ARITHMETIQUE
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

1) Donner l'écriture de a) $A = \overline{231}^{4}$ b) $A = \overline{1001}^{2}$ c) $A = \overline{4132}^{5}$
2) Ecrire la suite des 10 premiers nombres entiers en base deux. En base quatre
3) En base douze, on désigne par A le chiffre correspondant à 10, par B celui correspondant à 11. Ecrire la suite des cinq successeurs de $BA9$.

Exercice n°2.
1) Ecrire le nombre 53 en base deux.
2) Soit A = 2183. Ecrire A dans le système octal.

Exercice n°3.
Soit A = 5012 en base 7. Ecrire A en base 2.

Exercice n°4.
A s'écrit 23 dans le système décimal et 27 dans un système de base a. Que vaut a ?

Exercice n°5.
1) Donnez tous les multiples de 7 (ou une expression …)
2) Donnez tous les multiples de 1
3) Donnez tous les multiples de 0
4) Comment s'écrivent les nombres pairs ? les nombres impairs ?
5) Trouver tous les diviseurs de 72.
6) Les nombres 12 et 18 sont-ils des diviseurs de 2772 ?
7) Trouver un entier naturel qui soit diviseur de 48 sans être diviseur de 12.

Exercice n°6.
Combien y–a-t-il de multiples de 17 entre 1 000 et 2 500 ?

Exercice n°7.
1) Déterminer le chiffre x pour que $\overline{53x2}$ soit divisible par 9 .
2) Déterminer le chiffre y pour que $\overline{53y4}$ soit divisible par 3 et 4 .

Exercice n°8. autres critères de divisibilité
Partie A
Montrer que 86 – 68 est un multiple de 9 tandis que 86 + 68 est un multiple de 11.
Montrer que 32 – 23 est un multiple de 9 tandis que 32 + 23 est un multiple de 11.
D'après vous une certaine propriété est elle vraie pour tout nombre de deux chiffres ?
Un nombre entier à deux chiffres $\overline{cd}$ est égal à c× 10 + d.
Soit a un entier à deux chiffres, et b l'entier obtenu en intervertissant les chiffres de a.
Montrer que a – b est un multiple de 9, et que a + b est un multiple de 11.
Partie B
Soit n un entier à trois chiffres $\overline{abc}$ et m l'entier à trois chiffres obtenus en permutant le chiffre des centaines et des unités. Montrer que $n - m$ est un multiple de 99.

Exercice n°9.
1) Donnez les 20 premiers nombres premiers .
2) 217 est –il premier ? 289 est–il premier ? 439 est–il premier ?

Exercice n°10.
Donner la décomposition en facteur premier de 60 96 640 2673

Exercice n°11.

Décomposer 6300 et 315 en produit de facteurs premiers, puis simplifier $\frac{6300}{315}$ et $\sqrt{6300}$

Exercice n°12. L'entier $1\times2\times3\times4\times5\times......\times(n-1)\times n$ s'écrit n ! et se lit « factorielle n ».

1) Calculer 6 !
2) Quelle relation existe-t-il entre 7 ! et 6 !
3) En déduire une relation entre (n+1) ! et n !
4) À quelle puissance figure le nombre 2 dans la décomposition en produits de facteurs premiers de (10!) ?
5) Par combien de zéros se termine (10 !) ? et (100 !) ?

Exercice n°13. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b pour :
$a = 194$ et $b = 7$ $a = 486$ et $b = 9$ $a = -317$ et $b = 21$

Exercice n°14. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de 430 par 38.
Peut-on en déduire, sans calculer de nouvelle division, le quotient et le reste de la division de 860 par 76 ?

Exercice n°15. Nous étions vendredi 1er septembre 2006. Quel jour de la semaine serons nous le 1er septembre 2007 ? 1er septembre 2008 ? 1er septembre 2009?

Exercice n°16. 1235 personnes (élèves + professeurs) doivent être transportées dans des cars de 45 places.
Combien faut-il de cars , et combien de personnes rempliront le car non plein ?

Exercice n°17. Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 375 et 2070

Exercice n°18. Si on divise 4 373 et 826 par un même nombre positif b on obtient 8 et 7 pour restes. Déterminer b.

Exercice n°19. Déterminer le PGCD de 3723 et 6711 12 et 8 3 et 7 12 et 6

Exercice n°20.
1) Deux nombres a et b sont premiers entre eux et leur somme est 24. Déterminer tous les couples (a, b) possibles.
2) Déterminer tous les couples (x ; y) d'entiers naturels tels $x + y = 96$ et pgcd(x ; y) = 4.

Exercice n°21. Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit.
La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.
1) Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?
2) Préciser le nombre de déplacement par laps de temps .

Exercice n°22. Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.
1) Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur 4,54 m et de largeur 3,75m. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté.
On commence la pose par un coin de la pièce comme le suggère la figure 1.
Calculer le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.

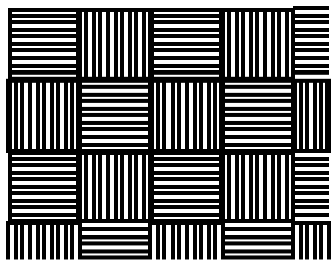


Figure 1

2) Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur 4,55 m et de largeur 3,85 m.
On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.
a) Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.
b) Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.
c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine?
3. On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.
a) Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.
b) Donner la liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400.
c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe?

Exercice n°23.
On veut recouvrir une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61 m avec des dalles carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres. Quelle est la taille maximale de ces dalles ?

Exercice n°24.
On dispose d'une feuille de papier. On découpe dans cette feuille le plus grand carré possible. Dans le morceau restant, on découpe encore le plus grand carré possible, et ainsi de suite... On continue à découper le plus grand carré possible jusqu'à ce que le morceau restant soit lui-même un carré.
Quelle est la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont 192 cm sur 84 cm ?
Même question si les dimensions initiales sont deux entiers quelconques

Exercice n°25. Compléter les congruences suivantes : $37 \equiv \ldots \bmod (13)$ $37 \equiv \ldots \bmod (13)$ $125 \equiv \ldots \bmod (100)$ $7125 \equiv \ldots \bmod (100)$ $-5 \equiv \ldots \bmod (10)$ $12548695 \equiv \quad \bmod (10)$

Exercice n°26.
1) Compléter : $7 \equiv \ldots \bmod (10)$ $7^2 \equiv \ldots \bmod (10)$ $7^3 \equiv \ldots \bmod (10)$ $7^4 \equiv \ldots \bmod (10)$
2) En déduire $7^{401} \equiv \ldots \bmod (10)$ puis $7^{31} \equiv \ldots \bmod (10)$
3) Le premier janvier 2000 était un samedi . Quel jour serons nous le 1er janvier 2100 ? (2000 , 2004 …sont bissextiles)

Exercice n°27. Trouver le reste de la division euclidienne par 17 du nombre 200^{539}.

Exercice n°28. **Une application des congruences aux codages des billets de banque (Terminale L, juin 2006)**
On admet qu'on obtient le même reste en divisant un nombre par 9 qu'en divisant la somme de ses chiffres par 9.
Par exemple : $8753 = 972 \times 9 + 5$, le reste est donc 5.
$8+7+5+3 = 23 = 2 \times 9 + 5$, le reste est également 5.
Sur les billets de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre.
On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet habituel comportant 26 lettres.
On obtient ainsi un nombre à 12 ou 13 chiffres et on cherche le reste de la division de ce nombre par 9. Ce reste est le même pour tous les billets authentiques et vaut 8.

Exemple :

Code : s00212913862.
Rang dans l'alphabet de la lettre s : 19.
Nombre obtenu : 1900212913862.
Reste pour ce billet : 8

1) Le code u01308937097 figure sur un billet de banque.
a) Donner le nombre à 13 chiffres correspondant à ce code.
b) Calculer le reste de la division par 9 de la somme des 13 chiffres de ce nombre.
c) Que peut-on dire de ce billet ?
2) Sur un billet authentique figure le code s0216644810x, x pour le dernier chiffre illisible. Montrer que $x + 42$ est congru à 8 modulo 9. En déduire x.
3) Sur un autre billet authentique la partie du code formé par les 11 chiffres est 16122340242, mais la lettre qui les précède est effacée. On appelle n le rang dans l'alphabet de la lettre effacée.
a) Déterminer les valeurs possibles de n.
b) Quelles sont les possibilités pour la lettre effacée ?

Exercice n°29. **Une application des congruences au calendrier (Terminale L, novembre 2004**
Une année bissextile compte 366 *jours et une année non bissextile* 365 *jours. Une année est bissextile si son "numéro" est divisible par 4 sauf s'il s'agit d'un siècle. Les siècles, années dont le " numéro". se termine par deux zéros, ne sont, en général, pas bissextiles sauf si leur "numéro" est divisible par* 400.
Quelque exemples :1996 *était bissextile,* 1997 *ne l'était pas,* 1900 *non plus mais* 2400 *le sera.*
1) Trouver les deux entiers naturels a et b inférieurs ou égaux à 6 tels que $365 \equiv a$ (modulo 7) et $366 \equiv b$ (modulo 7).
2) a) En supposant que le premier janvier d'une année non bissextile soit un lundi, expliquer pourquoi le premier janvier de l'année suivante sera un mardi.
b) Si le 1er janvier d'une année bissextile est un lundi, quel jour de la semaine sera le 1er janvier de l'année suivante?
3) Une période de quatre années consécutives compte $N = 3 \times 365 + 1 \times 366$ jours. Sans calculer N, justifier que $N \equiv 5[7]$.
4) En supposant que le premier janvier d'une année soit un lundi, quel jour de la semaine sera le premier janvier quatre ans plus tard? Expliquer la réponse.
Plus généralement, pour une date donnée, (par exemple le 1er janvier), *chaque période de* 4 *années produit un décalage de cinq jours dans le cycle des jours de la semaine.*
5. Compléter le tableau donné ci-dessous :

Nombre de périodes de quatre années	J = nombre de jours de décalage dans le cycle des jours de la semaine	Reste de la division de J par 7
0	0	0
1	5	5
2	10	3
3		
4		
5		
6		
7		

6) a) Expliquer pourquoi l'année 2004 est bissextile.
b) Sachant que le 29 février 2004 était un dimanche, quel jour de la semaine sera le 29 février 2008?
Quel jour de la semaine sera le 29 février 2012? Expliquer les réponses.
c) Quelle sera la prochaine année où le 29 février sera un dimanche ? Expliquer la réponse.

Exercice n°30. **codes barres (Terminale L, Nouvelle-Calédonie 2003)**
Dans le système d'identification des produits par codes à barres, un code est une succession de 12 chiffres. Il est précédé d'une treizième chiffre appelé clé du code et qui sert à la vérification de la bonne saisie du code.
Un code à barres est symbolisé par le tableau :

R	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}

R est la clé du code et C_1 , C_2 , … , C_{12} sont les chiffres du code. R , C_1 , C_2 , … , C_{12} sont donc des entiers compris entre 0 et 9. Les chiffres de rang impair (C_1 , C_3 , … , C_{11}) sont dans les cases grisées, ceux de rang pair dans les cases blanches.
La clé R est calculée de telle sorte que la relation suivante soit vérifiée :
$3\times$(somme des chiffres de rang impair)+(somme des chiffres de rang pair)+R $\equiv 0$ (modulo 10)

4 018474 332189 >

1) Sur l'étiquette imprimée ci-contre on a R=4 , C_1=1, C_2 = 1 etc.
Vérifier que le code de l'étiquette ne contient pas d'erreur.

2) Calculer la clé correspondant au code suivant :

R	5	1	6	0	3	2	4	2	1	5	3	7

3) Montrer que les deux codes suivants correspondent à la même clé :

R'	*c*	7	*d*	0	4	1	5	6	3	6	6	2
R'	*d*	7	*c*	0	4	1	5	6	3	6	6	2

4) Sur l'étiquette ci-dessous, un des chiffres a été effacé et remplacé par la lettre *a*. Retrouver ce chiffre.

8	3	9	9	4	2	*a*	2	0	0	3	4	1

5) Les deux premiers chiffres, *b* et *c*, de l'étiquette ci-dessous ont été effacés.

1	*b*	*c*	9	3	6	7	3	5	8	0	2	1

Montrer que : c $\equiv$ -3b-1 (modulo 10)
En déduire les valeurs possibles du couple *(b ;c)*

Exercice n°31. **Le numéro INSEE (Terminale L, Antilles 2003)**
Le numéro INSEE est constitué de 15 chiffres. En lisant de gauche à droite:
- le premier chiffre est 1 s'il s'agit d'un homme et 2 s'il s'agit d'une femme ;
- les deux chiffres suivants désignent les deux derniers chiffres de l'année de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le mois de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le département de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent la commune de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent le numéro d'inscription sur le registre d'état-civil ;
- les deux chiffres suivants désignent la clé K, calculée de la manière suivante :
- soit A le nombre entier constitué par les 13 chiffres de gauche ;
- soit r le reste de la division euclidienne de A par 97 ;
- alors $K = 97 - r$.

Les 13 premiers chiffres (sans la clé) du numéro INSEE de Sophie sont : 2 85 07 86 183 048.
On note A ce nombre et r le reste de la division euclidienne de A par 97.
1) Donner le mois de l'année de naissance de Sophie.
2) a) Déterminer les deux entiers a et b tels que $A = a\times 10^6 + b$ avec $0 \le b < 10^6$
b) En utilisant le reste de 100 dans sa division euclidienne par 97, montrer que $10^6 \equiv 27$ (modulo 97).
c) En déduire le reste r de la division euclidienne de A par 97.
3) Déterminer la clé K du numéro INSEE de Sophie.
4) Sophie, à qui l'on demande les treize premiers de son numéro INSEE, inverse les deux derniers chiffres et répond 2 85 07 86 183 084 au lieu de 2 85 07 86 183 048. On note B la réponse de Sophie.
a) Calculer la différence $B - A$ et en déduire que le reste de la division euclidienne de B par 97 est égal à 21.
b) L'erreur faite par Sophie peut-elle être détectée?

Exercice n°32. **Critère de divisibilité (Terminale L, juin 2004)**

Le but de l'exercice est de prouver pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité : "Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3"

1. Un exemple

a) Pour un entier naturel n, que signifie la phrase "n est congru à 1 modulo 3" ?
Traduire à l'aide d'une congruence "n est divisible par 3".

b) Pour chacun des nombres suivants, donner l'entier positif le plus petit auquel il est congru modulo 3 : 10, 100, 1 000, 10^p où p est un entier positif.

c) Déterminer le plus petit entier positif auquel est congru le nombre 4 520 modulo 3.
On remarquera que $4\ 520 = 4\times 1000 + 5\times 100 + 2\times 10$.

d) En utilisant la question b) trouver le reste de la division de 4520 par 3.

2. Quelques généralisations

On considère un entier N à quatre chiffres, quatre entiers a, b, c et d entre 0 et 9 tels que $a\neq 0$ et $N=1000a + 100b + 10c+d$
Le chiffre des unités est d, celui des dizaines c, des centaines b et des milliers a.

a) Montrer que $N\equiv a + b + c + d$ modulo 3.

b) Justifier, pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité par 3 énoncé au début de l'exercice.

c) Enoncer un critère analogue de divisibilité par 9 et le démontrer pour les nombres à quatre chiffres.

Exercice n°33. **Un autre critère de divisibilité (Terminale L, Liban 2004)**

On note $\overline{abcd}$ =1000a+100b+10c+d l'écriture d'un nombre en base dix dont les chiffres sont a, b, c et d.

1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 100 par 11, puis de 1000 par 11.

b) Montrer que si un nombre entier n vérifie $n\equiv 10$ (mod 11) alors on peut aussi écrire $n\equiv -1$ (mod 11)

c) En déduire que si $\overline{abcd}$ est divisible par 11 alors –a+b–c+d est aussi divisible par 11.

2) a) Les nombres du type $\overline{abba}$ sont-ils divisibles par 11 ?

b) Pour quelle valeur de a, le nombre $\overline{1a1}$ est- il divisible par 11 ?

c) Pour quelle valeur de a, le nombre $\overline{9a9}$ est- il divisible par 11 ?

3) À quelles conditions les nombres du type $\overline{aab}$ sont-ils divisibles par 11 ?

Exercice n°34. Sachant que $n\equiv 3[5]$, prouver que $2n^2-n$ est multiple de 5.

Exercice n°35. (Antilles juin 2003)

1) a) Montrer que 1999 est congru à 4 modulo 7.

b) Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à 2007 modulo 7.

2) Soit n un nombre entier naturel congru à 5 modulo 7.

a) Déterminer un nombre entier naturel congru à n^3 modulo 7.

b) En déduire que n^3+1 est divisible par 7.

3) Montrer que si n est un nombre entier naturel congru à 4 modulo 7 alors n^3-1 est divisible par 7

4) On considère le nombre $A=1999^3+2007^3$. Sans calculer A, montrer que A est divisible par 7

Exercice n°36. **(Terminale L Centres étrangers juin 2002)**

Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout entier naturel n non nul, le nombre $A=n(n^2-1)$ est un multiple de 6

1) Dans chacun des cas suivants, calculer A et déterminer le reste dans la division euclidienne de A par 6.

a) $n=5$; b) $n=16$; c) $n=32$.

2) On suppose maintenant que le reste de la division euclidienne de n par 6 est 5 ; on peut donc écrire $n\equiv 5[\text{mod } 6]$.

a) Que peut-on en conclure pour $(n-1)$ et $(n+1)$?

b) Quel est le reste de la division euclidienne de (n^2-1) par 6 ?

c) Justifier alors que $n(n^2-1)$ est un multiple de 6.

3) Compléter le tableau suivant :

4) Conclure

Reste de la division de n par 6	Reste de la division de $(n-1)$ par 6	Reste de la division de $(n+1)$ par 6	Reste de la division de (n^2-1) par 6	Reste de la Division de $n(n^2-1)$ par 6
0				
1				
2				
3	2	4	2	0
4				
5				

CORRECTION

Exercice n°1

1) a) $A=\overline{231}^{4}=2\times 4^{2}+3\times 4^{1}+1\times 4^{0}=45$ b) $A=\overline{1001}^{2}=1\times 2^{3}+0\times 2^{2}+0\times 2^{0}+1\times 2^{0}=9$

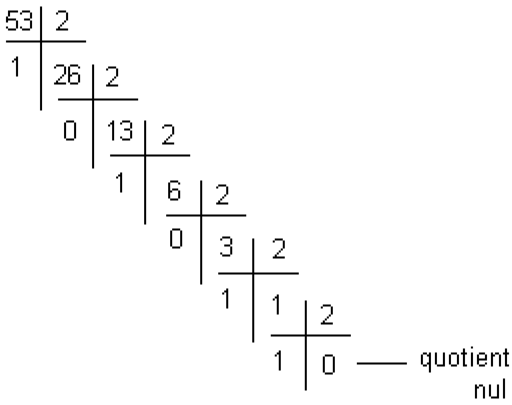
c) $A=\overline{4132}^{5}=4\times 5^{3}+1\times 5^{2}+3\times 5^{1}+2\times 5^{0}=542$

2) En base deux : 0,1,10,11,100,101,110,111,1000,1001,1010 En base quatre : 0,1,2,3,10,11,12,13,20,21

3) Après BA9, on trouve BAA, BAB, BB0, BB1 et BB2

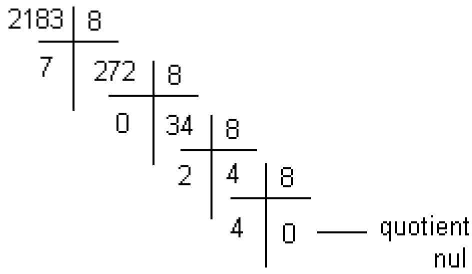
Exercice n°2

1) On divise 53 successivement par deux, jusqu'à l'obtention d'un quotient nul.



En recopiant la suite des restes, on obtient : $(53)_{10}=(110101)_{2}$

2) On divise 2183 successivement par huit, jusqu'à l'obtention d'un quotient nul.



En recopiant la suite des restes, on obtient : $(2183)_{10}=(4207)_{8}$

Exercice n°3

On commence par convertir A = 5012 de la base 7 à la base 10, ainsi $A=5\times 7^{3}+0\times 7^{2}+1\times 7^{1}+2\times 7^{0}=1724$, et on le convertit en base 2 comme dans l'exemple précédent

Exercice n°4

Si A s'écrit 27 dans un système de base a, alors en le convertissant en base 10 : $(27)_{a}=2\times a^{1}+7\times a^{0}=(2a+7)_{10}$

Si par ailleur A s'écrit 23 en base 10, on aura donc $2a+7=23\Leftrightarrow a=8$

Exercice n°5

1) Les multiples de 7 sont tous les entiers de la forme $7n$, où $n\in\mathbb{N}$
2) Les multiples de 1 sont tous les entiers naturels !
3) La liste des multiples de 0 est réduite à 0 (car pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $n\times 0=0$)
4) Les entiers pairs sont multiples de 2, donc de la forme $2n$, $n\in\mathbb{N}$. Les entiers impairs sont de la forme $2n+1$, $n\in\mathbb{N}$.
5) Les diviseurs de 72 sont : 1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36 et 72
6) Les nombres 12 et 18 sont des diviseurs de 2772 car $2772=12\times 231$ et $2772=18\times 154$
7) Par exemple 24 ou 16

Exercice n°6

Les multiples de 17 sont tous les entiers de la forme $17n$, où $n\in\mathbb{N}$. Les multiples de 17 entre 1 000 et 2 500 sont donc les entiers tels que $1000\leq 17n\leq 2500\Leftrightarrow\frac{1000}{17}\leq n\leq\frac{2500}{17}$. Puisque $n\in\mathbb{N}$, on a donc $59\leq n\leq 147$. Les multiples de 17 compris entre 1 000 et 2 500 sont donc les entiers de la forme $17n$, avec $59\leq n\leq 147$. Il y en a donc $147-59+1=89$
Il y a donc 89 multiples de 17 entre 1000 et 2500

Exercice n°7

1) $\overline{53x2}$ sera divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est, c'est-à-dire si et seulement $5+3+x+2=10+x$ est divisible par 9. Mais puisque x est un chiffre compris entre 0 et 9, la seule $10+x$ divisible par 9 est obtenue pour $x=8$

2) $\overline{53y4}$ sera divisible par 3 et 4 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 et si et seulement le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. La somme des chiffres vaut $5+3+y+4=12+y$, divisible par 3 si y vaut 0,3,6 ou 9. Mais si on veut que le nombre formé par ses deux derniers chiffres, à savoir $\overline{y4}=10y+4$ soit divisible par 4, seul y = 0 ou 6 conviennent.

Exercice n°8 autres critères de divisibilité

Partie A

86–68 = 18 est divisible par 9 et 86+68=154 est un multiple de 11 (car $154 = 14\times 11$)
32-23 = 9 est divisible par 9 et 32+23=55 est un multiple de 11 (car $55 = 5\times 11$)

Il semblerait que pour tout nombre $\overline{cd}$, alors le nombre *cd-dc* soit divisible par 9, et que *cd*+*dc* soit divisible par 11

Si on note $\overline{cd} = c\times 10 + d$ un nombre à deux chiffres, alors

$\overline{cd} - \overline{dc} = (c\times 10 + d) - (d\times 10 + c) = 10c + d - 10d - c = 9(c-d)$, ce qui prouve que le nombre $\overline{cd} - \overline{dc}$ est divisible par 9

De plus, $\overline{cd} + \overline{dc} = (c\times 10 + d) + (d\times 10 + c) = 10c + d + 10d + c = 11(c+d)$, ce qui prouve que le nombre $\overline{cd} + \overline{dc}$ est divisible par 11

Partie B

Notons $n = \overline{abc} = a\times 100 + b\times 10 + c = 100a + 10b + c$ un nombre eniter à trois chiffres, et $m = \overline{cba} = c\times 100 + b\times 10 + a = 100c + 10b + a$ l'entier à trois chiffres obtenus en permutant le chiffre des centaines et des unités. Alors $n - m = \overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a-c)$ est divisible par 99.

Exercice n°9

1) Les 20 premiers nombres premiers sont 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67 et 71
2) Pour tester la primalité d'un nombre entier *n*, il faut tester sa divisibilité par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$ (arrondi à l'entier inférieur). Ainsi :
217 n'est pas premier car $217 = 7\times 31$ 289 n'est pas premier car $289 = 17\times 17$ 439 est premier.

Exercice n°10 $60 = 2^2\times 3^1\times 5^1$ $96 = 2^5\times 3^1$ $640 = 2^7\times 5^1$ $2673 = 3^5\times 11^1$

Exercice n°11

$6300 = 2^2\times 3^2\times 5^2\times 7^1$ et $315 = 3^2\times 5^1\times 7^1$

donc $\dfrac{6300}{315} = \dfrac{2^2\times 3^2\times 5^2\times 7^1}{3^2\times 5^1\times 7^1} = 2^2\times 3^{2-2}\times 5^{2-1}\times 7^{1-1} = 2^2\times 5 = 20$ et $\sqrt{6300} = \sqrt{2^2\times 3^2\times 5^2\times 7^1} = 2\times 3\times 5\sqrt{7} = 30\sqrt{7}$

Exercice n°12 L'entier $1\times 2\times 3\times 4\times 5\times ......\times(n-1)\times n$ s'écrit *n* ! et se lit « factorielle *n* ».

1) $6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$
2) $7! = 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 7\times(6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1) = 7\times 6!$
3) De manière générale $(n+1)! = (n+1)\times n!$
4) Pour obtenir la décomposition en facteurs premiers de 10 !, il « suffit » de multiplier entre elles les décompositions en facteurs premiers des 10 entiers qui composent 10 ! Au niveau des puissances de ces nombres premiers, cela se traduit par une addition
Ainsi, dans la décomposition en produits de puissances de facteurs premiers de 1, ne figure pas 2. Dans celle de 2, 2^1 y figure. Dans celle de 4 figure 2^2, dans celle de 6 figure 2^1, dans celle de 8 figure 2^3 et enfin 2^1 figure dans celle de 10. Au total, 2 figure à la puissance 1+2+1+3+1=8 dans la décomposition en produits de facteurs premiers de 10!
5) Dans la « composition » de 10 !, outre le nombre 10, le seul produit susceptible de fournir un zéro est le produit 2×5. On conclut que 10 ! se termine par deux zéros
Dans la « composition » de 10 !, outre les 10 nombres « dizaines » (de 10 à 100) qui fournissent donc 10 zéros, les seuls produits susceptibles de fournir un zéro chacun sont, au sein de chaque dizaine, le produit du nombre se terminant par 2 par le nombre se terminant par 5, soit 10 zéros supplémentaires (du produit 2×5 au produit 92×95). Au total, ce sont 20 zéros qui termineront l'écriture de 100 !

Exercice n°13

$\underbrace{194}_{a} = \underbrace{7}_{b}\times\underbrace{27}_{q} + \underbrace{5}_{r}$ $\underbrace{486}_{a} = \underbrace{9}_{b}\times\underbrace{54}_{q} + \underbrace{0}_{r}$ $\underbrace{-317}_{a} = \underbrace{21}_{b}\times\underbrace{(-16)}_{q} + \underbrace{19}_{r}$ car il ne faut pas oublier que $0 \le r < |b|$

Exercice n°14 on calcule $\underbrace{430}_{a} = \underbrace{38}_{b}\times\underbrace{11}_{q} + \underbrace{12}_{r}$, puis en multipliant toute cette égalité par 2 :

$2\times(430) = 2\times 38\times 11 + 2\times 12 \Leftrightarrow 860 = 76\times 11 + 24$. On en déduit donc que, dans la division de 860 par 76, le quotient vaut 11 et le reste 24.

Exercice n°15

Entre le 1er septembre 2006 et le 1er septembre 2007 s'écouleront 365 jours (car 2007 n'est pas bissextile). Or $365 = 7\times 52+1$, donc s'écouleront 52 semaines et 1 jour, faisant tomber le 1er septembre 2007 un samedi.
Entre le 1er septembre 2007 et le 1er septembre 2008 s'écouleront 366 jours (car 2008 est bissextile). Or $366 = 7\times 52+2$, donc s'écouleront 52 semaines et 2 jours, faisant tomber le 1er septembre 2008 un lundi.
Entre le 1er septembre 2008 et le 1er septembre 2009 s'écouleront 365 jours (car 2009 n'est pas bissextile). Or $365 = 7\times 52+1$, donc s'écouleront 52 semaines et 1 jour, faisant tomber le 1er septembre 2009 un mardi.

Exercice n°16 La division euclidienne de 1235 par 45 fournit $1235 = 45\times 27+20$. Le transport nécessitera donc 27 cars « pleins » et un 28ème car occupé par 20 personnes

Exercice n°17

Les diviseurs de 375 sont 1,3,5,15,25,75,125 et 375
Les diviseurs de 2070 sont 1,2,3,5,6,9,15,18,23,30,45,46,69,90,115,138,230,414,690,345,1035,2070
L'ensemble des diviseurs communs à 375 et 2070 est donc 1,3,5,15,138,414,690,2070

Exercice n°18 On écrit les deux division euclidiennes $4373 = b\times q_1 + 8$ et $826 = b\times q_2 + 7$,
donc simultanément $b\times q_1 = 4373-8 = 4365$ et $b\times q_2 = 826-7 = 819$. b est donc un diviseur commun à 4365 et à 819.
Un rapide examen de la liste des diviseurs des deux nombres permet de conclure que $b = 9$

Exercice n°19 On effectue les divisions euclidiennes successives
$6711 = 3723\times 1+2988$ puis $3723 = 2988\times 1+735$ puis $2988 = 735\times 4+48$ puis $735 = 48\times 15+15$ puis $42 = 15\times 2+12$
puis $15 = 12\times 1 + \underbrace{3}_{\text{dernier reste non nul}}$ puis $12 = 3\times 4+0$. Le dernier reste non nul étant 3, le PGCD de 6711 et 3723 est 3.

De la même manière, $12 = 8\times 1 + \underbrace{4}_{\text{dernier reste non nul}}$ puis $8 = 4\times 2+0$. Le dernier reste non nul étant 4, le PGCD de 12 et 8 est 4.

De la même manière, $7 = 3\times 2 + \underbrace{1}_{\text{dernier reste non nul}}$ puis $3 = 1\times 3+0$. Le dernier reste non nul étant 1, le PGCD de 7 et 3 est 1.

On dit que les nombres sont premiers entre eux.
Enfin, puisque $12 = 6\times 2+0$ 6 divise 12 donc le PGCD de 12 et 6 est 6.

Exercice n°20

1) Parmi les couples d'entiers n'ayant pas de diviseur commun (autre que 1) et dont la somme vaut 24, il y a
$a=1;b=23$ $a=5;b=19$ $a=7;b=17$ $a=11;b=13$
2) Si pgcd(x ; y) = 4, alors 4 divise x et y, donc $x = 4n$ et $y = 4m$ où m et n sont des entiers **premiers entre eux** (sinon 4 ne serait pas le pgcd de x et y. Puisque $x + y = 96$, on en déduit donc $4(n+m) = 96 \Leftrightarrow n+m = 24$
Il nous faut donc déterminer les couples d'entiers $(n;m)$ premiers entre eux tels que $n+m=24$. Ceci ayant été fait dans la question 1), on conclut que $n=1;m=23$ ou $n=5;m=19$ ou $n=7;m=17$ ou $n=11;m=13$, donc en multipliant par 4 : $x=4;y=92$ ou $x=20;y=76$ ou $x=28;y=68$ ou $x=44;y=52$

Exercice n°21

1) Les voitures se croiseront pour la première fois (depuis le départ) au bout d'un temps égal à PPCM(30,36)
Pour calculer PPCM(30,36), deux solutions sont envisageables :
- soit on calcule PGCD(30 ;36), qui vaut 6 et puisque $PGCD(30;36)\times PPCM(30;36) = 30\times 36$, on en déduira $PPCM(30;36) = \frac{30\times 36}{6} = 180$
- soit on utilise la décomposition de 30 et 36 en produits de facteurs premiers, à savoir $30 = 2^1\times 3^1\times 5^1$ et $36 = 2^2\times 3^2$, et on calcule, grâce aux maximum des puissances, $PPCM(30;36) = 2^2\times 3^2\times 5^1 = 180$
Les deux voitures se croiseront donc au bout de 180 minutes, ce qui représente 5 tours pour la voiture A et 6 tours pour la voiture B.
2) Toutes les 180 minutes (3 heures), la voiture A parcourt 5 tours, et la voiture B 6 tours.

Exercice n°22

1) Puisque $454 = 33\times13+25$ et $375 = 33\times11+12$, il faut un peu plus de 13 carreaux en longueur et un peu plus de11 carreaux en largeur, donc un nombre de carreaux non coupés égal à $11\times13 = 143$

2) a) Les diviseurs de 455 sont 1,5,7,13,35,65,91 et 455. Les diviseurs de 385 sont 1,5,7,11,55,77 et 385

b) L'ensemble des diviseurs communs à 455 et 385 est donc 1,5 et 7.

c) On peut donc utiliser des dalles de côté 7 cm pour carreler la cuisine. Il en faudra 65 en longueur et 55 en largeur.

3) a) La liste des multiples de 24 inférieurs à 400 est 24,48,72,96,120,144,168,192,216,240,264,288,312,336,360 et 384.
La liste des multiples de 15 inférieurs à 400 est :
15,30,45,60,75,90,105,120,135,150,165,180,195,210,225,240,255,270,285,300,315,330,345,360 et 375

b) La liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400 est donc 120,240 et 360.

c) On pourrait donc carreler une pièce carrée de 360 cm (soit 3m60) de côté avec des carreaux de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

Exercice n°23

Il faut déterminer PGCD(361;475). On effectue les divisions euclidiennes successives : $475 = 361\times1+114$ puis $361 = 114\times3+\underbrace{19}_{\text{dernier reste non nul}}$ puis $114 = 19\times6+0$. Le dernier reste non nul étant 19, le PGCD de 475 et 361 est 19.

A l'aide de dalles carrées de 19 cm de côté, on peut donc carreler une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61 m (il faudra 19 dalles en longueur et 25 en largeur, soit un total de 475 dalles en tout.

Exercice n°24 La taille du dernier carré sera PGCD(84 ;192)=12
De manière générale, si on note *x* et *y* les dimensions de la feuille initiale, la taille du dernier carré sera PGCD(*x* ;*y*).

Exercice n°25 37 ≡ 11 mod (13) car le reste de la division de 37 par 13 est 11. De même 125 ≡ 25 mod (100)
7125 ≡ 25 mod (100) -5 ≡ 5 mod (10) 12548695 ≡ 5 mod (10)

Exercice n°26

1) 7 ≡ 7 mod (10), $7^2 \equiv 9$ mod (10), $7^3 \equiv 3$ mod (10) et $7^4 \equiv 1$ mod (10)

2) Puisque $401 = 4\times100+1$, on a donc $7^{401} = 7^{4\times100+1} = \left(7^4\right)^{100}\times7^1$. Puisque $7^4 \equiv 1$ mod (10), alors $\left(7^4\right)^{100} \equiv \left(1\right)^{100} = 1$ mod (10), donc $7^{401} \equiv 1\times7$ mod(10)
Puisque $30 = 4\times7+2$, $7^{30} = 7^{4\times7+2} = \left(7^4\right)^7\times7^2$, alors $\left(7^4\right)^7 \equiv \left(1\right)^7 = 1$ mod (10), donc $7^{31} \equiv 1\times7^2 \equiv 9$ mod(10)

3) Une année non bissextile contient 365 jours. Une année bissextile en contient 366. Entre 2000 et 2100, il y a 25 années bissextiles et 75 années non bissextiles, soit un total de 36525 jours.
Puisque $36525 = 7\times5217+6$, $36525 \equiv 6 \pmod 7$, d'où un décalage de 6 jours par rapport au 1er janvier 2000.
Le 1er janvier 2100 sera donc un vendredi.

Exercice n°27

1) Puisque $200 = 17\times11+13$, on établit que $200 \equiv 13\left[17\right]$, donc $200^2 \equiv 13^2\left[17\right]$, c'est-à-dire $200^2 \equiv 169\left[17\right]$. Or $169 = 17\times9+16$ donc $169 \equiv 16\left[17\right] \equiv -1\left[17\right]$ et par suite $200^2 \equiv -1\left[17\right]$
En décomposant 539 comme $539 = 2\times269+1$, on a donc $200^{539} = 200^{2\times269+1} = \left(200^2\right)^{269}\times200$, donc $200^{539} \equiv \left(-1\right)^{269}\times13\left[17\right] \equiv -13\left[17\right] \equiv 4\left[17\right]$. Le reste de la division euclidienne par 17 du nombre 200^{539} est donc égal à 4.

Exercice n°28 **Une application des congruences aux codages des billets de banque (Terminale L, juin 2006)**

1) a. Le nombre à 13 chiffres correspondant à ce code est 2101308937097

b. La somme des 13 chiffes de ce nombre vaut 2+1+0+1+3+0+8+9+3+7+0+9+7=50. En divisant cette somme par 9, le quotient vaut 5 et le reste vaut 5

c. Ce billet est donc faux.

2) Le rang dans l'alphabet de la lettre s étant 19, la somme des chiffres vaut 1+9+0+2+1+6+6+4+4+8+1+0+x = 42+x
Or si ce billet est vrai, le reste de la division de cette somme par 9 vaut 8, donc cette somme est congrue à 8 modulo 9.
Puisque l'entier x est compris entre 0 et 9, seul x = 2 permet d'avoir une somme égale à 44, dont la division par 9 assure un reste égal à 8

3) a) n est compris entre 1 et 26

b) La somme des 11 chiffres valant 1+6+1+2+2+3+4+0+2+4+2=27, somme divisible par 9, seule une somme des chiffres du rang de la lettre égale à 8 conviendra. Il peut s'agir de la 8ème lettreH ou de la 26ème lettre Z

Exercice n°29 **Une application des congruences au calendrier (Terminale L, novembre 2004**

1) $365 \equiv 1$ (modulo 7) et $366 \equiv 2$ (modulo 7) car les restes dans les divisions de 365 et 366 par 7 sont respectivement égaux à 1 et 2.

2) Entre le premier janvier d'une année non bissextile et le premier janvier suivant s'écoulent 365 jours, soit 52 semaines et 1 jour d'après la congruence $365 \equiv 1$ (modulo 7). Il en résultera un décalage de 1 jour, et le premier janvier de l'année suivante sera donc un mardi.

b) Le même raisonnement conduit à un décalage de deux jours entre le premier janvier d'une année bissextile et le premier janvier de l'année suivante, qui sera donc un mercredi.

3) Puisque $365 \equiv 1$ (modulo 7) et $366 \equiv 2$ (modulo 7), alors $N = 3 \times 365 + 1 \times 366 \equiv 3 \times 1 + 1 \times 2 [7] \equiv 5 [7]$

4) Le même raisonnement que dans la question 2) conduit à un décalage de cinq jours jours entre le premier janvier d'une année et le premier janvier quatre ans plus tard, qui sera donc un samedi

5) Compléter le tableau donné ci-dessous :

Nombre de périodes de quatre années	J = nombre de jours de décalage dans le cycle des jours de la semaine	Reste de la division de J par 7
0	0	0
1	5	5
2	10	3
3	15	1
4	20	6
5	25	4
6	30	2
7	35	0

6) a) L'année 2004 est bissextile car son millésime est divisible par 4 ($2004 = 4 \times 501$) et non séculaire.

b) En quatre ans, un décalage de 5 jours se produit, donc le 29 février 2008 sera décalé de 5 jours par rapport au 29 février 2004, donc sera un vendredi. En 2012, deux périodes de 4 ans s'étant écoulées depuis 2008, le décalage sera de trois jours et le 29 février 2012 sera donc un mercredi.

c) Pour que le 29 février soit un dimanche, il faut qu'il n'y ait pas de décalage par rapport à l'année 2008, soit au bout de 7 cycles de 4 ans, c'est-à-dire de 28 années. Ce sera donc en 2036…

Exercice n°30 **codes barres (Terminale L, Nouvelle-Calédonie 2003)**

1) La somme des chiffres de rang impair est 0+8+7+3+2+8=28. La somme des chiffres de rang pair est 1+4+4+3+1+9=22
Ainsi $3\times$(somme des chiffres de rang impair)+(somme des chiffres de rang pair)+R=$3\times$(28)+22+4=110$\equiv 0$ mod 10

2) La somme des chiffres de rang impair est 5+6+3+4+1+3=22. La somme des chiffres de rang pair est 1+0+2+2+5+7=17
Ainsi $3\times$(somme des chiffres de rang impair)+(somme des chiffres de rang pair)+R=$3\times$(22)+17+R=83+R $\equiv 0$ mod 10 si et seulement si R=7. La clé de ce code est donc égale à 7.

3) Pour les deux codes, la somme $3\times$(somme des chiffres de rang impair)+(somme des chiffres de rang pair)+R vaut $3\times$(7+0+1+6+6+2)+(c+d+4+5+3+6)+R'=84+c+d+R'

4) Pour ce code, la somme $3\times$(somme des chiffres de rang impair)+(somme des chiffres de rang pair)+R vaut $3\times$(3+9+2+2+0+4)+(9+4+a+0+3+1)+8=85+a. Pour que ce code soit congru à 0 modulo 10, il faut et il suffit que a=5

5) Pour ce code, la somme $3\times$(somme des chiffres de rang impair)+(somme des chiffres de rang pair)+R vaut $3\times$(b+9+6+3+8+2)+(c+3+7+5+0+1)+1=3b+c+101 Puisque $101 \equiv 1[10]$, et puisque la somme est congru à 0 modulo 10, alors $3b + c + 101 \equiv 0[10] \Leftrightarrow 3b + c + 1 \equiv 0[10] \Leftrightarrow c \equiv -3b - 1[10]$. Les couples ($b$;c) solution de cette équation sont

$b = 0; c = 9$	$b = 1; c = 6$	$b = 2; c = 3$	$b = 3; c = 0$	$b = 4; c = 7$
$b = 5; c = 4$	$b = 6; c = 1$	$b = 7; c = 8$	$b = 8; c = 5$	$b = 9; c = 2$

Exercice n°31 **Le numéro INSEE (Terminale L, Antilles 2003)**

1) Sophie est né lors du mois 07, c'est-à-dire en juillet

2) a) Si on note $a = 2850786$ et $b = 183048$, alors $A = a \times 10^6 + b$

b) Puisque $10^2 = 100 \equiv 3[97]$, alors $10^6 = \left(10^2\right)^3 = 3^3 \equiv 27[97]$.

c) Puisque $10^6 \equiv 27[97]$, ainsi que $a = 2850786 \equiv 53[97]$ et $b = 183048 \equiv 9[97]$, on a alors $A \equiv 53 \times 27 + 9[97] \equiv 1440[97] \equiv 82[97]$. Le reste r de la division euclidienne de A par 97 vaut donc 82

3) La clé K du numéro INSEE de Sophie vaut donc $K = 97 - 82$

4) La différence 2 85 07 86 183 084 - 2 85 07 86 183 048 vaut 36.

Puisque $B - A = 36 \Leftrightarrow B = A + 36$, on aura $B \equiv A + 36[97] \equiv 82 + 36[97] \equiv 118[97] \equiv 21[97]$. Le reste de la division euclidienne de B par 97 est égal à 21.

b) La clé K du numéro B que Sophie a saisi vaut donc $K = 97 - 21 = 76$, ce qui permet à Sophie de détecter l'erreur

Exercice n°32 **Critère de divisibilité (Terminale L, juin 2004)**

1) Un exemple

a) Pour un entier naturel n, la phrase "n est congru à 1 modulo 3" signifie que le reste de la division par 3 de n vaut 1
"n est divisible par 3" se traduira par $n \equiv 0[3]$

b) Chacun des entiers 10, 100, 1 000, 10^p où p est un entier positif, est congru à 1 modulo 3

c) Puisque 4 520 = $4\times 1000 + 5\times 100 + 2\times 10$, alors $4520 \equiv 4\times 1+5\times 1+2\times 1+0\times 1 \equiv 4+5+2+0[3] \equiv 11[3] \equiv 2[3]$

d) Ainsi, le reste de la division de 4520 par 3 vaut 2

2) Quelques généralisations

a) Puisque $N=1000a + 100b + 10c+d$, et puisque 10, 100 et 1 000 sont congrus à 1 modulo 3, alors $N \equiv a\times 1+b\times 1+c\times 1+d\times 1 \equiv a+b+c+d[3]$.

b) Un nombre de quatre chiffres étant congru, modulo trois, à la somme de ses chiffres, il sera divisible par trois si et seulement si il est congru à 0 modulo 3, donc si et seulement si la somme de ses chiffres est congrue à 0 modulo 3, donc si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

c) De manière analogue, un nombre de quatre chiffres est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est, car de la même manière que dans la question 1) b), chacun des entiers 10, 100, 1 000, 10^p où p est un entier positif, est congru à 1 modulo 9, donc un nombre $N=1000a + 100b + 10c+d$ vérifiera $N \equiv a\times 1+b\times 1+c\times 1+d\times 1 \equiv a+b+c+d[9]$.

Exercice n°33 **Un autre critère de divisibilité (Terminale L, Liban 2004)**

1) a) Le reste de la division euclidienne de 100 par 11 est 1 car $100 = 9\times 11+1$. Le reste de la division euclidienne de 1000 par 11 est 10 car $1000 = 90\times 11+10$.

b) Si un entier n vérifie $n \equiv 10$ (mod 11), alors puisque $0 \equiv 11$ (mod 11), en soustrayant les deux congruences, on obtient $n-0 \equiv 10-11$ (mod 11) c'est-à-dire $n \equiv -1$ (mod 11)

c) Le nombre $\overline{abcd} = a\times 1000+b\times 100+c\times 10+d\times 1$ est divisible par 11 si et seulement si il est congru à zéro modulo 11. Or $10 \equiv 10$ (mod 11), donc $10 \equiv -1$ (mod 11). De plus $1000 \equiv 10$ (mod 11), donc $1000 \equiv -1$ (mod 11). Finalement $\overline{abcd} = a\times 1000+b\times 100+c\times 10+d\times 1 \equiv a\times(-1)+b\times 1+c\times(-1)+d\times 1[11]$, c'est-à-dire $\overline{abcd} \equiv -a+b-c+d\ [11]$.

Le nombre $\overline{abcd}$ sera divisible par 11 si et seulement si il est congru à 0 modulo 11, donc si et seulement si alors –a+b–c+d est aussi congru à 0 modulo 11, donc si et seulement si $-a+b-c+d$ est divisible par 11.

2) a) On calcule $-a+b-b+a=0$. Comme $-a+b-b+a=0 \equiv 0[11]$, on conclut d'après la question 1) c) qu'un nombre de la forme $\overline{abba}$ est divisible par 11.

b) Le nombre $\overline{1a1}$ est divisible par 11 si et seulement si $1-a+1 \equiv 0[11] \Leftrightarrow 2-a \equiv 0[11]$. Comme $0 \le a \le 9$, cette congruence ne peut être vérifiée que si et seulement si $a = 2$

c) Le nombre $\overline{9a9}$ est divisible par 11 si et seulement si $9-a+9 \equiv 0[11] \Leftrightarrow 18-a \equiv 0[11]$. Comme $0 \le a \le 9$, cette congruence ne peut être vérifiée que si et seulement si $a = 7$

3) Un nombre du type $\overline{aab}$ est divisible par 11 si et seulement si $a-a+b \equiv 0[11] \Leftrightarrow b \equiv 0[11]$. Comme $0 \le b \le 9$, cette congruence ne peut être vérifiée que si et seulement si $b = 0$

Exercice n°34 Si $n \equiv 3[5]$, alors $2n^2 \equiv 2\times 3^2 = 18[5] \equiv 3[5]$. En soustrayant les congruences, $2n^2 - n \equiv 3-3[5]$, c'est-à-dire $2n^2 - n \equiv 0[5]$, ce qui signifie que $2n^2 - n$ est divisible par 5.

Exercice n°35 (Antilles juin 2003)

1) a) Puisque $1999 = 7\times 285+4$, on en déduit que $1999 \equiv 4[7]$

b) Le nombre entier 5 est congru à 2007 modulo 7 car $2007 = 7\times 286+5$

2) a) Si $n \equiv 5[7]$, alors $n^2 \equiv 5^2 = 25[7]$ donc $n^2 \equiv 4[7]$ (car $25 = 3\times 7+4$), et par suite $n^3 = n^2\times n \equiv 4\times 5[7] \equiv 20[7] \equiv 6[7]$ car $21 = 2\times 7+6$. Finalement $n^3 \equiv 6[7]$

b) Si $n^3 \equiv 6[7]$ alors $n^3+1 \equiv 6+1[7] \equiv 7[7] \equiv 0[7]$ donc n^3+1 est divisible par 7.

3) Si $n \equiv 4[7]$, alors $n^2 \equiv 4^2 = 16[7] \equiv 2[7]$ car $16 = 2\times 7+2$, donc par suite $n^3 = n\times n^2 \equiv 4\times 2[7] = 8[7] \equiv 1[7]$ car $8 = 1\times 7+1$. Ainsi $n^3-1 \equiv 1-1[7] \equiv 0[7]$ donc n^3-1 est divisible par 7

4) On écrit $A = \left(1999^3-1\right)+\left(2007^3+1\right)$. Puisque $1999 \equiv 4[7]$, alors 1999^3-1 est divisible par 7 (question 3). De plus $2007 \equiv 5[7]$, donc 2007^3+1 est divisible par 7 (question 2b). Ainsi la somme $1999^3-1+2007^3+1$, c'est-à-dire le nombre A, est divisible par 7

Exercice n°36 **(Terminale L Centres étrangers juin 2002)**

1) a) Si n=5 alors $A=5(5^2-1)=120\equiv 0[6]$ car $120=6\times 20$

b) Si n=16 alors $A=16(16^2-1)=4080\equiv 0[6]$ car $4080=6\times 680$

c) Si n=32 alors $A=32(32^2-1)=32736\equiv 0[6]$ car $32736=6\times 5456$

2) a) Si $n\equiv 5[\mathrm{mod}\,6]$, alors $n-1\equiv 4[\mathrm{mod}\,6]$ et $n+1\equiv 5+1\equiv 6\equiv 0[\mathrm{mod}\,6]$

b) Puisque $n^2-1=(n-1)(n+1)$, $n^2-1\equiv 4\times 0=0[6]$, donc n^2-1 est divisible par 6.

c) Si $n^2-1\equiv 0[6]$, alors $n(n^2-1)\equiv n\times 0=0[6]$ donc $n(n^2-1)$ est divisible par 6.

3)

Reste de la division de n par 6	Reste de la division de $(n-1)$ par 6	Reste de la division de $(n+1)$ par 6	Reste de la division de (n^2-1) par 6	Reste de la Division de $n(n^2-1)$ par 6
0	5	1	5	0
1	0	2	0	0
2	1	3	3	$6\equiv 0[6]$
3	2	4	2	0
4	3	5	3	$12\equiv 0[6]$
5	4	0	0	0

4) Ayant examiné tous les restes possibles de la division de n par 6, on a ainsi démontré que quel que soit l'entier n, $n(n^2-1)$ est divisible par 6.