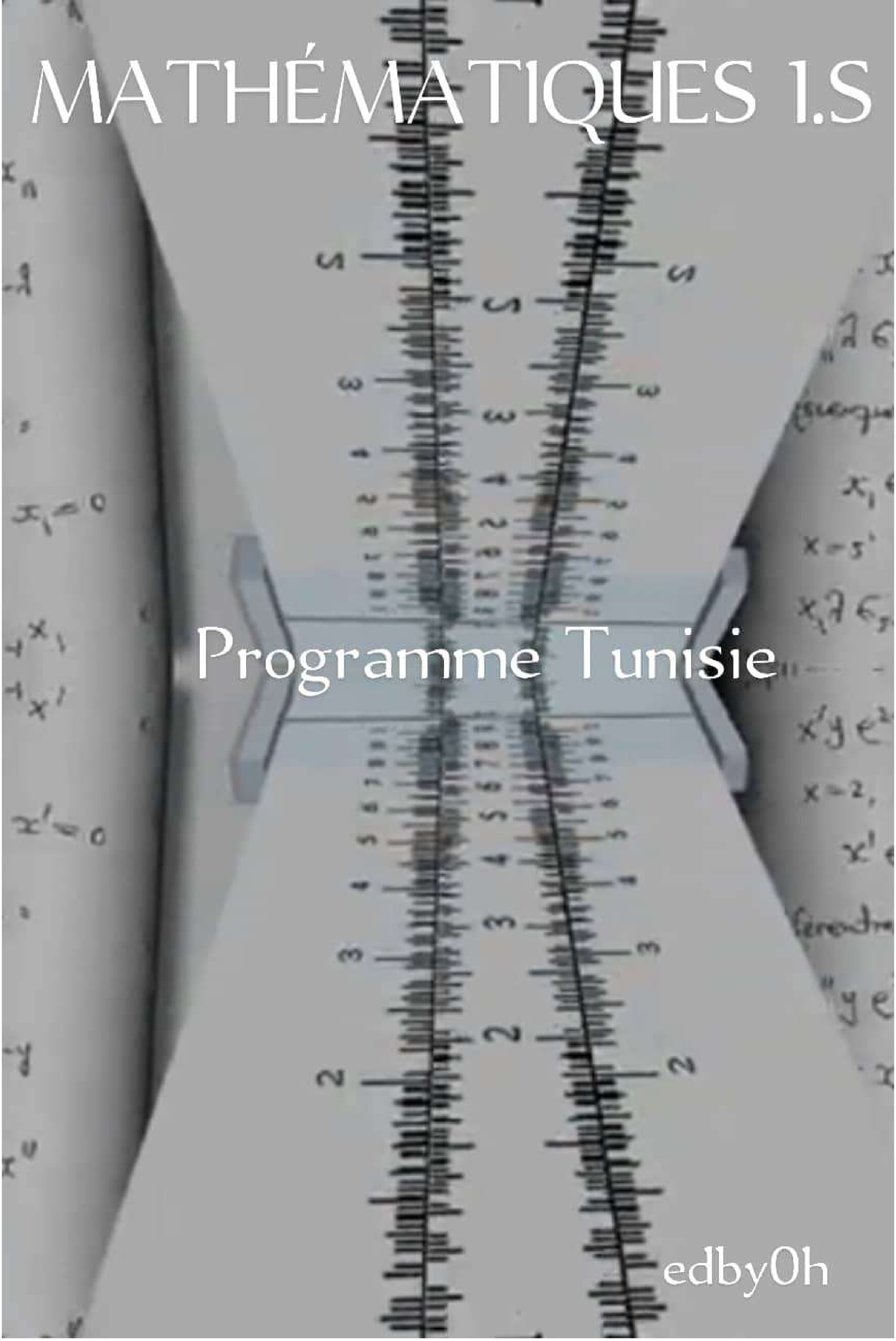


MATHÉMATIQUES 1.S

Programme Tunisie

edby0h

I / Langage ensembliste-Langage probabiliste :

Définitions : * *Lorsqu'on fait une expérience aléatoire, le résultat est appelé* issue .
* *L'ensemble des issues possibles est appelé* univers des possibles.
* *Un évènement est une partie de l'univers des possibles.*

Soit Ω *l'univers des possibles d'une expérience, on a :* $P(\Omega)$ *est l'ensemble des parties ou évènements de* Ω.

Langage ensembliste	*Langage probabiliste*
A : *une partie de* Ω	A *est un évènement*
$A = \Omega$	A *est l'évènement certain*
$A = \varnothing$	A *est l'évènement impossible*
e : *un élément de* Ω, $e \in \Omega$	e *est une éventualité ou un cas possible*
$\{e\}$ *est un singleton*, $\{e\} \subset \Omega$	$\{e\}$ *est un évènement élémentaire*
$A \cup B$ *est la réunion de* A *et* B	$A \cup B$ *est l'évènement* « A *ou* B »
$A \cap B$ *est l'intersection de* A *et* B	$A \cap B$ *est l'évènement* « A *et* B »
$\overline{A} = C_{\Omega}^{A}$ *est le complémentaire de* A *dans* Ω	$\overline{A}$ *est l'évènement contraire de* A
Si $A \cap B = \varnothing$, A *et* B *sont deux parties disjoints de* Ω	A *et* B *sont deux évènements incompatibles*

II / Probabilité d'un évènement :

Définition : *Soit* Ω *un ensemble fini, on appelle probabilité définie sur* $P(\Omega)$ *toute application* $p : P(\Omega) \to [0,1]$ *tel que :*

* $p(\Omega) = 1$

* *Pour tout* A *et* B *de* $P(\Omega)$, *si* $A \cap B = \varnothing$ *alors* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

* *On dit que* p *est une* **équiprobabilité** *sur* $P(\Omega)$ *ou* **probabilité uniforme** *si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.*

* *Soit* Ω *un ensemble fini* p l'équiprobabilité *sur* $P(\Omega)$ *pour tout évènement* A *de* $P(\Omega)$, *la probabilité de* A *est :*

$$\boxed{p(A) = \frac{card\,(A)}{card\,(\Omega)} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}}$$

Notation : *Le cardinal d'un ensemble* A *noté* $card\,(A)$ *est le nombre d'éléments de* A.

III / Propriétés :

Soit Ω *un ensemble fini,* p l'équiprobabilité *sur* $P(\Omega)$:

❶ *Pour tout évènement* A *de* $P(\Omega)$ *on a :* $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

❷ $p(\varnothing) = 0$.

❸ *Pour tout* A *et* B *de* $P(\Omega)$ *on a :*
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$.
- *Si* $A \subset B \Rightarrow p(A) \le p(B)$.

Exercice N°01 :

Une urne contient 4 boules rouges, 5 boules vertes et 3 boules blanches indiscernable au toucher.

1/ On tire simultanément 2 boules de l'urne, calculer la probabilité des évènements suivants :

- *a)* A : « *avoir 2 boules blanches* » .
- *b)* B : « *avoir deux couleurs* » .
- *c)* C : « *avoir au moins une boule verte* » .

2/ On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne, calculer la probabilité des évènements suivants :

- *a)* D : « *avoir deux boules de même couleur* » .
- *b)* E : « *avoir une seule boule verte* » .

3/ On inscrit le numéro (1) *sur les boules rouges,* (-1) *sur les boules vertes et* (0) *sur les boules blanches . On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne ; On pose* S *: « la somme des numéros inscrits sur les boules tirées ».*

- *a) Donner les valeurs possibles de* S .
- *b) Calculer la probabilité de chaque valeur de* S .
- *c) Vérifier que la somme de toutes ces probabilités est égale à* 1 .

Exercice N°02 :

Une urne contient 10 boules indiscernables au touchées : six noire numérotées $1,1,2,2,2,3$ *et quatre blanches numérotées* $1,1,2,3$

1/ On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :

- *a)* A : « *obtenir trois boules noires* » .
- *b)* B : « *la somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est paire* » .
- *c)* C : « *obtenir trois boules noires ou une somme paire* » .

2/ On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne .Calculer la probabilité des évènements suivants :

- *a)* D : « *avoir exactement deux boules noires et une boule blanche* » .
- *b)* F : « *avoir au moins une boule noire* » .
- *c)* E : « *la boule n°2 est tirée pour la première fois au deuxième tirage* ».

Exercice N°03 :

Une urne contient quatre boules blanches numérotées : $-1,0,0,1$ *et cinq boules noires numérotées :* $-1,1,1,2,2$.

1/On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :

- *a)* A : « *obtenir trois boules de deux couleurs* » .
- *b)* B : « *obtenir trois boules dont le produit des numéros est nul* ».
- *c)* C : « *obtenir trois boules dont le produit est une puissance de* 2 ».
- *d)* D : « $A \cup B$ » .
- *e)* E : « *il reste dans l'urne le même nombre de boules blanches que de boules noires* »

2/ On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :

- *a)* F : « *obtenir exactement deux boules blanches* » .
- *b)* G : « *obtenir une somme nulle* » .

3/ On répartit les neuf boules dans neuf cases ,chaque case pouvant contenir de zéro jusqu'à neuf boules.

- *a) Calculer le nombre de répartition possible .*
- *b) Calculer la probabilité des évènements suivants :*

- H : « *deux cases et deux seulement sont non vide* » .
- K : « *aucune case n'est vide* ».
- L : « *chaque couleur est dans une case* ».

Exercice N°04 :

On considère une urne dans laquelle se trouve :1 boule portant le numéro 1 *, 2 boules portant le numéro* 2 *, 3 boules portant le numéro* 3 *et* n *boules portant le numéro* n *.*

1/ Combien l'urne contient elle de boule ?

2/ On tire au hasard une boule de l'urne, tous les tirages sont supposés équiprobables.

a) On suppose que n *est pair. Exprimer en fonction de* n *la probabilité pour que la boule tirée porte :*

- *Un numéro pair.*
- *Un numéro impair.*

b) Dans cette question, on suppose seulement que le nombre totale de boules dans l'urne est 21*. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à* 4 *?*

Exercice N°05 :

Une urne contient 6 *boules : 3 numérotées* 1 *, 2 numérotées* 2 *et une numérotées* 3*. On tire une première boule au hasard puis sans remettre cette boule on tire une seconde boule au hasard. Le résultat d'un tel tirage est le couple* (a,b) *où* a *et* b *sont les nombres inscrits sur la première et la seconde boule.*

1/ Calculer la probabilité de chaque résultat possible.

2/ Calculer la probabilité des évènements suivants :

- A : « *les deux numéros tirés sont égaux* $(a=b)$ ».
- B : « *le premier nombre tiré est strictement supérieur au second* $(a>b)$ ».
- C : « *le premier nombre tiré est inférieur au second* $(a\leq b)$ ».

3/ On note X *la valeur absolue de la différence de deux nombres tirés* $(X=|a-b|)$.

a) Quel est l'ensemble E *des valeurs possibles de* X *.*

b) Pour tout élément i *de* E *, calculer la probabilité de l'évènement* $(X=i)$.

Exercice N°06 :

Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ *un espace probabilisé finie.*

1/ Montrer que si A *,* B *et* C *sont trois évènements quelconques de* $P(\Omega)$ *, on a :*

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$

2/ a) Soient $A_{1\leq i\leq n}$ n *évènements quelconques de* $P(\Omega)$*. Montrer l'inégalité suivante :*

$$p(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)\leq\sum_{i=1}^{n}p(A_i) \quad ❶$$

b) Dans quel cas l'inégalité ❶ devient-elle une égalité ?

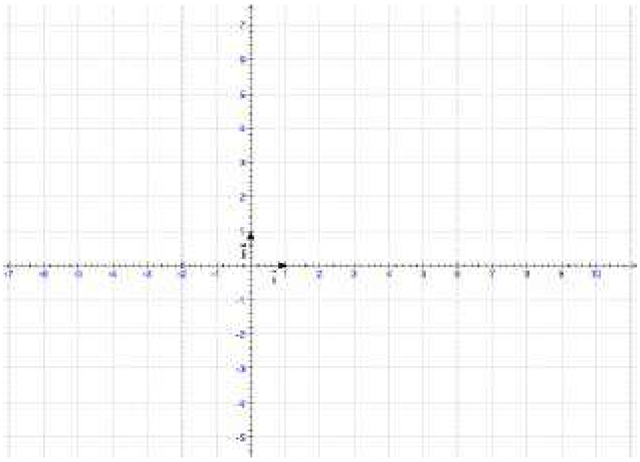
I. Approche de la notion :

Déterminer le domaine de définition et tracer la courbe représentative de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1ér cas : $f(x)=2x+1$.

$D_f =$

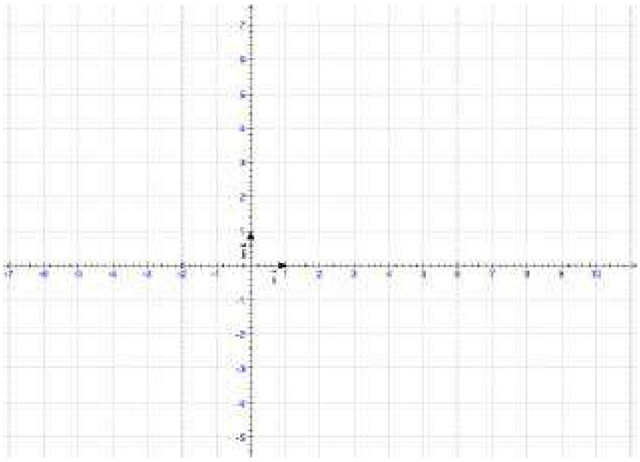
Courbe représentative :



2ème cas : $f(x)=|x|$.

$D_f =$

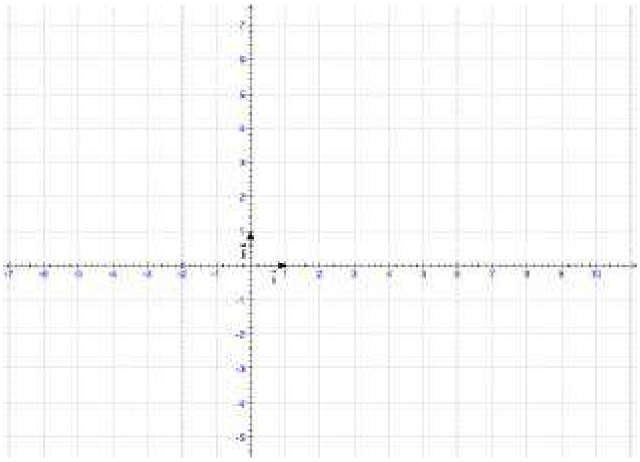
Courbe représentative :



3ème cas : $f(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ x\geq 0\\ 2x-1 & si\ x<0\end{cases}$.

$D_f =$

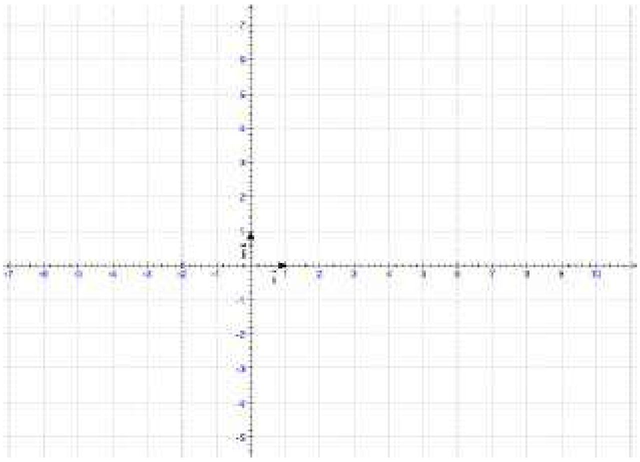
Courbe représentative :



4ème cas : $f(x)=E(x)$ appelée fonction partie entière.

$D_f=\mathbb{R}$.

Courbe représentative sur [-1,3] :



Remarque : Si x est un nombre réel, quelconque, il existe un entier relatif n tel que $n\leq x<n+1$.

Cet entier relatif s'appelle la partie entière de x que nous désignerons par $E(x)$.

Exemple : si $-1\leq x<0$ alors $E(x)=-1$.

Commentaires :

- Pour les deux premiers cas, la fonction est représentée par un trait continu (obtenu sans lâcher le crayon). La fonction considérée est dite une fonction **continue** en tout point de son ensemble de définition.
- Pour les deux derniers cas, la fonction est elle continue en tout point de son domaine de définition ?

……
……………………………………………………………………………

II. Fonction continue en un point :

Définition : Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$.

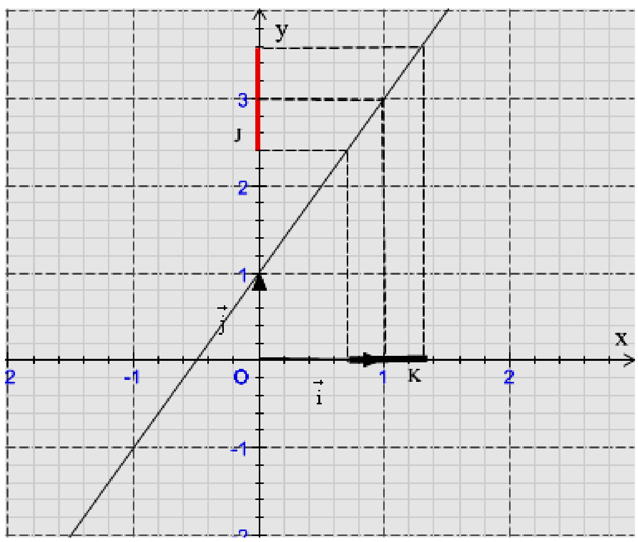
On dit que f est continue en a lors que :

* quelque soit l'intervalle ouvert J centré en $f(a)$, il existe un intervalle ouvert K centré en a tel que pour tout x de I : $x \in K \Rightarrow f(x) \in J$.

* quel que soit $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout x de I : $|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \beta$.

Exemple :

Reprenons l'exemple du 1ér cas $f(x) = 2x+1$. Montrons que f est continue en 1.



La figure nous montre que $f(x)$ sera « voisin » de $f(1) = 3$ que l'on voudra, si l'on choisit x suffisamment « voisin » de1.

quel que soit $\beta > 0$ trouver $\alpha > 0$ tel que :

$|x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 3| < \beta$.

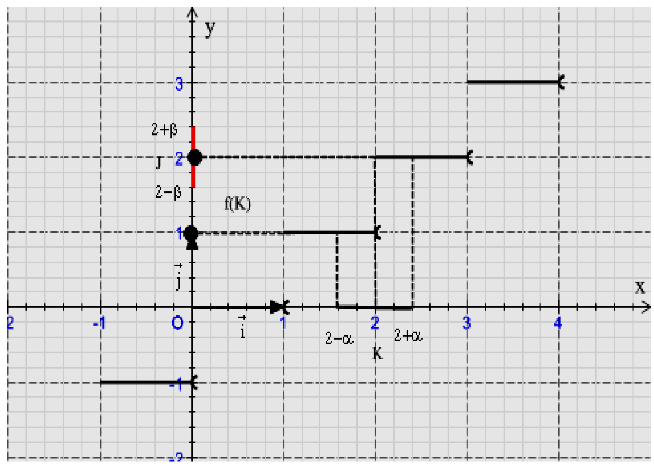
Nous cherchons à avoir $|f(x) - 3| < \beta$.

Pour tout x, on a :

$|f(x) - 3| = |2x+1-3| = |2x-2| = 2|x-1| < \beta$

Signifie $|x-1| < \dfrac{\beta}{2}$, il suffit de prendre $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$.

Pour l'exemple $f(x) = E(x)$:

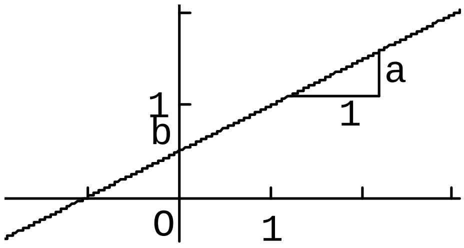


Choisissons β tel que $0 < \beta < 1$, quel que soit l'intervalle $K =]2-\alpha, 2+\alpha[$, $(\alpha > 0)$, de centre 2, $f(K)$ contient 1 qui est extérieur à $J =]f(2)-\beta, f(2)+\beta[$ ce qui signifie que f est discontinue au point $x_0 = 2$. Ce résultat est valable pour toutes les valeurs entières de x.

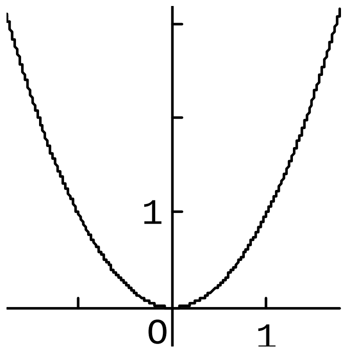
Graphiquement : chaque fois que x passe une valeur entière, le point figuratif $(x, f(x))$ saute d'un segment au segment suivant.

III. Continuité des fonctions usuelles :

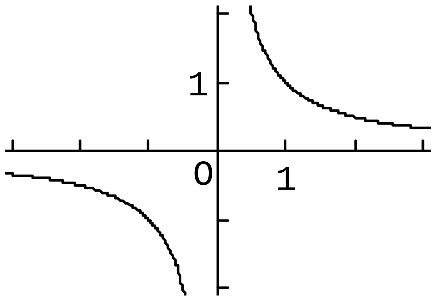
- Toute fonction affine $x \mapsto ax + b$ est continue en tout réel x_0.



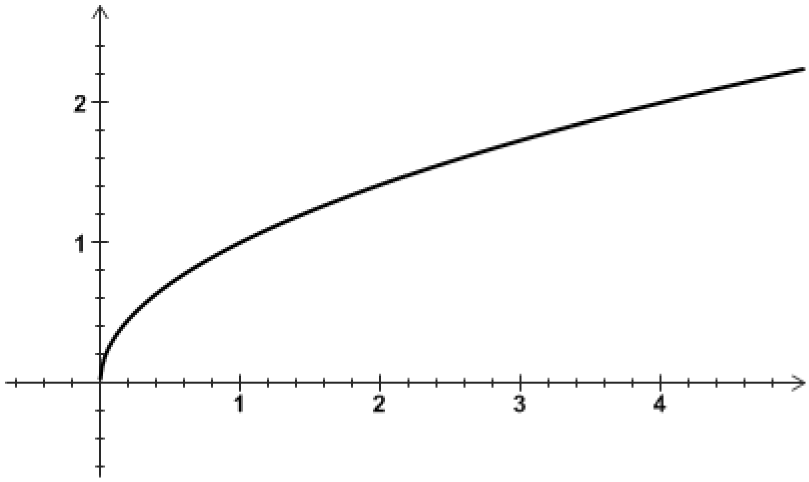
- La fonction carrée $x \mapsto x^2$ est continue en tout réel x_0.



- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul.



- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout réel positif x_0.



- Les fonctions polynômes sont continues en tout réel x_0 .
- Les fonctions rationnelles sont continues en tout réel où elles sont définies.

Activité 2 page 24.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

  Si f est continue en x_0, alors $|f|$ est continue en x_0.

Activité 2 page 25.

IV. Opérations sur les fonctions continues :

Théorème :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. Soit x_0 un réel de I et k un réel.

- Si f et g sont continues en x_0 alors les fonctions f + g, fg, et kf sont continues en x_0.
- Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors le fontion $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.
- Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Activité 1 page 25.

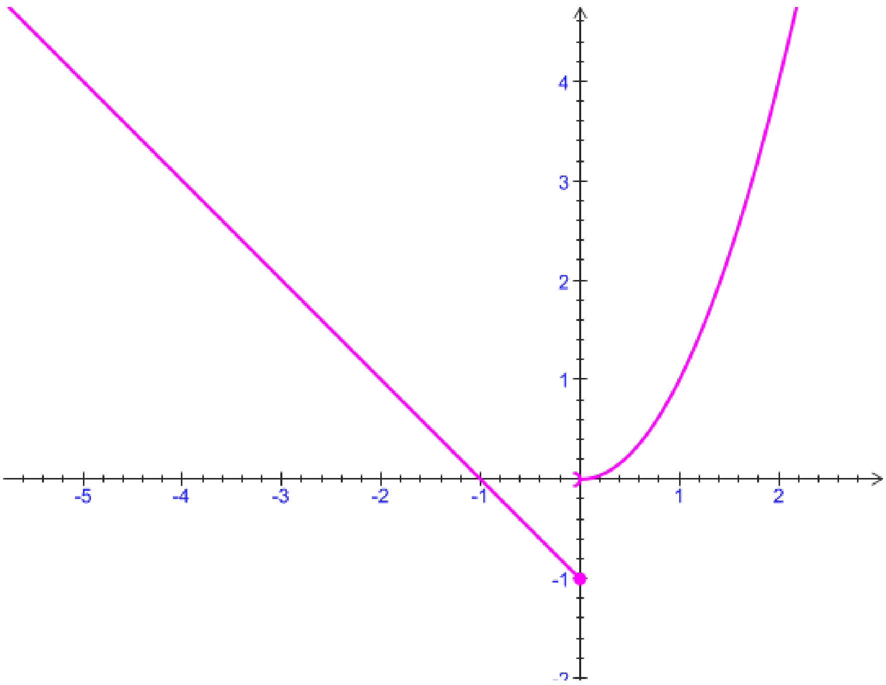
- Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

  Si f est continue en x_0, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

Activité 3 page 26.

V. Continuité à droite, continuité à gauche :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 & \textit{si } x > 0 \\ f(x) = -x - 1 & \textit{si } x \leq 0 \end{cases}$.



- $f(0) = -1$.
- Si x devient de plus en plus proche de 0 à gauche (par des valeurs négatives), f(x) devient de plus en plus proche de $f(0) = -1$. On dit que f est continue à gauche en 0.
- Si x devient de plus en plus proche de 0 à droite (par des valeurs supérieures), f(x) devient de plus en proche de 0 qui est différent de f(0). On dit que f n'est pas continue à droite en 0 ou que f est discontinue à droite en 0.

  Dans ce cas f n'est pas continue en 0.

Théorème

f est continue en x_0, si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en x_0.

VI. Continuité sur un intervalle :

- Soient a et b finis ou infinis.

Une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ est dite continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$.

- Soit a fini ou infini et b un réel.

Une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ est dite continue sur $]a,b]$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$ et continue à gauche en b.

- Soit a un réel et b fini ou infini.

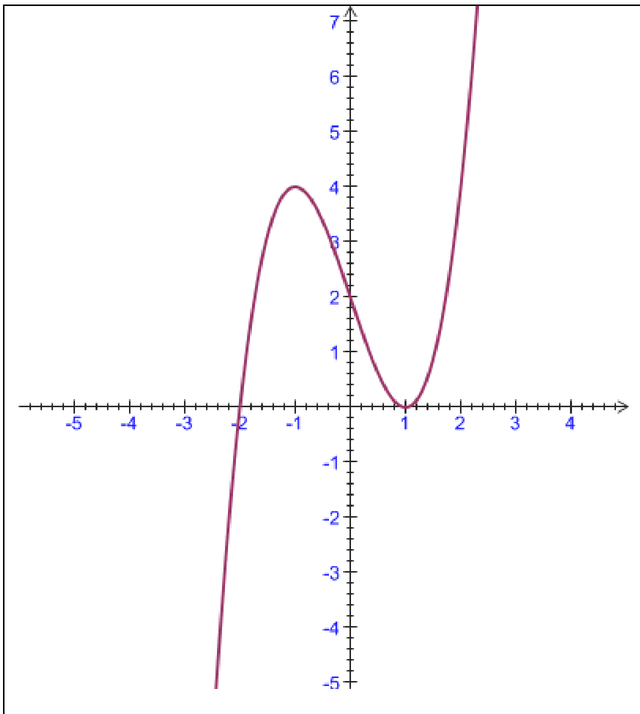
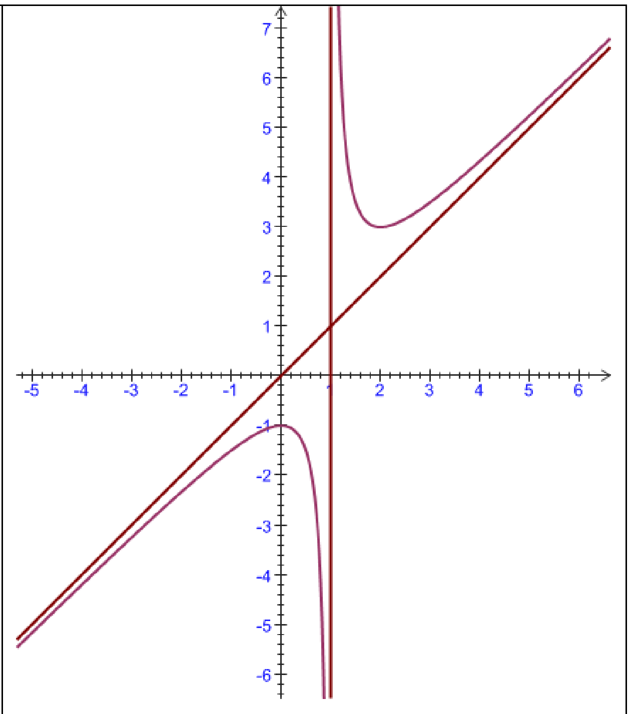
Une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ est dite continue sur $[a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$ et continue à droite en a.

- Soient a et b deux réels.

Une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$,continue à droite en a et continue à gauche en b.

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

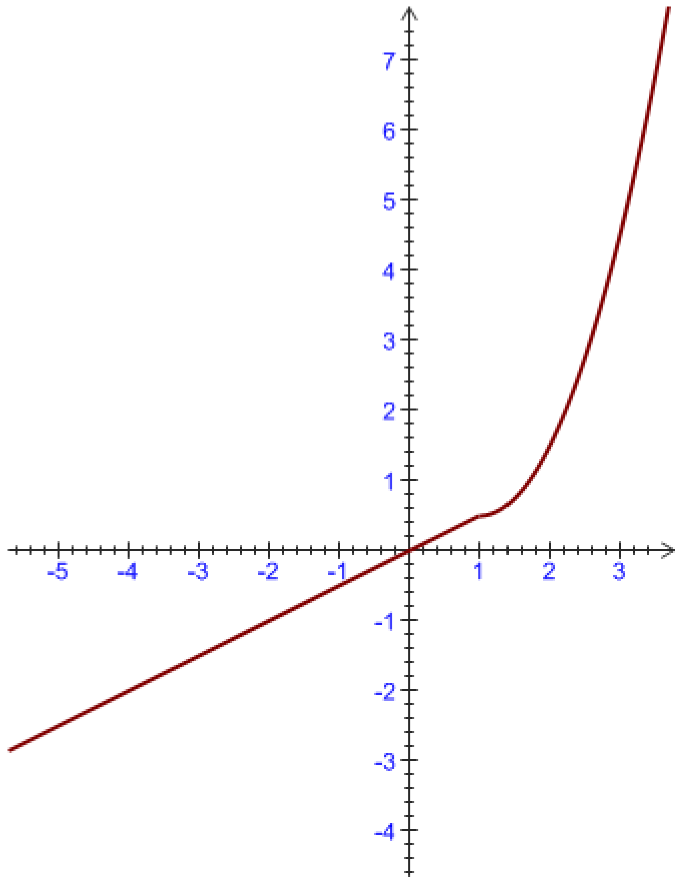
Exemples

	
$f(x) = x^3 - 3x + 2$ f est continue sur $\mathbb{R}$	$g(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Activité 1 page 29.

$$\begin{cases} g(x) = (x-1)^2 + 0.5 \text{ si } x \geq 1 \\ g|_{]-\infty,1[} \text{ est une fonction linéaire} \\ g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = (x-1)^2 + 0.5 \text{ si } x \geq 1 \\ g(x) = ax \qquad \text{si } x < 1 \\ g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

1) Représentation graphique de g :

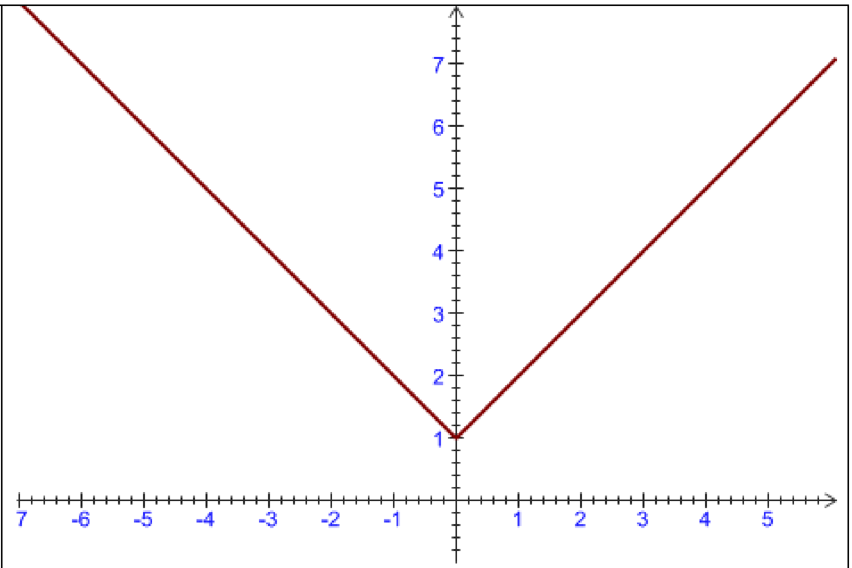
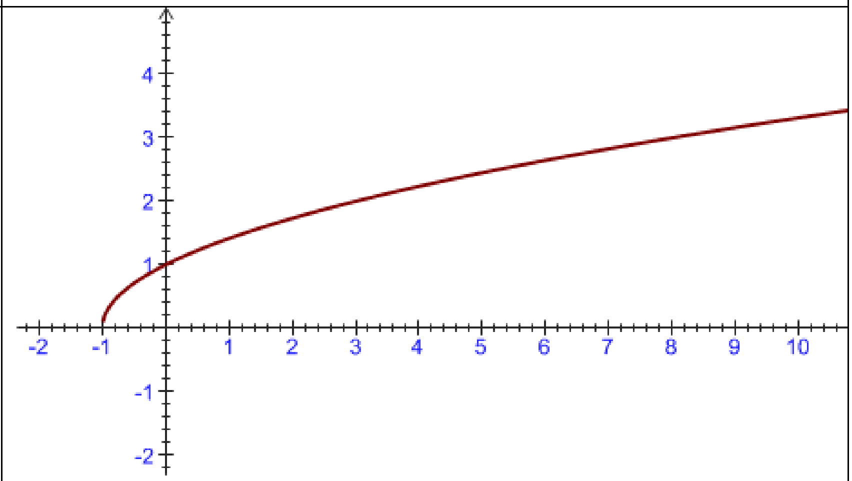
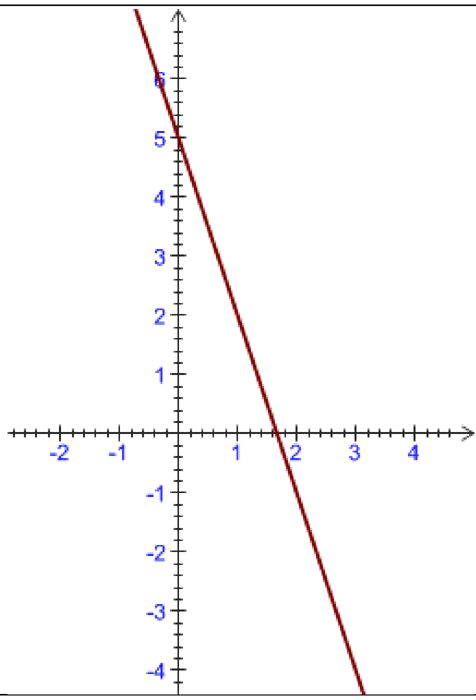


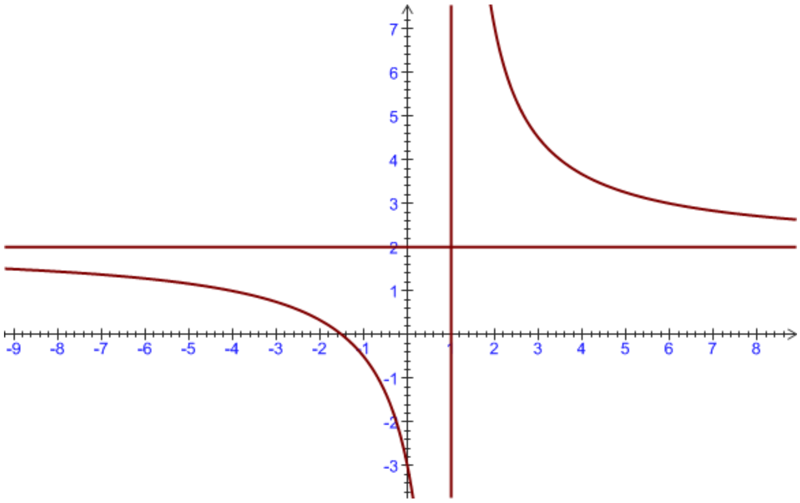
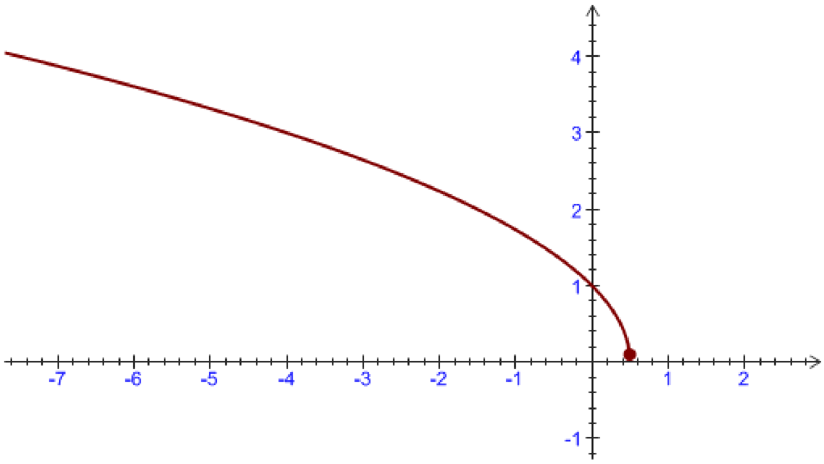
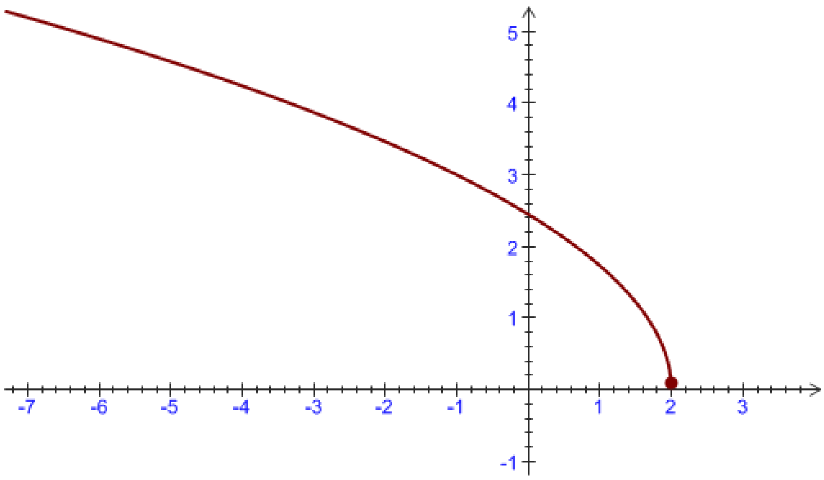
2) g est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en 1 donc si x devient de plus en proche de 1 (à gauche ou à droite), g(x) devient de plus en proche de g(1) = 0.5.

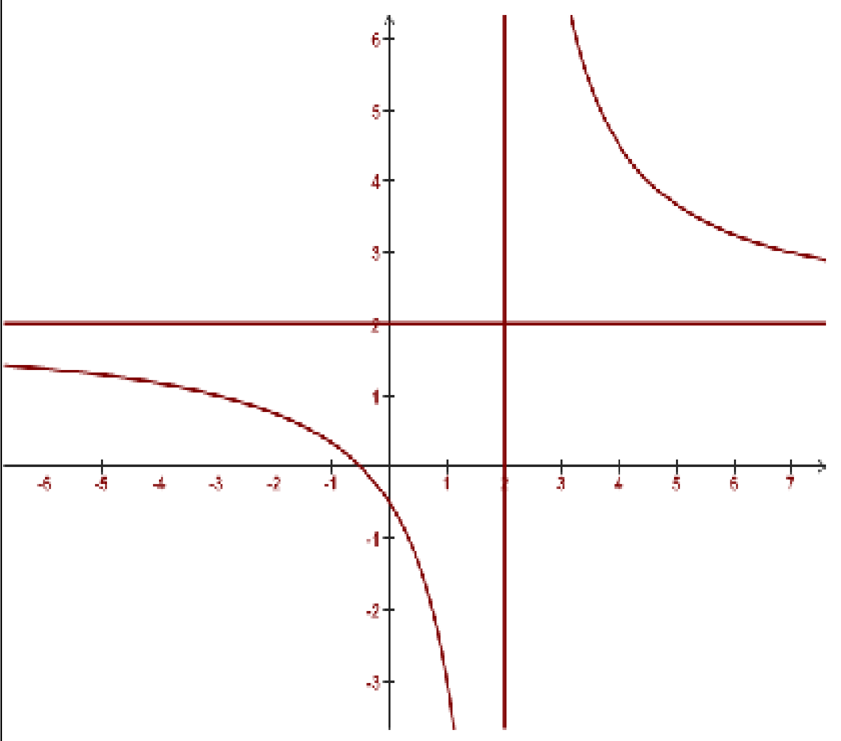
En tendant vers 1 à gauche, g(x) tend vers a donc a = 0.5

D'où $\begin{cases} g(x) = (x-1)^2 + 0.5 \text{ si } x \geq 1 \\ g(x) = \dfrac{1}{2}x \quad\quad\quad\quad \text{ si } x < 1 \end{cases}$.

Activité 2 page 29.

1) $f : x \mapsto \lvert x \rvert + 1$ f est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$	
2) $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ $\left(x \xrightarrow{u} x+1\right)$ est continue et positive sur $[-1,+\infty[$ donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $[-1,+\infty[$ en particulier sur [0, 1].	
3) $f : x \mapsto -3x + 5$ f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur]-0.1 ; 10].	

4) $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$ f est une fonction rationnelle continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ en particulier sur [-1 , 0].	
5) $f : x \mapsto \sqrt{-2x+1}$ $\left(x \xrightarrow{u} -2x+1\right)$ est continue et positive sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ en particulier sur] -0.1 ; 0.3].	
6) $f : x \mapsto \sqrt{-3x+6}$ $\left(x \xrightarrow{u} -3x+6\right)$ est continue et positive sur $\left]-\infty, 2\right]$ donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $\left]-\infty, 2\right]$.	

7) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$ f est une fonction rationnelle continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ en particulier sur] -2 ; 0 [.	

VII. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Activité 1 page 30.

$f : x \mapsto (x-1)^2$.

1) f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$.

2) $f\left([2,+\infty[\right) = [1,+\infty[$; $f\left(]-0.2;0]\right) = [1;1.44[$

$\{f(x)\ ;\ -0.5 \leq x \text{ et } x \neq 2\} = [0,+\infty[$.

3) $x \in [3,4] \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq (x-1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow f(x) \in [4,9]$

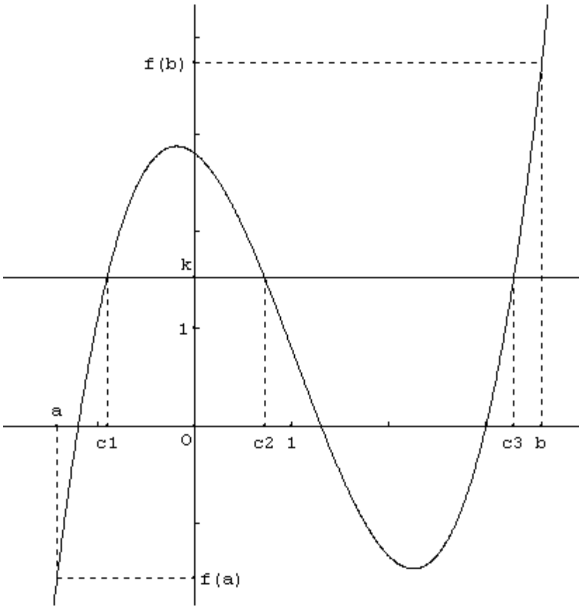
4) L'équation f(x) = 5 admet d'après le graphique deux solutions : une solution α comprise entre -2 et -1 et une solution β comprise entre 3 et 4.

Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1: Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé [*a* ; *b*], et si *k* est un réel quelconque situé entre f(*a*) et f(*b*) (ces deux valeurs comprises), alors il existe au moins un nombre *c* dans [*a* ; *b*] tel que f(*c*) = *k*.



<u>Théorème 2 :</u> Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle fermé [*a* ; *b*], alors pour tout réel *k* situé entre f(*a*) et f(*b*) (ces deux valeurs comprises), l'équation f(*x*) = *k* admet une **solution unique**.

1) ORIENTATION DU PLAN

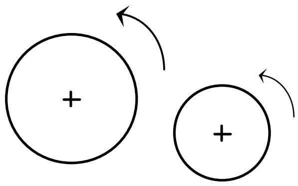
Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif) .

L'autre sens est appelé **sens indirect** (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.

L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre. (appelé aussi **sens trigonométrique**)

Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.



Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

2) ARCS ORIENTES

A) DEFINITION

Soit (A, B) un couple de points d'un cercle **orienté** ζ .

Il ya deux arcs de cercle d'origine A et d'extrémité B. un et un seul de ces deux arcs est orienté conformément à l'orientation du cercle, on l'appelle **arc orienté** d'origine A et d'extrémité B, qu'on note $\overset{\frown}{AB}$

Remarque : Tout arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ détermine un unique arc géométrique appelé arc géométrique associé à $\overset{\frown}{AB}$

B) MESURES ALGEBRIQUES D'UN ARC ORIENTE

ζ est un cercle orienté de rayon 1.

(A, B) un couple de points distincts de ζ .

L est la longueur de l'arc géométrique associé à $\overset{\frown}{AB}$. $L = r \times \theta$. Où **r = 1** et $\theta = \widehat{AOB}$.

Soit M un point mobile qui se déplace sur ζ de A vers B.

Si le sens est direct alors une mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est L + $2n\pi$. Où $n \in \mathbb{N}$	Si le sens est indirect alors une mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est L + $2m\pi$. Où $m \in \mathbb{Z}_-$

On appelle mesure algébrique de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ et on note mes $\overset{\frown}{AB}$ tout réel de la forme $L + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

On convient que mes $\overset{\frown}{AB} = 2k\pi$, si et seulement si A = B .

Conséquences :

ζ est un cercle orienté de rayon 1. (A, B) un couple de points distincts de ζ .

- x et y sont deux mesures de $\overset{\frown}{AB}$, si et seulement si, $x - y = 2k\pi$.
- L'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ possède une unique mesure dans $[0, 2\pi[$, qui est la longueur de l'arc géométrique associé.
- Pour tout point A de ζ et pour tout réel x, il existe un point unique B de ζ tel que mes $\overset{\frown}{AB}$ = x.

Notation :

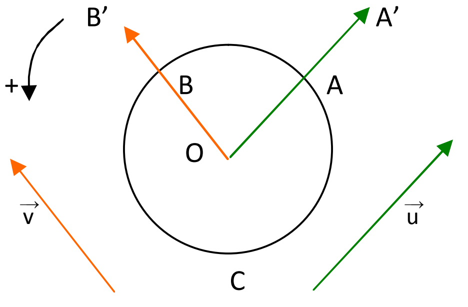
$x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est notée $x \underbrace{\equiv}_{\text{congrus}} y \underbrace{[2\pi]}_{\text{modulo}2\pi}$

Activité 2 page 29 :

3) ANGLES ORIENTES DE DEUX VECTEURS NON NULS

A) ENSEMBLE DES MESURES

Le plan étant orienté dans le sens direct. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls.



On considère A' et B' les points définis par $\overrightarrow{OA'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'} = \vec{v}$.

Les demi-droites [OA') et [OB') coupent le cercle trigonométrique C respectivement en A et en B .

Les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ sont unitaires,

respectivement colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de même sens qu'eux .

On définit les mesures en radian de l'angle orienté de vecteurs **unitaires** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ à partir de celles de **l'arc orienté** $\overset{\frown}{AB}$ ...

> **Les mesures en radians** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ sont celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ c'est à dire , celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$.
>
> Il en résulte que si x est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$, alors les autres mesures sont de la forme $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Notation :

- La notation usuelle est $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, mais s'il n'y a aucun risque de confusion , on notera seulement $(\vec{u}, \vec{v})$ cet angle orienté.
- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures.

On écrit, par exemple, **$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$** signifiant qu'**<u>une</u>** mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{\pi}{2}$; les autres mesures sont alors de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On écrit aussi **$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou encore**

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$$

B) MESURE PRINCIPALE

Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$; On l'appelle **<u>mesure principale</u>** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

<u>Remarque :</u>

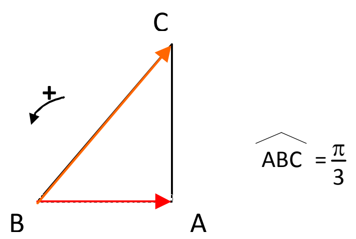
La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

<u>Ex :</u>

La mesure principale de $(\vec{BA}, \vec{BC})$ est $\frac{\pi}{3}$.

La mesure principale de $(\vec{CA}, \vec{CB})$ est $-\frac{\pi}{6}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$

La mesure principale de $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est $-\frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$



C) ANGLE NUL, ANGLE PLAT, ANGLES DROITS

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que :

Angle nul : la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à 0 *($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens)*

<u>ou</u>

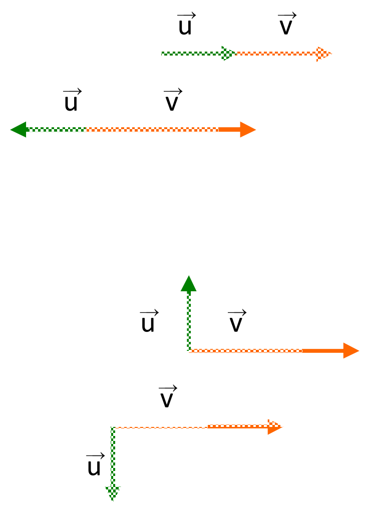
Angle plat : la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à π *($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire)*

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que :

Angle droit direct : la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à $\frac{\pi}{2}$

<u>ou</u>

Angle droit indirect : la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à $-\frac{\pi}{2}$



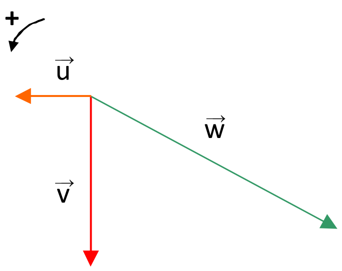
Rem : Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ et $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$

4) PROPRIETES DES MESURES DES ANGLES ORIENTES DE VECTEURS

A) RELATION DE CHASLES

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté . On a : $$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$	*En additionnant n'importe quelle mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ à n'importe quelle mesure de $(\vec{v}, \vec{w})$, on obtient une mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$.* *Réciproquement, n'importe quelle mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$ est la somme d'une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ et d'une mesure de $(\vec{v}, \vec{w})$.*

Ex : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté tels que



$(\vec{u}, \vec{w}) = \dfrac{5\pi}{6}$ et $(\vec{w}, \vec{v}) = -\dfrac{\pi}{3}$

D'après la relation de Chasles $(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

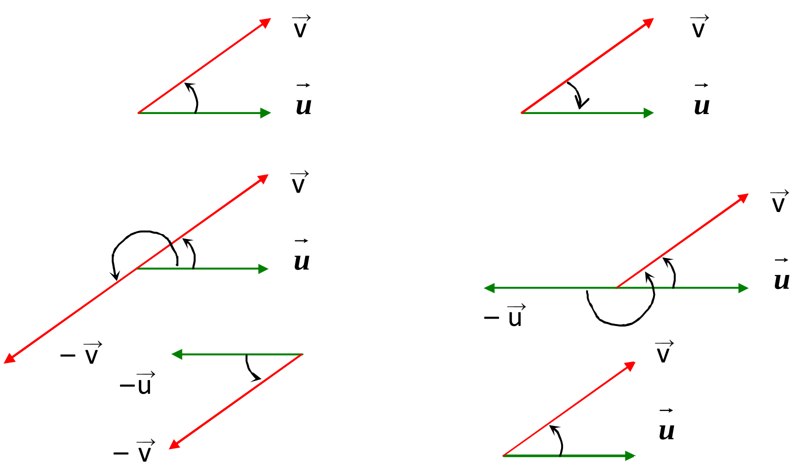
On en déduit donc que $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \ldots = \dfrac{\pi}{2}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux.

B) CONSEQUENCES DE LA RELATION DE CHASLES

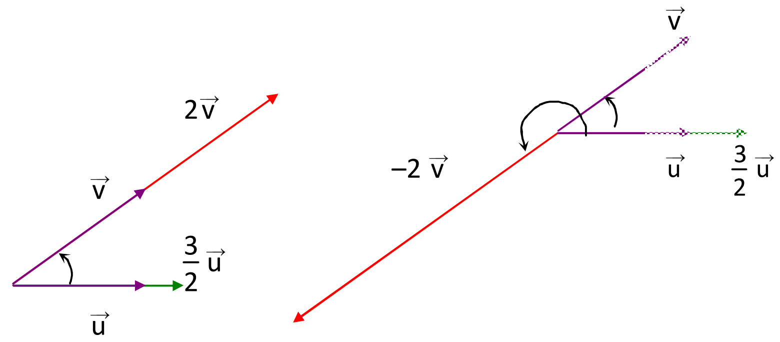
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

$(\vec{v}, \vec{u}) =$ ....
$(\vec{u}, -\vec{v}) =$ .... $(-\vec{u}, \vec{v}) =$ ....
$(-\vec{u}, -\vec{v}) =$ ....



Soit k et k' deux réels non nuls :

- si k et k' sont de même signe, alors :
  (k $\vec{u}$, k' $\vec{v}$) = ……………
- si k et k' sont de signes contraires, alors :
  (k $\vec{u}$, k' $\vec{v}$) =……………



Preuve :

1) D'après la relation de Chasles ($\vec{u}$, $\vec{v}$) + ($\vec{v}$, $\vec{u}$) = ………………..

Or ($\vec{u}$, $\vec{u}$) = 0 ; donc ($\vec{v}$, $\vec{u}$) = ………………………………….

2) D'après la relation de Chasles ($\vec{u}$, $\vec{v}$) + ($\vec{v}$, $-\vec{v}$) = ……………….

Or ($\vec{v}$, $-\vec{v}$) = π ; donc ($\vec{u}$, $-\vec{v}$) = ……………………..…

3) D'après la relation de Chasles ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = ($\vec{u}$, $-\vec{u}$) + ($-\vec{u}$, $-\vec{v}$) + ($-\vec{v}$, $\vec{v}$)

=…………………………………………

= 2 π + ($-\vec{u}$, $-\vec{v}$)

Les mesures sont définis modulo 2 π , donc ($-\vec{u}$, $-\vec{v}$) = ………………………

4)

- Si k et k' sont de même signe , le résultat découle de la définition …
- Si k et k' sont de signes contraires :
  D'après la relation de Chasles , on peut écrire : (k $\vec{u}$, k' $\vec{v}$) = (k $\vec{u}$, k $\vec{v}$) + (k $\vec{v}$, k' $\vec{v}$)

  (k $\vec{u}$, k $\vec{v}$) = ($\vec{u}$, $\vec{v}$) d'après le résultat précédent .

  k $\vec{v}$ et k' $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, donc (k $\vec{v}$, k' $\vec{v}$) = π

  On en déduit le résultat.

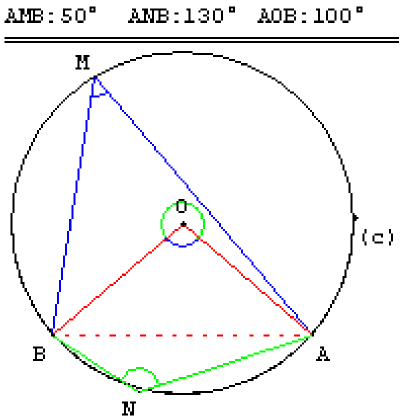
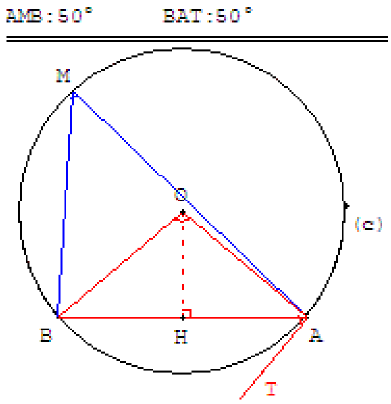
Activités 6, 7, 8, 9 page 36 :

5) CERCLE ET ANGLES

A) ANGLES INSCRITS ET ANGLES AU CENTRE

Définition :

Un angle est inscrit dans un cercle lorsque son sommet appartient à ce cercle et ses côtés recoupent ce cercle ; l'un de ses côtés peut être tangent au cercle.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\widehat{AOB}$ est un angle au centre associé à chacun des angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$</td>
<td>$\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{TAB}$</td>
</tr>
</table>

Théorème n°1 :

ζ est un cercle de centre O dans le plan orienté dans le sens direct.

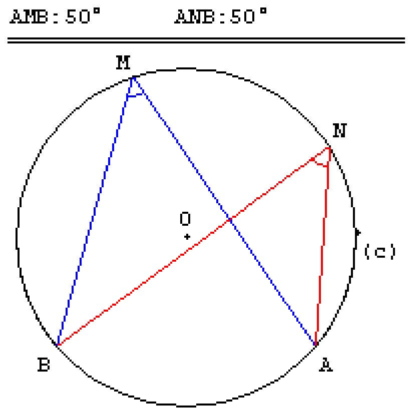
- Pour tous points A, M et B de ζ , on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$.
- Si (AT) et tangente à ζ en A, alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]$.

Théorème n°2 :

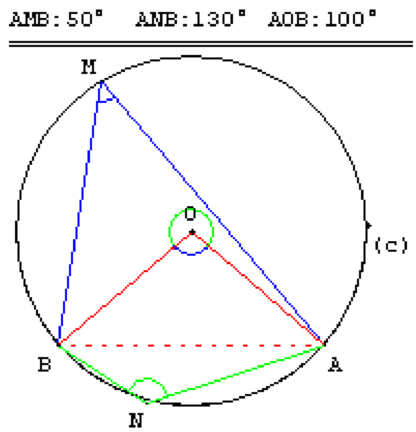
ζ est un cercle dans le plan orienté dans le sens direct.

A, B, M et N quatre points distincts de ζ .

- Si M et N appartiennent à l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$, alors $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}\right)[2\pi]$.



- Si M $\in \overset{\frown}{AB}$ et N$\in \overset{\frown}{BA}$, alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}\right)+\pi\,[2\pi]$.



Activité 3 page 38 :

B) ENSEMBLE DES POINTS M TELS QUE : $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\theta\,[2\pi]$, $\theta\neq k\pi ; k\in\mathbb{Z}$

Activité :

A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct.

[At) est la demi droite telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{At},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) Construire le cercle ζ passant par A et B et tangent à [At).

2) Soit M un point de l'arc orienté $\overset{\frown}{BA}$, déterminer $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)$.

Théorème :

L'ensemble des points M du plan orienté tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\theta\,[2\pi]$, et $\theta \neq k\pi$, k $\in \mathbb{Z}$

Est l'arc d'un cercle ζ passant par A et B et tangent à la demi droite [At) telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{At},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\theta\,[2\pi]$

Cet arc est situé dans le demi plan de frontière (AB) ne contenant pas [At).

Activités 2 et 3 page 39 :

6) REPERE ORTHONORME

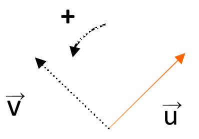
Définition :

Un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est :

- **direct** , si l'une des mesures de $(\vec{i}, \vec{j})$ est $+\dfrac{\pi}{2}$
- **indirect** , si l'une des mesures de $(\vec{i}, \vec{j})$ est $-\dfrac{\pi}{2}$

Ex : Repère orthonormé direct | Repère orthonormé indirect

Remarque :



- On définit de la même façon une base orthonormée directe …
- Etant donné un vecteur unitaire $\vec{u}$, il existe un unique vecteur unitaire $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée directe.

Déterminant de deux vecteurs :

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et soit $\vec{u}'$ le vecteur vérifiant : $\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| \\ et \\ \widehat{(\vec{u},\vec{u}')} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$.

On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ et on note dét $(\vec{u}, \vec{v})$ le réel $\vec{v}.\vec{u}'$.

On convient que si l'un des vecteurs est nul, leur déterminant est nul.

Remarques :

- dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = - dét $(\vec{v},\vec{u})$.
- dét $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe alors dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = 1.
- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée indirecte alors dét $(\vec{u}, \vec{v})$ = - 1.

Activité 6 page 41 :

1) COSINUS ET SINUS D'UN REEL

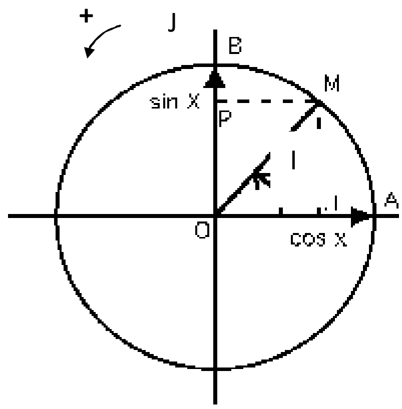
Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ; on considère le cercle trigonométrique C de centre O .

A) DEFINITION

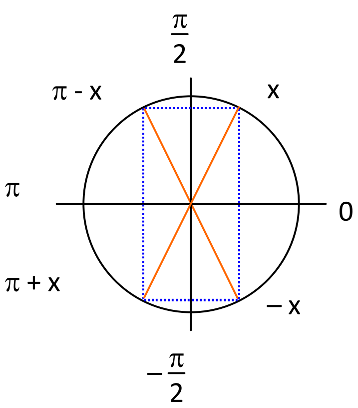
Pour tout réel x , il existe un point M unique du cercle trigonométrique C tel
soit une mesure de ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OM}$) .

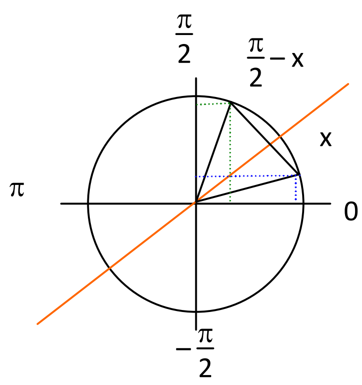
- l'abscisse du point M est le **cosinus** de x (noté cos x)
- l'ordonnée du point M est le **sinus** de x (noté sin x)



Propriétés :
Pour tout réel x et tout entier relatif k,
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2) LIGNES TRIGONOMETRIQUES DES ANGLES ASSOCIES





▪ cos (– x) = cos x ▪ cos (π – x) = – cos x ▪ cos (π + x) = – cos x ▪ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ ▪ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	▪ sin (– x) = – sin x ▪ sin (π – x) = sin x ▪ sin (π + x) = – sin x ▪ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ ▪ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Activité 9 page 53.

3) TANGENTE D'UN REEL

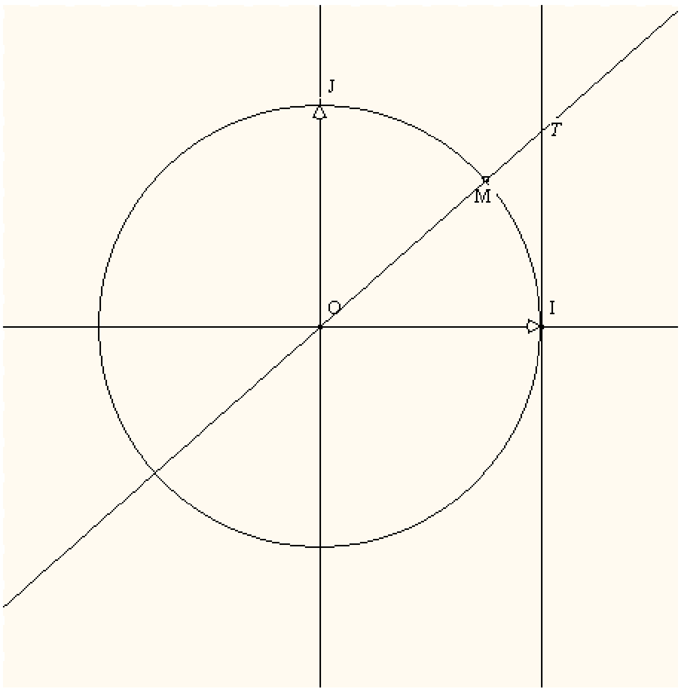
A) DEFINITION

On appelle tangente de θ, le réel noté $\tan\theta$ et défini par $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Activité 2 page 54.

1) $M(\cos\theta, \sin\theta)$ et $T(1, y) \Rightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OT}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 \\ \sin\theta & y \end{vmatrix} = y\cos\theta - \sin\theta$.

2) $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ $\text{dét}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OT}\right) = 0 \Rightarrow y\cos\theta - \sin\theta = 0 \Rightarrow y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$



Activité 3 page 54.

Propriétés :

Pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on a :

- $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$.
- $\tan(-\theta)=-\tan\theta$.

4) COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE ORIENTE DE VECTEURS

A) DEFINITION

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté.

Si x est une mesure en radian de l'angle orienté ($\vec{u}$, $\vec{v}$) , alors les autres mesures sont de la forme x + 2 k π (k

Or cos (x + 2 k π) = cos x et sin (x + 2 k π) = sin x . On en déduit la définition suivante :

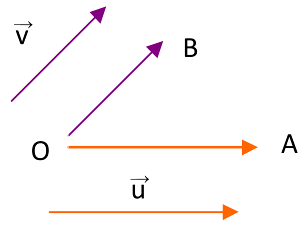
> Le cosinus (resp. le sinus) de l'angle orienté de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelco ses mesures.
>
> On note **cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$)** et **sin ($\vec{u}$, $\vec{v}$)** .

B) LIEN ENTRE cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$) et cos ($\widehat{AOB}$) lorsque $\vec{OA}=\vec{u}$ et $\vec{OB}=\vec{v}$

Notons α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons x la mesure principale de

($\vec{u}$, $\vec{v}$) .

On a α = | x | . Deux cas se présentent :



- Si x ≥ 0 , | x | = x et par suite cos α = cos x .
- Si x ≤ 0 , | x | = – x , et cos α = cos (– x) = cos x

On a donc cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = cos ($\widehat{AOB}$)

Remarque:

Ce n'est pas vrai pour le sinus : sin ($\widehat{AOB}$) = | sin ($\vec{u}$, $\vec{v}$) |

Activités 1 page 57 et 3 page 58.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, de composantes (x, y) et (x', y') dans une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j})$.

Alors : $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $\sin(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

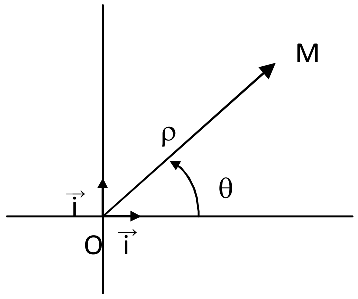
5) REPERAGE ET COORDONNEES POLAIRES

A) COORDONNEES POLAIRES D'UN POINT

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit M un point du plan (distinct de O) .

On appele **cooordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (ρ , θ) tel que :

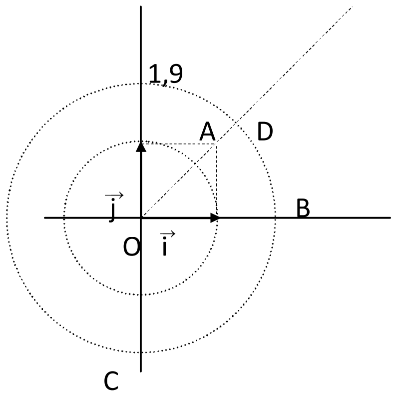
$$\rho = OM \qquad \text{et} \qquad (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$



Remarque :

- O est appelé le pôle et [Ox) l'axe polaire.
- On dit que r est le rayon polaire du point M et θ l'un de ses angles polaires.
- Un repère polaire étant choisi, à tout couple de coordonnées polaires correspond un unique point du plan.

Ex :

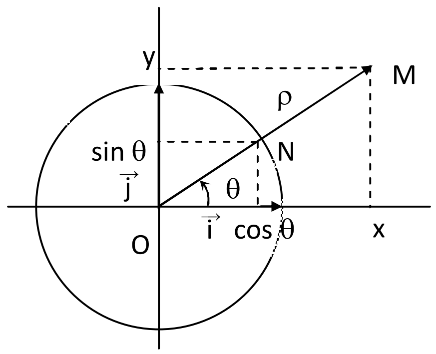


- Un couple de coordonnées polaires de A est :…………………..
- Un couple de coordonnées polaires de B est : ………………….
- Un couple de coordonnées polaires de C est :…………………..
- Un couple de coordonnées polaires de D est :……………………

B) REPERE POLAIRE ET REPERE CARTESIEN

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Un point M (distinct de O) a pour coordonnées cartésiennes (x ; y) et pour coordonnées polaires (ρ , θ) . On a :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad x = \rho\cos\theta \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta$$



Preuve :

Soit C le cercle trigonométrique de centre O .
La demi-droite [OM) coupe C en N .
N a pour coordonnées (cos θ ; sin θ).
Or $\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{ON}$; on en déduit que $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées ($\rho\cos\theta$; $\rho\sin\theta$).
D'autre part : $OM^2 = x^2 + y^2 = \rho^2$

6) FORMULES DE TRANSFORMATION

A) FORMULES D'ADDITION

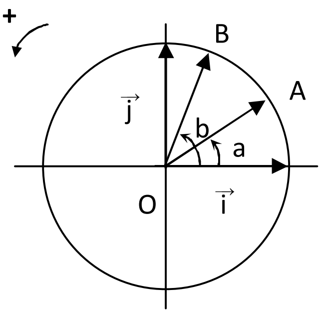
Pour tout réel a et b :

cos (a – b) = cos a cos b + sin a sin b ; cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b

sin (a – b) = sin a cos b – sin b cos a ; sin (a + b) = sin a cos b + sin b cos a

Preuve :

- Montrons que **cos (a – b) = cos a cos b + sin a sin b**



On considère le cercle trigonométrique C de centre O muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On note A et B les points de C , définis par $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$.

Les coordonnées de A et de B sont respectivement (cos a ; sin a) et (cos b ; sin b) .

D'autre part, d'après la relation de Chasles, on a :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = -(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b - a$

Calculons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$:

- *avec les coordonnées* : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- *en utilisant* $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \cos(b - a)$

Ainsi cos (a – b) = cos a cos b + sin a sin b

- Montrons que **cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b**

Il suffit d'écrire cos (a + b) = cos (a – (– b)) …

- Montrons que **sin (a + b) = sin a cos b + sin b cos a**

Il suffit d'écrire $\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \ldots$

- Montrons que **sin (a – b) = sin a cos b – sin b cos a**

Il suffit d'écrire sin (a – b) = sin (a + (– b)) = …

Ex :

En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on peut calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

- $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \ldots = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \ldots = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B) FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINEARISATION

FORMULES DE DUPLICATION	*FORMULES DE LINEARISATION*
▪ $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ ▪ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2\cos^2 a - 1$ $= 1 - 2\sin^2 a$	▪ $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ ▪ $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

Preuve :

En prenant b = a , dans les formules précédentes on obtient $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

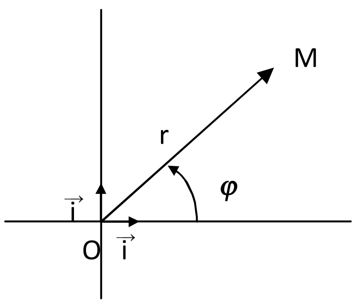
En utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.

On en déduit les deux dernières formules.

Activité 2 page 59.

C) FORMULE DE TRANSFORMATION DE $a\cos x + b\sin x$

Activité



Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

M est un point du plan ayant pour coordonnées cartésiennes (a,b)

dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et pour coordonnées polaires $[r,\varphi]$.

On sait que $\cos\varphi = \frac{a}{r}$; $\sin\varphi = \frac{b}{r}$; $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Pour tout réel x, $a\cos x + b\sin x = r\cos\varphi\cos x + r\sin\varphi\sin x = r(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) = r\cos(x-\varphi)$.

Ainsi on a : Soit $(a,b)\neq(0,0)$. Pour tout réel x,

$$a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\varphi);\ \text{où } r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{et}\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Activité 4 page 60.

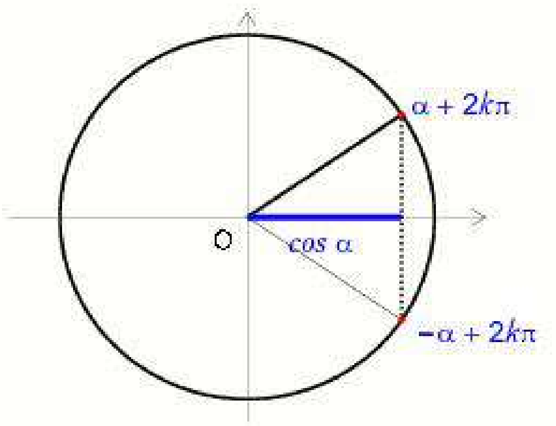
7) EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

A) EQUATION EN COSINUS

L'équation $\cos x=\cos\alpha$; où α est un réel fixé a pour solutions $\alpha+2k\pi$ et $-\alpha+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

L'équation $\cos x=0$ a pour ensemble de solutions $\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Cet ensemble peut s'écrire aussi sous la forme $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

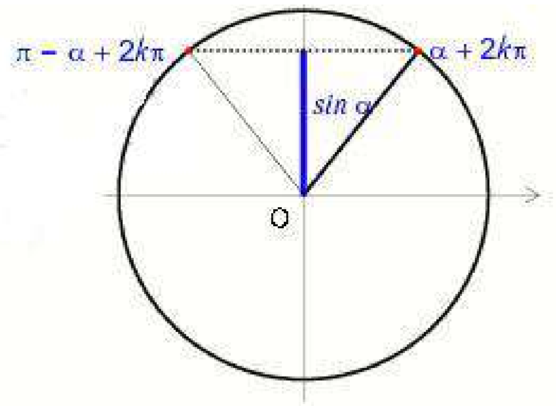


B) EQUATION EN SINUS

L'équation $\sin x=\sin\alpha$; où α est un réel fixé a pour solutions $\alpha+2k\pi$ et $\pi-\alpha+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

L'équation $\sin x=0$ a pour ensemble de solutions $\{0+2k\pi\ ;\ \pi+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

Cet ensemble peut s'écrire aussi sous la forme $\{k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.



Exemple

Pour résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ on pourra écrire :

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ est donc $\left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

A) EQUATION EN TANGENTE

L'équation $\tan x = \tan\alpha$; où α est un réel fixé différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ a pour solutions $\alpha + 2k\pi$ et $\pi + \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

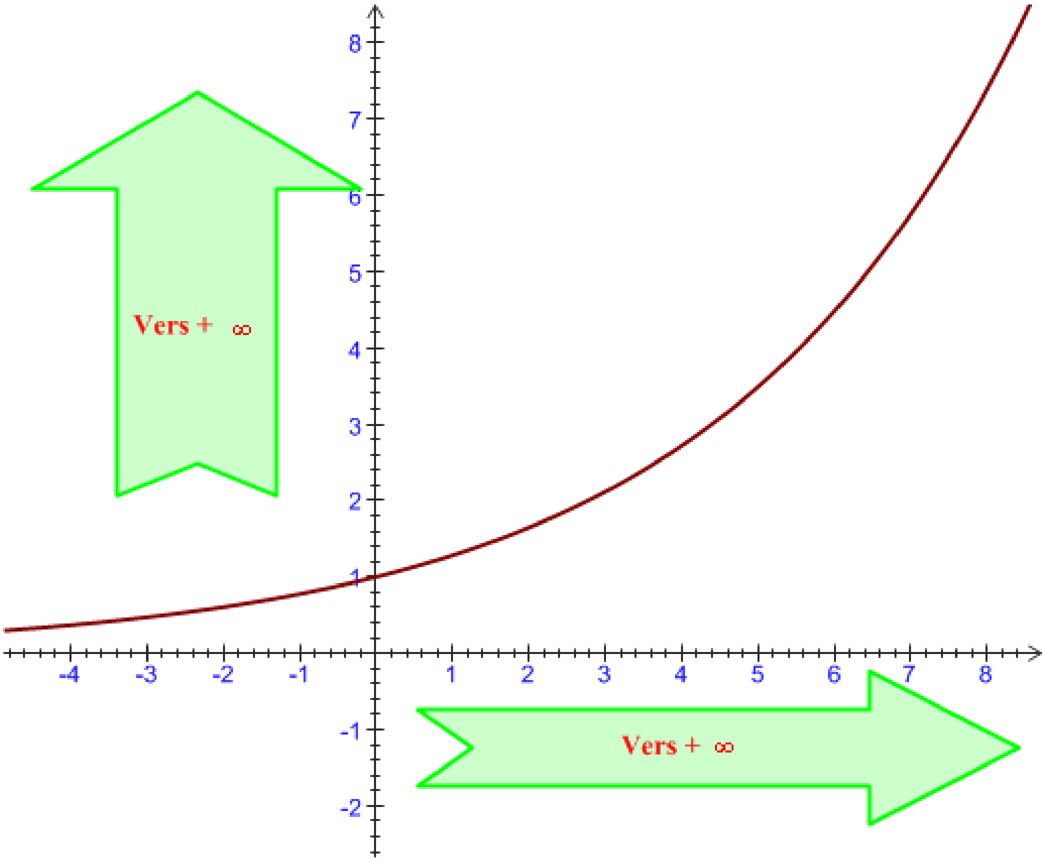
Cet ensemble peut s'écrire aussi sous la forme $\{\alpha + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercices 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 page 67.

I. LIMITES EN L'INFINI

a. Limite infinie

Par exemple, considérons la fonction f dont la courbe représentative est :

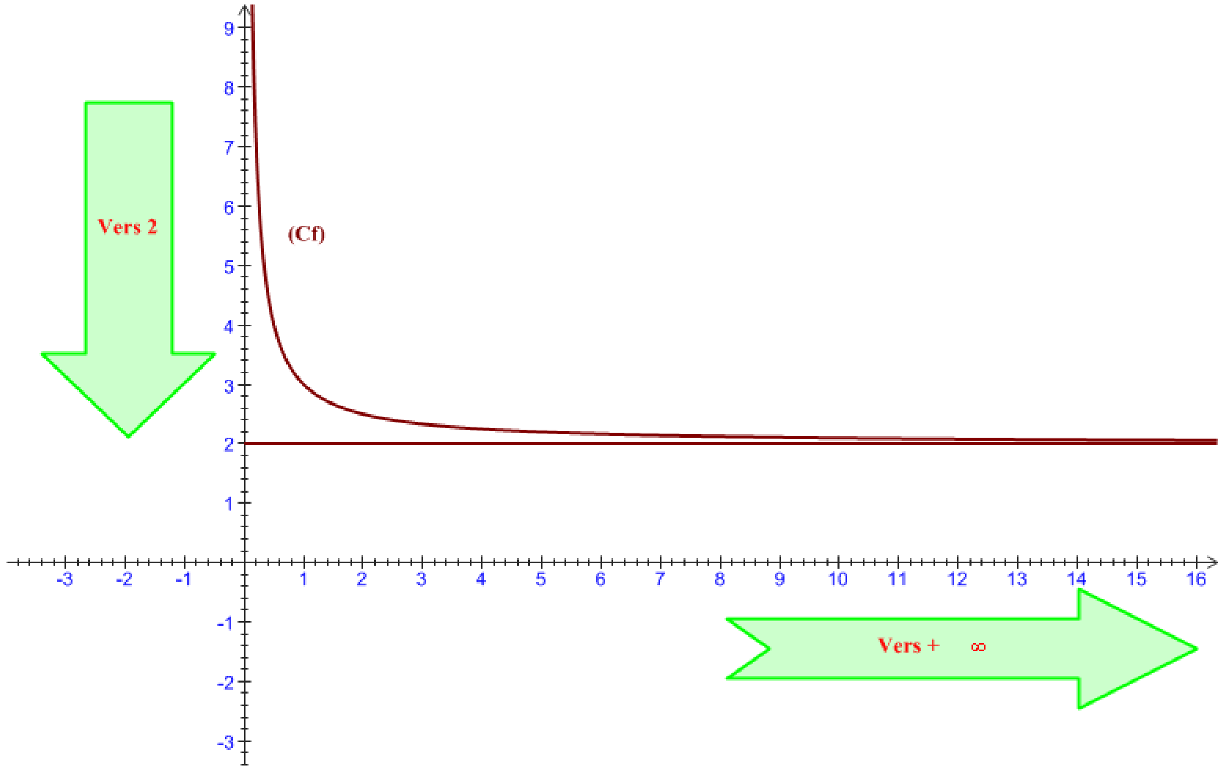


Lorsque **x** s'en va vers +∞, **f(x)** devient de plus en plus grand. il n'a aucun maximum.
On dit alors que **f(x)** tend vers +∞.
Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers +∞ est égale à +∞.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

b. Limite finie

Considérons maintenant la fonction **f** dont la courbe représentative est :



Lorsque **x** s'en va vers **+∞**, **f(x)** se rapproche de plus en plus de **2**.
On dit alors que **f(x)** tend vers **2**.
Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers **+∞** est égale à **2**.

Ce que l'on résume par :

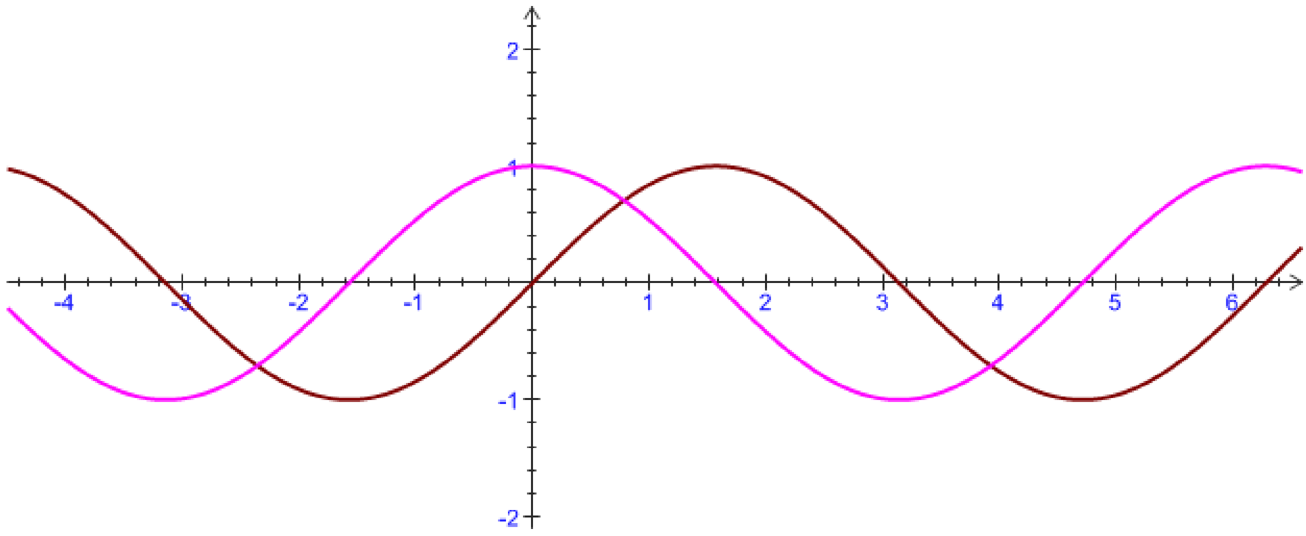
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

Note : Lorsque **x** tend vers **+∞**, la courbe de la fonction **f** se rapproche de plus en plus de la droite **D** d'équation **y = 2**.

On dit alors que **D** est une **asymptote horizontale** à la courbe de **f** au voisinage de **+∞**.

c. Sans limite !

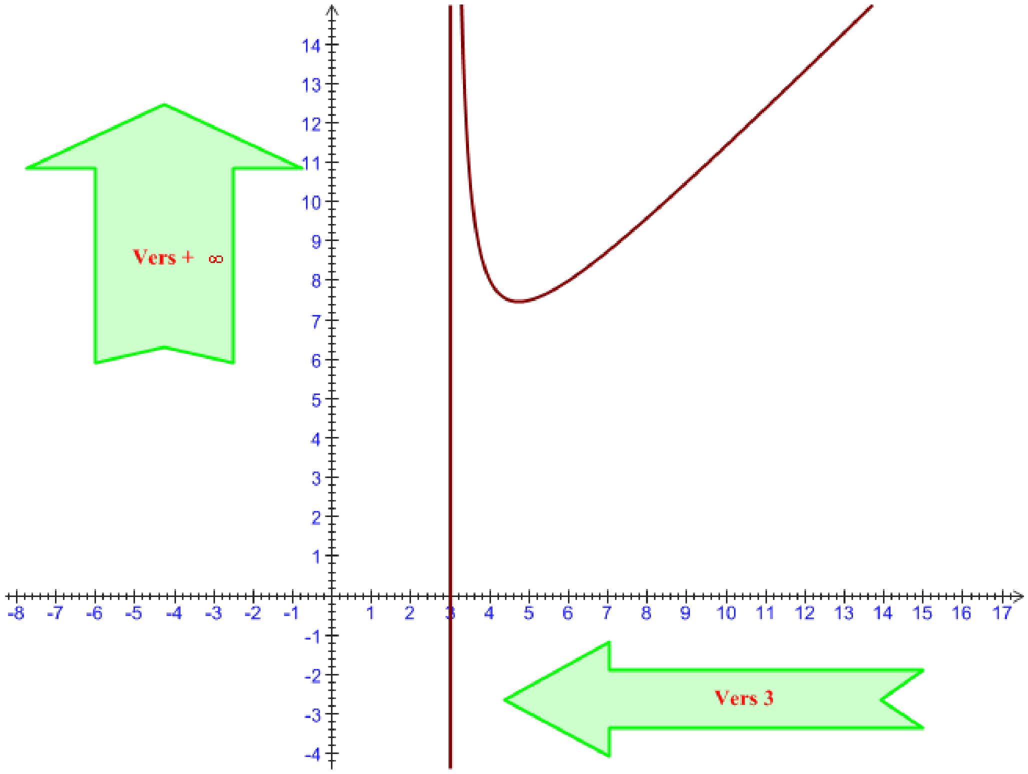
Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque **x** tend vers **+∞**. C'est par exemple le cas avec les fonctions sinus et cosinus :



Lorsque **x** s'en va vers **+∞**, **sinus** et **cosinus** hésitent quant à l'attitude à adopter. Oscillant à jamais, ils n'ont aucune limite finie ou infinie...

II. LIMITES EN UN POINT

Par exemple, considérons la fonction f définie sur l'intervalle] 3 ; +∞ [dont la courbe représentative est :



Lorsque **x** se rapproche de **3**, **f(x)** devient de plus en plus grand sans qu'aucun plafond ne l'arrête.
On dit alors que **f(x)** tend vers **+∞**.
Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers **3** est égale à **+∞**.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

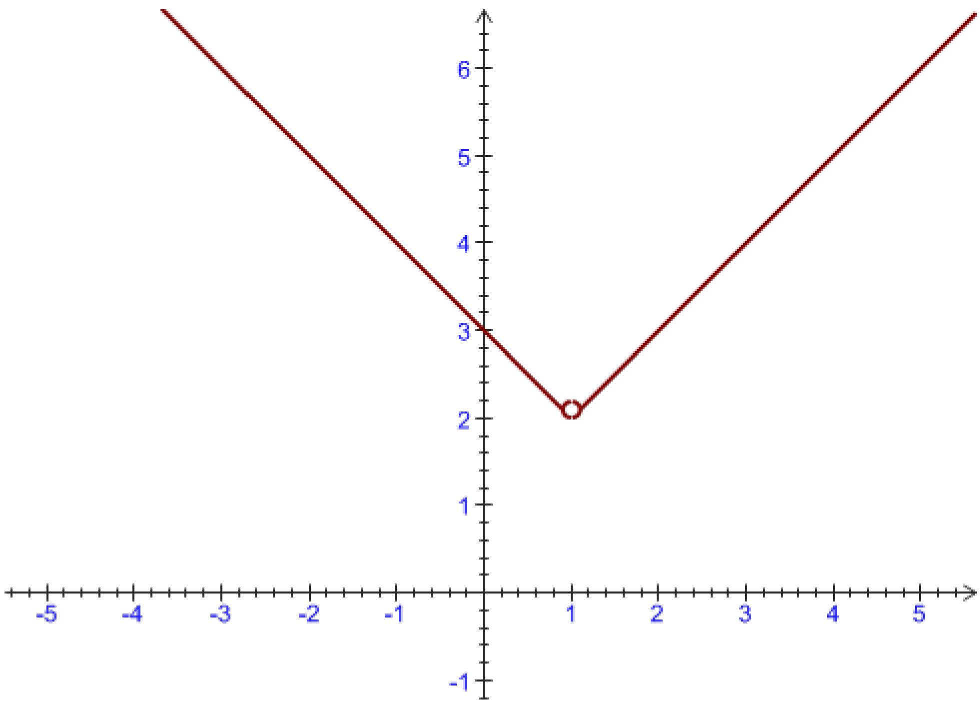
Note : Lorsque **x** tend **3**, la courbe de la fonction **f** se rapproche de plus en plus de la droite **D** d'équation **x = 3**.
On dit alors que **D** est une **asymptote verticale** à la courbe de **f** au voisinage de **3**.

Nous avons exclusivement évoqué des fonctions qui tendent vers +∞ à l'approche d'un point. Mais il existe aussi des fonctions qui ont pour limite -∞.

Limite finie en un point.

Soit $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} + 2, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sa courbe représentative est donnée ci-dessous :



Lorsque **x** se rapproche de 1, **f(x)** devient de plus en plus proche de 2. On dit alors que **f(x)** tend vers 2.

Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers 1 est égale à **2**.
Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

Théorème :

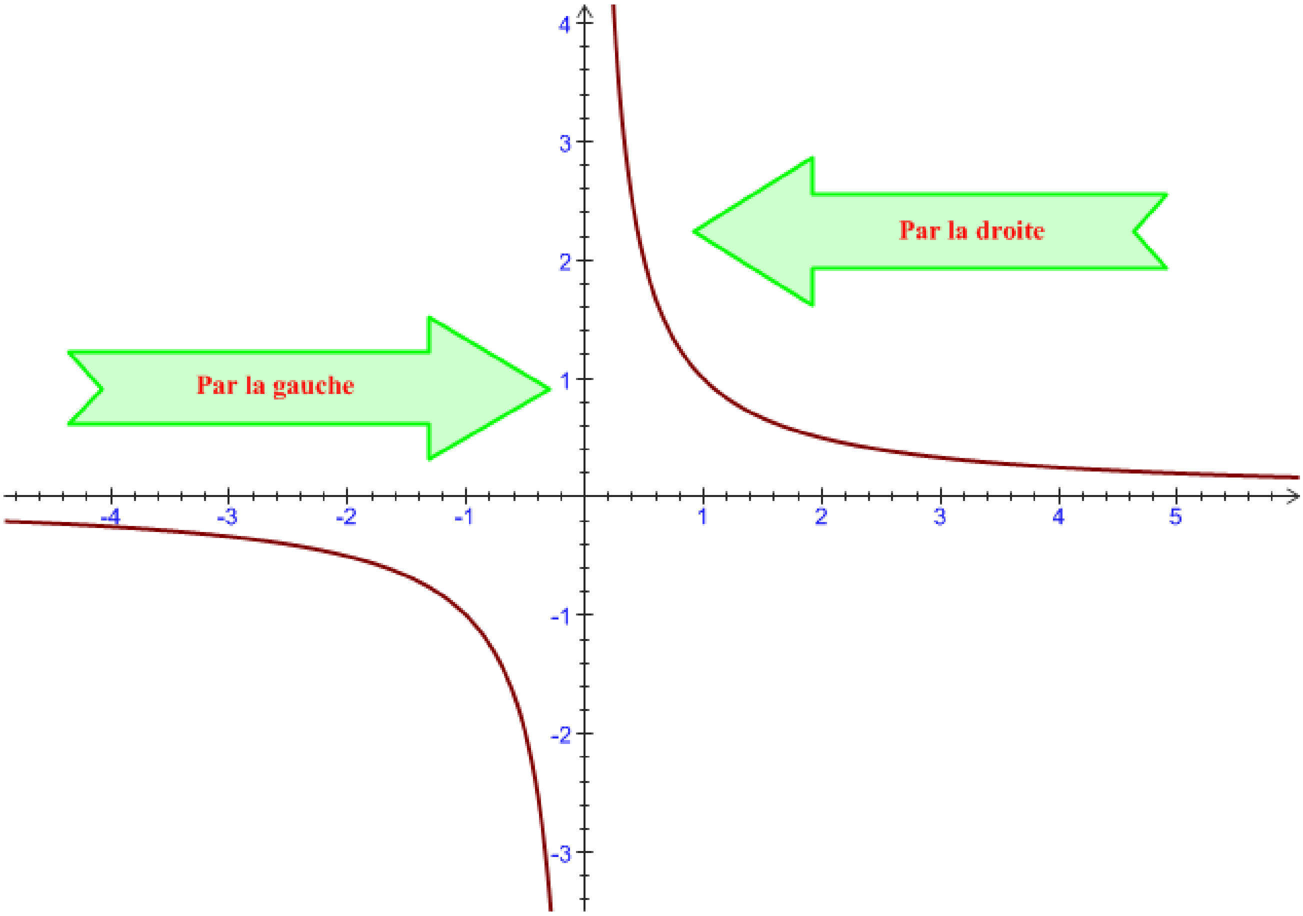
Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf peut être en a.

Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

Limite à gauche et limite à droite.

Dans ce qui suit, **f** désignera la fonction inverse. Ainsi pour tout x : $f(x) = \frac{1}{x}$

La fonction inverse **f** est définie sur l'intervalle $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
Autrement écrit, lorsqu'elle tend vers 0, elle peut le faire :



lorsque **x** se rapproche de **0** par la gauche ou par valeurs inférieures, **f(x)** tend vers **-∞**.
On dit alors que la limite à gauche de **f(x)** en **0** est égale à **-∞**.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

lorsque **x** se rapproche de **0** par la droite ou par valeurs supérieures, **f(x)** tend vers **+∞**.
On dit alors que la limite à droite de **f(x)** en **0** est égale à **+∞**.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

La fonction inverse n'admet pas de limite en 0 car elle a :

une limite à gauche de 0 qui vaut -∞ et une limite à droite de 0 qui vaut +∞.

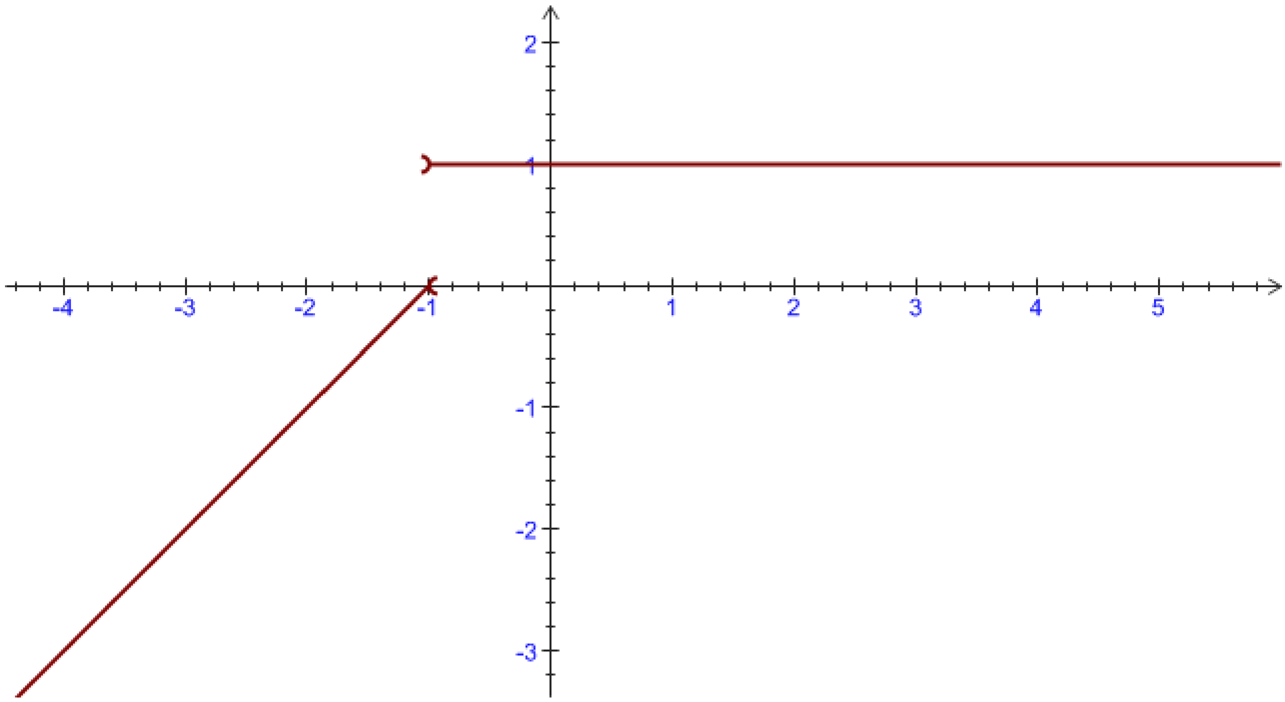
Théorème :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$.

Activité 3 page 48

$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x < -1 \\ 1 \quad\quad \text{ si } x > -1 \end{cases}$ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

1) Représentation graphique de f :



2) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-} x + 1 = 0$.

3) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} 1 = 1$

Conclusion : f n'a pas de limite en – 1.

III. CONTINUITE

a. Définition de la continuité

Définition :

Dire qu'une fonction *f*, définie sur un intervalle I contenant a est continue en a signifie que :

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

La fonction est continue sur I signifie qu'elle est continue en tout point de I

Exercice page 43 :

1) $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$.

f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ en particulier en 2.

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 9.$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x - 1}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

f est une fonction rationnelle continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ en particulier en -2.

$\Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) = 2.$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, $D_f = \mathbb{R}$ car $x^2 - 2x + 3 \geq 0$ pour tout réel x

f est continue en 1 $\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sqrt{2}.$

b. Prolongement par continuité

Soit $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \left(\frac{0}{0}\right) \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Mais $\dfrac{x^3 + 1}{x + 1} = \dfrac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = x^2 - x + 1$, pour tout $x \neq -1$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} x^2 - x + 1 = 3.$$

La fonction $g : x \mapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en – 1.

On dit que f est prolongeable par continuité en – 1.

c. Continuité à droite – continuité à gauche

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de .

la fonction f est continue à droite en a, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

la fonction f est continue à gauche en a, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

IV. LIMITES DES FONCTIONS DE REFERENCE

Fonction	Ensemble de définition	Limite en $-\infty$	Limite en 0	Limite en $+\infty$
x	$]-\infty\,;+\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$]-\infty\,;+\infty[$	$+\infty$	0	$+\infty$
x^3	$]-\infty\,;+\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	0	$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$	0
$\sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$		0	$+\infty$

V. OPERATIONS SUR LES LIMITES

a) Limite d'une somme

De manière générale, la limite de la somme de deux fonctions est égale à la somme des limites de celles-ci. Sauf cas particuliers !

Limite de f	Limite de g	Limite de f + g
l	l'	l + l'
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Indéterminé

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3x - 1\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 4x^2 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x} + x - 4\right) = -4$

b) Limite d'un produit.

Limite de f	Limite de g	Limite de f . g
l	l'	$l \times l'$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	Indéterminé

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3\right)\left(\frac{1}{x} - 4\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x} \times (x + 5) =$ F.I.

c) Limite d'un quotient.

Par rapport à multiplication, la division ajoute le fait qu'on ne peut pas diviser par 0.

Limite de f	Limite de g	Limite de f / g
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$+\infty$	$l' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' < 0$	$+\infty$
$-\infty$ ou $+\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	Indéterminé

$l > 0$ ou $+\infty$	0^+	$+\infty$
$l > 0$ ou $+\infty$	0^-	$-\infty$
$l < 0$ ou $-\infty$	0^+	$-\infty$
$l < 0$ ou $-\infty$	0^-	$+\infty$
∞	0	∞
0	0	Indéterminé

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{3}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+5}{\frac{1}{x}-3} = +\infty$

VI. METHODES DE CALCUL

Les opérations sur les limites ne permettent pas toujours de déterminer la limite d'une fonction. Il faut alors changer de chemin et modifier l'écriture de cette fonction... afin de pouvoir les appliquer !

a) Limite d'un polynôme

Déterminons la limite en + ∞ du polynôme f défini pour tout réel x par : f(x) = **$3x^3$ – $2x^2$ + 1**

Au premier abord, lorsque x tend vers + ∞ :

$$\begin{cases} 3x^3 \text{ tend vers } +\infty \\ -2x^2 \text{ tend vers } -\infty \\ 1 \text{ tend vers } 1 \end{cases} \quad \text{ainsi} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{F.I.} \quad \text{(Forme Indéterminée)}$$

L'actuelle écriture de **f** ne permet pas de conclure. Modifions la.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 2x^2 + 1 \\ &= 3x^3\left(1 - \frac{2x^2}{3x^3} + \frac{1}{3x^3}\right) = 3x^3\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^3}\right) \end{aligned}$$

On factorise par $3x^3$

Lorsque x tend vers + ∞ :

- $\dfrac{-2}{3x}$ tend vers 0
- $\dfrac{1}{3x^3}$ tend vers 0

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^3} = 1 - 0 + 0 = 1$$

De plus, lorsque x tend vers + ∞, nous savons que $3x^3$ tend vers + ∞.

Connaissant les limites des deux facteurs, nous pouvons connaître celle de leur produit f(x).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3x^3\left(1 - \frac{2x^2}{3x^3} + \frac{1}{3x^3}\right)(+\infty) \times 1 = +\infty$$

Remarque :
Si on observe attentivement ce qui vient de se passer, on remarque que c'est **$3x^3$** qui a imposé sa limite au produit.
Or **$3x^3$** est le terme dominant du polynôme f(x).

Ce qui est vrai pour le cas particulier f l'est pour n'importe quel polynôme.

b) Limite d'une fraction rationnelle.

On considère la fonction rationnelle **g** définie pour tout réel x par : $g(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 1}{5x^4 - 4x^3 + x}$

Déterminons sa limite en $+\infty$.

Au premier abord, en utilisant ce que nous avons fait avec les polynômes, nous pouvons dire que lorsque x tend vers $+\infty$:

le numérateur **$3x^3 + 2x^2 + 1$** tend vers **$+\infty$**.

le dénominateur **$5x^4 - 4x^3 + x$** tend vers **$+\infty$**.

Ainsi, la limite de g est une forme indéterminée

La présente écriture de **g** ne permet pas de conclure. Il nous faut donc la modifier.

$$g(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{5x^4 - 4x^3 + x} = \frac{3x^3\left(1 + \dfrac{2x^2}{3x^3} + \dfrac{1}{3x^3}\right)}{5x^4\left(1 - \dfrac{4x^3}{5x^4} + \dfrac{x}{5x^4}\right)}$$

On factorise le numérateur puis le dénominateur

$$= \frac{3x^3}{5x^4} \times \frac{1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3}}{1 - \dfrac{4}{5x} + \dfrac{1}{5x^3}} = \frac{3}{5x} \times \frac{1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3}}{1 - \dfrac{4}{5x} + \dfrac{1}{5x^3}}$$

Puis on fragmente la fraction et on simplifie

Quand x tend vers $+\infty$ $\begin{cases} 1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3} \text{ tend vers } 1 \\ 1 - \dfrac{4}{5x} + \dfrac{1}{5x^3} \text{ tend vers } 1 \end{cases}$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3}}{1 - \dfrac{4}{5x} + \dfrac{1}{5x^3}} = 1$

De plus la limite de $\dfrac{3}{5x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, est égale à 0.

Connaissant les limites des deux facteurs, celle de leur produit g(x) est à notre portée :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{5x} \times \frac{1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3}}{1 - \dfrac{4}{5x} + \dfrac{1}{5x^3}} = 0 \times 1 = 0$$

Remarque :

Si on observe attentivement ce qui vient de se passer, on remarque que c'est $\frac{3}{5x}$ qui a imposé sa limite au produit. Or, $\frac{3}{5x} = \frac{3x^3}{5x^4}$

Autrement dit, c'est le quotient du terme dominant du numérateur et du terme dominant du dénominateur qui a donné sa limite à $g(x)$ en $+\infty$.

I. FONCTION DERIVABLE – NOMBRE DERIVE

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$

Dire que la fonction f est **dérivable** en a et que **le nombre dérivé** de f en a est le réel L , revient à dire que **le taux de variation** de f en a , $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0 .

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a : $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Ex : Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur IR et a un réel quelconque.

Pour $h \neq 0$, on a :

$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h$.

Or $\lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a$.

Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

AUTRE DEFINITION

Dire que la fonction $h \longmapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a pour limite L en 0 , revient à dire que :

pour tout h , proche de 0 , $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L + \varphi(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

c'est à dire $f(a+h) = f(a) + L.h + h.\varphi(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

Ainsi …

Cette écriture est appelée **développement limité** à l'ordre 1 de f en a

Dire que f est **dérivable** en a , et que son **nombre dérivé** en a est le réel L , signifie que pour tout h suffisamment proche de 0 (c'est à dire au **voisinage de 0**) , on peut écrire :

$f(a+h) = f(a) + L.h + h.\varphi(h)$, où φ est une fonction vérifiant $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

Exercice :

Pour tout h , on a : $(a + h)^2 = a^2 + 2 a h + h^2$.

En posant $\varphi (h) = h$, on peut écrire $h^2 = h \varphi (h)$, (on a bien $\lim_{h \to 0} \varphi (h) = 0$.

Ainsi $(a + h)^2 = a^2 + 2 a . h + h . \varphi (h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varphi (h) = 0$.

On retrouve que la fonction f de l'exemple précédent est dérivable en a et que $f'(a) = 2 a$.

Rem : (**dérivable entraîne continue** …)

Lorsque f est dérivable en a , $\lim_{h \to 0} f (a + h) = f (a)$

En effet $\lim_{h \to 0} (L h + h . \varphi (h)) = 0$ …

II. QUELQUES APPLICATIONS

A) TANGENTE EN UN POINT

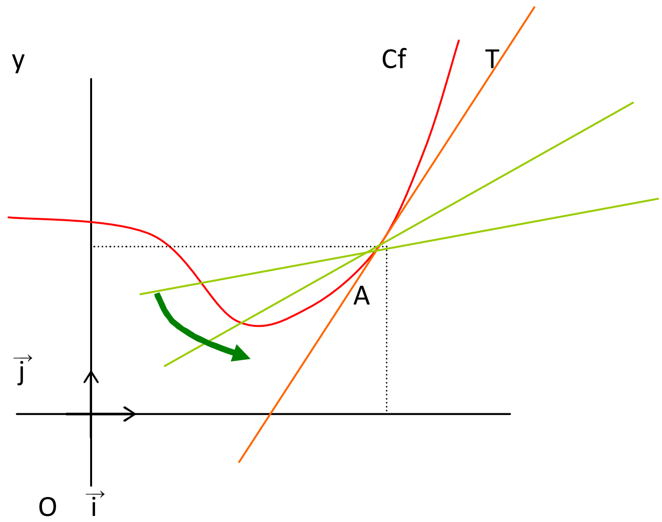
Un peu d'intuition …

Soit M le point de Cf d'abscisse a + h .

Le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$$\frac{f (a + h) - f (a)}{h}$$

Géométriquement, la tangente à Cf au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe .



Si f est dérivable en a , la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A

Si f est dérivable en a, la courbe Cf admet au point A (a ; f (a)) une **tangente** T de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de la tangente en ce point est :

$$y = f'(a) (x – a) + f (a)$$

T admet une équation de la forme $y = f'(a) x + p$;

de plus elle passe par A (a ; f (a)) …

Cas particulier important :

- Si $f'(a) = 0$, Cf admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (tangente horizontale) d'équation $y = f(a)$.

- Si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$) , f n'est pas dérivables en a , mais Cf admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées (tangente verticale) d'équation $x = a$.

B) APPROXIMATION AFFINE LOCALE (admis)

Supposons que f soit dérivable en a . Ainsi on peut écrire $f(a+h) = f(a) + f'(a) . h + h . \varphi(h)$, avec

$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

De plus la tangente à Cf en A (a ; f (a)) a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

On considère M et M' deux points d'abscisse a + h , tels que $M \in Cf$ et $M' \in T$.

$M \in Cf$, donc $y_M = f(a+h)$ $M' \in T$, donc $y_{M'} = f(a) + h f'(a)$.

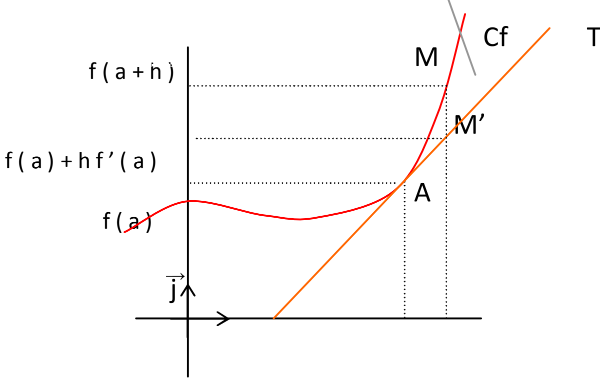
Ainsi $\overline{M'M} = f(a+h) - f(a) - h f'(a) = h . \varphi(h)$.

Si h est proche de 0 , alors les points M et M' sont proches l'un de l'autre et $f(a+h)$ est proche de $f(a) + h f'(a)$

On dit que la fonction $h \longmapsto f(a) + h f'(a)$ est **la meilleure approximation affine** de la fonction :

$h \longmapsto f(a+h)$ au voisinage de 0 .

En remplaçant $f(a+h)$ par $f(a) + h f'(a)$, on commet une erreur égale à $h \varphi(h)$.



Remarque :

- La distance MM' mesure la valeur absolue de l'erreur commise.
- Une autre droite passant par A fournirait une autre approximation affine de f (a + h) , mais celle donnée par la tangente est la meilleure. *(admis …mais intuitif)*

Exercice :

Le nombre dérivé de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ en un réel a est $f'(a) = 2a$

Au voisinage de 0, on a donc $(a + h)^2 \approx a^2 + 2a\,h$

Par exemple , $(3,01)^2 = (3 + 0,01)^2$

Ainsi $(3,01)^2 \approx 9 + 2 \times 3 \times 0,01$, soit $(3,01)^2 \approx 9,06$

Dans ce cas il est possible de déterminer l'erreur commise ; elle est de h^2 , c'est à dire 0,0001 .

C) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRETATION CINEMATIQUE DU NOMBRE DERIVE

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe.

On note d (t) , la distance qu'il a parcourue à l'instant t . (loi horaire)

Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant to est la limite des vitesses moyennes

$\dfrac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0 .

Il s'agit du nombre dérivée en to de la fonction d .

Remarque :

On retrouve ces résultats dans d'autres domaines scientifiques…

Le taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (débit moyen , coût moyen de production …).

Le nombre dérivé, lui, est une mesure instantanée (débit instantané , coût marginal …) .

III. FONCTIONS DERIVEES

A) DEFINITION

Par extension, f est dérivable sur [a,b] veut dire que f est dérivable sur]a,b[et que f est dérivable à droite en a et gauche en b .

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I \subset D_f$) si pour tout x appartenant à I , le nombre dérivé de f en x existe .

La fonction dérivée de f sur I est la fonction , notée **f '**, qui , à tout x de I , associe le réel f ' (x) .

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Par abus de langage, on dit que f ' est « la dérivée de f »

Exercice : La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est définie et dérivable sur IR et sa fonction dérivée est $f' : x \longmapsto 2x$

On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction f , l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f 'est définie .

Cet ensemble (noté Df ') est toujours inclus dans Df .

B) DERIVEES DE QUELQUES FONCTIONS DE REFERENCE

fonction f	fonction dérivée f ’	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto k \ (k \in IR)$	$f' : x \longmapsto 0$	IR
$f : x \longmapsto x$	$f' : x \longmapsto 1$	IR
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	$f' : x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; + \infty [$

Cette fonction n’est pas dérivable en 0

Preuve : (on choisit toujours h , au voisinage de 0 et de telle sorte que f (a + h) soit définie ...ce que l’on ne définira pas à chaque fois)

1) Soit $a \in IR$.

Pour $h \neq 0$, on a : $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{k - k}{h} = 0$, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 0$

Ainsi f est dérivable en a et f ’ (a) = 0 , ce qui est vrai pour tout réel a ...

2) Soit $a \in IR$.

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{a + h - a}{h} = 1$, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 1$

Ainsi f est dérivable en a et f ’ (a) = 1 , ce qui est vrai pour tout réel a ...

3)

Si a > 0 .

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right) \times \left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}{h \times \left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}$, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Si a = 0

Pour $h > 0$, $t(h) = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = +\infty$ (ce qui bien sûr n’est pas un réel ...)$\dfrac{1}{\sqrt{h}}$

Donc f n’est pas dérivable en 0 .

IV. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES

A) SOMME , PRODUIT ...

D représente un intervalle ou une réunion d’intervalles disjoints .

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel , alors :

- les fonctions k u , u + v et u . v sont dérivables sur D et :

$$(ku)' = ku' \quad , \quad (u+v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (u.v)' = u'.v + u.v'$$

- si pour tout réel a de D , v (a) $\neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Preuve :

1) Soit a $\in$ D

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{(ku)(a+h) - (ku)(a)}{h} = k \times \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = k u'(a)$

Ainsi ku est dérivable en a et (k u) ’ (a) = k u ’ (a) , ce qui est vrai pour tout a $\in$ D …

2)

Soit a $\in$ D

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$

Or u et v sont dérivables en a , donc $\lim_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$

et $\lim_{h \to 0} \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

Ainsi u + v est dérivable en a et $\lim_{h \to 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$

On en déduit que (u + v)’ (a) = u ’ (a) + v ’ (a) , ce qui est vrai pour tout a $\in$ D …

3)

Soit a $\in$ D

Pour $h \neq 0$,

$$t(h) = \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \ldots = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} u(a)$$

Or u et v sont dérivables en a , donc $\lim_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim_{h \to 0} \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a$

De plus $\lim_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$ ...

4) Soit $a \in D$ pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{\dfrac{1}{v(a+h)} - \dfrac{1}{v(a)}}{h} = \dfrac{v(a) - v(a+h)}{h\, v(a)\, v(a+h)} = -\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \dfrac{1}{v(a)\, v(a+h)}$

Or v est dérivable en a , donc $\lim_{h \to 0} \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

De plus $\lim_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$

Donc $\lim_{h \to 0} t(h) = \dfrac{-v'(a)}{(v(a))^2}$

Ainsi $\left(\dfrac{1}{v(a)}\right)' = \dfrac{-v'(a)}{(v(a))^2}$, ce qui est vrai pour tout $a \in D$ ...

5) $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ ...

B) CONSEQUENCES : de nouvelles formules à retenir

fonction f	fonction dérivée f ’	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto x^2$	$f' : x \longmapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^3$	$f' : x \longmapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$f' : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$	$f' : x \longmapsto -\dfrac{2}{x^3}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

Remarque : Pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n} = x^m$ et $-\dfrac{n}{x^{n+1}} = (-n)\, x^{-n-1} = ... = m\, x^{m-1}$ (avec $m = -n$)

Ainsi la dérivée de $f : x \longmapsto x^n$ est vraie pour tout entier n (en n’oubliant pas $x \neq 0$ si $n < 0$)

C) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

Exercice :

deg (P') = deg (P) – 1
si deg (P) > 0

- Soit P le polynôme définie sur IR par $P : x \longmapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$

P est une somme de fonctions dérivables sur IR , donc P est dérivable sur IR et pour tout réel x :

$P'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2 \times x - 1 + 0 = 9x^2 + 10x - 1$

Toute fonction polynôme est dérivable sur IR

- Soit f la fonction rationnelle définie par $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2+1}{x-1}$

On peut écrire $f = \dfrac{u}{v}$ où $u : x \longmapsto 2x^2 + 1$ et $v : x \longmapsto x - 1$

On a $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, ainsi $Df = \mathbb{R} - \{1\}$

u et v sont dérivables sur IR donc sur IR – {1} et v ne s'annule pas sur IR – {1}, donc f est dérivable sur IR – {1} e pour tout $x \neq 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{4x(x-1) - (2x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$$

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

V. DERIVEE DE $f : x \longmapsto g(ax+b)$ (admis)

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I . Pour tout réel x , tel que $ax + b \in I$, la fonction $f : x \longmapsto g(ax+b)$ est dérivable et : $\mathbf{f'(x) = a\,g'(ax+b)}$

Exercice :

Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \sqrt{3x+6}$

$3x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$, ainsi $Df = [-2 ; +\infty[$

Pour tout $x \geq -2$, on peut écrire $f(x) = g(3x+6)$ où g est la fonction racine carrée $g : t \longmapsto \sqrt{t}$

La fonction g est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et pour tout t > 0 , $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

On a $3x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

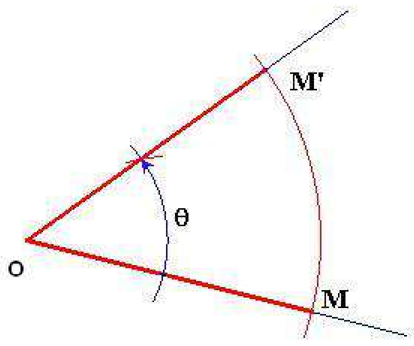
Ainsi f est dérivable sur] - 2 ; + ∞ [et pour tout $x > -2$: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$

1) DEFINITIONS

Dans un plan P orienté dans le sens direct sont donnés un point O et un angle θ . On appelle rotation de centre O et d'angle θ la fonction $R_{(O, \theta)}$ du plan P dans lui-même qui au point **M** associe le point **M'** vérifiant:

$$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$$

Le point O et le réel θ sont dits les éléments caractéristiques de $R_{(O, \theta)}$.



Cas particuliers

Des valeurs particulières de l'angle de rotation conduisent à des situations très particulières.
Soit O le centre de rotation:

- Angle de rotation nul:
  Cette rotation fait correspondre chaque point d'une figure à lui même. ***La figure est invariante point par point.***
- Angle de rotation égal à π :
  Soit A' l'image du point A. Nous avons donc OA=OA' et l'angle AÔA' est plat (=180°)

Comme les points A, O et A' sont alignés et OA=OA' alors O est le milieu de [AA']. Ce qui signifie que A' est le symétrique de A par rapport à O. Et ceci quelque soit le point A.

Nous retrouvons la propriété fondamentale des symétries centrales.

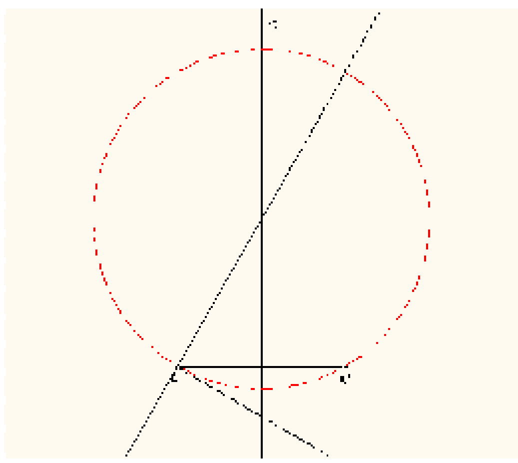
Pour un angle de rotation de 180° (ou -180°) nous obtenons une symétrie centrale de centre O

Vocabulaire

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Ω un point du plan et R la rotation de centre Ω et d'angle θ .

- Si $\theta \geq 0$, on dit que R est une rotation directe.
- Si $\theta \leq 0$, on dit que R est une rotation indirecte.



Activité 2 page 72.

1) **a.** O est le milieu de [AA'].

b. Si $\theta \neq k\pi$, alors $\begin{cases} OA = OA' \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} O \in méd\,[AA'] \\ et \\ O \in \xi \end{cases}$

2) l'unicité du point O entraine l'unicité de la rotation.
3) Déjas fait en 1) b.

Une rotation est parfaitement déterminée par la donnée de son angle et celle d'un point et son image.

Activités 3 et 4 page 73.

Réciproque d'une rotation

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit O un point du plan, θ un réel et R la rotation de centre O et d'angle θ .

La rotation $R_{(O,-\theta)}$ est appelée rotation réciproque de $R_{(O,\theta)}$. De plus,

$$R_{(O,\theta)}(M) = M', \text{ si et seulement si, } R_{(O,-\theta)}(M') = M$$

2) PROPRIETES D'UNE ROTATION

A) DEFINITION D'UNE ISOMETRIE

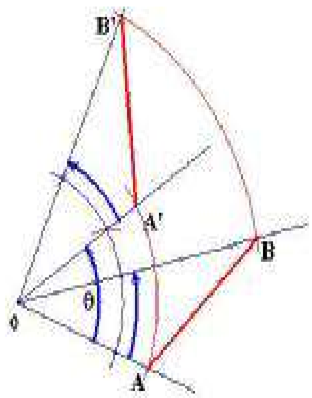
Soit f une application du plan dans lui-même.

On dit que f est une isométrie du plan si pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a MN = M'N'.

Exemples :

La symétrie orthogonale, la symétrie centrale et la translation sont des isométries du plan.

Activité 2 page 74.



1) *a. Si A = O, alors A' = O et parsuite on a :* $\underbrace{\overrightarrow{OA}}_{0}\cdot\overrightarrow{OB} = 0 = \underbrace{\overrightarrow{OA'}}_{0}\cdot\overrightarrow{OB'}$.

b. Si A et B sont distincts de O, alors

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv -\theta + \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) + \theta\,[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$$

c.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\times OB\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = OA'\times OB'\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}\right).$$
$$= \overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}$$

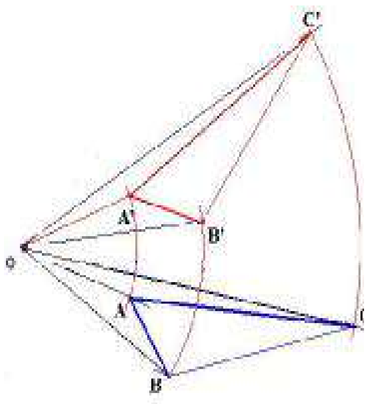
2) *a.* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = OA^2 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$.

b. D'après 1) on a $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OC'}$ *et*
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OC'}$ *donc*

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = OA^2 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$= OA'^2 - \overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OC'}$$
$$= \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$$

c. Si on pose C = B, alors 2) donne

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow AB^2 = A'B'^2 \Leftrightarrow AB = A'B'$$



Théorème

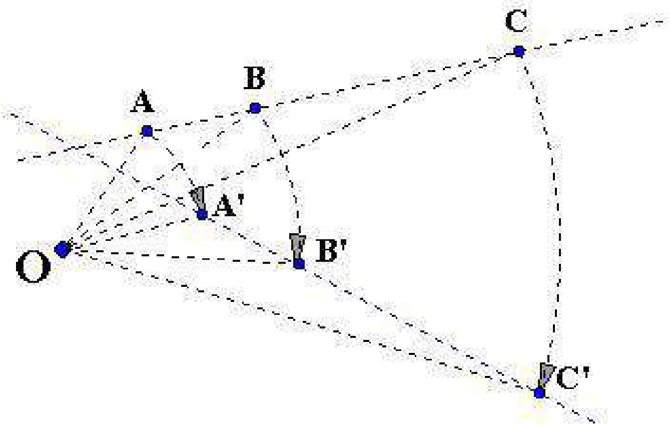
Toute rotation conserve le produit scalaire et les distances. Ainsi, toute rotation est isométrie.

B) ROTATION ET ALIGNEMENT

Rappels:

Si A, B et C,dans cet ordre, sont alignés alors AB+BC=AC. (cas particulier des inégalités triangulaires) et sa réciproque: Si AB+BC=AB alors A, B et C sont alignés.

Soient les points alignés A, B et C et leurs images A', B' et C' par la rotation de centre **O** et d'angle θ .
Comme les rotations conservent les distances alors AB=A'B', BC=B'C' et AC=A'C'.
Comme A, B et C sont alignés alors AB+BC=AC.
Si nous remplaçons AB, BC et AC par les valeurs égales, respectivement, A'B', B'C' et A'C', nous obtenons A'B'+B'C'=A'C'.
Comme A'B'+B'C'=A'C' alors A', B' et C' sont alignés. Ce qui prouvent que:



Les rotations conservent les alignements

Image du milieu d'un segment:

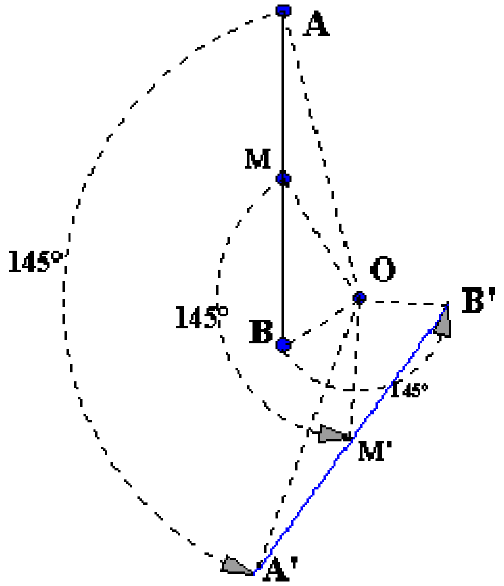
Soient le segment[AB] et son milieu M.
A' et B' sont les images de A et B par la rotation de centre **O** et d'angle θ .

Comme M est le milieu de [AB] alors A, M et B sont alignés et AM=MB.

Comme les rotations conservent les alignement alors les images A', B' et M' sont alignés.

Comme les rotations conservent les distances alors AM=A'M', MB=M'B'. Donc A'M'=M'B'.

Comme A', M' et B' sont alignés et A'M'=M'B' alors M' est le milieu de [A'B'].



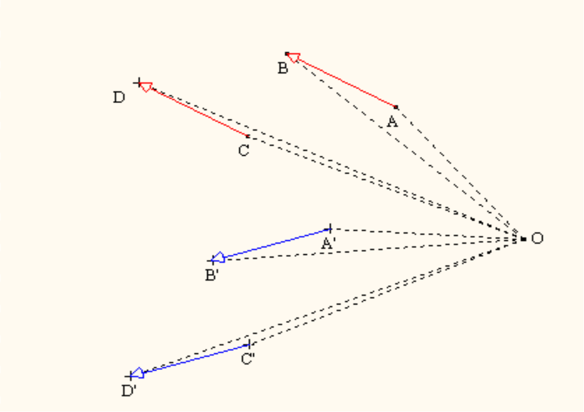
L'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image

C) ROTATION ET ANGLES ORIENTES

Activité 4 page 75.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (A,B) \text{ est équipollent à } (C,D) \Leftrightarrow A*D = B*C$$

$$\Leftrightarrow A'*D' = B'*C' \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$$



Activité 5 page 75.

1) $\begin{cases} R(O) = O \\ R(E) = E' \\ R(A) = A' \Rightarrow \overrightarrow{OE'} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OE'})}[2\pi] \equiv \theta\,[2\pi] \\ R(B) = B' \\ \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$

2) $$\widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} + \widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'})}[2\pi]$$
$$\equiv -\theta + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} + \theta\,[2\pi] \equiv \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}[2\pi].$$

Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.

R est la rotation de centre O et d'angle θ .

- Pour tous points A et B d'images respectives A' et B' par R, $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} \equiv \theta\,[2\pi]$.

- Pour tous points A, B, C et D tels que A $\neq$ B et C $\neq$ D, d'images respectives A', B', C' et D' par R, $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]$

Les rotations conservent les mesures des angles orientés.

Activités 6 et 7 page 76.

D) ROTATION ET EGALITES VECTORIELLES

Activité 9 page 76.

$\overrightarrow{OE} = x\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{OE'} = x\overrightarrow{C'D'}$.

1) $OE' = |x|C'D' = |x|CD = OE$.
   $\left(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OE'}}\right) \equiv \left(\widehat{x\overrightarrow{CD},x\overrightarrow{C'D'}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C'D'}}\right)[2\pi] \equiv \theta[2\pi]$
   $\Rightarrow$ R(E) = E'.
2) $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OE} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OE'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{C'D'}$

Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.

R est la rotation de centre O et d'angle θ.

Pour tous points A, B, C et D d'images respectives A', B', C' et D' par la rotation R, et pour tout réel x,
$\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$, si et seulement si, $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{C'D'}$

Toute rotation conserve les égalités vectorielles.

Conséquences

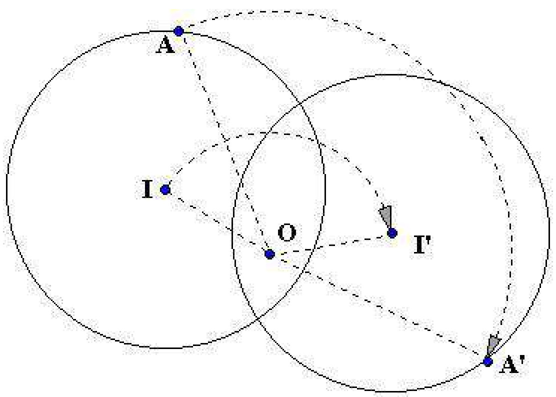
- Toute rotation conserve le barycentre de deux points.
- L'image d'une droite par une rotation est une droite.
- L'image d'un segment par une rotation est un segment qui lui est isométrique.
- Toute rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites.

E) ROTATION ET CERCLE

L'image d'un cercle par une rotation est un cercle qui lui est isométrique, et de centre l'image du centre

Si D est tangente à ζ en A alors son image D' est tangente à ζ ' en A'.

Toute rotation conserve le contact



F) PROPRIETE CARACTERISTIQUE D'UNE ROTATION

Activité 3 page 79.

A $\neq$ B et AB = CD.

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
   a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ donc La translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ transforme A en C et B en D.
   b. S'il existe une rotation qui A en C et B en D alors son angle est $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv 0\left[2\pi\right]$ c'est donc l'identité du plan.
2) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \theta\left[2\pi\right]$.
   a. Soit R la rotation d'angle θ telle que R(A) = C.
   Supposons que R(B) = B' donc $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB'}}\right) \equiv \theta\left[2\pi\right] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)\left[2\pi\right] \Rightarrow \overrightarrow{CB'}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens, de plus on a : CB' = AB = CD $\Rightarrow \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$ B' = D.
   b. Supposons qu'il existe une autre rotation qui transforme A en C et B en D alors son angle sera θ et son centre est le point d'intersection de méd[AC] et méd[BD] ; c'est elle-même la rotation R.

Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A, B, C et D quatre points tels que les points A et B sont distincts, AB = CD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$.

Il existe une unique rotation qui transforme A en C et B en D, d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)$ et de centre appartenant aux médiatrices des segments [AC] et [BD].

Activités 4 et 5 page 79.

3) ROTATION ET SYMETRIES ORTHOGONALES

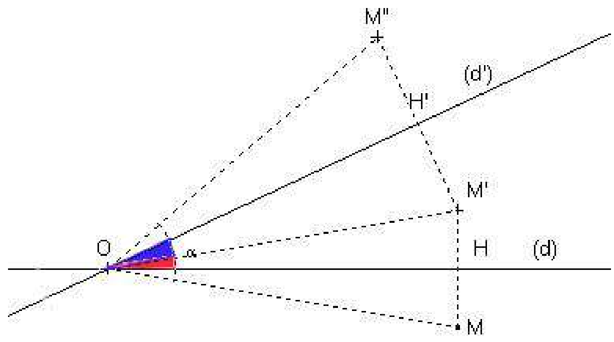
Activité 4 page 80.

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en un point O.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d') tels que : $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) \equiv \alpha\left[2\pi\right]$.

$$S_{(d')} \circ S_{(d)} = R_{(O,2\alpha)}$$

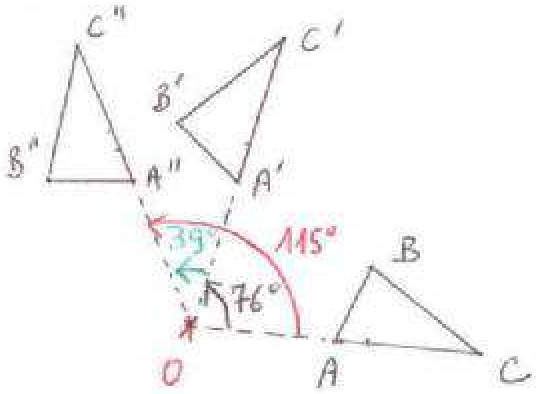


4) COMPOSEE DE DEUX ROTATIONS DE MEME CENTRE

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit O un point du plan, θ et θ' deux réels.

Si R et R' sont deux rotations de même centre O et d'angles respectifs θ et θ', alors R' $\circ$ R est la rotation de même centre O et d'angle $\theta + \theta'$.



La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des deux angles.

Si $\theta + \theta' \equiv 0[2\pi]$ alors R' $\circ$ R est l'identité du plan.

1) DEFINITION - REPRESENTATION GEOMETRIQUE

Définition :

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note ℂ un ensemble contenant ℝ tel que :

- Il existe dans ℂ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de ℂ s'écrit sous la forme $a + b\,i$, où a et b sont des réels.
- ℂ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de ℝ, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

Nombres complexes particuliers :

Soit un nombre complexe $z = a + b\,i$ avec $a \in$ ℝ et $b \in$ ℝ.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. (ℝ est contenu dans ℂ)
- si $a = 0$, on a $z = b\,i$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques :

- ℝ correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels :
  si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \le y$ ou $y \le x$ (Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)
- ℂ, ensemble des nombres $a + b\,i$ avec $a \in$ ℝ et $b \in$ ℝ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a + b\,i$ avec $a \in$ ℝ et $b \in$ ℝ correspond au point du plan de coordonnées $(a\,;\,b)$.
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans ℂ.
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif.

Propriété

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est unique.

Définition

Soit un nombre complexe z .
L'écriture $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
a est appelé **partie réelle** de z, et b **partie imaginaire** de z.
On *note* $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarques :

- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.

Propriété

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a , b , a' , b' sont des réels, on a

$$a + bi = a' + b'i \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Exemple : Soit $z = 2 + 3\,i$ et $z' = i - 5$. Calculer et écrire sous la forme algébrique :

$z + z' =$ $\qquad$ $z - z' =$

$2\,z - 3\,z' =$ $\qquad$ $z.z' =$ $\qquad$ $z^2 =$

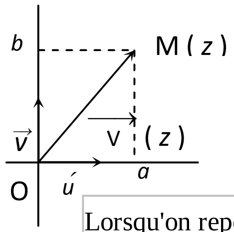
Définition

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Au point M de coordonnées $(a\,;\,b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de M ou que $M(a\,;\,b)$ est **l'image ponctuelle** de $z = a + bi$.

Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(a\,;\,b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de $\vec{V}$ ou que $\vec{V}\,(a\,;\,b)$ est **l'image vectorielle** de $z = a + bi$.

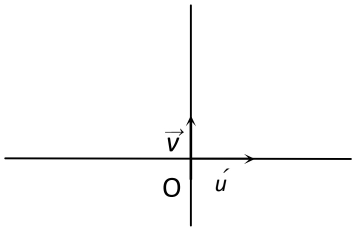


Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormé direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

Exemple : Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$z_1 = 2 + 2\,i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2\,i$; $z_4 = 2 - i$

$z_5 = i$ $\quad z_6 = -i$; $z_7 = 1$; $z_8 = -i - 3$



Propriétés

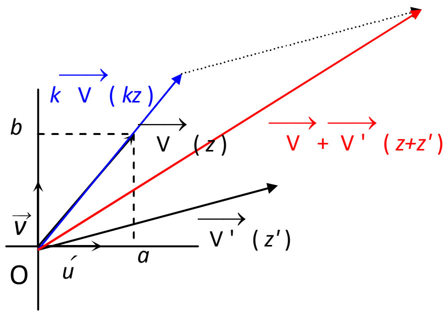
Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$
- le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$
- le barycentre G de $(M\,;\,\alpha)$ et $(M'\,;\,\beta)$ a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha\,z + \beta\,z'}{\alpha + \beta}$ $\quad (\alpha + \beta \neq 0)$

(Cette formule se généralise au barycentre de n points pondérés)

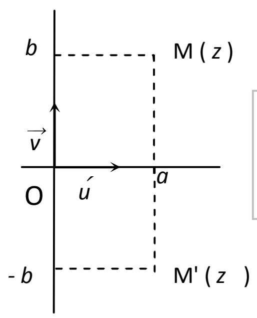
Propriétés

- Si $\vec{V}$ a pour affixe z et $\vec{V'}$ pour affixe z', alors $\vec{V} + \vec{V'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Si k est un réel, alors $k\,\vec{V}$ a pour affixe $k\,z$.



Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + bi$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = a - bi$.



Si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple : Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$. Calculer :

$\overline{z} =$ $\overline{z'} =$ $\overline{z} + \overline{z'} =$ $z + z' =$

$\overline{z + z'} =$ $\overline{z}.\overline{z'} =$ $zz' =$ $\overline{zz'} =$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z.\overline{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$; $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Remarque : La propriété $z.\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

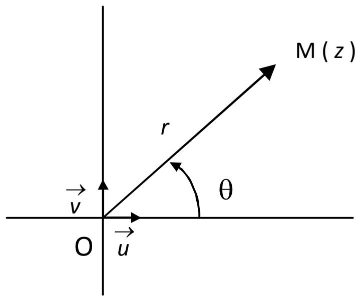
Exemple : $\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i-1}{4-i^2} = \frac{1+3i}{4+1} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

2) FORME TRIGONOMETRIQUE - MODULE - ARGUMENT

A) FORME TRIGONOMETRIQUE

Rappel :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soit M (a ; b) un point du plan (distinct de O) .



On a alors $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

$z = a + ib$

On appelle **coordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (r , θ) tel que :

$r = OM$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Remarque :
Soit M le point d'affixe x avec $x \in \mathbb{R}$, on a $r = OM = |x|$

Définition

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On dit que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de z.

Propriété

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, on a :

$$z = z' \Leftrightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \quad [2\pi] \end{cases}$$

B) MODULE

Définition

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z.
On appelle **module** de z le nombre réel positif $r = \mathrm{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$. On note $r = |z|$.

Remarque :
La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = \mathrm{OM} = |x|$.
Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x".
Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z".

Exemple : - Calculer le module de $z_1 = 3 + 4i$: - Donner la forme trigonométrique de $z_2 = \sqrt{3} + i$:

Propriétés

- Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixe z , on a $\|\overrightarrow{V}\| = |z|$
- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A *et* z_B , on a $\mathrm{AB} = |z_B - z_A|$.

Propriétés

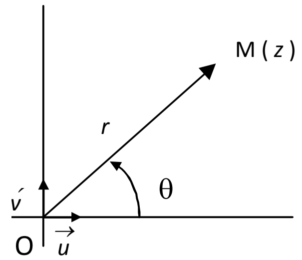
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|-z| = |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|zz'| = |z|.|z'|$
- si $z' \neq 0$ $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$
- si $z' \neq 0$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $z\bar{z} = |z|^2$ (on retrouve $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$)
- si $z \neq 0$ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

C) ARGUMENT

Définition

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z.

On appelle **argument** de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$ [2π] .
On note $\theta = \arg(z)$



Remarque :

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo 2π .

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' . On a :

- $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$ $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$ [2π]
- $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(\theta) + i\sin(-\theta)$ $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z$ [2π]
- $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = \cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')$ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ [2π]
- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\arg(z^n) = n\arg z$ [2π]

- $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ $\arg(\overline{z}) = -\arg z$ $[2\pi]$
- $-(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)$ $\arg(-z) = \arg z + \pi$ $[2\pi]$

Propriétés

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique. $\overline{z}$ et $-z$ ont pour formes trigonométriques :

$\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ et $-z = r(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi))$

Extension de la notion de vecteur à l'espace.

La notion de vecteur du plan s'étend naturellement à l'espace : ainsi,

- Leur définition
- Leur caractérisation par direction, sens et norme
- L'égalité de deux vecteurs
- L'addition de deux vecteurs (+ relation de Chasles)
- La multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Sont des notions qui restent inchangées, que l'on se place dans le plan ou dans l'espace.

Activités 1 et 2 page 160.

Définition : vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, c'est-à-dire quand il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Repère cartésien d'une droite

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est une droite, appelé droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Le couple $\left(A,\vec{u}\right)$ est appelé repère cartésien de la droite $\mathscr{D}\left(A,\vec{u}\right)$.

- M appartient à $\mathscr{D}\left(A,\vec{u}\right)$, si et seulement si, il existe un unique réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{u}$
- Soient A et B deux points de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors $\mathscr{D}\left(A,\vec{u}\right)$ est parallèle à $\mathscr{D}\left(B,\vec{v}\right)$, si et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Activité 3 page 162.

Définition : vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **coplanaires** lorsque, ayant choisi un point O quelconque, et défini les points A, B et C par $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, on trouve que les points O, A, B et C sont coplanaires (situés dans un même plan).

Théorème : caractérisation de la coplanarité

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Alors dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire qu'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou que la famille $\left\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\right\}$ est liée.

Activité 2 page 163.

Repère cartésien d'un plan

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un plan, appelé plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le triplet $\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ est appelé repère cartésien du plan $\mathscr{P}\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$.

- M appartient au plan $\mathscr{P}\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$, si et seulement si, il existe un unique couple de réels (x,y) tel que $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

Activité 6 page 164.

- Soient A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient non colinéaires. Alors la droite $\mathscr{D}\left(A,\vec{u}\right)$ est parallèle au plan $\mathscr{P}\left(B,\vec{v},\vec{w}\right)$, si et seulement si, la famille $\left\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\right\}$ est liée.
- Soient A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\vec{u}\,'$ et $\vec{v}\,'$ deux vecteurs non colinéaires. Alors
$\mathscr{P}\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ et $\mathscr{P}'\left(B,\vec{u}\,',\vec{v}\,'\right)$ sont parallèles, si et seulement si, $\left\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{u}\,'\right\}$ et $\left\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{v}\,'\right\}$ sont liées.

Exercices 4 et 5 page 172.

Définition :

Un repère de l'espace est la donnée d'un point O appelé **origine** du repère, et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ formant ce que l'on appelle une **base**.
Soient I, J et K les trois points de l'espace tels que $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$
$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est dit repère orthogonal de l'espace si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires deux à deux. Si de plus OI = OJ = OK = 1 le repère est dit orthonormé.

Théorème – définition :

Dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, à tout point M on peut associer un (et un seul) triplet de nombres (x,y,z) tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
On note M(x,y,z) où x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote du point M.
Le triplet (x,y,z) est appelé triplet de coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, notons M le point tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
M a pour coordonnées (x,y,z) dans ce repère, d'où $\vec{u}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

On dit que **le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées** (x,y,z) dans ce repère. On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

- Dire que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont égaux revient à dire que $x=x'$, $y=y'$ et $z=z'$

- $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs. Alors pour tout réel k, on a $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ et $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$
- Si $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$ sont deux points de l'espace, alors $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}$
- Si $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$ sont deux points de l'espace, alors le milieu I de [MM'] a pour coordonnées $I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$
- $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$, on appelle déterminant de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ le réel noté $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}a & a' & a''\\b & b' & b''\\c & c' & c''\end{vmatrix}$ défini par $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=a\begin{vmatrix}b' & b''\\c' & c''\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}a' & a''\\c' & c''\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}a' & a''\\b' & b''\end{vmatrix}$.

Activités 1 page 168.

Exercice :

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tel que : $\vec{u}=3\vec{i}-9\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{v}=3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{w}=2\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.

Les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont – ils coplanaires ?

Rappels sur le produit scalaire dans le plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini de l'une des façons suivantes :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$. Sinon $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé du plan alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$.

Extension à l'espace
Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs <u>non nuls</u> de l'espace.
Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\widehat{BAC}$
ATTENTION : dans l'espace, la notion d'angle orienté de vecteurs n'existe pas.

Propriétés 1

REGLES DE CALCUL : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k,

$\vec{u}\cdot\vec{u} = ...$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = ...$; $\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = ...$; $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = ...$

REMARQUES :

Lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que $\vec{u}$ est unitaire ; $\|\vec{u}\| = 0$, si et seulement si, $\vec{u} = \vec{0}$.

Activités 2 et 3 page 179.

Propriétés 2

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| ..... \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ....

$\|\vec{u}+\vec{v}\| .... \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

Orthogonalité et projection orthogonale sur une droite

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux si, et seulement si, ...

Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace. On appelle projection orthogonale sur $\mathscr{D}$ l'application qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M. On dit que M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$

Propriété

Soient A, B et C trois points tels que $A \neq B$.
Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

Activité 2 page 181.

Expression analytique

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = ………………………… ; $\left\|\vec{u}\right\|$ = ……………………………

Pour tous points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, $MM' =$ ……………………………………..

Activités 3 et 4 pages 184.

Applications du produit scalaire dans l'espace
Vecteur normal à un plan

DEFINITION : Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathscr{P}$ un plan.
On dit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ si la droite $\mathscr{D}\left(A, \vec{n}\right)$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

PROPRIETES :

- Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$, si et seulement si, $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.
- Deux vecteurs non nuls $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont normaux à un même plan, si et seulement si, ils sont ………………..
- Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont …………………
- Deux plans sont perpendiculaires, si et seulement si, leurs vecteurs normaux respectifs sont …………………...

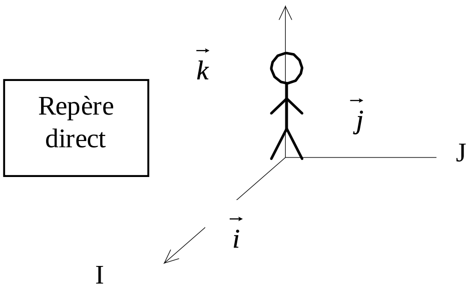
Activités 3 page 181 et 5 page 182.

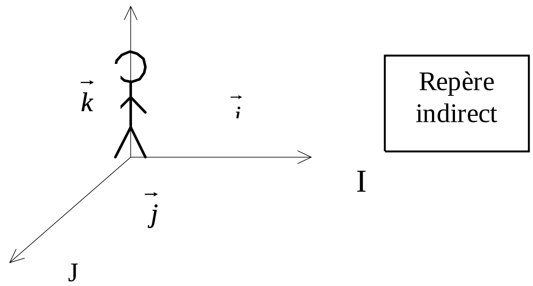
Exercice 11 page 193.

Produit vectoriel dans l’espace

Avant toutes choses, nous avons besoin dans ce paragraphe, d'orienter l'espace, c'est-à-dire distinguer les deux

types de repères suivants :





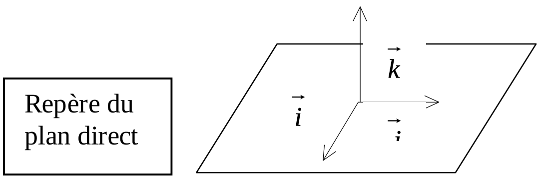
Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $(O,\vec{k})$, les pieds en O et regardant le point I.

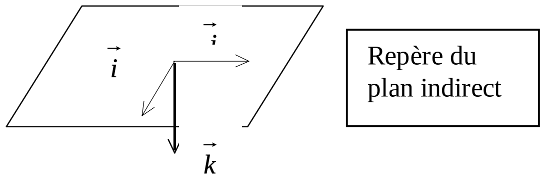
Un repère est dit "direct" si, l'observateur à le point J à sa gauche. Il est dit "indirect" dans le cas contraire.

L'espace étant orienté, il est alors possible d'orienter tout plan de l'espace :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère d'un plan P. Soit $\vec{k}$ un vecteur normal au plan P. On dira que le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est

direct dans P lorsque le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ l'est dans l'espace :





Les bases de l'espace ou des plans s'orientent de la même façon que les repères.

Remarque :

Permuter deux vecteurs change l’orientation d’une base.

Activité 1 page 185.

Définition

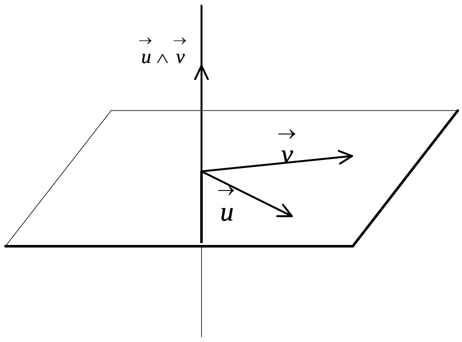
On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires (et donc non nuls) :

Rappel : le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe (sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$ (norme ou longueur de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)



Cas des vecteurs colinéaires : d'après la définition, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. De plus, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires (et donc non nuls) , alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ puisque $\|\vec{u}\| \neq 0$, $\|\vec{v}\| \neq 0$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0\ (\pi)$.

On peut donc énoncer la conséquence suivante :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Ce qui sera parfois un critère pour savoir si trois points sont alignés ou non.

Propriétés

Antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$.

Bilinéarité (linéarité par rapport aux deux variables) :

$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (linéarité par rapport à la première variable)

$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)

Théorème

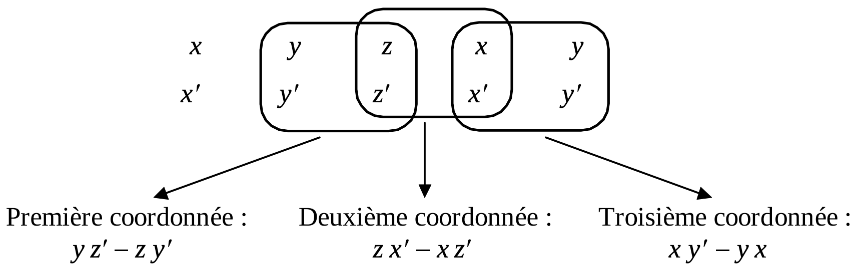
Dans un repère orthonormé direct de l'espace :

Si $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}\,(yz' - zy'\,;zx' - xz'\,;xy' - yx')$

Nous admettrons ce théorème.

Règle pratique pour calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

On écrit sur une ligne les coordonnées de $\vec{u}$ en répétant, à la suite la première et la seconde coordonnée. On procède de même avec $\vec{v}$ sur une seconde ligne. Les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont obtenues à l'aide des produits en croix suivants :



Activité 2 page 188.

Applications du produit vectoriel

Aire d'un triangle et d'un parallélogramme :

Lorsque ABC est un triangle, on a établit en deuxième que l'aire S de ABC est donné par : $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

Ce qui s'écrit : $S = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \times \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \times \left| \sin \widehat{BAC} \right| \Rightarrow \text{Aire } (ABC) = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$

De même en présence d'un parallélogramme ABCD, on a : Aire (ABCD) = $\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\|$.

Activité 3 page 188.

Volume d'un tétraèdre :

Activité 4 page 189.

Le volume d'un tétraèdre ABCD est V = $\frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \right) \cdot \overrightarrow{BA} \right|$

Distance d'un point à une droite :

Activité 5 page 189.

La distance d'un point A à la droite $D\left(B, \vec{u}\right)$ est d = $\frac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} \right\|}{\left\| \vec{u} \right\|}$

I. Arrangements :

Activité préparatoire :

Seize équipes de football participent à un championnat . Chaque équipe rencontre toutes les autres en deux matches : un « Aller » un « RETOUR » .

Combien de matches au total ?

- 1ère méthode : On peut présenter le problème en utilisant le schéma suivant , appelé arbre de choix :

E_1	E_2	(E_1, E_2)	(15 matches)
	E_3	(E_1, E_3)	
	⋮		
	E_{16}	(E_1, E_{16})	
E_2	E_1	(E_2, E_1)	(15 matches)
	E_3	(E_2, E_3)	
	⋮		
	E_{16}	(E_2, E_{16})	
⋮			
E_{16}	E_1	(E_{16}, E_1)	(15 matches)
	E_2	(E_{16}, E_2)	
	⋮		
	E_{15}	(E_{16}, E_{15})	

Le nombre de matches au total est : 16 x 15 = 240 .

- 2ème méthode : Chaque « journée de championnat » il y a 8 matches ; puisque chaque équipe joue 30 matches : 15 « Aller » et 15 « Retour » , il y a 30 « journées de championnat » ; donc 8 x 30 = 240 .

Commentaire :

Appelons A l'ensemble des seize équipes $A = \{ E_1 , E_2, \dots\dots\dots , E_{16} \}$.

Un match est un couple d'éléments de A deux à deux distincts (E_i , E_j) avec $i \neq j$.

Un couple d'éléments deux à deux distincts de A est **un arrangement de 2 éléments de A** .

Définition :

Soit A un ensemble de n éléments ($n \in IN^*$) .

Soit $p \in IN$; $1 \leq p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de A tout p – uplet d'éléments deux à deux distincts de A .

Un p – uplet d'éléments de A deux à deux distincts est $(x_1 , x_2 , x_3 , \dots\dots\dots , x_p)$ avec $x_i \neq x_j$

$1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq p$.

Remarque : Un arrangement de p éléments parmi n est un ordre sur p éléments choisis parmi n éléments .

Exercice 1 :

Déterminer le nombre de mots de quatre lettres différentes que l'on peut former avec les lettres du mot CONFLIT .

Le nombre de mots de quatre lettres différentes parmi les sept lettres du mot CONFLIT est égale au nombre d'arrangements de 4 lettres choisies parmi 7 .

C'est donc 7 x 6 x 5 x 4 = 1840 .

Notation :

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté A_n^p

Théorème :

$n \in IN^*$; $p \in IN$; $1 \le p \le n$.

$A_n^p = n \times (n-1)(n-2) \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times (n-p+1)$; c'est un produit de p facteurs naturels décroissants à partir de n .

Exemples :

$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$; $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

Exercice 2 :

On revient à l'énoncé de l'exercice 2 , combien de mots de quatre lettres différentes contiennent seulement des consonnes ?

Le mot CONFLIT contient ………. consonnes sont : ………………………

………
………
………………………………………………...

Conclusion :

Choisir p éléments dans un ensemble de n éléments **ET** leur imposer un **ordre** , c'est fabriquer un **arrangement** de p éléments pris parmi n .

- **L'ordre intervient et il n'y a pas de répétition d'éléments .**

Exercices d'applications :

1- On donne n points distincts . Calculer le nombre de bipoints non nuls que l'on peut former avec ces n points .

2- Quinze chevaux participent de bout en bout à une course . Dénombrer le nombre de tiercés dans l'ordre (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo) .

3- Une société comprend 50 personnes . Combien peut – on former de bureaux comprenant un président , un secrétaire , un trésorier ?

4- Combien y a- t- il de nombres de trois chiffres écrits avec trois chiffres différents choisis parmi les cinq chiffres : 2 , 3 , 7 , 5 , 8 .

5- On place dans une boîte , 26 papiers portant chacun le nom d'un élève de la classe . (On suppose qu'il n'y a pas des élèves ayant même nom)
On tire deux papiers **successivement et sans remise** dans la boîte .
   a- Déterminer le nombre des tirages possibles .
   b- Dénombrer les tirages pour lesquels le nom du 1ér papier est , dans l'ordre alphabétique , avant le nom du $2^{ème}$ papier .

II. Permutations :

Exercice 1 :

1. Combien de classements peut – on former avec les 26 élèves de la classe ? (On suppose qu'il n'y a pas d'ex – aequo) .
2. Combien peut – on former de mots avec toutes les lettres du mot ROI , chaque lettre sera utilisée une seule fois ? (les mots peuvent avoir un sens ou non) .

Réponses :

1. Un classement est un arrangement de 26 éléments pris parmi les 26 élèves , donc le nombre de classements qu'on peut former est $A_{26}^{26} = 26 \times 25 \times 24 \times \ldots . \times 2 \times 1$
   Ce nombre est appelé nombre de **permutations** de 26 éléments .

2. ……
   ……………………………………………………………………………

Définition :

A étant un ensemble de n éléments ($n \in IN^*$) , on appelle **permutation** de n éléments de A , tout arrangement de n éléments de A .

Le nombre de permutations de n éléments est alors $A_n^n = n \times (n-1) \times ...... \times 2 \times 1$, ce nombre est noté $n!$ et se lit **factorielle n**

Exemples :

1! = 1 ; 2! = 2x1 = 2 ; 3! = 3x2x1 = 6 ; 4! = 4x3x2x1 = 24 ; 5! = 5x4x3x2x1 = 120 .

Par convention : On pose 0! = 1 .

Exercice 2 :

1. Calculer : 7! ; 4! x 6! ; $\frac{5!}{2!}$; $\frac{8! \text{x} 21!}{8 \text{x} 20!}$
2. Montrer que pour $n \geq 2$ on a : $n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)!$
3. Simplifier les expressions : $\frac{n!}{(n-1)!}$; $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$
4. Montrer que $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ avec $(n, p) \in IN^2$ et $1 \leq p \leq n$

III. Combinaisons :

Exercice 1 :

Combien l'ensemble A = { a , b , c , d } a – t – il de parties à 2 éléments ? à 3 éléments ? à 1 élément ?

Solution :

- Les parties à 2 éléments que l'on peut former à partir de l'ensemble { a , b , c , d } sont :
  { a , b } ; { a , c } ; { a, d } ; { b , c } ; { b , d } ; { c , d }
  Leur nombre est 6 .
  Chacune des paires précédentes est dite une **combinaison de deux éléments de A .**
  Leur nombre se note : C_4^2 on a alors : $C_4^2 = 6$
- Les parties à 3 éléments que l'on peut former à partir de l'ensemble A sont :
  { a , b , c } ; { a , b , d } ; { a , c , d } ; { b , c , d }
  Chacun des sous ensembles précédents est une **combinaison de trois éléments de A .**
  Leur nombre est égal à : $C_4^3 = 4$.
- Il en est de même pour les parties à 1 élément de A . C'est à dire $C_4^1 = 4$.
- Vérifier que : $C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!}$; $C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!}$; $C_4^1 = \frac{A_4^1}{1!}$

Définition :

Une partie à p éléments d'un ensemble de n éléments (p ≤ n) est appelée **combinaison** de p éléments pris parmi n .

Remarque :

L'ordre n'intervient pas et il n'y a pas de répétition d'éléments .

Théorème : Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments (p ≤ n) est notée C_n^p et il est égal à $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$

Exercice 2 :

Quinze chevaux participent de bout en bout à une course . Dénombrer le nombre de tiercés dans le désordre . (On suppose qu'il n'y a pas d'ex – aequo.) Comparer au résultat de l'exercice 2 page 2 .

Exercice3 :

1. Une assemblée de 16 personnes veut désigner une délégation de 3 personnes parmi ses membres. Dénombrer les délégations possibles .

2. On veut élire un comité de 4 personnes choisies parmi 12.

a- De combien de manières peut – on former ce comité ?

b- De combien de manières si Monsieur X refuse de siéger avec Monsieur Y ?

Exercice 4 :

Une boîte contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher , on tire **simultanément** 3 boules de cette boîte.

1. Quel est le nombre de tous les tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?
3. Quel est le nombre de tirages d'une boule blanche et 2 boules rouges ?
4. Quel est le nombre de tirages comportant au moins une boule blanche ?
5. Quel est le nombre de tirages comportant au plus une boule blanche ?

Propriétés :

1. Pour tout $n \in IN^*$ on a : $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

2. Pour tout $n \in IN^*$ et $p \in IN$; $p \le n$ on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$

3. Pour tout $n \in IN^*$; $p \in IN^*$ tel que $p \le n-1$ on a : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Exercice 5 :

1. Résoudre dans IN^*, $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$.

2. Calculer le plus simplement possible $C_5^5 \times C_5^0 + C_5^1 \times C_5^4 + C_5^2 \times C_5^3$.

3. Calculer la valeur du quotient $\dfrac{C_n^1 \times C_{2n}^2}{C_{3n}^3}$; Trouver la limite de ce quotient si n tend vers l'infini.

IV. Formule du binôme de Newton :

Exercice 1 : Soient a et b deux réels.

Développer $(a+b)^2$; $(a+b)^3$; $(a+b)^4$.

1. Vérifier que

$$(a+b)^2 = C_2^0 \times a^2 \times b^0 + C_2^1 \times a^1 \times b^1 + C_2^2 \times a^0 \times b^2$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3$$
$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4$$

Formule du binôme :

$n \in IN^*$; $(a , b) \in IR^2$.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots\dots + C_n^p a^{n-p} b^p + \dots\dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$
$$= \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Démonstration : (par récurrence).

Conséquence : $(a-b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p (-1)^p a^{n-p} b^p$

Exemples : Développer $(a+b)^5$ et $(a+b)^6$ puis $(a-b)^5$ et $(a-b)^6$

Remarque : Pour obtenir facilement des C_n^p , pour n petit, **le triangle de Pascal.**

n = 0	C_0^0	1
n = 1	$C_1^0\ C_1^1$	1 1
n = 2	$C_2^0\ C_2^1\ C_2^2$	1 2 1
n = 3	$C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3$	1 3 3 1
n = 4	$C_4^0\ C_4^1\ C_4^2\ C_4^3\ C_4^4$	1 4 6 4 1
n = 5	....	1 5 10 10 5 1
n = 6	....	1 6 15 20 15 6 1

Ce triangle est un résultat de la **formule de Pascal :** $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$.

Exercice 2 :

1. Développer $(x+1)^6$; $(x-1)^6$; $(2x+3)^5$ et $(2x-3)^5$
2. Démontrer que : $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$
3. Calculer les sommes :
   $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^p + ... + C_n^n$
   $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^p C_n^p + ... + C_n^n$
   $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + 2^p C_n^p + ... + 2^n C_n^n$

V. Nombre de parties d'un ensemble fini :

Soit A un ensemble fini de n éléments ; n $\in$ IN*
Une partie de p éléments de A est une ………………… de p éléments choisis parmi les n éléments de A.
Le nombre de parties de p éléments de A est ……….
Le nombre de toutes les parties de A est : ……………………………………………

Théorème :
A étant un ensemble contenant n éléments ; n $\in$ IN
Le nombre de parties de A est 2^n
L'ensemble des parties de A est noté P(A).

Exemple :
Soit A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Le nombre de parties de A est …………….

VI. Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini :

Exercice 1 :
Soit A = {1, 2, 3} ; B = {a ,b}
Trouver toutes les applications de A vers B.
Solution :
Pour chacun des 3 éléments de A , il y a 2 choix possibles.
Le nombre de toutes les applications de A vers B est $2^3 = 8$.

Théorème :
A et B étant deux ensembles finis de nombres d'éléments respectifs p et n $\in$ IN*
Le nombre d'applications de A vers B est n^p .
Exercice 2 :

1. Combien de numéros de téléphone à 6 chiffres peut – on former avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2. D'un jeu de 52 cartes, on tire successivement 3 cartes. De combien de façons peut – on faire ce tirage :
   - Si l'on remet la carte dans le jeu après avoir lu ce qui était écrit.
   - Si l'on ne remet pas la carte dans le jeu ?

Résumé : On distingue trois types de tirages :

Types de tirages	**Successif avec Remise**	**Successif sans remise**	**Simultané**
Un résultat	Un p – uplet avec possibilité de répétition	Un p – uplet d'éléments distincts 2 à 2	Une partie de p éléments
Ordre	L'ordre intervient	L'ordre intervient	L'ordre n'intervient pas
Nombre de tirages de p éléments parmi n	n^p	A_n^p	C_n^p

Introduction

On considère un dé cubique parfait (équilibré) dont les faces sont numérotés de 1 à 6.
On jette une fois ce dé et on observe le numéro de la face supérieure.
L'ensemble des résultats possibles (**éventualités**) est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. **« Ω est l'univers »**
Le nombre de résultats possibles est 6. « Le cardinal de Ω est 6 ; On note card Ω = 6 ».
Soit A = {1,3,5} : « Obtenir un numéro impair »
$A \subset \Omega$; **« A est un événement ».**
On note $\overline{A}$: « Obtenir un numéro pair » ; « $\overline{A}$ **est l'événement contraire de A ».**
$\overline{A}$ = {2,4,6} = Ω \ A.
Soit l'événement C : « Obtenir un numéro supérieur à 6 ».
C = ∅ **« C est un événement impossible ».**
D : « Obtenir un numéro n tel que $1 \le n \le 6$ » ; D = {1,2,3,4,5,6} = Ω.
« D = Ω est l'événement certain ».
{1} ; {2} ; {3} ; {4} ; {5} et {6} sont les **« événement élémentaires ».**
$A \cap \overline{A} = (A \text{ et } \overline{A})$: « Obtenir un numéro qui est à la fois pair et impair ».
$A \cap \overline{A} = \varnothing$; On dit que « A et $\overline{A}$ **sont des événements incompatibles ».**
Chacun des 6 numéros a une chance sur 6 d'être obtenu, donc **la probabilité d'obtenir chacun de ces numéros est $\frac{1}{6}$.**

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{card\Omega}$$

Tous les événements élémentaires sont équiprobables ; C'est le cas **d'une probabilité uniforme.**

$$\boxed{p(\{x\}) = \frac{1}{card\Omega} \text{ pour tout } x \in \Omega}$$

On a trois chances sur six d'obtenir un numéro impair

$$p(A) = \frac{3}{6} \; ; \; p(\overline{A}) = \frac{3}{6} \Leftrightarrow p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

Ainsi on a :

- $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$
- $p(A) + p(\overline{A}) = 1$
- $p(\Omega) = 1$
- p (∅) = 0

Définition :

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ un univers. On associe à chaque événement élémentaire $\{a_i\}$ un nombre $p_i \ge 0$, appelé **« probabilité de l'événement** $\{a_i\}$ », de telle sorte que :
$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.
Plus généralement, la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A.
On a $p(\Omega) = 1$ et p (∅) = 0.

Langage :

Vocabulaire ensembliste	Langage probabiliste
• Ensemble Ω	**Univers,** ou encore univers des « possibles » ou des « éventualités »
• $A \subset \Omega$	A est un **événement**
• $x \in A$	x est une **éventualité favorable** à A
• $A \subset \Omega$ $\quad \overline{A} \subset \Omega$	A et $\overline{A}$ sont des **événements contraires**
• $A \cap C = \varnothing$	A et C sont des événements **incompatibles**
• Singleton $\{x\}$	$\{x\}$ est un événement **élémentaire**
• $D = A \cap C$	D est l'événement « A et C »
• $F = A \cup C$	F est l'événement « A ou C »
• $\varnothing$	$p(\varnothing) = 0$ événement **impossible**
• Ω	$p(\Omega) = 1$ événement **certain**

Propriétés des probabilités

Parties de Ω	événement	propriétés
$\varnothing, \Omega$	Evénement **impossible, certain**	$p(\varnothing) = 0,\ p(\Omega) = 1$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont **incompatibles**	$P(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
A, B	A et B quelconques	$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

On notera que, pour tout événement A, $0 \leq p(A) \leq 1$.

Exercice

On jette un dé sur une table et on lit le numéro de la face supérieure. Sachant que les faces 1, 3 et 4 ont la même probabilité d'apparaître égale à 0.2, la probabilité de la face 2 est de 0.15 et la probabilité d'apparition de la face 6 est de 0.1. Calculer :

1. La probabilité d'apparition de la face 5.
2. La probabilité d'avoir un numéro pair.
3. La probabilité d'obtenir un numéro $\geq$ 3.
4. La probabilité d'obtenir un numéro appartenant à l'intervalle $[2, 5[$.

Situations d'équiprobabilités :

Définition

Il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Théorème

Lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$

Exercice1

Un sac contient trois boules rouges et quatre boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément et au hasard deux boules de ce sac.

1. Quel est l'univers Ω des cas possibles ? Donner cardΩ.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « obtenir deux boules de même couleur ».
   B : « obtenir deux boules de couleurs différentes ».
   C : « obtenir au moins une boule rouge ».
   D : « obtenir au plus une boule blanche ».

Exercice2

Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. On tire successivement et avec remise 3 jetons du sac. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « tirer 3 jetons ayant des numéros pairs »

B : « tirer 3 jetons dont la somme des numéros est paire »

Exercice3

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher. On extrait successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Déterminer la probabilité de

A : « obtenir 3 boules de même couleur »

B : « obtenir 2 boules rouges et 1 boule blanche »

I. Introduction :

La statistique est une science ayant pour objet l'étude des phénomènes sociaux surtout ceux donnant lieux à des variations ou ceux ne pouvant être suffisamment maîtrisés que lorsqu'on les étudie dans des ensembles ayant un nombre d'éléments relativement élevé.
On distingue deux branches :

** **La statistique descriptive :** a pour rôle de réunir les observations sur le phénomène à étudier et les grouper dans des tableaux statistiques ou les représenter sur des graphiques.
** **La statistique inductive :** a pour rôle de traiter les informations obtenues en s'appuyant sur des calculs de probabilité, en donnant à ces informations une signification et en faisant des prévisions pour le futur.

II. Vocabulaire statistique :

- **Population :** C'est l'ensemble étudié.
(« population » est employé, ici dans un sens très particulier, elle n'est pas nécessairement humaine.). les éléments de l'ensemble sont appelés : *unités statistiques* ou *individus.*

- **Echantillon :** C'est un sous ensemble quelconque de la population. Si l'échantillon est prélevé au hasard, c'est un échantillon *aléatoire.*

- **Caractère (ou variable) :** C'est l'aspect de l'unité statistique auquel on s'intéresse. Il peut être *qualitatif :* couleur d'une voiture , etc. ou *quantitatif* : il se traduit alors par un nombre.

- **Valeur statistique** ou **valeur du caractère :** La valeur du caractère est sa mesure lorsqu'on a choisi une unité. On obtient des valeurs de la *variable statistique.*

Exemple :

Population : un ensemble de notes attribuées à 25 élèves dans une classe A.

Tableau de données :

14 15 4 7 11 14 9 10 12
12 16 10 18 13 12 3 11
14 12 10 13 6 12 10 7

Ici le caractère étudié est *quantitatif* (valeur de la note).
On pourrait s'intéresser à la *qualité* : « être pair » ; « être inférieur à 12 »…

- **Variable discrète (ou discontinue) :** Elle ne prend que des valeurs isolées : $x_1, x_2, ..., x_n$.

Ici variable discrète qui prend treize valeurs.
$x_1 = 3; x_2 = 4; x_3 = 6; ....; x_{13} = 18.$

- **Variable continue :** Elle peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle [a,b]. Dans ce cas, on peut partager cet intervalle en k intervalles
(partition de [a,b]) :
$a < a_1 < a_2 < .... < a_{k-1} < b$
$[a, a_1[; [a_1, a_2[; .... [a_{k-1}, b[$
Chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}[$ est appelé classe ; a_i et a_{i+1} sont les frontières de la classe, $\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$ est le centre de la classe.

- **Effectif :** L'effectif de x_i est le nombre n_i d'observations associées à la valeur x_i de la variable statistique, ou l'effectif de la classe $[a_i ; a_{i+1}[$.

- **L'effectif total :**
$N = n_1 + n_2 + ... + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

- **Série statistique :** C'est l'ensemble des couples $(x_i ; n_i)$ ou $([a_i ; a_{i+1}[; n_i)$. On donne souvent cette série sous la forme d'un *tableau statistique.* Ne pas le confondre avec le *tableau de données* (succession de résultats).

Tableau statistique :

x_i	n_i
3	
4	
6	
7	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
18	
Total	25

III. Paramètres de position :

- **La dominante** ou **mode :** C'est la valeur du caractère la plus fréquente. Dans une répartition par classes, on parle de classe modale.
- **La moyenne arithmétique**: C'est le quotient de la somme des mesures par l'effectif total.

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{\sum n_i}$$

$$\bar{x} = \sum f_i x_i$$

Dans une répartition par classes, on prend pour x_i le centre de la classe.

- **Médiane :** C'est la valeur Me du caractère telle que l'effectif des individus dont la valeur du caractère est inférieur à Me soit égal à l'effectif des individus dont la valeur du caractère est supérieur à Me.

C'est le réel $x_{\left[\frac{N}{2}\right]+1}$ où $\left[\frac{N}{2}\right]$ est la partie entière de $\frac{N}{2}$

- **Premier quartile :** c'est la valeur Q_1 du caractère telle que au moins 25 % des valeurs lui sont inférieures et au moins 75 % des valeurs lui sont supérieures.

C'est le réel $x_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}$ où $\left[\frac{N}{4}\right]$ est la partie entière de $\frac{N}{4}$

- **Troisième quartile :** c'est la valeur Q_3 du caractère telle que au moins 75 % des valeurs lui sont inférieures et au moins 25 % des valeurs lui sont supérieures.

C'est le réel $x_{\left[\frac{3N}{4}\right]+1}$ où $\left[\frac{3N}{4}\right]$ est la partie entière de $\frac{3N}{4}$

Exemple (des notes attribuées aux 25 élèves)

La dominante est …… ; elle est unique. C'est une série *uni modale.*

Calcul de la moyenne arithmétique :

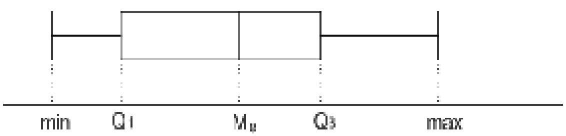
$\bar{x} =$

La médiane est ……….

Le premier quartile est …………………

Le troisième quartile est …………………

Remarque : On peut représenter une série par son diagramme en boîte qui fait intervenir ses valeurs extrêmes (min et max.), ses quartiles **Q_1** et **Q_3** et sa médiane **M_e** :



IV. Paramètres de dispersion :

- **L'étendue** : Différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs observées.

L'étendue est ………..

- **L'écart moyen** : $e = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=p} n_i \left| x_i - \bar{x} \right|}{\sum_{i=1}^{i=p} n_i}$

- **La variance** : $v = \dfrac{\sum n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum n_i}$

V =………

Formule de *Koenig* : $v = \dfrac{\sum n_i {x_i}^2}{\sum n_i} - \bar{x}^2$

- **L'écart- type** : $\sigma = \sqrt{v}$

$\sigma = \sqrt{V} \approx$ ....

C'est une mesure de dispersion qu'on utilise pour mesurer la dispersion des valeurs d'une série statistique autour de la moyenne de cette série
Un écart type important signifie que les valeurs de la série s'éloignent souvent et de façon importante de la moyenne.

$Q_3 - Q_1 =$ ....

- **L'écart interquartile :** c'est la différence $Q_3 - Q_1$ qui représente l'étendue de la distribution sur la quelle se trouve concentrée la moitié des éléments dont les valeurs de X sont les moins différentes de la médiane. On exclut alors les 25 % des valeurs les plus faibles et les 25 % des valeurs les plus élevées.

V. Série statistique à deux variables

1. Introduction

Une série statistique à deux variables, X et Y, est le résultat de l'observation des deux caractères X et Y pour chaque individu d'une population.

Lorsque les caractères sont quantitatifs discrets, on peut associer, à chaque individu i, un couple de nombres réels noté (x_i, y_i).

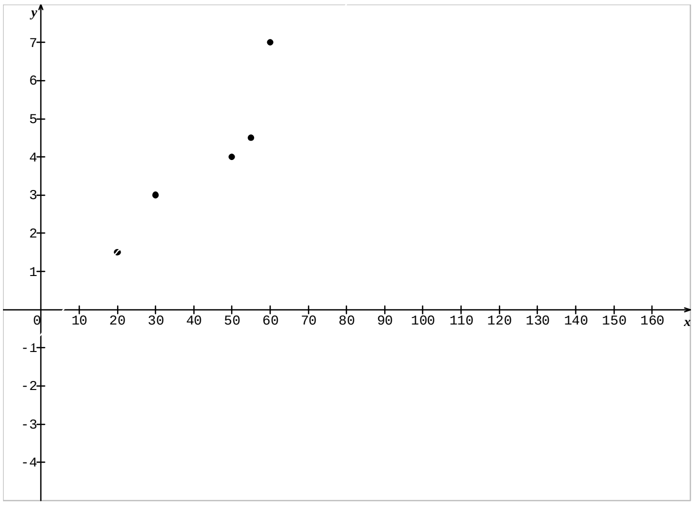
Exemple :

Le tableau suivant donne, en millions de dinars, le chiffre d'affaires x_i et la somme consacrée aux dépenses de publicité y_i pour cinq entreprises :

Entreprises	x_i	y_i
A	30	3
B	55	4,5
C	60	7
E	20	1,5
F	50	4

Définition

Dans un repère orthogonal du plan, le nuage de points associés à la série statistique à deux variables, X et Y, est l'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) représentatifs de tous les individus i de la population.



2. Point moyen

On note X le caractère : « le chiffre d'affaires de chaque entreprise » et Y : « les dépenses de publicité ».

Calculer la moyenne, la variance et l'écart – type de chaque caractère.

On rappelle que :

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_i n_i x_i$$

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \overline{x}^2 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

$\overline{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $V(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\sigma(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overline{y} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $V(Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\sigma(Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition

Le point $G\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ est appelé point moyen du nuage de points associé à la série statistique à deux variables X et Y.

Exemple : Placer le point moyen G dans le repère précédent.

3. Liaison entre deux caractères

Droite d'ajustement

Lorsque le nuage a tendance de s'accumuler autour d'une droite, alors on cherche une équation de la droite D qui approche le « mieux possible » les points du nuage, c'est ce qu'on appelle un ajustement linéaire.

On divise le nuage de points en deux parties contenant à peu prés le même nombre de points obtenant ainsi deux nuages de points. On désigne par G_1 et G_2 les points moyens de ces deux nuages.

La droite (G_1G_2) passe par le point G et définit un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique (X, Y).

Tracer dans le repère précédent la droite (G_1G_2).

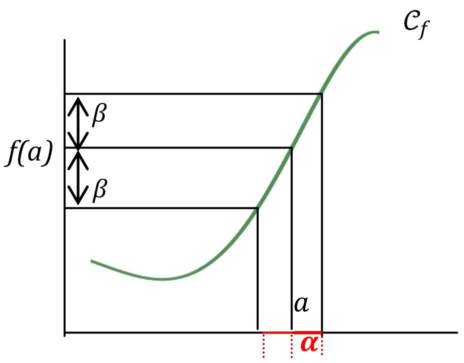
Exercices 1 p 212, 9 p 214 et 15 p 217.

Institut : *El Ahd El Jadid kabaria*	*Chapitre : Continuité*	*Prof : Ayadi Mondher* *3 ème sciences exp+3 ème Maths*

I. *Continuité en un réel :*

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.



on dit que f est continue en a si :

pour tout nombre $\boldsymbol{\beta > 0}$ ***il existe*** $\boldsymbol{\alpha > 0}$ *tel que* ***si*** $\boldsymbol{x \in I}$ ***et*** $\boldsymbol{|x-a| < \alpha}$ ***alors*** $\boldsymbol{|f(x)-f(a)| < \beta}$

Exemple :

Soit la fonction f *une fonction définie sur IR par* $f(x) = 2x+3$, *montrer que f est continue en* $a = 1$

Solution :

La fonction f est continue en 1 si et seulement

si pour tout $\beta > 0$ *il existe* $\alpha > 0$ *tel que si* $x \in I$ *et* $|x-1| < \alpha$ *alors* $|f(x)-f(1)| < \beta$

β *est un réel donné, cherchons s'il existe un réel* α *tel que* $|f(x)-f(1)| < \beta$

Soit $|f(x)-f(1)| < \beta$ *équivaut à* $|2x+3-5| < \beta$ *équivaut à* $|2x-2| < \beta$ *équivaut à* $2|x-1| < \beta$

équivaut à $|x-1| < \frac{\beta}{2}$

On choisit alors $\alpha = \frac{\beta}{2}$ (α *existe*) *ainsi f est continue pour a=1*

Vocabulaire : *Une fonction est non continue en a est dite discontinue en a.*

Conséquences : *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I*

- *Si on trace la courbe représentative de f sans lever le crayon en un point d'abscisse a, alors f est continue en tout réel a de I.*
- *Si la courbe possede un saut en un point d'abscisse a alors on dit que f est discontinue en a.*

II. *Continuité de certaines fonctions usuelles :*

Théoreme :

- *La fonction* $x \longrightarrow ax+b$ *est continue en tout réel a de IR.*
- *La fonction* $x \longrightarrow x^2$ *est continue en tout réel a de IR.*
- *La fonction* $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ *est continue en tout réel a de IR*.*
- *La fonction* $x \longrightarrow \sqrt{x}$ *est continue en tout réel a de* IR_+.
- *Tout fonction polynôme est continue en tout réel a de IR.*
- *Toute fonction rationnelle est continue en tout réel a où elle est définie.*

Exercice :

Justifier la continuité de f en a dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = -3x^3 + x^2 - 4x + 5$; $a = 1$

....

....

2) $f : x \longrightarrow \frac{3x+5}{-2x+4}$; $a = \sqrt{2}$

....

....

III. Continuité de la fonction $|f|$:

Activité :

1) Montrer que pour tout réel c et d, on a : $\big||c|-|d|\big| \le |c-d|$.
2) Soit f la fonction définie en a , alors $|f|$ est continue en a.

Solution :

1)

$1^{ère}$ méthode :

On remarque que pour tout réels c et d on a :

$c.d \le |c|.|d|$ équivaut à $2c.d \le 2|c|.|d|$ équivaut à $-2|c|.|d| \le -2c.d$

équivaut à $c^2-2|c|.|d|+d^2 \le c^2-2c.d+d^2$ équivaut à $|c|^2-2|c|.|d|+|d|^2 \le c^2-2c.d+d^2$

équivaut à $(|c|-|d|)^2 \le (c-d)^2$ équivaut à $\sqrt{(|c|-|d|)^2} \le \sqrt{(c-d)^2}$

équivaut à $\big||c|-|d|\big| \le |c-d|$

$2^{ème}$ méthode :

Pour tout réels c et d on a $|c| = |c-d+d| \le |c-d|+|d|$ équivaut à $|c|-|d| \le |c-d|$ -(1)-

de même $|d| = |d-c+c| \le |d-c|+|c|$ équivaut à $|d|-|c| \le |d-c| = |c-d|$

équivaut à $-(|d|-|c|) \ge -|c-d|$ équivaut à $|c|-|d| \ge -|c-d|$

équivaut à $-|c-d| \le |c|-|d|$ -(2)-

d'après (1) et -(2)- on a $-|c-d| \le |c|-|d| \le |c-d|$ équivaut à $\big||c|-|d|\big| \le |c-d|$

2) f est continue en a équivaut à

pour tout $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x-a| < \alpha$ alors $|f(x)-f(a)| < \beta$

d'après 1) on a $\big||f(x)|-|f(a)|\big| \le |f(x)-f(a)| < \beta$

alors $\big||f(x)|-|f(a)|\big| < \beta$

donc pour tout $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x-a| < \alpha$ alors $\big||f(x)|-|f(a)|\big| < \beta$

alors $|f|$ est continue en a

Théoreme :

> f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$,
> Si f est continue en a alors $|f|$ est continue en a

Exercice :

Justifier la continuité de la fonction f en a

1. $f : x \longrightarrow |x^2-4|$; $a = -2$

………

………

………

2. $f : x \longrightarrow \frac{x^2+1}{|x^2-4|}$; $a = 3$

………

………

………

………

IV. Opérations algébriques sur les fonctions continues :

Théorème :

> Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $a \in I$ et $k \in IR$
> - Si f et g sont continues en a alors $f+g$, $f.g$ et $k.f$ sont continues en a
> - Si f est continue en a et si $f(a) \ne 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en a
> - Si f et g sont continues en a et $g(a) \ne 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a

Exercice :

Justifier la continuité de la fonction f en a

1. $f : x \longrightarrow x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}$; $a = 3$

………
………
………
………

2. $f : x \longrightarrow \frac{|x|}{x^2+1}$; $a = -2$

………
………
………
………

V. *Continuité de la fonction $\sqrt{f}$:*

Activité 2 page 26 :

f est une fonction positive sur un intervalle ouvert I .
soit a un réel de I tel que f soit continue en a .

1) *On suppose que* $f(a) > 0$
   a) *Pour tout* $x \in I$ *on a :*
   ………
   ………
   b) *On a :*
   ………
   ………
   ………
   c) *f est continue en a si et seulement si*
   pour tout $\beta > 0$ *il existe* $\alpha > 0$ *tel que si* $x \in I$ *et* $|x - a| < \alpha$ *alors* $|f(x) - f(a)| < \beta$
   ………
   ………
   ………
   ………
   ………
2) *On suppose que* $f(a) = 0$
   f est continue en a si et seulement si
   ………
   ………
   ………
   ………

Théoreme :

> *Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.*
> *Si f est continue en a alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.*

Exercice :

Etudier la continuité de f en a :

1. $f : x \longrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$; $a = 3$

………
………
………

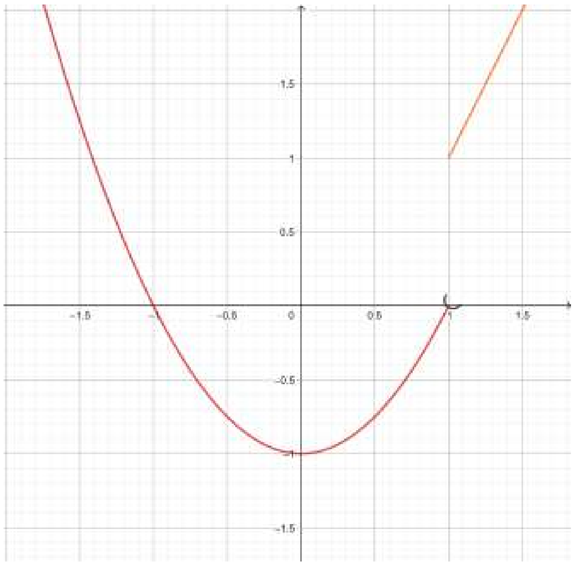
2. $f : x \longrightarrow \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x+1}}$; $a = 2$

………
………
………

VI. Continuité à droite. Continuité à gauche :

Activité :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x < 1 \\ 2x - 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$



1) Déterminer graphiquement l'image de 1 par f

…………………………………………………………………………

2) Donner graphiquement une condition suffisante sur les réels x supérieurs à 1, pour que $|f(x) - f(1)| \leq 0.001$

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

3) Que peut_on conjecture sur $|f(x) - f(1)|$ lorsque x se rapproche de 1 en restant inferieur à 1

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

4) Calculer $f(0.9)$, $f(1.1)$, $f(1)$

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Remarque :

Soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe de f. **On constate que :**
Si a se rapproche de 1 et $a < 1$ alors $f(a)$ n'est pas proche de $f(1)$ alors n'est pas ……………………………….
Si a se rapproche de 1 et $a > 1$ alors $f(a)$ est proche de $f(1)$ alors f est ……………………………………………

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I

- On dit que f est continue à droite en a si :
pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $0 < x - a < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$
- On dit que f est continue à gauche en a si :
pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $0 < a - x < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \beta$

Théoreme :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
f est continue en a, si f est continue à droite et à gauche en a

Exemple :

Soit la fonction $f : x \longrightarrow \sqrt{x+1}$. Etudier la continuité à droite de f en -1

Correction :

La fonction f est continue à droite en -1 si et seulement si
pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $0 < x - (-1) < \alpha$ alors $|f(x) - f(-1)| < \beta$
β est un réel donné, cherchons s'il existe un réel α tel que $|f(x) - f(-1)| < \beta$
Equivaut à $\left|\sqrt{x+1} - 0\right| < \beta$ équivaut à $\left|\sqrt{x+1}\right| < \beta$
équivaut à $\sqrt{x+1} < \beta$ équivaut à $x + 1 < \beta^2$ équivaut à $x < \beta^2 - 1$
on choisit $\alpha = \beta^2 - 1$ (α existe) ainsi f est continue à droite en -1

Théorème :

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
- Si f est continue à droite en a alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue à droite en a .
- Si f est continue à gauche en a alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue à gauche en a .

VII. Continuité sur un intervalle :

Définition :

Soit a et b finis ou infinis :

- *Soit f une fonction définie sur $]a,b[$, on dit que f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout $x \in]a,b[$*
- *Soit f une fonction définie sur $]a,b]$, on dit que f est continue sur $]a,b]$ si elle est continue en tout $x \in]a,b[$ et continue à gauche en b*
- *Soit f une fonction définie sur $[a,b[$, on dit que f est continue sur $[a,b[$ si elle est continue en tout $x \in]a,b[$ et continue à droite en a*
- *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, on dit que f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout $x \in]a,b[$ continue à droite en a et continue à gauche en b*

Conséquence 1 :

- *Si une fonction est continue sur un intervalle I, alors elle est continue en tout intervalle inclus dans I.*

Conséquence 2 :

- *Toute fonction polynôme est continue sur tout intervalle continu dans IR.*
- *Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle continu dans son ensemble de définition.*

Activité 2 page 29 :

Justifier les affirmations suivantes.

1. *La fonction* $f : x \longrightarrow |x| + 1$ *est continue sur IR*

   ....

   ....

2. *La fonction* $f : x \longrightarrow \sqrt{x+1}$ *est continue sur* $[0,1]$

   ....

   ....

3. *La fonction* $f : x \longrightarrow -3x + 5$ *est continue sur l'intervalle* $]-0.01 \ , \ 10]$

   ....

   ....

4. *La fonction* $f : x \longrightarrow \frac{2x+3}{x-1}$ *est continue sur l'intervalle* $[-1,0]$

   ....

   ....

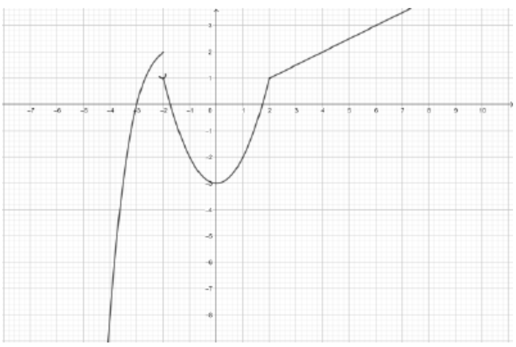
   ....

VIII. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Activité :

soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si \quad x \geq 2 \\ x^2 - 3 & si \ -2 < x < 2 \\ (x+2)^3 + x + 4 & si \quad x \leq -2 \end{cases}$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa représentation sur un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



1. *Montrer graphiquement que f n'est pas continue en -2*

   ....

   ....

2. *Déterminer* $f([2,6])$, $f(]-2\ ,2[)$ *et* $f(]-\infty, -2])$

   ....

   ....

   ....

3. *Déterminer le nombre de solution de l'équation f(x)=a, avec a un réel*

………

………

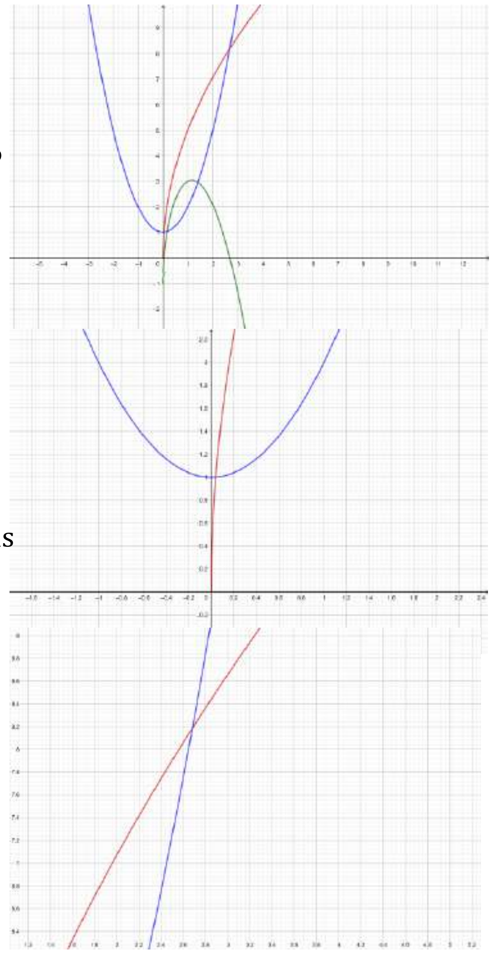
………

Théorème : (admis)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

IX. *Résolution d'équations de la forme $f(x) = k$:*

Activité 3 page 31



1. *a) figure*

   b) $(E) : \frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{x} - x^2 - 1 = 0$; $x_1 \approx 0.01$, $x_2 \approx 2.6$

   c) $0 < x_1 < 0.1$ *et* $2.6 < x_2 < 2.7$

2. *soit* $h : x \longrightarrow \frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{x} - x^2 - 1$

   a) Calculer h(0) et h(1)

   ……………………………………………………………………

   b) Justifier que 0 appartient à l'intervalle $h([0 , 1])$

   ……………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………

   c) En déduire que l'équation (E) possède au moins une solution dans l'intervalle [0 , 1]

   ……………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………

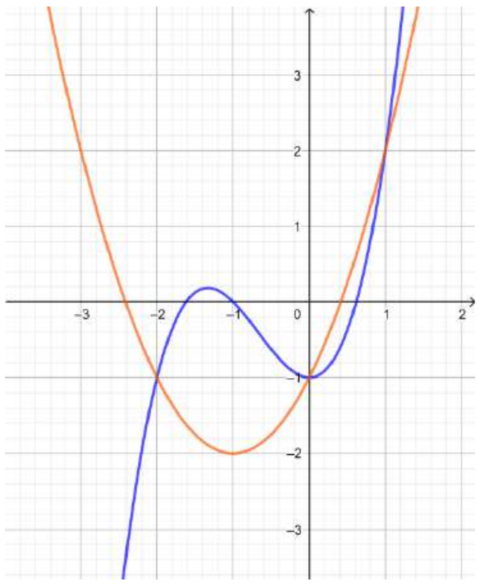
   ……………………………………………………………………

Définition :

Soient *f* une fonction définie sur un ensemble *D* et *k* un réel fixé. Résoudre l'équation *f*(*x*)=*k* :
• consiste à déterminer tous les réels *x* de *D* qui ont pour image *k*
• revient donc à déterminer l'ensemble des antécédents de *k* par *f*.

propriété :

Graphiquement, les solutions de f(x)=k sont les abscisses de tous les points de $\mathcal{C}_f$ ayant pour ordonnée k



$\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_g$ *sont respectivement les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal.*

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D. Résoudre l'équation f(x)=g(x) consiste à déterminer tous les réels x de D qui ont la même image par f et par g.

Propriété

Graphiquement, les solutions de f(x)=g(x) sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et de g.

◆ Généralités :

- Une suite est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.
- Une suite peut-être définie par :
  - ❖ Une formule explicite : U_n en fonction de n , (exemple : $U_n = 5n + 2$).
  - ❖ Une relation de récurrence : U_0 donné et $U_{n+1} = f(U_n)$, (exemple : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 3 \end{cases}$).
- Principe de raisonnement par récurrence : P(n) est une propriété vraie pour tout n lorsque :

(P(0) est vraie) et (si P(n) est vraie, alors P(n+1) est vraie).

◆ Suites arithmétiques – Suites géométriques :

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Définition	$U_{n+1} = U_n + r \quad ; \ (r \in \mathbb{R})$	$U_{n+1} = q \cdot U_n \quad ; \ (q \in \mathbb{R})$
Raison	r	q
Terme général	$U_n = U_0 + n \cdot r$	$U_n = U_0 \cdot q^n$
Relation entre deux termes quelconques	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_p \cdot q^{n-p} \quad ; \ (q \neq 0)$
Somme des n termes consécutifs	$S = \frac{n}{2}(a+b)$ n : nombre de termes a : le premier terme de la somme b : le dernier terme de la somme	$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q} \quad ; \ (q \neq 1)$ n : nombre de termes a : le premier terme de la somme q : la raison de la suite
Relation entre 3 termes consécutifs a, b et c	$a + c = 2b$	$a \cdot c = b^2$
Limite	Si $r > 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ Si $r < 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ Si $r = 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = U_0$	• Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$ • Si $q > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } U_0 > 0 \\ -\infty \text{ si } U_0 < 0 \end{cases}$ • Si $q \leq -1$ alors U_n n'admet pas de limite • Si $q = 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = U_0$

I- Séries statistiques à une variable :

1. Exemples :

◆**Tableau 1** :

Dans un groupe de dix élèves, voici les notes à un devoir : 12, 4, 16, 16, 10, 7, 9, 12, 9, 12.

Cette série de note est une série statistique $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ avec x_i les valeurs prises par X, à chaque valeur x_i on associe un effectif n_i égale au nombre d'élèves ayant obtenu la note x_i.

▸ La fréquence de la valeur d'une série est : $f_i=\frac{n_i}{N}$ avec N l'effectif total $(N=\sum n_i)$.

x_i (Notes)	4	7	9	10	12	16
n_i (Effectif)	1	1	2	1	3	2
f_i (Fréquence)	0,1		0,2	0,1		0,2
effectifs cumulés croissants	1		4		8	
$n_i x_i$	4		18	10		32
$n_i x_i^2$	16	49		100	432	

◆**Tableau 2**

Le tableau suivant donne la durée (en heures) passée chaque jour devant la télévision pour 1000 personnes.

Durées (en heures)	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[
C_i (centre de classe)	1		5		9
n_i (Effectif)	100	200	500	150	50
effectifs cumulés croissants	100		800		1000
$n_i C_i$		600		1050	450
$n_i C_i^2$	100		12500		4050

◆ **Définitions** :

❖ La première série est une série quantitative discrète.
❖ La deuxième série est une série quantitative continue.

2. Les paramètres de position :

❖ **Mode (ou classe modale)**

On appelle Mode ou classe Modale la valeur de X correspondant à l'effectif le plus haut.

▸ Pour la série quantitative discrète le Mode est :……………………………………………………………………..

▸ Pour la série quantitative continue la classe Modale est :……………………………………………………..

❖ **Moyenne** $(\overline{X})$ **:** La moyenne est : $\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$

▸ Tableau 1 : La moyenne est : $\overline{X}=$………………………………………………………………………

▸ Tableau 2 : La moyenne est : $\overline{X}=$………………………………………………………………………

❖ **Médiane** (M_e):

On appelle Médiane d'une série statistique d'effectif total N la valeur de la variable qui correspond à l'effectif cumulé $\frac{N}{2}$ si N est pair et $\frac{N+1}{2}$ si N est impair.

- Tableau 1 : $\frac{N}{2}=5$ alors $M_e=$......................................
- Tableau 2 : $\frac{N}{2}=500$; $300<500<800$ <u>alors</u> $\bullet \langle M_e \langle \bullet$

  alors $\frac{M_e-4}{500-300}=\frac{6-4}{800-300}$ D'où $M_e=$...................

❖ **Le premier Quartile** (Q_1)

Le premier Quartile Q_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des termes de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1.

❖ **Le troisième Quartile** (Q_3)

Le troisième Quartile Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des termes de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3.

◆ **Remarques** :

- Le deuxième quartile Q_2 est la médiane M_e.
- Les trois quartiles partagent l'ensemble des valeurs en quatre sous ensembles de (presque) même effectif.
- On a toujours : $Q_1 \leq M_e \leq Q_3$
- Si $\frac{N}{4}$ est un entier, le premier quartile Q_1 est la valeur qui dans cette liste occupe le rang $\frac{N}{4}$ et le troisième quartile Q_3 est la valeur qui dans cette liste occupe le rang $\frac{3N}{4}$.
- Si $\frac{N}{4}$ n'est pas un entier, le premier quartile Q_1 est la valeur qui dans cette liste occupe le rang immédiatement supérieur à $\frac{N}{4}$ et le troisième quartile Q_3 est le valeur qui dans cette liste occupe le rang immédiatement supérieur à $\frac{3N}{4}$.
- Pour Une série continue :

  Q_1 est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale à 0,25 .

  Q_3 est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale à 0,75 .

- Tableau 1 :
  - $\frac{N}{4}=2,5$ alors $Q_1=$......................................
  - $\frac{3}{4}N=7,5$ alors $Q_3=$......................................
- Tableau 2 :
  - $\frac{N}{4}=250$; $100<250<300$ <u>alors</u> $\bullet < Q_1 < \bullet$

  alors $\frac{Q_1-2}{250-100}=\frac{4-2}{300-100}$ D'où $Q_1=$...................

- $\frac{3}{4}N = 750$; $300 < 750 < 800$ <u>alors</u> $\bullet < Q_3 < \bullet$

  alors $\frac{Q_3 - 4}{750 - 300} = \frac{6 - 4}{800 - 300}$ D'où $Q_3 =$ ....

3. <u>Les paramètres de dispersion</u> :

❖ **Variance et écart-type** $(V(X)$ et $\sigma(X))$ **:**

- La variance est : $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {x_i}^2 - \overline{X}^2$.
- L'écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
- L'écart type mesure la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne.

  Plus l'écart type est petit, plus les valeurs de la série sont concentrées autour de la moyenne.

▸ Tableau 1 : • $V(X) =$ ....

  • $\sigma(X) =$ ....

▸ Tableau 2 : • $V(X) =$ ....

  • $\sigma(X) =$ ....

❖ **Etendue**

L'étendue est la différence entre la plus grande et la petite des valeurs.

▸ Tableau 1 : L'étendue est : ....

▸ Tableau 2 : L'étendue est : ....

❖ **Ecart interquartile**

- L'intervalle interquartile d'une série statistique est l'intervalle $[Q_1, Q_3]$
- L'écart interquartile d'une série statistique est le nombre $Q_3 - Q_1$

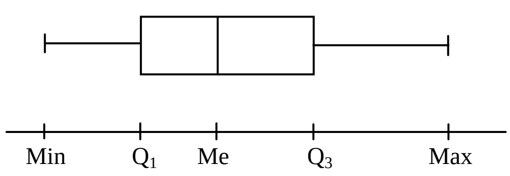
▸ Tableau 1 : L'écart interquartile est : ....

▸ Tableau 2 : L'écart interquartile est : ....

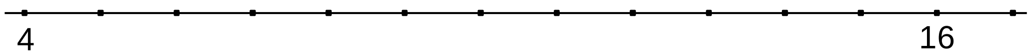
❖ **Diagramme en boîte** (boîtes à moustaches)

Un diagramme en boite est un rectangle délimité par le premier quartile et le troisième quartile.

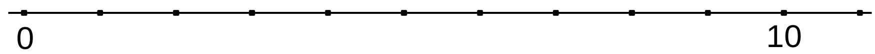
Pour l'obtenir, on trace un axe horizontal (ou vertical) sur lequel on place les valeurs de Q_1, Q_3 et M_e
L'un des côtés du rectangle a pour longueur l'écart interquartile, l'autre est quelconque.
On complète ce diagramme en traçant deux traits horizontaux : l'un joignant Q_1 au minimum de la série et l'autre joignant Q_3 au maximum de la série.



- Tableau 1 :



- Tableau 2 :



II. <u>Séries Statistiques Doubles</u> :

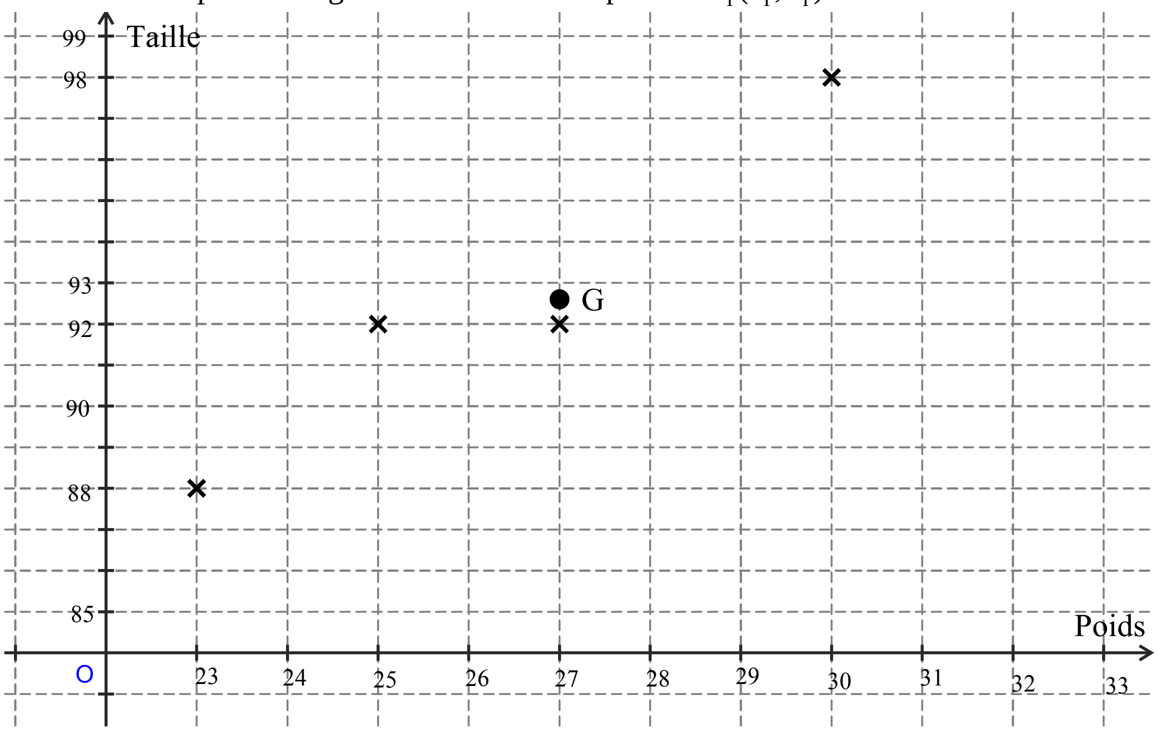
◆ **Exemple** : Le tableau suivant donne le poids en Kg et la taille en cm d'un groupe de 10 enfants :

P_i	25	27	23	30	27	23	25	30	32	28
T_i	90	92	85	99	93	88	92	98	99	90

- Le couple $(P_1, T_1) = (25, 90)$ veut dire que l'enfant N°1 pèse 25 Kg et mesure 90 cm.
- On a donc une population de 10 enfants sur laquelle on a observé simultanément les deux variables P et T.

◆ **Définition** : On dit qu'un couple (X,Y) de variables statistiques définies une série double si les deux variables X et Y sont observés simultanément sur une même population.

- La moyenne arithmétique des poids est : $\overline{P} =$ ....
- La moyenne arithmétique des Tailles est : $\overline{T} =$ ....
- Placer dans un repère orthogonal l'ensemble des points $M_i(P_i, T_i)$:



◆ **Définition** :

Soit une série statistique définie par deux variables X et Y . On désigne par $x_1, x_2, ..., x_n$ les valeurs de X et par $y_1, y_2, ..., y_n$ celles de Y. Le plan étant rapporté à un repère orthogonal.

- L'ensemble des points $M_i(x_i, y_i)$; $i \in \{1, 2, ..., n\}$ est appelé Nuage De Points.
- Le point $G(\overline{x}, \overline{y})$ est appelé point moyen du nuage.

◆ **Distributions marginales** :

Soit le tableau statistique suivant : X : note en mathématiques ; Y : nombre de frères et sœurs. $N = 100$

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	Totaux
[0,4[	1	0	1	1	0	1	1	
[4,8[	2	2	4	3	3	4	2	20
[8,12[	5	5	10	7	6	4	3	
[12,16[	2	3	5	5	4	4	2	25
[16,20[	1	1	2	3	2	1	0	
Totaux	11		22				8	100

▸ Les totaux inscrits en marge de chaque tableau à double entrée définissent deux distributions marginales, l'une associée à la première variable statistique et l'autre associée à la deuxième variable statistique.

X : Note en Maths	[0,4[	[4,8[	[8,12[	[12,16[	[16,20[	Total
Effectif		20			10	

Distribution marginale de X

Y : nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif			22				8	

Distribution marginale de Y

• Calcul de **la moyenne ($\overline{X}$) ; la variance** $(V(X))$ **et l'écart-type** $(\sigma(X))$

▸ $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} x_i n_i}{N} = \dfrac{(2\times5)+(6\times20)+(10\times40)+(14\times25)+(18\times10)}{100} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▸ $V(X) = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{X}^2 = \dfrac{(2^2\times5)+(6^2\times20)+(10^2\times40)+(14^2\times25)+(18^2\times10)}{100} - \overline{X}^2 = \ldots\ldots$

▸ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$

▸ $\overline{Y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{q} y_i n_i}{N} = \dfrac{(0\times11)+(1\times11)+(2\times22)+(3\times19)+(4\times15)+(5\times14)+(6\times8)}{100} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▸ $V(Y) = \dfrac{\sum_{i=1}^{q} y_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{Y}^2 = \dfrac{(0^2\times11)+(1^2\times11)+(2^2\times22)+\ldots\ldots\ldots+(6^2\times8)}{100} - \overline{Y}^2 = \ldots\ldots$

▸ $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$

III. <u>Ajustement affine d'une série statistique double</u> :

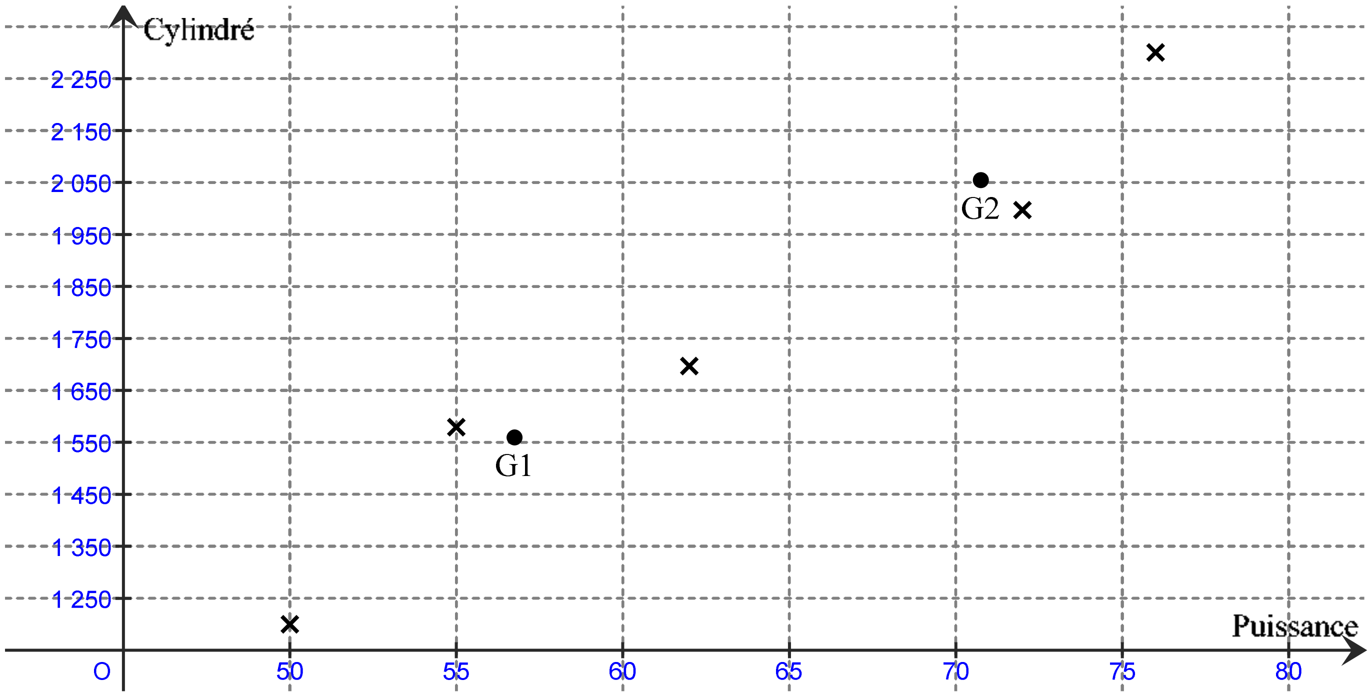
Lorsque le nuage des points, représentant graphiquement une série statistique à deux caractères X et Y, a une forme allongée, on peut approcher la relation entre les deux variables X et Y par une relation affine définie par : $Y = aX + b$ ou $X = a'Y + b'$.

◆ **Exemple** :

Le tableau ci-dessous indique la puissance X en chevaux DIN (Deutsche Industrie Normen) et la cylindrée Y en cm^3 de 8 voitures à moteur diesel.

Voiture	A	B	C	D	E	F	G	H
Puissance X	50	55	60	62	65	70	72	76
Cylindrée Y	1200	1579	1761	1697	1935	1986	1997	2300

1. Compléter le nuage de points associé à ce tableau.



2. Calculer la puissance moyenne et la cylindrée moyenne de ces huit voitures.

La puissance moyenne est $\overline{X} = \frac{1}{8}(50 + 55 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 76) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

La cylindrée moyenne est $\overline{Y} = \frac{1}{8}(1200 + 1579 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2300) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. On appelle G_1 et G_2 les points moyens des sous-nuages constitués d'une part par les voitures A, B, C et D, d'autre part, par les voitures E, F, G et H.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2.

$$G_1\left(\frac{50+55+60+62}{4} \; ; \; \frac{1200+1579+1761+1697}{4}\right) \quad \text{alors} \quad G_1(\ldots\ldots\ldots \; ; \; \ldots\ldots\ldots)$$

$$G_2\left(\frac{65+70+72+76}{4} \; ; \; \frac{1935+1986+1997+2300}{4}\right) \quad \text{alors} \quad G_2(\ldots\ldots\ldots \; ; \; \ldots\ldots\ldots)$$

b. Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2). $(Y = aX + b)$. La tracer sur le graphique.

$$a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \approx 35{,}38$$

$$b = y_{G_1} - a \cdot x_{G_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \approx -448{,}57 \quad \text{donc} \quad (G_1G_2) : y = \ldots\ldots\ldots$$

◆ **Utilisation de la calculatrice :** (Exemple pour une calculatrice Sharp EL-531WH)

❖ **Série à une variable** :

Le service comptable d'une banque donne les données statistiques suivantes pour 100 clients :

Somme déposée en dinars : x_i	300	500	1000	2000	5000
Effectifs : n_i	22	28	25	20	5

- Choisir le mode statistique simple : $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$
- Entrer les données en tapant
  $\boxed{300}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{22}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{500}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{28}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{1000}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{25}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{2000}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{20}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{5000}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{M+}}$
- $\overline{X}$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{4}$ la calculatrice affiche $\overline{X} =$ ....
- $\sigma(X)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ la calculatrice affiche $\sigma(X) =$ ....
- $V(X)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ la calculatrice affiche $V(X) =$ ....

❖ **Série à deux variables** :

On a relevé dans le tableau ci-dessous, l'âge et la tension artérielle maximale de 5 femmes

X : Age	36	42	48	54	60
Y : Tension artérielle	11.8	14	12.6	15	15.1

- Choisir le mode statistique double : $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$
- Entrer les données en tapant
  $\boxed{36}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{11.8}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{42}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{14}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{48}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{12.6}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{54}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{15}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{60}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{15.1}$ $\boxed{\text{M+}}$
- $\overline{X}$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{4}$ la calculatrice affiche $\overline{X} =$ ....
- $\sigma(X)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ la calculatrice affiche $\sigma(X) =$ ....
- $V(X)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ la calculatrice affiche $V(X) =$ ....
- $\overline{Y}$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{7}$ la calculatrice affiche $\overline{Y} =$ ....
- $\sigma(Y)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{9}$ la calculatrice affiche $\sigma(X) =$ ....
- $V(Y)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{9}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ la calculatrice affiche $V(Y) =$ ....

Angles et trigonométrie

A Le radian

Le radian est l'unité de mesure d'angle pour laquelle un angle plat a une mesure égale à π.

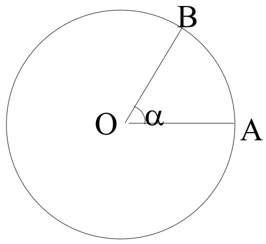
Conversion degrés-radians

Si la mesure d'un angle est a en dégré et α en radians, alors $\alpha = \dfrac{\pi a}{180}$.

Valeurs remarquables

degrés	0	30	45	60	90	180
radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

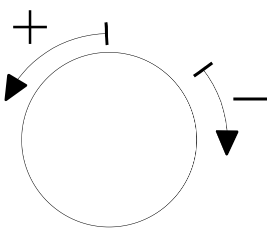
Propriété



Soient A et B deux points d'un cercle de centre O et de rayon r tels que la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ en radians soit α.
La longueur de l'arc AB est égale à αr.
Rappel : la longueur du cercle est $2\pi r$.

B Angles orientés

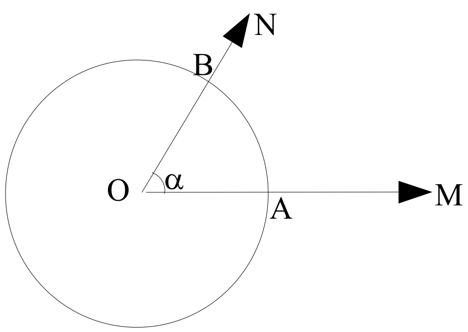
1. Orientation du plan



Sur un cercle, deux sens de parcours sont possibles :
- le sens positif (ou sens direct ou sens trigonométrique)
- le sens négatif (ou sens indirect ou sens des aiguilles d'une montre)

2. Mesures des angles orientés

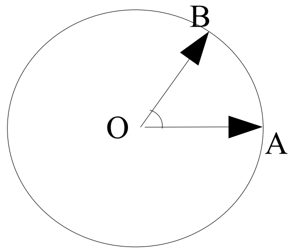
> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ forme un angle orienté.



Soient O, M et N trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.
Soit C le cercle de centre O et de rayon 1 qu'on appelle cercle trigonométrique.
La demi-droite $[OM)$ coupe C en A.
La demi-droite $[ON)$ coupe C en B.
On obtient une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, en calculant la longueur parcourue sur le cercle pour aller de A à B et en lui donnant un signe représentant le sens de parcours.

Si la mesure en radians de $\widehat{AOB}$ est α, les mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ ou $-\alpha + 2k\pi$ selon le sens de parcours pour aller de A à B, k étant un entier relatif.

Exemple



OAB est un triangle équilatéral.

La mesure de $\widehat{AOB}$ en radians est donc $\frac{\pi}{3}$.

L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ admet comme mesures $\frac{\pi}{3}$, ou $\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}-2\pi=\frac{-5\pi}{3}$, ...

L'angle orienté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ admet comme mesures $\frac{-\pi}{3}$, ou $\frac{-\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$ ou $\frac{-\pi}{3}-2\pi=\frac{-7\pi}{3}$, ...

3. Mesure principale d'un angle orienté

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, une seule se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$; elle est appelée mesure principale de l'angle orienté.
Si α est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, alors $|\alpha|$ est la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

Exemple

Trouver la mesure principale d'un angle dont l'une des mesures est $\frac{11\pi}{3}$.

Comme $\frac{11\pi}{3}>\pi$, on retire des multiples de 2π jusqu'à obtenir un résultat contenu dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

$\frac{11\pi}{3}=\frac{12\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=2\times 2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{3}+2\times 2\pi$.

Comme $\frac{-\pi}{3}$ se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, il s'agit de la mesure principale de l'angle.

4. Propriétés des angles orientés

Angles et vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à 0 ou à π.
Si cette mesure est 0, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, il existe un réel positif k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.
Si cette mesure est π, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens opposés, il existe un réel négatif k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

Relation de Chasles

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a $(\vec{u}, \vec{v})+(\vec{v}, \vec{w})=(\vec{u}, \vec{w})$.

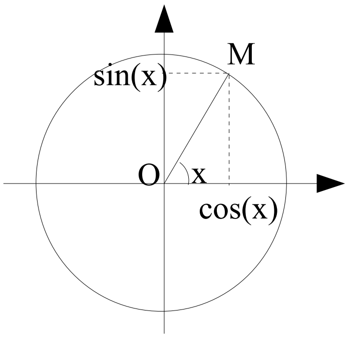
Conséquences :
$(\vec{v}, \vec{u})=-(\vec{u}, \vec{v})$; $(\vec{u}, -\vec{v})=(\vec{u}, \vec{v})+\pi$; $(-\vec{u}, \vec{v})=(\vec{u}, \vec{v})+\pi$; $(-\vec{u}, -\vec{v})=(\vec{u}, \vec{v})$.

C Sinus et cosinus d'un angle orienté

1. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ direct; on a $(\vec{i},\vec{j})=\frac{\pi}{2}$.

On considère le cercle trigonométrique, cercle de centre O et de rayon 1.

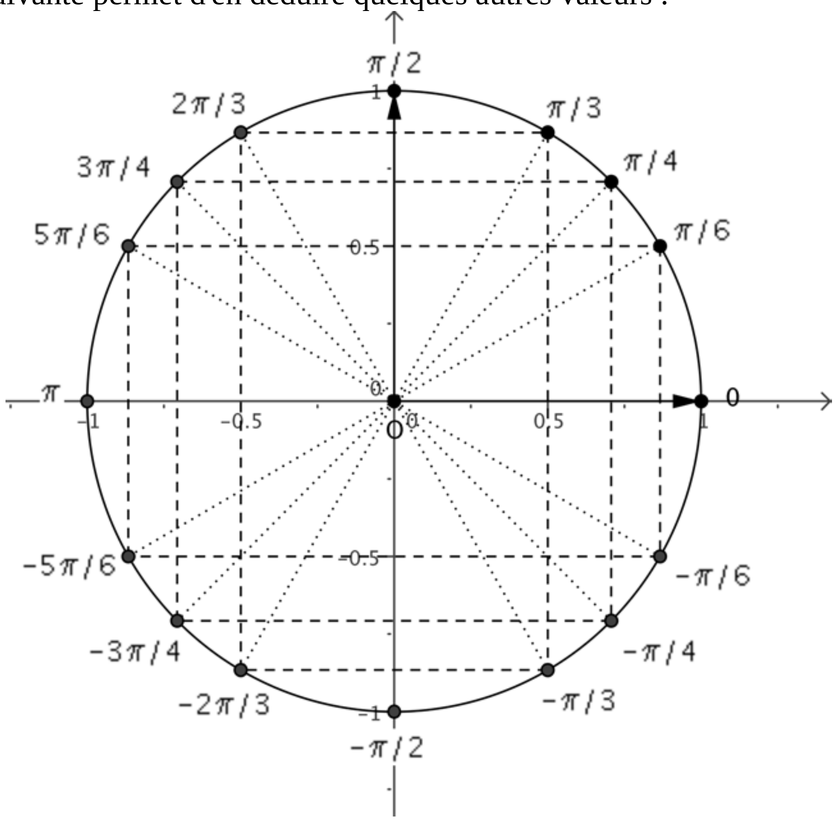


A tout réel x, on associe le point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$.
On appelle alors **cos(*x*)** l'abscisse du point M et **sin(*x*)** l'ordonnée du point M.

2. Valeurs remarquables

angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

La figure suivante permet d'en déduire quelques autres valeurs :

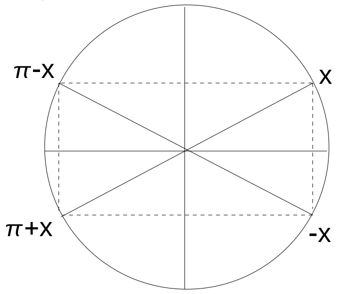


3. Propriétés

Pour tout réel x, on a les propriétés suivantes :

- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

La figure suivante permet de retrouver rapidement quelques autres formules :



a) $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

b) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

c) $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

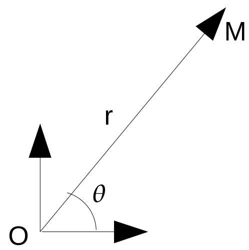
D'autre part,

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

D Coordonnées polaires d'un point

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct; on a $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Définition



Pour tout point M distinct de O, un couple (r, θ) tel que $OM = r$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ est un couple de coordonnées polaires de M.

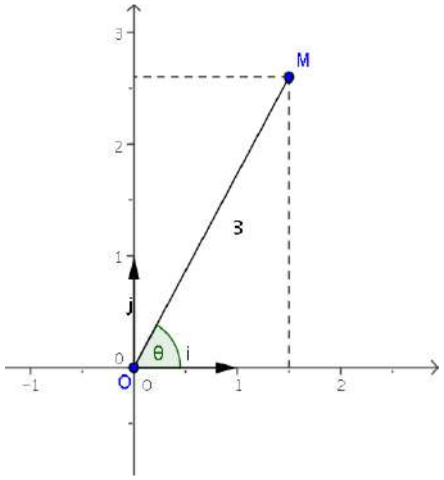
2. Lien entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes

Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (r, θ).

On a les trois égalités suivantes :

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $x = r.\cos(\theta)$ ou $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$
- $y = r.\sin(\theta)$ ou $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r}$

Exemple 1



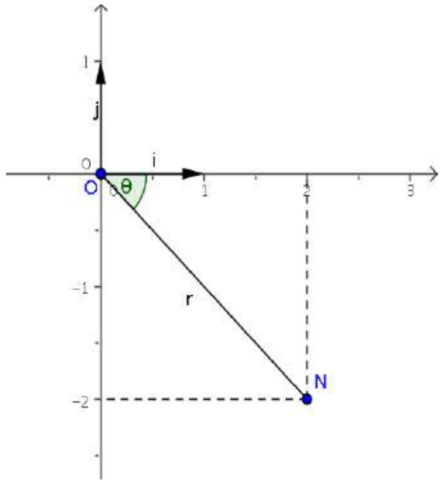
Le point M a $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ comme coordonnées polaires.
Quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?

On a $x = 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

et $y = 3 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Les coordonnées cartésiennes de M sont donc $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Exemple 2



Le point N a (2, -2) comme coordonnées cartésiennes.
Quelles sont ses coordonnées polaires ?

On a $r = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ainsi $\cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$\sin(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que $\theta = \frac{-\pi}{4}$.

Les coordonnées polaires de N sont donc $\left(2\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}\right)$.

Lycée secondaire Ibn Rochd		2013 - 2014
Épreuve : Mathématiques	Formulaire de trigonométrie	
Prof : MAATALLAH	Le 11 - 12 - 2013	Classe : 3 M

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$$

$$\cos(-x)=\cos(x)$$
$$\sin(-x)=-\sin(x)$$

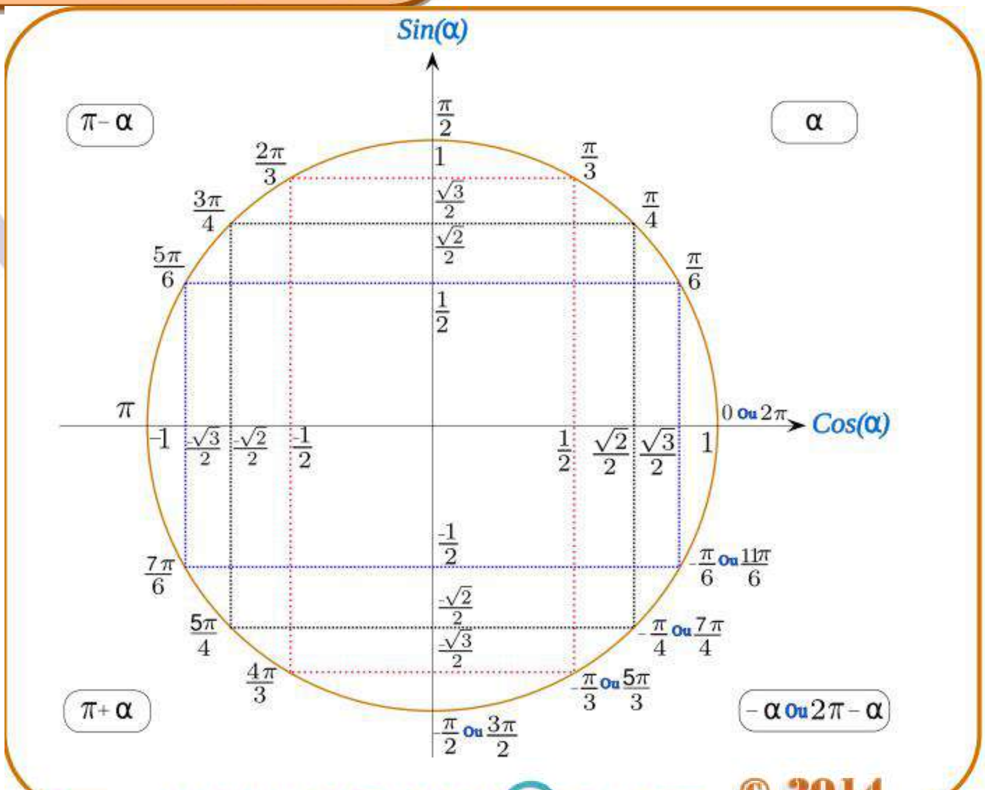
$$\cos(\pi-x)=-\cos(x)$$
$$\cos(\pi+x)=-\cos(x)$$
$$\sin(\pi-x)=\sin(x)$$
$$\sin(\pi+x)=-\sin(x)$$

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)$$
$$\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos(a).\cos(b)=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$
$$\sin(a).\sin(b)=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$
$$\sin(a).\cos(b)=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$a\cos(\alpha x)+b\sin(\alpha x)=r\cos(\alpha x-\varphi)$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \cos(\varphi)=\frac{a}{r},\ \sin(\varphi)=\frac{b}{r}$$



Prof : Boufares Amor	Cours de géométrie dans l’espace	3ème Maths et 3ème sciences exp.

I) Définition d’un vecteur de l’espace

Définition

Soit A et B deux points distincts de l’espace. On appelle vecteur de représentant (A, B) l’être mathématique noté $\overrightarrow{AB}$ et défini par :
- ☻ Sa direction qui est celle de la droite (AB)
- ☻ Son sens qui est de A vers B
- ☻ Sa longueur qui est la longueur du segment [AB]

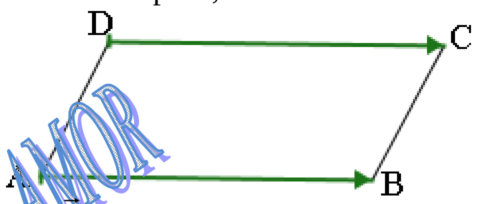
Si A = B alors $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur nul qui sera noté $\vec{0}$.

► L’ensemble des vecteurs de l’espace est noté W.

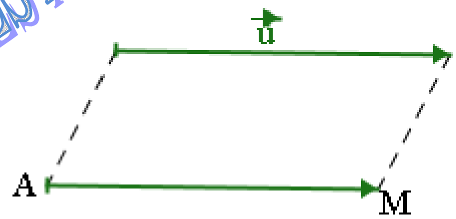
Conséquences

► $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$

► Pour tous points distincts A, B, C et D de l’espace, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme.

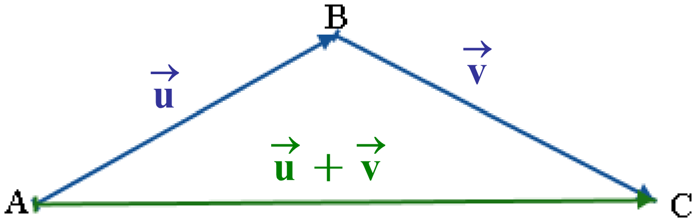


► Pour tout point A et pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$



II) Addition des vecteurs de l’espace

► Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ deux vecteurs de l’espace. On appelle somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{AC}$ noté $\vec{u} + \vec{v}$



La relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,valable pour tous points A, B et C de l’espace, est appelée la relation de Chasles.

► Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{W}$ de l’espace on a :
- ☻ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité de l’addition)
- ☻ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ est neutre pour l’addition)
- ☻ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativité de l’addition)

► Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ .Le vecteur $\vec{v}$ est appelé l'opposé de $\vec{u}$ et se note - $\vec{u}$.

► Pour tous points A et B de l’espace on a $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

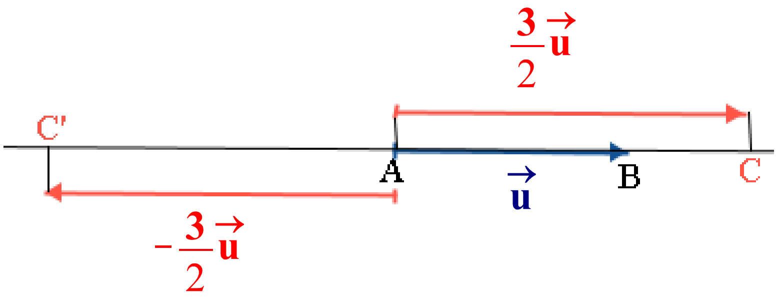
III) Multiplication d’un vecteur par un réel

Définition

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et α un réel. On appelle produit de $\vec{u}$ par α le vecteur noté $\alpha\vec{u}$ et défini par :

☻ Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\alpha\vec{u} = \vec{0}$

☻ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ où $C \in (AB)$ tel que $\overline{AC} = \alpha\overline{AB}$



Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et pour tous réels α et β on a :

- $\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- $1.\vec{u} = \vec{u}$
- $(-1).\vec{u} = -\vec{u}$
- $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$ (pseudo associativité)
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

IV) Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

Conséquences

- Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ que l'on note D(A, $\vec{u}$).
- Le couple (A, $\vec{u}$) est appelé repère cartésien de la droite D(A, $\vec{u}$).
- Deux droites D(A, $\vec{u}$) et D'(B, $\vec{v}$) sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

V) Combinaison linéaire des vecteurs

Définition 1

Un vecteur $\vec{w}$ de l'espace est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Définition 2

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont linéairement dépendants si et seulement si l'un est une combinaison linéaire de deux autres.

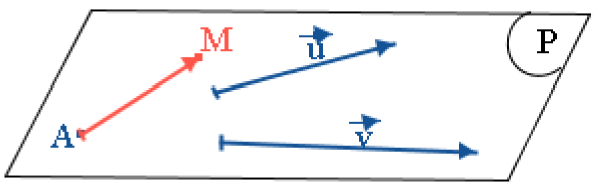
On dit aussi que ces vecteurs sont coplanaires ou encore la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Trois vecteurs non linéairement dépendants sont dits vecteurs linéairement indépendants.

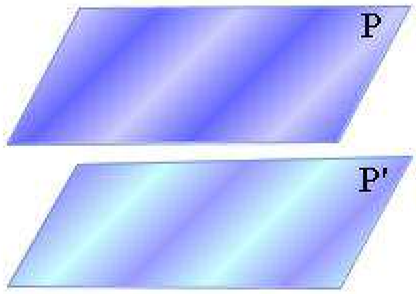
Une famille non liée est dite famille libre.

Conséquences

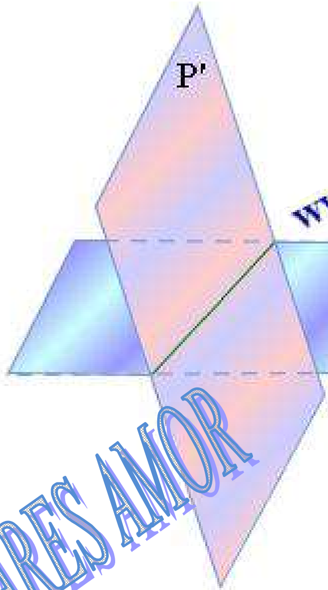
- Quatre points A, B, C et D sont dits coplanaires c à d appartiennent à un même plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement dépendants.
- Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deus vecteurs non colinéaires de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants est le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ que l'on note P(A, $\vec{u}$, $\vec{v}$).



► Deux plans $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $P'(B, \vec{u'}, \vec{v'})$ sont parallèles si et seulement si les familles $\{\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v'}\}$ et $\{\vec{v}, \vec{u'}, \vec{v'}\}$ sont liées.

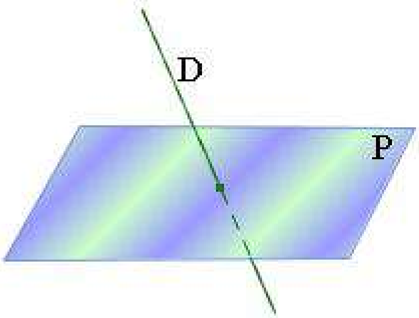


► Deux plans $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $P'(B, \vec{u'}, \vec{v'})$ sont sécants si et seulement si l'une des familles $\{\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v'}\}$ et $\{\vec{v}, \vec{u'}, \vec{v'}\}$ est libre.



► Une droite $D(B, \vec{w})$ est parallèle à un plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

► Une droite $D(B, \vec{w})$ et un plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ sont sécants si et seulement si la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est libre.



VI) Bases et repères cartésiens de l'espace

Définition 1

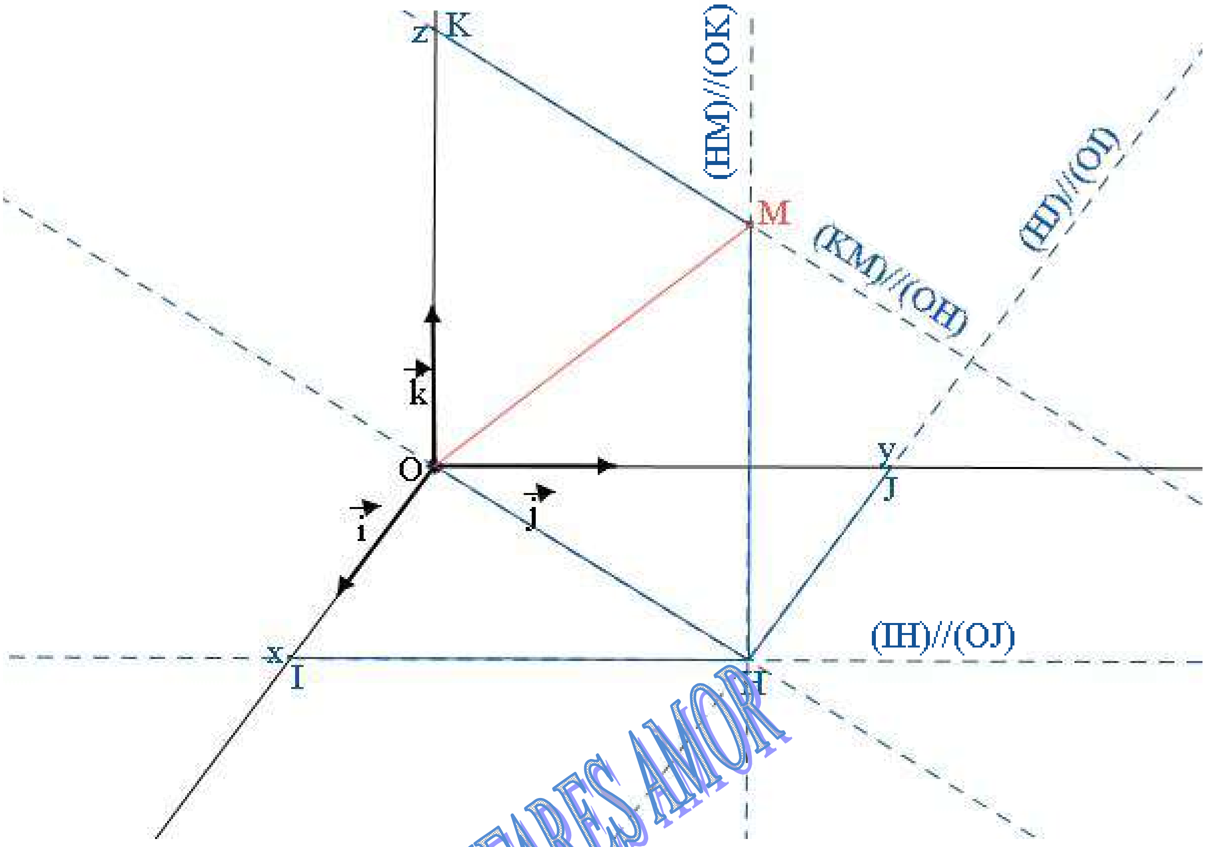
Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et une base l'ensemble des vecteurs W de l'espace si et seulement si la famille $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est libre.

Définition 2

Soit O un point fixe de l'espace. Le quadrilatère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère cartésien de l'espace si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de W.

Conséquences

► Tout point M est repéré dans l'espace par un triple unique de réels (x, y, z) c à d $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



x est appelé l'abscisse de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

y est appelé l'ordonnée de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

z est appelé la cote de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$(O, \vec{i})$ est l'axe des abscisses.

$(O, \vec{j})$ est l'axe des ordonnées.

$(O, \vec{k})$ est l'axe des cotes.

► On sait qu'à tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique point M(x, y, z) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ alors les réels x, y et z sont appelés les coordonnées ou encore les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

► Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de l'espace et pour tout réel α on a :

☻ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

☻ $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$

☻ $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$

VII) Déterminant de trois vecteurs

Définition

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ dans cet ordre le réel noté $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$

et défini par $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = xy'z'' - xz'y'' - yx'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x''$

Théorème

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont linéairement indépendants si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$.

VIII) Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Définition

Dans l'espace muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne la droite D passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. L'écriture $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \; ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases}$ est appelée une représentation paramétrique de la droite D. On écrit D : $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \; ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases}$

IX) Représentation paramétrique d'un plan de l'espace

Définition

Dans l'espace muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne le plan P passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. L'écriture $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \; ; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases}$ est appelée une représentation paramétrique de P. On écrit P : $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \; ; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases}$

X) Equation cartésienne d'un plan de l'espace

Théorème 1 et définition

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Un ensemble P des points M(x, y, z) de l'espace est un plan si et seulement s'il existe quatre réels a, b, c et d avec a, b et c sont non tous nuls tels que ax + by + cz + d = 0.

L'équation ax + by + cz + d = 0 est appelée équation cartésienne du plan P dans le repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On écrit P : ax + by + cz + d = 0.

Théorème 2

Soit P : ax + by + cz + d = 0 et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans de l'espace.

$P \,/\!/\, P' \Leftrightarrow (a,b,c)$ et (a',b',c') sont proportionnels

XI) Produit scalaire dans l'espace

Préliminaire

☻ On appelle angle de deux vecteurs non nuls $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ de l'espace l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ et on le note $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ donc $0 \le (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \le \pi$.

☻ On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ de l'espace la longueur AB du segment [AB] et on la note $\|\vec{u}\|$.

☻ Un vecteur $\vec{u}$ de l'espace est dit unitaire ou encore normé si et seulement si $\|\vec{u}\| = 1$

Définition du produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et est défini par :

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\vec{v}=0$

Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors $\vec{u}\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Propriétés du produit scalaire

Comme dans le plan on a pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et pour tout réel α :

- ► $\vec{u}\vec{v}=\vec{v}\vec{u}$
- ► $(\alpha\vec{u})\vec{v}=\vec{u}(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\vec{v})$
- ► $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$
- ► $|\vec{u}\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- ► $|\vec{u}\vec{v}|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- ► $(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\vec{v}$
- ► $(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\vec{v}$
- ► $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Orthogonalité de deux vecteurs de l'espace

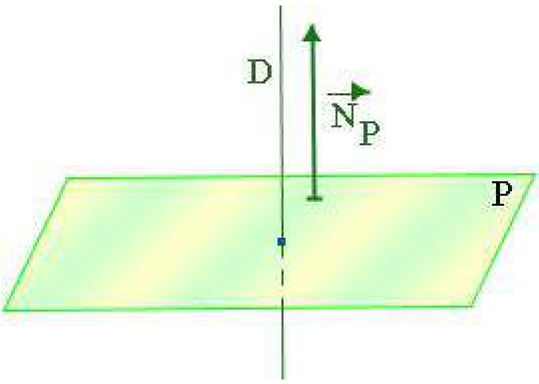
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\vec{v}=0$

Vecteur normal d'un plan

On appelle vecteur normal d'un plan P tout vecteur directeur d'une droite D perpendiculaire à P.

On note ce vecteur par $\vec{N}_P$.



Conséquences

► Soit $D(A,\vec{u})$ et $D'(B,\vec{v})$ deux droites de l'espace.

$D\perp D'\Leftrightarrow\vec{u}\vec{v}=0$

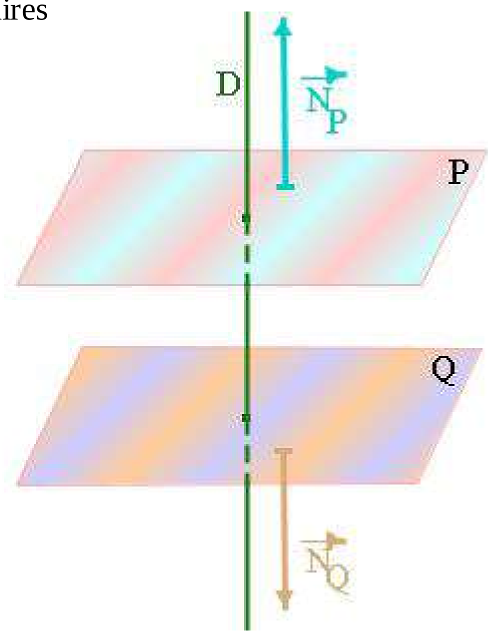
► Soit $D(A,\vec{u})$ une droite et P un plan de l'espace.

☻ $D\perp P\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{N}_P$ sont colinéaires

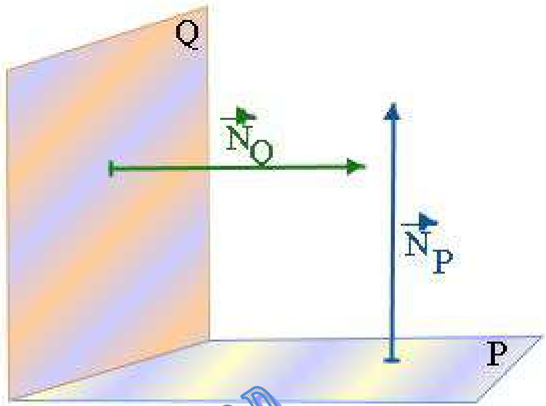
☻ $D \,//\, P \Leftrightarrow \vec{u}\,\vec{N}_P = 0$

► Soit P et Q deux plans de l'espace.

☻ $P \,//\, Q \Leftrightarrow \vec{N}_P$ et $\vec{N}_Q$ sont colinéaires



☻ $P \perp Q \Leftrightarrow \vec{N}_P\,\vec{N}_Q = 0$



<u>Expression analytique du produit scalaire</u>

► Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'ensemble des vecteurs de l'espace est dite orthonormée ou encore orthonormale si et seulement si $\begin{cases} \vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 0 \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$

► Un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormé ou encore orthonormal si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée.

► Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de l'espace muni d'un repère orthonormé on a :

☻ $\vec{u}\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ (c'est l'expression analytique du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$)

☻ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

☻ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

► Pour tous points A et B de l'espace muni d'un repère orthonormé on a :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

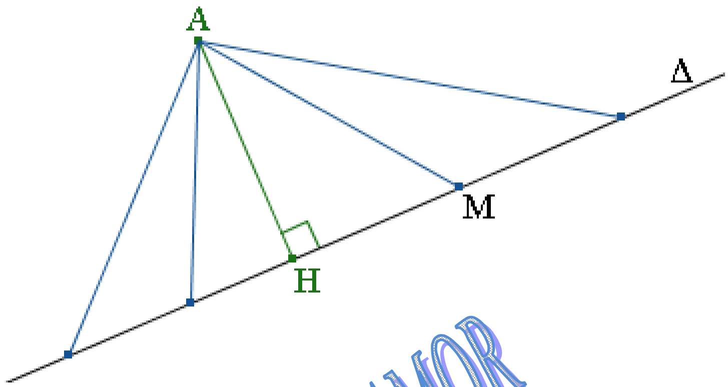
<u>Equation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormé</u>

► Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace et $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\vec{N} = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{N}$. Ce plan a pour équation cartésienne : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

► Soit P : ax + by + cz + d = 0 un plan alors $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P.

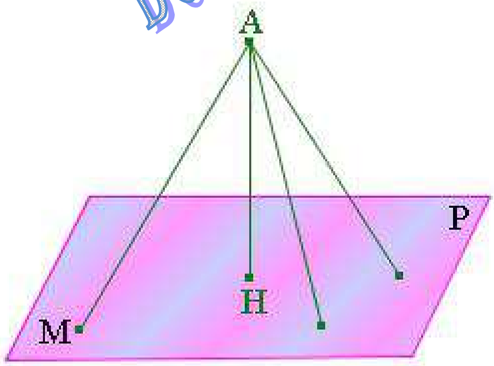
<u>Distance d'un point à une droite</u>

Soit A un point et Δ une droite de l'espace. On appelle distance de A à Δ et on note d(A, Δ) la valeur minimale de AM lorsque M décrit la droite Δ c'est aussi la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur Δ.



<u>Distance d'un point à un plan</u>

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé et P : ax + by + cz + d = 0 un plan. On appelle distance de A à P et on note d(A, P) la valeur minimale de AM lorsque M décrit P c'est aussi la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur P et elle est calculée par la formule d(A, P) = $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

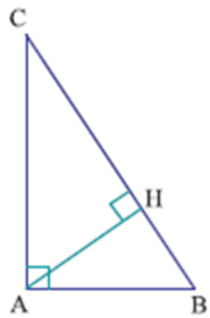


Chapitre 1 Produit scalaire dans le plan

Exercice 1

On considère un triangle ABC rectangle en A et on désigne par H le pied de la hauteur issue de A.

1. Vérifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH^2 - HB.HC$.
2. En déduire que $AH^2 = HB.HC$.



Définition

Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On désigne par A et B les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$, le réel ainsi défini

- $\vec{u}.\vec{v} = OA.OB.\cos\widehat{AOB}$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

Définition

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Conséquence

Deux droites sont perpendiculaires, si et seulement si, le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

Exercice 2

Soit un triangle ABC.

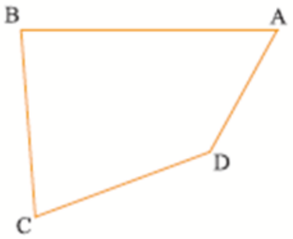
1. Montrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = BC^2$.
2. En déduire que $BC = AB\cos\widehat{B} + AC\cos\widehat{C}$.

Conséquence

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Exercice 3

On considère un quadrilatère ABCD.



1. a. Montrer que $AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$.

b. Montrer que $DC^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD})$.

2. En déduire que $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

Exercice 4

Soit un triangle ABC rectangle et isocèle en A.
On désigne par M et N deux points du plan tels que
$\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AC}$.
On désigne par I le milieu du segment [BN].
1. Vérifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$.
2. a. Montrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} = -\frac{3}{2}(AB^2 - AC^2)$.
b. En déduire que la droite (AI) porte une hauteur du triangle AMC.

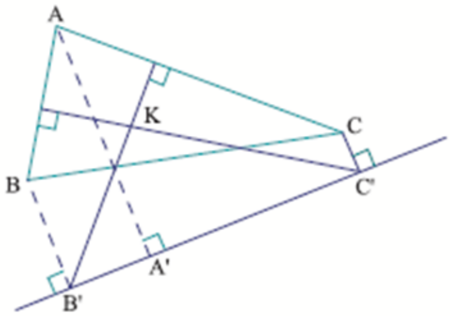
Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels α et β,
$(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$, $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$, $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})$.

Exercice 5

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, A', B' et C' sont les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur la droite Δ.



On désigne par K le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par B' et la perpendiculaire à (AB) passant par C'.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{A'K} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'A'}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{A'K} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

2. En déduire que les droites (A'K) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A(-2, 2), B(4, 0) et C(-1, 2).

1. a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC.

b. En déduire une valeur approchée en radians à l'unité près de $\widehat{BAC}$.

2. Déterminer une valeur approchée en radians à l'unité près de chacun des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B des points tels $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Si H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AO), alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$.

Corrigé

Exercice 1

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \underbrace{=}_{\text{relation de Chsles}} \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$

or on a : $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{HB}$ d'où

: $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2+0+0+HB\times HC\times\cos(B\widehat{H}C)$

comme $\cos(B\widehat{H}C)=\cos\pi=-1$, on aura : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AH^2-HB\times HC$

2) On a : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0=AH^2-HB\times HC$ ce qui donne $\boxed{AH^2=HB\times HC}$

Exercice 2

1)

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$$

ainsi on a :$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=BC^2$

2) On a :$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=BC^2\Rightarrow BA\times BC\times\cos(A\widehat{B}C)+CA\times CB\times\cos(A\widehat{C}B)=BC\times BC$

$$\Rightarrow\boxed{BA\times\cos\widehat{B}+CA.\cos\widehat{C}=BC}$$

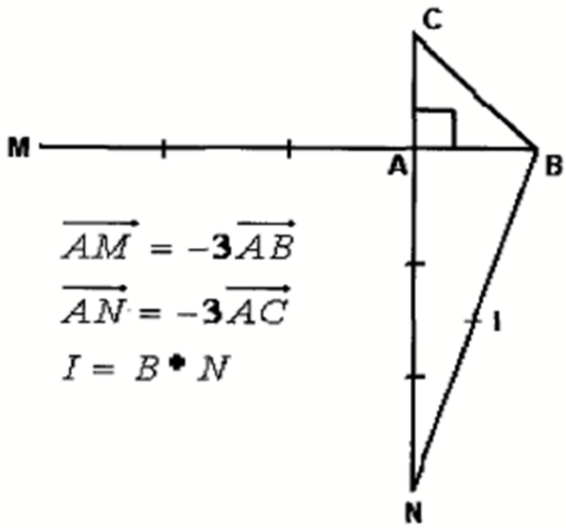
Exercice 3

1) a) $AB^2-BC^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)$

b) $DC^2-AD^2=\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}\right)$

2)
$$\begin{aligned}AB^2+DC^2-BC^2-AD^2&=\left(AB^2-BC^2\right)+\left(DC^2-AD^2\right)\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}\right)\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}\right)\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\left[\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}\right)\right]\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\left[\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)\right]\\&=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\left(2\overrightarrow{DB}\right)=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

Exercice 4



1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN}\right)$

$$= 2\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IN}}_{\vec{0}}$$

$$= 2\overrightarrow{AI} + \vec{0}$$

car I est le milieu de $[BN]$

d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$

2) a) On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}\right)$

Par suite: $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 3AB^2 + 9\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 3AC^2\right)$$

Et comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ car $(AB) \perp (AC)$ on aura :

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(-3AB^2 + 3AC^2\right)$ d'où $\boxed{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} = -\frac{3}{2}\left(AB^2 - AC^2\right)}$

b) $AB = AC \Rightarrow \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} = -\frac{3}{2}\left(\underbrace{AB^2 - AC^2}_{0}\right) = 0$

D'où (AI) et (CM) sont perpendiculaires et par suite (AI) porte la hauteur issue de A dans le triangle AMC

Exercice 5

1) a) $\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'K}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'K}\bullet\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{BA}+0\ (car\ \overrightarrow{C'K}\perp\overrightarrow{BA})$

$=\overrightarrow{A'C'}\bullet\left(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'A}\right)=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{A'A}$

$=0+\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}+0=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}$

b) $\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'K}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{B'K}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AC}+0$

$=\overrightarrow{A'B'}\bullet\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'C}\right)=\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{C'C}$

$=0+\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}+0=\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}$

2) $\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'K}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{AC'}\bullet\overrightarrow{A'B'}$

$=\overrightarrow{A'C'}\bullet\left(\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'B'}\right)=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'B'}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\vec{0}=0$

d'où $(A'K)\perp(BC)$

Exercice 6

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\oplus\ \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=6\times1+(-2)\times0=6$

$\oplus\ AB=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ $\oplus\ AC=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1$

b) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(B\hat{A}C)$ $d'où$ $\cos(B\hat{A}C)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{6}{2\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

à l'aide de la calculatrice : $B\hat{A}C\simeq touche(Endf)+touche[\cos]+(\frac{3}{\sqrt{10}})=\cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{10}})\simeq(18,435)°\simeq\frac{\pi}{10}$

2) * $\oplus\ \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ $\oplus\ \overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=(-6)\times(-5)+2\times2=34$

$\oplus\ BA=2\sqrt{10}$ $\oplus\ BC=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$ et $\cos(A\hat{B}C)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\dfrac{17}{\sqrt{290}}$

à l'aide de la calculatrice : $A\hat{B}C\simeq\cos^{-1}(\frac{17}{\sqrt{290}})\simeq3,37°$

(**) $\oplus\ \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ $\oplus\ \overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=-5$ $\oplus\ CA=1$ $\oplus\ CB=\sqrt{29}$

$\Rightarrow\ \cos(A\hat{C}B)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\dfrac{-5}{\sqrt{29}}$ à l'aide de la calculatrice : $A\hat{B}C\simeq\cos^{-1}(\frac{-5}{\sqrt{29}})\simeq158,2°$