère la suite (U_n) à terme positifs tel que : $U_0 = 1$ et $U^2_{n+1} - U^2_n = 4$

① Calculer U_1 et U_2

② Vérifier que (Un) n'est pas une suite arithmétique

③ On pose $V_n = U_n^2$

Montrer que (V_n) est une suite arithmétique

④ a)Calculer V_n en fonction de n

b)Calculer U_n en fonction de n

⑤ Trouver le plus grand entier n tel que $1,5 < U_n < 17,2$

Exercice 12 :

(U_n) est une suite arithmétique se raison $r > 0$ est tel que : $U_0 \succ 0$
Montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{U_0}+\sqrt{U_1}}+\frac{1}{\sqrt{U_1}+\sqrt{U_2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{U_{100}}+\sqrt{U_{101}}}=\frac{\sqrt{U_{101}}-\sqrt{U_0}}{r}$$

Exercice 13 :

(U_n) une suite arithmétique tel que :

$U_1 = -3$ et $U_n = 37$ et $U_1 + U_2 + \dots + U_n = 187$

① Calculer le nombre n de termes

② a) Calculer r.

b) En déduire U_{301}.

Exercice 14 :

Rencontrant un mendiant , un homme lui donne une pièce , il en rencontre un deuxième et lui donne deux pièces , il rencontre d'autres mendiants , à qui il donne une pièce de plus que précédemment à chaque fois … jusqu'à ce qu'il n'ait plus rien en poche . Il réfléchit alors et se dit : «si j'avais donné autant de pièces à chacun d'entre eux, cela aurait été plus équitable et chaque mendiant aurait 8 pièces . » Combien a-t-il rencontré de mendiants.

Exercice 15 :

On considère les carrés C_1, C_2 et C_3 de centre O et de coté respectifs, 1 , 2 et 3 et on désigne par A_1 : l'aire de la partie limitée par C_1 et C_2 et par A_2 L'aire limitée par C_1 et C_3.

① Calculer A_1 et A_2 et $A_2 - A_1$

② Sort $n \geq 1$ et C_n : le carré de centre O et de coté n et U_n l'aire de la partie limitée par C_n et C_{n+1}

a) Calculer U_n
b) Vérifier que (U_n) est une suite arithmétique.

SOLUTIONS

Solution 1 :

① (U_n) étant une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $r = 3$

On a : $U_n = U_0 + nr$
$U_n = 1 + 3n$
U_{19} est le $20^{ème}$ terme de cette suite $U_{19} = 1 + 3 . 19 = 58$

② $U_n = 301$ signifie
$1 + 3n = 301$ signifie : $3n = 300$
Signifie $n = 100$

③ $\frac{50}{3} \leq U_n \leq 27$ signifie

$\frac{50}{3} \leq 3n+1 \leq 27$ signifie $\frac{50}{3} - 1 \leq 3n \leq 26$ signifie

$\frac{47}{3} \leq 3n \leq 26$ signifie $\frac{47}{9} \leq n \leq \frac{26}{3}$

$n \in \mathbb{N} \cap \left[\frac{47}{9} , \frac{26}{3}\right] = \{ 6,7,8 \}$

L'ensemble $E = \{ 6,7,8 \}$

Solution 2 :

① On sait que : $U_n - U_p = (n-p)\,r$ donc $U_{24} - U_8 = (24 - 8)\,r$
$-43 - (-11) = 16\,r$
D'où : $r = -2$

D'autre part ; $U_{24} = U_0 + 24\,r$
D'où : $-43 = U_0 - 48$ et par suite $U_0 = 5$

② étant donné une suite arithmétique (U_n) on sait que :

$$U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = \frac{(n-p+1).(U_p + U_n)}{2}$$

On a : $U_8 + U_9 + \dots + U_{24} = \frac{(24-8+1).(U_8 + U_{24})}{2}$

$$= \frac{17(-11-43)}{2} = -459$$

Solution 3 :

On sait que trois réels a ,b ,et c sont en progression arithmétique
Si $a + c = 2b$

$\begin{cases} a = x^2 - 4x + 2 \\ c = x^2 - 2 \end{cases}$ alors $\begin{aligned} a + c &= 2x^2 - 4x \\ &= 2(x^2 - 2x) \\ &= 2b \end{aligned}$

Les nombres $x^2 - 4x + 2$, $x^2 - 2x$ et $x^2 - 2$ sont en progression arithmétique

Solution 4 :

On a : $\begin{cases} a + c = 2b & (1) \\ a + b + c = 21 & (2) \\ abc = -105 & (3) \end{cases}$

(2) : $a + b + c = 21$ signifie $(a+c) + b = 21$ (*)
Or $a + c = 2b$ d'où : $3b = 21$
Et par suite $b = 7$

(3) $abc = -105$ sig $7\,ac = -105$
sig $ac = -15$

on a : $\begin{cases} a+c=14 \\ ac=-15 \end{cases}$ sig $\begin{cases} c=14-a \\ a(14-a)=-15 \end{cases}$

sig $\begin{cases} c=14-a \\ a^2-14a-15=0 \end{cases}$ (**)

$a^2 - 14a - 15 = 0$ d'où $a = -1$ ou $a = 15$

or $a > 0$

d'où $a = 15$ $b = 7$ et $c = -1$

Solution 5 :

$a = 24$, b , c sont en progression arithmétiques

tel que : $b > 24$ et $c > 24$ et $abc = 23664$

On a : $\begin{cases} a+c=2b \\ abc=23664 \end{cases}$ sig $\begin{cases} c=2b-24 \\ bc=\dfrac{23664}{24}=986 \end{cases}$

$bc = 986$ sig $b(2b-24) = 986$

$2b^2 - 24b - 986 = 0$

$b^2 - 12b - 493 = 0$

$\Delta = 12^2 - 4(-493) = 144 + 1972 = 21116 = 46^2$

$b = \dfrac{12+46}{2} = \dfrac{58}{2} = 29$ ou $b = \dfrac{12-46}{2} = -17$ (impossible car $b > 24$)

d'où $c = 2b - 24 = 58 - 24 = 34$ Conclusion : $\begin{cases} a=24 \\ b=29 \\ c=34 \end{cases}$

Solution 6 :

① $b = a + r$ d'où $a = b - r$

$c = b + r$

②a) $a + b + c = 9$ sig $(b-r) + b + (b+r) = 9$ sig

$3b = 9$ d'où : $b = 3$

b) $a^2 + b^2 + c^2 = 35$ sig $(b-r)^2 + b^2 + (b+r)^2 = 35$ or $b = 3$

$(3-r)^2 + 9 + (3+r)^2 = 35$ donc $9 - 6r + r^2 + 9 + 9 + 6r + r^2 = 35$

$2r^2 + 27 = 35$ soit $2r^2 = 8$ sig $r^2 = 4$ d'où $r = 2$ car $r > 0$

c) $a = b - r = 3 - 2 = 1$

$c = b + r = 3 + 2 = 5$

Solution 7 :

* $A = 3 + 8 + 13 + \ldots + 498 + 503$

On considère la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0 = 3$ et de raison $r = 5$

On a : $U_n = U_0 + nr = 3 + 5n$

Cherchons n / $U_n = 503$

$5n + 3 = 503$ d'où $n = 100$

$A = U_0 + U_1 + \ldots + U_{100} = \dfrac{(100-0+1)(U_0+U_{100})}{2}$

$= \dfrac{101.(3+503)}{2} = \dfrac{101.506}{2}$ $A = 25553$

* $B_n = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n$

On considère la suite arithmétique de premier terme $U_1 = 2$ et de raison $r = 2$

On a : $U_n = U_1 + (n . 1)\, r = 2 + 2(n-1)$

$= 2 + 2n - 2 = 2n$

$B_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \dfrac{n(2+2n)}{2} = \dfrac{2n+2n^2}{2} = n^2 + n$

Solution 8 :

Soit U_1 le montant de la première traite la dernière traite est U_{24}

On a : $U_{24} = U_1 + 23\,r$

Or $r = 100$

D'où : $U_{24} = U_1 + 23\,r = U_1 + 2300$

Or : $U_1 + U_2 + \ldots + U_{24} = 60000$

$\dfrac{24(U_1+U_{24})}{2} = 60000$

$U_1 + U_{24} = 5000$

On a : $U_1 + (U_1 + 2300) = 5000$ sig $2\,U_1 = 2700$ sig $U_1 = 1350$.

On a : $U_1 = 1350$

$U_2 = 1450$

$U_3 = 1550$

$\vdots$

$\vdots$

$U_{24} = 3650$

Solution 9 :

Soit n le nombre de rangées

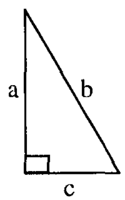
le nombre des tourneaux est $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

D'où : $\dfrac{n(n+1)}{2} = 78$ sig $n^2 + n = 156$ sig $n^2 + n - 156 = 0$

$\Delta = 625 = 25^2$

D'où : $n = 12$

Solution 10 :



On sait que $a^2 + b^2 = c^2$ (*)

a, b, c sont en progression arithmétique de raison $r = 5$

On a : $\begin{cases} b = a + r = a + 5 \\ c = a + 2r = a + 10 \end{cases}$

(*) s'ecrit : $a^2 + (a+5)^2 \mp (a+10)^2$

$a^2 + \cancel{a^2} + 10a + 25 = \cancel{a^2} + 20a + 100$

$a^2 - 10a = 75$

$a^2 - 10a - 75 = 0$

$\Delta = 100 + 300 = 400$

$a = \dfrac{10-20}{2} = -5$ impossible car $a > 0$

ou

$a = \dfrac{10+20}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$

On a : $a = 15$ $b = 20$ et $c = 25$.

Solution 11 :

① $U_1^2 - U_0^2 = 4$ et $U_0 = 1$ donc $U_1^2 = 5$

Et comme $U_1 \succ 0$ alors $U_1 = \sqrt{5}$

$U_2^2 - U_1^2 = 4$ et $U_1 = \sqrt{5}$

$U_2^2 - 5 = 4$ donc $U_2^2 = 9$ et comme $U_2 > 0$ Alors $U_2 = 3$

② $U_2 - U_1 = 3 - \sqrt{5}$ on a : $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$

$U_1 - U_0 = \sqrt{5} - 1$

(U_n) n'est pas une suite arithmétique

③ $V_n = U_n^2$; $V_{n+1} = U_{n+1}^2 = 4 + U_n^2$

$V_{n+1} = V_n + 4$

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$

④ a) On a : $V_n = V_0 + nr$

Or $r = 4$ et $V_0 = U_0^2 = 1^2 = 1$

D'où : $V_n = 1 + 4n$

b) On a : $U_n^2 = V_n = 1 + 4n$

D'où : $U_n = \sqrt{1+4n}$ car $U_n \geq 0$

⑤ $1{,}5 < U_n < 17{,}2$

$\Updownarrow$

$1{,}5 < \sqrt{1+4n} < (17{,}2)^2$

$2{,}25 < 1 + 4n < 295{,}84$

$1{,}25 < 4n < 294{,}84$

$\dfrac{1{,}25}{4} < n < \dfrac{294{,}84}{4} = 73{,}71$

Le plus grand entier n est 73 .

Solution 12 :

- $\dfrac{1}{\sqrt{U_0} + \sqrt{U_1}} = \dfrac{\sqrt{U_0} - \sqrt{U_1}}{U_0 - U_1} = \dfrac{\sqrt{U_0} - \sqrt{U_1}}{-r}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{U_1} + \sqrt{U_2}} = \dfrac{\sqrt{U_1} - \sqrt{U_2}}{U_1 - U_2} = \dfrac{\sqrt{U_1} - \sqrt{U_2}}{-r}$

$\vdots$

- $\dfrac{1}{\sqrt{U_{100}} + \sqrt{U_{101}}} = \dfrac{\sqrt{U_{100}} - \sqrt{U_{101}}}{U_{100} - U_{101}} = \dfrac{\sqrt{U_{100}} - \sqrt{U_{101}}}{-r}$

D'où : $\frac{1}{\sqrt{U_0}+\sqrt{U_1}}+\frac{1}{\sqrt{U_1}+\sqrt{U_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{U_{100}}+\sqrt{U_{101}}}$

$=\frac{\left(\sqrt{U_0}+\sqrt{U_1}+\ldots+\sqrt{U_{100}}\right)-\left(\sqrt{U_1}+\ldots+\sqrt{U_{101}}\right)}{-r}$

$=\frac{\sqrt{U_0}-\sqrt{U_{101}}}{-r}=\frac{\sqrt{U_{101}}-\sqrt{U_0}}{r}$.

Solution 13 :

① $U_1+U_2+\ldots+U_n=\frac{n(U_1+U_n)}{2}$ sig $187=\frac{n(-3+37)}{2}$ sig $n=11$

② a) On a : $U_n - U_1 = (n-1)\,r$ sig $37-(-3)=10 \, . \, r$ sig $r=4$
b) $U_{301} = U_1 + 300\,r = -3+1200 = 1197$

Solution 14 :

On note n : le nombre de mendiants :

- Le nombre de pièces qu' il a donné aux mendiants est :

  $S = 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

- Traditions la phrase : « si j'avais donné autant de pièces à chacun d'entre eux , cela aurait été plus équitable et chaque mendiant aurait reçu 8 pièces signifie que $S = 8\,n$

  On a : $\frac{n(n+1)}{2}=8n$ signifie : $n = 15$

  Le nombre de mendiants est $n = 15$

Solution 15 :

① $A_1 = 1^2 = 1$; $A_2 = 2^2 = 4$; $A_2 - A_1 = 4-1 = 3$

② $A_n = n^2$; $A_{n+1} = (n+1)^2$

a) $U_n = A_{n+1} - A_n = (n+1)^2 - n^2 = (n^2+2n+1) - n^2 = 2n+1$

b) $\begin{cases} U_{n+1} = 2(n+1)+1 = 2n+3 \\ U_n = 2n+1 \end{cases}$

$U_{n+1} - U_n = (2n+3)-(2n+1) = 2n+3-2n-1 = 3-1 = 2$
(U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

SUITE GÉOMÉTRIQUE

Résultats à retenir :

- On dit que (V_n) est une suite géométrique de raison q si :

$$V_{n+1} = q.V_n \text{ où q réel fixe (q : raison)} .$$

Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme V_0 et de raison $q \neq 0$

On a : $V_n = V_0\,q^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$V_n = V_p\,q^{n-p}$, pour tout entiers n et p .

En particulier $V_n = V_1\,q^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ***Somme de n termes consécutifs :***

⇨ La somme S de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) est $S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$, où a est le premier terme de cette somme .

$S = \text{le premier terme de la somme} \times \frac{1-(\text{la raison})^{\text{Le nombre de termes}}}{1-\text{la raison}}$.

Si $q = 1$ alors $S = na$.

⇨ $1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, où q est un réel différent de 1 et n est un entier naturel .

Si $q = 1$, on a $1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = n+1$.

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 :

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q = 2$

① Calculer les cinq premiers termes de cette suite

② a) Montrer que : $U_n^2 = U_{2n}$

b) Montrer que pour tout n , m $\in \mathbb{N}$

On a : $U_n \times U_m = U_{n+m}$

Exercice 2 : Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et tel que : $U_1 = 2$ et $U_3 = \frac{1}{2}$

① Calculer q

② a) Déterminer alors U_0

b) Exprimer U_n en fonction de n

Exercice 3 :

(U_n) une suite géométrique de raison $q = 4$ et tel que $U_2 = 8$

① Calculer U_n en fonction de n .

② En déduire U_0

③ Trouver n $\in \mathbb{N}$ tel que $U_n = 128$

Exercice 4 :

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 , tel que :

$$\begin{cases} U_0 + U_1 = \frac{9}{2} \\ U_0 \times U_1 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{et } U_0 > U_1$$

① a) Calculer U_0 et U_1

b) En déduire la raison q de cette suite .

② Déterminer le cinquième terme de cette suite .

③ Exprimer U_n en fonction de n .

Exercice 5 :

On considère la suite géométrique de premier terme $U_0 = 24$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

① Calculer le quatrième terme de cette suite

② Calculer la somme des cinq premier termes

③ On pose $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

Exprimer S_n en fonction de n

Exercice 6 :

① Résoudre dans R : $3x^2 - 8x + 4 = 0$ (*)

② (Un) une suite géométrique telle que U_3 et U_4 sont les solutions de (*) avec $U_3 > U_4$

a) Calculer la raison de (U_n)

b) Calculer U_0

c) Exprimer U_n en fonction de n

③ $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n

Exercice 7 : Soit (U_n) une suite géométrique à termes positifs et dont le premier terme est U_0 .

① Déterminer U_0 , U_1 et U_2 sachant que

* Leur somme est égale à 13
* La somme de leurs inverses est égale à $\frac{13}{9}$
* $U_0 < U_1 < U_2$

② Calculer $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ en fonction de n .

Exercice 8 :

Soit Un une suite géométrique telle que : $U_2 = -1$ et $U_3 - U_1 = -\frac{8}{3}$

① Montrer que U_1 et U_3 sont inverses l'un de l'autre .

② a) Déterminer la raison q de la suite (U_n) sachant qu'elle est négative

b) Préciser les valeurs de U_0 , U_1

③ a) Donner l'expérience de Un en fonction de n

b) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ en fonction de n

Exercice 9 :

Soit trois nombres a , b, c distincts deux à deux tel que :

(1) * a ,b , c forment une suite géométrique
(2) * a , 2b , 3c forment une suite arithmétique
(3) * a + c = 10

① Traduire en équations les deux données (1) est (2)

② Trouver a , b et c

Exercice 10 :

Déterminer les sommes

$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{100}$

$T = 4 + 4^3 + 4^5 + \dots + 4^{301}$

$W_n = (1 + \frac{1}{2}) + (2 + \frac{1}{2^2}) + (3 + \frac{1}{2^3}) + \dots + (n + \frac{1}{2^n})$

Exercice 11 :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$$

① Calculer U_1 , U_2

② Vérifier que (Un) est une suite non arithmétique et non géométrique.

③ On pèse $V_n = U_n - 2$

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de U_n
b) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .

④ Calculer V_n puis U_n en fonction de n

Exercice 12 :

On suppose que : $U_0 = 10^D$. le prix du kilo de viande au premier janvier 2005 . On désigne par U_n son prix, n années plus tard .

En attendant que l'accroissement annuel de ce prix soit constant et égale à 12% .

① Calculer U_1 , U_2

② a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n
b) Reconnaître la nature de U_n

③ Exprimer U_n en fonction de n .

SOLUTIONS

Solution 1 :

① $U_n = U_0 \times q^n = 1 \times 2^n = 2^n$

$U_0 = 1$, $U_1 = 2$, $U_2 = 4$, $U_3 = 8$, $U_4 = 16$

② a) $U_n^2 = (2^n)^2 = 2^{2n}$; $U_{2n} = 2^{2n}$ d'où : $U_n^2 = U_{2n}$

b) $U_n \times U_m = 2^n \times 2^m = 2^{n+m} = U_{n+m}$

Solution 2 :

① On a : $U_3 = q^2 U_1$ sig $\frac{1}{2} = q^2 \times 2$ *d'où :* $q^2 = \frac{1}{4}$

et comme $q > 0$ *alors* $q = \frac{1}{2}$

② a) $U_1 = q\, U_0$ sig $2 = \frac{1}{2}U_0$ *d'ou* $U_0 = 4$

b) $U_n = U_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solution 3 :

① $U_n = U_2 \times q^{n-2} = 8 \times 4^{n-2} = 2^3.(2^2)^{n-2}$ sig $U_n = 2^3 \times 2^{2n-4}$ sig $U_n = 2^{2n-1}$

② $U_0 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

③ n ? $U_n = 128$ sig $2^{2n-1} = 128 = 2^7$ sig $2n - 1 = 7$ d'où : n = 4

Solution 4 :

① a) $U_0 = \frac{9}{2} - U_1$

$U_0 \times U_1 = \frac{9}{2}$ sig $\left(\frac{9}{2} - U_1\right) \times U_1 = \frac{9}{2}$

$\frac{9}{2}U_1 - U_1^2 = \frac{9}{2}$ sig $U_1^2 - \frac{9}{2}U_1 + \frac{9}{2} = 0$

$\Delta = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 4\times\frac{9}{2} = \frac{81}{4} - \frac{36}{2} = \frac{81-72}{4} = \frac{9}{4}$

$U_1 = \frac{\frac{9}{2}-\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2}$ ou $U_1 = \frac{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 3$

si $U_1 = \frac{3}{2}$ alors $U_0 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$

si $U_1 = 3$ alors $U_0 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$: impossible car : $U_0 \succ U_1$

Conclusion : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_1 = 3$

b) $q = \frac{U_1}{U_0} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 3\times\frac{2}{3} = 2$

② $U_4 = U_0 \times q^4 = \frac{3}{2}\times(2)^4 = 24$

$U_n = U_0 \times q^n = \frac{3}{2}\times(2)^n$

Solution

① $U_3 = U_0 \times q^3 = 24\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3$

② $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = U_0 \times \frac{1-q^5}{1-q} = 24 . \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}$

$= 48\left(1 - \frac{1}{32}\right) = \frac{93}{2}$

③ $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = U_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 24 . \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

$S_n = 48\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Solution 6 :

① $\Delta = 64 - 4\times 3\times 4 = 64 - 48 = 16$

$x' = \frac{8-4}{2\times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $x'' = \frac{8+4}{6} = 2$

② a) On a : $U_3 = 2$, $U_4 = \frac{2}{3}$ $q = \frac{U_4}{U_3} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

b) $U_3 = q^3 U_0$ d'où : $U_0 = \frac{U_3}{q^3} = \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}$ $\boxed{U_0 = 54}$

c) $U_n = U_0 \times q^n = 54.\left(\frac{1}{3}\right)^n$

③ $S_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 54.\frac{\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{\frac{2}{3}}$ soit $S_n = 81\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

Solution 7 :

①

$\begin{cases} U_0 + U_1 + U_2 = 13 \\ \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} = \frac{13}{9} \end{cases}$

$U_0 \times U_2 = U_1^2$

(2) : $\dfrac{U_2+U_0}{U_0U_2}+\dfrac{1}{U_1}=\dfrac{13}{9}$ signifie

$\dfrac{13-U_1}{U_1^2}+\dfrac{1}{U_1}=\dfrac{13}{9}$ sig $\dfrac{13}{U_1^2}=\dfrac{13}{9}$ d'où : $U_1=3$

On a : $\begin{cases} U_0+U_1+U_2=13 \\ U_1=3 \end{cases}$ alors $U_0+U_2=10$

On a : $\begin{cases} U_0+U_2=10 \\ U_0U_2=U_1^2=9 \end{cases}$

$U_0+U_2=10$ sig $U_2=10-U_0$

$U_0U_2=9$ sig $U_0(10-U_0)=9$ sig

$U_0^{\ 2}-10U_0+9=0$

$U_0=1$ ou $U_0=9$

or $U_0<U_1$ d'où : $U_0=9$ est impossible

Conclusion : $U_0=1$; $U_1=3$; $U_2=9$

② $S_n=U_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ soit $S_n=\dfrac{9}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

Solution 8 :

① On a : $U_1U_3=U_2^2=1$

D'où : U_1 et U_3 sont inverses l'un de l'autre

②

a) $\begin{cases} U_3=-\dfrac{8}{3}+U_1 & (1) \\ U_1U_3=1 & (2) \end{cases}$

(2) s'écrit : $U_1(U_1-\dfrac{8}{3})=1$ sig $U_1^2-\dfrac{8}{3}U_1-1=0$

$\Delta=\dfrac{64}{9}+4=\dfrac{100}{9}$

$\sqrt{\Delta}=\dfrac{10}{3}$ $U_1=\dfrac{\frac{8}{3}-\frac{10}{3}}{2}=\dfrac{-1}{3}$ ou $U_1=3$

Si $U_1=-\dfrac{1}{3}$ alors $q=\dfrac{U_2}{U_1}=3$ impossible car $q\prec 0$

Si $U_1=3$ alors $q=\dfrac{U_2}{U_1}=-\dfrac{1}{3}$

b) $U_0=\dfrac{U_1}{q}=\dfrac{3}{\frac{-1}{3}}=-9$; $U_1=3$ et $U_2=-1$

③ a) $U_n=U_0\times q^n=-9\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

b) $S_n=U_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=-9\left[\dfrac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{4}{3}}\right]$

$S_n=-\dfrac{27}{4}\left[1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n+1}\right]$

Solution 9 :

① (1) : $ac=b^2$ (2) : $2b=\dfrac{a+3c}{2}$

② On a : (3) : $a+c=10 \Rightarrow c=10-a$

(2) devient : $2b=\dfrac{a+3(10-a)}{2}$ sig $4b=30-2a$ sig $b=\dfrac{15-a}{2}$

(1) s'écrit : $a(10-a) = \left(\dfrac{15-a}{2}\right)^2$

$4(10a - a^2) = 225 - 30a + a^2$ sig $a^2 - 14a + 45 = 0$

$\Delta = 196 - 180 = 16$ d'où : $a = 5$ ou $a = 9$

Si $a = 5$ alors $b = 5$ et $c = 5$ ce qui est impossible car par hypothése a,b ,c sont distincts deux à deux .

Si $a = 9$ alors $b = 3$ et $c = 1$

Conclusion : $a = 9$, $b = 3$ et $c = 1$

Solution 10 :

On considère (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q = 2$

On a : $U_n = U_0 \times q^n = 2^n$

$$S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{100} = U_0\left(\frac{1-q^{101}}{1-q}\right)$$

$S = 2^{101} - 1$

$T = 4 + 4^3 + 4^5 + \ldots + 4^{301}$

On considère la suite géométrique (V_n) de premier terme $V_0 = 4$ et de raison $q = 4^2$

On a : $V_n = V_0 \times q^n = 4 \times (4^2)^n = 4^{2n+1}$

$$T = V_0 + V_1 + \ldots + V_{150} = V_0\left(\frac{1-q^{151}}{1-q}\right) = 4\left(\frac{1-\left(4^2\right)^{151}}{1-4^2}\right)$$

$$\boxed{T = \frac{-4\left(1-4^{302}\right)}{15}}$$

$$W_n = (1+2+3+\ldots+n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}$$

Solution 11 :

① $U_1 = \dfrac{1}{2}U_0 + 1 = \dfrac{3}{2}$; $U_2 = \dfrac{1}{2}U_1 + 1 = \dfrac{7}{4}$

② $U_1 - U_0 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$; $U_2 - U_1 = \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{4}$

$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ donc (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

$\dfrac{U_1}{U_0} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$ donc (U_n) n'est pas une suite géométrique

③ a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \left(\dfrac{1}{2}U_n + 1\right) - 2 = \dfrac{1}{2}U_n - 1$

b) On a : $V_n = U_n - 2$ d'où : $U_n = V_n + 2$

et par suite $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}(V_n + 2) - 1$ soit $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n$

④ $V_n = V_0 \times q^n$ $\begin{cases} V_0 = U_0 - 2 = -1 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ d'où : $V_n = (-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$U_n = V_n + 2 = (-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2$

Solution 12 :

① $U_1 = U_0 + \dfrac{12}{100}U_0 = \dfrac{112}{100}U_0 = 11200$

$U_2 = U_1 + \dfrac{12}{100}U_1 = \dfrac{112}{100} \times U_1 = (112^2) = 12544$

② a) $U_{n+1} = U_n + \dfrac{12}{100}U_n = \dfrac{112}{100}U_n$

b) U_{n+1} s'écrit sous la forme $q\,U_n$ d'où (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{112}{100}$.

③ $U_n = U_0 \, . \, q^n = 10.000\left(\dfrac{112}{100}\right)^n$.

GÉNÉRALITÉ SUR LES FONCTIONS

Résultats à retenir :

○ ***Ensemble de définition d'une fonction :***

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. L'ensemble de définition de f note D_f est l'ensemble des réels x tel que f(x) existe .

○ ***Courbe représentative d'une fonction :***

Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ on appelle représentation graphique de f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points M (x, f(x)) pour $x \in E$.

○ ***Maximum et minimum d'une fonction :***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$;
la fonction f admet un minimum en a sur I si pour tout $x \in I$,
on a $f(x) \geq f(a)$ le réel $m = f(a)$ est le minimum de f sur I .
La fonction f admet un maximum en a sur I si pour tout $x \in I$, on a
$f(x) \leq f(a)$ le réel $M = f(a)$ est appelé le maximum de f sur I

○ ***Sens de variation d'une fonction :***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ,
La fonction f est croissante sur I si pour tout a et b de I tels que $a \leq b$ on a $f(a) \leq f(b)$
La fonction f est décroissante sur I si pour tout a et b de I tel que $a \leq b$ on a : $f(a) \geq f(b)$.

○ ***parité d'une fonction :***

Soit f une fonction définie sur D_f où D_f est le domaine de définition de f .

⇨ On dit que f est paire si pour tout $x \in D_f$ on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$, et dans ce cas la courbe de f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées .

⇨ On dit que f est impaire si par tout $x \in D_f$ on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$, et dans ce cas , la courbe de f est symétrie par rapport à l'origine O du repère .

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble de définition de f dans chacun des cas suivants :

① $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$; ② $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

③ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$; ④ $f(x) = \dfrac{-3x^2+x+1}{4-x^2}$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{2x+3}$; ⑥ $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2+3x-10}$

⑦ $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^4-x}$; ⑧ $f(x) = \dfrac{3x+4}{|x+1|}$

⑨ $f(x) = \dfrac{|2x+3|-2}{|x-3|-1}$

Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble de définition de f dans chacun des cas suivants :

① $f(x) = \sqrt{x-1} + 2x + 3$; ② $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

③ $f(x) = \sqrt{9 - x^2} - \frac{1}{x}$; ④ $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

⑤ $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$; ⑥ $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{9-4x^2}}$

Exercice 3 :

Déterminer l'ensemble de définition de f dans chacun des cas suivants :

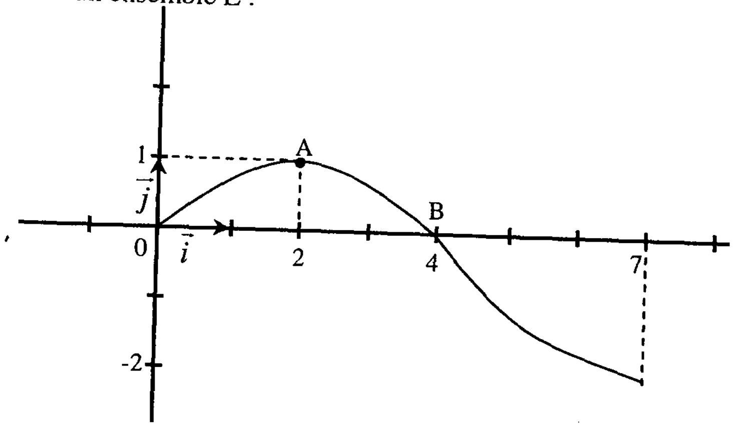
① $f(x) = \frac{E(x)+x}{x-1}$; ② $f(x) = \frac{1}{E(x)}$

③ $f(x) = \frac{2x-1}{E(x)-2}$; ④ $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{|x|-4}}$

Courbe représentative d'une fonction

Exercice 4 :

Dans le graphique ci –dessous , la courbe représentative d'une fonction f définie sur un ensemble E .

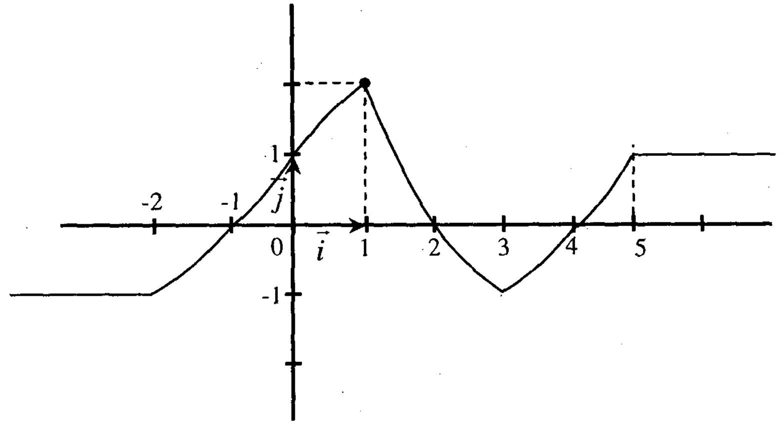


①
a) Déterminer l'ensemble E .
b) Déterminer les coordonnées des points A et B ,

② Déterminer les antécédents éventuelles de 0 , (-2) et 4 .

Exercice 5 :

Soit le graphique suivant d'une fonction f définie sur E .



① Déterminer l'ensemble E .

② Déterminer f (x) sur chacun des intervalles $]-\infty, -2]$ et $[5, +\infty[$.

③ Déterminer les antécédents éventuelles de -1 , 0 ; et 2 .

④ Résoudre dans $\Re$ graphiquement , chacun des inéquations suivantes :

a) $f(x) \leq 0$ b) $f(x) > 0$ c) $f(x) \leq -2$

Maximum et minimum d'une fonction :

Exercice 6 :

Déterminer le minimum et le m aximum de la fonction sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

① $f(x) = 2x + 3$, $I = [0, 3]$

② $f(x) = -2x^2 + 1$, $I = [-1, 1]$

③ $f(x) = \sqrt{x+3}$, $I = [-2, 1]$

Exercice 7 :

Soit f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow x^2 + 2x$

① Donner l'ensemble de définition de f

② Calculer f(-1)

③ Montrer que pour tout x , $f(x) = (x+1)^2 - 1$.

④ En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :

Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$

① Donner l'ensemble de définition de f

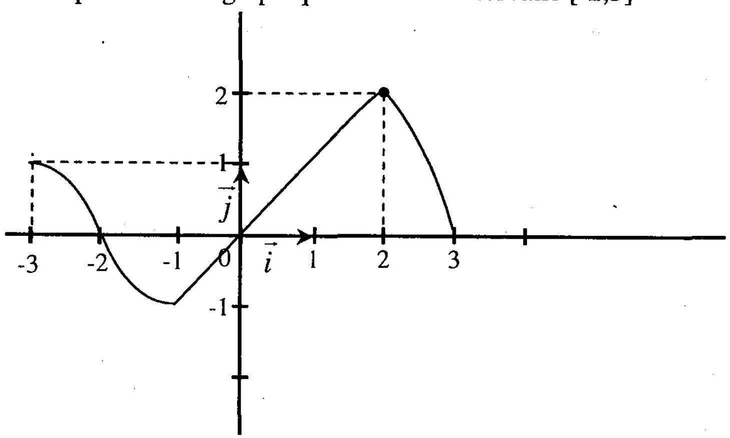
② Calculer f(0) et f(-2)

③ Montrer que pour tout $x \in D_f$ on a $-\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

④ En déduire le minimum et le maximum de f sur D_f .

Exercice 9 :

On donne la représentation graphique de f sur l'intervalle [-2,3]



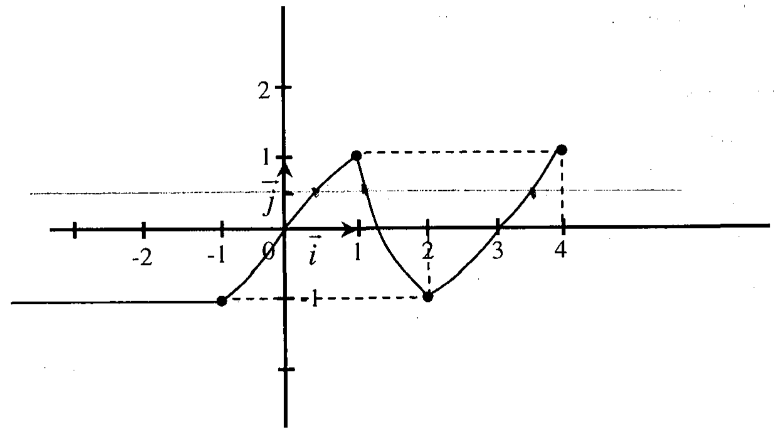
① Déterminer le signe de f (x) suivant les réels x de l'intervalle [-3 , 3] .

② Donner la valeur maximale de f pour [-2 , 3]

④ En déduire un encadrement de f(x) pour tout $x \in [-3 , 3]$.

Exercice 10 :

Dans un repère (o , $\vec{i}, \vec{j}$) on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur un ensemble E .



① Déterminer l'ensemble E .

② Donner le maximum et le minimum de f sur E

③ Soit Δ la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$

Déterminer , graphiquement le nombre des points d'intersection de la courbe de f et Δ .

④ Résoudre graphiquement l'équation f(x) = -1

⑤ Soit m un réel , différent de (-1)

Discuter suivant m , le nombre des points d'intersection de la courbe de f et la droite D_m d'équation y = m .

Sens de variation d'une fonction

Exercice 11 :

Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions :

① $f(x) = 2x + 3$; ② $f(x) = -\dfrac{x}{2} - 3$

③ $f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x+3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Exercice 12 :

Soit $f(x) = \sqrt{3-x}$

① Donner l'ensemble de définition de f

② Donner le sens de variation de f

③ En déduire un encadrement de f(x) pour $x \in [-1 +1]$

Exercice 13 :

Soit $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

① Donner l'ensemble de définition de f

② Soit a et b deux réels

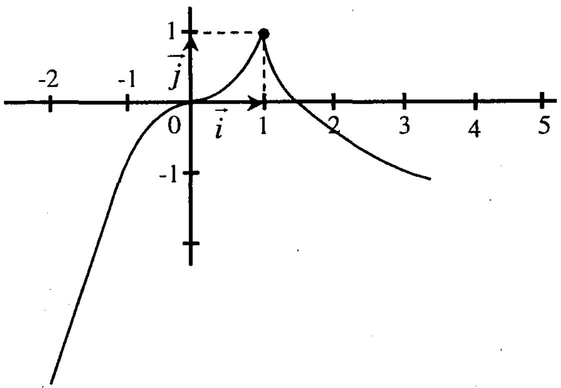
Montrer que : $f(b) - f(a) = \dfrac{(b-a).(4-ab)}{(b^2+4)(a^2+4)}$

③ Déterminer alors le sens de variations de f sur chacun des intervalles $[0,2]$ et $[2,+\infty[$

④ En déduire la valeur maximale de f sur $\Re^+$.

Exercice 14 :

Dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on donne la courbe représentation de f sur $\mathbb{R}$.

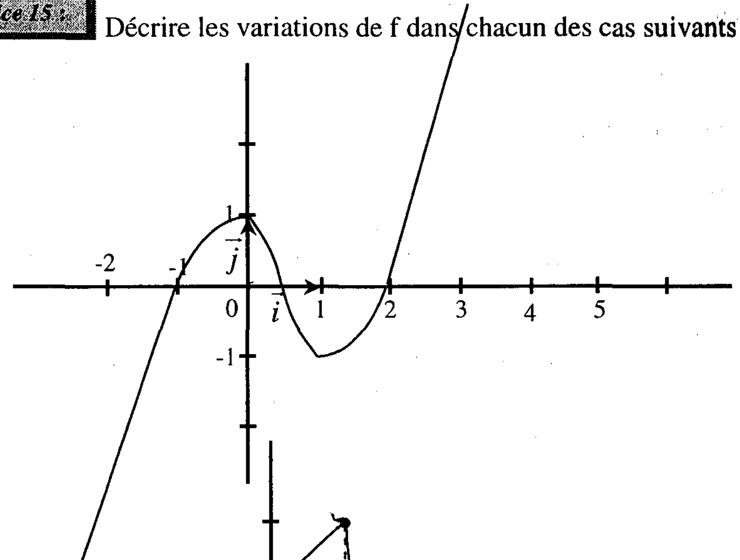


① Préciser l'ensemble de définition de f

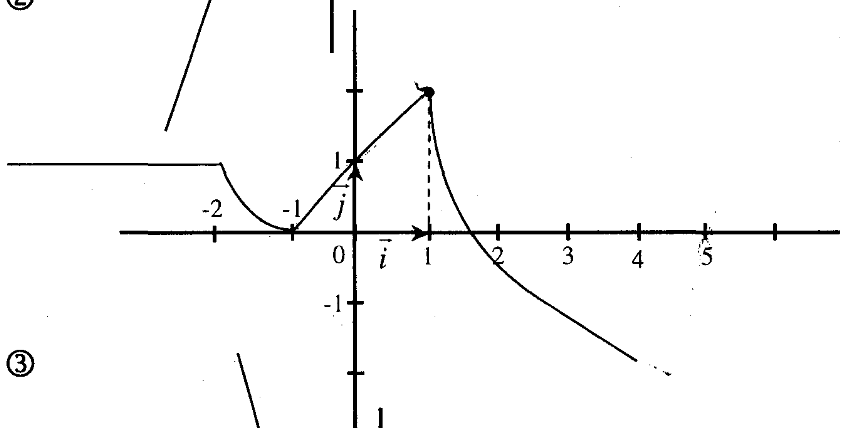
② Décrire les variations de f

Exercice 15 : Décrire les variations de f dans chacun des cas suivants :

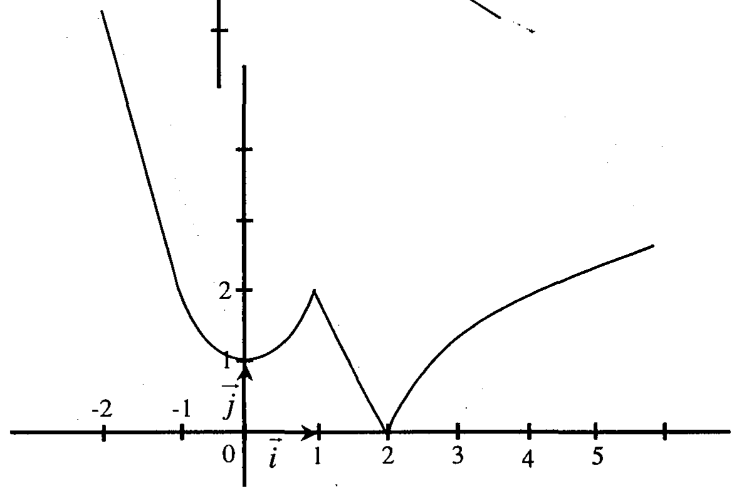
①



②



③



Exercice 16 :

Soit f une fonction croissante sur [0 , 2] et décroissante sur [2 ; 5] .

① Comparer f(0) et $f(\frac{3}{2})$

② Comparer f (3) et f(4)

③ Sachant que f(0) = 1 ; f(2) = 2 et f(5) = -3
Donner un encadreur de f(x) sur [0 ;5]

Exercice 17 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4 cm .
Soit M et N deux points du segment [AB] On pose AM = NB = x
P un point de de [BC] et Q un point de [AC] tel que MNPQ soit un rectangle

① a) Calculer MN en fonction de x.

b) Montrer que $MQ = \sqrt{3}.x$

② Soit f (x) l'aire du rectangle MNPQ .

a) Montrer que tout $x \in \left]0,4\right[$

On a $f(x) = -2\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{3}x$

b) Déterminer le sens de variation de f sur [0,1] et [1,4]

c) En déduire le réel x pour que l'aire du rectangle MNQP sont maximal

Parité

Exercice 18 :

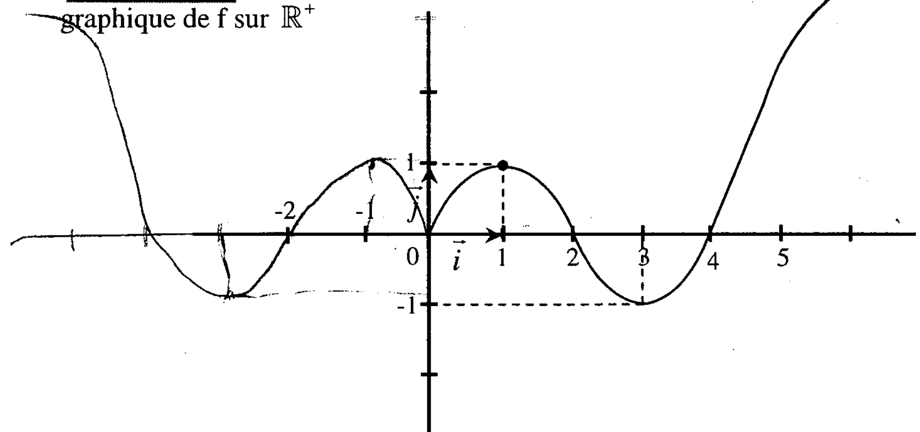
Etudier la partie de chacune des fonctions :

① $f(x) = x^3 + x$; ② $f(x) = |x| + x^2 + 4$

③ $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$; ④ $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

⑤ $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$

Exercice 19 : Soit f une fonction paire . On donne sa représentation graphique de f sur $\mathbb{R}^+$

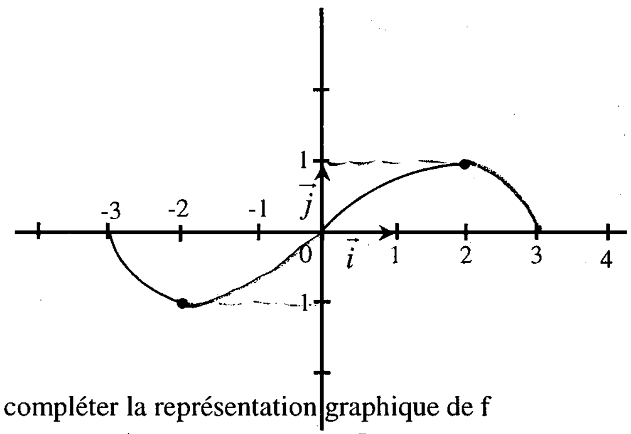


① Copier et compléter la courbe de f

② Résoudre graphiquement l'équation : f(x) = 0

Exercice 20 :

Soit f une fonction impaire définie sur [-3,3] On donne une partie de sa représentation graphique dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$



① Copier et compléter la représentation graphique de f

② Déterminer le signe de f (x) pour tout x ∈ [-3,3]

③ Décrire les sens de variation de f sur [-3,3]

④ Déterminer la valeur minimale et maximale de f .

SOLUTIONS

Solution 1 :

① $D_f = \mathbb{R}$

② f (x) n'existe que lorsque $x - 1 \neq 0$ signifie que $x \neq 1$
donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

③ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$

④ f(x) n'existe que lorsque $x-1 \neq 0$ et $2x + 3 \neq 0$ signifie que $x \neq 1$ et $x \neq -\dfrac{3}{2}$ donc $D_6 = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}, 1\right\}$

⑤ f(x) n'existe que lorsque $4 - x^2 \neq 0$
or $4 - x^2 = 0$ signifie $(2 - x) . (2 + x) = 0$ signifie que $x = 2$ ou $x = -2$
donc $D_6 = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

⑥ f(x) n'existe que lorsque $x^2 + 3x - 10 \neq 0$.
$\Delta = 9 + 40 = 49 = 7^2$ donc $\sqrt{\Delta} = 7$ d'où : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$

⑦Il faut que $x^4 - x \neq 0$. $x^4 - x = 0$ signifie que $x(x^3 - 1) = 0$ signifie que $x = 0$ ou $x^3 = 1$ signifie que $x = 0$ ou $x = 1$
D'où : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

⑧ Il faut que $x + 1 \neq 0$ signifie que $x \neq -1$ d'où : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

⑨ Il faut que $|x - 3| - 1 \neq 0$. signifie que $x - 3 \neq 1$ et $x - 3 \neq -1$
signifie que $x \neq 4$ et $x \neq 2$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,4\}$.

Solution 2 :

① Il faut que $x - 1 \geq 0$ signifie que $x \geq 1$ d'où : $D_f =]1, +\infty[$

② Il faut que $x^2 - 4 \geq 0$. Faisons un tableau de signe de $x^2 - 4$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où : D_f : $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

③ Il faut que $9 - x^2 \geq 0$ et $x \neq 0$.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$9 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où : $D_f = [-3,3] - \{0\}$

④ Il faut que $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$ et $x + 1 \neq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

D'où $D_f =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

⑤ Il faut que $\dfrac{x}{1 - x^2} \geq 0$ et $1 - x^2 \neq 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$+$		$-$	
$\dfrac{x}{1-x^2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

D'où : $D_f =]-\infty, -1[\cup [0, 1[$

⑥ le tableau de signe de $9 - 4x^2$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$9 - 4x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Et comme $x \in \mathbb{R}^+$ donc $D_f = \left[0, \dfrac{3}{2}\right[$.

Solution 3 :

① Il faut que $x-1 \neq 0$ signifie que $x \neq 1$ d'où : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

② Il faut que $E(x) \neq 0$. Or $E(x) = 0$ signifie que $x \in [0,1[$

d'où $D_f = \mathbb{R} \setminus [0,1[$

③ Il faut que $E(x) \neq 2$ Or $E(x) = 2$ signifie que $x \in [2,3[$

d'où : $D_f = \mathbb{R} \setminus [2,3[$.

④ Il faut que $|x| - 4 \succ 0$ signifie que $|x| > 4$ sig $x > 2$ ou $x < -2$

D'où : $D_f =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

Solution 4 :

①a) $E = [0,7]$
b) $A(2,1)$; $B(4,0)$

② $f(0) = 0$; $f(2) = 1$; $f(7) = -2$

③ * Soit x l'antécédent de 0 par f
On a : $f(x) = 0$ sig x est l'abscisse du point d'intersection de C_f et $(x'x)$
d'où : $x = 0$ ou $x = 4$.
* Soit x l'antécédent de (-2) par f
On a ; $f(x) = -2$ sig x est l'abscisse du point d'intersection de C_f et la droite $\Delta : y = -2$ d'où : $x = 7$
* Soit x l'antécédent de 4 par f
On a : $f(x) = 4$ sig x est l'abscisse du point d'intersection de C_f et la droite $\Delta : y = 4$ x n'existe pas .

Solution 5 :

① $E = \mathbb{R}$

② pour $x \in]-\infty, -2]$ on a : $f(x) = -1$ pour $x \in [5, +\infty[$ on a : $f(x) = 1$

③ *Soit x l'antécédent de -1 par f . On a : $f(x) = -1$ sig
x est l'abscisse du point d'intersection de C_f et $\Delta : y = -1$
on a : $x \in]-\infty,-2]$ ou $x = 3$
* Soit x l'antécédent de 0 par f On a : $f(x) = 0$ sig
x est l'abscisse du point d'intersection de C_f est $\Delta : y = 0$
On a : $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = 4$

* Soit x l'antécédent de 2 par f
On a ; $f(x) = 2$ sig
x est l'abscisse du point d'intersection de C_f et $\Delta : y = 2$
On a : $x = 1$

④ a) $f(x) \leq 0$ sig
$x \in]-\infty,-1] \cup [2,4]$
b) $f(x) \succ 0$ sig $x \in]-1,2[\cup]4, +\infty[$
c) $f(x) \leq -2$ est impossible

Solution 6 :

① $x \in I$ sig $0 \leq x \leq 3$ sig $0 \leq 2x \leq 6$ sig $3 \leq 2x + 3 \leq 9$ sig $3 \leq f(x) \leq 9$ sig
On a : $f(0) = 3$ et $f(3) = 9$
On a : Pour tout $x \in [0,3]$ on a : $f(0) \leq f(x) \leq f(3)$
- le minimum de f est $m = f(0) = 3$
- le maximum de f est $M = f(3) = 9$

② $x \in I = [-1,1]$ sig $-1 \leq x \leq 1$ sig $0 \leq x^2 \leq 1$ sig
$-2 \leq -2x^2 \leq 0$ sig $-1 \leq -2x^2+1 \leq 1$ sig $f(1) \leq f(x) \leq f(0)$
$f(-1) = -1$ est le minium de f $f(0) = 1$ est le maximum de f

③ $x \in [-2, 1]$ sig $-2 \leq x \leq 1$ sig $1 \leq x+3 \leq 4$ sig
$f(-2) = 1 \leq \sqrt{x+3} \leq 2 = f(1)$
1 = le minimum de f et 2 = f(1) est le maximum de f

Solution 7 :

① $D_f = \mathbb{R}$

② $f(-1) = 1 + (-2) = -1$

③ $f(x) = x^2 + 2x = (x^2+2x+1) - 1 = (x+1)^2 - 1$

④ On a : $(x+1)^2 \geq 0$ alors $f(x) \geq -1$ donc $f(x) \geq f(-1) = -1$
d'où : -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

Solution 8 :

① On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 2 \neq 0$ car $\Delta = -4 < 0$ d'où : $D_f = \mathbb{R}$

② $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(-2) = -\frac{1}{2}$

③ Montrons d'abord que $f(x) \le \frac{1}{2}$.

On a $f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x+1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2}{2(x^2+2x+2)}$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$; $-x^2 \le 0$ et $2(x^2+2x+2) \succ 0$ (car $\Delta \prec 0$)

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) - \frac{1}{2} \le 0$ d'où : $f(x) \le \frac{1}{2}$

Montrons de même que $f(x) \ge -\frac{1}{2}$

On a $f(x) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2+4x+4}{2(x^2+2x+2)} = \frac{(x+2)^2}{2(x^2+2x+2)} \ge 0$

Donc $f(x) \ge -\frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-\frac{1}{2} \le f(x) \le -\frac{1}{2}$

④ D'après la question 3) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$; $-\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2}$ donc et

comme $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(-2) = -\frac{1}{2}$ donc $-\frac{1}{2}$ est un maximum de f

Solution 9

① D'après le graphique ; on a :
Pour tout $x \in [-3,-2]$ et pour tout $x \in [0,3]$, $f(x) \ge 0$
et pour tout $x \in [-2,0]$, $f(x) \le 0$ d'un tableau de signe de f(x) est

x	-3		-2		0		3
f(x)		+	0	−	0	+	0

② D'après le graphique : la valeur minimale de f es (-1) et la valeur maximale est 2 .

③ $x \in [-3,3]$; $-1 \le f(x) \le 2$.

Solution 10

① $E =]-\infty,4]$

② Le minimum de f est (-1) et le maximum est 1

③ La droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}$, coupe la courbe de f en trois points .

④ Graphiquement : $f(x) = -1$ signifie que $x \le -1$ or $x = 2$
D'où : $S_R =]-\infty,-1] \cup \{2\}$

⑤ Si $m \prec -1$ ou $m \succ 1$ alors Dm ne coupe la courbe de f en aucun point .
Si $-1 \prec m \prec 1$, alors Dm coupe la courbe de f en 3 points
Si $m = 1$, alors Dm coupe la courbe de f en 2 point .

Solution 11

① Soit a et b deux réels $a \le b$.
On a $2a \le 2b$ et $2a + 3 \le 2b + 3$ d'où : $f(a) \le f(b)$ et pour suite f est croissante sur R

② Soit a et b deux réels tels que $a \le b$.
On a $-\frac{1}{2}a \ge -\frac{1}{2}b$ et $-\frac{1}{2}a - 3 \ge -\frac{1}{2}b - 3$ donc $f(a) \ge b$ et par suite f est décroissante sur R

③ Soit a et b deux réels de $]-\infty,-1]$ tels que $a \le b$ on a $a \le b$
donc $a + 6 \le b+6$ d'où
$f(a) \le f(b)$ et par suite f est croissante sur $]-\infty,-1]$
Soit a et b deux réels de $]-1,+\infty[$ tels que $a \le b$.
On a $a \le b$ donc $-2a \ge -2b$ et $-2a + 3 \ge -2b + 3$ d'où : $f(a) \ge f(b)$
et par suite f est décroissante sur $]-1,+\infty[$
<u>Conclusion :</u> f est une croissante sur $]-\infty,-1]$ et décroissante sur $]-1,+\infty[$.

Solution 12

① Il faut que $3-x \ge 0$ équivaut à $3 \ge x$ d'où : $D_f =]-\infty,3]$

② Soit a et b deux réels de $]-\infty,3]$ tels que $a \le b$
On a $a \le b$ donc $-a \ge -b$ et $3-a \ge 3-b$
D'où : $\sqrt{3-a} \ge \sqrt{3-b}$ et par suite $f(a) \ge f(b)$ donc f est décroissante sur $]-\infty,3]$

③ Pour $x \in [-1\ ,\ 1\ ]$ on a : $-1 \le x \le 1$ et comme f est décroissante sur $]-\infty,3]$ et en particulier sur $[-1,1]$ donc $f(1) \le f(x) \le f(-1)$

or $f(1) = \sqrt{2}$ et $f(-1) = 2$

D'où : Pour tout $x \in [-1,1]$; on a $\sqrt{2} \le f(x) \le 2$

Solution 13 :

① Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 4 \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$

② $f(b) - f(a) = \dfrac{b}{b^2+4} - \dfrac{a}{a^2+4} = \dfrac{ba^2+4b-ab^2-4a}{(b^2+4)(a^2+4)}$

$= \dfrac{ab(a-b)+4(b-a)}{(b^2+4)(a^2+4)} = \dfrac{(b-a)(4-ab)}{(b^2+4)(a^2+4)}$

③ Soit a et b deux réels de [0,2] tels que $a \le b$.

On a $f(b) - f(a) = \dfrac{(b-a)(4-ab)}{(b^2+4)(a^2+4)}$

or $a \le b$ donc $b - a \ge 0$ et

$\begin{cases} 0 \le a \le 2 \\ 0 \le b \le 2 \end{cases}$ donc $0 \le ab \le 4$

Et par suite $4-ab \ge 0$ et comme $b^2 + 4 > 0$ et $a^2 + 4 > 0$ alors $f(b) - f(a) \ge 0$ donc f est croissante sur [0,2]

Soit a et b deux réels de $[2, +\infty[$ tels que $a \le b$

On a $a \le b$ donc $b-a \ge 0$ et

$\begin{cases} a \ge 2 \\ b \ge 2 \end{cases}$ donc $ab \ge 4$ d'où : $4 - ab \le 0$

Donc $\dfrac{(b-a)(4-ab)}{(b^2+4)(a^2+4)} \le 0$

Et par suite $f(b) - f(a) \le 0$ d'où $f(b) \le f(a)$ ce qui donne que f est décroissante sur $[2,+\infty[$

Solution 14 :

① $D_f = \mathbb{R}$

② Sur $]-\infty,1]$, f est croissante

Sur $[1, +\infty[$, f est décroissante

Solution 15 :

① Sur $]-\infty,0]$ f est croissante

Sur [0,1] ; f est décroissante

Sur $[1,+\infty[$ f est croissante

② Sur $]-\infty,-2]$, f est une constante .

Sur [-2,-1] , f est décroissante

Sur [-1,1] , f est croissante

Sur $[1, +\infty[$; f est une décroissante

③ Sur $]-\infty,0]$, f est décroissante

Sur [0 , 1] , f est croissante

Sur [1,2] , f est décroissante

Sur $[2, +\infty[$ f est croissante

Solution 16 :

① On a $0 < \dfrac{3}{2}$ et f est croissante sur [0,2] donc $f(0) \le f(\dfrac{3}{2})$

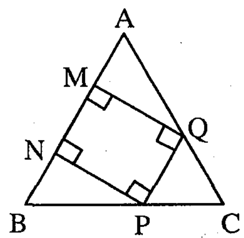
② On a $3 < 4$ et f est décroissante sur [2,5] donc $f(3) \ge f(4)$

③ On a f est croissante sur [0,2] donc pour tout $x \in [0,2]$; $f(0) \le f(x) \le f(2)$ et comme $f(0) = 1$ et $f(2) = 2$ donc $1 \le f(x) \le 2$

D'autre part on a f est décroissante sur [2 , 5] donc pour tout $x \in [2,5]$, $f(5) \le f(x) \le f(2)$ et comme $f(2) = 2$ et $f(5) = -3$ donc $-3 \le f(x) \le 2$

donc pour tout $x \in [2,5]$; $-3 \le f(x) \le 2$

Solution 17 :



① a) $MN = AB - (MA + BN)$

$= 4 - 2x$

b) Dans le triangle AMQ rectangle en M on a $\operatorname{tg} \widehat{A} = \dfrac{MQ}{AM}$

or $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$ car le triangle ABC est équilatéral donc $\sqrt{3} = \dfrac{MQ}{x}$

et par suite $MQ = \sqrt{3}x$

② a) $f(x) = MN \times MQ = (4-2x)\sqrt{3}x = -2\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{3}x$

b)

* Soit a et b deux réels de [0,1] tels que $a \le b$.

Calculons f(b) – f(a) :

$$f(b)-f(a) = -2\sqrt{3}b^2+4\sqrt{3}b+2\sqrt{3}a^2-4\sqrt{3}a$$
$$= 2\sqrt{3}[(a^2-b^2)+2(b-a)]$$
$$= 2\sqrt{3}[(a-b)(a+b)+2(b-a)]$$
$$= 2\sqrt{3}[(b-a)(-a-b)+2(b-a)]$$
$$= 2\sqrt{3}(b-a)(2-a-b)$$

Or $a \le b$ donc $b-a \ge 0$ et $\begin{cases} a \le 1 \\ b \le 1 \end{cases}$ donc $2 \ge a+b$ et $2-a-b \ge 0$

et par suite $2\sqrt{3}\ (b-a)(2-a-b) \ge 0$

donc et $f(b) - f(a) \ge 0$ ce qui donne que f est croissante sur [0,1]

* Soit a et b deux réels de [1 , 4] tels que $a \le b$

On a : $f(b) - f(a) = 2\sqrt{3}\ (b-a)(2-a-b)$

Or : $a \le b$ donc $b-a \ge 0$

Et $\begin{cases} a \ge 1 \\ b \ge 1 \end{cases}$ donc $a+b \ge 2$ d'où : $2-a-b \le 0$ et

par suite $f(b) - f(a) \le 0$ ce qui donne $f(b) \le f(a)$

et que f est décroissante sur [1,4]

c) Pour tout $x \in [0,1]$: $f(0) \le f(x) \le f(1)$ car f est croissante sur [0,1]

Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 2\sqrt{3}$ donc $0 \le f(x) \le 2\sqrt{3}$

Pur tout $x \in [1,4]$: $f(4) \le f(x) \le f(1)$ car f est décroissante sur [1,4]

Or $f(4) = -16\sqrt{3}$ donc $-16\sqrt{3} \le f(x) \le 2\sqrt{3}$

On a ainsi pour tout $x \in]0,4[$.

$-16\sqrt{3} \prec f(x) \le 2\sqrt{3}$.

Donc la valeur maximale de f sur] 0,4[est $2\sqrt{3}$

Conclusion :

L'aire du rectangle MNPQ est maximale pour $x = 2\sqrt{3}$.

Solution 18 :

$D_f = \mathbb{R}$

① Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -x^3 - x = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire .

② Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = |x| + x^2 + 4 = f(x)$

Donc f est une fonction paire .

③ $D_f = \mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|+1 \neq 0$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

et $f(-x) = \dfrac{-x}{|-x|+1} = \dfrac{-x}{|-x|+1} = -f(x)$ donc f est une fonction impaire

④

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$9-x^2$		–	0	+	0	–	

Donc $D_f = [-3,3]$ Pour tout $x \in [-3,3]$; on a $(-x) \in [-3,3]$

$f(x) = \sqrt{9-(-x)^2} = \sqrt{9-x^2} = f(x)$ donc f est une fonction impaire .

⑤ f(x) n'existe que lorsque $x^2 - 1 \neq 0$

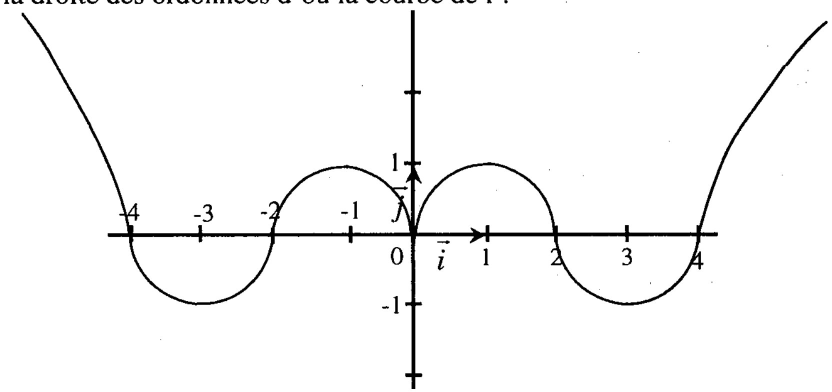
$x^2 - 1 = 0$ équivaut à $(x-1)(x+1) = 0$ équivaut à $x = 1$ ou $x = -1$

d'où : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ on a $(-x) \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

et $f(-x) = \dfrac{|x|}{x^2-1} = f(x)$ donc f est une fonction paire .

Solution 19 :

① f est paire donc sa courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite des ordonnées d'où la courbe de f :

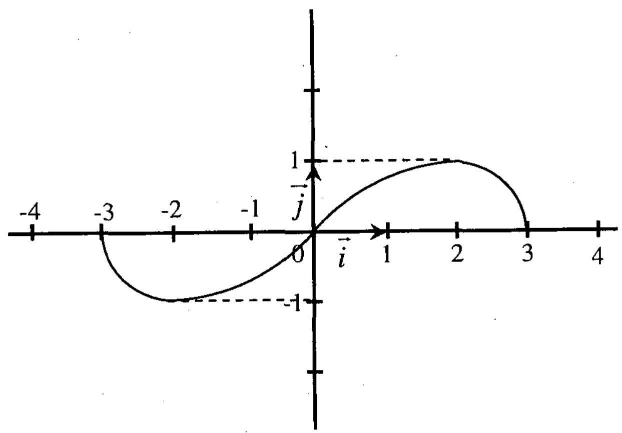


② les solutions de l'équation f(x) = 0 , sont les abscisses des points d'intersections de la courbe de f et de la droite des abscisses (y=0) or d'après le graphique la courbe de f coupe la droite des abscisses aux points d'abscisses respectives : -4 ; -2 ; 0 , 2 et 4

d'où : $S_{\mathbb{R}} = \{-4, -2; 0; 2; 4\}$

Solution 20 :

① f est une fonction impaire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère O d'où la courbe de f :



②

x	-3		0		3
f(x)		−	0	+	

③ F est décroissante sur [-3,-2] ; croissante sur [-2 , 2] et décroissante sur [2,3]

x	-3	-2	2	3
f(x)	0 ↘	-1 ↗	1 ↘	0

④ La valeur minimale de f sur [-3 ; 3] est (-1) et la valeur maximale est 1

FONCTION DE RÉFÉRENCE

Résultats à retenir :

1°/ *Domaine de définition* :

soit : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x)$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe} \}$ est le domaine de définition de f.

2°/ Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, on dit f est :

* strictement croissante sur I , si pour tout réels a et b de I / $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
* strictement décroissante sur I , si pour tout réels a et b de I / $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

3°/ *Fonction paire* :

On dit que f est une fonction paire, si :

pour tout $x \in D_f$, on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

et dans ce cas la droite $(y'y)$ est un axe de symétrie ;

il suffit alors d'étudier f sur : $D_f \cap \mathbb{R}^+$.

4°/ Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$; alors :

- la courbe représentative de $-f$ est $\mathscr{C}_1 = S_{XX'}(\mathscr{C})$.
- la courbe représentative de $f + b$ est $\mathscr{C}_2 = T_{\vec{u}}(\mathscr{C})$ .où $\vec{u} = b\vec{j}$.
- la courbe représentative de $|f|$ est : $\mathscr{C}_3 = \mathscr{C}' \cup \mathscr{C}''$; où :

  * $\mathscr{C}'$ est la partie de $\mathscr{C}$ située dans le demi plan contenant les points d'ordonnées positives.

  * $\mathscr{C}''$ le symétrique par rapport à l'axe $(x'x)$ de la partie de $\mathscr{C}$ situé dans le demi plan contenant les points d'ordonnées négatives.

5°/ a) Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$; $x\longrightarrow ax^2$; $a\neq 0$

* f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
* f est une fonction paire.
* $\mathscr{C}_f$ est une parabole d'axe $(y'y)$ et de sommet $S(0,0)$.

b) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$; $x\longrightarrow a(x+\alpha)^2$

* $\mathscr{C}_f$ est une parabole d'axe la droite d'equation $x=-\alpha$ et de sommet $S(-\alpha,0)$.

c) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$; $x\longrightarrow ax^2+b$

* $\mathscr{C}_f$ est une parabole d'axe $(y'y)$ et de sommet $S(0,b)$

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 : Soit : $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longrightarrow -2x^2$.

① Etudier et représenter graphiquement dans un repère cartésien $(0,\vec{i},\vec{j})$ la fonction f.

② Soit $a\in\Re$ et le point $A(a,2a)$.

Déterminer les valeurs de a pour que A appartienne à $\mathscr{C}_f$.

③ Soit la droite Δ d'équation $y=-4x+2$. Déterminer $\Delta\cap\mathscr{C}_f$.

④ Soit $F(0,-1/8)$ et D la droite d'équation $y=\dfrac{1}{8}$.

a) Soit M un point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse b.

Calculer en fonction de b, MF et $d(M,D)$

b) Vérifier que $MF=d(M,D)$.

Exercice 2 : Soit : $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$; $x\longrightarrow x^2+1$

① Etudier et représenter graphiquement f dans un repère cartésien $(0,\vec{i},\vec{j})/\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$ cm.

② a) Déterminer les coordonnées du point S : sommet de la parabole.

b) Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1, et B le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -1

Calculer l'aire du triangle SAB.

Exercice 3 : Soit : $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longrightarrow -x^2+4$

① Etudier et représenter graphiquement f.

② En déduire le tracé de la courbe $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longrightarrow x^2-4$

③ Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathscr{C}_f$ et $(x'x)$.

④ Soit S le sommet de la parabole $\mathscr{C}_f$.

Montrer que SAB est un triangle isocèle

Exercice 4 : Soit : $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longrightarrow (x-3)^2$

Soit $\Re(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

① Déterminer l'axe et le sommet de cette parabole.

② Etudier et représenter graphiquement f.

③ Soit $m\in\Re$ et Δ_m la droite d'équation $y=m$.

a) Déterminer graphiquement suivant les valeurs de m, le nombre des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et Δ_m.

b) Retrouver ce résultat par le calcul.

c) Dans le cas où Δ_m coupe $\mathscr{C}_f$ en deux points M' et M''.

Déterminer les coordonnées du point $I=M'*M''$ que décrit le point I lorsque m varie.

④ Soit $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longrightarrow x^2-6x+7$.

Utiliser $\mathscr{C}_f$ pour tracer $\mathscr{C}_g$ dans le même repère.

Exercice 5 : Soit : $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longrightarrow x^2+2x-3$

① Montrer que $f(x)=(x+1)^2-4$

② Etudier et représenter graphiquement f .dans un repère orthonormé.

③ En déduire le tracé de la courbe de la fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longrightarrow |f(x)|$

④ Soit $h:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & si \ x \geq 1 \\ x^2 - 1 & si \ x \leq 1 \end{cases}$$

Etudier et représenter graphiquement h dans un autre repère orthonormé.

Exercice 6:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

Soit les fonctions :

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow x^2 + x - 1$ $\quad x \longrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$.

① Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont deux paraboles dont on précisera leurs axes et leurs sommets .

② Tracer dans le même repère $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

③ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux paraboles.

④ a) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

b) Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 7 :

Soit : $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow ax^2 + bx + c$

① Déterminer les réels a, b et c pour que $\mathscr{C}_f$ passe par les points :
A(–1,0) ; B(1,3) et C(3,2). On prendra ces valeurs à la suite de l'exercice.

② Montrer que $\mathscr{C}_f$ est une parabole dont on précisera l'axe et le sommet.

Exercice 8 :

Soit : $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\quad x \longrightarrow x^2 - 2|x| + 1$

① Montrer que f est une fonction paire.
Interpréter graphiquement ce résultat.

② Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que $g(x) = (x-1)^2$

b) Etudier et représenter graphiquement g dans un autre repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le même repère.

Exercice 9 :

Soit : $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow ax^2 + b$

① Déterminer les réels a, b et c pour que $\mathscr{C}_f$ passe par les **deux points :**
A(0,–3) et B(1,–1).

② Pour les valeurs de a et b trouvées en ① tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

③ Sur Δ la droite de coefficient directeur –2 et passant par le point C(0,1).

a) Déterminer une équation cartésienne de Δ .

b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et Δ se coupent en deux points E et F dont on précisera les coordonnées . Calculer EF.

④ Résoudre graphiquement l'inéquation : $2x^2 + 2x - 4 \geq 0$.

⑤ Soit m un paramètre réel non nul .

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \frac{1}{m}$.

Exercice 10 :

L'unité de longueur est le cm.
Un rectangle ABCD a pour cotés : AB = 5 et BC = 3. On place respectivement sur les segments : [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA] les points I, J, K, L tels que : AI = BJ = CK = DL = x .

① Calculer en fonction de x , l'aire du quadrilatère IJKL , noté $f(x)$.

② Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (P) dans un plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

③ Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimale ?
Quel est ce minimum ?

④ Soit m un nombre réel . Résoudre graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m - 1$.

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 11 : Soit : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow x^2 - 2x$

① Montrer que $f(x) = (x-1)^2 + a$, où a est un réel à préciser.

② Donner alors l'axe et le sommet de cette parabole.

③ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et l'axe $(x'x)$

④ a) Etudier et représenter la fonction f.

b) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow x^2 - 2x + 2$

Utiliser $\mathscr{C}_f$ pour tracer $\mathscr{C}_g$ dans le même repère.

Exercice 12 : Soit : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow (|x| - 1)^2 + 2$

① Montrer que f est une fonction paire.

② a) Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Montrer que $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

b) Tracer $\mathscr{C}_g$. En déduire $\mathscr{C}_f$.

Exercice 13 : Soit : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

① Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$.

② Etudier et représenter la fonction f.

③ Soit Δ la droite d'équation $y = 3 - 2x$. Etudier $\mathscr{C}_f \cap \Delta$.

Exercice 14 : Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = -2x^2 + 10x - 9$.

① Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont des paraboles.

② Etudier et représenter chacune des fonctions dans le même repère.

③ a) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont en commun un point A que l'on précisera.

b) Soit Δ la droite de coefficient directeur m et passant par A.
Trouver une équation cartésienne de Δ.

④ a) Trouver m pour que $\mathscr{C}_f$ et Δ se coupent en un seul point.

b) Pour cette valeur de m ; étudier $\mathscr{C}_g \cap \Delta$.

SOLUTIONS

Solution 1 : ① * $D_f = \Re$.

* Parité : pour tout réel $x \in \Re$ on a $(-x) \in \Re$ et,

$f(-x) = -2(-x)^2 = -2x^2 = f(x)$, donc f est paire et par suite il suffit d'étudier f sur $[0, +\infty[$.

* Variations de f sur $[0, +\infty[$

soit a et b deux réels de $[0, +\infty[$ tels que $a < b$ donc $a^2 < b^2$ et $-2a^2 > -2b^2$ d'où : $f(a) > f(b)$.

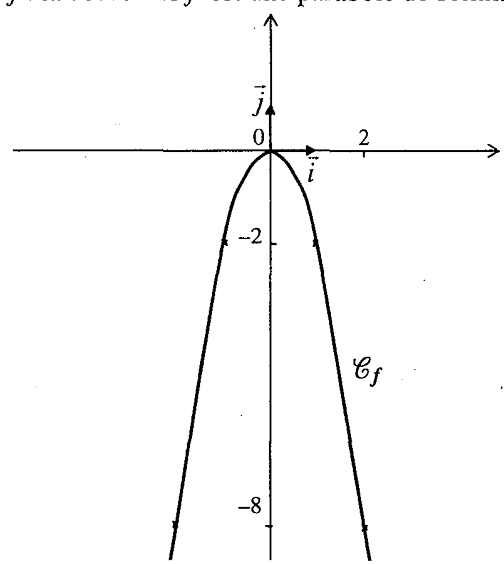
Donc f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

* Tableau de valeurs

x	0	1	2
$f(x)$	0	-2	-8

* Courbe de f : la courbe de f est une parabole de sommet O et d'axe (yy')



② On sait qu'un point M(x,y)∈ $\mathscr{C}_f$ signifie que $y = f(x)$

* $A(a\,,2a) \in \mathscr{C}_f$ signifie que $f(a) = 2a$ éq à $-2a^2 = 2a$ éq à $2a^2 + 2a = 0$ éq à $2a(a+1) = 0$ éq à $a = 0$ *ou* $a = -1$

<u>*Conclusion*</u> : $A(a\,,2a) \in \mathscr{C}_f$ pour $a = 0$ *ou* $a = -1$

③ M(x,y)∈ $\Delta \cap \mathscr{C}_f$ signifie que : $y = \begin{cases} y = f(x) \\ et \\ y = -4x + 2 \end{cases}$

l'abscisse x de M est solution de l'équation $f(x) = -4x + 2$ éq à $-2x^2 = -4x + 2$ éq à $2x^2 - 4x + 2 = 0$ éq à $x^2 - 2x + 1 = 0$ éq à $(x-1)^2 = 0$ éq à $x - 1 = 0$ éq à $x = 1$.

On a $f(1) = -2$ donc $\mathscr{C}_f \cap \Delta = \{B(1\,,-2)\}$

④ a) $M(b, f(b)) \in \mathscr{C}_f$, $F(0,-1/8)$

* $MF = \sqrt{(x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2} = \sqrt{(0-b)^2 + (\frac{-1}{8} + 2b^2)^2}$

$MF = \sqrt{b^2 + (2b^2 - \frac{1}{8})^2}$.

* <u>*Rappel*</u> : Si D est une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et $A(x_0\,, y_0)$

alors $d(A,\text{D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

* On a : D : $y = \frac{1}{8}$ éq à $y - \frac{1}{8} = 0$, d'où : $d(M,\text{D}) = \dfrac{\left|y_M - \frac{1}{8}\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$

$d(M,\text{D}) = \left|-2b^2 - \frac{1}{8}\right| = \left|2b^2 + \frac{1}{8}\right| = 2b^2 + \frac{1}{8}$

b) Montrons que $MF = d(M,\text{D})$.

On a : $MF = \sqrt{b^2 + (2b^2 - \frac{1}{8})^2} = \sqrt{b^2 + 4b^4 - \frac{b^2}{2} + \frac{1}{64}}$

$= \sqrt{4b^4 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{64}} = \sqrt{(2b^2 + \frac{1}{8})^2} = \left|2b^2 + \frac{1}{8}\right|$.

donc $MF = d(M,\text{D})$.

Solution 2 : ① * $D_f = \Re$.

* Parité : pour tout réel $x \in \Re$ on a $(-x) \in \Re$ et ,

$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, donc f est paire et par suite il suffit d'étudier f sur $[0, +\infty[$.

* Variations de f sur $[0, +\infty[$

soit a et b deux réels de $[0, +\infty[$ tels que $a < b$ donc $a^2 < b^2$

d'où $a^2 + 1 < b^2 + 1$ donc $f(a) < f(b)$.

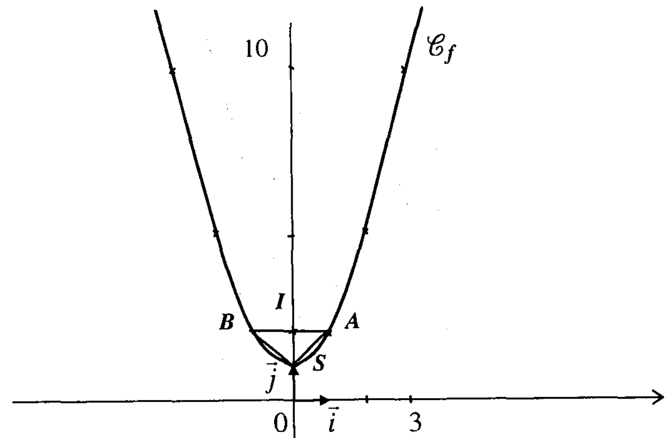
Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

* Tableau de valeurs

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	8	10

* Courbe de f : la courbe de f est une parabole de sommet $S(0,1)$ et d'axe (yy')



② a) Le sommet de $\mathscr{C}_f$ est $S(0,1)$

b) On a $f(1) = 2$ et $f(-1) = 2$ donc $A(1,2)$ et $B(-1,2)$

On sait que l'aire d'un triangle est A= $\dfrac{base \times hauteur}{2}$.

Le triangle ABS est isocèle de sommet principal S.

Soit $I = A * B$, donc la hauteur du triangle ABS est SI. L'aire du triangle ABS est : $A = \dfrac{AB \times SI}{2}$, or AB = 2 cm et SI = 1 cm d'où A = 1 cm^2.

Solution 3 : ① * $D_f = \Re$.

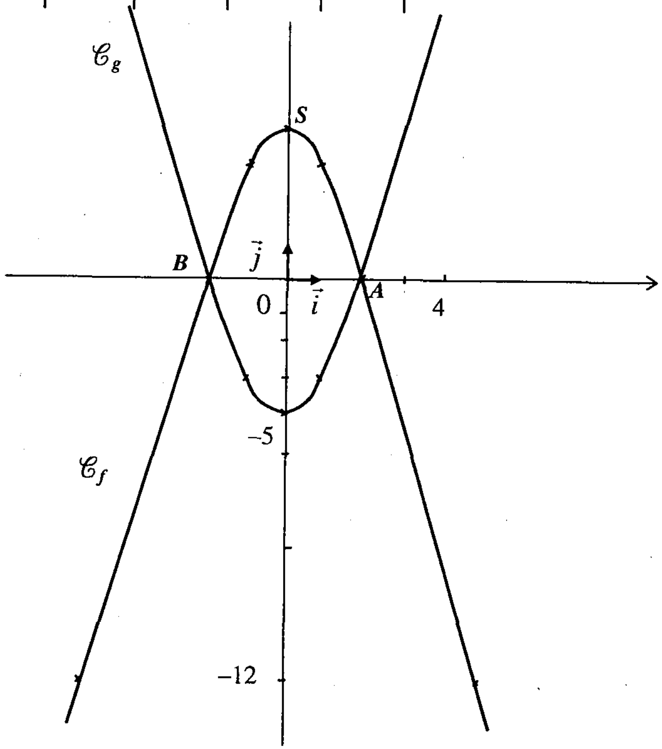
* Parité : pour tout réel $x \in \Re$ on a $(-x) \in \Re$ et $f(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = f(x)$, donc f est paire et on peut d'étudier f sur $[0, +\infty[$.

* Variations de f sur $[0, +\infty[$ soit a et b deux réels de $[0, +\infty[$ tels que $a < b$. On a : $a^2 < b^2$ donc $-a^2 > -b^2$ et $-a^2 + 4 > -b^2 + 4$ d'où $f(a) > f(b)$ ce qui montre que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	4	$-\infty$

* Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	0	–5	–12



② a) on a pour tout $x \in \Re$, $g(x) = -f(x)$ donc $\mathscr{C}_g$ est symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (xx').

③ $M(x,y) \in \mathscr{C}_f \cap (xx')$ signifie que : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ éq $\begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

* $f(x) = 0$ éq à $-x^2 + 4 = 0$ éq à $x^2 = 4$ éq à $x = 2$ ou $x = -2$ d'où $\mathscr{C}_f \cap (xx') = \{A(2,0) ; B(-2,0)\}$

④ On a: A et B sont symétriques par rapport à (yy') et $S \in (yy')$. Donc $S \in$ med $[AB]$ d'où : SAB est un triangle isocèle de sommet principal S.

Solution 4 : $f(x) = (x-3)^2$

① L'axe de cette parabole est la droite $x = 3$, le sommet est $S(3,0)$.

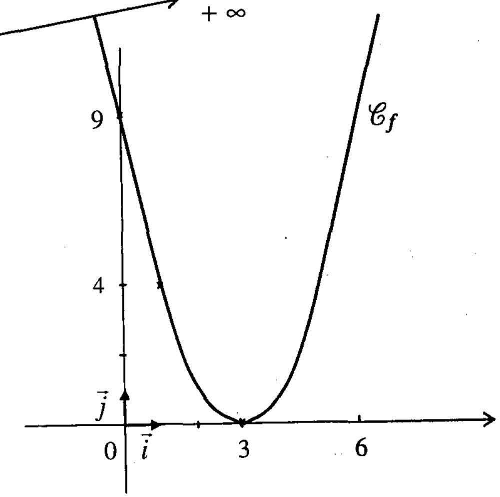
② * La droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie donc il suffit de faire l'étude sur $[3, +\infty[$.

* Variations de f sur $[3, +\infty[$. soit a et b deux réels de $[3, +\infty[$ tels que $a < b$; on a : $a - 3 < b - 3$ et comme $a - 3 \geq 0$ et $b - 3 \geq 0$ donc $(a-3)^2 < (b-3)^2$ d'où $f(a) < f(b)$ ce qui donne que f est strictement croissante sur $[3, +\infty[$.

x	3	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

*

x	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	4	9



③ a) La droite Δ_m d'équation $y = m$ est parallèle à l'axe (xx').

$*$ si $m \in \left]-\infty, 0\right[$; $\Delta_m \cap \mathscr{C}_f = \phi$.

$*$ si $m = 0$; $\Delta_m = (xx')$; donc Δ_m coupe $\mathscr{C}_f$ en un seul point.

$*$ si $m \in \left]0, +\infty\right[$; Δ_m coupe $\mathscr{C}_f$ en deux points.

b) $M(x, y) \in \mathscr{C}_f \cap \Delta_m$ signifie que $\begin{cases} f(x) = y \\ y = m \end{cases}$

Le nombre des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et Δ_m est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ d'inconnue x.

- $f(x) = m$ éq à $(x-3)^2 = m$ éq à $x^2 - 6x + 9 - m = 0$

  $\Delta = 36 - 4(9 - m) = 4m$.

$*$ si $m < 0$, alors $\Delta < 0$ et par suite $\mathscr{C}_f \cap \Delta_m = \phi$.

$*$ si $m = 0$, alors $\Delta = 0$ et par suite l'équation admet une seule solution

$*$ si $m > 0$, alors $\Delta > 0$ et par suite l'équation admet deux solutions distinctes.

c) Pour tout $m \in \left]0, +\infty\right[$, $\mathscr{C}_f \cap \Delta_m = \{M', M''\}$ avec $M'(x', m)$ et $M''(x'', m)$ où x' et x'' sont les solutions de l'équation $f(x) = m$ éq à $x^2 - 6x + 9 - m = 0$.

$I = M' * M''$ donc $x_I = \dfrac{x' + x''}{2}$, or on sait que si x' et x'' sont les solutions d'une équation du type : $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

alors $x' + x'' = \dfrac{-b}{a}$. Dans notre cas : $a = 1$ et $b = -6$ d'où

$x_I = \dfrac{x' + x''}{2} = 3$ d'autre part on a : $y_I = \dfrac{2m}{2} = m$. <u>*Conclusion*</u> : $I(3, m)$

- Lorsque m varie dans $\left]0, +\infty\right[$, $x_I = 3$ et $y_I = m$ donc x_I est fixe et y_I varie de $\left]0, +\infty\right[$.

Donc lorsque m varie de $\left]0, +\infty\right[$, I varie sur la demi droite $[SA)$ privée du point S où : $S(3,0)$ et $A(3,1)$.

Solution 5 :

① $f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x+1)^2 - 4$.

② • $D_f = \Re$.

• Variations de f :

Soit a et b deux réels, tels que $a < b$. Comparons $f(a)$ et $f(b)$.

On a $a < b$, donc $a + 1 < b + 1$

$*$ si $a \in \left]-\infty, -1\right]$ et $b \in \left]-\infty, -1\right]$, alors : $a + 1 \leq 0$ et $b + 1 \leq 0$

donc $(a+1)^2 > (b+1)^2$ et $(a+1)^2 - 4 > (b+1)^2 - 4$ d'où :

$f(a) > f(b)$, ce qui donne que f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -1\right]$.

$*$ si $a \in \left[-1, +\infty\right[$ et $b \in \left[-1, +\infty\right[$, alors : $a + 1 \geq 0$ et $b + 1 \geq 0$

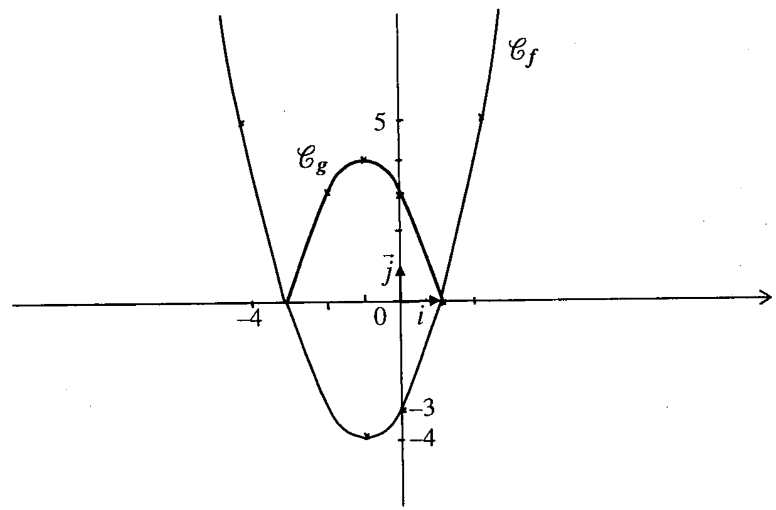
donc $(a+1)^2 < (b+1)^2$ et $(a+1)^2 - 4 < (b+1)^2 - 4$ d'où :

$f(a) < f(b)$ et par suite f est strictement croissante sur $\left[-1, +\infty\right[$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

• Courbe de f :

x	-4	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	5	0	-4	-3	0	5



③ $g(x) = |f(x)|$

La courbe de g est la réunion de la partie de $\mathscr{C}_f$ située au dessus de (xx') avec la symétrique de la partie de $\mathscr{C}_f$ située au dessous de (xx') par rapport à (xx') : d'où le tracé de $\mathscr{C}_g$.

④ • $D_f = \mathfrak{R}$.

• Variations de f :

Soient a et b deux réels, tels que $a < b$. Comparons $h(a)$ et $h(b)$.

* si a et b sont négatifs, alors : $a^2 > b^2$ et $a^2 - 1 > b^2 - 1$ d'où $h(a) > h(b)$ donc h est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

* si a et b appartiennent à $[0, 1]$, on a $a^2 < b^2$ et $a^2 - 1 < b^2 - 1$ d'où $h(a) < h(b)$ donc h est strictement croissante sur $[0, 1]$.

* si a et b appartiennent à $[1, +\infty[$, alors $h(a) = f(a)$ et $h(b) = f(b)$; or d'après la question Ⅱ, f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et en particulier sur $[1, +\infty[$.

donc h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

<u>Conclusion</u> :

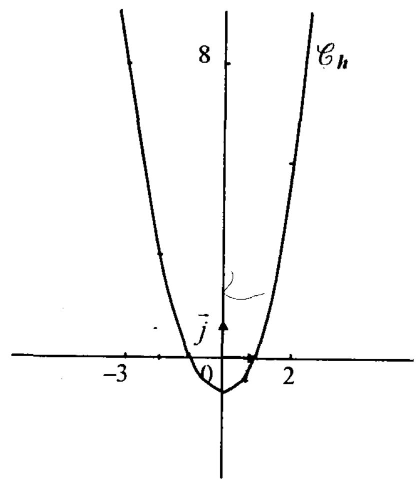
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗	$+\infty$

• Courbe de h :

$\mathscr{C}_h = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$

où $\mathscr{C}_1$ est la courbe de la restriction de la fonction $f_1 : x \longrightarrow x^2 - 1$ à l'intervalle $]-\infty, 1]$ c'est une partie de la parabole de sommet $S(0,-1)$ et d'axe (yy') : et $\mathscr{C}_2$ est la courbe de la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$ d'où la construction de $\mathscr{C}_h$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	8	3	0	-1	0	5



Solution 6 :

① * On a : $f(x) = x^2 + x - 1 = (x^2 + 2.\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} - 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$

Soit $\mathscr{C}_1$ la courbe de la fonction $x \longrightarrow (x + \frac{1}{2})^2$. $\mathscr{C}_1$ est une parabole de sommet $S_1(-\frac{1}{2}, 0)$ et d'axe la droite Δ_1 :d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

$\mathscr{C}_f = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_1)$ où $\vec{u} = -\frac{5}{4}\vec{j}$.

Donc $\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet $S(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ et d'axe Δ_1 : $x = -\frac{1}{2}$.

* De même on a : $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x) - \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2.2x + 4 - 4) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}[(x-2)^2 - 4] - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{3}{2}$

$\mathscr{C}_g = t_{\vec{u}'}(\mathscr{C}_2)$ où $\vec{u}' = \frac{3}{2}\vec{j}$; et $\mathscr{C}_2$ est la parabole de sommet $S_2(2,0)$ et d'axe Δ_2 ; $x = 2$; d'où $\mathscr{C}_g$ est une parabole de sommet $S'(2, \frac{3}{2})$ et d'axe Δ_2 ; $x = \cancel{x}2$.

②

x	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{5}{4}$	-1	1	5	11

x	2	3	4	5	6
$g(x)$	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{13}{2}$

(voir les courbes sur la page suivante)

③ les coordonnées x et y des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions du système $\begin{cases} f(x) = y \\ g(x) = y \end{cases}$. Les abscisses de ces points d'intersection sont les solutions de $f(x) = g(x)$.

* $f(x) = g(x)$ éq à $x^2 + x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ éq à

$\frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$ éq à $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

On a $a + b + c = 0$, donc les solutions sont : $x' = 1$ et $x'' = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$

$f(1) = 1$ et $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{11}{9}$ .d'où $\mathscr{C}_f \cap$ et $\mathscr{C}_g = \left\{ A(1,1) ; B(\frac{-1}{3}, \frac{-11}{9}) \right\}$

④ a) Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe de $\mathscr{C}_f$ située au dessus de $\mathscr{C}_g$. ; or d'après le graphique $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{-1}{3}\right] \cup [1, +\infty[$

d'où : $S_{\mathfrak{R}} = \left]-\infty, \frac{-1}{3}\right] \cup [1, +\infty[$.

b) $f(x) \geq g(x)$ éq à $x^2 + x - 1 \geq -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ éq à $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$.

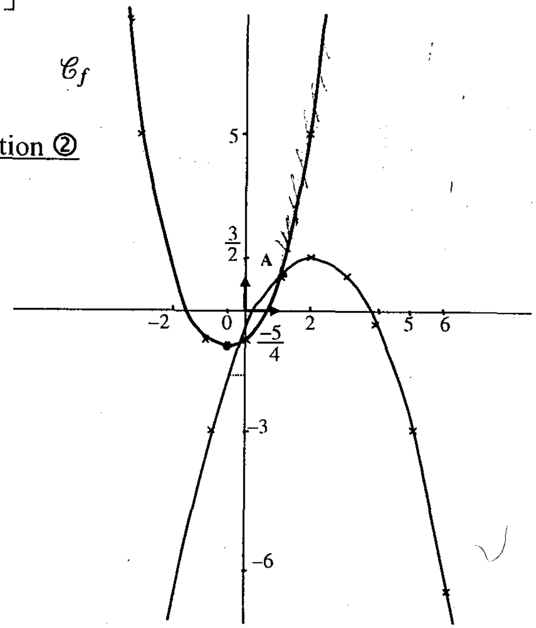
Les solutions de l'équation $3x^2 - 2x - 1 = 0$ sont $x' = 1$ et $x'' = -\frac{1}{3}$.

D'où :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 2x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_{\mathfrak{R}} = \left]-\infty, \frac{-1}{3}\right] \cup [1, +\infty[$.

Courbes de la question ②



Solution 7 :

① $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A(-1,0)$; $B(1,3)$ *et* $C(3,2)$, donc :

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases} \text{ éq à } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases} \text{ éq à } \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = \frac{3}{2} - c \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases}.$$

Remplaçons dans la 3ème équation b par $\frac{3}{2} - c$, on obtient :

$9(\frac{3}{2} - c) + \frac{9}{2} + c = 2$ éq à $c = 2$; alors $a = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

<u>*Conclusion*</u> : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

② $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x) + 2$

$= -\frac{1}{2}[x^2 - 2.\frac{3}{2}x + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2] = -\frac{1}{2}[(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}] + 2$

$= -\frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{8}$.

Soit : $g : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$

$x \longrightarrow -\frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})^2$

$\mathscr{C}_g$ est une parabole de sommet $S_1(\frac{3}{2}, 0)$ et d'axe $\Delta : x = \frac{3}{2}$

$\mathscr{C}_f = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_g)$ où $\vec{u} = \frac{25}{8}\vec{j}$.

Donc $\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet $S(\frac{3}{2}; \frac{25}{8})$ et d'axe $\Delta : x = \frac{3}{2}$.

Solution 8 : ① Pour tout $x \in \mathfrak{R}$, on a $(-x) \in \mathfrak{R}$ et ,

$f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| + 1 = x^2 - 2|x| + 1 = f(x)$. Donc f est paire , donc la droite des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

② a) Pour tout $x \in \mathfrak{R}_+$, on a $|x| = x$; d'où $g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

b) • $D_g = \mathfrak{R}_+$.

• Variations de g sur $\mathfrak{R}_+$

Soit a et b deux réels positifs , tels que $a < b$. On a : $a - 1 < b - 1$.

∗ si a et b appartiennent à $[0, 1]$, on a $a - 1 < 0$ et $b - 1 < 0$

donc $(a-1)^2 > (b-1)^2$ d'où : $g(a) > g(b)$; ce qui donne que g est strictement décroissante sur $[0,1]$.

* si a et b appartiennent à $[1,+\infty[$, on a $a-1>0$ et $b-1>0$

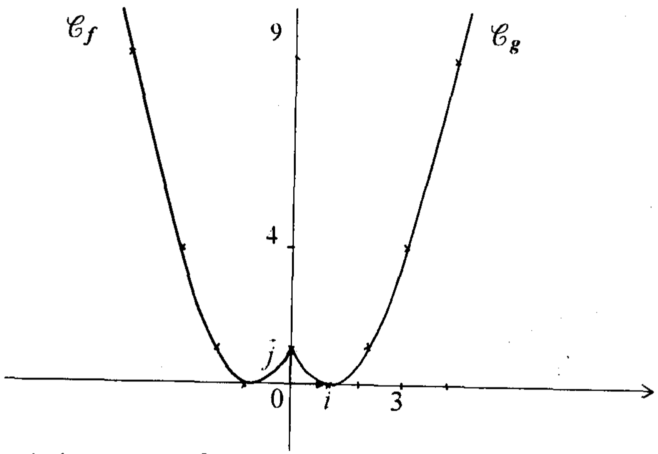
donc $(a-1)^2 < (b-1)^2$ d'où : $g(a) < g(b)$: ce qui montre que g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

D'où le tableau de variation de g

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Courbe de f :

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	1	0	1	4	9



b) D'après la question ① f est paire donc (yy') est un axe de symétrie. Soit $\mathscr{C}_1$ la symétrique de $\mathscr{C}_g$ par rapport à (yy'). $\mathscr{C}_f = \mathscr{C}_g \cup \mathscr{C}_1$.

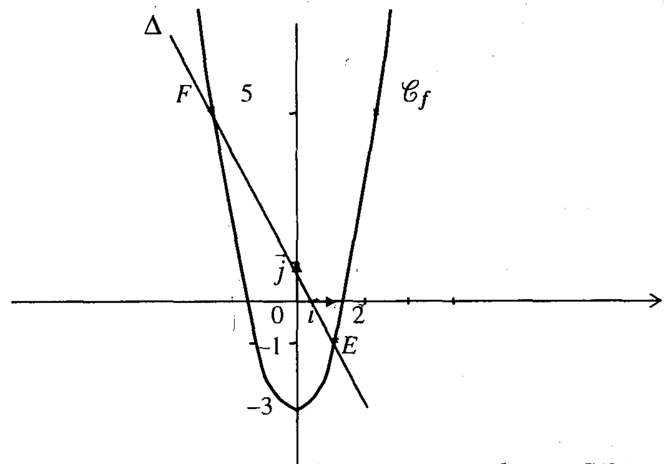
Solution 9 :

① On a : $\begin{cases} f(0) = -3 \\ f(1) = -1 \end{cases}$ éq à $\begin{cases} b = -3 \\ a + b = -1 \end{cases}$

éq à $a = 2$ et $b = -3$ d'où $f(x) = 2x^2 - 3$.

② $\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet $S(0,-3)$ et d'axe (yy').

x	0	1	2
$f(x)$	-3	-1	5



③ a) $\Delta : y = ax + b$ avec $a = -2$; donc $y = -2x + b$; or $C(0,1) \in \Delta$ donc $b = 1$ d'où $\Delta : y = -2x + 1$

b) Les coordonnées x et y des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et Δ sont les solutions du système $\begin{cases} y = -2x+1 \\ f(x) = y \end{cases}$.

- Les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation :

$2x^2 - 3 = -2x + 1$ éq à $2x^2 + 2x - 4 = 0$ éq à $x^2 + x - 2 = 0$

éq à $x = 1$ ou $x = \frac{c}{a} = -2$ (car $a + b + c = 0$).

d'où $\mathscr{C}_f \cap \Delta = \{E(1,-1); F(-2,5)\}$

- $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (5+1)^2}$
$= \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

④ $2x^2 + 2x - 4 \geq 0$ éq à $2x^2 - 3 \geq -2x + 1$ éq à $f(x) \geq -2x + 1$.

Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la partie de $\mathscr{C}_f$ situées au dessus de Δ. Or d'après le graphique $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ pour $x \in]-\infty,-2] \cup [1,+\infty[$ d'où $S_{\mathbb{R}} =]-\infty,-2] \cup [1,+\infty[$

⑤ Soit $m \in \mathfrak{R}^*$ et Δ_m la droite d'équation $y = \frac{1}{m}$.

Δ_m est parallèle à (xx'). Le nombre des solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{m}$ est le nombre des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et Δ_m.

Il y a 3 cas possibles : $\frac{1}{m} < -3$; $\frac{1}{m} = -3$ *et* $\frac{1}{m} > -3$.

- $\frac{1}{m} < -3$ éq à $\frac{1}{m} + 3 < 0$ éq à $\frac{1+3m}{m} < 0$

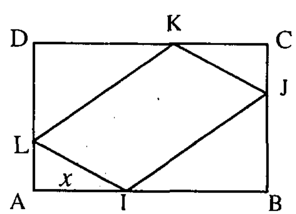
m		$-\frac{1}{3}$		0	
$1+3m$	$-$	0	$+$		$+$
m	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{1+3m}{m}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

donc : $\frac{1}{m} < -3$ éq $m \in \left]-\frac{1}{3}, 0\right[$ et dans ce cas $\mathscr{C} \cap \Delta_m = \phi$, et par suite l'équation $f(x) = \frac{1}{m}$ n'a pas de solutions.

- $\frac{1}{m} = -3$ éq à $m = -\frac{1}{3}$; $\mathscr{C} \cap \Delta_m = \{A(-3,0)\}$ et par suite l'équation $f(x) = \frac{1}{m}$ a une seule solution.

- $\frac{1}{m} > -3$ éq $\frac{1+3m}{m} > 0$ éq $m < -\frac{1}{3}$ ou $m > 0$ et dans ce cas $f(x) = \frac{1}{m}$ a deux solutions.

Solution 10 :



① L'aire du quadrilatère IJKL est égale à l'aire du rectangle ABCD qu'on retranche l'aire des quatre triangles rectangle AIL ; BIJ ; CJK et DKL

d'où : $f(x) = 5 \times 3 - [\frac{x(3-x)}{2} + \frac{x(5-x)}{2} + \frac{x(3-x)}{2} + \frac{x(5-x)}{2}]$

$= 15 - x(3-x) - x(5-x) = 2x^2 - 8x + 15$

$f(x) = 2x^2 - 8x + 15$ avec $0 \le x \le 3$

$= 2(x^2 - 4x + 4) + 7 = 2(x-2)^2 + 7$

② • $D_f = [0,3]$.

• Variations de f sur $[0,3]$

Soit a et b deux réels positifs de $[0,3]$, tels que $a < b$.

Comparons $f(a)$ et $f(b)$; $a - 2 < b - 2$

* si $a \in [0,2]$ et $b \in [0,2]$, alors $a - 2 < 0$ et $b - 2 < 0$

donc $(a-2)^2 > (b-2)^2$ et $(a-2)^2 + 7 > (b-2)^2 + 7$ d'où : $f(a) > f(b)$ ce qui donne que f est strictement décroissante sur $[0,2]$.

* si $a \in [2,3]$ et $b \in [2,3]$, alors $a - 2 > 0$ et $b - 2 > 0$

donc $(a-2)^2 < (b-2)^2$ et $(a-2)^2 + 7 < (b-2)^2 + 7$ d'où : $f(a) < f(b)$ ce qui prouve que f est strictement croissante sur $[2,3]$.

D'où le tableau suivant :

x	0		2		3
$f(x)$	15	↘	7	↗	9

• Courbe de f :

x	0	1	2	3
$f(x)$	15	9	7	9

(***voir la courbe sur la page suivante***)

③ La plus petite valeur que peut prendre $f(x)$ est égale à 7 qui correspond à $x = 2$.

④ Soit Δ_m la droite d'équation $y = m - 1$. Le nombre des solutions de l'équation $f(x) = m - 1$ est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et Δ_m qui est parallèle à (xx').

* si $m - 1 < 7$, c'est à dire $m < 8$; on a $\mathscr{C}_f \cap \Delta_m = \phi$.

* si $m - 1 = 7$ où bien $m = 8$; alors Δ_m .coupe $\mathscr{C}_f$ en un seul point.

* si $7 < m - 1 \le 9$, c'est à dire $8 < m \le 10$; alors Δ_m .coupe $\mathscr{C}_f$ en deux points.

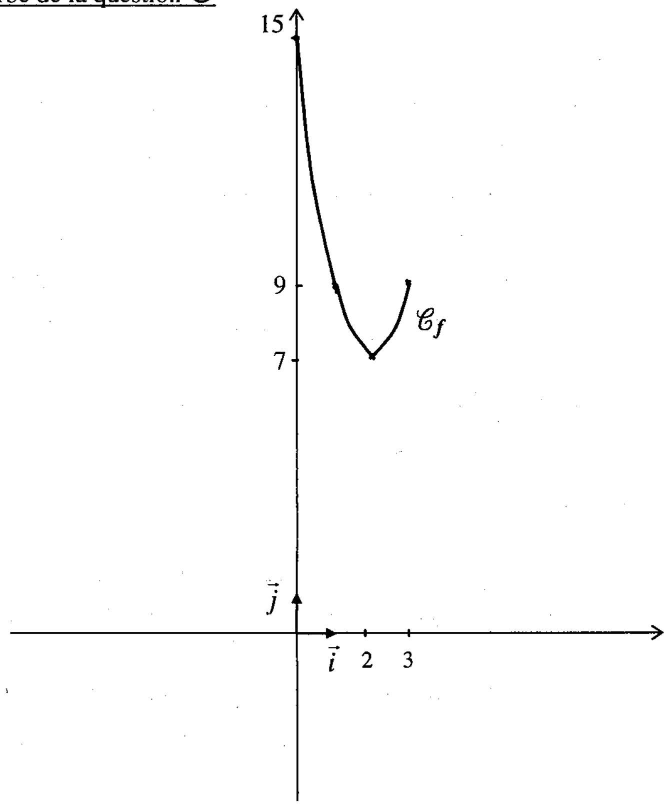
* si $9 < m - 1 \le 15$, c'est à dire $10 < m \le 16$; alors Δ_m .coupe $\mathscr{C}_f$ en un seul point.

* si $m-1 \geq 15$, alors $\Delta_m \cap \mathscr{C}_f = \phi$.

Conclusion :

* si $m \in \left]-\infty, 8\right[\cup \left]16, +\infty\right[$, l'équation n'admet pas de solutions.
* si $m \in \left]8, 10\right]$, l'équation admet deux solutions.
* si $m \in \left]10, 16\right] \cup \{8\}$, l'équation admet une solution.

Courbe de la question ②



TRIGONOMÉTRIE

Résultats à retenir :

○ ***Lignes trigonométriques des angles remarquables :***

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot\alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

○ ***Relations fondamentales :***

* Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$ on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
* Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2}$

on a $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

* Pour tout réel x appartenant à $]0, \pi[$ on a $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

○ ***Angles complémentaires :***

* Pour tout x appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$

on a $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

* Pour tout x appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$

* Pour tout x appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\text{cotg}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{tg}\, x$.

○ ***Angles supplémentaires :***

* Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$

on a $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

* Pour tout réel x appartenant à $[0, \pi]$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2}$

on a $\tan(\pi - x) = -\tan x$.

* Pour tout réel x appartenant à $]0, \pi[$ on a $\cot(\pi - x) = -\cot x$.

○ ***Loi de sinus – Aire d'un triangle :***

* ***Loi de sinus*** :

Soit ABC un triangle on pose a = BC , b = AC et c = AB

On a $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

* ***Aire d'un triangle :***

Soit ABC un triangle on pose a = BC , b = AC et c = AB

S désigne l'aire de ABC et R désigne le rayon du cercle circonscrit à ABC .

On a $S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

○ ***Théorème D'El – Kashi :***

Soit ABC un triangle on pose a = BC , b = AC et c = AB ; on a

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos \hat{C}$

○ ***Triangles isométriques :***

* ***1^er cas d'isométrie :***

Si deux triangles ont un côté égal compris entre deux angles respectivement égaux alors ils sont isométriques .

****2^ème cas d'isométrie :***

Si deux triangles ont un angle compris entre deux côtés respectivement égaux alors ils sont isométriques .

****3^ème cas d'isométrie :***

Si deux triangles ont trois côtes respectivement égaux alors ils sont isométriques .

○ ***Relations métriques dans le triangle rectangle :***

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A

On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$AH \cdot BC = AB \cdot AC$

$AH^2 = HB \cdot HC$

$AB^2 = AH \cdot AC$

$AC^2 = CH \cdot CA$

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 :

Soit $f(x) = (1 + \sin x)(4\cos^2 x - 1)$ où $x \in [0, \pi]$

① Calculer $f(0)$, $f(\frac{\pi}{2})$; $f(\frac{\pi}{4})$ et $f(\pi)$.

② Résoudre dans $[0, \pi]$, l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2 : Démontrer les relations suivantes :

① $(tg\, x - \frac{1}{tg\, x})^2 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 4$

② $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = 1$

③ $\cos x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \sin x + \cos(\pi - x) = 0$

$tg(\frac{\pi}{2} - x).\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$; $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

Exercice 3 :

① Calculer $\sin x$ sachant que : $\cos x = \frac{2}{5}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

② Calculer $\cos x$ sachant que : $\sin x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

③ Déterminer x sachant que : $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in [0, \pi]$.

Déterminer $x \in [0, \pi]$ tel que : $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 :

Soit $x \in [0, \pi]$ et $f(x) = \cos^2 x + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\sin x$

① Calculer $f(\frac{\pi}{2})$, $f(\frac{3\pi}{4})$ et $f(\frac{5\pi}{6})$.

② Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

③ Résoudre dans $[0, \pi]$: $\sqrt{3}\, tg^2 x - (1 + \sqrt{3})\, tg\, x + 1 = 0$.

Exercice 5 :

① Soit $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$

Calculer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

② Soit $\beta \in \left]0, \pi\right[$ tel que : $\cot g\,\beta = 3$.

Calculer $\sin\beta$ puis $\cos\beta$

Exercice 6 : Soit $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soit : $\vec{u} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}$ et $\vec{v} = (\sin\alpha)\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j}$; $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

① Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires.

② Montrer que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

③ Soit Δ la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Déterminer une équation cartésienne de Δ.

④ Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

Déterminer $\mathcal{C} \cap \Delta$.

Exercice 7 : Soit $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^2 x\sin^2 x$.

① Calculer $f(0)$ *et* $f(\frac{\pi}{2})$.

② Montrer que $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

Exercice 8 : ① Soit $g(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$.

Montrer que $g(x) = 1$

② Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $(tg\, x + \cot g\, x)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

Exercice 9 : $(0, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormé du plan.

Soit les points $A(1.1)$: $B(2,2)$ et $C(2,3)$.

① a) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ passant par A, B et C.

b) En déduire le rayon de $\mathcal{C}$.

② Calculer $\sin(A\hat{C}B)$.

Exercice 10 : ① Montrer que pour tout réel $x \in [0, \pi]$; on a :

a) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3$

b) $(\sin x + \cos x)^3 - \cos^3 x - \sin^3 x = 3\cos x \sin x (\cos x + \sin x)$.

② Montrer que pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; on a :

a) $\frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$

b) $\text{tg}\, x + \frac{1}{\text{tg}\, x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$.

Exercice 11 :

I / Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

① a) Montrer que $\cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$.

b) Vérifier que $\frac{2 + \sqrt{3}}{4} = (\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4})^2$.

c) En déduire $\cos x$.

② En déduire $\text{tg}\, x$.

II / Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A, tel que :

$AB = a$ et $B\hat{A}C = 2x$.

① a) Montrer que : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

b) Calculer $\sin 2x$.

② En déduire x .(on pourra considérer le point J : projeté $\perp$ de B sur (AC))

Exercice 12 :

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de centre O est de rayon r est dans le quel tous les angles sont aigus . Soit D le point diamétralement opposé à A et H le projeté orthogonal de A sur (BC)

① Montrer que $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$

② Exprimer $\sin \widehat{ADB}$ dans le triangle ADB .

③ En déduire que $\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = 2r$

Exercice 13 :

ABC un triangle quelconque soit I le pied de la bissectrice intérieure issue de A .

① Montrer que : $\frac{\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{\sin \hat{I}} = \frac{AB}{AB}$

② Montrer que : $\frac{\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{\sin \hat{I}} = \frac{IC}{AC}$

③ En déduire l'égalité : $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$

Exercice 14 :

ABC : un triangle tel que AB = 2 ; AC = 3 ; BC = 4

① Utiliser la formule d'el kashri pour calculer : $\cos \hat{A}$; $\cos \hat{B}$ et $\cos \hat{C}$

② En déduire une valeur approchée de $\hat{A}$; $\hat{B}$ et $\hat{C}$

Exercice 15 : ABC : un triangle tel que AB = c ; BC = a ; AC = b

① Démontrer que :

$b^2 - c^2 = a(b \cos \hat{C} - c \cos \hat{B})$

② On suppose ABC : triangle isocèle de sommet principale A

Montrer que : $\cos \hat{B} = \cos \hat{C}$

Exercice 16 : ABC : Triangle circonscrit à un cercle C de rayon R

On note S l'aire de ABC .

① Montrer que $R = \frac{abc}{4S}$

② Montrer que : $S = \frac{a^2 \sin \hat{B} . \sin \hat{C}}{2 \sin \hat{A}}$

Exercice 17 :

ABC : triangle tel que : 2a = b + c (a = BC : b = AC : C = AB)

Montrer que : $2 \sin \widehat{A} = \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C}$

Exercice 18 :

ABC : triangle tel que :
AB = c AC = b BC = a et on note S l'aire de ce triangle .

① Montrer que :

$$\sin^2 \widehat{A} = \frac{(a+b+c)(c+b-a)(c+a-b)}{4b^2c^2}$$

② On pose : 2 p = a + b +c
Montrer que :

$$\sin \widehat{A} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

③ Montrer que $\operatorname{tg} \widehat{A} = \dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2}$ lorsque (AB) $\not\perp$ (AC)

Exercice 19 :

ABC : triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) . On pose BC = a

Démontrer que : $AH = a \sin \widehat{B} . \cos \widehat{B}$

$BH = a \cos^2 \widehat{B}$

$CH = a \sin^2 \widehat{B}$

SOLUTIONS

Solution 1 :

$f(0) = 3$; $f(\frac{\pi}{2}) = -2$; $f(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f(\pi) = 3$

$f(x) = 0$ équivaut à $1 + \sin x = 0$ ou $4\cos^2 x - 1 = 0$

équivaut à $\sin x = -1$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

or dans $[0, \pi]$, $\sin x \geq 0$
donc l'équation $\sin x = -1$, n'admet pas de solutions dans $[0, \pi]$

- Dans $[0, \pi]$; $\cos x = \frac{1}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{3}$ et $\cos x = -\frac{1}{2}$
- Equivaut à $x = \frac{2\pi}{3}$. d'où $S_{[0,\pi]} = \{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \}$

Solution 2 :

$$(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x})^2 = \operatorname{tg}^2 x - 2.\operatorname{tg} x.\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$= \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - 2 \quad = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 2$$

or • $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ d'où $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

et • $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ d'où $\operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

et par suite : $(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x})^2 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 4$

$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x =$

$(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 + 2\sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$

$\cos x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \sin x + \cos(\pi - x) =$

$\cos x + \sin x - \sin x - \cos x = 0$

④ On a : • $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x)=\operatorname{cotg}x$ et $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$

d'où $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x)\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\operatorname{cotg}x.\sin x=\frac{\cos x}{\sin x}.\sin x=\cos x$.

• $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{(1-\cos x)\sin x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}=\frac{(1-\cos x)\sin x}{1-\cos^2 x}=\frac{(1-\cos x)\sin x}{\sin^2 x}$
$=\frac{1-\cos x}{\sin x}$

Solution 3 : ① on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ et $\cos x=\frac{2}{5}$

d'où $\sin^2 x=\frac{21}{25}$ donc $\sin x=\frac{\sqrt{21}}{5}$.

car on sait que pour tout $x\in[0,\pi]$: $\sin x\geq 0$

② On a $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ et $\sin x=\frac{3}{5}$.

d'où $\cos^2 x=\frac{16}{25}$ et comme $\cos x\leq 0$ car $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

alors $\cos x=-\frac{4}{5}$.

③ On a $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ et $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d'où $\frac{3}{4}+\sin^2 x=1$ et par suite $\sin^2 x=\frac{1}{4}$ d'où $\sin x=\frac{1}{2}$

et par suite $x=\frac{\pi}{6}$

④ $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$ éq $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}$

éq $1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}$ éq $2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}$ éq

$2\sin^2 x\,(1-\sin^2 x)=\frac{1}{2}$ éq $4\sin^2 x\,(1-\sin^2 x)=1$ éq

$4\sin^4 x-4\sin^2 x+1=0$ éq $(2\sin^2 x-1)^2=0$ éq $2\sin^2 x-1=0$ éq

$\sin^2 x=\frac{1}{2}$ éq $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ car : $\sin x\geq 0$ pour $x\in[0,\pi]$

d'où $x=\frac{\pi}{4}$.

Solution 4 :

① • $f(\frac{\pi}{2})=\cos^2\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=0+\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

• $f(\frac{3\pi}{4})=\cos^2(\frac{3\pi}{4})+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin(\frac{3\pi}{4})=(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{\sqrt{3}+1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$
$=\frac{2}{4}+\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{4}$.

• $f(\frac{5\pi}{6})=\cos^2\frac{5\pi}{6}+(\frac{\sqrt{3}+1}{2})\sin\frac{5\pi}{6}=(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}+1}{2})\frac{1}{2}$
$=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}+1}{4}=\frac{4+\sqrt{3}}{4}$.

② $f(x)=1+\frac{\sqrt{3}}{4}$ éq $\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x=1+\frac{\sqrt{3}}{4}$ éq

$1-\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x=1+\frac{\sqrt{3}}{4}$ éq

$\sin^2 x-(\frac{\sqrt{3}+1}{2})\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$. On pose $X=\sin x$: on obtient :

$X^2-(\frac{\sqrt{3}+1}{2})X+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$

$\Delta=(\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2-\frac{4\sqrt{3}}{4}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{4}-\frac{4\sqrt{3}}{4}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{4}=(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^2$.

D'où $X'=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{2}=\frac{1}{2}$ et $X''=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

On a ainsi : $\sin x=\frac{1}{2}$ ou $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{\pi}{3}$

③ $\sqrt{3}\,tg^2x-(1+\sqrt{3})\,tg\,x+1=0$.

on pose $\operatorname{tg}x=X$: on obtient : $\sqrt{3}X^2-(1+\sqrt{3})X+1=0$

On a : $a+b+c=\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})+1=0$

donc $X'=1$ et $X''=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

On a ainsi : $\operatorname{tg}x=1$ ou $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où $x=\frac{\pi}{4}$ ou $x=\frac{\pi}{6}$.

Solution 5 :

Soit $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $tg\, \alpha = \frac{1}{2}$

- on a : $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ donc $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{5}{4}$ d'où $\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$

or $\cos \alpha > 0$ pour $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

- on a : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ et comme $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ don on a :

$\frac{4}{5} + \sin^2 \alpha = 1$ d'où $\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$ et par suite $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

② Soit $\beta \in \left]0, \pi\right[$ tel que : $\cot g\, \beta = 3$.

on a : $1 + \cot g^2\beta = \frac{1}{\sin^2 \beta}$ d'où $\frac{1}{\sin^2 \beta} = 10$ donc $\sin^2 \beta = \frac{1}{10}$

et par suite $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$. (car pour tout $\beta \in \left]0, \pi\right[$ on a $\sin \beta > 0$)

Solution 6 :

On a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$ et

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sin^2 \alpha + (-\cos \alpha)^2} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1$.

② on a : $\vec{u}\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$

$XX' + YY' = (\cos \alpha \sin \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha = 0$.

on a : $M \in \Delta$ éq $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires éq $\det(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = 0$

or $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} x & \cos \alpha \\ y & \sin \alpha \end{vmatrix} = 0$ d'où $\boxed{\Delta :\ x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0}$

$\mathscr{C}$: cercle trigonométrique .

on a : $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 = 1$

$M \in \mathscr{C} \cap \Delta$ éq $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \textbf{(1)} \\ x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$

l'équation (2) s'écrit : $y = \frac{x \sin \alpha}{\cos \alpha}$.

(1) s'écrit : $x^2 + \frac{x^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1$ donc $\frac{\cos^2 \alpha\, x^2 + x^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1$ éq

$\frac{x^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = 1$ éq $x^2 = \cos^2 \alpha$

d'où $x = \cos \alpha$ ou $x = -\cos \alpha$.

- si $x = \cos \alpha$ alors $y = \sin \alpha$
- si $x = -\cos \alpha$ alors $y = -\sin \alpha$

D'où $\mathscr{C} \cap \Delta = \{ A\ (\cos\alpha, \sin\alpha)\ ;\ A'\ (-\cos\alpha, -\sin\alpha) \}$

Solution 7 :

① • $f(0) = \sin^6 0 + \cos^6 0 + 3\cos^2 0 \sin^2 0 = 1$

- $f(\frac{\pi}{2}) = \sin^6 \frac{\pi}{2} + \cos^6 \frac{\pi}{2} + 3\cos^2 \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$

② $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x$

$= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + 3\cos^2 x \sin^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^4 x \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x$

car ($(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ donc

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$)

d'où $f(x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x - 1)$

et par suite $f(x) = 1$.

Solution 8 :

① • $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x . \cos^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x . \cos^2 x$

- $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^4 x.\cos^2 x - 3\sin^2 x.\cos^4 x$$
$$= 1 - 3\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$= 1 - 3\sin^2 x.\cos^2 x$$

d'où : $g(x) = 3(1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x) - 2(1 - 3\sin^2 x.\cos^2 x)$

$$= 3 - 2 - 6\sin^2 x.\cos^2 x + 6\sin^2 x.\cos^2 x = 1$$

② • $(\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x)^2 = (\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x})^2$

$$= (\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x})^2 = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

• $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$

d'où $(\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

Solution 9 :

① a) On a : $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (l'équation d'un cercle)

- $A(1,1) \in \mathcal{C}$ éq : $2 + a + b + c = 0$
- $B(2,2) \in \mathcal{C}$ éq : $8 + 2a + 2b + c = 0$
- $C(2,3) \in \mathcal{C}$ éq : $4 + 9 + 2a + 3b + c = 0$

On a : $\begin{cases} a + b + c = -2 & (1) \\ 2a + 2b + c = -8 & (2) \\ 2a + 3b + c = -13 & (3) \end{cases}$

(2) – (3) entraîne que : $-b = 5$ d'où $\underline{b = -5}$

(1) – (2) entraîne que : $-a - b = 6$ or $b = -5$ d'où $\underline{a = -1}$

(1) donne $\underline{c = 4}$

Conclusion : $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$ éq

$$\left[x^2 - 2.\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2\right] - (\frac{1}{2})^2 + \left[y^2 - 2.\frac{5}{2}y + (\frac{5}{2})^2\right] - (\frac{5}{2})^2 + 4 = 0$$

éq $(x - \frac{1}{2})^2 - 1 + (y - \frac{5}{2})^2 = (\frac{\sqrt{10}}{2})^2$ éq $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

d'où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre ω $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

② On sait que : $\frac{AB}{\sin A\hat{C}B} = \frac{AC}{\sin A\hat{B}C} = \frac{BC}{\sin B\hat{A}C} = 2r$

où : r est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

on a : $\frac{AB}{\sin A\hat{C}B} = 2r$ d'où $\sin(A\hat{C}B) = \frac{AB}{2r}$

or $AB = \sqrt{2}$ et $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$ *Conclusion* : $\sin\ (A\hat{C}B) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Solution 10 :

① a) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x =$

$(\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x =$

$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x =$

$\sin^2 x - \cos^2 x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3$

b) $(\sin x + \cos x)^3 - \cos^3 x - \sin^3 x =$

$\cos^3 x + 3\cos x^2 \sin x + 3\cos x \sin^2 x + \sin^3 x - \cos^3 x - \sin^3 x =$

$3\cos x^2 \sin x + 3\cos x \sin^2 x = 3\cos x \sin x(\cos x + \sin x)$

② a) $\frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} =$

$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} . \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$

b) $\text{tg}\, x + \frac{1}{\text{tg}\, x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x . \sin x} = \frac{1}{\cos x . \sin x}$

Solution 11 :

I / ① a) On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ or $\sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

D'où $\cos^2 x + (\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})^2 = 1$

or $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

on a : $\cos^2 x + (\frac{2-\sqrt{3}}{4}) = 1$ éq $\cos^2 x = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ éq

$\cos^2 x = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

b) On a : $(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{8+2\sqrt{12}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

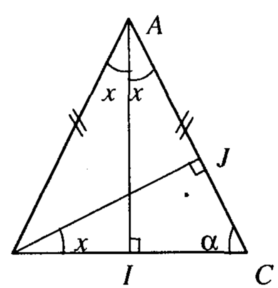
c) On a : $\cos^2 x = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = (\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})^2$ d'où $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

② $\text{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$

II /

a)



Soit $I = B * C$

On a : I =projeté ⊥ de A sur (BC)

(AI) est la bissectrice du secteur $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$

Soit J : projeté ⊥ de B sur (AC)) .

On a : $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$ d'où $J\hat{B}C = x$

On a : Dans le triangle BAJ (rectangle en J)

$\sin(2x) = \frac{BJ}{AB} = \frac{BJ}{a}$

Dans le triangle BCJ (rectangle en J)

$\cos x = \frac{BJ}{BC}$ d'où $BJ = \cos x . BC$

or : dans le triangle AIC (rectangle en I) on a :

$\sin x = \frac{IC}{AC} = \frac{IC}{a} = \frac{BC}{2a}$ (car : $BC = 2\,IC$)

d'où : $BC = 2\,a \sin x$.

on a ainsi $\begin{cases} \sin 2x = \frac{BJ}{a} & (1) \\ BJ = \cos x . BC & (2) \\ BC = 2a \sin x & (3) \end{cases}$

en remplaçant BC par $2a \sin x$ dans (2) , on obtient :
$BJ = 2\,a \cos x . \sin x$. d'où (1) s'écrit :

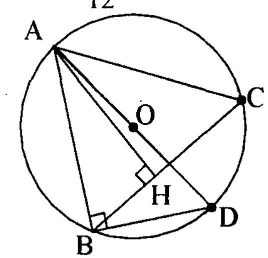
$\sin 2x = \frac{2a \cos x \sin x}{a} = 2 \cos x \sin x$

b) $\sin 2x = 2 \sin x . \cos x = 2.(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$

$= \frac{6-2}{8} = \frac{1}{2}$

② on a $\sin 2x = \frac{1}{2}$ donc $2x = \frac{\pi}{6}$ et par suite $x = \frac{\pi}{12}$

Solution 12 :



① On a $A\hat{C}B = \frac{1}{2}$ $A\hat{O}B$

Et : ADB $= \frac{1}{2} A\hat{O}B$ d'où : $A\hat{C}B = A\hat{O}B$

② Le triangle ADB est rectangle en B donc sin $A\hat{D}B = \frac{AB}{AD}$

③ On a d' après 2) sin $A\hat{D}B = \frac{AB}{AD}$ or AD = 2 r

d'où sin $A\hat{D}B = \frac{AB}{2r}$ et d'après ① $A\hat{D}B = A\hat{C}B$ d'où $\frac{AB}{\sin A\hat{C}B} = 2r$

Solution 13 :

① D'après la loi du sinus, on a dans le triangle AIB :

$$\frac{AB}{\sin I} = \frac{IB}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} \text{ d'où } \frac{\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{\sin\hat{I}} = \frac{IB}{AB}$$

② Dans le triangle AIC, d'après la loi du sinus on a :

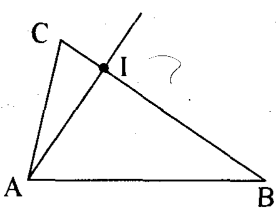
$$\frac{AC}{\sin\hat{I}} = \frac{IC}{\sin\frac{\hat{A}}{2}} \text{ d'où } \frac{\sin\frac{\hat{A}}{2}}{\sin\hat{I}} = \frac{IC}{AC}$$

③ D'après les deux premières questions on a :

$$\frac{\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{\sin\hat{I}} = \frac{IB}{AB} \text{ et } \frac{\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{\sin\hat{I}} = \frac{IC}{AC}$$

Donc $\frac{IB}{AB} = \frac{IC}{AC}$ d'où $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$

Solution 14 :



① D'après la formule d'El kashi on a :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB.AC\,.\cos\hat{A}$

  Donc $\cos\hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB.AC} = -\frac{1}{4}$

- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB.BC\,.\cos\hat{B}$

  Donc $\cos\hat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\,AB.AC} = \frac{11}{16}$

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC.BC.\cos\hat{C}$

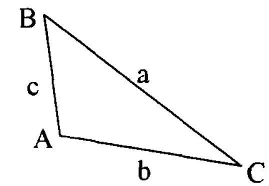
  Donc $\text{Cos}\,\hat{C} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2\,AB.AC} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$

② on a : $\cos\hat{A} = -\frac{1}{4}$ donc $\hat{A} \simeq 104°$

$\cos\hat{B} = \frac{11}{16}$ donc $\hat{B} \simeq 46{,}5°$

$\cos\hat{C} = \frac{7}{8}$ d'où $\hat{C} \simeq 28{,}9°$

Solution 15 :



① D'après la formule d'Elkashi on a :

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\hat{C}$

et $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$

Donc $b^2 - c^2 = c^2 - b^2 - 2a\,c\cos\hat{B} + 2ab\cos\hat{C}$.

Équivalent à $2(b^2 - c^2) = 2a\,(b\cos\hat{C} - c\cos\hat{B})$

D'où : $b^2 - c^2 = a\,(b\cos\hat{C} - \cos\hat{B})$

② ABC est un triangle isocèle de sommet principal A donc b = c or d'après 1) on a :

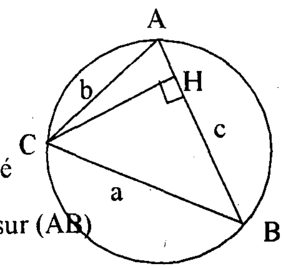
$$b^2 - c^2 = a(b\cos\hat{C} - c\cos\hat{B})$$

d'où $a(b\cos\hat{C} - c\cos\hat{B}) = 0$

équivalent à $ab(\cos\hat{C} - \cos\hat{B}) = 0$ (car b = c) or $ab \neq 0$

donc $\cos\hat{C} = \cos\hat{B}$.

Solution 16 :



① $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2\,R$

$\text{Sin}\,\hat{A} = \frac{HC}{AC} = \frac{HC}{b}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$S = \frac{1}{2}\,AB\,.\,CH = \frac{1}{2}\,C\,.\,b\sin\hat{A}$

Or $\frac{a}{\sin\hat{A}} = 2\,R \Rightarrow 2\,R\sin\hat{A} = a$

$$\sin\hat{A} = \frac{a}{2R}$$

$$S = \frac{1}{2}bc.\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

② $$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$

$$b = \frac{a}{\sin\hat{A}}\sin\hat{B} \text{ et } C = \frac{a.\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}.$$

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{a.\frac{\sin\hat{B}.a}{\sin\hat{A}}.\frac{\sin\hat{C}.a}{\sin\hat{A}}}{4.\frac{a}{2\sin\hat{A}}} = \frac{a^2\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{2\sin\hat{A}}$$

Solution 17 :

On a: $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$ donc $\begin{cases} a = 2R\sin\hat{A} \\ b = 2R\sin\hat{B} \\ c = 2R\sin\hat{C} \end{cases}$

On a : $2a = b + c$ donc $4R\sin\hat{A} = 2R\sin\hat{B} + 2R\sin C$

D'où : $2\sin\hat{A} = \sin\hat{B} + \sin\hat{C}$

Solution 18 :

① On sait que : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ (formule d'ElKashi)

Soit $\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \cos\hat{A}$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}\right)^2$$

$$= \left[1-\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}\right)\right]\left[1+\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}\right)\right]$$

$$= \frac{(b+c-a)(b+c+a)(a+b-c)(c+a-b)}{4b^2c^2}$$

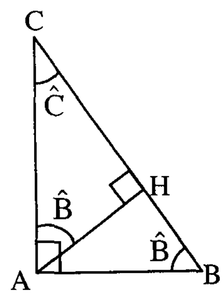
② $a + b + c = 2p$ et $a + b - c = 2p - 2c = 2(p-c)$
$b + c - a = 2p - 2a = 2(p-a)$ et $c + a - b = 2p - 2b = 2(p-b)$

$$\sin^2\hat{A} = \frac{2p-(2-(p-c)2(p-a)2(p-b)}{4b^2c^2} = \frac{4}{b^2c^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\sin\hat{A} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{tg}\,\hat{A} = \frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \frac{\left(\frac{25}{bc}\right)}{\frac{a^2+c^2-a^2}{2bc}}$$ (car $S = \frac{1}{2}\sin\hat{A}$ voir ex 17)

$$\text{tg}\,\hat{A} = \frac{25}{bc}.\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2} = \frac{450}{b^2+c^2-a^2}$$



Solution 19 :

- $\sin\hat{B} = \frac{AH}{AB}$ d'où : $AH = c\sin\hat{B}$

or $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ d'où $c = a\cos\hat{B}$

et par suite $AH = a..\sin\hat{B}.\cos\hat{B}$

- $\text{Cos}\,\hat{B} = \frac{BH}{C}$ d'où $BH = c\cos\hat{B}$

Or $c = a\cos\hat{B}$ d'où : $BH = a\cos^2\hat{B}$

- $\text{Sin}\,\hat{B} = \frac{CH}{AC}$ d'où : $CH = AC.\sin\hat{B}$

$CH = b\sin\hat{B}$ Or : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}}$ or $\hat{A} = 90°$

d'où : $b = \frac{a\sin\hat{B}}{\sin\hat{A}} = a\sin\hat{B}$ et par suite : $CH = a\sin^2\hat{B}$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Résultats à retenir :

❑ Coordonnées de barycentre :

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

⇨ Soient a (x_A , y_A) , B(x_B , y_B) deux points du plan et I le milieu du segment [AB] .

On a $I\left(\dfrac{X_A + X_B}{2}, \dfrac{Y_A + Y_B}{2}\right)$

⇨ Soient A(x_A , y_A) , B(x_B , y_B) deux points du plan et α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Le barycentre G des points (A , α) et (B , β) a pour coordonnées $G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}, \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$

⇨ Soient A (x_A , y_A) , B (x_B , y_B) , C (x_C , y_C) trois points du plan et α , β , γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Le barycentre G des points (A , α) ; (B , β) et (C , γ) a pour coordonnées :

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

❑ Equation cartésienne d'une droite :

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

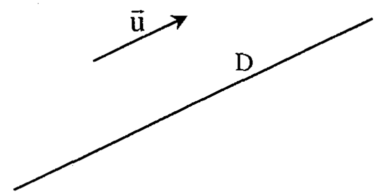
⇨ Toute droite admet une équation cartésienne de la forme $a x + b y + c = 0$, où a , b et c trois réels avec $(a, b) \neq (0,0)$.

⇨ Soient a ,b et c trois réels tels que $(a , b) \neq (0,0)$. L'équation $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite .

❑ Vecteur directeur – Droites parallèles :

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$

⇨ Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul . L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est une droite passant par A .



$\vec{u}$ est appelé vecteur directeur de cette droite .

⇨ Soit D une droite et A , B deux points distincts de cette droite .

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite D

⇨ Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D

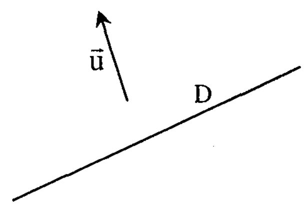
⇨ Soient D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

⇨ (D et D' sont parallèles) si et seulement si ($\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires) .

⇨ Soient D et D' deux droites d'équations respectives $a x + by + c = 0$ et $a'+b'y + c' = 0$. D // D' si seulement si $ab' - a b' = 0$.

❑ *Vecteur normal à une droite – Droites perpendiculaires :*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



➯ Soit A un point du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul . L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux est une droite passant par A .

$\vec{n}$ est appelé vecteur normal à cette droite .

➯ Soit D une droite d'équation : $ax + by + c = 0$

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D .

➯ Soient D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

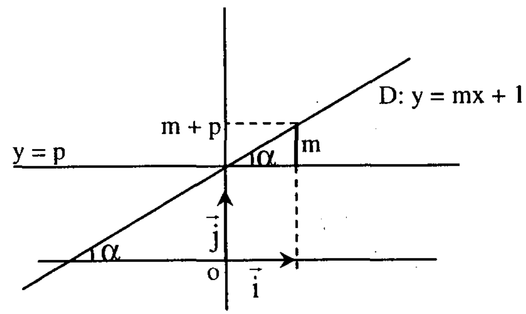
$D \perp D'$ si seulement si $\vec{u} \perp \vec{u}'$

➯ Soient D et D' deux droites d'équations respectives, $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$

$D \perp D'$ si seulement si $aa' + bb' = 0$

❑ *Equation réduite – Coefficient directeur :*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



➯ Toute droite D non parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ admet une équation de type $y = mx + p$, appelée l'équation réduite de la droite D . M est appelé le coefficient directeur de la droite D , p est l'ordonnée à l'origine .

On a $\tan(\alpha) = m$

➯ Soit D la droite d'équation réduite $y = mx + p$

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D .

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D .

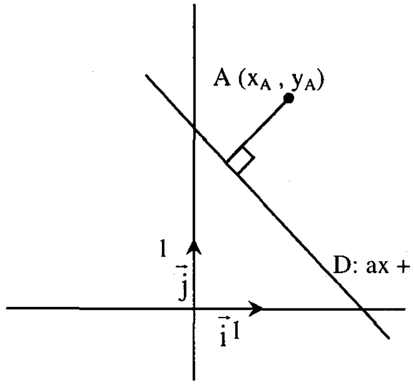
➯ Soient D et d' deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$

$D \parallel D'$ si est seulement si $m = m'$.

$D \perp D'$ si seulement si $m m' = -1$

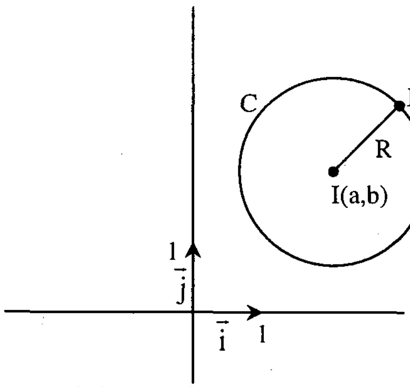
❑ *Distance d'un point à une droite :*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$



Soit D la droite d'équation ax + by + c = 0 .La distance d'un point A (x_A , y_A) à la droite D est $d(A,D) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

❑ ***Equation d'un cercle :***



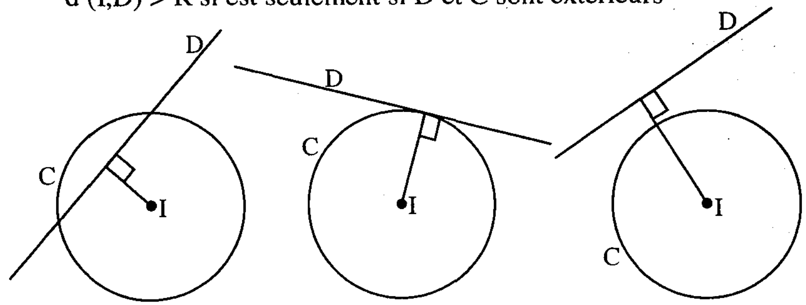
⇨ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit I (a,b) un point du plan et R un réel strictement positif . Une équation cartésienne du cercle C de centre I et de rayon R est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

⇨ Soit C un cercle de centre I et de rayon R et D une droite . On a :

d(I,D) < R si seulement si D et C sont sécants .

d(I,D) = R si est seulement si D est tangente à C .

d (I,D) > R si est seulement si D et C sont extérieurs



⇨ Soit C un cercle de centre I et de rayon R et D une droite . On a :

D(I,D) $\prec$ R si seulement si D et C sont sécants .

d(I,D) = R si est seulement si D est tangente à C .

d (I,D) $\succ$ R si est seulement si D et C sont extérieurs .

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soient A (1,-3) et B(4,1) .

① Déterminer les coordonnées du point I milieu de [AB] .

② Déterminer les coordonnées du point C tel que $2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

③ Déterminer les coordonnées du point G : barycentre des points pondérés (A,l) et (B,-2).

④ Déterminer les coordonnées du point D tel que OABD soit parallélogramme

Exercice 2 : $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère du plan .

Soit $\vec{u} = (m+1)\vec{i} + (2-m)\vec{j}$ où m est un paramètre réel.

① Déterminer m pour que $\vec{u}$ soit colinéaire avec $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

② Soit le point A (2,1).

Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ_m passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

③ Déterminer les coordonnées du point B image de A par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Exercice 3 : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan

On considère les trois droites D_1 , D_2 et D_3 d'équations respectives:
$x - y - 1 = 0$; $2x + y - 5 = 0$; $-x + 2y = 0$.

① a) Déterminer $D_1 \cap (O, \vec{i})$

b) Déterminer $D_2 \cap (O, \vec{j})$

② Montrer que D_1 , D_2 et D_3 sont concourantes .

③ Soit E(3,-1) .

a) Vérifier que E n'appartient pas à D_1.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par E et parallèle à D_1 .

Exercice 4 : Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan ;
m un paramètre réel et Δ_m l'ensemble des points M (x,y) tels que:
$(m+2)x + (m^2 - 4)y + 1 = 0$

① Déterminer Δ_m lorsque m = -2.

② Montrer que Δ_m est une droite pour $m \neq -2$.

③ Déterminer m pour que $A (2,1) \in \Delta_m$.

④ Soit D la droite passant par A et de coefficient directeur $-\dfrac{1}{3}$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite D .

b) Déterminer la valeur de m pour que Δ_m et D soient parallèle .

Exercice 5 : Soit $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan **P**.

On considère les points $A(1,0)$; $B(1,1)$ et $C(0,1)$.

① Montrer que $OABC$ est un carré .

② Soit $M_0 = O * A$ et $N_0 = A * B$ et $I = A * M_0$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BM_0).

b) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur (BM_0) .

③ Déterminer l'ensemble des points M du plan / $MA = MB$.

④ Montrer que les droites (HI) et (HN_0) sont orthogonales .

Exercice 6 : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan .

On considère les vecteurs :

$$\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

① Montrer que $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé du plan .

② Soit $\vec{u} = (2m+1)\vec{i} - m\vec{j}$. Déterminer m pour que :

a) $\|\vec{u}\| = 1$.

b) $\vec{u} \perp \vec{e}_1$.

③ Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan tel que :
$\overrightarrow{OM}$ et $\vec{e}_2$ soient orthogonaux .

Exercice 7 : $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan .

On considère les points $A(1,3)$; $B(4,-1)$ et $C(-3,0)$.

① Démontrer que ABC est un triangle , isocèle rectangle en A .

② a) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC .

b) En déduire la distance du point A à la droite (BC) .

③ Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) .

Exercice 8 : $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan .

Soit $\Delta : 2x+3y-1=0$ et $A(1,2)$.

① Calculer $d(A, \Delta)$.

② Soit $m \in \Re$ et $\mathcal{D}_m : (2m+1)x - y + 4 = 0$.

Déterminer m pour que $d(0,\mathcal{D}_m) = 1$.

③ Déterminer l'ensemble (⑤) des points $M(x,y)$ tel que :

$d(M, \Delta) = \sqrt{13}$.

④ Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[OA]$

Exercice 9 : $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan .

On considère les droites : $\mathcal{D}_1 : x+2y+1=0$ et $\mathcal{D}_2 : -2x+y+3=0$.

① Montrer que $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$.

② Trouver l'ensemble (ξ) des points $M(x,y)$ tels que :

$d(M, \mathcal{D}_1) = d(M, \mathcal{D}_2)$

③ Soit $A(1,0)$.

a) Vérifier que $A \notin \mathcal{D}_1$.

b) Calculer la distance du point A à $\mathcal{D}_1$.

c) Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}_1$.

Trouver les coordonnées de H .

④ Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tel que : $\dfrac{AM}{OM} = 2$.

Exercice 10 : Soit $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan .

On considère les points $A(1,0)$; $B(0,1)$ et $C(-1,1)$.

① Trouver les coordonnées du point H orthocentre du triangle ABC .

Placer les points A, B, C et H .

② Trouver les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC .

③ Soit I le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC .

a) Trouver les coordonnées du point I .

b) Trouver une relation vectorielle liant les points I, G, H .

④ Déterminer l'ensemble (Γ_k) des points M tel que :

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 = k \quad où \quad k \in \Re .$$

Exercice 11 : Soit $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$.

Soit $m \in \Re$ et $\mathcal{C}_m$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$x^2 + y^2 - 2mx + 4my - 1 = 0$.

① Montrer que $\mathcal{C}_m$ est un cercle dont on précisera le centre I_m et le rayon .

② Déterminer l'ensemble décrit par le point I_m .

③ Déterminer $\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1$.

Exercice 12 : R $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan .

① Soit $A(0,2)$ et $B(4,-4)$.

Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

② Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ tangente à $\mathcal{C}$ en A .

③ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $(0,\vec{j})$.

④ Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2 .

Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}' = h(\mathcal{C})$.

Exercice 13 : R $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan .

① Soit D la droite passant par $A(4,6)$ et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

Donner une équation cartésienne de D .

② a) Déterminer une équation cartésienne du cercle C de centre $I(-1,1)$ et tangent à la droite D .

b) Trouver les coordonnées du point de contact H de C et D .

③ Trouver les tangentes à C issues du point $B(2,0)$.

④ Déterminer l'ensemble Γ des points $M(x,y)$ tels que :

$OM^2 + AM^2 = 10$.

⑤ Soit $m \in \Re$ et $(C_m) : mx^2 + my^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

a) Préciser (C_0) .

b) Déterminer suivant $m \neq 0$, l'ensemble (C_m) .

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 14 : $\mathscr{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan .

Soient les points : A (0,2) , B (3,4) et C (2m +1, m + 3)

① Déterminer m pour que A ,B , C soient alignés .

② Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de coefficient directeur 2 .
Donner une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$.

③ Soit t : la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}'$ image de $\mathscr{D}$ par t.

Exercice 15 : $\mathscr{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan .

① On pose $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
Montrer que $\mathscr{B}'(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathscr{V}$.

② Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{i}$ dans B' .

③ Soit $\Delta_m = (2m+1)x - my + m + 2 = 0$

a) Montrer que Δ_m est une droite.

b) Etudier $\Delta_m \cap (O,\vec{i})$

④ Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2.
Déterminer $\Delta'_m = h(\Delta_m)$.(donner une équation de Δ_m)

Exercice 16 : $\mathscr{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan .

Soient les points : A(0,2) ,B(3,4) et C(3m +4 , m -1)

① Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

② Déterminer l'ensemble Δ décrit par le point C lorsque m varie.

③ Déterminer $(AB) \cap \Delta$.

④ Soit G le barycentre des points (A,2) et (B,-1).
Déterminer les coordonnées du point G .

Exercice 17 : $\mathscr{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan .

On considère les points : A (0,2) , B (3,-1) , C (1,2) et D (3,0).

① Déterminer les coordonnées des points L et M tels que:
L = A* D et M = B * C .

② Soit I l'image de A par la translation de vecteur et $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et J l'image de D par la translation de vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

a) Déterminer les coordonnées points I et J.
b) En déduire les coordonnées du point K = I * J.

③ Montrer que L ,K e M sont alignés .

Exercice 18 : $\mathscr{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan .

Soient les points : A (3,0) ,B (1,-1), C (1,2) et D (3,3).

① Montrer que ABCD est un parallélogramme.

② Soit I et J deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
Déterminer les coordonnées des points I et J .

③ La parallèle à (BC) passant par I coupe (CD)en K .
Déterminer les coordonnées du point I .

④ La parallèle à (AB) passant par J coupe (BC) en L .
Déterminer les coordonnées du point L .

⑤ Démontrer que les droites (AC) , (IL) et (JK) sont concourantes .

Exercice 19 : Soit $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$

① Tracer l'hyperbole $\mathscr{H}$ représentative de la fonction *f* .

② Soit *A* et *B* deux points de $\mathscr{H}$ d'abscisses respectives 3 et $\frac{-1}{3}$.
Quelle est l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

③ Déterminer $\mathscr{C} \cap \mathscr{H}$.

④ Soit I et J les points de $\mathcal{H}$ d'abscisses respectives -1 et 1.

a) Déterminer les coordonnées du point H orthocentre du triangle AIJ

b) Montrer que le point H appartient à $\mathcal{H}$.

Exercice 20 : $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soient $A(1,1)$; $B(2,2)$; $C(1,3)$ et $D(0,2)$.

① a) Montrer que $ABCD$ est un carré.

b) Trouver les coordonnées du point I centre de $ABCD$.

② Soit $\mathscr{C}$ le centre circonscrit au carré $ABCD$.

a) Trouver une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

b) Montrer que $\mathscr{C}$ est tangente à l'axe des ordonnées.

Exercice 21 : Soit $(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soit $J\left(1,\frac{1}{2}\right)$; $K\left(0,\frac{-1}{2}\right)$; $B(1,0)$ et $D(0,1)$.

① Montrer que $(JK)\perp(BD)$.

② Soit $I = O * B$, montrer que $(OJ)\perp(ID)$.

③ Soit $m\in\Re$ et $\mathscr{C}_m$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$x^2+y^2-(3m+2)x+4my-1=0$.

a) Montrer que $\mathscr{C}_m$ est un cercle.

b) Trouver m pour que $A\in\mathscr{C}_m$.

Exercice 22 : $\mathscr{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

$A(0,2)$; $B(-1,1)$ et $C(3,0)$.

① Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

② Déterminer les coordonnées du point H orthocentre du triangle ABC.

③ Soit $I = B * C$; $J = A * H$ et B' le projeté ortnogonale de B sur (AC).

a) Trouver les coordonnées des points I, J et B'.

b) Montrer que $B'IJ$ est un triangle rectangle en B'.

④ Déterminer les tangentes à $\mathscr{C}$ issue du point $D(0,3)$

Exercice 23 : $\mathscr{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

① Trouver une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

② Soit $t\in[0,1]$ et $M(t,\sqrt{1-t^2})$.

Montrer que $M\in\mathscr{C}$.

③ Soit $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

a) Trouver les coordonnées du point C tels que : $MABC$ soit un parallélogramme.

b) Soit H l'orthocentre du triangle MBC. montre que H est un point fixe indépendant de t.

Exercice 24 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

Soient $A(2,0)$; $B(-2,0)$; $C(0,-2)$ et $J(1,0)$.

① Calculer la distance du point C à la droite (AB).

② Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

③ Soit D le point où la droite (CJ) recoupe le cercle $\mathscr{C}$

Trouver les coordonnées du point D.

Soit E le point d'intersection de (BD) et (AC) et F le point d'intersection de (AD) et (BC).

Montrer que (AB) $\perp$ (EF).

SOLUTIONS

Solution 1 :

① On a $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1$ d'où $I(\frac{5}{2} ; -1)$.

② $2\vec{AC} + 3\vec{BC} = \vec{AB}$ éq à $2\vec{AB} + 2\vec{BC} + 3\vec{BC} = \vec{AB}$ éq à $5\vec{BC} = \vec{BA}$

Posons C(x,y) d'où $\begin{cases} 5(x-4) = -3 \\ 5(y-1) = -4 \end{cases}$ éq $\begin{cases} x - 4 = \frac{-3}{5} \\ y - 1 = \frac{-4}{5} \end{cases}$

D'où $x = \frac{17}{5}$ et $y = \frac{1}{5}$ et par suite $C(\frac{17}{5}, \frac{1}{5})$

③ On a : $\vec{GA} - 2\vec{GB} = \vec{0}$ éq à $\vec{GA} - 2\vec{GA} - 2\vec{AB} = \vec{0}$ éq $-\vec{GA} - 2\vec{AB} = \vec{0}$ éq à $\vec{AG} = 2\vec{AB}$.

Posons G(x,y) d'où $\begin{cases} x - 1 = 6 \\ y + 3 = 8 \end{cases}$ donc x = 7 et y = 5 d'où G(7,5)

④ OABD est un parallélogramme , signifie que $\vec{OA} = \vec{DB}$

Posons D(x,y) d'où $\begin{cases} 4 - x = 1 \\ 1 - y = -3 \end{cases}$ d'où x = 3 et y = 4 donc D(3,4) .

Solution 2 :

① $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi leurs déterminant est nul

éq à $\begin{vmatrix} m+1 & 2 \\ 2-m & -3 \end{vmatrix} = 0$ éq à -3(m +1) –2 (2 -m) = 0 éq à

-3m -3 -4 +2m = 0 éq à m = -7 .

② Une équation cartésienne d'une droite est de la forme : ax + by + c = 0

avec $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite .

On a : $\vec{u}\begin{pmatrix} m+1 \\ 2-m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ_m donc a = 2 –m et

b = -m -1 d'où Δ_m : (2-m) x –(m+1) y + c = 0 or A (2,1) ∈ Δ_m

d'où 2(2 –m) –m -1 +c = 0 donc c = 3m -3 et par suite une équation cartésienne de Δ_m est : (2-m) x –(m+1) y + 3m – 3 = 0

③ On a $t_{\vec{v}}$ (A) = B donc $\vec{AB} = \vec{v}$

D'où $\begin{cases} x_B - 2 = 2 \\ y_B - 1 = -3 \end{cases}$ éq à $\begin{cases} x_B = 4 \\ \text{et} \\ y_B = -2 \end{cases}$ et par suite B (4 , -2) .

Solution 3 :

① a) M (x,y) ∈ $D_1 \cap (O, \vec{i})$ signifie que M(x,y) ∈ $(O, \vec{i})$ et M(x,y) ∈ D_1

or la droite $(O, \vec{i})$ a pour équation cartésienne : y = 0 .

on a donc M (x,y) ∈ $D_1 \cap (O, \vec{i})$ signifie que $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ \text{et} \\ y = 0 \end{cases}$ éq à

$\begin{cases} x = 1 \\ \text{et} \\ y = 0 \end{cases}$ d'où $D_1 \cap (O, \vec{i}) = \{A(1,0)\}$

b) La droite $(O, \vec{j})$ a pour équation cartésienne x = 0 .

d'où M (x,y) ∈ $D_2 \cap (O, \vec{j})$ signifie que $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ \text{et} \\ x = 0 \end{cases}$ éq à

$\begin{cases} x = 0 \\ \text{et} \\ y = 5 \end{cases}$ d'où $D_2 \cap (O, \vec{j}) = \{ B(0,5) \}$

② * Déterminons $D_1 \cap D_2$.

On a M (x,y) ∈ $D_1 \cap D_2$ signifie que $\begin{cases} x-y-1=0 & (1) \\ 2x+y-5=0 & (2) \end{cases}$

(1) + (2) donne 3x = 6 donc x = 2 .
En remplaçant x par 2 dans (1) on obtient y = 1 et par suite
$D_1 \cap D_2 = \{B(2,1)\}$

* vérifions que B (2,1) ∈ D_3
On a : -2 + 2.1 = 0 donc B ∈ D_2 et par suite D_1 , D_2 , D_3 sont concurrentes au points B (2,1) .

③ a) Les coordonnées de E ne vérifient pas l'équation de D_1 donc E ∉ D_1 .

b) La droite D est parallèle à D_1 donc la vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ directeur de D_1 est lui-même un vecteur directeur de D , donc une équation de D est la forme : x –y +c = 0 or E (3-1) ∈ D d'où C = -4 .
et par suite une équation cartésienne de D est : x –y -4 = 0 .

Solution 4 :

① On a m = -2
$\Delta_{-2} : 0.x+0.y+1=0$ ce qui est impossible , donc $\Delta_{-2} = \phi$

② Δ_m a pour équation de la forme ax +by +c = 0 avec a = m +2 ;
b = m² - 4 et c = 1 .
Δ_m est une droite si et seulement si (a , b) ≠ (0 , 0)

Si (a , b) = (0 , 0) alors $\begin{cases} m+2=0 \\ \text{et} \\ m^2-4=0 \end{cases}$ d'où m = -2

ce qui est impossible car m ≠ -2 .
d'où Δ_m : ax + by + c = 0 avec (a,b) ≠ (0,0) donc Δ_m est une droite .

③ A(2,1) ∈ Δ_m éq 2(m+2) + m² - 4+1 = 0 éq m² + 2m +1 = 0
éq (m+1)² = 0 d'où m= -1

④ a) D: $y = \frac{-1}{3}x + c$ or A(2,1) ∈ D donc $1 = \frac{-2}{3} + c$ d'où $c = \frac{5}{3}$

D : $y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{3}$

b) D et D_m sont parallèles si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

or $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4-m^2\\ m+2\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -1 & 4-m^2 \\ \frac{1}{3} & m+2 \end{vmatrix} = 0$ éq $-(m+2) - \frac{1}{3}(4-m^2) = 0$ éq

$-(m+2) - \frac{1}{3}(2-m)(m+2) = 0$ éq $(m+2)(1+\frac{1}{3}(2-m)) = 0$

éq $(m+2)(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}m) = 0$ éq m = -2 ou m = 5 or m ≠ −2 donc m = 5

Solution 5 :

① On a :

$OA = \sqrt{1^2+0^2} = 1$. $AB = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

$BC = \sqrt{1^2+0^2} = 1$ $CO = \sqrt{1^2+0^2} = 1$.

On a : $OA = AB = BC = OC$; $OABC$ est un losange .

Or $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

On a : $xx' + yy' = (1.0) + (0.1) = 0$. donc $OABC$ est un carré .

② a) $M_0 = O * A$ d'où $M_0(\frac{1}{2},0)$: $\overrightarrow{BM_0}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$

$M \in (BM_0)$ éq $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM_0}$ sont colinéaires .

$\begin{vmatrix} x-1 & -1/2 \\ y-1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ éq $-(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) = 0$

éq $-2x+2+y-1=0$ d'où $(BM_0) : -2x+y+1=0$

b) On a : $H(a,b) \in (BM_0)$ éq $-2a+b+1=0$.

D'autre part : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM_0}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux et par suite

$\frac{-1}{2}(a-1)-b=0$ d'où $b=\frac{-1}{2}(a-1)$.

on a ainsi $\begin{cases} -2a+b+1=0 & (1) \\ b=\frac{-1}{2}(a-1) & (2) \end{cases}$

(1) s'écrit : $-2a-\frac{1}{2}(a-1)+1=0$ éq $\frac{-5}{2}a+\frac{3}{2}=0$ d'où $a=\frac{3}{5}$

et par suite $b=\frac{1}{5}$ d'où $H(\frac{3}{5},\frac{1}{5})$

③ $MA=MB$ éq $\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}$

éq $y^2=(1-y)^2$ éq $y=\frac{1}{2}$.

L'ensemble est donc la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$; c'est la médiatrice de $[AB]$.

④ On a : $I=A*M_0$ donc $I(\frac{3}{4},0)$.

$\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix} \frac{3}{5}-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{5}-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix} \frac{-3}{20} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

On a : $N_0=A*B$ donc $N_0(1,\frac{1}{2})$ d'où $\overrightarrow{HN_0}\begin{pmatrix} 1-\frac{3}{5} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{HN_0}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

On a : $xx'+yy'=(\frac{-3}{20}.\frac{2}{5})+\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}=0$ donc $(HI)\perp(HN_0)$.

Solution 6 :

① On a : $\vec{e_1}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{e_2}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

On a : $xx'+yy'=\frac{2}{4}-\frac{2}{4}=0$ d'où $\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$

D'autre part on a : $\|\vec{e_1}\|=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=1$ et $\|\vec{e_2}\|=1$

On a ainsi $\begin{cases} \|\vec{e_1}\|=\|\vec{e_2}\|=1 \\ \vec{e_1}\perp\vec{e_2} \end{cases}$ d'où $\mathcal{R}(0,\vec{e_1},\vec{e_2})$ est un repère orthonormé

② a) $\|\vec{u}\|=\sqrt{(2m+1)^2+m^2}=\sqrt{5m^2+4m+1}$.

On a : $\|\vec{u}\|=1$ éq $5m^2+4m=0$ éq $m(5m+4)=0$

éq $m=0$ ou $m=\frac{-4}{5}$.

b) $\vec{u}\perp\vec{e_1}$ signifie : $\frac{\sqrt{2}}{2}(2m+1)+m\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ éq $2m+1+m=0$

éq $m=\frac{-1}{3}$

③ $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{e_2}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

on a : $\overrightarrow{OM}\perp\vec{e_2}$ éq $\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=0$ éq $x+y=0$.

L'ensemble Δ est la droite d'équation $x+y=0$.

Solution 7 :

① $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

on a : $xx'+yy'=-12+12=0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ et par suite ABC est un triangle rectangle en A. $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{9+16}=5$ et $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{16+9}=5$

d'où ABC est isocèle.

② a) $\mathcal{A} = \frac{AB.AC}{2}$. on a : $AB = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$ et $AC = 5$; d'où $\mathcal{A} = \frac{25}{2}$

b) Soit H_1 le projeté orthogonal de A sur (BC) .

on a : $\frac{AH_1.BC}{2} = \mathcal{A}$.

or $AH_1 = d(A,(BC))$ d'où $d(A,(BC)) = \frac{2}{BC}\mathcal{A} = \frac{25}{\sqrt{10}}$.

($BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5 + 5 = 10$).

③ Soit Δ la droite passant par A et $\perp (BC)$.

$M(x,y) \in \Delta$ éq $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$.

or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

on a : $-7(x-1) + y - 3 = 0$ d'où $\Delta : -7x + y + 4 = 0$

Solution 8 : $\Delta : 2x + 3y - 1 = 0$; $A(1,2)$

① $d(A, \Delta) = \frac{|2+6-1|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$.

② $d(0,\mathcal{D}_m) = 1$ éq à $\frac{4}{\sqrt{4m^2+4m+2}} = 1$ éq à $2m^2 + 2m - 7 = 0$

$\Delta = 60$ $m' = \frac{-1-\sqrt{15}}{2}$ et $m'' = \frac{-1+\sqrt{15}}{2}$

③ $d(M, \Delta) = \frac{|2x+3y-1|}{\sqrt{13}}$. $d(M, \Delta) = \sqrt{13}$ éq $|2x+3y-1| = 13$

éq ($2x + 3y - 1 = 13$ *ou* $2x + 3y - 1 = -13$)

(⑤) $= \Delta_1 \cup \Delta_2$ où $\Delta_1 : 2x + 3y - 14 = 0$; $\Delta_2 : 2x + 3y + 12 = 0$

④ $M(x,y)$ appartient à la médiatrice de $[OA]$ signifie $OM = AM$

signifie $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ éq

$x^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$ éq $2x + 4y - 5 = 0$

La médiatrice de $[OA]$ a pour équation cartésienne : $2x + 4y - 5 = 0$.

Solution 9 : ① $\vec{u}_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

on a : $xx'+yy' = 2 - 2 = 0$ donc $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$

② $d(M, \mathcal{D}_1) = \frac{|x+2y+1|}{\sqrt{5}}$; $d(M, \mathcal{D}_2) = \frac{|-2x+y+3|}{\sqrt{5}}$.

on a : $d(M, \mathcal{D}_1) = d(M, \mathcal{D}_2)$ éq $|x+2y+1| = |-2x+y+3|$ éq

$x + 2y + 1 = -2x + y + 3$ ou $x + 2y + 1 = 2x - y - 3$ éq

$3x + y - 2 = 0$ ou $-x + 3y + 4 = 0$ où Δ_1 est la droite d'équation :

$3x + y - 2 = 0$ et Δ_2 la droite d'équation : $-x + 3y + 4 = 0$

donc (⑤) $= \Delta_1 \cup \Delta_2$.

③ a) $\mathcal{D}_1 : x + 2y + 1 = 0$. On a : $1 + 2.0 + 1 = 2 \neq 0$ donc $A \notin \mathcal{D}_1$.

b) $d(A, \mathcal{D}_1) = \frac{|1+0+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) • On a : $H(a,b) \in \mathcal{D}_1$ éq $a + 2b + 1 = 0$

• D'autre part : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} a-1 \\ b-0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonales

donc $-2(a-1) + b = 0$ d'où $b = 2(a-1)$.

on a ainsi $\begin{cases} a + 2b + 1 = 0 & (1) \\ b = 2(a-1) & (2) \end{cases}$

(1) s'écrit : $a + 4(a-1) + 1 = 0$ d'où $5a - 3 = 0$

et par suite $a = \frac{3}{5}$ et $b = \frac{-4}{5}$.

<u>*Conclusion*</u> : $H(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5})$

④ $AM = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$; $OM = \sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{AM}{OM} = 2$ éq $\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$ éq

$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$ éq

$3x^2+2x+3y^2-1=0$ éq $x^2+\frac{2}{3}x+y^2-\frac{1}{3}=0$ éq

$(x+\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}+y^2-\frac{1}{3}=0$ éq $(x+\frac{1}{3})^2+y^2=\frac{4}{9}=(\frac{2}{3})^2$.

D'où Γ est le cercle de centre $\omega(\frac{-1}{3},0)$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

Solution 10 :

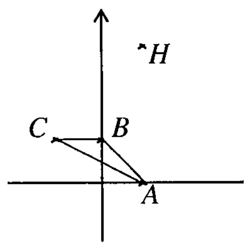
① $H(a,b)$ orthocentre du triangle ABC signifie que

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$.

* on a : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}a-1\\b-0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ signifie $-a+1=0$ d'où $a=1$.

* $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}a-0\\b-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$



$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ éq $-2a+b-1=0$

d'où $b-3=0$ et par suite $b=3$.

$H(1,3)$ est l'orthocentre du triangle ABC

② on a : $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$ éq

$$\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x-0\\y-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ éq}$$

$\begin{cases}3x=0\\3y-2=0\end{cases}$ d'où $x=0$ et $y=\frac{2}{3}$.

Conclusion : $G(0,\frac{2}{3})$ est le centre de gravité du triangle ABC.

③ on a : $IA=IB=IC$, soit $I(x,y)$

a) $IA=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$; $IB=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$;

$IC=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

$IB=IC$ éq : $x^2+(y-1)^2=(x+1)^2+(y-1)^2$ éq $x^2=x^2+2x+1$

d'où $x=\frac{-1}{2}$.

$IA=IB$ éq $(x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2$ éq

$x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2-2y+1$ éq $x=y$ or $x=\frac{-1}{2}$ d'où $y=\frac{-1}{2}$

Conclusion : $I(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2})$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

b) • $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}0+\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{7}{6}\end{pmatrix}$ • $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}\\3+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$

d'où $\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IG}$.

Remarque : ABC est un triangle quelconque

I : le centre du cercle circonscrit

H : l'orthocentre

G : le centre de gravité

On a : $\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IG}$

④ $AM^2+BM^2+CM^2=k$ éq

$(x-1)^2+y^2+x^2+(y-1)^2+(x+1)^2+(y-1)^2=k$ éq

$x^2-2x+1+y^2+x^2+y^2-2y+1+x^2+2x+1+y^2-2y+1=k$

éq $3x^2+3y^2-4y+4=k$ éq $x^2+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{3}-\frac{k}{3}=0$ éq

$x^2+(y-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}-\frac{k}{3}=0$ éq $x^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{k}{3}-\frac{8}{9}$

1^{er} cas : si $k=\frac{8}{3}$ alors : $\Gamma_k=\{\omega(0,\frac{2}{3})\}$

$2^{ème}$ cas : si $k<\frac{8}{3}$ alors : $\Gamma_k=\phi$

$3^{ème}$ cas : si $k>\frac{8}{3}$ alors : Γ_k est le cercle de centre $\omega(0,\frac{2}{3})$ et de

rayon $\sqrt{\frac{k}{3}-\frac{8}{9}}$.

Solution 11 :

① $x^2+y^2-2mx+4my-1=0$ éq

$(x^2-2mx)+y^2+4my-1=0$ éq

$(x-m)^2-m^2+(y+2m)^2-4m^2-1=0$ éq

$(x-m)^2+(y+2m)^2=5m^2+1$

d'où $\mathscr{C}_m$ est un cercle de centre $I_m\,(m,-2m)$ et de rayon $\sqrt{5m^2+1}$.

② On a : $I_m\,(m,-2m)$

On pose : $\begin{cases} x=m \\ et \\ y=-2m \end{cases}$; on obtient $y=-2x$.

Le point I_m décrit la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x+y=0$.

③ $M(x,y)\in \mathscr{C}_0 \cap \mathscr{C}_1$ éq $\begin{cases} x^2+y^2-1=0 & (1) \\ x^2+y^2-2x+4y-1=0 & (2) \end{cases}$

(2) s'écrit : $-2x+4y=0$ d'où $x=2y$.

(1) devient : $4y^2+y^2-1=0$ éq $5y^2=1$ et par suite

$$y=\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ ou } y=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

d'où $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{C}_1 = \left\{ A(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})\ ;\ B(\frac{-2\sqrt{5}}{5},\frac{-\sqrt{5}}{5}) \right\}$.

Solution 12 :

Soit $\omega = A * B$, on a $\omega(2,-1)$

① ω est le centre du cercle $\mathscr{C}$,

son rayon est $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(4-0)^2+(-4-2)^2}}{2}=\sqrt{13}$

$\mathscr{C} : (x-2)^2+(y+1)^2=13$.

② $M(x,y)\in\Delta$ éq $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{A\omega}$.

Soit $M(x,y)$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix}$; on a $\overrightarrow{A\omega}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi on a : $2x-3(y-2)=0$ d'où $\Delta : 2x-3y+6=0$

③ $M(x,y)\in \mathscr{C}\cap(0,\vec{j})$ éq $\begin{cases} (x-2)^2+(y+1)^2=13 & (1) \\ x=0 & (2) \end{cases}$

(1) s'écrit : $4+(y+1)^2=13$ d'où $(y+1)^2=9$ et par suite

$y+1=3$ ou $y+1=-3$ d'où $y=2$ ou $y=-4$.

<u>*Conclusion*</u> : $\mathscr{C}\cap(0,\vec{j}) = \{ I(0,2)\ ;\ J(0,-4) \}$.

④ $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\omega(2,-1)$ et de rayon $r=\sqrt{13}$.

donc $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre $\omega'=h(\omega)$ et de rayon $R=|k|r=2\sqrt{13}$

- Détermination des coordonnées du point ω' .

On a : $h(\omega)=\omega'$ éq $\overrightarrow{A\omega'}=k\,\overrightarrow{A\omega}$.

Soit $\omega'(x,y)$, on a ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ d'où on a : $x=4$ et $y-2=-6$

et par suite $\omega'(4,-4)$.

Ainsi $\mathscr{C}'$: $(x-4)^2+(y+4)^2=52$.

Solution 13 :

① Le coefficient directeur de $\mathscr{D}$ est $\frac{1}{2}$ d'où $\mathscr{D} : y=\frac{1}{2}x+b$.

or $A(4,6)\in\mathscr{D}$ donc $6=2+b$ et par suite $b=4$ ainsi $\mathscr{D} : y=\frac{1}{2}x+4$.

② a) $\mathscr{D}$ est tangent à $\mathscr{C}$ donc le rayon R du cercle $\mathscr{C}$ est : $R=d\,(I,\mathscr{D})$.

or $\mathscr{D} : \frac{1}{2}x-y+4=0$ et $I(-1,1)$ donc $R=\dfrac{\left|\frac{-1}{2}-1+4\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=\sqrt{5}$

d'où : $(x+1)^2+(y-1)^2=5$

b) $H(x,y)$ est le point de contact de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$; on a ainsi :

$\begin{cases} H\in\mathscr{D} \\ \text{et} \\ \overrightarrow{IH}\perp\vec{u} \end{cases}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$

- $H\in\mathscr{D}$ éq : $y=\frac{1}{2}x+4$.
- $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $x+1+\frac{1}{2}(y-1)=0$ et par suite

$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0$.

On a ainsi le système suivant : $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 & (1) \\ x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0 & (2) \end{cases}$

(2) s'écrit : $x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + 4) + \frac{1}{2} = 0$ éq $x + \frac{1}{4}x + \frac{5}{2} = 0$ et par suite $\frac{5}{4}x + \frac{5}{2} = 0$ d'où $x = -2$; ainsi $y = 3$.

Conclusion : $H(-2,3)$ est le point de contact de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

DROITE ET PLAN DANS L'ESPACE
PARALLÉLISME DANS L'ESPACE

Résultats à retenir :

❑ Par trois points non alignés passe un plan et un seul .

❑ Si un plan contient deux points distincts alors il contient toute la droite passant par ces deux points.

❑ Si deux plans distincts ont un point commun alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point .

❑ On dit que des points de l'espace sont coplanaires lorsqu 'ils sont contenus dans un même plan .

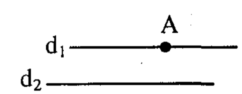
❑ On dit que des droites de l'espace sont coplanaires lorsqu'elles sont contenues dans un même plan .

❑ On dit qu'une droite et un plan sont sécants si leur intersection est un point .

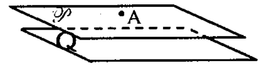
❑ On dit que deux plans sont sécants lorsque leur intersection est une droite .

❑ ***Parallélisme de droites et de plan :***

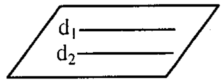
* Par un point de l'espace, passe une unique droite parallèle à une droite donnée .



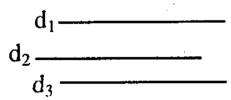
* Par un point de l'espace, passe un unique plan parallèle à un plan donnée .



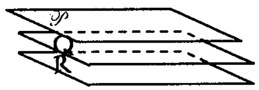
* Deux droites strictement parallèles détermine un unique plan .



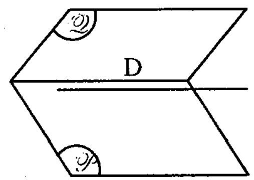
* Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles .



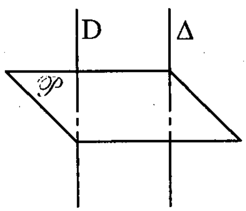
* Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles .



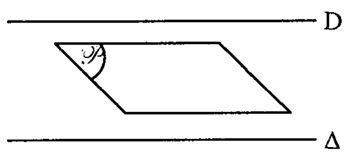
* Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection .



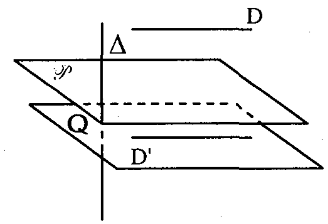
* Si deux droites sont parallèles , alors tout plan qui coupe l'une , coupe l'autre .



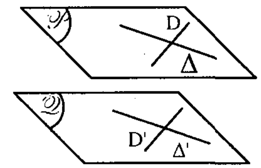
* Si deux droites sont parallèles, alors tout plan parallèle à l'une est parallèle l'autre .



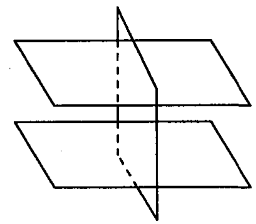
* Si deux plans sont parallèles alors:
  - toute droite de l'un est parallèle à l'autre.
  - toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.
  - toute droite qui coupe l'un coupe l'autre



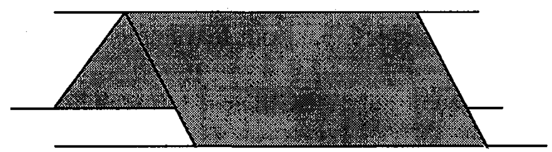
* Deux plans sont parallèles ssi deux droites sécantes de l'un des plans sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre .



* Si deux plans sont parallèles alors Tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles .



*



Si deux droites parallèles sont contenues respectivement dans deux plans sécantes, alors elles sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans .

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 :

Soit ABCD quatre points de l'espace , non coplanaires , soit I un point de segment [AD] distinct de A et D .

① Montrer que I n'appartient pas au plan (ABC)

② Soit J un point du segment [BD] distinct de B et D et K un point du segment [CD] ; distinct de C et D . Montrer que les plans (ABC) et (IJK) sont deux plans distincts .

③ On suppose que la droite (IJ) coupe (AB) en E et (CB) coupe (JK) en F et (AC) coupe (IK) en G

a) Montrer que les points E , F et G appartiennent aux plans (ABC) et (IJK)
b) Montrer que les points E,F et G sont alignés .
c) En déduire que les droites (BC) , (KJ) et (EG) sont concourantes .

Exercice 2 :

On considère un tétraèdre ABCD et on désigne par : I le milieu de[AB] , G le centre de gravité du triangle ACD et A' le milieu du segment [CD] .

① Montrer que les droites (IG) et (BA') sont sécantes

② En déduire que la droite (IG) et le plan (BCD) on un point E en commun .

③ Soit F le symétrique du point B par rapport à A'

a) Que représente le point G par pour le triangle ABF ?
b) En déduire que E =F
c) Prouver que le quadrilatère BCED est un parallélogramme

Exercice 3 :

Soit ABCD un tétraèdre , E un point situé sur l'arrête [AB] , F est un point situé sur l'arrêté [AC] et G un point situé sur l'arête [AD] ; on suppose que (EF) // (BC) et (FG) // (CD)

① a) Montrer que les plans (BCD) et (EFG) sont parallèles .
b) Déterminer l'intersection des plans (ABD) et (BCD)
c) Déterminer l'intersection des plans (ABD) et (EFG) .

② En déduire que (ED) et (EG) sont parallèles .

Exercice 4 :

Soit ABCDEFGH un cube , I le centre du corré ABEF et J le centre du carré BCGF

① Démontrer que les plans (AFH) et (BGD) sont parallèles .

② a) Vérifier Les points E,F et J sont non alignés
b) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan (EFJ) .

Exercice 5 :

Soit A,B,C et D quatre points coplanaire , d'un plan P et O un point qui n'appartient pas à P . On désigne par I , J et K les milieux respectifs des segments [OA] ; [OB] et[OC] .

①Montrer que (IJK) est parallèle à P

②Soit L le milieu du segment [OD] montrer que I,J, K et L sont coplanaires

Exercice 6 :

Soit ABCD un carré situé dans un plan P ; et O un point n'appartient pas à P , sont I,J,et K les milieux respectifs des segments : [OA] , [OB] et [OC] .

① Montrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles .

② Montrer que la droite (OD) coupe le plan (IJK) en un point L .

③a) Montrer que les droites (IL) et (AD) sont parallèles .
b) En déduire que O est le symétrique ~~de D~~ par rapport à L .

Exercice 7 :

Soit ABCDEFGH un cube ; I et J ont les milieux respectifs des segments [FH] et [EB] .

① a) Montrer que les droites (IJ) et (BG) sont parallèles
b) En déduire que (IJ) est parallèle au plan (AEH)

②a) Soit Δ la droite passant par E et parallèle à (AH)
Montrer que Δ est incluse dans le plan (AHE) .
b) Déterminer ainsi l'intersection des plans (EBG) et (AEH)

Exercice 8 :

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle .
Soit le plan P = (BED) et le plan Q = (CFH)

① Montrer que les plans P et Q sont parallèles .

②Soit I,J et K les milieux respectifs des segments [CG] ; [GH] et [GF] .
Montrer que le plan (IJK) est parallèle au plan P .

Exercice 9 :

Soit ABCD un parallélogramme , contenu dans un plan Q , soit O un point qui n' appartient pas à Q et n'appartient pas à P = (OAB) .

① Prouver que C et D n'appartient pas à P .

② Soit P' un plan strictement parallèle à P .

a) Vérifier que (AD) coupe le plan P en un point I

b) Vérifier que (BC) coupe le plan P' en un point J

③a) Déterminer l'intersection des plans Q et P .

b) Montrer que (AB) est parallèle à P' .

c) En déduire que (AB) et (IJ) sont parallèles

d) Quelle est alors la nature du quadrilatère ABJI .

Exercice 10 :

Soit ABCDEFGH un cube .

① Montrer que la droite (AD) est parallèle au plan (BCE) .

② Montrer que F appartient au plan (ADG)

③Montrer que les plans (ADG) et (BCE) sont sécants en une droite Δ .

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 11 :

ABCDEFGH UN CUBE

①Montrer que (FG) est parallèle aux plan (ADH) et (BCD)

② Déterminer l'intersection des plans (CHE) et (ABC) .

Exercice 12 :

D et D' deux droites strictement parallèle contenues dans un plan P .
R et Q sont deux plans sécants suivants D et D' .
Quelle est la position de Δ par rapport à P .

Exercice 13 : On donne un tétraèdre ABCD .
M est le milieu de [AC] et N est le milieu de [AD]
On choisie sur [AB] un point O distinct de A et B de façon que les droites (OM) et (ON) percent le plan (BCD) en I tet J .

①a) Construire les points I et J .

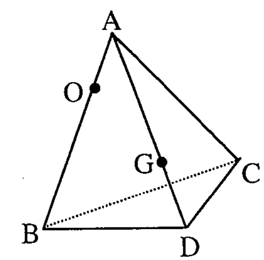
b) Quelle est l'intersection des plans (OMN) et (BCD) ?

② a) Montrer (MN) que est parallèle au plan (BCD).

b) Montrer que les droites (IJ) et (CD) sont parallèles .

Exercice 14 :

On donne un tétraèdre ABCD et O un point de [AB] et M ∈ [CD] et G∈ [AM]



①Déterminer l'intersection des plans (ABG) et (BCD) .

②La droite (OG) coupe le plan (BCD) en un point I . Construire le point I .

③Soit Δ la parallèle à (CD) passant par I

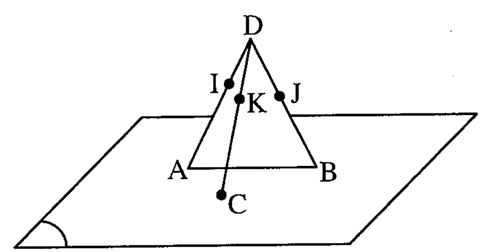
a) Montrer que $\Delta \subset (BCD)$.

b) Monter que Δ est parallèle au plan (ACD) .

SOLUTIONS

Solution 1 :

① A,B,C,D non coplanaires donc $(AB) \cap (ABC) = \{A\}$ or $I \in [AD]$ et $I \neq A$ donc $I \notin (ABC)$



2ème méthode :

Si I ∈ (ABC) alors (IA) ⊂ (ABC) or D ∈ (IA) d'où D ∈ (ABC) ce qui est impossible donc D ∉ (ABC)

② I ∉ (ABC) donc (ABC) et (IJK) sont deux plan distincts .

③a) On a : E ∈ (AB) donc E ∈ (ABC)

E ∈ (IJ) donc E ∈ (IJK)

de même F et G sont des points de (ABC) et (IJK)

b) (ABC) et (IJK) ont des points en communs et sont distincts alors (ABC) ∩ (IJK) est une droite Δ

Comme E,F,G sont des points de (ABC) ∩ (IJK) donc E,F,G appartient à Δ

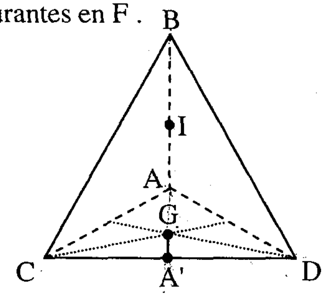
D'où : E,F,G sont alignés .

c) (BC) ∩ (IJK) = { F } et F, E, G sont alignés donc F ∈ (EG)

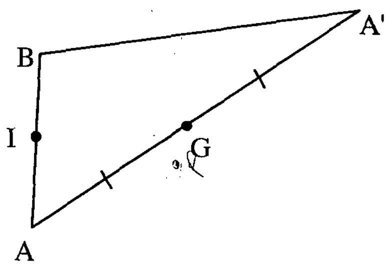
D'où : (BC) , (KJ) et (EG) se coupent en F .

Conclusion (BC) , (KJ) et (EG) sont concourantes en F .

Solution 2 :



① Soit P le plan (BAA') on a (IG) ⊂ P car : G ∈ [AA'] et (BA') ⊂ P donc les droites (IG) et (BA') sont sécantes ou parallèles .



Dans le triangle ABA' on a :I = A * B et G ∈ [AA']

Si (IG) // (BA') alors G sera le milieu de [AA'] ce qui est impossible donc (IG) et (BA') sont sécantes .

$$② \begin{cases} (BA') \subset (BCD) \quad \text{et} \quad (IG) \not\subset BCD \\ (IG) \text{ coupe } (BA') \end{cases}$$

Donc (IG) coupe (BCD) en cm seul point qu'on note E .

③ a) Dans le triangle ABF on a :

$A' = B * F$ et $AG = \frac{2}{3} . AA'$

D'où G : représente le centre de gravité du triangle ABF .

b) On a : F ∈ (IG) et F ∈ (BA') ⊂ (BCD)

D'où : (IG) ∩ (BCD) = {F}

Or : (IG) ∩ (BCD) = {E}

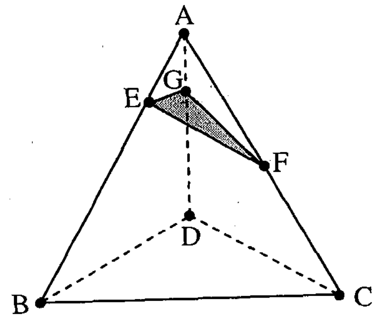
D'où : E = F

c) On a : A' = C * D et A' = B * F

D'où : BCFD est un parallélogramme

Or F = E d'où : BCED est un parallélogramme .

Solution 3 :



① a) On a :

- (BC) // (EF) et (EF) ⊂ (EFG)
  Donc (BC) // (EFG)
- (CD) // (FG) et (FG) ⊂ (EFG)
  Donc (CD) // (EFG)

D'où : (BCD) // (EFG) sont parallèles .

b) (ABD) ∩ (BCD) = (BD)

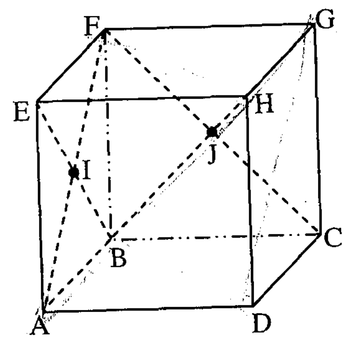
c) (ABD) ∩ (EFG) = (EG)

Car : E ∈ [AB] et G ∈ [AD] .

② (BCD) et (EFG) sont deux plans parallèles qui coupent le plan (ABD) respectivement en (BD) et (EG) donc (BD) et (EG) sont parallèles .

Solution 4 :

①



Pour montrer que deux plans sont parallèles il suffit de montrer que deux droites sécantes de l'un sont parallèles à 2 droites sécantes de l'autre :

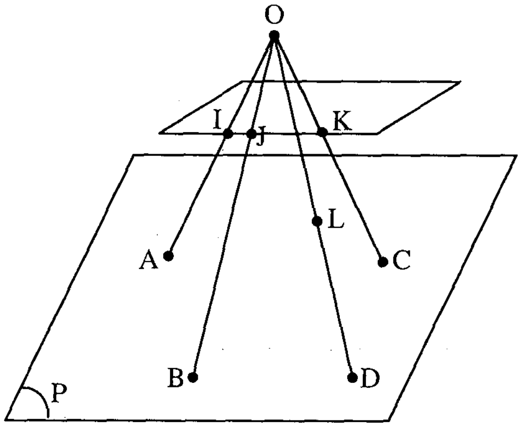
On a : (BD) // (FH) et (AH) // (BG)

Donc : (AFH) // (BGD)

② a) J $\notin$ (EF) donc J ,E,F sont non alignés

b) (AB) // (EF) et (EF) $\subset$ (EFJ) donc (AB) // (EFJ) .

Solution 5 :



① (IJ) //(AB) et (JK) // (BC) donc (IJK) // (ABC) = P

② On a : (JL) // (BD) et (LK) // (DC)

Donc (JLK) // (BCD) = P

On a : $\begin{cases} (IJK) // P \\ (JLK) // P \end{cases}$ donc (IJK) // (JLK)

D'où : (IJK) = (JLK)

Et par suite : I,J,K , L sont coplanaires .

Solution 6 :

① On a : (IJ) // (AB) et (JK) // (BC)

D'où : (IJK) // (ABC)

② a) (OD) coupe (ABC) en D e puisque (IJK) // (ABC)

Alors (OD) coupe (IJK) en un point noté L .

(Si deux plans sont parallèles alors toute droite qui coupe l'un , coupe l'autre)

b) (OAD) $\cap$ (IJK) = (IL)

(OAD) $\cap$ (ABC) = (AD)

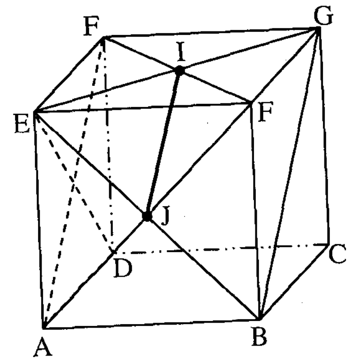
et (IJK) // (ABC) donc (IL) //(AD)

c) Dans le triangle OAD on a :

$\begin{cases} L \in [OD] \\ I \in [OA] \end{cases}$ et (IL) // (AD) et I = O * A

D'où L = O * D

Solution 7 :



① a) Dans le triangle EBG on a :

$\begin{cases} I = E * G \\ J = E * B \end{cases}$ donc (IJ) // (BG)

b) (IJ) // (BG) et (BG) $\subset$ (BFGC)

Donc (IJ) // (BFGC)

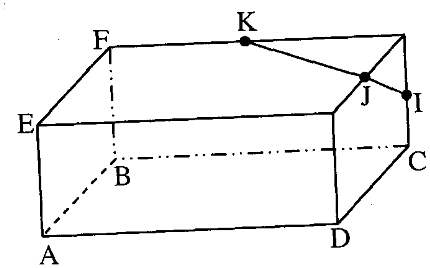
Or les deux plans (AEHD) et (BFGC) sont parallèles donc (IJ) // (AEH).

② Δ // (AH) et (AH) $\subset$ (AEH)

Donc Δ // (AEH) or Δ passe par E d'où :

Δ $\subset$ (AEH)

Solution 8 :



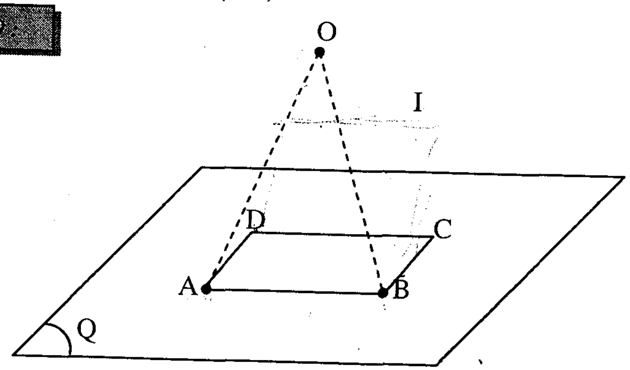
① On a : (BE) // (CH)
(BD) // (FH)

On a : deux droites sécants du plan P qui sont parallèles à deux droites sécantes du plan Q donc P // Q

②

- On a : Dans le triangle GHC :
  J = H * G et K = F * G donc (JK) // (FH)
- De m dans le triangle GHC
  On a : J = G * H et I = G * C donc (IJ) // (HC) .
  D'où : (IJK) // (FHC) = Q
  Et comme Q // P donc (IJK) // P .

Solution 9 :



① (OAB) $\cap$ Q = (AB) on a : C $\in$ Q
- Si C $\in$ P alors C $\in$ (AB) ce qui est impossible donc C $\notin$ P
- Si D $\in$ P alors D $\in$ (AB) : ce qui est impossible donc D $\notin$ P

② a) D $\notin$ P et A $\in$ P donc (AD) $\not\subset$ P

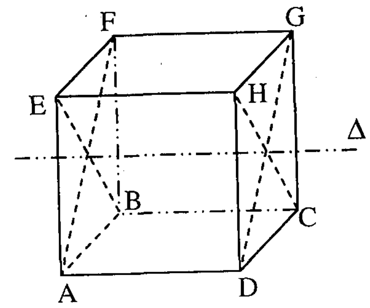
D'où (AD) coupe P en un seul point qui est A .
Comme P // P' alors (AD) coupe P' en un seul point qu'on note I
[étant donné deux plan parallèles , une droite qui coupe l'un coupe alors l'autre .]

b)C $\notin$ P et B $\in$ P donc (CB) $\not\subset$ P et par suite (CB) coupe P en un seul point C et comme P || P' alors (CB) coupe P' en un point qu'on note J.

③a) Q $\cap$ P' = (IJ)
b) (AB) $\subset$ P donc (AB) // P et comme P // P' alors (AB) // P' .
c) On a : (AB) droite parallèle à Q et parallèle à P'

Donc (AB) est parallèle à leur intersection : P $\cap$ Q' = (IJ)
Donc (AB) // (IJ)
d) On a : (AB) // (IJ) et (AJ) = (AD) // (BJ) = (BC)
Donc ABJI est un parallélogramme .

Solution 10 :



① On a : (AD) // (BC) et (BC) est contenu dans (BCE)
d'où : (AD) // (BCE)

② On a : (AF) // (DG) donc (AF) // (ADG) et comme A est un point commun de (AF) et (ADG) alors (AF) est contenue dans (ADG) .
et par suite F $\in$ (ADG)

③ABEF est un carré donc A* f = B*E = I
- A et F appartient au plan (ADG) alors I $\in$ (ADG) .
- B et E appartient au plan (BCE) donc I $\in$ (BCE) .

(ADG) et (BCE) sont deux plans distincts I étant un point qui appartient à ces 2 plans donc (ADG) $\cap$ (BCE) = Δ où Δ est une droite de l'espace .

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Résultats à retenir :

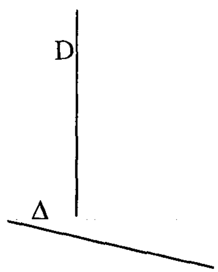
❑ On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont deux droites perpendiculaires.

❑ On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

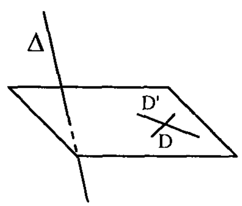
❑ ***Orthogonalité :***

* Si deux droites orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre .

* Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

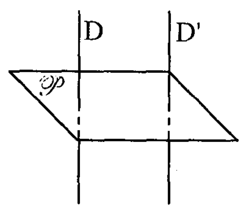


* Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



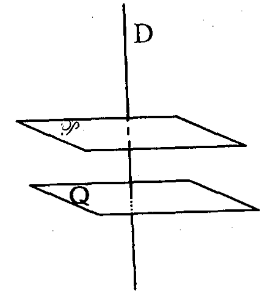
* Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan alors elles sont parallèles.

* Si deux droites sont parallèles alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



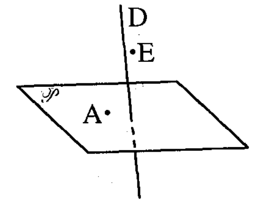
* Si deux plans sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

* Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite alors ils sont parallèles.

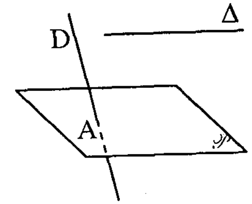


* Par un point A de l'espace passe un unique plan perpendiculaire à une droite donnée.

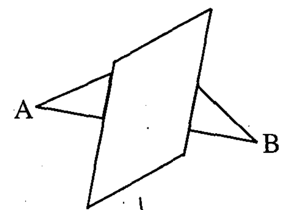
* Par un point E de l'espace passe une seule droite perpendiculaire à un plan donné.



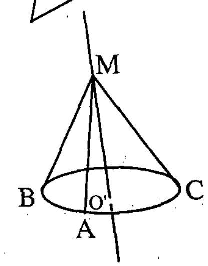
* Si deux droites sont orthogonales, alors tout plan perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.



❑ ***Plan médiateur d'un segment :*** L'ensemble des points équidistants des points A et B est le plan médiateur du segment [AB].



❑ ***Axe d'un cercle :*** L'ensemble des points équidistants de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle.

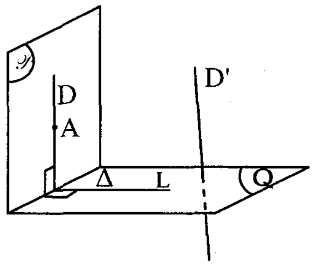


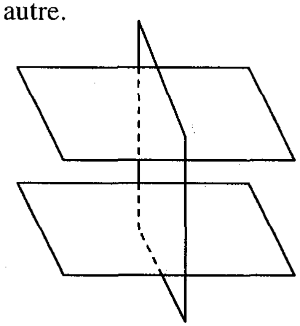
❑ ***Plan perpendiculaires :***

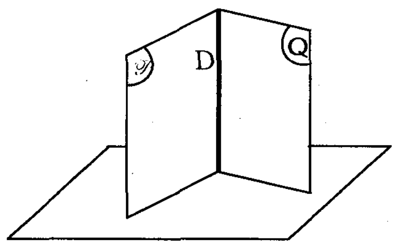
* Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires, alors toute droite D perpendiculaire à $\mathcal{Q}$ menée par un point A de $\mathscr{P}$ est contenue dans $\mathscr{P}$.

* Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires suivant une droite D, alors toute droite L de $\mathscr{P}$ perpendiculaire à D, est perpendiculaire $\mathcal{Q}$.

* Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite D', perpendiculaire à l'un, est parallèle à l'autre.







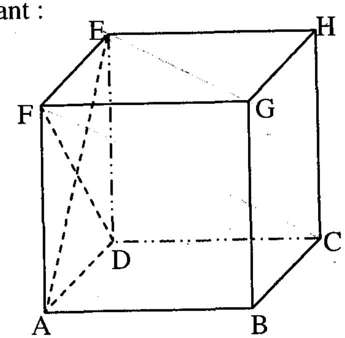
* Si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpenduculaire à l'autre.

* Si un plan est perpendiculaire à deux plans sécants alors il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 :

On donne le cube suivant :



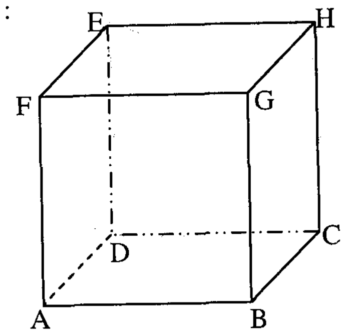
① Démontrer que : (EG) est orthogonale à la droite (FC) , puis que (AG) est orthogonale à (FC) .

② En déduire que la droite (FC) est orthogonale au plan (AEG)

③ Montrer que : (FC) $\perp$ (AE)

Exercice 2 :

ABCD FGHE un cube :



① Citer deux droites sécantes du plan (EBDG) orthogonales à (AC) (justifier votre réponse)

② Préciser la position de la droite (AC) par rapport à (DG)

③ Montrer que les droites (GC) et (EB) sont orthogonales .

Exercice 3 :

Soit ABCD un tétraèdre régulier . I est le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]

① Démontrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan (ABJ)

② Démontrer que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales .

③ Démontrer que la droite (IJ) est la perpendiculaire commune aux deux droites (AB) et (CD)

Exercice 4 :

Le triangle BCD est quelconque soit (Δ) la perpendiculaire en B au plan (BCD) et A un point de Δ, distincts de B . Dans le plan (ACD) , on désigne par H le projeté orthogonal de A sur (CD) .

① Démontrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan (ABH) .

② En déduire les droites (CD) et (BH) sont perpendiculaires .

③ Soit K le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD) . Démontrer que A, K, H sont alignés .

Exercice 5 :

On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que ABCD et EFGH soient des carrés de côté a et de centre respectifs I et J .
On note h la hauteur du parallélépipède (h = AE = BF = CG = DH) .
Soit M un point de la droite (BF) .

① a) Déterminer la nature des triangles MAC et MEG
b) En déduire que (MI) $\perp$ (AC) et (MJ) $\perp$ (EG)

② Montrer que les plans (MAC) et (MEG) sont perpendiculaires alors on a : (MI) $\perp$ (MJ)

Exercice 6 :

Soit ABCDA'B'C'D' un cube
I=A*B ; J=C*D et K = C'*D'.

① a) Montrer que IJK est le plan médiateur de [AB].
b) en déduire que KA = KB.

② Montrer que : (A'C) est perpendiculaire au plan BC'D.

③ a) Montrer que IJK est un triangle isocèle rectangle.
b) On pose AB = a .Calculer JK en fonction de a .

Exercice 7 :

Soit ABCD un tétraèdre régulier et I = C * D.

① Montrer que le plan (BCD) est perpendiculaire au u plan (ABI).

② Soit J=A*B et K=B*C .
Montrer que IJK est un triangle isocèle.

③ Déterminer le plan médiateur de [IJ] .

④ Montrer que (ABI) et (ADK) sont sécants en Δ et que Δ est l'axe du cercle circonscrit au triangle BCD.

Exercice 8 :

Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\mathcal{C}$ un cercle du plan de centre O et de diamètre [AB] . Soit Δ la perpendiculaire en A au plan $\mathscr{P}$ et C $\in$ Δ et I = C*B.

① Montrer que (OI) $\perp$ $\mathscr{P}$.

② Déterminer l'axe du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 9 :

Soit ABCD un tétraèdre tel que AB = AC ; DB =DC et (AD) $\perp$ (AC).
On pose I =B*C .

① a) Déterminer le plan médiateur de [BC] .
b) En déduire que (AD) $\perp$ (BC) et que (ABC) $\perp$ (ADB).

② Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Montrer que O appartient au plan (ADI) .

③ Soit Δ l'axe du cercle .
a) Montrer que Δ passe par O .
b) Montrer que Δ // (AD) .

Exercice 10 : Soit ABCDEFGH un cube .

① Montrer que les plans (AFGD) et (BCHE) sont perpendiculaires.

② Soit O_1 le centre du carré ABFE et O_2 celui de DCGH.
Montrer que $\Delta = (O_1 O_2)$.

Exercice 11 :

Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC rectangle en A .
On pose AB=4a et AC=6a où $a > 0$.
Soit Δ la perpendiculaire en A au plan $\mathscr{P}$, soit D le point de Δ tel que AD=12a . Soit I =B*C et Δ' la perpendiculaire en I au plan $\mathscr{P}$.

① Montrer que Δ' est l'axe du cercle passant par A , B et C .

② a) Montrer qu'il existe un seul point O de Δ' tel que
OA= OB = OC = OD.
b) Calculer OA en fonction de a .

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 12 :

Dans un plan (P) de l'espace on considère un cercle (C) de diamètre [AB].
Soit (D) la droite orthogonale à (P) en A
S un point de (D) autre que A , I le projeté orthogonal de A sur (BS) , M un point de C autre que A et B .
H est le projeté orthogonal de A sur (MS)

① Démontrer que les plans (AMS) et (BMS) sont perpendiculaires .

② Démontrer que (AH) est orthogonale au plan (BSM) .

Exercice 13 : Soit *A* et *B* deux points distincts et A une droite.

① Déterminer les points *M* de l'espace tel que $MA = MB$.

② Déterminer les points *M* de A tel que $MA = MB$.(discuter)

Exercice 14 :

Soit dans un plan $\mathscr{P}$ un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre *[AB]* . Sur la perpendiculaire en *A* au plan *P*, on marque un point S distinct de *A* .

① Montrer que le plan *ASB* est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

② Montrer que *ASM* est un triangle rectangle.

Exercice 15 : Soit ABCD un carré de centre O .

① Déterminer l'axe Δ du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au carré ABCD .

② Soit M un point de Δ telque AM=AD.
Montrer que AMB est un triangle équilatéral.

Exercice 16 :

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A . Soit I = B * C et Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan ABC.

① Quel est l'axe Δ du cercle C circonscrit au triangle ABC ?

② Soit $M \in \Delta$ tel que AM = AB et J = A * M .
Montrer que DJB est le plan médiateur de[AM].

SOLUTIONS

Solution 1 :

① • (EG) est orthogonale aux deux droites sécantes : (FH) et (HC)
D'où : $(EG) \perp (FHC)$ et par suite $(EG) \perp (FC)$.
• $(AG) \perp (FB)$ (les diagonales du carré ABGF)
et $(AG) \perp (BC)$ car : $(BC) \perp (ABG)$
d'où : $(AG) \perp (FBC)$ d'où : $(AG) \perp (FC)$

② On a : $(FC) \perp (EG)$ et $(FC) \perp (AG)$
Alors : $(FC) \perp (AEG)$

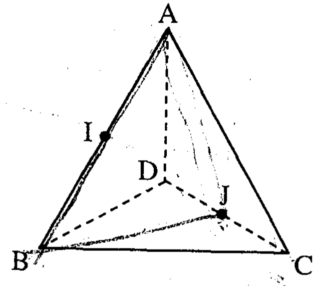
③ $(FC) \perp (AEG)$ d'où : $(FC) \perp (AE)$
(Si une droite Δ es perpendiculaire à un plan P alors Δ est orthogonale à toute droite incluse dans P) .

Solution 2 : ① On a : $(AC) \perp (BD)$ (diagonale du carré ABCD)
$(AC) \perp (ED)$ car : $(ED) \perp (ABCD)$

② $(AC) \perp (BD)$ et $(AC) \perp (ED)$ donc $(AC) \perp (EBD)$
d'où : $(AC) \perp (DG)$ car : $(DG) \subset (EBD)$

③ $(GC) \perp (BH)$ et $(GC) \perp (EH)$
d'où : $(GC) \perp (EBH)$ d'où : $\boxed{(GC) \perp (EB)}$

Solution 3 :



① On a : AC= AD donc A appartient au plan P médiateur de [CD]

On a : BD = BC donc B ∈ P

On a : JD = JC donc J ∈ P

Donc P = (ABJ)

D'où : (CD) ⊥ (ABJ)

② On a : (CD) ⊥ (ABJ) donc (CD) est orthogonale à toute droite de (ABJ)

Donc : (CD) ⊥ (AB)

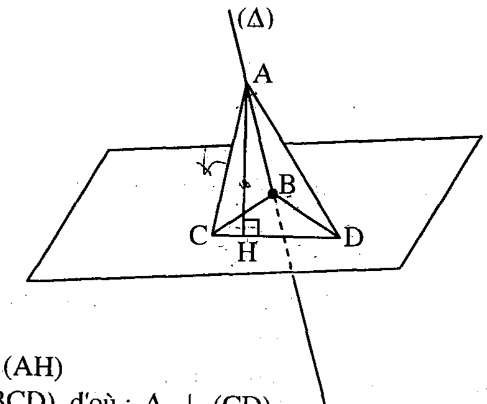
③ On a : I ∈ (ABJ) car : I = A * B

Donc (IJ) ⊂ (ABJ) donc (CD) ⊥ (IJ)

On a : $\begin{cases} JA = JB \\ IA = IB \end{cases}$ donc J et I appartient au plan médiateur de [AB]

D'où : (IJ) ⊥ (AB)

Solution 4 :



① On a : (CD) ⊥ (AH)

On a : Δ ⊥ (BCD) d'où : Δ ⊥ (CD)

Et par suite : (AB) ⊥ (CD)

(CD) est orthogonale à deux droites sécantes (AB) et (AH)

D'où : (CD) ⊥ (ABH)

② (CD) ⊥ (ABH) donc (CD) est orthogonale à toute droite du plan (ABH) et par suite (CD) ⊥ (BH) .

③ On a : (BK) ⊥ (ACD)

D'où : (BK) ⊥ (CD)

On a : $\begin{cases} (BK) \perp (CD) \\ (BH) \perp (CD) \end{cases}$ d'où : (CD) ⊥ (BKH)

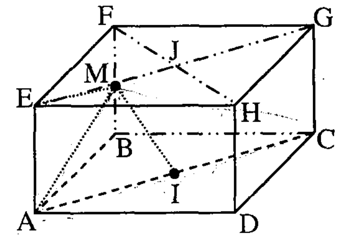
D'où : (CD) ⊥ (KH)

Et comme (CD) ⊥ (AH)

On a : A , C , D , H , K sont situés sur un même plan et de plus (CD) ⊥ (KH) et (CD) ⊥ (AH)

D'où : (AH) // (KH) d'où : A, H,K sont alignés .

Solution 5 :



① a) On a : ABM triangle rectangle en B

donc d'après le théorème de Pythagore on a: $MA^2 = AB^2 + BM^2 = a^2 + BM^2$

On a : CBM est un triangle rectangle en B

Donc : $MC^2 = MB^2 + BC^2 = BM^2 + a^2$

On conclu que : MA = MC et pars suite MAC est un triangle isocèle .

De même : MEG est un triangle isocèle .

b) MAC est un triangle isocèle de sommet principal M et I = A*C

Donc (MI) ⊥ (AC)

MEG est un triangle isocèle de sommet principal M et J = E*G

donc (MJ) ⊥ (EG)

② On a : (MJ) ⊥ (AC) et (MI) ⊥ (AC)

D'où : (AC) ⊥ (MIJ)

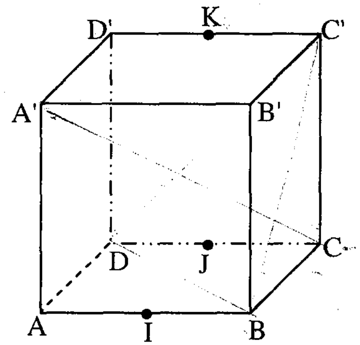
Et comme (AC) ⊂ (MAC)

D'où : (MAC) ⊥ (MIJ)

Or : (MAC) ⊥ (MEG) d'où : (MAC) ⊥ (MIJ) ∩ (MEG) = (MJ).

Solution 6 :

① a)



On a (IJ) $\perp$ (AB) et (JK) $\perp$ (AB) donc (AB) $\perp$ (IJK).
(IJK) passe par le milieu de [AB] et (AB) $\perp$ (IJK) donc (IJK) est le plan médiateur de [AB] .

b) K $\in$ (IJK) et (IJK) est le plan médiateur de [AB] donc KA = KB

② Montrons que (A'C) $\perp$ (BC'D).

• on a :AD =AB ; CD=CB ; A'D = A'B ;C'D = C'B donc(AA'CC') est le plan médiateur de [BC'] donc (A'C) $\perp$ (BD).

• on a : A'B = A'C' ; CB = CC' donc A' et C sont deux points du plan plan médiateur de [BD] et par suite (A'C) $\perp$ (BC') .

On a ainsi $\begin{cases}(A'C)\perp(BD)\\(A'C)\perp(BC')\end{cases}$ d'où (A'C) $\perp$ (BC'D) .

③ a) (ABCD) $\perp$ (DCC'D) et I $\in$ (ABCD) et (ABCD) $\cap$ (DCC'D') = (CD).

On a : (IJ) $\perp$ (CD) donc (IJ) $\perp$ (DCC'D') et par suite (IJ) $\perp$ (JK) car la droite (JK) $\subset$ (DCC'D') et par suite IJK est un triangle rectangle en J.

On a : IJ = AD et JK = DD' or AD = DD' d'où IJ = JK.

<u>Conclusion:</u>

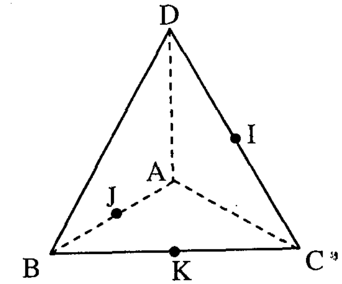
IJK est un triangle isocèle rectangle en J.

b)AB=a donc IJ=JK= a .

D'après le théorème de Pythagore on a: $IK^2 = IJ^2 + JK^2$;

d'où $JK^2 = 2a^2$ d'où $IK = \sqrt{2}\,a$.

Solution 7 :



① Montrons que: (BCD) $\perp$ (ABI) .

on a : BCD est un triangle équilatéral et I = C * D donc (BI) $\perp$ (CD).

on a: • CA = AD donc A appartient au plan médiateur de [CD].

• BC = BD donc B appartient au plan médiateur de [CD].

Donc on a : (AB) $\perp$ (CD).

On a alors $\begin{cases}(AB)\perp(CD)\\(BI)\perp(CD)\end{cases}$ donc (CD) $\perp$ (ABI)

Et puisque (CD) $\subset$ (BCD) alors (BCD) $\perp$ (ABI)

② • On a dans le triangle BCD

J = A*B et K = B*C donc JK= $\frac{1}{2}$ AC

• dans le triangle BCD on a :

K = B*C et I = C*D donc IK= $\frac{1}{2}$BD

Et comme ABCD est un tétraèdre régulier donc AC = BD d'où

$\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ BD et par suite JK = IK donc IJK est un triangle isocèle de sommet principal K .

③ • Soit L = A * D on a LJ =$\frac{1}{2}$ BD et LI = $\frac{1}{2}$ AC donc LI = LJ

donc L appartient au plan médiateur de [IJ].

• KI = KJ donc K appartient au plan médiateur de [ij]

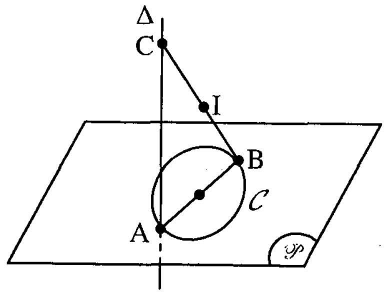
•Soit N=A*C ona: NJ= $\frac{1}{2}$ BC et NI = $\frac{1}{2}$ AD

donc NI = NJ donc N appartient au plan médiateur de [IJ]
donc (LKN) est le plan médiateur du segment [IJ]

④ • A ∈ (ABI) et A ∈ (ADK) donc (ABI) ⋂ (ADK) ≠ Ø
et (ABI) ≠ (ADK) donc (ABI) et (ADK) sont sécants
Soit Δ = (ABI) ⋂ (ADK).

• (ABI) est le plan médiateur du segment [CD] car AC=AD ;BC=BD et IC=ID
• (ADK) est le plan médiateur du segment [BC] car : AB=AC;DB=DC et KB=KC
or (ABI) ⋂ (ADK) = Δ .
• M ∈ (ABI) : plan médiateur de [CD] éq MC = MD
• M ∈ (ADK) : plan médiateur de [BC] éq MC = MB
donc M ∈ Δ , éq MB = MC = MD d'où Δ est l'axe du cercle circonscrit au tringle BCD .

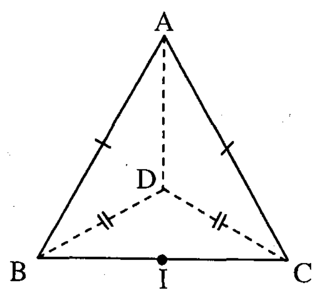
Solution 8 :



① Dans le triangle ABC on a : O = A*B et I=B*C donc (OI) // (AC)
D'autre part : (AC) ⊥ P et par suite (OI) ⊥ P .

② L'axe du cercle $\mathcal{C}$ est la droite qui passe par le centre O de $\mathcal{C}$ et qui est perpendiculaire *à* P (car $\mathcal{C}$ ⊂ P).
d'où l'axe du cercle est la droite (OI)

Solution 9 :



① a)
• On a: AB = AC donc A appartient au plan médiateur de [BC] .
• On a : DB = DC donc D appartient au plan médiateur de [BC] .
• On a: I = B * C donc IB = ID et par suite I appartient au plan médiateur de [BC].
et comme A, B, I ne sont pas alignés , donc (ADI) est le plan médiateur de [BC] .

b) • (AD) est une droite incluse dans le plan (ADI)
et comme (BC) ⊥ (ADI) donc (AD) ⊥ (BD) .

On a : $\begin{cases}(AD)\perp(AC)\\(AD)\perp(BC)\end{cases}$ d'où (AD) ⊥ (ABC)

Soit P = (ABC) et P_2 = (ADB)
P_2 est un plan contenant la droite (AD) et tel que (AD) ⊥ P_1 .
d'où $P_1 \perp P_2$.

<u>Conclusion:</u>
(ABC) ⊥ (ADB)

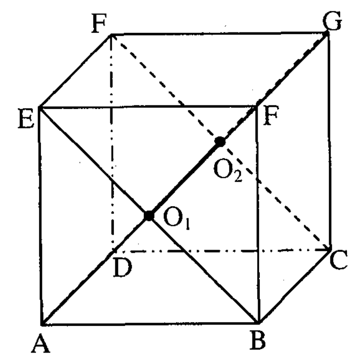
② On a : O centre du cercle circonscrit au triangle ABC donc OA = OB = OC et O ∈ (ABC).
On a : OC = OB donc O appartient au plan médiateur de [BC]
Or le plan médiateur de [BC] est (ADI) donc O ∈ (ADI)

③ a) Δ est l'axe du cercle $\mathcal{C}$ de centre O ,donc O ∈ Δ

b) On a d'après ① a) : (AD) ⊥ (ABC) ,d'autre part Δ étant l'axe du cercle circonscrit au triangle (ABC) donc Δ ⊥ (ABC) .

On a ainsi $\begin{cases}(AD)\perp(ABC)\\\Delta\perp(ABC)\end{cases}$ donc (AD) // Δ .

Solution 10 :



① • On a : ABFE est un carré donc (AF) $\perp$ (EB).

• d'autre part (AD) $\perp$ (ABFE) donc (AD) $\perp$ (EB)

On a ainsi $\begin{cases} (EB) \perp (AD) \\ (EB) \perp (AF) \\ \text{et } A, D, F \text{ non alignés} \end{cases}$

donc (EB) $\perp$ (AFD) , or (AFD) = (AFGD) d'où (EB) L (AFGD). (BCHE) est un plan contenant la droite (EB) qui est perpendiculaire au plan (AFGD) d'où (BCHE) $\perp$ (AFGD)

② O_1 : le centre du carré ABFE

On a: • O_1=E*B , d'où $O_1 \in$ (BCHE)

• O_1 =A*F , d'où $O_1 \in$ (AFGD)

d'où $O_1 \in$ (BCHE) $\cap$ (AFGD) et par suite $O_1 \in \Delta$

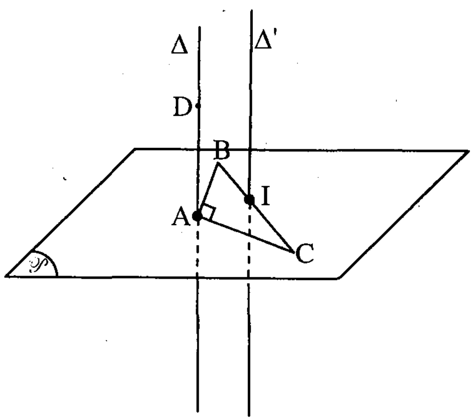
O_2 : centre du carré DCGH .

• O_2 : centre du carré DCGH

• O_2 = D * G , donc $O_2 \in$ (AFGD) et O_2 = C * H Alors $O_2 \in$ (BCHE)

d'où $O_2 \in \Delta$ donc $\Delta = (O_1 O_2)$.

Solution 115



On a: ABC est un triangle rectangle en A donc le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC est le point I = B * C .

Et par suite l'axe du cercle $\mathcal{C}$ est la droite passant 1 et perpendiculaire au plan (ABC) d'où Δ' est l'axe du cercle $\mathcal{C}$.

① Soit Q : le plan médiateur de [AD]; Q coupe Δ' en un point O .

On a d'une part: $O \in Q$ donc OA=OD

d'autre part: $O \in \Delta'$ donc OA = OB = OC d'où OA = OB = OC = OD.

② On a : ABC triangle rectangle en Δ , donc d'après le théorème de Pythagore: $AB^2 + AC^2 = BC^2$; or AB = 4a et AC = 6a donc

$BC^2=16a^2+36a^2=52a^2$ d'où $BC= 2\sqrt{13}$ a.

AI = IB = IC (car : I le centre du cercle circonscrit au triangle ABC)

d'où $AI = IB = \dfrac{BC}{2}$ (I =B*C) et par suite $IA=\sqrt{13}$ a

Or $OI = \dfrac{1}{2} AD = 6a$

et comme AIO triangle rectangle en I donc $AI^2 + IO^2 = OA^2$

et par suite: $OA^2 = 13a^2 + 36a^2 = 49a^2$ d'où <u>OA = 7a</u> .

STATISTIQUES

Résultats à retenir :

❑ ***Paramètres d'une série à valeurs discrètes :***

* Un mode est une valeur pour laquelle l'effectif est le plus élevé.
* Une série qui n'a qu'un seul mode est dite uni modale.
* Une série qui n'a que deux modes est dite bi modale.
* La médiane d'une série est la valeur qui la partage en deux groupes de même effectif.

  -Si le nombre de valeurs de la série est impair, la médiane est la valeur centrale.

  -Si le nombre de valeurs de la série est pair, la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales.
* Pour obtenir la moyenne d'une série statistique a valeurs discrètes :

  - Multiplier chaque valeur de la série par l'effectif correspondant. .

  - Faire la somme des produits obtenus et diviser cette somme par l'effectif total.

  Ou bien :

  - Multiplier chaque valeur de la série par la fréquence correspondante et faire la somme des produits obtenus.
* L'étendue d'une série est la différence entre ses deux valeurs extrêmes.

❑ ***Paramètres d'une série à valeurs regroupées par classes :***

* Le centre d'une classe est le milieu de ses extrémités.

* Dans un histogramme d'une série distribuée par classes, l'aire d'un rectangle est proportionnelle a l' effectif de la classe correspondante.
* Un mode est une classe pour laquelle l'effectif est le plus élevé.
* Pour obtenir la moyenne d'une série statistique distribuée par classes :

  - Multiplier chaque centre de classe par la fréquence correspondante.

  - Faire la somme des produits obtenus.
* La médiane de la série est l'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes dont l'ordonnée est 0.5.

❑ ***Séries chronologiques :***

* Le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'année b à l'année n est égal au quotient de la valeur de l'année n par la valeur de l'année b.
* L'indice de l'année n, base 100 en l'année b est égal à :

$$\frac{\text{valeur de l'année n}}{\text{valeur de l'année b}} \times 100$$

* Si I est l'indice de l'année n, base 100 en l'année b et C est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'année b à l'année n alors $I = C \times 100$.

❑ Soit (x_i , n_i) une série statistique dont les valeurs x_i sont ordonnées par ordre croissant .

⇨ ***Serie discrète*** :

- Le premier quartile est le nombre noté Q_1 et qui est égale à la plus petite valeur x_i telle que qu'au moins 25% de l'effectif de la série prenne des valeurs inférieurs ou égales à Q_1
- Le deuxième quartile Q_2 = médiane
- Le troisième quartile est le nombre Q_3 qui est égale à la plus petite valeur x_i telle que qu'au moins 75% de l'effectif de la série prennent des valeurs inférieurs ou égales à Q_3 .

⇨ ***Série continue :***

Q_1 est l'abscine du l'abscisse point de la courbe F des fréquences commulés croissants *telque* $F(Q_1) = 0,25$

Q_2 est telle que : $F(Q_2) = 0,5$

Q_3 est telle que : $F(Q_3) = 0,75$

- L'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ est appelé l'intervalle interquartile .

  Le réel $(Q_3 - Q_1)$: écart interquartile

- <u>Variance d'une série Statistique – écart type</u>

  Soit (x_i , n_i) une série discrète définie par ses valeurs $x_1 , x_2 ,\dots , x_p$ et par les effectifs correspondant $n_1 , n_2 , \dots , n_p$

$$V = \frac{x_1 x_1^2 + \dots + n_p x_p^2}{n} - (\bar{x})^2) \geq 0$$

($n = n_1 + n_2 + n_p$: effectif total)

L'écart type est $\sigma = \sqrt{v}$

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1 :

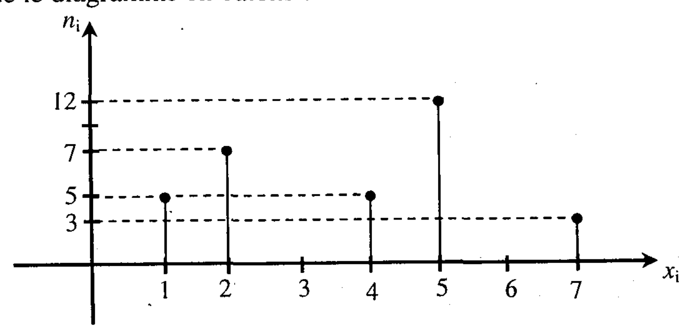
Dans une classe de 40 élèves , on trouve la répartition suivantes du nombre d'enfant par famille :

Nombre d'enfant x_i	2	3	4	5	6
Nombre de familles n_i	12	15	5	2	2

① Représenter cette série par un diagramme en bâtons
② Déterminer le mode et la médiane de cette série
③ Déterminer le premier et le 3ème quartile de cette série

Exercice 2 :

On donne le diagramme en bâtons suivant :



① Déterminer l'effectif total de cette série
② Déterminer le mode et la médiane de cette série .
③ Déterminer le 1er et le 3ème quartile de cette série

Exercice 3 :

Soit le tableau statistique suivant :

Classes	[6,8[	[8,10[	[10,12[	[12,14[	[14,16[	[16,18[
Effectifs n_i	4	6	5	4	3	6

① Quelle est la classe modale
② représenter le diagramme des effectifs cumulés croissants .
③ calculer la médiane
④a) Calculer le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3
b) En déduire l'écart interquartile .

Exercice 4 :

Répondre par vrai ou faux

① Un élève a obtenu aux trois contrôles du trimestre les notes 12,9 et 15

La moyenne de cette série est $\overline{X} = 15$

② On a relevé la taille (en cm) et le poids (kg) des joueurs d'une équipe

Taille	180	175	182	172	181
« poids »	70	60	75	72	71

a) Le poids moyen est 69kg
b) La taille moyenne est 178cm
c) La médiane de la taille est 182
d) La médiane du poids est 71kg

Exercice 5 :

Détermines la moyenne et la médiane de la série statistique suivante :

1,25 1,50 ; 1,85 ; 3,25 ; 2,35 ; 1,75 ; 3,05 ; ,2,25 ; ; 1,45 ; 2,35 ; 2,30 ; 1,60 ; 4,75 ; 3,30 ; 3,45 ; 3 ; 2,95 ; 3,35 ; 3,10et 5.

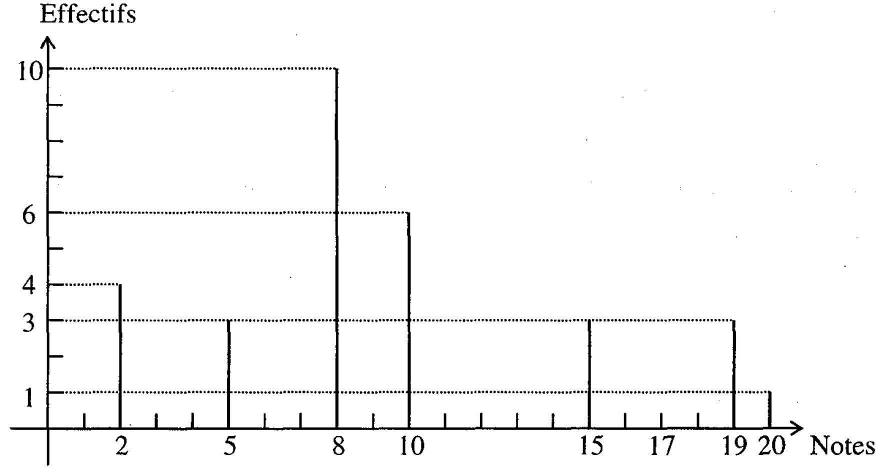
Exercice 6 :

On connaît la moyenne, déterminer la note inconnue

a) Notes obtenues12 ,9 ,7 : , x moyenne = 10
b) Notes obtenues13 : , y , 6, 15 moyenne = 13

Exercice 7 :

Voici le diagramme suivant



① Quelle est le mode de cette série.

② Quelle est la moyenne de cette série.

Exercice 8 :

On jette un dé 30 fois et on note le nombre de fois d'apparition de chaque numéro sur la face supérieure

① Complétez le tableau suivant

Numéro sur la face supérieure	Nombre d'apparitions	Fréquence en %
1	6	…..
2	4	…..
3	5	…..
4	4	…..
5	6	…..
6	5	…..

② Construire le diagramme en bâtons des effectifs

③ La série est-elle unimodale ? ou bimodale

Exercice 9 :

Dans une région du pays, on considère la population des jeunes filles actives qui compte 250 jeunes filles. Parmi ces jeunes il y a 70 qui travaillent à l'industrie 90 à l'artisanat, 50 en agriculture, 30 fonctionnaires et 10 autres.

① Précisez la nature du caractère, donnez un tableau qui remine les donnés

② Représentez graphiquement la série statistique des effectifs par des secteurs d'un disque puis par un diagramme en barre.

Exercice 10 :

Dans une population de 100 familles, on a recensé le nombre de garçons dans chaque famille, on a obtenu les résultats suivants :

Nombre de garçon par famille x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de familles n_i	15	28	32	16	3	2	3	0	1

① Représentes le diagramme en bâton de la série statistique des effectifs

② Compléter le tableau

Valeur du caractère	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Fréquences cumulées croissantes	0,15	0,43	0,75	0,91	1,07	1,1	1,2	1,15	…

③ a) Donnez le mode

b) Déterminez la médiane

④ Calculez la moyenne

Exercice 11 : On donne la série statistique :

Valeur du caractère répartis en classe	[290, 295[	[295, 300[	[300, 305[	[305, 310[
Effectifs	2	22	9	7

① Quelle est la classe modale

② Représentes le diagramme des effectifs cumulées croissants

③ Calculez la médiane

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 12 :

On lance 100 fois cinq pièces de monnaie et ou note à chaque lancer le nombre de pièces montant « face »

Nombres de pièces montant « face »	0	1	2	3	4	5
Nombre de lancers	5	15	28	32	16	4

① Quelle est le mode de cette série

② Calculez la moyenne X

③ Calculez la médiane

Exercice 13 :

Le tableau suivant indique la quantité de pluie en millimètres et par saison dans une région donnée :

Saison	Automne	Hiver	Printemps	Tête
Quantité de pluie	132	143	87	13

Représentez cette série par un diagramme circulaire puis par un diagramme de barres.

Exercice 14 :

Lors d'un contrôle de fabrication, on a relève les poids d'une série de pièces usinées et on a trouvé les résultats suivants. L'unité étant le gramme :

305 ; 301 ; 294 ; 290 ; 299 ; 295 ; 298 ; 298 ; 297 ; 299 ; 307 ; 303 ; 297 ; 297 ; 299 ; 295 ; 298 ; 297 ; 295 ; 299 ; 303 ; 298 ; 306 ; 299 ; 305 ; 297 ; 304 ; 295 ; 301 ; 299 ; 302 ; 307 ; 304 ; 300 ; 299 ; 301 ; 299 ; 305 ; 308 ; 297.

① Classer ces données.

② Représentez le diagramme des effectifs.

③ Déterminez le (s) mode, la médiane et la moyenne.

Exercice 15 :

La taille de 14 élèves sont les suivantes (en cm) :

155, 154, 161, 163, 167, 158, 157, 159, 166, 165, 150, 170, 169, 167

①a) Quelle est la population étudiée ?

b) Préciser son caractère.

② Déterminer le mode de cette série.

③ Déterminer la médiane.

④ Représenter le diagramme en battons des effectifs de cette série .

Exercice 16 :

Une étude de marché a permis d'obtenir le tableau ci-dessous qui présente la distribution des clients d'une entreprise en fonction de leur âge :

Age	Effectifs
[15, 20[	2
[20, 25[	5
[25, 30[	8
[30, 35[	14
[35, 40[	4
[40, 45[	6
[45, 50[	6

① a) Quelle est la population étudié ?

b) Préciser le caractère observe ?

c) Quelle est la classe modale.

② Représenter l'histogramme des effectif de cette série

③ a) Tracer la courbe des effectifs cumulés croissante.

b) Calculez la médiane.

Exercice 17 :

La production céréalière de la France en 1981 est donnée par le tableau suiva

Céréales	Blé	Orge	Maïs	Avoine	Seigle	Autres
Production (en milliers de tonnes)	22782	10180	9100	1754	342	847

① Définir la population.

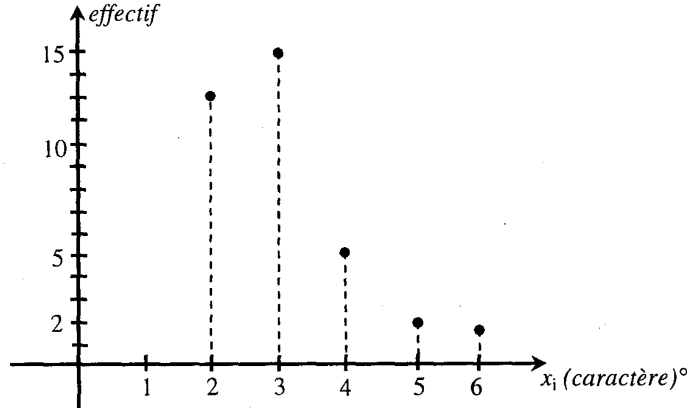
② Pour chaque céréale, calculer le pourcentage de sa production par rapport à la production céréalière totale.

③ Faire un graphique à secteurs circulaires en représentant chaque céréale par un secteur angulaire dont la mesure est proportionnelle à la production de la céréale.

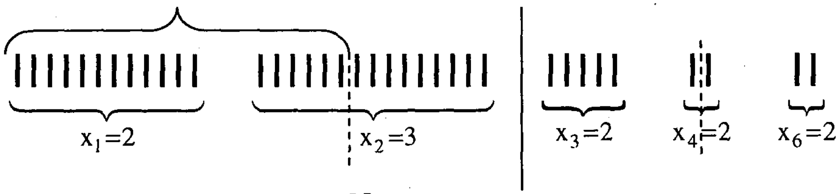
SOLUTIONS

Solution 1 :

①



② Le mode est la valeur du caractère qui correspond au plus grand effectif le plus grand effectif est 15 donc le mode est 3



L'effectif total est N = 36 ; $\frac{N}{2} = 18$

La médiane est 3

③ $\frac{N}{4} = 9$: Le premier quartile est $Q_1 = 2$.

$\frac{3N}{4} = 27$: Le troisième quartile est $Q_3 = 3$.

Solution 2 :

①

x_i	1	2	4	5	7
n_i	5	7	5	12	3

N = 5 +7 + 5 +12 +3 = 32

② le mode M =5 (valeur du caractère qui correspond au plus grand **effectif**)

$\frac{N}{2} = 16$, la médiane est $M_e = 4$

③ $\frac{N}{4} = 8$ donc le premier quartile $Q_1 = 2$

$\frac{3N}{4} = 24$ donc le troisième quartile $Q_3 = 5$

Solution 3 :

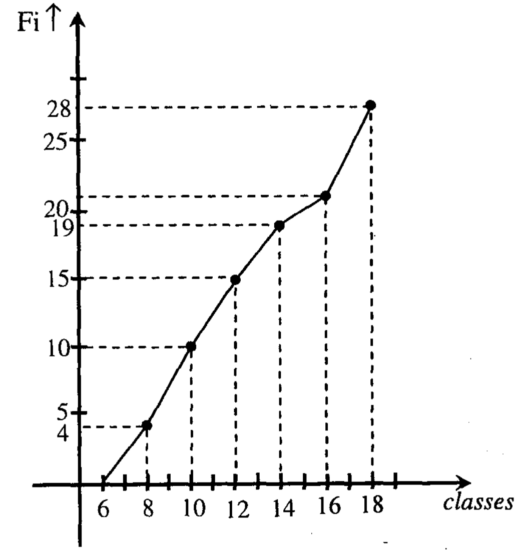
① C'est une série bimodale donc les clanes modales sont : [8,10[et [16,18[

②

Classes	[6,8[	[8,10[	[10,12[	[12,14[	[14,16[	[16,18[
Fi↑	4	10	15	19	22	28

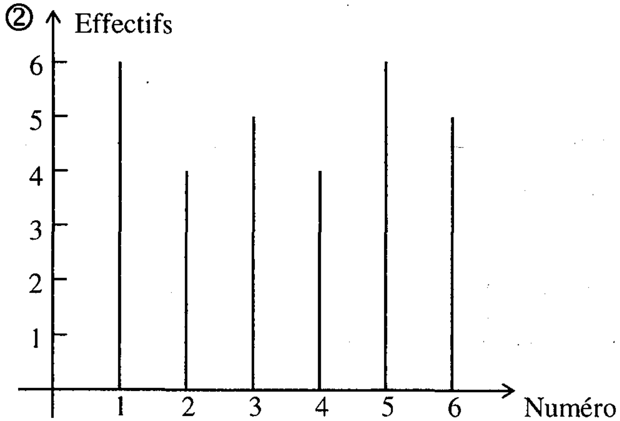
Les points de la courbes sont :

(6,0) : (8,4) : (10,10) ; (12,15) (14,19) ; (16 ,22) ; (18 ,28)



façon suivante : $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}=\frac{20}{100}=20\%$ Ainsi :

②



Fréquences
20%
13,33%
16,66%
13,33%
20%
16,66%

③ L'effectif le plus élevé est 6. La série est bi-modale puis quelle possède deux modes 1 et 5. (une mode est une valeur pour laquelle l'effectif est le plus élevé).

Solution 9 :

① Le caractère observé est qualitatif c'est à dire il n'est pas mesurable

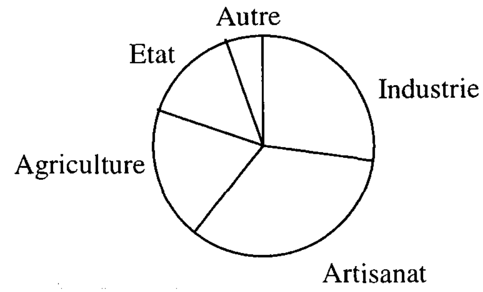
Secteurs l'activités	Nombre de jeunes filles
Industrie	70
Artisanat	90
Agriculture	50
L'état	30
Autres	10

② Représentation par des secteurs d'un disque :

Soit $\alpha=\frac{n\times 360}{n}=\frac{n\times 360}{250}$

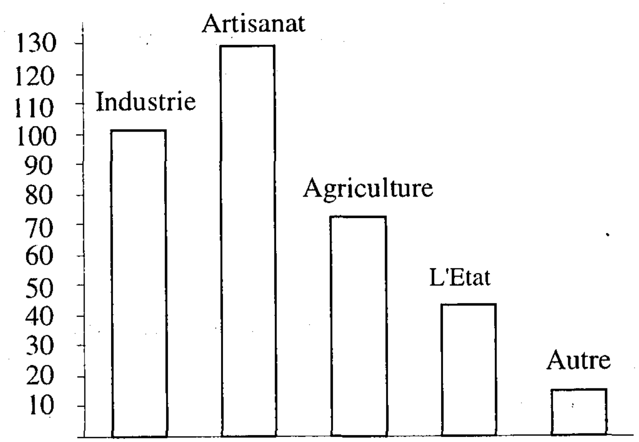
n : nombre de filles travaillant dans un secteur d'activité et N le nombre total des filles

Secteur	α
Industrie	≈ 101°
Artisanat	≈ 129°
Agriculture	≈ 72°
L'état	≈ 43°
Autres	≈ 15°



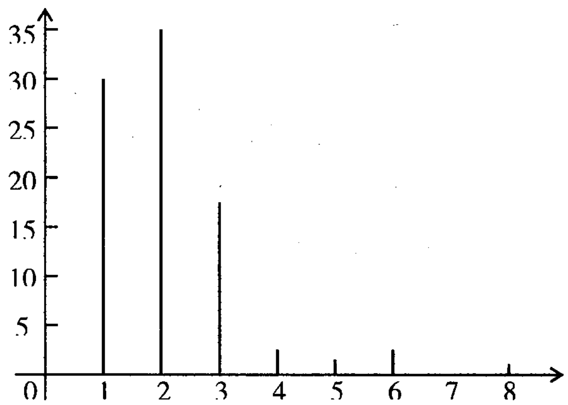
Digramme en barre :

Il s'agit de représenter 5 barres de même largeur (par exemple 1cm) et de longueurs proportionnel à 70, 90, 50, 30, 10 . Pour 0,5cm ➔ 10 filles



Solution 10 :

①



Valeurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Fréquences cumulées croissantes	0,15	0,43	0,75	0,91	0,94	0,96	0,99	0,99	1

② a) Le mode est $M_0 = 2$

(valeurs qui correspond au plus grand effectif 32)

b) La médiane est $M_e = 2$ car les deux valeurs centrales sont 2 et 2

③ La moyenne est $\overline{X} = \dfrac{28+64+48+12+10+18+8}{100} = 1{,}88$

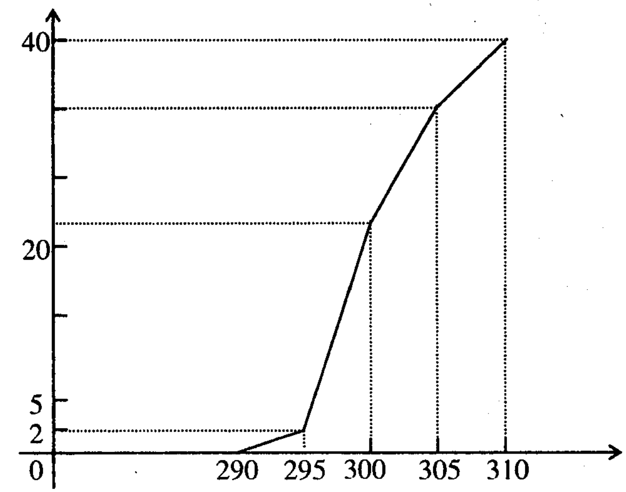
Solution 11 :

① La classe modale est [295, 300[

②

Classes	[290,295[	[295, 300[	[300, 305[	[305, 310[
Effectifs	2	22	9	7
Effectifs cumulées	2	24	33	40

Les points de la courbe sont : (290,0) ; (33 ,305) ; (22 ,300) (295,2) ; 310,40)).



③ N = 40 alors $\dfrac{N}{2} = 20$

295 ⟶ 2

300 ⟶ 22

M ⟶ 20

On a : $\dfrac{295-300}{2-22} = \dfrac{M-295}{20-2}$ Donc $\dfrac{1}{4} = \dfrac{M-295}{18}$

==> M ; 295 = $\dfrac{18}{4} = 4{,}5$ d'où M = 299,5

Table des matières

PREMIERE PARTIE

DEUXIEME PARTIE