C. LEBOSSÉ
C. HÉMERY

# ALGÈBRE
## et notions d'analyse

# ALGÈBRE
## ET
# NOTIONS D'ANALYSE

C. LEBOSSÉ
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Cl. Bernard

C. HÉMERY
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Lavoisier

# ALGÈBRE
# ET
# NOTIONS D'ANALYSE

Classes de Première C et D

PROGRAMME 1966

FERNAND NATHAN
ÉDITEUR
18, rue Monsieur-le-Prince, PARIS VIe

178 347

# ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

## COLLECTION LEBOSSÉ ET HÉMERY

### Premier Cycle

| | |
|---|---|
| 6e | Arithmétique et Travaux Pratiques |
| 5e | Arithmétique et Géométrie |
| 4e | Arithmétique, Algèbre et Géométrie |
| 3e | Algèbre, Arithmétique et Géométrie |

✳

### Deuxième Cycle

| | |
|---|---|
| 2e A | Algèbre et Géométrie |
| 2e C | Algèbre |
| 2e C | Géométrie |
| 1re A | Algèbre et notions d'Analyse |
| | Éléments de Statistique |
| 1re B | Algèbre et Statique |
| 1re C et D | Algèbre et notions d'Analyse |
| 1re C | Géométrie et Géométrie analytique |
| 1re D | Géométrie et Statistique |
| Terminale A | Analyse et notions de Probabilités |
| Terminale B | Algèbre et Probabilités |
| Terminales C et D | Algèbre et Analyse |
| Terminale C | Géométrie et Géométrie analytique |
| Terminale D | Géométrie et notions de Probabilités |

✳

### Enseignement technique
LEBOSSÉ - HÉMERY - FAURE

| | |
|---|---|
| 2e Techn. industrielle | Algèbre |
| 2e Techn. industrielle | Géométrie |
| 1re Techn. industrielle | Algèbre, Trigonométrie, Géométrie |
| Classes Terminales | Mathématiques (1 vol.) |

# EXTRAITS DES PROGRAMMES DU 8 JUIN 1966

*(B.O. n° 26 du 30-6-66)*

## CLASSES DE PREMIÈRE C ET D

### NOTIONS GÉNÉRALES

Un certain nombre des notions qui suivent auront été, bien entendu, dégagées peu à peu au cours des années précédentes : la présente énumération fixe le bilan de ce qui doit être définitivement acquis à la fin de l'année de Première C.

*Ensembles;* sous-ensemble, ensemble vide; inclusion, intersection, réunion; sous-ensembles complémentaires; algèbre des parties d'un ensemble fini. Produit cartésien de deux ensembles.

*Relation binaire entre éléments de deux ensembles ;* relation d'équivalence entre éléments d'un ensemble, classes d'équivalence, ensemble-quotient; relation d'ordre entre éléments d'un ensemble.

*Application d'un ensemble dans un ensemble;* application injective, surjective; application bijective, application réciproque; composition de deux applications.

*Vocabulaire de la logique;* implication, équivalence logique, réciproque. Signification des quantificateurs « quel que soit » et « il existe ».

### ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

**I. — Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle.**

Ensemble d'existence; fonction croissante sur un intervalle, fonction décroissante, fonction constante.

Représentation graphique d'une fonction.

Continuité d'une fonction pour une valeur de la variable; notion de limite (on admettra sans démonstration tous les théorèmes utilisés).

Dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable; différentielle. Fonction dérivée. Calcul de la dérivée d'une fonction constante, de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions dérivables (le théorème sur la dérivée d'une fonction composée est hors du programme).

Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction dont la courbe représentative est rapportée à un repère cartésien; équation tangente.

Définition de la dérivée seconde.

Énoncé, sans démonstration, du théorème permettant de déduire le sens de variation d'une fonction sur un intervalle du signe de sa dérivée.

## II. — Fonctions polynômes, fonctions rationnelles.

*(coefficients réels et variables réelles)*

1° — Fonctions polynômes : forme réduite, degré.
Identité (on pourra admettre que l'égalité numérique pour toutes les valeurs des variables entraîne l'égalité des coefficients des formes réduites). Polynôme nul.

2° — Polynômes d'une variable $x$; division par $x - a$; application aux polynômes $x^n \pm a^n$.

3° — Fonction rationnelle définie comme fonction quotient d'un polynôme par un autre; domaine d'existence.

4° — Étude et représentation graphique des fonctions définies par :

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad y = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad y = x^3 + px + q,$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad y = ax^4 + bx^2 + c,$$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 - b'x + c'} \qquad (a' \neq 0 \text{ et } a' = 0),$$

uniquement sur des exemples numériques.

## III. — Fonctions circulaires

1° Extension de la notion d'arc de cercle. Arc orienté, somme de deux arcs orientés. Mesure algébrique d'un arc orienté sur un cercle orienté.

Extension de la notion d'angle de deux demi-droites (ou de deux vecteurs) dans un plan. Angle orienté de deux demi-droites. Mesure algébrique d'un angle orienté de deux demi-droites dans le plan orienté.

Formule de Chasles pour les arcs de cercle orientés et pour les angles orientés de deux demi-droites. Arcs (ou angles) opposés, supplémentaires, complémentaires.

Cercle trigonométrique. Sinus, cosinus, tangente, cotangente d'un arc (ou d'un angle de demi-droites) orienté.

2° Fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ de la variable numérique $x$ : définition, existence, périodicité.

Relations entre $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Relations entre les fonctions circulaires de : $x$, $-x$, $\pi \pm x$, $\frac{\pi}{2} \pm x$.

3° Équations $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

4° Démonstration des formules classiques d'addition relatives à : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\operatorname{tg}(a \pm b)$.

Expressions de $\sin 2a$, $\cos 2a$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$. Expressions de $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

Transformation en somme du produit de deux sinus ou cosinus et transformation inverse.

Transformation de l'expression $a \cos x + b \sin x$; équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$.

5° Sens de variation des fonctions circulaires; étude de $\operatorname{tg} x$ quand $x$ tend vers $\pi/2$.

6° Inégalités $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ pour $0 < x < \frac{2}{\pi}$.

Dérivées des fonctions circulaires; dérivées de $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$. Courbes représentatives de ces fonctions (axes rectangulaires).

Valeurs approchées de $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ et $\cos \alpha$ $\left(\alpha \text{ et } 1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$ pour $\alpha$ « petit ».

7° Étude de fonctions composées faisant intervenir les symboles sinus, cosinus, tangente ou cotengente.

8° Usage de tables de fonctions numériques, de fonctions circulaires.

### IV. — Équations et inéquations.

1° Transformations élémentaires d'équations et d'inéquations. Changements d'inconnues. Interprétations graphiques.

2° Équation et inéquation du second degré à coefficients réels; comparaison d'un nombre aux racines.

3° Exemples d'équations et d'inéquations, rationnelles et irrationnelles, se ramenant au second degré. Équation bicarrée à coefficients réels.

4° Systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Transformation d'un système par la méthode dite de « substitution ». Remplacement d'une équation par une combinaison linéaire des équations du système. Exemples simples de systèmes d'équations et d'inéquations.

---

NOTE DES AUTEURS

Le programme ci-dessus est le programme d'Algèbre et d'Analyse de la classe de Première C, développé dans cet ouvrage.

Le programme de la classe de Première D ne comporte pas les paragraphes signalés en marge par ∿∿∿∿∿. Il en résulte que les leçons 2, 3, 11 et 24 ne sont pas du programme de cette classe.

# LIVRE I : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

**Première Leçon**

## VOCABULAIRE ET SYMBOLES

**1. Implication.** — Lorsqu'une propriété $\mathcal{A}$ (hypothèse) admet pour conséquence la propriété $\mathcal{B}$ (conclusion), on dit que la propriété $\mathcal{A}$ *implique* ou entraîne la propriété $\mathcal{B}$. On écrit :

$$\boxed{\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}} \qquad \text{lire “ } \mathcal{A} \textit{ implique } \mathcal{B} \text{ ”}$$

L'énoncé d'un théorème exprime que l'hypothèse $\mathcal{A}$ implique la conclusion $\mathcal{B}$.

Exemple. — Si une droite $\Delta$ est perpendiculaire à un plan P, elle est orthogonale à toute droite D située dans le plan P.

On écrit : $\Delta \perp P \Longrightarrow \Delta \perp D$

**2. Équivalence logique.** — Si les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont telles que $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ et que réciproquement $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$, ces deux propriétés sont dites équivalentes. On écrit :

$$\boxed{\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}} \qquad \text{lire “ } \mathcal{A} \textit{ équivaut à } \mathcal{B} \text{ ”}$$

Cette équivalence logique symbolise une condition nécessaire et suffisante :

$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ : Pour que $\mathcal{B}$ soit vérifiée il suffit que $\mathcal{A}$ le soit.
$\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$ : Pour que $\mathcal{B}$ soit vérifiée il est nécessaire que $\mathcal{A}$ le soit.

Exemple. — Si A, B, C, D sont quatre points d'un cercle de centre O, l'égalité des cordes AB et CD implique celle des angles au centre AOB et COD et réciproquement :

$$AB = CD \Longleftrightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$$

ce qui entraîne visiblement :

$$AB \neq CD \Longleftrightarrow \widehat{AOB} \neq \widehat{COD}.$$

*L'équivalence de deux propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ entraîne l'équivalence des propriétés contraires $\overline{\mathcal{A}}$ et $\overline{\mathcal{B}}$. Donc :*

$$\boxed{\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\overline{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{B}}}$$

**3. Principe de réciprocité.** — 1° ***Si deux implications contraires l'une de l'autre sont vraies, il en est de même des implications réciproques.***

Supposons que $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ et $\overline{\mathcal{A}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{B}}$. La propriété $\mathcal{B}$ ne saurait résulter de $\overline{\mathcal{A}}$ qui entraîne $\overline{\mathcal{B}}$ en contradiction avec $\mathcal{B}$. Donc, l'existence de $\mathcal{B}$ implique celle de $\mathcal{A}$. De même $\overline{\mathcal{B}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{A}}$. Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \text{ et } \overline{\mathcal{A}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{B}}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B} \text{ et } \overline{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{B}}}$$

2° ***Si, dans des conditions données, les seules hypothèses distinctes possibles $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ entraînent respectivement des conclusions distinctes $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ elles entraînent : $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A}' \Longleftrightarrow \mathcal{B}'$ et $\mathcal{A}'' \Longleftrightarrow \mathcal{B}''$.***

En effet, si $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{B}'$ et $\mathcal{A}'' \Longrightarrow \mathcal{B}''$, la propriété $\mathcal{B}$ ne saurait résulter de $\mathcal{A}'$ ou $\mathcal{A}''$ dont la réunion est le contraire de $\mathcal{A}$. Donc, $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$ et par suite :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \\ \mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{B}' \\ \mathcal{A}'' \Longrightarrow \mathcal{B}'' \end{array}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B} \\ \mathcal{A}' \Longleftrightarrow \mathcal{B}' \\ \mathcal{A}'' \Longleftrightarrow \mathcal{B}'' \end{array}}$$

Ainsi, dans un triangle ABC d'angles A, B, C et de côtés $a$, $b$, $c$ on peut démontrer aisément que : $A = B \Longrightarrow a = b$ et $A > B \Longrightarrow a > b$ donc que : $A < B \Longrightarrow a < b$.

On en déduit par réciprocité que :

$$A = B \Longleftrightarrow a = b, \quad A > B \Longleftrightarrow a > b \quad \text{et} \quad A < B \Longleftrightarrow a < b.$$

On évite ainsi la démonstration directe de l'implication $a > b \Longrightarrow A > B$ qui n'est pas immédiate.

**4. Quantificateurs.** — Ce sont des abréviations d'un usage courant :

1° ***Le quantificateur universel $\forall$ se lit : "Pour tout" ou "Quel que soit".***

Dans tout triangle ABC, la somme des trois angles A, B, C est égale à deux droits s'écrit en abrégé : $\forall$ triangle ABC : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^{D}$.

On lit : Pour tout triangle ABC (ou quel que soit le triangle ABC), la somme des angles $A + B + C$ est égale à deux droits.

2° ***Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit : "Il existe"*** et $\exists$ suivi de : se lit « il existe, ... tel que ».

Quel que soit le nombre relatif non nul $a$, il existe un nombre relatif $x$ tel que $ax = -5$. On écrit :

$$\forall\, a \neq 0,\ \exists x : ax = -5.$$

On emploie aussi le symbole $\nexists$ (il n'existe pas) et le symbole $\exists$? (Existe-t-il ?).

$$\nexists x : 0.x = -5; \qquad \exists ?\, x : 2x^2 - 4x + 5 = 0.$$

## NOTIONS SUR LES ENSEMBLES

**5. Définition.** — ***On désigne sous le nom d'ensemble toute collection d'éléments distincts rassemblés par une propriété commune.***

On peut ainsi envisager l'ensemble des lettres de l'alphabet, l'ensemble des points d'un plan, l'ensemble des directions de l'espace, l'ensemble des quadrilatères, etc.

On désigne par N l'ensemble des nombres entiers arithmétiques :

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \}$$

par Z l'ensemble des entiers relatifs, par Q l'ensemble des nombres rationnels relatifs et enfin par R l'ensemble des nombres réels ou relatifs rationnels et irrationnels.

*Un ensemble est fini* lorsqu'il ne contient qu'un nombre déterminé d'éléments.

$\{ a, b, c, d \}$ symbolise l'ensemble fini formé par les quatre lettres $a$, $b$, $c$, $d$ : chacune d'elles est un élément de cet ensemble. Si un ensemble ne contient qu'un seul élément $a$ on le désigne par $\{ a \}$.

*Un ensemble est infini ou illimité* lorsqu'il contient un nombre illimité d'éléments. Pour désigner l'ensemble des quadrilatères, on écrira : { quadrilatères }.

**6. Appartenance.** — Lorsque $a$ est un élément de l'ensemble E, on écrit :

$$\boxed{a \in E}$$

ce qui se lit : " *a appartient à* E " ou " *a est un élément de* E " (fig. 1).

Si $b$ n'est pas un élément de l'ensemble E on écrit de même :

$\boxed{b \notin E}$ lire " *b n'appartient par à* E "

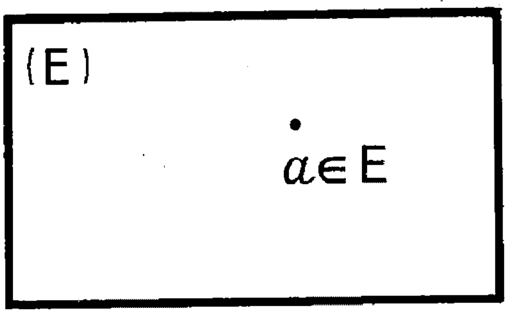



Fig. 1.

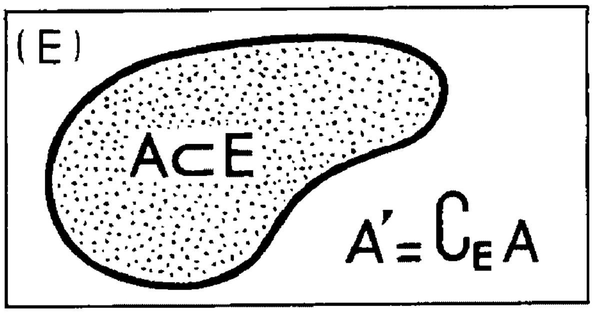



Fig. 2.

Exemples. — 1° Ainsi on a :

$$7 \in N \quad \text{et} \quad \sqrt{3} \in R, \text{ mais } \quad \sqrt{3} \notin Q.$$

2° Désignons par E l'ensemble des cartes d'un jeu de 32 cartes, par $a$ le roi de cœur et par $b$ le cinq de pique : $a \in E$ et $b \notin E$

Lorsqu'un ensemble ne contient aucun élément ont dit que cet ensemble est *vide*. On le symbolise par $\varnothing$.

Ainsi l'ensemble E des droites $\Delta$ de l'espace parallèles à deux droites concourantes $D_1$ et $D_2$, est l'ensemble vide : $E = \varnothing$.

Lorsque $a$ et $b$ désignent un même élément d'un ensemble E on dit que $a$ et $b$ *coïncident* et on écrit : $a = b$ ($a$ égale $b$).

Dans le cas contraire on écrit : $a \neq b$ ($a$ différent de $b$).

Si deux ensembles A et B sont formés des mêmes éléments, c'est-à-dire, si tout élément de chacun d'eux appartient à l'autre, ces deux ensembles sont dits *identiques*.

On écrit : $A = B$

**7. Sous-ensembles. — Inclusion. — *Tout ensemble* A *composé d'éléments appartenant à l'ensemble* E *constitue un sous-ensemble de* E.**

On dit alors que l'ensemble A est inclus dans E. Parmi les sous-ensembles de E figure E lui-même. Si A est un sous-ensemble de E, autre que E, on écrit :

$$\boxed{A \subset E} \qquad A \textit{ est strictement inclus dans } E.$$

On a alors affaire à une inclusion au sens strict (fig. 2). Ainsi pour les ensembles de nombres, on peut écrire :

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Si A peut être E lui-même on écrit :

$$\boxed{A \subseteq E} \qquad \text{On a affaire à une inclusion au sens large.}$$

***L'ensemble* A′ *des éléments de* E *qui n'appartiennent pas au sous-ensemble* A *est l'ensemble complémentaire de* A *dans* E.**

On écrit : $A' = \complement_E A$ (A′ complément de A dans E)

ou parfois : $A' = E - A$ (A′ égale E amputé de A).

Notons que : 1° $\complement_E E = \varnothing$.

2° $A \subseteq B,\ B \subseteq A \Longrightarrow A = B$.

3° $A \subseteq B,\ B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

**8. Intersection de deux ensembles.** — ***On appelle intersection de deux ensembles* A *et* B*, l'ensemble* I *constitué par les éléments communs à* A *et* B** (fig. 3).

On écrit : $\boxed{I = A \cap B}$ et on lit " A *inter* B "

Donc : $x \in I \Longleftrightarrow x \in A$ et $x \in B$.

Ainsi : { carrés } = { rectangles } ∩ { losanges }.

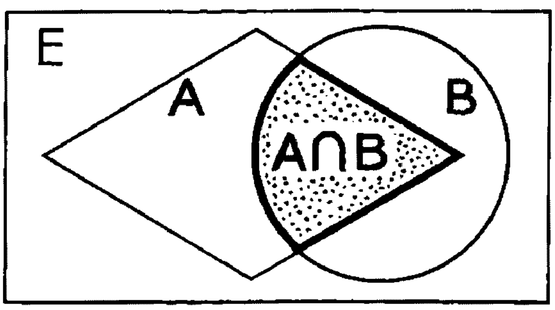



Fig. 3.

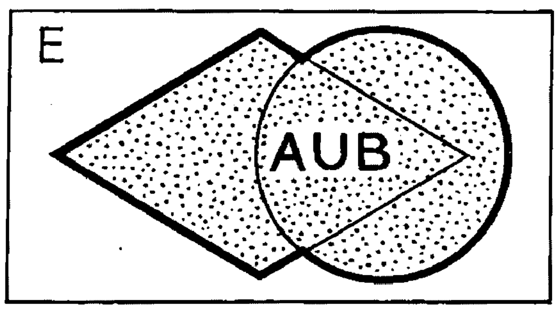



Fig. 4.

Plus généralement :

*L'intersection de plusieurs ensembles* A, B, C, *est l'ensemble* I *constitué par les éléments communs à* A, B, C, *et se note* $A \cap B \cap C$.

Si A, B, C sont respectivement les ensembles d'entiers naturels multiples de 2, de 3 et de 5, l'intersection de ces ensembles est l'ensemble des multiples de 30.

***Deux ensembles sont disjoints lorsqu'ils n'ont aucun élément commun.***

Dans ce cas : $A \cap B = \varnothing$.

**9. Réunion de deux ensembles.** — ***On appelle réunion de deux ensembles*** A ***et*** B ***l'ensemble*** R ***constitué par les éléments appartenant à l'un au moins des ensembles*** A ***et*** B (fig. 4).

On écrit : $\boxed{R = A \cup B}$ et on lit " A *union* B "

Donc : $x \in R \Longleftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$. La conjonction « ou » signifiant que $x$ appartient soit à A, soit à B soit aux deux à la fois.

Ainsi l'ensemble { rectangles } $\cup$ { losanges } comprend non seulement les rectangles et les losanges ordinaires mais aussi les carrés. Plus généralement :

*La réunion de plusieurs ensembles* A, B, C *est l'ensemble* R *constitué par les éléments appartenant à l'un au moins des ensembles* A, B, C *et se note* $A \cup B \cup C$.

Si A, B, C sont respectivement l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $2 \leqslant x \leqslant 5$; $3 \leqslant x \leqslant 7$ et $6 \leqslant x \leqslant 8$, la réunion de ces ensembles est l'ensemble des réels $x$ tels que $2 \leqslant x \leqslant 8$.

***On effectue une partition d'un ensemble*** E, ***lorsqu'on répartit les éléments de*** E ***en plusieurs sous-ensembles disjoints deux à deux*** A, B, C ***dont la réunion est l'ensemble*** E.

Ainsi les quatre symboles : trèfle, carreau, cœur, pique déterminent une partition de l'ensemble des cartes d'un jeu en quatre sous-ensembles disjoints (appelés couleurs).

**10. Algèbre des parties d'un ensemble fini.** — Soit E un ensemble fini. Les sous-ensembles de E sont les éléments d'un nouvel ensemble appelé « ensemble des parties de E » et noté $\mathcal{P}_{(E)}$. Donc :

$$A \in \mathcal{P}_{(E)} \Longrightarrow A \subseteq E. \quad \text{En particulier :} \quad \varnothing \in \mathcal{P}_{(E)} \text{ et } E \in \mathcal{P}_{(E)}.$$

Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{P}_{(E)}$, il en est de même de leur intersection et de leur réunion :

$$\left.\begin{array}{l} \forall A \in \mathcal{P}_{(E)} \\ \forall B \in \mathcal{P}_{(E)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A \cap B \in \mathcal{P}_{(E)} \\ A \cup B \in \mathcal{P}_{(E)}, \end{array}\right.$$

On dit que l'intersection et la réunion sont des lois de composition interne définies dans l'ensemble $\mathcal{P}_{(E)}$. Ces lois possèdent les propriétés suivantes :

1°) ***Commutativité :*** $\forall A \in \mathcal{P}_{(E)}$; $\forall B \in \mathcal{P}_{(E)}$ :

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A$$

L'intersection et la réunion ne font pas intervenir l'ordre dans lequel on prend les sous-ensembles A et B.

2°) ***Associativité*** : Si A, B, C sont trois éléments de $\mathcal{P}_{(E)}$ :

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Pour que $x \in A \cap (B \cap C)$, il faut et il suffit que $x$ soit commun à A et à $B \cap C$, donc à A, B, et C, donc qu'il appartienne à $A \cap B \cap C$.

Pour que $x \in A \cup (B \cup C)$, il faut et il suffit que $x$ appartienne à l'un au moins des ensembles A et $B \cup C$, donc à l'un au moins des ensembles A, B, C, donc qu'il appartienne à $A \cup B \cup C$.

3° ***Distributivité :*** Chacune des deux lois est distributive par rapport à l'autre, c'est-à-dire, si A, B, C sont trois éléments de $\mathcal{P}_{(E)}$ :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

et

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Si $x$ appartient à $A \cup (B \cap C)$, il appartient à A ou il est commun à B et C, il appartient donc à $A \cup B$ et à $A \cup C$, donc à leur intersection. Réciproquement si $x$ appartient à $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, il appartient à la fois à A ou B et A ou C, donc $x$ appartient à A ou il est commun à B et C, donc il appartient à $A \cup (B \cap C)$.

Si $x$ appartient à $A \cap (B \cup C)$, il est commun à A et à $B \cup C$; il appartient donc à $(A \cap B)$ ou à $(A \cap C)$ donc à $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Réciproquement si $x$ appartient à $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, il appartient à $A \cap B$ ou à $A \cap C$; donc $x$ appartient d'une part à A, d'autre part à B ou C, il appartient donc à $A \cap (B \cup C)$.

**11. Produit cartésien de deux ensembles.** — ***On appelle produit de l'ensemble*** A ***par l'ensemble*** B, ***l'ensemble de tous les couples constitués par l'association, dans cet ordre, d'un élément de*** A ***et d'un élément de*** B.

Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{x, y\}$. Le produit $P = A \times B$ ou AB de ces deux ensembles admet pour éléments les 6 couples suivants (fig. 5) :

$$(a; x),\ (a; y),\ (b; x),\ (b; y),\ (c; x) \text{ et } (c; y).$$

| A \ B | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $a$ | $(a;x)$ | $(a;y)$ |
| $b$ | $(b;x)$ | $(b;y)$ |
| $c$ | $(c;x)$ | $(c;y)$ |

Fig. 5.

| Premier élément \ Deuxième élément | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $(a;a)$ | $(a;b)$ | $(a;c)$ |
| $b$ | $(b;a)$ | $(b;b)$ | $(b;c)$ |
| $c$ | $(c;a)$ | $(c;b)$ | $(c;c)$ |

Fig. 6.

Plus généralement, si A et B admettent respectivement $n$ et $p$ éléments, leur produit AB admet $np$ éléments.

***Le carré d'un ensemble*** A ***est le produit*** $A^2 = A \times A$ ***de cet ensemble par lui-même.***

Si A admet $n$ éléments, son carré $A^2$ en admet $n^2$. Ainsi le carré de $A = \{a, b, c\}$ admet les neuf éléments (fig. 6) :

$$(a; a),\ (a; b),\ (a; c),\ (b; a),\ (b; b),\ (b; c),\ (c; a),\ (c; b) \text{ et } (c; c).$$

## RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE

**12. Définition.** — ***On établit une relation binaire entre les éléments d'un ensemble*** E, ***si à tout couple*** $(a; b)$ ***de*** $E^2$ ***on peut associer une propriété*** $\mathcal{R}$ ***telle que le couple*** $(a; b)$ ***ou bien possède la propriété*** $\mathcal{R}$ ***ou bien ne la possède pas.***

Si le couple $(a; b)$ possède la propriété $\mathcal{R}$, on écrit : $\boxed{a \mathcal{R} b}$.

Le symbole $\mathcal{R}$ désigne le plus souvent l'un des symboles connus d'égalité, d'inégalité, de parallélisme, d'orthogonalité, d'inclusion, etc.

Ainsi l'égalité de deux vecteurs est une relation binaire entre les vecteurs de l'espace. Il en est de même de leur parallélisme ou de leur orthogonalité :

On écrit : $\vec{V_1} = \vec{V_2}$, $\vec{V_1} \parallel \vec{V_2}$ ou $\vec{V_1} \perp \vec{V_2}$

**13. Propriétés.** — ***Une relation binaire*** $\mathcal{R}$ ***dans un ensemble*** E ***est dite :***

1° ***Réflexive*** si $a \in E \Longrightarrow a\, \mathcal{R}\, a$.

2° ***Symétrique*** si $a\, \mathcal{R}\, b \Longrightarrow b\, \mathcal{R}\, a$.

3° ***Antisymétrique*** si $a\, \mathcal{R}\, b$ et $b\, \mathcal{R}\, a \Longrightarrow a = b$.

4° ***Transitive*** si $a\, \mathcal{R}\, b$ et $b\, \mathcal{R}\, c \Longrightarrow a\, \mathcal{R}\, c$.

L'égalité de deux vecteurs est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive. L'orthogonalité de deux vecteurs est une relation symétrique mais non réflexive et non transitive.

La relation d'inclusion au sens large $\subseteq$ entre deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E est une relation réflexive, antisymétrique et transitive.

**14. Relation d'équivalence.** — ***Une relation*** $\mathcal{R}$ ***définie dans un ensemble*** E ***est dite relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.***

Donc :

$$a \in E \Longrightarrow a\, \mathcal{R}\, a \qquad (\textit{réflexivité})$$

$$a \neq b \text{ et } a\, \mathcal{R}\, b \Longrightarrow b\, \mathcal{R}\, a \qquad (\textit{symétrie})$$

$$a, b, c \text{ distincts : } a\, \mathcal{R}\, b \text{ et } b\, \mathcal{R}\, c \Longrightarrow a\, \mathcal{R}\, c \qquad (\textit{transitivité}).$$

Exemples. — 1° Il en est ainsi des égalités définies en Algèbre ou en Géométrie :

$$x = x\ ; \quad x = y \Longrightarrow y = x \quad \text{et} \quad x = y\ ;\ y = z \Longrightarrow x = z.$$

$$F_1 = F_1; \quad F_1 = F_2 \Longrightarrow F_2 = F_1 \quad \text{et} \quad F_1 = F_2; F_2 = F_3 \Longrightarrow F_1 = F_3.$$

2° La relation $\mathcal{R}$ exprimant que deux droites de l'espace ont même direction (parallèles ou confondues) est une relation d'équivalence car :

$D_1$ a même direction que $D_1$; $D_1 \| D_2 \Longrightarrow D_2 \| D_1$ et $D_1 \| D_2$, $D_2 \| D_3 \Longrightarrow D_1 \| D_3$.

3° Par contre, la relation d'orthogonalité entre deux droites de l'espace n'est pas une relation d'équivalence car une droite n'est pas orthogonale à elle-même, et les relations $D_1 \perp D_2$, $D_2 \perp D_3$ n'entraînent pas obligatoirement $D_1 \perp D_3$.

*Deux éléments a et b de l'ensemble* E *liés par la relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *sont dits équivalents, modulo* $\mathcal{R}$.

**15. Classes d'équivalence.** — ***L'ensemble*** E ***étant muni d'une relation d'équivalence*** $\mathcal{R}$, ***on appelle classe d'équivalence de l'élément*** $a$, ***l'ensemble*** $C_a$ ***de tous les éléments de*** E ***équivalents à*** $a$ ***modulo*** $\mathcal{R}$.

1° Tout élément $x$ de E appartient à une classe d'équivalence $C_x$ car $x\, \mathcal{R}\, x$.

2° Deux classes d'équivalence qui ont un élément commun sont confondues.

En effet, si $x \in C_a$ et $x \in C_b$ les relations $x\, \mathcal{R}\, a$ et $x\, \mathcal{R}\, b$ entraînent par symétrie et transivité : $a\, \mathcal{R}\, b$, soit $C_a = C_b$.

3° Si $a$ et $b$ ne sont pas équivalents modulo $\mathfrak{R}$, les classes d'équivalence $C_a$ et $C_b$ ne peuvent posséder d'élément commun $x$, sinon elles seraient confondues, ce qui entraînerait $a \mathfrak{R} b$, contraire à l'hypothèse.

La relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ permet donc d'effectuer une partition de E en sous-ensembles disjoints $C_a$, $C_b$, $C_c$ ... dont la réunion est l'ensemble E.

***L'ensemble des classes d'équivalence de* E *modulo* $\mathfrak{R}$ *est appelé l'ensemble quotient de* E *par* $\mathfrak{R}$ *et s'écrit* $\frac{E}{\mathfrak{R}}$.**

Exemple. — Soit E l'ensemble des droites de l'espace et soit $\mathfrak{R}$ la relation d'équivalence exprimant que deux droites de l'espace ont même direction (n° 14, exemple 2).

Toutes les droites de même direction qu'une droite donnée $D_1$ constituent la classe d'équivalence $C_1$ définie par $D_1$ (ou par l'une de ses parallèles). Si $D_1$ et $D_2$ n'ont pas même direction, elles définissent deux classes disjointes, $C_1$ et $C_2$ ne possédant aucun élément commun.

L'ensemble des classes d'équivalence $C_1$, $C_2$, $C_3$ ... est l'ensemble quotient $\frac{E}{\mathfrak{R}}$ qui n'est autre que l'ensemble des directions de l'espace.

**16. Relation d'ordre au sens strict.** — ***Une relation binaire* $\mathfrak{R}$ *dans un ensemble* E *est une relation d'ordre au sens strict si elle est transitive, mais non réflexive et non symétrique.***

Dans l'ensemble des nombres relatifs, le symbole $<$ définit une relation d'ordre strict : car $a < b$ et $b < c \Longrightarrow a < c$ : la relation est transitive.

Mais on n'a pas $a < a$ et $a < b$ exclut $b < a$ ou $b = a$.

De même parmi les sous-ensembles d'un ensemble E la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre strict.

**17. Relation d'ordre au sens large.** — ***Une relation binaire* $\mathfrak{R}$ *dans un ensemble* E *est une relation d'ordre au sens large si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.***

Dans l'ensemble des nombres relatifs, le symbole $\leqslant$ définit une relation d'ordre large.

En effet : $a \leqslant a$ (réflexivité); $a \leqslant b$ et $b \leqslant a \Longrightarrow a = b$ (antisymétrie)

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c \qquad \text{(transitivité).}$$

De même le symbole $\subseteq$ définit une relation d'ordre au sens large (n° 12).

**18. Ensemble ordonné.** — ***Un ensemble* E *dans lequel est définie une relation d'ordre* $\mathfrak{R}$ *est dit ordonné.***

On peut en effet classer dans un ordre déterminé tous les éléments d'un sous-ensemble de E lorsque ces éléments sont deux à deux comparables par $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire vérifient soit $a \mathfrak{R} b$ soit $b \mathfrak{R} a$.

Ainsi les relations $a \mathfrak{R} c$, $d \mathfrak{R} b$ et $c \mathfrak{R} d$ permettent d'écrire : $a \mathfrak{R} c \mathfrak{R} d \mathfrak{R} b$ d'où le classement ou l'ordre : $a$, $c$, $d$, $b$.

1° Lorsque deux éléments distincts quelconques d'un ensemble E sont comparables par une relation d'ordre (strict ou large), cette relation $\mathfrak{R}$ est dite d'*ordre total* et l'ensemble E est dit *totalement ordonné*.

Il en est ainsi de l'ensemble des nombres relatifs par la relation $<$ (ou $\leqslant$), d'un ensemble d'événements historiques par l'ordre chronologique, de l'ensemble des mots du dictionnaire par l'ordre alphabétique. Cet exemple permet de voir qu'une modification de la relation d'ordre $\mathcal{R}$ (l'ordre des lettres de l'alphabet) entraînerait un bouleversement complet de l'ordre des mots dans le dictionnaire.

2° Lorsque deux éléments distincts de E ne sont pas nécessairement comparables par $\mathcal{R}$, cette relation est dite d'*ordre partiel* et l'ensemble E est dit *partiellement ordonné.*

Ainsi dans l'ensemble N des entiers naturels la relation $\mathcal{R}$ qui exprime que $a$ est *un diviseur de* $b$, est une relation d'ordre large qui permet de classer 3, 6, 24, 120, 240 ou 1, 7, 21, 42, 126 mais qui ne permet pas de comparer 3 et 7 ou 11 et 25. Ce n'est qu'une relation d'ordre partiel.

## APPLICATIONS ET FONCTIONS

**19. Notion d'application.** — ***On appelle application d'un ensemble*** A ***dans un ensemble*** B, ***toute correspondance qui, à tout élément de*** A, ***associe un élément unique de*** B.

Cette correspondance est symbolisée par une lettre T, $f$ ... et :

$$\forall a \in \text{A}, \exists b \in \text{B} \quad \text{tel que} \quad b = \text{T}(a) \quad \text{ou} \quad b = f(a).$$

On écrit : $a \mapsto b = f(a)$ ou $a \underset{\to}{f} b$ et ont lit : « $a$ s'applique sur $b$ ».

(Éviter d'écrire $a \longrightarrow b$ s'il peut y avoir confusion avec « $a$ tend vers $b$ »).

L'ensemble A est l'*ensemble initial* et l'ensemble B *l'ensemble final* de l'application. L'élément $a$ est l'*antécédent* de $b$ et l'élément $b$ est l'*image de* $a$ dans B.

Lorsque l'ensemble B est confondu avec A on a affaire à une application de A sur lui-même.

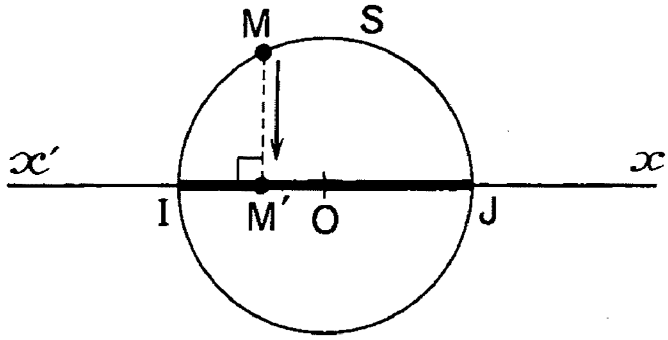



Fig. 7.

Exemple. — Soit A l'ensemble des points M du cercle de diamètre IJ (fig. 7) et B l'ensemble des points M' de la droite $x'x$ définie par IJ. La projection orthogonale T de M en M' sur $x'x$ est une application de A dans B et : $\text{M} \mapsto \text{M}' = \text{T(M)}$.

**20. Injection. — Surjection.**

1° ***Une application «f» de*** A ***dans*** B ***est dite injective lorsque deux éléments distincts de*** A ***ont des images distinctes dans*** B.

$$\forall a_1, a_2 \in \text{A} : \qquad a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2). \qquad \text{(fig. 8)}$$

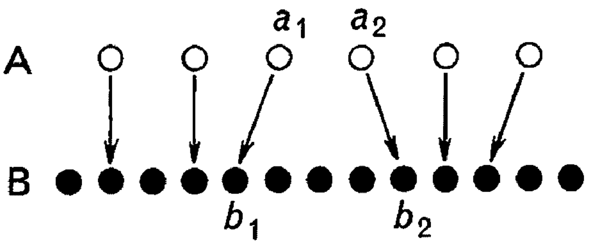



Fig. 8.

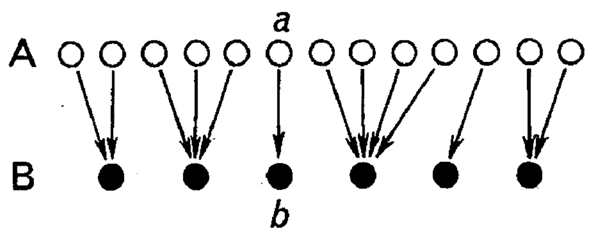



Fig. 9.

2° ***Elle est dite surjective lorsque tout élément de*** B ***est l'image d'au moins un élément de*** A. ***On dit alors que*** A ***s'applique sur*** B.

$$\forall b \in \text{B}, \exists a \in \text{A} \text{ tel que} : \quad b = f(a). \qquad \text{(fig. 9)}$$

Ainsi la projection orthogonale sur la droite $x'x$ (fig. 7) réalise une application injective, non surjective, du demi-cercle ISJ sur la droite $x'x$. Par contre elle réalise une application surjective, non injective, du cercle entier de diamètre IJ sur le segment de droite IJ.

**21. Bijection.** — ***Une application* « $f$ » *de* A *dans* B *est dite bijective (ou biunivoque) si tout élément de* B *est l'image d'un élément unique de* A.**

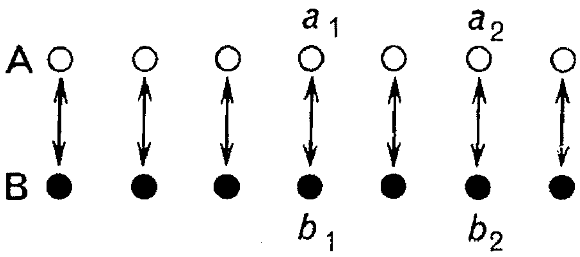



Fig. 10.

$\forall b \in B, \exists a \in A$ tel que $b = f(a)$ (fig. 10)

$\forall a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \Longleftrightarrow b_1 \neq b_2.$$

Une application bijective ou *bijection* de A sur B est donc une application à la fois surjective et injective de A dans B.

Ainsi (fig. 7) la projection orthogonale sur $x'x$ réalise une bijection du demi-cercle ISJ sur le segment IJ.

**22. Bijections réciproques.** — ***Toute bijection* « $f$ » *d'un ensemble* A *sur un ensemble* B *définit une bijection* « $\varphi$ » *de* B *sur* A. *Les deux bijections associées* « $f$ » *et* « $\varphi$ » *sont dites inverses ou réciproques.***

L'application « $f$ » étant bijective, tout élément $b$ de B admet un antécédent unique $a$ dans A. La correspondance $b \mapsto a$ ainsi réalisée définit une application « $\varphi$ » de B dans A (nº 19). Comme tout élément $a$ de A est ainsi l'image de l'élément unique $f(a)$ de B, cette application « $\varphi$ » est bijective (nº 21). Donc :

$$a \mapsto b = f(a) \Longleftrightarrow b \mapsto a = \varphi(b).$$

On dit qu'il y a une *correspondance bijective* entre les éléments de l'ensemble A et ceux de l'ensemble B, ce qui s'écrit : $a \leftrightarrow b$.

Notons qu'on appelle *application identique* $\mathfrak{J}_A$ l'application bijective de tout ensemble A sur lui-même dans laquelle chaque élément $a$ coïncide avec son image.

**23. Composition des applications.** — Considérons une application « $f$ » de A dans B et une application « $g$ » de B dans C.

A tout élément $a$ de A, on peut successivement associer l'élément $b = f(a)$ de B puis l'élément $c = g(b) = g[f(a)]$. La correspondance $a \mapsto c$ ainsi réalisée définit une application « $h$ » de A dans C. On écrit :

$$c = h(a) = g[f(a)]$$

ou $\boxed{h(a) = g_\circ f(a)}$

ce qui revient à poser (fig. 11) :

$$h = g_\circ f.$$

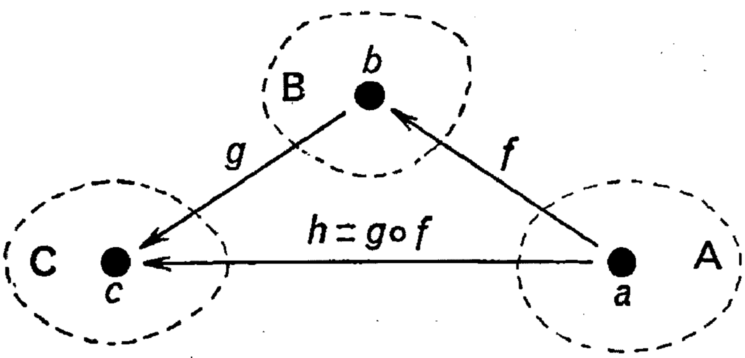



Fig. 11.

***L'application* $h = g_\circ f$ *est le produit des applications* « $f$ » *et* « $g$ » *effectuées dans cet ordre.***

Exemple. — Soient deux plans rectangulaires P et Q issus de la droite $\Delta$ (fig. 12). Désignons par $f$, $g$ et $h$ les projections orthogonales d'un point M de l'espace, respectivement en H sur P, en K sur Q et en N sur $\Delta$. On voit que :

$$\mathrm{M} \rightarrow \mathrm{H} = f(\mathrm{M}) \rightarrow \mathrm{N} = g(\mathrm{H}) = g \circ f(\mathrm{M}) = h(\mathrm{M})$$
$$\mathrm{M} \rightarrow \mathrm{K} = g(\mathrm{M}) \rightarrow \mathrm{N} = f(\mathrm{K}) = f \circ g(\mathrm{M}) = h(\mathrm{M}).$$

Il en résulte que : $h = f \circ g = g \circ f$. Le produit des deux applications $f$ et $g$ de l'ensemble E des points de l'espace sur P et Q est donc commutatif.

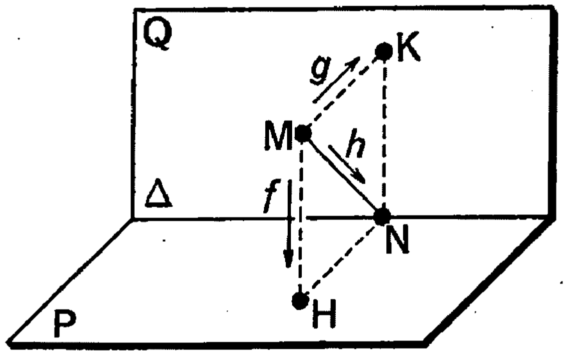



Fig. 12.

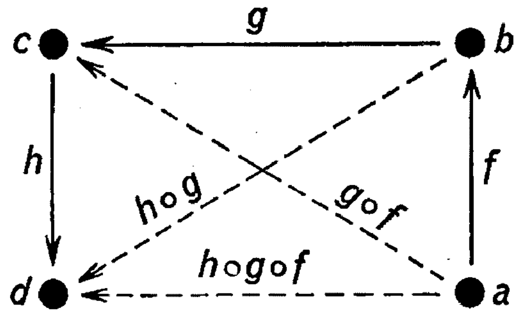



Fig. 13.

Lorsque les applications « $f$ » et « $g$ » sont deux bijections réciproques de A sur A, leur produit est l'application identique : $f \circ g = g \circ f = \mathfrak{I}_A$.

C'est pourquoi l'application réciproque de « $f$ » est symbolisée par « $f^{-1}$ »

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathfrak{I}_A.$$

*Un produit de plusieurs applications est toujours associatif.* Ainsi (fig. 13) :

$$a \rightarrow b = f(a) \rightarrow c = g\,[f(a)] \rightarrow d = h\ \{g\,[f(a)]\}$$

On peut d'autre part écrire : $d = h(c) = h\,[g \circ f(a)]$ ou $d = h \circ g(b) = h \circ g\,[f(a)]$.

Ce qui conduit à écrire : $h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

**24. Notion de fonction d'une variable.** — ***On appelle fonction définie dans un ensemble de réels*** A ***et à valeurs dans un ensemble de réels*** B, ***toute relation $f$ qui, à tout élément $x$ de*** A ***fait correspondre au plus un élément $y$ de*** B.

L'ensemble A′ des éléments $x$ de A qui ont effectivement un correspondant $y$ dans B est le *domaine de définition de la fonction f*. L'élément $x$ est la *variable* et $f(x)$ la valeur correspondante de la fonction. Donc :

$$\forall x \in \mathrm{A}' \subseteq \mathrm{A},\ \exists y \in \mathrm{B} \quad \text{tel que} \quad y = f(x).$$

***La fonction « f » définit donc une application de son domaine de définition*** A′ ***dans l'ensemble*** B.

Si $\mathrm{A}' = \mathrm{A}$ on dit que la *fonction f est définie sur* A.

Exemples. — 1° Les relations $y = x^2$, $y = ax + b$ caractérisent des fonctions de $x$, définies sur l'ensemble R des nombres réels et à valeurs dans R.

2° L'égalité $y = \sqrt{x} - 1$ caractérise une fonction définie sur $\mathrm{R}^+$ et à valeurs dans R.

3° La relation $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{M}(t)$ définit un vecteur fonction du temps $t$ et par suite le mouvement du point M dans l'espace.

Remarque. — Il est bon de noter qu'une fonction « $f$ » ne dépend pas du nom de la variable, mais seulement de l'ensemble sur lequel on l'envisage. Ainsi les fonctions $f(x) = \sin x$, $f(u) = \sin u$ et $f(\varphi) = \sin \varphi$ ont la même signification et même valeur si $x$, $u$ et $\varphi$ désignent le même élément du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset \mathrm{R}$.

**25. Fonction de plusieurs variables.** — ***On appelle fonction de plusieurs variables toute relation qui, à un élément donné*** $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ***du produit*** A ***des ensembles*** $A_1, A_2 \ldots A_n$ ***fait correspondre au plus un élément*** $y$ ***de l'ensemble*** B.

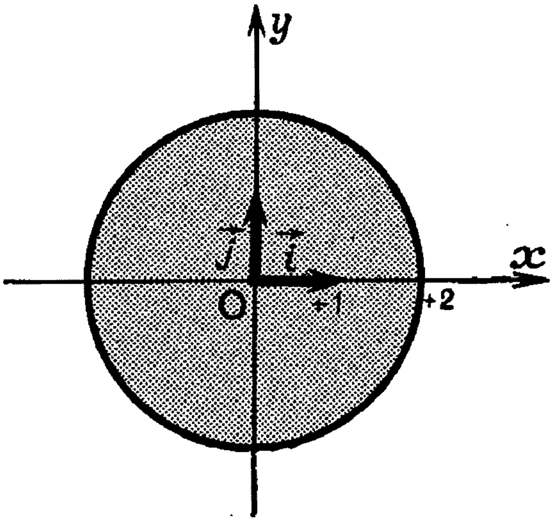



Fig. 14.

$$(x_1, x_2, \ldots x_n) \rightarrow y = f(x_1, x_2 \ldots x_n).$$

L'ensemble A′ formé par les éléments $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ de A qui ont effectivement un associé dans B est le *domaine de définition* de la fonction $f$.

Exemples. — 1° La relation $u = x^3 + y^2 - z$ détermine une fonction des variables $x$, $y$, $z$ définie sur $R^3$ et à valeurs dans R.

2° L'égalité $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ caractérise une fonction des variables $x$ et $y$, définie dans $R^2$ et à valeurs dans $R^+$. Son domaine de définition est déterminé par l'inégalité : $x^2 + y^2 \leqslant 4$. C'est donc, dans un plan rapporté à un repère orthonormé $Oxy$, l'ensemble des points non extérieurs au cercle : $x^2 + y^2 = 4$ de centre O et de rayon 2 (fig. 14).

*Deux fonctions des mêmes variables $f_1$ et $f_2$ sont équivalentes sur un ensemble donné* A si pour tout élément $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ de cet ensemble, elles sont toutes deux définies et ont même valeur dans B.

$$\forall (x_1, x_2 \ldots x_n) \in A \Longrightarrow f_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = f_2(x_1, x_2 \ldots x_n).$$

Exemple. — Les fonctions $z_1 = \dfrac{x^3 - y^3}{x - y}$ et $z_2 = x^2 + xy + y^2$ sont équivalentes pour tout couple $(x, y)$, élément de $R^2$, tel que $x \neq y$.

## EXERCICES

**1.** On considère tous les quadrilatères plans convexes Q dont les diagonales AC et BD se coupent en O et dont les angles sont A, B, C, D. Former tous les groupes de propriétés équivalentes à :

$$Q \in \{\text{parallélogrammes}\}.$$

**2.** Reprendre le problème précédent pour $Q \in \{\text{rectangles}\}$, pour $Q \in \{\text{losanges}\}$, $Q \in \{\text{carrés}\}$ et enfin $Q \in \{\text{trapèzes isocèles}\}$.

**3.** On donne dans l'espace un plan P et deux droites D et Δ non contenues dans le plan P. Établir l'équivalence :

$$\begin{vmatrix} \Delta \perp P \\ \Delta \perp D \end{vmatrix} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} P \parallel D \\ P \perp \Delta \end{vmatrix}$$

Énoncer les conditions nécessaires et suffisantes qui en découlent.

**4.** Un angle AOB se projette orthogonalement en A′O′B′ sur un plan P non parallèle à OB. Énoncer les théorèmes traduisant les équivalences :

$$\begin{vmatrix} OA \perp OB \\ OA \parallel O'A' \end{vmatrix} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} O'A' \perp O'B' \\ O'A' \parallel OA \end{vmatrix} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} OA \perp OB \\ O'A' \perp O'B' \end{vmatrix}$$

**5.** Étudier l'application de la loi de réciprocité sur l'un des exemples suivants : position d'un point du plan par rapport à une médiatrice, ou à une bissectrice ou par rapport à un cercle. Position relative d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles. Arc capable, etc.

**6.** A étant un sous-ensemble de l'ensemble E, établir les relations suivantes :

$$A \cup \varnothing = A; \quad A \cup E = E; \quad A \cup A = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing; \quad A \cap E = A; \quad A \cap A = A$$

**7.** On désigne par E — A, l'ensemble complémentaire de A dans l'ensemble E. Établir les relations suivantes :

$$A \cup (E - A) = E \quad ; \quad A \cap (E - A) = \varnothing$$
$$A \subset B \Longleftrightarrow E - B \subset E - A$$

**8.** Soient A et B deux éléments donnés de $\mathcal{P}_E$.

1° A quelle condition peut-on trouver des éléments X de $\mathcal{P}_E$ tels que : $A = B \cap X$.

2° A quelle condition peut-on trouver des éléments Y de $\mathcal{P}_E$ tels que : $A = B \cup Y$.

3° Montrer qu'il n'existe pas d'éléments X ni d'éléments Y appartenant à $\mathcal{P}_E$ et tels que :

$$A \cap X = E \quad \text{ou} \quad A \cup Y = \varnothing.$$

**9.** Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{r} A \cup B \subset A \cup C \\ \text{et } A \cap B \subset A \cap C \end{array}\right\} \Longrightarrow B \subset C.$$

**10.** Soient A et B éléments de $\mathcal{P}_E$. On désigne par $\overline{A}$ et $\overline{B}$ leurs complémentaires dans E.

1° Dénombrer les relations :

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \quad ; \quad \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}.$$

2° En déduire que les propriétés relatives à l'une des lois $\cap$ ou $\cup$ sont conséquences l'une de l'autre.

**11.** Démonter le nombre des éléments de $\mathcal{P}_E$ lorsque E comprend 1, 2, 3 ou 4 éléments. Vérifier que si $n$ est le nombre des éléments de E, celui de $\mathcal{P}_E$ est $2^n$.

**12.** Si E est l'ensemble des nombres $x$ tels que $0 \leqslant x \leqslant 4$, montrer que l'ensemble $E^2$ peut être représenté géométriquement par l'ensemble des points non extérieurs à un carré de côté 4 construit sur deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$.

— Examiner si les relations suivantes sont des relations d'équivalence et déterminer s'il y a lieu les classes d'équivalence correspondantes :

**13.** E désigne l'ensemble des axes de l'espace, et $\mathcal{R}$ exprime que deux axes ont même direction et même sens.

**14.** E désigne l'ensemble des triangles d'un plan et $\mathcal{R}$ exprime que deux triangles sont semblables.

**15.** E désigne l'ensemble des triangles d'un plan et $\mathcal{R}$ exprime que deux triangles sont équivalents.

**16.** E désigne l'ensemble des points de l'espace et $\mathcal{R}$ exprime que les points A et B sont alignés avec un point fixe O.

**17.** Deux entiers relatifs $a$ et $b$ sont dits congruents modulo 5, si la différence $a - b$ ou $b - a$ est un multiple de 5. On écrit : $17 \equiv 2 \pmod 5$.

Montrer que cette congruence est une relation d'équivalence dans l'ensemble Z des entiers relatifs et qu'elle définit cinq classes d'équivalence désignées par leur plus petit élément positif ou nul : $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

**18.** 1° Démontrer que dans le plan, les deux relations :

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D'}) - (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'D'}) \pmod{2\pi}$$

établissent une relation d'équivalence entre les quadrangles ABCD et A'B'C'D'.

2° Donner une construction de D′ connaissant A′, B′ et C′ et sachant que A′B′C′D′ appartient à la classe d'équivalence du quadrangle donné ABCD.

3° Caractériser les quadrangles équivalents à une division harmonique A′B′C′D′.
Montrer qu'il y a dans cette classe des quadrangles ABCD tels que le quadrilatère ACBD soit un carré, un trapèze isocèle ou un fer-de-lance symétrique inscriptible dans un cercle. Étudier les réciproques.

**19.** Étant donné une droite Δ dans le plan, deux cercles O (R) et O′ (R′) seront dits associés à Δ si pour deux points distincts M de Δ, on a la relation : $\overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2$.

1° Montrer que OO′ est perpendiculaire en I à Δ et que l'on a : $\overline{IO}^2 - R^2 = \overline{IO'}^2 - R'^2$.

2° Établir que la relation entre deux cercles associés à Δ est une relation d'équivalence. Que représente chacune des classes d'équivalence ? *(faisceau de cercles d'axe Δ).*

— Étudier les propriétés de l'application « $f$ » qui applique l'ensemble A dans l'ensemble B dans les cas suivants :

**20.** A est l'ensemble des points de l'espace; B est l'ensemble des points d'un plan P; « $f$ » est la projection orthogonale sur le plan P donné.

**21.** A et B sont l'ensemble des points de l'espace et « $f$ » est la symétrie par rapport à une droite Δ donnée.

**22.** A et B sont l'ensemble des points de l'espace et « $f$ » est la symétrie par rapport à un point donné O.

**23.** A et B sont l'ensemble des points de l'espace et « $f$ » est la translation de vecteur donné $\vec{T}$.

**24.** A et B sont l'ensemble des points de l'espace et « $f$ » est une homothétie donnée (O, $k$).

**25.** A et B sont l'ensemble R des nombres réels $x$ et $x \mapsto 3x + 5$.

**26.** A est l'ensemble R des réels $x$; B est l'ensemble $R^+$ des réels positifs ou nul et : $x \mapsto x^2$.

**27.** A est l'ensemble des réels $x$ dont la mesure en radians est : $0 \leqslant x \leqslant \pi$; B est l'ensemble des réels appartenant à $[0; 1]$ et : $x \mapsto \sin x$.

**28.** A est l'ensemble des réels $x$ dont la mesure en radians est : $0 \leqslant x \leqslant \pi$; B est l'ensemble des réels appartenant à $[-1; +1]$ et : $x \mapsto \cos x$.

**29.** 1° Démontrer que s'il existe une application bijective d'un ensemble fini A sur un ensemble fini B, ces deux ensembles ont un même nombre d'éléments $n$.

2° Déterminer le nombre des applications bijectives de A sur B lorsque $n = 3$.

**30.** On appelle *substitution* toute application bijective d'un ensemble fini A sur lui-même. En prenant $A = \{a, b, c\}$ dénombrer le nombre des substitutions que l'on peut effectuer sur l'ensemble A, y compris la substitution identique.

**31.** Soit E un ensemble, A et B deux éléments de $\mathcal{P}_{(E)}$ et $f$ une application de l'ensemble E dans l'ensemble E′. Montrer que :

$$A \subset B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B); \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B); \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

**32.** On considère une application « $f$ » de A dans B et une application « $g$ » de B dans C. Montrer que si les applications « $f$ » et « $g$ » sont toutes deux soit injectives, surjectives ou bijectives, il en est de même de leur produit « $h$ » = « $g \circ f$ » de A dans C.

# FONCTIONS POLYNÔMES

**26. Fonction monôme.** — ***On appelle monôme en $x$, $y$, $z$ toute fonction de ces variables de la forme $ax^m y^n z^p$ où $a$ désigne un coefficient numérique réel et où les exposants $m$, $n$, $p$ sont des entiers naturels.***

Un monôme est donc une fonction définie pour tout système de valeurs réelles de ses variables. Le *degré d'un monôme* par rapport à une variable est l'exposant de cette variable (0 si la variable ne figure pas dans le monôme). Le degré d'un monôme par rapport à plusieurs variables est la somme des exposants de ces variables.

Ainsi : $-\frac{5}{3}ab^4x^2$ est un monôme en $a$, $b$, $x$ dont le coefficient est $-\frac{5}{3}$. Il est de degré 1 en $a$, de degré 4 en $b$, de degré 2 en $x$, de degré 5 en $a$ et $b$ et de degré 7 en $a$, $b$ et $x$.

Deux monômes sont semblables s'ils ont même *partie littérale*, c'est-à-dire s'ils contiennent les mêmes variables avec les mêmes exposants. Il en est ainsi des monômes :

$$A = -2a^3b^5x^2; \quad B = \frac{7}{4}a^3b^5x^2 \quad \text{et} \quad C = \frac{3}{2}a^3b^5x^2.$$

La somme $S = A + B + C$ de ces monômes s'écrit :

$$S = \left(-2 + \frac{7}{4} + \frac{3}{2}\right)a^3b^5x^2 = \frac{5}{4}a^3b^5x^2.$$

**27. Produit et quotient de deux monômes.** — 1° Les règles de la multiplication dans l'ensemble R, montrent que le produit de deux monômes est un monôme.

$$\left(\frac{3}{5}ax^3y^2\right)(-2a^4x^5) = \frac{3}{5}(-2)a^{1+4}x^{3+5}y^2 = -\frac{6}{5}a^5x^8y^2.$$

$$\left(-\frac{2}{3}ab^4x^3\right)^2 = \frac{4}{9}a^2b^8x^6; \qquad (7a^2x^5)^3 = 343\,a^6x^{15}.$$

***Le degré du produit de deux ou plusieurs monômes est égal à la somme des degrés de chacun des facteurs,*** ceci par rapport à une variable ou par rapport à l'ensemble des variables.

2° Il résulte de la relation : $3\,a^5x^2y = (2\,a^3x)\left(\frac{3}{2}a^2xy\right)$ que :

$$\frac{3\,a^5x^2y}{2\,a^3x} = \frac{3}{2}a^2xy.$$

Plus généralement : $\frac{A}{B} = \frac{ax^m y^n z^p}{bx^{m'} y^{n'} z^{p'}} = \frac{a}{b} x^{m-m'} y^{n-n'} z^{p-p'}$ sera un monôme pour $a, b \in R$ et $m \geqslant m'$, $n \geqslant n'$, $p \geqslant p'$. On dit que A *est divisible par* B.

***Un monôme* A *est divisible par un monôme* B *s'il contient toutes les variables de* B *avec des exposants au moins égaux.***

Le degré du monôme quotient est alors la différence des degrés du numérateur et du dénominateur.

**28. Fonction polynôme.** — ***On appelle fonction polynôme la somme algébrique de plusieurs monômes.***

Chacun de ces monômes est un *terme* du polynôme.

$2x^3 - 5x$ est un *binôme* à une variable, défini sur l'ensemble R des réels.

$4x^2 - 3x + 5$ est un *trinôme* à une variable, défini sur R.

$3a^2b - \frac{2}{5}a^3 + 4b^5 - 5ab^2 = 3a^2b - \frac{2}{5}a^3b^0 + 4a^0b^5 - 5ab^2$ est un polynôme à deux variables défini sur $R^2$.

***Deux polynômes à $n$ variables, définis sur $R^n$, sont équivalents s'ils ont même valeur numérique pour tout système de valeurs attribuées à ces variables*** (nº 25).

En particulier, *un polynôme est équivalent* à 0, si sa valeur numérique est nulle pour tout système des variables.

Lorsqu'un polynôme contient plusieurs termes semblables, on forme un polynôme équivalent en remplaçant ces termes par leur somme; cette opération se nomme *réduction des termes semblables*. Le polynôme obtenu est la *forme réduite* du polynôme initial :

$$7x^3 + 8x - 3 + 4x - 2x^3 - 5x + 2 = 5x^3 + 7x - 1.$$

**29. Degré d'un polynôme.** — ***Le degré d'un polynôme réduit est celui de son terme de plus haut degré.***

Ainsi : $4x^6y^2 - 3x^4y^5 + 2xy^7$ est de degré 6 en $x$, de degré 7 en $y$, de degré 9 en $x$ et $y$.

Un polynôme est dit *homogène* par rapport à deux ou plusieurs variables si tous ses termes ont même degré par rapport à l'ensemble de ces variables :

$2x^3 - 4xy^2 + 3x^2y - y^3$ est un polynôme homogène du 3ᵉ degré en $x$ et $y$.

Un polynôme est *ordonné* suivant les puissances décroissantes (ou croissantes) d'une variable lorsqu'on écrit ses termes de façon que leurs degrés par rapport à cette variable, aillent en décroissant (ou en croissant) :

$2x^3 - 4xy^2 + 3x^2y - y^3$ est un polynôme homogène ordonné simultanément suivant les puissances décroissantes de $x$ et suivant les puissances croissantes de $y$.

**30. Addition et multiplication des polynômes.** — 1º L'addition et la soustraction des polynômes se ramènent à l'addition et à la soustraction de sommes algébriques.

Ainsi : $S = (a^2 + 5a - 7b) - (4a^2 - 5b + 3) + (6a^2 + 3b - 2)$

s'écrit : $S = a^2 + 5a - 7b - 4a^2 + 5b - 3 + 6a^2 + 3b - 2.$

La somme S est donc équivalente à : $S = 3a^2 + 5a + b - 5$.

Dans le cas de polynômes à une variable (ou de polynômes homogènes à deux variables) il est bon de les ordonner en complétant par des points, les termes dont les degrés sont manquants comme ci-dessous :

EXEMPLE. — *Calculer* $S = A - B + C$ *sachant que* :

$$A = 2 - 5x + 4x^3; \qquad B = 4x^2 + 6 - 8x; \qquad C = x^2 - 2x^3 + 3 + 2x.$$

On écrit :

$$\begin{array}{rcrrrr}
A & = & 4x^3 & \bullet & -5x & +2 \\
-B & = & \bullet & -4x^2 & +8x & -6 \\
C & = & -2x^3 & +x^2 & +2x & +3. \\
\hline
S & = & 2x^3 & -3x^2 & +5x & -1
\end{array}$$

La réduction des termes semblables est immédiate et on obtient un résultat ordonné.

2° La multiplication de deux polynômes se ramène à la multiplication de deux sommes algébriques. Il suffit de multiplier chaque terme de l'un successivement par chacun des termes de l'autre et de faire la somme algébrique des résultats obtenus. Ainsi :

$$\begin{aligned}(x^2 - 3xy - y^2)(x - y) &= x^3 - 3x^2y - xy^2 - x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ &= x^3 - 4x^2y + 2xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Pour effectuer le produit de deux polynômes à une variable, on procède comme ci-dessous de façon à obtenir un résultat réduit et ordonné.

EXEMPLE. — *Effectuer le produit de* $A = 3x^3 + 5x - 2$ *par* $B = 2x^2 - 4x + 3$.

$$\begin{array}{rcrrrrrr}
A & = & & & 3x^3 & \bullet & +5x & -2 \\
B & = & & & & +2x^2 & -4x & +3 \\
\hline
A(2x^2) & = & +6x^5 & \bullet & +10x^3 & -4x^2 & & \\
A(-4x) & = & & -12x^4 & \bullet & -20x^2 & +8x & \\
A(+3) & = & & & +9x^3 & \bullet & +15x & -6 \\
\hline
AB & = & 6x^5 & -12x^4 & +19x^3 & -24x^2 & +23x & -6.
\end{array}$$

***Le produit de deux polynômes est un polynôme dont le degré est la somme des degrés de chacun des facteurs.***

En effet dans le produit de deux polynômes le terme de plus haut degré du produit provient du produit des termes de plus haut degré de chacun des facteurs. Le terme de plus faible degré est de même le produit des termes de plus faible degré de chacun des facteurs. Ces deux termes, n'ayant pas de terme semblable, subsistent donc après réduction. Le produit des deux polynômes est donc un polynôme ayant au moins deux termes.

## IDENTITÉ DES POLYNOMES.

**31. Définitions.** — 1° ***Un polynôme est identiquement nul (ou identique à zéro) lorsque les coefficients de chacun de ses termes sont nuls.***

Ainsi le polynôme à une variable :

$$P(x) = A_0 x^n + A_0 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

est identiquement nul si les $(n + 1)$ conditions suivantes sont satisfaites :

$$A_0 = 0; \qquad A_1 = 0; \qquad \dots \qquad A_{n-1} = 0, \qquad A_n = 0.$$

On écrit : $P(x) \equiv 0$ (lire « P de $x$ identique à zéro ») ou $P(x) \equiv O(x)$.

De même le polynôme $P(x, y, z) = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ est identiquement nul si, quels que soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ on a : $A_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

On écrit : $P(x, y, z) \equiv 0$ ou $P(x, y, z) \equiv O(x, y, z)$.

2° ***Deux polynômes sont identiques si leur différence est identiquement nulle.***

$$P \equiv Q \Longleftrightarrow P - Q \equiv 0.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les deux polynômes soient, après réduction, composés, à l'ordre près, des mêmes termes.

Ainsi : $P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$

et $Q(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n$

sont identiques si :

$$A_0 = B_0 \quad ; \quad A_1 = B_1 \quad ; \quad A_2 = B_2 \quad \ldots \quad A_n = B_n.$$

*L'identification de deux polynômes* $P(x)$ *et* $Q(x)$ *de degré* $n$ *conduit à écrire* $(n + 1)$ *égalités entre les coefficients correspondants de ces polynômes.*

De même $P(x, y, z) = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ et $Q(x, y, z) = \Sigma B_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ sont identiques si quels que soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ on a : $A_{\alpha\beta\gamma} = B_{\alpha\beta\gamma}$.

Deux polynômes identiques sont équivalents. Réciproquement deux polynômes équivalents sont identiques. Cette propriété que l'on pourra admettre peut s'établir comme suit :

**32. Théorème.** — ***Lorsqu'un polynôme à une variable, de degré*** $n$***, s'annule pour*** $(n + 1)$ ***valeurs distinctes de la variable il est identiquement nul.***

Raisonnons par récurrence.

1° Établissons d'abord que le théorème est vrai pour un polynôme du 1^er^ degré :

$$P(x) = ax + b$$

qui s'annule pour deux valeurs de $x$ distinctes $x_1$ et $x_2$ :

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} ax_1 + b = 0 \\ ax_2 + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad a(x_2 - x_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0$$

$$a = 0 \quad \text{et} \quad ax_1 + b = 0 \Longrightarrow b = 0.$$

Donc : $$P(x) \equiv 0.$$

2° Supposons le théorème établi pour tout polynôme en $x$ de degré $(n - 1)$ et soit :

$$P(x) \equiv A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

s'annulant pour les $(n + 1)$ valeurs distinctes : $x_1, x_2 \ldots x_n$ et $x_{n+1}$ de la variable.

Le polynôme $\varphi(x) \equiv A_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ est un polynôme de degré $n$, commençant par $A_0 x^n$ et s'annulant pour les $n$ valeurs distinctes : $x_1, x_2 \ldots x_n$. La différence $P(x) - \varphi(x)$ est par suite un polynôme de degré $n - 1$ au plus, s'annulant pour les $n$ valeurs précédentes. D'après l'hypothèse : $P(x) - \varphi(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow P(x) \equiv \varphi(x)$.

Or : $P(x_{n+1}) = 0 \Longrightarrow A_0(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \ldots (x_{n+1} - x_n) = 0$.

Les $n$ facteurs entre parenthèses sont différents de 0, donc $A_0 = 0$, ce qui entraîne $\varphi(x) \equiv 0$ et par suite : $P(x) \equiv 0$.

**33. Corollaire I.** — ***Tout polynôme équivalent à zéro est identiquement nul.***

La propriété est évidente pour une polynôme de degré $n$, à une variable car il s'annule pour $(n + 1)$ valeurs arbitraires distinctes de $x$.

Tout polynôme $P(x, y) \equiv \Sigma A_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}$ peut s'écrire :

$$P(x, y) \equiv B_0 + B_1(y)\, x + B_2(y)\, x^2 + \ldots + B_n(y)\, x^n,$$

les coefficients $B_{\alpha}(y)$ étant des polynômes en $y$ tels que :

$$B_{\alpha}(y) \equiv A_{\alpha 0} + A_{\alpha 1}\, y + A_{\alpha 2}\, y^2 + \ldots + A_{\alpha p} y^p.$$

Pour $y$ donné quelconque on a, quel que soit $x$, $P(x, y) \equiv 0$. Donc tous les $B_{\alpha}(y)$ sont nuls. Ceci ayant lieu quel que soit $y$, on peut écrire pour toute valeur de $\alpha$ :

$$B_{\alpha}(y) \equiv 0 \Longrightarrow A_{\alpha 0} = 0,\ A_{\alpha 1} = 0 \ldots ;\ A_{\alpha p} = 0.$$

Le polynôme $P(x, y)$ ayant tous ses coefficients nuls, est donc identiquement nul. La démonstration s'étend par récurrence à un polynôme d'un nombre quelconque de variables.

**34. Corollaire II.** — ***Deux polynômes équivalents sont identiques.***

Si, quels que soient $x$, $y$ et $z$, l'égalité : $P(x, y, z) = Q(x, y, z)$ est vérifiée, il en est de même de l'égalité : $P(x, y, z) - Q(x, y, z) = 0$. Le polynôme $P(x, y, z) - Q(x, y, z)$ est donc identiquement nul et on peut écrire :

$$P(x, y, z) - Q(x, y, z) \equiv 0 \Longrightarrow P(x, y, z) \equiv Q(x, y, z).$$

**35. Applications.** — 1° ***Pour qu'un produit de polynômes soit identiquement nul, il faut et il suffit que l'un de ces polynômes soit identiquement nul.***

En effet si aucun d'eux n'est identiquement nul le terme de plus haut degré, produit des termes de plus haut degré dans chacun d'eux, subsiste dans le produit, qui ne peut être identiquement nul. Par contre si l'un d'eux est identiquement nul, le produit est équivalent à zéro donc identiquement nul.

2° Il résulte de la démonstration du n° 32 que lorsqu'un polynôme $P(x)$, de degré $n$ à une variable, s'annule pour $n$ valeurs distinctes de la variable $x_1, x_2, \ldots x_n$, il peut s'écrire :

$$P(x) \equiv A_0\,(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

$A_0$ désignant le coefficient de son terme de plus haut degré $A_0 x^n$.

**36. Extension de la notion de polynôme.** — Dans tout polynôme à plusieurs variables :

$$P\,(x, y, z) = \Sigma\, a_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$$

les variables $x$, $y$, $z$ peuvent désigner des éléments d'un ensemble E autre que l'ensemble K (en général Z, Q ou R) dans lequel sont choisis les coefficients.

Ainsi $P\,(x, y) = 5 - 2\,x + 3\,y + 4\,x^2 - 7\,xy + 6\,y^2$ est un polynôme à coefficients entiers dont on peut définir la valeur sur R.

$Q\,(\sin x) = 3 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x + 1$ est un polynôme en $\sin x$ à coefficients réels.

Il nous faut donc distinguer la notion de *polynôme formel*, ensemble de coefficients $P = \{a_{\alpha\beta\gamma}\} \subset K$, de la notion de *fonction polynôme* $P\,(x, y, z)$ qui dépend de l'ensemble E dans lequel on envisage les valeurs des variables $x$, $y$, $z$. Ainsi le polynôme en $x$ :

$$A(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

correspond au polynôme formel :

$$A = \{ a_0, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n ,0, 0, 0 \ldots \}$$

*qui s'écrit en abrégé :* $A = [a_k]$ *et dont le degré* $n$ *est l'indice du dernier coefficient non nul. Les règles opératoires sur les polynômes formels sont la traduction des résultats que l'on obtient sur les fonctions polynômes correspondantes.*

Si par exemple $A_i = [a_i]$, $B = [b_j]$ et $C = [c_k]$ sont des *polynômes formels* à une variable, de l'ensemble K, on obtient pour tout $k \in N$.

$$\begin{array}{lll} \textit{Egalité :} & A = B & \Longleftrightarrow a_k = b_k. \\ \textit{Addition :} & A = B + C & \Longleftrightarrow a_k = b_k + c_k. \\ \textit{Multiplication :} & A = BC & \Longleftrightarrow a_k = b_0c_k + b_1c_{k-1} + \ldots + b_{k-1}c_1 + b_kc_0. \end{array}$$

## IDENTITÉS USUELLES

**37. Puissances d'une somme.** — Rappelons que :

| | *Coefficients* |
|---|---|
| $(a + b)^1 = a + b$ | 1 1 |
| $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | 1 2 1 |
| $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | 1 3 3 1 |
| $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ | 1 4 6 4 1 |
| $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ | 1 5 10 10 5 1 |
| ...... .................................... | ............. |

Dans le tableau des coefficients (*triangle de Pascal*) chaque élément est la somme du terme placé au-dessus de lui et du terme placé à gauche de ce dernier. On prolonge ainsi facilement ce tableau. En changeant $b$ en $-b$ on obtient :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

On en déduit :

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2); \quad (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

Plus généralement :

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^2 &= \Sigma a^2 + 2\Sigma ab. \\ (a + b + c)^3 &= \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2b + 6abc. \end{aligned}$$

**38. Formules de décomposition.** — Pour tout entier naturel $n \in N$ :

$$\boxed{a^n - b^n \equiv (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

$$\begin{aligned} &a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \\ &a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \Longrightarrow a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ &a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3). \end{aligned}$$

En calculant les deux membres, on voit que :

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) \\ &(a^3 + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(c + a). \end{aligned}$$

**39. Autres identités.** — On vérifie aisément que :

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$
$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + x^2\Sigma a + x\,\Sigma ab + abc$
$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + x^3\Sigma a + x^2\Sigma ab + x\,\Sigma abc + abcd.$
$a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$ *(Euler).*
$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) + (b - c)(c - a)(a - b) = 0$ *(Stewart).*
$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) + (a + b + c)(b - c)(c - a)(a - b) = 0.$

Les formules suivantes, dites de Lagrange, montrent que, lorsque chacun des deux facteurs d'un produit est soit une somme, soit une différence de deux carrés, il en est de même de deux façons différentes du produit :

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2$$
$$(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) = (ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (ax - by)^2 - (ay - bx)^2$$

## DIVISION DES POLYNÔMES

**40. Définition.** — ***On dit que le polynôme*** A ***est un multiple du polynôme*** B ***ou que*** B ***est un diviseur de*** A, ***lorsqu'il existe un polynôme*** Q ***tel que :*** $A \equiv BQ$.

Le polynôme Q se nomme *rapport* ou *quotient exact* des polynômes A et B.

Notons que si un polynôme K divise plusieurs polynômes A, B, C, il divise également tout polynôme de la forme $S \equiv MA + NB + PC$ car :

$$A \equiv A'K;\quad B \equiv B'K;\quad C \equiv C'K \Longrightarrow S \equiv (MA' + NB' + PC')K.$$

**41. Quotient exact de deux polynômes** *(méthode des coefficients indéterminés).*

Lorsqu'un polynôme à une variable A, de degré $n$, est divisible par un polynôme B de degré $p$, le quotient exact Q de A par B est un polynôme de degré $n - p$. En identifiant A avec le produit de B par un polynôme indéterminé de degré $n - p$, on obtient $(n + 1)$ relations qui permettent, lorsque l'opération est possible, de calculer les $(n - p + 1)$ coefficients du polynôme Q.

Exemple. — *Calculer le quotient de* $A \equiv x^4 + x^2 + 1$ *par* $B \equiv x^2 + x + 1$.

Le quotient Q de A par B est un polynôme du second degré : $ax^2 + bx + c$.

On doit avoir : $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c)$.

Soit : $x^4 + x^2 + 1 \equiv ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (b + c)x + c$.

D'où les cinq relations : $a = 1$; $a + b = 0$; $a + b + c = 1$; $b + c = 0$ et $c = 1$.

Ces relations sont vérifiées pour : $a = 1$; $b = -1$ et $c = 1$. Donc :

$$(x^4 + x^2 + 1) \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

### QUOTIENT ENTIER DE DEUX POLYNOMES QUELCONQUES.

**42. Théorème.** — ***Étant donné deux polynômes quelconques*** A ***et*** B ***d'une même variable, il existe un polynôme unique*** Q ***tel que le degré du polynôme*** A — BQ ***soit inférieur à celui de*** B.

Autrement dit, il existe un seul polynôme Q tel que :

$$\boxed{A - BQ \equiv R} \quad (1) \quad \text{avec} \quad \boxed{\text{degré de } R < \text{degré de } B.} \quad (2)$$

Les polynômes Q et R sont respectivement le *quotient entier* et le *reste de la division de* A *par* B.

1° **Détermination des polynômes Q et** R. — Si le degré de A est inférieur à celui de B on peut prendre $Q \equiv O$ et $R \equiv A$.

Supposons donc que le degré de A soit supérieur ou égal à celui de B. Puisque le degré de R est inférieur à celui de B, donc à celui de A, l'identité (1) n'est possible que si les termes de plus haut degré de A et de BQ sont identiques. Le terme de plus haut degré de Q est donc le quotient exact $Q_1$ des termes de plus haut degré de A et de B et la différence $A - BQ_1 \equiv R_1$ est un polynôme de degré inférieur à celui de A. Si le degré $R_1$ est au moins égal à celui de B, on peut opérer sur $R_1$ et B comme nous l'avons fait sur A et B. Soit $Q_2$ le quotient des termes de plus haut degré de $R_1$ et B. Nous avons de même : $R_1 - BQ_2 \equiv R_2$ avec degré de $R_2 <$ degré de $R_1$.

En répétant cette opération nous obtenons des polynômes $R_1, R_2, \dots R_n$, dont les degrés vont en décroissant. Soit $R_k$ le premier d'entre eux dont le degré est inférieur à celui de B. Nous avons alors les identités :

$$\begin{aligned} A - BQ_1 &\equiv R_1 \\ R_1 - BQ_2 &\equiv R_2 \\ R_2 - BQ_3 &\equiv R_3 \\ &\dots\dots\dots \\ R_{k-1} - BQ_k &\equiv R_k \quad \text{avec d° de } R_k < \text{d° de B.} \end{aligned}$$

Additionnons membre à membre en réduisant les termes communs aux deux membres :

$$A - B(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k) \equiv R_k.$$

L'identité (1) et la condition (2) sont réalisées en posant :

$$Q \equiv Q_1 + Q_2 + \dots Q_k \quad \text{et} \quad R \equiv R_k.$$

2° **Unicité de la solution.** — S'il existait deux autres polynômes Q' et R' tels que :

$$A - BQ' \equiv R' \quad (3) \qquad \text{avec d° de } R' < \text{d° de B}$$

on obtiendrait en retranchant membre à membre, les identités (1) et (3) :

$$B(Q' - Q) \equiv R' - R. \tag{4}$$

Si $Q' - Q$ n'est pas nul, le degré du premier membre de cette identité est au moins égal à celui de B, tandis que celui du second membre est inférieur à celui de B. L'identité (4) est donc impossible sauf si $Q \equiv Q'$ et par suite $R \equiv R'$.

**43. Disposition pratique.** — *Soit à effectuer la division de :*

$$A = x^5 + 7x^4 + 14x^3 + 3x^2 - 8x - 6 \quad \text{par} \quad B = x^2 + 3x + 2.$$

On dispose l'opération comme pour une division ordinaire.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} A = & x^5 & + 7x^4 & + 14x^3 & + 3x^2 & - 8x & - 6 & x^2 + 3x + 2 \\ BQ_1 = & x^5 & + 3x^4 & + 2x^3 & & & & \overline{x^3 + 4x^2 - 5} \\ \hline R_1 = & & 4x^4 & + 12x^3 & + 3x^2 & - 8x & - 6 & Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \\ BQ_2 = & & 4x^4 & + 12x^3 & + 8x^2 & & & \\ \hline R_2 = & & & & - 5x^2 & - 8x & - 6 & \\ BQ_3 = & & & & - 5x^2 & - 15x & - 10 & \\ \hline R = & & & & & 7x & + 4 & \end{array}$$

Le quotient entier de A par B est donc $Q \equiv x^3 + 4x^2 - 5$ et le reste est $R \equiv 7x + 4$.

Notons que le terme de plus haut degré du quotient étant le quotient des termes de plus haut degré du dividende et du diviseur :

*Le degré du quotient est la différence des degrés du dividende et du diviseur.*

**44. Remarques.** — 1° $R \equiv 0 \Longrightarrow A \equiv BQ$ et A est un multiple de B. Réciproquement si $A \equiv BQ + 0$, le nombre 0 est de degré nul, donc inférieur à celui de B et représente le reste de la division de A par B.

***Pour qu'un polynôme* A *soit multiple d'un polynôme* B, *il faut et il suffit que le reste de la division de* A *par* B *soit identiquement nul.***

2° On peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés (n° 41) pour calculer le quotient Q et le reste R de la division de A par B. En désignant par $n$ et $p$ les degrés respectifs de A et B, il suffit de prendre pour Q et R des polynômes indéterminés de degrés respectifs $n - p$ et $p - 1$ et d'identifier ensuite A et $BQ + R$. On obtient ainsi $n + 1$ relations qui permettent de calculer les $(n - p + 1)$ coefficients de B et les $p$ coefficients de R.

Ainsi l'identification de : $x^5 + 7x^4 + 14x^3 + 3x^2 - 8x - 6$ avec :

$$(x^2 + 3x + 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d) + \alpha x + \beta$$

permet de vérifier l'exemple du n° 43.

## DIVISION PAR $x - a$.

**45. Théorème.** — ***Si*** $P(x)$ ***désigne un polynôme en*** $x$, ***la différence*** $P(x) - P(a)$ ***est un polynôme divisible par*** $x - a$.

Démontrons cette proposition pour un polynôme de degré $n$ :

$$P(x) \equiv \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \dots + \lambda x + \mu.$$

D'où :

$$P(a) = \alpha a^n + \beta a^{n-1} + \quad + \lambda a + \mu.$$

$$P(x) - P(a) \equiv \alpha(x^n - a^n) + \beta(x^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + \lambda(x - a).$$

Or (n° 38) :

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

Cette identité montre que tous les termes du second membre contiennent $x - a$ en facteur En posant :

$$Q_p \equiv x^p + ax^{p-1} + a^2x^{p-2} + \dots + a^{p-1}x + a^p$$

on obtient :

$$P(x) - P(a) \equiv (x - a)[\alpha Q_{n-1} + \beta Q_{n-2} + \dots + \lambda].$$

Cette formule permet de calculer le quotient exact de $P(x) - P(a)$ par $x - a$ et d'écrire l'identité :

$$\boxed{P(x) \equiv (x - a)\,Q(x) + P(a)} \qquad (1)$$

ce qui montre que :

**46. Corollaire.** — ***Le reste de la division d'un polynôme*** $P(x)$ ***par*** $x - a$ ***est égal à*** $P(a)$.

Notons que l'on obtient bien plus rapidement le quotient $Q(x)$ en effectuant la division de $P(x)$ par $x - a$ car (n° 42) :

$$P(x) \equiv (x - a)\,Q(x) + R \qquad \text{avec degré de } R = 0.$$

Donc R est un nombre indépendant de $x$, que l'on obtient en faisant $x = a$ :

$$P(a) = (a - a)\,Q(a) + R \Longrightarrow P(a) = R.$$

**47. Théorème.** — ***Pour qu'un polynôme*** $P(x)$ ***soit divisible par*** $x - a$, ***il faut et il suffit qu'il s'annule pour*** $x = a$, ***donc que*** $P(a) = 0$.

La relation : $P(x) \equiv (x - a)\,Q(x) + P(a)$ montre que :

$$\boxed{P(x) \equiv (x - a)\,Q(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{P(a) = 0}$$

**48. Divisibilité par** $ax + b$. — Notons que si le polynôme A est divisible par le polynôme B, il est divisible par tout polynôme de la forme $m$B où $m$ désigne un facteur numérique non nul.

$$A \equiv BQ \Longleftrightarrow A \equiv mB \,.\, \frac{Q}{m}.$$

En particulier : $P(x) \equiv (ax + b)\,Q(x) \Longleftrightarrow P(x) \equiv \left(x + \dfrac{b}{a}\right)[a\,Q(x)]$.

*Un polynôme* $P(x)$ *sera divisible par* $ax + b$, *s'il s'annule pour* $x = -\dfrac{b}{a}$, *c'est-à-dire si*

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.$$

**49. Théorème.** — Etant donné trois nombres distincts $a$, $b$, $c$ :

***Pour qu'un polynôme*** $P(x)$ ***soit divisible par le produit***

$$(x - a)(x - b)(x - c)$$

***il faut et il suffit qu'il soit divisible séparément par*** $(x - a)$, $(x - b)$ ***et*** $(x - c)$.

1° Si : $P(x) \equiv (x - a)(x - b)(x - c)\,Q(x)$ il est clair que $P(x)$ est multiple séparément de $x - a$, de $x - b$ et de $x - c$.

2° Réciproquement, supposons qu'un polynôme $P(x)$ s'annule pour $x = a$, $x = b$ et $x = c$. La relation $P(a) = 0$ permet d'écrire :

$$P(x) = (x - a)\,R(x).$$

La relation $P(b) = 0$ donne alors : $(b - a)\,R(b) = 0$. Or, $b - a$ n'est pas nul par hypothèse, donc $R(b) = 0$ et on peut écrire :

$$R(x) \equiv (x - b)\,S(x) \Longrightarrow P(x) \equiv (x - a)(x - b)\,S(x).$$

La relation $P(c) = 0$ donne enfin : $(c - a)(c - b)\,S(c) = 0$

et : $\quad (c - a)(c - b) \neq 0, \Longrightarrow S(c) = 0, \qquad$ soit $\qquad S(x) = (x - c)\,Q(x)$.

Donc :

$$\boxed{P(x) \equiv (x - a)(x - b)(x - c)\,Q(x)}$$

Ainsi le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ qui s'annule pour $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$ est égal au produit $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

**50. Remarques.** — 1° Si une expression entière, équivalente à un polynôme $P(x)$ de degré $n$, s'annule pour $n$ valeurs distinctes de $x$, à savoir : $a, b, c... l$, on a donc (n° 35) :

$$P(x) = A(x - a)(x - b) \dots (x - l).$$

Le coefficient numérique A de degré 0, peut se calculer sans réduire $P(x)$ en donnant à $x$ une valeur arbitraire $\alpha$ (par exemple 0, 1 ou — 1) distincte de $a, b, c...$ ou $l$, par la relation :

$$P(\alpha) = A(\alpha - a)(\alpha - b) \dots (\alpha - l).$$

2° Un polynôme $P(x, y, z)$ peut être considéré comme un polynôme en $x$ dans lequel $y$ et $z$ jouent le rôle de paramètres. Par suite, si $P(x, y, z)$ s'annule identiquement lorsqu'on remplace $x$ par $y$, c'est-à-dire si $P(y, y, z) \equiv 0$, il est divisible par $x - y$. De même si $P(-[y + z], y, z) \equiv 0$, il est divisible par $x + y + z$.

3° En particulier tout polynôme contenant la variable $x$ qui s'annule identiquement pour $x = 0$ est divisible par $x - 0$, c'est-à-dire par $x$. Il contient donc $x$ en facteur. Si de plus il s'annule pour $y = 0$, ou pour $z = 0$, il contient $xyz$ en facteur, etc.

## EXERCICES

**33.** On donne les polynômes :
$A = x^4 - 3x + 5.$ $B = x^3 - 5x^2 + 7x - 6.$ $C = x^4 + 7x^2 - 3x - 9.$
Calculer : $A + B + C$; $B + C - A$; $C + A - B$ et $A + B - C$.

**34.** On donne les polynômes :
$A = x^3 + 2x^2 - 3x - 1.$ $B = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 9x - 1.$
$C = x^4 + 7x^2 - 5x - 1.$ $D = x^4 + 11x^3 - 3x + 7.$
Calculer : $(A + B) - (C + D)$; $(A - B) + (C - D)$ et $(A - B) - (C - D)$.

**35.** On donne les polynômes :
$A = x^3 - 5x^2 + 7x - 6$; $B = 2x^3 - 11x - 1$; $C = 5x^2 - 4x - 9$.
Calculer : AB, AC, BC, ABC, $A^2$, $B^2$ et $C^2$.

**36.** On donne les polynômes :
$A = 2x + 3y - 1$; $B = x - 2y + 3$; $C = 3x - 5y + 4$.
Calculer : $A^2 + B^2 + C^2$ et $A^3 + B^3 + C^3$.

— Établir les identités suivantes :

**37.** $(a^2 + b^2 + ab)^2 = a^2b^2 + (a + b)^2(a^2 + b^2)$.

**38.** $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = \Sigma (ay - bx)^2$.

**39.** $9(a^2 + b^2 + c^2) = \Sigma (2b + 2c - a)^2$.

**40.** $2(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)^2 = \Sigma (b - c)^4$.

**41.** $(x + y + z)(y + z - x)(z + x - y)(x + y - z) = (\Sigma x^2)^2 - 2\Sigma x^4$.

**42.** $abc + (b + c)(c + a)(a + b) = (a + b + c)(bc + ca + ab)$.

**43.** $a^3(b - c)^3 + b^3(c - a)^3 + c^3(a - b)^3 = 3abc(b - c)(c - a)(a - b)$.

**44.** $(a^2 - mb^2)(x^2 - my^2) = (ax + mby)^2 - m(ay - bx)^2 = (ax - mby)^2 - m(ay + bx)^2$.

**45.** $(ma^2 + pb^2)(mx^2 + py^2) = (max + pby)^2 + mp(ay - bx)^2 = (max - pby)^2 - mp(ay + bx)$.

**46.** On pose : $X = (a^2 - c^2)\,x^2 + 2\,(ab - cd)\,xy + (b^2 - d^2)\,y^2$
$Y = 2\,ac\,x^2 + 2\,(ad + bc)\,xy + 2\,bd\,y^2$
$Z = (a^2 + c^2)\,x^2 + 2\,(ab + cd)\,xy + (b^2 + d^2)\,y^2$.
Calculer la valeur de $X^2 + Y^2 - Z^2$.

**47.** On considère les nombres suivants :
$X = 2\,x + 6\,y + 6\,z$; $\quad Y = 3\,x + 2\,y + 3\,z$; $\quad Z = 3\,x + 6\,y + 7\,z$.

1° Calculer en fonction de $x$, $y$, $z$ l'expression : $X^2 + Y^2 - Z^2$.

2° Quelles relations vérifient les ensembles de nombres :
$\{a = 2, b = 3, c = 3\}$; $\{a' = 6, b' = 2, c' = 6\}$ et $\{a'' = 6, b'' = 3, c'' = 7\}$

**48.** Reprendre l'exercice précédent avec :
$X = x + 4\,y + 4\,z$; $\quad Y = 4\,x + 7\,y + 8\,z$; $\quad Z = 4\,x + 8\,y + 9\,z$
et $\{a = 1,\ b = 4,\ c = 4\}$; $\{a' = 4,\ b' = 7,\ c' = 8\}$ et $\{a'' = 4,\ b'' = 8,\ c'' = 9\}$.

**49.** On pose : $x = a - b$ avec $ab = 1$.

1° Calculer l'expression $A = x^6 + 6\,x^4 + 9\,x^2 - 1$.

2° Montrer que pour $x = \sqrt[3]{\sqrt{6} + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$ l'expression A est un nombre entier

— Démontrer que les polynômes suivants sont les carrés de polynômes que l'on déterminera :

**50.** 1° $x^4 + 6\,x^3 + 11\,x^2 + 6\,x + 1$. $\qquad$ 2° $4\,x^6 - 20\,x^4 + 28\,x^3 + 25\,x^2 - 70\,x + 49$.

**51.** 1° $4\,x^4 - 12\,x^3 + 5\,x^2 + 6\,x + 1$. $\qquad$ 2° $x^4 + 4\,x^3y + 2\,x^2y^2 - 4\,xy^3 + y^4$.

**52.** $x^8 - 6\,x^7 + 13\,x^6 - 18\,x^5 + 24\,x^4 - 18\,x^3 + 13\,x^2 - 6\,x + 1$.

**53.** 1° Trouver tous les polynômes $P(x)$ du quatrième degré vérifiant l'identité :
$$P(x) \equiv P(1 - x).$$

2° Indiquer une méthode de résolution de l'équation $P(x) = 0$ [on posera $y = x\,(1 - x)$].

3° Appliquer à l'équation : $16\,x^4 - 32\,x^3 - 56\,x^2 + 72\,x + 77 = 0$.

**54.** Soit le polynôme $P_n$ défini par la relation : $P_n = 2\,x\,P_{n-1} - P_{n-2}$ (1)
qui permet le calcul de $P_n$ si on connaît $P_{n-1}$ et $P_{n-2}$. Prenons : $P_0 = 1$; $P_1 = x$. La relation (1) est une relation de récurrence qui permet le calcul de $P_n$ quel que soit $n$.

1° Calculer $P_2$, $P_3$, $P_4$ ...

2° Montrer que $P_n$ est de degré $n$ et que tous les monômes de $P_n$ sont de même parité.

3° Calculer dans $P_n$ le coefficient de $x^n$ et celui de $x^{n-2}$.

4° Quelle est la valeur numérique de $P_n$ pour $x = +1$ et pour $x = -1$?

**55.** Soit $P(x) = x^6 + a_1\,x^5 + a_2\,x^4 + a_3\,x^3 + a_4\,x^2 + a_5\,x + a_6$.

1° Comment faut-il choisir les coefficients de ce polynôme pour que l'on ait à la fois :
$$P(x) \equiv x^6\,P\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad P(x) \equiv P(1 - x).$$

2° Montrer que $P(x)$ s'écrit : $(x^2 - x + 1)^3 + m\,(x^2 - x)$. Calculer les six racines de ce polynôme en fonction de l'une d'elles $x = \lambda$.

— Effectuer les divisions suivantes :

**56.** $5\,x^3 - 6\,x^2 + 7x + 8$ par $x^2 - 3\,x + 4$.

**57.** $7\,x^4 - 4\,x^2 + 3\,x - 5$ par $2\,x^2 + 3\,x - 1$.

**58.** $2\,x^5 + 3\,x^4 + 4\,x^3 + 4\,x^2 + 3\,x + 2$ par $x^3 + x^2 + x + 1$.

**59.** $4\,x^3 - 5\,x^2 + 7\,x - 3$ par $x - 2$.

**60.** $5\,x^4 + 3\,x^3 + 4\,x^2 + 3\,x - 9$ par $x + 3$

**61.** $7x^5 + 4x^3 - 3x^2 - 7x - 11$ par $2x + 1$.

**62.** $-4x^5 - 35kx^4 - 5k^2x^3 + 60k^3x^2 - 61k^4x + 15k^4$ par $-x^2 - 8kx + 3k^2$.

**63.** Déterminer $a$ et $b$ pour que le polynôme : $x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + ax + b$ soit divisible par $x^2 - x - 2$.

**64.** Déterminer la valeur de $a$ pour que : $8x^5 - 3x^2 + ax + 21$ soit divisible par
$$2x^2 + 3x - 1.$$

**65.** Relation entre $p$ et $q$ pour que $x^3 + px + q$ soit divisible par le carré d'un binôme en $x$.

**66.** Déterminer les constantes $m$ et $p$ de façon que : $x^4 + my^4 - 2x^2 + py^2 + 1$ soit divisible par : $x^2 + y^2 - xy\sqrt{2} - 1$.

**67.** Déterminer $a$, $b$ et $c$ pour que le polynôme : $x^4 + 10x^3 + ax^2 + bx + c$ soit divisible par $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

**68.** Montrer que le polynôme suivant est le cube d'un binôme :
$$8x^3 + 12(a - 1)x^2 + 6(a^2 - 2a + 1)x + a^3 - 3a^2 + 3a - 1.$$

**69.** Montrer que, quel que soit $n$, l'expression : $x^n(y - z) + y^n(z - x) + z^n(x - y)$ est divisible par $(y - z)(z - x)(x - y)$.

Former le quotient lorsque $n = 4$.

**70.** Trouver un polynôme du 3e degré en $x$, tel que si on le divise par $(x - 1)$, par $(x - 2)$ ou par $(x + 4)$ on ait pour reste 10 et sachant que ce polynôme s'annule pour $x = -1$.

**71.** 1° Un polynôme entier en $x$, divisé par $(x - 1)$ donne pour reste 6; divisé par $(x - 2)$, il donne pour reste 8. Quel reste donne-t-il quand on le divise par $(x - 1)(x - 2)$ ?

2° Plus généralement, soient A et B les restes respectifs de la division d'un polynôme par $(x - a)$ et par $(x - b)$. Quel est le reste de sa division par $(x - a)(x - b)$ ?

**72.** Un polynôme $P(x)$ divisé par $(x + 1)$ donne pour reste $-45$; divisé par $(x - 3)$ il donne pour reste $-165$. Quel reste donnera-t-il si on le divise par : $x^2 - 2x - 3$ ?

2° Déterminer $P(x)$ sachant en outre qu'il est du quatrième degré et qu'il est divisible par le produit $x(x^2 - 4)$ ?

# FACTORISATION DES POLYNÔMES

**51. Définition.** — ***Factoriser un polynôme, c'est écrire ce polynôme sous forme d'un produit de facteurs monômes et polynômes.***

Comme le degré du polynôme est la somme des degrés de chacun de ses facteurs, le nombre de ceux-ci est toujours limité.

Il n'y a aucun procédé général pour effectuer cette opération, pourtant une des plus importantes du calcul algébrique. Il faut donc étudier chaque cas particulier. Toutefois :

**52. Théorème.** — ***Le monôme de plus haut degré possible pouvant être factorisé dans un polynôme est formé des variables communes à tous les termes du polynôme, chacune d'elles étant affectée de son plus petit exposant.***

En effet, d'après le nº 27, on ne peut factoriser qu'une lettre commune à tous les termes du polynôme avec un exposant qui ne dépasse pas le plus faible exposant de cette lettre dans les différents termes du polynôme. Le monôme ainsi formé se nomme P. G. C. D. des termes du polynôme. Notons qu'on peut lui affecter un coefficient numérique arbitraire non nul.

EXEMPLE : $$A \equiv 7a^3x^2y - \frac{35}{2}a^3x^4 + \frac{14}{3}a^4x^2y.$$

Le P. G. C. D. des termes du polynôme est $a^3x^2$. Afin d'avoir un polynôme à coefficients entiers simples en facteur, prenons pour coefficient numérique $\frac{7}{6}$. On obtient :

$$7a^3x^2y - \frac{35}{2}a^3x^4 + \frac{14}{3}a^4x^2y \equiv \frac{7}{6}a^3x^2(6y - 15x^2 + 4ay).$$

Dans ce qui suit, nous supposerons que le polynôme à factoriser ne contient plus de monôme en facteur (termes premiers entre eux dans leur ensemble).

**53. Différents procédés de factorisation.**

1º Lorsque le polynôme comprend un nombre pair de termes, on peut essayer de les grouper par deux (par 3 s'il y a 9 termes). Ainsi :

$$A \equiv (a^2 + b^2)xy + ab(x^2 + y^2) \equiv a^2xy + b^2xy + abx^2 + aby^2.$$

Groupons le 1er et le 3e terme ainsi que le 2e et le 4e. Il vient :

$$A \equiv ax(ay + bx) + by(bx + ay).$$

Soit : $$A \equiv (ax + by)(ay + bx).$$

2° On peut isoler dans le polynôme donné un carré, un cube ou une puissance dont le développement est apparent. Ainsi :

$$b^2 + c^2 + 2\,ab - 2\,ac - 2\,bc \equiv (b-c)^2 + 2\,a\,(b-c) = (b-c)\,(2\,a + b - c)$$

$$\begin{aligned} x^3 + 3\,x\,(x+1) + 2 - (2\,x+1)^2 &\equiv (x+1)^3 - 4\,x\,(x+1) \\ &= (x+1)\,(x^2 - 2\,x + 1) = (x+1)\,(x-1)^2. \end{aligned}$$

3° Un des procédés les plus remarquables consiste à mettre le polynôme à factoriser sous la forme : $A^2 - B^2 \equiv (A - B)\,(A + B)$ :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 + 2\,bc &\equiv a^2 - (b-c)^2 = (a - b + c)\,(a + b - c) \\ x^2 - 10\,x + 21 &\equiv (x-5)^2 - 2^2 = (x-3)\,(x-7) \\ x^4 + 4\,x^2 + 16 &\equiv (x^2+4)^2 - 4\,x^2 = (x^2 - 2\,x + 4)\,(x^2 + 2\,x + 4). \end{aligned}$$

4° On peut de même utiliser la formule de décomposition de $a^n - b^n$ (n° 38) :

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &\equiv (x-1)\,(x^2 + x + 1) \\ x^3 + 8 &\equiv (x+2)\,(x^2 - 2\,x + 4) \\ x^6 - 64 &\equiv (x^2)^3 - (4)^3 \equiv (x^2 - 4)\,(x^4 + 4\,x^2 + 16) \\ &\equiv (x-2)\,(x+2)\,(x^2 - 2\,x + 4)\,(x^2 + 2\,x + 4). \end{aligned}$$

**54. Utilisation de la divisibilité par $x - a$.** — La règle de divisibilité (n° 47) permet de reconnaître si un binôme de la forme $x - a$ peut être factorisé dans un polynôme en $x$. En particulier :

1° *Un polynôme en $x$ est divisible par $x - 1$ si la somme de ses coefficients est nulle, par $x + 1$ si la somme des coefficients de termes de degré pair est égale à la somme des coefficients des termes de degré impair et enfin par $x^2 - 1$ si les deux sommes précédentes sont nulles.*

Soit $f(x) \equiv A_0 + A_1x + A_2x^2 \ldots + A_nx^n$.

En posant $P = A_0 + A_2 + A_4 + \ldots$ et $I = A_1 + A_3 + A_5 + \ldots$ :

$$f(1) = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = P + I$$
$$f(-1) = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots = P - I.$$

Le polynôme est divisible par $x - 1$, si $P + I = 0$, par $x + 1$ si $P = I$ et enfin par :

$$x^2 - 1 = (x+1)\,(x-1) \quad \text{si} \quad P = I = 0.$$

2° Dans un polynôme homogène en $a$ et $b$ ou en $a$, $b$ et $c$, on a intérêt à rechercher la divisibilité par $a - b$, $a + b$, $a + b + c$, etc. en remplaçant dans le polynôme $a$ par $b$, par $-b$, par $-(b + c)$ etc. Ne pas oublier que le polynôme peut contenir $a$, $b$ ou $c$ en facteur. Notons que :

*Tout polynôme* $P(a, b)$ *tel que* $P(b, a) \equiv -P(a, b)$ *est divisible par* $(a - b)$ *car* $P(a, a) = 0$.

3° Si le polynôme $P(a, b, c)$ se conserve par permutation circulaire sur $a$, $b$ et $c$, l'existence du facteur tel que $(a + 2\,b)$ entraîne celle du facteur : $(a + 2\,b)\,(b + 2\,c)\,(c + 2\,a)$.

Finalement lorsqu'on a trouvé un nombre de facteurs dont le produit a un degré égal ou voisin du degré du polynôme à factoriser on peut, en général, achever la décomposition par identification (n° 41) ou en donnant des valeurs particulières simples aux lettres (n° 50, 1°).

**55. Exemples.**

1° $f(x) \equiv 2\,x^4 + x^3 - 8\,x^2 - x + 6$.

On voit que $f(1) = f(-1) = 0$. Donc on peut écrire :

$$f(x) \equiv (x^2 - 1)\,(2\,x^2 + mx - 6).$$

En identifiant les termes en $x^3$ (ou en $x$) on a : $m = 1$. Le facteur $2x^2 + x - 6$ s'annulant pour $x = -2$ est égal à $(x+2)(2x-3)$. Donc :

$$f(x) \equiv (x-1)(x+1)(x+2)(2x-3).$$

2° $F(x, y, z) \equiv (x+y+z)^3 + (x-y-z)^3 + (y-z-x)^3 + (z-x-y)^3$.

On voit immédiatement que F admet le facteur $x$ car :

$$F(0, y, z) \equiv (y+z)^3 - (y+z)^3 + (y-z)^3 - (y-z)^3 = 0.$$

$F(x, y, z)$ étant symétrique en $x, y, z$ admet donc le facteur $xyz$ et :

$$F(x, y, z) \equiv mxyz.$$

Le facteur numérique $m$ s'obtient en faisant $x = y = z = 1$. On obtient :

$$3^3 - 1 - 1 - 1 = m \Longrightarrow m = 24$$
$$F(x, y, z) = 24\,xyz.$$

3° $A = a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$.

Si on remplace $a$ par $b$ on obtient : $b^3(b-c) + b^3(c-b) + 0 = 0$.

Par permutation circulaire on voit que : $A \equiv M(a-b)(b-c)(c-a)$ dans lequel M désigne un facteur homogène du 1[er] degré se conservant par permutation circulaire, donc de la forme $\lambda(a+b+c)$. L'identification des termes en $a^3$ donne :

$$b - c \equiv -\lambda(b-c) \Longrightarrow \lambda = -1.$$
$$A \equiv -(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

4° $B = a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc$.

Si on remplace $a$ par $-(b+c)$, on obtient :

$$B \equiv -(b+c)^3 + b^3 + c^3 + 3\,bc(b+c) = 0.$$

Donc B est divisible par $(a+b+c)$. Compte tenu de la symétrie et de l'homogénéité en $a, b, c$, on peut écrire $B \equiv (a+b+c)[m(a^2+b^2+c^2) + p(ab+bc+ca)]$.

Pour $a = 1$, $b = c = 0$, on obtient $1 = m$ donc : $m = 1$.

Pour $a = b = c = 1$, on obtient : $0 = 3[3m + 3p]$ donc : $p = -1$.

Finalement : $B \equiv (a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca]$.

**56. Changement de variable dans un polynôme.** — Soit le polynôme :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Effectuons le changement de variable : $x = X + k$ où $k$ est une constante réelle. On obtient :

$$Q(X) \equiv P(X+k) \equiv a_0(X+k)^n + a_1(X+k)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(X+k) + a_n.$$

En appliquant la formule $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + n\,ab^{n-1} + b^n$ :

$$Q(X) \equiv a_0X^n + (a_0nk + a_1)X^{n-1} + \dots + h$$

avec : $$h = a_0k^n + a_1k^{n-1} \dots + a_{n-1}k + a_n = P(k).$$

On peut alors disposer de la constante $k$ pour annuler le coefficient du terme en $X^{n-1}$ dans le polynôme Q(X). On prend : $k = -\dfrac{a_1}{na_0}$ et Q(X) devient :

$$Q(X) \equiv a_0X^n + b_2X^{n-2} + \ldots + b_n \quad \text{avec} \quad b_n = P\left(-\frac{a_1}{na_0}\right). \text{ Ainsi :}$$

1° $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$ devient en posant : $x = X - \dfrac{b}{2a}$ :

$$P\left(X - \frac{b}{2a}\right) = Q(X) = aX^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Donc :
$$\boxed{ax^2 + bx + c \equiv a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

2° $P(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$ devient en posant $x = X - \dfrac{b}{3a}$ :

$$\boxed{Q(X) = P\left(X - \frac{b}{3a}\right) = a(X^3 + pX + q)}$$

avec :
$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

Cette transformation peut faciliter la factorisation d'un polynôme :

EXEMPLE. — *Factoriser le polynôme* : $P(x) = x^3 - 3x^2\sqrt{2} + 3x + \sqrt{2} - 2$.

Posons : $x = X + \sqrt{2}$. Nous obtenons : $Q(X) = P(X + \sqrt{2}) = X^3 - 3X - 2$.
Or : $Q(-1) = -1 + 3 - 2 = 0$.
Soit : $Q(X) = (X + 1)(X^2 - X - 2) = (X + 1)^2 (X - 2)$.
Donc : $x^3 - 3x^2\sqrt{2} + 3x + \sqrt{2} - 2 \equiv (x + 1 - \sqrt{2})^2 (x - 2 - \sqrt{2})$.

## FONCTIONS RATIONNELLES

**57. Définition.** — ***On appelle fonction rationnelle le quotient exact ou rapport de deux fonctions polynômes.***

EXEMPLES. — 1° $F(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 7x + 10}$ est une fraction rationnelle définie sur l'ensemble R′ des réels autres que 2 et 5, valeurs qui annulent $x^2 - 7x + 10$.

2° $F(x, y) = \dfrac{x^2 + 3y^2}{x^2 - y^2}$ est une fraction rationnelle définie sur le sous-ensemble E de $R^2$ tel que $y \neq x$ et $y \neq -x$.

***Le domaine de définition d'une fraction rationnelle*** $\dfrac{A}{B}$ ***à*** $n$ ***variables réelles est le sous-ensemble*** E ***de*** $R^n$ ***sur lequel le polynôme*** B ***est différent de zéro.***

La valeur numérique d'une fraction rationnelle, pour un système de valeurs donné des variables est un nombre réel. Les propriétés des fractions rationnelles sont analogues aux propriétés des fractions ordinaires.

**58. Propriétés des fractions rationnelles.**

1° ***Égalité*** : A, B, C, D appartenant à l'ensemble des polynômes à $n$ variables :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC \qquad (B \not\equiv 0;\ D \not\equiv 0)$$

En particulier : $$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}.$$

*Les fractions rationnelles peuvent donc être simplifiées et rendues irréductibles :*

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25} = \frac{(x-2)(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-2}{x+5} \qquad (x \neq 5;\ x \neq -5)$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a^4 - b^4} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)} = \frac{a^2+ab+b^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} \qquad (a - b \neq 0)$$

*Les fractions rationnelles peuvent être converties au même dénominateur :*

Ainsi pour $x \neq 0$, $x \neq 1$, les fractions rationnelles : $\frac{x}{x+1}$; $\frac{3}{x(x+1)}$ et $\frac{2}{x^2}$ sont respectivement équivalentes aux fractions : $\frac{x^3}{x^2(x+1)}$; $\frac{3x}{x^2(x+1)}$ et $\frac{2(x+1)}{x^2(x+1)}$.

2° ***Addition et soustraction des fractions rationnelles.***

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}; \qquad \frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - BC}{BD}; \qquad \frac{A}{D} + \frac{B}{D} + \frac{C}{D} = \frac{A + B + C}{D}.$$

Ainsi : $$\frac{2x-1}{x(x+1)} - \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x(x+1)} - \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)}$$

$$= \frac{(2x-1) - (x^2-1) + x}{x(x+1)} = \frac{3x - x^2}{x(x+1)} = \frac{3-x}{x+1} \qquad (x \neq 0;\ x \neq -1)$$

L'addition des fractions rationnelles est une opération commutative est associative. L'élément neutre de l'addition est la fraction rationnelle nulle : $\frac{O}{A} = \frac{O}{B} = \frac{O}{C} = 0$.

L'opposé de la fraction $\frac{A}{B}$ est la fraction $\frac{-A}{B}$.

3° ***Multiplication et division des fractions rationnelles.***

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}; \qquad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC} \quad \text{et} \quad \frac{A}{A'}\left(\frac{B}{B'} + \frac{C}{C'}\right) = \frac{AB}{A'B'} + \frac{AC}{A'C'}.$$ Ainsi :

1° $$\frac{x}{x^2-1} \times \frac{x^2-x}{x^3} \times \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x(x^2-x)(x+1)}{(x^2-1)\,x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

2° $$\frac{a^2}{a^2-1} : \frac{a+2}{a+1} = \frac{a^2}{(a-1)(a+1)} \times \frac{a+1}{a+2} = \frac{a^2}{(a-1)(a+2)}$$

3° $$\frac{\dfrac{a+c}{b+c} - \dfrac{1-ac}{1-bc}}{\dfrac{1-ac}{b+c} + \dfrac{a+c}{1-bc}} = \frac{(a+c)(1-bc) - (b+c)(1-ac)}{(1-ac)(1-bc) + (a+c)(b+c)}$$

$$= \frac{(a-b)(1+c^2)}{(1+ab)(1+c^2)} = \frac{a-b}{1+ab}.$$

La multiplication des fractions rationnelles est une opération commutative et associative. L'élément neutre de cette multiplication est la fraction $\frac{A}{A} = \frac{B}{B} = \ldots = 1$. L'inverse de la fraction $\frac{A}{B}$ est la fraction $\frac{B}{A}$ car $\frac{A}{B} \times \frac{B}{A} = 1$.

Enfin la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

**59. Transformation de fractions rationnelles par changement de variable.**

Soit la fraction rationnelle à une variable : $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ supposée irréductible. Le changement de variable $x = X + k$ la transforme en une fraction de la variable X :

$$F(X + k) = \Phi(X) = \frac{P(X + k)}{Q(X + k)}$$

Si $Q(x) \equiv ax^n + bx^{n-1} + \ldots lx + m$, on pourra, en posant $x = X - \frac{b}{na}$, annuler le terme en $X^{n-1}$ dans $Q(X + k)$ (n° 56). Ainsi :

1° $F(x) = \frac{ax + b}{a'x + b'}$. — Pour $x = X - \frac{b'}{a'}$ on obtient :

$$F\left(X - \frac{b'}{a'}\right) = \Phi(X) = \frac{a\left(X - \frac{b'}{a'}\right) + b}{a'\left(X - \frac{b'}{a'}\right) + b'} = \frac{aX + \frac{a'b - ab'}{a'}}{a'X}$$

Soit en posant : $\frac{a}{a'} = A$ et $\frac{a'b - ab'}{a'^2} = B$ :

$$\Phi(X) = \frac{AX + B}{X} \iff \boxed{\Phi(X) = A + \frac{B}{X}}$$

2° $F(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$. — On obtient de même pour $x = X - \frac{b'}{a'}$ :

$$F\left(X - \frac{b'}{a'}\right) = \Phi(X) = \frac{a\left(X - \frac{b'}{a'}\right)^2 + b\left(X - \frac{b'}{a'}\right) + c}{a'X} = \frac{aX^2 + mX + p}{a'X}$$

Soit en posant : $\frac{a}{a'} = A$, $\frac{m}{a'} = B$ et $\frac{p}{a'} = C$ :

$$\Phi(x) = \frac{AX^2 + BX + C}{X} \iff \boxed{\Phi(X) = AX + B + \frac{C}{X}}$$

3° $F(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. — Pour $x = X - \frac{b'}{2a'}$ on obtient :

$$F\left(X - \frac{b'}{2a'}\right) = \Phi(X) = \frac{aX^2 + mX + p}{a'X^2 + q} = \frac{\frac{a}{a'}\left(X^2 + \frac{q}{a'}\right) + \frac{m}{a'}X + \frac{pa' - qa}{a'^2}}{X^2 + \frac{q}{a'}}$$

Soit en posant : $\frac{a}{a'} = A$, $\frac{m}{a'} = B$, $\frac{pa' - qa}{a'^2} = C$ et $\frac{q}{a'} = D$ :

$$\Phi(X) = \frac{A(X^2 + D) + BX + C}{X^2 + D} \iff \boxed{\Phi(X) = A + \frac{BX + C}{X^2 + D}}$$

**60. Remarque.** — Les résultats ci-dessus s'obtiennent plus rapidement lorsque on commence par diviser le numérateur P $(x)$ par le dénominateur Q $(x)$.

$$P(x) = Q(x)\,A(x) + B(x) \implies \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}.$$

Comme le degré de $B(x)$ est inférieur à celui de $Q(x)$, on obtient immédiatement pour $x = X - h$ :

$$\Phi(X) = A\,(X - h) + \frac{B(X-h)}{Q(X-h)}$$

Exemples :

1° $F(x) = \dfrac{2x^2 + x - 5}{x + 2} = 2x - 3 + \dfrac{1}{x+2}$, ce qui donne pour $x = X - 2$ :

$$\Phi(X) = 2(X-2) - 3 + \frac{1}{X} \implies \Phi(X) = 2X - 7 + \frac{1}{X}.$$

2° $F(x) = \dfrac{2x^2 - x - 4}{x^2 - 2x - 3} = 2 + \dfrac{3x + 2}{(x-1)^2 - 4}$ soit en posant $x$ : $= X + 1$.

$$\Phi(X) = 2 + \frac{3X + 5}{X^2 - 4}.$$

**61. Fonctions symétriques.** — *Une fonction* $F(a, b, c)$ *est dite symétrique par rapport aux variables* $a, b, c$, *si elle reste équivalente à elle-même lorsqu'on permute d'une façon quelconque les variables* $a, b, c$.

Exemple : $F(a, b, c) = \dfrac{a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)}{ab + bc + ca}.$

On voit que : $F(a, b, c) = F(b, a, c) = F(c, a, b)$, etc.

Pour montrer qu'une fonction est symétrique il suffit de montrer que l'on peut échanger la première variable avec chacune des suivantes. Démontrons que :

1° ***Tout polynôme symétrique en*** $a$ ***et*** $b$ ***peut s'écrire en posant*** $a + b = S$ ***et*** $ab = P$, ***sous forme d'un polynôme en*** $S$ ***et*** $P$.

Tout polynôme $F(a, b)$ symétrique en $a$ et $b$ est identique au polynôme $F(b, a)$ (n° 34). S'il contient un terme non symétrique $7\,a^5b^2$, il contient également $7\,b^5a^2$, soit $7\,a^2b^2\,(a^3 + b^3)$. Donc en posant : $S_k = a^k + b^k$ :

$$F(a, b) = \Sigma\, A a^m b^m\,(a^k + b^k) = \Sigma\, A P^m S_k.$$

Or : $S_1 = a + b = S$; $\quad S_2 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2\,ab = S^2 \quad 2\,P$;

$$S_3 = a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3\,ab\,(a + b) = S^3 - 3\,PS.$$

L'identité : $(a^{k-1} + b^{k-1})\,(a + b) = a^k + b^k + ab\,(a^{k-2} + b^{k-2})$

qui s'écrit : $$\boxed{S_k = S \,.\, S_{k-1} - PS_{k-2}}$$

permet de poursuivre le calcul de $S_4$, $S_5$, $S_6$... et montre par récurrence que $S_k$ est un polynôme en S et P. Il en est donc de même du polynôme $F(a, b)$.

Exemple. — L'expression symétrique :

$$F(a, b) = (2\,a^2 + b)\,(2\,b^2 + a) - (a^2 - 1)\,(b^2 - 1)$$

s'écrit : $$F(a, b) = 3\,a^2b^2 + 2\,(a^3 + b^3) + (a^2 + b^2) + ab - 1$$

Soit : $$F(a, b) = 3\,P^2 + 2\,S^3 - 6\,PS + S^2 - P - 1.$$

2° ***Toute fonction rationnelle symétrique en*** $a$ ***et*** $b$ ***s'exprime en fonction rationnelle de la somme*** $a + b = S$ ***et du produit*** $ab = P$.

La propriété est évidente si cette expression se réduit à une fraction rationnelle $\frac{F(a, b)}{G(a, b)}$ dont les deux termes sont des polynômes symétriques en $a$ et $b$. Sinon on peut écrire :

$$\frac{F(a, b)}{G(a, b)} = \frac{F(b, a)}{G(b, a)} = \frac{F(a, b) - F(b, a)}{G(a, b) - G(b, a)} = \frac{(a-b)\,H(a, b)}{(a-b)\,K(a, b)} = \frac{H(a, b)}{K(a, b)}.$$

On obtient ainsi une fraction plus simple dont les termes sont symétriques en $a$ et $b$.

EXEMPLE. — On peut vérifier que l'expression $F(x, y) = \frac{3x^3 + x^2y + xy^2 - 2y^3}{3x^2 + xy - 2y^2}$ est équivalente à $F(y, x)$. On peut donc écrire :

$$F(x, y) = \frac{(3x^3 + x^2y + xy^2 - 2y^3) - (3y^3 + xy^2 + x^2y - 2x^3)}{(3x^2 + xy - 2y^2) - (3y^2 + xy - 2x^2)}$$

Ce qui donne : $\quad F(x, y) = \frac{5(x^3 - y^3)}{5(x^2 - y^2)} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}.$

En posant $x + y = S$ et $xy = P$, on obtient : $F(x, y) = \frac{S^2 - P}{S}.$

On vérifie que $F(x, y)$ pouvait s'écrire : $\frac{(x^2 + xy + y^2)(3x - 2y)}{(x + y)(3x - 2y)}.$

**62. Expressions irrationnelles.** — Les règles opératoires relatives aux polynômes ou aux fractions rationnelles s'étendent aux expressions irrationnelles dans lesquelles certaines variables figurent sous des radicaux. Rappelons que :

1° ***Lorsqu'on fait sortir un nombre d'un radical d'indice $n$ il faut en prendre la racine $n^{ième}$.*** Au contraire, il faut élever à la puissance $n$ tout nombre que l'on fait entrer sous un radical d'indice $n$.

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \qquad \frac{2a^2}{b^3c}\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\frac{40a^6}{b^9c^3}}$$

Ces opérations demandent quelques précautions lorsqu'on opère avec des nombres relatifs sur des radicaux d'indice pair car $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

$$\sqrt{5x^2} = \begin{cases} x\sqrt{5} \text{ pour } x \geqslant 0. \\ -x\sqrt{5} \text{ pour } x \leqslant 0. \end{cases} \qquad \frac{\sqrt{3x^2 + 4}}{x} = \begin{cases} \sqrt{3 + \frac{4}{x^2}} & \text{pour } x > 0. \\ -\sqrt{3 + \frac{4}{x^2}} & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Par contre : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{5x^3} = x\sqrt[3]{5}.$

2° ***Pour rendre rationnel le dénominateur d'une fraction, il suffit de multiplier ses deux termes par l'expression conjuguée du dénominateur.***

$$\frac{1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}; \qquad \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}.$$

Pour des radicaux cubiques, on pourra utiliser les identités :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab).$$

EXEMPLES : 1° $\frac{1}{2 - \sqrt[3]{5}} = \frac{2^2 + 2\sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{5})^2}{2^3 - 5} = \frac{4 + 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}}{3}.$

2° $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}} = \frac{1^2 + (\sqrt[3]{2})^2 + (\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}.1 - 1.\sqrt[3]{2}}{1^3 + (\sqrt[3]{2})^3 + (-\sqrt[3]{4})^3 - 3.1.\sqrt[3]{2}(-\sqrt[3]{4})} = \frac{3 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}{5}.$

## EXERCICES

— Factoriser les expressions suivantes :

**73.** $x^2 - 15x + 36$.

**74.** $2x^2 + 7x - 9$.

**75.** $x^3 + 3x - 4$.

**76.** $2x^3 + 5x + 7$.

**77.** $x^4 - 13x^2 + 36$.

**78.** $x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 3x + 10$.

**79.** $x^4 + 4$.

**80.** $x^4 + x^2 + 1$.

**81.** $x^8 - 16$.

**82.** $x^8 - 256$.

**83.** $x^4 - 8x^2 + 4$.

**84.** $x^4 - 3x^2 - 6x + 8$.

**85.** $(x + y)^3 - (x^3 + y^3)$.

**86.** $(x + y)^5 - (x^5 + y^5)$.

**87.** $(a + b)^3 + 2(a^3 + b^3)$.

**88.** $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 - 3x^2y^2z^2$.

**89.** $xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)$.

**90.** $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$.

**91.** $(ax - by)^2 - (ay - bx)^2$.

**92.** $(ax + by)^2 + (bx - ay)^2$.

**93.** $(a^2 + 3ab + b^2)^2 - b^4$.

**94.** $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

**95.** $x^2 - y^2 + yz + 2z^2 + 3zx$.

**96.** $2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y - 2$.

**97.** $2a^2 - b^2 - 3c^2 + ab + ac + 4bc$.

**98.** $a^2 - 2b^2 - 6c^2 + ab - ac + 7bc$.

**99.** $z^3 - 3xz^2 + (x - 2y)^2(3x - z)$.

**100.** $(x^2 - a^2)^2 + 2ay(x^2 + y^2 - a^2) - y^4$.

— Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

**101.** $\dfrac{(x + y - 1)^2 + 1}{(xy - 1)^2 - (x - y)^2}$.

**102.** $\dfrac{a(x^2 - 1) + x(a^2 - 1)}{a(x^2 + 1) + x(a^2 + 1)}$.

**103.** $\dfrac{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)}{ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)}$.

**104.** $\dfrac{(ax + mby)^2 + m(ay + bx)^2}{(x^2 - my^2)^2 + 4mx^2y^2}$.

**105.** $\dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2}{(a^2 - b^2 + c^2)^2 - 4a^2c^2}$.

**106.** $\dfrac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab + cd)^2}{(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 - 4(ac + bd)^2}$.

**107.** $\dfrac{(x + y)^5 - (x^5 + y^5)}{(x + y)^3 - (x^3 + y^3)} \times \dfrac{x - y}{x^3 - y^3}$.

**108.** $\dfrac{x^5 + y^5 + z^5 - (x + y + z)^5}{x^3 + y^3 + z^3 - (x + y + z)^3}$.

**109.** $\dfrac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x(y^3 - z^3) + y(z^3 - x^3) + z(x^3 - y^3)}$.

**110.** $\dfrac{2x^2 + 2y^2 + z^2 - 5xy + 3xz - 3yz}{2x^2 - 2y^2 - 3xy + 2xz + yz}$.

**111.** Calculer en fonction de : $a + b = \mathrm{S}$ et $ab = \mathrm{P}$ l'expression symétrique suivante :

$$\frac{a^4 - a^3b + a^2b + ab^3 - ab^2 - b^4}{a^3 + 2a^2b - 2ab^2 - b^3}.$$

**112.** Sachant que : $x^3 + x - 3 = 0$, calculer la valeur numérique de :

$$\frac{x^9 + x^8 + x^7 - 4x^6 - 4x^5 + 7x^3 + 7x^2 + 2x + 14}{x^8 - 2x^5 + x^4 + 6x^3 - x + 4}.$$

**113.** Déterminer les constantes $a$ et $b$, pour que, quel que soit $x$ :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2° Calculer la somme : $\quad S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$

**114.** 1° Déterminer les constantes $a$ et $b$ pour que, quel que soit $x$ :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x(x+1)} + \frac{b}{(x+1)(x+2)}.$$

2° Calculer la somme : $S = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

**115.** $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$

**116.** $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$

**117.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

**118.** $\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$

**119.** $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}.$

**120.** $\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2+a^2}}.$

**121.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}.$

**122.** $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}.$

— Calculer les expressions suivantes :

**123.** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}}.$

**124.** $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^3 - \left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3.$

**125.** $\dfrac{a^2 - a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} + 2b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}.$

**126.** $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} - 16a^{-\frac{2}{3}} - 32a^{-1}}{a^{\frac{1}{6}} + 4a^{-\frac{1}{6}} + 4a^{-\frac{1}{2}}}.$

**127.** $\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{2}}\right) \quad$ avec $\quad x = \left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{12}{5}}.$

**128.** $2b(1+x^2)^{1/2}[(1+x^2)^{1/2} - x]^{-1} \quad$ avec $\quad x = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/2} - \left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/2}\right].$

**129.** $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \quad$ et $\quad \sqrt[3]{54+30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}.$

**130.** $(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{9+5\sqrt{3}} + (\sqrt{3}+1)\sqrt[3]{9-5\sqrt{3}}.$

**131.** $\left[4a^3 + 3mab^2 + (4a^2+mb^2)\sqrt{a^2+mb^2}\right]^{1/3} + \left[4a^3 + 3mab^2 - (4a^2+mb^2)\sqrt{a^2+mb^2}\right]^{1/3}.$

**132.** Rendre rationnel le dénominateur de l'expression :

$$A = \frac{\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^{1/2} + \left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^{1/2}}.$$

# FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

**63. Définition. —** ***On appelle variable réelle tout nombre $x$ susceptible de prendre une valeur quelconque dans l'ensemble* R *des réels.***

On peut établir une correspondance bijective entre l'ensemble R des réels et l'ensemble des points M d'un axe $x'x$ (orienté de gauche à droite), muni d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\vec{i}$ (fig. 15). C'est pourquoi on dit que tout réel $x$ constitue *un point de la droite numérique* $x'x$.

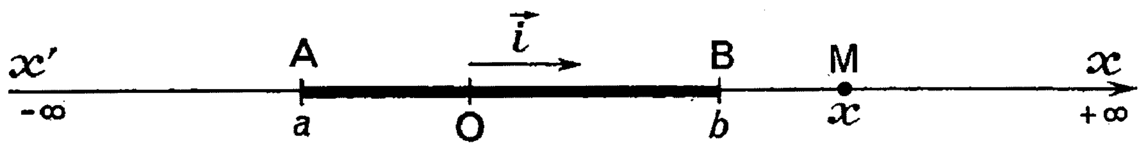



Fig. 15.

Si le point M s'éloigne indéfiniment de O sur l'axe $x'x$, son abscisse $x$ finit par devenir, en valeur absolue, supérieure à tout nombre arithmétique A fixé à l'avance. On dit que $x$ devient infini et on écrit : $x \longrightarrow +\infty$ si M s'éloigne à droite de O.
$x \longrightarrow -\infty$ si M s'éloigne à gauche de O.

**64. Intervalles.** — Deux nombres réels $a$ et $b$ tels que $a < b$, permettent de définir différents sous-ensembles ou domaines de R. On distingue ainsi :

1° *l'intervalle fermé ou segment :* $[a, b] \Longleftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$

2° *l'intervalle ouvert (ou intervalle) :* $]a, b[ \Longleftrightarrow a < x < b$

3° *les intervalles semi-ouverts :* $\begin{cases} ]a, b] \Longleftrightarrow a < x \leqslant b \\ [a, b[ \Longleftrightarrow a \leqslant x < b \end{cases}$

Dans tous les cas, les points $a$ et $b$ sont les *bornes de l'intervalle* envisagé et $|b - a|$ est l'*amplitude* de l'intervalle. De même si $b \longrightarrow +\infty$, on définit les *demi-droites :*

$$[a, +\infty[ \Longleftrightarrow x \geqslant a \quad \text{et} \quad ]a, +\infty[ \Longleftrightarrow x > a.$$

Tout segment ou intervalle dont le point $a$ est un élément constitue *un voisinage du point $a$.* Ainsi, quels que soient les réels positifs $\alpha$, $\beta$, ou $\varepsilon$ les intervalles $[a - \alpha, a + \beta]$ et $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ sont des voisinages du point $a$.

Notons que la réunion ou l'intersection de deux voisinages de $a$ est un voisinage de $a$. On peut aussi définir un *voisinage à gauche* $[a - \varepsilon, a]$ ou *à droite* $[a, a + \varepsilon]$ du point $a$.

**65. Fonction d'une variable réelle.** — Rappelons (nº 24) que :

***On définit une fonction réelle $f$ de la variable réelle $x$, quand à tout élément $x$ de R, on fait correspondre au plus un élément $y$ de R.***

Une fonction réelle $f$ est donc définie dans R et à valeurs dans R. L'ensemble non vide $A \subset R$ des réels $x$ qui ont effectivement un correspondant unique $y$ dans R est le *domaine de définition* de la fonction $f$, qui est dite définie sur A. On écrit :

$$\forall x \in A \subseteq R, \qquad \exists y \text{ (unique)} \in R \quad \text{tel que} \quad x \leftrightarrow y = f(x).$$

EXEMPLES. — 1º Les fonctions réelles $y = x^3 - x$, $y = 3\cos^2 x - 4 \sin x$ sont définies quel que soit $x \in R$. Ces fonctions sont définies sur R.

2º La fonction réelle : $y = \sqrt{x(1-x)}$ est définie dans R pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. Elle est donc définie sur le segment $[0, 1]$. De même $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est définie sur l'intervalle $[-1, +1[$, tandis que $y = \sqrt{x^3 - 1}$ est définie sur la demi-droite $[+1, +\infty[$.

3º La fonction $y = \sqrt{-1 - x^2}$ n'est pas une fonction réelle dans R.

**66. Fonctions inverses ou réciproques.** — Si la fonction $y = f(x)$ traduit une correspondance bijective entre les éléments $x$ de A et les éléments $y$ de B, cette correspondance détermine également une fonction « $\varphi$ » telle que $x = \varphi(y)$, définie dans B et à valeurs dans A, appelée *fonction inverse* ou *fonction réciproque* de la fonction « $f$ ».

$$x \leftrightarrow y \Longleftrightarrow y = f(x) \Longleftrightarrow x = \varphi(y) \quad \text{ou} \quad x = f^{-1}(y).$$

EXEMPLE. — La fonction $y = \cos x$ définie sur le segment $A = [0; \pi]$ et à valeurs dans le segment $B = [-1; +1]$ réalise une application bijective de A sur B et à toute valeur $y$ de B correspond une valeur $x$ de A symbolisée par Arc cos $y$.

La fonction « Arc cosinus » est la fonction réciproque (ou inverse) de la fonction « cosinus ».

Le problème qui consiste à définir et étudier la fonction réciproque d'une fonction $f$ donnée est appelé *inversion de fonction* « $f$ ». Notons que :

Si $y = f(x) \Longleftrightarrow x = \varphi(y)$, on étudie alors la fonction : $y = \varphi(x)$.

**67. Définitions.** — Lorsque la valeur de $y$ se calcule, à l'aide d'opérations algébriques, à partir de celle de $x$ on dit que *$y$ est fonction algébrique* de $x$.

EXEMPLES : $\quad y = 2x + 3; \quad y = \dfrac{2x}{x+1}; \quad y = \sqrt{x^2 - 4}.$

Par contre les fonctions $y = \sin x$, $y = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ne peuvent se calculer qu'à l'aide d'une table de rapports trigonométriques. Elles sont dites transcendantes.

Soit A le domaine de définition d'une fonction. Celle-ci est dite :

| | | |
|---|---|---|
| *paire* | si $\forall x \in A$ : | $f(-x) = f(x)$ |
| *impaire* | si $\forall x \in A$ : | $f(-x) = -f(x)$ |
| *périodique* | si $\forall x \in A$, | $\exists p \in R : f(x+p) = f(x)$. |

Le nombre $p$ est la période de $f(x)$.

$$y = 3x^4 + 4x^2 - 5; \qquad y = \frac{4x^2 - 7}{x^2 + 1} \quad \text{sont des fonctions paires.}$$

$$y = x^3 - 5x; \qquad y = \frac{2x}{x^2 - 1} \quad \text{sont des fonctions impaires.}$$

Nous verrons que $y = \sin x$, $y = \cos x$ admettent pour période $2\pi$ radians et que $y = \operatorname{tg} x$ admet pour période $\pi$ radians.

**68. Variation d'une fonction.** — ***Une fonction $y = f(x)$, définie sur un intervalle $]a, b[$ donné, est croissante sur cet intervalle si elle varie dans le même sens que la variable $x$, décroissante si elle varie en sens contraire, constante si elle conserve la même valeur quel que soit $x$.***

Ainsi la longueur d'une corde d'un cercle est fonction croissante de la mesure de l'arc sous-tendu (inférieur à un demi-cercle), mais elle est une fonction décroissante de sa distance au centre. La fonction $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ est constante, égale à $+ 1$ lorsque $x$ est positif, égale à $- 1$ lorsque $x$ est négatif.

Lorsque la variable $x \in [a, b]$ passe de la valeur initiale $x_1$ à la valeur finale $x_2$, elle subit l'accroissement $\Delta x = x_2 - x_1$. Toute fonction $y = f(x)$ définie sur le segment $[a, b]$ subit alors l'accroissement correspondant : $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$. Il résulte de la définition précédente que :

**69. Théorème.** — ***Une fonction $y = f(x)$ est croissante sur tout intervalle où, quels que soient $x_1$ et $x_2$, les accroissements correspondants $\Delta x$ et $\Delta y$ sont de même signe. Elle est décroissante sur tout intervalle où ces accroissements sont de signes différents.***

On étudie le signe du rapport : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] ; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \left| \begin{array}{l} \textit{positif} \implies f(x) \quad \textit{croissante sur } [a, b]. \\ \textit{négatif} \implies f(x) \ \textit{décroissante sur } [a, b]. \end{array} \right.$$

Exemple. — Ainsi pour la fonction $y = x^2$ on a : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2$. Le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ est, quels que soient $x_1$ et $x_2$, positif pour $x \geqslant 0$, négatif pour $x \leqslant 0$. La fonction $y = x^2$ est donc décroissante sur la demi-droite $]- \infty, 0]$, croissante sur la demi-droite $[0, + \infty[$.

***Une fonction qui est soit croissante, soit décroissante sur un intervalle donné est dite monotone sur cet intervalle.***

Étudier la variation d'une fonction $f$, c'est rechercher les intervalles où la fonction est monotone (voire constante) et le sens de variation de $f$ sur chacun de ces intervalles. Une fonction $f(x)$ croissante pour $a < x \leqslant b$, décroissante pour $b \leqslant x < c$, admet sur $]a, c[$ le maximum $f(b)$. Si cette fonction est décroissante pour $a < x \leqslant b$, croissante pour $b \leqslant x < c$, elle admet $f(b)$ pour minimum sur $]a, c[$.

**70. Théorèmes généraux de variation.** — Deux fonctions $y = f(x)$ et $z = g(x)$, monotones sur un intervalle donné $]a, b[$, varient dans le même sens ou en sens contraires suivant que leurs accroissements $\Delta y$ et $\Delta z$ correspondant au même $\Delta x$ sont de même signe ou non. Désignons d'autre part par A et C des constantes :

1° *Les fonctions $y = f(x)$ et $z = f(x) + C$ varient toujours dans le même sens.*

$\Delta y$ et $\Delta z$ sont égaux à $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$ et sont donc de même signe.

2° *Les fonctions $y = f(x)$ et $z = Af(x)$ varient dans le même sens pour A positif, en sens contraires pour A négatif.*

$\Delta y = \Delta f$ et $\Delta z = A\Delta f$ sont de même signe pour $A > 0$, de signes différents pour $A < 0$.

En particulier $y = f(x)$ et $z = -f(x)$ varient en sens contraires.

3° *Si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ varient dans le même sens sur $[a, b]$ il en est de même de leur somme* $y = f(x) + g(x)$.

$\Delta y = \Delta f + \Delta g$ est du même signe que $\Delta f$ et $\Delta g$.

4° *Les fonctions* $y = f(x)$ *et* $z = \dfrac{1}{f(x)}$ *varient en sens contraires dans tout intervalle où* $f(x)$ *conserve un signe constant.*

En effet : $\Delta z = \dfrac{1}{f(x_2)} - \dfrac{1}{f(x_1)} = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_1).f(x_2)} = -\dfrac{\Delta y}{f(x_1).f(x_2)}$

Puisque $f(x_1).f(x_2)$ est positif, $\Delta y$ et $\Delta z$ sont de signes opposés.

En particulier la fonction $\dfrac{1}{x}$ varie en sens contraire de $x$. Elle est donc décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

## LIMITES

**71. Définitions.** — 1° ***On dit que la variable réelle $x$ tend vers le nombre donné $a$ (ou admet pour limite $a$) lorsque la valeur absolue de la différence $x - a$ devient et reste inférieure à tout nombre réel positif $\varepsilon$ fixé à l'avance.***

On fait tendre $x$ vers $a$, si on l'astreint à vérifier, quel que soit le nombre positif arbitrairement petit $\varepsilon$, l'inégalité :

$$\boxed{|x - a| < \varepsilon} \quad \text{ou} \quad \boxed{a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.}$$

On écrit : $x \longrightarrow a$ (lire « $x$ tend vers $a$ »). Précisons que :

$x \longrightarrow a$ *à droite* (ou par valeurs supérieures) si : $a < x < a + \varepsilon$.
$x \longrightarrow a$ *à gauche* (ou par valeurs inférieures) si : $a - \varepsilon < x < a$.

On écrit parfois $x \longrightarrow a + 0$ dans le premier cas et $x \longrightarrow a - 0$ dans le second cas.

Notons que lorsque $x \longrightarrow a$, la différence $x - a$ tend vers zéro, car sa valeur absolue devient et reste inférieure à celle de tout nombre positif.

2° ***On dit que la variable réelle $x$, de signe donné, devient infinie si sa valeur absolue devient et reste supérieure à tout nombre réel positif arbitrairement grand* A, *fixé à l'avance.***

$x \longrightarrow +\infty$ si finalement : $x > A$.
$x \longrightarrow -\infty$ si finalement : $x < -A$.

**72. Limite finie d'une fonction.** — 1° Considérons une fonction réelle $f(x)$ définie sur un voisinage du point donné $a$ (sauf peut-être pour $x = a$). Dire que $f(x)$ tend vers $b$, lorsque $x$ tend vers $a$, signifie que l'on peut choisir $x$ suffisamment voisin de $a$ pour que la différence $f(x) - b$ soit inférieure en valeur absolue à tout réel positif $\varepsilon$, si petit soit-il, fixé à l'avance. D'une façon plus précise :

***La fonction $f(x)$ tend vers la limite $b$ lorsque $x$ tend vers $a$, si à tout réel positif arbitrairement petit $\varepsilon$ on peut faire correspondre un réel positif $\alpha$ tel que la relation $|x - a| < \alpha$ entraîne : $|f(x) - b| < \varepsilon$.***

Donc $f(x) \longrightarrow b$ lorsque $x \longrightarrow a$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

EXEMPLE. — *Montrer que $y = \sqrt{x + 3}$ tend vers 2 lorsque $x$ tend vers 1.*

$$|y - 2| = |\sqrt{x + 3} - 2| = \frac{|x - 1|}{\sqrt{x + 3} + 2} < \frac{|x - 1|}{2}$$

$|\sqrt{x + 3} - 2| < \varepsilon$ est réalisée pour : $|x - 1| < 2\varepsilon$ ou $x \in ]1 - 2\varepsilon, 1 + 2\varepsilon[$.

Ainsi pour obtenir : $1{,}99 < \sqrt{x + 3} < 2{,}01$ il suffit de prendre : $0{,}98 < x < 1{,}02$.

2° ***On dit que la fonction $f(x)$ tend vers la limite $b$, lorsque $x$ tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), si à tout réel positif arbitrairement petit $\varepsilon$, on peut faire correspondre un réel positif A tel que la relation $|x| > A$ entraîne : $|f(x) - b| < \varepsilon$.***

Donc $f(x) \longrightarrow b$ lorsque $x \longrightarrow \infty$ ou $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A > 0 \text{ tel que } |x| > A \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

EXEMPLE. — *Montrer que $y = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$ tend vers $2 + 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.*

$y - 2 = \dfrac{3}{x + 1}$. Pour obtenir $0 < y - 2 < \varepsilon$, il suffit de prendre $0 < \dfrac{3}{x + 1} < \varepsilon$ c'est-à-dire $x + 1 > \dfrac{3}{\varepsilon}$ ou simplement $x > \dfrac{3}{\varepsilon}$.

**73. Limite infinie d'une fonction.** — 1° ***On dit que la fonction de signe connu $f(x)$ tend vers l'infini, lorsque $x$ tend vers $a$, si à tout réel positif arbitrairement grand B, on peut faire correspondre un réel positif $\alpha$ tel que $|x - a| < \alpha$ entraîne : $|f(x)| > B$.***

Par exemple $f(x) \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow a$ si :

$$\forall B > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) > B.$$

EXEMPLE. — La fonction $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+3$ par valeurs supérieures car pour obtenir $y > B$ il suffit de prendre $\sqrt{x - 3} < \dfrac{1}{B}$

soit : $$0 < x - 3 < \frac{1}{B^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3 < x < 3 + \frac{1}{B^2}.$$

2° ***On dit que la fonction de signe connu $f(x)$ tend vers l'infini lorsque $x$ tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), si à tout réel positif arbitrairement grand B, on peut faire correspondre un réel positif A tel que $|x| > A$ entraîne : $|f(x)| > B$.***

Ainsi : $f(x) \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow -\infty$ si :

$$\forall B > 0, \exists A > 0 \text{ tel que } x < -A \Longrightarrow f(x) > B.$$

EXEMPLE. — La fonction $y = \sqrt{2 - x}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ car pour obtenir $y > B$ il suffit de prendre $2 - x > B^2$ ce qui est réalisé pour $x < -B^2$.

**74. Opérations sur les limites.** — La recherche des limites de fonctions est facilitée par les théorèmes suivants que nous admettrons en nous bornant à donner les conclusions sous forme de tableaux.

**75. Limite d'une somme.** — *Lorsque $x$ tend vers $x_0$ ou vers $\pm\infty$ :*

| ***Si $f(x)$ tend vers :*** <br> ***et si $g(x)$ tend vers :*** | $a$ <br> $b$ | $a$ <br> $+\infty$ | $a$ <br> $-\infty$ | $+\infty$ <br> $+\infty$ | $-\infty$ <br> $-\infty$ | $+\infty$ <br> $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***$f(x) + g(x)$ tend vers :*** | $a + b$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? |

Dans le cas où les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ tendent l'une vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$, la limite n'est pas déterminée et nécessite un calcul direct. On dit que :

*La somme* $f(x) + g(x)$ *se présente alors sous la forme indéterminée* $\infty - \infty$.

Ce cas mis à part et en étendant la notion de somme au cas où l'un où l'autre des termes devient infini :

***La limite d'une somme est la somme des limites de chacun des termes.***

Ainsi : $\lim\,[f(x) + g(x) + h(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) + \lim h(x)$

$$\lim\,[f(x) + C] = \lim f(x) + C$$

**76. Limite d'un produit.** — Nous supposons connu le signe de chacun des facteurs $f(x)$ et $g(x)$ et nous donnons seulement la valeur absolue de ces facteurs ou de leur produit lorsque cette valeur absolue est infinie.

*Lorsque $x$ tend vers $x_0$ ou vers $\pm\infty$ :*

| ***Si $f(x)$ tend vers :*** <br> ***et si $g(x)$ tend vers :*** | $a$ <br> $b$ | $a \neq 0$ <br> $\infty$ | $\infty$ <br> $\infty$ | $0$ <br> $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| ***$fx \,.\, g(x)$ tend vers :*** | $ab$ | $\infty$ | $\infty$ | ? |

Nous voyons apparaître *la forme indéterminée* $0 \times \infty$. Ce cas mis à part on peut dire que :

***La limite d'un produit est le produit des limites de chacun des facteurs.***

Ainsi : $\lim f(x) \,.\, g(x) \,.\, h(x) = \lim f(x) \,.\, \lim g(x) \,.\, \lim h(x)$

En désignant par A, B, C des constantes, on voit que :

$$\lim\,[A\,f(x) + B\,g(x) + C] = A \lim f(x) + B \lim g(x) + C$$

**77. Limite d'un quotient.** — En supposant connu le signe de chacun des termes $f(x)$ et $g(x)$, nous ne donnons que leur valeur absolue ou celle de leur quotient lorsque cette valeur absolue est infinie. Lorsque $x$ tend vers $x_0$ ou vers $\pm\infty$ :

| *Si $f(x)$ tend vers :* <br> *et si $g(x)$ tend vers :* | $a$ <br> $b \neq 0$ | $\infty$ <br> $b \neq 0$ | $a \neq 0$ <br> $0^*$ | $a$ <br> $\infty$ | $0$ <br> $0$ | $\infty$ <br> $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *tend vers :* | $\dfrac{a}{b}$ | $\infty$ | $\infty$ | $0$ | ? | ? |

Le symbole $0^*$ indique que $g(x)$ doit tendre vers 0 à droite ou vers 0 à gauche, pour que le quotient ait un signe déterminé. Le cas des *formes indéterminées* $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ mis à part on peut dire que :

***La limite d'un quotient est le quotient des limites de chacun de ses termes.***

$$\lim \frac{f(x) \,.\, g(x)}{h(x)} = \frac{\lim f(x) \,.\, \lim g(x)}{\lim h(x)}$$

En particulier : $$\lim \frac{\mathrm{A}}{f(x)} = \frac{\mathrm{A}}{\lim f(x)} \quad \text{et} \quad \lim \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim x}.$$

*Lorsqu'un nombre positif tend vers $+\infty$, son inverse tend vers 0 et lorsqu'un nombre positif tend vers zéro, son inverse tend vers $+\infty$.*

**78. Limite d'une puissance ou d'une racine.** — Il résulte du nº 76 que :

***Si $f(x)$ tend vers $a$, $[f(x)]^p$ tend vers $a^p$.***

Inversement, en supposant $\sqrt[p]{f(x)}$ définie pour $f(x)$ voisin de $a$ :

***Si $f(x)$ tend vers $a$, $\sqrt[p]{f(x)}$ tend vers $\sqrt[p]{a}$.***

Ces limites sont nulles pour $a = 0$, infinies lorsque $a$ est infini.

**79. Résumé.** — Il résulte des théorèmes précédents que :

***Lorsque $x$ tend vers $x_0$, toute fonction algébrique de $x$ admet pour limite sa valeur pour $x = x_0$ si toutefois elle ne se présente pas sous l'une des formes indéterminées : $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$.***

Ainsi lorsque $x \longrightarrow +3$ : $$\mathrm{F}(x) = \frac{(x-1)^4 + \sqrt{x^3 - 2}}{2x - 3} \longrightarrow \frac{16 + \sqrt{25}}{3} = 7.$$

La recherche de la limite de la fonction $\mathrm{F}(x)$, lorsque $x$ tend vers $x_0$, ne pose donc de problème que lorsque $\mathrm{F}(x)$ se présente sous une forme indéterminée ou non définie pour $x = x_0$. Pour trouver cette limite, on cherchera à écrire $\mathrm{F}(x)$ sous une forme équivalente telle que $\mathrm{A}(x) \,.\, \mathrm{B}(x) \,.\, \mathrm{C}(x)$ ou $\dfrac{\mathrm{A}(x) \,.\, \mathrm{B}(x)}{\mathrm{C}(x)}$ dans laquelle on sait déterminer les limites des facteurs $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$ et $\mathrm{C}(x)$ lorsque $x$ tend vers $x_0$.

**80. Applications.** — 1° Le polynôme : $F(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} ... + a_{n-1}x + a_n$ se présente souvent sous la forme $\infty - \infty$ lorsque $x$ tend vers $\pm \infty$.

Or : $$F(x) \equiv a_0\, x^n . \left(1 + \frac{a_1}{a_0\, x} + \frac{a_2}{a_0\, x^2} + ... + \frac{a_n}{a_0\, x^n}\right).$$

Lorsque $x$ devient infini, l'expression entre parenthèses tend vers $+ 1$. Donc :

***Un polynôme en $x$ devient infini, avec le signe de son terme de plus haut degré, lorsque $x$ tend vers $+ \infty$ ou vers $- \infty$.***

On peut même ajouter que le rapport $\dfrac{F(x)}{a_0\, x^n}$ tend vers 1 lorsque $x \longrightarrow \pm \infty$.

2° La fraction rationnelle : $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)} = \dfrac{a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + ... + a_n}{b_0\, x^p + b_1\, x^{p-1} + ... + b_p}$ se présente sous la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$ lorsque $x$ devient infini. Pour $x \neq 0$, on peut écrire :

$$F(x) = \frac{a_0\, x^n}{b_0\, x^p} . \frac{1 + \dfrac{a_1}{a_0\, x} + \dfrac{a_2}{a_0\, x^2} + ... + \dfrac{a_n}{a_0\, x^n}}{1 + \dfrac{b_1}{b_0\, x} + \dfrac{b_2}{b_0\, x^2} + ... + \dfrac{b_p}{b_0\, x^p}}.$$

La seconde fraction du second membre tend vers $+ 1$ lorsque $x$ devient infini. Donc

***La limite d'une fraction rationnelle, lorsque $x$ devient infini, est celle du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.***

On voit que *la limite est infinie* avec le signe de $\dfrac{a_0}{b_0}\, x^{n-p}$ pour $n > p$, *égale à* $\dfrac{a_0}{b_0}$ pour $n = p$, *nulle* pour $n < p$.

3° Si $x_0$ annule $A(x)$ et $B(x)$, la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ se présente pour $x = x_0$ sous la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. On peut alors l'écrire (n° 47) :

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{(x - x_0)\, C(x)}{(x - x_0)\, D(x)}$$

et elle est, pour $x \neq x_0$, équivalente à $\dfrac{C(x)}{D(x)}$ qui admet, en général la limite $\dfrac{C(x_0)}{D(x_0)}$ lorsque $x \longrightarrow x_0$ :

***Si pour $x = x_0$ une fraction rationnelle $F(x)$ se présente sous la forme $\dfrac{0}{0}$, elle admet, lorsque $x$ tend vers $x_0$, la même limite que la fraction $F_1(x)$ obtenue après simplification par $x - x_0$.***

Exemple. — *Trouver pour $x = 2$ la limite de* $F(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

Pour $x = 2$, la fonction $F(x)$ prend la forme $\dfrac{0}{0}$. Pour $x \neq 2$, on peut écrire :

$$F(x) = \frac{(x - 2)\,(x + 3)}{(x - 2)\,(x - 1)} = \frac{x + 3}{x - 1} \Longrightarrow \lim_{x \to 2} F(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x + 3}{x - 1} = \frac{2 + 3}{2 - 1} = 5.$$

Pour $x = 2$, la fonction $F(x)$ admet 5 pour vraie valeur.

## FONCTIONS CONTINUES

**81. Continuité en un point.** — ***Une fonction $f(x)$, définie sur un segment $[a, b]$, est dite continue au point $x_0$ de ce segment si elle admet pour limite $f(x_0)$ lorsque $x$ tend vers $x_0$.***

La fonction $f(x)$ est donc continue en $x_0$ si (n° 72) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha \quad \text{tel que} \quad |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Une fonction peut être discontinue pour $x = x_0$ soit parce qu'elle n'est pas définie au point $x_0$, soit parce que l'une au moins des limites $f(x_0 - 0)$ ou $f(x_0 + 0)$ est différente de $f(x_0)$.

Exemples. — 1° La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$ est discontinue au point $a$ car elle n'est pas définie en ce point et d'autre part : $f(a - 0) \to - \infty$ et $f(a + 0) \to + \infty$.

2° La fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^2}}$ est discontinue pour $x = 0$, car $f(0)$ n'est pas défini et elle admet pour limite $+ 1$ ou $- 1$ suivant que $x$ tend vers 0 à droite ou à gauche.

3° La fonction $y = 3x - 5$ est continue pour $x = 2$ car :

$$x = 2 \Longrightarrow y = 1 \quad \text{et} \quad x \to 2 \Longrightarrow y \to 1$$

4° La fonction $y = 2x^2 - 7x + 3$ est continue pour $x = -1$ car :

$$x = -1 \Longrightarrow y = 12 \quad \text{et} \quad x \to -1 \Longrightarrow y \to 12$$

***Pour qu'une fonction $f(x)$ soit continue au point $x_0$, il faut et il suffit que l'accroissement $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ tende vers 0 en même temps que $\Delta x = x - x_0$.***

Ce n'est qu'une autre façon d'énoncer la définition ci-dessus. On dit également que $\Delta x$ et $\Delta y$ sont des infiniment petits simultanés.

**82. Continuité sur un intervalle.** — ***Une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle donné, est continue sur cet intervalle si elle est continue en chaque point de cet intervalle.***

D'après le n° 79 il en est ainsi de toute fonction algébrique de $x$ dans tout intervalle où cette fonction est définie. On déduit, des théorèmes sur les limites (nos 75 à 78), les théorèmes généraux suivants permettant de former de nouvelles fonctions continues à partir de fonctions $f(x)$ et $g(x)$ supposées continues sur un segment donné $[a, b]$.

1° ***La somme $f(x) + g(x)$ de deux fonctions continues sur $[a, b]$ est une fonction continue sur $[a, b]$.***

2° ***Le produit $f(x) . g(x)$ de deux fonctions continues sur $[a, b]$ est une fonction continue sur $[a, b]$.***

3° ***Le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ de deux fonctions continues sur $[a, b]$ est une fonction continue sur $[a, b]$ si $g(x)$ conserve un signe donné sur ce segment.***

4° ***Si $f(x)$ est une fonction continue sur $[a, b]$, il en est de même de toute puissance d'exposant entier positif $[f(x)]^p$ de cette fonction ainsi que de toute racine $\sqrt[p]{f(x)}$ si toutefois cette racine est définie sur $[a, b]$.***

Ainsi les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition :

$$y = ax + b \quad \text{sur} \quad ]-\infty ; +\infty[$$

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{sur} \quad ]-\infty ; +\infty[$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{sur} \quad ]-\infty, 0[ \quad \text{et} \quad ]0, +\infty[$$

## EXERCICES

— Étudier les variations des fonctions suivantes :

**133.** $y = 2x - 3$. **134.** $y = -3x + 2$. **135.** $y = -x - 5$.

**136.** $y = x^2 - 4$. **137.** $y = \frac{2}{x}$. **138.** $y = \frac{2 - x}{x}$.

**139.** $y = x^3 - 3x$ sur les intervalles : $]0, +1]$, $[+1, \infty[$.

**140.** $y = x^4 - 8x^2 + 16$ — $]0, +2]$, $[+2, +\infty[$.

**141.** $y = x + \frac{a^2}{x}$ — $]0, a[$ et $]a, +\infty[$.

Retrouver d'après cette étude le théorème relatif au minimum de la somme de deux nombres positifs dont le produit est constant.

**142.** Montrer que la fonction : $y = x - \frac{a^2}{x}$ est croissante dans les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

— Déterminer la limite des expressions suivantes :

**143.** $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ (lorsque $x \to 1$). **144.** $\frac{x^3 + 27}{3x + 9}$ $(x \to -3)$.

**145.** $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$ $(x \to 2)$. **146.** $\frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + x - 3}$ $(x \to 1)$.

**147.** $\frac{2x^3 - 5x + 6}{3x^2 + 7x + 2}$ $(x \to -2)$. **148.** $\frac{3x^2 - 2ax - a^2}{2x^2 - 3ax + a^2}$ $(x \to a)$.

**149.** $\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ $(x \to 1)$. **150.** $\frac{2x + 1}{2x^2 - x - 6} - \frac{x + 3}{3x^2 - 5x - 2}$ $(x \to 2)$.

**151.** $\frac{x - 3}{x - 1 - \sqrt{x + 1}}$ $(x \to 3)$. **152.** $\frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 7} - \sqrt{2x + 1}}$ $(x \to 4)$.

**153.** 1° Démontrer que la fonction $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - x$ est une fonction impaire. Trouver ses limites $f(+0)$ et $f(-0)$ lorsque $x \to 0$ par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures.

2° Étudier les variations et construire le graphe de cette fonction.

**154.** 1° Démontrer que $y = \frac{1}{2}(|x+1| + |x-1|)$ s'écrit :

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-2x+1}\right)$$

et est une fonction paire. En donner une expression simple dans chacun des intervalles limités par $-1$ et $+1$.

2° Établir le tableau des variations de $y$ et construire son graphe dans un repère orthonormé. Symétrie de ce graphe.

**155.** 1° On désigne par E $(x)$ le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à $x$ (*caractéristique de $x$*). Construire le graphe de $y = \mathrm{E}(x)$.

2° Montrer que la fonction $z = x - \mathrm{E}(x)$ (*mantisse* de $x$) est une fonction périodique. Construire son graphe.

**156.** Soit $r(x)$ le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à $\frac{1}{2}(x+1)$ On considère la fonction $y = (-1)^{r(x)}[x - 2r(x)]$.

1° Montrer que $y$ est une fonction périodique de période 4. Si $n$ désigne un entier algébrique quelconque, donner une expression simple de $y$ sur chacun des segments $[4n-1, 4n+1]$ et $[4n+1, 4n+3]$.

2° Établir le tableau de variation et construire en orthonormées le graphe de la fonction $y$. Quels sont les éléments de symétrie de ce graphe ? Comparer $f(-x), f(2-x), f(2+x)$ à $f(x) = y$.

— Étudier pour quelles valeurs de $x \in \mathrm{R}$ les fonctions suivantes sont définies :

**157.** $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$

**158.** $y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x+1}$

**159.** $y = \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x+1} + \sqrt{1-x^2}$

**160.** $y = \sqrt{2x^2-x-3}$

**161.** $y = \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{4-x^2}$

**162.** $y = \sqrt{(x-1)^3} + \frac{1}{x-1}$.

**163.** 1° Démontrer que la somme de deux ou plusieurs fonctions croissantes sur le segment $[a; b]$ est une fonction croissante sur le même segment.

2° Démontrer que la somme de deux ou plusieurs fonctions décroissantes sur l'intervalle $]a; b]$ est une fonction décroissante sur le même intervalle.

3° Application aux fonctions suivantes :

$$y = x - \frac{1}{x}; \qquad y = -3x + 1 + \frac{1}{x}; \qquad y = x^3 - \frac{1}{x}$$

$$y = x - \frac{1}{x-2}; \qquad y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}; \qquad y = x - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}.$$

**164.** 1° Démontrer que le produit de deux fonctions positives croissantes (ou négatives décroissantes) est une fonction croissante et que le produit de deux fonctions positives décroissantes (ou négatives croissantes) est une fonction décroissante.

2° Application aux fonctions : $y = x\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$ ; $y = \frac{\cos x}{x}$ sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ ; $y = x\sqrt{x-2}$ sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

**165.** Connaissant le sens de variation de la fonction $y = x - 2$ en déduire celui des fonction suivantes :

$$y = \frac{1}{x-2}; \qquad y = \sqrt{x-2}; \qquad y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}; \qquad y = (x-2)^2; \qquad y = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

— Réduire les fonctions suivantes et étudier leur variation :

**166.** $y = \sqrt{x^2 + 4 + 4\sqrt{x^2}} - \sqrt{x^2 + 4 - 4\sqrt{x^2}}$

**167.** $y = \sqrt{x^2 + 9 + 6\,|x|} - \sqrt{x^2 + 9 - 6\,|x|}$

**168.** $y = \sqrt{(x - 2)^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x + 2)^2}$

**169.** $y = \frac{1}{2}\sqrt{(x + 1)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(x - 1)^2} - 1.$

— Étudier les fonctions suivantes pour $x = 0$, puis lorsque $x$ tend vers zéro, par valeurs positives ou négatives et déterminer leur continuité pour $x = 0$.

**170.** $y = \sqrt{x^2}$ ; $y = x + \sqrt{x^2}$ ; $y = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}.$

**171.** $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}}$ ; $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2}$ ; $y = x - \frac{x}{\sqrt{x^2}}.$

**172.** $y = \frac{\sqrt{x^2 + |x|}}{x}$ ; $y = \frac{\sqrt{x^2} - x}{\sqrt{x^2} + x}$ ; $y = \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{x^2 - \sqrt{x^2}}.$

# COORDONNÉES ET GRAPHES

**83. Coordonnées cartésiennes.** — Rappelons qu'un repère cartésien $xOy$ se compose (fig. 16) de deux axes $Ox$ et $Oy$ de même origine O et de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose suivant $Ox$ et $Oy$ et :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Les nombres relatifs $x$ et $y$, composantes scalaires de $\overrightarrow{OM}$, sont respectivement l'*abscisse* $x$ et l'*ordonnée* $y$ du point M. La position du point M dans le plan $xOy$ est déterminée par l'ensemble de ses deux *coordonnées* $x$ et $y$ : On dit le point M $(x, y)$.

Le repère cartésien $xOy$ est dit *normé* si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont le même module, *rectangulaire* si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires. Enfin il est *orthonormé* si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même module et sont perpendiculaires.

Dans ce dernier cas : $\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 \Longrightarrow \boxed{\overline{OM}^2 = x^2 + y^2}$

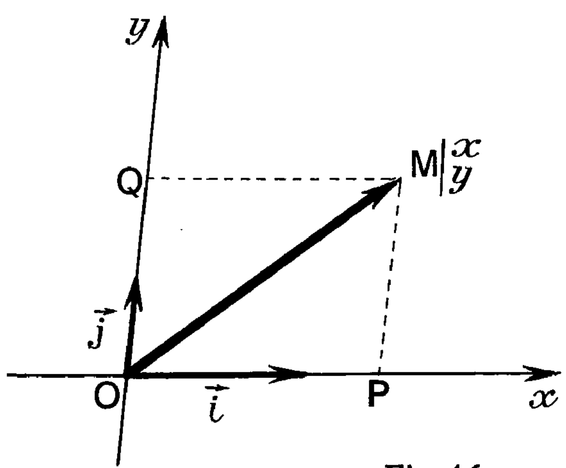



Fig. 16.

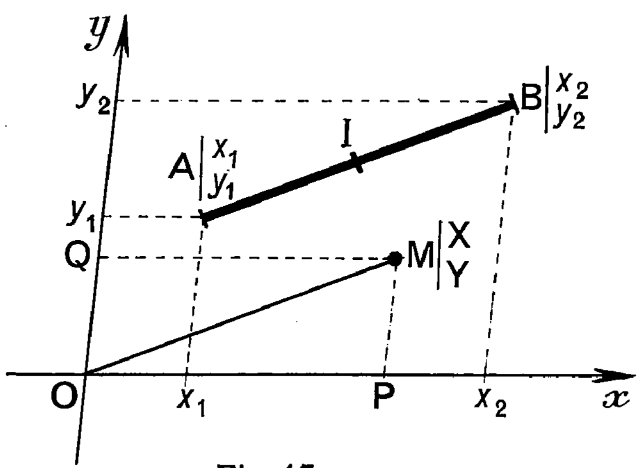



Fig. 17.

**84. Composantes scalaires d'un vecteur.** — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui joint le point A $(x_1, y_1)$ au point B $(x_2, y_2)$ a pour composantes scalaires (fig. 17) :

$$X = x_2 - x_1 \quad \text{et} \quad Y = y_2 - y_1$$

et : $$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

Si le repère est orthonormé : $\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Dans tout repère, le milieu I de AB a pour coordonnées (fig. 17).

$$x_I = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{et} \quad y_I = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Plus généralement un point C de la droite AB divise le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport relatif $k$ si sa projection C′ sur O$x$ divise dans le rapport $k$ la projection $\overrightarrow{A'B'}$ de $\overrightarrow{AB}$.

En particulier la division (ABCD) est harmonique en même temps que sa projection (A′B′C′D′) sur O$x$, ce qui conduit à la relation entre les abscisses $a$, $b$, $c$, $d$ des points A, B, C, D :

$$(a + b)(c + d) = 2(ab + cd).$$

— Deux vecteurs $\vec{V}$ (X, Y) et $\vec{V}'$ (X′, Y′) sont parallèles si et seulement si leurs composantes scalaires sont proportionnelles :

$$\vec{V} \parallel \vec{V}' \iff \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} \iff \boxed{XY' - YX' = 0}.$$

Dans un repère orthonormé, ces vecteurs sont perpendiculaires si leur produit scalaire $\vec{V}.\vec{V}' = XX' + YY'$ est nul (Géométrie : 6^e^ leçon).

$$\vec{V} \perp \vec{V}' \iff \vec{V}.\vec{V}' = 0 \iff \boxed{XX' + YY' = 0}.$$

**85. Points symétriques.** — 1° *Dans un repère rectangulaire* les points M ($\alpha$, $\beta$) et N ($\alpha$, $-\beta$) sont symétriques par rapport à O$x$. Les points M ($\alpha$, $\beta$) et P ($-\alpha$, $\beta$) sont symétriques par rapport à O$y$ (fig. 18).

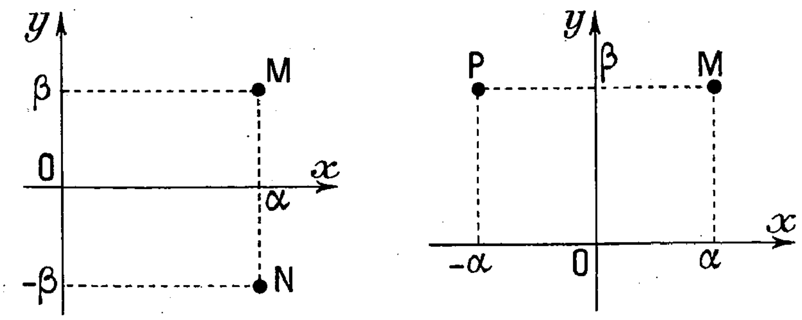



Fig. 18.

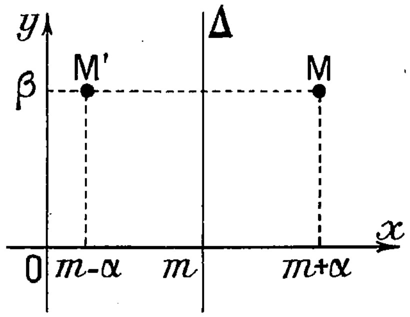



Fig. 19.

Plus généralement (fig. 19) les points M ($m + \alpha$, $\beta$) et M′ ($m - \alpha$, $\beta$) sont symétriques par rapport à la droite Δ perpendiculaire à O$x$ au point H d'abscisse $m$.

2° *Dans tout repère* les points M ($\alpha$, $\beta$) et M′ ($-\alpha$, $-\beta$) sont symétriques par rapport à O car (fig. 20) :

$$\overrightarrow{OM'} = -\alpha\vec{i} - \beta\vec{j} = -(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}) = -\overrightarrow{OM}$$

3° *Dans un repère normé* les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ s'échangent dans la symétrie d'axe O$u$, *première bissectrice* du repère (fig. 21). Il en est de même des vecteurs $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ et $\overrightarrow{ON} = \alpha\vec{j} + \beta\vec{i}$ et par suite des points M ($\alpha$, $\beta$) et N ($\beta$, $\alpha$).

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont pour homologues $-\vec{j}$ et $-\vec{i}$ dans la symétrie d'axe O$v$ deuxième bissectrice. Il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ et $\overrightarrow{OP} = -\alpha\vec{j} - \beta\vec{i}$ s'échangent dans cette symétrie et qu'il en est de même des points M ($\alpha$, $\beta$) et P ($-\beta$, $-\alpha$)

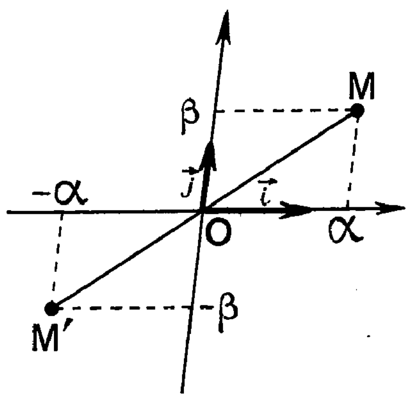



Fig. 20.

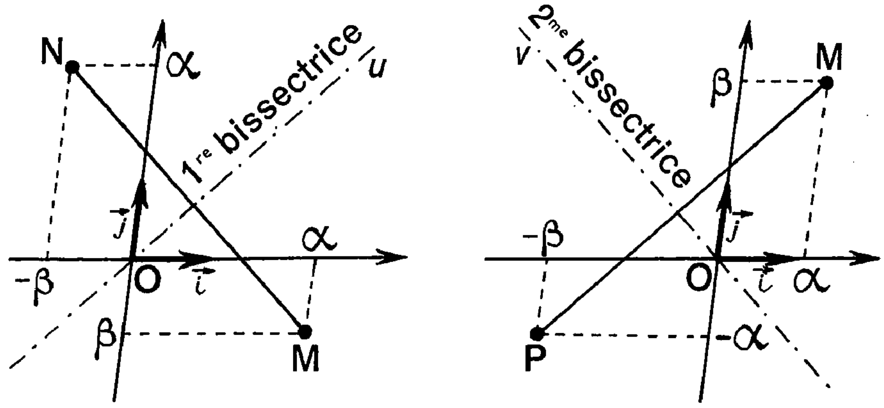



Fig. 21.

**86. Graphe d'une fonction.** — Soit $y = f(x)$ une fonction définie sur le segment $[a, d]$. Le plan étant rapporté à un repère cartésien $x$O$y$ construisons pour toute valeur de $x$ de $[a, d]$, le point M de coordonnées $x$ et $y = f(x)$.

***L'ensemble des points*** M $[x, y = f(x)]$ ***est le graphe de la fonction :*** $y = f(x)$ ***sur*** $[a, d]$.

Nous admettrons la propriété suivante :

***Toute fonction*** $f(x)$, ***continue sur le segment*** $[a, d]$, ***est représentée graphiquement par un arc de courbe continu d'extrémités*** A $[a, f(a)]$ ***et*** D $[d, f(d)]$ (fig. 22).

Cette propriété est à l'origine de la dénomination « fonction continue ». Toute discontinuité de $f(x)$ se traduit par une interruption dans le graphe de la fonction $y = f(x)$.

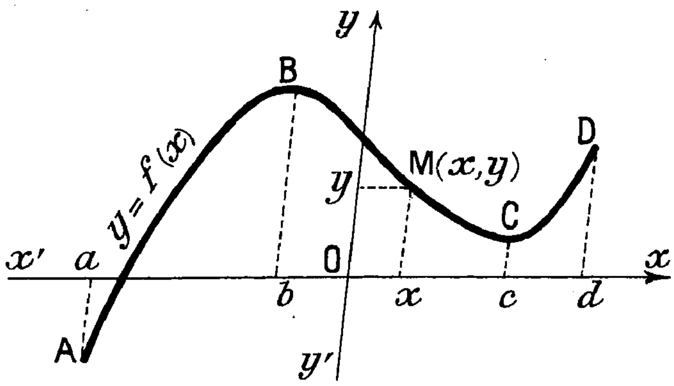



Fig. 22.

Les arcs AB et CD correspondent à des segments $[a, b]$ et $[c, d]$ sur lesquels la fonction est croissante tandis que l'arc BC correspond à un segment $[b, c]$ sur lequel la fonction est décroissante.

Le point B correspond au *maximum* $f(b)$ et le point C au *minimum* $f(c)$.

Le graphe de toute fonction impaire admet le point O pour centre de symétrie car les points M $[x, f(x)]$ et M′ $[-x, -f(x)]$ sont symétriques par rapport à O (fig. 23).

En coordonnées rectangulaires, le graphe de toute fonction paire admet O$y$ pour axe de symétrie (fig. 24) car les points M $[x, f(x)]$ et M′ $[-x, f(x)]$ sont symétriques par rapport à O$y$.

Enfin dans tout repère, le graphe d'une fonction périodique, de période $p$ se compose d'une infinité d'arcs égaux (fig. 25), chacun d'eux se déduisant du précédent dans la translation de vecteur $\vec{V}$ $(p, 0)$.

Plus généralement, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient une relation $F(x, y) = 0$ est le plus souvent une courbe (C), appelée *courbe représentative ou graphe de la relation* $F(x, y) = 0$. Réciproquement la relation $F(x, y) = 0$ qui caractérise les points d'une courbe donnée (C) est l'*équation de la courbe* (C).

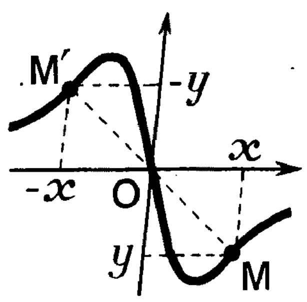


Fig. 23.

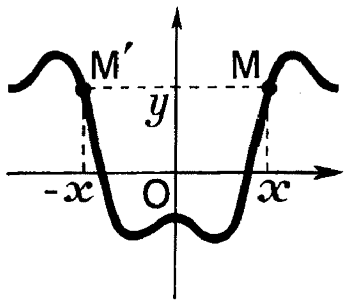


Fig. 24.

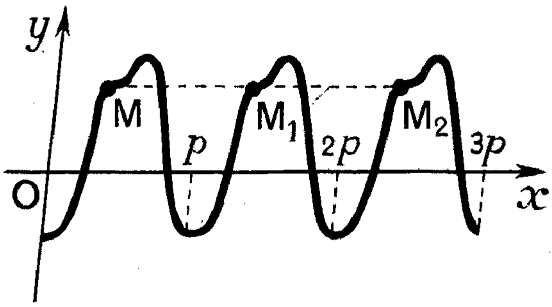


Fig. 25.

**87. Lieu d'un point variable.** — Supposons que les coordonnées d'un point variable M soient des fonctions d'un même paramètre $m$, par exemple :

$$x = f(m) \quad ; \quad y = g(m).$$

Lorsque $m$ varie, le point M décrit une courbe (C). Pour obtenir son équation, il suffit d'éliminer $m$ entre les deux relations : $x = f(m)$ et $y = g(m)$.

Exemple. — *Trouver, lorsque $m$ varie, le lieu du point* M *de coordonnées :*

$$x = \frac{m+4}{m+1}; \quad y = \frac{m-1}{m+1}.$$

$$x = 1 + \frac{3}{m+1} \text{ et } y = 1 - \frac{2}{m+1} \Longrightarrow 2x + 3y = 5.$$

Cette relation étant vérifiée quel que soit $m$, le point M se déplace donc sur la droite d'équation : $2x + 3y - 5 = 0$. Comme à chaque valeur de $x$ correspond inversement une valeur unique $m = \frac{4-x}{x-1}$, on voit que le point M décrit la droite en entier lorsque $m$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

**88. Affinité d'axe** $Ox$ **et de direction** $Oy$. — Supposons tracée dans un repère quelconque $xOy$ la courbe $y = f(x)$ et $a$ désignant un nombre relatif donné, proposons-nous d'en déduire la courbe $y = af(x)$ (fig. 26).

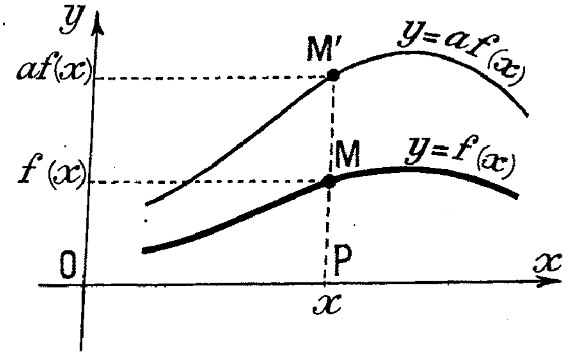


Fig. 26.

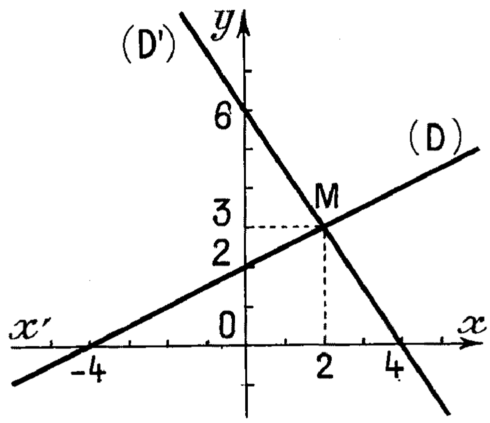


Fig. 27.

Les points M $[x, f(x)]$ et M' $[x, af(x)]$ sont situés sur une parallèle à $Oy$ et $\overline{PM'} = a \cdot \overline{PM}$. Le point M' de la courbe $y = af(x)$ se déduit ainsi facilement du point M ayant même abscisse sur la courbe $y = f(x)$.

Cette transformation géométrique est l'*affinité d'axe* O$x$, *de direction* O$y$ *et de rapport* $a$. Lorsque le repère $x$O$y$ est rectangulaire on obtient l'*affinité orthogonale* d'axe O$x$. Cette dernière se réduit à la symétrie d'axe O$x$ pour $a = -1$.

— Lorsque $a$ est positif les courbes $y = f(x)$ et $y = af(x)$ ont même allure et la courbe $y = af(x)$ est d'autant plus éloignée de l'axe O$x$ que $a$ est grand en valeur absolue.

**89. Intersection de deux graphes.** — ***Les coordonnées des points communs à deux courbes tracées dans un même repère sont les solutions du système formé par les équations de ces deux courbes.***

En effet, toute solution de ce système correspond à un point commun, et réciproquement les coordonnées de tout point commun vérifient les deux équations et constituent une solution du système. On peut ainsi résoudre graphiquement le système en mesurant les coordonnées des points communs aux deux courbes, ou calculer ces coordonnées en résolvant algébriquement le système.

Ainsi (fig. 27) les droites (D) : $x - 2y + 4 = 0$ et (D') : $3x + 2y - 12 = 0$, se coupent au point M (2; 3) et $x = 2$, $y = 3$ constitue la solution du système formé par les équations de D et de D'.

Notons que l'équation E $(x)$ qui résulte de l'élimination de $y$ entre les équations des deux courbes est l'*équation aux abscisses des points d'intersection.*

**90. Translation d'un repère cartésien.** — Supposons le plan rapporté au repère cartésien $x$O$y$ de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (fig. 28). Soit $\omega$ $(x_0, y_0)$ un point donné et X$\omega$Y le repère cartésien qui se déduit de $x$O$y$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$. Soit M $(x, y)$ un point quelconque du plan et soient X et Y ses coordonnées par rapport au nouveau repère X$\omega$Y. Donc :

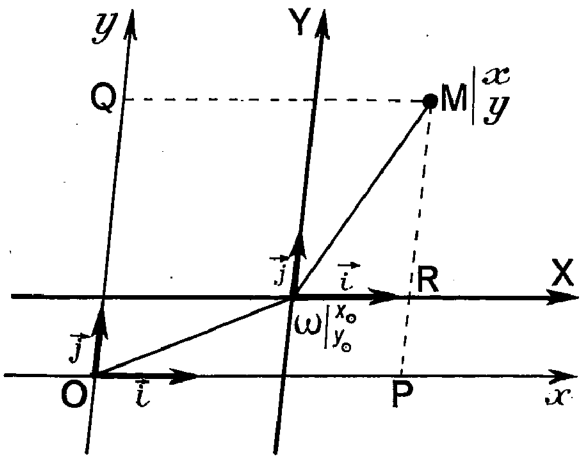


Fig. 28.

$$\overrightarrow{\omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}.$$

Il en résulte que X et Y sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\omega M}$ dans le repère $x$O$y$. Donc (n° 84) :

$$\boxed{X = x - x_0} \qquad \boxed{Y = y - y_0} \qquad (1)$$

ou encore :

$$\boxed{x = x_0 + X} \qquad \boxed{y = y_0 + Y} \qquad (2)$$

Ce sont les formules du changement de repère :

***L'ancienne abscisse est égale à l'abscisse de la nouvelle origine augmentée de la nouvelle abscisse.***

Pour les ordonnées on obtient la règle analogue.

Si $y = f(x)$ est l'ancienne équation d'une courbe (C) on obtient :

$$y_0 + Y = f(x_0 + X) \iff Y = F(X).$$

C'est l'équation de la courbe (C) dans le nouveau repère. Si ce dernier a été choisi de façon que cette nouvelle équation soit particulièrement simple, on dit que $Y = F(X)$ *est l'équation réduite de la courbe* (C).

**91. Changement de vecteurs unitaires.** — Dans le repère cartésien $xOy$ (fig. 16), remplaçons les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ tels que : $\vec{I} = \alpha\vec{i}$ et $\vec{J} = \beta\vec{j}$. Dans le nouveau repère ainsi défini, on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J}$$

soit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \alpha X\vec{i} + \beta Y\vec{J}.$$

$$x = \alpha X \quad \text{et} \quad y = \beta Y \iff X = \frac{x}{\alpha} \quad \text{et} \quad Y = \frac{y}{\beta}.$$

## LA FONCTION $y = ax + b$ ET LA DROITE *(Rappel)*

**92. Variation de** $y = ax + b$. — La fonction $y = ax + b$ est définie et continue quel que soit $x$. Or $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, cette fonction est croissante pour $a > 0$, décroissante pour $a < 0$.

D'autre part, $y$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ et devient infini en même temps que $x$.

**1er cas :** *a positif*

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | $+$ | \| | $+$ |
| $y$ | $-\infty \nearrow$ | $0$ | $\nearrow +\infty$ |

**2e cas :** *a négatif*

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | $-$ | \| | $-$ |
| $y$ | $+\infty \searrow$ | $0$ | $\searrow -\infty$ |

**93. Représentation graphique.** — ***La fonction $y = ax + b$ est représentée graphiquement par une droite $\Delta$ de coefficient directeur $a$ et d'ordonnée à l'origine $b$.***

Soient $M_0(x_0, y_0 = ax_0 + b)$ un point fixe et $M(x, y = ax + b)$ un point variable du graphe de la fonction $y = ax + b$ (fig. 29). La relation :

$$y - y_0 = a(x - x_0) \iff \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{a}$$

montre que le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est parallèle au vecteur fixe $\overrightarrow{OS}$ $(1, a)$. Le lieu du point M est donc la droite $\Delta$, issue de $M_0$ et parallèle à OS. Cette droite coupe $Ox$ au point A $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ et $Oy$ au point $B(0, b)$.

La direction de $\Delta$ dépend de $a = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ appelé *coefficient directeur* de $\Delta$.

***Dans tout repère les droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si $a = a'$. Dans un repère orthonormé, elles sont rectangulaires si $aa' = -1$.***

Les vecteurs $\overrightarrow{OS}$ (1, $a$) et $\overrightarrow{OS'}$ (1, $a'$) sont en effet confondus dans le seul cas où $a = a'$. Dans un repère orthonormé, ils sont perpendiculaires, si leur produit scalaire $1 + aa' = 0$.

$$\boxed{a = a'} \iff \boxed{\Delta \parallel \Delta'} \quad \text{et} \quad \boxed{aa' = -1} \iff \boxed{\Delta \perp \Delta'}$$

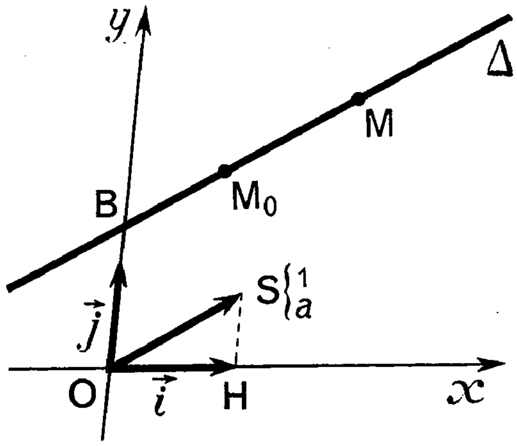



Fig. 29.

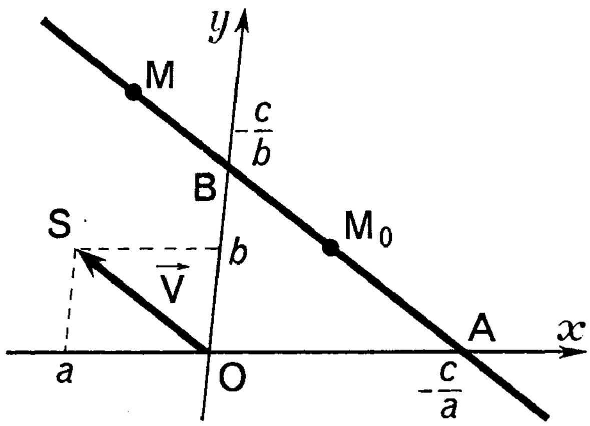



Fig. 30.

**94. Théorème.** — ***L'équation $ax + by + c = 0$ est représentée graphiquement par une droite.***

C'est la droite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ pour $b \neq 0$, la droite $x = -\frac{c}{a}$ pour $b = 0$.

La droite $ax + by + c = 0$ (fig. 30) coupe O$x$ au point A $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$. Elle coupe O$y$ au point B $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$.

**95. Droite passant par $M_0$ ($x_0, y_0$) et parallèle au vecteur $\vec{V}$ ($a$, $b$).** — On écrit que les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{V}$ sont parallèles (fig. 30) :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \iff b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0. \qquad (1)$$

En particulier la droite de coefficient directeur $m$ passant par $M_0$ a pour équation :

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{m} \iff \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)} \qquad (2)$$

**96. Droite définie par deux points $M_0$ ($x_0, y_0$) *et* $M_1$ ($x_1, y_1$).** — Dans le plan rapporté au repère cartésien $xOy$ (fig. 31) considérons les points $M_0$ ($x_0$, $y_0$) et $M_1$ ($x_1$, $y_1$). L'équation de la droite $M_0M_1$ est de la forme $y = ax + b$. Les relations $y_1 = ax_1 + b$ et $y_0 = ax_0 + b$ donnent par différence :

$$y_1 - y_0 - a(x_1 - x_0)$$

soit :
$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{ou} \quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

***Le coefficient directeur de la droite*** $M_0M_1$ ***est égal au rapport des accroissements*** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ***quand on passe de*** $M_0$ et $M_1$.

1° Si $y_1 = y_0$, $\Delta y = 0$, la droite $M_0M_1$ est parallèle à $Ox$ et son coefficient directeur est nul.

2° Si $x_1 = x_0$, $\Delta x = 0$, la droite $M_0M_1$ est parallèle à $Oy$ et son coefficient directeur est infini.

On obtient l'équation de la droite $M_0$ $M_1$ en remarquant que :

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{M_0M_1} \iff \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

soit : $$(y_0 - y_1)\, x + (x_1 - x_0)\, y + x_0y_1 - x_1y_0 = 0$$

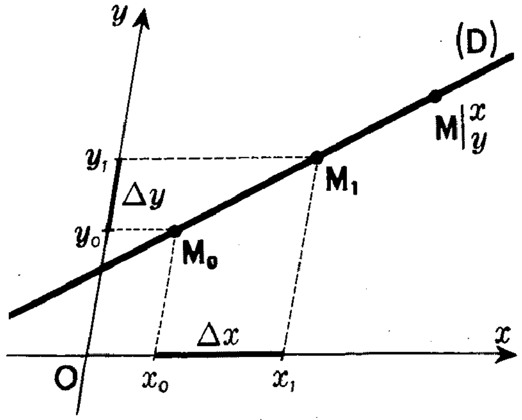



Fig. 31.

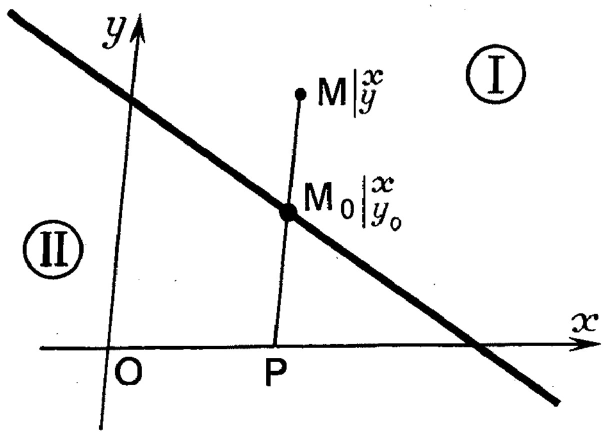



Fig. 32.

En particulier. la droite qui coupe $Ox$ au point A $(a,\ 0)$ et $Oy$ au point B $(0,\ b)$ a pour équation :

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad (3)$$

**97. Signe de l'expression** $\Delta(x, y) = ax + by + c$. — Soit M $(x,\ y)$ un point quelconque du plan (fig. 32) et $M_0$ $(x,\ y_0)$ le point de même abscisse $x$ sur la droite $ax + by + c = 0$. On a : $ax + c = -by_0$ et on peut écrire : $\Delta(x, y) = b(y - y_0)$.

L'expression $\Delta(x,\ y)$ est donc du signe de $b$ ou du signe opposé suivant que $y$ est supérieur ou inférieur à $y_0$, c'est-à-dire suivant que M est situé au-dessus ou au-dessous de la droite $\Delta(x,\ y) = 0$.

***La droite*** $ax + by + c = 0$ ***partage le plan en deux régions et l'expression*** $\Delta(x,y) = ax + by + c$ ***est positive dans l'une de ces régions, négative dans l'autre.***

Pour distinguer ces deux régions il suffit de chercher le signe de $\Delta(x,\ y)$ en un point particulier. Si $c \neq 0$, on voit que $\Delta(x, y)$ est du signe de $c$ dans la région contenant l'origine.

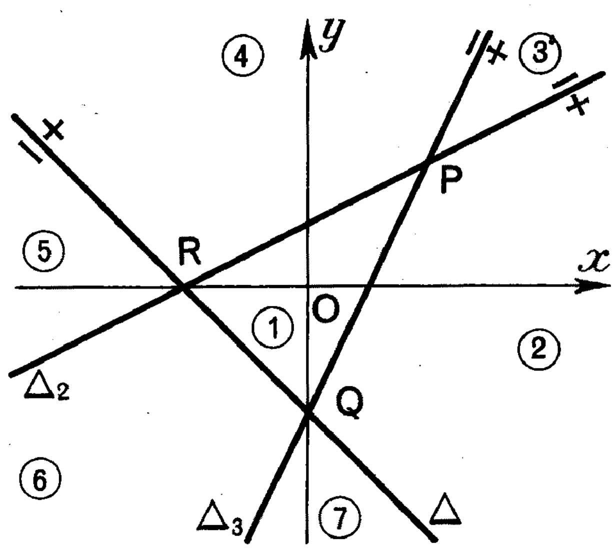



Fig. 33.

**98. Inéquations du premier degré à deux inconnues.** — Les trois droites :

$$\Delta_1 : x + y + 1 = 0; \quad \Delta_2 : x - 2y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_3 : 2x - y - 1 = 0$$

partagent le plan en sept régions numérotées de (1) à (7) (fig. 33).

1° L'inéquation $2x - y - 1 > 0$, par exemple, est vérifiée par les coordonnées de tout point du demi-plan formé par les régions (2), (3) et (7).

2° Le système d'inéquations simultanées :

$$x + y + 1 < 0; \quad x - 2y + 1 > 0; \quad 2x - y - 1 < 0$$

est vérifié en tout point de la région (6).

3° L'inéquation : $(x + y + 1)(x - 2y + 1)(2x - y - 1) < 0$ est vérifiée en chacun des points des régions (2), (4) et (6).

## EXERCICES

**173.** On considère en orthonormées les points M $(x, y)$, A $\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$, B $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ et on mène MH perpendiculaire en H à AB.

1° Calculer $\overline{MA}^2$ et $\overline{MB}^2$ et démontrer les relations :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\,\overline{MO}^2 + \frac{1}{2}\,\overline{AB}^2 \quad \text{et} \quad \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\,\overline{AB}.\overline{OH}.$$

2° $k$ étant un nombre donné, trouver l'équation et la nature des lieux des points M tels que :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k \quad \text{et} \quad \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k.$$

**174.** 1° Soit, dans un repère orthonormé, le point A $(a, -1)$. Trouver l'équation du lieu du point M $(x, y)$ tel que l'angle AOM soit droit en utilisant la relation : $\overline{AM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OM}^2$. Réciproque.

2° On considère les points A $(a, b - 1)$ et B $(-a, b + 1)$. Trouver l'équation de la médiatrice de AB en utilisant la relation : $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2$. Réciproque.

**175.** On considère les points A $(x_1, y_1)$ et B $(x_2, y_2)$. Trouver les coordonnées du point M $(x, y)$ de la droite AB tel que : $\overline{MA} + k\,\overline{MB} = 0$ ($k$, nombre donné).

En déduire l'équation de la droite AB sous la forme : $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ et en donner l'interprétation géométrique.

— Construire par points les courbes suivantes :

**176.** $y = x^2 - 3x$ pour $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

**177.** $y = 2x - x^2$ pour $-3 \leqslant x \leqslant 5$.

**178.** $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 2}$ pour $-\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 10$.

**179.** $y = \dfrac{5}{x^2 + 1}$ pour $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

— Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants et vérifier par le calcul :

**180.** $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 5x + 3y = 26. \end{cases}$ **181.** $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 7x - 3y = 24. \end{cases}$

**182.** $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 4x - 5y = 18. \end{cases}$ **183.** $\begin{cases} 3x - 5y = -27 \\ 7x + 2y = -22. \end{cases}$

**184.** On construit dans un repère orthonormé le point M ayant pour coordonnées :

$$x = \frac{4\,(1 - t^2)}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{8t}{1 + t^2}.$$

1° Calculer OM et en déduire le lieu de M lorsque $t$ varie.

2° Soit A le point ($x = 4$, $y = 0$) et I le milieu de AM. Calculer le coefficient directeur de OI et donner l'interprétation trigonométrique.

— Résoudre graphiquement dans le plan rapporté au repère cartésien $xOy$ les systèmes d'inéquations suivants :

**185.** $\begin{cases} x - y + 4 > 0 \\ x + 2y + 1 > 0 \\ 2x + y - 7 < 0 \end{cases}$ **186.** $\begin{cases} 4x - 7y + 41 > 0 \\ 6x + 13y - 9 > 0 \\ 5x + 3y - 31 < 0 \end{cases}$

**187.** $(x + 2)(x + y - 3)(x - y - 1) > 0$ **188.** $(x^2 + y^2 - 25)(x^2 - 16)(y^2 - 9) < 0.$

— Dans un repère orthonormé, former l'équation de la droite D telle que :

**189.** La droite D est définie par A $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ et B $(+3; +4)$.

**190.** La droite D est issue de A $(+1; -1)$ et est parallèle à la droite $2x + 3y - 5 = 0$.

**191.** La droite D passe par A $(+2; +3)$ et est perpendiculaire à la droite $x + 2y - 4 = 0$.

**192.** La droite D est médiatrice du segment joignant A $(+5, -2)$ et B $(-1, +1)$.

**193.** On considère la famille de droites D dépendant du paramètre $m$ :

$$x - y - 1 + m(x + y - 3) = 0.$$

1° Montrer que D passe par un point fixe A que l'on déterminera.

2° Déterminer $m$ pour que la droite D passe par B $(+3, +4)$.

3° Trouver la relation entre $m'$ et $m''$ pour que (repère orthonormé) les droites D correspondant à $m = m'$ et $m = m''$ soient rectangulaires.

**194.** 1° Montrer que toute droite passant par le point A commun aux droites :

$$D_1 : 2x - y - 5 = 0 \quad \text{et} \quad D_2 : x - y + 7 = 0$$

a pour équation : $(2x - y - 5) + m(x - y + 7) = 0.$ (D).

2° Déterminer la droite D issue de A et passant par B $(+1; +1)$ et la droite D issue de A perpendiculaire à la droite $2y - 5x + 11 = 0$ (repère orthonormé).

3° Trouver la relation entre $m'$ et $m''$ pour que les droites D correspondantes forment un faisceau harmonique avec $D_1$ et $D_2$.

**195.** On considère les expressions $D = 2x - 3y + 6$ et $D' = x + 2y - 11$.

1° Montrer que les quatre droites : $D = 0$, $D' = 0$, $D + mD' = 0$, $D - mD' = 0$ sont concourantes et déterminer leur point commun S.

2° Ces quatre droites coupent respectivement $Ox$ en A, B, M et P. Montrer que la division (ABMP) est harmonique. Conséquence pour le faisceau S (ABMP) ?

3° Déterminer $m$ pour que les deux droites $D + mD' = 0$ et $D - mD' = 0$ soient rectangulaires. Que représentent alors ces droites pour l'angle $\widehat{ASB}$ ?

**196.** Déterminer $m$ pour que les trois droites suivantes soient concourantes et déterminer leur point commun :

$$(m - 1)x + y = 1; \qquad x + (m - 2)y = 2; \qquad 2x - y = 3.$$

**197.** Même question pour les droites :

$$4x - 3y = 5; \qquad 3x + 4y = -1; \qquad mx - (m + 1)y = 2m + 1.$$

**198.** 1° Déterminer dans un repère orthonormé l'équation de la droite passant par les points A (+ 6, + 2) et B (+ 2, — 2), puis l'équation de la médiatrice de AB.

2° Soit le point C (— 2, + 6). Montrer que le triangle CAB est isocèle.

3° Établir l'équation de la droite $Cz$ parallèle à AB. Montrer que les intersections de $Cz$, AB, AC et BC avec $x'x$ forment une division harmonique.

**199.** On considère en orthonormées les trois points : A (— 6, 0), B (6, 0) et C (3, 9).

1° Établir les équations des côtés du triangle ABC, puis celles de ses médiatrices. Calculer les coordonnées du centre $\omega$ du cercle ABC et le rayon de ce cercle.

2° Déterminer les équations des hauteurs du triangle ABC, celles de ses médianes, puis les coordonnées de l'orthocentre H et du centre de gravité G.

3° Montrer que $\overline{OC} = 3\,\overline{OG}$, que HG passe par $\omega$ et que $\overline{\omega H} = 3\,\overline{\omega G}$.

**200.** Soient en orthonormées deux points A $(x_1, y_1)$ et B $(x_2, y_2)$ tels que l'angle saillant orienté AOB soit de même sens que l'angle $xOy$.

1° Montrer que l'aire du triangle OAB est égale, quel que soit le cas de figure, à $\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

2° En déduire la distance OH de O à la droite AB.

Application numérique : $x_1 = 10$; $y_1 = 5$; $x_2 = 6$ et $y_2 = 8$.

**201.** Soient $Oxy$, un repère orthonormé, A un point de coordonnées $x = a, y = b$ $(a > 0, b > 0,)$, P un point de coordonnées $x = p, y = 0$ $(-\infty \leqslant p \leqslant +\infty)$. On appelle Q le point de l'axe $Oy$ situé sur la droite AQ, perpendiculaire en A à AP.

1° Écrire les équations des droites OA, AP, AQ.

2° Montrer que le quadrilatère OPAQ est inscriptible; lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère quand le point P varie, A restant fixe.

3° Calculer, en fonction de $a$, $b$ et de $p$, les coordonnées du point Q; en déduire l'équation de la droite PQ et l'expression de $\overline{PQ}^2$ en fonction des mêmes paramètres.

4° On pose maintenant $a = 2$, $b = 1$; déterminer $p$ de manière que l'on ait $PQ = \sqrt{5}$. Préciser, sur une figure, les positions correspondantes de P et de Q. Montrer à l'aide de considérations géométriques que, pour la valeur de $p$ ainsi trouvée, la longueur PQ atteint son minimum.

# DÉRIVÉES

**99. Dérivée en un point.** — Considérons une fonction $y = f(x)$ définie et continue sur le segment $[a, b]$ et soit $x_0$ une valeur donnée de ce segment. Lorsque, sur ce segment, $x$ varie de $x_0$ à $x_1 = x_0 + h$, le rapport des accroissements correspondants $\Delta y$ et $\Delta x$, s'écrit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}.$$

Faisons tendre $x_1$ vers $x_0$ (ou $h$ vers 0). La fonction $f(x)$ étant continue pour $x = x_0$, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ (nº 80,3º).

Si ce rapport admet une *limite finie m*, on dit que la *fonction f(x) est dérivable au point $x_0$* et que sa dérivée en $x_0$ est *m* :

***On appelle dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point $x_0$, la limite, lorsqu'elle existe, du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ lorsque $x_1 \longrightarrow x_0$.***

On symbolise cette dérivée par $y_0'$ ou $f'(x_0)$. Donc :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}} \quad (1) \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \quad (2)$$

Cette limite s'obtient aisément lorsque le rapport (1) se simplifie par $x_1 - x_0$ ou le rapport (2) par $h$. Il suffit alors de remplacer $x_1$ par $x_0$ ou $h$ par 0 dans l'expression obtenue.

**100. Exemples.** 1º *Dérivée de $y = x^3$ pour $x_0 = 1$.*

On obtient : $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^3 - 1}{x_1 - 1} = x_1^2 + x_1 + 1.$$

Lorsque $x_1 \longrightarrow 1$, on obtient : $f'(1) = \lim (x_1^2 + x_1 + 1) = 3$.

2º *Dérivée de $y = \frac{3}{x}$ pour $x_0 = 2$.*

Posons $x_1 = x_0 + h = 2 + h$. On obtient : $y_0 = \frac{3}{2}$ et $y_1 = \frac{3}{2 + h}$.

D'où $\Delta x = x_1 - x_0 = h$; $\Delta y = \frac{3}{2 + h} - \frac{3}{2} = \frac{-3h}{2(2 + h)}$. $\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{2(2 + h)}$.

Lorsque $h \longrightarrow 0$, on obtient $y_0' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{4}$.

**101. Signification géométrique.** — Soit (C) le graphe de la fonction $y = f(x)$. Désignons (fig. 34) par $M_0$ le point fixe de coordonnées $x_0$ et $y_0 = f(x_0)$ et par $M_1$ le point de coordonnées $x_1$ et $y_1 = f(x_1)$. Le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ est le coefficient directeur de la sécante $M_0M_1$ (nº 96).

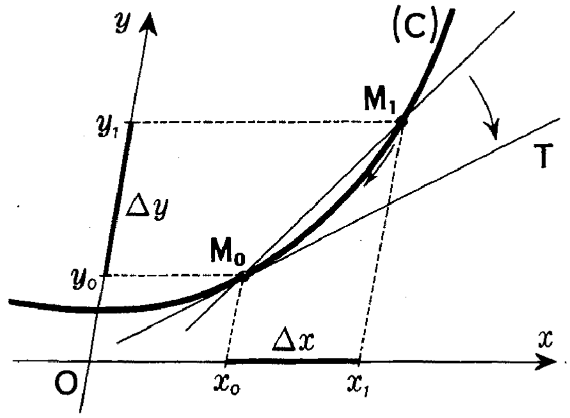



Fig. 34.

Lorsque $x_1$ tend vers $x_0$, le point variable $M_1$, se déplaçant sur la courbe (C), vient se confondre avec le point fixe $M_0$. Si la droite $M_0M_1$ tend vers une position limite $M_0T$, cette droite $M_0T$ est, par définition, la tangente en M à la courbe (C). Son coeffficient directeur est la limite, lorsque $x_1$ tend vers $x_0$, du coefficient directeur $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ de la sécante $M_0M_1$. C'est donc la dérivée de la fonction $f(x)$ au point $x_0$.

***La dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point $x_0$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $M_0$ d'abscisse $x_0$.***

Il en résulte que l'existence de la dérivée au point $x_0$ entraîne celle de la tangente au point $M_0$ et détermine sa position.

**102. Remarques.** — 1º Pour calculer une dérivée en un point, on peut utiliser d'autres notations. En posant $x_0 = a$ et $x_1 = x$, on voit que :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

2º *Si une fonction $f(x)$ s'annule pour $x = 0$, sa dérivée au point $x = 0$ est la limite pour $x = 0$ du rapport $\dfrac{f(x)}{x}$.*

Pour $f(0) = 0$ on obtient : $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \implies f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

**103. Théorème.** — ***Toute fonction $f(x)$ dérivable au point $x_0$ est continue en ce point.***

Si $f(x_1) - f(x_0)$ ne tend pas vers 0 lorsque $x_1$ tend vers $x_0$, le rapport $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

ne peut admettre de limite finie et la fonction n'est pas dérivable au point $x_0$.

**104. Fonction dérivée.** — Lorsque la fonction $y = f(x)$ est dérivable en tout point $x_0$ de l'intervalle $]a, b[$, elle est dite dérivable dans cet intervalle. Sa dérivée $f'(x_0)$ qui dépend en général de la valeur $x_0$ attribuée à $x$, est une nouvelle fonction de $x$ appelée *fonction dérivée de $f(x)$*, ou simplement *dérivée de $f(x)$*, que l'on symbolise par $y'$ ou $f'(x)$.

D'après la définition du nº 99, on peut donc écrire :

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \quad \text{ou} \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

ou simplement :

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Le calcul s'effectue comme ci-dessus en supposant $x$ constant.

Ainsi pour calculer la dérivée de $y = x^3$ on écrit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1 x + x^2.$$

Lorsque $\Delta x \longrightarrow 0$, $x_1 \longrightarrow x$ et on obtient : $y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$.

La dérivée de $x^3$ est donc $3x^2$ et on vérifie que pour $x = 1$, cette dérivée est égale à $+3$, valeur calculée directement au n° 100.

**105. Dérivées successives.** — Si la fonction $y' = f'(x)$ admet à son tour une fonction dérivée, celle-ci est appelée *dérivée seconde* de la fonction $y = f(x)$ et est représentée par le symbole : $y'' = f''(x)$. On peut ainsi définir de proche en proche une *dérivée troisième* : $y''' = f'''(x)$... puis une dérivée $n^{\text{ième}}$ (ou d'ordre $n$) : $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

## CALCUL DES DÉRIVÉES

### 106. Dérivée d'une constante : $y = A$.

Quel que soit $x$, on a : $y = A$, donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{A - A}{x_1 - x} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Soit $y' = 0$.

***Une fonction constante admet en tout point une dérivée nulle.***

$$\boxed{y = A} \Longrightarrow \boxed{y' = 0}$$

### 107. Dérivée de $y = x$.

On obtient : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x} = 1$ et $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

***La fonction $y = x$ admet en tout point une dérivée égale à*** 1.

$$\boxed{y = x} \Longrightarrow \boxed{y' = 1} \Longrightarrow \boxed{y'' = 0}$$

### 108. Dérivée du monôme : $y = x^n$.

On obtient : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \dots + x_1 x^{n-2} + x^{n-1}$.

Lorsque $\Delta x$ tend vers 0, $x_1$ tend vers $x$ et chacun des $n$ termes du dernier membre a pour limite $x^{n-1}$.

Donc :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

***Le monôme $y = x^n$ admet en tout point une dérivée égale $nx^{n-1}$.***

$$\boxed{y = x^n} \Longrightarrow \boxed{y' = nx^{n-1}} \Longrightarrow \boxed{y'' = n(n-1)\,x^{n-2}}$$

On voit ainsi que les fonctions $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$... admettent respectivement pour dérivées : 1, $2\,x$, $3\,x^2$, $4\,x^3$...

**109. Dérivée d'une somme.** — Soient $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ des fonctions de $x$ admettant pour dérivées respectives $u'(x)$, $v'(x)$, $w'(x)$. Lorsque $x$ prend la valeur $x_1$, la somme $y = u + v + w$ prend la valeur $y_1 = u_1 + v_1 + w_1$ et l'on obtient en retranchant terme à terme :

$$\Delta y = y_1 - y = (u_1 - u) + (v_1 - v) + (w_1 - w) = \Delta u + \Delta v + \Delta w.$$

Soit :
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Lorsque $\Delta x$ tend vers 0, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \longrightarrow u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \longrightarrow v'$ et $\dfrac{\Delta w}{\Delta x} \longrightarrow w'$.

Et (n° 75) :
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u' + v' + w'.$$

***La somme de plusieurs fonctions dérivables admet pour dérivée la somme des dérivées de chacune de ces fonctions.***

$$\boxed{y = u + v + w} \Longrightarrow \boxed{y' = u' + v' + w'}$$
$$\Longrightarrow y'' = u'' + v'' + w''$$

Autrement dit, une somme se dérive terme à terme.

**110. Dérivée d'un produit.** — 1° Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions de $x$ admettant respectivement pour dérivées $u'(x)$ et $v'(x)$. Lorsque $x$ prend la valeur $x_1$, le produit $y = uv$ prend la valeur $y_1 = u_1v_1$ et on peut écrire :

$$\Delta y = y_1 - y = u_1v_1 - uv = (u_1v_1 - uv_1) + (uv_1 - uv) = (u_1 - u)\,v_1 + u(v_1 - v).$$

Soit : $\quad \Delta y = \Delta u . v_1 + u . \Delta v \quad$ et $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v_1 + u . \dfrac{\Delta v}{\Delta x}.$

Lorsque $\Delta x \to 0$, $v_1 \to v$, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$ et on obtient (n° 76) :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'v + uv'.$$

***Le produit $y = uv$ de deux fonctions dérivables admet pour dérivée $y' = u'v + uv'$.***

$$\boxed{y = uv} \Longrightarrow \boxed{y' = u'v + uv'} \Longrightarrow y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

2° Généralisation. — Si $y = uvw = (uv)\,w$ on obtient :

$$y' = (uv)'\,w + (uv)\,w' = (u'v + uv')\,w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\boxed{y = uvw} \Longrightarrow \boxed{y' = \Sigma\, u'vw}$$

Cette démonstration s'étend par récurrence à un nombre quelconque de facteurs :

***Le produit de plusieurs fonctions dérivables admet pour dérivée la somme des expressions obtenues en remplaçant successivement dans ce produit, chaque fonction par sa dérivée.***

$$\boxed{y = uv \ldots w} \implies \boxed{y' = \Sigma\, u'v \ldots w}$$

**111. Corollaire.** — ***Si on multiplie une fonction dérivable par une constante sa dérivée est multipliée par cette constante.***

Si $u = \mathrm{A}$, on obtient (n° 106), $u' = 0$ et la dérivée de $y = \mathrm{A}v$ se réduit à $y' = \mathrm{A}v'$. Donc :

$$\boxed{y = \mathrm{A}f(x)} \implies \boxed{y' = \mathrm{A}f'(x)}$$

Ainsi d'après le n° 108, on obtient la dérivée du monôme $\mathrm{A}x^n$ :

$$\boxed{y = \mathrm{A}x^n} \implies \boxed{y' = n\mathrm{A}x^{n-1}}$$

**112. Dérivée d'un polynôme.** — ***Un polynôme de degré $m$ admet pour dérivée un polynôme de degré $m - 1$.***

La dérivée du polynôme :

$$f(x) = \mathrm{A}_m x^m + \mathrm{A}_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_0$$

est la somme des dérivées de chacun de ses termes :

$$f'(x) = m\mathrm{A}_m x^{m-1} + (m-1)\,\mathrm{A}_{m-1}x^{m-2} + \ldots + 2\,\mathrm{A}_2 x + \mathrm{A}_1.$$

Ainsi :

$$\begin{array}{lcl} y = ax + b & \text{admet pour dérivée :} & y' = a \\ y = ax^2 + bx + c & — & y' = 2\,ax + b \\ y = x^3 + px + q & — & y' = 3\,x^2 + p \\ y = ax^4 + bx^2 + c & — & y' = 4\,ax^3 + 2\,bx. \end{array}$$

**113. Dérivée d'un quotient.** — Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions de $x$ dérivables sur un intervalle où $v(x) \neq 0$. Lorsque $x$ prend la valeur $x_1$, la fonction $y = \dfrac{u}{v}$ prend la valeur $y_1 = \dfrac{u_1}{v_1}$ et on peut écrire :

$$\Delta y = y_1 - y = \frac{u_1}{v_1} - \frac{u}{v} = \frac{u_1 v - u v_1}{v v_1} = \frac{1}{v v_1}\,[(u_1 - u)\,v - u\,(v_1 - v)].$$

Soit : $\quad \Delta y = \dfrac{1}{vv_1}(\Delta u . v - u . \Delta v) \quad$ et $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{vv_1}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v - u \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right).$

Lorsque $\Delta x \to 0$, $v_1 \to v$, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$ et on obtient (n° 76) :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v^2}(u'v - uv') = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

***Le quotient $y = \dfrac{u}{v}$ de deux fonctions dérivables admet pour dérivée $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.***

$$\boxed{y = \frac{u}{v}} \implies \boxed{y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

EXEMPLE. — La dérivée de $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 3}$ s'écrit :

$$y' = \frac{(3x^2 - 4)(x^2 + 3) - (x^3 - 4x)(2x)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y' = \frac{3x^4 + 9x^2 - 4x^2 - 12 - 2x^4 + 8x^2}{(x^2 + 3)^2}.$$

Soit après réduction : $$y' = \frac{x^4 + 13x^2 - 12}{(x^2 + 3)^2}.$$

**114. Corollaires.** — 1° ***La dérivée de*** $y = \dfrac{1}{v}$ ***est*** $y' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Si $u = 1$, la dérivée de $y = \dfrac{u}{v}$ se réduit à $y' = -\dfrac{v'}{v^2}$, car $u' = 0$.

Donc : $$\boxed{y = \frac{1}{u}} \implies \boxed{y' = -\frac{u'}{u^2}}$$

En particulier : $$\boxed{y = \frac{1}{x}} \implies \boxed{y' = -\frac{1}{x^2}}$$

2° On peut utiliser la formule précédente pour calculer la dérivée de $y = \dfrac{uv}{w}$ sous la forme du produit $y = u.v.\dfrac{1}{w}$. On obtient :

$$y' = \frac{u'v}{w} + \frac{uv'}{w} - \frac{uvw'}{w^2}.$$

**115. Dérivée d'une puissance entière.** — Soit $u(x)$ une fonction de $x$ admettant pour dérivée $u'(x)$. La fonction $y = u^m$ peut être considérée comme produit de $m$ facteurs : $y = u.u \,.....\, u$.

Elle admet (n° 110) pour dérivée la somme de $m$ termes égaux à $u^{m-1}u'$.

***La fonction*** $y = u^m$ ***admet pour dérivée*** $y' = mu^{m-1}u'$.

$$\boxed{y = u^m} \implies \boxed{y' = mu^{m-1}u'}$$

On vérifie que la dérivée de $y = x^m$ est $y' = mx^{m-1}$.

REMARQUE. — La règle précédente s'applique également lorsque $m$ est un entier négatif. Posons $m = -p$ et $y = u^m = \dfrac{1}{u^p} = \dfrac{1}{v}$. On obtient :

$$y' = -\frac{v'}{v^2} = -\frac{pu^{p-1}u'}{u^{2p}} = -pu^{-p-1}u' \text{ soit : } y' = mu^{m-1}u'.$$

Ainsi $y = \dfrac{1}{(x-1)^3} = (x-1)^{-3}$ admet pour dérivée

$$y' = -3(x-1)^{-4} = \frac{-3}{(x-1)^4}.$$

**116. Dérivée d'une racine carrée.** — Soit $u(x)$ une fonction positive de $x$ admettant pour dérivée $u'$ et soit $y = \sqrt{u(x)}$.

On obtient : $\Delta y = y_1 - y = \sqrt{u_1} - \sqrt{u} = \dfrac{u_1 - u}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u}} = \dfrac{\Delta u}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u}}$.

D'où : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u}} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

Lorsque $x_1$ tend vers $x$, $u_1$ tend vers $u$, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ vers $u'$ et $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ admet donc pour limite : $\dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

***La fonction $y = \sqrt{u}$ admet pour dérivée $y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.***

$$\boxed{y = \sqrt{u}} \implies \boxed{y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

En particulier : $y = \sqrt{x} \implies y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

**117. Exemple de calcul de dérivée.** — *Soit à calculer la dérivée de la fonction* $y = \dfrac{(3x-1)^2}{x^2+1}$.

Cette fonction est de la forme $y = \dfrac{u}{v}$ avec $u = (3x - 1)^2$ et $v = x^2 + 1$. Or $u = w^2$ donc $u' = 2ww' = 2(3x-1) \times 3 = 6(3x-1)$ et $v' = 2x$.

On obtient : $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{6(3x-1)(x^2+1) - (3x-1)^2 \times 2x}{(x^2+1)^2}$.

Soit après réduction : $y' = \dfrac{2(3x-1)(x+3)}{(x^2+1)^2}$.

Il y a intérêt, tout au moins au début, à utiliser des fonctions intermédiaires de façon à se ramener à des types connus.

**118. Résumé.** — Les résultats, rassemblés dans le tableau suivant sont à retenir, pour les calculs de dérivées :

| FONCTION | DÉRIVÉE | FONCTION | DÉRIVÉE |
|---|---|---|---|
| $y = A$ | $y' = 0$ | $y = u + v + w$ | $y' = u' + v' + w'$ |
| $y = x$ | $y' = 1$ | $y = uv$ | $y' = u'v + uv'$ |
| $y = x^m$ | $y' = mx^{m-1}$ | $y = u^m$ | $y' = mu^{m-1}u'$ |
| $y = \dfrac{1}{x}$ | $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ | $y = \dfrac{u}{v}$ | $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| $y = f(x) + A$ | $y' = f'(x)$ | $y = \dfrac{1}{u}$ | $y' = -\dfrac{u'}{u^2}$ |
| $y = A f(x)$ | $y = A f'(x)$ | $y = \sqrt{u}$ | $y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ |

**119. Notion de différentielle.** — ***On appelle différentielle d'une fonction dérivable $f(x)$, le produit $f'(x)\,h$ de sa dérivée $f'(x)$ par un facteur arbitraire $h$.***

Cette différentielle est représentée par le symbole $df(x)$ ou simplement $df$ (lire $d, f$). Lorsque $y = f(x)$ on écrit indifféremment :

$$df = f'(x)\,h \quad \text{ou} \quad dy = f'(x)\,h$$

Pour $f(x) = x$, on obtient : $dx = 1.h$ soit $h = dx$. Le facteur $h$ est la différentielle $dx$ de la variable $x$. D'où finalement :

$$\boxed{y = f(x)} \implies \boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

La différentielle $dy$ est le produit de $f'(x)$ par la différentielle arbitraire $dx$.

Ainsi :

$$y = x^n \implies dy = nx^{n-1}\,dx.$$

$$y = \frac{1}{x} \implies dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

**120. Théorème.** — ***La dérivée, par rapport à $x$, de la fonction $y = f(x)$ est égale au rapport $\frac{dy}{dx}$.***

$$dy = f'(x)\,dx \implies \boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$$

Cette notation de Leibniz, pour désigner la dérivée de $y$ par rapport à $x$, est souvent plus avantageuse que la notation de Newton $y'$ ou $y'_x$.

**121. Différentielles classiques.** — Les théorèmes sur les dérivées conduisent aux propriétés suivantes :

1° $y = u + v + w \implies y'dx = u'dx + v'dx + w'dx \iff dy = du + dv + dw$

2° $y = uv \implies y'dx = vu'dx + uv'dx \iff dy = vdu + udv$

3° $y = \frac{u}{v} \implies y'dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} \iff dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$

4° $y = u^m \implies y'dx = mu^{-1}u'dx \iff dy = mu^{m-1}\,du$

5° $y = \sqrt{u} \implies y'dx = \frac{u}{2\sqrt{u}}\,dx \iff dy = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$

Remarquons que l'utilisation des différentielles peut faciliter le calcul des dérivées. Ainsi (cf. nº 116) :

$$y = \frac{(3x-1)^2}{x^2+1} \implies dy = \frac{(x^2+1)\,d(3x-1)^2 - (3x-1)^2\,d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

Or : $d(3x-1)^2 = 2(3x-1)\,d(3x-1) = 6(3x-1)\,dx$ et $d(x^2+1) = d(x^2) = 2x\,dx$

D'où : $$dy = \frac{6(x^2+1)(3x-1) - 2x(3x-1)^2}{(x^2+1)^2}\,dx \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2(3x-1)(x+3)}{(x^2+1)^2}.$$

## EXERCICES

— Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

**202.** $y = 4x^2 - 5x + 1.$

**203.** $y = -2x^2 + 6x - 5.$

**204.** $y = 2x^3 - 3x + 5.$

**205.** $y = 3x^4 - 12x^2 + 7.$

**206.** $y = (3x + 1)^2 - (2x + 3)^2.$

**207.** $y = (2x + 1)^3 - x^2(x + 1).$

**208.** $y = x^3(x + 1)^2.$

**209.** $y = (x + 1)^5(x - 1)^3.$

**210.** $y = (2x + 1)^3(3x - 2)^2.$

**211.** $y = (3x - 5)^4(7x + 2)^3.$

**212.** $y = (x^2 + 1)(x^3 - 2x + 1).$

**213.** $y = (x^3 - 1)(x^4 - 2x^2 + 3).$

**214.** $y = x^4(x - 1)^5(x + 1)^3.$

**215.** $y = x^6(x^2 - 1)^3(x^2 + 1)^3.$

— Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

**216.** $y = \dfrac{4}{x}$

**217.** $y = -\dfrac{5}{3x}$

**218.** $y = \dfrac{3}{x - 1}$

**219.** $y = \dfrac{1}{2x - 3}$

**220.** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

**221.** $y = \dfrac{1}{2x^2 - 5x}$

**222.** $y = x + \dfrac{1}{x}$

**223.** $y = 2x + 3 - \dfrac{4}{x}$

**224.** $y = 2x + 1 - \dfrac{1}{x + 3}$

**225.** $y = x - 2 + \dfrac{1}{2x - 1}$

**226.** $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}.$

**227.** $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}.$

**228.** $y = \dfrac{4x - 3}{2x + 1}.$

**229.** $y = \dfrac{3x + 2}{5x - 1}.$

**230.** $y = \dfrac{5x + 4}{x + 1}.$

**231.** $y = \dfrac{3x + 5}{2x - 1}.$

**232.** $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}.$

**233.** $y = \dfrac{(x - 1)^2}{2x - 4}.$

**234.** $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}.$

**235.** $y = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$

**236.** $y = \dfrac{4x^2 + 4x - 9}{4(x^2 - 1)}.$

**237.** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 3x - 4}.$

**238.** $y = \dfrac{x^3}{(2x - 1)^2}.$

**239.** $y = \dfrac{(x + 1)^2}{(x - 1)^4}.$

**240.** $y = \sqrt{2x + 1}.$

**241.** $y = \sqrt{x^2 - 4x}.$

**242.** $y = x - \sqrt{x^2 - 1}.$

**243.** $y = x - 1 + \sqrt{2x + 1}.$

**244.** $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{x - 1}$. **245.** $y = \dfrac{x\sqrt{x + 1}}{x + 4}$.

— Calculer les différentielles des fonctions suivantes où $u$, $v$, $w$ représentent des fonctions dérivables de $x$.

**246.** $y = x^2 - 4x + 3$ **247.** $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

**248.** $y = 3u - 4v + 2w$ **249.** $y = \text{A}u + \text{B}v + \text{C}w$

**250.** $y = \text{A}u^2 + \text{B}v^3 + \text{C}w^5$ **251.** $y = \text{A}(u - 1)^2 + \text{B}(v + 2)^3$

**252.** $y = x^2 (x + 1)^3$ **253.** $y = x^4 (x^2 - 1)$

**254.** $y = \text{A}u^2 v^3$ **255.** $y = (u + 1)^3 (v - 2)^2$

**256.** $y = \dfrac{1}{u - 3}$ **257.** $y = \dfrac{2u + 5}{3v - 4}$

**258.** $y = \dfrac{u - x}{v + x}$ **259.** $y = \dfrac{u^2 + 3x}{v^3 - x^2}$

**260.** 1° Calculer la dérivée de la fonction $y = \dfrac{(u - 1)^2}{u^2 + 1}$ où $u$ représente une fonction dérivable de la variable $x$.

2° En déduire la différentielle $dy$ et vérifier que : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

**261.** Démontrer que la dérivée de la fonction $y = \dfrac{u^m}{v^p}$ s'écrit :

$$y' = \frac{m v u^{m-1} u' - p u^m v'}{v^{p+1}} = \frac{u^{m-1}}{v^{p+1}} (m v u' - p u v').$$

Application à la dérivée de $y = \dfrac{(x - 1)^5}{(x + 2)^3}$.

**262.** On considère le polynôme : $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.
Calculer pour $x = 0$, la valeur de $f(x)$ et de ses dérivées successives et montrer que le polynôme s'écrit :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} f'''(0).$$

**263.** 1° Calculer les dérivées successives de la fonction : $y = \dfrac{1}{a - x}$.

2° Montrer que la fonction $y = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ peut s'écrire sous la forme décomposée : $y = \text{A} + \dfrac{\text{B}}{1 - x} + \dfrac{\text{C}}{2 - x}$ et en déduire ses trois premières dérivées.

**264.** 1° Montrer que la fonction $y = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 2x + 1}$ peut s'écrire sous la forme décomposée : $y = \text{A} + \dfrac{\text{B}}{1 - x} + \dfrac{\text{C}}{(1 - x)^2}$.

2° En déduire ses trois premières dérivées.

**265.** 1° Montrer que si la fonction $f(x)$, dérivable pour $x = a$, s'annule pour $x = a$, sa dérivée $f'(a)$ est la limite du rapport $\dfrac{f(x)}{x - a}$ lorsque $x$ tend vers $a$.

2° En déduire que si le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ pour $x = a$, il s'écrit $\frac{f(x)}{x - a} \times \frac{x - a}{g(x)}$. Lorsque $x$ tend vers $a$ il admet pour limite $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ (à condition toutefois que ce dernier rapport ne soit pas indéterminé).

3° Rechercher ainsi la limite de $\frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 - x - 1}$ lorsque $x$ tend vers 1.

— Calculer la limite des fractions suivantes en remplaçant chaque fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ par le rapport des dérivées $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, d'après la propriété établie à l'exercice précédent (2°) :

**266.** $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ (lorsque $x \to 1$) **267.** $\frac{x^3 + 27}{3x + 9}$ $(x \to -3)$.

**268.** $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$ $(x \to 2)$ **269.** $\frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + x - 3}$ $(x \to 1)$.

**270.** $\frac{2x^3 - 5x + 6}{3x^2 + 7x + 2}$ $(x \to -2)$ **271.** $\frac{3x^2 - 2ax - a^2}{2x^2 - 3ax + a^2}$ $(x \to a)$.

**272.** $\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ $(x \to 1)$ **273.** $\frac{2x + 1}{2x^2 - x - 6} - \frac{x + 3}{3x^2 - 5x - 2}$ $(x \to 2)$.

**274.** $\frac{x - 3}{x - 1 - \sqrt{x + 1}}$ $(x \to 3)$ **275.** $\frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 7} - \sqrt{2x + 1}}$ $(x \to 4)$.

**276.** 1° Démontrer que si un polynôme P $(x)$ (de degré supérieur à $n$) s'écrit :
$P(x) = (x - a)^n\, Q(x)$ avec $Q(a) \neq 0$ sa dérivée première s'écrit de même :

$$P'(x) = (x - a)^{n-1}\, Q_1(x) \text{ avec } Q_1(a) \neq 0.$$

2° Écrire sous une forme analogue les dérivées suivantes : $P''(x)$, $P'''(x)$... $P^{(n)}(x)$.

3° Réciproquement si P $(x)$ et ses trois premières dérivées s'annulent pour $x = a$ il contient le facteur $(x - a)^4$ (on dit qu'il admet $a$ pour racine d'ordre 4).

# VARIATION DES FONCTIONS

**122. Sens de variation et signe de la dérivée.** — 1° Si une fonction $y = f(x)$ est constante sur $[a, b]$, sa dérivée est nulle sur $[a, b]$ car (n° 106) :

$$f(x) = \mathrm{C} \implies f'(x) = 0$$

2° Si la fonction $y = f(x)$ est croissante sur $[a, b]$ le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ est positif quels que soient $x$ et $x_1$. Sa limite $f'(x)$ lorsque $x_1$ tend vers $x$ ne saurait être négative. Elle est donc *positive* ou *nulle.*

3° Si la fonction $y = f(x)$ est décroissante sur $[a, b]$ le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ est cette fois négatif et sa limite $f'(x)$ est *négative* ou *nulle.*

**123. Théorème fondamental.** — ***Une fonction dérivable $f(x)$ est constante sur tout intervalle où sa dérivée $f'(x)$ est nulle. Elle est croissante sur tout intervalle où sa dérivée est positive. Elle est décroissante sur tout intervalle où sa dérivée est négative.***

Nous admettrons ce théorème, qui n'est pas entièrement évident par réciprocité, mais qui peut être démontré rigoureusement. Remarquons que :

1° *La dérivée d'une fonction monotone croissante ou décroissante ne peut s'annuler que pour des valeurs isolées de la variable.*

Si la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$, croissante ou décroissante sur $[a, b]$, s'annulait sur un segment $[c, d] \subset [a, b]$, elle serait constante sur $[c, d]$.

2° *Lorsque deux fonctions ont même dérivée sur un intervalle donné, leur différence est constante sur cet intervalle.*

Si, sur $[a, b]$, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ ont des dérivées égales, la fonction : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ admet pour dérivée : $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, nulle en tout point de $[a, b]$. Donc $\varphi(x) = f(x) - g(x) = \mathrm{C}$ sur $[a, b]$.

$$\forall x \in [a, b], \qquad f'(x) = g'(x) \iff f(x) - g(x) = \mathrm{C}.$$

**124. Application à la variation de la fonction $y = f(x)$.** — Le théorème précédent remplace avantageusement la règle du n° 69 pour l'étude d'une fonction dérivable $y = f(x)$.

L'existence de $f'(x)$ entraîne la continuité de $f(x)$ sur tout intervalle où $f'(x)$ est définie. Le signe de $f'(x)$ permet de distinguer les intervalles où la fonction $f(x)$ est soit croissante soit décroissante. On peut alors établir un tableau de variation que l'on complète par l'indication des valeurs remarquables de $f(x)$ : maxima, minima, valeurs limites aux bornes des divers intervalles du tableau, tel que :

| $x$ | $a$ | | $b$ | | $c$ | | $d$ | | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $y = f(x)$ | $f(a)$ | $\nearrow$ | $f(b)$ | $\searrow$ | $f(c)$ | $\nearrow$ | $f(d)$ | $\nearrow$ | $f(e)$ |

La fonction $y = f(x)$ est croissante sur chacun des segments $[a, b]$, $[c, d]$ et $[d, e]$. Elle est décroissante sur le segment $[b, c]$.

Elle admet pour $x = b$ un ***maximum*** $f(b)$, pour $x = c$, un ***minimum*** $f(c)$ car $f'(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = b$ et $x = c$. Par contre $f'(x)$ s'annule sans changer de signe pour $x = d$, la fonction $f(x)$ croissante sur les deux segments consécutifs $[c, d]$ et $[d, e]$ est croissante sur le segment $[c, e]$.

L'étude de la fonction sera complétée par la représentation graphique de la fonction (n° 86).

## COURBES D'ÉQUATION $y = f(x)$

**125. Tangente à la courbe** $y = f(x)$. — Rappelons que (n° 101) :

***Le coefficient directeur de la tangente au point*** $M(x, y)$ ***de la courbe*** (C) ***d'équation*** $y = f(x)$ ***est égal à*** $y' = f'(x)$.

Cette tangente (fig. 35) est donc le support du vecteur $\overrightarrow{MT}$ de composantes $(1, y')$ ou $(a, ay')$. On peut ainsi effectuer un tracé précis de (C) par points et tangentes. On conservera sur le graphe les tangentes horizontales ($y' = 0$) parallèles à $Ox$, les tangentes d'inflexion ($y'' = 0$) et les tangentes aux extrémités des arcs de (C) situés à distance finie.

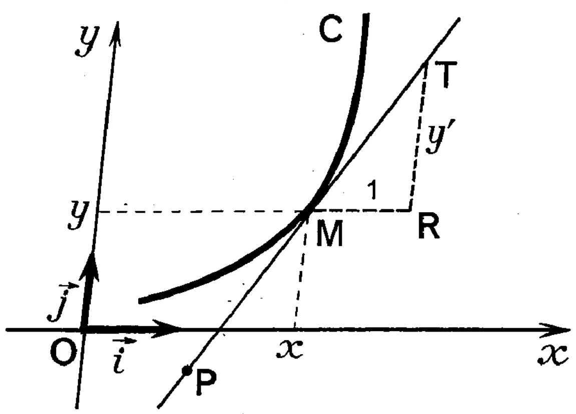


Fig. 35.

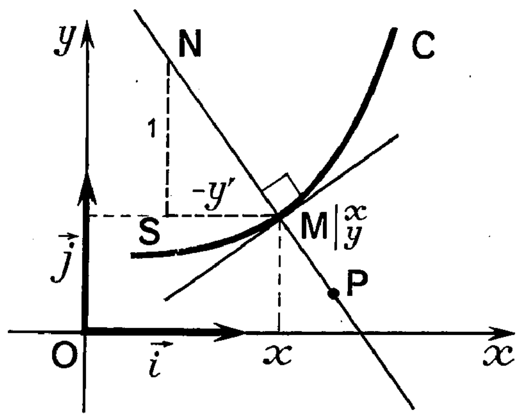


Fig. 36.

Si P (X, Y) désigne le point courant de cette tangente (fig. 35), son équation s'obtient en écrivant que :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y - y}{X - x} = y' \iff \boxed{Y - y = y'(X - x)} \qquad (1)$$

ou en fonction de $x$ seulement : $$Y = f(x) + (X - x)f'(x) \qquad (2)$$

**126. Normale à la courbe $y = f(x)$.** — Dans un repère orthonormé les direction de coefficients directeurs $m$ et $m'$ sont perpendiculaires si $1 + mm' = 0$, c'est-à-dire si $m' = -\frac{1}{m}\cdot$ Il en résulte que :

***Dans un repère orthonormé, le coefficient directeur de la normale au point*** $M(x, y)$ ***de la courbe*** $y = f(x)$ ***est égal à*** $-\frac{1}{y'}$.

Cette normale (fig. 36) est donc le support du vecteur $\overrightarrow{MN}$ de composantes $\left(1, -\frac{1}{y'}\right)$ ou $(-y', 1)$ et son équation s'écrit :

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \iff \boxed{X + y'Y - x - yy' = 0} \qquad (1)$$

ou en fonction de $x$ seulement : $$X + Yf'(x) - x - f(x)f'(x) = 0 \qquad (2)$$

**127. Exemples.**

1° La tangente MT à la courbe $y = -x^2 + 2x + 3$ (fig. 37) au point M $(x = 2, y = 3)$ a pour coefficient directeur $y' = -2x + 2 = -2$. Son équation s'écrit (n° 125) :

$$Y - 3 = -2(X - 2) \iff Y = -2X + 7 \quad \text{ou} \quad y = -2x + 7.$$

Cette tangente coupe l'axe $Ox$ au point $(x = \frac{7}{2}; y = 0)$, l'axe $Oy$ au point $(x = 0, y = 7)$.

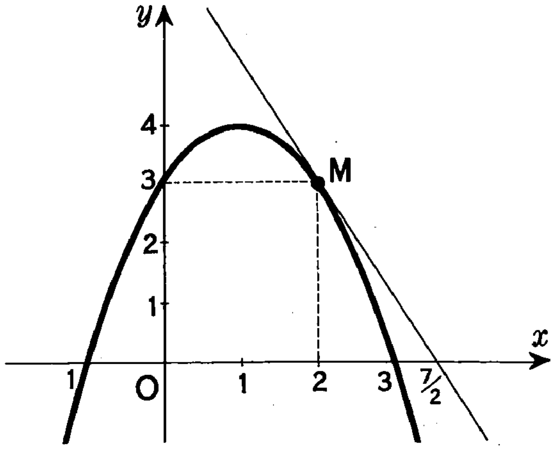



Fig. 37.

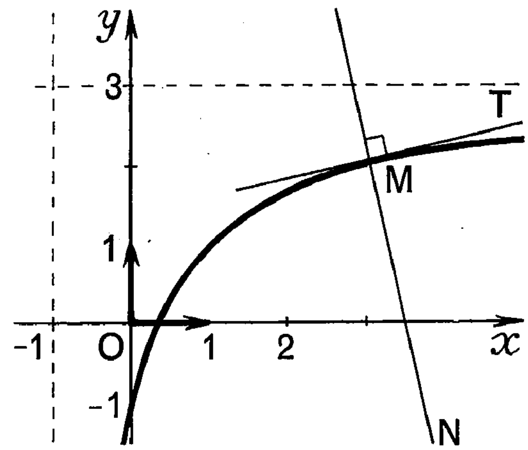



Fig. 38.

2° La tangente MT à la courbe $y = \frac{3x - 1}{x + 1}$ (fig. 38) au point $M(x = 3, y = 2)$ a pour coefficient directeur $y' = \frac{4}{(x + 1)^2} = \frac{1}{4}\cdot$ Son équation est donc :

$$Y - 2 = \frac{1}{4}(X - 3) \iff Y = \frac{X}{4} + \frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad y = \frac{x + 5}{4}$$

Le repère $xOy$ étant orthonormé, la normale MN au point M a pour coefficient directeur $-\frac{1}{y'} = -4$. L'équation de cette normale est donc :

$$Y - 2 = -4(X - 3) \iff Y = -4X + 14 \quad \text{ou} \quad y = -4x + 14.$$

**128. Applications.** — 1° ***Tangentes parallèles à la droite*** $y = mx$.

On obtient les abscisses des points de contact en résolvant l'équation : $f'(x) = m$.

Ainsi les abscisses des points de contact des tangentes à la courbe $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ admettant pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$, vérifient la relation $y' = \frac{1}{2}$. D'où :

$$\frac{2}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \iff (x-1)^2 = 4 \quad \text{ou} \quad x = 1 \pm 2.$$

On obtient $x = -1$ et $x = 3$ qui correspondent aux points de contact (fig. 39) :

$$A(-1\,;\,+2) : \quad \text{Tangente} : y - 2 = \frac{1}{2}(x+1) \iff y = \frac{x+5}{2}.$$

$$B(+3\,;\,0) : \quad \text{Tangente} : y - 0 = \frac{1}{2}(x-3) \iff y = \frac{x-3}{2}$$

Remarquons que l'on retrouve ces résultats en cherchant pour quelles valeurs de $p$ la droite $y = \frac{x}{2} + p$ coupe la courbe en deux points confondus.

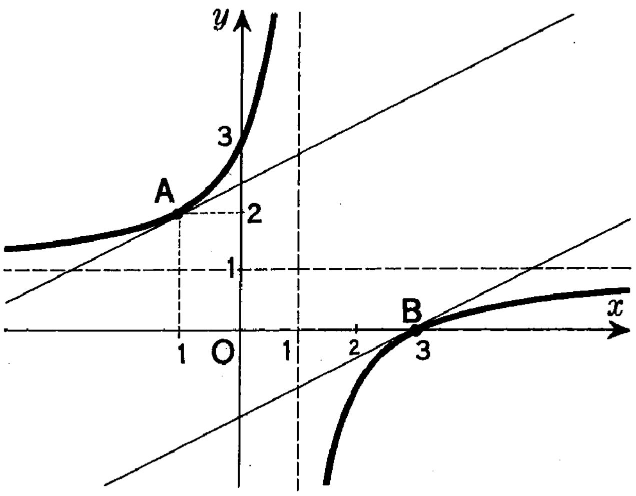



Fig. 39.

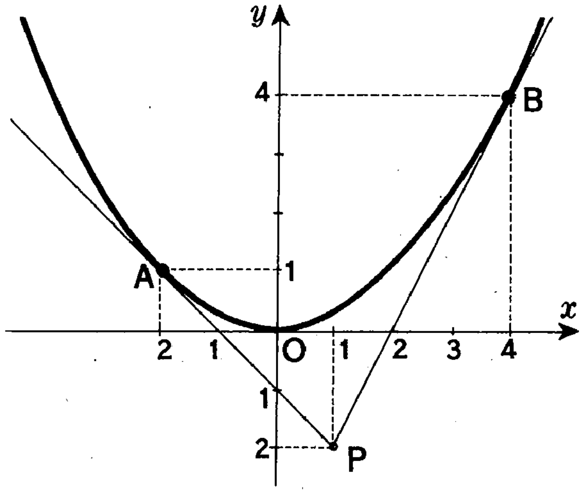



Fig. 40.

2° ***Tangentes issues du point donné*** P($\alpha$, $\beta$). — Il suffit de déterminer $x$ pour que l'équation de la tangente en M($x, f(x)$) : $Y - f(x) = (X - x)\,f'(x)$ soit vérifiée pour $X = \alpha$ et $Y = \beta$. On obtient l'équation : $\beta - f(x) = (\alpha - x) f'(x)$.

Ainsi (fig. 40) la tangente à la courbe $y = \frac{x^2}{4}$ au point $M\left(x\,;\,\frac{x^2}{4}\right)$ a pour équation :

$$Y - \frac{x^2}{4} = \frac{x}{2}(X - x) \iff x^2 - 2xX + 4Y = 0$$

Écrivons que cette tangente passe par le point P($X = 1$, $Y = -2$), on obtient : $x^2 - 2x - 8 = 0$ dont les racines $-2$ et $+4$ correspondent aux points de contact A($-2$; $+1$) et B($+4$; $+4$). On peut vérifier que les tangentes correspondantes : $y = -x - 1$ et $y = 2x - 4$ sont issues de P(1, $-2$).

Remarque. — On peut retrouver ces résultats en cherchant pour quelles valeurs de $m$, la droite $y + 2 = m(x - 1)$ issue de P, coupe la courbe en deux points confondus.

**129. Concavité d'un arc de courbe.** — L'axe O$y$ du repère cartésien $x$O$y$ étant supposé vertical, on dit qu'un arc de la courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité du côté des $y$ positifs ou du côté des $y$ négatifs suivant qu'il se trouve tout entier situé au-dessus ou au-dessous de la tangente en l'un quelconque de ses points.

On voit, géométriquement, sur les figures 41 et 42, que le coefficient directeur $y' = f'(x)$ de la tangente en M($x$, $y$) est une fonction de $x$, croissante dans le premier cas, décroissante dans le second. La concavité d'un arc de courbe est donc déterminée par le signe de $y''=f''(x)$ et nous admettrons que :

***Une courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité du côté des $y$ positifs sur tout intervalle où $y''$ est positif, du côté des $y$ négatifs sur tout intervalle où $y''$ est négatif.***

Signalons que l'on dit alors que la fonction $y = f(x)$ est *convexe* sur tout intervalle où $y''$ est positif, *concave* sur tout intervalle où $y''$ est négatif.

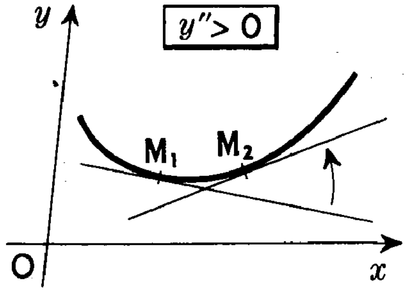



Fig. 41.

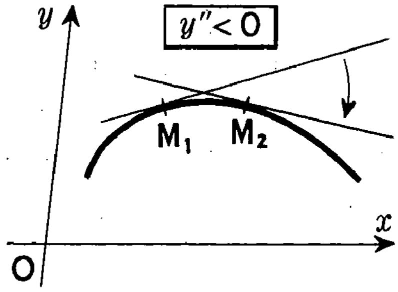



Fig. 42.

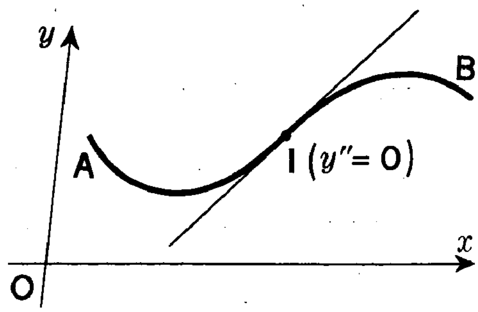



Fig. 43.

**130. Points d'inflexion.** — Un point I de l'arc AB de la courbe $y = f(x)$ est un point d'inflexion si les deux arcs AI et IB sont de part et d'autre de la tangente en I (fig. 43). Un tel point correspond donc à un changement de concavité, c'est-à-dire à un changement de signe de $y''$.

***La courbe $y = f(x)$ admet un point d'inflexion pour toute valeur de $x$ pour laquelle $y''$ change de signe.***

Les points d'inflexion sont en général des points pour lesquels on a $y'' = 0$, ou éventuellement des points pour lesquels $y''$ devient infini.

Exemples. — La courbe $y = x^3 - x$ admet le point O comme point d'inflexion car $y'' = 6\,x$ s'annule en changeant de signe pour $x = 0$.

La courbe $y = x^{5/3} - x$ admet le point O comme point d'inflexion car $y'' = \dfrac{10}{9}\,x^{-1/3}$ change de signe en devenant infini pour $x = 0$. Les deux courbes ont même allure (fig. 44).

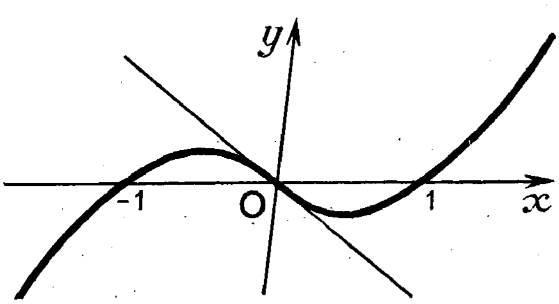



Fig. 44.

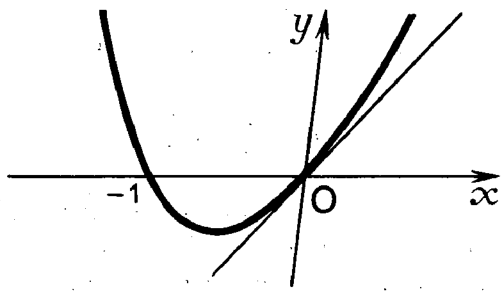



Fig. 45.

Lorsque $y''$ s'annule sans changer de signe, on dit qu'on a affaire à une *inflexion non apparente* ou que la courbe $y = f(x)$ présente un *point méplat*. Il en est ainsi de la courbe $y = x^4 + x$ pour $x = 0$ car $y'' = 12\,x^2$ (fig. 45). Que l'inflexion soit apparente ou non, il est bon de construire tout point d'inflexion ainsi que la tangente d'inflexion correspondante.

## BRANCHES INFINIES

**131. Définitions.** — Une courbe (C) admet une *branche infinie* si la distance OM du point $M(x, y)$ à l'origine O des coordonnées devient infinie lorsque M parcourt la courbe. Il en est ainsi dès que l'une des coordonnées $x$ ou $y$ du point M devient infinie.

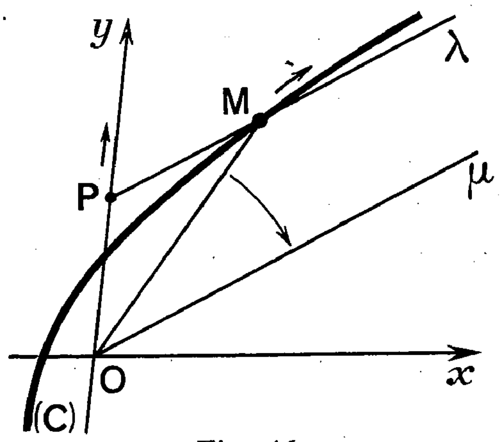



Fig. 46.

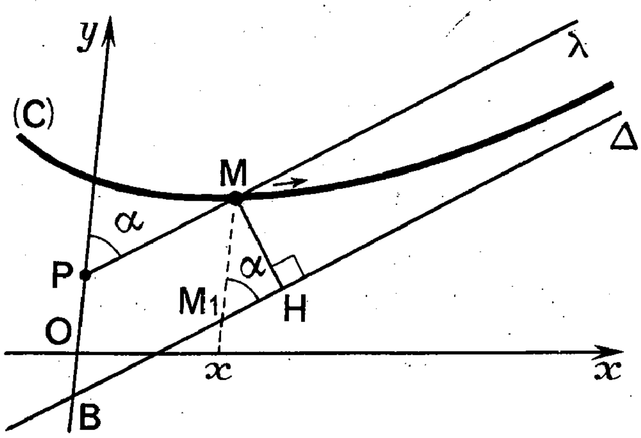



Fig. 47.

1° Supposons que le point $M(x, y)$ s'éloigne indéfiniment sur une branche infinie de (C). Si le coefficient directeur $\frac{y}{x}$ de OM tend vers une limite finie $m$ ou infinie, la droite OM admet une position limite $O\mu$, appelée ***direction asymptotique de la courbe*** (C) (fig. 46). Ce sera la droite $y = mx$ si $\frac{y}{x} \longrightarrow m$, la droite $Oy$ si $\frac{y}{x}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

2° ***On dit que la droite*** $\Delta$ ***est une asymptote de la courbe*** (C) ***si la distance*** MH, ***du point*** M ***à la droite*** $\Delta$, ***tend vers zéro lorsque*** M ***s'éloigne indéfiniment sur la courbe.***

On dit aussi que la courbe (C) est asymptote à la droite $\Delta$ (fig. 47) (le mot asymptote s'emploie comme le mot tangente).

**132. Asymptotes parallèles aux axes.** — ***La courbe*** $y = f(x)$ ***est asymptote à la droite*** $x = a$ ***si*** $f(x)$ ***tend vers l'infini lorsque*** $x$ ***tend vers*** $a$ ***(à gauche ou à droite). Elle est asymptote à la droite*** $y = b$ ***si*** $f(x)$ ***tend vers*** $b$ ***lorsque*** $x$ ***tend vers*** $+\infty$ ***(ou*** $-\infty$***).***

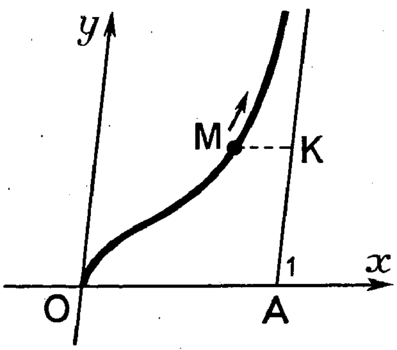



Fig. 48.

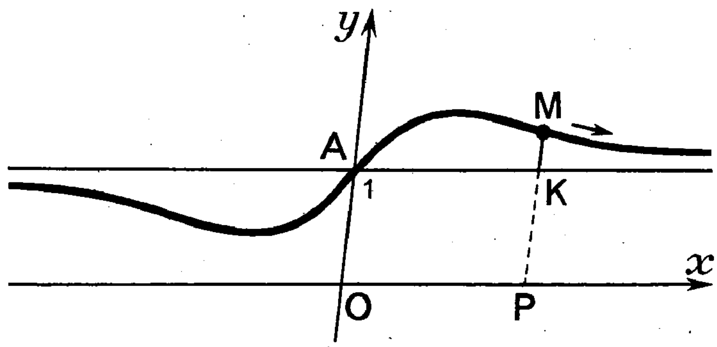



Fig. 49.

1° Ainsi (fig. 48) la courbe $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ est asymptote à la droite $x = 1$ car lorsque $x$ tend vers 1 à gauche, $y$ tend vers $+\infty$. Le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe et la distance $MH \leqslant MK = |1 - x|$ tend vers 0.

2° La courbe $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \dfrac{x}{x^2 + 1}$ est asymptote à la droite $y = 1$ (fig. 49) lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ car $MH \leqslant MK = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$ tend vers 0.

**133. Asymptotes obliques.** — Soit $\Delta$ une asymptote d'équation $y = mx + p$ de la courbe (C) d'équation : $y = f(x)$. Désignons par M $(x, y)$ et $M_1$ $(x, y_1)$ les points de même abscisse $x$ de (C) et de $\Delta$ et par $\alpha$ l'angle aigu $(Oy, \Delta)$. On obtient (fig. 47) :

$$MH = M_1M \sin \alpha \quad \text{et} \quad \overline{M_1M} = y - y_1 = f(x) - (mx + p).$$

Pour que MH tende vers 0, lorsque $x$ devient infini, il faut et il suffit que $\overline{M_1M}$ soit une fonction $\varepsilon(x)$ admettant 0 pour limite lorsque $x$ devient infini :

***Pour que la courbe $y = f(x)$ soit asymptote à la droite $y = mx + p$ il faut et il suffit que l'on ait : $f(x) = mx + p + \varepsilon(x)$.***

La courbe est située au-dessus de l'asymptote si $\varepsilon(x)$ est positif, au-dessous si $\varepsilon(x)$ est négatif.

Exemple. — La courbe $y = \dfrac{2x^2 - x - 5}{x - 2}$ ou $y = 2x + 3 + \dfrac{1}{x - 2}$ est asymptote à la droite $y = 2x + 3$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et lorsque $x$ tend vers $-\infty$. Comme $\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ on voit que la courbe est située au-dessus de l'asymptote pour $x > 2$, au-dessous pour $x < 2$.

**134. Théorème.** — ***Si la courbe $y = f(x)$ est asymptote à la droite $y = mx + p$, les coefficients $m$ et $p$ sont respectivement les limites sur la courbe de $\dfrac{y}{x}$ et de $y - mx$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.***

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + p + \varepsilon(x) \\ \text{lorsque } x \longrightarrow \pm\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim \dfrac{y}{x} = \lim \left[m + \dfrac{p}{x} + \dfrac{\varepsilon(x)}{x}\right] = m \\ \lim (y - mx) = \lim [p + \varepsilon(x)] = p. \end{array}\right.$$

On voit que $m$ n'est autre que le coefficient directeur d'une direction asymptotique.

Exemple. — Soit la courbe $y = 2x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$. Lorsque $x$ tend vers $+\infty$ :

$$\frac{y}{x} = 2 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \to 3. \quad \text{Donc } m = 3.$$

$$y - 3x = 1 - \left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right) = 1 - \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \to 1. \quad \text{Donc } p = 1.$$

Comme $y = 3x + 1 + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ la courbe est située, lorsque $x \to +\infty$ au-dessus de son asymptote $y = 3x + 1$. On montrera de même qu'elle est située au-dessus de son asymptote $y = x + 1$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ car $y = x + 1 + \dfrac{1}{-x + \sqrt{x^2 + 1}}$.

**135. Corollaire.** — ***L'asymptote $y = mx + p$ est, lorsqu'elle existe, la position limite de la parallèle M$\lambda$ à la direction asymptotique $y = mx$ lorsque $x$ devient infini.***

L'équation de cette parallèle s'écrit : $Y - y = m(X - x)$ ou $Y = mX + (y - mx)$.

Comme $y - mx$ tend vers $p$ on voit que cette parallèle tend vers la droite $Y = mX + p$ (fig. 47), donc vers l'asymptote $y = mx + p$.

**136. Branches paraboliques.** — Si la droite M$\lambda$, parallèle à la direction asymptotique O$\mu$ n'admet pas de position limite, lorsque le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe, il n'y a pas d'asymptote parallèle à O$\mu$.

Ceci peut se produire, comme pour $y = mx + \sin x$, parce que $y - mx$ n'admet aucune limite. En général, il n'y a pas d'asymptote parallèle à O$\mu$ parce que la droite M$\lambda$ s'éloigne indéfiniment en même temps que M (fig. 46) :

***On dit alors que la courbe admet une branche infinie parabolique.***

Il en est ainsi lorsque $y - mx$ devient infini en même temps que $x$. Par exemple : $y = 3x + \sqrt{x+1}$ admet $y = 3x$ comme direction asymptotique, mais la branche de courbe correspondante est parabolique car $y - 3x = \sqrt{x+1} \longrightarrow +\infty$ en même temps que $x$.

De même lorsque $\frac{y}{x}$ tend vers l'infini en même temps que $x$, la courbe admet la direction asymptotique O$y$ mais la droite M$\lambda$ d'abscisse $x$ s'éloigne indéfiniment lorsque $x$ devient infini. Il en est ainsi pour $y = x^2$, $y = ax^3 + bx$ et $y = P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme de degré $n > 1$.

**137. Résumé.** — La marche à suivre pour l'étude et la représentation graphique d'une fonction peut se résumer ainsi :

1° On étudie les valeurs de $x$ pour lesquelles la fonction est définie et continue.
On calcule la dérivée $y' = f'(x)$ et on étudie son signe, en déterminant les intervalles où elle garde un signe constant.

2° On établit un tableau de variation indiquant dans chaque intervalle le sens de variation par une flèche ↗ ou ↘, les valeurs limites de $y$ et $y'$ aux bornes de ces intervalles, les maxima et les minima.

3° On calcule $y''$ et on détermine la concavité et les points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$ (Les résultats peuvent être inclus dans le tableau précédent.) Puis, s'il y a lieu, on recherche les directions asymptotiques et les asymptotes non parallèles aux axes.

4° On construit la courbe représentative en utilisant les résultats trouvés ainsi que les éléments de symétrie ou de translation que la courbe peut présenter. On détermine en plus, autant de points et tangentes particuliers que cela est nécessaire pour assurer un tracé précis que l'on effectuera d'un trait noir et bien ferme. Utiliser toujours une échelle assez grande.
Les indications des axes et des coordonnées remarquables seront portées correctement. Les asymptotes et les tangentes particulières seront tracées en trait fin noir ou de couleur.

## EXERCICES

— Étudier les variations des fonctions suivantes et déterminer la tangente à la courbe représentative aux points dont l'abscisse $x$ est indiquée.

**277.** $y = \dfrac{x^2}{2}$ pour $x = 1$; $x = -2$ et $x = 3$.

**278.** $y = -2x^2 + 5x + 3$ pour $x = 0$; $x = 1$ et $x = 2$.

**279.** $y = \dfrac{x^2}{2} + x - 4$ pour $x = -2$; $x = 0$ et $x = 3$.

**280.** $y = \dfrac{1}{4}(x - 3)(x + 4)$ pour $x = -\dfrac{3}{2}$; $x = 0$ et $x = \dfrac{5}{2}$.

**281.** $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ pour $x = -1$ ; $x = 0$ et $x = 2$.

**282.** $y = \dfrac{2x}{x+2}$ pour $x = -4$ ; $x = -1$ et $x = 0$.

**283.** $y = \dfrac{3x+1}{x+1}$ pour $x = -2$ ; $x = 0$ et $x = 1$.

**284.** $y = \dfrac{6x-5}{2x-1}$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$.

— Construire les tangentes aux graphes des fonctions suivantes, aux intersections avec $Ox$.

**285.** $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$ ; $y = (x^2-1)^2$ ; $y = \sqrt{x^2-1}$.

**286.** $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ ; $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$ ; $y = \dfrac{(x-2)^2}{x+2}$.

**287.** $y = x^3 - x$ ; $y = \sqrt{x^3-x}$ ; $y = (x^3-x)^2$

**288.** $y = (x^2-1)(x^2-4)$ ; $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ ; $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$.

**289.** 1° Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = \dfrac{x^2}{2}$ au point d'abscisse $x = m$.

2° En déduire le point où la tangente a pour coefficient directeur $+2$, puis les équations et les points de contact des tangentes issues du point $P\left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$.

**290.** 1° Déterminer le point de contact et l'équation de la tangente à la courbe $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3$ dont le coefficient directeur est $-1$.

2° Équations et points de contact des tangentes issues du point $A\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

**291.** Construire la courbe : $y = \dfrac{x^2}{4} - x + 3$, puis déterminer et construire :

1° La tangente au point A d'abscisse $x = 4$.

2° La tangente de coefficient directeur $-1$.

3° Les tangentes issues du point $P\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

**292.** Établir l'équation de la tangente à la courbe $y = \dfrac{1}{x}$ au point d'abscisse $x = m$.

2° En déduire les tangentes parallèles à la droite $x + 4y = 0$, puis les tangentes issues du point $P(-2, +4)$ et leurs points de contact.

**293.** 1° Former l'équation de la tangente à la courbe $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ au point d'abscisse $x = m$.

2° Déterminer les tangentes issues du point $P(x = 1, y = 4)$ et les coordonnées de leurs points de contact.

**294.** 1° Étudier les variations du trinôme : $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x - 6$.

Tracer la courbe représentative (P). Trouver l'équation de la tangente au point A d'abscisse 4 et tracer cette tangente.

2° Calculer les coordonnées des points d'intersection B et C de (P) avec la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 3$. Équations des tangentes en B et C.

3° Tracer sur un nouveau graphique la courbe (P) et la droite (D) d'équation $y = m$. Utiliser ce graphique pour étudier suivant les valeurs de $m$, l'existence et le signe des racines de l'équation :

$$x^2 - 4x - 2(m + 6) = 0.$$

— Déterminer lorsque $x \to \infty$ ou $-\infty$ les asymptotes aux courbes suivantes et préciser dans chaque cas la position de la courbe par rapport à son asymptote.

**295.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; $\quad y = \dfrac{x^2+3x+4}{x^2+x+1}$; $\quad y = \dfrac{x^2+x-4}{2(x+3)}$.

**296.** $y = \sqrt{x^2 - 4x}$; $\quad y = \sqrt{x^2 + x + 1}$; $\quad y = \sqrt{4x^2 - x + 1}$.

**297.** $y = x + 2 + \sqrt{x^2 - 1}$; $\quad y = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$; $\quad y = \dfrac{x}{2} - \sqrt{x^2 + 3}$.

**298.** $y = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$; $\quad y = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; $\quad y = \dfrac{x^3+x+1}{x^2-x+1}$.

**299.** $y = x + \dfrac{1}{x}$; $\quad y = \dfrac{2x^2-3}{x+1}$; $\quad y = \dfrac{(x+1)^2}{2(x+2)}$.

**300.** 1° Montrer que la fonction $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ est croissante quel que soit $x$.

2° La courbe représentative (C) admet une asymptote. Déterminer son équation et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

3° Étudier la concavité de la courbe (C) et montrer que ses points d'inflexion sont alignés.

**301.** On considère les courbes $(C_1)$ et $(C_2)$ d'équations : $y_1 = x^2 - 4x - 1$ et $y_2 = x^2 + 6x + 4$, construites dans un même repère rectangulaire.

1° Ces deux courbes ont un point commun, A; calculer ses coordonnées.

2° Tracer avec précision les tangentes aux deux courbes au point A. Quelle remarque peut-on faire sur ces droites ?

3° On coupe les deux courbes par une même parallèle, D, à l'axe des $x$, d'ordonnée $m$; D rencontre $(C_1)$ en $M_1$ et $M'_1$ et $(C_2)$ en $M_2$ et $M'_2$. Montrer que $M_1M'_1 = M_2M'_2$ quel que soit $m$.

**302.** Soient les deux fonctions : $y_1 = \dfrac{2x}{x-2}$ et $y_2 = x^2 - x$.

1° Étudier les variations de ces deux fonctions et construire dans un même repère rectangulaire leurs courbes représentatives (H) et (P).

2° Montrer que ces deux courbes ont même tangente en O. Construire cette tangente. Calculer les coordonnées du second point d'intersection des deux courbes et déterminer les équations des tangentes en ce point.

**303.** 1° Tracer dans un même repère rectangulaire la parabole (P) : $y = \dfrac{x^2}{2}$ et l'hyperbole (H) : $y = \dfrac{4}{x}$. Montrer qu'elles se coupent en un seul point A dont on donnera les coordonnées.

2° Établir les équations des droites $(D_1)$ et $(D_2)$ respectivement tangentes en A à (P) et à (H). Déterminer le point $M_1$ où la droite $(D_1)$ recoupe (H) et le point $M_2$ où la droite $(D_2)$ recoupe (P).

3° Former l'équation de la droite $M_1M_2$ et établir que la droite $M_1M_2$ est tangente à (H) en $M_1$ et à (P) en $M_2$.

**304.** 1° Construire dans un même repère rectangulaire les courbes $C_1$ et $C_2$ représentant respectivement les fonctions :

$$y = x^2 - 4x + 5 \quad \text{et} \quad y = +\frac{2}{x}.$$

2° Vérifier que le point A de coordonnées $x = 1, y = 2$ est commun aux deux courbes et montrer que les deux courbes admettent même tangente en A. Équation de cette tangente.

3° On considère la droite d'équation $y = mx - m + 2$. Montrer qu'elle passe par A et calculer en fonction de $m$ les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec $C_1$ et $C_2$.

4° En déduire que les courbes $C_1$ et $C_2$ se recoupent en un point unique B distinct de A. Établir les équations des tangentes en B aux deux courbes.

**305.** Soit la fonction $y = \dfrac{mx + 2}{m + x - 1}$ où $x$ est la variable, $m$ un paramètre. A chaque valeur de $m$ correspond une fonction $y$ et une courbe $C_m$ représentative des variations de $y$.

1° On pose $m = 3$. Construire la courbe $C_3$ correspondante et déterminer les abscisses des points de cette courbe tels que la tangente à $C_3$ en ces points ait pour coefficient directeur 4.

2° Écrire les équations des asymptotes de la courbe $C_m$ en fonction de $m$. Lieu de leur point de concours quand $m$ varie.

3° Montrer que les courbes $C_m$ passent par deux points fixes A et B. Calculer leurs coordonnées et calculer en fonction de $m$, le coefficient directeur de la tangente en chacun de ces deux points.

4° Dire, suivant les valeurs de $m$, le sens des variations de la fonction. Cas particuliers.

**306.** On donne la fonction $y = \dfrac{mx + m + 2}{-x + m + 1}$. A chaque valeur du paramètre $m$ il correspond une courbe (H) représentant cette fonction.

1° Étudier la variation de cette fonction et préciser son sens pour les différentes valeurs de $m$ On prend $m = 1$. Représenter graphiquement la fonction et trouver l'équation de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x = 1$.

2° Combien passe-t-il de courbes (H) par chaque point P du plan de coordonnées $\alpha$ et $\beta$ ? Lieu du centre de symétrie de (H) ? Comment ce lieu est-il décrit quand $m$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ ?

3° Pour quelles valeurs de $m$, (H) rencontre-t-elle la droite $y = 2x$ ? Quand il y a deux intersections on les désigne par $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$. Montrer qu'il existe entre $x_1 + x_2$ et $x_1x_2$ une relation indépendante de $m$. En déduire que $M_1$ et $M_2$ restent conjugués harmoniques par rapport à deux. points fixes, que l'on déterminera.

# ÉTUDE DE LA FONCTION : $y = ax^2$

**138. Fonction** $y = x^2$. — La fonction $y = x^2$ est définie et continue quel que soit $x$. Elle est nulle pour $x = 0$, positive pour $x \neq 0$ et à deux valeurs opposées : $x = \pm \alpha$, correspond la même valeur $y = \alpha^2$. La fonction $y = x^2$ est une fonction paire.

Sa dérivée $y' = 2x$ est négative pour $x < 0$, positive pour $x > 0$. Comme d'autre part $y$ tend vers $+\infty$, lorsque $x$ tend vers $\pm \infty$, on peut établir le tableau :

| $x$ | $+\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y = x^2$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $-\infty$ |

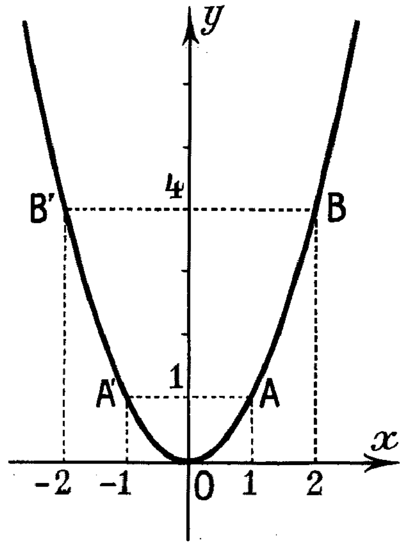


Fig. 50.

La fonction $y = x^2$ est donc décroissante pour $x$ négatif, croissante pour $x$ positif. Elle admet pour $x = 0$ un minimum égal à 0.

Graphe de la fonction $y = x^2$. — Dans le plan rapporté au repère rectangulaire $xOy$ (fig. 50) construisons les points O (0, 0); A (1, 1); A′ (− 1, 1); B (2, 4); B′ (− 2, 4) etc. En joignant tous ces points par une courbe continue nous obtenons le graphe de la fonction $y = x^2$.

La courbe admet la droite O$y$ pour axe de symétrie car les points $M(\alpha, \alpha^2)$ et $M'(-\alpha, \alpha^2)$ sont symétriques par rapport à O$y$. Cette courbe, en forme de U, tourne sa concavité du côté des $y$ positifs car $y'' = 2$ est toujours positif (n° 129).

Le point O situé sur l'axe de symétrie est le *sommet* de la courbe. Comme $x = 0 \Longrightarrow y' = 2x = 0$, *la tangente au sommet* est la droite O$x$. En construisant la courbe à une grande échelle, on met en évidence la forme arrondie de la courbe au voisinage du sommet.

**139. Étude de la fonction :** $y = ax^2$. — La fonction $y = ax^2$ est définie et continue quel que soit $x$. C'est une fonction paire, nulle pour $x = 0$, du signe de $a$ pour $x \neq 0$.

La dérivée $y' = 2\,ax$ est du signe de $a$ pour $x > 0$, du signe opposé $x < 0$, comme $y$ devient infini en même temps que $x^2$ on obtient :

**1er Cas : *a positif***

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2e Cas : *a négatif***

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | $-\infty$ |

***La fonction $y = ax^2$ admet pour $x = 0$, un minimum égal à 0 lorsque $a$ est positif, un maximum égal à 0 lorsque $a$ est négatif.***

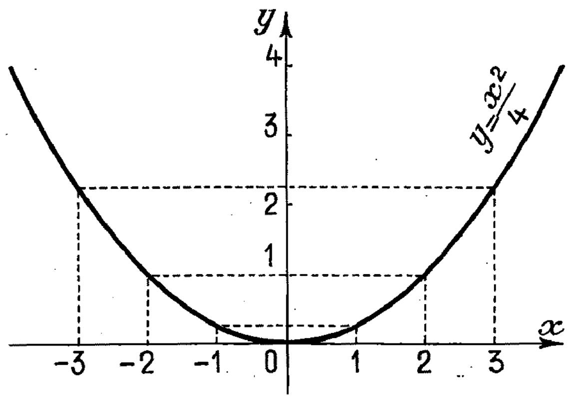



Fig. 51.

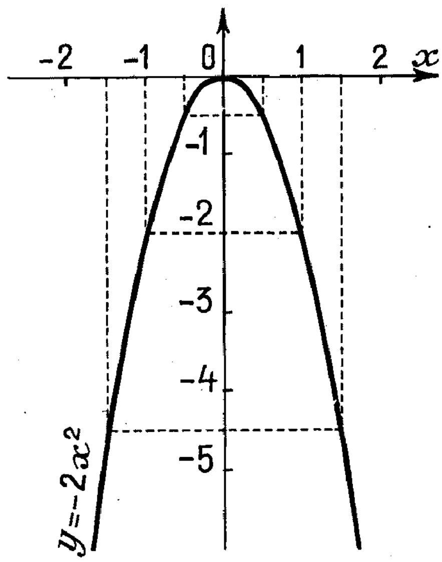



Fig. 52.

Dans un repère rectangulaire $xOy$, la courbe $y = ax^2$ se déduit de la courbe $y = x^2$ dans l'affinité orthogonale d'axe $Ox$ et de rapport $a$. Comme $y'' = 2\,a$, elle tourne sa concavité du côté des $y$ positifs (fig. 51) pour $a > 0$, du côté des $y$ négatifs (fig. 52) pour $a < 0$.

Elle admet, comme la courbe $y = x^2$, l'axe $Oy$ pour *axe de symétrie* et l'axe $Ox$ pour tangente au sommet.

**140. Théorème. —** ***Dans un repère orthonormé, la courbe $y = ax^2$ est la parabole de foyer F $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ et dont la directrice D est la droite $y = -\frac{1}{4a}$.***

On vérifie (fig. 53) que tout point M équidistant de F et de D satisfait à la condition $\overline{MF}^2 = \overline{MH}^2$

$$\text{soit :} \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2$$

On obtient : $\quad x^2 = \frac{y}{a} \quad$ ou $y = ax^2$.

La longueur $\overline{KF} = \frac{1}{2\,a}$ est appelée *paramètre* de la parabole.

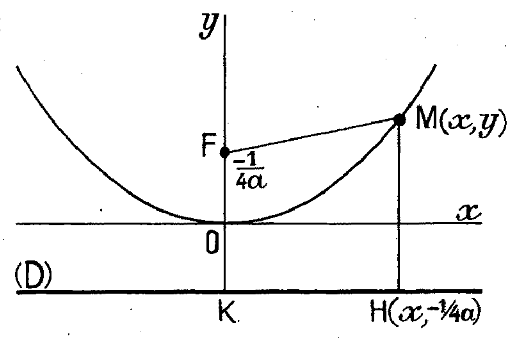



Fig. 53.

Si au lieu d'un repère orthonormé on utilise un repère rectangulaire tel que $|\vec{j}| = 3\,|\vec{i}|$ par exemple, cela revient à construire la courbe $y = 3\,ax^2$ dans le repère orthonormé associé au vecteur $\vec{i}$. La courbe reste donc une parabole. D'après la définition géométrique toutes les paraboles, et par suite toutes les courbes $y = ax^2$ sont semblables.

**141. Résumé.** — ***La courbe $y = ax^2$ est une parabole de sommet O, admettant $y'y$ pour axe de symétrie et $x'x$ pour tangente au sommet.***

Pour construire correctement la courbe, il faut toujours prendre une unité assez grande et construire un nombre suffisant de points.

On pourra s'aider du fait que lorsque l'abscisse est multipliée (ou divisée) par 2 ou 3, l'ordonnée est multipliée (ou divisée) par 4 ou 9. Ainsi (fig. 54), connaissant seulement le point A et le sommet O de la parabole $y = ax^2$, on obtiendra facilement sur du papier quadrillé les points B, C et D, ce qui donnera en complétant par symétrie par rapport à l'axe O$y$, neuf points sans calculs.

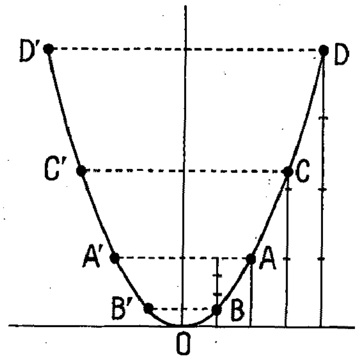


Fig. 54.

**142. Tangente et normale à la parabole** $y = ax^2$. — 1° L'équation de la tangente en M($x$, $y$) à la parabole $y = ax^2$, s'écrit puisque $y' = 2\,ax$ (n° 125) :

$$Y - y = 2ax\,(X - x) \Longleftrightarrow \boxed{Y = 2ax\,X - ax^2}$$

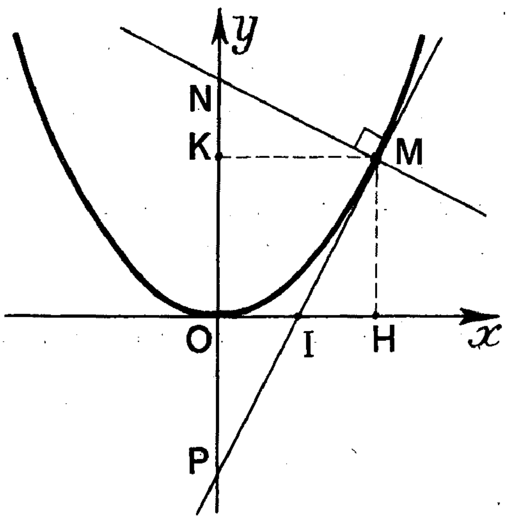


Fig. 55.

Désignons par H et K les projections orthogonales de M($x$, $y$) sur les axes O$x$ et O$y$ (fig. 55). On voit que la tangente coupe O$x$ au point I $\left(\frac{x}{2}, 0\right)$, milieu de OH et qu'elle coupe O$y$ au point P $(0, -ax^2)$, symétrique de K par rapport au point O. On dit que :

*Le sommet* O *de la parabole est le milieu de la sous-tangente* PK *relative à son axe* O$y$.

2° Dans un repère orthonormé l'équation de la normale en M($x$, $y$) s'écrit puisque $y' = 2\,ax$ (n° 126) : $X - x + 2\,ax\,(Y - y) = 0$.

Cette normale coupe O$y$ au point N tel que $X = 0$ et d'ordonnée $Y = y + \dfrac{1}{2a}$.

Le segment $\overline{KN} = Y - y = \dfrac{1}{2a}$ est constant et égal au paramètre (n° 140).

*La sous-normale relative à l'axe de la parabole est constante et égale au paramètre de cette parabole.*

# ÉTUDE DE LA FONCTION : $y = ax^2 + bx + c$

## 143. Exemple I. — *Étude de la fonction:* $y = x^2 - 2x - 3$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit $x$. Sa dérivée : $y' = 2(x - 1)$ s'annule pour $x = 1$, est positive pour $x > 1$, négative pour $x < 1$.

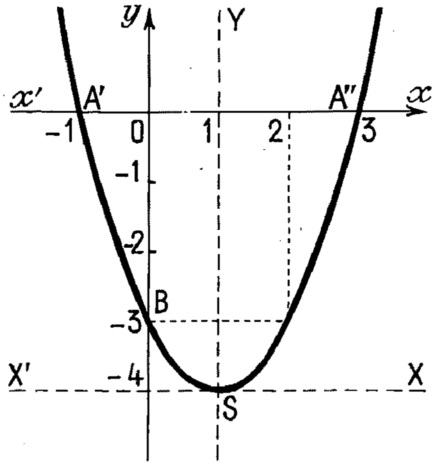



Fig. 56.

Comme $y = x^2 \left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)$ on voit, lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, que $y$ est le produit de $x^2$ par un facteur qui tend vers 1. Donc $y$ tend vers $+\infty$. On obtient :

| $x$ | $+\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*La fonction* $y = x^2 - 2x - 3$ *est donc décroissante lorsque* $x$ *varie de* $-\infty$ *à* $+1$, *croissante lorsque* $x$ *varie de* $+1$ *à* $+\infty$.

Elle admet pour $x = 1$ un minimum égal à $-4$.

Graphe. — Dans un repère rectangulaire $xOy$ (fig. 56) la courbe représentative admet pour sommet le point $S(+1, -4)$. Comme $y'' = 2$, elle tourne sa concavité du côté des $y$ positifs. Cette courbe coupe $Oy$ au point $B(0; -3)$ et $Ox$ aux points $A'$ et $A''$ dont les abscisses $x'$ et $x''$ sont les racines de l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$, soit $x' = -1$ et $x'' = 3$.

Équation réduite. — Désignons par XSY le repère rectangulaire qui se déduit de $xOy$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$ $(+1; -4)$. Les formules du changement de repère (n° 90) : $x = 1 + X$ et $y = -4 + Y$ montrent que l'équation de la courbe qui s'écrit $y + 4 = (x - 1)^2$ devient : $Y = X^2$,

La courbe est donc une parabole, égale à la parabole $y = x^2$, admettant le point S pour sommet. la droite SY d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie et la droite SX pour tangente au sommet.

## 144. Exemple II. — *Étude de la fonction :* $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

La fonction est définie et continue quel que soit $x$. La dérivée : $y' = -x + 2$ s'annule pour $x = 2$. Elle est positive pour $x < 2$, négative pour $x > 2$.

Lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, $y = -\dfrac{x^2}{2}\left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$ tend comme $-\dfrac{x^2}{2}$, vers $-\infty$. On obtient :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

*La fonction* $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ *est croissante lorsque* $x$ *varie de* $-\infty$ *à* 2, *décroissante lorsque* $x$ *varie de* 2 *à* $+\infty$.

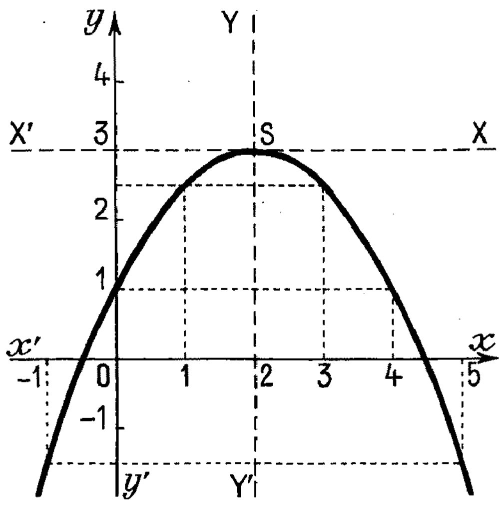



Fig. 57.

Elle admet pour $x = 2$ un maximum égal à 3. Pour $x = 0$, on obtient $y = 1$ et $y = 0$ pour : $-x^2 + 4x + 2 = 0$ soit pour $x = 2 \pm \sqrt{6}$.

GRAPHE. — Dans le repère rectangulaire $xOy$ la courbe représentative admet le point S(+ 2, + 3) pour sommet. Comme $y'' = -1$, elle tourne sa concavité du côté des $y$ négatifs.

Soit XSY le repère rectangulaire qui se déduit de $xOy$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}(+2; +3)$. On obtient (nº 90) : $x = 2 + X$ et $y = 3 + Y$.

L'équation de la courbe qui s'écrit $y - 3 = -\frac{1}{2}(x-2)^2$ devient $Y = -\frac{X^2}{2}$. La courbe est donc une paraboie égale la parabole $y = -\frac{x^2}{2}$. Elle admet comme axe de symétrie la droite $x = 2$ et pour tangente au sommet la droite $y = 3$.

## 145. Cas général : $y = ax^2 + bx + c$.

Tout trinôme du second degré en $x$ de la forme $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

C'est une fonction de $x$, définie et continue pour toute valeur de $x$.

Sa dérivée $y' = 2ax + b = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ s'annule pour $x = -\frac{b}{2a}$. Elle est du signe de $a$ pour $x > -\frac{b}{2a}$, du signe opposé pour $x < -\frac{b}{2a}$.

Pour $x = -\frac{b}{2a}$ on obtient : $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. D'autre part pour $x \neq 0$, on peut écrire : $y = x^2\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)$. Lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, $x^2$ tend vers $+\infty$ et le facteur entre parenthèses tend vers $a$. Donc $y$ tend vers $+\infty$ lorsque $a$ est positif, vers $-\infty$ lorsque $a$ est négatif. On peut donc établir les tableaux de variations :

**1er Cas : *a positif***

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{4ac - b^2}{4a}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2e Cas : *a négatif***

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{4ac - b^2}{4a}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

***La fonction $y = ax^2 + bx + c$ admet pour $x = -\frac{b}{2a}$, la valeur $\frac{4ac - b^2}{4a}$ pour minimum ou pour maximum suivant que $a$ est positif ou négatif.***

Notons que la valeur $\frac{4ac - b^2}{4a}$ est $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ en désignant par $f(x)$ le trinôme $y = ax^2 + bx + c$.

**146. Représentation graphique.** — Le plan étant rapporté à un repère rectangulaire $xOy$, la courbe $y = ax^2 + bx + c$ admet le point S $\left(x = -\frac{b}{2a};\ y = \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ pour sommet. Comme $y'' = 2a$, cette courbe tourne sa concavité du côté des $y$ positifs pour $a > 0$ (fig. 58), du côté des $y$ négatifs pour $a < 0$ (fig. 59).

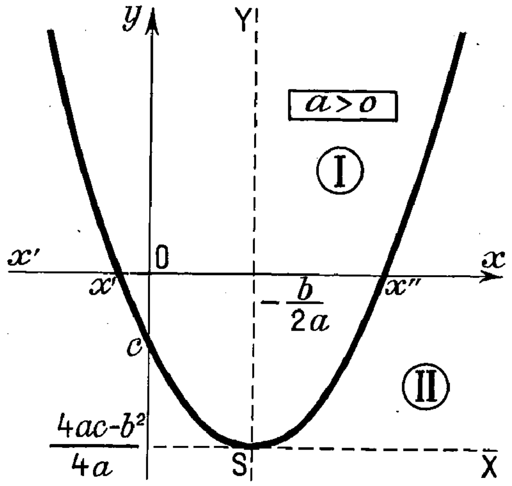



Fig. 58.

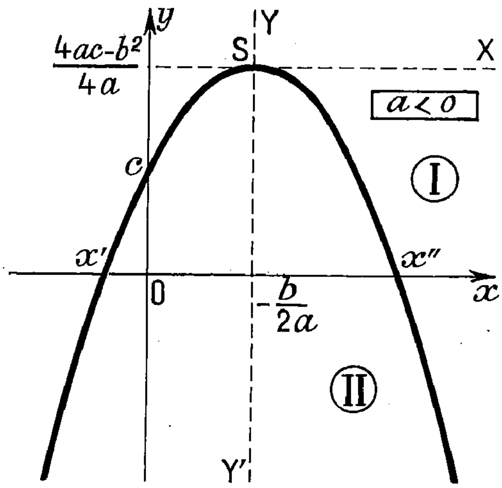



Fig. 59.

Soit XSY le repère rectangulaire qui se déduit de $xOy$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$. Les formules de changement de repère (nº 90) : $x = -\frac{b}{2a} + X$ et $y = \frac{4ac - b^2}{4a} + Y$ montrent que l'équation de la courbe $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ devient :

$$\boxed{Y = aX^2}$$

***La courbe $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole admettant pour axe de symétrie la droite $x = -\frac{b}{2a}$ et pour tangente au sommet la droite $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.***

Dans un repère orthonormé $xOy$, on peut vérifier que la courbe est le lieu des points équidistants du foyer F $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$ et de la directrice $\Delta$ $\left(y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}\right)$.

La parabole $y = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe $Oy$ au point $B(0, c)$. Lorsque $b^2 - 4ac$ est positif, elle coupe l'axe $Ox$ pour $ax^2 + bx + c = 0$. On obtient alors deux points d'intersection A′ et A″ d'abscisses respectives :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Notons que la courbe partage le plan en deux régions :

La région (I), au-dessus de la courbe, où : $y > ax^2 + bx + c$.

La région (II), au-dessous de la courbe, où : $y < ax^2 + bx + c$.

On pourra ainsi résoudre graphiquement toute inéquation de la forme :

$$Ax^2 + Bx + Cy + D > 0.$$

**147. Cas particuliers. 1er cas** : $c = 0$. — La courbe $y = ax^2 + bx$ passe par l'origine (fig. 60) et recoupe O$x$ au point d'abscisse $-\dfrac{b}{a}$.

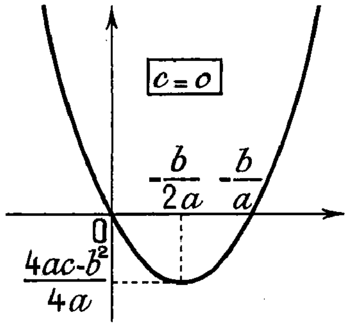



Fig. 60.

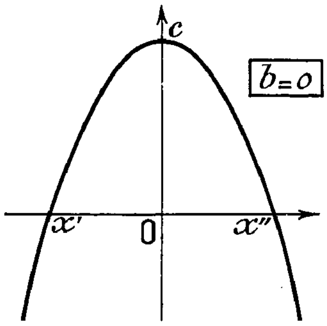



Fig. 61.

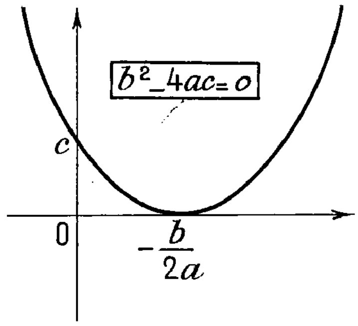



Fig. 62.

**2e Cas :** $b = 0$. La courbe $y = ax^2 + c$ admet pour axe de symétrie la droite $y'y$ (fig. 61) et si $ac < 0$, elle coupe O$x$ aux points : $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

**3e Cas :** $b^2 - 4ac = 0$. La courbe $y = ax^2 + bx + c$ a son sommet sur l'axe $x'x$ (fig. 62) et admet cette droite pour tangente au sommet, au point d'abscisse : $x = -\dfrac{b}{2a}$.

**148. Tangente et normale à la parabole** $y = ax^2 + bx + c$. — Puisque $y' = 2ax + b$ la tangente au point M$(x, y)$ à la parabole $y = ax^2 + bx + c$ s'écrit (n° 125) :

$$\mathrm{Y} - y = (2ax + b)(\mathrm{X} - x) \implies \boxed{\mathrm{Y} = (2ax + b)\,\mathrm{X} + c - ax^2} \qquad (1)$$

De même, dans un repère orthonormé, l'équation de la normale en M$(x, y)$ à cette parabole s'écrit (n° 126) :

$$\boxed{\mathrm{X} - x + (2ax + b)(\mathrm{Y} - y) = 0} \qquad (2)$$

**149. Intersection d'une droite et d'une parabole.** — L'équation aux abscisses des points d'intersection de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ et de la droite D : $y = mx + p$ s'écrit : $ax^2 + (b - m)x + c - p = 0$.

La droite D est donc (fig. 63) sécante, tangente ou extérieure à la parabole suivant que

$$\Delta = (m - b)^2 - 4a(c - p)$$

est positif, nul ou négatif.

Le milieu I de la sécante M′M″ d'équation $y = mx + p$ a pour coordonnées :

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2} = \frac{m - b}{2a};$$

$$y_1 = mx_1 + p = \frac{m(m - b)}{2a} + p.$$

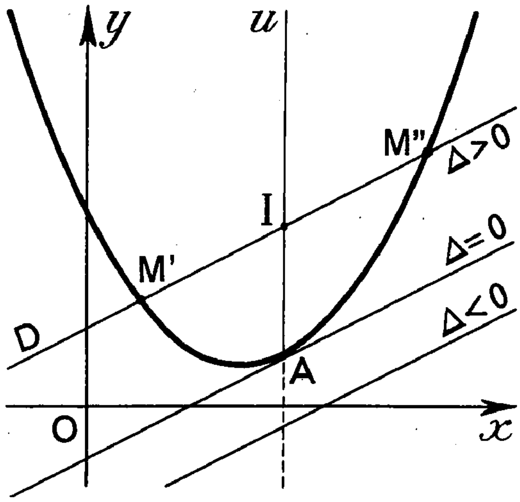



Fig 63.

Si $p$ varie, $m$ restant fixe, la sécante M'M'' varie en restant parallèle à la direction $y = mx$ et le point I se déplace sur la droite $x = \dfrac{m - b}{2a}$ ou $2ax + b = m$, appelée *diamètre conjugué de la direction* $y = mx$. L'extrémité A, sur la parabole, de ce diamètre est le point où la tangente est parallèle à $y = mx$ car $y' = 2ax + b = m$.

**150. Intersection de deux paraboles.** — Construisons dans un même repère les courbes $(P_1)$ et $(P_2)$ :

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1) \quad \text{et} \quad y = a'x^2 + b'x + c' \qquad (2)$$

Éliminons $y$, nous obtenons l'équation aux abscisses des points d'intersection (nº 89) :

$$(a - a')\,x^2 + (b - b')\,x + c - c' = 0 \qquad (3)$$

**1er cas :** $a = a'$. Cette équation est du 1er degré : un seul point d'intersection si $b \neq b'$. Pas d'intersection si en plus $b = b'$.

**2e cas :** $a \neq a'$. L'équation (3) est du second degré et :

$$\Delta = (b - b')^2 - 4\,(a - a')\,(c - c').$$

*a*) $\Delta > 0$. L'équation (3) a deux racines distinctes et les courbes se coupent en deux points distincts A et B (fig. 64).

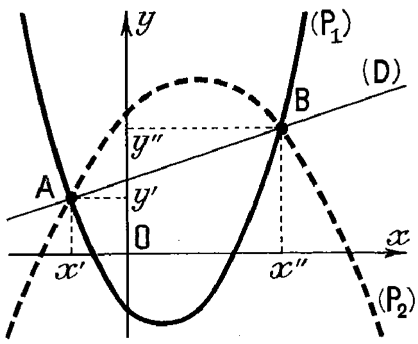



Fig. 64.

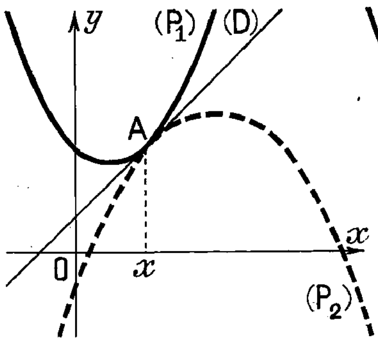



Fig. 65.

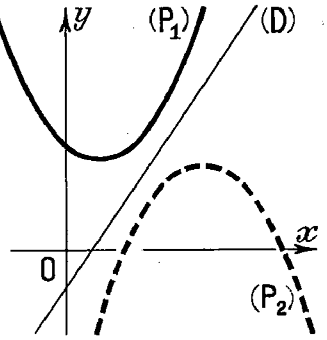



Fig. 66.

*b*) $\Delta = 0$. Les deux courbes se coupent en deux points confondus en A d'abscisse $x_0$

Or : $x_0 = -\dfrac{b - b'}{2(a - a')} \Longrightarrow 2ax_0 + b = 2a'x_0 + b'$. Les deux courbes ont même tangente en A et sont tangentes en ce point (fig. 65).

*c*) $\Delta < 0$. Les deux courbes n'ont aucun point commun (fig. 66).

Remarque. — Éliminons $x^2$ entre les équations (1) et (2) en multipliant (1) par $-a'$ et (2) par $a$ :

$$(a - a')\,y = (ab' - a'b)\,x + ac' - a'c \qquad (4)$$

Cette équation est celle d'une droite (D), passant par tout point commun à $(P_1)$ et $(P_2)$, car toute solution du système (1) et (2) vérifie l'équation (4). C'est l'équation de la droite AB si $\Delta > 0$ (fig. 64) ou de la tangente commune en A si $\Delta = 0$ (fig. 65). Elle est extérieure aux deux courbes si $\Delta < 0$ (fig. 66).

## 151. Détermination d'une parabole.

### 1° *Parabole passant par trois points donnés.*

EXEMPLE. — Soient les points : A(— 1; 0), B(1; 3) et C(3; 2) (fig. 67). Pour que la parabole: $y = ax^2 + bx + c$ passe par ces trois points, il faut et il suffit que :

$$a - b + c = 0; \; a + b + c = 3$$

et

$$9a + 3b + c = 2.$$

Ces trois relations donnent :

$$a = -\frac{1}{2}, \; b = \frac{3}{2} \text{ et } c = 2.$$

La parabole cherchée a pour équation :

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 2.$$

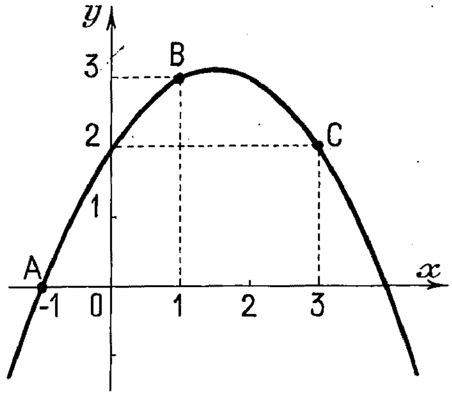


Fig. 67.

Si l'on connaît les abscisses $\alpha$ et $\beta$ des intersections de (P) avec l'axe $Ox$, on pourra prendre son équation sous la forme :

$$\boxed{y = a(x - \alpha)(x - \beta)}$$

### 2° *Paraboles ayant un sommet donné.* — Soit S($\alpha$, $\beta$) le sommet de la parabole.

Il faut que : $-\dfrac{b}{2a} = \alpha$ et $a\alpha^2 + b\alpha + c = \beta$ ou $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = \beta$.

Soit : $b = -2a\alpha$ et $c = \beta + a\alpha^2$ et l'équation s'écrit :

$$y = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta. \text{ Soit: } \boxed{y = a(x - \alpha)^2 + \beta}$$

ce qui se vérifie par la formule :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

### 3° *Paraboles tangentes à une droite donnée.* — Soit à déterminer les paraboles tangentes à la droite (D) d'équation $y = mx + p$ au point A d'abscisse $x = \alpha$.

La tangente au point $x = \alpha$ à la parabole $y = ax^2 + bx + c$ s'écrit (n° 148) :

$$y = (2a\alpha + b)x + c - a\alpha^2$$

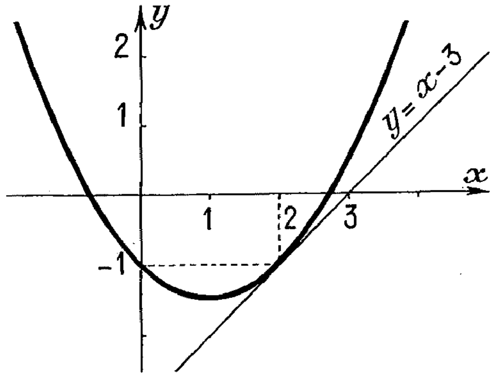


Fig. 68.

Pour que cette tangente soit la droite $y = mx + p$ il faut et il suffit que :

$$2a\alpha + b = m; \qquad c - a\alpha^2 = p$$

soit : $b = m - 2a\alpha; \; c = p + a\alpha^2$.

Les paraboles cherchées ont donc pour équation :

$$y = ax^2 + (m - 2a\alpha)x + p + a\alpha^2$$

$$\boxed{y = a(x - \alpha)^2 + mx + p} \qquad (1)$$

On vérifie d'ailleurs qu'une telle parabole coupe la droite $y = mx + p$ pour $a(x - \alpha)^2 = 0$, donc en deux points confondus d'abscisse $x = \alpha$.

Exemples. — 1° La parabole $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + x - 3$ est tangente à la droite $y = x - 3$ au point d'abscisse $x = 2$ (fig. 68).

2° La parabole $y = ax^2 + bx + c$ est tangente à la droite $y = bx + c$ en son point de rencontre avec O$y$.

## 152. Discussion graphique de l'équation : $ax^2 + bx + c = m$.

Exemple. — *Étudier suivant les valeurs du paramètre* m *la position, par rapport aux nombres* $-1$ et $5/2$, *des racines de l'équation* :

$$x^2 - 2x - 4 + m = 0. \qquad (1)$$

L'équation (1) est l'équation aux abscisses des points d'intersection de la parabole fixe ($\Gamma$) : $y = -x^2 + 2x + 4$ et de la droite variable $\Delta : y = m$.

Marquons (fig. 69) sur ($\Gamma$) les points A $(-1, +1)$ et B $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)$. L'abscisse $x$ du point d'intersection M de la parabole $\Gamma$ et de la droite $\Delta$ est telle que

$$x < -1; \quad -1 < x < \frac{5}{2} \quad \text{ou } x < \frac{5}{2}$$

suivant que M appartient à la branche A$u$, à l'arc AB ou à la branche B$v$ de la parabole $\Gamma$. Le graphique permet d'écrire immédiatement suivant les valeurs de $m$ les résultats suivants :

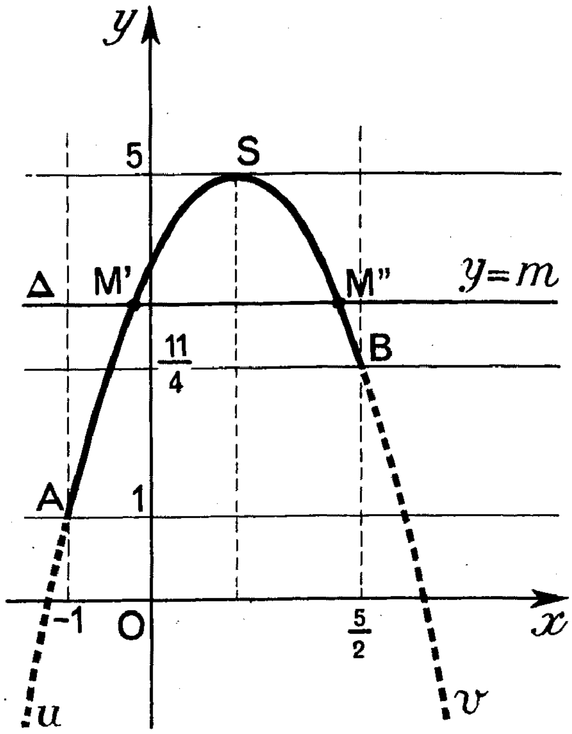



Fig. 69.

| $m$ | CONCLUSIONS |
|---|---|
| $+\infty$ | |
| | Pas de racines réelles |
| 5 | $\longrightarrow \quad x' = x'' = 1$ |
| | $-1 < x' < x'' < \frac{5}{2}$ |
| $\frac{11}{4}$ | $\longrightarrow \quad -1 < x' < x'' = \frac{5}{2}$ |
| | $-1 < x' < \frac{5}{2} < x''$ |
| 1 | $\longrightarrow \quad x' = -1 < \frac{5}{2} < x''$ |
| | $x' < -1 < \frac{5}{2} < x''$ |
| $-\infty$ | |

## EXERCICES

**307.** Déterminer le coefficient $a$ de façon que la parabole : $y = ax^2$ passe par le point A $(-3; +2{,}25)$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection avec la droite $x + 2y = 4$.

**308.** On considère un repère orthonormé $xOy$ et le point A de $Oy$ tel que $\overline{OA} = p$. Déterminer le lieu des points M du plan tels que en désignant par H la projection de M sur $Ox$ on ait la relation : $\overline{MA}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{OA}^2$.

**309.** On considère la courbe : $y = \dfrac{x^2}{2}$ et la droite variable $y = x + m$.

1° Pour quelles valeurs de $m$ la droite coupe-t-elle la courbe en deux points A et B ? Calculer les coordonnées de ces points pour $m = \dfrac{3}{2}$.

2° Trouver en fonction de $m$ les coordonnées du milieu M de AB. Lieu du point M et équation de la tangente à la courbe à l'extrémité de ce lieu.

**310.** On considère en orthonormées la courbe $(\Gamma)$ : $y = x^2$ et on la coupe par une droite variable $(\Delta)$ : $y = 2x + m$.

1° Déterminer suivant les valeurs de $m$ le nombre de points d'intersection de la courbe et de la droite. Construire la droite $(\Delta)$ tangente à $(\Gamma)$.

2° Trouver les valeurs de $m$ pour que l'un des points d'intersection ait pour abscisse $-1$ ou $+2$. Construire les droites $(\Delta)$ correspondantes et calculer les coordonnées de leur deuxième point d'intersection avec la courbe.

3° Utiliser le graphique ainsi obtenu pour déterminer suivant les valeurs de $m$ l'existence et la position des racines de l'équation : $x^2 - 2x - m = 0$ par rapport à $-1$ et $+2$.

**311.** On construit dans un repère orthonormé la courbe $(\Gamma)$ : $y = \dfrac{x^2}{4}$ et on considère la droite variable $(\Delta)$ : $y = m\left(x - \dfrac{3}{2}\right) - 1$.

1° Montrer que $(\Delta)$ passe par un point fixe S. Calculer ses coordonnées.

2° Étudier suivant les valeurs de $m$ le nombre de points d'intersection de $(\Delta)$ et de $(\Gamma)$. Équations des tangentes en A et B issues du point S. Déterminer l'angle ASB.

3° La droite AB coupe $Oy$ en un point F. Établir l'équation de SF et montrer que AB et SF sont perpendiculaires.

**312.** On considère en orthonormées la courbe $y = x^2$ et la droite $y = mx + p$.

1° Déterminer $m$ et $p$ pour que la droite soit tangente à la courbe au point d'abscisse $x = \alpha$. Calculer l'ordonnée du point de contact M.

2° On désigne par A et B les intersections de la tangente en M avec $Ox$ et $Oy$ puis par H et K les projections de M sur $Ox$ et $Oy$. Montrer que A est le milieu de OH et de BM et O celui de BK.

3° Montrer que la médiatrice de BM passe par un point fixe F de $Oy$. Comparer la différence MF — MH à la longueur OF.

**313.** Construire la courbe : $y = \dfrac{x^2}{2}$. Par le point A de $x'x$ d'abscisse $+1$ on trace une droite (D) variable de coefficient directeur $m$.

1° Étudier suivant les valeurs de $m$ le nombre de points d'intersection de la droite et de la courbe.

2° Détermine l'équation de la tangente issue de A différente de $Ox$ et les coordonnées de son point de contact T.

3° On suppose que (D) coupe la courbe en deux points M′ et M″. Déterminer en fonction de $m$ les coordonnées du point B conjugué harmonique de A par rapport à M′ et M″, puis le lieu de B.

**314.** 1° Étudier les variations de la fonction : $y = -\frac{1}{2}x^2$ sur la droite $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$. Construire la courbe représentative (C) dans le système d'axes rectangulaires $xOy$.

2° On considère la droite (D) d'équation $y = x + p$. Former l'équation du second degré dont les racines $x'$ et $x''$ soient les abscisses des points M′ et M″ communs à (C) et à (D). En déduire le lieu géométrique des milieux des cordes M′M″ de (C) quand $p$ varie; limiter avec soin la portion de la courbe trouvée qui convient.

3° Qu'arrive-t-il si l'on fait $p = \frac{1}{2}$ dans l'équation de (D) ? Préciser alors la position de (D) par rapport à (C).

**315.** Soient O$x$ et O$y$ deux axes de coordonnées rectangulaires. On marque sur l'axe O$x$ le point A d'abscisse $a$ positive donnée, et l'on trace la courbe (C) représentative de la fonction $y = \frac{x^2}{2a}$.

1° On coupe la courbe (C) par la droite (D) représentative de la fonction : $y = m(x - a)$. Former l'équation du second degré ayant pour racines les abscisses $x'$ et $x''$ des points d'intersection.

Déterminer $m$, différent de zéro, de manière que l'une de ces abscisses soit double de l'autre Calculer alors les coordonnées des points d'intersection, et dessiner sur une même figure la courbe (C) et la droite (D) ainsi déterminée.

2° Le paramètre $m$ redevenant arbitraire, expliquer comment varie la droite (D) quand $m$ varie. Calculer les coordonnées du point de contact de la courbe (C) avec la droite (D), différente de O$x$, qui lui est tangente.

3° Discuter, suivant les valeurs de $m$, l'existence des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D) et interpréter géométriquement cette discussion.

— Étudier et représenter graphiquement les fonctions :

**316.** $y = 2x^2 - 3x + 1$. **317.** $y = -2x^2 + x + 3$. **318.** $y = 4 - (x - 2)^2$

**319.** $y = x^2 - 5x - 14$. **320.** $y = -\frac{x^2}{2} + x - 4$. **321.** $y = \frac{x^2}{2} - x - 6$.

✕ — Résoudre graphiquement les systémes suivants, et vérifier par le calcul :

**322.** $\begin{cases} 4x - y - \frac{1}{2} = 0 \\ (x + 3)(x - 5) + 2y = 0. \end{cases}$ **323.** $\begin{cases} x^2 + 2(x + y) + 5 = 0 \\ 3x + 2y + 11 = 0. \end{cases}$

**324.** $\begin{cases} 3(x + y) + 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$ **325.** $\begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ 3x^2 - 2(x - y) + 8 = 0. \end{cases}$

**326.** $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x + 6. \end{cases}$ **327.** $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - 3 \\ y = -\frac{x^2}{2} + x + 3. \end{cases}$

**328.** $\begin{cases} y = -\frac{x^2}{2} + x + 2 \\ y = x^2 - \frac{x}{2} - 1. \end{cases}$ **329.** $\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 5 \\ 9y = -2x^2 + 16x - 5 \end{cases}$

**330.** Montrer que la parabole : $y = \frac{x^2}{2} - mx + 1$ passe par un point fixe. Déterminer les coordonnées X et Y de son sommet S et trouver le lieu de S lorsque $m$ varie.

**331.** Déterminer la parabole : $y = ax^2 + bx + c$ :

1° Passant par les points A(− 2; 2), B(0; − 2) et C(3; − 0,5).

2° Passant par le point $A(-1; 1)$ et admettant pour sommet $S(1; 3)$.

3° Tangente à la droite : $y = x - \frac{1}{2}$ et à la droite $y = -2x + 7$ au point $A(4; -1)$.

**332.** On considère la droite variable $(\Delta)$ : $y = 2mx - (m^2 + 1)$.

1° Construire cette droite pour $m = -1$ et calculer $m$ pour que $\Delta$ passe par le point A $\left(1; -\frac{9}{4}\right)$.

2° Déterminer le lieu (C) des points M du plan par où passe une droite $\Delta$ et une seule, et montrer qu'en chacun de ces points la droite $\Delta$ correspondante est tangente à (C).

**333.** On considère dans un repère orthonormé le point $A(x = 2; y = 4)$ et la droite (D) définie par la relation $y = +5$. Soit un point M de coordonnées $x$ et $y$ et MB la perpendiculaire en B à (D).

1° Calculer $\overline{MA}^2$ et $\overline{MB}^2$ en fonction de $x$ et de $y$.

2° En déduire la relation entre $x$ et $y$ pour que M soit équidistant de A et de la droite (D). Quelle courbe décrit le point M ? Construire cette courbe.

**334.** Dans un repère orthonormé un point variable P décrit la droite fixe (D) d'équation : $y + 1 = 0$. La perpendiculaire en P à (D) et la perpendiculaire en O à OP se coupent en M.

1° Trouver la relation qui existe entre les coordonnées $x$ et $y$ du point M.

2° Construire la courbe décrite par le point M lorsque P décrit la droite (D).

**335.** Soient $A(+1; +4)$ et $B(+1; +3)$ deux points fixes du plan rapporté au repère orthonormé $xOy$. Un point variable M décrit la droite (D) d'équation $y = 4$. La perpendiculaire en M à (D) et la perpendiculaire menée par A à BM se coupent en S.

1° Établir que $\overline{AM}^2 = \overline{AB}.\overline{MS}$. En déduire une relation entre les coordonnées $x$ et $y$ du point S

2° Construire la courbe décrite par S lorsque le point M parcourt (D).

**336.** 1° Étudier et représenter graphiquement en orthonormées la fonction : $y = -\frac{x^2}{4} + x + 1$.

2° Montrer que tout point $M(x, y)$ de la courbe précédente est équidistant du point $A(x = 2, y = 1)$ et de la droite : $y = 3$.

3° Par le point $B(x = -1, y = 0)$ on mène la droite de coefficient directeur $m$. Étudier suivant la valeur de $m$ le nombre des points de rencontre de cette droite avec la courbe et le signe des abscisses de ces points.

**337.** On considère le trinôme : $y = ax^2 + bx + c$.

1° Construire dans un repère orthonormé $xOy$ la courbe figurative pour $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$.

2° Calculer les abscisses des points de rencontre de cette courbe avec les bissectrices des axes.

3° Calculer les abscisses des points de rencontre de cette courbe avec la droite passant par l'origine et faisant un angle de 30° avec l'axe O$x$.

**338.** 1° Étudier les variations de la fonction $y = \frac{1}{4}(3 - x)(x + 5)$ et construire la courbe représentative (C). Soit A le point où (C) coupe O$y$.

2° Comment varie la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + h$ avec $h$ ? Discuter suivant les valeurs de $h$ le nombre de points d'intersection de (C) et (D). Soient M et M′ les points d'intersection de (C) et (D) lorsqu'ils existent; déterminer le lieu du milieu P de MM′ quand (D) varie.

3° Montrer que, lorsque $m$ varie, la droite $(\Delta)$ d'équation $y = mx + 5$ passe par un point fixe B. Discuter suivant les valeurs de $m$ le nombre de points d'intersection de (C) et $(\Delta)$. En déduire l'existence de deux tangentes issues de B. Montrer qu'elles sont perpendiculaires. Déterminer les coordonnées des points de contact $T_1$ et $T_2$ et vérifier que le milieu I de $T_1$ et $T_2$ fait partie du lieu trouvé à la question précédente et est symétrique de B par rapport à A. Équation de la droite qui passe par les points de contact $T_1$ et $T_2$.

**339.** Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe (C) représentant la fonction : $y = x^2$. Soient A et B deux points de cette courbe se projetant en $a$ et $b$ sur $Ox$ et soient $\alpha$ et $\beta$ leurs abscisses respectives.

1° Quelle relation doit-il exister entre $\alpha$ et $\beta$ pour que le milieu de AB soit sur une parallèle à $Oy$ d'abscisse $k$ donnée ? Calculer la pente de la droite AB en fonction de $k$ et en déduire le lieu des milieux des cordes de (C) parallèles à une direction donnée.

2° Calculer les coordonnées (X, Y) du milieu M de AB en fonction de $\alpha$ et de $\beta$. En déduire les expressions de $\alpha$ et $\beta$ en fonction de X et de la valeur $h$ supposée connue de $ab$. Former ensuite la relation liant X et Y indépendamment de $\alpha$ et $\beta$ quand A et B se déplacent sur (C) de façon que $ab = h =$ constante et en déduire le lieu de M dans les mêmes conditions.

3° Quelle relation doit-il exister entre $\alpha$ et $\beta$ pour que l'angle AOB soit droit ? Calculer en ce cas l'ordonnée du point P où AB coupe $Oy$ et en déduire que P est fixe quand l'angle droit AOB pivote autour de O.

**340.** On considère la fonction $y = x^2 + 2\,mx + p$.

1° Déterminer $p$ et $m$ de telle sorte que la courbe représentative coupe l'axe $Oy$ au point A d'ordonnée 1 et soit tangente à la droite d'équation $y = 2\,x - 3$. On trouvera deux solutions.

2° Construire les deux courbes trouvées à la question 1°. On déterminera, en particulier, les points de contact de ces courbes avec la droite donnée et le coefficient directeur des tangentes à ces courbes à leur point d'intersection A.

**341.** 1° Étudier les variations de la fonction : $y = -\dfrac{x^2}{4} + x + 3$.

Construire la courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé.

2° Calculer les coefficients directeurs des tangentes à cette courbe aux points B et C d'abscisses respectives 0 et 6. Écrire les équations de ces tangentes. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection A.

3° Calculer les coordonnées du milieu M de BC et du milieu P de MA. Montrer que P est sur la courbe (Γ).

4° Montrer que la tangente en P à la courbe (Γ) est parallèle à BC.

**342.** On considère la courbe C, graphe de la fonction $y = x^2 - 3\,x + 4$ et la courbe C′, graphe de la fonction $y = \dfrac{x^2}{2} - x + 2$.

1° Construire C et C′ dans un même repère rectangulaire. Montrer que ces deux courbes ont un point commun et un seul et calculer les coordonnées de ce point, qu'on désigne par A.

2° Calculer les coefficients directeurs des tangentes en A à C et C′ et vérifier que ces tangentes sont confondues. En désignant par T cette tangente commune, trouver la fonction dont la droite T représente les variations.

3° Par le point B de l'axe $Oy$ d'ordonnée $b$ on mène la droite D parallèle à la tangente T. Quelle est la fonction dont D représente les variations ? Former l'équation donnant les abscisses des points communs à C et D ou à C′ et D. Quelle condition doit vérifier $b$ pour que D coupe respectivement C et C′ en deux points distincts ?

4° Montrer que les segments découpés par C et C′ sur D ont même milieu I. Quel est le lieu du point I lorsque B se déplace sur l'axe $Oy$ ?

**343.** 1° Déterminer les coefficients $a$, $b$, $c$ de façon que le trinôme du second degré : $ax^2 + bx + c$ prenne la valeur 18 pour $x = 2$, la valeur $-12$ pour $x = -3$ et la valeur 42 pour $x = 3$.

2° Étudier les variations de la fonction : $y = ax^2 + bx + c$, $a$, $b$, et $c$ ayant les valeurs trouvées au paragraphe précédent, et construire la courbe représentative ($\Gamma$).

3° La droite (D) d'équation : $y = mx - 15$ coupe ($\Gamma$) en A et B. Déterminer pour quelles valeurs de $m$ les points A et B sont confondus.

4° Lieu du milieu P du segment AB lorsque $m$ varie. Construire ce lieu.

**344.** Déterminer les coefficients $a$, $b$ et $c$ de façon que le trinôme du 2e degré $ax^2 + bx + c$ prenne la valeur numérique $-1$ pour $x = 0$ et pour $x = 1$, et qu'il prenne la valeur numérique 1 pour $x = -1$.

2° Étudier les variations de la fonction : $y = ax^2 + bx + c$, $a$, $b$ et $c$ ayant les valeurs trouvées précédemment.

3° Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de cette courbe avec la droite qui a pour. équation : $y = mx - 1$ ?

4° Pour quelle valeur de $m$ cette droite est-elle tangente à la courbe ?

**345.** Étant données les fonctions $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = -x^2 - 2x + 3. \end{cases}$

1° Étudier et représenter graphiquement leurs variations. Montrer que ces deux courbes se coupent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées ; en déduire que le point A se trouve sur O$x$.

2° Montrer que le graphe de la fonction : $y = (1 - m)x^2 - mx + 2m - 1$ passe par les points A et B quel que soit $m$. Trouver les abscisses des points d'intersection A et M de cette courbe avec l'axe des $x$.

3° Étudier et représenter graphiquement les variations de l'abscisse du point M lorsque $m$ varie.

4° Pour quelle valeur de $m$ la courbe : $y = (1 - m)x^2 - mx + 2m - 1$ et la droite $y = 2x - 2$ sont-elles tangentes ? Calculer les coordonnées du point de contact.

**346.** On considère le trinôme : $y = x^2 - 2kx + k^2 + k + 1$.

1° Déterminer $k$ de façon que ce trinôme ait un minimum égal à $-4$, puis construire la courbe représentative des variations du trinôme ainsi obtenu.

2° On coupe cette courbe par une droite passant par l'origine et ayant pour équation : $y = mx$. Étudier l'équation qui donne les abscisses des points de rencontre et déduire de cette étude qu'on peut mener à la courbe deux tangentes par l'origine. Donner les équations de ces tangentes.

3° Soient M′ et M″ les points de rencontre de la droite considérée et de la courbe. Calculer les coordonnées du milieu P du segment M′M″. Peut-on déduire des valeurs obtenues la ligne que décrit le point P quand $m$ varie ?

**347.** 1° Étudier suivant les valeurs de $x$ le signe de l'expression :

$$f(x) = 2x(x + 2) - (x + 2)(x + 1).$$

2° Étudier les variations des fonctions : $y = 2x(x + 2)$ et $y = (x + 2)(x + 1)$.

Construire dans un même repère rectangulaire les graphes C et C′ de ces fonctions. Calculer les coordonnées des points de rencontre A et B des courbes C et C′.

3° Calculer les coefficients $a$, $b$, $c$ de façon que le trinôme : $y = ax^2 + bx + c$ ait un maximum égal à 8 et que son graphe passe par les points A et B.

4° La droite : $y = m(x + 2)$ rencontre les courbes C et C′ au point A et aux points M (pour C) et M′ (pour C′). Calculer en fonction de $m$ les coordonnées de M, de M′ et du milieu de P de MM′. En déduire le lieu de P lorsque $m$ varie. Vérifier que ce lieu passe par A et par B.

# ÉTUDE DE LA FONCTION : $y = \dfrac{a}{x}$

**153. Théorème.** — ***La fonction*** $y = \dfrac{1}{x}$ ***est définie et continue sur les deux intervalles*** $]-\infty, 0[$ ***et*** $]0, +\infty[$. ***Elle est décroissante dans chacun de ces intervalles.***

On peut, en effet, calculer $y$ pour toutes les valeurs de $x$, sauf cependant pour $x = 0$. La fonction n'est pas définie pour cette valeur de $x$. Comme le produit $xy$ est égal à $+1$, $x$ et $y$ sont toujours de même signe.

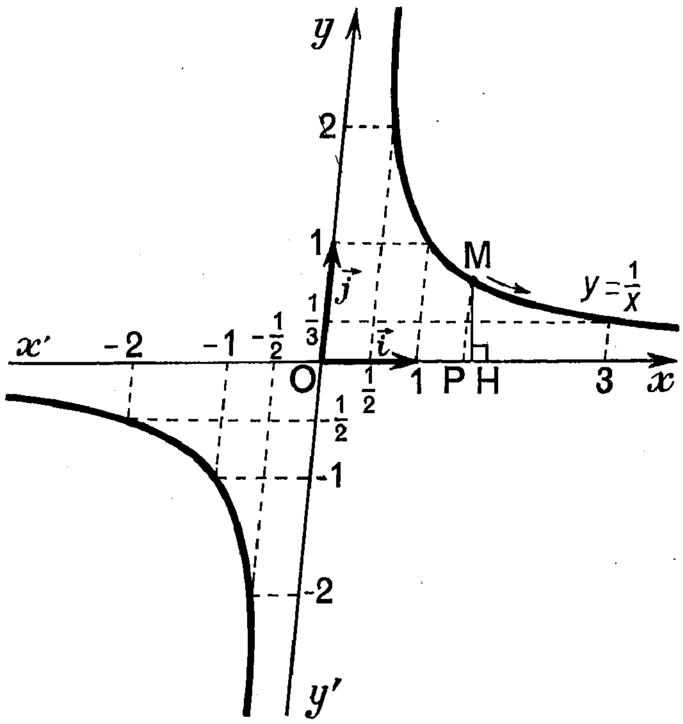


Fig. 70.

A deux valeurs de $x$ opposées, $\alpha$ et $-\alpha$, correspondent deux valeurs de $y$ opposées $\dfrac{1}{\alpha}$ et $-\dfrac{1}{\alpha}$. La fonction $y = \dfrac{1}{x}$ est une fonction impaire.

Sa dérivée $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ étant négative pour $x \neq 0$, la fonction $y = \dfrac{1}{x}$ est donc décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Lorsque $x \to \pm\infty$, $y \to 0$ car pour obtenir $|y| < \varepsilon$ il suffit de prendre $|x| < \dfrac{1}{\varepsilon}$. De même lorsque $x$ tend vers 0, $y$ tend vers $\pm\infty$. Pour obtenir $|y| > A$, il suffit de prendre $|x| < \dfrac{1}{A}$. On obtient :

| $x$ | $-\infty$ | | | 0 | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | | ‖ | | $-$ | |
| $y$ | 0 | ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ | ↘ | 0 |

***Lorsque*** $x$ ***croît de*** $-\infty$ ***à*** 0, ***puis de*** 0 ***à*** $+\infty$, $y$ ***décroît de*** 0 ***à*** $-\infty$, ***puis de*** $+\infty$ ***à*** 0.

Le double trait vertical, pour $x = 0$, indique que pour cette valeur de $x$ la fonction n'est pas définie.

Le plan étant rapporté à un repère cartésien quelconque $xOy$, on voit (fig. 70) que le graphe de la fonction $y = \frac{1}{x}$ se compose de deux branches distinctes situées dans les régions I ($x$ et $y$ positifs) et III ($x$ et $y$ négatifs).

Ces deux branches sont symétriques par rapport à l'origine O, car la fonction est impaire et admettent toutes deux pour asymptotes les axes $x'x$ et $y'y$ (nº 132). La courbe obtenue est appelée *hyperbole.*

**154. Étude de la fonction :** $y = \frac{a}{x}$. — La fonction $y = \frac{a}{x} = a \cdot \frac{1}{x}$ est une fonction impaire définie et continue pour toute valeur de $x$ différente de 0.

Sa dérivée $y' = -\frac{a}{x^2}$ étant du signe de $-a$, on voit que :

***La fonction*** $y = \frac{a}{x}$ ***est définie et continue sur les intervalles*** $]-\infty, 0[$ ***et*** $]0, +\infty[$. ***Dans chacun de ces intervalles elle est décroissante pour*** $a$ ***positif, croissante pour*** $a$ ***négatif.***

D'autre part lorsque $|x| \to \infty$, $y \to 0$ et lorsque $x \to 0$, $|y| \to \infty$. On obtient :

**1^er^ Cas :** *a positif*

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $y$ | $0 \searrow -\infty$ | ‖ | $+\infty \searrow$ | $0$ |

**2^e^ Cas :** *a négatif*

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $y$ | $0 \nearrow +\infty$ | ‖ | $-\infty \nearrow$ | $0$ |

1º **a positif.** — ***Lorsque*** $x$ ***croît de*** $-\infty$ ***à*** $0$, ***puis de*** $0$ ***à*** $+\infty$, $y$ ***décroît de*** $0$ ***à*** $-\infty$, ***puis de*** $+\infty$ ***à*** $0$.

2º **a négatif.** — ***Lorsque*** $x$ ***croît de*** $-\infty$ ***à*** $0$, ***puis de*** $0$ ***à*** $+\infty$, $y$ ***croît de*** $0$ ***à*** $+\infty$, ***puis de*** $-\infty$ ***à*** $0$.

**155. Représentation graphique.** — Le plan étant rapporté à un repère cartésien quelconque $xOy$, la courbe $y = \frac{a}{x}$ se déduit de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ dans l'affinité d'axe $Ox$, de direction $Oy$ et de rapport $a$. *Cette courbe est une hyperbole* située dans les régions (I) et (III) si $a$ est positif (fig. 71), dans les régions (II) et (IV) si $a$ est négatif (fig. 72). Elle est d'autant plus éloignée des axes que $a$ est grand en valeur absolue.

Remarques. — 1º L'équation de la courbe s'écrit aussi : $xy = a$. Sous cette forme, on voit que $x$ et $y$ jouent des rôles identiques et on passe de l'hyperbole $xy = 1$ à l'hyperbole $xy = a$ par l'affinité d'axe $Oy$, de direction $Ox$ et de rapport $a$.

2º Si le repère $xOy$ est rectangulaire, *l'hyperbole* $xy = a$ *est dite équilatère.* Les hyperboles équilatères $xy = a$ et $xy = -a$ sont alors symétriques l'une l'autre par rapport à $Ox$ ou par rapport à $Oy$.

3° ***L'hyperbole** $xy = a$ **admet pour asymptotes les droites** $Ox$ **et** $Oy$.* — Cela résulte du n° 92 pour la courbe $y = \frac{a}{x}$. On vérifie (fig. 72) que lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la distance MH du point M $(x, y)$ à $Ox$, au plus égale à $MP = \left|\frac{a}{x}\right|$ tend vers 0. En intervertissant le rôle des axes $Ox$ et $Oy$ on voit de même que $Oy$ est une asymptote de la courbe.

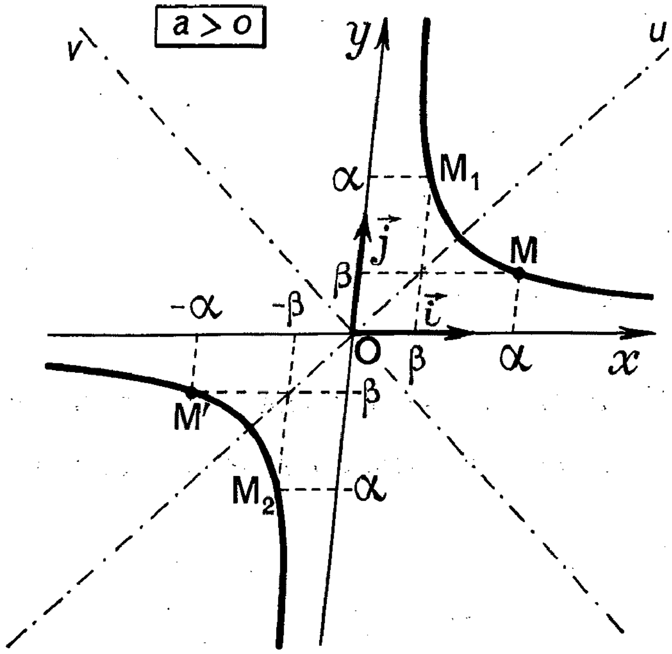



Fig. 71.

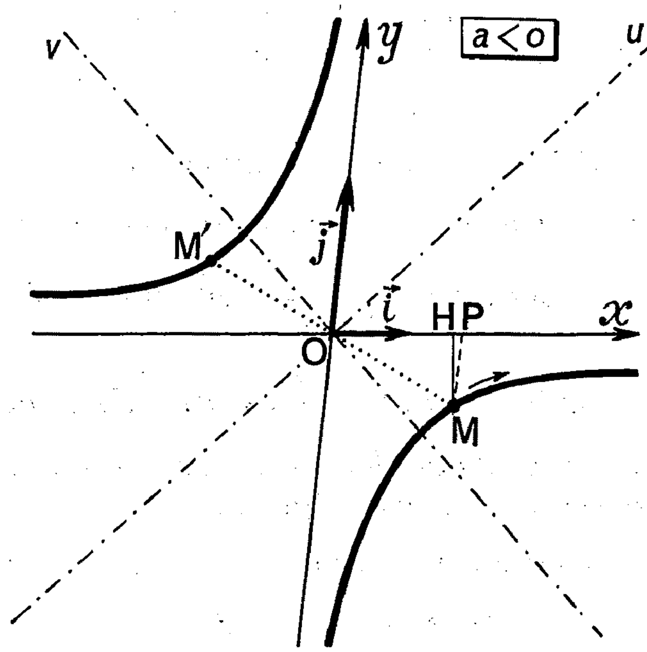



Fig. 72.

**156. Symétries de l'hyperbole** $xy = a$.

1° ***L'origine** O **est un centre de symétrie de la courbe.*** — Cela résulte du fait que la fonction $y = \frac{a}{x}$ est une fonction impaire (n° 67). Si le point M $\left(x = \alpha, y = \beta = \frac{a}{\alpha}\right)$ est un point de la courbe (fig. 71), il en est de même du point $M'(x = -\alpha, y = -\beta)$.

2° ***Les bissectrices des angles formés par les axes sont des axes de symétrie.***

Supposons d'abord (fig. 71) que le repère $xOy$ soit normé, c'est-à-dire que les vecteurs unitaires des axes $\vec{i}$ et $\vec{j}$ aient même module. Ils s'échangent dans la symétrie par rapport à la bissectrice $Ou$ des angles $xOy$ et $x'Oy'$ (*première bissectrice*). Cette symétrie transforme le vecteur $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ en un vecteur $\overrightarrow{OM_1} = \alpha\vec{j} + \beta\vec{i}$. Or le point $M_1$ $\left(x = \beta, y = \alpha = \frac{a}{\beta}\right)$ est un point de la courbe.

On voit de même que la symétrie par rapport à la bissectrice $Ov$ des angles $x'Oy$ et $xOy'$ (*deuxième bissectrice*) transforme $\vec{i}$ en $-\vec{j}$ et $\vec{j}$ en $-\vec{i}$. Elle transforme le vecteur $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ en $\overrightarrow{OM_2} = -(\alpha\vec{j} + \beta\vec{i})$ opposé à $\overrightarrow{OM_1}$. Le point $M_2$ $(-\beta, -\alpha)$ appartient à la courbe qui admet les deux bissectrices comme axes de symétrie.

Ces propriétés se conservent si on remplace le vecteur $\vec{j}$ par $\vec{J} = 3\vec{j}$ par exemple, car cela revient à multiplier par 3 les ordonnées de chacun des points de la courbe initiale.

Rapportée à l'ancien repère la nouvelle courbe a pour équation : $y = \frac{3a}{x}$. Elle est de la même forme que $y = \frac{a}{x}$ et admet les mêmes éléments de symétrie.

**157. Résumé. — *La courbe $y = \frac{a}{x}$ est une hyperbole admettant $x'x$ et $y'y$ pour asymptotes, l'origine O pour centre de symétrie et les bissectrices des angles formés par les asymptotes pour axes de symétrie.***

La forme de l'hyperbole $xy = a$ dépend de la valeur de l'*angle des asymptotes* à l'intérieur duquel se trouve une des branches de la courbe.

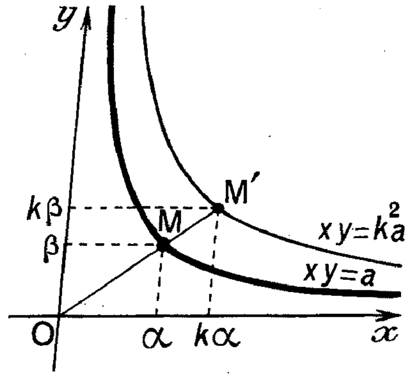


Fig. 73.

Remarques. — 1° Considérons (fig. 73), construites dans un même repère $xOy$, les deux hyperboles $xy = a$ et $xy = k^2a$. Si le point $M(\alpha, \beta)$ appartient à la première, son homologue $M'(k\alpha, k\beta)$ dans l'homothétie $(O, k)$ appartient à la seconde et inversement. Les deux courbes sont homologues dans cette homothétie. Donc :

*Deux hyperboles qui ont même angle des asymptotes sont semblables.*

2° L'hyperbole $xy = a$ partage le plan en trois régions. Celle qui contient le centre et les asymptotes constitue l'*extérieur de l'hyperbole.* Les deux autres, limitées chacune par une branche de la courbe, constituent l'*intérieur de l'hyperbole.*

**158. Tangente et normale à l'hyperbole $xy = a$.**

1° La tangente au point $M(x, y)$ à l'hyperbole $y = \frac{a}{x}$ a pour coefficient directeur $y' = -\frac{a}{x^2}$, soit, compte tenu de l'équation de la courbe : $y' = -\frac{y}{x}$. Dans tout repère cartésien l'équation de cette tangente s'écrit donc (n° 125) :

$$Y - y = -\frac{y}{x}(X - x) \iff \boxed{\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 2} \qquad (1)$$

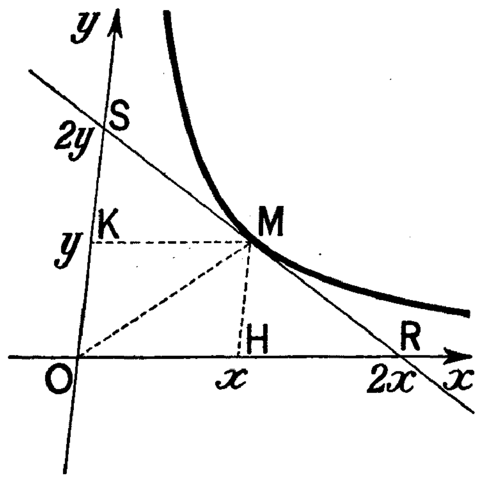


Fig. 74.

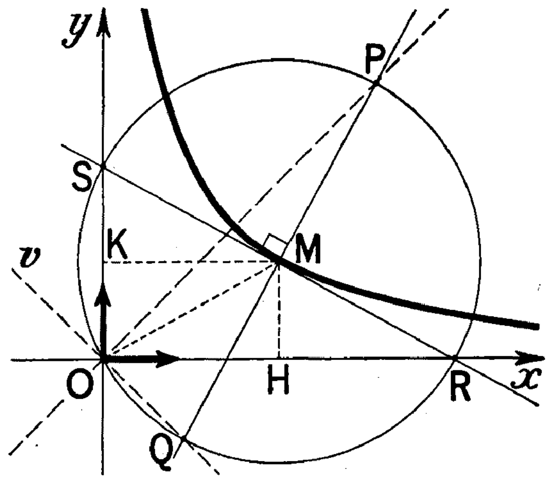


Fig. 75.

La tangente coupe les asymptotes en R $(2x; 0)$ et S $(0; 2y)$. Ces points sont les symétriques de O par rapport aux projections H et K du point M sur les asymptotes et M est le milieu de RS (fig. 74).

2° Dans un repère orthonormé l'hyperbole est équilatère (fig. 75) et le point M est le centre du cercle ORS. Ce cercle recoupe les axes de l'hyperbole, bissectrices de l'angle $xOy$, aux extrémités P et Q du diamètre perpendiculaire à RS. La droite PQ est donc la normale en M et son équation s'écrit puisque $y' = -\frac{y}{x}$ (n° 126) :

$$X - x - \frac{y}{x}(Y - y) = 0 \iff \boxed{Xx - Yy = x^2 - y^2.}$$

Donc P est le point $X = Y = x + y$ et Q le point $X = -Y = x - y$.

**159. Sécantes à une hyperbole.** — Les points d'intersection de l'hyperbole : $xy = a$ et de la droite D : $y = mx + p$ ont pour abscisses les racines de l'équation :

$$mx^2 + px - a = 0.$$

La droite D est tangente à la courbe pour : $p^2 + 4\,am = 0$, sécante en M′ et M″ pour $p^2 + 4\,am > 0$ (fig. 76).

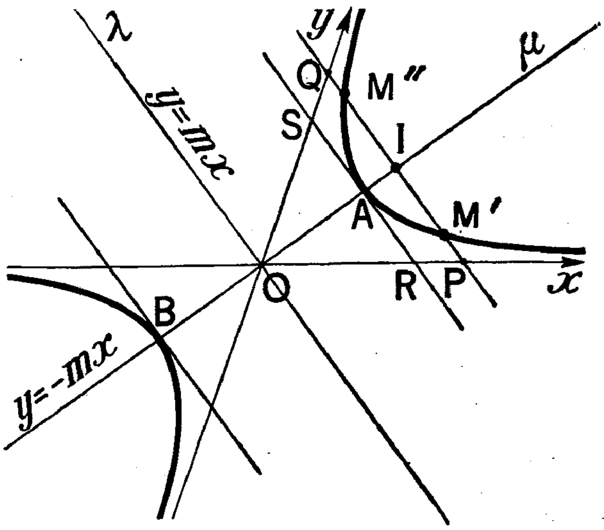



Fig. 76.

1° Le milieu I de M′M″ a pour coordonnées $x_I = -\frac{p}{2m}$ et $y_I = mx_I + p = \frac{p}{2}$.

Or, puisque la droite D coupe les asymptotes en $P\left(-\frac{p}{m}, 0\right)$ et $Q(0, p)$ on voit que I est aussi le milieu de PQ et que $\overline{PM'} = \overline{M''Q}$. On en déduit une construction (dite de la bande de papier) d'un point quelconque M″ de la courbe, connaissant les asymptotes et un point M′.

2° D'autre part $y_I = -mx_I$. Si la droite D varie en restant parallèle à la direction fixe $y = mx$, le lieu de I est la droite $y = -mx$, appelée *diamètre conjugué de la direction* $y = mx$. Comme inversement $y = mx$ est le diamètre de la direction $y = -mx$, on voit que deux diamètres conjugués de l'hyperbole forment avec les asymptotes un faisceau harmonique et que l'un d'eux passe par les points de contact A et B des tangentes parallèles à l'autre.

## FONCTION HOMOGRAPHIQUE : $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

**160. Étude directe de la fonction : $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$.**

La fraction rationnelle $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ est définie pour toute valeur de $x$ autre que la valeur $x = 1$ qui annule le dénominateur (pôle de la fraction rationnelle). Elle est donc définie et continue sur les intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Elle admet pour dérivée : $y' = \dfrac{2(x - 1) - (2x + 1)}{(x - 1)^2} \implies y' = -\dfrac{3}{(x - 1)^2}$

Cette dérivée étant négative sur chacun des intervalles précédents, la fonction est donc décroissante.

Pour $x \neq 0$, on peut écrire : $y = \dfrac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$. Lorsque $x$ devient infini on voit que $y$ tend vers $+2$. Comme $y - 2 = \dfrac{3}{x-1} \Longrightarrow y = 2 + \dfrac{3}{x-1}$, la fonction tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+1$ par valeurs supérieures, vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+1$ par valeurs inférieures. D'où le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $y$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ |

*Lorsque $x$ varie de $-\infty$ à $+1$, puis de $+1$ à $+\infty$, la fonction décroît de $+2$ à $-\infty$, puis de $+\infty$ à $+2$.*

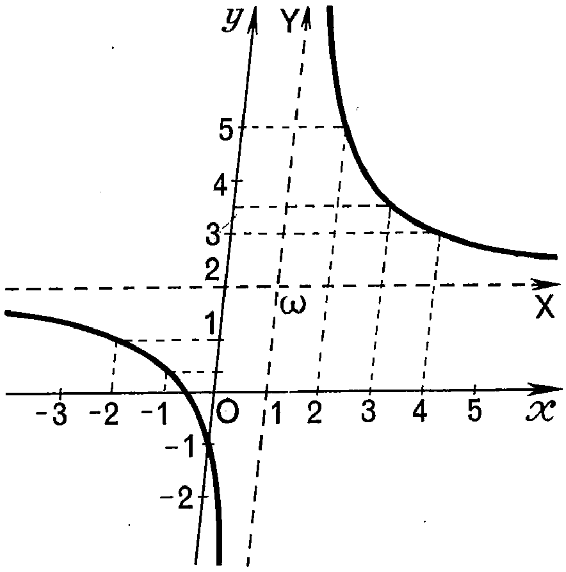



Fig. 77.

GRAPHE. — Dans un plan rapporté au repère cartésien quelconque $xOy$ (fig. 77), la courbe représentative se compose de deux branches admettant toutes deux pour asymptotes les droites $y = 2$ et $x = 1$ (n° 132).

Soit $\omega\,(+1\,;\,+2)$, le point de rencontre de ces asymptotes. Prenons comme nouveau repère, le repère $X\omega Y$ se déduisant de $xOy$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$. Les formules de changement d'axes (n° 90) donnent : $x = 1 + X$ et $y = 2 + Y$.

L'équation de la courbe : $y - 2 = \dfrac{3}{x-1}$ devient : $Y = \dfrac{3}{X}$. Donc (n° 157) :

***La courbe $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ est une hyperbole admettant pour asymptotes les droites $x = 1$ et $y = 2$.***

Elle admet le point $\omega\,(1\,;\,2)$ pour centre de symétrie et pour axes de symétrie les bissectrices des angles de ses asymptotes (n° 156). Elle coupe l'axe $Ox$ au point $x = -\dfrac{1}{2}$, l'axe $Oy$ au point : $y = -1$.

## 161. Étude directe de la fonction : $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

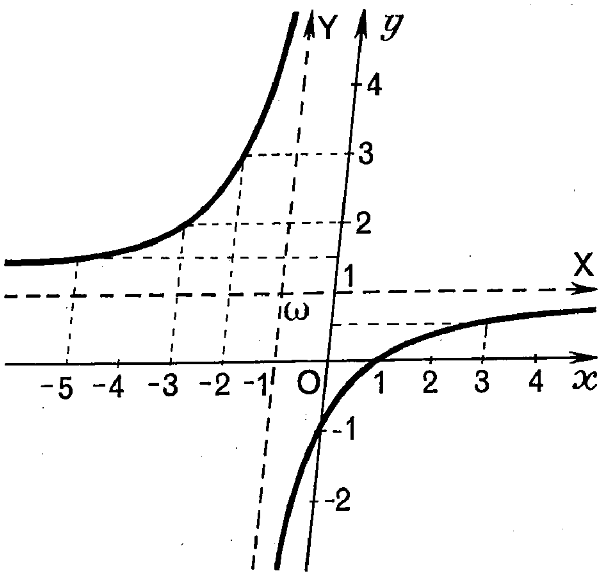



Fig. 78.

Cette fonction est définie sauf pour la valeur $x = -1$ qui annule son dénominateur. Elle est donc définie et continue sur chacun des intervalles

$$]-\infty\,;\,-1[\text{ et }]-1\,;\,+\infty[$$

Elle admet pour dérivée :

$$y' = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} \Longrightarrow y' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Cette dérivée étant positive pour $x \neq -1$, la fonction est donc croissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

Pour $x \neq 0$, on peut écrire $y = \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$. Lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, on voit que $y$ tend vers $+1$.

Comme : $y - 1 = -\dfrac{2}{x+1} \implies y = 1 - \dfrac{2}{x+1}$, on voit que $y$ tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ suivant que $x$ tend vers $-1$ par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures. D'où le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $y$ | $1$ | $\nearrow +\infty$ | \|\| | $-\infty \nearrow$ | $1$ |

***Lorsque $x$ croît de $-\infty$ à $-1$, puis de $-1$ à $\infty$, $y$ croît de $+1$ à $+\infty$, puis de $-\infty$ à $+1$.***

GRAPHE. — Rapportée au repère cartésien $xOy$, la courbe représentative de la fonction $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ (fig. 78) se compose de deux branches admettant toutes deux pour asymptotes les droites $x = -1$ et $y = +1$ (nº 132).

Soit $\omega\,(-1\,;\,+1)$ le point de rencontre de ces asymptotes et $X\omega Y$ le repère cartésien qui se déduit de $xOy$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$. Les formules de changement de repère : $x = -1 + X$ et $y = 1 + Y$ montrent que :

$$y - 1 = -\frac{2}{x+1} \iff Y = -\frac{2}{X}$$

***La courbe $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ est donc une hyperbole admettant pour asymptotes les droites $x = -1$ et $y = 1$.***

Elle admet pour centre de symétrie le point $\omega\,(-1\,;\,+1)$ et pour axes de symétrie les bissectrices des angles de ses asymptotes (nº 156). Elle coupe l'axe $Ox$ au point $x = 1$, l'axe $Oy$ au point $y = -1$.

### 162. Cas général : $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Cette fonction est le quotient de deux binômes du 1er degré $ax + b$ et $cx + d$. Nous supposerons donc $c \neq 0$ sinon $y$ se réduirait au binôme $y = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$.

La fonction $y$ peut se calculer pour toutes les valeurs de $x$ autres que la valeur $x = -\dfrac{d}{c}$ qui annule le dénominateur (pôle de la fonction). Cette fonction est donc définie sur chacun des intervalles : $]-\infty\,;\,-\dfrac{d}{c}[$ et $]-\dfrac{d}{c}\,;\,+\infty[$.

Sa dérivée s'écrit :

$$y' = \frac{a\,(cx+d) - c\,(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

Dans chacun des intervalles, où la fonction est définie, sa dérivée est donc du signe de l'expression $ad - bc$. Nous supposerons cette expression différente de zéro car :

$$ad - bc = 0 \implies b = \frac{ad}{c} \implies y = \frac{ax + \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a\,(cx+d)}{c\,(cx+d)} \implies y = \frac{a}{c}.$$

Lorsque $x$ tend vers $-\dfrac{d}{c}$ le dénominateur s'annule et le numérateur tend vers $-\dfrac{ad}{c} + b = -\dfrac{ad-bc}{c} \neq 0$. Par suite $y$ devient infini (nº 77).

Pour $x \neq 0$, on peut écrire : $y = \dfrac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}}$. Lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, les rapports $\frac{b}{x}$ et $\frac{d}{x}$ tendent vers 0 et $y$ tend vers $\frac{a}{c}$ (nº 77). On peut donc établir les tableaux de variation :

**1er Cas :** $ad - bc > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{d}{c}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $y$ | $\frac{a}{c}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{a}{c}$ |

**2e Cas :** $ad - bc < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{d}{c}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $y$ | $\frac{a}{c}$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{a}{c}$ |

***Dans chacun des intervalles où elle est définie la fonction*** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ***est croissante lorsque*** $ad - bc$ ***est positif, décroissante lorsque*** $ad - bc$ ***est négatif.***

Rappelons que si $ad - bc = 0$ la fonction est, pour $x \neq -\frac{d}{c}$, constante et égale à $\frac{a}{c}$.

**163. Représentation graphique.** — Supposons tracée par points, dans un repère cartésien $xOy$, la courbe $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ qui (nº 132) admet pour asymptotes les droites $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ se coupant au point $\omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$. Or :

$$y - \frac{a}{c} = \frac{c\,(ax+b) - a\,(cx+d)}{c\,(cx+d)} = \frac{bc - ad}{c\,(cx+d)} \Longrightarrow \boxed{y = \frac{a}{c} + \frac{k}{x + \frac{d}{c}}} \qquad (1)$$

en posant $k = \dfrac{bc - ad}{c^2}$.

Soit $X\omega Y$, le repère se déduisant de $xOy$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$. Les formules de changement de repère : $x = -\frac{d}{c} + X$ et $y = \frac{a}{c} + Y$, montrent, d'après la formule (1), que :

$$\boxed{Y = \frac{k}{X}} \qquad (2)$$

***La courbe*** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ***est une hyperbole admettant pour asymptotes les droites*** $x = -\frac{d}{c}$ ***et*** $y = \frac{a}{c}$.

La courbe présente la disposition de la figure 79 ou de la figure 80 suivant que $ad - bc$ est positif ou négatif.

Le point $\omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe et les bissectrices des angles formés par les asymptotes en sont les axes de symétrie. L'hyperbole coupe O$y$ au point $y=\frac{b}{d}$ et O$x$ au point $x=-\frac{b}{a}$.

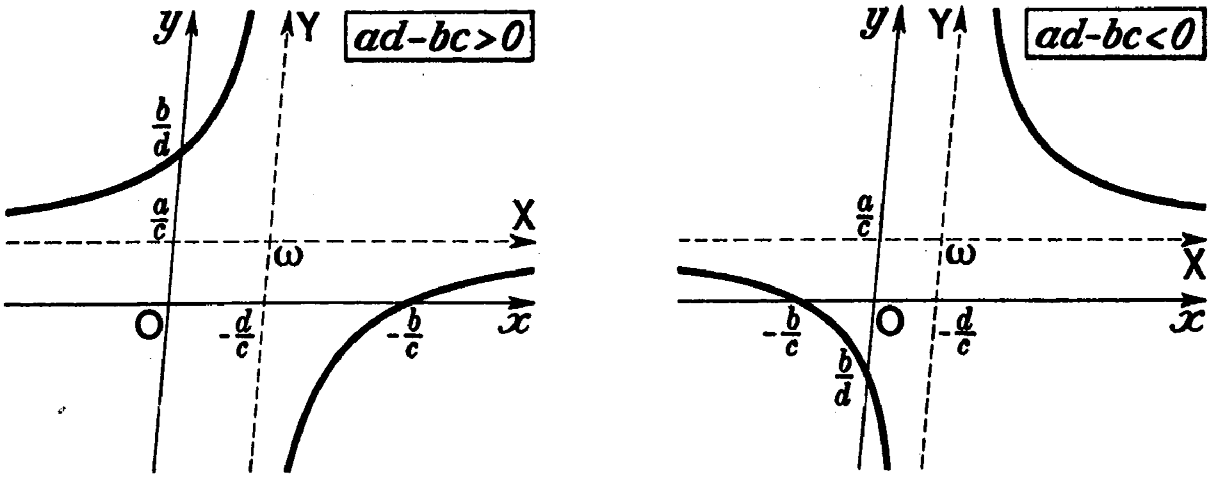



Fig. 79. Fig. 80.

L'équation (2) peut s'écrire XY $=k$. La courbe est d'autant plus éloignée de ses asymptotes que $k$ est grand en valeur absolue. Si $k$ tend vers 0, la courbe vient se confondre avec ses asymptotes.

*La forme de la courbe dépend de l'angle des asymptotes*, c'est dire de l'angle $x$O$y$ si $k>0$, de son supplément si $k<0$. *Si l'angle $x$O$y$ est droit l'hyperbole est équilatère.*

## 164. Cas particuliers.

1° $a=0$ : $y=\frac{b}{cx+d}$. L'axe $x'x$ est une des asymptotes (fig. 81).

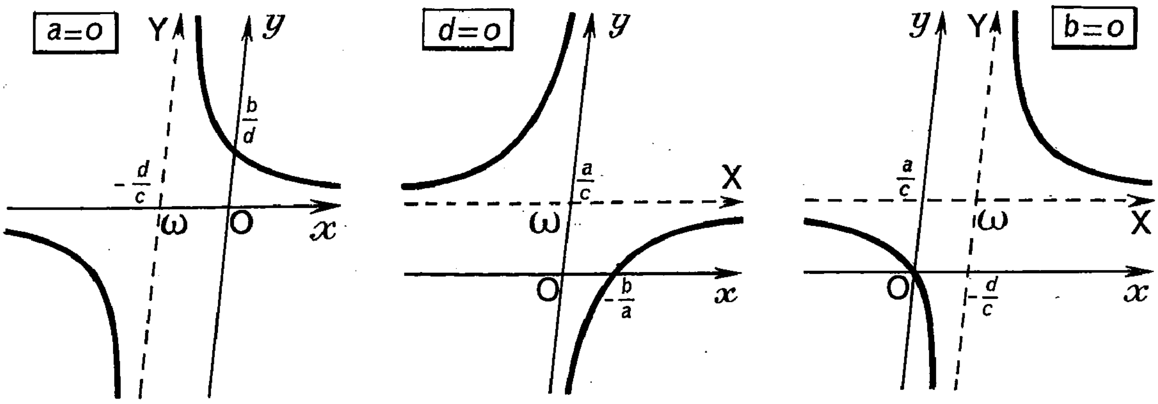



Fig. 81. Fig. 82. Fig. 83.

2° $d=0$ : $y=\frac{ax+b}{cx}$. L'axe $y'y$ est une des asymptotes (fig. 82).

3° $b=0$ : $y=\frac{ax}{cx+d}$. La courbe passe par l'origine (fig. 83).

## APPLICATIONS

**165. Relation homographique :** $Axy + Bx + Cy + D = 0$ (1)

Cette relation est du 1er degré en $x$ et du 1er degré en $y$. A chaque valeur de $x$ correspond, en général, une valeur pour $y$ et réciproquement.

1er CAS : $A = 0$. La relation (1) est du 1er degré en $x$ et $y$ et est représentée graphiquement par une droite (nº 94).

2e CAS : $A \neq 0$. La relation (1) s'écrit : $y(Ax + C) + Bx + D = 0$.

Soit : $y = -\dfrac{Bx + D}{Ax + C}$.

Cette relation est de la forme $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ appelée fonction homographique et représentée par une hyperbole si $BC - AD \neq 0$.

Notons que la relation (1) peut alors s'écrire, en divisant par A, sous la forme :

$$xy - \beta x - \alpha y + \gamma = 0 \qquad (2)$$

ou

$$(x - \alpha)(y - \beta) = k \quad \text{en posant :} \quad k = \alpha\beta - \gamma.$$

On en déduit : $y - \beta = \dfrac{k}{x - \alpha}$ ou $y = \beta + \dfrac{k}{x - \alpha}$, ce qui montre que l'hyperbole admet pour centre le point $\omega(\alpha, \beta)$ et pour asymptotes les droites $x = \alpha$ et $y = \beta$.

Pour $\alpha = \beta$, la relation (2) qui s'écrit : $xy - \alpha(x + y) + \gamma = 0$, est symétrique en $x$ et $y$. Elle est dite *involutive*.

**166. Intersection d'une hyperbole et d'une droite.**

Supposons (fig. 84), tracées dans un même repère la droite (D) : $y = mx + p$ et l'hyperbole (H) : $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. L'équation aux abscisses des points d'intersection s'écrit (nº 89) :

$ax + b = (cx + d)(mx + p)$ soit :

$$mcx^2 + (md + pc - a)x + pd - b = 0. \qquad (1)$$

Si $m \neq 0$, l'équation est du 2e degré et :

$\Delta = (md + pc - a)^2 - 4mc(pd - b)$ :

1º $\Delta > 0$. La droite (D) coupe (H) en deux points distincts (sécante).

2º $\Delta = 0$. La droite (D) coupe (H) en deux points confondus (tangente).

3º $\Delta < 0$. La droite (D) est extérieure à (H).

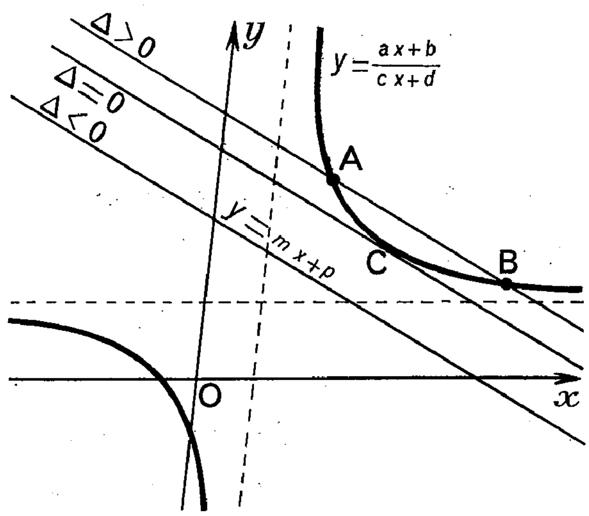



Fig. 84.

Notons qu'une parallèle à une asymptote coupe une hyperbole en un point unique.

**167. Intersection de deux hyperboles.** — Dans un même repère, considérons les hyperboles $(H_1)$ et $(H_2)$ (fig. 85).

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{a'x+b'}{c'x+d'} \quad (2)$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection s'écrit :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a'x+b'}{c'x+d'} \quad (3)$$

En général, nous sommes conduits à l'équation du second degré :

$$(ac' - a'c)\ x^2 + (ad' - a'd + bc' - b'c)\,x + bd' - b'd = 0 \quad (4)$$

Les courbes $(H_1)$ et $(H_2)$ ont deux points, un seul point ou zéro point commun suivant que le discriminant de cette équation est positif, nul ou négatif.

Écrivons les équations (1) et (2) sous la forme entière :

$$cxy - ax + dy - b = 0; \quad c'xy - a'x + d'y - b' = 0.$$

Éliminons $xy$ en multipliant la première par $-c'$ et la seconde par $c$. Nous obtenons :

$$(ac' - a'c)\ x + (cd' - c'd)\,y + bc' - b'c = 0 \quad (5)$$

C'est l'équation d'une droite (D) passant par les points d'intersection A et B lorsqu'ils existent (ou l'équation de la tangente au point de contact lorsqu'ils sont confondus), car toute solution du système (1) (2) vérifie l'équation de cette droite.

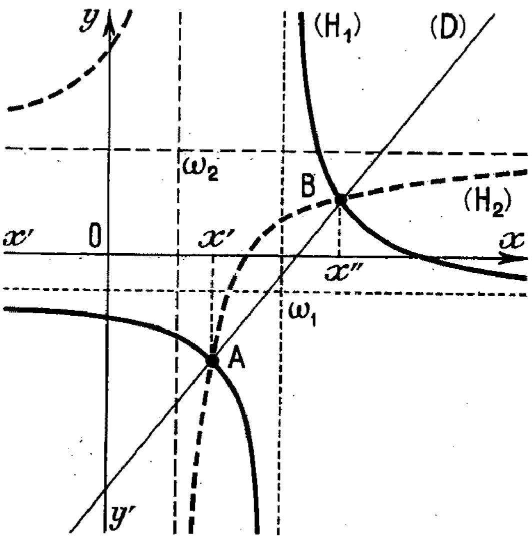



Fig. 85.

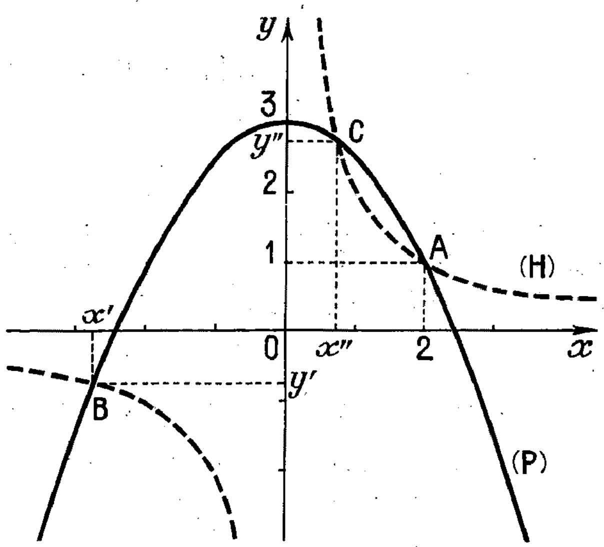



Fig. 86.

**168. Parabole et hyperbole.** — L'équation aux abscisses des points d'intersection de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ et de l'hyperbole $y = \dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}$ s'écrit :

$$ax^2 + bx + c = \frac{a'x+b'}{c'x+d'},$$

et conduit à une équation du 3^e^ degré de la forme : $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$.

Si on connaît une racine $x = \alpha$ de cette équation, on peut alors l'écrire sous la forme : $(x - \alpha)\,(A'x^2 + B'x + C') = 0$ et achever sa résolution.

EXEMPLE : $y = -\dfrac{x^2}{2} + 3$ et $y = \dfrac{2}{x}$.

La construction des deux courbes (fig. 86) fait apparaître le point commun A (2; 1). On vérifie que l'équation aux abscisses :

$$\frac{2}{x} = -\frac{x^2}{2} + 3 \quad \text{ou} \quad x^3 - 6x + 4 = 0. \tag{1}$$

admet 2 pour racine : $2^3 - 6.2 + 4 = 0$ (2)

et par différence entre (1) et (2) : $(x^3 - 2^3) - 6(x-2) = 0$

Soit : $(x-2)[(x^2 + 2x + 4) - 6] = 0$ ou $(x-2)(x^2 + 2x - 2) = 0.$ (3)

D'ailleurs : $(x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$ se réduit à :

$$x^3 - 6x + 4 \text{ pour } a = 1,\ b = 2 \text{ et } c = -2.$$

L'équation $x^2 + 2x - 2 = 0$ admet pour racines $-1 \pm \sqrt{3}$ ce qui donne deux autres points communs B $(-1-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3})$ et C $(-1+\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$.

**169. Détermination d'une hyperbole.** — L'équation : $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (1) dépend de quatre coefficients, mais comme on peut remplacer $a$, $b$, $c$ et $d$ par des nombres qui leur soient proportionnels, on peut toujours supposer (puisque $c \neq 0$) que $c = 1$. L'hyperbole dépend donc de trois paramètres. On peut en disposer pour imposer à la courbe des conditions fixées à l'avance.

Il est avantageux de prendre l'équation sous forme entière (n° 165) :

$$xy - \alpha y - \beta x + \gamma = 0 \quad (2) \quad \text{ou} \quad (x-\alpha)(y-\beta) = k \tag{3}$$

Dans ce cas $\alpha$ et $\beta$ sont les coordonnées du centre de la courbe, point de rencontre des asymptotes : $x = \alpha$ et $y = \beta$.

EXEMPLE. — *Déterminer l'équation de l'hyperbole passant par les points* A $(+4; +1)$, B $(-2, +4)$ *et asymptote à la droite* $y = 3$.

En utilisant l'équation (2) on obtient les trois relations :

$$4 - \alpha - 4\beta + \gamma = 0; \quad -8 - 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 3.$$

Soit en résolvant : $\alpha = 2$, $\beta = 3$ et $\gamma = 10$.

L'hyperbole a pour équation :

$$xy - 2y - 3x + 10 = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{3x - 10}{x - 2}.$$

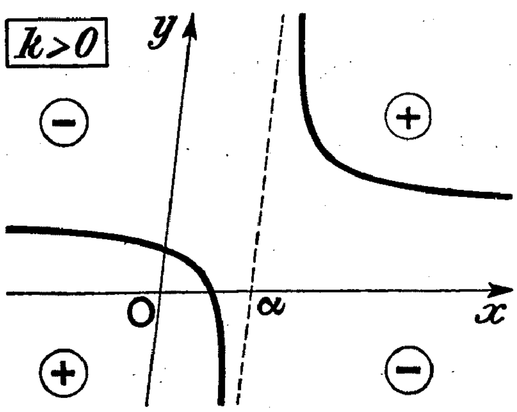



Fig. 87.

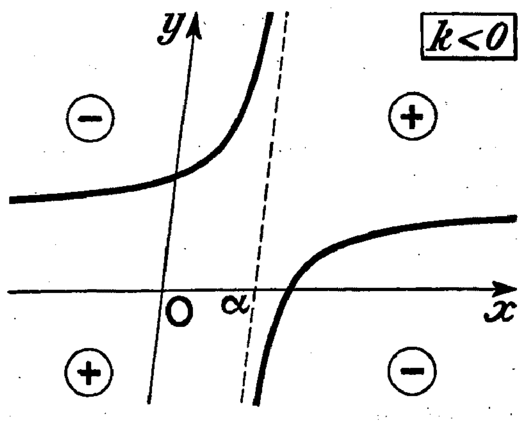



Fig. 88.

**170. Signe de l'expression :** $f(x, y) = xy - \alpha y - \beta x + \gamma$.

Posons $\alpha\beta - \gamma = k$ et écrivons pour $x \neq \alpha$ :

$$f(x, y) = (x-\alpha)(y-\beta) - k$$

soit

$$f(x, y) = (x-\alpha)\left[y - \left(\beta + \frac{k}{x-\alpha}\right)\right].$$

Le facteur $x - \alpha$ est positif pour $x > \alpha$, négatif pour $x < \alpha$. Dans chacune de ces régions le crochet est positif au-dessus de la courbe $f(x, y) = 0$, négatif au-dessous. On en déduit le signe de $f(x, y)$ pour $k > 0$ (fig. 87) et pour $k < 0$ (fig. 88). On vérifie que :

***L'expression $f(x, y) = (x - \alpha)(y - \beta) - k$ est du signe de $k$ à l'intérieur de l'hyperbole $f(x, y) = 0$, du signe opposé à l'extérieur.***

On pourra ainsi résoudre graphiquement toute inéquation de la forme :

$$Axy + Bx + Cy + D > 0.$$

## EXERCICES

— Résoudre graphiquement les systèmes suivants, et vérifier par le calcul :

**348.** $\begin{cases} 2x - 3y = 6. \\ xy = 12 \end{cases}$

**349.** $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ xy = 6. \end{cases}$

**350.** $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ xy = 16. \end{cases}$

**351.** $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ xy = 3. \end{cases}$

**352.** On considère la droite $(\Delta) : y = \beta + m(x - \alpha)$.

1° Montrer que $(\Delta)$ passe par le point P $(\alpha, \beta)$. Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B de $(\Delta)$ avec O$x$ et O$y$, en fonction de $\alpha$, $\beta$ et $m$.

2° Calculer les coordonnées du point M de $(\Delta)$ symétrique de P par rapport au milieu de AB. Construire dans un repère rectangulaire, lorsque $m$ varie, le lieu $(\Gamma)$ du point M (on prendra $\alpha = 3$ et $\beta = 2$).

3° Pour quelle valeur de $m$, le point M est-il en P, et quelles sont alors les valeurs de $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ ? En déduire une construction de la tangente en un point quelconque de $(\Gamma)$.

**353.** Soient $D_1$ et $D_2$ deux droites variables d'équations :

$$y - 3 + m(x - 2) = 0 \quad \text{et} \quad y + 3 - m(x + 2) = 0.$$

1° Montrer que $D_1$ passe par un point fixe A et $D_2$ par un point fixe B.

2° Trouver les coordonnées du point d'intersection M de $D_1$ et $D_2$. Équation et construction du lieu $(\Gamma)$ de M.

3° Pour quelles valeurs de $m$ le point M est-il en A ou en B ? En déduire les équations des tangentes en A et en B à $(\Gamma)$.

**354.** On considère en orthonormées l'hyperbole (H) : $y = \dfrac{3}{x}$ et la droite $(\Delta)$ variable :

$$y = -3x + 2m.$$

1° Pour quelles valeurs de $m$ la droite coupe-t-elle la courbe en deux points A et B distincts ou confondus ? Calculer les coordonnées de A et B pour $m = 5$.

2° Soient C et D les points d'intersection de $(\Delta)$ avec les axes O$x$ et O$y$. Montrer que les segments AB et CD ont même milieu I en calculant les coordonnées X et Y de ce point.

3° Trouver le lieu du point I, déterminer l'équation des tangentes à la courbe (H) aux points qui limitent ce lieu.

**355.** On considère la courbe : $y = \dfrac{a}{x}$ et la droite $(\Delta) : y = mx + p$.

1° Établir la condition pour que la droite coupe la courbe en deux points distincts ou confondus.

2° Calculer $m$ et $p$ pour que la droite $(\Delta)$ soit tangente à la courbe au point M d'abscisse $x = \alpha$. Faire la figure en supposant $a = 6$ et $\alpha = 3$.

3° Soient H et K les projections de M sur les axes O$x$ et O$y$ et A et B les intersections de la tangente en M avec les axes. Montrer que H et K sont les milieux de OA et OB. En déduire une construction géométrique de cette tangente.

**356.** Soit en orthonormées l'hyperbole (H) d'équation $y = \frac{6}{x}$ et les points A, B et C de cette courbe d'abscisses respectives 1, $-2$ et 3.

1° Établir les équations de la droite BC et de la droite AA′ perpendiculaire en A′ à BC.

2° La droite AA′ recoupe (H) en D. Calculer ses coordonnées. Comparer les directions de AB et CD, puis de AC et BD.

3° Généraliser en prenant pour abscisses de A, B et C trois nombres quelconques $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. A quelle condition D est-il en A ? Trouver la valeur de l'angle BAC dans ce cas et comparer la direction de BC à celle de la tangente en A.

**357.** 1° Étudier la fonction $y = \frac{1}{2x}$ et construire sa courbe représentative $(\Gamma)$ en orthonormées. Préciser ses symétries.

2° On coupe $(\Gamma)$ par des droites (D) d'équation $y = x + h$. Propriété des droites (D) quand $h$ varie. Calculer les coordonnées des points A et B d'intersection de $(\Gamma)$ et (D) en fonction de $h$.

3° On marque sur $(\Gamma)$ le point C d'abscisse $x = \frac{1}{2}$. Déterminer $h$ pour que ABC soit rectangle en A. Que sont alors les points B et C ? (A est d'abscisse positive.)

**358.** 1° Construire, sur le même graphique, les courbes (P) et (H) représentatives des fonctions :

$$\text{(P)} \quad y = 3x^2, \qquad \text{(H)} \quad y = \frac{3}{x}.$$

(P) et (H) se coupent en un point A. Quelles sont les coordonnées de A ?

2° A quelle condition la droite (D), d'équation $y = 2x + a$, rencontre-t-elle (P) en deux points M′ et M″ ? On suppose cette condition réalisée; trouver les coordonnées du milieu I de M′M″ et montrer que I se déplace sur une parallèle à O$y$ quand (D) varie.

3° Montrer que (D) rencontre toujours (H) en deux points N′ et N″, et que le milieu K de N′N″ se déplace sur une droite passant par O.

— Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

**359.** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. **360.** $y = \dfrac{2x}{x-2}$. **361.** $y = \dfrac{x+3}{x}$.

**362.** $y = \dfrac{2x+3}{4x-5}$. **363.** $y = \dfrac{2x-1}{3x+4}$. **364.** $y = \dfrac{1-2x}{3x-2}$.

— Résoudre graphiquem ıt et vérifier par le calcul les systèmes suivants :

**365.** $\begin{cases} y = \dfrac{x-6}{x-1} \\ y = 5x - 14. \end{cases}$ **366.** $\begin{cases} y = \dfrac{2(1-x)}{x-3} \\ 3x - 2y = 2. \end{cases}$

**367.** $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ xy = 2x + 3y + 2. \end{cases}$ **368.** $\begin{cases} 4x - 5y = 14 \\ xy + y = 14. \end{cases}$

**369.** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2xy - 2x + 3y = 7. \end{cases}$ **370.** $\begin{cases} 2xy - 5y + 4 = 0 \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

**371.** $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x} \\ y = \dfrac{6 - 2x}{x - 1}. \end{cases}$ **372.** $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{x + 4} \\ y = \dfrac{6 - x}{x - 2}. \end{cases}$ **373.** $\begin{cases} y = \dfrac{x - 3}{x + 1} \\ y = \dfrac{x + 2}{3(x + 1)}. \end{cases}$

**374.** $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x - 1} \\ y = -x^2 + 5x - 2. \end{cases}$ **375.** $\begin{cases} y = -\dfrac{4}{x} \\ y = \dfrac{x^2}{2} - 2x - \dfrac{5}{2}. \end{cases}$ **376.** $\begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{2}{x}. \end{cases}$

**377.** Déterminer l'hyperbole : $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ :

1° Passant par les points : A $(-3; -1)$, B$(0; 5)$ et C $(3; 2)$.

2° Passant par le point : A $(2; 1)$ et admettant pour centre le point $\omega$ $(-1; +3)$.

3° Asymptote à la droite $x = -2$ et tangente à la droite $y = \dfrac{3x}{2} + 1$ au point A $(0, 1)$.

**378.** Démontrer que l'hyperbole : $y = \dfrac{mx - 1}{x - m}$ passe par deux points fixes A et B, et montrer que lorsque $m$ varie, le centre de l'hyperbole décrit une droite, perpendiculaire à AB si le repère $xOy$ est, orthonormé.

**379.** On donne les fonctions : $y = ax^2 + bx + 3$ et $y = \dfrac{Ax + 3}{x + D}$.

1° Calculer les valeurs de $a$ et $b$, A et D de manière que chacune des courbes représentatives $C_1$ et $C_2$ passe par les points $M_1$ $(-2; -1)$ et $M_2$ $(-3; 0)$ dans un système d'axes de coordonnées rectangulaires.

2° Construire les courbes représentatives des fonctions obtenues en remplaçant $a$ et $b$ d'une part, A et D d'autre part par les valeurs trouvées.

3° Calculer les coordonnées du troisième point d'intersection des deux courbes.

**380.** On donne la fonction $y = \dfrac{x(m + 1) + m + 3}{mx + 2}$ où $m$ est un paramètre différent de zéro.

On désigne par (H) la courbe représentative.

1° Tracer la courbe (H) relative à $m = -1$ dans un repère orthonormé.

2° Trouver le sens des variations de $y$ suivant les valeurs de $m$.

3° Trouver la relation indépendante de $m$ liant les coordonnées du point de rencontre des asymptotes de (H). En déduire le lieu de ce point et construire ce lieu.

**381.** Soit la relation : $(m + 1)\,xy - my - x + 1 = 0,$ (1)
où $m$ désigne une constante.

1° Montrer qu'elle définit une fonction croissante $y$ de la variable $x$.

2° Peut-on déterminer $m$ pour que cette relation soit vérifiée par des valeurs numériques égales de $x$ et de $y$ ?

3° Dans le cas où la relation (1) est vérifiée pour $x = y = \alpha$ et $x = y = \beta$ $(\alpha < \beta)$, on pose :

$$X = \frac{x - \alpha}{x - \beta}, \qquad Y = \frac{y - \alpha}{y - \beta}.$$

Montrer, sans préciser la forme de la constante $k$, que Y est lié à X par une relation de la forme $Y = kX$.

4° Donner la valeur numérique de $k$ lorsque $m = -\dfrac{3}{2}$.

**382.** On considère la fonction $y = \dfrac{3\,mx}{m - 3\,x}$, où $m$ est un paramètre fixe, mais qui peut prendre une valeur quelconque entre $-\infty$ et $+\infty$.

1° Pour une valeur donnée de $m$ quelconque, construire le graphe de cette fonction.

2° Si $m$ varie, quel est le lieu géométrique du point de rencontre des asymptotes ?

3° Déterminer $m$ pour que la courbe passe par un point L donné de coordonnées $(a, b)$. Construire la courbe pour $a = 2$ et $b = -6$.

**383.** On considère la fonction $y = f(x) = \dfrac{4 - x}{2\,x - 4}$.

1° Trouver par une étude directe les valeurs de $x$ pour lesquelles $y$ reste compris entre $-1$ et $+1$.

2° Tracer en orthonormées la courbe $y = f(x)$ et vérifier sur le graphe les résultats de l'étude précédente.

3° Vérifier que le produit des valeurs que prend $f(x)$ pour deux valeurs quelconques de $x$ ayant pour somme 6 est constant.

4° Plus généralement, montrer que si : $F(x) = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$, $a$ et $a'$ étant tous deux différents de zéro, de même que $ab' - ba'$, il existe un nombre $x_0$ tel que le produit : $F(x_0 + h)\,F(x_0 - h)$ admet une valeur P indépendante de $h$.

**384.** 1° Tracer, dans un repère rectangulaire $xOy$ le graphe (L) de la fonction : $y = 2\,(x + 1)$ et le graphe (C) de la fonction : $y = \dfrac{5}{2\,(x + 1)}$. Déterminer les points communs à ces deux graphes.

2° Par un point M de (L) on mène la parallèle MA à O$y$, coupant (C) en A, et la parallèle MB à O$x$, coupant (C) en B. Soit P le quatrième sommet du rectangle construit sur MA et MB. Démontrer que le point P appartient à la ligne (L). Lieu géométrique du milieu D de AB quand M parcourt (L).

3° Démontrer, dans les mêmes conditions, que les points M et P restent conjugués harmoniques de deux points fixes.

**385.** Soient deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Construire sur un même graphique les courbes représentatives H et P des fonctions $y = \dfrac{1}{2\,x}$ et $y = 4\,x^2$, et déterminer les coordonnées du point A commun à ces deux courbes, ainsi que les coordonnées du deuxième point de rencontre B de la droite OA avec la courbe (H). Donner l'équation de la droite OA.

2° On joint le point A au point C d'abscisse $x = 1$, d'ordonnée $y = 0$. Montrer que CA est tangent en A à la courbe H et déterminer les coordonnées du second point de rencontre de CA avec la courbe (P).

3° On considère une droite $\Delta$ parallèle à CA, coupant l'axe des $y$ au point M d'ordonnée $m$. Déterminer suivant les valeurs de $m$ le nombre des points communs à $\Delta$ et à la courbe (H). Dans le cas où il y a deux points d'intersection, on désignera par N et N$'$ ces deux points. Calculer les coordonnées du milieu I du segment NN$'$ et en déduire le lieu I.

4° $a$, $b$, $n$, $n'$ désignant les projections des points A, B, N, N$'$ sur l'axe $x'Ox$, montrer que la division $a$, $b$, $n$, $n'$ est harmonique.

**386.** 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \dfrac{2\,x - 3}{-x + 3}$ et tracer la courbe représentative (H). Construire sur le même graphique la droite (D) d'équation : $y = 3\,x + 1$. La courbe (H) et la droite (D) ont deux points communs A et B. Calculer les coordonnées de A et de B.

2° Par le point de l'axe des $y$ qui a pour ordonnée $m$ on mène la parallèle (D$'$) à (D). Quelle est l'équation de (D$'$) ? A quelles conditions doit satisfaire $m$ pour que (D$'$) et (H) se coupent ?

3° Dans le cas où (D$'$) et (H) ont deux points communs (que l'on désignera par A$'$ et B$'$), trouver les coordonnées du milieu I de A$'$B$'$. Montrer que I se déplace sur une droite fixe ($\Delta$) quand (D$'$) se déplace en restant parallèle à (D). Montrer que ($\Delta$) passe par le centre de symétrie de (H) et qu'aux points où ($\Delta$) coupe (H), la tangente à (H) est parallèle à (D).

**387.** 1° Déterminer les coefficients $b$ et $c$ du trinôme : $x^2 + bx + c$ de manière que ce trinôme passe par un minimum égal à $-1$ quand $x$ prend la valeur $-2$.

2° Les coefficients $b$ et $c$ ayant les valeurs déterminées au paragraphe 1, construire avec précision les courbes : $(C_1)\ y = x^2$, $(C_2)\ y = \dfrac{(2b - c)x + 2c}{x + b - 2}$ rapportées à un même repère orthonormé $xOy$. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

3° Former l'équation donnant les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Comparer l'équation obtenue avec l'équation :

$$(x - 2)(x^2 + bx + c) = 0$$

où $b$ et $c$ sont les valeurs déterminées au paragraphe 1 et calculer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes. On désigne par A et B ceux des points d'intersection dont l'abscisse est supérieure à $(-2)$. Déterminer l'angle de la droite AB avec l'axe $Ox$.

4° On coupe la courbe $(C_1)$ par une droite variable parallèle à AB. Lieu du milieu de la corde $A_1B_1$ interceptée. Même question en remplaçant la courbe $(C_1)$ par la courbe $(C_2)$.

**388.** 1° On donne l'équation du second degré :

$$(m + 2)^2t^2 - 3(m + 2)t + m(3 - m) = 0,$$

dans laquelle $t$ désigne l'inconnue et $m$ un paramètre variable. Démontrer que cette équation a des racines quel que soit $m$ différent de $-2$, et que ces racines sont des fonctions homographiques de $m$. Pour quelle valeur de $m$ l'équation a-t-elle une racine double, et quelle est la valeur de cette racine double ?

2° Étudier les variations des deux fonctions :

$$y = \frac{x}{x + 2}, \qquad y = \frac{3 - x}{x + 2}$$

et construire sur une même figure leurs courbes représentatives. Comment se coupent ces deux courbes ?

Quelles relations peut-on établir entre cette partie du problème et la partie qui fait l'objet du 1° ci-dessus ?

**389.** 1° Résoudre l'inégalité : $\dfrac{3 - x}{2x - 1} < \dfrac{1}{2}(5x - 1)$.

2° Étudier la variation de la fonction : $y = f(x) = \dfrac{3 - x}{2x - 1}$ et tracer sa courbe représentative en prenant comme unité 2 cm dans un repère orthonormé.

3° Retrouver les résultats du 1° en utilisant le tracé du 2°.

4° Montrer qu'il existe une valeur $a$ de $x$ et une seule, telle que la somme $f(a + h) + f(a - h)$ soit indépendante de $h$. Déterminer $a$. A quelle propriété géométrique de la courbe représentative ce résultat correspond-il ?

Montrer qu'il existe une valeur $b$ et une seule de $x$, telle que le produit $f(b - h).f(b + h)$ soit indépendant de $h$. Déterminer cette valeur.

**390.** 1° Construire la courbe (H) représentant la fonction : $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$.

2° Construire la courbe (H') représentant la fonction : $y = \dfrac{m}{x}$, où $m$ désigne une constante positive ou négative.

3° Déterminer les coordonnées des points d'intersection M et N des courbes (H) et (H'). Discuter suivant la valeur de $m$.

4° Montrer qu'il existe une relation indépendante de $m$ entre les abscisses $x'$ et $x''$ de M et de N et une autre relation, indépendante de $m$, entre leurs ordonnées $y'$ et $y''$.

5° Calculer explicitement les coordonnées des points M et N dans le cas où $m = -3$.

**391.** 1° Déterminer les coefficients de la fonction homographique $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ pour que la courbe (P) représentative de ses variations passe par les points : A situé sur $Ox$ d'abscisse $-1$ ; B situé sur $Oy$ d'ordonnée $-1$ ; C de coordonnées $x = 2$, $y = 3$. Construire la courbe (P).

2° Par l'origine O des coordonnées, on mène la droite D d'équation $y = mx$ ; déterminer selon les valeurs de $m$ le nombre des points communs à la droite D et à la courbe (P) ; M étant un point de (P), est-il possible que la droite OM ne rencontre (P) qu'au point M ? Déterminer les coordonnées des points M qui satisfont à cette propriété. En donner une interprétation géométrique.

3° On désigne par M′ et M″ les points d'intersection de la droite D et de la courbe (P), par X et Y les coordonnées du milieu S de M′M″. Montrer qu'il existe une relation entre X et Y indépendante de $m$. En déduire l'équation et la construction du lieu géométrique (Q) du point S lorsque la sécante D prend toutes les positions possibles. Quels sont les points d'intersection des courbes (P) et (Q) ?

**392.** On considère le trinôme du second degré : $y = -\dfrac{m^2}{4(1+m)}x^2 + mx + 1$, où $m$ est un paramètre qui peut prendre des valeurs quelconques entre $-\infty$ et $+\infty$.

1° Discuter le nombre et la réalité des racines de l'équation : $y = 0$.

2° Discuter le signe du trinôme pour toutes les valeurs de $x$ lorsque $m$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ et tracer le graphe (P) de ce trinôme pour $m = -2$, dans un repère orthonormé $xOy$.

3° Démontrer que le sommet S de la courbe (P) se trouve sur l'hyperbole : $y = 2\dfrac{x-1}{x-2}$.

Construire cette hyperbole dans le repère $xOy$. Indiquer comment se déplace le point S lorsque $m$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. Expliquer géométriquement les résultats de la question 2°.

**393.** Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère les points :

$$M_1(1, -3); \qquad M_2\left(-1, \frac{1}{3}\right); \qquad M_3\left(0, -\frac{1}{2}\right).$$

1° Déterminer les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $a$, $b$, $c$ de telle sorte que les graphes des fonctions :

$y = \dfrac{\alpha x + \beta}{x + \gamma}$; $\quad y = ax^2 + bx + c$ passent chacune par $M_1$, $M_2$, $M_3$.

2° Construire sur la même figure ces deux courbes dans un repère rectangulaire.

3° Une droite D pivote autour du point O, origine des coordonnées.

Étudier l'intersection de D avec les deux courbes définies dans 1°. Discussion.

**394.** 1° Tracer sur un même graphique la courbe (P) d'équation : $y = -x^2 + 5x - 4$, et la droite ($\Delta$) d'équation : $y = x - 2$.

2° Une droite (W), parallèle à $Ox$, d'équation : $y = m$ $\left(m \leqslant \dfrac{9}{4}\right)$, coupe la courbe (P) aux points A et B (distincts ou confondus) et coupe la droite ($\Delta$) en C. Calculer, en fonction de $m$, l'abscisse du point D conjugué harmonique de C par rapport à A et B. (On pourra utiliser, sans démonstration, la relation : $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$ liant les abscisses respectives $a$, $b$, $c$, $d$ de A, B, C et D).
Calculer l'ordonnée $y$ du point D, connaissant son abscisse $x$.

3° On appelle (H) la courbe décrite par le point D lorsque $m$ varie $\left(m \leqslant \dfrac{9}{4}\right)$. Trouver les abscisses des points communs aux courbes (P) et (H) et tracer la courbe (H) sur le graphique précédent.

4° Calculer $m$ pour que B soit le milieu de AD, les trois points A, B, D étant distincts.

# FONCTION : $y = x^3 + px + q$

## 171. Étude de la fonction : $y = x^3$.

La fonction $y = x^3$ est définie et continue (n° 82) pour toutes les valeurs de $x$, car quel que soit $x$ on peut calculer $x^3$.

Sa dérivée $y' = 3x^2$ est nulle pour $x = 0$, positive pour $x \neq 0$. La fonction, croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, est donc croissante sur $]-\infty, +\infty[$. Pour $x = 0$, on a $y = 0$ et lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, il en est de même de $y$. Pour obtenir $|y| > 10^6$ par exemple il suffit de prendre $|x| > 10^2$. On obtient le tableau de variation :

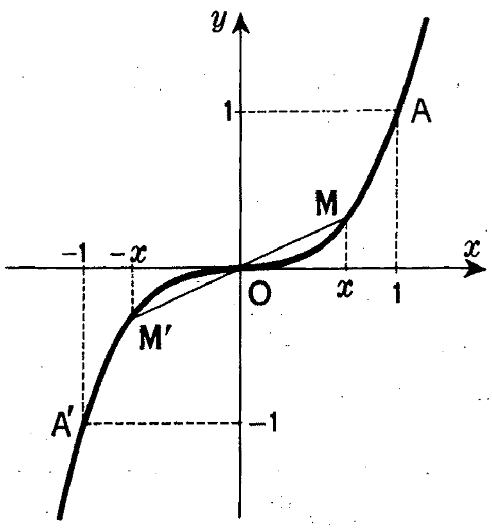



Fig. 89.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | + | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

La courbe représentative (fig. 89) est tangente en O à O$x$ car pour $x = 0$ on a $y = 0$ et $y' = 0$. Elle passe en particulier par les points

$$A(+1, +1) \text{ et } A'(-1, -1).$$

La fonction $y = x^3$ est impaire. A deux valeurs opposées de $x$ correspondent deux valeurs opposées de $y$ et les points correspondants

$$M(x, x^3) \quad \text{et} \quad M'(-x, -x^3)$$

sont symétriques par rapport à O, dans tout repère cartésien (n° 86) :

*Le point* O *est un centre de symétrie de la courbe* $y = x^3$.

Les deux arcs de courbe $x > 0$ et $x < 0$ sont donc de part et d'autre de la tangente en O, c'est-à-dire de $x'x$. *Le point* O *est un point d'inflexion de la courbe*, ce qui résulte du fait que $y'' = 6x$ s'annule en changeant de signe pour $x = 0$ (n° 130).

## 172. Étude de la fonction : $y = x^3 + x + 2$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit $x$. La dérivée : $y' = 3x^2 + 1$ est toujours positive. La fonction est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

Pour $x = 0$, on a $y = 2$. Pour $x \neq 0$, on peut écrire : $y = x^3\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$.

Lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, le facteur entre parenthèses tend vers $+1$ et (nº 80) : $y$ tend, comme $x^3$, vers $\pm\infty$.

On obtient le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

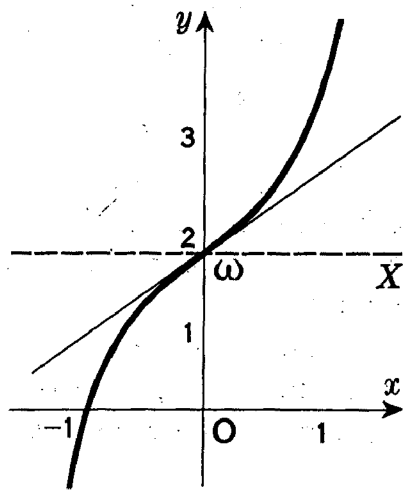


Fig. 90.

La courbe représentative (fig. 90) coupe O$y$ au point ω (0, 2) et admet pour tangente en ce point la droite $y - 2 = 1\,(x - 0)$ soit $y = x + 2$.

Elle coupe l'axe O$x$ en un seul point pour

$$x^3 + x + 2 = 0, \quad \text{soit } x = -1.$$

Équation réduite. — Prenons comme nouveau repère XωY se déduisant du repère $x$O$y$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}\omega}$. On obtient les formules $x = \mathrm{X}$ et $y = 2 + \mathrm{Y}$ et l'équation $y = x^3 + x + 2$ devient : $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}$. On voit que Y est une fonction impaire de X. Il en résulte comme au paragraphe précédent que le point ω est un *centre de symétrie* de la courbe. Par suite les deux branches de courbe pour $x > 0$ et $x < 0$ sont de part et d'autre de la tangente en ω. *Le point ω est donc un point d'inflexion de la courbe.*

## 173. Étude de la fonction : $y = x^3 - 3x + 1$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit $x$. Sa dérivée $y' = 3\,(x^2 - 1)$ s'annule pour $x = -1$ et $x = +1$. Elle est positive pour $x < -1$ ou $x > 1$, négative pour $-1 < x < 1$.

Pour $x = 0$, on a $y = 1$. Pour $x \neq 0$, on peut écrire $y = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$.

Lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$ le facteur entre parenthèses tend vers $+1$ et $x^3$ tend vers $\pm\infty$, il en est donc de même de $y$ (nº 80). D'où le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

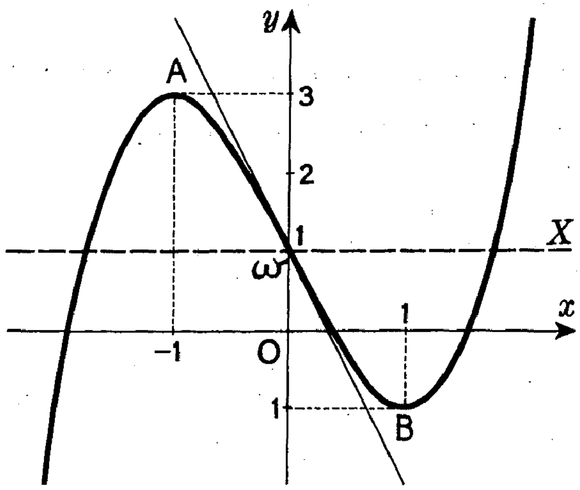


Fig. 91.

La fonction $y = x^3 - 3x + 1$ admet donc un maximum égal à $+3$ pour $x = -1$ et un minimum égal à $-1$ pour $x = +1$.

La courbe représentative (fig. 91) admet deux sommets où la tangente est parallèle à O$x$ :

$$\mathrm{A}(-1, +3) \text{ et } \mathrm{B}(+1, -1).$$

Elle coupe O$y$ au point ω (0, + 1) et coupe l'axe O$x$ en trois points dont les abscisses sont les racines de l'équation : $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Équation réduite. — Prenons comme nouveau repère XωY se déduisant de $x$O$y$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}\omega}$ (0, 1). On obtient : $x = \mathrm{X}$ et $y = \mathrm{Y} + 1$.

La courbe admet comme nouvelle équation : $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^3 - 3\,\mathrm{X}$.

Y étant une fonction impaire de X, le point ω est un *centre de symétrie* de la courbe. La tangente en ω, dont l'équation est $y = -3x + 1$, traverse donc la courbe : *le point ω est un point d'inflexion.*

**174. Cas général.** — La fonction $y = x^3 + px + q$ admet pour dérivée première $y' = 3x^2 + p$, et pour dérivée seconde : $y'' = 6x$.

Elle est toujours croissante si $p \geqslant 0$. Elle admet un maximum et un minimum pour $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ si $p$ est négatif.

La courbe représentative qui admet le point $\omega\,(0, q)$ pour centre de symétrie et pour point d'inflexion, présente la disposition de la figure 90, pour $p \geqslant 0$, celle de la figure 91 pour $p < 0$. Elle tourne sa concavité du côté des $y$ positifs pour $x > 0$, du côté des $y$ négatifs pour $x < 0$.

Comme $y$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe coupe l'axe O$x$ en un seul point si $p \geqslant 0$. Elle peut la couper en trois points pour $p < 0$ si, comme dans la figure 91, le maximum et le minimum de $y$ sont de signes différents.

## FONCTION : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

**175. Fonction générale du troisième degré.** — La fonction du troisième degré s'écrit :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où $a$, $b$, $c$, $d$ sont des coefficients numériques tels que $a \neq 0$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit $x$. Sa dérivée $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ est un trinôme de 2e degré dont on sait déterminer le signe. Il est donc possible d'étudier les variations de cette fonction.

**176. 1er Exemple : $y = -\frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 5x - 15)$**

Cette fonction est définie et continue pour tout $x$. Sa dérivée $y' = -\frac{1}{6}(3x^2 - 6x + 5)$ soit : $y' = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}$ est négative quel que soit $x$. La fonction est donc monotone décroissante et varie de $+\infty$ à $-\infty$ en même temps que $x$.

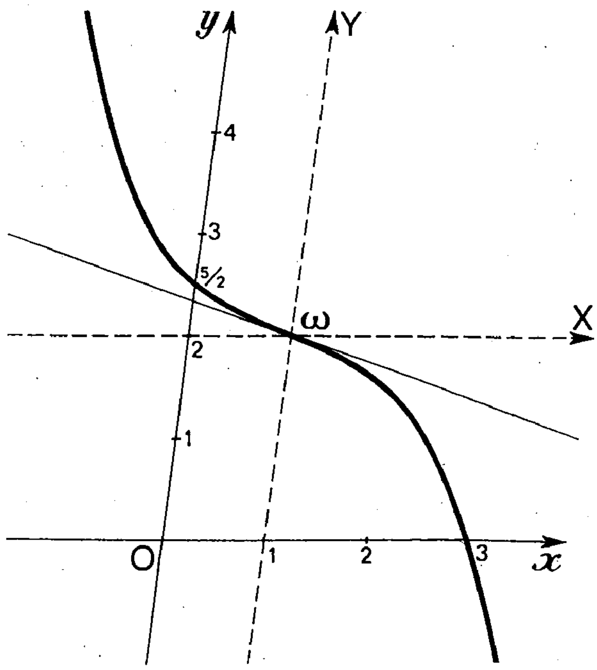


Fig. 92.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$y'' = -(x-1)$ s'annule pour $x = +1$ en changeant de signe. Le graphe de la fonction (fig. 92) admet donc un point d'inflexion $\omega\,(+1, +2)$ où la tangente a pour coefficient directeur $-\frac{1}{3}$.

La courbe est concave du côté des $y$ négatifs pour $x > +1$, du côté des $y$ positifs pour $x < +1$. Le rapport $\frac{y}{x}$ tendant vers $+\infty$ en même temps que $x$, la courbe a deux branches infinies de directions asymptotiques O$y$ et O$y'$. Elle coupe les axes O$x$ au point $x = +3$, O$y$ au point $y = \frac{5}{2}$.

Si nous faisons subir au repère $xOy$ la translation $\overrightarrow{O\omega}$, pour l'amener en $X\omega Y$ les formules :

$$x = 1 + X \quad \text{et} \quad y = 2 + Y \quad \text{donnent:} \quad Y = -\frac{1}{6}\left(X^3 + 2X\right).$$

Y étant fonction impaire de X; on en déduit que $\omega$ est un centre de symétrie de la courbe (nº 86).

**177. 2e Exemple :** $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

Cette fonction définie et continue quel que soit $x$ admet pour dérivée :

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

qui s'annule pour $x = 0$ et $x = 2$.

Lorsque $x$ tend vers $\pm \infty$, $y$ tend, de même que $x^3$, vers $\pm \infty$ (nº 80).

On peut donc établir le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

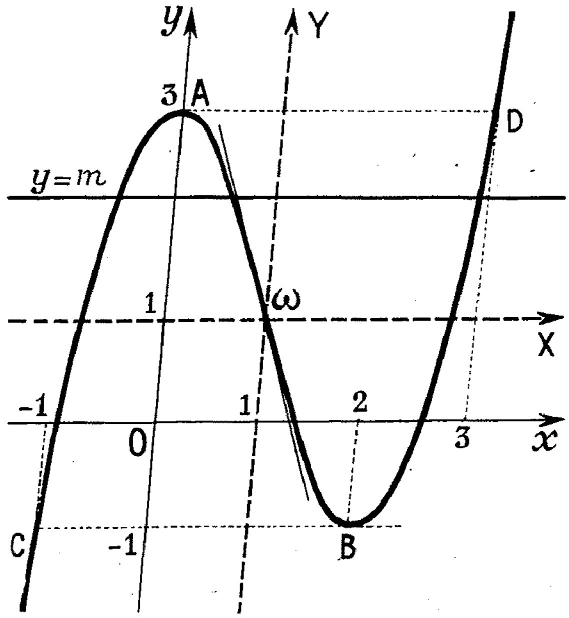



Fig. 93.

La courbe représentative (fig. 93) admet les sommets A $(0; -3)$ et B $(2; -1)$. Elle coupe visiblement l'axe $Ox$ en 3 points, dont les abscisses sont racines de l'équation : $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$.

D'autre part $y'' = 6x - 6$. La courbe est concave du côté des $y$ positifs pour $x > 1$, du côté des $y$ négatifs pour $x < 1$ et admet le point $\omega\,(1;\,2)$ comme point d'inflexion. Lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, le rapport $\dfrac{y}{x}$ tend vers $\pm\infty$ : la courbe admet deux branches infinies paraboliques de direction asymptotique $Oy$ (nº 136).

Faisons subir au repère $xOy$ la translation $\overrightarrow{O\omega}\,(1;1)$, les formules : $x = 1 + X$, $y = 1 +$ donnent :

$$Y + 1 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 3$$

d'où l'équation réduite de la courbe : $Y = X^3 - 3X$.

Y étant une fonction impaire de X, on voit que le point d'inflexion $\omega$ est un centre de symétrie de la courbe (nº 86).

**178. Cas général.** — Le signe de la dérivée $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ de la fonction du 3e degré $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dépend de $\Delta = b^2 - 3ac$.

**1er cas :** $\Delta = b^2 - 3ac \leqslant 0$. Le trinôme $3ax^2 + 2bx + c$ n'a pas de racines réelles ou a une racine double $x = -\dfrac{b}{3a}$. Il est du signe de $a$ sur chacun des intervalles $\left]-\infty, -\dfrac{b}{3a}\right[$ et $\left]-\dfrac{b}{3a}, +\infty\right[$. Donc $y = f(x)$ est une fonction monotone sur $]-\infty, +\infty[$, croissante de $-\infty$ à $+\infty$ pour $a > 0$, décroissante de $+\infty$ à $-\infty$ pour $a < 0$, ne présentant ni maximum, ni minimum. La courbe $y = f(x)$ qui admet deux branches paraboliques de direction $Oy$ et $Oy'$, a la disposition de la figure 92 pour $a < 0$, la disposition symétrique par rapport à $Ox$ pour $a > 0$.

**2e cas :** $\Delta = b^2 - 3\,ac > 0$. La dérivée $y' = 3\,ax^2 + 2\,bx + c$ s'annule en changeant de signe pour deux valeurs distinctes $\alpha$ et $\beta$. On obtient :

*a positif*

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | M | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*a négatif*

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+8$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | M | $\searrow$ | $-\infty$ |

La fonction présente cette fois un maximum M, un minimum $m$ et la courbe $y = f(x)$ qui a deux sommets A et B comme sur la figure 93, admet encore deux branches paraboliques de directions asymptotiques O$y$ et O$y'$.

— La dérivée $y'' = 6\,ax + 2\,b$ s'annule en changeant de signe pour $x = -\dfrac{b}{3\,a}$.

La courbe $y = f(x)$ admet toujours pour point d'inflexion le point $\omega$ d'abscisse $x = -\dfrac{b}{3\,a}$ et d'ordonnée $y = f\left(-\dfrac{b}{3\,a}\right) = \dfrac{2\,b^3}{27\,a^2} - \dfrac{bc}{3\,a} + d$. Rapportée au repère X$\omega$Y se déduisant de $x$O$y$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ et compte tenu des relations :

$$X = x + \frac{b}{3\,a} \qquad ; Y = y - f\left(-\frac{b}{3\,a}\right),$$

on obtient l'équation réduite :

$$Y = aX^3 + \frac{3\,ac - b^2}{3\,a}\,X.$$

Y est donc une fonction impaire de X. *La courbe* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *admet donc son point d'inflexion pour centre de symétrie* (n° 86).

**179. Discussion de l'équation du 3e degré.** — Il résulte de l'étude précédente que la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ varie d'une façon continue soit de $-\infty$ à $+\infty$ soit de $+\infty$ à $-\infty$. Elle admet donc au moins une racine réelle. Elle en admet trois dans le seul cas où $f(x)$ admet un maximum $f(\alpha)$ et un minimum $f(\beta)$ de signes contraires (fig. 91 et 93).

Exemples. — 1° L'équation $f(x) = 3\,x^3 - 3\,x^2 + x + 2 = 0$ admet une seule racine car $f'(x) = 9\,x^2 - 6\,x + 1 = (3\,x - 1)^2$ est positive ou nulle. La fonction $f(x)$ monotone croissante sur $]-\infty, +\infty[$ ne s'annule qu'une seule fois.

2° La fonction $f(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 12\,x + 9$ admet un maximum pour $x = -1$ et un minimum pour $x = +2$, racines de $f'(x) = 6\,(x^2 - x - 2)$. Le produit $f(-1).f(+2) = (+16)(-11)$ étant négatif, l'équation $f(x) = 0$ admet trois racines $x_1$, $x_2$ et $x_3$ vérifiant la relation :

$$x_1 < -1 < x_2 < 2 < x\,.$$

Pour discuter le nombre des racines de l'équation : $ax^3 + bx^2 + cx + d = m$ suivant les valeurs du paramètre $m$, il suffit de couper la courbe $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ par la droite variable $y = m$. On voit ainsi (fig. 93) que l'équation $x^3 - 3\,x^2 + 3 = m$ admet pour :

$m < -1$ : *Une racine* $x_1 < -1$.

$m = -1$ : *Une racine simple* $x_1 = -1$ *et une racine double* $x_2 = x_3 = 2$.

$-1 < m < 3$: *Trois racines* $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3 < 3$.

$m = 3$ : *Une racine double* $x_1 = x_2 = 0$ *et une racine simple* $x_3 = 3$.

$m > 3$ *Une racine* $x > 3$.

**180. Cas de l'équation :** $x^3 + px + q = 0$. — Montrons d'abord que l'on peut toujours ramener à cette forme l'équation générale : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ qui s'écrit :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + d = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \lambda x + \mu = 0.$$

En posant : $x + \dfrac{b}{3a} = X$ on obtient :

$$X^3 + pX + q = 0.$$

Ceci dit, l'équation

$$f(x) \equiv x^3 + px + q = 0$$

a trois racines distinctes si et seulement si $f(x)$ admet un maximum et un minimum de signes contraires. Or $f'(x) = 3x^2 + p$ s'annule si $p$ est négatif pour $x = \alpha = \sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ et pour $x = -\alpha = -\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ (fig. 94).

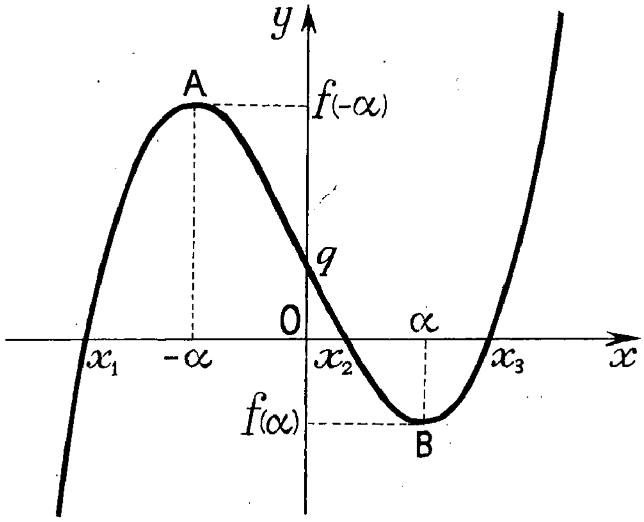



Fig. 94.

La condition $f(\alpha).f(-\alpha) < 0$ s'écrit puisque $p = -3\alpha^2$ :
$(\alpha^3 + p\alpha + q)(-\alpha^3 - p\alpha + q) < 0 \Longleftrightarrow (-2\alpha^3 + q)(2\alpha^3 + q) < 0$ ou $-4\alpha^6 + q^2 < 0$ ce qui donne : $4p^3 + 27q^2 < 0$, condition qui implique $p < 0$.

Si $4p^3 + 27q^2 = 0$ on a : $f(\alpha).f(-\alpha) = 0$. Il y a une racine double ($\alpha$ ou $-\alpha$) vérifiant $f(x) = f'(x) = 0$ et une racine simple $x_1$. La racine double $x_2$ vérifie : $3f(x) - xf'(x) = 0$ donc $2px + 3q = 0$, ce qui donne : $x_2 = -\dfrac{3q}{2p}$. En identifiant $f(x)$ et $(x - x_1)(x - x_2)^2$, on trouve $x_1 = -2x_2$ donc $x_1 = \dfrac{3q}{p}$. En résumé :

| | |
|---|---|
| $4p^3 + 27q^2 < 0$ : | *3 racines réelles distinctes.* |
| $4p^3 + 27q^2 = 0$ : | *1 racine simple* $\dfrac{3q}{p}$, *une racine double* $-\dfrac{3q}{2p}$. |
| $4p^3 + 27q^2 > 0$ : | *1 seule racine réelle.* |

## FONCTION : $y = ax^4 + bx^2 + c$

**181. Trinôme bicarré.** — La fonction $y = ax^4 + bx^2 + c$ est un trinôme du second degré en $x^2$. Cette fonction est définie et continue quel que soit $x$. Sa dérivée :

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$$

admet dans tous les cas la racine $x = 0$. Elle admet de plus deux racines opposées si $a$ et $b$ sont de signes contraires. Étudions quelques exemples :

## 182. Étude de la fonction : $y = x^4$.

On peut calculer $x$ pour toutes les valeurs de $x$. La fonction est donc définie et continue quel que soit soit $x$. Sa dérivée $y' = 4x^3$ est du signe de $x$. La fonction est donc décroissante pour $x < 0$, croissante pour $x > 0$. Elle admet pour $x = 0$, un minimum égal à 0.

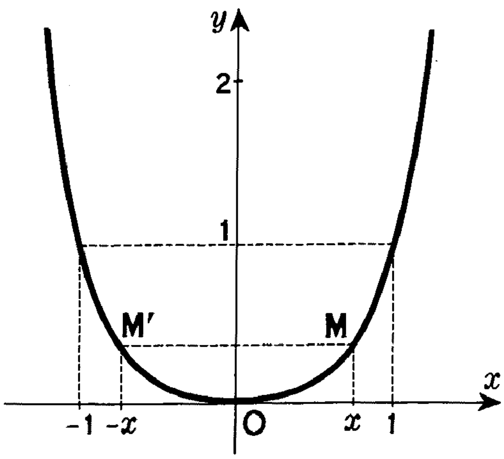


Fig. 95.

Lorsque $x$ tend $\pm\infty$, $y$ tend vers $+\infty$. Pour obtenir $y > 10^8$ par exemple, il suffit de prendre $|x| > 10^2$. D'où le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Rapportée à un repère rectangulaire (fig. 95), la courbe représentative rappelle la courbe $y = x^2$ mais est moins évasée. Comme $x^4$ est une fonction paire : $f(-x) = f(x)$, les points M $(x, x^4)$ et M$'(-x, x^4)$ sont symétriques par rapport à O$y$. *La courbe admet* O$y$ *pour axe de symétrie et* O$x$ *pour tangente au sommet.*

D'autre part : $y'' = 12x^2$ est positif pour $x \neq 0$. La courbe tourne sa concavité du côté des $y$ positifs (nº 129).

## 183. Étude de la fonction : $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

La fonction est définie et continue quel que soit $x$ (nº 82). Sa dérivée s'écrit :

$$y' = -4x^3 - 4x = -4x(x^2 + 1).$$

Elle est du signe de $-x$ et s'annule pour $x = 0$. La fonction admet pour $x = 0$, un maximum égal à $+3$. Pour $x \neq 0$, on peut écrire $y = x^4\left(-1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^4}\right)$.

Lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, le facteur entre parenthèses tend vers $-1$. Comme $x^4$ tend vers $+\infty$, on voit (nº 80) que $y$ tend vers $-\infty$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

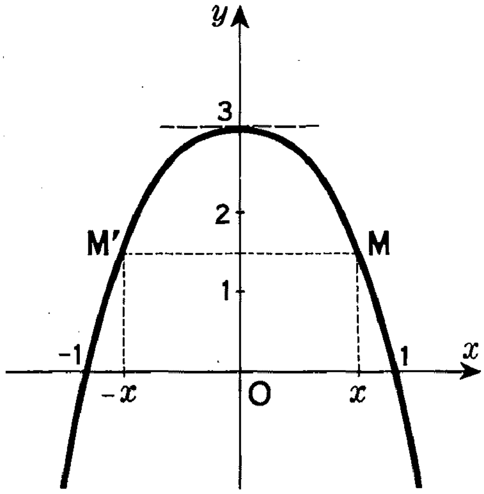


Fig. 96.

Rapportée à un repère rectangulaire la courbe représentative (fig. 96) admet l'axe O$y$ pour axe de symétrie car $f(-x) = f(x)$. Elle admet pour sommet le point A $(0, +3)$ et pour tangente au sommet la droite $y = 3$.

$y'' = -12x^2 - 4 = -4(3x^2 + 1)$ est négatif quel que soit $x$. La courbe est toujours concave du côté des $y$ négatifs.

La courbe coupe l'axe O$x$ pour $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$, c'est-à-dire pour $x^2 = +1$ ou $-3$. Il n'y a donc que deux points d'intersection d'abscisses $x = \pm 1$.

## 184. Étude de la fonction : $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit $x$ (n° 82). Sa dérivée s'écrit :

$$y' = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3).$$

Elle s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \pm\sqrt{3}$.

Comme $y = x^4\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{2x^4}\right)$, on voit que $y$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$. D'où le tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{2}$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

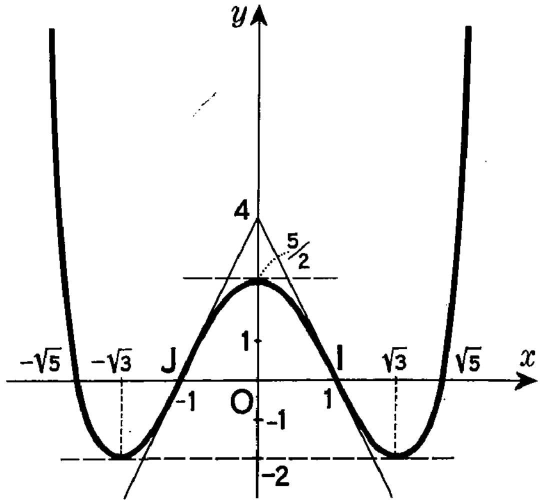


Fig. 97.

La fonction admet un maximum égal à $\frac{5}{2}$ pour $x = 0$ et un minimum égal à $-2$ pour $x = \pm\sqrt{3}$.

La courbe représentative (fig. 97) dans un repère rectangulaire, admet O$y$ pour axe de symétrie car $y$ est une fonction paire : $f(-x) = f(x)$. Elle coupe O$x$ pour : $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ soit pour $(x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0$. Il y a donc 4 points d'intersection d'abscisses $\pm 1$ et $\pm\sqrt{5}$.

D'autre part $y'' = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$ s'annule pour $x = \pm 1$. Les points I (1; 0) et J(− 1; 0) sont des points d'inflexion admettant pour tangentes respectives :

$$y = -4x + 4 \quad \text{et} \quad y = 4x + 4.$$

La courbe tourne sa concavité du côté des $y$ négatifs pour $-1 < x < 1$, du côté des $y$ positifs pour $x < -1$ et pour $x > 1$.

## 185. Étude de la fonction : $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 1$.

Cette fonction est définie quel que soit $x$. Sa dérivée s'écrit :

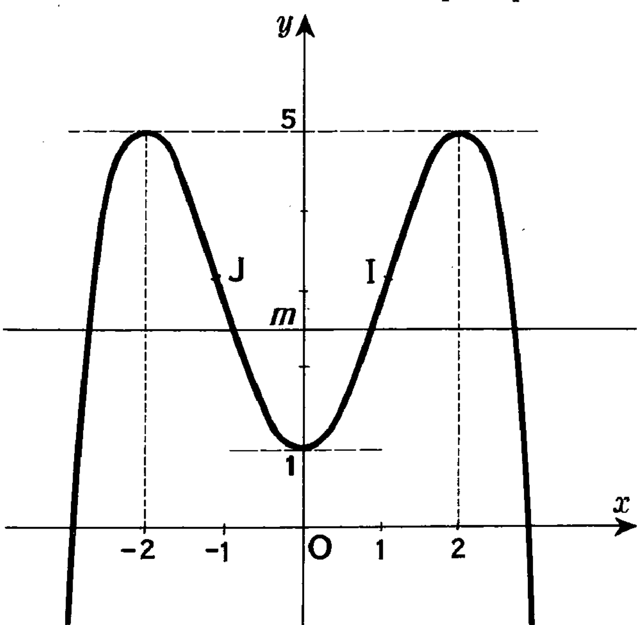


Fig. 98.

$$y' = -x^3 + 4x = -x(x^2 - 4) = -x(x-2)(x+2).$$

Elle s'annule pour $x = 0$, $x = 2$ et $x = -2$. Pour $x \neq 0$, on peut écrire :

$y = x^4\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$. Lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$ le facteur entre parenthèses tend vers $-\frac{1}{4}$. Comme $x^4$ tend vers $+\infty$, il en résulte que $y$ tend vers $-\infty$. On en déduit le tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

La fonction admet un maximum égal à $+5$ pour $x = \pm 2$ et un minimum égal à $+1$ pour $x = 0$.

Rapportée à un repère rectangulaire (fig. 98) la courbe représentative est symétrique par rapport à O$y$ car $y$ est une fonction paire : $f(-x) = f(x)$. Elle coupe O$x$ pour $x^4 - 8x^2 - 4 = 0$ soit en deux points d'abscisses : $x = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{5}}$

D'autre part : $y'' = -3x^2 + 4$. La courbe admet deux points d'inflexion I et J pour $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Elle est concave du côté des $y$ positifs entre ses deux points d'inflexion, du côté des $y$ négatifs à l'extérieur de ces deux points.

**186. Application.** — *Discuter suivant les valeurs de m le nombre des racines de l'équation :* $x^4 - 8x^2 + 4m - 4 = 0$.

Résolue en $m$ cette équation s'écrit : $-\dfrac{x^4}{4} + 2x^2 + 1 = m$. C'est l'équation aux abscisses des points d'intersection de la courbe ci-dessus (fig. 98) et de la droite variable $y = m$. On voit que pour :

| | |
|---|---|
| $m < 5$ : | *Pas de racines.* |
| $m = 5$ : | *Deux racines doubles* $+2$ *et* $-2$. |
| $1 < m < 5$ : | *Quatre racines deux à deux opposées.* |
| $m = 1$ : | *Une racine double* 0 *et deux racines opposées* $\pm 2\sqrt{2}$. |
| $m < 1$ : | *Deux racines opposées.* |

**187. Cas général.** — La fonction $y = ax^4 + bx^2 + c$ est définie quel que soit $x$ et admet pour dérivée : $y' = 4ax^3 + 2bx = 2ax\left[2x^2 + \dfrac{b}{a}\right]$.

1° Si $\dfrac{b}{a} \geqslant 0$, cette dérivée a une seule racine $x = 0$ et est du signe de $ax$.

La courbe représentative n'a qu'un sommet et présente la disposition de la figure 95 pour $a > 0$, celle de la figure 96 pour $a < 0$,

2° Si $\dfrac{b}{a} < 0$, la dérivée $y'$ s'annule pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$. La courbe représentative, symétrique par rapport à O$y$, admet trois sommets et présente la disposition de la figure 97 pour $a > 0$, celle de la figure 98 pour $a < 0$.

## EXERCICES

— Étudier et représenter graphiquement les fonctions :

**395** $y = x^3 + 2x$.

**396.** $y = x^3 - 3x$.

**397.** $y = x^3 + x - 2$.

**398.** $y = x^3 - 2x + 1$.

**399.** $y = y^3 + 2x + 1$.

**400.** $y = 3x^3 - 3x + 2$.

**401.** $y = x^3 + x - 3$.

**402.** $y = x^3 - 6x + 4$.

**403.** $y = -x^3 + 3x + 2$.

**404.** $y = x^3 - 2x - 3$.

**405.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

**406.** $y = -\dfrac{x^3}{3} + x - 5$.

**407.** $y = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 2x$.

**408.** $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 7$.

**409.** $y = 2x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 5x$

**410.** $y = -\frac{5}{3}x^3 + 7x^2 + 3x - 4.$

**411.** $y = x^3 - 12x^2 + 16.$

**412.** $y = x^3 - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}.$

**413.** $y = x^4 + 3x^2.$

**414.** $y = x^4 - 2x^2.$

**415.** $y = -\frac{x^4}{2} + 3x^2.$

**416.** $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2.$

**417.** $y = x^4 - 2x^3 + 1.$

**418.** $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 1.$

**419.** $y = 2x^4 - 3x^2 + 1.$

**420.** $y = x^4 - 6x^2 + 5.$

**421.** $y = 3x^4 + 2x^2 + 1.$

**422.** $y = -x^4 + 6x^2 - 9.$

**423.** $y = 2x^4 - \frac{15}{2}x^2 + 5.$

**424.** $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4.$

**425.** $y = -x^4 + 2x^2 - 1.$

**426.** $y = -\frac{x^4}{2} + 3x^2 - \frac{5}{2}.$

**427.** $y = 5x^4 - 5x^2 + 1.$

**428.** $y = -\frac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}.$

**429.** 1° Étudier la variation de la fonction $y = x^3 - 6x + 5$ et tracer la courbe représentative (C) en prenant le centimètre pour unité sur chaque axe.

2° Soit I le point où la courbe (C) rencontre l'axe O$y$. Montrer que ce point est un centre de symétrie de cette courbe.

3° Étudier graphiquement suivant les valeurs de $m$ le nombre des racines de l'équation :

$$x^3 - 6x + 5 - m = 0.$$

**430.** 1° Étudier et représenter graphiquement la fonction $y = x^3 - 3x + 2.$

2° Déterminer et construire les tangentes aux points où la courbe rencontre les axes de coordonnées O$x$ et O$y$.

3° Calculer les coordonnées des points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite :

$$9x + 4y = 0.$$

**431.** On donne la fonction : $y = (x - 1)(x - 2)(x + 3).$

1° Étudier les variations de la fonction $y$ et construire la courbe représentative (unités : 2 cm sur O$x$ et 1 cm sur O$y$).

2° Équation des tangentes aux points de rencontre de la courbe avec O$x$ et avec O$y$.

3° Discuter graphiquement le nombre des points d'intersection de la courbe avec une parallèle à l'axe O$x$ d'ordonnée $m$.

**432.** 1° Pour quelles valeurs de $m$ la courbe (C) : $y = x^3 - 3mx + 2$ admet-elle des tangentes parallèles à O$x$ ? Trouver en fonction de $m$ les coordonnées des points de contact.

2° Déterminer $m$ pour que la courbe (C) soit tangente à O$x$. Construire la courbe (C) correspondante.

3° Discuter suivant les valeurs de $m$ le nombre des racines de l'équation : $x^3 - 3mx + 2 = 0.$

**433.** On coupe la courbe (C) : $y = x^3 - x$ par la droite variable $y = m(x + 1)$ issue du point fixe A $(-1, 0)$ de la courbe.

1° Déterminer $m$ pour qu'il y ait, outre le point A, deux points d'intersections M′ et M″. Montrer que le milieu I de M′M″ se déplace sur une droite fixe.

2° Trouver l'équation de la tangente en A à la courbe C et l'équation de la tangente issue de A. Coordonnées du point de contact B de cette dernière.

3° Soit P le conjugué harmonique de A par rapport à M′ et M″. Calculer les coordonnées de P et établir la relation indépendante de $m$ qui existe entre ces coordonnées. Tracer sur le même graphique que (C) la courbe décrite par le point P. Étudier les intersections des deux courbes.

**434.** Variation de $y = 4x^3 - 3x$. Courbe représentative. En déduire le nombre des racines de l'équation : $4x^3 - 3x = m$.

**435.** Soit la famille de courbes d'équation : $y = x^3 + px$ où $p$ est un paramètre variable.
Étudier selon les valeurs de $p$ les formes de courbe possible. Discuter le nombre des points d'intersection avec la droite d'équation $y = -q$ où $q$ est un paramètre variable.

**436.** 1° Représenter graphiquement les variations de la fonction $y = x^3 - 2x^2$.

2° On désigne par M, N les points de la courbe représentative C d'abscisses 1 et 3. Déterminer l'équation de la droite MN qui sera mise sous la forme $y = ax + b$.
Calculer les coordonnées du point P (distinct de M et N) d'intersection de cette droite et de la courbe C.

**437.** On considère la fonction $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1° Déterminer les coefficients $a, b, c, d$ de façon que la fonction admette pour la valeur $x = 0$, un maximum $y = 10$ et pour la valeur $x = 2$, un minimum $y = 6$. Construire la courbe représentant les variations de la fonction obtenue.

2° La courbe coupe la droite d'équation $y = 10$ en un point M d'abscisse $x = 0$ et en un point A; la droite d'équation $y = 6$ au point N d'abscisse $x = 2$ et en un point B. Calculer les coordonnées des points A et B. Vérifier que les droites MN, AB se coupent en un point C appartenant à la courbe. Montrer que ce point est un centre de symétrie de la courbe.

**438.** 1° Étudier les variations de la fonction $y = -\frac{x^3}{3} + 3x$ et construire la courbe représentative. Déterminer les points d'intersection de la courbe avec l'axe $x'x$ et les tangentes en ces points.

2° On coupe la courbe par une droite passant par le point A de coordonnées : $x_0 = 3$; $y_0 = 0$ et d'équation $y = m(x - 3)$. Déterminer les abscisses des points d'intersection de cette droite et de la courbe. On trouve, en général, deux points B et C autres que A. Conditions que doit remplir $m$ pour que ces points existent ?

3° Quelle est l'abscisse du milieu M de BC ? En déduire le lieu de ce point.

**439.** 1° Déterminer un polynôme du 3ᵉ degré, sachant qu'il passe par un minimum égal à 2 pour $x = 1$ et que son reste de division par $x^2 + 3x + 2$ est $-x + 3$.

2° Construire la courbe représentative (C).

3° Que devient l'équation de cette courbe si l'on transporte l'origine au point (1, 2) ?

**440.** 1° Étudier les variations de la fonction $y = x^3 + 2x^2 - 4$ et tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.

2° Sur les mêmes axes de coordonnées, construire la courbe représentant la fonction $y = -x^2$; montrer que les deux courbes précédentes se coupent en des points dont les abscisses sont déterminées par l'équation : $(x - 1)(x + 2)^2 = 0$ et calculer les coordonnées des points d'intersection.

3° Calculer, en chaque point d'intersection, la tangente trigonométrique de l'angle des deux courbes.

**441.** On donne la fonction $y = (x - a)(x - b)(x - c)$ de la variable $x$ où $a, b, c$ sont 3 nombres donnés $(a < b < c)$.

1° Calculer la dérivée $y'$ de la fonction $y$ et démontrer que l'équation du 2ᵉ degré $y' = 0$ a une racine entre $a$ et $b$ et une racine entre $b$ et $c$. Ces racines correspondent l'une à un maximum, l'autre à un minimum de $y$.

2° Qu'arrive-t-il si $a = b$ ?

3° En supposant $a = b = -1$ et $c = 0$, étudier les variations de $y$, et tracer la courbe représentative.

**442.** 1° Construire la courbe représentative des variations de la fonction $y = 4x^3 - 3x + a$. Montrer qu'elle présente un centre de symétrie qu'on déterminera. Comment le changement de valeur du paramètre modifie-t-il la courbe ?

2° On considère l'équation : $4x^3 - 3x + a = 0$. Trouver, au moyen de l'étude précédente, les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire $a$, pour qu'elle ait trois racines réelles.

3° En se supposant placé dans ce dernier cas, quelles sont, lorsque $a$ varie, la plus grande et la plus petite des valeurs que puissent prendre les racines ? Quelles valeurs faut-il donner à $a$ pour que ce nombre soit une des racines de l'équation proposée ? Lorsqu'il en est ainsi, résoudre complètement cette équation.

**443.** 1° Construire en orthonormées la courbe (C) d'équation : $y = \frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 9)$ et démontrer qu'elle découpe une division harmonique sur la droite $y = 1$.

2° Équation des tangentes aux points d'inflexion I et J. Déterminer les points P et Q où les tangentes sont parallèles aux précédentes. Nature du quadrilatère formé par ces quatre tangentes.

3° Étudier en utilisant la courbe (C) l'existence des racines de l'équation :

$$x^4 - 6x^2 + 9 - 8m = 0$$

et la position de ces racines par rapport aux nombres $-1$ et $+3$.

**444.** 1° Dans un repère rectangulaire, construire la courbe (C) d'équation : $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$. Déterminer ses sommets, ses points d'inflexion et les tangentes aux points d'inflexion.

2° Établir, en fonction de $\alpha$, l'équation de la tangente à (C) au point M d'abscisse $x = \alpha$. Montrer que l'équation donnant les abscisses des points d'intersection de cette tangente avec (C) peut s'écrire sous la forme : $(x - \alpha)^2 (x^2 + 2\alpha x + 3\alpha^2 - 6) = 0$.

3° Pour quelles valeurs de $\alpha$, la tangente en M recoupe-t-elle la courbe (C) en deux points P et Q ? Coordonnées, en fonction de $\alpha$, du milieu K du segment PQ ? Lorsque $\alpha$ varie le point K décrit un arc d'une courbe ($\gamma$) dont on établira l'équation et que l'on construira sur le même graphique que (C).

4° La tangente d'inflexion en I à (C) recoupe cette courbe en R. Montrer que cette droite IR est tangente à ($\gamma$) en un point N milieu du segment IR.

# FONCTION : $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

## 188. Généralités sur la fonction : $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$.

Cette fonction dans laquelle nous supposons $aa' \neq 0$ est définie et continue sauf pour $x = -\dfrac{b'}{a'}$, racine du dénominateur (ou pôle de la fonction), pour laquelle $y$ devient infini. Sa dérivée $y' = \dfrac{(2\,ax + b)\;(a'x + b') - a'\,(ax^2 + bx + c)}{(a'x + b')^2}$ est du signe de son numérateur $aa'x^2 + 2\,ab'x + bb' - a'c$, trinôme du 2e degré en $x$. Nous pourrons donc étudier la variation de cette fonction.

## 189. Étude de la fonction : $y = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 2}$.

Cette fonction est définie et continue pour $x \neq 1$ et peut s'écrire : $y = \dfrac{x^2 - 3}{2(x - 1)}$.

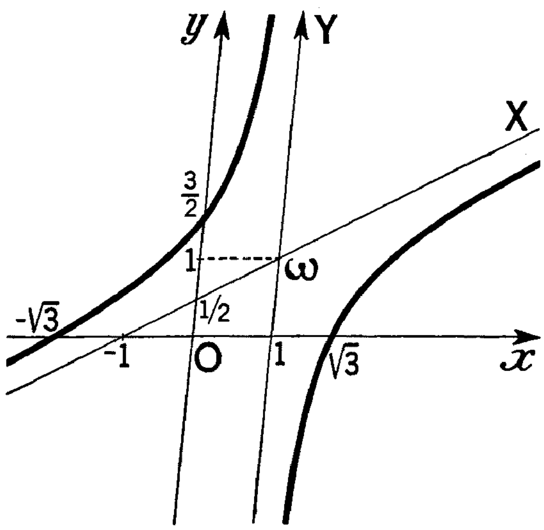



Fig. 99.

Sa dérivée :

$$y' = \frac{2x(x - 1) - (x^2 - 3)}{2(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{2(x - 1)^2}$$

Soit $y' = \dfrac{(x - 1)^2 + 2}{2(x - 1)^2}$ est positive pour $x \neq 1$.

On peut donc dresser le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | | 1 | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | | ‖ | | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

La courbe représentative (fig. 99) se compose de deux branches situées de part et d'autre de l'asymptote $x = 1$ (no 132).

Lorsque $x \to \pm\infty$, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2 - 3}{2x^2 - 2x} = \dfrac{1 - \dfrac{3}{x^2}}{2 - \dfrac{2}{x}}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ et $y - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x - 3}{2(x - 1)}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$.

Donc (nº 132) la courbe admet l'asymptote oblique $y = \dfrac{x+1}{2}$.

Comme $$y - \frac{x+1}{2} = -\frac{1}{x-1} \implies y = \frac{x+1}{2} - \frac{1}{x-1} \qquad (1)$$

on voit que la branche $x > 1$ est au-dessous de l'asymptote oblique tandis que la branche $x < 1$ est au-dessus de cette asymptote.

La relation (1) montre que : $y' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ et $y'' = -\dfrac{2}{(x-1)^3}$. La courbe est concave du côté des $y$ positifs pour $x < 1$, du côté des $y$ négatifs pour $x > 1$. D'autre part elle coupe l'axe O$y$ au point $\left(0,\ +\dfrac{3}{2}\right)$, l'axe O$x$ aux points $(\pm\sqrt{3},\ 0)$.

Équation réduite. — Les deux asymptotes $x = 1$ et $y = \dfrac{x+1}{2}$ se coupent au point $\omega\,(+1, +1)$. La translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ transforme le repère $xOy$ en X$\omega$Y et les relations $x = 1 + \mathrm{X}$, $y = 1 + \mathrm{Y}$ donnent en utilisant la relation (1) :

$$1 + \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}+2}{2} - \frac{\mathrm{X}}{1} \iff \boxed{\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}}{2} - \frac{1}{\mathrm{X}}}$$

Y étant une fonction impaire de X, il en résulte que le point $\omega$ est un centre de symétrie de la courbe (nº 86).

## 190. Étude de la fonction : $y = \dfrac{(x-1)^2}{2x-4}$.

Cette fonction est définie et continue pour $x \neq 2$. On peut écrire :

$$y = \frac{x(x-2)+1}{2(x-2)} \quad \text{soit} \quad y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2(x-2)}. \qquad (1)$$

D'où : $$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 1}{2(x-2)^2} \implies y' = \frac{(x-1)(x-3)}{2(x-2)^2} \qquad (2)$$

Cette dérivée s'annule pour $x = 1$ et $x = 3$. Elle est positive sur $]-\infty;\,1[$ et $]3;\,+\infty[$, négative sur $]1;\,2[$ et $]2;\,3[$. On déduit le tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

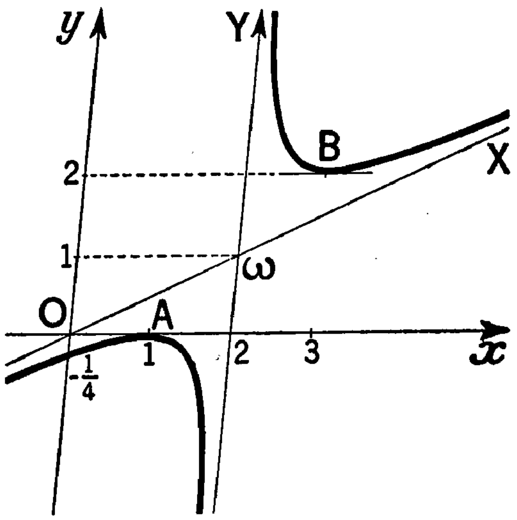


Fig. 100.

La fonction admet le maximum 0 pour $x = 1$ et le minimum $+2$ pour $x = 3$. La courbe représentative (fig. 100) admet pour asymptotes la droite $x = 2$ et la droite $y = \dfrac{x}{2}$ car $y - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2(x-2)}$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$.

La courbe est située au-dessus de son asymptote oblique $y = \dfrac{x}{2}$ pour $x > 2$, au dessous pour $x < 2$.

Les asymptotes se coupent au point $\omega\ (+\ 2;\ +\ 1)$. La translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ transforme le repère $xOy$ en $X\omega Y$ et les formules $x = 2 + X$, $y = 1 + Y$ montrent que la courbe admet pour équation réduite :

$$\boxed{Y = \frac{X}{2} + \frac{1}{2X}}$$

Y étant une fonction impaire de X, il en résulte que le point $\omega$ est un centre de symétrie de la courbe (n° 86).

La relation $y'' = \dfrac{1}{(x-2)^3}$ montre que la courbe est concave du côté des $y$ positifs pour $x > 2$, du côté des $y$ négatifs pour $x < 2$. La courbe coupe l'axe $Oy$ au point $\left(0;\ -\dfrac{1}{4}\right)$. Elle est tangente à $Ox$ au point $A\ (1;\ 0)$.

**191. Cas général.** — La fonction $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ est définie pour toute valeur de $x$ distincte de son pôle $\alpha = -\dfrac{b'}{a'}$. En posant $x = \alpha + X$, on obtient :

$$y = \frac{ax^2 + bc + c}{a'X} = \frac{aX^2 + (2a\alpha + b)\ X + a\alpha^2 + b\alpha + c}{a'X}$$

soit $y = \dfrac{a}{a'}X + \dfrac{2a\alpha + b}{a'} + \dfrac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a'X} \implies \boxed{y = mx + p + \dfrac{k}{x - \alpha}}$ (1)

Le coefficient $k = \dfrac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a'}$ n'est pas nul si $\alpha$ n'est pas racine du numérateur $ax^2 + bx + c$, ce que nous supposerons par la suite. La relation (1) donne immédiatement :

$$y' = m - \frac{k}{(x-\alpha)^2} \implies y' = \frac{m\ (x-\alpha)^2 - k}{(x-\alpha)^2}.$$

1° Pour $km < 0$ la dérivée $y'$ est du signe de $m$ pour tout $x \neq \alpha$. La fonction est donc, sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$, monotone croissante pour $m > 0$, monotone décroissante pour $m < 0$.

2° Pour $km > 0$, la dérivée $y'$ s'annule pour deux valeurs $x_1$ et $x_2$ égales à : $\alpha \pm \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. On obtient $y' = \dfrac{m(x - x_2)\ (x - x_2)}{(x-\alpha)^2}$. Donc $y'$ est du signe de $m$ à l'extérieur de l'intervalle $[x_1,\ x_2]$, du signe opposé sur l'intervalle $]x_1,\ x_2[$. La fonction $y$, infinie pour $x = +\infty$, $-\infty$ et $\alpha$, admet dans ce cas un maximum et un minimum : $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

La courbe représentative admet pour asymptotes les droites $x = \alpha$ et $y = mx + p$ qui se coupent au point de coordonnées $x = \alpha$ et $y = \beta = m\alpha + p$. La translation $\overrightarrow{O\omega}$ transforme le repère $xOy$ en $X\omega Y$ et les formules : $x = \alpha + X$, $y = m\alpha + p + Y$ donnent

$$\boxed{Y = mX + \frac{k}{X}} \qquad (2)$$

Y étant fonction impaire de X, le point $\omega$ est un centre de symétrie de la courbe (n° 86).

**192. Théorème. — *La courbe* $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ *est une hyperbole.***

D'après la formule (2) précédente, la courbe est égale à la courbe $y = mx + \dfrac{k}{x}$ qui admet pour asymptotes O$y$ et la droite OX d'équation $y = mx$. Prenons pour vecteur unitaire sur OX (fig. 101) le vecteur $\vec{I} = \vec{i} + m\vec{j}$ et posons $\vec{j} = \vec{J}$. Tout point M de la courbe vérifie donc :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + \left(mx + \frac{k}{x}\right)\vec{j} = x\,(\vec{i} + m\vec{j}) + \frac{k}{x}\vec{j} = x\,\vec{I} + \frac{k}{x}\vec{J}.$$

Rapportée au repère XOY de vecteurs unitaires $\vec{I}$ et $\vec{J}$, les coordonnées X et Y de M vérifient :

$$X = x \quad \text{et} \quad Y = \frac{k}{x} \iff \boxed{XY = k}$$

ce qui montre que la courbe est une hyperbole d'asymptotes OX et OY et de centre O (n° 157).

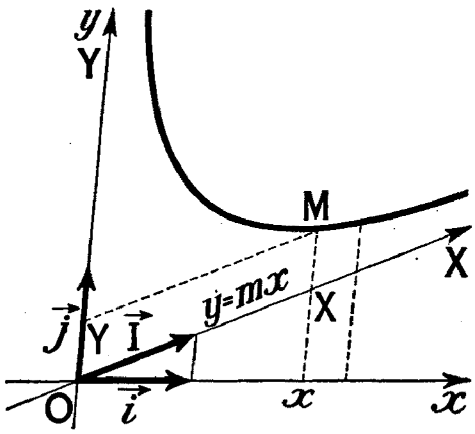



Fig. 101.

**193. Applications.** — 1° La discussion graphique de l'équation :

$$x^2 - 2(m + 1)x + 4m + 1 = 0 \iff m = \frac{(x - 1)^2}{2x - 4}$$

conduit à chercher le nombre de points communs à la courbe (fig. 100) du n° 190 et à la droite variable $y = m$. On obtient :

$m < 0$ : *Deux racines réelles* $x' < 1 < x'' < 2$.

$m = 0$ : *Une racine double* $x' = x'' = 1$.

$0 < m < 2$ : *Pas de racines réelles.*

$m = 2$ : *Une racine double* $x' = x'' = 3$.

$m > 2$ : *Deux racines réelles* $2 < x' < 3 < x''$.

2° Pour tout point M $(x, y)$ intérieur à l'hyperbole (fig. 100) on a :

$$y > \frac{(x - 1)^2}{2x - 4} \quad \text{pour} \quad x > 2 \quad \text{et} \quad y < \frac{(x - 1)^2}{(2x - 4)} \quad \text{pour} \quad x < 2.$$

Il en résulte que l'expression $(2x - 4)y - (x - 1)^2$ est positive à l'intérieur de l'hyperbole, négative à l'extérieur. En général :

***L'expression** $f(x, y) = ax^2 + bx + c + (a'x + b')y$ **conserve un signe constant à l'intérieur de l'hyperbole** $f(x, y) = 0$ **et le signe opposé à l'extérieur de cette hyperbole.***

On pourra ainsi résoudre graphiquement l'inéquation :

$$Ax^2 + Bxy + Cx + Dy + E > 0.$$

## FONCTION : $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

**194. Considérations préliminaires.** — Cette fonction où nous supposons $a' \neq 0$ est le quotient de deux trinômes du second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{et} \quad g(x) = a'x^2 + b'x + c'.$$

La fonction $y$ est définie et continue pour toute valeur de $x$ distincte de l'un de ses pôles, c'est-à-dire des racines de $g(x)$ lorsque ces racines $\alpha$ et $\beta$ sont réelles. Nous supposerons, dans ce qui suit, que $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ne sont pas nuls, sinon $y$ se réduirait à une fonction homographique ou à une constante. La fonction devient alors infinie pour $x = \alpha$ et $x = \beta$ (nº 77). D'autre part lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, la fonction $y$ tend vers $\dfrac{a}{a'}$ valeur asymptotique de cette fonction (nº 80). Sa dérivée qui s'écrit :

$$y' = \frac{(ab' - a'b)\,x^2 + 2\,(ac' - a'c)\,x + bc' - b'c}{(a'x^2 + b'x + c')^2}$$

est du signe du trinôme placé au numérateur dont on sait étudier le signe. Notons que les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative (C) avec une droite :

$$y = mx + p$$

sont racines de :

$$ma'x^3 + (mb' + pa' - a)\,x^2 + (mc' + pb' - b)\,x + pc' - c = 0.$$

Cette équation du 3ᵉ degré montre qu'il existe, au plus trois points d'intersection si $m \neq 0$, deux seulement si $m = 0$ (cas d'une droite parallèle à $Ox$). Ces remarques permettent d'éviter des erreurs dans le tracé de la courbe. Étudions quelques exemples :

**195. Étude de la fonction :** $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}$.

Le dénominateur n'ayant pas de racines, la fonction est définie et continue quel que soit $x$. Elle admet pour valeur asymptotique $+2$.

Sa dérivée : $y' = \dfrac{-3\,(x^2 - 4x + 3)}{(x^2 - 3x + 3)^2}$ s'annule pour $x = 1$ et $x = 3$, d'où le tableau de variation ci-dessous :

| $y$ | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $y$ | 2 | ↘ | $-1$ | ↗ | 3 | ↘ | 2 |

La courbe représentative (C) (fig. 102) admet pour asymptote la droite $\Delta$ d'équation $y = 2$ et admet deux sommets A $(+1; -1)$ et B $(+3; +3)$. Elle passe par l'origine, coupe son asymptote $\Delta$ au point d'abscisse $x = 2$ et recoupe $Ox$ au point d'abscisse $x = \dfrac{3}{2}$.

Démontrons que : *La courbe* (C) *admet trois points d'inflexion alignés.*

L'équation $y'' = 0$ donne : $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$ (1)

Cette équation s'écrit : $(x - 2)^3 - 3(x - 2) - 1 = 0$

et admet 3 racines distinctes car (n° 180) : $4p^3 + 27q^2 = -4 \times 27 + 27 < 0$. Or les abscisses des points communs à la courbe (C) et à la droite $y = mx + p$ sont racines de l'équation :

$$mx^3 - (3m - p + 2)x^2 + 3(m - p + 1)x + 3p = 0.$$

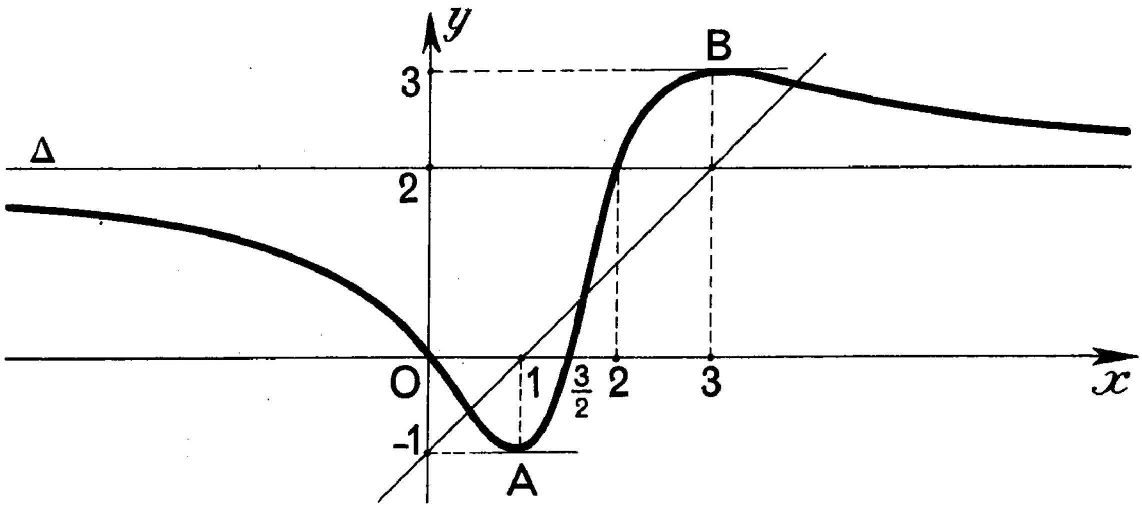



Fig. 102.

Cette équation sera donc équivalente à l'équation (1) si :

$$\frac{m}{1} = \frac{3m - p + 2}{6} = \frac{m - p + 1}{3} = \frac{-p}{1}$$

ce qui est réalisé pour : $m = 1$ et $p = -1$.

Les trois points d'inflexion sont donc les intersections de la courbe (C) par la droite : $y = x - 1$.

## 196. Étude de la fonction : $y = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$.

Cette fonction admet $x = 1$ comme pôle double. Elle est définie et continue pour $x \neq 1$. Elle tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers 1 à gauche ou à droite. On peut écrire en posant $x = 1 + X$ :

$$y = \frac{2(X + 1)^2 - 2(1 + X) - 1}{X^2} = \frac{2X^2 + 2X - 1}{X^2} \Longrightarrow y = 2 + \frac{2}{X} - \frac{1}{X^2} \text{ soit :}$$

$$y = 2 + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{(x - 1)^2} \Longrightarrow y' = \frac{-2}{(x - 1)^2} + \frac{2}{(x - 1)^3} = -2\frac{(x - 2)}{(x - 1)^3}$$

$y'$ est donc du signe du produit $-(x - 1)(x - 2)$. D'où le tableau de variation ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | ‖ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $y$ | 2 | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | | ↗ | 3 | ↘ | 2 |

La courbe représentative (C) (fig. 103) admet l'asymptote double verticale $x = 1$ et l'asymptote horizontale $\Delta$ d'équation : $y = 2$. Elle admet pour sommet le point A (2; 3).

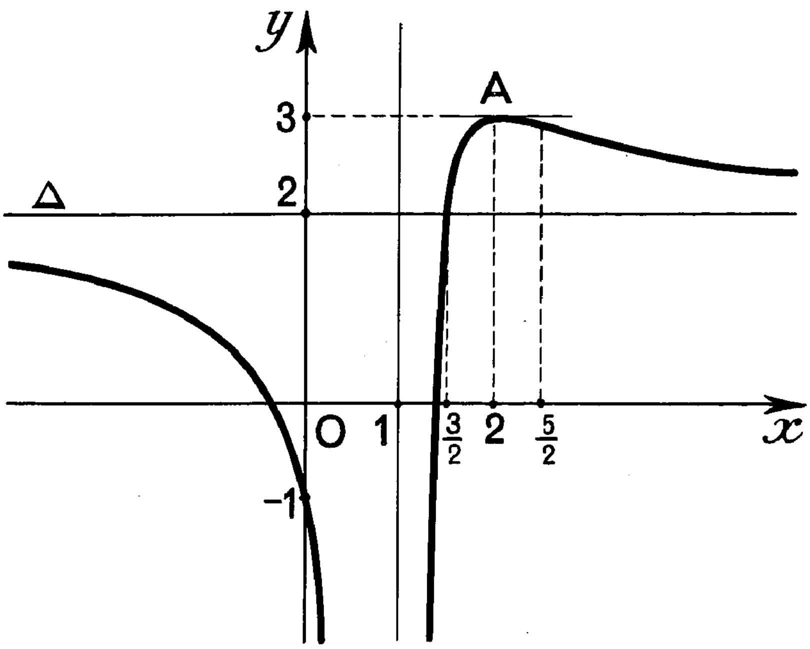



Fig. 103.

Elle coupe son asymptote $\Delta$ au point $x = \frac{3}{2}$, l'axe O$y$ au point $y = -1$ et l'axe O$x$ pour :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

D'autre part :

$$y'' = \frac{2(2x-5)}{(x-1)^4}.$$

La courbe admet pour point d'inflexion I $\left(x = \frac{5}{2};\ y = \frac{26}{9}\right)$. Elle est concave du côté des $y$ négatifs pour $x < \frac{5}{2}$ du côté des $y$ positifs pour $x > \frac{5}{2}$.

## 197. Étude de la fonction : $y = \dfrac{4x^2 + 4x - 9}{4(x^2 - 1)}$.

Cette fonction admet deux pôles $x = -1$ et $x = 1$. Elle est donc définie et continue pour $|x| \neq 1$ et admet la valeur asymptotique $+1$. En identifiant :

$$y = 1 + \frac{4x-5}{4(x^2-1)} \quad \text{avec} \quad 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = 1 + \frac{(A+B)x + A - B}{x^2 - 1}$$

on obtient : $$A = \frac{9}{8},\ B = -\frac{1}{8} \Longrightarrow y = 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{9}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right).$$

Donc : $$y' = -\frac{1}{8}\left(\frac{9}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) = -\frac{(2x-1)(x-2)}{2(x^2-1)^2}.$$

D'où le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1/2$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $5/4$ | ↘ | $1$ |

La courbe représentative (fig. 104) est asymptote aux verticales $x = -1$ et $x = +1$ et à la droite $\Delta$ d'équation $y = 1$ qu'elle coupe au point $x = \frac{5}{4}$. Elle admet deux sommets A $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ et B $\left(2, \frac{5}{4}\right)$. Elle coupe O$y$ au point $y = \frac{9}{4}$ et coupe O$x$ aux points d'abscisses $x = -\frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$.

$$y'' = \frac{1}{4}\left[\frac{9}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x-1)^3}\right] \text{ ne peut s'annuler que pour } \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = 9,$$

c'est dire pour $x_1 = \dfrac{\sqrt[3]{9}+1}{\sqrt[3]{9}-1} \# 2{,}85$. D'autre part puisque $a^3 - b^3$ est du signe de $a - b$, on voit que $y''$ est du signe de :

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x(\sqrt[3]{9}-1) - (\sqrt[3]{9}+1)}{(x-1)(x+1)}$$

donc du signe de $(x - x_1)(x - 1)(x + 1)$. La courbe est concave du côté des $y$ positifs pour $x > x_1$ et pour $-1 < x < 1$, du côté des $y$ négatifs pour $x < -1$ et pour $1 < x < x_1$.

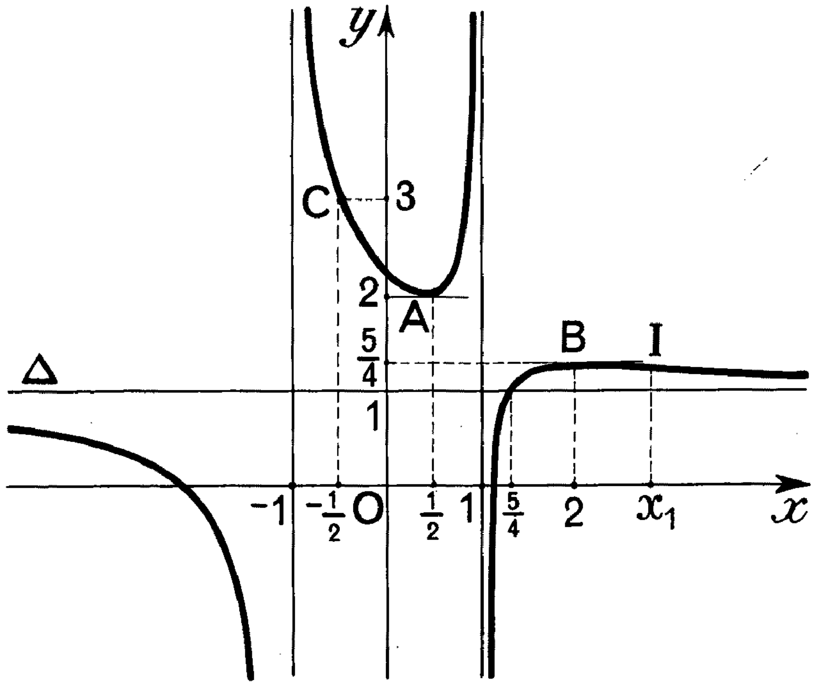



Fig. 104.

## 198. Étude de la fonction : $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 2x - 4}$.

Cette fonction qui s'écrit $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{2(x+1)(x-2)}$ admet pour pôles $x = -1$ et $x = 2$. Elle est définie et continue pour $x \neq -1$ et $x \neq 2$ et admet la valeur asymptotique $\frac{1}{2}$. En identifiant $y$ avec $\frac{1}{2} + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$, on obtient : $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\left[\frac{8}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right]$.

Ce qui donne :
$$y' = \frac{1}{6}\left[\frac{8}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right]$$

et montre que $y'$ est toujours positif pour $x \neq -1$ et 2. On en déduit :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | ‖ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $y$ | $1/2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $1/2$ |

La courbe représentative (C) n'a pas de sommet (fig. 105). Elle admet deux asymptotes verticales $x = -1$ et $x = 2$, une asymptote horizontale $\Delta$ d'équation $y = \frac{1}{2}$ qu'elle coupe au point $x = \frac{5}{3}$. Elle coupe O$y$ au point $y = -\frac{3}{4}$ et coupe O$x$ aux points $x = 1$ et $x = 3$.

$y'' = -\frac{1}{3}\left[\frac{8}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x-2)^3}\right]$ est du signe de : $-\left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right] = -\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}$ soit de $-(x-1)(x+1)(x-2)$.

La courbe tourne donc sa concavité vers les $y$ positifs pour $x < -1$ et pour $1 < x < 2$, vers les $y$ négatifs pour $-1 < x < 1$ et pour $x > 2$. Elle admet donc un point d'inflexion (1, 0) dont la tangente a pour équation $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

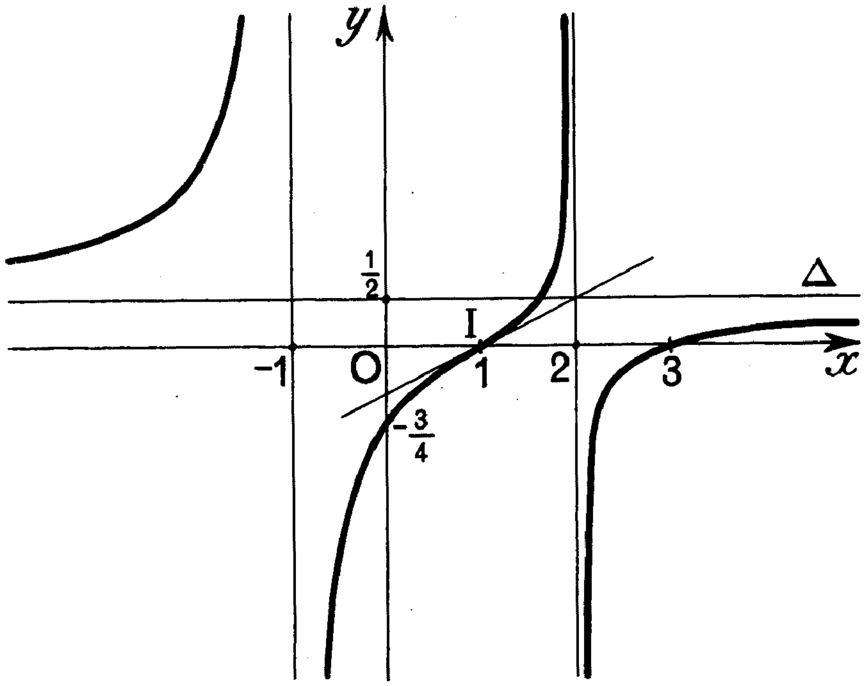



Fig. 105.

**199. Cas général.** — La fonction $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

s'écrit :
$$y = \frac{a}{a'} - \frac{(ab' - a'b)\,x + ac' - a'c}{a'\,(a'x^2 + b'x + c')}. \tag{1}$$

Nous supposerons d'abord : $ab' - a'b \neq 0$ si bien qu'en posant $x = -\dfrac{b'}{2a'} + X$, on obtient (nº 59) la forme réduite :
$$y = \frac{a}{a'} + \frac{MX + N}{X^2 + K} \quad \text{avec } M \neq 0. \tag{2}$$

Désignons par $\Delta$ le discriminant $b'^2 - 4\,a'c'$ du dénominateur $a'x^2 + b'x + c'$.

**1er cas :** $\Delta < 0$. La fonction $y$ n'a pas de pôle réel et K est positif. Puisque la dérivée $X' = 1$, on voit que : $y' = \dfrac{-MX^2 - 2\,NX + MK}{(X^2 + K)^2}$ s'annule pour deux valeurs $x_1$ et $x_2$ de $x$. La fonction $y$ est définie et continue quel que soit $x$ et admet un maximum et un minimum $f(x_1)$ et $f(x_2)$. La courbe représentative (fig. 102) admet deux sommets de part et d'autre de son asymptote horizontale $y = \dfrac{a}{a'}$. Elle présente visiblement trois points d'inflexion réels. On peut, comme au nº 195 montrer qu'ils sont alignés sur la droite :
$$(ab' - a'b)\,x - (b'^2 - 4\,a'c')\,y + bb' - 3\,a'c - ac' = 0.$$

**2e cas :** $\Delta = 0 \Longrightarrow K = 0$. La fonction $y$ admet un pôle double $x = -\dfrac{b'}{2a'}$, et s'écrit :
$$y = \frac{a}{a'} + \frac{M}{X} + \frac{N}{X^2} \implies y' = -\frac{M}{X^2} - \frac{2N}{X^3} \implies y'' = \frac{2M}{X^3} + \frac{6N}{X^4}.$$

La courbe (fig. 103) admet la droite $X = 0$ pour asymptote double, un seul sommet pour $X = -\dfrac{2N}{M}$ et un seul point d'inflexion réel pour $X = -\dfrac{3N}{M}$. Elle coupe son asymptote horizontale $y = \dfrac{a}{a'}$ pour $X = -\dfrac{N}{M}$.

**3^e^ cas :** $\Delta > 0$. La fonction $y$ a deux pôles distincts $\alpha$ et $\beta$. Par identification, on peut écrire :

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \implies y' = -\frac{A}{(x-\alpha)^2} - \frac{B}{(x-\beta)^2}$$

$$\implies y'' = \frac{2A}{(x-\alpha)^3} + \frac{2B}{(x-\beta)^3}.$$

*a*) $AB < 0$. — La dérivée $y'$ s'annule pour deux valeurs distinctes $x_1$ et $x_2$ telles que

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}}$$

donc, conjuguées harmoniques par rapport à $\alpha$ et $\beta$. La courbe (C) (fig. 104) a deux sommets situés l'un entre les asymptotes verticales $x = \alpha$ et $x = \beta$, l'autre à l'extérieur.

*b*) $AB > 0$. La dérivée $y'$ conserve le même signe sur chacun des intervalles limités par $\alpha$ et $\beta$. Donc $y$ varie toujours dans le même sens. La courbe n'a pas de sommet (fig. 105).

Quel que soit le signe de AB, la courbe présente un point d'inflexion pour $x$ tel que $\dfrac{x-\alpha}{x-\beta} = -\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}}$, situé à l'extérieur des asymptotes verticales $x = \alpha$, $x = \beta$ pour $AB < 0$, entre ces asymptotes pour $AB > 0$ (fig. 105 et 106). Elle coupe son asymptote horizontale pour $\dfrac{x-\alpha}{x-\beta} = -\dfrac{A}{B}$.

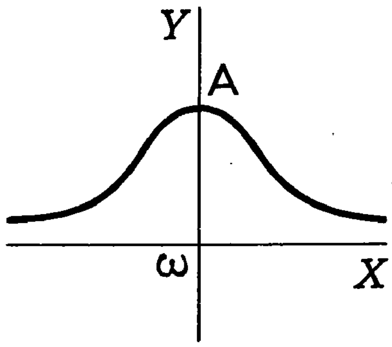



Fig. 106.

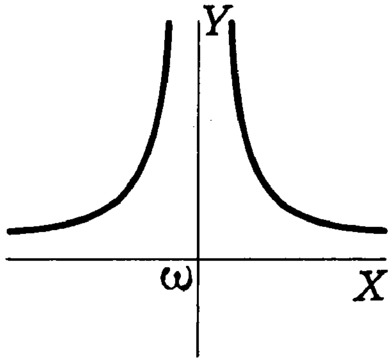



Fig. 107.

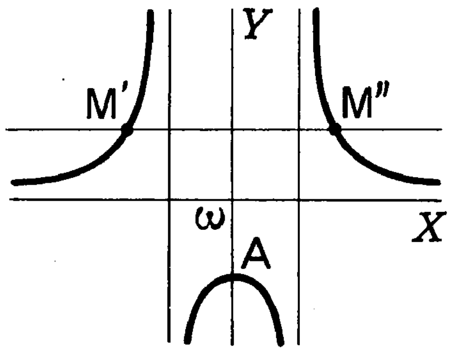



Fig. 108.

**4^e^ cas :** $ab' - a'b = 0 \implies M = 0$.

On obtient : $$y = \frac{a}{a'} + \frac{N}{X^2 + K} = \frac{a}{a'} + \frac{k}{g(x)}.$$

On voit que $Y = y - \dfrac{a}{a'}$ est l'inverse d'un trinôme du second degré. La courbe qui présente l'une des trois dispositions des figures 106 à 108 suivant que $\Delta$ est négatif, nul ou positif, admet la droite $X = 0$ ou $x = -\dfrac{b'}{2a'}$ comme axe de symétrie.

Remarque. — En posant $Y = y - \frac{a}{a'}$, on obtient $Y = \frac{MX + N}{X^2 + K}$. Si $N = 0$, on voit que $Y = \frac{MX}{X^2 + K}$ est fonction impaire de X. La courbe admet alors le point $\omega \left(x = -\frac{b'}{2a'}, y = \frac{a}{a'}\right)$ comme centre de symétrie. Ceci peut se produire dans le cas des figures 102 et 105.

**200. Intersection avec la droite $y = m$.** — L'équation aux abscisses $x'$ et $x''$ des points d'intersection M′ et M″ de la courbe (C) (fig. 109) :

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

et de la droite variable (D) d'équation : $y = m$ s'écrit :

$$(a - ma')\,x^2 + (b - mb')\,x + (c - mc') = 0. \qquad (1)$$

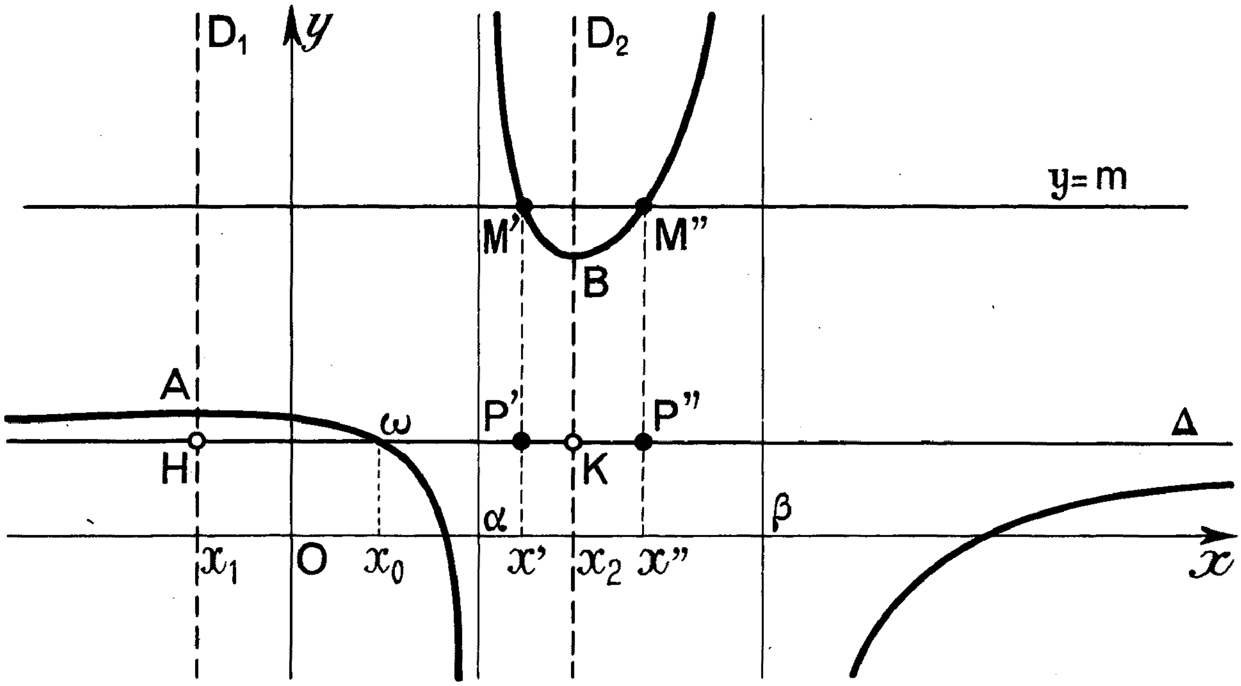



Fig. 109.

Les racines $x'$ et $x''$ de cette équation vérifient, lorsqu'elles existent, les relations :

$$x'x'' = \frac{c - mc'}{a - ma'} \quad \text{et} \quad x' + x'' = -\frac{b - mb'}{a - ma'}$$

que l'on peut écrire (nº 163) :

$$x'x'' = \frac{c'}{a'} - \frac{ac' - a'c}{a'(a - ma')} \quad \text{et} \quad x' + x'' = -\frac{b'}{a'} + \frac{ab' - a'b}{a'(a - ma')}.$$

En éliminant $a'(a - ma')$, on obtient entre $x'$ et $x''$, la relation homographique involutive (nº 165), indépendante de $m$ :

$$(ab' - a'b)\,x'x'' + (ac' - a'c)\,(x' + x'') + bc' - b'c = 0. \qquad (2)$$

Si $ab' - a'b = 0$, la relation (2) se réduit à : $x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}$. Les points M′ et M″ sont symétriques par rapport à la droite $\omega Y$ d'équation $x = -\frac{b'}{2a'}$ (fig. 106 à 108).

Si $ab' - a'b \neq 0$, la courbe (C) coupe son asymptote horizontale $\Delta$ en un point $\omega$ dont l'abscisse (nº 199, formule 1) est : $x_0 = -\dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$. La relation (2) s'écrit alors :

$$x'x'' - x_0(x' + x') + \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} = 0,$$

soit :
$$(x' - x_0)(x'' - x_0) = k. \tag{3}$$

En désignant par P′ et P″ les projections de M′ et M″ sur $\Delta$ on obtient :

$$\overline{\omega P'}.\overline{\omega P''} = k.$$

Si la courbe (C) a deux sommets A et B d'abscisses $x_1$ et $x_2$, ce sont des positions où viennent se confondre M′ et M″. En désignant par H et K les projections de A et B sur $\Delta$ (fig. 109), on obtient donc :

$$\overline{\omega H}^2 = \overline{\omega K}^2 = \overline{\omega P'}.\overline{\omega P''} \implies (\mathrm{HK\,P'P''}) = -1.$$

*Les points* M′ *et* M″ *restent conjugués harmoniques par rapport aux deux droites* $D_1$ et $D_2$ *d'équations* $x = x_1$ *et* $x = x_2$.

Il en est ainsi des intersections de la courbe (C) avec O$x$ pour $m = 0$ et aussi des pieds des asymptotes verticales lorsqu'elles sont distinctes car leurs abscisses $\alpha$ et $\beta$ sont les limites de $x'$ et $x''$ lorsque $m$ tend vers l'infini. S'il y a une asymptote verticale double (fig. 103) elle est confondue avec l'une des deux droites $D_1$ ou $D_2$ et le sommet correspondant est rejeté à l'infini.

**201. Discussion graphique d'une équation du 2e degré.** — L'équation du second degré, dépendant au premier degré d'un paramètre $m$, s'écrit :

$$(am + a')x^2 + (bm + b')x + (cm + c') = 0. \tag{1}$$

Cette équation n'est autre que l'équation aux abscisses des points d'intersection de la courbe (C) d'équation : $y = -\dfrac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$ et de la droite variable $y = m$. La construction de la courbe (C) permet d'étudier l'existence et la position des racines de l'équation (1) par rapport à un ou plusieurs nombres donnés.

Exemple. — *Étudier l'existence et la position par rapport aux nombres* 0 *et* $\frac{3}{2}$ *des racines de l'équation en* $x$ : $(m - 2)x^2 - 2(m - 1)x + (m + 1) = 0$.

Cette équation s'écrit : $m = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$. C'est l'équation aux abscisses des points communs à la droite $y = m$ et à la courbe de la figure 103. On obtient :

| | |
|---|---|
| $m > 3$ | : *Pas de racines réelles.* |
| $2 < m \leqslant 3$ | : $0 < \frac{3}{2} < x' \leqslant x''$. |
| $m = 2$ | : *Équation du* 1er *degré* : $x = \frac{3}{2}$. |
| $-1 < m < 2$ | : $x' \leqslant 0 < x'' < \frac{3}{2}$. |
| $m < -1$ | : $0 < x' < x'' < \frac{3}{2}$. |

## EXERCICES

— Étudier les variations des fonctions suivantes et construire leurs courbes représentatives :

**445.** $y = x + \frac{1}{x}\cdot$

**446.** $y = x - \frac{1}{x}\cdot$

**447.** $y = 4x - 3 - \frac{1}{x}\cdot$

**448.** $y = 4x - 3 + \frac{1}{x}\cdot$

**449.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4x}\cdot$

**450.** $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{5x}\cdot$

**451.** $y = \frac{x}{2} - 3 - \frac{4}{x+1}\cdot$

**452.** $y = 5x - 3 + \frac{1}{x-3}\cdot$

**453.** $y = 2x - 1 + \frac{1}{2x-3}\cdot$

**454.** $y = 3x - 7 - \frac{5}{x+2}\cdot$

**455.** $y = \frac{2x^2 - 3x + 6}{2x+1}\cdot$

**456.** $y = \frac{x^2 + x}{x-1}\cdot$

**457.** $y = \frac{x^2 - x - 2}{x-2}\cdot$

**458.** $y = \frac{2x^2 - 6x + 3}{x-2}\cdot$

**459.** $y = \frac{15x^2 + 45x + 34}{5(x+1)}\cdot$

**460.** $y = \frac{4x^2 - 10x - 2}{2(2x+1)}\cdot$

**461.** $y = \frac{18x^2 - 15x + 8}{3x-2}\cdot$

**462.** $y = \frac{18x^2 - 45x + 8}{3(x-2)}\cdot$

**463.** 1° Variation et courbe représentative de la fonction : $y = 4x + 1 + \frac{1}{x}\cdot$

Établir l'existence d'un centre de symétrie.

2° Déterminer la constante $h$ pour que la fonction : $y = \frac{2x^2 - 7x + 8}{x-h}$ ait un maximum et un minimum qui diffèrent de 8.

**464.** 1° Étudier les variations de la fonction : $x + \frac{1}{x}\cdot$

2° Soit $z = 9x^2 + 25x + 16$. Étudier les variations des fonctions : $\frac{x}{z}$ et $\frac{z}{x}\cdot$

Pour quelles valeurs de $x$ ces fonctions sont-elles égales à $+1$ ou à $-1$ ?

3° Etudier les variations de la fonction : $y = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}\cdot$

**465.** Soient : $b = 3a - 4a^3$ et $y = \frac{x^2 - a^2}{x-b}\cdot$

1° Variation de $b$ lorsque $a$ croît de 0 à 1.

2° Variation de $y$ lorsque $a$ constant est compris entre 0 et 1. Courbe représentative.

3° Lorsque $y$ est donné combien lui correspond-il de valeurs de $x$ comprises entre $a$ et 1 ?

**466.** 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \frac{x^2 - 5x - 2}{2(x+1)}$ et les représenter graphiquement dans un repère orthonormé par une courbe (C).

2° Sur le même graphique, représenter la droite (D) d'équation $y = ax + b$.

Comment faut-il choisir $a$ pour que (D) coupe la courbe (C) en deux points A et B situés sur deux branches distinctes de cette courbe ?

Calculer alors les coordonnées du milieu M de AB en fonction de $a$ et $b$. En déduire le lieu géométrique du point M lorsque $b$ varie, $a$ restant fixe.

3° Ce lieu est une droite ($\Delta$). Déterminer $a$ de façon que (D) et ($\Delta$) soient perpendiculaires. Que peut-on dire alors des droites (D) et ($\Delta$) ?

**467.** 1° Étudier les variations des fonctions :

$$(1) \quad y = \frac{2x^2 - 5x + 8}{x - 2} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad y = \frac{2x^2 - 15x + 8}{x - 6}.$$

Construire, dans le même repère orthonormé, leurs courbes représentatives (prendre le demi-centimètre pour unité d'abscisses et d'ordonnées).

Déterminer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes. Établir, pour la courbe (1) seulement l'existence d'un centre de symétrie. On admettra ce résultat pour la courbe (2).

2° On considère la fonction (3) : $y = \dfrac{2x^2 - 5ax + 8}{x - 2a}$ dans laquelle $a$ désigne un nombre réel quelconque donné.

Pour quelles valeurs de $a$ la fonction (3) est-elle constamment croissante ? Pour quelles valeurs de $a$ la fonction (3) passe-t-elle par un maximum et par un minimum ?

Ces valeurs de $a$ sont séparées par deux nombres $a_1$ et $a_2$ que vous déterminerez. Que devient la fonction (3) si l'on donne à $a$ l'une ou l'autre de ces valeurs ?

3° On suppose toutes les courbes (C), qui représentent les diverses fonctions (3) obtenues en donnant à $a$ toutes les valeurs possibles construites dans le même repère orthonormé. Quel est le lieu des points d'intersection des asymptotes des courbes (C) ? Montrer que toutes les courbes (C) passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.

Vérifier sur ces nouveaux résultats ceux des paragraphes 1 et 2.

4° Quelles sont les valeurs de $a$ pour lesquelles les courbes (C) coupent $x'Ox$ ? Quelles sont les valeurs de $a$ pour lesquelles les courbes (C) sont tangentes à $x'Ox$ ?

On désignera par $T_1$ et $T_2$ les points de tangence, par $m_1$ et $m_2$ les points où une courbe (C) coupe O$x$. Quelle est la disposition remarquable des points $m_1$, $m_2$, $T_1$, $T_2$ ? Quel est l'axe radical des cercles qui ont pour diamètre $m_1m_2$ ?

**468.** 1° On considère la courbe qui, dans un repère orthonormé XIY, représente une fonction de la forme : $Y = \dfrac{AX^2 + BX + C}{MX + N}$ $(A \neq 0 ; M \neq 0)$.

*a*) Former l'équation donnant les valeurs de X pour lesquelles la fonction passe par un extremum (c'est-à-dire un maximum ou un minimum).

*b*) Montrer que la courbe admet une asymptote oblique et en déterminer le coefficient directeur.

*c*) Indiquer à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients pour que l'origine I soit centre de symétrie de la courbe.

2° On considère maintenant des axes O$x$, O$y$. Quelles valeurs peut-on donner aux coefficients de la fonction : $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ pour qu'elle passe par un extremum égal à 1 pour $x = 2/3$ et que la courbe représentative admette pour centre de symétrie le point I de coordonnées $x = 2, y = 3$ ?

L'extremum est-il un maximum ou un minimum ?

3° Les conditions du 2° sont remplies en prenant par exemple :

$$a = 9; \quad b = 0; \quad c = -20; \quad m = 12; \quad n = -24.$$

Étudier les variations de la fonction ainsi déterminée et tracer la courbe représentative (C).

4° Par le point P ($x = 0$, $y = 3$) on mène une droite (D) de pente $p$.

*a*) Former l'équation aux abscisses des points d'intersection A et B de la droite (D) avec la courbe et étudier les conditions d'existence de ces racines. Interprétation géométrique.

*b*) Déduire de cette équation les coordonnées du point Q conjugué harmonique de P par rapport à A et B. Lieu de Q quand P varie.

— Étudier les variations et construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

**469.** $y = \frac{2x}{(x-1)(x-2)}$. **470.** $y = \frac{x}{x^2+4}$. **471.** $y = \frac{x}{(x+2)^2}$.

**472.** $y = \frac{x}{x^2-4}$. **473.** $y = \frac{4}{x^2-2x}$. **474.** $y = \frac{2}{x^2+4}$.

**475.** $y = \frac{x^2+9x+10}{x^2+5x+6}$. **476.** $y = \frac{2x^2-2x-6}{x^2-2x+2}$.

**477.** $y = \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^2}$. **478.** $y = \frac{2x^2+9x+8}{x^2+4x+3}$.

**479.** $y = \frac{2x^2+12x+21}{x^2+6x+10}$. **480.** $y = \frac{3x^2+18x+29}{x^2+6x+9}$.

**481.** $y = \frac{2x^2-6x+8}{x^2+3x+2}$. **482.** $y = \frac{(x-1)(x+1)}{x(5x+4)}$.

**483.** $y = \frac{x^2-10x+21}{x^2-4}$. **484.** $y = \frac{x^2-8x+5}{x^2+1}$.

**485.** $y = \frac{(x+1)^2}{2(x^2-x+1)}$. **486.** $y = \frac{x^2-13x+36}{(x-6)^2}$.

**487.** $y = \frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}$. **488.** $y = \frac{2x^2+3x-5}{x^2+x+1}$.

**489.** $y = \frac{x(1-x)}{x^2+x+1}$. **490.** $y = \frac{x(1-x)}{x^2+1}$.

**491.** $y = \frac{2x^2-3x+2}{x^2+1}$. **492.** $y = \frac{6x^2-7x+12}{2x^2+x-6}$.

**493.** $y = \frac{3x-4}{x^2+1}$. **494.** $y = \frac{3x^2-6x-9}{(2x+1)^2}$.

**495.** Simplifier la fonction $y = \frac{x^2+1}{(x-1)^4+4}$ puis construire le graphe de la fonction obtenue.

**496.** La fonction $\frac{3x^2+px+6}{2x^2-3x+q}$ peut-elle être indépendante de $x$ ? Pour quelles valeurs de $p$ et $q$ en est-il ainsi ?

**497.** Déterminer $p$ et $q$ pour que, quel soit $x$, la fonction : $y = \frac{x^2-2}{x^2+px+q}$ soit comprise entre $-\frac{1}{3}$ et 2.

**498.** 1° Construire la courbe d'équation : $y = \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x+3}$.

2° Une droite D d'équation $y = h$ coupe cette courbe en deux points d'abscisses $x'$ et $x''$. Montrer qu'il existe entre $x'$ et $x''$ une relation indépendante de $h$.

**499.** Une droite D d'équation $y = m$ coupe la courbe C d'équation $y = \frac{3x^2+2}{x(x+4)}$ en A et B et coupe l'axe O$y$ en C. Trouver le lieu du conjugué harmonique de C par rapport à A et B.

**500.** Étudier suivant les valeurs de $a$ le graphique de la fonction : $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2ax+1}$.

**501.** Quelles valeurs faut-il donner à $m$ pour que la fonction $y = \dfrac{(x-1)(x-m)}{(x-2)(x+2)}$ puisse prendre toutes les valeurs possibles ?

**502.** Déterminer la constante $h$ de façon que la fonction : $y = \dfrac{12x^2 + hx + 3}{4x^2 - 4x - 3}$ ait un maximum et un minimum qui diffèrent de 3.

**503.** Déterminer les coefficients $p$ et $q$ pour que les tangentes aux points d'ordonnée nulle de la courbe $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + px + q}$ soient, dans un repère orthonormé, perpendiculaires et se coupent sur l'axe O$y$.

**504.** 1° Construire la courbe représentant les variations de la fonction : $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

Déterminer son maximum et son minimum.

2° Discuter l'existence des racines de l'équation du second degré : $mx^2 - (3m + 1)x + 2m = 0$ relativement au paramètre $m$. Les placer par rapport aux nombres 1 et 2.

Interpréter graphiquement les résultats à l'aide de la courbe précédemment construite.

**505.** Soit la fonction : $y = \dfrac{x^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$.

1° Déterminer $b$, $c$, $p$, $q$ de façon que $y$ passe par un maximum égal à 3 pour $x = 1$ et par un minimum égal à $-3$ pour $x = -1$.

2° Construire la courbe représentative C.

3° La droite $y = m$ peut couper C en M et M′. Dire pour quelles valeurs de $m$ ces points existent. Calculer en fonction de $m$ l'abscisse du milieu du segment MM′.

**506.** Soit (C) la courbe qui représente en axes rectangulaires la variation de la fonction :

$$y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}.$$

On désigne par $x$, $x'$ $x_0$, $x_1$ les abscisses des points M, M′, $M_0$, $M_1$ de la courbe (C).

1° Construire la courbe (C).

2° $m$ étant un nombre quelconque, la droite $y = mx$ coupe la courbe en O et en deux autres points au plus. Discuter l'existence de ces points. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que M et M′ soient alignés avec O est $x + x' = 3$.

Quel est alors le lieu du milieu de MM′ ? Déterminer les coordonnées du point de contact de la tangente à (C) issue de O.

3° Il existe sur (C) deux points $M_0$, $M_1$ ayant même ordonnée Y. Lieu de leur milieu P quand Y varie. La condition nécessaire et suffisante pour que $M_0M_1$ soit parallèle à O$x$ est $x_0x_1 = 2$.

4° Calculer le coefficient directeur de la droite $M_0M$. Calculer $x$ en fonction de $x_0$ lorsque $M_0M$ est tangente à (C) en $M_0$.

5° $M_0M_1$ étant parallèle à O$x$, $M_0M$ et $M_1M'$ étant tangentes à la courbe (C) en $M_0$ et $M_1$, montrer que MM′ passe par O.

**507.** 1° Variation de la fonction : $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$ ; représentation graphique.

2° Soit M le point d'abscisse $\alpha$ sur la courbe (C) d'équation $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$. Écrire l'équation de la tangente en M à la courbe (C), et trouver l'ordonnée X du point où cette tangente coupe l'axe O$y$.

3° D'un point donné T de l'axe O$y$, on se propose de mener des tangentes à la courbe (C). Montrer que le problème admet en général deux solutions. Conditions de possibilité.

Exprimer en fonction de l'ordonnée $\lambda$ du point T le coefficient directeur $m$ de la droite M′M″ qui joint les points de contact des tangentes obtenues ainsi que les coordonnées $(x_1, y_1)$ du milieu K du segment M′M″; en déduire l'équation de la droite M′M″.

4° Dessiner une figure d'ensemble dans le cas particulier $\lambda = 1$ que l'on étudiera en détail.

**508.** On considère les fonctions : $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + b'x + c'}$ et les courbes qui les représentent.

1° Déterminer certains des coefficients $a$, $b$, $c$, $b'$, $c'$, pour que les droites $y = 1$, $x = 0$, $x = 3$ soient asymptotes à la courbe.

2° On veut de plus que la fonction ait un maximum ou un minimum pour $x = 2$. Trouver la relation que doivent vérifier les coefficients non encore déterminés. Déterminer l'abscisse du 2e minimum ou maximum. Discuter sa nature (maximum ou minimum) suivant les valeurs de $b$.

3° Les courbes satisfaisant aux conditions précédentes forment une famille dépendant d'un paramètre $b$ par exemple. Démontrer que deux courbes quelconques de cette famille se coupent toujours en un même point. Calculer les coordonnées de ce point.

4° Étudier l'intersection de la droite $4y = x$ avec les courbes précédentes. Démontrer que l'un des points d'intersection est indépendant du paramètre. Déterminer les valeurs de ce paramètre pour lesquelles la courbe est tangente à la droite et construire celle de ces courbes qui est tangente à la droite au point déterminé au 3e.

**509.** On considère la fonction : $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2px + q}$ et on suppose que le dénominateur ne puisse pas s'annuler.

1° Montrer que l'équation $y = A$ admet deux racines lorsque le nombre A est compris entre deux limites $m$ et M.

2° Trouver la relation qui doit exister entre $p$ et $q$ pour que M soit égal à 2.

3° On donne à $m$ une valeur fixe inférieure à 2. Trouver les fractions $y$ correspondantes. Discuter.

4° Trouver, pour une de ces fractions, l'équation de la droite qui joint les points de la courbe correspondant à M et à $m$. Trouver le troisième point de rencontre de cette courbe et de la droite.

**510.** 1° Montrer que le polynôme $x^3 - 3x + 2$ est divisible par $x - 1$. Résoudre les équations : $x^3 - 3x + 2 = 0$; $x^3 - 3x - 2 = 0$.

2° Représenter graphiquement les variations de la fonction : $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$.

Mener par le point A de coordonnées $(1, 0)$ une tangente à la courbe et trouver les coordonnées des points de rencontre de cette droite et de la courbe.

3° Construire les courbes $y = \dfrac{1}{a(x^2 + x + 1) - 3}$ dans un repère orthonormé.

4° Trouver les points d'intersection de ces courbes avec une droite de pente $m$ passant par A. Discuter.

5° Interpréter graphiquement les résultats.

**511.** On considère la fonction : $y = \dfrac{x^2 - mx + 3}{x^2 + 4x - (m + 1)}$; $x$ variable; $m$ paramètre.

A chaque valeur de $m$ correspondent une fonction et une courbe représentative $(C_m)$ des variations de cette fonction.

1° Montrer que $(C_m)$ admet une asymptote parallèle à $x'x$ et que le point d'intersection de $(C_m)$ avec cette asymptote est indépendant de la valeur de $m$.

2° Montrer que toutes les courbes $(C_m)$ passent par deux autres points fixes quelle que soit la valeur de $m$.

3° Étudier la fonction $y$ et construire les courbes $(C_m)$ obtenues pour les valeurs :

$$m = -12; \quad m = -5; \quad m = +11.$$

Pour le graphique, prendre pour unité le centimètre et utiliser le même repère orthonormé $xOy$ pour tracer tous les graphiques.

4° Que deviennent la fonction et la courbe $(C_m)$ dans les deux cas particuliers où

$$m = -4; \quad m = +4\,?$$

5° Former les équations des tangentes à une courbe $(C_m)$ aux points A d'abscisse $x = +1$, et B d'abscisse $x = -1$, $m$ étant quelconque. Calculer en fonction de $m$ les coordonnées du point d'intersection M de ces deux tangentes et en déduire le lieu de M quand $m$ prend toutes les valeurs possibles.

**512.** On considère la parabole d'équation $y^2 = 2px$ (repère orthonormé, $p > 0$). Soient F son foyer et A le point symétrique de F par rapport à la tangente au sommet. On se propose d'étudier la variation du rapport $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{FM}}$ lorsque le point M décrit la parabole.

1° Montrer que le carré de ce rapport a l'expression : $u = \dfrac{x^2 + 3px + \dfrac{p^2}{4}}{x^2 + px + \dfrac{p^2}{4}}$

en fonction de l'abscisse $x$ de M.

2° Construire la courbe des variations de $u$ quand $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, en mettant en évidence la partie utile de la courbe.

**513.** On donne la fonction : $y = \dfrac{8x^2 - 6x + 6}{4x^2 - 9x - 9}$.

1° Montrer que l'on peut mettre $y$ sous la forme : $y = a + \dfrac{b}{x - m} + \dfrac{c}{x - n}$

$a, b, c, m, n$ étant des nombres que l'on déterminera. Étudier les variations de $y$ et dessiner la courbe représentative (C) en prenant pour unité de longueur 2 cm.

2° On coupe la courbe (C) par une droite parallèle à $x'x$ d'ordonnée $l$. Il existe, en général, deux points d'intersection M, M'. Déterminer le lieu de leur milieu I quand $l$ varie. Construire ce lieu. Pouvait-on prévoir quelques particularités de ce lieu ?

3° Montrer qu'il existe une relation indépendante de $l$ entre les abscisses des points M et M'. En déduire qu'il existe un point J de l'axe $x'x$ tel que $\overline{\mathrm{JP}}.\overline{\mathrm{JP'}}$ soit constant, P et P' désignant les projections de M et M' sur $x'x$.

4° On considère l'équation : $(4l - 8)\cos^2 x - (9l - 6)\cos x - (9l + 6) = 0$. En utilisant la courbe (C), déterminer suivant les valeurs de $l$ le nombre des solutions de cette équation.

Résoudre effectivement cette équation si $l = -\dfrac{4}{7}$. On exprimera les angles en radians.

**514.** Soit une fonction : $y = \dfrac{x^2 - 5x + m}{(x - 2)^2}$.

1° Déterminer $m$ pour que cette fonction passe par un maximum pour $x = -2$. Représenter graphiquement, sur un plan rapporté à deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ les variations de la fonction ainsi obtenue. Soit (C) la courbe trouvée. (La construction de cette courbe sera faite en prenant le centimètre pour unité d'abscisse et d'ordonnée.)

2° On coupe la courbe (C) par des droites $y = k$. Dire, sans nouveau calcul, en combien de points ces droites coupent (C), selon les valeurs de $k$.

Soient M et N les points d'intersection correspondant à une valeur de $k$, $x'$ et $x''$ leurs abscisses. Quelle relation, indépendante de $k$, existe-t-il entre ces abscisses ? Vérifier, à l'aide de cette relation, les résultats du 1°.

Trouver l'équation de la courbe (Γ) qui est le lieu du milieu de MN, et construire cette courbe sur les mêmes axes que (C). Expliquer, a priori, pourquoi (C) et (Γ) ont les mêmes asymptotes.

3° La courbe (C) coupe $Ox$ en deux points A et B. On mène en chacun de ces deux points la tangente à (C). Ces tangentes se coupent en T. Calculer à un milligrade près les angles du triangle ABT.

4° Une droite passe par le point P de la courbe (C) dont l'abscisse est égale à $+3$. Soit $a$ le coefficient directeur de cette droite. Déterminer, selon les valeurs de $a$, le nombre des points communs à cette droite et à la courbe (C). Pour quelles valeurs de $a$ cette droite est-elle tangente à (C) en P ? en un autre point Q dont on déterminera les coordonnées ?

**12e Leçon**

# ARCS ET ANGLES

**202. Arc géométrique.** — Deux points A et B d'un cercle O (fig. 110) définissent deux arcs AB d'extrémités A et B, l'un inférieur, l'autre supérieur à une demi-circonférence. Les demi-droites OA et OB déterminent deux angles en centre, l'un saillant, l'autre rentrant. Chacun d'eux est l'angle au centre correspondant à l'arc AB qu'il intercepte. On sait que les arcs et les angles sont des grandeurs mesurables et que :

***Un arc de cercle et l'angle au centre correspondant sont mesurés par le même nombre, à condition d'adopter pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte l'unité d'arc.***

**203. Unités d'arc et d'angle.** — L'unité d'arc est le **quadrant** (le quart du cercle); l'unité d'angle correspondante est l'**angle droit** ($1^D$). On emploie plutôt :

1° **Le degré** (°) : $\frac{1}{90}$ du quadrant pour les arcs; $\frac{1}{90}$ de l'angle droit pour les angles. Le degré se divise en 60 minutes ($'$); la minute en 60 secondes ($''$).

2° **Le grade** (gr) : $\frac{1}{100}$ partie du quadrant pour les arcs; $\frac{1}{100}$ partie de l'angle droit pour les angles. Les sous-multiples du grade sont décimaux : décigrade, centigrade, etc.

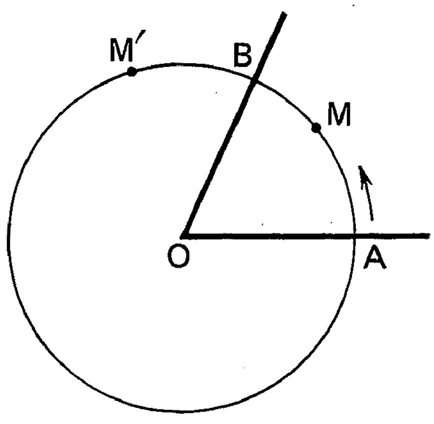



Fig. 110.

3° **Le radian** (*rd*) : ***arc de cercle dont la longueur est égale au rayon du cercle.*** L'angle au centre correspondant se nomme aussi *radian* (rd).

Le périmètre d'un cercle de rayon R valant $2\pi R$, il en résulte que le cercle entier vaut $2\pi$ radians :

$$360° = 400 \text{ gr} = 2\pi \text{ rd} \iff \boxed{180° = 200 \text{ gr} = \pi \text{ rd}}$$

Les mesures $d$, $g$, $\alpha$ d'un même arc en degrés, grades et radians vérifient donc :

$$\boxed{\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

formules qui permettent le passage d'une unité à une autre. Les formules de dérivation (17e leçon) étant plus simples en radians, c'est cette unité que nous utiliserons dorénavant à moins d'indication contraire. Il est bon de savoir que :

$$90^o = \frac{\pi}{2}\text{ rd} \quad ; \quad 45^o = \frac{\pi}{4}\text{ rd} \quad ; \quad 60^o = \frac{\pi}{3}\text{ rd} \quad ; \quad 30^o = \frac{\pi}{6}\text{ rd.}$$

**204. Extension de la notion d'arc.** — La notion d'arc peut être généralisée par la considération d'arcs orientés et par celle d'arcs dont la longueur dépasse celle du cercle.

Imaginons qu'un mobile M se déplace *constamment dans le même sens* sur la circonférence du cercle O (fig. 110). Ce mouvement peut s'opérer soit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ou *sens direct*, soit dans le sens des aiguilles d'une montre ou *sens rétrograde*. En trigonométrie, on adopte pour *sens positif* ou *sens trigonométrique* le sens direct et pour sens *négatif* le sens rétrograde. On dit alors que le cercle O est orienté :

***Un cercle est orienté lorsqu'on adopte sur sa circonférence un sens de parcours positif.***

Soient deux points A et B *pris dans cet ordre* sur le cercle O. Imaginons que le mobile M partant de A se déplace *constamment dans le même sens* sur le cercle et arrive en B. Nous dirons que M a parcouru un arc orienté $\overrightarrow{AB}$ d'origine A et d'extrémité B.

Il existe une infinité d'arcs $\overrightarrow{AB}$ : la connaissance de l'origine A et de l'extrémité B ne définit pas parfaitement cet arc; il faut connaître en outre le *sens* de parcours du mobile M et le *nombre de tours* complets qu'il effectue sur le cercle avant de s'arrêter en B. Dans ces conditions :

***La mesure algébrique d'un arc orienté*** AB ***est un nombre dont la valeur absolue est la mesure de l'arc géométrique*** AB ***(qui peut être supérieure à celle du cercle) et dont le signe est + ou — selon que l'arc est décrit dans le sens positif adopté sur le cercle ou en sens inverse.***

Un arc est parfaitement déterminé par son origine et sa mesure algébrique; par exemple si $\overrightarrow{AB} = -420^o, = -360^o - 60^o$, M décrit un tour complet dans le sens négatif, puis, toujours dans le même sens, un arc AB de $60^o$.

**205. Théorème.** — ***Pour que deux arcs de même origine aient même extrémité, il faut et il suffit que la différence de leurs mesures algébriques soit un nombre entier de circonférences.***

1° Soit $a$ la valeur en radians du *plus petit arc positif* $\overrightarrow{AB}$ (fig. 110).

Lorsque M se déplace dans le sens positif de A à B , les valeurs successives des arcs AB ainsi obtenus sont :

$$a; \quad a + 2\pi; \quad a + 4\pi; \ldots \quad a + 2m\pi \qquad (m \text{ entier positif}).$$

Lorsque M se déplace dans le sens négatif de A à B, le premier arc obtenu a pour valeur absolue $2\pi - a$ et pour valeur algébrique $a - 2\pi$; les suivants vaudront :

$$a - 4\pi; \quad a - 6\pi; \ldots \quad a - 2n\pi \qquad (n \text{ entier positif}).$$

Ainsi, tous les arcs $\overrightarrow{AB}$ sont donnés par la *formule unique :* $\overrightarrow{AB} = a + 2k\pi$ où $k$ est un entier positif, nul ou négatif.

Ceci étant, soient $\alpha$ et $\beta$ les mesures en radians de deux arcs $\overset{\frown}{AB}$, on aura :

$$\alpha = a + 2\,k'\pi; \qquad \beta = a + 2\,k''\pi$$

donc : $\beta - \alpha = 2\,(k'' - k')\,\pi = 2\,k\pi$ ($k$ entier positif nul ou négatif), ce qui établit la condition nécessaire.

2° *Réciproquement*, soient deux arcs $\alpha$ et $\beta$, d'origine A, tels que : $\beta - \alpha = 2\,k\pi$.

Si B est l'extrémité de l'arc $\alpha$, en désignant par $a$ le plus petit arc positif $\overset{\frown}{AB}$, il existe une valeur positive ou négative de l'entier $k'$ telle que $\alpha = a + 2\,k'\pi$; on a alors :

$$\beta = \alpha + 2\,k\pi = a + 2\,(k' + k)\,\pi = a + 2\,k''\,\pi.$$

$k''$ étant entier, $\beta$ est donc la mesure algébrique d'un arc d'origine A et d'extrémité B.

En définitive, si $\alpha$ est la mesure d'un arc $\overset{\frown}{AB}$, tous les autres sont donnés par la formule :

$$\boxed{\beta = \alpha + 2\,k\pi} \qquad k \text{ entier positif ou négatif.}$$

EXEMPLE : deux arcs de même origine et de valeurs $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ ont même extrémité.

**206. Remarques.** — 1° Le nombre $\alpha$ ($-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$) qui mesure l'un des arcs $\overset{\frown}{AB}$ se nomme **détermination principale** de cet arc.

2° Si un des arcs $\overset{\frown}{AB}$ a pour mesure $\alpha$, l'un des arcs $\overset{\frown}{BA}$ a pour mesure $-\alpha$ et tous les arcs $\overset{\frown}{BA}$ sont donnés par la formule : $\overset{\frown}{BA} = -\alpha + 2\,k\pi$.

3° Si A est choisi comme *origine des arcs* sur le cercle orienté O, la position du point B sur le cercle est déterminée par la valeur d'un arc $\overset{\frown}{AB}$ qu'on appelle alors **abscisse curviligne** du point B. Il est clair que la valeur de cette abscisse curviligne détermine B, mais qu'inversement correspondent au point B une infinité d'abscisses curvilignes telles que deux d'entre elles diffèrent d'un nombre entier de circonférences.

**207. Relation de Chasles.** — ***Soient trois points*** A, B, C ***d'un cercle orienté. On a :*** $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 2\,k\pi$ ***(k entier positif, négatif ou nul).***

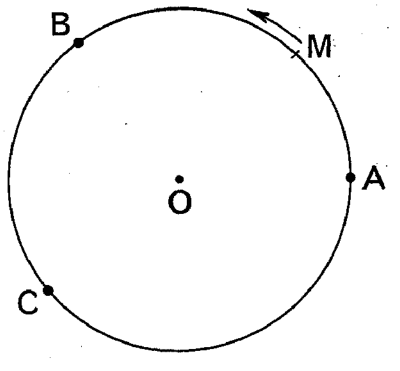



Fig. 111.

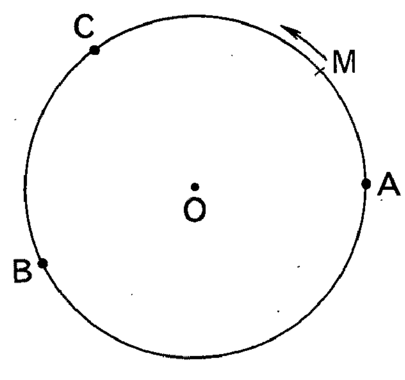



Fig. 112.

On part de A dans le sens positif : deux cas se présentent selon que l'on rencontre pour la première fois les deux autres points dans l'ordre BC ou dans l'ordre CB. Soient $a$, $b$, $c$ les plus petits arcs positifs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$.

Dans le premier cas (fig. 111) : $a + b + c = 2\pi$.

Or : $\overset{\curvearrowright}{\mathrm{AB}} = a + 2h\pi$; $\overset{\curvearrowright}{\mathrm{BC}} = b + 2h'\pi$; $\overset{\curvearrowright}{\mathrm{CA}} = c + 2h''\pi$;

$h$, $h'$, $h''$ désignant des entiers positifs ou négatifs. Donc :

$$\overset{\curvearrowright}{\mathrm{AB}} + \overset{\curvearrowright}{\mathrm{BC}} + \overset{\curvearrowright}{\mathrm{CA}} = 2\pi(h + h' + h'' + 1) = 2k\pi.$$

Dans le second cas (fig. 112) : $a + b + c = 4\pi$

et
$$\overset{\curvearrowright}{\mathrm{AB}} + \overset{\curvearrowright}{\mathrm{BC}} + \overset{\curvearrowright}{\mathrm{CA}} = 2\pi(h + h' + h'' + 2) = 2k\pi.$$

Donc dans les deux cas :

$$\boxed{\overset{\curvearrowright}{\mathrm{AB}} + \overset{\curvearrowright}{\mathrm{BC}} + \overset{\curvearrowright}{\mathrm{CA}} = 2k\pi.}$$

Cette relation peut aussi s'écrire : $\overset{\curvearrowright}{\mathrm{AB}} + \overset{\curvearrowright}{\mathrm{BC}} = -\overset{\curvearrowright}{\mathrm{CA}} + 2k\pi$

soit
$$\boxed{\overset{\curvearrowright}{\mathrm{AB}} + \overset{\curvearrowright}{\mathrm{BC}} = \overset{\curvearrowright}{\mathrm{AC}} + 2k\pi}$$

forme qui rappelle la première relation de Chasles relative à trois points d'un axe orienté.

**208. Corollaire.** — ***La valeur d'un arc est égale à $2k\pi$ près à l'abscisse curviligne de son extrémité diminuée de celle de son origine.***

Soient M et M′ deux points d'un cercle O où A désigne l'origine des abscisses curvilignes (fig. 110). On a :

$$\overset{\curvearrowright}{\mathrm{MM'}} + \overset{\curvearrowright}{\mathrm{M'A}} + \overset{\curvearrowright}{\mathrm{AM}} = 2k\pi$$

soit
$$\overset{\curvearrowright}{\mathrm{MM'}} = -\overset{\curvearrowright}{\mathrm{M'A}} - \overset{\curvearrowright}{\mathrm{AM}} + 2k\pi$$

et
$$\boxed{\overset{\curvearrowright}{\mathrm{MM'}} = \overset{\curvearrowright}{\mathrm{AM'}} - \overset{\curvearrowright}{\mathrm{AM}} + 2k\pi}$$

$k$ entier positif, négatif ou nul.

**209. Extension de la notion d'angle.** — Soit une demi-droite $Oz$ d'un plan P (fig. 113). Elle peut, à partir d'une position initiale $Ox$ de ce plan, tourner dans deux sens différents. Nous adopterons comme **sens positif de rotation** celui qui, pour un observateur placé debout sur P, coïncide avec le *sens inverse des aiguilles d'une montre.* Tout point M de $Oz$ décrit alors un cercle orienté dans les conditions du nº 204.

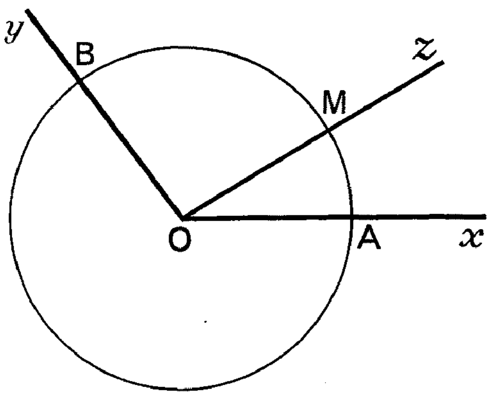



Fig. 113.

Imaginons qu'en tournant *constamment dans le même sens,* $Oz$ vienne de $Ox$ en $Oy$. Nous dirons que $Oz$ a décrit un **angle orienté** de côté origine $Ox$, de *côté extrémité* $Oy$; nous le symboliserons par la notation $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

Dans ces conditions M aura parcouru un *arc orienté* $\overset{\curvearrowright}{\mathrm{AB}}$ du cercle O et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ sera l'angle au centre *correspondant* à cet arc $\overset{\curvearrowright}{\mathrm{AB}}$.

De même que pour les arcs, il existe une infinité d'angles $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$. Pour déterminer l'un d'entre eux il faut connaître, outre le côté origine et le côté extrémité, le *sens* dans lequel a tourné $Oz$ et le nombre de tours complets parcourus par $Oz$ avant de parvenir en $Oy$. Mais il est clair que la connaissance de l'arc $\overset{\curvearrowright}{\mathrm{AB}}$ parcouru par M entraîne celle de $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

***La mesure algébrique d'un angle orienté*** $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ ***est un nombre dont la valeur absolue est la mesure de l'angle géométrique*** $xOy$ ***(qui peut être supérieure à 4 droits) et dont le signe est + ou — selon que l'angle est décrit dans le sens positif de rotation ou en sens inverse.***

Grâce au conventions adoptées, la valeur absolue et le signe de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et de l'angle au centre correspondant $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ sont identiques. Le résultat du nº 202 reste donc valable pour les angles et les arcs orientés.

**210. Conséquences.** — On peut donc étendre aux angles orientés les résultats obtenus pour les arcs :

1º Si $\alpha$ est la mesure en radians d'un angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, tous les autres sont donnés par la relation : $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \alpha + 2k\pi$.

2º Soient trois demi-droites concourantes, $Ox$, $Oy$, $Oz$; la relation de Chasles (nº 207) étendue aux angles donne :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) + (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Ox}) = 2k\pi$$

ou encore

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}) + 2k\pi.$$

3º On peut repérer la position d'une demi-droite $Oz$ par l'un des angles $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$ qu'elle forme avec la demi-droite origine $Ox$ que nous appellerons axe polaire. L'un des angles $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$ est alors l'angle polaire de $Oz$ et la relation (nº 208) étendue aux angles donne :

$$(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}) - (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + 2k\pi \quad \text{soit :}$$

***La valeur algébrique d'un angle orienté est égale à l'angle polaire du côté extrémité diminué de l'angle polaire du côté origine.***

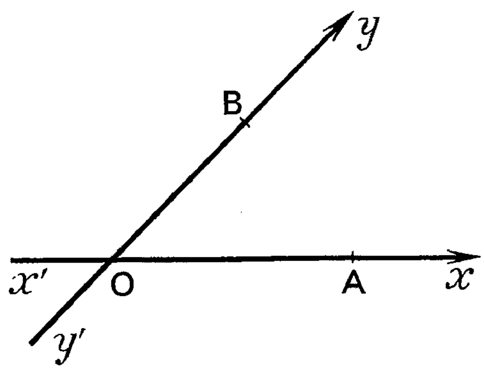



Fig. 114.

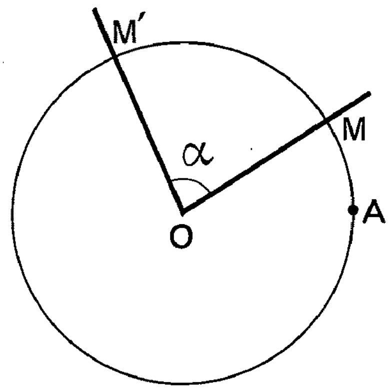



Fig. 115.

**211. Angle orienté de deux vecteurs.** — ***L'angle orienté de deux vecteurs*** $\overrightarrow{OA}$ ***et*** $\overrightarrow{OB}$ ***pris dans cet ordre dans un plan orienté, est l'un des angles des demi-droites*** OA ***et*** OB.

Sa valeur algébrique se symbolise par $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Ainsi (fig. 114) :

$$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + 2k\pi.$$

**212. Angle de deux axes.** — Soient deux axes $x'Ox$, $y'Oy$ (fig. 114) d'un plan orienté. On appelle angle de $x'x$ avec $y'y$, l'un quelconque des angles dont il faut faire tourner l'axe origine $x'x$ pour qu'il coïncide *en direction et en sens* avec l'axe extrémité $y'y$. C'est aussi l'un des angles $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + 2k\pi.$$

**213. Longueur d'un arc.** — Soit $\alpha$ la *valeur absolue* en radians de $\widehat{MOM'}$ et de l'arc correspondant MM' (fig. 115). Un arc de 1 radian a pour longueur R, rayon du cercle; la longueur $l$ d'un arc de $\alpha$ radians est donc :

$$\boxed{l = R\alpha}$$

**214. Cercle trigonométrique.** — ***On appelle cercle trigométrique un cercle orienté dont le rayon est égal à l'unité.***

Dans ce cas, la formule qui donne la longueur d'un arc devient :

$$\boxed{l = \alpha}$$

***La longueur d'un arc du cercle trigonométrique s'exprime par le même nombre que l'angle au centre correspondant mesuré en radians.***

## EXERCICES

**515.** Évaluer en grades et en radians les angles de :
$15^\circ$; $18^\circ$; $25^\circ$; $37^\circ15'$; $127^\circ30'$.

**516.** Évaluer en degrés et en radians les angles dont les mesures en grades sont :
40; 112; 17,5; 212,35; 315,75.

**517.** Évaluer en degrés et en grades les angles dont les mesures en radians sont :
$\frac{\pi}{18}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{15}$; 2; 5,2.

— Connaissant l'origine A sur le cercle trigonométrique, placer sur ce cercle les extrémités M des arcs $\overset{\frown}{AM}$ donnés par les formules suivantes, où $k$ est un entier positif, négatif ou nul. L'unité d'arc est le radian :

**518.** $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{2\pi}{5} + k\pi$; $-\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{15} + \frac{k\pi}{2}$;

**519.** $\frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}$; $\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{7}$; $-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}$.

**520.** $\pi + \frac{k\pi}{5}$; $\frac{2k\pi}{15}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$; $-\pi + \frac{2k\pi}{11}$.

**521.** Soit $\alpha$ la valeur d'un arc d'origine A et d'extrémité M.

1° Quelle est la valeur d'un arc $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ quelconque ?

2° Quelle est la valeur d'un arc $\overset{\frown}{\mathrm{AP}} = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AM}}}{2}$ ? Placer les points P correspondants sur le cercle trigonométrique.

3° Quelle est la valeur d'un arc $\overset{\frown}{\mathrm{AQ}} = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AM}}}{n}$ où $n$ est un entier donné ? Placer sur le cercle trigonométrique les points Q correspondants.

**522.** Soient $\alpha$ et $\beta$ les valeurs de deux arcs $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ et $\overset{\frown}{\mathrm{AN}}$. Montrer qu'il existe deux extrémités possibles pour les arcs $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ tels que :

$$\overset{\frown}{\mathrm{AP}} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AM}} + \overset{\frown}{\mathrm{AN}}}{2}$$

Que représentent ces points pour les arcs géométriques MN ?

**523.** On donne sur le cercle trigonométrique deux points B et C définis par leurs abscisses curvilignes $u$ et $v$; soit M un point quelconque du cercle d'abscisse curviligne $x$.

1° Évaluer les valeurs algébriques des arc $\overset{\frown}{\mathrm{MB}}$ et $\overset{\frown}{\mathrm{MC}}$.

2° Déterminer les points M tels que $\overset{\frown}{\mathrm{MB}} = 2\,\overset{\frown}{\mathrm{MC}}$.

3° Plus généralement, déterminer les points M tels que $\overset{\frown}{m\mathrm{MB}} = \overset{\frown}{n\mathrm{MC}}$ où $m$ et $n$ sont deux nombres entiers donnés.

**524.** Dans un cercle O de rayon R, évaluer la longueur de l'arc intercepté AB et l'aire du secteur OAB sachant que $\widehat{\mathrm{AOB}}$ mesure :

$35°$; $17°30'$; 42 gr; $\dfrac{\pi}{5}$.

**525.** Soient deux droites $D_1$ et $D_2$ dans un plan orienté. On désigne par $(D_1, D_2)$ l'un quelconque des angles orientés dont il faut faire tourner $D_1$ pour l'amener sur $D_2$.

1° $\alpha$ désignant l'un de ces angles, montrer que tous les autres sont donnés par la relation $(D_1, D_2) = \alpha + k\pi$ ($k$ entier positif ou négatif).

2° Soient trois droites $D_1$, $D_2$, $D_3$ d'un plan orienté. Démontrer la relation :

$$(D_1, D_3) = (D_1\, D_2) + (D_2, D_3) + k\pi.$$

3° Si $D_3$ est une des bissectrices des angles formés par $D_1$ et $D_2$, démontrer la relation :

$$(D_1, D_3) = \frac{\alpha}{2} + k\,\frac{\pi}{2}.$$

# FONCTIONS CIRCULAIRES

**215. Cosinus et sinus d'un arc.** — Considérons le cercle trigonométrique O de la figure 116, où A est l'origine des arcs. Plaçons les points B, A′ et B′ d'abscisses curvilignes $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ et $\frac{3\pi}{2}$. On divise ainsi le cercle en quatre *quadrants*, numérotés, comme l'indique la figure, dans l'ordre croissant, à partir de A dans le sens positif de rotation. Tout point du plan peut être repéré à l'aide de deux axes de coordonnées orthonormées $x'Ox$ et $y'Oy$ dont $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont respectivement deux vecteurs unitaires.

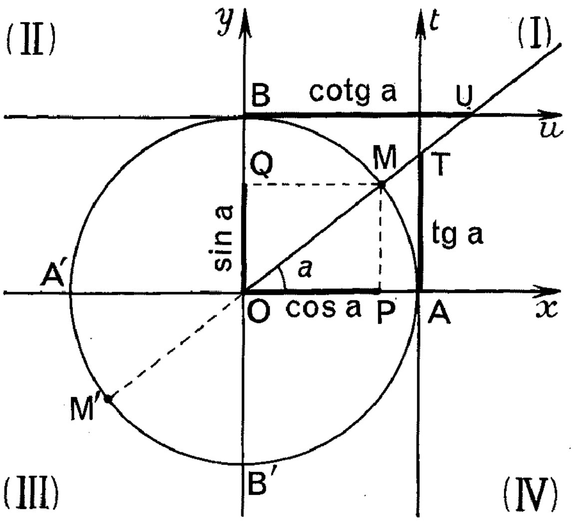



Fig. 116.

***$x'Ox$ est l'axe des abscisses ou des cosinus; $y'Oy$ est l'axe des ordonnées ou des sinus.***

Soit un arc $\overset{\frown}{AM}$ de valeur algébrique $a$ :

***Le cosinus et le sinus de l'arc*** $\overset{\frown}{AM}$ ***sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de son extrémité*** M ***dans le repère*** $xOy$.

On écrit : $\boxed{\cos a = \overline{OP}}$ $\boxed{\sin a = \overline{OQ}}$

cos $a$ et sin $a$ sont donc les mesures algébriques des projections du vecteur unitaire $\overrightarrow{OM}$ sur les axes $x'x$ et $y'y$.

Il résulte de ces définitions que tous les arcs d'origine A et d'extrémité M ont même sinus et même cosinus. Si $a$ augmente de $2\pi$ (ou de $2k\pi$) l'extrémité de l'arc reste inchangée, donc aussi le sinus et le cosinus :

$$\cos(a + 2k\pi) = \cos a; \qquad \sin(a + 2k\pi) = \sin a.$$

On exprime ce fait en disant que le sinus et le cosinus d'un arc sont des *fonctions périodiques* de cet arc dont la *période* est $2\pi$.

Notons que :

1° A tout arc $a$ correspondent un sinus et un cosinus compris entre $-1$ et $+1$ :

$$-1 \leqslant \sin a \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos a \leqslant 1.$$

2° Le sinus d'un arc $a$ est positif lorsque l'extrémité M de cet arc appartient aux quadrants I ou II. Il est négatif lorsque M appartient aux quadrants III ou IV. D'autre part :

$$\sin k\pi = 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 1.$$

3° Le cosinus d'un arc $a$ est positif lorsque l'extrémité M de cet arc appartient aux quadrants I ou IV. Il est négatif lorsque M appartient aux quadrants II ou III.

D'autre part : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0; \qquad \cos k\pi = \pm 1.$

**216. Tangente et cotangente d'un arc.** — Menons en A la tangente A$t$ au cercle O orientée dans le même sens que O$y$, puis la tangente B$u$ en B orientée dans le même sens que O$x$.

***Les axes* A$t$ *et* B$u$ *sont respectivement l'axe des tangentes et l'axe des cotangentes.***

Le diamètre passant par l'extrémité M de l'arc $a$ coupe A$t$ en T et B$u$ en U.

***On appelle tangente et cotangente de l'arc* $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ *les mesures algébriques des vecteurs* $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{BU}}$.**

On écrit : $\boxed{\operatorname{tg} a = \overline{\mathrm{AT}}}$ et $\boxed{\operatorname{cotg} a = \overline{\mathrm{BU}}}$

Il résulte de ces définitions que si $a$ augmente de $\pi$, l'extrémité de l'arc vient en M′ diamétralement opposé à M dans le cercle O; les points T et U ne changent pas. Donc

$$\operatorname{tg}(a + \pi) = \operatorname{tg} a; \qquad \operatorname{cotg}(a + \pi) = \operatorname{cotg} a.$$

En général, si $a$ augmente de $k\pi$, l'extrémité de l'arc vient en M si $k$ est pair, en M′ si $k$ est impair; la tangente et la cotangente ne changent pas :

$$\operatorname{tg}(a + k\pi) = \operatorname{tg} a; \qquad \operatorname{cotg}(a + k\pi) = \operatorname{cotg} a.$$

On exprime ce fait en disant que la tangente et la cotangente d'un arc sont des **fonctions périodiques** de cet arc dont la **période** est $\pi$.

Notons que :

1° Le point T n'existe plus si M est en B ou B′. De même le point U n'existe plus si M est en A ou A′. Si M en décrivant le cercle trigonométrique vient se confondre avec B ou B′, le point T s'éloigne à l'infini sur l'axe A$t$. De même, si M vient se confondre avec A ou A′, le point U s'éloigne à l'infini sur l'axe B$u$; donc :

$$\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right| = \infty \qquad |\operatorname{cotg} k\pi| = \infty.$$

2° tg $a$ et cotg $a$ sont positifs lorsque l'extrémité M de l'arc $a$ appartient aux quadrants I ou III; tg $a$ et cotg $a$ sont négatifs lorsque M appartient aux quadrants II ou IV. D'autre part :

$$\operatorname{tg} k\pi = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$

Le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un arc se nomment FONCTIONS CIRCULAIRES de cet arc.

**217. Fonctions circulaires d'un angle.**

***Les fonctions circulaires d'un angle sont celles de l'arc correspondant.***

Cela résulte de ce que l'angle au centre $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et l'arc correspondant $\overset{\frown}{AM}$ sont mesurés par le même nombre. Dans les symboles sin $a$, cos $a$, tg $a$ et cotg $a$, le nombre $a$ pourra indifféremment désigner $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ou $\overset{\frown}{AM}$.

## RELATIONS FONDAMENTALES

**218. Théorème.** — ***Les fonctions circulaires d'un même arc*** $a$ ***sont liées par les relations suivantes :***

| | | |
|---|---|---|
| $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ | $\operatorname{tg} a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$ | $\operatorname{cotg} a = \dfrac{\cos a}{\sin a} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} a}$ |

1° On a (fig. 116) : $\overset{\frown}{AM} = a$;  $\cos a = \overline{OP}$;  $\sin a = \overline{OQ} = \overline{PM}$.

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle OPM :

$$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\sin^2 a + \cos^2 a = 1} \tag{1}$$

où $\sin^2 a$ et $\cos^2 a$ symbolisent les carrés de sin $a$ et cos $a$ : $(\sin a)^2$ et $(\cos a)^2$.

Cette relation permet de calculer la *valeur absolue* de sin $a$ ou cos $a$ quand on connaît cos $a$ ou sin $a$. On en tire en effet :

$$\sin a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a} \qquad \text{et} \qquad \cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a}.$$

2° On a (fig. 116) $\operatorname{tg} a = \overline{AT}$. Le vecteur $\overrightarrow{AT}$ est l'homologue de $\overrightarrow{PM}$ dans l'homothétie $\left(O, \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}}\right)$. Le rapport de $\overrightarrow{PM}$ à $\overrightarrow{AT}$ est égal au rapport d'homothétie : $\dfrac{\overrightarrow{AT}}{\overrightarrow{PM}} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}}$

ou $\dfrac{\overrightarrow{AT}}{\overrightarrow{OQ}} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}}$, soit puisque les axes O$y$ et A$t$ ont même sens : $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{OQ}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$, soit :

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\sin a} = \frac{1}{\cos a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}.} \tag{2}$$

3° On a (fig. 116) $\operatorname{cotg} a = \overline{BU}$. Le vecteur $\overrightarrow{BU}$ est l'homologue de $\overrightarrow{QM}$ dans l'homothétie $\left(O, \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OQ}}\right)$. Donc : $\dfrac{\overrightarrow{BU}}{\overrightarrow{QM}} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OQ}}$ ou $\dfrac{\overrightarrow{BU}}{\overrightarrow{OP}} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OQ}}$, soit, comme les axes O$x$ et B$v$ sont de même sens : $\dfrac{\overline{BU}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OQ}}$,

ou :
$$\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos a} = \frac{1}{\sin a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}} \tag{3}$$

**219. Autres relations.** — Eliminons sin $a$ entre les relations (1) et (2) en divisant les deux membres de (1) par $\cos^2 a$ que nous supposons différent de zéro :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}} \qquad (4)$$

La relation (4) reste valable si $\cos a = 0$, car ses deux membres sont alors infinis et positifs. De même, en divisant les deux membres de (1) par $\sin^2 a$, on trouve :

$$1 + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{1 + \operatorname{cotg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}} \qquad (5)$$

**220. Calculer les fonctions circulaires d'un arc connaissant l'une d'elles.**

1° ON CONNAIT $\cos \alpha = a$. — On a (n° 218), en supposant $|a| \leqslant 1$ :

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - a^2}, \quad \text{puis :}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \pm \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \pm \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

*Géométriquement*, la donnée $\cos \alpha = a$ fixe P, projection de l'extrémité M de l'arc $\alpha$ sur l'axe des cosinus ; on obtient ainsi deux points M et M′, sur le cercle trigonométrique, symétriques par rapport à $x'x$ (fig. 117), donc deux points Q, Q′ et T, T′ symétriques par rapport au même axe, ce qui explique les signes $\pm$ devant les valeurs trouvées pour sin $\alpha$ et tg $\alpha$.

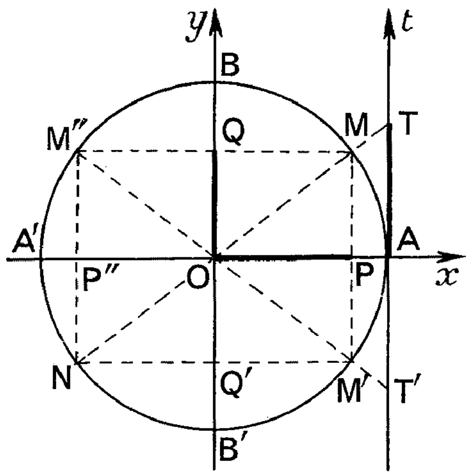


Fig. 117.

2° ON CONNAIT $\sin \alpha = b$. — En supposant $|b| \leqslant 1$ :

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - b^2},$$

puis : $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \pm \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}}$$

et $$\operatorname{cotg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - b^2}}{b}.$$

*Géométriquement*, la donnée $\sin \alpha = b$ fixe Q projection de l'extrémité M de l'arc $\alpha$ sur l'arc $y'y$. On obtient ainsi deux points M et M″, symétriques par rapport à $y'y$ (fig. 117), donc deux points P, P″ symétriques par rapport à $y'y$ et deux points T, T′ symétriques par rapport à $x'x$, ce qui explique les signes $\pm$ devant les valeurs trouvées pour cos $\alpha$ et tg $\alpha$.

3° ON CONNAIT $\operatorname{tg} \alpha = t$. — On a (n° 218) :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \quad \text{ou} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + t^2} \quad \text{soit} \quad \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

puis : $$\sin \alpha = \cos \alpha . \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{t}.$$

*Géométriquement*, la donnée $\operatorname{tg} \alpha = t$ fixe le point T où le diamètre passant par l'extrémité M de l'arc $\alpha$ coupe l'axe des tangentes. On obtient ainsi deux points M et N sur le cercle trigonométrique, symétriques par rapport à O (fig. 117) donc deux points P, P″ et Q, Q′ symétriques par rapport au même point O, ce qui explique le signe $\pm$ devant les valeurs trouvées pour cos $\alpha$ et sin $\alpha$.

Remarquons qu'il faut prendre le même signe (+ ou —) dans les formules qui donnent cos $\alpha$ et sin $\alpha$.

## ARCS REMARQUABLES

**221. Théorème préliminaire.** — Soit MM′ le côté d'un polygone régulier convexe de $n$ côtés inscrit dans le cercle trigonométrique (fig. 118). L'angle au centre de ce polygone est $\frac{2\pi}{n}$ radians. Soit P le milieu de MM′ et A le point où la demi-droite OP coupe le cercle. Adoptons A comme origine des arcs sur le cercle :

$$\widehat{\text{AOM}} = \frac{\pi}{n}; \quad \cos \widehat{\text{AOM}} = \overline{\text{OP}}; \quad \sin \widehat{\text{AOM}} = \overline{\text{PM}}.$$

Or, PM est le *demi-côté* du polygone et OP son *apothème*. Donc :

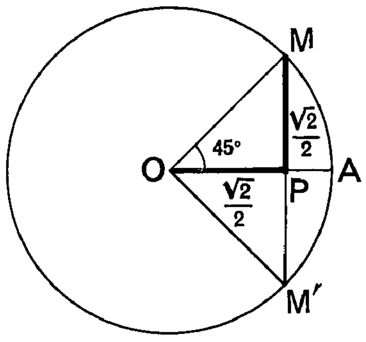


Fig. 118.

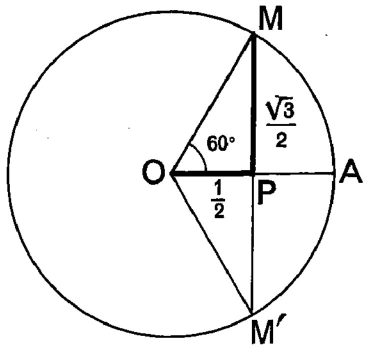


Fig. 119.

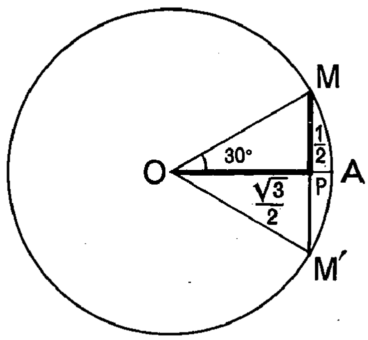


Fig. 120.

***Si on connaît le côté $c_n$ et l'apothème $a_n$ du polygone régulier convexe de $n$ côtés inscrit dans un cercle de rayon unité, on peut calculer le sinus et le cosinus de $\frac{\pi}{n}$ par les relations :***

$$\boxed{\sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} c_n} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos \frac{\pi}{n} = a_n.}$$

**222. Applications.**

1° $n = 4$ (fig. 118) : $c_4 = \sqrt{2}$; $a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et : $$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1; \quad \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

2° $n = 3$ (fig. 119): $c_3 = \sqrt{3}$; $a_3 = \frac{1}{2}$; $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

puis : $$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3° $n = 6$ (fig. 120) : $c_6 = 1$; $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

puis : $$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Les résultats obtenus, rangés dans le tableau suivant, doivent être sus par cœur :

| Angles | 0 | $\frac{\pi}{6} = 30^o$ | $\frac{\pi}{4} = 45^o$ | $\frac{\pi}{3} = 60^o$ | $\frac{\pi}{2} = 90^o$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Sinus | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| Cosinus | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| Tangente | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
| Cotangente | $+\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

## ARCS ASSOCIÉS

**223. Remarque.** — Dans tout ce qui suit, les arcs dont il sera question auront tous pour origine le même point A, origine des abscisses curvilignes sur le cercle trigonométrique.

**224. Arcs opposés.** — ***Deux arcs sont opposés quand la somme de leurs mesures est nulle.***

Si l'un vaut $a$, l'autre vaut $-a$. Exemples : $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$; $+100^o$ et $-100^o$; $+520$ gr et $-520$ gr.

Soit : $\overset{\frown}{\overrightarrow{AM}} = a$ et $\overset{\frown}{\overrightarrow{AM'}} = -a$ (fig. 121).

On peut imaginer que ces arcs sont décrits par deux mobiles $m$ et $m'$ partant de A, avec la même vitesse, dans deux sens différents; $m$ et $m'$ restent alors symétriques par rapport au diamètre A'A et il en est de même de M et M' :

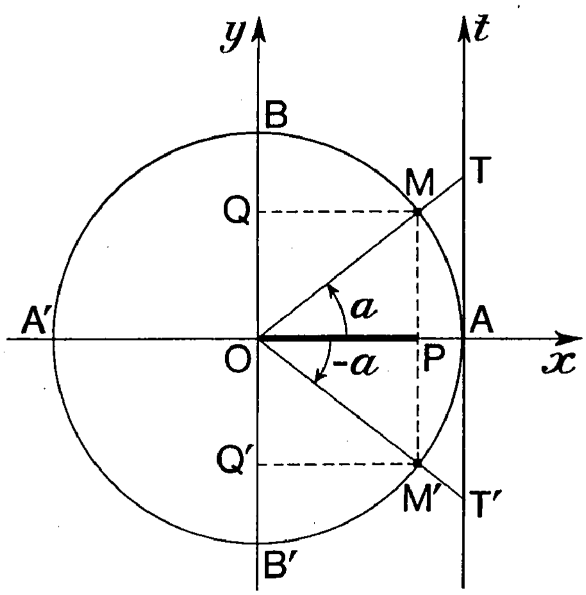


Fig. 121.

THÉORÈME. — ***Deux arcs opposés ont leurs extrémités symétriques par rapport à l'axe des cosinus.***

COROLLAIRE. — M et M' étant les extrémités de deux arcs opposés, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont des projections égales sur l'axe des cosinus, des projections opposées sur l'axe des sinus. Donc :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(-a) = \cos a \;; & \sin(-a) = -\sin a \\ \mathrm{tg}(-a) = -\mathrm{tg}\, a \;; & \mathrm{cotg}(-a) = -\mathrm{cotg}\, a \end{array}}$$

***Deux arcs opposés ont même cosinus; ils ont des sinus, des tangentes et des cotangentes opposés.***

EXEMPLES :

$$\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}; \quad \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg}(-45^\circ) = -1.$$

**225. Arcs supplémentaires.** — ***Deux arcs sont supplémentaires quand la somme de leurs mesures en radians est $\pi$.***

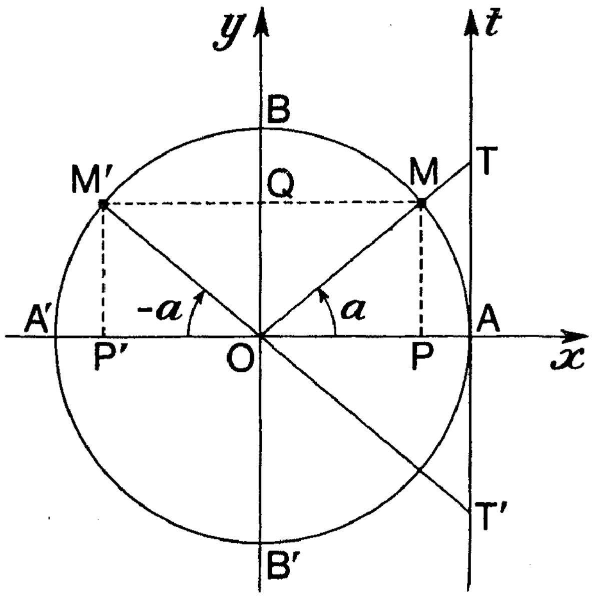



Fig. 122.

Si l'un vaut $a$, l'autre vaut $\pi - a$.

EXEMPLES : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$; $-20^\circ$ et $200^\circ$; 250 gr et $-$ 50 gr.

Soit $\overrightarrow{AM} = a$ et $\overrightarrow{AM'} = \pi - a$ (fig. 122).

L'arc $\overrightarrow{AM'} = \pi - a$ s'obtient en décrivant l'arc $\overrightarrow{AA'} = \pi$, puis l'arc $\overrightarrow{A'M'} = -a$.

Il existe donc deux arcs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$ de valeurs respectives $a$ et $-a$. L'axe de symétrie de la figure formée par ces deux arcs de même valeur absolue est l'axe des sinus et :

THÉORÈME. — ***Deux arcs supplémentaires ont leurs extrémités symétriques par rapport à l'axe des sinus.***

COROLLAIRE. — Il en résulte que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont des projections égales sur l'axe des sinus, des projections opposées sur l'axe des cosinus, donc :

| | |
|---|---|
| $\sin(\pi - a) = \sin a$ | $\cos(\pi - a) = -\cos a$ |
| $\operatorname{tg}(\pi - a) = -\operatorname{tg} a$ | $\operatorname{cotg}(\pi - a) = -\operatorname{cotg} a$ |

***Deux angles supplémentaires ont même sinus; ils ont des cosinus, des tangentes et des cotangentes opposés.***

EXEMPLES :

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\cos(-60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

**226. Arcs complémentaires.** — ***Deux arcs sont complémentaires quand la somme de leurs mesures en radians vaut $\frac{\pi}{2}$.***

Si l'un vaut $a$, l'autre vaut $\frac{\pi}{2} - a$. Exemples : $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$; $-10^\circ$ et $100^\circ$; 430 gr et $-$ 330 gr.

Soit $\overrightarrow{AM} = a$ et $\overrightarrow{AM'} = \frac{\pi}{2} - a$ (fig. 123).

L'arc $\overset{\frown}{AM'} = \frac{\pi}{2} - a$ s'obtient en décrivant l'arc $\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{2}$, puis l'arc $\overset{\frown}{BM'} = -a$.

Il existe donc deux arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{BM'}$ de valeurs respectives $a$ et $-a$. L'axe de symétrie de la figure formée par ces deux arcs de même valeur absolue est la bissectrice des angles $xOy$ et $x'Oy'$ (première bissectrice).

Théorème. — ***Deux arcs complémentaires ont leurs extrémités symétriques par rapport à la première bissectrice.***

Corollaire. — On sait alors que, par rapport aux axes $xOy$, l'abscisse de l'un des points M ou M' est égale à l'ordonnée de l'autre; donc :

| | |
|---|---|
| $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ |
| $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \mathrm{cotg}\, a$ | $\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \mathrm{tg}\, a$ |

***Si deux arcs sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre; la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre.***

Exemples : $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\mathrm{tg}\, 60^\circ = \mathrm{cotg}\, 30^\circ = \sqrt{3}$.

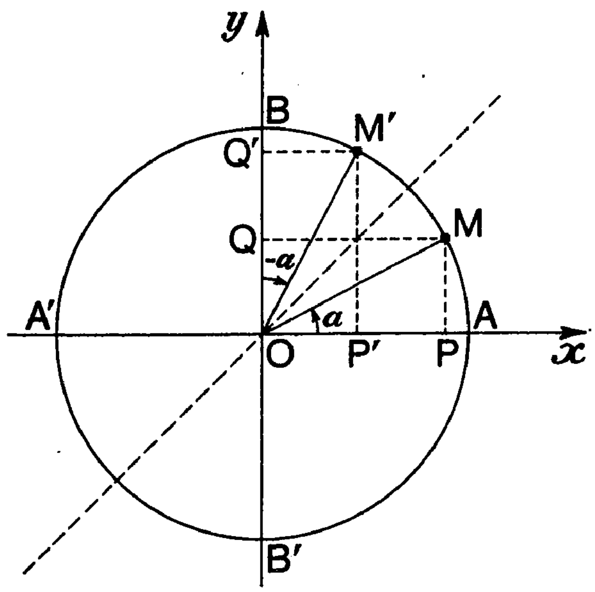


Fig. 123.

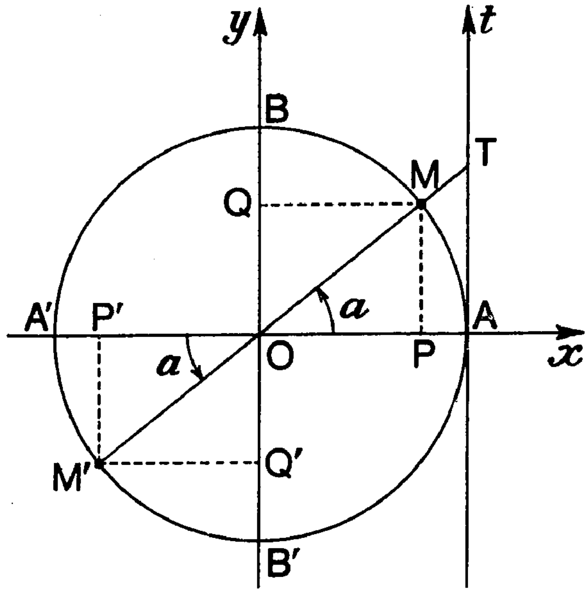


Fig. 124

**227. Arcs dont la différence est $\pi$.**

Soit : $\overset{\frown}{AM} = a$ et $\overset{\frown}{AM'} = \pi + a$ (fig. 124).

Puisque $\overset{\frown}{AM'} = a + \pi = \overset{\frown}{AM} + \pi$, M et M' sont diamétralement opposés et par suite les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont des projections opposées sur les axes des sinus et des cosinus :

| | |
|---|---|
| $\sin(\pi + a) = -\sin a$ | $\cos(\pi + a) = -\cos a$ |
| $\mathrm{tg}(\pi + a) = \mathrm{tg}\, a$ | $\mathrm{cotg}(\pi + a) = \mathrm{cotg}\, a.$ |

***Deux arcs qui diffèrent de $\pi$ radians ont même tangente et même cotangente. Ils ont des sinus et des cosinus opposés.***

On peut aussi le vérifier en remarquant que l'arc $\pi + a$ est le supplément de $-a$; donc :

$$\sin(\pi + a) = \sin(-a) = -\sin a$$
$$\cos(\pi + a) = -\cos(-a) = -\cos a.$$

EXEMPLES : $\sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$$\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## 228. Arcs dont la différence est $\frac{\pi}{2}$.

Soit : $\overset{\frown}{AM} = a$ et $\overset{\frown}{AM'} = \frac{\pi}{2} + a$ (fig. 125).

On a : $\frac{\pi}{2} + a = \frac{\pi}{2} - (-a)$;

$\overset{\frown}{AM'}$ est donc le complément de $-a$ et :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(-a) = \cos a$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(-a) = -\sin a$$

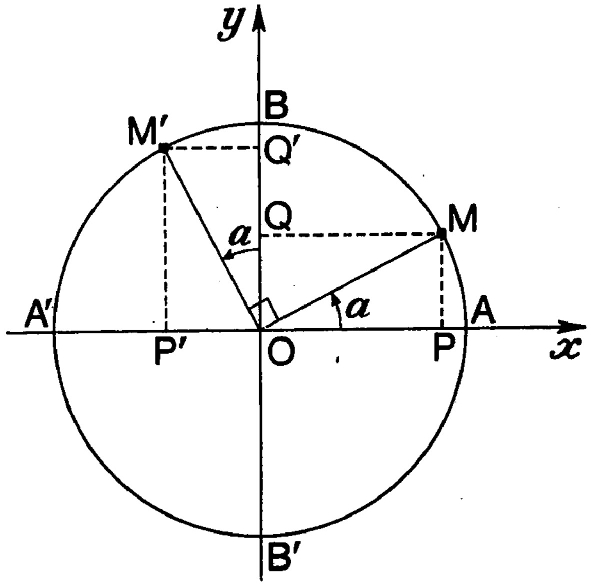


Fig. 125.

soit :

| | |
|---|---|
| $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$ |
| $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\operatorname{cotg} a$ | $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\operatorname{tg} a$ |

EXEMPLES : $\sin 120° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120° = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$.

## EXERCICES

**526.** M désigne l'extrémité de l'arc $\overset{\frown}{AM} = x$ sur le cercle trigonométrique. L'axe OM, orienté de O vers M coupe l'axe des tangentes en T et celui des cotangentes en U.

1° Évaluer $\overline{OT}$ et $\overline{OU}$ par rapport aux fonctions circulaires de l'arc $x$.

2° Retrouver directement la relation entre $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$, puis la relation entre $\sin x$ et $\operatorname{cotg} x$.

**527.** Dans les mêmes conditions qu'à l'exercice précédent, la tangente en M au cercle trigonométrique coupe respectivement les axes des cosinus et des sinus en P et Q.

1° Évaluer par rapport aux fonctions circulaires de $x$ les mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$.

2° En déduire la relation : $\dfrac{1}{\overline{OM}^2} = \dfrac{1}{\overline{OP}^2} + \dfrac{1}{\overline{OQ}^2}$.

— Démontrer les relations suivantes :

**528.** $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$.

**529.** $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$.

**530.** $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

**531.** $(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 4 \sin x \cos x$.

**532.** $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \sin^2 x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$.

**533.** $(\sin x + \cos x)^2 = \sin x \cos x (1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{cotg} x)$.

**534.** $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y (\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$.

**535.** $\operatorname{cotg}^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x \operatorname{cotg}^2 x$.

**536.** $\operatorname{tg}^2 x = \sin^2 x + \sin^2 x \operatorname{tg}^2 x$.

**537.** $\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1$.

**538.** $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

**539.** $\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^4 x \cos^4 x$.

**540.** $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1 - 5 \sin^2 x \cos^2 x + 5 \sin^4 x \cos^4 x$.

**541.** $\sin x \cos x (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) = 1$.

**542.** $\sin x \cos x (1 + \operatorname{cotg}^2 x) = \operatorname{cotg} x$.

**543.** $1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x$.

**544.** $\dfrac{-4 \sin^3 x + 3 \sin x}{4 \cos^3 x - 3 \cos x} = \dfrac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$.

**545.** Montrer que les fonctions : $F(\cos x)$; $F(\cos x, \sin^2 x)$; $F(\cos x, \operatorname{tg}^2 x)$ sont paires.

**546.** Montrer que les fonctions : $\sin x\, F(\cos x)$; $\operatorname{tg} x\, F(\sin^2 x)$ sont impaires.

**547.** Montrer que les fonctions $F(\sin x)$; $F(\sin x, \cos^2 x)$; $F(\sin x, \operatorname{cotg}^2 x)$ sont telles que $F(\pi - x) = F(x)$, $\forall x \in D$, domaine de définition de la fonction F.

**548.** Montrer que les fonctions $F(\operatorname{tg} x)$; $F(\cos 2x)$; $F(\sin 2x)$ sont telles que $F(x + \pi) = F(x)$, $\forall x \in$ D domaine de définition de la fonction F.

**549.** Montrer que les fonctions $F(\sin x + \cos x)$; $F(\sin x \cos x)$; $F(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$ sont telles que $F\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = F(x)$, $\forall x \in D$ domaine de définition de la fonction F.

**550.** Soit l'équation du second degré en $x$ :

$$(2 \cos \alpha - 1)\, x^2 - 2x + \cos \alpha = 0.$$

Étudier suivant les valeurs de $\cos \alpha$ l'existence et le signe des racines de l'équation.

— Résoudre les équations en $x$ :

**551.** $x^2 - x\,(\sin a + \cos a) + \sin a\,\cos a = 0.$

**552.** $x^2 + x\,(\sin a + \cos a) + \sin a\,\cos a = 0.$

**553.** $x^2 - x\,(\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a) + 1 = 0.$

**554.** $x^2\,\sin a\,\cos a + x + \sin a\,\cos a = 0.$

**555.** On considère l'équation du second degré en $x$ : $m\,(1 + x^2) = ax^2 + 2\,bx + c.$

1° On suppose qu'elle admet une racine double pour $m = 1$ et pour $m = -1$. En déduire les relations qui lient les coefficients $a$, $b$ et $c$.

2° On suppose $b = \sin\alpha$. Calculer, dans les conditions du 1°, les coefficients $a$ et $c$ en fonction de $\alpha$.

**556.** On considère le trinôme en cos $\alpha$ : $y = 2\cos^2\alpha - 9\cos\alpha + 10.$

1° Montrer qu'il est positif quel que soit $\alpha$.

2° Quelle est la valeur de $y$ pour $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ou $2\pi$?

3° Reprendre les mêmes questions pour le trinôme $y = 2\sin^2\alpha - 9\sin\alpha + 10.$

**557.** On considère, en orthonormées les droites $D_1$ et $D_2$ dont les équations en fonctions du paramètre $\alpha$ sont : $\quad x\,\cos\alpha + y\,\sin\alpha = 1; \qquad -x\,\sin\alpha + y\,\cos\alpha = 0.$

1° Montrer que ces droites sont perpendiculaires, quel que soit $\alpha$.

2° Exprimer les coordonnées de leur point commun en fonction de $\alpha$.

3° Trouver le lieu de ce point commun.

**558.** Calculer $\sin x$ et $\cos x$ connaissant $\operatorname{tg} x = 2$ et sachant que l'extrémité de l'arc $x$ appartient au quadrant I.

**559.** Calculer $\sin x$ et $\cos x$ connaissant $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$ et sachant que l'extrémité de l'arc $x$ appartient au quadrant II.

**560.** Calculer $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$ sachant que $\sin x = -\frac{1}{4}$ et que l'extrémité de l'arc $x$ appartient au quadrant III.

**561.** Calculer $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ sachant que $\cos x = 0{,}3$ et que l'extrémité de l'arc $x$ appartient au quadrant IV.

**562.** 1° Résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$

où $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ et $c'$ sont des nombres donnés.

2° Quelle condition doivent vérifier ces six coefficients pour qu'on puisse écrire : $x = \cos\alpha$ et $y = \sin\alpha$?

3° Montrer que les droites représentant en orthonormées les équations (1) et (2) se coupent alors sur le cercle trigonométrique dont le centre est l'origine des coordonnées.

**563.** On donne un quart de circonférence de centre O limité en C et D par les demi-droites rectangulaires OX et OY. Son rayon est l'unité de longueur. La tangente à ce quart de cercle en l'un de ses points M coupe OX en A et OY en B. On désigne par $m$ l'angle XOM.

1° Calculer les longueurs OA, OB et AB à l'aide des fonctions circulaires de l'angle $m$.

Pour quelle position du point M la longueur AB est-elle minimum?

2° En A et B, du même côté du plan XOY, on trace les demi-droites AU et BV perpendiculaires à ce plan. Sur AU on prend le point E et sur BV le point F tels que AE = AO, BF = BO.

Quelle condition doivent vérifier les fonctions circulaires de l'angle $m$ pour que le triangle OEF soit rectangle en E ? Montrer que cette condition peut s'écrire $\operatorname{tg} m = \frac{1}{2}$. Donner une construction géométrique simple du point M correspondant.

— Calculer les fonctions circulaires des arcs suivants :

**564.** $9\pi$; $\quad 11\pi$; $\quad \frac{7\pi}{2}$; $\quad \frac{-5\pi}{2}$; $\quad \frac{13\pi}{4}$.

**565.** $\frac{-5\pi}{4}$; $\quad \frac{10\pi}{3}$; $\quad \frac{-5\pi}{3}$; $\quad \frac{11\pi}{3}$; $\quad \frac{-16\pi}{3}$.

**566.** $\frac{13\pi}{6}$; $\quad \frac{-17\pi}{6}$; $\quad \frac{11\pi}{6}$; $\quad \frac{29\pi}{6}$; $\quad \frac{-7\pi}{6}$.

— Montrer que les expressions suivantes restent inchangées dans les conditions indiquées :

**567.** $3\cos^2 x - 5\cos x + 7$ en changeant $x$ en $-x$.

**568.** $2\sin^2 x - 3\sin x + 2$ en changeant $x$ en $\pi - x$.

**569.** $a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d$ en changeant $x$ en $\pi + x$.

**570.** $\sin^3 x + \cos^3 x - \sin x - \cos x$ en changeant $x$ en $\frac{\pi}{2} - x$.

**571.** $\frac{\operatorname{tg} x + \sin 2x}{\cos 4x}$ en changeant $x$ en $\pi + x$.

**572.** $\frac{\sin 3x + \cos 3x}{\sin x}$ en changeant $x$ en $\pi + x$.

**573.** On considère la fonction $y$ de $x$ définie par la relation $y = \frac{3 - 2x}{5 + x}$.

1° Étudier les variations de cette fonction lorsque $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ et les représenter graphiquement en prenant 5 mm comme unité de longueur sur $Ox$ et sur $Oy$.

2° Calculer l'expression de la dérivée de $y$ par rapport à $x$ pour $x = x_0$.

3° Déterminer $x_0$ pour qu'au point correspondant de la courbe représentative le coefficient directeur de la tangente soit égal à $\operatorname{tg}\theta$. Comment faut-il choisir $\theta$ pour que cela soit possible ?

*Application numérique :* $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

# RECHERCHE DES FONCTIONS CIRCULAIRES D'UN ARC DONNÉ

**229. 1er Cas : Arc du 1er quadrant. —** Les tables des pages 333 et 334 fournissent les valeurs des fonctions circulaires des arcs compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Ces tables sont à double entrée : pour les arcs compris entre 0 et 45° (ou 50 gr) prendre la valeur de l'arc dans la colonne de gauche et la fonction circulaire à la ligne supérieure; pour les arcs complémentaires, de 45° à 90° (ou de 50 gr à 100 gr), prendre la valeur de l'arc dans la colonne de droite et la fonction circulaire à la ligne inférieure. Exemples :

$$\text{tg } 38^\circ = 0{,}7813 \qquad \frac{1}{\cos 73^\circ} = 3{,}420 \qquad \cos 29^\circ = \sin 61^\circ = 0{,}8746.$$

Si l'arc ne figure pas dans la table, on procède par *interpolation* en admettant que :

***Entre deux valeurs consécutives de la table, les accroissements relatifs de l'arc et d'une fonction circulaire correspondante sont proportionnels.***

EXEMPLE. — *Déterminer* sin 32°25′ *et* cos 32°25′.

Pratiquement, on dispose les calculs de la façon suivante :

| | |
|---|---|
| $\sin 32^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}5299 \quad D = 147$ | $\cos 32^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}8480 \quad D = -93$ |
| Pour 25′ : $\dfrac{147 \times 25}{60} = 61$ | Pour 25′ : $\dfrac{-93 \times 25}{60} = -38$ |
| $\sin 32^\circ 25' \ldots\ldots\ldots = \overline{0{,}5360}$ | $\cos 32^\circ 25' \ldots\ldots\ldots = \overline{0{,}8432}$ |

**230. 2e Cas : Arc quelconque.**

Si $\alpha$ n'appartient pas au premier quadrant, on cherche un arc $\beta$ tel que les fonctions circulaires de $\alpha$ et de $\beta$ aient mêmes valeurs absolues. Cette opération se nomme **réduction de l'arc au premier quadrant.** On commence par ajouter ou retrancher à $\alpha$, si besoin est, un nombre entier de circonférences (ce qui n'altère pas les fonctions circulaires), de façon que l'arc $\alpha'$ obtenu appartienne aux quadrants I, II, III ou IV.

EXEMPLES. — 1° $\sin 773^\circ = \sin (773^\circ - 360^\circ \times 2) = \sin 53^\circ = 0{,}7986$.
2° $\cos 447^\circ = \cos (447^\circ - 360^\circ) = \cos 117^\circ$ (2° quadrant). Dans ce cas, on prend le supplément : $180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$. Donc : $\cos 477^\circ = \cos 117^\circ = -\cos 63^\circ = -0{,}4540$.

# ÉQUATIONS FONDAMENTALES

**231. Position du problème.** — Un arc étant donné, on a pu définir ses fonctions circulaires (nos 215 et 216). La question se pose de savoir si, réciproquement, la connaissance d'une fonction circulaire d'un arc suffit à déterminer cet arc. Le problème qui consiste à déterminer l'arc (ou les arcs) qui admettent une fonction circulaire donnée se nomme inversion de cette fonction circulaire.

## ÉQUATION : $\cos x = a$

**232. Condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs aient même cosinus.** — Pour que deux arcs $\alpha$ et $\beta$ d'origine A (fig. 126) aient même cosinus, il faut et il suffit que leurs extrémités aient même projection P sur l'axe des cosinus, donc que ces extrémités soient, ou confondues, ou symétriques par rapport à l'axe des cosinus.

Pour que $\alpha$ et $\beta$ aient même extrémité M il faut et il suffit qu'ils diffèrent de $2k\pi$ (no 205), soit :

$$\alpha - \beta = 2k\pi.$$

Pour que $\alpha$ et $\beta$ aient des extrémités M et M′ symétriques par rapport à l'axe des cosinus, il faut et il suffit que l'un des arcs $\overset{\frown}{AM'}$ soit l'opposé de $\overset{\frown}{AM} = \alpha$, donc que :

$$\beta = -\alpha + 2k\pi \quad \text{soit} \quad \alpha + \beta = 2k\pi.$$

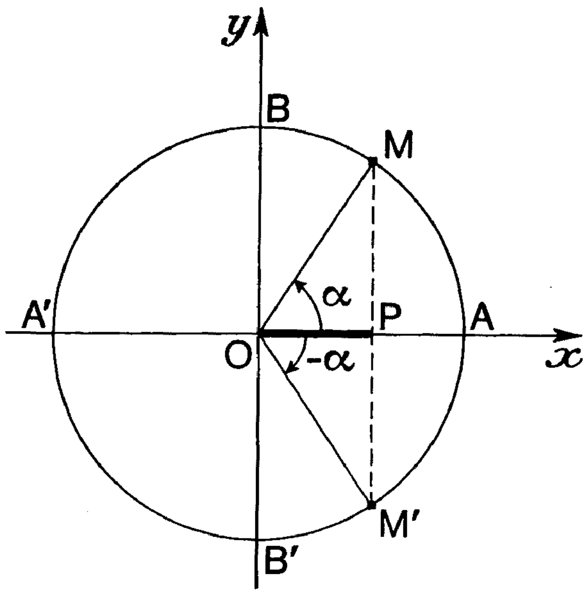


Fig. 126.

En définitive :

***Pour que deux arcs aient même cosinus il faut et il suffit que leur somme ou leur différence soit un multiple pair de $\pi$.***

**233. Résoudre l'équation** : $\cos x = \cos \alpha$. — La condition précédente donne :

$$x \pm \alpha = 2k\pi \quad \text{soit :} \quad \boxed{x = \pm\alpha + 2k\pi}$$

On obtient ainsi deux extrémités d'arcs $x$ répondant à la question; ces extrémités M et M′ sont symétriques par rapport à l'axe des cosinus; elles sont confondues en A ou A′ selon que $\alpha$ est un multiple pair ou impair de $\pi$.

EXEMPLES. — 1° *Résoudre :* $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$.

On a : $$x = \pm\frac{\pi}{5} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pm 36^\circ + k.\,360^\circ$$

et deux extrémités d'arcs répondant à la question.

2° *Résoudre :* $\cos 5x = \cos \frac{\pi}{3}$.

On se ramène au cas précédent en posant $X = 5x$.

On obtient :

$$5x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad x = \pm 12^\circ + k.\ 72^\circ.$$

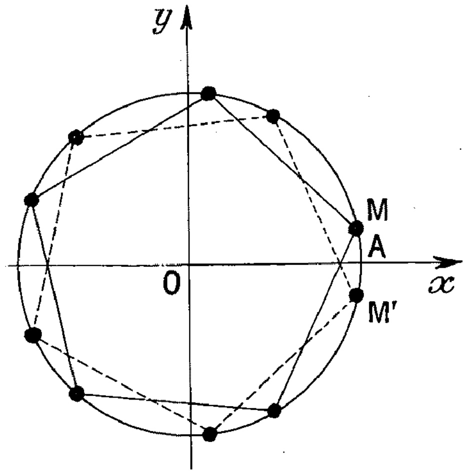



Fig. 127

Lorsque $k$ augmente d'une unité, l'arc $x$ augmente de $\frac{2\pi}{5}$, donc si $k$ augmente de 5 unités, on retrouve une extrémité d'arc déjà obtenue.

Les extrémités des arcs $x = 12^\circ + k.72^\circ$ sont les sommets d'un pentagone régulier.

Les extrémités des arcs $x = -12^\circ + k.72^\circ$ sont les sommets d'un second pentagone régulier respectivement symétriques des sommets du précédent par rapport à l'axe des cosinus.

Nous trouvons dix extrémités d'arcs répondant à la question (fig. 127).

3° *Résoudre :* $\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

On se ramène au cas général en posant $\alpha = 2x - \frac{2\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{3} - x$.

On obtient :

$$\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) \pm \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2k\pi.$$

En prenant le signe + on a : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (une extrémité d'arcs). (1)

En prenant le signe − : $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ (trois extrémités d'arcs). (2)

(En tout, trois extrémités d'arcs répondant à la question, car pour $k = 0$ les arcs (1) et (2) ont même extrémité).

**234. Résoudre l'équation :** $\cos x = a$.

Si $|a| \leqslant 1$ il existe un arc $\alpha$ et un seul, compris entre 0 et $\pi$ et admettant $a$ pour cosinus. On le détermine à l'aide de la table et on se trouve ramené à l'équation $\cos x = \cos \alpha$.

Exemples. — 1° *Résoudre :* $\cos x = 0{,}6$.

La table donne :

$\cos 53^\circ = 0{,}6018$ $\quad\cos 54^\circ = 0{,}5878$ $\quad D = -140$

$\cos x = 0{,}6$

$d = -18$

Pour $D = -140$ $\quad \Delta\alpha = +60'$.

Pour $d = -18$ $\quad \Delta\alpha = \frac{60' \times 18}{140} = 7',71$ ; on arrondit à $8'$

Donc $\alpha = 53^\circ 8'$

et on obtient : $\quad x = \pm 53^\circ 8' + k.\ 360^\circ$.

2° *Résoudre :* $2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

Soit : $$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}.$$

Donc : $$3x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

soit : $$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2k\pi}{3}$$

et 6 extrémités d'arcs répondant à la question.

**235. Remarques.** — 1° L'équation $\sin x = \cos\alpha$ se ramène au n° 233 en remplaçant $\sin x$ par $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ; on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\alpha \text{ et } \frac{\pi}{2} - x = \pm\alpha + 2k\pi.$$

2° L'équation $\cos x = -\cos\alpha$ s'écrit : $\cos x = \cos(\pi + \alpha)$ et donne

$$x = \pm\alpha + (2k+1)\pi.$$

## ÉQUATION : $\sin x = b$

**236. Condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs aient même sinus.** — Pour que deux arcs $\alpha$ et $\beta$, d'origine A (fig. 128) aient même sinus, il faut et il suffit que leurs extrémités aient même projection Q sur l'axe des sinus, donc que leurs extrémités M et M′ soient, ou confondues, ou symétriques par rapport à l'axe des sinus.

Pour que $\alpha$ et $\beta$ aient même extrémité M il faut et il suffit qu'ils diffèrent de $2k\pi$, soit:

$$\alpha - \beta = 2k\pi.$$

Pour que $\alpha$ et $\beta$ aient des extrémités M et M′ symétriques par rapport à l'axe des sinus, il faut et il suffit que l'un des arcs AM′ soit supplémentaire de AM $= \alpha$, donc que :

$$\beta = \pi - \alpha + 2k\pi$$

ou $$\alpha + \beta = (2k+1)\pi.$$

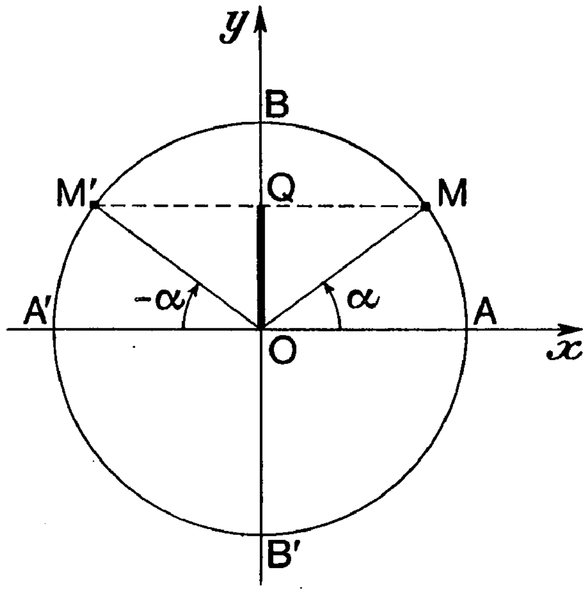


Fig. 128.

En définitive :

***Pour que deux arcs aient même sinus, il faut et il suffit que leur différence soit un multiple pair de $\pi$ ou leur somme un multiple impair de $\pi$.***

**237. Résoudre l'équation :** $\sin x = \sin\alpha$.

La condition précédente donne :

$$\boxed{x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi}$$

On obtient ainsi deux extrémités d'arcs $x$ répondant à la question; ces extrémités sont symétriques par rapport à l'axe des sinus; elles sont confondues en B ou B′ si $\alpha$ est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$.

Exemples. — 1° *Résoudre :* $\sin x = \sin 20°$ ($x$ en degrés).

On obtient : $x = 20° + k.360°$ ou $x = 160° + k.360°$ et deux extrémités d'arcs possibles.

2° *Résoudre :* $$\sin 4x = \sin \frac{2\pi}{5}.$$

Elle se ramène au cas précédent en posant $4x = X$; on a :

$$4x = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 4x = \pi - \frac{2\pi}{5} + 2k\pi,$$

soit : $$x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}.$$

Si $k$ augmente de 1, l'un des arcs $x$ augmente de $\frac{\pi}{2}$ ; si $k$ augmente de 4 on retrouve une extrémité d'arc déjà obtenue; on obtient 8 extrémités possibles, sommets de deux carrés inscrits dans le cercle trigonométrique.

3° *Résoudre :* $$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

On se ramène au cas général en posant $\frac{\pi}{3} + x = \alpha$ et $\frac{\pi}{3} - x = \beta$.

On obtient : $$\frac{\pi}{3} + x + \frac{\pi}{3} - x = (2k+1)\pi \qquad (1)$$

ou $$\frac{\pi}{3} + x - \frac{\pi}{3} + x = 2k\pi. \qquad (2)$$

La condition (1) donne : $\frac{2\pi}{3} = (2k+1)\pi$, ce qui est impossible.

La condition (2) donne : $x = k\pi$
et deux extrémités d'arcs possibles (A ou A′).

## 238. Résoudre l'équation : $\sin x = b$.

Si $|b| \leqslant 1$ il existe un arc $\alpha$ et un seul, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et admettant $b$ pour sinus. On le détermine à l'aide de la table et on se trouve ramené à l'équation :

$$\sin x = \sin \alpha.$$

Exemple. — *Résoudre :* $\sin x = -0{,}25$.

Cherchons un arc $\alpha'$ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que : $\sin \alpha' = 0{,}25$.

La table donne : $\sin 14° = 0{,}2419$; $\sin 15° = 0{,}2588$; $D = 169$; $d = 81$

Pour $D = 169$ : $\Delta\alpha = +60'$

Pour $d = 81$ : $\Delta\alpha = \frac{60' \times 81}{169} = 28',7$; on arrondit à $29'$.

Donc $\alpha' = 14°29'$ et $\alpha = -14°\,29'$

ce qui donne $x = -14°\,29' + k.360°$

ou $x = 194°\,29' + k.360°$

et deux extrémités d'arcs.

**239. Remarque.** — L'équation $\sin x = -\sin\alpha$ se ramène à $\sin x = \sin\alpha'$ en posant

$$\alpha' = -\alpha.$$

## ÉQUATION : $\operatorname{tg} x = t$

**240. Condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs aient même tangente.**

Pour que deux arcs $\alpha$ et $\beta$ d'origine A (fig. 129) aient même tangente $\overline{AT}$, il faut et il suffit que leurs extrémités appartiennent à la droite OT, donc que ces extrémités M et M′ soient, ou confondues, ou symétriques par rapport à O.

Dans le premier cas, il faut et il suffit que $\alpha$ et $\beta$ diffèrent de $2k\pi$.

Dans le second cas, il faut et il suffit que l'un des arcs AM′ soit égal à :

$$\overset{\frown}{\overrightarrow{AM}} + \pi = \alpha + \pi,$$

donc que : $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$

ou que : $\beta - \alpha = (2k+1)\pi$.

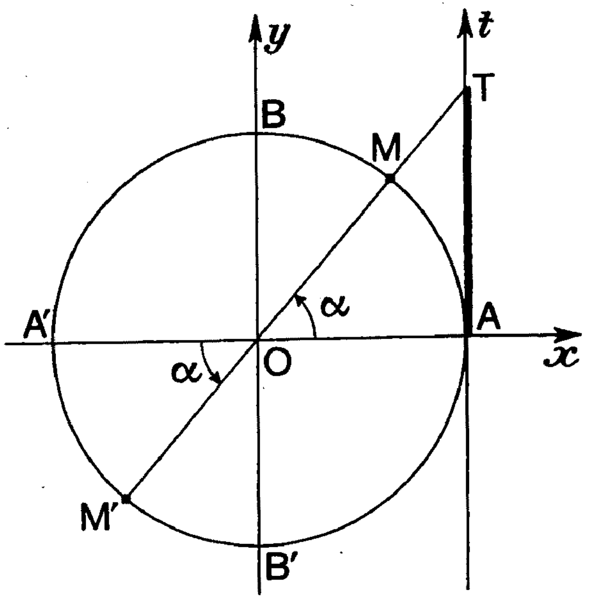


Fig. 129.

En définitive :

***Pour que deux arcs aient même tangente il faut et il suffit que leur différence soit un multiple de*** $\pi$ ***:*** $\beta - \alpha = k\pi$.

**241. Résoudre l'équation :** $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha$.

La condition précédente donne :

$$\boxed{x = \alpha + k\pi}$$

On obtient ainsi deux extrémités d'arcs $x$ répondant à la question et ces extrémités sont symétriques par rapport à O.

EXEMPLES. — 1° *Résoudre :* $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

On trouve $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

et deux extrémités d'arcs répondant à la question.

2° *Résoudre :* $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$.

L'équation s'écrit : $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(-2x)$.

En posant $x = \alpha$ et $-2x = \beta$, on retrouve l'équation tg $\alpha$ = tg $\beta$ ce qui donne :

$$x = -2x + k\pi \quad \text{donc} \quad x = \frac{k\pi}{3}$$

et 6 extrémités d'arcs répondant à la question.

### 242. Résoudre l'équation : tg $x = t$.

Quel que soit $t$, il existe un arc $\alpha$ et un seul, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, admettant $t$, pour tangente. Cet arc étant déterminé, on est ramené à l'équation tg $x$ = tg $\alpha$ que l'on sait résoudre.

EXEMPLE : *Résoudre l'équation :* tg $x = -0{,}7456$.

Cherchons un arc $\alpha'$ admettant pour tangente 0,7456. On lit dans la table

$$\text{tg } 36^\circ = 0{,}7265 \qquad \text{tg } 37^\circ = 0{,}7536 \qquad D = 271$$

$$\text{tg } \alpha' = 0{,}7456$$

$$d = 191 \qquad \text{Pour } 191 : \Delta\alpha' = \frac{60' \times 191}{271} = 42'$$

$$\alpha' = 36^\circ 42' \Longrightarrow \alpha = -36^\circ 42'$$

soit :

$$x = -36^\circ 42' + k \, . \, 180^\circ.$$

### 243. Remarques.

1° L'équation cotg $x$ = cotg $\alpha$ s'écrit $\frac{1}{\text{tg } x} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$ et se ramène à tg $x$ = tg $\alpha$.

2° L'équation tg $x$ = cotg $\alpha$ ou tg $x$ . tg $\alpha = 1$ s'écrit : tg $x$ = tg $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

et donne :

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi.$$

3° L'équation tg $x$ = − tg $\alpha$ s'écrit tg $x$ = tg $\alpha'$ en posant $\alpha' = -\alpha$.

4° L'équation tg $x$ = − cotg $\alpha$ ou tg $x$ . tg $\alpha = -1$ s'écrit : tg $x$ = tg $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$,

et donne :

$$x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k\pi.$$

## EXERCICES

— Calculer, à l'aide de la table, les fonctions circulaires des arcs suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **574.** 17°; | 12°15′; | 73°20′; | 85°12′. |
| **575.** − 23°; | − 42°30′; | − 73 gr; | − 80,5 gr. |
| **576.** 200°; | 221°30′; | 253,7 gr; | 221,25 gr. |
| **577.** 1 160°; | − 1 853°; | 712 gr; | − 943 gr. |

— Résoudre les équations suivantes et situer les extrémités des arcs correspondants sur le cercle trigonométrique :

**578.** $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{4}.$ **579.** $\cos 3x = \cos \left(\frac{\pi}{7} - x\right).$ **580.** $\cos 5x = \cos \left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$

**581.** $\cos \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$ **582.** $\cos (x + 36^\circ) = \cos (3x - 15^\circ).$

**583.** $\sin \left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin \left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$ **584.** $\sin 3x = \sin 5x.$

**585.** $\sin \left(11x + \frac{2\pi}{5}\right) + \sin x = 0.$ **586.** $\cos 3x + \cos 7x = 0.$

**587.** $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}.$ **588.** $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} 15^\circ.$ **589.** $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} x = 0.$

**590.** $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right).$ **591.** $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} - 12^\circ\right) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{5} + 11^\circ\right).$

**592.** $\operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} x = 1.$ **593.** $\operatorname{tg} 5x \operatorname{cotg} x = 1$ **594.** $\operatorname{tg}^2 5x - \operatorname{cotg}^2 x = 0.$

**595.** $\sin^2 3x - \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 0.$ **596.** $\cos^2 4x - \cos^2 (x + 25^\circ) = 0.$

**597.** $\sin^2 x - \cos^2 x = 0.$ **598.** $\sin^2 \left(5x + \frac{2\pi}{5}\right) - \cos^2 \left(\frac{x}{4} + \pi\right) = 0.$

**599.** $\sin x = \frac{1}{2}.$ **600.** $\sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ **601.** $4 \sin^2 x - 1 = 0.$

**602.** $\operatorname{tg} x = 1.$ **603.** $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0.$ **604.** $3 \operatorname{cotg}^2 x - 1 = 0.$

**605.** $\sin x = 0{,}3.$ **606.** $\sin x = -0{,}7.$ **607.** $\sin x = 0{,}4531.$

**608.** $\cos x = 0{,}71.$ **609.** $\cos x = -0{,}751.$ **610.** $\cos x = 0{,}7519.$

**611.** $\sin \left(3x - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}.$ **612.** $\cos \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ **613.** $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}.$

**614.** $4 \sin^2 (2x + 15^\circ) - 1 = 0.$ **615.** $4 \cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) - 3 = 0.$

**616.** $(2 \sin x - 1)^2 = (2 \sin x - 1) \left(\sin x - \frac{3}{2}\right).$ **617.** $8 \sin^3 x - 1 = 0.$

**618.** $\dfrac{\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}.$ **619.** $\dfrac{\cos x}{\sin \left(x - \frac{\pi}{5}\right)} = \dfrac{\sin \left(x - \frac{\pi}{5}\right)}{\cos x}.$

— Résoudre les systèmes d'équations suivants, et placer les extrémités des arcs $x$ et $y$ sur le cercle trigonométrique :

**620.** $\begin{cases} \sin x = \sin y \\ 2x - y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$ **621.** $\begin{cases} \cos x = \cos y \\ 3x + 2y = \pi \end{cases}$ **622.** $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \\ x + y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$

**623.** $\begin{cases} \sin 2x = \sin y \\ \sin x = \cos y. \end{cases}$ **624.** $\begin{cases} \sin 3x = \cos 2y \\ \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} y. \end{cases}$ **625.** $\begin{cases} \sin x + \cos 2y = 0 \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

**626.** $\begin{cases} \cos \frac{5x}{2} = \cos \left(y + \frac{\pi}{5}\right) \\ \sin x + \sin 3y = 0. \end{cases}$ **627.** $\begin{cases} \operatorname{tg} \left(3x + \frac{2\pi}{7}\right) = \operatorname{tg} 3y \\ \operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} y = 0. \end{cases}$

— Résoudre les inéquations suivantes et interpréter sur le cercle trigonométrique :

**628.** $2 \cos x - 1 > 0$ (pour $0 < x < \pi$). **629.** $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\text{pour } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

**630.** $\operatorname{tg} x < 1$ $\left(\text{pour } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$. **631.** $\operatorname{cotg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ (pour $0 < x < \pi$).

**632.** $2 \sin 3x < 1$ (pour $0 < x < 2\pi$). **633.** $2 \cos 2x + \sqrt{3} < 0$ (pour $-\pi < x < \pi$).

**634.** $\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (pour $0 < x < \pi$).

**635.** $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) > -\frac{1}{2}$ (pour $0 < x < \pi$).

— Le paramètre $\alpha$ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$, discuter l'existence et le signe des racine des équations en $x$ suivantes :

**636.** $x^2 - 2x \sin\alpha - \cos^2\alpha = 0$. **637.** $x^2 - 2x + \cos^2\alpha = 0$.

**638.** $x^2 - 2x \sin\alpha + \sin\alpha = 0$. **639.** $2x^2 - 4x \cos\alpha + \cos\alpha = 0$.

**640.** $x^2 - 2x \operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$. **641.** $x^2 - 2x \operatorname{cotg}\alpha + 1 = 0$.

**642.** $4(\sin\alpha - 1)\, x^2 + 4x \sin\alpha + \sin\alpha = 0$.

**643.** $x^2 \operatorname{tg}\alpha + 2(1 - \operatorname{tg}\alpha)\, x + \operatorname{tg}\alpha = 0$.

**644.** $(1 + \sin\alpha)\, x^2 - 2(\sin\alpha - 1)\, x + 13 - 15 \sin\alpha = 0$.

**645.** On donne l'équation : $x^2 - 2x \sin\varphi + (2 - \sqrt{3})(1 - 4\cos^2\varphi) = 0$,
où $x$ est l'inconnue et $\varphi$ un angle connu compris entre 0 et $2\pi$.

1° Démontrer que cette équation admet deux racines $x'$ et $x''$ quel que soit $\varphi$. Calculer $\varphi$ pour que l'une des racines soit égale à 0. Trouver le signe des racines $x'$ et $x''$ suivant la valeur de $\varphi$.

2° Trouver entre $x'$ et $x''$ une relation indépendante de $\varphi$.

**646.** Soit l'équation du second degré : $(2 \cos\alpha - 1)\, x^2 - 2x + \cos\alpha = 0$,
$\alpha$ étant un angle compris entre 0 et $\pi$.

1° Étudier suivant les valeurs de $\alpha$ l'existence et le signe des racines $x'$ et $x''$.

2° Calculer $\alpha$ lorsque $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} - 4 = 0$.

3° Sur un axe orienté, on prend une origine O et deux points A et B ayant pour abscisses $x'$ et $x''$. On trace le cercle de diamètre AB, et l'on se place dans le cas où l'on peut mener de O des tangentes à ce cercle. Si OT est une tangente, évaluer en fonction de $\alpha$ l'expression $y = \overline{OT}^2$.

4° En posant $\cos\alpha = m$, étudier les variations de $y$ en fonction de $m$ pour les valeurs convenables de $m$. Courbe représentative.

# FORMULES D'ADDITION

**244. Position du problème.** — Nous nous proposons de calculer les fonctions circulaires des arcs $(a + b)$ et $(a - b)$ connaissant celles de $a$ et celles de $b$.

**245. Calcul de cos** $(a - b)$.

Sur le cercle trigonométrique de centre O, rapporté au repère orthonormé $xOy$ (fig. 130) considérons les arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AN}$ respectivement égaux à $a$ et $b$.

Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ ont respectivement pour composantes scalaires ($\cos a$, $\sin a$) et ($\cos b$, $\sin b$). L'angle géométrique MON vaut $a - b$, à $2k\pi$ près en radians, et a pour cosinus, celui de l'angle $(a - b)$. Donc :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos(a - b)$$

(définition du produit scalaire)

et : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (expression analytique du produit scalaire). Il en résulte que :

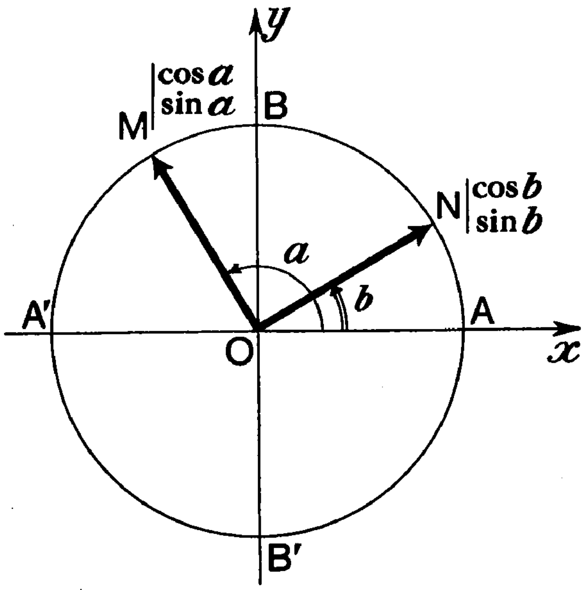



Fig. 130.

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}. \qquad (1)$$

**246. Corollaires.** 1° En changeant $b$ en $- b$ dans la relation (1), on obtient :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b),$$ soit (n° 224) :

$$\boxed{\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}. \qquad (2)$$

2° Remplaçons $a$ par $\frac{\pi}{2} - a$ dans la relation (2) :

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b,$$ soit (n° 226) :

$$\boxed{\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a} \qquad (3)$$

3° Remplaçons $b$ par $-b$ dans la relation (3) :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos(-b) - \sin(-b)\cos a \qquad \text{et (n° 224) :}$$

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a} \qquad (4)$$

**247. Calcul de tg** $(a+b)$ **et tg** $(a-b)$.

1° En divisant membre à membre les relations (4) et (2) on a :

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

puis, en simplifiant par $\cos a \cos b$ :

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\dfrac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\sin b \cos a}{\cos b \cos a}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}} \qquad (5)$$

2° En divisant membre à membre les relations (3) et (1) ou en changeant $b$ en $-b$ dans la précédente, on trouve :

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \qquad (6)$$

**248. Conclusion.** — En définitive :

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\cos(a+b) = & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\sin(a+b) = & \sin a \cos b + \sin b \cos a \\
\operatorname{tg}(a+b) = & \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \\
\hline
\cos(a-b) = & \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a-b) = & \sin a \cos b - \sin b \cos a \\
\operatorname{tg}(a-b) = & \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}
\end{array}}$$

**249. Exercices.** — 1° *Calculer les fonctions circulaires de* $\frac{5\pi}{12} = 75°$ *et* $\frac{\pi}{12} = 15°$ :

$$75° = 45° + 30° \quad \text{et} \quad 15° = 45° - 30°. \text{ Donc :}$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \quad \text{et} \quad \cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$\sin 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \quad \text{et} \quad \sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$\operatorname{tg} 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3} \qquad \text{et} \quad \operatorname{tg} 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}.$$

valeurs conformes à celles de deux angles complémentaires.

2° *Calculer* tg $(a + b + c)$.

On a : $\operatorname{tg}(a + b + c) = \operatorname{tg}[(a + b) + c] = \dfrac{\operatorname{tg}(a + b) + \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} c \operatorname{tg}(a + b)}$.

En utilisant la relation (5) on trouve :

$$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}.$$

## FORMULES DE MULTIPLICATION

**250. — Fonctions circulaires de l'arc 2 $x$.** — Nous nous proposons de trouver les fonctions circulaires de l'arc $2x$ connaissant celles de l'arc $x$.

En remplaçant $a$ et $b$ par $x$ dans les trois premières relations du n° 248 on obtient :

$\cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$ ou $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (1)

$\sin(x + x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x$ ou $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ (2)

$\operatorname{tg}(x + x) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ ou $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ (3)

En remplaçant dans (1) successivement $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$ on trouve :

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

En définitive :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x & \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x; & \operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \end{array}}$$

**251. Expression de $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ et $\operatorname{tg}^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.**

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \implies \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \implies \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

et par division : $$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}.$$

Ainsi, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ et $\operatorname{tg}^2 x$ s'expriment rationnellement en fonction de $\cos 2x$. En remplaçant $x$ par $\dfrac{a}{2}$ on obtient :

| | | |
|---|---|---|
| $\cos^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{2}(1 + \cos a)$ | $\sin^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{2}(1 - \cos a)$ | $\operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$ |

### 252. Fonctions circulaires de l'arc $3x$.

1° $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x$
$= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$
$= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$

2° $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$
$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$
$= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$

3° $$\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{3 \sin^2 x \cos x - \sin^3 x}{\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}.$$

**253. Théorème.** — ***Les fonctions circulaires d'un arc s'expriment rationnellement en fonction de la tangente de l'arc moitié.***

Les formules (1) et (2) du n° 248 s'écrivent, puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ :

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \quad \text{et} \quad \sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}.$$

Divisons tous les termes de ces deux rapports par $\cos^2 x$ (simplification valable même si $\cos x$ tend vers 0); on obtient :

$$\cos 2x = \frac{1 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \quad \text{et} \quad \sin 2x = \frac{2\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

ou :
$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{et} \quad \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

et par division :
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \text{ formule déjà connue.}$$

En remplaçant $x$ par $\frac{a}{2}$, on obtient :

$$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}; \quad \sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}; \quad \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}.$$

Posons $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t$; nous obtenons pour $\cos a$, $\sin a$ et $\operatorname{tg} a$ :

| | | |
|---|---|---|
| $\cos a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ | $\sin a = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ | $\operatorname{tg} a = \dfrac{2t}{1 - t^2}$ |

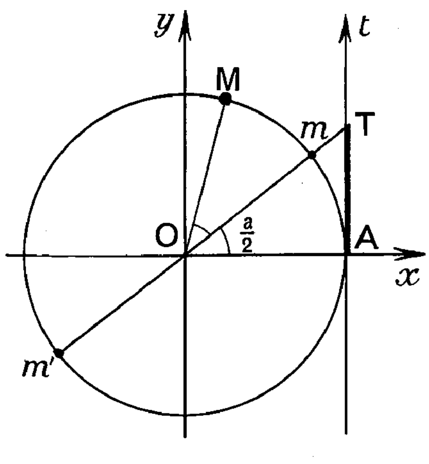


Fig. 131.

**254. Interprétation géométrique.** — Si on se donne $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t = \overline{AT}$ (fig. 131), les arcs $\frac{a}{2}$ ont leurs extrémités situées en $m$ ou $m'$ tels que $\overset{\frown}{Am'} - \overset{\frown}{Am} = \pi + 2k\pi$. Les extrémités M et M' des arcs $a$ seront telles que $\overset{\frown}{AM'} - \overset{\frown}{AM} = 2\pi + 4k\pi$; elles sont donc confondues; cela explique pourquoi connaissant $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ on trouve une valeur unique pour les fonctions circulaires de l'arc $a$.

**255. Calcul de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ en fonction de** $\sin a$ **et** $\cos a$. — On peut écrire :

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{a}{2}}{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}.$$

Or : $2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \sin a$; $2 \cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \cos a$ et : $2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$.

Donc :

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}}$$

Applications.

1° $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \dfrac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$

D'où : $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ ; $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{8} = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$

2° $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \dfrac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$

D'où : $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{cotg} \frac{5\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ ; $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

## TRANSFORMATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

**256. Rappel.** — Rappelons les formules d'addition du n° 248 :

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad (1)$$
$$\sin (a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad (2)$$
$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (3)$$
$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (4)$$

**257. Corollaires.** — En ajoutant, puis en retranchant membre à membre les relations (1) et (2), on obtient :

$$\sin (a + b) + \sin (a - b) = 2 \sin a \cos b \quad (5)$$
$$\sin (a + b) - \sin (a - b) = 2 \sin b \cos a \quad (6)$$

En ajoutant, puis en retranchant membre à membre les relations (3) et (4), on obtient de même :

$$\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos a \cos b \quad (7)$$
$$\cos (a + b) - \cos (a - b) = - 2 \sin a \sin b \quad (8)$$

**258. Transformation en produit de la somme ou de la différence de deux sinus ou de deux cosinus.**

Dans les relations (5), (6), (7) et (8), posons : $a + b = p$ et $a - b = q$, ce qui entraîne : $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$; nous obtenons :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad (9)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \quad (10)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad (11)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (12)$$

Ces formules permettent de transformer en produits les expressions $\sin p \pm \sin q$ et $\cos p \pm \cos q$. La formule (10) peut s'obtenir en changeant $q$ en $-q$ dans la formule (9) et la formule (12) en changeant $q$ en $\pi + q$ dans la formule (11). Ces formules permettent de factoriser certaines expressions trigonométriques.

**259. Applications.**

1° $\sin p + \cos q = \cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right) + \cos q = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right)$.

2° $\sin p - \cos q = \cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right) - \cos q = -2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right)$

3° $$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}}{2 \sin \frac{p+q}{2} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} = \operatorname{tg} \frac{p-q}{2} \operatorname{cotg} \frac{p+q}{2}.$$

4° $$\frac{\cos p - \cos q}{\cos p + \cos q} = \frac{-2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}} = -\operatorname{tg} \frac{p+q}{2} \operatorname{tg} \frac{p-q}{2}.$$

**260. Exercice.** — *Transformer l'expression: sin x + sin 2 x + sin 3 x en un produit de plusieurs facteurs.*

$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$ (n° 248) et $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ (n° 250).

Donc : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin x \cos x = 2 \cos x (\sin 2x + \sin x)$

Soit : $$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \cos x \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

**261. Transformation de $\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q$ et de $\operatorname{cotg} p \pm \operatorname{cotg} q$.**

1° $$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \sin q \cos p}{\cos p \cos q}$$

soit : $$\boxed{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin (p+q)}{\cos p \cos q}} \quad (13)$$

En changeant $q$ en $-q$, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}} \tag{14}$$

2° $$\operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} q = \frac{\cos p}{\sin p} + \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\sin q \cos p + \sin p \cos q}{\sin p \sin q}$$

soit :

$$\boxed{\operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}} \tag{15}$$

En changeant $q$ en $-q$, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{cotg} p - \operatorname{cotg} q = -\frac{\sin(p-q)}{\sin p \sin q}} \tag{16}$$

**262. Transformation en somme ou différence d'un produit de sinus ou cosinus.**

Des formules (5), (7) et (8) du n° 257, on déduit :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \tag{17}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \tag{18}$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \tag{19}$$

En faisant $b = a$ dans ces formules, on retrouve les relations (n^os 250 et 251) :

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a; \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}; \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

**263. Exemples.**

1° $$\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}[\sin 3x + \sin(-x)] = \frac{1}{2}[\sin 3x - \sin x]$$

$$\cos x \cos 2x = \frac{1}{2}[\cos 3x + \cos(-x)] = \frac{1}{2}[\cos 3x + \cos x]$$

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}[\cos(-x) - \cos 3x] = \frac{1}{2}[\cos x - \cos 3x].$$

2° $$\sin 2x \cos 3x \sin 5x = \frac{1}{2}\sin 2x[\sin 8x + \sin 2x] = \frac{1}{2}\sin 2x \sin 8x + \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

ou : $$\frac{1}{4}(\cos 6x - \cos 10x) + \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{4}(1 - \cos 4x + \cos 6x - \cos 10x).$$

3° $$4\sin^3 x = 4\sin x \sin^2 x = 2\sin x(1 - \cos 2x) = 2\sin x - 2\sin x \cos 2x$$
$$= 2\sin x - (\sin 3x - \sin x) = 3\sin x - \sin 3x.$$

### 264. Transformation de l'expression : $a \cos x + b \sin x$.

Nous supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Il existe $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ et :

$$a \cos x + b \sin x = a [\cos x + \operatorname{tg} \varphi \sin x] = \frac{a}{\cos \varphi} [\cos x \cos \varphi + \sin \varphi \sin x].$$

En posant $\frac{a}{\cos \varphi} = r$, on obtient :

$$\boxed{a \cos x + b \sin x = r \cos (x - \varphi)}$$

Remarque. — On peut aussi chercher $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{b}$ et :

$$a \cos x + b \sin x = b [\operatorname{tg} \theta \cos x + \sin x] = \frac{b}{\cos \theta} [\sin \theta \cos x + \sin x \cos \theta].$$

En posant : $\rho = \frac{b}{\cos \theta}$ :

$$\boxed{a \cos x + b \sin x = \rho \sin (x + \theta)}.$$

### 265. Applications.

1° $\cos x + \sin x$ : on obtient : $\operatorname{tg} \varphi = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $r = \sqrt{2}$ et :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

2° $\cos x - \sin x$ : on obtient : $\operatorname{tg} \varphi = -1$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $r = \sqrt{2}$ et

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

On en déduit :

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

3° $\sqrt{3} \cos x - \sin x$ : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{3}$; $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, $r = +2$ et :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \sin x - \sqrt{3} \cos x = -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

## EXERCICES

— Vérifier les identités suivantes :

**647.** $\cos (x + y) \cos (x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x.$

**648.** $\sin (x + y) \sin (x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x.$

**649.** $\sin (x + y) \cos (x - y) = \sin x \cos x + \sin y \cos y.$

**650.** $\sin (x - y) \cos (x + y) = \sin x \cos x - \sin y \cos y.$

**651.** $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin (x + y)}{\cos x \cos y} = \dfrac{2 \sin (x + y)}{\cos (x + y) + \cos (x - y)}.$

**652.** $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} = \dfrac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}.$

**653.** $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y = \dfrac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{\cos^2 x \cos^2 y}.$

**654.** $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}.$

**655.** $\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0.$

**656.** $\cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b) = 0.$

**657.** $\sin^2(x+y) = \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y \;\cos(x+y).$

**658.** $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z}.$

**659.** $\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) + 2\sin(x+y)\sin(x-y)\cos 2x = \sin^2 2x.$

**660.** $\sin^2 x + \sin^2 y + \cos(x+y)\cos(x-y) = 1.$

**661.** $\cos^2 x + \cos^2 y - \cos(x+y)\cos(x-y) = 1.$

**662.** $\sin 2x - \sin 2y = 2\cos(x+y)\sin(x-y).$

**663.** $2(\sin x + \cos x - 1)^2\;(\sin x + \cos x + 1)^2 = 1 - \cos 4x.$

**664.** $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{2(\cos^2 y - \cos^2 x)}{\sin 2x - \sin 2y}.$

**665.** $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

**666.** $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) = \dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}.$

**667.** $1 - \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) = \sin 2x\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right].$

**668.** $\sin x = 4\sin\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{\pi+x}{3}\sin\dfrac{\pi-x}{3}.$

**669.** $(1-2x\cos a+x^2)(x\sin a + x^2\sin 2a + \dots + x^n \sin na)$
$= x\sin a - x^{n+1}\sin(n+1)a + x^{n+2}\sin na.$

**670.** $(1-2x\cos a+x^2)(1 + x\cos a + x^2\cos 2a + \dots + x^n \cos na)$
$= 1 - x\cos a - x^{n+1}\cos(n+1)a + x^{n+2}\cos na.$

**671.** 1° Démontrer la relation : $\operatorname{cotg} x - 2\operatorname{cotg} 2x = \operatorname{tg} x.$

2° Calculer la somme suivante : $S_n = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 2^2\operatorname{tg} 2^2 x + \dots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x.$

3° La somme $S_n$ admet-elle une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

**672.** On pose $\cos\dfrac{x}{2} = X$, $\sin\dfrac{x}{2} = Y$ et on donne $\cos x = a.$

1° Calculer $X^2+Y^2$, puis $X^2-Y^2$.

2° En déduire X et Y en fonction de $\cos x$ et placer les extrémités des arcs $\dfrac{x}{2}$ sur le cercle trigonométrique.

**673.** On pose $\cos\dfrac{x}{2} = X$, $\sin\dfrac{x}{2} = Y$ et on donne : $\sin x = b.$

1° Calculer $(X+Y)^2$ puis $(X-Y)^2$.

2° En déduire X et Y en fonction de $\sin x$ et placer les extrémités des arcs $\frac{x}{2}$ sur le cercle trigonométrique.

— Calculer, connaissant les fonctions circulaires de $a$, $b$, $c$ :

**674.** $\sin(a+b+c)$. **675.** $\cos(a+b+c)$. **676.** $\operatorname{cotg}(a+b+c)$.

**677.** $\cos(a+b-c)$. **678.** $\operatorname{tg}(a+b-c)$. **679.** $\sin(a+b-c)$.

**680.** $\sin(2a+b)$. **681.** $\cos(2a+b)$. **682.** $\operatorname{tg}(2a+b)$.

**683.** Résoudre les équations : $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

— Exprimer en fonction de $\cos 2x$ :

**684.** $1 + \sin^2 x$. **685.** $1 + \cos^2 x$. **686.** $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$. **687.** $\sin^2 x \cos^2 x$.

**688.** $\frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$. **689.** $\frac{1 + \cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$. **690.** $\operatorname{cotg}^2 x$ **691.** $\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 - \operatorname{cotg}^2 x}$.

— Exprimer en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ :

**692.** $2\cos x + 3\sin x - 5$. **693.** $a\cos x + b\sin x + c$. **694.** $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$.

**695.** $\frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}$. **696.** $\frac{3 + \cos x}{1 + 2\cos x}$. **697.** $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$.

**698.** Dans un repère orthonormé $xOy$, deux demi-droites issues de O ont pour pentes respectives $m$ et $m'$.

1° $\alpha$ désignant l'angle de ces demi-droites, exprimer $\operatorname{tg}\alpha$ en fonction de $m$ et $m'$.

2° Quelle relation doivent vérifier $m$ et $m'$ pour que $\alpha = \frac{\pi}{2}$?

— Soient A, B, C les angles d'un triangle. Démontrer les relations :

**699.** $\sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin A$. **700.** $\cos B \cos C - \sin B \sin C + \cos A = 0$.

**701.** $\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}$. **702.** $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2}$.

**703.** $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$. **704.** $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$.

**705.** $\Sigma \sin A = \Sigma \sin A (\cos B + \cos C)$. **706.** $\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C$.

**707.** $\sin^2 B - \sin^2 C = \sin A \sin(B - C)$. **708.** $\Sigma(\sin^2 B - \sin^2 C)\operatorname{cotg} A = 0$.

**709.** Démontrer pour quatre angles $a, b, c, d$ l'équivalence :

$$a + b + c + d = 2k\pi \iff \Sigma \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \Sigma \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

**710.** Deux angles aigus $x$ et $y$ sont tels que $\cos x = \frac{8}{17}$ et $\sin y = \frac{21}{29}$.

1° Calculer $\sin x$ et $\cos y$.
2° Calculer $x + y$.

**711.** Deux angles aigus $x$ et $y$ sont tels que $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{tg} y = \frac{1}{3}$. Calculer $\operatorname{tg}(x + y)$, puis $x + y$.

**712.** 1° Vérifier la relation : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0.$

2° On construit 3 vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ de longueur 1, faisant avec l'axe $Oz$ les angles respectifs $x$, $x + \frac{2\pi}{3}$ et $x - \frac{2\pi}{3}$. Que peut-on dire de la somme des projections de ces vecteurs sur l'axe $Oz$ ? Interprétation géométrique.

**713.** Deux angles positifs $x$ et $y$ ont pour somme $\frac{\pi}{4}$ et sont tels que : $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3 - 2\sqrt{2}$.

1° Calculer $\operatorname{tg}(x + y)$ et en déduire $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$.

2° Calculer $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg} y$, puis les angles $x$ et $y$.

**714.** Deux angles positifs $x$ et $y$ ont pour somme $\frac{\pi}{3}$ et sont tels que : $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

1° Calculer $\operatorname{tg}(x + y)$ et en déduire $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

2° Calculer $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg} y$, puis les angles $x$ et $y$.

— Transformer en produits les expressions suivantes :

**715.** $\sin 3x + \sin 5x$.

**716.** $\sin 3x - \sin x$.

**717.** $\cos 3x + \cos 5x$.

**718.** $\cos 2x - \cos x$.

**719.** $1 - \cos 3x$.

**720.** $1 + \cos 2x$.

**721.** $1 - \sin 4x$.

**722.** $1 + \sin 5x$.

**723.** $\sin^2 5x - \sin^2 x$.

**724.** $\cos^2 3x - \cos^2 x$.

**725.** $\sin x + \sin 3x + 2\sin 2x$.

**726.** $\cos x + \sin 2x + \cos 3x$.

**727.** $\sin x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 6x$.

**728.** $\sin x + \sin 2x + \sin 4x - \sin 7x$.

**729.** $1 + \cos 2x + \cos 3x + \cos 5x$.

**730.** $1 - \cos 2x + \cos 3x - \cos 5x$.

**731.** $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c)$.

**732.** $\sin ax + \sin bx$

**733.** $\sin ax - \sin bx$.

**734.** $\cos ax + \cos bx$

**735.** $\cos ax - \cos bx$.

**736.** $1 - \cos 2nx$

**737.** $1 + \cos 2nx$.

**738.** $1 + \sin 2nx$

**739.** $1 - \sin 2nx$.

**740.** $\cos^2 ax - \cos^2 bx$

**741.** $\sin^2 ax - \sin^2 bx$.

**742.** $\sqrt{3} \pm 2\cos x$

**743.** $\sqrt{3} \pm 2\sin x$.

**744.** $2\sin x \cos x - 1$.

**745.** $2\sin x \cos x - \frac{1}{2}$.

**746.** $\sin x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 11x$.

**747.** $\sin 2x + \sin 3x + \sin 7x - \sin 2x$.

**748.** $1 - \cos 2x + \cos 4x - \cos 6x$.

**749.** $1 + \cos ax + \cos bx + \cos(a + b)x$.

**750.** $\sin x + \sin ax + \sin bx + \sin(a + b - 1)x$.

**751.** $\sin(a + b) - \sin a + \sin b$

**752.** $\cos(a + b) - \cos a + \sin b$.

**753.** $\sin(a + b) + \sin a + \sin b$

**754.** $\cos(a + b) + \cos a + \sin b$.

**755.** $1 - \sin^2 a - \sin^2 b$

**756.** $\cos^2(a + b) + \cos^2(a - b) - 1$.

— Simplifier les expressions suivantes

**757.** $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a + \sin b}$. **758.** $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a - \sin b}$.

**759.** $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a + \cos b}$. **760.** $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a - \cos b}$.

**761.** $\dfrac{\sin a - \sin b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$. **762.** $\dfrac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a+b)}$.

**763.** $\dfrac{\sin(a+b) + \sin c}{\sin a + \sin(b+c)}$. **764.** $\dfrac{\cos(a+b) + \cos c}{\cos a + \cos(b+c)}$.

**765.** $\dfrac{\sin(a+b) - \sin c}{\cos a + \cos(b+c)}$. **766.** $\dfrac{\cos(a+b) - \cos c}{\sin a + \sin(b+c)}$.

**767.** $\dfrac{\sin(a-b)[\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b]}{\sin(a+b)[\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b]}$. **768.** $\cos^2 a \cos^2 b (\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b)$.

**769.** $\sin^2 a \sin^2 b (\operatorname{cotg}^2 a - \operatorname{cotg}^2 b)$ **770.** $\dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} 3a}{\operatorname{tg} 3a}$.

**771.** $\dfrac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a}$. **772.** $\dfrac{\operatorname{cotg} 2a + \operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg} 2a - \operatorname{cotg} a}$.

**773.** $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$. **774.** $\dfrac{\sin x + 2\sin 3x + \sin 5x}{\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x}$.

**775.** Transformer en un produit l'expression suivante :

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2\cos x \cos y \cos z - 1.$$

On posera : $x + y + z = 2p$, $y + z - x = 2(p - x)$,

$x + z - y = 2(p - y)$ et $x + y - z = 2(p - z)$.

— Transformer en sommes les expressions suivantes :

**776.** $\sin 3x \sin 5x$. **777.** $\cos 2x \cos 3x$.

**778.** $\sin 4x \cos 3x$. **779.** $4 \sin a \sin b \sin c$.

**780.** $4 \sin a \sin b \cos c$. **781.** $4 \cos^3 x$.

**782.** $\sin 15^\circ \sin 75^\circ$. **783.** $\cos 15^\circ \cos 75^\circ$.

**784.** $4 \sin \dfrac{x}{3} \sin \dfrac{\pi + x}{3} \sin \dfrac{\pi - x}{3}$. **785.** $4 \cos \dfrac{x}{3} \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{x}{3}\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{x}{3}\right)$.

**786.** $\sin ax \, . \, \sin bx$ **787.** $\cos ax \, . \, \cos bx$.

**788.** $\sin ax \, . \, \cos bx$ **789.** $\sin ax \, . \, \sin bx \, . \, \sin cx$.

**790.** $\sin ax \, . \, \sin bx \, . \, \cos cx$ **791.** $\sin ax \, . \, \cos bx \, . \, \cos cx$.

**792.** $2 \sin x \sin 2x + \cos 3x$ **793.** $4 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$.

**794.** $2 \sin x \cos 3x - \sin 4x$ **795.** $2 \cos x \cos 2x - \cos 3x$.

**796.** $\dfrac{\sin 3a}{\sin a} - 2\cos 2a$. **797.** $\dfrac{\cos 5a}{\cos a} + 2(\cos 2a - \cos 4a)$.

**798.** $\dfrac{\cos 7a}{\cos a} + 2(-\cos 2a + \cos 4a - \cos 6a)$.

— Factoriser les expressions suivantes où A, B, C sont les trois angles d'un triangle et en déduire des relations trigonométriques dans le triangle isocèle.

**799.** $\sin A + \sin B + \sin C$

**800.** $\sin A + \sin B - \sin C$.

**801.** $\cos A + \cos B + \cos C - 1$

**802.** $\cos A + \cos B - \cos C + 1$.

**803.** $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

**804.** $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C$.

**805.** $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C$

**806.** $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C$.

**807.** $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C$

**808.** $\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C - 1$.

**809.** $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$.

**810.** $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2}$.

**811.** $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 1$.

**812.** $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} + 1$.

**813.** $\sin^3 A \sin (B - C) + \sin^3 B \sin (C - A) + \sin^3 C \sin (A - B)$.

**814.** On considère les deux sommes suivantes :

$S = \cos a + \cos (a + h) + \cos (a + 2h) + \cos (a + 3h) \ldots\ldots + \cos (a + nh)$

$S' = \sin a + \sin (a + h) + \sin (a + 2h) + \sin (a + 3h) \ldots\ldots + \sin (a + nh)$.

1° Calculer et réduire les produits $2S \sin \frac{h}{2}$ et $2S' \sin \frac{h}{2}$.

2° En déduire les valeurs de S et S'.

# ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

**266. Définition.** — On appelle équations trigonométriques celles où figurent l'inconnue $x$ et une ou plusieurs fonctions circulaires de l'inconnue. Nous nous bornerons au cas où l'équation contient des fonctions circulaires d'un même arc $x$, ou se ramène à ce cas.

**267. Égalité de deux cosinus, deux sinus ou deux tangentes.** — Elles ont été étudiées aux nos 233, 237 et 241 :

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Longrightarrow f(x) \pm g(x) = 2k\pi$$

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Longrightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) = 2k\pi & \text{ou} \\ f(x) + g(x) = (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x) \Longrightarrow f(x) - g(x) = k\pi.$$

**268. Équation invariante quand on change $x$ en $-x$.** — En posant $\cos x = u$, une telle équation se transforme en $F(u) = 0$ avec $|u| \leqslant 1$. Il en est ainsi des équations :

$F(\cos x) = 0$; $\quad F(\cos x, \sin^2 x) = 0$; $\quad F(\cos x, \sin^2 x, \operatorname{tg}^2 x) = 0.$

EXEMPLE. — *Résoudre l'équation :* $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \sin^2 x - 2\cos x = 0.$

Elle devient, en posant $\cos x = u$ :

$$u^2 + 1 - u^2 - 2u = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}.$$

Elle admet pour solutions : $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi.$

**269. Équation invariante quand on change $x$ en $\pi - x$.** — En posant $\sin x = v$, une telle équation se transforme en $F(v) = 0$ avec $|v| \leqslant 1$. Il en est ainsi des équations :

$F(\sin x) = 0$; $\quad F(\sin x, \cos^2 x) = 0$; $\quad F(\sin x, \cos^2 x, \operatorname{tg}^2 x) = 0.$

EXEMPLE. — *Résoudre l'équation :* $\cos 2x + 11 \sin x + 5 = 0.$

Elle devient un posant $\sin x = v$ :

$$1 - 2v^2 + 11v + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2v^2 - 11v - 6 = 0.$$

dont les racines sont : $v' = -\dfrac{1}{2}$; $v'' = 6$. Seule $v' = -\dfrac{1}{2}$ convient et :

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi.$$

**270. Équation invariante quand on change $x$ en $\pi + x$.** — En posant $\operatorname{tg} x = t$, une telle équation se transforme, pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ en $F(t) = 0$. Il en est ainsi des équations :

$$F(\operatorname{tg} x) = 0; \qquad F(\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x) = 0; \qquad F(\sin 2x, \cos 2x) = 0;$$

EXEMPLE. — *Résoudre l'équation :* $(\sqrt{3} - 1)\cos^2 x - (1 + \sqrt{3})\sin x \cos x + 1 = 0.$

Elle s'écrit : $(\sqrt{3} - 1)\cos^2 x - (1 + \sqrt{3})\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 0$

$$\sqrt{3}\cos^2 x - (1 + \sqrt{3})\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$$

$$\cos^2 x\,[\sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x] = 0.$$

L'équation proposée n'étant pas vérifiée pour $\cos x = 0$, en posant $\operatorname{tg} x = t$, on obtient l'équation équivalente :

$$t^2 - (1 + \sqrt{3})\,t + \sqrt{3} = 0,$$

dont les racines sont $t' = 1$ ; $t'' = \sqrt{3}$. L'équation proposée a pour solutions :

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

**271. Utilisation des formules de transformation.** — Les formules des nos 258 à 262 permettent parfois de transformer une équation trigonométrique en une autre plus facile à résoudre :

EXEMPLE I. — *Résoudre l'équation :* $\sin x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 6x = 0$ (1)

Elle se transforme (no 258) en : $2\sin 2x \cos x + 2\sin 5x \cos x = 0.$

puis en : $$4\cos x \sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0$$

et se décompose en : $$\cos x = 0; \quad \sin\frac{7x}{2} = 0; \quad \cos\frac{3x}{2} = 0.$$

Les solutions de l'équation (1) sont donc :

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \qquad x = \frac{2k\pi}{7}; \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}.$$

EXEMPLE II. — *Résoudre l'équation :* $\sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Elle se transforme (no 262) en :

$$\frac{1}{2}\left[\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

et équivaut à : $$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \iff 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi.$$

Donc : $$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}.$$

**272. Méthode générale.** — L'équation $F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x) = 0$ se ramène en posant $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ (pour $x \neq \pi + 2k\pi$), et en utilisant les formules du no 253, à l'équation algébrique : $f(t) = 0$. On utilisera ce procédé si les méthodes indiquées ci-dessus ne sont pas applicables. La résolution de l'équation du premier degré en $\sin x$ et $\cos x$ en fournit un exemple.

**273. Résolution de l'équation :** $a \cos x + b \sin x = c \qquad (a \neq 0;\ b \neq 0)$. (1)

**1re Méthode.** — En posant $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ où $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$ et $r = \frac{a}{\cos \varphi}$, l'expression $a \cos x + b \sin x$ se transforme (nº 264) en : $r \cos (x - \varphi)$. L'équation (1) est alors équivalente à : $\cos (x - \varphi) = \frac{c}{r}$ que l'on sait résoudre (nº 234). Pour qu'elle admette des solutions, il faut et il suffit que $\frac{c}{r}$ soit un cosinus, c'est-à-dire que :

$$\left|\frac{c}{r}\right| \leqslant 1 \iff c^2 \leqslant r^2 \iff c^2 < a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \quad \text{soit :}$$

$$\boxed{c^2 \leqslant a^2 + b^2} \tag{2}$$

On utilise cette méthode si $a$, $b$, $c$ sont des coefficients numériques :

En supposant la condition (2) satisfaite, posons : $\frac{c}{r} = \cos \alpha$ où $\alpha \in [0, \pi]$. L'équation (1) équivaut à : $\cos (x - \varphi) = \cos \alpha \iff x - \varphi = \pm \alpha + 2 k\pi$.

Les solutions sont $x = \varphi \pm \alpha + 2 k\pi$. Les extrémités des arcs $x$ sont deux points distincts ou confondus du cercle trigonométrique.

Exemple. — *Résoudre l'équation :* $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$.

Elle équivaut à : $\quad 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \iff \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$

et a pour solutions : $\quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$

**274. 2e Méthode.** — Posons $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. L'équation : $a \cos x + b \sin x = c$ se transforme (nº 253) en supposant $x \neq \pi$ ou $c \neq -a$.

$$\frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2} + \frac{2bt}{1 + t^2} = c \iff a(1 - t^2) + 2bt = c(1 + t^2)$$

$$(a + c)\, t^2 - 2\, bt + c - a = 0 \tag{3}$$

1º Si $a + c \neq 0$, l'équation (3) est du second degré en $t$. La condition de réalité des racines est :

$$b^2 - (a + c)(c - a) \geqslant 0 \iff c^2 \leqslant a^2 + b^2 \tag{2}$$

Soient $t'$ et $t''$ les racines distinctes ou confondues de l'équation (3); posons $t' = \operatorname{tg} \alpha$ et $t'' = \operatorname{tg} \beta$ où $\alpha$ et $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$. Il vient :

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \alpha$ ou $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \beta$ soit $x = 2\,\alpha + 2\,k\pi$ ou $x = 2\,\beta + 2\,k\pi$, donc deux extrémités d'arcs $x$ distinctes ou confondues sur le cercle trigonométrique.

2º Si $a + c = 0$, l'équation (3) se réduit à l'équation du 1er degré : $2\,bt = -2\,a$ $(b \neq 0)$. Mais l'équation $a \cos x + b \sin x = c$ s'écrit alors $a(1 + \cos x) + b \sin x = 0$ ou

$2\cos\frac{x}{2}\left(a\cos\frac{x}{2} + b\sin\frac{x}{2}\right) = 0$ et admet alors la solution évidente : $x = \pi + 2k\pi$ qui correspondrait à $|t|$ infini. La résolution de l'équation (3) permet encore la résolution de l'équation (1) en admettant que l'une des racines de l'équation (3) devient infinie lorsque le coefficient de $t^2$ est nul et même que les deux racines deviennent infinies pour $a + c = b = 0$.

**275. Exemple.** — *Résoudre et discuter l'équation* :

$$2m\cos x + (m^2 - 1)\sin x = 2m^2. \qquad (1)$$

On obtient l'équation en $t$ :

$$2m(m+1)t^2 - 2(m^2-1)t + 2m(m-1) = 0 \qquad (3)$$

La condition de réalité des racines est : $(m^2-1)^2 - 4m^2(m^2-1) \geqslant 0$ soit :

$$-(m^2-1)(1+3m^2) \geqslant 0 \iff m^2 - 1 \leqslant 0 \iff |m| \leqslant 1.$$

1° Si $|m| < 1$, l'équation (3) a deux racines réelles, distinctes et finies $t' = \operatorname{tg}\alpha$ ; $t'' = \operatorname{tg}\beta$ e $x = 2\alpha + 2k\pi$ ou $x = 2\beta + 2k\pi$.

2° Si $m = 0$ l'équation (3) se réduit à $t = 0$ et l'équation (1) qui s'écrit : $\sin x = 0$ admet les solutions : $x = k\pi$.

3° Si $m = -1$, l'équation (3) se réduit à $4 = 0$, et on voit que l'équation (1) qui s'écrit : $\cos x = -1$ admet les solutions : $x = (2k+1)\pi$.

**276. Interprétation graphique.** — Dans un repère orthonormé XOY (fig. 132) tout point M du cercle trigonométrique a pour coordonnées $X = \cos x$ ; $Y = \sin x$ où $x$ désigne l'un des arcs $\overset{\frown}{AM}$. Pour que M soit extrémité d'un arc $x$ solution de l'équation : $a\cos x + b\sin x = c$, il faut et il suffit qu'il appartienne à la fois au cercle trigonométrique d'équation : $X^2 + Y^2 = 1$ et à la droite D d'équation : $aX + bY - c = 0$. La distance $d = OH$ du point O à la droite D est telle que :

$$\overline{OH} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \iff d^2 = \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

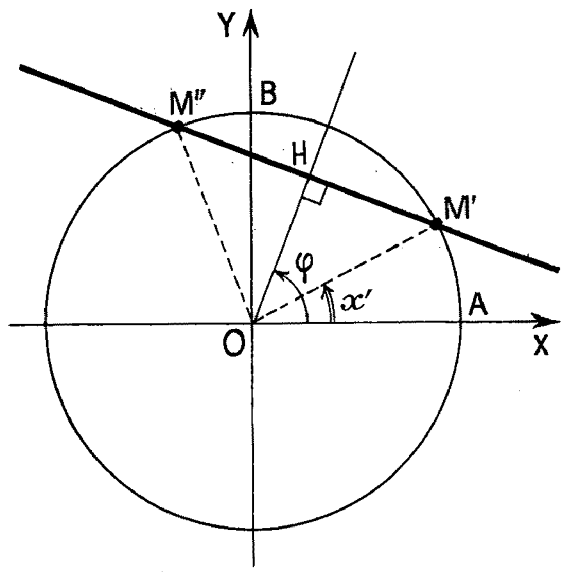


Fig. 132.

Pour que la droite D coupe le cercle trigonométrique en deux points M′ et M″ distincts ou confondus, il faut et il suffit que :

$$\frac{c^2}{a^2+b^2} \leqslant 1 \iff c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

Les solutions de l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ sont alors les arcs $\overset{\frown}{AM'}$ et $\overset{\frown}{AM''}$.

**277. Équations qui se ramènent à l'équation :** $a\cos x + b\sin x = c$.

1° *Équation* : $a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d = 0$.

On peut la résoudre en posant $\operatorname{tg} x = t$ (n° 253). On peut aussi l'écrire :

$$a\left(\frac{1+\cos x}{2}\right) + b\sin 2x + c\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + d = 0.$$

soit : $$(a - c) \cos 2x + 2b \sin 2x + a + c + 2d = 0.$$

qui donne, en posant $\dfrac{2b}{a - c} = \operatorname{tg} \varphi$ : $\quad \cos(2x - \varphi) = \dfrac{c + a + 2d}{c - a} \cos \varphi.$

Ainsi l'équation : $7 \cos^2 x + 6\sqrt{3} \sin x \cos x + \sin^2 x + 2 = 0$ s'écrit :

$$6 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 6 = 0 \iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

dont les solutions sont : $$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi.$$

2° *Équation invariante quand on change $x$ en $\frac{\pi}{2} - x$.*

On peut la résoudre en prenant pour inconnue auxiliaire $y = \sin x + \cos x$ ou en posant $x = \frac{\pi}{4} + X$ car on est ramené à une équation qui se conserve quand on change X en $-$ X.

Ainsi, considérons l'équation : $\sin x + \cos x + \sin 2x = 1$

En posant $x = \frac{\pi}{4} + X$ on trouve :

$$2 \cos^2 X + \sqrt{2} \cos X - 2 = 0 \implies \cos X = -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos X = -\sqrt{2} \text{ est impossible, } \cos X = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff X = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

On obtient : $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad x = 2k\pi.$

**278. Résolution trigonométrique d'une équation du second degré.**

1° Toute équation du second degré en $x$ où les racines $x'$ et $x''$ sont de même signe peut s'écrire : $\quad x^2 + px + k^2 = 0 \quad$ avec $\quad x'x'' = k^2.$

Posons : $x' = k \operatorname{tg} \varphi$ et $x'' = k \operatorname{cotg} \varphi$ où $\varphi$ est une inconnue auxiliaire comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. La relation $x'x'' = k^2$ est vérifiée. Pour que $x'$ et $x''$ soient racines de l'équation, il faut et il suffit que :

$$x' + x'' = k(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{cotg} \varphi) = -p,$$

ou : $$k\left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}\right) = \frac{k(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi} = -p.$$

Soit : $$\frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{-2k}{p} \iff \sin 2\varphi = \frac{-2k}{p}.$$

Si : $\left|\frac{k}{p}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, il existe un arc $\alpha$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, tel que : $\sin \alpha = -\dfrac{2k}{p}$

et : $$\varphi = \frac{\alpha}{2} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

Quelle que soit la solution adoptée pour $\varphi$ :

$$x' = k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad x'' = k \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}.$$

Exemple : $x^2 - 4x + 1 = 0$; donc $k = 1$; $p = -4$.

On trouve : $\sin 2\varphi = \frac{1}{2}$. On prend $2\varphi = \frac{\pi}{6}$ et $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Et (nº 255) : $x' = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ ; $x'' = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

2º Si $x'$ et $x''$ sont de signes contraires, l'équation peut s'écrire :

$$x^2 + px - k^2 = 0, \qquad \text{avec :} \quad x'x'' = -k^2.$$

On pose : $x' = k \operatorname{tg} \varphi$; $x'' = -k \operatorname{cotg} \varphi$. L'inconnue auxiliaire $\varphi$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, est alors déterminée par :

$$x' + x'' = k(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{cotg} \varphi) = k\frac{(\operatorname{tg}^2 \varphi - 1)}{\operatorname{tg} \varphi} = -p,$$

soit :

$$\frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2k}{p}.$$

On cherche $\alpha$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2k}{p}$ et : $2\varphi = \alpha$.

On en déduit : $x' = k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ et $x'' = -k \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$.

Exemple : $x^2 + 6x - 9 = 0$; donc $p = 6$ et $k = 3$.

On trouve : $\operatorname{tg} 2\varphi = 1$. On prend $2\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $\varphi = \frac{\pi}{8}$ d'où (nº 255) :

$$x' = 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 3\left(\sqrt{2} - 1\right); \; x'' = -3 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{8} = -3\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

**279. Inéquations trigonométriques.** — *On appelle inéquations trigonométriques celles où figurent une ou plusieurs fonctions circulaires de l'inconnue.*

Pour les résoudre, on essaie de les transformer, par changement d'inconnue, en inéquations algébriques, puis on interprète les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exemple I. $\cos 2x + 11 \sin x + 5 < 0$.

En posant $v = \sin x$ et en opérant comme au nº 269, on obtient : $2v^2 - 11v - 6 > 0$.

Les solutions sont : $v < -\frac{1}{2}$; $v > 6$.

Puisque $|v| \leqslant 1$, les solutions acceptables sont : $v < -\frac{1}{2}$.

Les extrémités des arcs $x$ appartiennent à l'arc N'B'N du cercle trigonométrique (fig. 133). Les arcs $x$ compris entre $-\pi$ et $+\pi$ et solutions de l'inéquation sont tels que :

$$-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}.$$

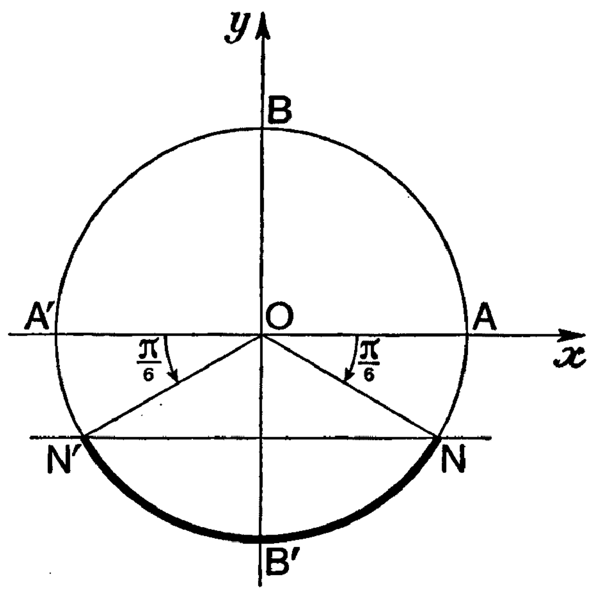


Fig. 133.

EXEMPLE II. $(\sqrt{3} - 1)\cos^2 x - (1 + \sqrt{3})\sin x \cos x + 1 < 0.$

En posant $\operatorname{tg} x = t$ et en opérant comme au nº 270, on obtient :

$t^2 - (1 + \sqrt{3})\, t + \sqrt{3} < 0$ dont les solutions sont : $1 < t < \sqrt{3}$.

Les extrémités des arcs $x$ appartiennent à l'un ou à l'autre des arcs RS et R'S' du cercle trigonométrique (fig. 134). Les arcs $x$, compris entre 0 et $2\pi$ et solutions de l'inéquation sont définis par :

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{4} < x < \frac{4\pi}{3}.$$

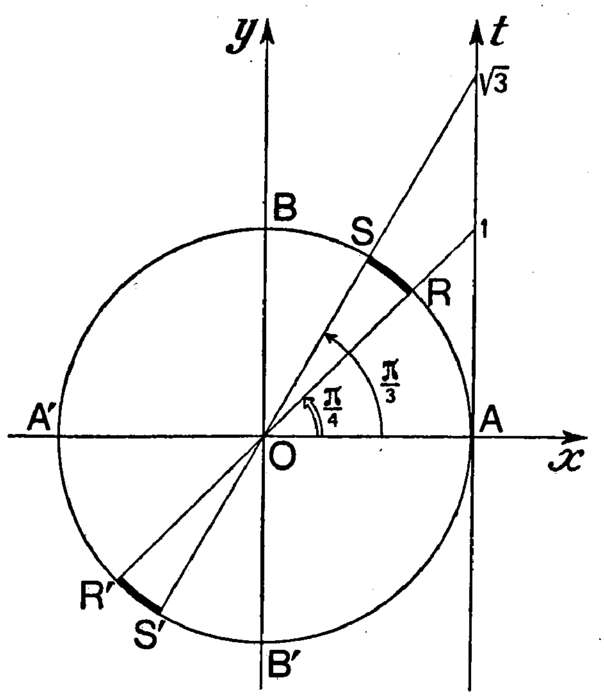



Fig. 134.

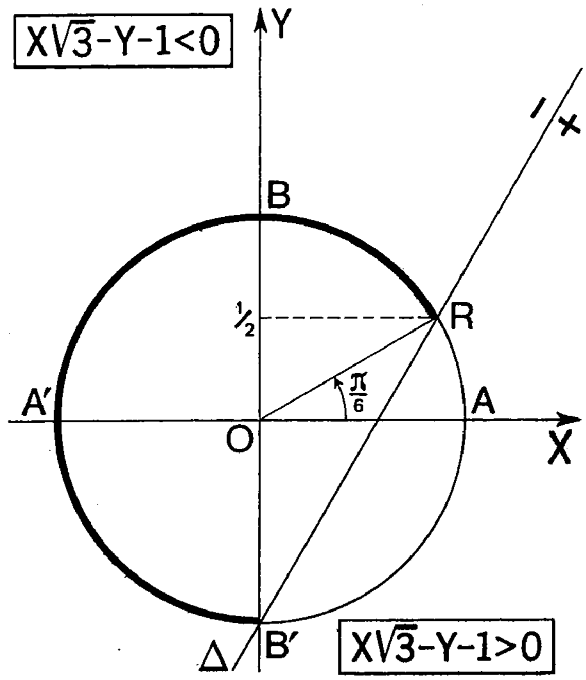



Fig. 135.

EXEMPLE III. $\sqrt{3}\cos x - \sin x < 1.$

Elle équivaut (nº 273) à : $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < 1 \iff \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}.$

Les arcs $\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ compris entre 0 et $2\pi$ et solutions de l'inéquation sont tels que :

$$\frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{3} \iff \frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

Les extrémités des arcs $x$ appartiennent à l'arc RBA'B' du cercle trigonométrique (fig. 135). Graphiquement, on peut opérer de la façon suivante :

En posant $X = \cos x$ et $Y = \sin x$, l'inéquation se transforme en : $X\sqrt{3} - Y - 1 < 0$. Les points M du plan dont les coordonnées vérifient cette inéquation sont du même côté que O par rapport à la droite $\Delta$ d'équation : $X\sqrt{3} - Y - 1 = 0$ qui coupe le cercle trigonométrique en R et B'.

**280. Systèmes d'équations trigonométriques.** — *Un système d'équations est trigonométrique lorsque l'une au moins des équations du système renferme des fonctions circulaires d'une ou plusieurs inconnues.*

On résout un système de deux équations trigonométriques en $x$ et $y$ soit en le ramenant à un système algébrique à deux inconnues, par exemple $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et $v = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$, soit en éliminant une des inconnues pour obtenir une équation trigonométrique à une inconnue :

***On élimine l'inconnue y entre les équations*** $F(x, \sin y, \cos y) = 0$ ***et*** $G(x, \sin y, \cos y) = 0$ ***en résolvant ce système en sin y et cos y et en portant les valeurs trouvées dans la relation*** $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$.

EXEMPLE I. $\left\{\begin{aligned} & x + y = \frac{\pi}{3} && (1) \\ & \sin x + \sin y = \frac{1}{2} && (2) \end{aligned}\right.$ symétrique en $x$ et $y$.

L'équation (2) s'écrit : $2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}$ soit, d'après (1) :

$$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2} \iff \frac{x-y}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff x - y = \pm\frac{2\pi}{3} + 4k\pi.$$

Le système proposé est équivalent à l'ensemble des systèmes suivants :

$$\left\{\begin{aligned} & x + y = \frac{\pi}{3} \\ & x - y = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} & x + y = \frac{\pi}{3} \\ & x - y = -\frac{2\pi}{3} + 4k\pi \end{aligned}\right.$$

dont les solutions sont :

$$\left\{\begin{aligned} & x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ & y = -\frac{\pi}{6} - 2k\pi \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} & x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ & y = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \end{aligned}\right.$$

EXEMPLE II. $\left\{\begin{aligned} & x - y = \frac{\pi}{4} && (1) \\ & \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} && (2) \end{aligned}\right.$

L'équation (2) s'écrit : $\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \frac{\sqrt{2}}{4}$

soit, d'après (1) : $\cos(x+y) = 0 \iff x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Le système proposé est équivalent au suivant :

$$\left\{\begin{aligned} & x - y = \frac{\pi}{4}. \\ & x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{aligned}\right.$$

dont les solutions sont : $\left\{\begin{aligned} & x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ & y = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right.$

EXEMPLE III. $\left\{\begin{aligned} & \cos y = \sqrt{2} \cos x && (1) \\ & \sin y = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin x && (2) \end{aligned}\right.$

En portant dans la relation : $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, les équations (1) et (2) entraînent :

$$2\cos^2 x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1 \iff 6\cos^2 x + 2\sin^2 x = 3 \iff 4\cos^2 x = 1.$$

On en déduit : $\cos x = \pm \frac{1}{2}$ et $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

D'où les relations suivantes :

1° $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Longrightarrow \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \frac{\pi}{4} + 2k'\pi$

2° $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Longrightarrow \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi$

3° $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Longrightarrow \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \frac{3\pi}{4} + 2k'\pi$

4° $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Longrightarrow \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = -\frac{3\pi}{4} + 2k'\pi$

Soit en résumé sur $[-\pi, +\pi]$ les quatre solutions :

$$\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{2\pi}{3}; -\frac{3\pi}{4}\right).$$

## EXERCICES

— Résoudre les équations suivantes, et discuter s'il y a lieu :

**815.** $6\cos x - 1 = 2(2\cos x - 1)$.

**816.** $3\,\mathrm{tg}\,x + 5 = 2(\mathrm{tg}\,x + 1)$.

**817.** $5\sin x = 3\sin x + \sqrt{2}$.

**818.** $2\,\mathrm{cotg}\,x - 3 = 1 - 3\,\mathrm{cotg}\,x$.

**819.** $m\cos x - 2(m-1) = (2m+3)\cos x - 1$.

**820.** $\mathrm{tg}^2 x - 4 = 0$.

**821.** $(4m-1)\sin x + 5 = m\sin x - 3$.

**822.** $3\,\mathrm{tg}\,x - m = (m+2)\,\mathrm{tg}\,x$.

**823.** $m\cos 2x - 1 = (2m+3)\cos 2x$.

**824.** $\sin 3x + m = m\sin 3x$.

**825.** $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

**826.** $2\sin^2 x - (2+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$.

**827.** $16 - 15\sin^2 x - 8\cos x = 0$.

**828.** $6 - 4\cos^2 x - 9\sin x = 0$.

**829.** $6\cos^2 4x + 11\cos 4x - 2 = 0$.

**830.** $3\sin^2 \frac{x}{3} + 7\sin\frac{x}{3} - 6 = 0$.

**831.** $9 - 13\cos x = -\frac{4}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.

**832.** $1 - (2+\sqrt{2})\sin x = \frac{-2\sqrt{2}}{1+\mathrm{cotg}^2 x}$.

**833.** $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$.

**834.** $\cos 2x + 11\sin x + 5 = 0$.

**835.** $5\cos x + 27\cos\frac{x}{2} + 10 = 0$.

**836.** $5\cos x - 2\sin\frac{x}{2} + 3 = 0$.

**837.** $3\,\mathrm{tg}^2 x - 5\,\mathrm{tg}\,x = 0$.

**838.** $(3+\mathrm{cotg}\,x)^2 = 5(3+\mathrm{cotg}\,x)$.

**839.** $(\mathrm{tg}\,x - 1)^2 - 4 = 0$.

**840.** $\mathrm{tg}^2 x - 16\,\mathrm{tg}\,x + 39 = 0$.

**841.** $\mathrm{cotg}^2 x - 13\,\mathrm{cotg}\,x - 48 = 0$.

**842.** $6\,\mathrm{cotg}^2 x - 17\,\mathrm{cotg}\,x - 45 = 0$.

**843.** $3 + 8\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

**844.** $2 - 11\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 0$.

**845.** $\cos^2 x + 4\sin 2x + 3 = 0$.

**846.** $12 - 37\cos^2 x - 10\sin 2x = 0$.

**847.** $m \sin^2 x + 2(3m - 2)\sin x + 4m - 3 = 0.$

**848.** $(m+1)\cos^2 x - 2(m+2)\cos x + 2m = 0.$

**849.** $m\cos^2 x - 2(m-2)\cos x + m - 3 = 0.$

**850.** $m\sin^2 x - 3(m+2)\sin^2 x + m + 16 = 0.$

**851.** $\operatorname{tg}^2 x - 2(m+1)\operatorname{tg} x + 3m - 5 = 0.$

**852.** $(m-1)\operatorname{tg}^2 x - (m-3)\operatorname{tg} x - (m+3) = 0.$

**853.** $(m+1)\operatorname{cotg}^2 x - 4\operatorname{cotg} x - 2(2m+1) = 0.$

**854.** $(3m-2)\sin^2 x - 2(5m-2)\sin x\cos x + 3(2m+1)\cos^2 x = 0.$

**855.** $\cos^2 x\,(6m^2 - 30m + 35) - 2(m+3)\sin 2x + 1 = 0.$

**856.** $\sin x + \cos x = 1.$

**857.** $\sin x - \cos x = \frac{7}{17}.$

**858.** $2\sin x + \cos x = \frac{1}{2} + \sqrt{3}.$

**859.** $3\sin x + 5\cos x = 4\sqrt{2}.$

**860.** $\sin x - 2\cos x = \sqrt{5}.$

**861.** $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2.$

**862.** $(m-1)\sin x + (m+1)\cos x = m\sqrt{2}.$

**863.** $(m+2)\sin x + m\cos x = 2.$

**864.** $(2m-1)\sin x + (m-1)\cos x = m - 3.$

**865.** $(3m-1)\sin x + (m+3)\cos x = 2\sqrt{5}$

— Résoudre et discuter s'il y a lieu, les inéquations suivantes :

**866.** $2\cos^2 x + \cos x - 1 \geqslant 0$

**867.** $2\sin^2 x + (4 - \sqrt{3})\sin x - 2\sqrt{3} \geqslant 0.$

**868.** $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 \geqslant 0$

**869.** $2\operatorname{cotg}^2 x - 5\operatorname{cotg} x + 2 \geqslant 0.$

**870.** $m\sin^2 x + 2(m-2)\cos x + 3 - 2m \geqslant 0.$

**871.** $2m\cos x + m + 2 + (2m-3)\cos^2 x \geqslant 0.$

**872.** $\operatorname{tg}^2 x - 2(m+1)\operatorname{tg} x + m^2 + 1 \geqslant 0.$

**873.** $(m+1)\sin^2 x + m + 6 - 2m\sin x \leqslant 0.$

**874.** $\cos^3 x - \sin^2 x \geqslant 2\cos x - 1.$

**875.** $2\sin^3 x - 3\cos^2 x - 4\sin x + 4 \leqslant 0.$

**876.** $\cos x - m\sin x \leqslant 0$

**877.** $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x \geqslant 0.$

**878.** $(m+1)\sin 2x + m + 5\cos^2 x \geqslant 0.$

**879.** $(m+1)\cos x + (3m-7)\sin x \leqslant 2\sqrt{5}$

**880.** $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x \geqslant 0.$

**881.** $3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 1.$

**882.** $\sin x - \cos x \leqslant 1$

**883.** $\sin x + \cos x \leqslant m.$

**884.** $2\sin x - \cos x \leqslant \frac{1}{2} - \sqrt{3}.$

**885.** $3\cos x + 5\sin x \leqslant 4\sqrt{2}.$

**886.** $(m-1)\cos x + (m+1)\sin x \leqslant 2$

**887.** $m\cos x + (3m-1)\sin x \leqslant 2m - 3.$

**888.** $m - (m-2)\sin 2x - 3\cos^2 x \leqslant 0.$

**889.** $a^2\cos x + b^2\sin x \leqslant a^2 + b^2.$

**890.** $\cos 2x + 2m\sin x\cos x \leqslant 4$

**891.** $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x \leqslant m.$

**892.** $\sin x + \cos x + \sin 2x \leqslant 1$

**893.** $\sin 2x \leqslant m(\sin x + \cos x).$

**894.** $\sin^4 x + \cos^4 x \leqslant 1$

**895.** $\sin^6 x + \cos^6 x \leqslant 1.$

**896.** $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg} x \leqslant \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg}^2 x.$

**897.** $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \leqslant 1.$

**898.** Soit le système d'équations : $x + y = \frac{\pi}{4}$ ; $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

1° En déduire une équation en $\cos (x - y)$.

2° Achever la résolution du système.

**899.** On donne le système d'équations : $\sin x + \sin y = \sqrt{3}$ ; $\cos x + \cos y = 1$.

1° En déduire une équation en $\operatorname{tg} \frac{x + y}{2}$.

2° Achever la résolution du système.

**900.** Soit le système d'équations : $x + y = a$ ; $\sin x = 2 \sin y$

1° Calculer $\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y}$ et en déduire $\operatorname{tg} \frac{x - y}{2}$ en fonction de $m$ et $a$.

2° Achever la résolution du système avec : $a = \frac{\pi}{3}$ et $m = 2$.

— Résoudre et discuter les systèmes suivants :

**901.** $\begin{cases} x + y = a. \\ \sin x + \sin y = m. \end{cases}$

**902.** $\begin{cases} x + y = a. \\ \sin x - \sin y = m. \end{cases}$

**903.** $\begin{cases} x + y = a. \\ \cos x + \cos y = m. \end{cases}$

**904.** $\begin{cases} x - y = a. \\ \cos x + \cos y = m \end{cases}$

**905.** $\begin{cases} x + y = a. \\ \sin x \sin y = m. \end{cases}$

**906.** $\begin{cases} x + y = a. \\ \cos x \cos y = m. \end{cases}$

**907.** $\begin{cases} x - y = a. \\ \cos x \cos y = m. \end{cases}$

**908.** $\begin{cases} x + y = a. \\ \sin x \cos y = m. \end{cases}$

**909.** $\begin{cases} x - y = a. \\ \sin x = m \sin y. \end{cases}$

**910.** $\begin{cases} x + y = a. \\ \cos x = m \cos y. \end{cases}$

**911.** $\begin{cases} x + y = a. \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m. \end{cases}$

**912.** $\begin{cases} x + y = a. \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = m. \end{cases}$

**913.** $\begin{cases} x + y = a. \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = m. \end{cases}$

**914.** $\begin{cases} x - y = a. \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = m. \end{cases}$

**915.** On considère les deux équations suivantes où l'inconnue $x \in [-\pi; +\pi]$ :

$$a \cos x + b \sin x = c \qquad (1)$$
$$a' \cos x + b' \sin x = c' \qquad (2)$$

On pose $\cos x = X$; $\sin x = Y$ et on construit, dans le repère orthonormé XOY, les droites d'équations $aX + bY = c$; $a'X + b'Y = c'$. On désigne par P leur point d'intersection, s'il existe.

1° Étudier la position du point P par rapport au cercle trigonométrique de centre O.

2° Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les équations (1) et (2) aient au moins une racine commune.

3° Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une racine de l'équation (1) soit comprise entre les deux racines de l'équation (2).

# DÉRIVÉES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

**281 Théorème.** — ***Lorsque*** $x$ ***tend vers zéro,*** $\sin x$ ***tend vers*** 0 ***tandis que*** $\cos x$ ***tend vers*** $+1$ ***par valeurs inférieures.***

1° Quel que soit le nombre positif $\varepsilon < 1$, il existe un arc $\alpha$ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians, tel que $\sin \alpha = \varepsilon$ (fig. 136). Pour obtenir $|\sin x| < \varepsilon$ c'est-à-dire : $\sin |x| < \sin \alpha$ il suffit de prendre $|x| < \alpha$ car la fonction $\sin x$ est croissante sur le segment $[0, \alpha]$. Donc $\sin x$ tend vers 0 en même temps que $x$.

2° On sait que : $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Lorsque $x$ tend vers 0 il en est de même de $\frac{x}{2}$, $\sin \frac{x}{2}$ et $2\sin^2 \frac{x}{2}$. Par suite $\cos x$ tend vers 1 à gauche.

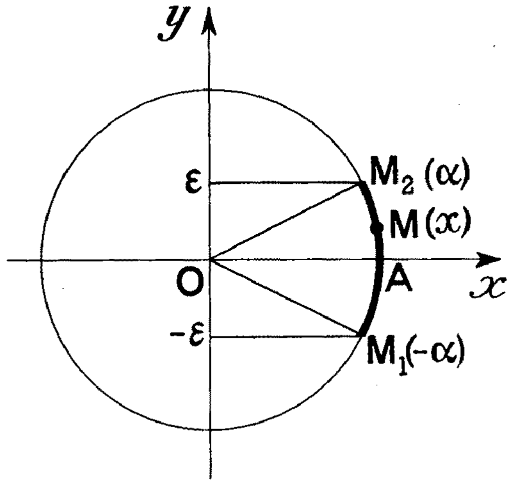



Fig. 136.

**282. Continuité des fonctions circulaires.** — ***Lorsque*** $x$ ***tend vers*** $x_0$, ***les fonctions*** $\sin x$, $\cos x$ ***et*** $\operatorname{tg} x$ ***tendent respectivement vers*** $\sin x_0$, $\cos x_0$ ***et*** $\operatorname{tg} x_0$.

On sait que (n° 248) pour $x = x_0 + h$ :

$$\sin x = \sin (x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$$
$$\cos x = \cos (x_0 + h) = \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h.$$

Lorsque $x$ tend vers $x_0$, $h$ tend vers 0 par suite $\sin h$ tend vers zéro et $\cos h$ tend vers 1 (n° 281). Il en résulte que $\sin x$ tend vers $\sin x_0$ et que $\cos x$ tend vers $\cos x_0$.

D'autre part : $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a pour limite $\frac{\sin x_0}{\cos x_0}$, c'est-à-dire $\operatorname{tg} x_0$, si toutefois $\cos x_0 \neq 0$, donc si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Cette limite devient $+\infty$ lorsque $x \longrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi$ à gauche, $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $\frac{\pi}{2} + k\pi$ à droite.

Il en résulte que les fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$ sont continues pour toute valeur de la variable $x$ et que la fonction $\operatorname{tg} x$ est continue pour tout $x$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

## 283. Inégalités entre $x$, sin $x$ et tg $x$.

Sur le cercle trigonométrique, considérons l'arc $\overset{\frown}{AM}$ dont la mesure $x$ en radians est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (fig. 137). Le point M se projette en P sur l'axe O$x$ et la droite OM coupe en T la tangente en A au cercle. On sait que (nº 215) :

$\cos x = OP;\qquad \sin x = PM;\qquad \text{tg}\, x = AT.$

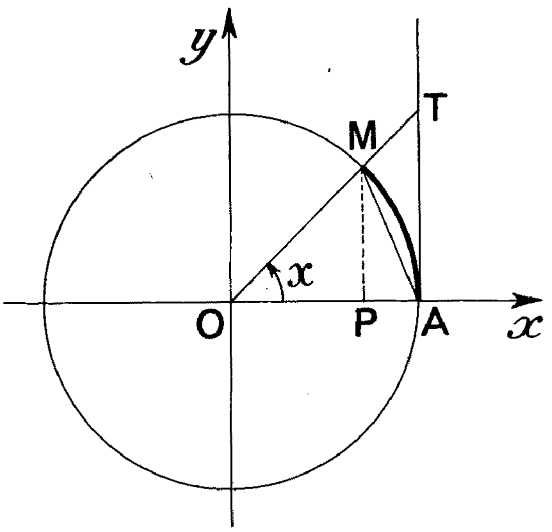


Fig. 137.

L'aire du secteur circulaire OAM est comprise entre celles des triangles OAM et OAT. Donc :

$$\frac{OA \times MP}{2} < \frac{OA^2 \times x}{2} < \frac{OA \times AT}{2}$$

D'où : $$\boxed{\sin x < x < \text{tg}\, x} \qquad (1)$$

Ainsi :

*La mesure en radians d'un arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ est supérieure à celle de son sinus et inférieure à celle de sa tangente.*

## 284. Limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque $x$ tend vers zéro.

1º Soit $x$ en radians, tel que : $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Les inégalités (1) s'écrivent :

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

En divisant les trois membres de cette double inégalité par $\sin x > 0$ puis en passant aux inverses :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (2)$$

Lorsque $x$ tend vers zéro, $\cos x$ tend vers 1 et le rapport $\frac{\sin x}{x}$, compris entre 1 et un nombre qui tend vers 1, tend lui-même vers 1.

2º Soit $x$ en radians tel que : $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ et posons $x = -x'$, ce qui entraîne : $0 < x' < \frac{\pi}{2}$. Nous avons : $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x')}{-x'} = \frac{\sin x'}{x'}$.

Si $x$ tend vers 0, il en est de même de $x'$. Le rapport $\frac{\sin x'}{x'}$ tend vers 1. Il en est de même du rapport $\frac{\sin x}{x}$. Ainsi :

**285. Théorème.** — ***Le rapport $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 lorsque $x$, exprimé en radians, tend vers zéro.***

REMARQUE. — Si l'arc $x$ est mesuré en degrés ou en grades, le dénominateur de rapport $\frac{\sin x}{x}$ est multiplié par $\frac{180}{\pi}$ ou $\frac{200}{\pi}$ (n° 203) et, lorsque $x$ tend vers zéro, la limite de ce rapport devient $\frac{\pi}{180}$ ou $\frac{\pi}{200}$.

**286. Dérivée de la fonction** $y = \sin x$. — Soient $x$ et $x + h$ les valeurs initiale et finale, en radians, de la variable. La dérivée de la fonction $y = \sin x$ est la limite, si elle existe, du rapport : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$, lorsque $h$ tend vers zéro.

Or, (n° 258) : $$\sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

et : $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Lorsque $h$ tend vers zéro, le rapport $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers 1 (n° 285) et $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ tend vers $\cos x$ (n° 282). Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers $\cos x$.

***La fonction*** $y = \sin x$ ***admet pour dérivée :*** $y' = \cos x$.

$$\boxed{y = \sin x} \implies \boxed{y' = \cos x}$$

**287. Dérivée de la fonction** $y = \cos x$. — De même, la dérivée de la fonction $y = \cos x$ est la limite de : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$, lorsque $h$ tend vers zéro.

Or (n° 258) : $\cos(x+h) - \cos x = -2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$ et :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Lorsque $h$ tend vers 0, le rapport $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers 1 et $\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$ tend vers $\sin x$.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers $-\sin x$.

***La fonction*** $y = \cos x$ ***admet pour dérivée :*** $y' = -\sin x$.

$$\boxed{y = \cos x} \implies \boxed{y' = -\sin x}$$

**288. Dérivée de la fonction** $y = \operatorname{tg} x$. — C'est la dérivée du quotient $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
Donc :

$$y' = \frac{\cos x . \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

soit :

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \qquad \text{(n}^\text{o}\text{ 219)}$$

***La fonction*** $y = \operatorname{tg} x$ ***admet pour dérivée :*** $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

$$\boxed{y = \operatorname{tg} x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

**289. Dérivée de la fonction** $y = \operatorname{cotg} x$. — On a de même :

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ donc : } \quad y' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

soit :

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x). \qquad \text{(n}^\text{o}\text{ 219)}$$

***La fonction*** $y = \operatorname{cotg} x$ ***admet pour dérivée :*** $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$.

$$\boxed{y = \operatorname{cotg} x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)}.$$

**290. Conclusion.** — Les dérivées des fonctions circulaires où l'arc $x$ est exprimé en radians sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \sin x \Longrightarrow y' = \cos x \\ y = \cos x \Longrightarrow y' = -\sin x \\ y = \operatorname{tg} x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ y = \operatorname{cotg} x \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) \end{array}}$$

**291. Dérivée de la fonction** $y = \sin(ax + b)$. — C'est la limite de :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(ax + ah + b) - \sin(ax + b)}{h} \quad \text{lorsque } h \text{ tend vers 0.}$$

Or : $\sin(ax + ah + b) - \sin(ax + b) = 2 \sin \dfrac{ah}{2} \cos\left(ax + b + \dfrac{ah}{2}\right)$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{\sin \dfrac{ah}{2}}{\dfrac{ah}{2}} \cos\left(ax + b + \frac{ah}{2}\right).$$

Si $h \to 0$ : $\qquad \dfrac{\sin \dfrac{ah}{2}}{\dfrac{ah}{2}} \to 1 \quad$ et $\quad \cos\left(ax + b + \dfrac{ah}{2}\right) \to \cos(ax + b).$

Donc : $$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cos(ax + b).$$

On en déduit que $y = \cos(ax + b) = \sin\left(ax + b + \dfrac{\pi}{2}\right)$ admet pour dérivée :

$$y' = a \cos\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin(ax + b).$$

**292. Théorème.** — ***Les dérivées des fonctions*** $\sin(ax + b)$ ***et*** $\cos(ax + b)$ ***où*** $x$ ***est exprimé en radians sont respectivement :*** $a \cos(ax + b)$ ***et*** $-a \sin(ax + b)$.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} y = \sin(ax + b) & \Longrightarrow & y' = a \cos(ax + b) \\ y = \cos(ax + b) & \Longrightarrow & y' = -a \sin(ax + b) \end{array}}.$$

EXEMPLES :

$$y = \sin 2x \quad \Longrightarrow \quad y' = 2 \cos 2x; \quad y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \Longrightarrow \quad y' = -\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$y = \cos 3x \quad \Longrightarrow \quad y' = -3 \sin 3x; \; y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

**293. Cas où la variable $x$ n'est pas exprimée en radians.**

1° Si $x$ gr désigne la mesure en grades d'un arc de X radians on a : $\dfrac{x}{400} = \dfrac{X}{2\pi}$ donc : $X = \dfrac{\pi x}{200}$.

La dérivée par rapport à $x$ de $y = \sin x$ gr est donc celle de $y = \sin \dfrac{\pi x}{200}$, soit :

$$y' = \frac{\pi}{200} \cos \frac{\pi x}{200} = \frac{\pi}{200} \cos x \text{ gr}.$$

De même $z = \cos x$ gr admet pour dérivée : $z' = -\dfrac{\pi}{200} \sin \dfrac{\pi x}{200} = -\dfrac{\pi}{200} \sin x$ gr.

2° On verrait de même que $x$ degrés $= \dfrac{\pi x}{180}$ radians et que les dérivées de $y = \sin x^0$ et $z = \cos x^0$ sont $y' = \dfrac{\pi}{180} \cos x^0$ et $z' = -\dfrac{\pi}{180} \sin x^0$.

**294. Dérivées successives des fonctions circulaires.**

1° $y = \sin x \quad \Longrightarrow \quad y' = \cos x \quad \Longrightarrow \quad y'' = -\sin x.$

Donc : $y' = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $y'' = \sin(x + \pi)$. On voit par récurrence que :

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

2° $y = \cos x \quad \Longrightarrow \quad y' = -\sin x \quad \Longrightarrow \quad y'' = -\cos x.$

Donc : $y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $y'' = \cos(x + \pi)$. On verrait de même que :

$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

**295. Dérivées de** $\sin^n x$ **et** $\cos^n x$.

On sait que $y = u^n \implies y' = nu^{n-1}u'$.

On en déduit que :

$$y = \sin^n x \implies y' = n \sin^{n-1} x \cos x$$
$$y = \cos^n x \implies y' = -n \cos^{n-1} x \sin x.$$

EXEMPLES. — $y = \sin^3 x$ admet pour dérivée $y' = 3 \sin^2 x \cos x$.
$y = \cos^5 x$ admet pour dérivée $y' = -5 \cos^4 x \sin x$.

## VALEURS APPROCHÉES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

**296. Valeur approchée de** $\sin \alpha$. — Lorsque l'angle $\alpha$, exprimé en radians, tend vers zéro, $\alpha$ et $\sin \alpha$ sont de même signe et leur rapport tend vers 1 (nº 288) en restant inférieur à 1. Si $\varepsilon$ désigne un nombre positif inférieur à 1, on peut écrire :

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = (1 - \varepsilon) \implies \sin \alpha = \alpha(1 - \varepsilon)$$

et $\varepsilon$ tend vers zéro si $\alpha$ tend vers zéro.

Donc : $\sin \alpha \# \alpha$ si $\alpha$ en radians est suffisamment petit.

**297. Valeur approchée de** $\operatorname{tg} \alpha$. — Lorsque $\alpha$ exprimé en radians tend vers zéro, $\alpha$ et $\operatorname{tg} \alpha$ sont de même signe et $|\operatorname{tg}\alpha| > |\alpha|$ (nº 283). De plus :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \times \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Si $\alpha$ tend vers 0, le rapport $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ tend vers 1 et $\frac{1}{\cos \alpha}$ tend vers 1, donc $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ tend vers 1 par valeurs supérieures à 1 ; on peut écrire :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1 + \varepsilon \implies \operatorname{tg} \alpha = \alpha(1 + \varepsilon)$$

et $\varepsilon > 0$ tend vers zéro si $\alpha$ tend vers zéro.

Donc : $\operatorname{tg} \alpha \# \alpha$, si $\alpha$ en radians est suffisamment petit.

**298. Valeur approchée de** $\cos \alpha$. — Si $\alpha$ tend vers zéro, $1 - \cos \alpha$ tend vers 0 par valeurs positives et :

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (\text{nº } 251).$$

Donc : $$\frac{1-\cos\alpha}{\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

Si $\alpha$ tend vers zéro, le second membre tend vers 1, par valeurs inférieures à 1. Donc

$$\frac{1-\cos\alpha}{\frac{\alpha^2}{2}} = (1-\varepsilon) \implies 1-\cos\alpha = \frac{\alpha^2}{2}(1-\varepsilon)$$

et $\varepsilon > 0$ tend vers 0 si $\alpha$ tend vers zéro.

Donc : $\cos\alpha \# 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ si $\alpha$ en radians est suffisamment petit.

**299. Conclusion.** — Les valeurs approchées pour les petits angles en radians sont :

$$\boxed{\sin\alpha \# \alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha \# \alpha; \quad \cos \# 1 - \frac{\alpha^2}{2}}.$$

On démontre que l'on commet, en utilisant ces formules, une erreur absolue de module $\varepsilon$ inférieure à $\frac{\alpha^3}{6}$ pour $\sin\alpha$, inférieure à $\frac{\alpha^4}{24}$ pour $\cos\alpha$ et de l'ordre de $\frac{\alpha^3}{3}$ pour $\operatorname{tg}\alpha$.

Ainsi :

1° Pour 10° : $\alpha = 0{,}1745$; $\sin\alpha = 0{,}1736$; $\varepsilon = 0{,}0009$.

2° Pour 8° : $\alpha = 0{,}1397$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1405$; $\varepsilon = 0{,}0008$.

3° Pour 22° : $\alpha = 0{,}3840$; $\cos\alpha = 0{,}9272$; $1 - \frac{\alpha^2}{2} = 0{,}9263$; $\varepsilon = 0{,}0009$.

## EXERCICES

— Trouver, lorsque $x$ en radians tend vers zéro, la limite des expressions suivantes :

**916.** $\frac{\sin 3x}{x}$. **917.** $\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$. **918.** $\sin 2x \operatorname{cotg} 3x$.

**919.** $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$. **920.** $\frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$. **921.** $\frac{\sin^2 x \cos^2 x}{1-\cos x}$.

— Trouver, lorsque $x$ en radians tend vers $\frac{\pi}{2}$, la limite des expressions suivantes $\left(\text{on posera } \frac{\pi}{2} - x = \alpha\right)$ :

**922.** $\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$. **923.** $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg} x$. **924.** $\frac{\sin 2x}{\cos 3x}$.

**925.** $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x$. **926.** $\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$. **927.** $(1-\sin x)\operatorname{tg}^2 x$.

— Trouver, lorsque $x$ en radians tend vers $\frac{\pi}{4}$, la limite des expressions suivantes : $\left(\text{on posera } \frac{\pi}{4} - x = \alpha\right)$ :

**928.** $\dfrac{\sqrt{2}\,(\cos x - \sin x)}{\pi - 4x}$. **929.** $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$.

**930.** $\dfrac{\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^3}{(\sin x - \cos x)^2}$.

— Calculer la dérivée des fonctions suivantes (où $x$ est en radians) :

**931.** $\dfrac{1}{\sin x}$. **932.** $\dfrac{1}{\cos x}$. **933.** $\sin x + \cos x$.

**934.** $\sin^2 x$. **935.** $\cos^2 x$. **936.** $\sin x \cos x$.

**937.** $x - \sin x \cos x$. **938.** $\cos x\,(3 - \cos^2 x)$. **939.** $x + \operatorname{cotg} x$.

**940.** $2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$. **941.** $2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$.

**942.** $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$. **943.** $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

**944.** $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + x \operatorname{tg} x}$. **945.** $\dfrac{1 - x \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} x}$.

**946.** $\dfrac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$. **947.** $\dfrac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}$.

**948.** $y = \sin^7 x$. **949.** $y = \cos^5 x$. **950.** $y = \operatorname{tg}^3 x$.

**951.** $y = \sin^n x$. **952.** $y = \cos^n x$. **953.** $y = \operatorname{tg}^n x$.

**954.** $y = \dfrac{1}{\sin^5 x}$. **955.** $y = \dfrac{1}{\cos^7 x}$. **956.** $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^3 x}$.

**957.** 1° Montrer que la dérivée de $\sin(x + a)$ est $\sin\left(x + a + \frac{\pi}{2}\right)$.

2° En déduire les dérivées successives de $y = \sin x$ et montrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ est :

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Démontrer de même que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $y = \cos x$ est :

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

— Calculer les dérivées des fonctions suivantes ($x$ en radians) :

**958.** $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x$.

**959.** $\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 4x$.

**960.** $\sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x + 5\sin^2 x \cos^2 x$

**961.** $\sin^8 x + \cos^8 x + 4\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^4 x \cos^4 x$.

**962.** $\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$. **963.** $\dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$.

**964.** $x - \operatorname{tg} x$; $ax - \sin ax \cos ax$; $x \sin x + \cos x$.

**965.** $\sin^3 x + \cos^3 x$; $\sin nx \, (\sin x)^n$; $\dfrac{\sin^p x}{\cos^q x}$.

**966.** On donne les fonctions : $u = a \cos x + \cos ax$ et $v = a \sin x + \sin ax$.
Calculer et factoriser $u'$, $v'$, $u'^2 + v'^2$ et $\dfrac{u'}{v'}$.

**967.** Même problème avec les fonctions : $u = a \cos x - \cos ax$ et $v = a \sin x - \sin ax$.

**968.** Soit la fonction : $y = \sin^n x$.
1° Calculer $y'$ et $y''$.
2° Montrer que : $y'' + n^2 y = n(n-1) \sin^{n-2} x$.
3° Trouver une relation analogue pour la fonction : $z = \cos^n x$.

**969.** 1° On donne : $y = a \cos \omega x + b \sin \omega x$ ($x$ en radians). Calculer les dérivées $y'$ et $y''$ de $y$ par rapport à $x$.
2° Former une relation indépendante de $x$ entre $y$ et $y'$, puis entre $y$ et $y''$.

**970.** 1° On donne la fonction : $y = x \sin x + \cos x$ ($x$ en radians). Calculer les dérivées $y'$ et $y''$ de $y$ par rapport à $x$.
2° Former entre $x$, $y$, $y'$, $y''$ une relation ne contenant pas de fonctions circulaires.

# VARIATIONS DES FONCTIONS CIRCULAIRES

**300. Variations de $y = \sin x$.** — La fonction $y = \sin x$ est définie et continue pour tout $x$ (n° 282). Les relations $\sin(-x) = -\sin x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, montrent que c'est une fonction impaire et périodique de période $2\pi$ rd. Nous nous bornerons à l'étudier sur une période pour $x \in [-\pi, +\pi]$.

Sa dérivée $y' = \cos x$ est positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, négative sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

| $x$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-1$ |
| $y$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

Dans un repère orthonormé le graphe de la fonction $y = \sin x$ complété par les translations de vecteur $\vec{V}(2\pi, 0)$ ou $-\vec{V}$ est une *sinusoïde* (fig. 138) alternativement tangente aux droites $y = 1$ pour $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $y = -1$ pour $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

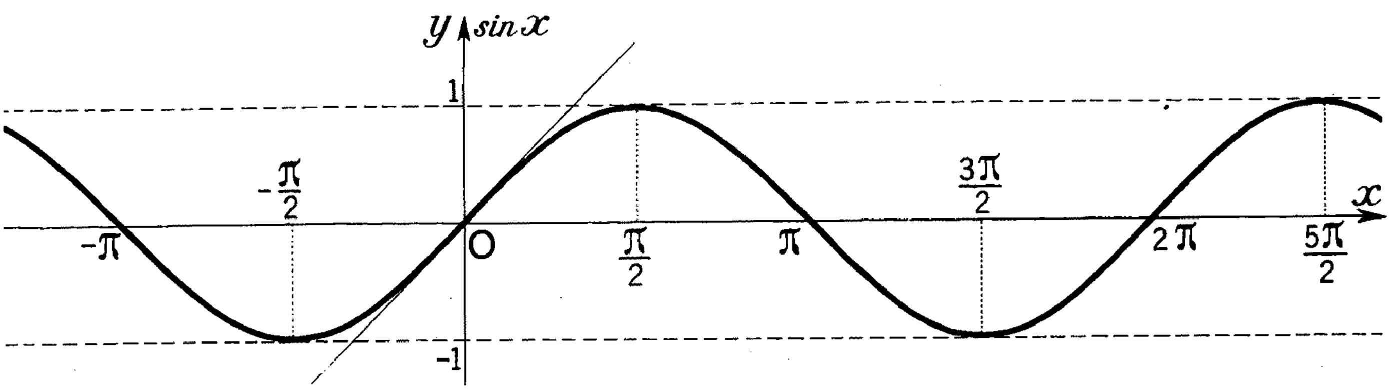



Fig. 138.

Les relations $\sin(2k\pi - x) = -\sin x$ et $\sin(2k\pi + \pi - x) = \sin x$ montrent que tous les points $(k\pi, 0)$ sont des centres de symétrie et toutes les droites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sont des axes de symétrie. La relation $y'' = -\sin x = -y$ montre que les centres de symétrie sont des points d'inflexion de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\pm 1$ car $y'' = y = 0 \Longrightarrow y' = \pm 1$.

**301. Variations de** $y = \cos x$. — La fonction $y = \cos x$ est également pour tout $x$, définie, continue et périodique de période $2\pi$. La relation $\cos(-x) = \cos x$ montre que c'est une fonction paire que nous étudierons sur $[-\pi, +\pi]$. Comme $y' = -\sin x$ :

| $x$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $0$ | $+$ | $+1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-1$ | $-$ | $0$ |
| $y$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

La relation $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ montre que la courbe $y = \cos x$ se déduit de la courbe $y = \sin x$ par la translation de vecteur $\vec{U}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. C'est encore une *sinusoïde* (fig. 139) admettant cette fois les points $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ pour centres de symétrie et les droites $x = k\pi$ pour axes de symétrie.

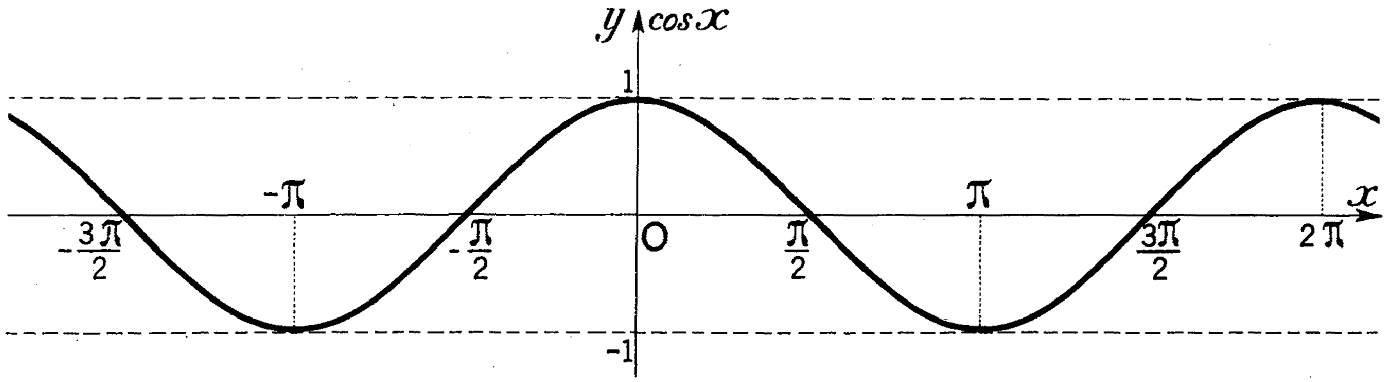



Fig. 139.

**302. Variations de** $y = \operatorname{tg} x$. — La fonction $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est définie et continue pour tout $x$ tel que $\cos x \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Les relations : $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, montrent que c'est une fonction impaire de période $\pi$. Nous l'étudierons sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ intervalle où elle est continue. Comme $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ la fonction $\operatorname{tg} x$ est croissante sur chacun des intervalles où elle est définie :

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $+\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

La courbe $y = \operatorname{tg} x$ admet donc les droites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour asymptotes verticales et la relation $\operatorname{tg}(k\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ montre que tous les points $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ sont des centres de symétrie de la courbe (fig. 140). Notons que $y'' = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x) \operatorname{tg} x$ est du signe de $\operatorname{tg} x$. Les points de rencontre de la courbe avec $Ox$ sont des points d'inflexion où la tangente a pour coefficient directeur $+ 1$.

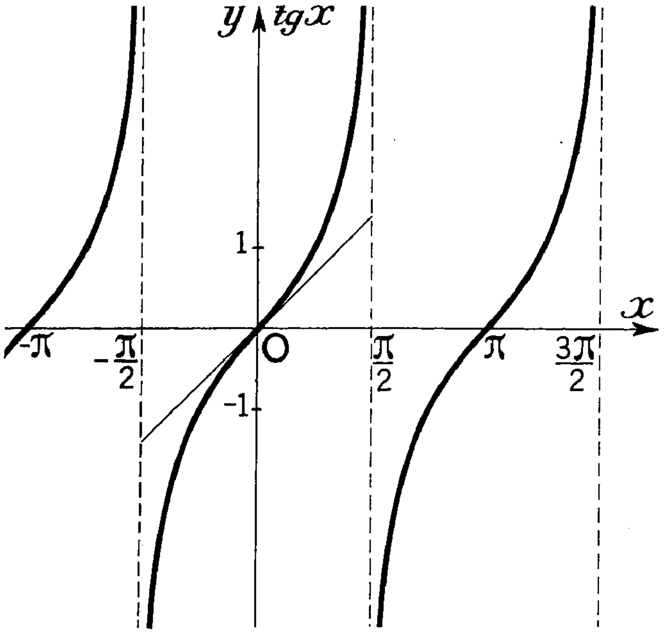



Fig. 140.

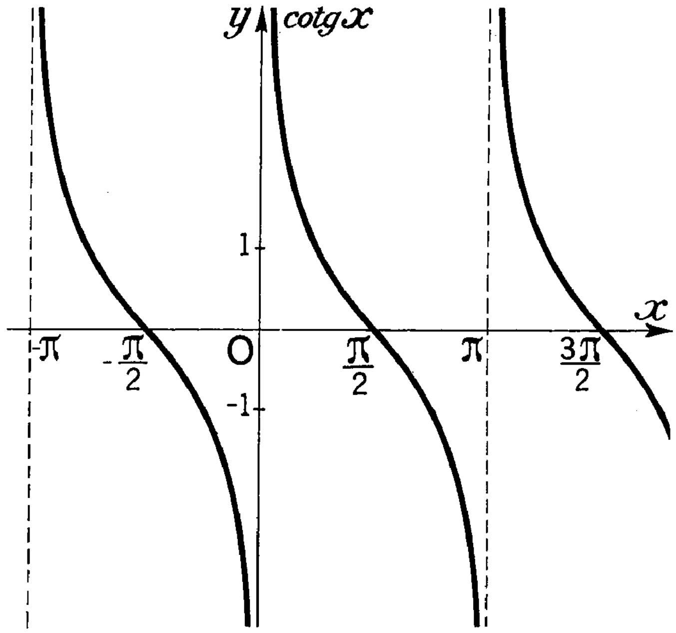



Fig. 141.

**303. Variations de $y = \operatorname{cotg} x$.** — La fonction $y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est définie et continue pour tout $x$ tel que $\sin x \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq k\pi$. Les relations $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$ et $\operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x$, montrent que c'est une fonction impaire de période $\pi$. Nous l'étudierons sur $]0, \pi[$, intervalle sur lequel elle est continue. Sa dérivée

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$$

est négative sur tout intervalle où $\operatorname{cotg} x$ est continue.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $-1$ | $-$ | |
| | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

La relation $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ montre que les graphes des deux fonctions $y = \operatorname{cotg} x$ et $y = \operatorname{tg} x$ sont, dans un repère rectangulaire, symétriques par rapport à la droite $x = +\frac{\pi}{4}$.

La courbe $y = \operatorname{cotg} x$ (fig. 141) admet pour asymptotes verticales les droites $x = k\pi$ et pour centres de symétrie tous les points $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$. Comme $y'' = 2(1 + \operatorname{cotg}^2 x) \operatorname{cotg} x$ est du signe de $\operatorname{cotg} x$, tous les points $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ où la courbe rencontre $Ox$ sont des points d'inflexion où la tangente a pour coefficient directeur $- 1$.

**304. Variation de $y = \sin(ax + b)$ et de $z = \cos(ax + b)$.** — La période commune est $T = \frac{2\pi}{a}$. On peut supposer $a > 0$ car : $\sin(-ax + b) = -\sin(ax - b)$ et $\cos(-ax + b) = \cos(ax - b)$. Bornons à une période, en prenant $x \in \left[-\frac{\pi}{a} - \frac{b}{a}; \frac{\pi}{a} - \frac{b}{a}\right]$.

On obtient les tableaux de variation suivants :

| $x$ | $-\frac{\pi}{a} - \frac{b}{a}$ | | $-\frac{\pi}{2a} - \frac{b}{a}$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $\frac{\pi}{2a} - \frac{b}{a}$ | | $\frac{\pi}{a} - \frac{b}{a}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u = x + \frac{b}{a}$ | $-\frac{\pi}{a}$ | | $-\frac{\pi}{2a}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2a}$ | | $\frac{\pi}{a}$ |
| $X = ax + b$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
| $y = \sin(ax + b)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |
| $z = \cos(ax + b)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

Les graphes de ces fonctions sont des sinusoïdes. On peut les obtenir en faisant subir aux graphes de $y = \sin X$ et de $y = \cos X$ l'affinité orthogonale d'axe $y'y$ et de rapport $\frac{1}{a}$, puis la translation de vecteur parallèle à $x'x$ et de mesure $-\frac{b}{a}$.

## FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

**305. Considérations générales.** — Toute fonction trigonométrique de la forme $y = f(\sin x, \cos x)$ admet pour période $2\pi$. Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle d'amplitude $2\pi$. Cet intervalle peut même être ramené à $\pi$ si $y = g(\operatorname{tg} x)$ ou si la courbe représentative présente un élément évident de symétrie tel que O$y$ si la fonction est paire, ou le point O si la fonction est impaire.

Le signe de la dérivée $y'$ s'étudie aisément si on peut l'écrire sous forme d'un produit. Sinon il peut y avoir avantage à exprimer $y$ en fonction d'un seul rapport trigonométrique $u$ tel que $\sin x$, $\cos x$ ou $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. On est ainsi ramené à l'étude d'une fonction algébrique $y = g(u)$, sur l'intervalle convenable.

**306. Étude de la fonction :** $y = 2\sin x + \sin 2x$.

Cette fonction définie et continue quel que soit $x$, admet pour période $2\pi$. Comme $f(-x) = -f(x)$, elle est impaire et nous l'étudierons sur $[0, \pi]$. Sa dérivée

$$y' = 2[\cos x + \cos 2x] = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

s'annule pour $x = \frac{\pi}{3}$; $x = \pi$ et, sur $[0, \pi]$ elle est du signe de $\cos \frac{3x}{2}$. On obtient :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $4$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

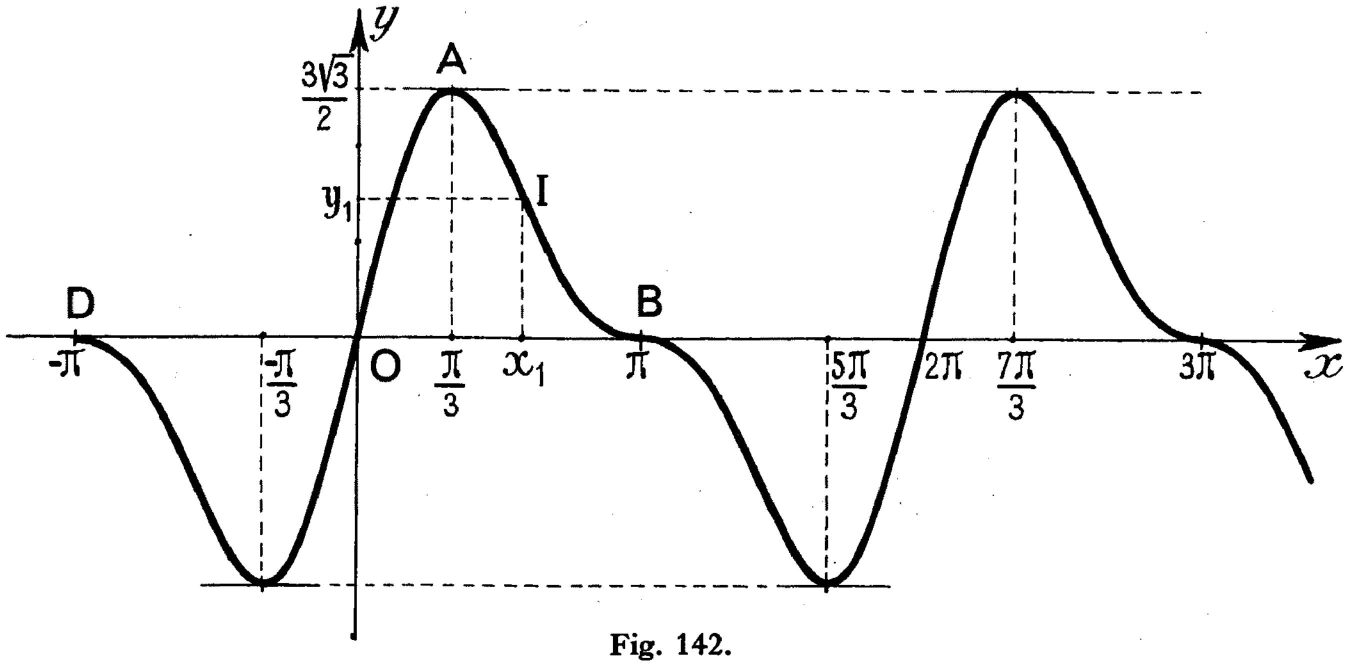



Fig. 142.

L'arc de courbe correspondant OAB présente un sommet A $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (fig. 142) et est tangent en O à la droite d'équation $y = 4x$ et en B à l'axe O$x$. On obtient le graphe de la fonction en effectuant la symétrie de centre O, ce qui donne le graphe correspondant à $x \in [-\pi; +\pi]$ puis des translations successives de vecteur $\vec{V}(2\pi, 0)$ ou $-\vec{V}$.

Cette courbe admet une infinité de centres de symétrie ($x = k\pi$), $y = 0$) où $k$ désigne un entier relatif. Il est possible d'en étudier la concavité car $y'' = -2 \sin x (1 + 4 \cos x)$, s'annule sur $[0, \pi]$ pour $x = 0$, $x = \pi$ ou pour $x = x_1$ tel que $\cos x_1 = -1/4$. La courbe admet, outre ses centres de symétrie, le point d'inflexion $\mathrm{I}\left(x_1 \# \frac{7\pi}{12}, y_1 = \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$ et ses différents homologues. Elle est concave du côté des $y$ négatifs pour $0 < x < x_1$, du côté des $y$ positifs pour $x_1 < x < \pi$.

## 307. Étude de la fonction : $y = 2\cos x - \cos 2x$.

La fonction est définie et continue quel que soit $x$. Elle admet pour période $2\pi$ et elle est paire Nous l'étudierons sur $[0; \pi]$. La dérivée $y' = -2 \sin x + 2 \sin 2x = 2 \sin x (2 \cos x - 1)$ s'annule lorsque $x$ vaut 0, $\pi$ ou $\frac{\pi}{3}$. Sur $[0; \pi]$ elle est du signe de $2 \cos x - 1$. On obtient :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $y$ | $1$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}$ | $\searrow$ | $-3$ |

L'arc de courbe correspondant ABC (fig. 143) présente trois sommets A (0; 1), B $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\right)$ et C ($\pi$; — 3). Il coupe l'axe O$x$ pour $y = 0 \Longleftrightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$. Cette équation en cos $x$ a une seule racine $\cos x_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ sur [— 1, + 1] ce qui donne $x_0 \# \frac{5\pi}{8}$. En complétant l'arc ABC par symétrie d'axe O$y$ on obtient un arc DAC qu'il suffit de reproduire par les translations successives de vecteur $\vec{V}$ (2 $\pi$, 0) ou — $\vec{V}$. La courbe ainsi obtenue admet une infinité d'axes de symétrie d'équations : $x = k\pi$. D'autre part : $y'' = -2\cos x + 4\cos 2x = 2[4\cos^2 x - \cos x - 2]$ s'annule pour :

$$\cos x_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{8} = 0{,}843\ldots \text{ et } \quad \cos x_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{8} = -0{,}593\ldots$$

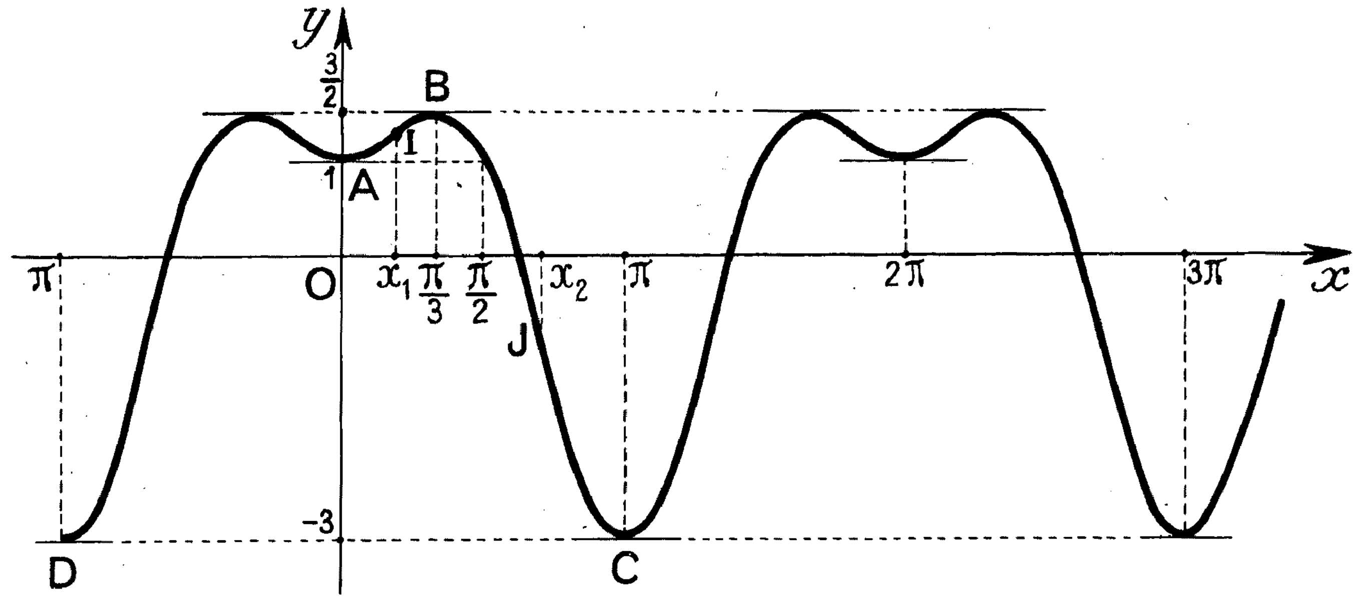



Fig. 143.

On obtient deux points d'inflexion :

$$\text{I}\left(x_1 \# \frac{3\pi}{16}, y_1 = \frac{3}{2}\cos x_1 = 1{,}264\right) \quad \text{et} \quad \text{J}\left(x_2 \# \frac{7\pi}{10}; y_2 = -0{,}890\right).$$

L'arc IJ est concave vers le bas et les AI et JC sont concaves vers le haut.

## 308. Étude de la fonction : $y = \frac{1 + \sin 2x}{(1+\cos x)^2}$.

Cette fonction, qui admet pour période 2 $\pi$, est définie et continue sur l'intervalle ]— $\pi$, + $\pi$[ dans lequel nous allons l'étudier.

Posons $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, on obtient $y = \frac{1}{4}(t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t + 1)$

et : $$\frac{dy}{dt} = t^3 - 3t^2 + t + 1 = (t-1)(t^2 - 2t - 1)$$

Les racines de $\frac{dy}{dt}$ sont : $t = 1$ ; $t = 1 - \sqrt{2}$ et $t = 1 + \sqrt{2}$ qui correspondent à $x = \frac{\pi}{2}$; $x = -\frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$ (n° 255).

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\pi$ | | | $-\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $+\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $1-\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $1+\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $\frac{dy}{dt}$ | | $-$ | | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Il est possible d'étudier directement $\frac{dy}{dx}$ en remarquant que $y = \left(\frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x}\right)^2 = u^2$.

Par suite :

$$y' = 2uu' = 2\,\frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x} \times \frac{\cos x - \sin x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{4\cos\frac{x}{2}(\sin x + \cos x)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}{(1 + \cos x)^3}.$$

Les racines de $y'$ s'obtiennent en résolvant les équations : $\sin x + \cos x = 0$ et $\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0$.

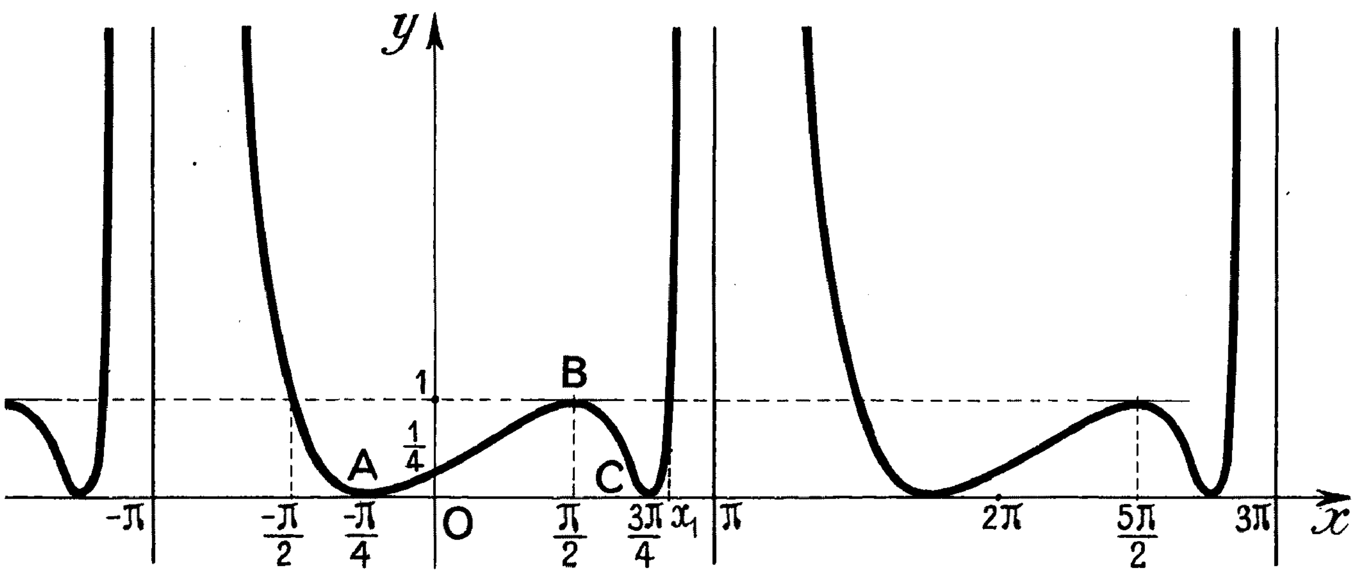



Fig. 144.

L'arc de courbe correspondant (fig. 144) admet pour sommets les points A $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, B $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ et C $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ ainsi que deux branches infinies asymptotes respectivement aux droites $x = -\pi$ et $x = +\pi$. Il coupe O$y$ au point $y = \frac{1}{4}$. On voit que cet arc est tangent en A et C à O$x$, en B à la droite $y = 1$ qu'il recoupe en deux points d'abscisses $-\frac{\pi}{2}$ et $x_1$ tel que $\operatorname{tg}\frac{x_1}{2} = 3$.

En reproduisant cet arc par translations de vecteur $\vec{V}(2\pi, 0)$ on obtient le graphe de la fonction donnée.

Remarque. — D'après le graphe (fig. 144) on voit que sur l'intervalle $]-\pi, +\pi[$ l'équation :

$$1 + \sin 2x = m(1 + \cos x)^2 \iff \frac{1 + \sin 2x}{(1 + \cos x)^2} = m$$

admet pour :

| | | |
|---|---|---|
| $m < 0$ | : | *Pas de racines.* |
| $0 < m < \frac{1}{4}$ | : | *Quatre racines (deux positives, deux négatives).* |
| $\frac{1}{4} < m < 1$ | : | *Quatre racines dont une seule négative.* |
| $m > 1$ | : | *Deux racines :* $x' < -\frac{\pi}{2}$ *et* $x'' > x_1$. |

## PROBLÈMES TRIGONOMÉTRIQUES

**309. Résolution trigonométrique d'un problème.** — Lorsque l'on veut résoudre un problème de nature géométrique, il est souvent avantageux de choisir une ou plusieurs inconnues angulaires. On se ramène à la résolution d'une équation ou d'un système d'équations trigonométriques. Dans la discussion on devra tenir compte des conditions d'inégalité imposées par la nature du problème.

Rappelons, dans un triangle ABC de côtés $a$, $b$, $c$ opposés respectivement aux angles A, B, C, les relations suivantes qui sont d'un emploi constant dans la mise en équations d'un problème :

$$A + B + C = \pi. \tag{1}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \tag{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \tag{3}$$

**310. Exemple I.** — *On considère un quart de cercle de centre* O *limité par les rayons* OA = OB = R. *La tangente en un point* M *de l'arc* AB *coupe les droites* OA *et* OB *en* P *et* Q. *Déterminer* M *pour le segment* PQ *soit égal à une longueur donnée* $2l$ (fig. 145).

Prenons pour inconnue l'angle AOM $= x$ où $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On obtient PM $= R \operatorname{tg} x$; QM $= R \operatorname{cotg} x$

et $\quad PQ = 2l \Longleftrightarrow R(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) = 2l.$

On est ramené à résoudre sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation :

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2l}{R}$$

soit: $$\sin 2x = \frac{R}{l}.$$

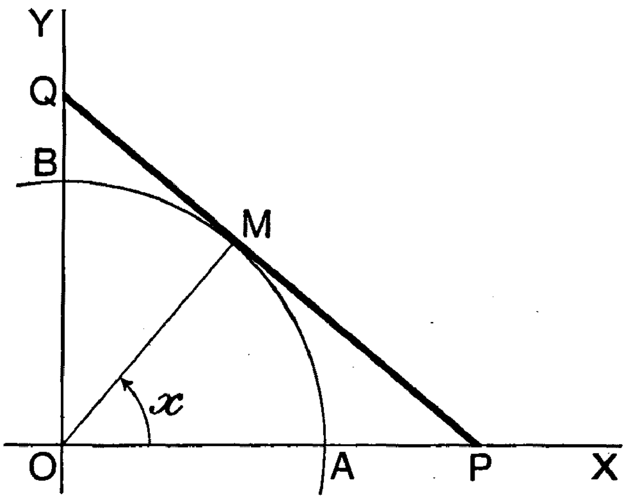


Fig. 145

La condition de possibilité est $R \leqslant l$ car il existe alors $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \alpha = \frac{R}{l}$ et on trouve deux solutions : $\quad x' = \frac{\alpha}{2} \quad$ et $\quad x'' = \frac{\pi - \alpha}{2}$

qui correspondent à deux droites PQ symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle AOB.

**311. Exemple II.** — *Trouver sur un demi-cercle de diamètre* AB = 2 R, *un point* M *tel que* MA + MB = 2 *l où* 2 *l désigne une longueur donnée* (fig. 146).

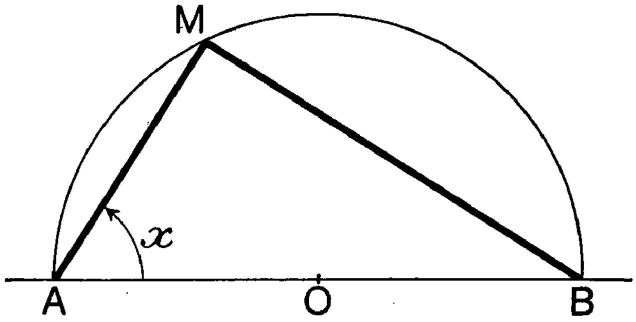



Fig. 146.

Prenons pour inconnue $\widehat{BAM} = x$ avec $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On obtient : $MA = 2R\cos x$, $MB = 2R\sin x$ et

$$MA + MB = 2l \iff \sin x + \cos x = \frac{l}{R}.$$

Nous sommes ramenés (n° 273) à résoudre l'équation :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{l\sqrt{2}}{2R}$$

avec $$-\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Si $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{l\sqrt{2}}{2R} \leqslant 1$, c'est-à-dire si $R \leqslant l \leqslant R\sqrt{2}$, il existe un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $\cos\alpha = \frac{l\sqrt{2}}{2R}$. Ce qui donne $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\alpha$.

D'où les deux solutions : $x' = \frac{\pi}{4} + \alpha$ et $x'' = \frac{\pi}{4} - \alpha$

correspondant à deux points M′ et M″ symétriques par rapport à la médiatrice de AB.

**312. Exemple III.** — *Résoudre un triangle* ABC *connaissant* $a$, B *et* C.

Les relations (1) et (2) du n° 309 donnent successivement :

$$A = \pi - (B + C) \qquad b = \frac{a\sin B}{\sin A} \quad \text{et} \quad c = \frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Le problème admet une solution unique si $B + C < \pi$, ce qui est évident géométriquement.

**313. Exemple IV.** — *Résoudre un triangle* ABC *connaissant* A, $b$ *et* $c$ *avec* $b > c$.

On a immédiatement : $B + C = \pi - A$ et $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$. D'autre part on peut écrire :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b + c}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{b - c}{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}} \tag{1}$$

D'où : $$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}. \tag{2}$$

$A < \pi \implies \frac{B+C}{2} < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$ est un nombre positif inférieur à $\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$.

Il existe donc un angle $\alpha$ tel que $0 < \alpha < \frac{B+C}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \operatorname{tg}\alpha$. On en déduit :

$$\left|\begin{array}{l} \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \\ \frac{B-C}{2} = \alpha \end{array}\right. \implies \left|\begin{array}{l} B = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} + \alpha \\ C = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \alpha. \end{array}\right.$$

Le côté $a$ est alors donné par l'une des relations (1) :

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} \quad \text{ou} \quad a = \frac{(b + c) \sin \dfrac{A}{2}}{\cos \alpha}.$$

**314. Exemple V.** — *Résoudre un triangle* ABC *connaissant ses* 3 *côtés* $a$, $b$, $c$.

D'après la formule (3) du n° 309 on obtient immédiatement :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ et les deux formules analogues pour B et C.}$$

On utilise plutôt la formule :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc + b^2 + c^2 - a^2} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2} = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{(a + b + c)(b + c - a)}.$$

Soit en posant : $a + b + c = 2p \Longrightarrow b + c - a = 2(p - a)$; $a + c - b = 2(p - b)$ et $a + b - c = 2(p - c)$. On obtient :

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}} \qquad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - c)(p - a)}{p(p - b)}} \qquad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{p(p - c)}}$$

On sait que l'aire du triangle est $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = pr$ en désignant par $r$ le rayon du cercle inscrit, on obtient :

$$r = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}, \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p - b}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p - c}.$$

La seule condition de possibilité du problème s'écrit :

$$(p - a)(p - b)(p - c) > 0 \quad \text{soit :} \quad (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) > 0,$$

ce qui en supposant $a \geqslant b \geqslant c$, se réduit à : $b + c > a$, condition évidente géométriquement.

## EXERCICES

— Variation et graphe des fonctions suivantes où la variable $x$ est exprimée en radians :

**971.** $y = 2 + \sin x$ **972.** $y = 3 - \cos x$ **973.** $y = \operatorname{tg} x - 1$.

**974.** $y = \sin 2x$. **975.** $y = -\cos^3 x$. **976.** $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

**977.** $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. **978.** $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$. **979.** $y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.

**980.** $y = 4 \cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$. **981.** $y = -\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. **982.** $y = 4 \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$.

**983.** $\cos^2 x$; $\sin^2 x$; $\operatorname{tg}^2 x$.

**984.** $\cos^3 x$; $\sin^3 x$; $\operatorname{tg}^3 x$.

**985.** $2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3$; $\sin^2 x - \sin x$; $\sin^2 2x - \sin 2x$.

**986.** $\sin^2 \frac{x}{3} - \sin \frac{x}{3}$; $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x - 3$; $\cos^4 x - \cos^2 x$.

**987.** $\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3}$; $\operatorname{cotg}^2 x + \operatorname{cotg} x - 2$.

**988.** $\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$; $\dfrac{2 + \cos x}{2 \cos x - 1}$; $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

**989.** $4 \sin^2 \dfrac{x}{3} - 4 \sin \dfrac{x}{3} - 3$; $\dfrac{m \cos x + m^2}{2m \cos x + m^2 + 1}$.

**990.** $15 \cos x + 7 \sin x$; $\sin x + \dfrac{1}{2} \sin 2x$.

**991.** $\sin x + \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x$; $\sin x + \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x + \dfrac{1}{4} \sin 4x$.

**992.** $\cos 2x + 2 \cos x$; $\operatorname{tg} 2x - 2 \operatorname{tg} x$; $\sin 3x + 3 \cos x$.

**993.** $3 - 4 \sin^4 x - 4 \cos^4 x + 2 \sin x \cos x$; $\dfrac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x - 1}$.

**994.** Variation et graphe de la fonction : $y = 31 \cos (x + a) - 13 \cos (x + b)$

$a$ et $b$ étant des angles aigus définis par : $\cos a = \dfrac{3}{5}$; $\cos b = \dfrac{12}{13}$.

**995.** Déterminer les coefficients $a$, $b$, $c$ pour que la fonction : $y = a \sin x + b \cos x + c$ s'annule pour $x = \dfrac{\pi}{6}$ et atteigne pour $x = \dfrac{\pi}{3}$ un minimum égal à un nombre donné $m$.

Construire le graphe de cette fonction lorsque $m = -1$.

**996.** Montrer que les droites $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ sont axes de symétrie de la courbe $y = \sin x$.

**997.** Montrer que les droites : $x = k\pi$ sont axes de symétrie de la courbe $y = \cos x$.

**998.** Construire dans l'intervalle $-\left[\dfrac{\pi}{2}; +\dfrac{\pi}{2}\right]$ les courbes : $y = |\sin x|$; $y = |\operatorname{tg} x|$; $y = |x$ et comparer leurs positions respectives.

**999.** Construire dans l'intervalle $[0; \pi]$ les courbes : $y = |\cos x|$; $y = |\operatorname{cotg} x|$; $y = |1 - x|$ et comparer leurs positions respectives.

**1000.** 1° Construire, dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ les courbes $C_1$ et $C_2$ : $y = \dfrac{1}{\sin x}$ et $y = \sin x$.

2° La droite $x = h$ coupe les courbes $C_1$ et $C_2$ en $M_1$ et $M_2$. Déterminer $h$ pour que les tangentes en $M_1$ et $M_2$ aux courbes $C_1$ et $C_2$ soient perpendiculaires.

3° Pour $x$ compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, démontrer que : $\dfrac{2}{\pi} x < \sin x < x$.

En déduire, dans l'intervalle $[0; \pi]$ les positions respectives des courbes :

$$y = \frac{1}{x}; \quad y = \frac{1}{\sin x} \quad \text{et} \quad y = \frac{\pi}{2x}.$$

**1001.** Représenter graphiquement la fonction : $y = \dfrac{\cos x + \sin x - 1}{\cos x - \sin x - 2}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Calculer l'abscisse du maximum et celle du minimum. En déduire les ordonnées des mêmes points.

2° Calculer directement les ordonnées du maximum et du minimum en discutant, suivant les valeurs de $m$, l'existence des racines de l'équation : $\dfrac{\cos x + \sin x - 1}{\cos x - \sin x - 2} = m$.

**1002.** — 1° Calculer la dérivée de : $f(x) = \dfrac{\sin x + 1 - k}{(1 - k) \sin x + 1}$

$k$ désignant une constante comprise entre 0 et 1.

2° Construire la courbe représentative des variations de $y = f(x)$.

3° $x$ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, $f(x)$ s'annule pour une valeur de $x$ de la forme : $x = -\frac{\pi}{2} + u$. Calculer $\sin u$, $\cos u$, $\cos 2u$ en fonction de $k$.

4° Calculer $f\left(-\frac{\pi}{2} + 2u\right)$ en fonction de $k$. Construire la courbe représentative de cette fonction lorsqu'on fait varier $k$ non seulement de 0 à 1, mais de $-\infty$ à $+\infty$.

5° Lorsque $k$ tend vers zéro, que deviennent les points de la courbe $y = f(x)$ dont l'abscisse $x$ est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} + 2u$ ? Même question pour ceux dont l'abscisse est comprise entre $-\frac{\pi}{2} + 2u$ et $2u$.

— On considère en orthonormées le demi-cercle : $x^2 + y^2 = R^2$ ; $y \geqslant 0$, limité par A $(-R, 0)$ et B $(+R, 0)$. Un point M$(x, y)$ de ce demi-cercle se projette orthogonalement en H sur AB, on désigne par $\theta$ la mesure de l'angle BAM. La longueur $l$ étant donnée, déterminer le point M et discuter dans les cas suivants :

**1003.** BH + MH = $l$

**1004.** BH − MH = $l$.

**1005.** MA − MB = $l$.

**1006.** MA + MB = $l$.

**1007.** 2 MA + MB = $l$.

**1008.** 2 MA − MB = $l$.

**1009.** 3 MA + MB = $l$.

**1010.** 3 MA − 4 MB = $l$.

**1011.** On donne un quart de cercle de centre O de rayon R limité par deux rayons OA et OB. Un point M du quart de cercle se projette en C sur OA et en S sur OB. Déterminer l'angle AOM $= \theta$ de façon que MC + MS = $l$ où $l$ désigne une longueur donnée. Quelle est la position de M correspondant au maximum de $l$ ? (Sol. géométrique.).

**1012.** On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2 R et de centre O. Soit OC le rayon perpendiculaire à AB, M un point quelconque du demi-cercle, K sa projection sur OC. Déterminer l'angle BAM $= x$ de façon que MA $= \frac{30}{7}$ MK.

**1013.** On donne un quart de cercle de centre O, de rayon R, limité par deux rayons OA et OB. Un de ses points M se projette en P sur OA. Déterminer l'angle AOM $= x$ de façon que OP = AM.

**1014.** Dans un triangle, on désigne par $b$ le côté moyen, les autres sont $a = b + \alpha$ et $c = b - \alpha$, $\alpha$ étant un nombre positif moindre que $b$.

1° Démontrer que les sinus des angles A, B, C vérifient la relation $2 \sin B = \sin A + \sin C$.

2° Déterminer l'angle B par la condition que le triangle soit rectangle et montrer que dans ce cas les côtés sont proportionnels aux nombres 3, 4 et 5.

**1015.** On considère un quart de cercle de centre O, de rayon R, limité par deux rayons OA et OB. La tangente en M à ce quart de cercle coupe la droite OA en P et la droite OB en Q. On désigne par $\theta$ l'angle AOM.

1° Calculer PQ par rapport aux fonctions circulaires de l'angle $\theta$, puis de l'angle $2\theta$.

2° Déterminer $\theta$ sachant que PQ = $l$ où $l$ est une longueur donnée. Examiner le cas particulier où $l = \frac{25}{12}$ R.

3° Déterminer $\theta$ sachant que PM = $k$.PA où $k$ désigne un nombre positif donné. Examiner le cas particulier où $k = \sqrt{3}$.

**1016.** Dans un plan P on donne un triangle inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R; sur la perpendiculaire au plan menée par O on prend un point quelconque S.

1° Montrer que les segments SA, SB, SC sont égaux et font le même angle $x$ avec le plan P.

Calculer les angles BSC, CSA, ASB, en fonction de $x$ et des angles A, B, C, du triangle. Déterminer $x$ pour que l'angle BSC soit droit.

2° Que doit être le triangle donné pour que l'on ait : BSC = CSA = ASB.

3° Cette condition étant remplie, calculer OS en fonction de R : *a*) pour que ces trois angles soient droits; *b*) pour qu'ils soient égaux à 60°. En déduire une propriété du tétraèdre régulier.

**1017.** On considère un cercle de rayon R. Soient AA′ un diamètre, B et C deux points de ce cercle, symétriques par rapport au diamètre AA′, H le point d'intersection de AA′ et BC, D le point d'intersection de AH et de la bissectrice intérieure de l'angle ABC (centre du cercle inscrit au triangle ABC). On désigne par $x$ l'angle HAB.

1° Exprimer à l'aide de R et des rapports trigonométriques de $x$, les longueurs AB, BH, AH, le rapport $\frac{AD}{DH}$, les longueurs AD, DH.

2° On désignera la longueur DH par $r$. Déterminer le sinus de l'angle $x$ en sorte que le rapport $\frac{r}{R}$ soit égal à un nombre $m$ positif donné. Discuter.

3° $x'$ et $x''$ étant deux angles qui correspondent à une même valeur de $m$ dans la question précédente, trouver une relation indépendante de $m$ qui lie $\sin x'$ et $\sin x''$. Calculer en degrés ou en grades à une seconde ou à $\frac{1}{100}$ de grade près la valeur de $x''$ en supposant $x' = 45°$.

**1018.** On donne un quart de cercle limité par les rayons OA, OB. Sur l'arc AB du quart de circonférence on prend un point M; on joint OM et l'on abaisse de M la perpendiculaire MH sur OA; on a ainsi formé un triangle OHM rectangle en H.

On propose de déterminer l'angle AOM = $x$ de manière que le rayon du cercle inscrit dans le triangle OHM soit égal à $k$R, R désignant le rayon OA et $k$ un nombre positif donné. On pourra prendre comme inconnue auxiliaire $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ; une construction géométrique du point M sera appréciée.

**1019.** Dans un triangle isocèle ABC, on donne l'angle au sommet BAC = $2\alpha$ et la hauteur AH = $h$.

1° Calculer, en fonction de $h$ et de $\alpha$, la surface, le périmètre, le rayon $r$ du cercle inscrit, le rayon R du cercle circonscrit, $r$ et R s'expriment rationnellement en $\sin \alpha$.

2° Déterminer $\alpha$ de façon que $2\,R - r = h\sqrt{3}$.

**1020.** Dans un triangle ABC, la bissectrice intérieure AD est égale au segment DC qu'elle détermine sur BC.

1° Connaissant $\frac{AB + AC}{BC} = m$, calculer les cosinus des angles du triangle. Pour quelles valeurs de $m$ le problème est-il possible ? Déterminer $m$ pour que les trois angles soient aigus.

2° Montrer que l'on a $\overline{BC}^2 = AB\,(AB + AC)$. Calculer les trois côtés en fonction de $m$ et de AD = $l$.

19e Leçon

# GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS

**315. Équation à une inconnue.** — Soit une variable $x$ appartenant à l'ensemble R des nombres relatifs (ou nombres réels) et deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ de cette variable, dont les valeurs appartiennent à R, et dont les domaines de définition sont respectivement les ensembles $A \subseteq R$ et $B \subseteq R$ :

***Résoudre l'équation :*** $u(x) = v(x)$, ***c'est déterminer l'ensemble*** S ***des valeurs de*** $x$ ***telles que*** $u(x)$ ***et*** $v(x)$ ***aient même valeur numérique dans*** R.

La variable $x$ se nomme *inconnue* de l'équation; $u(x)$ et $v(x)$ en sont les deux *membres.*

Tout $x \in S$ est une solution ou une *racine* de l'équation considérée. Si la racine $x_0$ figure $p$ fois dans S elle est dite *racine multiple d'ordre p.*

Nécessairement : $S \subseteq A \cap B \subseteq R$. Si $S = \varnothing$, l'équation est dite *impossible.* Si $S = A \cap B$ et si $A \cap B$ n'est pas vide, l'équation devient une *identité* sur S : $\forall\, x \in A \cap B \Longrightarrow u(x) \equiv v(x)$.

En général, une équation à une inconnue n'admet qu'un nombre limité de solutions.

On écrit : $\exists ?\ x \in R$ tel que $u(x) = v(x)$.

EXEMPLES. — 1° $\exists ?\ x \in R$ tel que : $3x + 5 = x - 1$.

Cette équation admet une racine unique : $x = -3$.

2° $\exists ?\ x \in R$ tel que : $2x - 1 = \sqrt{3x^2 - 2}$

Cette équation admet deux racines : $x' = 1$ et $x'' = 3$.

REMARQUE. — Si l'on impose à $x$ d'appartenir à un sous-ensemble N, Z, ou Q de R, cela restreint le nombre des solutions. Ainsi :

l'équation : $3x = 4$ admet une racine dans Q et est impossible dans Z,

l'équation : $x\sqrt{3} = 1$ admet une racine dans R et est impossible dans Q.

**316. Équation à plusieurs inconnues.** — Les définitions précédentes s'étendent au cas où $u$ et $v$ sont des fonctions réelles de plusieurs variables réelles; ainsi :

***Résoudre l'équation*** $u(x, y) = v(x, y)$, ***c'est déterminer l'ensemble*** S ***des éléments de*** $R^2$ ***tels que*** $u(x, y)$ ***et*** $v(x, y)$ ***aient même valeur numérique dans*** R.

Tout élément de S, qui peut y figurer plusieurs fois, est dit solution de l'équation.

L'équation à deux inconnues : $3x - 2y = 7$ admet pour solutions : $(x = 5, y = 4)$; $(x = 0, y = -7/2)$, etc.

**317. Équations équivalentes.** — ***Deux équations sont équivalentes lorsque l'ensemble des solutions de l'une coïncide avec l'ensemble des solutions de l'autre.***

Les deux équations ont donc mêmes solutions, avec même ordre de multiplicité (cf. n° 329) pour chacune d'elles. Deux équations équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles. En particulier :

***Les équations*** $u = v$ ***et*** $u - v = 0$ ***sont équivalentes.***

En effet, toute solution de l'une donne même valeur numérique aux deux fonctions $u$ et $v$ et par suite vérifie l'autre. Toute équation peut donc se ramener à la forme $f = 0$. Les racines de l'équation $f(x) = 0$ se nomment aussi *zéros* de la fonction $f(x)$.

La transformation d'une équation donnée $f(x) = 0$ en une équation équivalente $g(x) = 0$ ramène la résolution de la première à celle de la seconde.

**318. Principes généraux de résolution.** — A, B, C désignant des fonctions de l'inconnue $x$ ou des inconnues $x, y, z$ :

1° ***Les équations*** $A = B$ ***et*** $A + C = B + C$ ***sont équivalentes à condition que l'intersection des domaines de définition des fonctions*** A ***et*** B ***soit inclus dans celui de la fonction*** C.

L'existence des valeurs numériques $a$ et $b$ de A et B entraîne alors l'existence de la valeur numérique $c$ de C et : $a = b \Longleftrightarrow a + c = b + c$. Ainsi :

Les équations $3x + 7 = 2x - 1$ et $3x + 7 + (1 - 3x) = (2x - 1) + (1 - 3x)$ sont équivalentes.

Les équations $x = -3$ et $x + \sqrt{x} = -3 + \sqrt{x}$ ne sont pas équivalentes car $-3$ racine de la première n'est pas racine de la seconde.

Notons que l'équation $A = B + C$ équivaut à $A - C = B + C - C$ donc à $A - C = B$, ce qui montre que l'on peut transposer un terme d'un membre à l'autre dans une équation donnée.

2° ***Si*** $m$ ***est un réel non nul les équations*** $A = B$ ***et*** $mA = mB$ ***sont équivalentes dans*** R.

Toute solution de l'équation $A = B$, équivalente à $A - B = 0$, vérifie pour tout $m$ l'équation $m(A - B) = 0$ équivalente à $mA = mB$.

Réciproquement, toute solution de l'équation $mA = mB$, équivalente à $m(A - B) = 0$, vérifie si $m \neq 0$ l'équation $A - B = 0$, donc l'équation $A = B$.

Il en résulte la possibilité de supprimer les dénominateurs numériques dans une équation ou de simplifier les deux membres par un même facteur numérique.

3° ***Les solutions de l'équation*** $A.B.C = 0$ ***sont celles des équations*** $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$ ***pour lesquelles les valeurs numériques de*** A, B ***et*** C ***sont définies.***

En effet, pour qu'un système de valeurs des inconnues annule le produit ABC, il faut et il suffit que les valeurs numériques de A, B et C existent et que ce système annule l'un des trois facteurs A, B ou C. On dit que l'équation $ABC = 0$ *se décompose.*

4° ***Les solutions de l'équation*** $\frac{A}{B} = 0$ ***sont celles de l'équation*** $A = 0$ ***pour lesquelles la valeur numérique de*** B ***existe et n'est pas nulle.***

En effet, pour qu'un rapport soit nul, il faut et il suffit que son numérateur soit nul sans que son dénominateur le soit.

**319. Remarques.** — 1° L'équation $A = B$ ou $A - B = 0$ n'est pas équivalente à l'équation $AC = BC$ ou $(A - B)\,C = 0$, car cette dernière admet, outre les solutions de $A - B = 0$, celles de l'équation $C = 0$ :

Les équations $x^2 = x$ et $x = 1$ ne sont pas équivalentes.

Par contre, les équations $(x - 1)(x^2 + 4) = 0$ et $x - 1 = 0$ sont équivalentes dans R car $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution dans R.

2° L'équation $A = B$ ou $A - B = 0$ n'est pas équivalente à l'équation : $A^2 = B^2$ c'est-à-dire : $A^2 - B^2 = 0$ ou à : $(A - B)(A + B) = 0$ car cette dernière admet, outre les solutions de l'équation $A = B$, celles de l'équation : $A + B = 0$ ou $A = -B$, étrangères à l'équation initiale.

**320. Équations algébriques.** — Toute équation $f(x) = 0$ prend le nom de la fonction $f(x)$. Nous avons étudié (16e leçon) quelques types d'*équations trigonométriques* de la forme $E(\sin x, \cos x) = 0$.

Lorsque $f(x)$ est une fonction algébrique, l'équation $f(x) = 0$ est une *équation algébrique.* Si $P(x)$ est un polynôme, l'équation $P(x) = 0$ est une *équation entière* dont le degré est celui de $P(x)$.

Ainsi : $3x + 5 = 0$ est du 1er degré, $3x^2 - 8x + 5 = 0$ est du 2e degré, etc.

De même $P(x, y, z) = 0$ ou $P(x, y, z)$ est un polynôme en $x, y, z$ est une équation algébrique entière à trois inconnues dont le degré est le degré du polynôme $P(x, y, z)$ par rapport à l'ensemble des inconnues :

$x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz - 1 = 0$ est donc équation du 3e degré en $x, y, z$.

**321. Changement d'inconnues.** — La résolution d'une équation à une inconnue peut être facilitée par un changement d'inconnue ou l'introduction d'une inconnue auxiliaire.

1° L'équation $E[u(x)] = 0$ se résout en posant $y = u(x)$ et en résolvant successivement $E(y) = 0$, puis $u(x) = y$.

$$E(x^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} E(y) &= 0 \\ x^2 &= y. \end{aligned} \right.$$

2° L'équation $E[f(x), g(x)] = 0$ se résout en exprimant les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ en fonction d'une seule inconnue $t = u(x)$.

$$E(\sin x, \cos x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} &E\left[\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right] = 0 \\ &\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t. \end{aligned} \right.$$

Les exemples déjà vus (nos 268 à 275) montrent comment le choix de l'inconnue intermédiaire permet de faciliter la résolution de l'équation proposée.

**322. Interprétation graphique.** — 1° Les racines de l'équation $f(x) = 0$ ne sont autres que les abscisses des points d'intersection de l'axe $Ox$ et de la courbe $y = f(x)$ dans le repère $xOy$ (fig. 147).

2° L'équation $f(x) = g(x)$ n'est autre que l'équation aux abscisses des points d'intersection des deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ tracées dans un même repère $xOy$ (fig. 148).

Dans les deux cas on peut ainsi déterminer le nombre des racines de l'équation proposée et en avoir un valeur approchée. Notons que :

***Si la fonction $f(x)$, définie et continue sur $[a, b]$ admet des valeurs numériques $f(a)$ et $f(b)$ de signes différents, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine $x_0$ comprise entre $a$ et $b$.***

Les points A $[a, f(a)]$ et B $[b, f(b)]$ de la courbe $y = f(x)$ étant de part et d'autre de $Ox$, l'arc AB coupe au moins une fois l'axe $Ox$ (fig. 147).

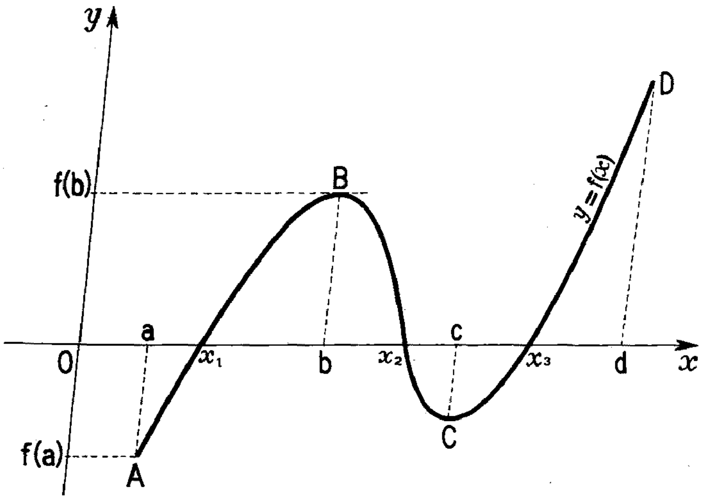



Fig. 147.

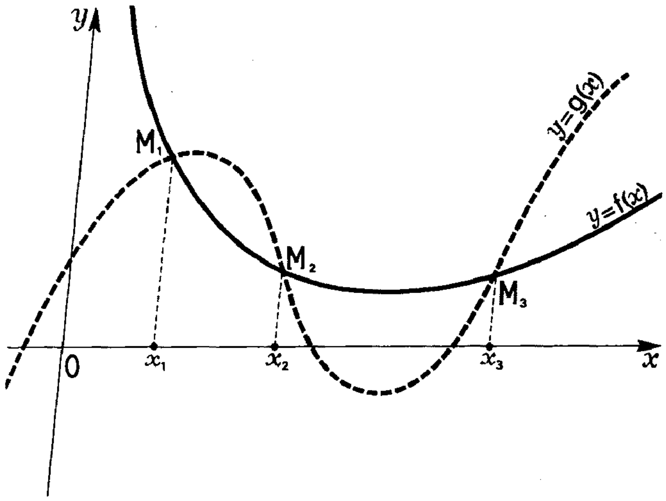



Fig. 148.

Cette racine $x_1$ est unique si $f(x)$ est monotone sur $[a, b]$ c'est-à-dire si la dérivée $f'(x)$ garde un signe constant sur $[a, b]$.

**323. — Équations paramétriques.** — On désigne sous le nom d'*équation paramétrique* une équation où figurent, outre les inconnues, une ou plusieurs lettres appelées *paramètres* dont la valeur est supposée connue.

Dans une telle équation, il faut étudier suivant les valeurs des paramètres l'existence et le nombre des solutions de l'équation. Cette étude constitue la *discussion* de l'équation paramétrique.On donnera, si possible, la valeur des racines en fonction du paramètre dans chacun des cas trouvés.

Cette discussion peut être effectuée graphiquement pour toute équation dépendant d'un paramètre unique $m$ et qu'on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = m.$$

Il suffit de construire dans un repère $xOy$, la courbe $y = f(x)$ et d'étudier ses intersections avec la droite variable $y = m$ lorsque $m$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. Nous en avons donné des exemples (nos 186, 193, 201, 308).

**324. Équation du 1er degré à une inconnue.** — Rappelons les résultats connus relatifs à l'équation du premier degré à une inconnue. Toute équation dans R est du premier degré lorsqu'elle est équivalente à une équation de la forme : $ax + b = 0$.

$$a \in \mathrm{R};\ b \in \mathrm{R};\ \exists ?\ x \in \mathrm{R} \quad \text{tel que} \quad ax + b = 0. \qquad (1)$$

1$^{er}$ *Cas* : $a \neq 0$. — L'équation (1) est équivalente aux équations suivantes :

$a\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0$ et $x = -\frac{b}{a}$ (n° 318, 2°). Elle admet une racine unique.

2$^e$ *Cas* : $a = 0$. — L'équation (1) se réduit à : $0.x = b$.

Si $b \neq 0$, il n'existe aucun réel $x$ tel que $0.x \neq 0$. L'équation est *impossible*.

Si $b = 0$, $\forall\, x \in R$ est solution de l'équation. On dit que l'équation est *indéterminée*.

***L'équation du premier degré à une inconnue*** $ax + b = 0$ ***admet lorsque*** $a$ ***n'est pas nul, la racine unique :*** $x = -\frac{b}{a}$. ***Lorsque*** $a$ ***est nul, elle est impossible pour*** $b \neq 0$, ***indéterminée pour*** $b = 0$.

EXEMPLES :

1° L'équation : $\frac{5x-3}{4} - \frac{9x-14}{5} = 3 - \frac{3x-5}{8}$ est successivement équivalente aux équations suivantes :

$$10(5x-3) - 8(9x-14) = 120 - 5(3x-5)$$
$$50x - 30 - 72x + 112 = 120 - 15x + 25$$
$$50x - 72x + 15x = 30 - 112 + 120 + 25$$
$$-7x = 63 \Longleftrightarrow x = -9$$

2° L'équation $5(x-1) - 3x = 2x + 3$ est équivalente à

$$2x - 5 = 2x + 3 \Longleftrightarrow 0.x = 8.$$

*Elle est impossible.*

3° L'équation $3(x-2) + 1 = 5(x-1) - 2x$ est équivalente à

$$3x - 5 = 3x - 5 \Longleftrightarrow 0.x = 0.$$

Elle est indéterminée et se réduit à une identité.

**325. Exemples d'équations paramétriques.** — Montrons sur quelques exemples comment on conduit la discussion et la résolution d'équations paramétriques du premier degré en $x$.

EXEMPLE I : $m(4x-5) - 3(m+1)x + 4m - 5 = 0.$

Développons : $4mx - 5m - 3mx - 3x + 4m - 5 = 0.$

$$mx - 3x = 5m - 4m + 5.$$

Soit : $(m-3)x = m + 5.$

1° $m \neq +3 \Longleftrightarrow m - 3 \neq 0$ et $\boxed{x = \frac{m+5}{m-3}}$ ;

2° $m = +3$. Il reste : $0.x = 8$. *Équation impossible.*

EXEMPLE II : $m^2(x-1) + 3mx = (m^2+3)x - 1.$

On a : $m^2x - m^2 + 3mx = m^2x + 3x - 1.$

$$3mx - 3x = m^2 - 1.$$

Soit : $3(m-1)x = m^2 - 1.$

1° $m \neq +1$. On a : $x = \frac{m^2-1}{3(m-1)}$ soit $\boxed{x = \frac{m+1}{3}}$ ;

2° $m = +1$. Il vient : $0x = 0$. *Équation indéterminée.*

EXEMPLE III : $$\frac{4x+2}{3} - \frac{x+b}{a} = \frac{5(x-1)}{6}.$$

Il faut supposer $a \neq 0$ pour que l'équation ait un sens. Multiplions tous les termes par $6\,a$ :

$$2\,a\,(4\,x+2) - 6\,(x+b) = 5\,a\,(x-1)$$
$$8\,ax + 4\,a - 6\,x - 6\,b = 5\,ax - 5\,a.$$

Soit : $$(3\,a - 6)\,x = 6\,b - 9\,a$$

ou : $$(a-2)\,x = 2\,b - 3\,a.$$

1° $a \neq 0$ et $+\,2$. On obtient : $\boxed{x = \frac{2b - 3a}{a-2}}$ ;

2° $a = 2$. L'équation devient : $0x = 2\,b - 6$.

Cette relation est vérifiée si $b = 3$.

Si $b \neq 3 \Longleftrightarrow 2\,b - 6 \neq 0$. *Équation impossible.*

Si $b = 3 \Longleftrightarrow 2\,b - 6 = 0$. *Équation indéterminée.*

## ÉQUATIONS SE RAMENANT AU PREMIER DEGRÉ

**326. Équations de la forme** A.B.C = 0. — Nous avons vu (n° 318, 3°) que les solutions de cette équation étaient celles des trois équations :

$$A = 0; \quad B = 0; \quad C = 0.$$

EXEMPLE I. — *Résoudre* : $(x-3)\,(2\,x+5)\,(3\,x-7) = 0.$

Cette équation se décompose en :

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \\ 3x - 7 = 0 \end{cases} \text{D'où les trois racines :} \begin{cases} x' = \phantom{-}3 \\ x'' = -5/2 \\ x''' = \phantom{-}7/3. \end{cases}$$

EXEMPLE II. — *Résoudre* : $(3\,x-5)^2 - (x-3)^2 = 0.$

Le premier nombre est de la forme : $A^2 - B^2 \Longleftrightarrow (A+B)\,(A-B)$.

Donc : $$(3x - 5 + x - 3)\,(3x - 5 - x + 3) = 0$$
$$(4x - 8)\,(2x - 2) = 0.$$

Cette équation se décompose en :

$$\begin{cases} 4x - 8 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \text{D'où les deux racines :} \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 1. \end{cases}$$

**327. Équation incomplète du second degré.** — Une équation est du second degré si après réduction elle se ramène à la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

On a évidemment $a \neq 0$, sinon l'équation serait du 1$^{er}$ degré; mais on peut supposer $b = 0$ ou $c = 0$.

**1$^{er}$ cas :** $c = 0$. L'équation : $ax^2 + bx = 0$ s'écrit :

$$x\,(ax+b) = 0.$$

Elle se décompose en : $x = 0$ et $ax + b = 0$. D'où les 2 racines :

$$\boxed{x' = 0 \quad \Big| \quad x'' = -\frac{b}{a}}$$

**2e cas :** $b = 0$. L'équation : $ax^2 + c = 0$ est équivalente, puisque $a \neq 0$ à :

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0. \qquad (1)$$

***Si $\frac{c}{a}$ est négatif,*** on peut écrire : $x^2 - \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = 0$

soit : $$\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0.$$

D'où les deux racines :

$$\boxed{x' = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \Big| \quad x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.}$$

On écrit en abrégé : $$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

***Si $\frac{c}{a}$ est positif,*** le premier membre somme d'un nombre positif ou nul $x^2$ et d'un nombre positif $\frac{c}{a}$, ne peut être nul. *L'équation* (1) *est donc impossible dans R.*

EXEMPLES :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° $x^2 - 7x = 0$ | ou | $x(x-7)$ | 2 racines : $x' = 0$ ; $x'' = 7$. |
| 2° $4x^2 + 5 = 0$ | ou | $4x^2 = -5$ | Équation impossible dans R |
| 3° $x^2 - 12 = 0$ | ou | $x^2 = 12$ | 2 racines : $x' = 2\sqrt{3}$ et $x'' = -2\sqrt{3}$. |

**328. Racines d'un polynôme.** — ***On appelle racine (ou zéro) d'un polynôme*** $P(x)$ ***toute racine de l'équation :*** $P(x) = 0$.

Une racine $a$ d'un polynôme est donc telle que $P(a) = 0$.

*Lorsqu'un polynôme est décomposé en un produit de facteurs du premier degré, ses racines sont les racines de ses différents facteurs.*

Ainsi : $P(x) \equiv (x - 3)(5x + 2)(4x - 9)$ admet les trois racines distinctes :

$$+3; \quad -\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad +\frac{9}{4}.$$

Rappelons que réciproquement (n° 47) :

***Tout polynôme qui admet la racine $x = a$ est divisible par $x - a$ et s'écrit :*** $P(x) = (x - a)\,Q(x)$.

$$\boxed{P(a) = 0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P(x) = (x - a)\,Q(x)}$$

Plus généralement (nº 49) :

*Tout polynôme* $P(x)$ *qui admet des racines distinctes* $a$, $b$, $c$, *est divisible par* $(x - a)(x - b)(x - c)$.

Donc : $P(a) = P(b) = P(c) = 0 \implies P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)\,S(x)$.

**329. Racines multiples d'un polynôme.** — Le polynôme décomposé : $P(x) \equiv (x - 2)(x + 3)(4 - 2x)$ admet pour racines : $+2$, $-3$ et $+2$.

On voit que la racine $+2$, se trouve deux fois. On traduit ce fait en disant que le polynôme $P(x)$ a deux *racines confondues* ou une *racine double* égale à $+2$ et une *racine simple* égale à $-3$.

De même le polynôme :

$$R(x) \equiv (2x + 7)(x - 5)^3 = (2x + 7)(x - 5)(x - 5(x - 5)$$

admet $+5$ comme *racine triple* et $-\frac{7}{2}$ comme racine simple.

***Un polynôme*** $P(x)$ ***admet*** $x = a$ ***comme racine multiple d'ordre*** $n$ ***s'il est divisible par*** $(x - a)^n$.

Dans ce cas le polynôme s'écrit : $P(x) \equiv (x - a)^n\, Q(x)$ avec $Q(a) \neq 0$

Par suite, sa dérivée, par rapport à $x$ s'écrit (nº 110) :

$$P'(x) = n(x - a)^{n-1} Q(x) + (x - a)^n\, Q'(x)$$
$$P'(x) = (x - a)^{n-1}[n\,Q(x) + (x - a)\,Q'(x)]$$

Le crochet prenant pour $x = a$, la valeur non nulle $n\,Q(a)$, on voit que :

*Toute racine d'ordre n d'un polynôme est racine d'ordre* $n - 1$ *de sa dérivée.*

On en déduit que $a$ est racine d'ordre $n - 2$ de $P''(x)$, d'ordre $n - 3$ de $P'''(x)$... d'ordre 1 de $P^{(n-1)}(x)$ et tel que $P^{(n)}(a) \neq 0$. L'ordre de multiplicité d'une racine multiple d'un polynôme $P(x)$ est donc l'ordre de sa première dérivée non nulle pour $x = a$.

Il en résulte que :

**330. Théorème. —** ***Pour que*** $P(x)$ ***admette*** $x = a$ ***comme racine d'ordre*** $n$ ***il faut et il suffit que :*** $P(a) = 0$ ; $P'(a) = 0$ ; $P''(a) = 0$ ; ...... $P^{(n-1)}(a) = 0$ ; $P^{(n)}(a) \neq 0$.

En particulier *toute racine double d'un polynôme* $P(x)$ *annule* $P(x)$ et $P'(x)$.

Rappelons que deux équations équivalentes doivent admettre les mêmes racines avec pour chacune d'elles le même ordre de multiplicité ( nº 317).

Exemples. — 1º *Montrer que le polynôme* $P(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$ *admet la racine triple* $x = 1$.

On obtient : $P(1) = 1 - 10 + 15 - 6 = 0$.

$P'(x) = 5x^4 - 20x + 15 \implies P'(1) = 5 - 20 + 15 = 0$

$P''(x) = 20x^3 - 20x \implies P''(1) = 20 - 20 = 0$.

On pourra vérifier que $P(x) \equiv (x - 1)^3(x^2 + 3x + 6)$.

2º *Trouver la condition pour que* $P(x) = x^3 + px + q$ *admette une racine double* $\alpha$.

Cette racine double doit vérifier $P(x) = P'(x) = 0$. Soit :

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0 \quad \text{et} \quad 3\alpha^2 + p = 0 \implies \alpha^3 + \frac{p\alpha}{3} = 0 \quad \text{et} \quad 2p\alpha + 3q = 0.$$

soit $\alpha = -\frac{3q}{2p}$ et $3\left(\frac{3q}{2p}\right)^2 + p = 0$ d'où la condition $4p^3 + 27q^2 = 0$ (nº 180).

**331. Équations contenant l'inconnue en dénominateur.** — Sans éliminer de dénominateurs littéraux, l'équation se ramène à la forme : $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Les racines cherchées sont celles de l'équation : $A(x) = 0$, pour lesquelles on a $B(x) \neq 0$ (nº 318, 4º). Pratiquement on opère de la façon suivante :

***On élimine les dénominateurs et on résout l'équation entière obtenue. On écarte ensuite, parmi les valeurs trouvées, celles qui annulent un des dénominateurs de l'équation initiale.***

EXEMPLE I. — *Résoudre :* $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$. (1)

Cette équation n'a de sens que si tous les dénominateurs sont différents de zéro, c'est-à-dire si :

$$x \neq 0 \text{ et } x \neq 2. \text{ Soit } x \in R - \{0; 2\} = A.$$

Supposons ces conditions réalisées et éliminons les dénominateurs en multipliant tous les termes par : $x(x-2)$. On obtient les équations suivantes équivalentes à (1) sur A.

$$x(x+2) - (x-2) - 2 = 0.$$
$$x^2 + 2x - x + 2 - 2 = 0.$$
$$x^2 + x = 0 \quad \text{ou} \quad x(x+1) = 0.$$

D'où les deux solutions possibles : $x = 0$ et $x = -1$. Or la valeur $x = 0$ est une des valeurs écartées. Seuls : $x = -1$ est solution de l'équation proposée.

EXEMPLE II. — *Résoudre :* $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{5}{x-a}$ (1)

Sur $A = R - \{2; 3; a\}$ l'équation (1) est équivalente aux équations suivantes :

$$[3(x-3) + 2(x-2)](x-a) = 5(x-2)(x-3)$$
$$5x^2 - (5a+13)x + 13a = 5x^2 - 25x + 30$$
$$(5a-12)x = 13a - 30. \qquad (2)$$

Pour : $a = \frac{12}{5}$, l'équation (2) est impossible. Il en est de même de l'équation proposée (1).

Pour : $a \neq \frac{12}{5}$, l'équation (2) admet la racine unique :

$$\boxed{x = \frac{13a - 30}{5a - 12}} \qquad (3)$$

cette valeur sera solution de l'équation (1) si elle n'est pas égale à l'une des valeurs 2, 3 ou $a$ :

1º $\frac{13a-30}{5a-12} = 2$ ou $3a = 6$. Valeur à écarter : $a = 2$.

2º $\frac{13a-30}{5a-12} = 3$ ou $2a = 6$. Valeur à écarter : $a = 3$.

3º $\frac{13a-30}{5a-12} = a$ ou : $a^2 - 5a + 6 = 0$. Soit $(a-2)(a-3) = 0$. On retrouve les valeurs de $a$ précédentes : $a = 2$ et $a = 3$ déjà écartées.

En résumé si $a$ est différent de 2, 3 et $\frac{12}{5}$ l'équation proposée (1) admet une racine unique donnée par la formule (3).

## EXERCICES

— Résoudre et discuter les équations en $x$ suivantes :

**1021.** $3mx + 2 = x + 5mx.$

**1022.** $3m^2(x+1) = x + m\sqrt{3}.$

**1023.** $3x(2m-3) - 7(2m-1) = 8mx.$

**1024.** $(m-1)^2 x = x + m(m^2-1).$

**1025.** $a^3(x-a^2) = b^3(x-b^2).$

**1026.** $a^3(x-a^2) + b^3(x-b^2) = 0.$

**1027.** $x(2m-1) - 4m^2 = 3 - 2(1+x-2m).$

**1028.** $m^2x - 8m - 4 = m^2 - 4m + 4x.$

**1029.** $(a-1)^2(x+1-a) = b^2(x+a-2b-1).$

**1030.** $(m+2)x + 4(2m+1) = m^2 + 4(x-1).$

**1031.** $x(a+b)^3 = x(a^3+b^3) + 2ab.$

**1032.** $(a^2+b^2)(c^2+d^2)x = (ac+bd)^2x + a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd.$

**1033.** $(x+a)^3 + (x+b)^3 + (x+c)^3 = 3(x+a)(x+b)(x+c).$

**1034.** $\dfrac{(m+1)x}{6} - \dfrac{2}{5}(m^2+2m+2) = \dfrac{x-m^2-2m}{2}.$

**1035.** $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(x-m)(x+m+3)}{2} = \dfrac{(x+m)(5x+5m-21)}{6} - \dfrac{2}{3}(2m^2-5m).$

**1036.** $\dfrac{(m+1)^2[(x+1)^2-(x-3)^2]}{8} = 4x + m^2 + 6m + 5.$

**1037.** $\dfrac{(x+1)^2}{m-1} - \dfrac{(3x+1)}{m+1} = \dfrac{(x-5)(3x+10)}{3m-3}.$

**1038.** $\dfrac{(x-2)^2}{a} - \dfrac{(x-1)^2}{b} = \dfrac{(b-a)(x-4)(x-6)}{ab}.$

— Résoudre et discuter, s'il y a lieu, les équations en $x$ suivantes :

**1039.** $x^3 + x^2 - 2x = 0.$

**1040.** $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$

**1041.** $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0.$

**1042.** $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8 = 0.$

**1043.** $m^2x^3 - x = 0.$

**1044.** $mx^3 - (m+1)x^2 - (6m-1)x + 6 = 0.$

**1045.** $[(m-1)x + 5m]^2 - 4[m(x-3)-1]^2 = 0.$

**1046.** $(5a^2x^2 - 3abx - 2b^2)^2 = (4a^2x^2 - 3abx - 2b^2)^2.$

**1047.** $[(m+1)(m+2) - 2x(m-3)][x-4] = (m+1)^2(m+2)^2 - 4x^2(m-3)^2.$

**1048.** $(3x^2 - ax + 5)^2 = (3x^2 - bx - 5)^2.$

**1049.** $[x^2 - (a+b)x + ab][x^2 - (a-b)x - ab] = 0.$

**1050.** $(a-1)(b+1)x^2 - (a+b)x + 1 = 0.$

**1051.** $(x^2+a)^3 + (1-a^2)(x^2+a) = [x^3 + (1-a^2)x]^2 + a.$

— Résoudre et discuter, s'il y a lieu, les équations en $x$ suivantes :

**1052.** $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{2}{x}$.

**1053.** $\frac{[(x^2+px+q)+(x^2+px+q')]^2}{(x^2+px+q)(x^2+px+q')}=4$.

**1054.** $\frac{x+a}{x+b}+\frac{x-a}{x-b}=2$.

**1055.** $\frac{ax+b}{x^2+1}=\frac{2ax+3b}{2x^2-5x+3}$.

**1056.** $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{cx+d}{ax+b}$.

**1057.** $\frac{b}{x(x^2-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}-\frac{(a+b)}{x(x+1)}$.

**1058.** $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$.

**1059.** $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{x(1-a)+b}{x^2+1}$.

**1060.** $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2=\frac{ax+b}{cx+d}$.

**1061.** $\frac{5x+1}{x^3-a^3}=\frac{a}{x-a}+\frac{b-ax}{x^2+ax+a^2}$.

**1062.** $\frac{m+1}{x+a}+\frac{m-1}{x+b}=\frac{2m}{x+c}$.

**1063.** $\frac{x^2-3x-4}{(x-a)^3}=\frac{1}{x-a}+\frac{b}{(x-a)^2}+\frac{c}{(x-a)^3}$.

**1064.** On désigne par P la somme des coefficients des termes de degré pair d'un polynôme $R(x)$ et par I la somme des coefficients des termes de degré impair.

1° Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $R(x)$ soit divisible par $x^2-1$.

2° Résoudre l'équation : $2x^4+x^3-5x^2-x+3=0$.

**1065.** 1° Décomposer $x^2-x-2$ en un produit de facteurs.

2° Déterminer $a$ et $b$ pour que le polynôme $P=x^5-x^4+2x^3-x^2+ax+b$ soit divisible par $x^2-x-2$. Factoriser ce polynôme P.

**1066.** Démontrer que les polynômes suivants sont divisibles par $(x-1)^2$ :

1° $P(x)\equiv x^n-x^{n-2}-2x+2$.

2° $Q(x)\equiv x^{n+1}-x^n-x+1$.

3° $R(x)\equiv nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$.

**1067.** Déterminer $a$, $b$, $c$ pour que le polynôme $P(x)$ : $x^4-11x^3+ax^2+bx+c$ soit divisible par $(x-1)(x-2)(x-3)$. Résoudre l'équation $P(x)=0$.

**1068.** On considère une équation : $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ dont les coefficients A, B, C, D sont des entiers. Montrer que si cette équation admet une racine $\alpha\in\mathbb{Z}$, entier relatif, le nombre $|\alpha|$ est un diviseur de $|D|$ :

Application. — Résoudre l'équation : $x^3-3x^2-10x+24=0$.

**1069.** Généraliser la propriété de l'exercice précédent pour un polynôme de degré quelconque à coefficients entiers et résoudre l'équation :

$$x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0.$$

**1070.** 1° Le polynôme à coefficients entiers $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$ admet pour racine la fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$. Démontrer que $|\alpha|$ est un diviseur de $|E|$ et $|\beta|$ un diviseur $|A|$.

2° Décomposer le polynôme $P(x)=6x^4+5x^3-39x^2+4x+12$ en un produit de 4 facteurs du 1er degré à coefficients entiers et résoudre l'équation $P(x)=0$.

# SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

**332. Équation du premier degré à plusieurs inconnues.** — Une équation est du premier degré par rapport aux inconnues $x$, $y$ et $z$ lorsqu'elle est équivalente à l'équation suivante :

$$a, b, c, d \in \mathrm{R} \qquad \exists ?\ (x, y, z) \in \mathrm{R}^3 \quad \text{tel que :} \quad ax + by + cz + d = 0. \qquad (1)$$

Si $a \neq 0$, l'équation (1) équivaut à : $x = -\dfrac{1}{a}(by + cz + d)$. (2)

Nous obtiendrons une solution de cette équation en donnant à $y$ et $z$ des valeurs arbitraires et en calculant la valeur correspondante de $x$ par la relation (2). On voit de même que :

***Une équation du premier degré à $n$ inconnues admet, en général, une infinité de solutions que l'on obtient en se fixant arbitrairement les valeurs de $(n - 1)$ inconnues.***

Lorsque $a = b = c = 0$, l'équation (1) se déduit à $d = 0$, *équation impossible* si le coefficient $d$ n'est pas nul.

Lorsque $a = b = c = d = 0$, l'équation (1) est vérifiée quels que soient $x$, $y$ et $z$. *Les inconnues sont donc toutes arbitraires.*

**333. Système de deux équations à deux inconnues.** — Considérons les deux équations du premier degré à deux inconnues $x$ et $y$ :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \qquad a, b, c, \in \mathrm{R} \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \qquad a', b', c' \in \mathrm{R} \end{cases}$$

Soient $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{R}^2$ l'ensemble des solutions de l'équation (1) et $\mathrm{S}' \subseteq \mathrm{R}^2$ l'ensemble des solutions de l'équation (2). L'ensemble $\Sigma = \mathrm{S} \cap \mathrm{S}'$ des solutions communes aux équations (1) et (2) est, par définition, l'ensemble des solutions du système (I) formé par l'association de ces équations. Résoudre le système (I), revient à trouver $\Sigma$. A cet effet, on se ramène à la résolution d'une équation à une inconnue en éliminant l'une d'elles entre les équations données.

**334. Exemple.** — Soit à résoudre le problème suivant :

$$\exists ?\ (x, y) \in \mathrm{R}^2 \text{ tel que : } \begin{cases} 5x - 2y - 6 = 0 & (1) \\ 8x + 3y - 53 = 0. & (2) \end{cases}$$

1° ***Par substitution.*** — L'équation (1) qui équivaut à : $y = \dfrac{5x-6}{2}$ (3)

montre que, pour toute solution du système, $y$ a même valeur numérique que $\dfrac{5x-6}{2}$. Cette solution vérifiant l'équation (2) satisfait donc à :

$$8x + 3\left(\frac{5x-6}{2}\right) - 53 = 0. \qquad (4)$$

d'où :

$$31x - 124 = 0.$$

Cette équation entraîne : $x = 4$ et l'équation (3) entraîne alors $y = 7$.

Donc si le système proposé admet une solution, ce ne peut être que $(x = 4;\ y = 7)$.

On vérifie aisément qu'il en est bien ainsi.

2° ***Par combinaison linéaire.*** — Toute solution du système proposé vérifie également les deux équations :

$$3(5x - 2y - 6) + 2(8x + 3y - 53) = 0 \qquad (5)$$
$$-8(5x - 2y - 6) + 5(8x + 3y - 53) = 0 \qquad (6)$$

qui se réduisent respectivement à : $31x - 124 = 0$ et $31y - 217 = 0$ et donnent : $x = 4$ et $y = 7$.

On retrouve ainsi la solution unique du système proposé.

**335. Cas général.** — Reprenons le système général (I) :

$$\exists?\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } \quad (\mathrm{I}) \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0. & (2) \end{cases}$$

Toute solution du système (I) vérifie également les deux équations :

$$b'(ax + by + c) - b(a'x + b'y + c') = 0$$
$$-a'(ax + by + c) + a(a'x + b'y + c') = 0$$

soit après réduction :

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} (ab' - ba')x + cb' - bc' = 0 & (3) \\ (ab' - ba')y + ac' - ca' = 0. & (4) \end{cases}$$

**1er cas :** $ab' - ba' \neq 0$. Les relations (3) et (4) montrent que la seule solution possible du système (I) s'écrit :

$$\boxed{x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \quad \Big| \quad y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.} \qquad (5)$$

Il reste à vérifier qu'il en est bien ainsi. En remplaçant $x$ et $y$ par les valeurs précédentes dans les premiers membres des équations (1) et (2), nous obtenons effectivement :

1° $\dfrac{a(bc' - cb')}{ab' - ba'} + \dfrac{b(ca' - ac')}{ab' - ba'} + c = \dfrac{-c(ab' - ba')}{ab' - ba'} + c = 0.$

2° $\dfrac{a'(bc' - cb')}{ab' - ba'} + \dfrac{b'(ca' - ac')}{ab' - ba'} + c' = \dfrac{-c'(ab' - ba')}{ab' - ba'} + c' = 0.$

Les formules (5), connues sous le nom de « *formules de* Cramer », donnent donc la solution unique du système proposé.

**2e cas :** $ab' - ba' = 0$. Cette relation est évidemment vérifiée si les quatre coefficients $a, b, a', b'$, sont nuls. Écartons d'abord cette hypothèse en supposant par exemple : $a \neq 0$.

La relation $ab' - ba' = 0 \iff b' = \dfrac{ba'}{a}$ et le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + \dfrac{ba'y}{a} + c' = 0 \end{cases} \iff \text{(III)} \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'(ax + by) + ac' = 0 & (6) \end{cases}$$

Pour toute solution de ce système, on a d'après (1) : $ax + by = -c$. En portant cette valeur dans l'équation (6), on obtient :

$$-ac' + ac' = 0 \iff ac' - ca' = 0.$$

Par suite si : $ac' - ca'$ n'est pas nul, le système (I) est impossible.

Par contre si $ac' - ca' = 0$, on a : $c' = \dfrac{ca'}{a}$ et le système (III) s'écrit :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'(ax + by + c) = 0. & (7) \end{cases}$$

Il est donc vérifié pour toute solution de l'équation (1). Nous obtenons une infinité de solutions en prenant :

$$y \textit{ arbitraire} \quad \text{et} \quad x = -\frac{by + c}{a}.$$

**3e cas :** $a = b = a' = b' = 0$. Le système (I) se réduit à :

$$c = 0; \quad c' = 0.$$

Il est impossible sauf si $c$ et $c'$ sont tous deux nuls, auquel cas il est indéterminé, $x$ et $y$ *étant arbitraires.*

**336. Résumé.** — Les résultats précédents se résument donc :

Système : $ax + by + c = 0; \quad a'x + b'y + c' = 0$

| | | |
|---|---|---|
| 1° $ab' - ba' \neq 0$.......... | *Solution unique* | $x = \dfrac{bc' - cb'}{ab' - ba'}$ ; $y = \dfrac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$ |
| 2° $ab' - ba' = 0; a \neq 0$... | $ac' - ca' \neq 0$ | : *Impossibilité* |
| | $ac' - ca' = 0$ | $y$ *arbitraire* ; $x = -\dfrac{b}{a}y - \dfrac{c}{a}$ |
| 3° $a = b = a' = b' = 0$.... | $c$ ou $c' \neq 0$ | : *Impossibilité* |
| | $c = c' = 0$ | : $x$ et $y$ *arbitraires.* |

Remarques. — 1° L'expression $ab' - ba'$, appelée *déterminant* du système, se représente par le symbole $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$. Donc le tableau ci-dessus montre que :

***Pour qu'un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues ait une solution unique, il faut et il suffit que le déterminant des coefficients des inconnues soit différent de zéro.***

2° On peut écrire : $x = \dfrac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ ; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$

Le numérateur de $x$ se déduit de son dénominateur en permutant circulairement les lettres $a$, $b$, $c$ (remplacer $a$ par $b$, $b$ par $c$ et $c$ par $a$). De même, le numérateur de $y$ se déduit de son dénominateur en permutant circulairement les lettres $c$, $b$, $a$.

**337. Résolution graphique.** — Supposons tracées dans un même repère $xOy$ (fig. 149) les droites $\Delta$ et $\Delta'$ d'équations respectives :

$$ax + by + c = 0 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad a'x + b'y + c' = 0 \quad (2)$$

Toute solution $(x, y)$ de la première correspond à un point de $\Delta$, tandis que toute solution de la seconde correspond à un point de $\Delta'$. Par suite :

***Toute solution $(x, y)$ du système formé par les équations des droites $\Delta$ et $\Delta'$ correspond à un point $M(x, y)$ commun à $\Delta$ et $\Delta'$.***

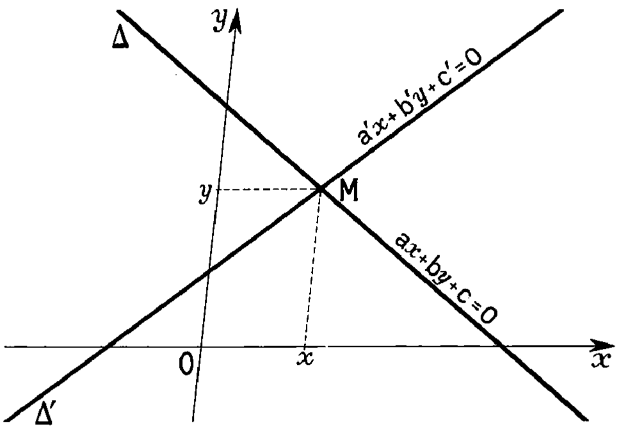



Fig. 149.

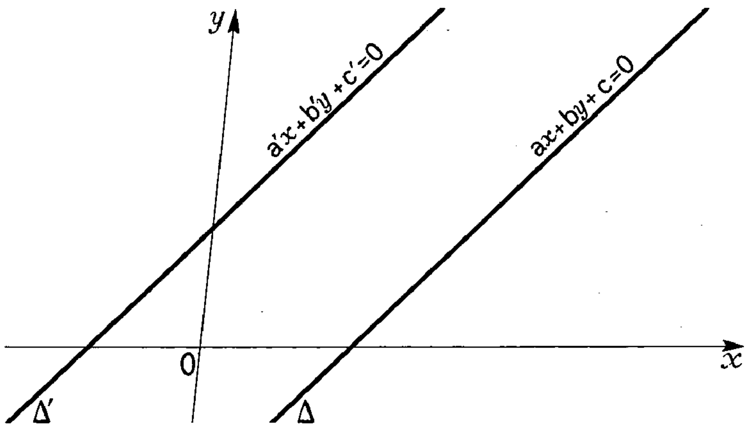



Fig. 150.

Or les droites $\Delta$ et $\Delta'$ ont pour coefficients directeurs respectifs $-\dfrac{a}{b}$ et $-\dfrac{a'}{b'}$, et pour ordonnée à l'origine $-\dfrac{c}{b}$ et $-\dfrac{c'}{b'}$ (n° 94). Elle sont donc concourantes pour $\dfrac{a'}{b} \neq \dfrac{b'}{b}$ (fig. 149), parallèles pour $\dfrac{a'}{b} = \dfrac{b'}{b} \neq \dfrac{c'}{c}$ (fig. 150), confondus pour $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}\cdot$ D'où les résultats qui confirment ceux du tableau précèdent pour des valeurs non nulles des coefficients.

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{a'}{a} \neq \dfrac{b'}{b}$ | $\Longleftrightarrow$ $\Delta$ et $\Delta'$ sont concourantes : | *Solution unique.* |
| $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} \neq \dfrac{c'}{c}$ | $\Longleftrightarrow$ $\Delta$ et $\Delta'$ sont parallèles : | *Système impossible.* |
| $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$ | $\Longleftrightarrow$ $\Delta$ et $\Delta'$ sont confondues : | *Système indéterminé.* |

### 338. Systèmes paramétriques.

1° EXEMPLE. — *Résoudre et discuter le système :*

$$\left\{\begin{array}{l} mx + y = 2\,m \\ x + my = m + 1. \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} m \\ -1 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{r} -1 \\ m \end{array}\right.$$

Le déterminant des coefficients des inconnues est égal à $m^2 - 1$ soit à $(m - 1)(m + 1)$. Il s'annule pour $m = 1$ et $m = -1$.

1° $m \neq 1$ et $m \neq -1$. On obtient par combinaison linéaire :

$$(m^2 - 1)\,x = 2\,m^2 - m - 1 \Longleftrightarrow (m^2 - 1)\,x = (2\,m + 1)(m - 1)$$

et

$$(m^2 - 1)\,y = m^2 - m \Longleftrightarrow (m^2 - 1)\,y = m\,(m - 1).$$

Comme $m - 1$ n'est pas nul, on peut simplifier par $m - 1$ :

$$(m + 1)\,x = 2\,m + 1 \qquad \text{et} \qquad (m + 1)\,y = m$$

soit

$$\boxed{x = \frac{2m + 1}{m + 1} \quad \Bigg| \quad y = \frac{m}{m + 1}}$$

2° $m = 1$. Les deux équations du système se réduisent à :

$$x + y = 2.$$

On peut se donner $x$ et calculer $y$. Pour plus de symétrie posons : $x - y = 2\,\lambda$. On obtient .

$$\boxed{x = 1 + \lambda \quad \Big| \quad y = 1 - \lambda} \quad (\lambda \text{ arbitraire})$$

3° $m = -1$. Le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x - y = 2 \\ x - y = 0. \end{array}\right.$

Il est manifestement *impossible*.

2° EXEMPLE. — *Résoudre et discuter le système :*

$$\left\{\begin{array}{l} x - y = a - b \\ ax + by = a^2 - ab + b^2 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} b \\ 1 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} -a \\ 1 \end{array}\right.$$

Le déterminant des coefficients des inconnues est égal à : $a + b$.

1° $a + b \neq 0$. Par combinaison linéaire on obtient :

$$(a + b)\,x = a^2 \quad \text{et} \quad (a + b)\,y = b^2$$

d'où la solution :

$$\boxed{x = \frac{a^2}{a + b} \quad \Bigg| \quad y = \frac{b^2}{a + b}}$$

2° $a + b = 0 \Longleftrightarrow b = -a$ et le système se réduit à :

$$\left\{\begin{array}{l} x - y = 2\,a \\ a\,(x - y) = 3\,a^2. \end{array}\right.$$

En éliminant $x - y$, on obtient : $2\,a^2 = 3\,a^2$.

*a)* $a = -b \neq 0$. Système *impossible*.

*b)* $a = b = 0$. Le système se réduit à la seule équation : $x - y = 0$. Il est vérifié pour :

$$x = y = \lambda \text{ arbitraire.}$$

**339. Système de trois équations à trois inconnues.** — Montrons sur un exemple comment on peut procéder à la résolution d'un tel système :

EXEMPLE. — *Résoudre le système :*

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{ll} x - 2y + 3z - 5 = 0 & (1)\\ 2x - 5y + 4z - 3 = 0 & (2)\\ 3x - 4y + 2z - 7 = 0. & (3)\end{array}\right.$$

***1re méthode.*** — L'équation (1) équivaut à :

$$x = 2y - 3z + 5. \qquad (4)$$

Toute solution du système (I) donne donc même valeur numérique à $x$ et à $2y - 3z + 5$. Cette solution vérifiant les équations (2) et (3), elle vérifie également :

$$\left\{\begin{array}{l} 2(2y - 3z + 5) - 5y + 4z - 3 = 0\\ 3(2y - 3z + 5) - 4y + 2z - 7 = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y + 2z - 7 = 0 & (5)\\ 2y - 7z + 8 = 0 & (6)\end{array}\right.$$

Or les équations (5) et (6) forment un système de deux équations en $y$ et $z$ admettant la solution : $y = 3$; $z = 2$. D'après l'équation (4) : $x = 5$.

Le système de valeurs : $x = 5$; $y = 3$; $z = 2$ est donc le seul qui soit acceptable. On vérifie aisément qu'il constitue effectivement une solution du système I.

***2o méthode.*** — Nous pouvons résoudre par rapport à $x$ et $y$ le système formé par les équations (1) et (2). Nous obtenons en éliminant successivement $y$ et $x$ :

$$\left\{\begin{array}{l} x + 7z - 19 = 0\\ y + 2z - \phantom{1}7 = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = 19 - 7z & (7)\\ y = \phantom{1}7 - 2z. & (8)\end{array}\right.$$

Toute solution du système (I) donne donc même valeur numérique à $x$ et à $19 - 7z$ et même valeur numérique à $y$ et à $7 - 2z$.

Comme cette solution vérifie l'équation (3), elle vérifie également :

$$3(19 - 7z) - 4(7 - 2z) + 2z - 7 = 0. \qquad (9)$$

Cette dernière qui s'écrit : $-11z + 22 = 0$ montre que pour toute solution du système, on a : $z = 2$ et d'après les relations (7) et (8) : $x = 5$ et $y = 3$.

On retrouve ainsi la solution unique précédente.

**340. Généralisation.** — Les méthodes précédentes permettent de résoudre un système de $n$ équations du premier degré à $n$ inconnues.

1o *En éliminant une inconnue entre l'une des équations et chacune des* (n — 1) *autres on obtient un système de* (n — 1) *équations à* (n — 1) *inconnues.*

En répétant cette opération on peut en général déterminer la valeur de la dernière inconnue conservée et en déduire la valeur de chacune des autres.

2o *On peut aussi résoudre* p *équations par rapport à* p *inconnues. En portant les valeurs trouvées dans les* (n — p) *autres équations on se ramène un système de* (n — p) *équations à* (n — p) *inconnues.*

Comme dans l'exemple ci-dessus on vérifie que :

***Un système de n équations du 1er degré à n inconnues admet en général, une solution unique.***

Toutefois, il peut arriver qu'un tel système soit impossible ou indéterminé.

**341. Autres procédés.** — Il est parfois possible d'employer des procédés plus rapides ou plus élégants que les précédents.

On peut, par exemple, utiliser une ou plusieurs combinaisons linéaires des équations du système ou bien introduire une inconnue auxiliaire. Cela est surtout indiqué lorsque le système présente une certaine symétrie qu'il est bon de conserver dans sa résolution.

**342. Exemples.** — 1° *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4a & (1) \\ x + 2y + z = 4b & (2) \\ x + y + 2z = 4c. & (3) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les équations, on obtient :

$$4x + 4y + 4z = 4a + 4b + 4c \qquad x + y + z = a + b + c \qquad (4)$$

En retranchant membre à membre l'équation (4) de chacune des équations du système proposé, on trouve immédiatement :

$$x = 3a - b - c; \quad y = 3b - c - a; \quad z = 3c - a - b.$$

2° *Résoudre le système :* $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{13} & (1)\,(2) \\ 3x + 4y - 2z = 51. & (3) \end{cases}$

Les inconnues sont proportionnelles à des nombres connus. On pourrait facilement exprimer $y$ et $z$ en fonction de $x$, mais il est plus symétrique de désigner par $t$ la valeur des rapports égaux des équations (1) et (2). On obtient :

$$x = 5t; \quad y = 7t \quad \text{et} \quad z = 13t.$$

L'équation (3) s'écrit alors : $15t + 28t - 26t = 51$ et donne $t = 3$.

D'où : $\qquad x = 15; \quad y = 21 \quad \text{et} \quad z = 39.$

— Remarquons que l'on peut utiliser les propriétés des rapports égaux et écrire :

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{13} = \frac{3x + 4y - 2z}{3 \times 5 + 4 \times 7 - 2 \times 13} = 3 \quad (= t).$$

Mais cette seconde méthode exige que les coefficients de $x$, $y$, $z$ dans les rapports égaux soient égaux à $\pm 1$ et ne s'étendrait pas facilement, comme la première, au système :

$$\frac{2x - 7}{3} = \frac{3y + 1}{2} = \frac{6z - 1}{7}; \qquad 3x + 2y - z = 61.$$

**343. Systèmes contenant plus d'équations que d'inconnues.** — Considérons le système de trois équations à deux inconnues :

$$(\mathrm{I}) \left| \begin{array}{ll} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \\ a''x + b''y + c'' = 0. & (3) \end{array} \right.$$

On peut, en général, résoudre le système formé par deux de ces équations, par exemple (1) et (2) en supposant : $ab' - ba' \neq 0$. Pour que le système (I) admette une solution, il faut et il suffit que la solution des équations (1) et (2) :

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} \qquad (4)\,(5)$$

vérifie l'équation (3), donc que l'on ait :

$$a''\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} + b''\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + c'' = 0$$

soit :

$$\underline{a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - ba') = 0,} \qquad (6)$$

En général cette relation n'est pas vérifiée et le *système est impossible*. Si cette relation (dite relation de *compatibilité*) est vérifiée, les équations du système proposé sont compatibles et admettent la solution donnée par les formules (4) et (5). Notons que ceci a lieu lorsque l'une des équations est une combinaison linéaire des deux autres. Plus généralement :

***Un système admettant plus d'équations que d'inconnues est en général impossible.***

S'il y a $p$ équations à $n$ inconnues avec $p > n$, on pourra en général résoudre le système formé par $n$ de ces équations. En portant les valeurs ainsi obtenues des inconnues, dans les $p - n$ autres équations, on obtiendra $p - n$ conditions de compatibilité analogues à la condition (6). Si toutes ces conditions sont vérifiées, le système admet la solution trouvée, sinon il est impossible.

**344. Systèmes admettant plus d'inconnues que d'équations.** — Considérons le système de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. & (2) \end{cases}$$

Si $ab' - ba'$ est différent de zéro, on peut considérer ce système, comme un système en $x$ et $y$, la lettre $z$ jouant le rôle de paramètre. La solution se déduit des formules de Cramer (nº 213) en remplaçant respectivement $c$ et $c'$ par $cz + d$ et $c'z + d'$. On obtient :

$$x = \frac{(bc' - cb')\,z + bd' - db'}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{(ca' - ac')\,z + da' - ad'}{ab' - ba'}.$$

A toute valeur de $z$ correspond une solution du système proposé. Plus généralement

***Un système admettant plus d'inconnues que d'équations est en général indéterminé.***

S'il y a $p$ équations à $n$ inconnues avec $n > p$, on pourra en général résoudre le système, et exprimer $p$ inconnues en fonction paramétrique des $n - p$ autres. Les valeurs de ces $n - p$ inconnues étant arbitraires, on dit que la *solution dépend de $n - p$ paramètres* ou que le *système est indéterminé d'ordre $n - p$*.

**345. Équations homogènes.** — Une équation homogène du premier degré est de la forme : $ax + by + cz + dt = 0$.

Ne contenant pas de terme constant, elle est homogène par rapport à l'ensemble des inconnues qui y figurent.

1° ***Deux équations homogènes à trois inconnues.*** — Soit le système :

$$\text{(I)} \begin{cases} ax + by + cz = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c'z = 0. & (2) \end{cases}$$

Si $ab' - ba'$ n'est pas nul, on peut résoudre ce système par rapport à $x$ et $y$, en considérant $z$ comme paramètre. La solution, qui se déduit des formules de Cramer (n° 333) en remplaçant $c$ et $c'$ respectivement par $cz$ et $c'z$, s'écrit :

$$x = \frac{(bc' - cb')\, z}{ab' - ba'}; \quad y = \frac{(ca' - ac')\, z}{ab' - ba'}$$

ce qui implique :
$$\frac{x}{bc' - cb'} = \frac{y}{ca' - ac'} = \frac{z}{ab' - ba'} \; (= t).$$

En désignant par $t$ la valeur commune des rapports précédents la solution du système (I) s'écrit en fonction du paramètre arbitraire $t \in \mathrm{R}$ :

$$\boxed{x = (bc' - cb')\, t; \quad y = (ca' - ac')\, t; \quad z = (ab' - ba')\, t.} \qquad (4)$$

La solution est donc formée de nombres proportionnels aux trois quantités :

$$bc' - cb'; \quad ca' - ac' \quad \text{et} \quad ab' - ba'.$$

Si ces trois quantités sont nulles les équations (1) et (2) se ramènent à une seule. Deux inconnues sont arbitraires.

2° ***Trois équations homogènes à trois inconnues.***

$$\text{(II)} \begin{cases} ax + by + cz = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c'z = 0 & (2) \\ a''x + b''y + c''z = 0 & (3) \end{cases}$$

$x$, $y$ et $z$ vérifiant (1) et (2), sont de la forme (4) trouvée ci-dessus. En portant ces valeurs dans l'équation (3) on a :

$$[a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - ba')]\, t = 0. \qquad (5)$$

Posons : $\quad \Delta = a''(bc' - b'c) + b''(ca' - c'a) + c''(ab' - a'b)$

*a*) Si l'expression $\Delta$ n'est pas nulle, l'équation (5) donne $t = 0$. Le système (II) admet la solution unique, d'ailleurs évidente :

$$x = y = z = 0.$$

*b*) Si $\Delta = 0$, le système admet la solution (4) ci-dessus dépendant du paramètre arbitraire $t$. Cette condition de compatibilité $\Delta = 0$ des équations homogènes (1), (2) et (3) n'est autre que la condition (6) du n° 303 car pour $z \neq 0$ le système (II) est un système de trois équations par rapport aux deux inconnues $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$.

**346. Interprétation vectorielle d'un système homogène.** — Considérons (fig. 151) dans l'espace rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, les vecteurs non nuls $\overrightarrow{OA}(a, b, c)$, $\overrightarrow{OA}'(a', b', c')$, $\overrightarrow{OA}''(a'', b'', c'')$ et $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$. On voit ainsi en utilisant l'expression analytique du produit scalaire, que :

$$ax + by + cz = 0 \iff \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \iff \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OA} \qquad (1)$$
$$a'x + b'y + c'z = 0 \iff \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \iff \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OA'} \qquad (2)$$
$$a''x + b''y + c''z = 0 \iff \overrightarrow{OA''} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \iff \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OA''} \qquad (3)$$

1° Résoudre le système (1) (2) revient à chercher les composantes $x$, $y$, $z$ de tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$, donc porté par la droite O$\lambda$ perpendiculaire en O au plan OAA′. Le vecteur

$$\overrightarrow{OR}(bc' - b'c,\ ac' - c'a,\ ab' - a'b)$$

répond à la question car $\overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OA'} = 0$. Il en résulte que $\overrightarrow{OM} = t\ \overrightarrow{OR}$ où $t$ désigne un paramètre arbitraire. On retrouve la solution (4) du paragraphe précédent.

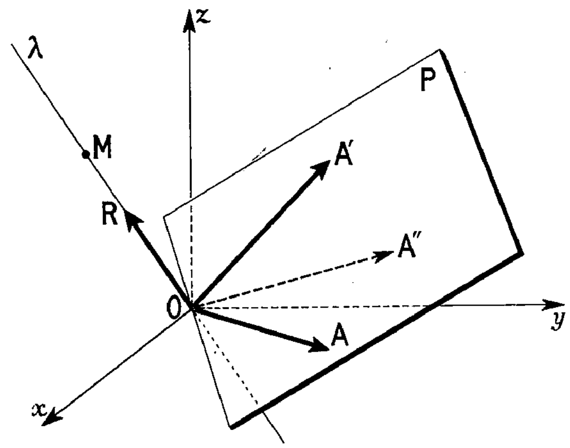



Fig. 151.

2° Si on adjoint l'équation (3) au système (1) (2), il nous faut trouver $\overrightarrow{OM}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OA''}$. Ceci n'est possible que si $\overrightarrow{OA''}$ est dans le plan OAA′, c'est-à-dire si $\overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OA''} = 0$. On retrouve la condition de compatibilité :

$$\Delta = a''(bc' - b'c) + b''(ca' - c'a) + c''(ab' - a'b) = 0.$$

Si elle est vérifiée, toute solution du système (1) (2) est solution du système (1) (2) (3).

## EXERCICES

— Résoudre et discuter les systèmes d'équations en $x$ et $y$ suivants :

**1071.** $\begin{cases} mx - (m+2)y + m - 2 = 0 \\ (3m-2)x - (5m-2)y - (7m-6) = 0. \end{cases}$

**1072.** $\begin{cases} m^2x + y = 1 \\ x + m^2y = m. \end{cases}$

**1073.** $\begin{cases} mx + (m+1)y = 4m \\ (m-1)x - 3my = 2m - 3. \end{cases}$

**1074.** $\begin{cases} ax + (2a+1)y = 3a \\ (2a+1)x + ay = 3a + 2. \end{cases}$

**1075.** $\begin{cases} (2m-3)x - my = 3m - 2 \\ 5x - (2m+3)y = 5. \end{cases}$

**1076.** $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ ax + by + 1 = 0. \end{cases}$

**1077.** $\begin{cases} 2mx + (m+1)y = 2 \\ (m+2)x + (2m+1)y = m + 2. \end{cases}$

**1078.** $\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = a \\ (a^2-b^2)x + (a^2+b^2)y = a^2 \end{cases}$

**1079.** $\begin{cases} x - (m-1)y = 0 \\ (m-1)x - y = m. \end{cases}$

**1080.** $\begin{cases} (m-1)x + (m-2)y = m \\ 2(m-1)x + 3(m-2)y = 3. \end{cases}$

**1081.** $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = 1 + m^2. \end{cases}$

**1082.** $\begin{cases} mx + (m-1)y = 2m - 1 \\ 2mx + 3(m-1)y = 5m - 3. \end{cases}$

**1083.** $\begin{cases} (m+2)x + my = 1 \\ -3x + (m-2)y = -1. \end{cases}$

**1084.** $\begin{cases} mx + 2(m+1)y = m + 2 \\ (m+1)x + (m+7)y = m + 5. \end{cases}$

**1085.** $\begin{cases} ax - by = a^2 - b^2 \\ -bx + ay = 2ab. \end{cases}$

— Calculer $x$ et $y$ en fonction du paramètre $t$ dans les systèmes suivants :

**1086.** $\begin{cases} ax \sin t - by \cos t = c^2 \sin 2t \\ ax \cos t + by \sin t = 2c^2 \cos 2t. \end{cases}$

**1087.** $\begin{cases} x(1 - \cos t) + y \sin t = at(1 - \cos t) \\ x \sin t + y \cos t = a(1 - \cos t + t \sin t). \end{cases}$

**1088.** $\begin{cases} x \sin t - y \cos t + a \cos 2t = 0 \\ x \cos t + y \sin t - 2a \sin 2t = 0. \end{cases}$

**1089.** $\begin{cases} x \cos \dfrac{t}{2} - y \sin \dfrac{t}{2} = \cos \dfrac{3t}{2} \\ x \sin \dfrac{t}{2} + y \cos \dfrac{t}{2} = 3 \sin \dfrac{3t}{2}. \end{cases}$

**1090.** $\begin{cases} (x - Rt) \cos t - (y - R) \sin t = 0 \\ (x - Rt) \sin t + (y - R) \cos t + R \cos t = 0. \end{cases}$

**1091.** $\begin{cases} x \cos t + y \sin t - \cos^3 t = 0 \\ x \sin t - y \cos t + 3 \cos^2 t \sin t = 0. \end{cases}$

— Résoudre et discuter les systèmes en $x$, $y$ et $z$ suivants :

**1092.** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (b+c)\,x + (c+a)\,y + (a+b)\,z = 0 \\ bcx + cay + abz = d^3. \end{cases}$

**1093.** $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ x - y + z = 3. \end{cases}$

**1094.** $\begin{cases} mx + y + z = m \\ x + my + z = m - 3 \\ x + y + mz = 3 - 2m. \end{cases}$

**1095.** $\begin{cases} 3x + y + z = a \\ x + 3y + z = b \\ x + y + 3z = c. \end{cases}$

**1096.** $\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2 \\ bx + cy + az = ab + bc + ca. \end{cases}$

**1097.** $\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^2 \\ x + by + b^2 z = b^2 \\ x + cy + c^2 z = c^2. \end{cases}$

**1098.** $\begin{cases} y + mz = a \\ z + mx = b \\ x + my = b. \end{cases}$

**1099.** $\begin{cases} x + ay + bcz + a^2 = 0 \\ x + by + caz + b^2 = 0 \\ x + cy + abz + c^2 = 0. \end{cases}$

**1100.** $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + z = m^2. \end{cases}$

**1101.** $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1. \end{cases}$

**1102.** $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ (a+b)\,x - (a+c)\,y + (b+c)\,z = 0 \\ abx - acy + bcz = 0. \end{cases}$

**1103.** $\begin{cases} x + y + z + a\,(x + y) + a^2 x = a^3 \\ x + y + z + b\,(x + y) + b^2 x = b^3 \\ x + y + z + c\,(x + y) + c^2 x = c^3. \end{cases}$

**1104.** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \dfrac{a^2 x}{a - d} + \dfrac{b^2 y}{b - d} + \dfrac{c^2 z}{c - d} = 0 \\ \dfrac{ax}{a - d} + \dfrac{by}{b - d} + \dfrac{cz}{c - d} = d(a - b)(b - c)(c - a). \end{cases}$

**1105.** $\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ x + cy + c^2 z = c^3. \end{cases}$

**1106.** $\begin{cases} x + ay + a^2 z + a^4 = 0 \\ x + by + b^2 z + b^4 = 0 \\ x + cy + c^2 z + c^4 = 0. \end{cases}$

**1107.** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ bcx + cay + abz = 1. \end{cases}$

**1108.** $\begin{cases} a^3 x + a^2 y + az + 1 = 0 \\ b^3 x + b^2 y + bz + 1 = 0 \\ c^3 x + c^2 y + cz + 1 = 0. \end{cases}$

**1109.** $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = 0 \\ a^3 x + b^3 y + c^3 z = a^3 (b - c) + b^3 (c - a) + c^3 (a - b). \end{cases}$

— Résoudre et discuter les systèmes en $x$, $y$, $z$, $t$ suivants :

**1110.** $\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m^2 \\ x + y + z + mt = m^3. \end{cases}$

**1111.** $\begin{cases} x + ay + a^2 z + a^3 t + a^4 = 0 \\ x + by + b^2 z + b^3 t + b^4 = 0 \\ x + cy + c^2 z + c^3 t + c^4 = 0 \\ x + dy + d^2 z + d^3 t + d^4 = 0. \end{cases}$

— Déterminer $m$ pour que les équations des systèmes suivants soient compatibles :

**1112.** $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = 1 \\ mx - (m-1)y = 2m + 1. \end{cases}$

**1113.** $\begin{cases} (m-1)x + y = 1 \\ x + (m-1)y = 2 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

**1114.** $\begin{cases} x - 1 = \dfrac{y-2}{2} = z + m \\ 2x + y + 2z = m \\ x + y + z = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

**1115.** $\begin{cases} x = y - 1 = m - z \\ x - y - z = - m \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$

**1116.** $\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x - y + z = 6m \\ x + y - z = 0 \\ x + y + z = 5(1+m). \end{cases}$

**1117.** $\begin{cases} mx - y + z = 3 \\ x + my - z = m + 1 \\ -x + y + mz = 5m \\ x - my = 1 - 3m. \end{cases}$

— Résoudre les systèmes suivants :

**1118.** $\begin{cases} 2(x-5)^2 + 4(y+1)^2 = 44 \\ 3(x-5)^2 - 2(y+1)^2 = -6. \end{cases}$

**1119.** $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{7}{y} = -55 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 18. \end{cases}$

**1120.** $\begin{cases} 5\sqrt{x-1} + 3\sqrt{y+2} = 19 \\ 7\sqrt{x-1} - 11\sqrt{y-2} = -19. \end{cases}$

**1121.** $\begin{cases} 5(2x-1)^3 + 2(y-3)^3 = 14 \\ 3(2x-1)^3 + (y-3)^3 = 3. \end{cases}$

**1122.** $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y} - \dfrac{3}{z} = 34 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{y} + \dfrac{1}{z} = 3 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{2}{z} = 22. \end{cases}$

**1123.** $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 14 \\ 2(x-1)^2 - (y+1)^2 + z^2 = 7 \\ 3(x-1)^2 - (y+1)^2 - z^2 = -10. \end{cases}$

— Résoudre les systèmes suivants :

**1124.** $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

**1125.** $\begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0. \end{cases}$

**1126.** $\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

**1127.** $\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x + y - z = 3. \end{cases}$

**1128.** On donne le système en $x$ et $y$ suivant :

$$\begin{cases} mx + (m+1)y = 2m - 1 \\ (3-m)x + (6-2m)y = m + 1. \end{cases}$$

1° Résoudre et discuter ce système.

2° Calculer $x$ et $y$ à moins de 0,001 près lorsque : $m = \pi = 3{,}14\,159\,265\ldots$

3° Indiquer sur quelle approximation on peut compter lorsqu'on remplace $\pi$ par 3,142.

**1129.** On considère dans le plan rapporté au repère $xOy$ les vecteurs non nuls $\overrightarrow{OA}$ $(a, a')$, $\overrightarrow{OB}$ $(b, b')$ et $\overrightarrow{OC}$ $(c, c')$.

1° Montrer que la décomposition de $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sous la forme : $x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ équivaut à la résolution du système :

$$ax + by = c; \qquad a'x + b'y = c'.$$

2° Discuter le problème suivant que les directions OA et OB sont distinctes, confondues mais distinctes de OC, et confondues avec la direction OC.

**1130.** On considère dans l'espace rapporté au repère orthonormé $Oxyz$ les vecteurs non nuls $\overrightarrow{OA}\,(a, a', a'')$, $\overrightarrow{OB}\,(b, b', b'')$, $\overrightarrow{OC}\,(c, c', c'')$ et $\overrightarrow{OD}\,(d, d', d'')$.

1° Montrer que si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas dans un même plan il existe 3 nombres $x$, $y$, $z$ tels que : $x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + z\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$. (1)

2° Établir que le vecteur $\overrightarrow{OS}\,(a'b'' - a''b', \quad a''b - ab'', \quad ab' - a'b)$ est perpendiculaire au plan OAB. On suppose $\overrightarrow{OS}.\overrightarrow{OC} = 0$ et $\overrightarrow{OS}.\overrightarrow{OD} \neq 0$. Montrer que l'équation vectorielle (1) est impossible.

3° Si $\overrightarrow{OS}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OS}.\overrightarrow{OD} = 0$, montrer que l'on peut trouver une solution de l'équation (1) dans laquelle $z = \lambda$ (paramètre arbitraire $\in$ R).

**1131.** On considère le système en $x$, $y$, $z$ suivant :

$$\begin{cases} (a+1)\,x + y + z = a + 1 \\ x + (a+1)\,y + z = a + 3 \\ x + y + (a+1)\,z = -2\,a - 4. \end{cases}$$

1° Résoudre et discuter ce système (on pourra utiliser l'équation obtenue en ajoutant membre à membre les équations du système).

2° En supposant que ce système admette une solution unique, on assujettit $x$, $y$ et $z$ à vérifier la relation : $x^2 + y^2 + z^2 = k$ où $k$ est un nombre positif donné. Former et discuter l'équation du second degré qui donne les valeurs de $a$. Étudier le signe des valeurs correspondantes de $x$ lorsque $k$ varie.

# GÉNÉRALITÉS SUR LES INÉQUATIONS

**347. Inéquation à une inconnue.** — Soient deux fonctions réelles $u(x)$ et $v(x)$ de la variable réelle $x$, dont les domaines de définition sont respectivement $A \subseteq R$ et $B \subseteq R$ :

***Résoudre l'inéquation*** $u(x) > v(x)$ ***c'est déterminer l'ensemble*** S ***des réels*** $x$ ***tels que la valeur numérique de la fonction*** $u(x)$ ***soit supérieure à celle de la fonction*** $v(x)$

La variable $x$ est l'*inconnue* de l'inéquation, $u(x)$ et $v(x)$ en sont les *deux membres*. Tout $x \in S$ est une *solution* de l'inéquation. Nécessairement : $S \subseteq A \cap B$. Si $S = \varnothing$, l'inéquation est *impossible*. Si $S = A \cap B$, l'inéquation est vérifiée pour toute valeur de $x$ pour laquelle $u(x)$ et $v(x)$ sont définies.

On écrit : $]?\, x \in R$ tel que $u(x) > v(x)$.

De même : $]?\, x \in R$ tel que $v(x) < v(x)$.

**348. Inéquation à plusieurs inconnues.** — Les définitions précédentes s'étendent au cas où $u$ et $v$ sont des fonctions réelles de plusieurs variables réelles. Ainsi :

***Résoudre l'inéquation*** $u(x, y) > v(x, y)$ ***c'est déterminer l'ensemble*** S ***des éléments de*** $R^2$ ***tels que la valeur numérique de*** $u(x, y)$ ***soit supérieure à celle de*** $v(x, y)$.

EXEMPLE : $]?\, (x, y) \in R^2$ tel que $2x - 3y + 1 > 4x - y + 7$

$]?\, (x, y) \in R^2$ tel que $x^2 - 2xy + y^2 < 0$.

**349. Inéquations équivalentes.** — ***Deux inéquations sont équivalentes lorsque l'ensemble des solutions de l'une coïncide avec l'ensemble des solutions de l'autre.***

Deux inéquations équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles.

En particulier :

1° ***Les inéquations*** $u > v$ ***et*** $v < u$ ***sont équivalentes.***

En effet, si la valeur numérique de $u$ est supérieure à celle de $v$, cela implique que celle de $v$ soit inférieure à celle de $u$, et réciproquement.

2° ***Les inéquations*** $u > v$ ***et*** $u - v > 0$ ***sont équivalentes.***

En effet, toute solution de l'une donne à $u$ une valeur numérique supérieure à celle de $v$ et vérifie l'autre. Toute inéquation peut donc se ramener à l'une des formes :

$$u > v \quad (1) \qquad\qquad w > 0 \quad (2)$$

Si la fonction $w$ se réduit à un polynôme, l'inéquation est dite *entière* et le degré de $w$ est celui de l'inéquation. Si la fonction $w$ est une fonction trigonométrique l'inéquation est dite *trigonométrique*.

**350. Principes généraux de résolution.** — A, B, C désignant des fonctions de l'inconnue $x$ ou des inconnues $x$, $y$, $z$ :

1° ***Les inéquations*** $A > B$ ***et*** $A + C > B + C$ ***sont équivalentes à condition que l'intersection des domaines de définition des fonctions*** A ***et*** B ***soit inclus dans celui de la fonction*** C.

L'existence des valeurs numériques $a$ et $b$ de A et B entraîne alors l'existence de la valeur numérique $c$ de C et : $a > b \Longleftrightarrow a + c > b + c$.

Ainsi l'inéquation $A > B + C$ équivaut à $A - C > B + C - C$ donc à $A - C > B$, ce qui montre que, dans une inéquation, l'on peut transposer un terme d'un membre à l'autre.

2° ***L'inéquation*** $A > B$ ***est équivalente à l'inéquation*** $mA > mB$ ***ou à l'inéquation*** $mA < mB$ ***selon que le nombre réel*** $m$ ***est positif ou négatif :***

Toute solution de $A > B \Longleftrightarrow A - B > 0$ vérifie l'inéquation :

*a*) $m(A - B) > 0 \Longleftrightarrow mA - mB > 0 \Longleftrightarrow mA > mB \qquad$ si $m > 0$;

*b*) $m(A - B) < 0 \Longleftrightarrow mA - mB < 0 \Longleftrightarrow mA < mB \qquad$ si $m < 0$.

Il en résulte la possibilité de chasser les dénominateurs numériques d'une inéquation ou de simplifier les deux membres par un même facteur numérique. Ne pas oublier que :

$$A > B \iff -A < -B.$$

*Il faut changer le sens de l'inéquation lorsqu'on change le signe de chacun des deux membres.*

3° ***Si les fonctions*** A ***et*** B ***sont positives ou nulles, les inéquations*** $A > B$ ***et*** $A^2 > B^2$ ***sont équivalentes.***

Cela résulte de ce que deux nombres positifs ou nuls sont dans le même ordre de grandeur que leurs carrés et que leurs racines carrées arithmétiques.

***Si les fonctions*** A ***et*** B ***sont négatives ou nulles les inéquations*** $A > B$ ***et*** $A^2 < B^2$ ***sont équivalentes.***

En effet, $A > B \Longleftrightarrow -A < -B \Longleftrightarrow (-A)^2 < (-B)^2 \Longleftrightarrow A^2 < B^2$.

Notons d'autre part que l'inéquation $A > B$ est vérifiée pour $A > 0$ et $B \leqslant 0$, impossible pour $A \leqslant 0$ et $B > 0$.

4° ***Les inéquations*** $A > B$ ***et*** $A^3 > B^3$ ***sont toujours équivalentes.***

En effet l'identité :

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) = \frac{1}{4}(A - B)[3(A + B)^2 + (A - B)^2]$$

montre, puisque l'expression entre crochets est positive, que $A^3 - B^3$ a le même signe que $A - B$. Donc :

$$A - B > 0 \iff A^3 - B^3 > 0 \quad \text{ou} \quad A > B \iff A^3 > B^3.$$

**351. Remarques.** — Il résulte de ce qui précède que :

1° ***Il ne faut pas multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même facteur littéral de signe inconnu.***

L'inéquation $A > B$ n'est en effet équivalente à $AC > BC$ que si la fonction C est positive.

Ainsi $(m^2 + 1)(3x - 7) > 0$ équivaut à $3x - 7 > 0$ car $m^2 + 1$ est positif quel que soit $m$.
Mais $(m^2 - 1)(3x - 7) > 0$ équivaut à :

$$3x - 7 > 0 \text{ pour } m^2 - 1 > 0, \text{ c'est-à-dire pour } |m| > 1.$$

$$3x - 7 < 0 \text{ pour } m^2 - 1 < 0, \text{ c'est-à-dire pour } |m| < 1.$$

2° ***Il ne faut pas chasser des dénominateurs contenant l'inconnue.***

Nous verrons que la résolution de l'inéquation fractionnaire $\frac{A}{B} > 0$ se ramène pour $B \neq 0$ à celle de $\frac{A}{B} \cdot B^2 > 0$ soit à $AB > 0$.

3° On peut comme pour une équation (n° 320) effectuer un *changement d'inconnue,* en particulier lorsqu'on a affaire à une inéquation trigonométrique : $F(\sin x, \cos x) > 0$ (n° 279).

## INÉQUATION A UNE INCONNUE

**352. Inéquation du 1er degré à une inconnue.** — La marche à suivre, compte tenu des restrictions des nos précédents, est analogue à la résolution d'une équation du 1er degré. Toute inéquation du premier degré à une inconnue se ramène ainsi à l'une des deux formes :

$$ax + b > 0 \quad (1) \quad \text{ou} \quad ax + b < 0. \quad (2)$$

Comme la deuxième se ramène à la première en l'écrivant $-ax - b > 0$ nous étudierons seulement l'inéquation $ax + b > 0$ ou $ax > -b$.

1° $a$ ***positif*** : $ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$ (n° 350, 2°)

2° $a$ ***négatif*** : $ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$

3° $a = 0$. L'inéquation se réduit à : $x.0 > -b$. Cette inéquation est vérifiée pour tout $x$ si $b > 0$. Elle est impossible si $b \leqslant 0$.

Exemple. — *Résoudre l'inéquation :*

$$\frac{5x + 3}{4} - \frac{9x + 2}{5} < \frac{7 - 3x}{8}.$$

Supprimons les dénominateurs en multipliant les deux membres par 40 :

$$10(5x+3)-8(9x+2)<5(7-3x)$$

Soit en réduisant :

$$50x+30-72x-16<35-15x$$
$$50x-72x+15x<-30+16+35$$
$$-7x<21 \quad \text{ou} \quad 7x>-21 \quad (\text{n}^{\text{o}}\,350,\,2^{\text{o}})$$

On obtient : $x>-\dfrac{21}{7} \iff x>-3$ soit $x\in\,]-3,+\infty[$

**353. Interprétation graphique.** — Alors que les solutions d'une équation sont en général en nombre limité, celles d'une inéquation sont les nombres de un ou plusieurs intervalles. Afin de rendre plus apparents ces intervalles sur un axe, on hachure sur cet axe les portions dont les abscisses ne vérifient pas l'inéquation.

Ainsi marquons sur un axe $x'x$, le point A d'abscisse $-3$. Les points dont les abscisses sont solutions de l'exemple précédent (n° 352) sont les points, autres que A de la demi-droite $Ax$ (fig. 152). On couvre de hachures la demi-droite $Ax'$ car les abscisses des points de cette demi-droite ne vérifient pas l'inéquation donnée.


Fig. 152.

**354. Inéquation paramétrique.**

$\exists ?\, x\in \mathrm{R}$ tel que : $\dfrac{(m-1)}{3}x-\dfrac{m(x-2)}{6}>\dfrac{m+1}{2}$ (1) où $m$ est un paramètre réel.

L'inéquation (1) est équivalente aux suivantes :

$$2(m-1)x-m(x-2)>3(m+1)\iff 2mx-2x-mx+2m>3m+3$$
$$(m-2)x>m+3$$

1° Si $m>2$ : L'inéquation (1) $\iff x>\dfrac{m+3}{m-2}$.

2° Si $m<2$ : L'inéquation (1) $\iff x<\dfrac{m+3}{m-2}$.

3° Si $m=2$ : L'inéquation (1) se réduit à $0>5$. Inéquation impossible.

**355. Inéquations simultanées.** — Soient $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ des fonctions de la variable réelle $x$ dont les domaines de définitions sont respectivement $A\subseteq R$, $B\subseteq R$ et $C\subseteq R$.

***Résoudre le système d'inéquations simultanées*** $u(x)>0$, $v(x)>0$ et $w(x)>0$, ***c'est déterminer l'ensemble*** S ***des nombres réels*** $x$ ***qui vérifient séparément chacune des inéquations du système.***

Si nous désignons respectivement par $U\subseteq A$, $V\subseteq B$, $W\subseteq C$ l'ensemble des solutions de chacune de ces inéquations on obtient : $S=U\cap V\cap W$.

Exemple. — *Résoudre les inéquations simultanées*

$$\begin{cases} 3x-5<7x+3 \\ 4x-7<2+x. \end{cases}$$

La première inéquation donne : $-4x < 8$ soit $x > -2$
tandis que la seconde donne : $3x < 9$ soit $x < +3$

L'inconnue $x$ doit donc vérifier la double condition :

$$-2 < x < +3.$$

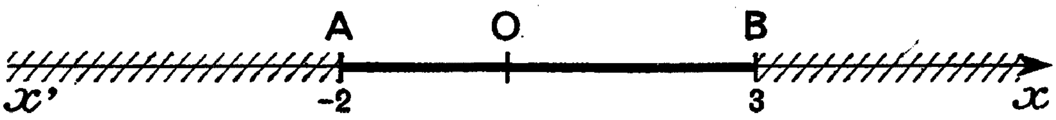



Fig. 153.

— Graphiquement (fig. 153), on hachure les portions d'un axe $x'x$ correspondant aux intervalles qui ne vérifient pas l'une ou l'autre des inéquations. Les intervalles non hachurés s'il en reste, correspondent aux solutions du système d'inéquations.

**356. Résolution graphique d'une inéquation.** — Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$ revient à déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles la fonction $f(x)$ est positive. Ce problème est immédiatement résolu lorsqu'on a construit la courbe $y = f(x)$ dans un repère $xOy$ et déterminé les abscisses des intersections de cette courbe avec l'axe $Ox$.

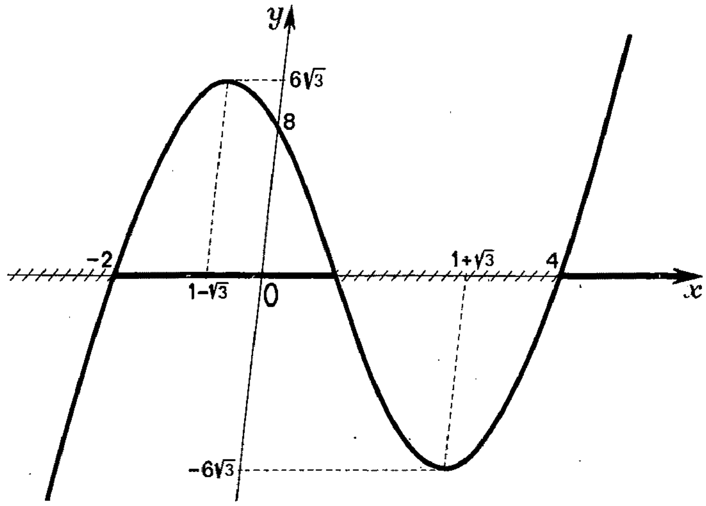



Fig. 154.

EXEMPLE. — *Résoudre l'inéquation* :

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 > 0.$$

La courbe $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ (fig. 154) admet deux sommets A $(1 - \sqrt{3},\ 6\sqrt{3})$ et B $(1 + \sqrt{3},\ -6\sqrt{3})$. Elle coupe l'axe $Ox$ aux points d'abscisses $x = -2$, $x = 1$ et $x = 4$. Elle est au-dessus de l'axe $Ox$ pour $x$ compris entre $-2$ et 1 et pour $x$ supérieur à 4. Donc :

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 > 0 \iff -2 < x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 4$$

## SIGNE DU BINÔME DU PREMIER DEGRÉ

**357. Définitions.** — ***Un binôme du premier degré en $x$ est un polynôme de la forme $ax + b$ dont les coefficients sont des nombres connus.***

Le coefficient $a$ est toujours supposé différent de zéro.

EXEMPLES : $+2x - 5$; $-3x + 7$; $-4x$.

***La racine du binôme $ax + b$ est la valeur $x'$ de $x$ pour laquelle ce binôme est nul.***

Donc : $ax' + b = 0 \iff \boxed{x' = -\dfrac{b}{a}.}$

**358. Règle.** — ***Le binôme $ax + b$ est du signe du coefficient $a$ pour les valeurs de $x$ supérieures à sa racine, du signe opposé pour les valeurs de $x$ inférieures à sa racine.***

En effet le binôme $ax + b$, s'écrit, puisque $x' = -\frac{b}{a}$

$$ax + b \equiv a\left(x + \frac{b}{a}\right) \equiv a(x - x').$$

Il en résulte que le produit $a(x - x')$ est :

1° du signe de $a$ lorsque $x - x'$ est positif donc pour $x > x'$.

2° du signe de $-a$ lorsque $x - x'$ est négatif donc pour $x < x'$.

En résumé :

| $x$ | $-\infty$ | | $-b/a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax + b$ | | *signe de* $-a$ | 0 | *signe de* $a$ | |

Ainsi :

$$3x - 4 \quad \text{est positif pour } x > \frac{4}{3}, \quad \text{négatif pour } x < \frac{4}{3}.$$

$$5 - 2x \quad \text{est négatif pour } x > \frac{5}{2}, \quad \text{positif pour } x < \frac{5}{2}.$$

**359. Signe d'un produit de facteurs du premier degré.** — On étudie suivant les valeurs de $x$, le signe de chaque facteur et on en déduit le signe du produit.

Exemple. — *Étudier le signe de* $A = (x - 4)(2x + 5)(x + 1)$.

Le facteur : $x - 4$ est nul pour : $x = 4$, positif pour $x > 4$ et négatif pour $x < 4$.

$2x + 5$ est nul pour : $x = -\frac{5}{2}$, positif pour $x > -\frac{5}{2}$ et négatif pour $x < -\frac{5}{2}$.

$x + 1$ est nul pour : $x = -1$, positif pour $x > -1$ et négatif pour $x < -1$.

Le produit A est nul pour $x = -\frac{5}{2}$, $-1$ et $+4$. On construit le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-5/2$ | | $-1$ | | $+4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $2x + 5$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x + 1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| A | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

On inscrit sur la première ligne les valeurs remarquables de $x$, racines des différents facteurs, rangées par ordre croissant. Sur les lignes suivantes on inscrit dans chaque intervalle le signe de chacun des facteurs pris isolément. On en déduit sur la dernière ligne les résultats relatifs au produit A.

**360. Signe d'une fraction rationnelle.** — Le signe d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$, définie et non nulle, est celui du produit A.B. Si A et B sont décomposés en facteurs du premier degré, on est ramené à l'étude d'un produit de facteurs.

EXEMPLE. — La fraction rationnelle $A = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 4} = \frac{x(3x-4)}{(x+2)(x-2)}$ s'annule pour $x = 0$ ou pour $x = \frac{4}{3}$. Elle n'est pas définie pour $x = \pm 2$. A l'exception de ces valeurs de $x$, la fraction A est du signe de :

$$x(3x-4)(x-2)(x+2)$$

Ce produit qui change de signe pour les valeurs précédentes est visiblement positif pour $x > 2$ On en déduit :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\frac{4}{3}$ | | $+2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

(Le double trait vertical pour $x = -2$ et $+2$ indique que pour ces valeurs la fraction A n'est pas définie).

**361. Applications aux inéquations entières ou rationnelles.**

1° Toute inéquation entière peut se ramener à la forme $P(x) > 0$. Si on sait décomposer le polynôme $P(x)$ en facteurs du premier degré, on peut étudier le signe de $P(x)$ et résoudre l'inéquation.

D'après les résultats de l'exemple n° 359 on voit ainsi que :

$(x-4)(2x+5)(x+1) > 0$ est vérifiée pour $-\frac{5}{2} < x < -1$ ou pour $x > 4$.

2° Toute inéquation rationnelle peut se ramener à la forme $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ et sa résolution résulte de l'étude du signe de la fraction placée au premier membre.

EXEMPLE : *Résoudre l'inéquation :* $\frac{x+7}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} > 5.$

En réduisant tous les termes au même dénominateur on obtient l'inéquation équivalente :

$$\frac{(x+7)(x-2) + (x-3)(x+2) - 5(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} > 0.$$

Soit : $$\frac{-3x^2 + 4x}{(x+2)(x-2)} > 0 \iff \frac{x(3x-4)}{(x+2)(x-2)} < 0.$$

Le signe du premier membre a été étudié au n° 360. On voit que l'inéquation est vérifiée pour $-2 < x < 0$ ou pour $\frac{4}{3} < x < 2$.

# INÉQUATION A DEUX INCONNUES

**362. Résolution d'une inéquation à deux inconnues.** — Pour résoudre une inéquation à deux inconnues $u(x, y) > 0$, on peut considérer l'une des inconnues comme un paramètre dont on se donne la valeur et résoudre l'inéquation en fonction de l'autre inconnue.

EXEMPLE. — *Résoudre l'inéquation :* $xy - 2x + y - 5 < 0$ (1)

Si on se donne la valeur de $x$, on obtient l'inéquation en $y$ :

$$y(x + 1) < 2x + 5. \tag{2}$$

On voit que pour $x + 1 > 0$, donc pour $x > -1$, il faut prendre $y < \frac{2x + 5}{x + 1}$. Pour $x < -1$, il faut prendre au contraire $y > \frac{2x + 5}{x + 1}$.

Pour $x = -1$, l'inéquation se réduit $0 < +3$. Elle est vérifiée quel que soit $y$. D'où les solutions :

$$\begin{cases} x < -1 \\ y > \dfrac{2x + 5}{x + 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y \text{ arbitraire} \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -1 \\ y < \dfrac{2x + 5}{x + 1} \end{cases}$$

Cette méthode devient laborieuse pour des inéquations moins simples et sutout pour des inéquations simultanées à deux inconnues. C'est pourquoi, on préfère opérer graphiquement.

**363. Interprétation graphique d'une inéquation à deux inconnues.** — Dans le plan rapporté à un repère cartésien $xOy$, la courbe (C) d'équation $f(x, y) = 0$ sépare, dans le domaine de définition de la fonction $f(x, y)$, les régions où en tout point M $(x, y)$ la fonction $f(x, y)$ est positive et les régions où la fonction $f(x, y)$ est négative (n[os] 97, 146, 170). On peut ainsi déterminer l'ensemble S des points M $(x, y)$ dont les coordonnées vérifient par exemple l'inéquation $f(x, y) < 0$.

EXEMPLE. — *Interpréter graphiquement l'inéquation :* $xy - 2x + y - 5 < 0$.

La courbe $xy - 2x + y - 5 = 0$ est (fig. 155) une hyperbole (H) d'asymptotes $x = -1$ et $y = 2$. La fonction $f(x, y) = xy - 2x + y - 5$ est négative en O ($x = 0$, $y = 0$) point extérieur à (H). Cette expression est donc (n[o] 170) négative en tout point extérieur à (H), positive en tout point intérieur.

L'inéquation $xy - 2x + y - 5 < 0$ est vérifiée par les coordonnées de tout point extérieur à (H), ce qui est en accord avec les résultats du paragraphe précédent.

**364. Applications.** — En construisant dans un même repère $xOy$ les courbes d'équations $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ et $C(x, y) = 0$, on détermine dans le plan un certain nombre de régions. En tout point M $(x, y)$ de l'une de ces régions, chacune des fonctions A, B, C garde un signe déterminé et il en est de même des produits AB, BC, CA ou ABC. On pourra donc résoudre graphiquement par exemple, l'inéquation $ABC > 0$ ou le système d'inéquations simultanées $A > 0$, $B < 0$, $C > 0$.

**365. Exemple.** — *Résoudre graphiquement le système d'inéquations simultanées :*

$$x - y - 4 < 0; \quad y^2 - 2x < 0; \quad x^2 + y^2 - 8 > 0.$$

*et l'inéquation* $(x - y - 4)(y^2 - 2x)(x^2 + y^2 - 8) < 0$.

Construisons dans un repère orthonormé $xOy$, la droite $(\Delta)$, la parabole (P) et le cercle $(\Gamma)$ d'équations respectives :

$$x - y - 4 = 0; \quad y^2 - 2x = 0; \quad x^2 + y^2 - 8 = 0.$$

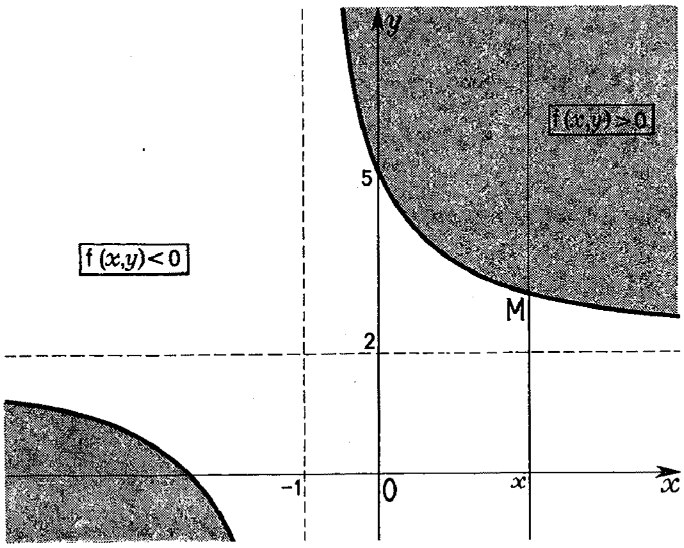



Fig. 155.

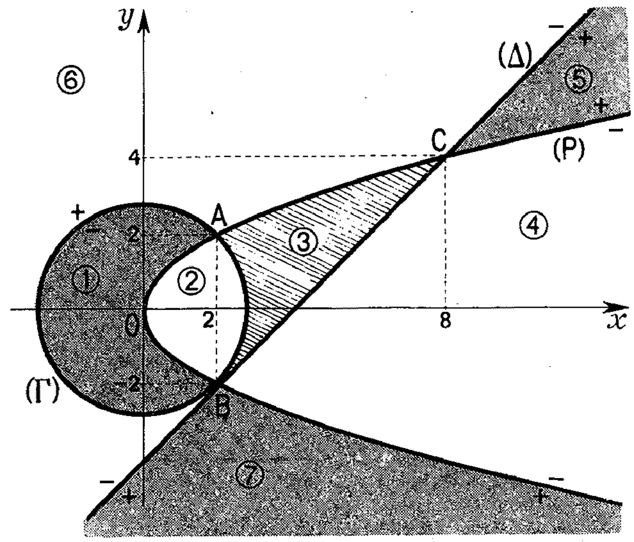



Fig. 156.

Ces trois courbes (fig 156) partagent le plan en sept régions numérotées sur la figure de (1) à (7).

L'expression $x - y - 4$ est positive au-dessous de $(\Delta)$, négative au-dessus, l'expression $y^2 - 2x$ est positive à l'extérieur de (P), négative à l'intérieur, tandis que $x^2 + y^2 - 8$ est positif à l'extérieur de $(\Gamma)$, négatif à l'intérieur.

1° *Le système* $x - y - 4 < 0$; $y^2 - 2x < 0$; $x^2 + y^2 - 8 > 0$ est vérifié par les seuls points de la région (3) située à la fois au-dessus de $(\Delta)$, à l'intérieur de (P) et à l'extérieur de $(\Gamma)$ : *triangle mixtiligne* ABC.

2° Le produit $(x - y - 4)(y^2 - 2x)(x^2 + y^2 - 8)$ est positif dans les régions impaires, négatif dans les régions paires. Par suite :

*L'inéquation* : $(x - y - 4)(y^2 - 2x)(x^2 + y^2 - 4) < 0$ est vérifiée en tout point M $(x, y)$ de l'ensemble des régions (2) (4) et (6),

## EXERCICES

— Résoudre et discuter les inéquations en $x$ suivantes :

**1132.** $(2m - 1)x + 1 > 3x + m^2$.

**1133.** $m^2 x + 1 < x(2m - 1) + m$.

**1134.** $3x + 4m^2 > 9 + 2mx$.

**1135.** $m^2 x - 4m < m^2 + 4(x + 1)$.

**1136.** $a^2(x - a) < b^2(x + a - b)$.

**1137.** $x(a - b)^3 > x(a^3 - b^3) - 6ab$.

**1138.** $a^2 x - a^4 < b^2 x - b^4$.

**1139.** $(a^2 + b^2)(x - 1) + 2ab(x + 1) > 0$.

**1140.** $\frac{mx}{6} - \frac{2(m^2+1)}{5} < \frac{x-(m^2-1)}{2}.$

**1141.** $\frac{m^2x^2}{8} - 2(2x+m-3) > (m+1)^2 + m^2\frac{(x-4)^2}{8} + 1.$

— Résoudre les inéquations en $x$ suivantes :

**1142.** $x^3 - 5x^2 + 6x > 0.$

**1143.** $(x+1)[(2x+3)^2 - (x-2)^2] > 0.$

**1144.** $3(2x+3)^2 - 4x^2 + 9 > 0.$

**1145.** $x^3 - 64 > (x-4)(x^2+1).$

**1146.** $(3x^2+2x-1)^2 > (2x^2-2x-1)^2.$

**1147.** $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 > 0.$

**1148.** $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 < 0.$

**1149.** $x^3 - mx^2 - x + m < 0.$

**1150.** $x^6 - a^6 < 0.$

**1151.** $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4 < 0.$

— Résoudre et discuter s'il y a lieu les inéquations en $x$ suivantes :

**1152.** $\frac{1}{3x+1} + \frac{1}{3x-2} < \frac{2}{3x}.$

**1153.** $\frac{x}{4} + \frac{4}{x} < \frac{x}{3} + \frac{3}{x}.$

**1154.** $\frac{2x-3}{x+1} > \frac{x+1}{2x-3}.$

**1155.** $\frac{m+1}{x-2} + \frac{m-1}{x+1} > \frac{2m}{x}.$

**1156.** $\frac{x+2}{x^2+1} < \frac{2x+6}{2x^2-5x+3}.$

**1157.** $\left(\frac{ax+b}{ax-b}\right)^2 - \frac{ax+b}{ax-b} < 0.$

**1158.** $\frac{3}{x+1} + \frac{14-3x}{x^2-4} < \frac{1}{x^3+x^2-4x-4}.$

**1159.** $\frac{3x-4}{x^3+2x} > \frac{1}{x} + \frac{m-x}{x^2+2}.$

— Résoudre les systèmes d'inéquations simultanées :

**1160.** $-1 < \frac{2x-5}{x+1} < 1.$

**1161.** $\left|\frac{2x^2+3x+2}{2x^2-2}\right| < 1.$

**1162.** $-1 < \frac{x+7}{x-1} < \frac{2x-1}{x-1}$

**1163.** $x < \frac{2x}{1-x^2} < \frac{3x-x^3}{1-3x^2}.$

**1164.** $\begin{cases} (2x+3)^2 - (x+1)^2 > 0 \\ \frac{3}{x} > \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} \\ x^2 - 16 < 0. \end{cases}$

**1165.** $\begin{cases} x^3 + x^2 - 2x < 0 \\ |2x-3| < 2. \end{cases}$

— Résoudre graphiquement les inéquations ou systèmes d'inéquations simultanées :

**1166.** $(x+2)(x+y-3)(x-y-1) > 0.$

**1167.** $(x^2+y^2-25)(x^2-16)(y^2-9) < 0.$

**1168.** $(x^2-y)(x^2+y^2-2) > 0.$

**1169.** $(y-x^2+8)(3y-x^2)(x^2+y^2-10) < 0.$

**1170.** $(4x^2-y^2)(x^2-4y+8) > 0.$

**1171.** $(x-y^2+3)(x^2+y^2-5)(9-x^2) < 0.$

**1172.** $(x^2-y^2)(x^2y^2-16) > 0.$

**1173.** $(x-y-8)(x-y+7)(xy-12) < 0.$

**1174.** $(xy-12)(x^2-6x+2y-4) > 0.$

**1175.** $(xy-2x-2y+10)(x^2+y^2-25) < 0.$

**1176.** $(x^2+y^2-25)(xy+2x-2y-10) > 0.$

**1177.** $(xy-3)(x^2-3y)(x^2+y^2-10) < 0.$

**1178.** $\begin{cases} x - y + 4 > 0 \\ x + 2y + 1 > 0 \\ 2x + y - 7 < 0 \end{cases}$

**1179.** $\begin{cases} 4x - 7y + 41 > 0 \\ 6x + 13y - 9 > 0 \\ 5x + 3y - 31 < 0 \end{cases}$

**1180.** $\begin{cases} x^2 - 2x - 15 < 0 \\ y^2 - 4y - 5 < 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 < 0 \end{cases}$

**1181.** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 < 0 \\ 3x + y^2 > 0 \\ x + y^2 - 8 < 0 \end{cases}$

**1182.** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 < 0 \\ [(x^2 + y^2)^2 - 100x^2]\,[(x^2 + y^2)^2 - 100y^2] < 0 \\ [(x^2 + y^2 + 12)^2 - 49x^2]\,[(x^2 + y^2 + 12)^2 - 49y^2] > 0. \end{cases}$

# ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

**366. Définition.** — Une équation à une inconnue $x$ est du second degré lorsqu'elle se ramène à la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \in \mathrm{R}$, $b \in \mathrm{R}$, $c \in \mathrm{R}$ avec $a \neq 0$.

La résolution de cette équation revient à déterminer dans R, les racines (ou les zéros) du *trinôme* du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

**367. Résolution.** — Puisque $a \neq 0$, on peut écrire :

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

et
$$f(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \qquad (1)$$

$\Delta = b^2 - 4\,ac$ est le *discriminant* du trinôme ou de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.

**1er cas** : $\Delta < 0 \Longrightarrow \dfrac{4\,ac - b^2}{4\,a^2} > 0$. Le premier membre de l'équation (1) qui s'écrit $\left(x + \dfrac{b}{2\,a}\right)^2 + \dfrac{4\,ac - b^2}{4\,a^2}$ est la somme d'un nombre positif et d'une expression $\left(x + \dfrac{b}{2\,a}\right)^2$ positive ou nulle. Il ne peut être nul. Il n'y a donc pas de nombre réel $x$, racine de l'équation.

**2e cas** : $\Delta = 0 \Longrightarrow \dfrac{b^2 - 4\,ac}{4\,a^2} = 0$ ; l'équation (1) se réduit à :

$$\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2\,a}\right)\left(x + \frac{b}{2\,a}\right) = 0.$$

Elle admet la racine *double réelle* : $x' = -\dfrac{b}{2\,a}$.

**3e cas** : $\Delta > 0 \Longrightarrow \dfrac{b^2 - 4\,ac}{4\,a^2} = \dfrac{\Delta}{4\,a^2} > 0$ et l'équation (1) est équivalente à :

$$\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2\,a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}\right)\left(x + \frac{b}{2\,a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}\right) = 0.$$

L'équation admet deux racines distinctes :

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{soit :} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

En résumé :

| | |
|---|---|
| *Equation* : $ax^2+bx+c=0$ | $\Delta = b^2 - 4ac$ |
| $\Delta < 0$ : Pas de racine *réelle.* | |
| $\Delta = 0$ : Une racine double *réelle :* | $x = -\dfrac{b}{2a}$ |
| $\Delta > 0$ : Deux racines *réelles* distinctes : | $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |

**368. Remarques.** — 1° Ces formules s'appliquent aux cas $b = 0$ ou $c = 0$ déjà étudiés au n° 327 et la lecture du tableau précédent montre que :

***Pour qu'une équation du second degré ait des racines réelles, il faut et il suffit que son discriminant soit positif ou nul.***

D'autre part : $ac < 0 \Longrightarrow b^2 - 4ac > 0$ :

***Si a et c sont de signes différents, l'équation a deux racines distinctes réelles.***

2° Formule réduite. — Si $b = 2b'$; il vient : $\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta'$

*Le discriminant réduit* $\Delta' = b'^2 - ac$ est du signe de $\Delta$ et, si $\Delta' \geqslant 0$ :

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

soit :

$$\boxed{x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}} \qquad (6)$$

3° $\Delta > 0 \Longrightarrow x'' - x' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}.$

Le signe de $x'' - x'$ est donc celui de $a$. La plus grande des racines s'obtient en prenant le signe de $a$ devant le radical $\sqrt{\Delta}$.

**369. Exemples :**

1° $x^2 + 3x + 5 = 0$; $\Delta = -11$; Pas de racine réelle.

2° $9x^2 - 42x + 49 = 0$; $\Delta' = 21^2 - 9 \times 49 = 0$;

$$x' = x'' = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}.$$

3° $6x^2 + 13x - 5 = 0$; $\Delta = 289 = 17^2 \Longrightarrow x = \dfrac{-13 \pm 17}{12}$ :

$$x' = -\frac{5}{2}, \quad x'' = \frac{1}{3}.$$

4° *Résoudre l'équation* . $x^2 + px + q = 0$.

Cette équation se déduit de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ en faisant : $a = 1$; $b = p$ et $c = q$. Comme $\Delta = p^2 - 4q$, on obtient :

1° $p^2 - 4q < 0$ : *Pas de racine.*

2° $p^2 - 4q = 0$ : 1 *racine double* : $x = -p/2$.

3° $p^2 - 4q > 0$ : 2 *racines distinctes* : $x = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Notons que l'on peut toujours ramener une équation du second degré : $ax^2 + bc + x = 0$ à la forme $x^2 + px + q = 0$ en l'écrivant, puisque $a \neq 0$ : $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$.

**370. Problème.** — *Pour quelles valeurs de m l'équation du second degré en x :*

$$x^2 - 2(m + 2)x + 2m^2 + 7 = 0 \quad \textit{admet-elle une racine égale à } +5?$$

Il serait maladroit de calculer $x'$ et $x''$ en fonction de $m$ pour écrire $x' = 5$ ou $x'' = 5$, car cela conduirait à une double équation irrationnelle en $m$.

Écrivons que pour $x = 5$ l'équation proposée est vérifiée. On obtient :

$$25 - 10(m + 2) + 2m^2 + 7 = 0.$$

Ce qui donne : $2m^2 - 10m + 25 - 20 + 7 = 0.$

Soit : $m^2 - 5m + 6 = 0.$

Cette équation du second degré en $m$ admet pour racines $m = 2$ et $m = 3$.

On vérifie que l'équation proposée devient :

1° Pour $m = 2$ : $x^2 - 8x + 15 = 0$ Racines : $x' = 5$; $x'' = 3$.

2° Pour $m = 3$ : $x^2 - 10x + 25 = 0$ Racines : $x' = x'' = 5$.

## SOMME ET PRODUIT DES RACINES.

**371. Théorème.** — ***Pour que deux nombres distincts ou confondus $x'$ et $x''$ soient racines de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$, il faut et il suffit que leur somme soit égale à $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit à $\dfrac{c}{a}$.***

1° Pour $\Delta \geqslant 0$ l'équation admet deux racines distinctes ou confondues :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Donc :
$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

et
$$x'x'' = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a} = \frac{c}{a}$$

soit
$$\boxed{x + x'' = -\frac{b}{a}} \quad (1) \qquad \boxed{x'x'' = \frac{c}{a}} \quad (2)$$

2° Deux nombres donnés, $x'$ et $x''$, sont racines de l'équation du second degré :

$$(x - x')(x - x'') = 0 \iff x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0. \qquad (3)$$

Si les nombres $x'$ et $x''$ vérifient les relations (1) et (2), cette équation s'écrit :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff ax^2 + bx + c = 0.$$

**372. Corollaire.** — ***Si deux nombres $x$ et $y$ ont pour somme*** S ***et pour produit*** P ***ces deux nombres sont les racines de l'équation en*** X :

$$X^2 - SX + P = 0. \qquad (4)$$

C'est en effet ce que devient l'équation (3) du paragraphe précédent lorsqu'on remplace $x$, $x' + x''$ et $x''x''$ par X, S et P. Les nombres cherchés $x$ et $y$ sont réels si : $\Delta = S^2 - 4P \geqslant 0$.

EXEMPLES : 1° $S = 13$, $P = -68$. Les nombres $x$ et $y$ sont racines de l'équation $X^2 - 13X - 68 = 0$. On trouve : $x = -4$, $y = 17$.

2° $S = 6$, $P = 13$. L'équation $X^2 - 6X + 13 = 0$ n'a pas de racines réelles, le problème est impossible dans R.

3° $S = 30$, $P = 225$. L'équation $X^2 - 30X + 225 = 0$ a une racine double car $\Delta' = 15^2 - 225 = 0$

Donc : $$x = y = \frac{S}{2} = 15.$$

**373. Conséquences.** — 1° Supposons S donné et P variable. La condition $S^2 - 4P \geqslant 0$ s'écrit $P \leqslant \frac{S^2}{4}$. La plus grande valeur possible de P est $\frac{S^2}{4}$. Pour cette valeur, le discriminant de l'équation (4) du n° 372 est nul, et ses deux racines $x$ et $y$ sont égales à $\frac{S}{2}$.

***Lorsque deux nombres réels variables ont une somme donnée, leur produit est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux.***

Ainsi le rectangle de périmètre donné qui possède la plus grande surface est le carré.

2° Si les nombres positifs $x$ et $y$ ont un produit P donné et une somme S variable, la condition $S^2 - 4P \geqslant 0$ peut s'écrire : $S \geqslant 2\sqrt{P}$. La plus petite valeur possible de S est $2\sqrt{P}$. Pour cette valeur les deux racines de l'équation (4) sont égales et : $x = y = \frac{S}{2} = \sqrt{P}$.

***Lorsque deux nombres positifs variables ont un produit donné, leur somme est minima lorsque ces deux nombres sont égaux.***

Ainsi le rectangle d'aire donnée qui possède le plus petit périmètre est le carré.

## APPLICATIONS

**374. Calcul d'une racine connaissant l'autre.** — Si on connaît une racine $x'$ de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$, l'autre est : $x'' = -\frac{b}{a} - x' = \frac{c}{ax'}$.

Ainsi : $f(x) \equiv 4x^2 - 5x - 6 = 0$ admet la racine $x' = 2$ car $f(2) = 0$.

L'autre racine $x'' = \frac{5}{4} - 2$ ou $-\frac{6}{4 \times 2}$ est donc égale à $-\frac{3}{4}$.

**375. Calcul mental des racines de l'équation** $ax^2 + bx + c = 0.$ (1)

1° En faisant $x = +1$ ou $x = -1$ dans $f(x) = ax^2 + bx + c$ on voit que :

Si $a + b + c = 0$ *l'équation* (1) *admet les racines :* $x' = 1$ *et* $x'' = \frac{c}{a}$.

Si $a - b + c = 0$ ou $b = a + c$ *elle a pour racines :* $x' = -1$ *et* $x'' = -\frac{c}{a}$.

$3x^2 + 4x - 7 = 0$ a pour racines : $+1$ et $-\frac{7}{3}$

$x^2 + 6x + 5 = 0$ a pour racines : $-1$ et $-5$.

2° *Lorsqu'on peut trouver mentalement deux nombres* $\alpha$ *et* $\beta$ *tels que* $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ *et* $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, *ces deux nombres sont les racines de l'équation* (1).

$x^2 - 13x + 42 = 0$ admet pour racines : $+6$ et $+7$

$x^2 + 7x - 44 = 0$ a pour racines : $-11$ et $+4$.

3° *Si deux nombres* $\alpha$ *et* $\beta$ *ont pour somme* $-b$ *et pour produit* $ac$, *les racines de l'équation* (1) *sont :* $\frac{\alpha}{a}$ *et* $\frac{\beta}{a}$.

En effet : $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{a} = -\frac{b}{a}$ et $\frac{\alpha}{a} \times \frac{\beta}{a} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a}$. On trouve $\alpha$ et $\beta$ en résolvant :

$$X^2 + bX + ac = 0.$$

Exemple : $3x^2 - 13x + 14 = 0$. Les racines de $X^2 - 13X + 42 = 0$ étant 6 et 7 on a :

$$x' = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{7}{3}.$$

**376. Équations admettant pour racines deux nombres donnés.** — On obtient une équation admettant pour racines les nombres donnés $\alpha$ et $\beta$ en écrivant (n° 371, 2°) :

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0.$$

Soit : $$\boxed{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.} \qquad (1)$$

Ainsi pour $\alpha = 3 + \sqrt{7}$, $\beta = 3 - \sqrt{7}$ on obtient : $x^2 - 6x + 2 = 0$.

Plus généralement, pour que le trinôme $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ admette $\alpha$ et $\beta$ pour racines, il faut et il suffit (n° 49) qu'il soit divisible par le produit $(x - \alpha)(x - \beta)$, donc identique à : $a(x - \alpha)(x - \beta)$.

*Toute équation admettant* $\alpha$ *et* $\beta$ *pour racines a ses coefficients proportionnels à ceux de l'équation* (1). Il en résulte que :

***Pour que deux équations*** $ax^2 + bx + c = 0$ ***et*** $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ***aient les mêmes racines il faut et il suffit que leurs coefficients soient proportionnels.***

On peut le voir directement car il faut et il suffit que ces racines aient même somme et même produit, donc que l'on ait :

$$-\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'} \quad \text{et} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \iff \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

## SIGNE DES RACINES

**377. Signe des racines.** — On peut prévoir le signe des racines réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sans calculer ces racines :

1° $\frac{c}{a} < 0$. Les coefficients $a$ et $c$ sont de signes opposés. L'équation a deux racines distinctes (nº 368) dont le produit P est négatif. Ces deux racines sont donc de signes contraires et : $x' < 0 < x''$. La plus grande des racines, en valeur absolue, a même signe que la somme S.

***Lorsque** a **et** c **sont de signes contraires, l'équation :** $ax^2 + bx + c = 0$ **a deux racines réelles de signes opposés.***

2° $\frac{c}{a} = 0$ ou $c = 0$. L'une des racines est nulle et l'autre égale à la somme $S = -\frac{b}{a}$ et a donc même signe qu'elle : $x' = 0$; $x'' = -\frac{b}{a}$.

3° $\frac{c}{a} > 0$ et $\Delta \geqslant 0$. L'équation a des racines réelles, de même signe puisque leur produit P est positif. Leur signe commun est celui de leur somme $S = -\frac{b}{a} \neq 0$. En définitive :

| Équation : $ax^2 + bx + c = 0$ | | Racines $x'$ et $x''$ |
|---|---|---|
| 1° $\frac{c}{a} < 0$ | ............................ | $x' < 0 < x''$ |
| 2° $c = 0$ | ............................ | $x' = 0;\ x'' = S$ |
| 3° $\frac{c}{a} > 0$ et $\Delta \geqslant 0$ | $-\frac{b}{a} > 0$ ........ | $0 < x' \leqslant x''$ |
| | $-\frac{b}{a} < 0$ ........ | $x' \leqslant x'' < 0$ |

**378. Discussion d'une équation paramétrique.**

*Étudier suivant les valeurs de* m *l'existence et le signe des racines de l'équation :*

$$(m - 4)\,x^2 - 2\,(m - 2)\,x + m - 1 = 0.$$

Notons d'abord que l'équation est du 1er degré pour $m = 4$ et admet pour racine $x = 3/4$.

Pour $m \neq 4$, l'équation est du second degré :

$$\Delta' = (m-2)^2 - (m-4)(m-1) = m, \qquad P = \frac{m-1}{m-4}, \qquad S = \frac{2\,(m-2)}{m-4}.$$

On étudie le signe de $\Delta'$, P et S suivant les valeurs de $m$, et on enregistre les résultats dans un tableau commun après avoir classé les valeurs remarquables du paramètre : $-\infty$, 0, 1, 2, 4, $+\infty$ (disposées verticalement afin d'écrire aisément les conclusions).

Notons que la relation : $\frac{\Delta}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a} \implies S^2 = \frac{\Delta}{a^2} + 4P$ montre que $\Delta$ et P ne sont jamais négatifs en même temps et que $S = 0 \implies$ P ou $\Delta$ négatif.

| $m$ | $\Delta'$ | P | S | CONCLUSIONS |
|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | | | | |
| | $+$ | $+$ | $+$ | Deux racines positives. |
| 4 | ═══ | ═══ | ═══ | ═══ Éq. du 1er degré : $x = \frac{3}{4}$ |
| | $+$ | $-$ | $-$ | Deux racines de signes contraires. |
| 2 | ........ | $-\frac{1}{2}$ | ...... 0 ...... | ——— Deux racines opposées : $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| | $+$ | $-$ | $+$ | Deux racines de signes contraires. |
| 1 | ........ | ...... 0 ...... | ...... $\frac{2}{3}$ ...... | ——— $x' = 0$ ; $x'' = \frac{2}{3}$ |
| | $+$ | $+$ | $+$ | Deux racines positives. |
| 0 | ...... 0 ...... | ...... $\frac{1}{4}$ ...... | ...... 1 ...... | ——— Une racine double : $x = \frac{1}{2}$ |
| | $-$ | $+$ | $+$ | Pas de racines réelles. |
| $-\infty$ | | | | |

**379. Relation entre les racines d'une équation paramétrique.** — Lorsque les coefficients $a$, $b$, $c$, de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ dépendent d'un paramètre $m$, il en est de même de leur produit P et de leur somme S, soit :

$$P = f(m) \quad \text{et} \quad S = g(m).$$

En éliminant $m$ entre ces deux relations, on obtient une relation indépendante de $m$ entre P et S, donc entre les racines $x'$ et $x''$, qui permet de calculer $x''$ connaissant $x'$.

Ainsi dans l'équation précédente : $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0$, on obtient (nº 59);

$$P = \frac{m-1}{m-4} = \frac{(m-4)+3}{m-4} = 1 + \frac{3}{m-4} \quad \text{et} \quad S = \frac{2m-4}{m-4} = \frac{2(m-4)+4}{m-4} = 2 + \frac{4}{m-4}.$$

D'où : $$\frac{1}{m-4} = \frac{P-1}{3} = \frac{S-2}{4} \implies 4P - 3S + 2 = 0$$

Soit : $$4x'x'' - 3(x' + x'') + 2 = 0.$$

**380. Interprétation géométrique.**

Bornons-nous au cas de l'équation du premier degré en $m$ :

$$(am + a')x^2 + (bm + b')x + cm + c' = 0. \qquad (1)$$

$$P = \frac{cm + c'}{am + a'} = \frac{c}{a} + \frac{ac' - ca'}{a(am + a')} \qquad S = -\frac{bm + b'}{am + a'} = -\frac{b}{a} - \frac{ab' - ba'}{a(am + a')},$$

d'où, en éliminant $\frac{1}{a(am + a')}$, la relation du 1er degré en P et S (nº 200) :

$$(ab' - ba')P - (a'c - c'a)S + bc' - cb' = 0. \qquad (2)$$

Désignons par M' et M'' les points d'abscisses $x'$ et $x''$ sur un axe O$x$.

1º Si $ab' - ba' = 0$, la relation (2) donne S = constante ou : $\overline{OM'} + \overline{OM''} = C^{te}$.

*Les points* M' *et* M'' *varient sur* O$x$ *en restant symétriques par rapport au point* I *d'abscisse* S/2 (fig. 157).

2° Si $ab' - ba' \neq 0$ la relation (2) s'écrit : $P - \alpha S + \beta = 0$.

$$x'x'' - \alpha(x' + x'') + \beta = 0 \iff (x' - \alpha)(x'' - \alpha) = \alpha^2 - \beta.$$

Si $\omega$ désigne le point d'abscisse $\alpha$, on obtient : $\overline{\omega M'}\,.\,\overline{\omega M''} = \alpha^2 - \beta = C^{te}$ (3)

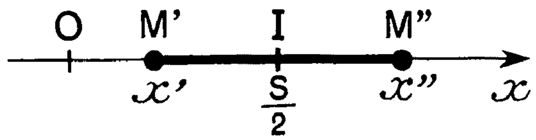



Fig. 157.

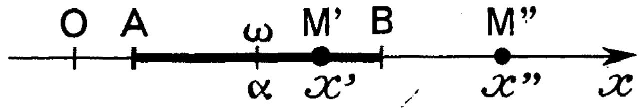



Fig. 158.

Lorsque $\alpha^2 - \beta$ est positif, il existe sur O$x$ deux points A et B tels que : $\omega A = \omega B = \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ et : $\overline{\omega A}^2 = \overline{\omega B}^2 = \overline{\omega M}.\,\overline{\omega M'} \iff (ABMM') = -1$.

*Les points* M' *et* M'' *varient sur* O$x$ *en restant conjugués harmoniques par rapport aux points fixes* A *et* B (fig. 158).

## FONCTIONS SYMÉTRIQUES DES RACINES.

**381. Définition.** — ***On appelle fonction symétrique des racines $x'$ et $x''$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ toute expression formée à l'aide de $x'$ et $x''$, qui se conserve quand on permute ces deux lettres.***

EXEMPLES :

$$x'^2 + x''^2; \quad x'^3 + x''^3; \quad \frac{1}{x' - 3} + \frac{1}{x'' - 3}; \quad (2x' - 3x'')(2x'' - 3x').$$

On sait (n° 61) que toute expression rationnelle symétrique en $x'$ et $x''$ s'exprime en fonction rationnelle de $S = x' + x''$ et $P = x'x''$. Ainsi :

1° $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = S^2 - 2P$.

2° $x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = S^3 - 3PS$.

3° $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = \dfrac{x' + x''}{x'x''} = \dfrac{S}{P}$ etc.

Pour calculer une telle expression, il suffit donc, après l'avoir exprimée en fonction de S et P, de remplacer S et P par leurs valeurs. On évite ainsi des calculs pénibles sur des expressions irrationnelles.

**382. Problème.** — *Déterminer le paramètre $m$ de façon que l'équation :*

$$x^2 + (m - 2)x + m + 5 = 0$$

*ait deux racines telles que : $x'^2 + x''^2 = 10$.*

La relation imposée aux racines est symétrique et s'écrit :

$$(x' + x'')^2 - 2x'x'' - 10 = 0.$$

Soit $(m - 2)^2 - 2(m + 5) - 10 = 0$ ou $m^2 - 6m - 16 = 0$ ce qui donne pour $m$ les valeurs $-2$ et 8.

Pour $m = -2$ l'équation proposée s'écrit : $x^2 - 4x + 3 = 0$ dont les racines, $x' = 1$ et $x'' = 3$, vérifient la relation imposée.

Pour $m = 8$ l'équation devient : $x^2 + 6x + 13 = 0$ et n'a pas de racines.

Seule la valeur $m = -2$ est solution du problème.

**383. Transformations d'une équation.** — 1° Soit à former l'équation en X, dont les racines $X'$ et $X''$ sont les valeurs de la fonction de deux variables $f(u, v)$ lorsqu'on remplace $u$ et $v$ par $x'$ et $x''$, puis par $x''$ et $x'$, racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Calculons :

$$S = X' + X'' = f(x', x'') + f(x'', x') \quad \text{et} \quad P = X'X'' = f(x', x'') \cdot f(x'' x').$$

S et P sont des fonctions symétriques de $x'$ et $x''$ et s'expriment en fonction de $a$, $b$, $c$. On obtient alors l'équation : $X^2 - SX + P = 0$ qui est dite *transformée de l'équation* (1) *par la substitution :* $X = f(u, v)$.

2° La méthode s'applique si la substitution ne porte que sur une seule variable :

$$X' = f(x') \text{ et } X'' = f(x''), \quad \text{c'est dire} \quad X = f(x).$$

Mais si dans ce cas, on peut exprimer $x$ en fonction de X sous la forme $x = \varphi(X)$, on voit que $X'$ et $X''$ sont racines de l'équation :

$$a\,[\varphi(X)]^2 + b\,\varphi(X) + c = 0.$$

Cette méthode est utile dans le cas où : $X = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$.

**384. Exemples.** — 1° *Soit l'équation* $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ (1). *Former l'équation du second degré admettant pour racines :*

$$X' = 2x' - 3x'' \quad \text{et} \quad X'' = 2x'' - 3x'.$$

On a : $S = X' + X'' = 2x' - 3x'' + 2x'' - 3x' = -(x' + x'') = -2m.$
$P = X'X'' = (2x' - 3x'')(2x'' - 3x') = 13x'x'' - 6(x'^2 + x''^2)$
donc $P = 25(3m - 2) - 6 \times 4m^2 = -24m^2 + 75m - 50$ et l'équation cherchée s'écrit :

$$\underline{X^2 + 2mX - 24m^2 + 75m - 50 = 0.}$$

2° *Former l'équation admettant pour racines les inverses des racines de l'équation :* $ax^2 + bx + c = 0$ *où l'on suppose* $c \neq 0$.

On a : $X' = \dfrac{1}{x'}$ et $X'' = \dfrac{1}{x''}$ c'est dire : $X = \dfrac{1}{x}$ ou $x = \dfrac{1}{X}$. Il suffit d'exprimer que $\dfrac{1}{X}$ est racine de l'équation proposée :

$$a\left(\frac{1}{X}\right)^2 + b\left(\frac{1}{X}\right) + c = 0 \iff \underline{cX^2 + bX + a = 0.}$$

## EXERCICES

— Résoudre les équations suivantes :

**1183.** $2x^2 + 5x = 0.$

**1184.** $21x^2 - 49x = 0.$

**1185.** $(x + 5)^2 - 4x - 20 = 0.$

**1186.** $x^2 - 25 + 3(x + 5) = 0.$

**1187.** $4x^2 - 81 = 0.$

**1188.** $27x^2 - 144 = 0.$

**1189.** $(x - 9)^2 - 49 = 0.$

**1190.** $(3x - 7)^2 - 4(x + 1)^2 = 0.$

**1191.** $\dfrac{3x - 2}{2x + 5} - \dfrac{2x + 5}{3x - 2} = 0.$

**1192.** $\dfrac{9x - 27}{2x - 7} - \dfrac{8x - 28}{x - 3} = 0.$

**1193.** $x^2 - 14x + 33 = 0.$

**1194.** $x^2 + 16x + 63 = 0.$

**1195.** $x^2 - 11x + 28 = 0.$

**1196.** $x^2 - 13x - 48 = 0.$

**1197.** $5x^2 - 31x + 30 = 0.$

**1198.** $7x^2 - 27x - 40 = 0.$

**1199.** $6x^2 + 71x + 175 = 0.$

**1200.** $21x^2 + 43x - 90 = 0.$

**1201.** $15x^2 - 253x + 1066 = 0.$

**1202.** $35x^2 - 137x - 360 = 0.$

**1203.** $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2} = 0.$

**1204.** $(2 + \sqrt{3})x^2 - (2\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1) = 0.$

**1205.** $\dfrac{2x + 1}{x - 2} - \dfrac{2x - 4}{x + 3} = 2.$

**1206.** $\dfrac{2x - 1}{x + 1} + \dfrac{3x - 1}{x + 2} = \dfrac{5x - 11}{x - 1}.$

**1207.** $\dfrac{x + 2}{x + 4} + \dfrac{x + 4}{x + 3} = \dfrac{11}{6}.$

**1208.** $\dfrac{2x + 3}{x - 3} - \dfrac{3(x - 3)}{x + 3} = 2.$

**1209.** $\dfrac{10x^2 + 3x - 2}{16x^2 + 30x + 9} = -1.$

**1210.** $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{3}{x - 3} = \dfrac{6}{x + 6}.$

— Résoudre les équations paramétriques :

**1211.** $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0.$

**1212.** $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0.$

**1213.** $x^2 - (a + b + c)x + a(b + c) = 0.$

**1214.** $x^2 - 2ax + a^2 - 9b^2 = 0.$

**1215.** $x^2 - (2a - 3b)x - 6ab = 0.$

**1216.** $3x^2 + 2(2a - b)x + a^2 - b^2 = 0.$

**1217.** $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m - 3 = 0.$

**1218.** $(m + 1)x^2 - (5m + 6)x + 3(2m + 3) = 0.$

**1219.** $(a^2 - b^2)x^2 - 4a^2bx + 4a^2b^2 = 0.$

**1220.** $a(a + b)x^2 - (a^2 + b^2)x - b(a - b) = 0.$

**1221.** Soit l'équation : $(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0.$

1° Étudier suivant les valeurs de $m$ l'existence des racines de cette équation. Calculer les racines pour $m = -3$, 0, 3 et 4.

2° Calculer pour $x' = 2$, la valeur de $m$, puis celle de $x''$.

3° Quelle valeur faut-il donner à $m$ pour que $x' = \dfrac{1 + \alpha}{2 + \alpha}$ soit racine de l'équation ? En déduire l'expression de la racine $x''$ en fonction de $\alpha$, puis de $x'$.

**1222.** Pour quelles valeurs de $m$ l'équation : $(m + 7)x^2 - 2(m - 9)x - 7m + 15 = 0$, a-t-elle une racine double ? Calculer la valeur de cette racine double.

**1223.** Soit l'équation : $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0.$

1° Calculer les racines pour $m = -\dfrac{3}{4}$, 2 et 8.

2° Calculer $m$ pour que l'équation ait une racine double et trouver sa valeur.

**1224.** On considère l'équation : $(m + 1)\,x^2 - (m + 3)\,x - m + 3 = 0$.

1° Calculer les racines pour $m = 2$ ; $3$ ; $-7$ et $-\frac{13}{5}$.

2° Déterminer $m$ pour que l'équation ait une racine double que l'on calculera.

3° Calculer les racines pour $m = \frac{t^2 + 3}{t^2 - 5}$.

**1225.** Étant donnée l'équation : $x^2 - 2\,(m + 2)\,x + 2\,m^2 - 17 = 0$.

1° Calculer les racines pour $m = -2, +2$ et $+5$.

2° Pour quelles valeurs de $m$ a-t-elle une racine double ? La calculer.

3° On suppose que $x' = 11$. Calculer les valeurs de $m$ et de $x''$ correspondantes.

4° Calculer les racines pour $m = \frac{7\,t - 3}{t + 1}$. Pour quelles valeurs de $t$ a-t-on des racines ? Exprimer $t$ en fonction de $m$ et en déduire les valeurs de $m$ pour lesquelles l'équation proposée a des racines.

**1226.** Soit l'équation : $\frac{3}{x + 2\,m} + \frac{2}{x + m} = 1$.

1° Le nombre $m$ étant donné d'une manière quelconque, montrer qu'elle a toujours deux racines distinctes $x'$ et $x''$ (*on pourra poser* $m = k + 1$).

2° De combien de manières peut-on choisir $m$ de façon qu'une des racines ait une valeur $\alpha$ donnée ?

3° Étudier le cas où l'on donne à $x'$ la valeur 5.

— Résoudre mentalement les équations :

**1227.** $x^2 - 6\,x + 5 = 0$.

**1228.** $x^2 - 15\,x + 56 = 0$.

**1229.** $x^2 - 13\,x + 42 = 0$.

**1230.** $x^2 + 16\,x + 63 = 0$.

**1231.** $x^2 + 4\,x - 77 = 0$.

**1232.** $x^2 - 5\,x - 150 = 0$.

**1233.** $x^2 + 22\,x + 121 = 0$.

**1234.** $x^2 - 40\,x + 111 = 0$.

**1235.** $x^2 - 17\,x + 70 = 0$.

**1236.** $x^2 - 16\,x + 55 = 0$.

**1237.** $x^2 + 17\,x + 72 = 0$.

**1238.** $x^2 + 2\,x - 63 = 0$.

**1239.** $x^2 - (a + b)\,x + ab = 0$.

**1240.** $x^2 - 2\,ax + a^2 - b^2 = 0$.

**1241.** $2\,x^2 - 17\,x + 30 = 0$.

**1242.** $2\,x^2 - 3\,x - 35 = 0$.

**1243.** $3\,x^2 + 13\,x + 14 = 0$.

**1244.** $4\,x^2 + 5\,x - 21 = 0$.

**1245.** $5\,x^2 - 14\,x + 8 = 0$.

**1246.** $6\,x^2 - 7\,x - 20 = 0$.

**1247.** $7\,x^2 + 26\,x + 15 = 0$.

**1248.** $15\,x^2 + 4\,x - 4 = 0$.

— Trouver *a priori* une des racines des équations suivantes et calculer l'autre :

**1249.** $4\,x^2 - 11\,x + 7 = 0$.

**1250.** $7\,x^2 + 23\,x + 16 = 0$.

**1251.** $5\,x^2 + 26\,x - 31 = 0$.

**1252.** $9\,x^2 - 22\,x - 31 = 0$.

**1253.** $\frac{x}{a} - \frac{b}{x} = \frac{m}{a} - \frac{b}{m}$.

**1254.** $\frac{m}{x - a} + \frac{n}{x - b} = \frac{m}{b} + \frac{n}{a}$.

**1255.** $(b - c)\,x^2 + (c - a)\,x + (a - b) = 0$.

**1256.** $a\,(b - c)\,x^2 + b\,(c - a)\,x + c\,(a - b) = 0$.

**1257.** $(m - a)\,(b - c)\,x^2 + (m - b)\,(c - a)\,x + (m - c)\,(a - b) = 0$.

**1258.** $2\,abx^2 - (a+b)^2 x + a^2 + b^2 = 0.$

— Calculer deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P.

**1259.** $S = 29$; $P = 198$.

**1260.** $S = -33$; $P = 266$

**1261.** $S = 130$; $P = 4\,225$.

**1262.** $S = 41$; $P = -1\,386$

**1263.** $S = -117$; $P = -2\,430$.

**1264.** $S = -152$; $P = 5\,695$.

**1265.** Soit l'équation : $(m+3)\,x^2 - m\,(m+5)\,x + 2\,m^2 = 0.$

1° Montrer que cette équation admet la racine $x' = m$. Calculer l'autre racine $x''$.

2° Pour quelles valeurs de $m$ a-t-on : $x' = x''$ ?

3° Retrouver ces résultats en calculant le discriminant et en résolvant l'équation.

**1266.** Deux nombres variables $x$ et $y$ ont pour somme $x + y = 2\,m$ et pour différence

$$x - y = 2\,p.$$

1° Calculer $x$ et $y$ et leur produit $z = xy$ en fonction de $m$ et $p$.

2° La somme $2\,m$ est constante. Pour quelle valeur de $p$, le produit $z$ est-il maximum ? Quelles sont alors les valeurs de $x$ et $y$ ?

3° La différence $2\,p$ est constante. Pour quelle valeur de $m$, le produit $z$ est-il minimum ? Quelles sont alors les valeurs de $x$ et $y$ ?

**1267.** 1° Pour quelle valeur de $x$ la fonction $y = (x+3)\,(5-x)$ est-elle maximum ? Trouver ce maximum.

2° Pour quelle valeur de $x$ la fonction $z = (x+3)\,(x-5)$ est-elle minimum ? Trouver ce minimum.

**1268.** On considère la fonction $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{18}{x}$, dans laquelle $x$ est positif.

1° Montrer que cette fonction admet un minimum que l'on calculera ainsi que la valeur de $x$ correspondante.

2° On désigne par $m$ la différence $\dfrac{x}{2} - \dfrac{18}{x}$. Montrer que l'on a $y^2 = m^2 + 36$ et retrouver ainsi la valeur du minimum de $y$ et la valeur de $x$ correspondante.

— Étudier suivant les valeurs de $m$ l'existence et le signe des racines des équations suivantes :

**1269.** $x^2 - 4\,x + m = 0.$

**1270.** $x^2 - 2\,mx + 9 = 0.$

**1271.** $x^2 - 2\,mx + 3\,m = 0.$

**1272.** $mx^2 - 3\,x + m = 0.$

**1273.** $x^2 - (3\,m - 2)\,x + 4 = 0.$

**1274.** $mx^2 - 2\,(m-2)\,x + m - 3 = 0.$

**1275.** $x^2 - 2\,mx + (m-3)^2 = 0.$

**1276.** $mx^2 - 2\,(m+1)\,x + m - 5 = 0.$

— Calculer en fonction des coefficients $a$, $b$ et $c$ de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ les expressions suivantes :

**1277.** $(5\,x' - 3\,x'')\,(5\,x'' - 3\,x')$

**1278.** $(x' - 2)^3 + (x'' - 2)^3$

**1279.** $\dfrac{1}{x'^2 - x''} + \dfrac{1}{x''^2 - x'}$

**1280.** $\dfrac{x'}{x'' - 3\,x} + \dfrac{x''}{x' - 3\,x''}$

**1281.** $\dfrac{x' - 2}{x'' - 3} + \dfrac{2 - x''}{3 - x'}$

**1282.** $\dfrac{x'^3 - x''^3}{x'^2 - x'^2}$

— Déterminer $m$ de façon que les équations suivantes aient des racines satisfaisant à la relation indiquée.

**1283.** $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0$ Relation : $(4x' + 1)(4x'' + 1) = 18.$

**1284.** $mx^2 - (m-4)x + 2m = 0$ $2(x'^2 + x''^2) = 5x'x''.$

**1285.** $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ $4(x'^2 + x'^2) = 5x'^2x''^2.$

**1286.** $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$ $3x'x'' - 5(x' + x'') + 7 = 0.$

**1287.** $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ $16(x' + x'')^2 = 49x'^2x''^2.$

**1288.** Soit l'équation : $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0.$

1° Montrer que le discriminant $\Delta'$ est égal $(m-1)(m-2)$. Étudier son signe et en déduire suivant les valeurs de $m$, l'existence et le signe des racines $x'$ et $x''$ de l'équation.

2° Déterminer $m$ de façon que l'on ait : $x'^2 + x''^2 = x'x'' + 4.$

3° Former l'équation en X admettant pour racines $2x' - 3x''$ et $2x'' - 3x'$. En déduire les valeurs de $m$ pour lesquelles on a : $2x' - 3x'' = 1.$

**1289.** On considère l'équation : $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0.$

1° Étudier l'existence et le signe des racines $x'$ et $x''$.

2° Calculer les racines pour $m = -\dfrac{7}{4}$; 1 et 7.

3° On suppose $x' = -3$. Calculer la valeur de $m$ et celle de $x''$.

4° Établir la relation indépendante de $m$ qui lie les racines lorsqu'elles existent.

**1290.** 1° Discuter, suivant les valeurs de $m$, l'existence et le signe des racines $x'$ et $x''$ de l'équation : $(m+2)x^2 - (m+4)x + 2 - m = 0.$

2° Établir la relation indépendante de $m$ qui existe entre $x'$ et $x''$. Retrouver à l'aide de cette relation les valeurs des racines doubles.

3° Calculer $m$ pour que l'on ait : $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = \dfrac{1}{5}.$

**1291.** Soit l'équation : $x^2 - (m+2)x + 1 = 0.$

1° Étudier l'existence et le signe des racines $x'$ et $x''$.

2° Former l'équation en $z$ admettant pour racines : $z' = 4x' - 1$ et $z'' = 4x'' - 1$. Calculer $m$ pour que l'on ait : $z'z'' = 7.$

3° On construit sur un axe les points M' et M'' d'abscisses $x'$ et $x''$. Montrer que ces points sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B d'abscisses $+1$ et $-1$.

**1292.** On considère l'équation : $(m-1)x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 9 = 0.$ (1)

1° Montrer que son discriminant est un produit de trois facteurs du 1er degré en $m$. Étudier son signe ainsi que celui de la somme et du produit des racines $x'$ et $x''$ puis l'existence et le signe de ces dernières.

2° Trouver la relation indépendante de $m$ qui existe entre $x'$ et $x''$. En déduire les valeurs de chacune des racines doubles de l'équation (1).

3° Calculer $m$ en fonction de $m$ l'expression : $y = \dfrac{1}{x'+1} + \dfrac{1}{x''+1}$ et trouver les valeurs de $m$ pour lesquelles on a $y = -16$.

**1293.** Les racines d'une équation du second degré vérifient les relations :

$$(x' + x'') - 2x'x'' = 0,$$
$$mx'x'' - (x' + x'') = 2m + 1.$$

1° Former cette équation.

2° Pour quelles valeurs de $m$ a-t-elle des racines ?

3° Déterminer $m$ de façon que les deux racines soient positives.

4° Dans ce cas, on considère le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectivement $x'$ et $x''$. Déterminer $m$ de façon que l'hypoténuse de ce triangle soit égale à $\sqrt{2}$.

**1294.** On considère l'équation du second degré dont les coefficients dépendent du paramètre $m$ :

$$(2\,m - 1)\,x^2 - (m + 2)\,x + m - 1 = 0.$$

1° Discuter, selon les valeurs de $m$, l'existence et le signe des racines de cette équation. Soient M′ et M″ les points dont les abscisses sont les racines $x'$ et $x''$ de l'équation.

2° Déterminer $m$ pour que les points M′ et M″ soient symétriques par rapport au point d'abscisse $+ 1$. Déterminer ces points.

3° Déterminer $m$ pour que M′ et M″ soient conjugués harmoniques par rapport aux points d'abscisses $-2$ et $+2$.

4° Montrer que, quel que soit $m$, les points M′ et M″ sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes que l'on déterminera.

5° En déduire l'existence de deux valeurs de $m$ pour lesquelles l'équation a une racine double que l'on calculera.

# TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

**385. Définitions.** — ***On appelle trinôme réel du second degré en $x$, tout polynôme $f(x)$ de la forme :***

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c \qquad a,\, b,\, c \in \mathrm{R} \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

Les réels $a$, $b$, $c$ désignent les coefficients constants du trinôme et $x$ en est la variable dans R. Les racines $x'$ et $x''$ du trinôme sont les racines de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ et le *discriminant* $\Delta = b^2 - 4\,ac$ est celui du trinôme $f(x)$ ou de l'équation $f(x) = 0$. Quel que soit $x \in \mathrm{R}$, le trinôme $f(x)$ prend une valeur numérique réelle de signe déterminé ou nulle.

**386. Factorisation et signe du trinôme.** — Le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut (nº 367) s'écrire :

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]} \qquad (1)$$

**1er Cas :** $\Delta = b^2 - 4\,ac < 0$. — Le trinôme n'a pas de racines réelles. Il ne peut être factorisé sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ sinon il admettrait pour racines $\alpha$ et $\beta$. *Il est indécomposable sur* R.

L'expression entre crochets est la somme du carré $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ et de l'expression $\frac{4\,ac - b^2}{4a^2} > 0$. Elle est donc positive quel que soit $x$ et le trinôme $f(x)$ est toujours du signe de $a$, coefficient de $x^2$.

**2e Cas :** $\Delta = 0$. — La formule (1) se réduit à : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Le trinôme admet la racine double : $x' = -\frac{b}{2a} \implies \boxed{f(x) = a(x - x')^2.}$ (2)

Pour toute valeur de $x$ différente de $x'$ l'expression $(x - x')^2$ est positive et $f(x)$ est du signe de $a$.

**3e Cas.** $\Delta > 0$. — On peut alors écrire (nº 367) :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Le trinôme admet deux racines réelles distinctes $x'$ et $x''$ telles que

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et il s'écrit : $$\boxed{f(x) = a(x - x')(x - x'').} \tag{3}$$

En supposant $x' < x''$ on obtient :

| $x$ | $-\infty$ | | $x'$ | | $x''$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - x'$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x - x''$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(x - x')(x - x'')$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | Signe de $a$ | 0 | Signe de $-a$ | 0 | Signe de $a$ | |

On voit donc que $f(x)$ est du signe de $a$, pour $x < x'$ ou pour $x > x''$. Il est du signe opposé à celui de $a$ pour $x' < x < x''$. On en déduit que :

**387. Règle.** — 1° ***Si le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines réelles, il est du signe de $a$ coefficient de $x^2$, quel que soit $x \in$ R.***

2° ***Si le trinôme a une racine double, il est du signe de $a$ pour toute valeur de $x$ différente de sa racine.***

3° ***Si le trinôme a deux racines réelles distinctes, il est du signe de $a$ pour toute valeur de $x$ extérieure aux racines et du signe opposé à celui de $a$ pour toute valeur de $x$ comprise entre les racines.***

Cette règle découle d'ailleurs immédiatement de la représentation graphique de la fonction $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (n° 146). Il suffit de se souvenir que :

*Un trinôme du second degré en $x$ est donc toujours du signe du coefficient de $x^2$ sauf pour les valeurs de $x$ égales aux racines réelles ou comprises entre ces racines lorsqu'elles existent.*

**388. Applications.**

1° $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$ n'a pas de racines réelles ($\Delta' = -4$). Il est donc positif quel que soit $x$.

2° $f(z) = -4z^2 + 28z - 49$ admet une racine double $\frac{7}{2}$. Il est donc du signe de $-4$, soit négatif, pour toute valeur réelle de $z$ différente de $\frac{7}{2}$.

3° $f(m) = m^2 - 2m - 35$ a deux racines $-5$ et $+7$. Il est positif pour $m < -5$ ou pour $m > 7$. Il est négatif pour $-5 < m < 7$ :

| $m$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(m)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

4° $f(x) = (2x - 5)(x + 3)$ est un trinôme admettant $-3$ et $\frac{5}{2}$ pour racines. Le coefficient de $x^2$ est 2. Donc $f(x)$ est positif pour $x < -3$ ou pour $x > \frac{5}{2}$, négatif pour $-3 < x < \frac{5}{2}$.

5° $F = \dfrac{2m + 3}{5 - m}$ est du signe du trinôme $(2m + 3)(5 - m)$ admettant pour racines $-\frac{3}{2}$ et 5.

Le coefficient de $m^2$ étant $-2$ on voit que la fraction est positive pour $-\frac{3}{2} < m < 5$, négative pour $m < -\frac{3}{2}$ ou pour $m > 5$ :

| $m$ | $-\infty$ | | $-3/2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | | $-$ | $0$ | $+$ | $\parallel$ | $-$ | |

**389. Corollaires.** — L'étude des résultats ci-dessus montre que :

1° ***Pour qu'un trinôme réel du second degré soit le produit de deux facteurs réels du premier degré il faut et il suffit que son discriminant soit positif ou nul.***

La condition est suffisante d'après les formules (2) et (3) du n° 386. Elle est nécessaire car un produit de deux facteurs réels du premier degré admet pour racines les racines réelles de chacun de ses facteurs et a donc un discriminant positif ou nul.

2° ***Pour qu'un trinôme du second degré $f(x)$ garde le même signe quel que soit $x$ il faut et il suffit que son discriminant soit négatif.***

En effet si $\Delta \geqslant 0$ le trinôme s'annule au moins pour une valeur de $x$ et ne garde pas le même signe pour toutes les valeurs de $x$.

3° Soit $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ la valeur prise par le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour $x = \alpha$. Cette valeur $f(\alpha)$ est nulle si $\alpha$ est racine et réciproquement. Ce cas mis à part, on voit (n° 387) que :

| | | |
|---|---|---|
| 1° $\Delta < 0$ | Pour tout $\alpha$ ........................ | $af(\alpha) > 0$ |
| 2° $\Delta = 0$ | Pour $\alpha \neq -\frac{b}{2a}$ .................... | $af(\alpha) > 0$ |
| 3° $\Delta > 0$ | $\alpha$ extérieur aux racines.............. | $af(\alpha) > 0$ |
| | $\alpha$ compris entre les racines .......... | $af(\alpha) < 0.$ |

Les théorèmes suivants constituent des réciproques des propriétés ci-dessus.

**390. Théorèmes.** — 1° ***Si $af(\alpha)$ est négatif, le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ a des racines réelles et le nombre $\alpha$ est compris entre ces racines.***

En effet la conclusion $af(\alpha) < 0$ exige que l'on ait $\Delta > 0$ et $\alpha$ compris entre les racines, car toute autre hypothèse entraîne $af(\alpha) \geqslant 0$.

2° ***Si $af(\alpha)$ est positif et si le trinôme $f(x)$ a des racines réelles le nombre $\alpha$ est extérieur aux racines.***

Dans le cas où $\Delta > 0$, l'hypothèse $x' \leqslant \alpha \leqslant x''$ entraîne $af(x) \leqslant 0$. Seule l'hypothèse $\alpha$ extérieur aux racines donne $af(\alpha) > 0$.

3° ***Si $f(\alpha).f(\beta)$ est négatif, le trinôme $f(x)$ a des racines réelles et l'un des deux nombres $\alpha$ ou $\beta$ est compris entre ces racines.***

En effet un des produits $af(\alpha)$ ou $af(\beta)$ est positif et l'autre négatif. En supposant $\alpha < \beta$ on voit que le trinôme a des racines distinctes telles que :

$$\alpha < x' < \beta < x'' \qquad \text{ou} \qquad x' < \alpha < x'' < \beta.$$

*On dit que les deux couples de nombres $(\alpha, \beta)$ et $(x', x'')$ se séparent.*

**391. Applications.** — Les théorèmes 1° et 3° du paragraphe précédent permettent de s'assurer de la réalité des racines d'une équation du second degré sans calculer son discriminant.

1° Le trinôme : $f(x) = 3x^2 - 7 + m(x - 1)$ est te que $f(1) = -4$. Donc $af(1) = -12$. $f(x)$ admet quel que soit $m$, deux racines $x'$ et $x''$ vérifiant la relation : $x' < 1 < x''$.

2° Soit $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta) + m(7x - 4\alpha - 3\beta)$

On a : $f(\alpha) = 3m(\alpha - \beta)$ et $f(\beta) = 4m(\beta - \alpha)$. Donc $f(\alpha).f(\beta) = -12m^2(\beta - \alpha)^2$. En supposant $\alpha < \beta$ on voit que le trinôme a deux racines vérifiant la disposition :

$x' < \alpha < x'' < \beta$ pour $m > 0$; $\alpha < x' < \beta < x''$ pour $m < 0$ et $x' = \alpha < x'' = \beta$ pour $m = 0$.

# INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

**392. Forme générale.** — Soient les constantes réelles $a$, $b$, $c$ (avec $a \neq 0$). L'inéquation entière du second degré en $x$ s'écrit sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\exists ?\, x \in R \quad \text{tel que} \quad ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c < 0.$$

La seconde se ramène à la première en multipliant les deux membres par $-1$. Il suffit d'étudier la première.

**393. Étude de l'inéquation** : $ax^2 + bx + c > 0$. (1)

On étudie le signe du trinôme : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1^er^ **cas :** $a > 0$. L'inéquation (1) exprime que le trinôme $f(x)$ doit être du signe de $a$ : ceci a lieu pour toutes les valeurs de $x$, sauf celles qui sont égales aux racines $x'$ et $x''$ ou comprises entre les racines lorsqu'elles existent.

$\Delta < 0$. *L'inéquation est vérifiée quel que soit* $x \in R$.

$\Delta = 0$. *L'inéquation est vérifiée pour* $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

$\Delta > 0$. *L'inéquation est vérifiée pour les valeurs de* $x$ *extérieures à l'intervalle* $(x', x'')$

*donc* $\begin{cases} \textit{pour } x < x' < x'' \\ \textit{pour } x' < x'' < x. \end{cases}$

2^e^ **cas :** $a < 0$. L'inéquation (1) exprime que $f(x)$ doit être du signe de $-a$, ce qui nécessite que $f(x)$ ait des racines réelles distinctes et que $x$ soit compris entre ces racines.

$\Delta \leqslant 0$. *L'inéquation est impossible.*

$\Delta > 0$. *L'inéquation est vérifiée pour :* $x' < x < x''$.

**394. Exemples.**

1° $2x^2 + x + 3 > 0$ — $(\Delta = -23)$ : vérifiée pour $\forall x \in R$.

2° $-x^2 + 2x - 3 > 0$ — $(\Delta' = -2)$ : impossible.

3° $(4x - 5)(2x + 3) < 0$ — vérifiée pour $-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{5}{4}$.

4° $x^2 - 9x + 14 > 0$ — vérifiée si $x < 2$ ou $x > 7$.

5° $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 > 0$. — $\Delta' = m - 1$. Donc :

$m < 1$ : Inéquation vérifiée pour $\forall x$.

$m = 1$ : Inéquation vérifiée pour $x \neq 1$.

$m > 1$ : Inéquation vérifiée pour $x < m - \sqrt{m-1}$ ou pour $x > m + \sqrt{m-1}$.

**395. Inéquations se ramenant au second degré.** — La règle donnant le signe d'un trinôme du second degré, permet comme aux nos 359 et 360 d'étudier le signe d'expressions de la forme A.B.C ou $\frac{A.B}{C}$ dans lesquelles les facteurs A, B, C peuvent être du second degré. On en déduit des solutions des inéquations $A.B.C > 0$ ou $\frac{A.B}{C} > 0$.

EXEMPLE I. — *Résoudre l'inéquation :* $(x^2 + 2x - 13)^2 < (3x - 1)^2$. (1)

Cette inéquation s'écrit : $(x^2 + 2x - 13)^2 - (3x - 1)^2 < 0$.

soit : $P(x) \equiv (x^2 + 5x - 14)(x^2 - x - 12) < 0$.

Le polynôme P(x) s'annule pour $-7$, $+2$ et $-3$, $+4$. D'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $-3$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+5x-14$ | | + | 0 | − | ⋮ | − | 0 | + | ⋮ | + | |
| $x^2-x-12$ | | + | ⋮ | + | 0 | − | ⋮ | − | 0 | + | |
| $P(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |

On a donc $P(x) < 0$ pour $-7 < x < -3$ ou pour $2 < x < 4$, valeurs qui vérifient l'inéquation (1).

— Remarquons, comme au n° 360, que les racines de P(x) sont toutes des racines simples et entraînent un changement de signe. Comme visiblement P(x) est positif pour $x > 4$, on pourrait de proche en proche en déduire le signe de P(x) dans chacun des autres intervalles

EXEMPLE II. — *Résoudre l'inéquation :* $\frac{x}{x+2} < \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 5x + 6}$. (1)

Cette inéquation s'écrit : $\frac{x(x^2 - 5x + 6) - (x + 2)(x^2 - x + 1)}{(x + 2)(x^2 - 5x + 6)} < 0$

soit : $F(x) \equiv \frac{6x^2 - 7x + 2}{(x + 2)(x^2 - 5x + 6)} > 0$

La fraction F(x) change de signe pour $\frac{2}{3}, \frac{1}{2} - 2$, 2 et 3.

Elle est positive pour $x > 3$, d'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1/2$ | | $2/3$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | | − | ‖ | + | 0 | − | 0 | + | ‖ | − | ‖ | + | |

L'inéquation est vérifiée pour $-2 < x < 1/2$; pour $2/3 < x < 2$ ou pour $x > 3$.

## COMPARAISON D'UN NOMBRE AUX RACINES D'UN TRINÔME

**396. Comparaison d'un nombre aux racines d'un trinôme.** — La comparaison directe d'un nombre réel $\alpha$ aux racines $x'$ et $x''$ d'un trinôme du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

c'est-à-dire l'étude du signe de $x' - \alpha$ et $x'' - \alpha$, conduit à des calculs laborieux sur des expressions irrationnelles lorsque le discriminant n'est pas un carré parfait. Il est possible d'effectuer cette étude sans calculer les racines du trinôme. En effet (nº 390) :

**1er Cas :** $a.f(\alpha) < 0$, les racines $x'$ et $x''$ sont réelles et : $\boxed{x' < \alpha < x''.}$

**2e Cas :** $a.f(\alpha) = 0$ avec $a \neq 0$ le nombre $\alpha$ est l'une des racines et l'autre égale à $\dfrac{c}{a\alpha}$ ou $-\dfrac{b}{a} - \alpha$ se compare directement à $\alpha$.

**3e Cas :** $a.f(\alpha) > 0$ avec $\Delta \geqslant 0$, le trinôme a des racines réelles et $\alpha$ est extérieur aux racines, soit : $\alpha < x' \leqslant x''$ ou $x' \leqslant x'' < \alpha$.

Afin de distinguer ces deux cas, on compare $\alpha$ à un nombre que l'on sait compris entre les racines. On peut toujours utiliser la demi-somme $\dfrac{S}{2} = -\dfrac{b}{2a}$ car en supposant $x' < x''$ :

$$x' < x'' \implies x' < \frac{x' + x''}{2} < x'' \implies x' < \frac{S}{2} < x''.$$

$$1^{\circ}\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \quad \text{ou} \quad \alpha < \frac{S}{2} \implies \boxed{\alpha < x' \leqslant x''.}$$

$$2^{\circ}\ \frac{S}{2} - \alpha < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{S}{2} < \alpha \implies \boxed{x' \leqslant x'' < \alpha.}$$

Soit en résumé :

| $f(x) = ax^2 + bx + c$ | | Racines $x'$ et $x''$ |
|---|---|---|
| 1º $af(\alpha) < 0$ | ........ | $x' < \alpha < x''$ |
| 2º $f(\alpha) = 0$ | ........ | $x' = \alpha$; $x'' = S - \alpha$ |
| 3º $af(\alpha) > 0$ et $\Delta \geqslant 0$ | $\dfrac{S}{2} - \alpha > 0$ ........ | $\alpha < x' \leqslant x''$ |
| | $\dfrac{S}{2} - \alpha < 0$ ........ | $x' \leqslant x'' < \alpha$ |

Pour $\alpha = 0$, on retrouve les résultats du nº 377 pour le signe des racines.

### 397. Applications.

1º *Comparer* $+1$ *aux racines du trinôme* $f(x) = x^2 - 7x + 4$.
$af(1) = 1(1^2 - 7.1 + 4) = -2$. Le trinôme a deux racines de même signe telles que :

$$0 < x' < 1 < x''.$$

2º *Comparer* $-3$ *aux racines de l'équation :* $2x^2 - 3x - 25 = 0$.

Cette équation a deux racines de signes contraires (nº 368). $af(-3) = +4$, le nombre $-3$ est extérieur aux racines et comme $-3$ est inférieur à 0 qui est compris entre les racines on a la disposition : $-3 < x' < 0 < x''$.

3º *Comparer* $+6$ *aux racines de l'équation :* $x^2 - 6x + 4 = 0$.
$af(6) = +4$ et $\Delta' = +5$. L'équation a donc deux racines dont la demi-somme $+3$ est inférieure à 6. Donc : $x' < 3 < x'' < 6$.

4° *Comparer les nombres 3 et 5 aux racines de l'équation :* $3x^2 - 26x + 54 = 0$.
$af(3) = 9$ et $af(5) = -3$. L'équation a deux racines et 5 est compris entre ces racines, tandis que 3 est à l'extérieur. Donc : $3 < x' < 5 < x''$.

**398. Équations paramétriques.** — La comparaison ci-dessus permet d'étudier suivant les valeurs du paramètre $m$ l'existence et la position des racines du trinôme $f(x)$ par rapport à un nombre donné $\alpha$. On est conduit à étudier simultanément les signes de

$$\Delta, \; af(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{S}{2} - \alpha.$$

Pour comparer les racines à deux nombres donnés $\alpha$ et $\beta$, on étudie les signes de :

$$\Delta, \quad af(\alpha), \quad af(\beta), \quad \frac{S}{2} - \alpha \quad \text{et} \quad \frac{S}{2} - \beta.$$

**399. Exemple I.** — *Étudier suivant les valeurs de m la position du nombre + 3 par rapport aux racines de l'équation :* $x^2 - 2(m+1)x + 5m + 1 = 0$.

Calculons $\Delta'$, $af(3)$ et $\frac{S}{2} - 3$. On obtient :

$$\Delta' = (m+1)^2 - (5m+1) = m^2 - 3m = m(m-3) \qquad (0;\,3)$$

$$af(3) = 1\,[9 - 6(m+1) + 5m + 1] = -m + 4 \qquad (4)$$

$$\frac{S}{2} - 3 = m + 1 - 3 = m - 2. \qquad (2)$$

Les valeurs de $m$, pour lesquelles une des expressions précédentes change de signe sont donc : 0, 2, 3 et 4. On peut alors établir le tableau suivant :

| $m$ | $\Delta'$ | $af(3)$ | $\frac{S}{2} - 3$ | CONCLUSIONS |
|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | | | | |
| | $+$ | $-$ | $+$ | $x' < 3 < x''$ |
| $+4$ | | 0 | 2 | $x' = 3 < x'' = 7$ |
| | $+$ | $+$ | $+$ | $3 < x' < x''$ |
| $+3$ | 0 | 1 | 1 | $3 < x' = x'' = 4$ |
| | | | $+$ | |
| $+2$ | $-$ | $+$ | 0 | Pas de racines réelles. |
| | | | $-$ | |
| 0 | 0 | 4 | $-2$ | $x' = x'' = 1 < 3$ |
| | $+$ | $+$ | $-$ | $x' < x'' < 3$ |
| $-\infty$ | | | | |

Notons que la formule (1) du n° 386 permet d'écrire :

$$f(\alpha) = a\left[\left(\alpha - \frac{S}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta}{4} + af(\alpha) = a^2\left(\frac{S}{2} - \alpha\right)^2.$$

Il en résulte que $\Delta$ et $af(\alpha)$ ne sont jamais tous deux négatifs et qu'ils sont de signes contraires pour $\frac{S}{2} - \alpha = 0$.

**400. Exemple II.** — *Étudier suivant la valeur de m la position, par rapport aux nombres* 0 *et* 2, *des racines de l'équation :* $mx^2 - 2(m+1)x + m + 5 = 0$.

L'équation est du premier degré pour $m = 0$ et se réduit à $2x - 5 = 0$.

Une seule racine $x' = \dfrac{5}{2}$ telle que $0 < 2 < x'$.

Pour $m \neq 0$, l'équation est du second degré. On obtient :

$$\Delta' = -3m + 1 \quad ; \quad af(0) = m(m+5) ; \; af(2) = m(m+1) \quad ; \quad \frac{S}{2} - 0 = \frac{m+1}{m}$$

et
$$\frac{S}{2} - 2 = \frac{1-m}{m}$$

Les valeurs remarquables de $m$ sont $-5$, $-1$, $0$, $\dfrac{1}{3}$ et $1$. On obtient :

| $m$ | $\Delta'$ | $af(0)$ | $af(2)$ | $\frac{S}{2} - 0$ | $\frac{S}{2} - 2$ | CONCLUSIONS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | | | | | | |
| | | | | | $-$ | |
| $1$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | Pas de racines réelles |
| | | | | | $+$ | |
| $\frac{1}{3}$ | $0$ | $\frac{16}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $4$ | $2$ | $0 < 2 < x' = x'' = 4$ |
| | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0 < 2 < x' < x''$ |
| $0$ | | | | | | Éq. du 1er degré : $2 < x' = \frac{5}{2}$ |
| | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $x' < 0 < 2 < x''$ |
| $-1$ | | | $0$ | $0$ | $-2$ | $x' < 0 < x'' = 2$ |
| | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | $x' < 0 < x'' < 2$ |
| $-5$ | | $0$ | $0$ | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{9}{5}$ | $x' = 0 < x'' < 2$ |
| | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $0 < x' < x'' < 2$ |
| $-\infty$ | | | | | | |

**401. Remarque.** — Lorsqu'on veut imposer, aux racines $x'$ et $x''$ du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ une disposition donnée par rapport au nombre $\alpha$ ou par rapport aux deux nombres $\alpha$ et $\beta$, il suffit d'écrire les inégalités nécessaires et suffisantes qui entraînent l'existence des racines et cette disposition. Ainsi pour obtenir :

$x' < \alpha < x''$ écrire $af(\alpha) < 0$

$\alpha < x' \leqslant x''$ — $\Delta \geqslant 0,\ af(\alpha) > 0,\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0$

$\alpha < x' < \beta < x''$ — $af(\alpha) > 0,\ af(\beta) < 0$

$\alpha < x' \leqslant x'' < \beta$ — $\begin{cases} \Delta \geqslant 0,\ af(\alpha) > 0,\ af(\beta) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0, \text{ et } \dfrac{S}{2} - \beta < 0. \end{cases}$

EXEMPLE. — *Déterminer m pour que l'équation :* $mx^2 - 2(m+1)x + m + 5 = 0$ *ait deux racines comprises entre* 0 et 2.

Il faut et il suffit que l'on ait :

$$\Delta > 0; \quad af(0) > 0; \quad af\,(2) > 0; \quad \frac{S}{2} - 0 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{S}{2} - 2 < 0.$$

On est ramené à résoudre le système d'inéquations simultanées :

$$-3\,m + 1 > 0; \qquad m\,(m + 5) > 0; \qquad m\,(m + 1) > 0;$$

$$\frac{m+1}{m} > 0; \qquad \frac{-m+1}{m} < 0.$$

Les valeurs $m > \frac{1}{3}$; $-5 < m < 0$; $-1 < m < 0$ et $0 < m < 1$ sont à éliminer :

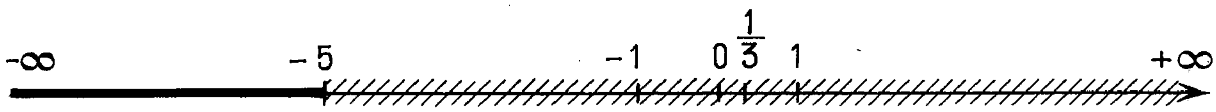



Fig. 159.

Il reste $m < -5$, ce qui est en accord avec les résultats trouvés au n° 400.

**402. Discussion graphique.** — Rappelons que pour étudier l'existence des racines de l'équation $f(x) = m$, il suffit de couper la courbe $y = f(x)$ par la droite variable $y = m$ (n° 322). Si on a, au préalable construit les intersections de la courbe avec les droites $x = \alpha$, $x = \beta$, on voit immédiatement à quel intervalle $]-\infty, \alpha[$, $[\alpha, \beta]$ ou $]\beta, +\infty[$ appartient toute racine de l'équation $f(x) = m$. C'est ainsi que nous avons obtenu (n° 152) la position des racines de l'équation $x^2 - 2\,x - 4 + m = 0$ par rapport à $-1$ et $\frac{5}{2}$. Étudions quelques autres exemples.

**403. Exemple I.** — *Étudier graphiquement, la position par rapport aux nombres* 0 *et* 2 *des racines de l'équation :* $mx^2 - (2\,m + 1)\,x + m + 5 = 0$.

Pour $x \neq 1$ cette équation s'écrit : $\dfrac{2\,x - 5}{(x-1)^2} = m$.

La fonction $y = \dfrac{2\,x - 5}{(x-1)^2}$ est définie et continue pour $x \neq 1$. Comme $y' = \dfrac{2\,(x-1)\,(4-x)}{(x-1)^4}$, on obtient :

| $x$ | $-\infty$ | | | 1 | | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | | ‖ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ | ‖ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{3}$ | $\searrow$ | $0$ |

La courbe représentative admet pour asymptotes les droites $x = 1$ et $y = 0$, pour sommet le point S $\left(4; \frac{1}{3}\right)$. Elle coupe la droite $x = 0$ au point A $(0; -5)$, la droite $x = 2$ au point B $(2; -1)$ et la droite $y = 0$ au point C $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. En la coupant par la droite variable $y = m$, on vérifie les résultats obtenus au n° 400 :

| $m$ | CONCLUSIONS |
|---|---|
| $+\infty$ | |
| | Pas de racines réelles |
| $\frac{1}{3}$ | —— $0 < 2 < x' = x'' = 4$ |
| | $0 < 2 < x' < x''$ |
| $0$ | $=\!=$ 1 racine : $0 < 2 < x = \frac{5}{2}$ |
| | $x' < 0 < 2 < x''$ |
| $-1$ | —— $x' < 0 < x'' = 2$ |
| | $x' < 0 < x'' < 2$ |
| $-5$ | —— $x' = 0 < x'' < 2$ |
| | $0 < x' < x'' < 2$ |
| $-\infty$ | |

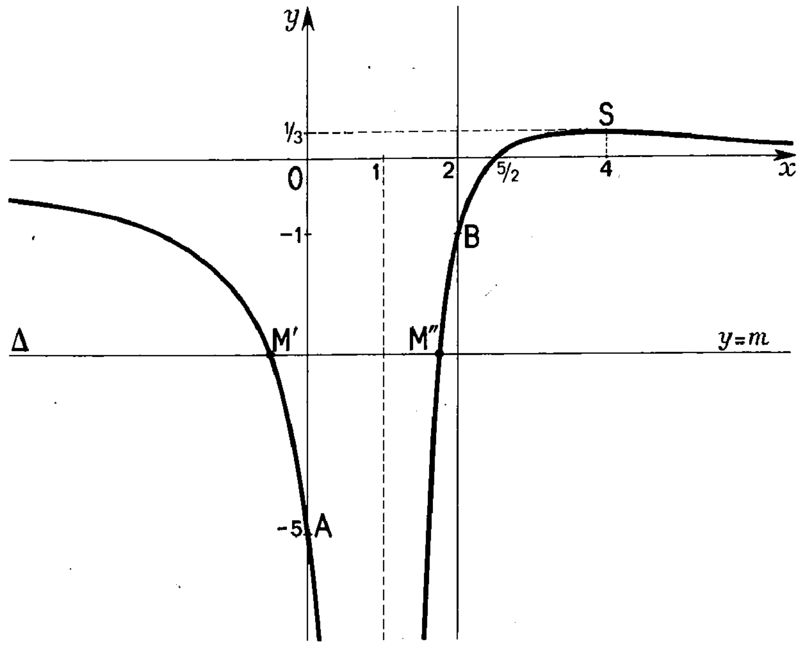


Fig. 160.

**404. Exemple II.** — *Étudier l'existence et la position par rapport aux nombres* — 1 *et* $\frac{5}{2}$ *des racines de l'équation :* $|x^3 - 3x - 2| = m$.

Opérons graphiquement en construisant la courbe $y = |x^3 - 3x - 2|$

Posons : $$z = -x^3 + 3x + 2 = (x+1)^2(2-x),$$

on voit que : $x \leqslant 2 \Longrightarrow z \geqslant 0$ et $y = z$ tandis que $x > 2 \Longrightarrow z < 0$ et $y = -z$.

La variation de $y$ se déduit de celle de $z$.

Comme : $z' = -3(x^2 - 1) = -3(x-1)(x+1)$ on obtient :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-9$ | $-$ | |
| $z$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+4$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Il suffit de construire (fig. 161) la courbe $z = -x^3 + 3x + 2$. On conserve la partie relative à $x \leqslant 2$ et on prend la symétrique par rapport à O$x$ de la branche relative à $x > 2$.

L'équation $|x^3 - 3x - 2| = m$ est l'équation aux abscisses des points d'intersection de la courbe obtenue et de la droite variable Δ d'équation $y = m$. Construisons sur la courbe les points :

A $(-1; 0)$; B $(1; 4)$; C $(2; 0)$ et D $\left(\frac{5}{2}; \frac{49}{8}\right)$.

La droite Δ peut couper la courbe en 4 points dont les abscisses $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ correspondent respectivement aux arcs A$u$, AB, BC et C$v$. On obtient :

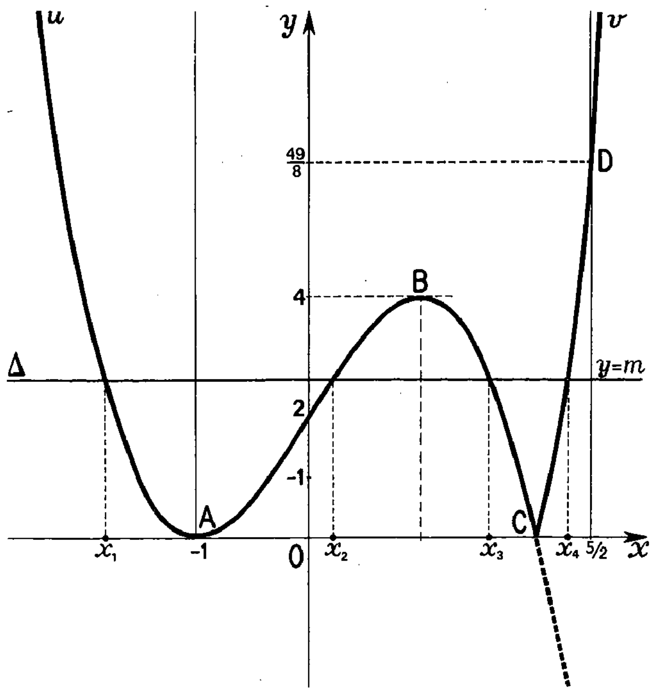



Fig. 161.

| $m$ | CONCLUSIONS |
|---|---|
| $+\infty$ | |
| | $x_1 < -1 < \frac{5}{2} < x_4$ |
| $\frac{49}{8}$ | $x_1 < -1 < x_4 = \frac{5}{2}$ |
| | $x_1 < -1 < x_4 < \frac{5}{2}$ |
| $4$ | $x_1 < -1 < x_2 = x_3 < x_4 < \frac{5}{2}$ |
| | $x_1 < -1 < x_2 < x_3 < x_4 < \frac{5}{2}$ |
| $0$ | $x_1 = x_2 = -1 < x_3 = x_4 < \frac{5}{2}$ |
| | *Pas de racines* |
| $-\infty$ | |

## EXERCICES

— Étudier suivant les valeurs de $x$ le signe des trinômes suivants :

**1295.** $x^2 - 3x + 2$. **1296.** $-x^2 + 2x - 1$. **1297.** $x^2 - x + 1$.

**1298.** $x^2 - 5x + 6$. **1299.** $-x^2 + 6x - 9$. **1300.** $x^2 + 8x + 15$.

**1301.** $7x^2 - 12x + 5$. **1302.** $3x^2 + 8x - 11$. **1303.** $5x^2 - 7x - 12$.

**1304.** $(5x + 7)(x - 4)$. **1305.** $(2x - 3)(7 - 2x)$. **1306.** $(3x + 1)(x + 5)$.

**1307.** $(x + 1)^2 - 9x^2$. **1308.** $(4x + 5)^2 - 49$. **1309.** $x^2 - (3x + 1)^2$.

— Simplifier les expressions suivantes et étudier leur signe en fonction de $x$.

**1310.** $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4x + 3}$. **1311.** $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4x - 12}$. **1312.** $\dfrac{3x^2 + 5x - 2}{3x^2 - 7x + 2}$.

**1313.** $\dfrac{2x^2 - 9x - 5}{6x^2 - x - 2}$. **1314.** $\dfrac{(6x^2 - 5x)^2 - 1}{x^2 - (2x^2 - 1)^2}$. **1315.** $\dfrac{(x^2 - 7x + 12)^2 - (x - 3)^2}{(x - 3)^4 - (x - 3)^2}$.

**1316.** $\dfrac{x + 1}{x^2 + x - 2} - \dfrac{x}{x^2 - 1}$. **1317.** $\dfrac{x + 7}{x^2 - x - 6} + \dfrac{x - 10}{x^2 + x - 2} + \dfrac{x - 7}{x^2 - 4x + 3}$.

**1318.** $\dfrac{x - 2}{2x^2 + 7x + 3} - \dfrac{2x - 1}{4x^2 + 8x + 3}$. **1319.** $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 8x + 15} - \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 5} + \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5}$.

— Étudier l'existence et le signe des racines des équations suivantes :

**1320.** $x^2 - 2(m + 1)x + 3m - 5 = 0$.

**1321.** $(m - 1)x^2 - (m - 3)x - (m + 3) = 0$.

**1322.** $(m + 1)x^2 - 4x - 2(2m + 1) = 0$.

**1323.** $(3m-2)x^2-2(5m-2)x+3(2m+1)=0.$

**1324.** $x^2-4(m+3)x+6(m^2-5m+6)=0.$

**1325.** $2x^2+2(m+1)x+m^2+m-12=0.$

**1326.** $x^2-2(m-2)x+2m^2-15m-8=0.$

— Montrer, sans en calculer le discriminant, que les équations suivantes ont deux racines :

**1327.** $(x+1)(x-3)+x^2-4=0.$

**1328.** $(x-1)(x-4)+(x-2)(x-5)=0$

**1329.** $x^2-9+mx(x-5)=0.$

**1330.** $x(x-a+b)+(x-a)(x+b)=0.$

**1331.** $x(x+4)+m(x^2-1)=0.$

**1332.** $(x-m)(x-n)+a(5x-3m-2n)=0.$

— Résoudre les inéquations suivantes :

**1333.** $3x^2-11x+8>0.$

**1334.** $15x^2-14x+3<0.$

**1335.** $49x^2-70x+25>0.$

**1336.** $4x^2-19x+5<0.$

**1337.** $(2x-7)(15-3x)<0.$

**1338.** $(3x-1)(4x-20)>0.$

**1339.** $(x^2-9)(x^2+5x-6)<0.$

**1340.** $(x^2+5x-6)^2-9(x^2-4x+3)^2>0.$

**1341.** $\dfrac{6x+2}{3x+9}+\dfrac{x-1}{2x+1}>6.$

**1342.** $\dfrac{7x+10}{5x+17}+\dfrac{25(x-2)}{10x^2+49x+51}>0.$

— Résoudre les inéquations simultanées :

**1343.** $\begin{cases} x^2-7x+6<0 \\ x^2-8x+15>0. \end{cases}$

**1344.** $\begin{cases} x^2-14x+31>0 \\ x^2-18x+9<0. \end{cases}$

**1345.** $\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ 7x^2-31x-20<0 \end{cases}$

**1346.** $\begin{cases} (x^2-11x)^2<9(x+5)^2 \\ (x^2-12x+24)^2>4x^2. \end{cases}$

**1347.** $\begin{cases} x^2-6x-16<0 \\ x^2-8x+15>0 \\ \dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{9}>0. \end{cases}$

**1348.** $\begin{cases} (5x-19)^2<(x-23)^2 \\ (4x-11)^2-(2x-7)^2>0 \\ \dfrac{5}{x-1}>\dfrac{4}{2x-5}. \end{cases}$

— Déterminer $m$ de façon que les inégalités suivantes soient vérifiées quel que soit $x$ :

**1349.** $x^2-(3m-2)x+2m^2-5m-2>0.$

**1350.** $mx^2+4(m+1)x+m-5<0.$

**1351.** $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6>0.$

**1352.** $(2m-1)x^2-2x+4m-3<0.$

— Quelles valeurs faut-il donner à $m$ pour que les équations suivantes aient deux racines positives ?

**1353.** $x^2-2(m-1)x-3m+7=0.$

**1354.** $(m-3)x^2+(m+3)x-m-1=0.$

**1355.** $(m+1)x^2-(m+3)x+3-m=0.$

**1356.** $x^2-(4m+2)x+6m^2-5m+1=0.$

**1357.** $mx^2-(6m-8)x+4m-3=0.$

**1358.** $(m-1)x^2-2(m+1)x+2m+5=0.$

— Étudier suivant les valeurs de $m$ la position des nombres donnés par rapport aux racines des équations suivantes :

**1359.** $x^2+(m+4)x+m+7=0$ Nombres donnés : $+2.$

**1360.** $mx^2+2(3m-2)x+4m-3=0$ $-1.$

**1361.** $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + 2m = 0$ — $+1$.

**1362.** $(2m+1)x^2 + 2x + m + 1 = 0$ — 0 et 4.

**1363.** $(3m-2)x^2 - 2(5m-2)x + 3(2m+1) = 0$ — 1 et 3.

**1364.** $(m-2)x^2 - 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0$ — 2 et 3.

**1365.** $3x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 6m + 8 = 0$ — 1 et 4.

**1366.** $(m+2)x^2 - 12x + 2(m-5) = 0$ — 1 et 5.

— Dans les exercices suivants on procédera graphiquement en écrivant l'équation donnée sous la forme $f(x) = m$ et en construisant d'abord la courbe $y = f(x)$ :

**1367.** $x^2 - 6x + m - 4 = 0$ Nombres donnés : 1 et 4.

**1368.** $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ — $-1$ et 2.

**1369.** $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ — 0 et 3.

**1370.** $x^2 - (2m+1)x + 4m + 1 = 0$ — 1 et 5.

**1371.** $(m-2)x^2 - 3(m-1)x + 3m = 0$ — 0 et 2.

**1372.** $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ — 0 et 3.

**1373.** $mx^2 - x - 4m + 5 = 0$ — $-1$ et $\frac{5}{2}$.

**1374.** $(m-1)x^2 - (m+4)x - 2m - 3 = 0$ — $-1$ et 3.

— Déterminer $m$ pour que les équations suivantes aient deux racines satisfaisant à la disposition indiquée.

**1375.** $mx^2 - 2(m-1)x - (m+1) = 0$ Disposition : $0 < x' < 2 < x''$.

**1376.** $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ — $-1 < x' < 4 < x''$.

**1377.** $x^2 + 2(m+1)x + 1 = 0$ — $0 < x' < x'' < 3$.

**1378.** $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 = 0$ — $1 < x' < x'' < 5$.

**1379.** On considère l'équation : $(m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$.

1° Étudier suivant les valeurs de $m$ l'existence et le signe des racines $x'$ et $x''$.

2° Établir la relation indépendante de $m$ qui existe entre $x'$ et $x''$. En déduire la valeur de $x''$ quand $x' = -2$. Vérifier en calculant $m$, puis $x'$ et $x''$.

3° Déterminer $m$ de façon que l'on ait : $5x' = -3x''$.

**1380.** Soit l'équation : $(m-2)x^2 + 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0$.

1° Discuter l'existence et le signe des racines de cette équation.

2° Quelle est la relation indépendante de $m$ qui existe entre les racines $x'$ et $x''$ ? Retrouver à l'aide de cette relation les valeurs des racines doubles.

3° Calculer en fonction de $m$ l'expression $y = \frac{1}{x'+1} + \frac{1}{x''+1}$. Trouver les valeurs de $m$ pour lesquelles $y = 2$.

**1381.** Étant donnée l'équation : $x^2 - (2m+1)x + \frac{1}{4}(3m-1)(2m-1) = 0$.

1° Étudier, suivant les valeurs de $m$, l'existence et le signe des racines.

2° Calculer $m$ et $x''$ lorsque $x' = 5{,}5$.

3° Calculer l'expression : $\frac{1}{2x' - 3} + \frac{1}{2x'' - 3}$ et déterminer $m$ de façon que cette expression soit égale à $-\frac{2}{3}$. Vérifier.

**1382.** Soit l'équation : $x^2 - 2(m+1)x + 3m + 2 = 0$.

1° Étudier le signe et l'existence des racines de cette équation pour chaque valeur de $m$.

2° Déterminer $m$ de façon que l'équation ait deux racines réelles telles que leur somme soit égale à la somme de leurs cubes. Vérifier.

3° Établir que les racines de cette équation vérifient une relation indépendante de $m$. Déduire de cette relation les valeurs des racines quand elles sont égales.

**1383.** Étant donnée l'équation du second degré :

(E) $$ax^2 - 2(a+1)x + (a+1)^2 a = 0,$$

on désignera par S la somme de ses racines et par P leur produit.

1° Pour quelles valeurs de $a$ l'équation (E) a-t-elle des racines ? On se limitera dans la suite à ces valeurs.

2° Discuter le signe de S et de P ; en déduire, dans les différents cas, le signe des racines de l'équation (E).

3° Montrer que l'on peut exprimer P en fonction de S et indépendamment de $a$.

4° Pour quelles valeurs de $a$ les racines $x'$, $x''$ de (E) sont-elles liées par la relation $x' = 3x''$ ?

**1384.** Soit le trinôme : $y = x^2 - 2(m+1)x + 3m + 2$.

1° Étudier suivant les valeurs de $m$ la position du nombre $+2$ par rapport aux racines de ce trinôme.

2° Montrer que ces racines vérifient une relation indépendante de $m$. L'établir.

3° Calculer les valeurs de $m$ pour lesquelles la somme des racines est égale à la somme de leurs cubes.

**1385.** Soit l'équation : $(m-2)x^2 - 2(m+3)x + 5m = 0$.

1° Étudier suivant les valeurs de $m$ l'existence et la position des racines $x'$ et $x''$ par rapport aux nombres $-1$ et $2$.

2° Déterminer $m$ de façon que l'on ait : $x' + 2x'' = 3$.

3° Établir la relation indépendante de $m$ qui existe entre les racines.

**1386.** On considère le trinôme : $(m+1)x^2 + 4mx + m + 6$.

1° Pour quelles valeurs de $m$ a-t-il ses racines réelles ?

2° Quels sont les signes des racines pour ces valeurs de $m$ ?

3° Pour quelles valeurs de $m$ le nombre 2 est-il compris entre les racines ?

**1387.** On considère le trinôme : $f(x) = (3\alpha - 2)x^2 + 2\alpha x + 3\alpha$, et l'on demande quelles valeurs il faut attribuer à $\alpha$ :

1° Pour que l'équation $f(x) = 0$ admette une racine et une seule, entre 0 et $-1$ ;

2° Pour que l'équation admette deux racines toutes deux extérieures à l'intervalle $(-1, 0)$.

**1388.** On considère l'équation : $5x^2 - 4ax + a^2 - m^2 = 0$ où $a$ désigne un nombre positif donné.

1° Pour quelles valeurs positives de $m$ les racines $x'$ et $x''$ sont-elles réelles et quels sont leurs signes ?

2° $m$ ayant une quelconque de ces valeurs, classer les deux nombres $\frac{a+m}{2}$ et $\frac{a-m}{2}$ par rapport aux deux racines.

**1389.** Les racines d'une équation du second degré vérifient les relations :

$$x' + x'' + 2x'x'' = 0,$$
$$m(x' + x'') - x'x'' = 3m + 4.$$

1° Former cette équation.

2° Étudier, suivant les valeurs de $m$, les signes de ses racines.

3° Déterminer comment il faut choisir $m$ pour que l'équation ait une seule racine comprise entre $-1$ et $4$.

**1390.** 1° Discuter, d'après les valeurs de $m$, le nombre des racines de l'équation :

$$(m - 1)x^2 + (2m - 3)x + m + 1 = 0$$

qui sont comprises entre $-2$ et $+1$.

2° Pour quelles valeurs de $m$ l'une des racines de l'équation est-elle double de l'autre ?

**1391.** On considère l'équation du 2e degré en $x$ :

$$(2m - 1)x^2 - 2(m + 4)x + 5m + 2 = 0.$$

1° Étudier graphiquement l'existence et la position des racines par rapport aux nombres $-1$ et $+1$.

2° Établir la relation indépendante de $m$ qui relie les racines.

3° Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles les racines vérifient la relation :

$$x'^2 + x''^2 = 2x'x'' + 16.$$

**1392.** 1° Étant donnée l'équation :

$$mx^2 - 3(m + 2)x + m + 16 = 0, \qquad (1)$$

discuter, suivant les valeurs de $m$, l'existence des racines de cette équation et leur position par rapport aux nombres 0 et 1.

2° En désignant par $x'$ et $x''$ ces racines, former l'équation (2) qui admet pour racines :

$$X' = \frac{1 - x'}{x'} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{1 - x''}{x''}.$$

Démontrer que si l'équation (1) a des racines, il en est de même de (2) et inversement, et qu'à toute racine de l'équation (1) comprise entre 0 et 1 correspond par les formules précédentes une racine positive de (2) et réciproquement.

3° Déduire de là une seconde méthode pour retrouver les résultats de la première partie.

# ÉQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRÉ

**405. Équations de la forme : A.B.C.** $= 0$. — Les racines de cette équation sont (n° 326) celles des équations :

$$A = 0; \quad B = 0 \quad \text{et} \quad C = 0$$

que nous savons résoudre lorsque A, B et C sont des polynômes du premier ou du second degré. Pour résoudre l'équation $P(x) = 0$ il suffit donc de pouvoir factoriser le polynôme $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du 2e degré au plus.

EXEMPLE : $$(2x^2 - 5x + 1)^2 - (x^2 - 5x + 6)^2 = 0$$

En appliquant l'identité : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, l'équation s'écrit :

$$(2x^2 - 5x + 1 + x^2 - 5x + 6)(2x^2 - 5x + 1 - x^2 + 5x - 6) = 0.$$

Soit : $$(3x^2 - 10x + 7)(x^2 - 5) = 0.$$

Le premier facteur donne les racines : 1 et $+\frac{7}{3}$ et le second : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

**406. Équations du troisième degré.** — L'équation à coefficients réels du troisième degré en $x$ s'écrit, avec $a \neq 0$ :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{1}$$

Si on connaît une racine $x = \alpha$ de cette équation, le polynôme $P(x)$ placé au premier membre est tel que $P(\alpha) = 0$. Il est donc (n° 47) divisible par $(x - \alpha)$ et l'équation s'écrit :

$$(x - \alpha)\left(ax^2 + \lambda x - \frac{d}{\alpha}\right) = 0.$$

En identifiant les termes en $x^2$ on trouve $\lambda = a\alpha + b$ et on obtient :

$$(x - \alpha)\left[ax^2 + (a\alpha + b)x - \frac{d}{\alpha}\right] = 0. \tag{2}$$

Outre la racine $\alpha$, l'équation (2) admet les racines du trinôme entre crochets. On obtient ainsi une ou trois racines réelles.

Notons que si $a$, $b$, $c$, $d$ sont entiers, il faut chercher l'entier $\alpha$ s'il existe parmi les diviseurs entiers positifs ou négatifs de $d$, sans oublier $\pm 1$.

**407. Exemples.** — 1° *Résoudre l'équation :* $2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = 0$.

On voit que la somme des coefficients des termes de degré pair est égale à celle des coefficients de degré impair : $-11 + 15 = 2 + 2$. Le premier membre, nul pour $x = -1$, est divisible par $(x + 1)$ et l'équation devient : $(x + 1)(2x^2 - 13x + 15) = 0$.

D'où les trois racines, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ et $x_3 = 5$.

2° *Résoudre, sachant qu'elle admet la racine* x = 3, *l'équation :* $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$

On vérifie que : $3^3 - 7.3^2 + 36 = 0$

Soit par différence : $(x^3 - 3^3) - 7(x^2 - 3^2) = 0$.

$$(x - 3)[(x^2 + 3x + 3^2) - 7(x + 3)] = 0$$
$$(x - 3)(x^2 - 4x - 12) = 0.$$

L'équation proposée admet donc, outre $x = 3$, les racines de l'équation
$$x^2 - 4x - 12 = 0, \text{ soit : } x = 6 \text{ et } x = -2.$$

**408. Équation :** $x^3 + px + q = 0$. — Rappelons (n° 180) que toute équation du 3e degré $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, peut se ramener à cette forme en posant : $x + \frac{b}{3a} = X$.

L'équation $x^3 + px + q = 0$ admet pour :

$4p^3 + 27q^2 < 0$ : 3 *racines réelles distinctes;*
$4p^3 + 27q^2 > 0$ : 1 *racine réelle unique;*
$4p^3 + 27q^2 = 0$ : 1 *racine simple* $x_1 = \frac{3q}{p}$, *une racine double* $x_2 = -\frac{3q}{2p}$.

Exemple. — *Résoudre l'équation :* $x^3 - 3\alpha\beta x - (\alpha^3 + \beta^3) = 0$ (1)

L'identité : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ montre que cette équation s'écrit : $(x - \alpha - \beta)[x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2] = 0$.

Le trinôme entre crochets a pour discriminant $\Delta = -3(\alpha - \beta)^2$. Donc :

Pour $\alpha \neq \beta$, l'équation (1) a une racine unique : $x = \alpha + \beta$.

Pour $\alpha = \beta$, elle s'écrit : $(x - 2\alpha)(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2) = 0$ et admet une racine simple $x_1 = 2\alpha$, une racine double $x_2 = -\alpha$.

Ces résultats sont en accord avec ce qui précède car $4p^3 + 27q^2$ est égal à $27(\alpha^3 - \beta^3)^2$, expression positive pour $\alpha \neq \beta$, nulle pour $\alpha = \beta$.

## ÉQUATION ET TRINÔME BICARRÉS.

**409. Équation bicarrée.** — On appelle trinôme bicarré tout polynôme de la forme :
$$f(x) \equiv ax^4 + bx^2 + c. \qquad a \neq 0.$$

C'est donc un trinôme du second degré en $x^2$ admettant pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Pour résoudre l'équation bicarrée : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)

on pose (n° 320) : $x^2 = y$. Pour qu'un nombre $x$ soit racine de l'équation (1) il faut et il suffit que le système :
$$\begin{cases} ay^2 + by + c = 0 & (2) \\ x^2 = y & (3) \end{cases}$$

admette une solution en $x$ et $y$. L'équation (2) est dite *équation résolvante* de l'équation (1). A toute racine réelle positive $y$ de l'équation (1) correspondent deux racines réelles opposées $\pm\sqrt{y}$ de l'équation bicarrée. Le nombre de ces racines dépend donc du nombre des racines réelles positives (ou nulles) de l'équation résolvante.

### 410. Exemples.

1° $4x^4 - 109x^2 + 225 = 0.$

L'équation résolvante : $4y^2 - 109y + 225 = 0$ admet $y' = \frac{9}{4}$ et $y'' = 25$.

$$x^2 = \frac{9}{4} \Longrightarrow x = \pm\frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x^2 = 25 \Longrightarrow x = \pm 5.$$

D'où les 4 racines réelles : $+\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+5$ et $-5$ pour l'équation bicarrée.

2° $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0.$

L'équation résolvante $3y^2 - 22y - 45 = 0$ admet $y' = -\frac{5}{3}$ et $y'' = 9$

$x^2 = -\frac{5}{3}$ est impossible dans R. Il reste $x^2 = 9 \Longrightarrow x = \pm 3$.

Donc 2 racines réelles $+3$ et $-3$ pour l'équation proposée.

3° $x^4 + 17x^2 + 52 = 0 \Longrightarrow y^2 + 17y + 52 = 0.$
Soit $y' = -4$, $y'' = -13$. Équation en $x$ impossible dans R.

4° $2x^4 - x^2 + 1 = 0$. L'équation résolvante n'a pas de racines réelles. Il en est de même de l'équation bicarrée.

**411. Application.** — *Étudier suivant les valeurs de m l'existence des racines de l'équation :*

$$(m+1)x^4 - 2mx^2 + m - 2 = 0. \qquad (1)$$

Il nous faut étudier le signe des racines de l'équation résolvante :

$$(m+1)y^2 - 2my + m - 2 = 0. \qquad (2)$$

Cette équation est du second degré pour $m \neq -1$ et :

$$\Delta' = m + 2, \qquad P = \frac{m-2}{m+2}; \qquad S = \frac{2m}{m+1}.$$

Les valeurs particulières de $m$ sont : $-2$, $-1$, $0$ et $2$. D'où les résultats :

| $m$ | $\Delta'$ | P | S | Équation résolvante | Équation bicarrée |
|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | | | | | |
| | $+$ | $+$ | $+$ | $0 < y' < y''$ | 4 racines $\pm\sqrt{y'}$ et $\pm\sqrt{y''}$ |
| 2 | 4 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $y' = 0$, $y'' = \frac{4}{3}$ | 1 rac. double 0 et $\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$ |
| | $+$ | $-$ | $+$ | | |
| 0 | ........ | ........ | 0 | $y' < 0 < y''$ | 2 racines : $\pm\sqrt{y''}$ |
| | $+$ | $-$ | $-$ | | |
| $-1$ | | | | 1er degré $y = \frac{3}{2}$ | 2e degré : $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ |
| | $+$ | $+$ | $+$ | $0 < y' < y''$ | 4 racines : $\pm\sqrt{y'}$ et $\pm\sqrt{y''}$ |
| $-2$ | 0 | 4 | 4 | $y' = y'' = 2$ | 2 rac. doubles $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ |
| | $-$ | $+$ | $+$ | Pas de racines | 0 racines réelles. |
| $-\infty$ | | | | | |

**412. Factorisation du trinôme bicarré :** $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Puisque $a \neq 0$, on peut écrire en posant $\frac{b}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = q$ :

$$f(x) = a(x^4 + px^2 + q).$$

**1er Cas :** $q \leqslant \frac{p^2}{4} \Longrightarrow \Delta' = \frac{p^2}{4} - q \geqslant 0$. Le trinôme : $y^2 + py + q$ a deux racines réelles $y'$, $y''$ distinctes ou confondues et s'écrit (n° 386) : $(y - y')(y - y'')$.

Soit : $$f(x) = a(x^2 - y')(x^2 - y'').$$

$$\boxed{f(x) = a\left(x^2 + \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)\left(x^2 + \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)} \qquad (1)$$

Chacun des facteurs du second degré ainsi obtenu peut, si $y' \geqslant 0$ ou si $y'' \geqslant 0$, être factorisé en produit de deux binômes du premier degré à coefficients réels. Ainsi :

*a)* $3x^4 + 17x^2 + 10 = 3(x^2 + \frac{2}{3})(x^2 + 5) = (3x^2 + 2)(x^2 + 5)$

*b)* $x^4 - 7x^2 + 18 = (x^2 + 2)(x^2 - 9) = (x^2 + 2)(x - 3)(x + 3)$

*c)* $4x^4 - 25x^2 + 36 = (x^2 - 4)(4x^2 - 9) = (x - 2)(x + 2)(2x - 3)(2x + 3)$.

**2e Cas :** $q > \frac{p^2}{4}$. La factorisation (1) n'est plus possible. Mais puisque $q > 0$ :

$$f(x) = a\left[(x^2 + \sqrt{q})^2 - x^2(2\sqrt{q} - p)\right]$$

Or : $q > \frac{p^2}{4} \Longrightarrow |p| < 2\sqrt{q} \Longrightarrow 2\sqrt{q} - p > 0$. Donc :

$$\boxed{f(x) = a\left(x^2 - x\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q}\right)\left(x^2 + x\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q}\right)} \qquad (2)$$

Comme $f(x)$ n'a pas de racines réelles il en est de même de chacun des facteurs du second membre et on ne peut pousser plus loin la factorisation. Ainsi :

*a)* $x^4 + x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2 - 9x^2 = (x^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x + 5)$.

*b)* $9x^4 + 17x^2 + 49 = (3x^2 + 7)^2 - 25x^2 = (3x^2 + 5x + 7)(3x^2 - 5x + 7)$.

**3° Remarque.** — La relation $2\sqrt{q} - p > 0$ est réalisée pour $q > \frac{p^2}{4}$ mais aussi pour : $$0 < q \leqslant \frac{p^2}{4} \quad \text{et} \quad p < 0$$

Dans ce cas le trinôme bicarré peut s'écrire sous les formes (1) et (2). Or les inégalités précédentes entraînent $-p - 2\sqrt{q} > 0$, le trinôme peut aussi s'écrire :

$$f(x) = a\left[(x^2 - \sqrt{q})^2 - x^2(-p - 2\sqrt{q})\right]$$

$$\boxed{f(x) = a\left(x^2 - x\sqrt{-p - 2\sqrt{q}} - \sqrt{q}\right)\left(x^2 + x\sqrt{-p - 2\sqrt{q}} - \sqrt{q}\right)} \qquad (3)$$

Cette décomposition se réalise si $y' > 0$ et $y'' > 0$ : le trinôme $f(x)$ se décompose alors en quatre facteurs du premier degré à coefficients réels que l'on peut grouper par deux de trois façons différentes. Ainsi :

$$\begin{aligned}4x^4 - 37x^2 + 9 &= (4x^2 - 1)(x^2 - 9) = (2x + 1)(2x - 1)(x - 3)(x + 3)\\ &= (2x^2 + 3)^2 - 49x^2 = (2x^2 + 7x + 3)(2x^2 - 7x + 3)\\ &= (2x^2 - 3)^2 - 25x^2 = (2x^2 + 5x - 3)(2x^2 - 5x - 3).\end{aligned}$$

**413. Résumé.** — ***Un trinôme bicarré peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs du second degré.***

On peut utiliser la décomposition (2) ou (3) pour résoudre l'équation bicarrée $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ou $x^4 + px^2 + q = 0$, lorsqu'elle a 4 racines réelles distinctes ou confondues. Cela est même indiqué si $q$ est un carré parfait car on obtient les racines sous la forme $\pm\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$ au lieu de $\pm\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

Ainsi on voit que les racines de : $x^4 - 14x^2 + 1 = 0$, égales à $\pm\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}}$, s'écrivent : $\pm 2 \pm \sqrt{3}$.

## ÉQUATIONS RÉCIPROQUES

**414. Définition.** — Une équation réelle entière de degré $n$, est dite réciproque si ses coefficients satisfont à l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° ***Les coefficients extrêmes et équidistants des extrêmes sont égaux deux à deux :***

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{(type I)}$$

2° ***Les coefficients extrêmes et équidistants des extrêmes sont opposés deux à deux :***

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0 = 0 \qquad \text{(type II)}$$

Dans le type II, pour $n = 2p$ il n'y a pas de terme médian en $x^p$ car $a_p = -a_p = 0$.

Une équation réciproque : $f(x) = 0$ de degré $n$ ne peut, puisque $a_0 \neq 0$, admettre de racine nulle. D'autre part :

*A toute racine* $\alpha \neq \pm 1$, *on peut associer la racine* $\frac{1}{\alpha}$ *car* : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \pm \frac{1}{\alpha^n} f(\alpha) = 0.$

Par suite : $$f(x) = 0 \iff f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Les équations du type II et les équations du type I de degré impair se ramènent après élimination des facteurs évidents $x + 1$ ou $x - 1$ à une équation réciproque de degré pair du type I.

Ainsi les équations :
$$\begin{aligned}ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a &= 0\\ ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a &= 0\\ ax^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a &= 0\end{aligned}$$

s'écrivent respectivement :
$$\begin{aligned}(x + 1)[ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a] &= 0\\ (x - 1)[ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (a + b)x + a] &= 0.\\ (x^2 - 1)[ax^4 + bx^3 + (a + c)x^2 + bx + a] &= 0.\end{aligned}$$

**415. Résolution de l'équation :** $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$ (1)

Sur l'ensemble R* des nombres réels autres que zéro, cette équation équivaut à :

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \iff a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \qquad (2)$$

Posons : $$x + \frac{1}{x} = y \implies x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2.$$

Pour que $x \in R^*$ soit racine de l'équation (1), il faut et il suffit que les systèmes équivalents sur $R^*.R$ :

$$\left\{\begin{array}{l} y = x + \dfrac{1}{x} \\ a(y^2 - 2) + by + c = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x^2 - xy + 1 = 0 & (3) \\ ay^2 + by + c - 2 = 0 & (4) \end{array}\right.$$

admettent une solution $(x, y) \in R^*.R$.

Pour toute racine $y$ de *l'équation résolvante* (4), les valeurs correspondantes de $x$ sont données par l'équation (3). Or celle-ci admet deux racines réelles dont le produit est 1 lorsque $y^2 - 4 \geqslant 0$ c'est-à-dire : $|y| \geqslant 2$.

*A toute racine réelle de l'équation résolvante* (4) *dont la valeur absolue est au moins égale à* 2 *correspondent deux racines réelles, inverses l'une de l'autre de l'équation réciproque* (1).

Ce procédé se généralise pour toute équation réciproque de degré pair du type I.

**416. Exemples.** — 1° *Résoudre :* $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$

Cette équation s'écrit : $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$

et conduit au système : $$\left\{\begin{array}{l} x^2 - yx + 1 = 0 \\ 6y^2 + 5y - 50 = 0 \end{array}\right.$$

On obtient $y' = -\frac{10}{3}$ et $y'' = \frac{5}{2}$, et l'on résout :

$$\left\{\begin{array}{lll} x^2 + \dfrac{10}{3}x + 1 = 0 & \text{racines :} & -3 \text{ et } -\dfrac{1}{3} \\ x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1 = 0 & \text{racines :} & 2 \text{ et } \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Soit quatre racines $-3$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et 2 de l'équation proposée.

2° *Résoudre :* $5x^4 - 21x^3 - 16x^2 - 21x + 5 = 0.$

Cette équation équivaut à : $$\left\{\begin{array}{l} x^2 - yx + 1 = 0 \\ 5y^2 - 21y - 26 = 0 \end{array}\right.$$

On obtient $y' = \frac{26}{5}$ et $y'' = -1$.

Pour $y = \frac{26}{5}$ : $\quad x^2 - \frac{26}{5}x + 1 = 0 \implies x = 5$ ou $\frac{1}{5}$

Pour $y = -1 : x^2 + x + 1 = 0$. Équation impossible sur R*. Donc deux racines réelles : 5 et $\frac{1}{5}$ de l'équation proposée.

**417. Équations semi-réciproques.** — Ce sont les équations de degré pair dont les coefficients extrêmes et équidistants des extrêmes sont alternativement égaux et opposés.

Ces équations, qui se conservent lorsqu'on change $x$ en $-\frac{1}{x}$, se ramènent après élimination du facteur éventuel $x^2 + 1$, à une équation analogue qui se résout en posant : $x - \frac{1}{x} = y$.

EXEMPLE. — *Résoudre :* $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0.$ (1)

Sur $R^*$ on obtient : $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$ (2)

En posant $x - \frac{1}{x} = y \implies x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, on est ramené à la résolution du système :

$$\begin{cases} x^2 - yx - 1 = 0 & (3) \\ 2(y^2 + 2) - 3y - 4 = 0. & (4) \end{cases}$$

L'équation (4) s'écrit : $2y^2 - 3y = 0$ et admet pour racines : $y' = 0$, $y'' = \frac{3}{2}$.

D'où d'après (3) : $$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 & \text{racines } 1 \text{ et } -1 \\ x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 & \text{racines } 2 \text{ et } -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

## ÉQUATIONS IRRATIONNELLES

**418. Définition.** — ***Une équation est dite irrationnelle lorsque l'inconnue figure sous un ou plusieurs radicaux.***

Nous nous bornerons à l'étude des équations contenant une ou plusieurs racines carrées. Notons que l'équation : $A + \sqrt{B} = C\sqrt{D}$ par exemple n'a de sens que si les expressions B et D sont toutes deux positives (ou nulles). On fait disparaître les radicaux d'une telle équation par des élévations au carré, opérations qui peuvent introduire des racines étrangères à l'équation initiale (nº 350, 2º).

**419. Équations renfermant un seul radical.** — En isolant ce radical dans un des membres, l'équation prend la forme :

$$A = \sqrt{B}. \tag{1}$$

Elle conduit par élévation au carré à l'équation rationnelle :

$$A^2 = B. \tag{2}$$

Toute racine de l'équation (1) est racine de l'équation (2). Inversement toute racine de l'équation (2) donne même valeur absolue à A et à $\sqrt{B}$. Comme $\sqrt{B}$ est positif ou nul, cette racine sera également solution de l'équation (1) si elle donne à A une valeur positive (ou nulle) donc si elle vérifie la condition : $A \geqslant 0$. (3)

***Les racines de l'équation :*** $A = \sqrt{B}$ ***sont celles de l'équation :*** $A^2 = B$ ***pour lesquelles :*** $A \geqslant 0$.

Il est inutile de vérifier, pour une telle racine la condition : $B \geqslant 0$ car puisque l'on a : $B = A^2$, cette condition est nécessairement remplie.

EXEMPLE. — *Résoudre* : $2x - 3 = \sqrt{2x^2 + 9}$. (1)

En élevant au carré on obtient l'équation résolvante :

$$(2x - 3)^2 = 2x^2 + 9 \iff 2x(x - 6) = 0. \quad (2)$$

Cette dernière admet pour racines 0 et 6. La condition $2x - 3 \geqslant 0$ est vérifiée pour $x = 6$, mais ne l'est pas pour $x = 0$. *Seule $x = 6$ est solution de l'équation* (1).

On vérifie aisément que $x = 0$ serait racine de l'équation : $2x - 3 = -\sqrt{2x^2 + 9}$ qui conduit à la même équation résolvante (2).

**420. Équations renfermant plusieurs radicaux.** — On élimine d'abord les radicaux par des élévations au carré, de façon à obtenir une équation résolvante entière.

Ainsi : $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \implies A + B + 2\sqrt{AB} = C$

puis $A + B - C = -2\sqrt{AB} \implies (A + B - C)^2 = 4AB.$

L'équation entière finale étant résolue, on vérifie chacune des racines obtenues dans l'équation initiale. On écarte alors les racines étrangères qui ont pu être introduites par les élévations au carré ainsi que les racines pour lesquelles les radicandes de l'équation proposée ne sont pas tous positifs ou nuls.

**421. Exemples.** 1° *Résoudre* : $\sqrt{4x + 1} = 1 + \sqrt{3x + 4}$. (1)

On obtient par élévation au carré : $4x + 1 = 1 + 3x + 4 + 2\sqrt{3x + 4}$.

D'où : $x - 4 = 2\sqrt{3x + 4} \implies x^2 - 8x + 16 = 4(3x + 4)$

Soit finalement : $x^2 - 20x = 0$ : racines 0 et 20.

On vérifie que : $x = 20$ est seule racine de l'équation proposée (1) car : $\sqrt{81} = 1 + \sqrt{64}$

Par contre $x = 0$ serait racine de : $\sqrt{4x + 1} = \sqrt{3x + 4} - 1$ car : $\sqrt{1} = \sqrt{4} - 1$.

2° *Résoudre l'équation* : $\sqrt{2x + 11} = \sqrt{2x - 13} + \sqrt{2(x + 1)}$. (2)

On obtient de même : $2x + 11 = 2x - 13 + 2x + 2 + 2\sqrt{(2x - 13)(2x + 2)}$.

Soit : $-2x + 22 = 2\sqrt{4x^2 - 22x - 26} \iff -x + 11 = \sqrt{4x^2 - 22x - 26}$.

Puis : $x^2 - 22x + 121 = 4x^2 - 22x - 26$.

Soit : $3x^2 - 147 = 0 \iff x^2 - 49 = 0 \iff (x - 7)(x + 7) = 0$

dont les racines sont $+7$ et $-7$.

La racine $x = 7$ est la solution de l'équation proposée dans R car : $\sqrt{25} = \sqrt{1} + \sqrt{16}$.

Par contre pour $x = -7$ tous les radicandes sont négatifs et l'équation (2) est impossible dans R.

## INÉQUATIONS IRRATIONNELLES

**422. Définition.** — ***Une équation est dite irrationnelle lorsque l'inconnue y figure sous un ou plusieurs radicaux.***

Nous nous bornerons ici à l'étude d'inéquations portant sur une seule racine carrée de la forme $A > \sqrt{B}$ et $A < \sqrt{B}$, inéquations dans lesquelles A et B représentent des expressions algébriques de l'inconnue.

**423. Résolution de l'inéquation** $A > \sqrt{B}$. — Cette inéquation n'a de sens que pour $B \geqslant 0$ et la condition $\sqrt{B} \geqslant 0$ entraîne $A > 0$. Lorsque ces deux conditions sont réalisées, les deux membres de l'inéquation $A > \sqrt{B}$ sont positifs ou nuls et cette inéquation équivaut alors (nº 350, 3º) à : $A^2 > B$. Donc :

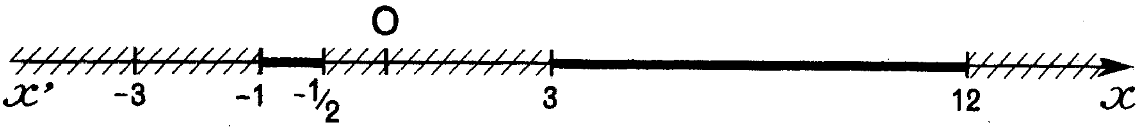
***Les solutions de l'inéquation*** $A > \sqrt{B}$ ***sont les solutions des inéquations simultanées :*** $A > 0$; $B \geqslant 0$ ***et*** $A^2 > B$.

EXEMPLE I. — *Résoudre l'inéquation :* $x + 3 > \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$. (1)

Cette inéquation est de la forme $A > \sqrt{B}$. Elle équivaut par suite au système $A > 0$; $B \geqslant 0$ et $A^2 > B$. D'où les inéquations simultanées :

$$\left|\begin{array}{ll} x + 3 > 0 & \text{vérifiée pour } x > -3 \\ 2x^2 - 5x - 3 \geqslant 0 & \text{vérifiée pour } x \leqslant -\frac{1}{2} \text{ ou pour } x \geqslant 3 \\ (x+3)^2 > 2x^2 - 5x - 3 \Longleftrightarrow x^2 - 11x - 12 < 0 & \text{vérifiée pour } -1 < x < 12 \end{array}\right.$$

L'inéquation (1) est vérifiée (fig. 162) pour : $-1 < x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou pour $3 \leqslant x < 12$.




**424. Résolution de l'inéquation** $A < \sqrt{B}$. — Deux cas sont à envisager suivant le signe de A.

1º Pour $A < 0$, l'inéquation est vérifiée si l'on a : $B \geqslant 0$ car, dans ce cas :

$$A < 0 \leqslant \sqrt{B}.$$

2º Pour $A \geqslant 0$, les deux membres de $A < \sqrt{B}$ sont positifs ou nuls. Cette inéquation équivaut alors (nº 350, 3º) à : $A^2 < B$ qui entraîne nécessairement $B > 0$.

***Les solutions de l'inéquation*** $A < \sqrt{B}$ ***sont donc les solutions de chacun des systèmes :***

$$\begin{cases} A < 0 \\ B \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A \geqslant 0 \\ A^2 < B. \end{cases}$$

EXEMPLE. — *Résoudre l'inéquation :* $x - 3 < \sqrt{2x + 9}$.

1º Pour $x - 3 < 0$ l'inéquation est vérifiée lorsque : $2x + 9 \geqslant 0$,

donc : $$x < 3 \quad \text{et} \quad x \geqslant -\frac{9}{2}. \quad \text{Soit} \quad -\frac{9}{2} \leqslant x < 3. \qquad (1)$$

2º Pour : $x - 3 \geqslant 0$ l'inéquation est vérifiée lorsque $(x - 3)^2 < 2x + 9$,
donc : $$x \geqslant 3 \quad \text{et} \quad x^2 - 8x < 0 \quad \text{ou} \quad x(x - 8) < 0.$$

Or $x \geqslant 3 \Longrightarrow x$ positif, la dernière condition se réduit à $x - 8 < 0$, soit finalement :

$$3 \leqslant x < 8. \qquad (2)$$

En rapprochant les solutions (1) et (2), on voit que l'inéquation est vérifiée pour :

$$-\frac{9}{2} \leqslant x < 8.$$

Graphiquement, on commence par distinguer sur un axe $x'x$ les régions pour lesquelles on a $A < 0$ et les régions correspondant à $A \geqslant 0$ (fig. 163). Dans les premières on hachure les régions qui ne vérifient pas $B \geqslant 0$ et dans la seconde les régions qui ne vérifient pas $A^2 < B$. Les régions non hachurées correspondent aux solutions de l'inéquation : $A < \sqrt{B}$.

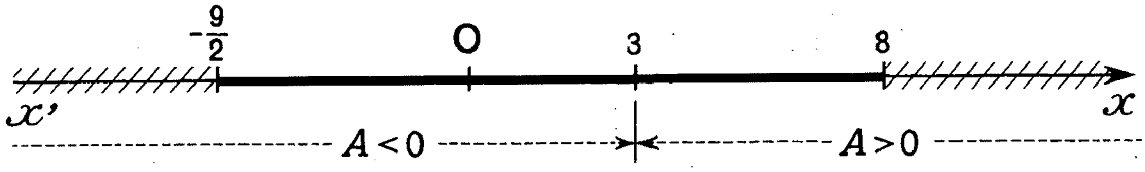



Fig. 163.

**425. Inéquation concernant plusieurs radicaux.** — *Résoudre l'inéquation :*

$$(x - 1)\sqrt{x + 2} > (x + 1)\sqrt{x + 7}. \qquad (1)$$

Les deux membres ne sont définis que si les radicandes sont positifs ou nuls, donc pour $x \geqslant -2$. Le premier membre est alors positif pour $x > 1$ et le second pour $x > -1$. D'où les trois cas :

1° $-2 \leqslant x \leqslant -1$. Les deux membres sont négatifs ou nuls. On peut élever au carré les deux membres de l'inéquation à condition d'en changer le sens :

$$(x - 1)^2 (x + 2) < (x + 1)^2 (x + 7) \Longleftrightarrow 9x^2 + 18x + 5 > 0.$$

Cette inéquation est vérifiée pour $x < -\frac{5}{3}$ ou pour $x > -\frac{1}{3}$.

Dans l'intervalle $[-2, -1]$ l'inéquation (1) est donc vérifiée pour : $-2 \leqslant x < -5/3$.

2° $-1 < x < 1$. Le premier membre de l'inéquation (1) est négatif et le second positif. Elle est donc impossible sur l'intervalle $]-1, +1[$.

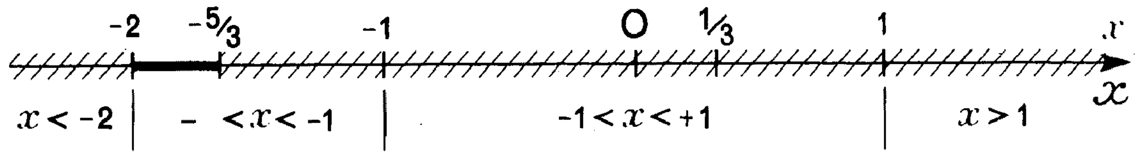



Fig. 164.

3° $x \geqslant 1$. Les deux membres sont positifs et l'inéquation équivaut à

$$(x - 1)^2 (x + 2) > (x + 1)^2 (x + 7),$$

soit à :

$$9x^2 + 18x + 5 < 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{5}{3} < x < -\frac{1}{3}.$$

L'inéquation (1) est donc impossible pour $x \geqslant 1$.

Finalement l'inéquation (1) est vérifiée (fig. 164) pour : $-2 \leqslant x < -\frac{5}{3}$.

## EXERCICES

— Résoudre les équations :

**1393.** $(2x^2 + 5x)(x^2 - 8x + 15)(7x^2 - 27x - 4) = 0.$

**1394.** $(4x - 7)(x^2 - 5x + 4)(2x^2 - 7x + 3) = 0.$

**1395.** $(2x^2 - x - 1)^2 - (x^2 - 7x + 6)^2 = 0.$

**1396.** $(x^3 - 4x^2 + 5)^2 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 5)^2 = 0.$

— Résoudre les équations suivantes :

**1397.** $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0.$

**1398.** $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0.$

**1399.** $x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = 0.$

**1400.** $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$

**1401.** $x^3 + x^2 - 7x + 2 = 0.$

**1402.** $x^3 - 4x^2 - 12x + 35 = 0.$

**1403.** $3x^3 + 14x^2 + 6x - 8 = 0.$

**1404.** $2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0.$

**1405.** $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$

**1406.** $6x^3 - 29x^2 - 17x + 60 = 0.$

**1407.** $5x^3 - 9x^2 - 30x + 36 = 0.$

**1408.** $6x^3 + 5x^2 - 66x + 40 = 0.$

**1409.** $x^3 - x^2(2\sqrt{5} + 3) + 3x(1 + 2\sqrt{5}) - 9 = 0.$

— Résoudre les équations suivantes et factoriser leur premier membre :

**1410.** $x^4 - 25x^2 + 144 = 0.$

**1411.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

**1412.** $x^4 - 48x^2 - 49 = 0.$

**1413.** $x^4 + 2x^2 - 3 = 0.$

**1414.** $x^4 - (m^2 + 1)x^2 + m^2 = 0.$

**1415.** $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0.$

**1416.** $x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36 = 0.$

**1417.** $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$

**1418.** $x^4 - 34x^2 + 225 = 0.$

**1419.** $x^4 - 7x^2 - 144 = 0.$

**1420.** $4x^4 - 29x^2 + 25 = 0.$

**1421.** $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0.$

**1422.** $9x^4 - 4(9m^2 + 4)x^2 + 64m^2 = 0.$

**1423.** $a^2x^4 - (m^2a^2 + b^2)x^2 + m^2b^2 = 0.$

**1424.** $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0.$

**1425.** $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0.$

— Étudier suivant les valeurs de $m$ le nombre des racines des équations :

**1426.** $(m - 2)x^4 - 2mx^2 + m + 1 = 0.$

**1427.** $mx^4 - 2(m + 2)x^2 + m + 3 = 0.$

**1428.** $(2m + 1)x^4 - 2x^2 + m + 1 = 0.$

**1429.** $mx^4 - 2(m - 1)x^2 + m + 6 = 0.$

— Factoriser les trinômes bicarrés suivants :

**1430.** $x^4 + x^2 + 4.$

**1431.** $4x^4 + 3x^2 + 1.$

**1432.** $x^4 + 5x^2 + 9.$

**1433.** $9x^4 + 4x^2 + 1.$

**1434.** $25x^4 + 11x^2 + 4.$

**1435.** $16x^4 - 9x^2 + 25.$

— Résoudre les équations suivantes et en factoriser le premier membre :

**1436.** $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0.$

**1437.** $2x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 3x + 2 = 0.$

**1438.** $2x^4 - x^3 - 11x^2 - x + 2 = 0.$

**1439.** $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0.$

**1440.** $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0.$

**1441.** $10x^4 - 63x^3 + 52x^2 + 63x + 10 = 0.$

**1442.** $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0.$

**1443.** $x^6 - 3x^5 + x^4 + x^2 + 3x + 1 = 0.$

**1444.** $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0.$

**1445.** $x^6 + 4x^5 + 2x^4 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$

**1446.** $abx^4 - (a + b)(ab + 1)x^3 + x^2[a^2b^2 + (a + b)^2 + 1] - (a + b)(ab + 1)x + ab = 0.$

**1447.** 1° Exprimer le polynôme $f(x) = x^6 + 3x^5 + x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 5x + 6$ en fonction de $y = x^2 + x$. Factoriser $f(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2° Factoriser $g(x) = (x^2 - x + 2)^2 - 6(x - 1)^2(x^2 - x + 2) + 8(x - 1)^4$ et déterminer ses racines.

**1448.** 1° Montrer que si : $mp + n = p^3$, on peut réaliser l'identité :

$$x^4 - 2\,px^3 + mx^2 + nx \equiv (x^2 - px)^2 + a\,(x^2 - px).$$

2° Résoudre l'équation : $x^4 - 10\,x^3 + 24\,x^2 + 5\,x - 6 = 0$.

**1449.** 1° Montrer que si les nombres réels $\alpha^3$ et $\beta^3$ sont racines de l'équation : $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$, les nombres réels $\alpha$ et $\beta$ vérifient $\alpha^3 + \beta^3 = -q$ et $3\,\alpha\beta = -p$.

2° Établir que, dans ce cas, l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet la racine réelle unique $x = \alpha + \beta$.

3° Résoudre les équations : $x^3 - 45\,x - 152 = 0$ et $8\,x^3 + 72\,x + 37 = 0$.

**1450.** 1° Démontrer que l'équation $x^3 - 3\,k^2x - 2\,k^3 \cos 3\alpha = 0$ admet trois racines réelles. distinctes. En posant $x = 2\,k \cos \varphi$ exprimer ces racines en fonction de $k$ et de $\alpha$.

2° Peut-on ramener à la forme ci-dessus l'équation $x^3 + px + q = 0$ ?

3° Résoudre les équations $x^3 - 12\,x - 8 = 0$ et $x^3 - 75\,x + 125\,\sqrt{2} = 0$.

**1451.** On fait, dans le polynôme réciproque $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ le changement de variable $x = \dfrac{1+y}{1-y}$.

1° Montrer que $P(x) = \dfrac{1}{(1-y)^4}(Ay^4 + By^2 + C)$. En déduire que l'on peut toujours factoriser $P(x)$ sous forme d'un produit de deux facteurs.

2° Factoriser le polynôme $P(x) = 5\,x^4 + 24\,x^3 + 42\,x^2 + 24\,x + 5$.

— Résoudre les équations suivantes :

**1452.** $\sqrt{x^2 - 1} = x + 3$.

**1453.** $1 + \sqrt{2x + 1} = 3x$.

**1454.** $\sqrt{(4x - 7)(x + 8)} - 2x = 3$.

**1455.** $\sqrt{3x^2 + 2x + 4} = 2 - x$.

**1456.** $x + 2\sqrt{x^2 - 11} = 16$.

**1457.** $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = 2$.

**1458.** $x - \sqrt{4x - 19} = 4$.

**1459.** $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 4} = 3$.

**1460.** $2x + \sqrt{(x + 1)(x - 5)} = 18$.

**1461.** $\sqrt{10x - 3} + \sqrt{5x - 3} = 5\sqrt{3}$.

**1462.** $\sqrt{x^2 - 6x + 13} = x - 1$.

**1463.** $\sqrt{x - 5} = \dfrac{x}{3} - 5$.

**1464.** $x - \sqrt{2x + 1} = 7$.

**1465.** $5 - x = \sqrt{25 - 4x^2}$.

— Résoudre les équations suivantes :

**1466.** $\sqrt{2 + \sqrt{3x - 5}} = \sqrt{x + 1}$.

**1467.** $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{5 - x} - \sqrt{3 - 2x}$.

**1468.** $\sqrt{28 + 2x} = \sqrt{21 + x} + 1$.

**1469.** $\sqrt{4x - 7} + \sqrt{x} = \sqrt{11x - 19}$.

**1470.** $2x^2 = 5x - \sqrt{x^2 + 20x - 4}$.

**1471.** $\sqrt{7x + 50} - \sqrt{5x + 6} = \sqrt{8x}$.

**1472.** $2x^2 - 3 = 2x - 3\sqrt{2x^2 - 2x + 1}$.

**1473.** $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5 - 8x} = \sqrt{4x + 7}$.

**1474.** $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{2x + 4\sqrt{2}}$.

**1475.** $\sqrt{x - 3} + \sqrt{7 - x} = \sqrt{x + 1}$.

**1476.** $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$.

**1477.** $x + \sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{3x^2 - 11}$.

**1478.** $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{6x + 7}$.

**1479.** $\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = 2$.

**1480.** $\dfrac{x - 1 - \sqrt{2x + x^2}}{\sqrt{2x + x^2}} = \dfrac{\sqrt{x - 2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

**1481.** $\dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{1 + x}} + \dfrac{1 + x}{1 + \sqrt{1 - x}} = 1$.

**1482.** $\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[6]{x^2 - 1}$.

**1483.** $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x + a} + \sqrt[3]{x + b} = 0$.

**1484.** $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \sqrt{x+b} - \sqrt{x-b}.$

**1485.** $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = \sqrt{x+12} + \sqrt{x-3}.$

**1486.** $\sqrt{3+\sqrt{9-x^2}} - \sqrt{3-\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{3-x}.$

**1487.** $\sqrt{x+24} + \sqrt{x-24} = \sqrt{x-16} + \sqrt{x}.$

— Résoudre et discuter les équations en $x$ suivantes :

**1488.** $\sqrt{x^2-6x+m} = x-1.$

**1489.** $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-m}.$

**1490.** $2 + \sqrt{x^2-2mx+1} = x.$

**1491.** $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3} = \sqrt{x} + \sqrt{x-m}.$

**1492.** $\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}} = m.$

**1493.** $\dfrac{\sqrt{x+R}+\sqrt{x-R}}{\sqrt{x+R}-\sqrt{x-R}} = a \quad (a > 0).$

— Résoudre les inéquations en $x$ suivantes :

**1494.** $\sqrt{x^2+1} < 2x+1.$

**1495.** $\sqrt{(x+1)^2+3} - 3x > 2.$

**1496.** $\sqrt{(x+1)(x+3)} + 1 < x.$

**1497.** $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} < \sqrt{2x+3}.$

**1498.** $\sqrt{3x+2} < \sqrt{x+2}.$

**1499.** $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} < \sqrt{x+7} + \sqrt{x-8}.$

**1500.** $\sqrt{(4x-3)(x+2)} - 2 > 2x.$

**1501.** $\sqrt{2x+1} > \sqrt{4x+1} - \sqrt{2x-1}$

**1502.** $\sqrt{x+4} < 2\sqrt{x+2}.$

**1503.** $\sqrt{x+6} - \sqrt{x} > \sqrt{x-4} - \sqrt{x-6}.$

**1504.** $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-1}} < \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}.$

**1505.** $\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} + 3 > x.$

# SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

**426. Principes de résolution.** — Pour résoudre un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues $x$, $y$, $z$, on utilise les procédés de *combinaison linéaire*, de *substitution* ou de *changements d'inconnues* déjà vus (20e leçon). On peut ainsi simplifier les équations du système, éliminer une ou plusieurs inconnues et le ramener à une équation à une seule inconnue.

La résolution de cette dernière permet alors d'obtenir, pour chaque racine trouvée, les valeurs correspondantes des autres inconnues.

**427. Systèmes se ramenant à une équation du second degré.** — Il en est ainsi des systèmes à deux inconnues comprenant une équation du premier degré et une équation du second degré. On opère par substitution :

EXEMPLE. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 3xy + y^2 - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ce système équivaut à :
$$\begin{cases} y = \dfrac{3x-5}{2} & (3) \\ 2x^2 - 3x\left(\dfrac{3x-5}{2}\right) + \left(\dfrac{3x-5}{2}\right)^2 - 4 = 0. & (4) \end{cases}$$

L'équation (4) se réduit à : $x^2 - 9 = 0$, d'où $x = +3$ ou $-3$.

L'équation (3) donne pour $x = 3$; $y = 2$ et pour $x = -3$, $y = -7$.

D'où les deux solutions : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -3 \\ y = -7. \end{cases}$

**428. Systèmes de deux équations du second degré.** — Le système le plus général de deux équations du second degré à deux inconnues s'écrit :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0 \qquad (1)$$
$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2f'y + g' = 0. \qquad (2)$$

1° On peut, par combinaison linéaire, éliminer $y^2$ et obtenir une équation du premier degré en $y$. On résout cette équation par rapport à $y$ et en substituant cette valeur dans l'une des équations (1) ou (2), on est, en général conduit à une équation du 4e degré en $x$.

2° On peut aussi essayer de décomposer l'une des équations (1) ou (2) (ou si cela est impossible, une combinaison simple de ces deux équations) en un produit de deux facteurs du 1er dégré en $x$ et en $y$.

Ainsi soit $a \neq 0$. Pour que l'équation (1) se décompose, il faut et il suffit que son premier membre considéré comme trinôme en $x$ admette des racines rationnelles du 1er degré en $y$, donc que son discriminant soit le carré d'un binôme en $y$.

Si $a = c = 0$, l'équation (1) s'écrit : $xy - \alpha y - \beta x + \gamma = 0$. Lorsque $\gamma = \alpha\beta$ elle et équivaut à :
$$(x - \alpha)(y - \beta) = 0$$

Lorsqu'on peut réussir une telle décomposition le système se décompose en deux systèmes analogues à celui du paragraphe précédent.

**429. Exemple.** — *Résoudre dans* R *le système* :
$$\begin{cases} 4x^2 - 9xy - 9y^2 + 25x + 25 = 0 & (1) \\ 4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y + 7 = 0. & (2) \end{cases}$$

1re MÉTHODE. — Par soustraction, $x^2$ et $y^2$ s'éliminent :
$$-9xy + 9x + 18y + 18 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)y = x + 2.$$

Pour $x \neq 2$, le système proposé équivaut à :
$$\begin{cases} y = \dfrac{x+2}{x-2} & (3) \\ 4x^2 + 25x + 25 - 9x\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right) - 9\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2 = 0. & (4) \end{cases}$$

Sur R — { 2 } l'équation (4) est équivalente à l'équation bicarrée :
$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \Longleftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 16) = 0.$$

On en tire : $x = \pm 1$ ou $x = \pm 4$ et d'après (3) les quatre solutions :
$$\left|\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -3 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 3 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x = -4 \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

2e MÉTHODE. — L'équation (1) considérée comme équation en $y$ s'écrit :
$$9y^2 + 9xy - (4x^2 + 25x + 25) = 0.$$
$$\Delta(x) = 81x^2 + 36(4x^2 + 25x + 25) = 9 \times 25(x^2 + 4x + 4).$$

Donc : $$\Delta(x) = 15^2(x+2)^2 \qquad y = \frac{-9x \pm 15(x+2)}{18}.$$

Soit : $$y = \frac{x+5}{3} \quad (5) \quad \text{ou} \quad y = -\frac{4x+5}{3} \quad (6).$$

Le système proposé est donc équivalent à l'ensemble des deux systèmes : (5) (2) et (6) (2) soit à
$$\text{(I)} \quad \begin{cases} y = \dfrac{x+5}{3} \\ 4x^2 - (3x+5)^2 + 16x - 6(x+5) + 7 = 0. \end{cases}$$
$$\text{(II)} \quad \begin{cases} y = -\dfrac{4x+5}{3} \\ 4x^2 - (4x+5)^2 + 16x + 6(4x+5) + 7 = 0. \end{cases}$$

Le premier donne : $3(x^2 - 16) = 0$ d'où les deux solutions :

$$x = 4;\ y = 3 \quad \text{et} \quad x = -4;\ y = \frac{1}{3}.$$

Le deuxième donne : $-12(x^2 - 1) = 0$ d'où les deux solutions :

$$x = 1;\ y = -3 \quad \text{et} \quad x = -1;\ y = -\frac{1}{3}.$$

**430. Systèmes de deux équations symétriques en $x$ et $y$.** — Lorsque les deux expressions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ sont symétriques en $x$ et $y$, la résolution du système $F = 0$, $G = 0$ se simplifie en posant $x + y = S$ et $xy = P$. On obtient un nouveau système en S et P (nº 61). A toute solution de ce système on adjoint l'équation : $X^2 - SX + P = 0$ qui, lorsqu'elle a des racines réelles $X'$ et $X''$ conduit aux deux solutions du système initial :

$$\begin{cases} x = X' \\ y = X'' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = X'' \\ y = X' \end{cases}$$

**431. Exemple.** — *Résoudre le système :*

$$\text{(I)} \begin{cases} 3(x^2 + y^2) - 5\,xy - 225 = 0 & (1) \\ xy - 6(x + y) = 0. & (2) \end{cases}$$

L'élimination de $x$ ou $y$ conduirait à une équation du 4ᵉ degré, non remarquable. Posons :

$$x + y = S \quad \text{et} \quad xy = P.$$

On obtient le nouveau système :

$$\begin{cases} 3(S^2 - 2P) - 5P - 225 = 0 \\ P - 6S = 0 \end{cases} \iff \text{(II)} \begin{cases} 3S^2 - 11P - 225 = 0 & (3) \\ P = 6S & (4) \end{cases}$$

En substituant $P = 6\,S$ dans l'équation (3), on obtient :

$$3\,S^2 - 66\,S - 225 = 0 \iff S^2 - 22\,S - 75 = 0 \qquad (5)$$

Cette équation admet pour racines 25 et $-3$ et d'après (4), le système II admet les deux solutions :

$$\begin{cases} S = 25 \\ P = 150 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S = -3 \\ P = -18. \end{cases}$$

$x$ et $y$ sont donc les racines de l'une ou l'autre des équations :

$$X^2 - 25\,X + 150 = 0 \quad \text{racines : } 10 \text{ et } 15$$
$$X^2 + 3\,X - 18 = 0 \quad \text{racines : } -6 \text{ et } 3.$$

D'où, les quatre solutions du système (1) :

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -6. \end{cases}$$

**432. Remarque.** — Un système non symétrique peut le devenir grâce à un changement d'inconnues. Ainsi en posant : $y = -z$, le système :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - (x^2 + y^2) = 16 \\ x - y + xy = 5 \end{cases} \text{s'écrit :} \begin{cases} x^3 + z^3 - (x^2 + z^2) = 16 \\ x + z - xz = 5. \end{cases}$$

Le nouveau système est symétrique en $x$ et $z$.

**433. Système de $p$ équations à $n$ inconnues.** — 1º Si $p = n$ on peut, en général, se ramener à une équation à une inconnue. Un tel système admet par suite un *nombre limité de solutions.*

2º Si $p < n$ on pourra, en général, résoudre le système par rapport à $p$ inconnues en fonction des $n - p$ autres. *Le système est indéterminé* d'ordre $n - p$.

3° Si $p > n$, la vérification de $p - n$ équations par une solution du système formé par les $n$ autres conduit en général à $p - n$ conditions de compatibilité entre les coefficients des $p$ équations. Si ces conditions sont toutes vérifiées le système admet au moins une solution, sinon il est impossible. Notons que :

***Écrire les $p - n$ conditions de compatibilité de $p$ équations à $n$ inconnues revient à éliminer les $n$ inconnues entres les $p$ équations.***

Ainsi écrire que les deux équations $F(x) = 0$ et $G(x) = 0$ sont compatibles revient à éliminer $x$ entre ces 2 équations.

**434. Exemple.** — *Déterminer $m$ pour que les racines de l'équation en $x$ :*

$$mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$$

*vérifient la relation :* $x' + 2x'' = 1$. (1)

Associons à la relation donnée les deux relations donnant $x' + x''$ et $x'x''$ :
Nous obtenons pour $m \neq 0$ un système de 3 équations à trois inconnues $x'$, $x''$ et $m$.

$$\begin{cases} x' + 2x'' = 1 & (1) \\ x' + x'' = \dfrac{2m-2}{m} & (2) \\ x'x'' = \dfrac{3(m-2)}{m}. & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) du 1er degré en $x'$ et $x''$ donnent :

$$x' = \frac{3m-4}{m}; \quad x'' = -\frac{m-2}{m}.$$

Par substitution dans (3) :

$$-\frac{(3m-4)(m-2)}{m^2} = \frac{3(m-2)}{m} \iff (m-2)(6m-4) = 0.$$

Ce qui donne les 2 valeurs : $m' = 2$ et $m'' = \dfrac{2}{3}$.

Les racines sont : pour $m = 2$: $x' = 1$, $x'' = 0$

et pour $m = \dfrac{2}{3}$; $x' = -3$, $x'' = 2$.

Remarque. — Le problème précédent est analogue à celui du n° 382. On peut s'y ramener en remplaçant la relation (1) par la relation symétrique équivalente :

$$(x' + 2x'' - 1)(x'' + 2x' - 1) = 0$$

soit par : $$2(x'^2 + x''^2) + 5x'x'' - 3(x' + x'') + 1 = 0.$$

**435. Application.** — ***Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations du second degré aient au moins une racine commune.***

Soient les deux équations, où $a \neq 0$ et $a' \neq 0$ :

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 & (1) \\ a'x^2 + b'x + c' = 0. & (2) \end{cases}$$

D'après le n° 433, 3° le problème revient à éliminer $x$ entre les deux équations (1) et (2). Posons $y = x^2$. Pour que les équations (1) et (2) aient une racine commune $x$, il faut et il suffit que le système de trois équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} ay + bx + c = 0 & (3) \\ a'y + b'x + c' = 0 & (4) \\ y = x^2. & (5) \end{cases}$$

admette une solution $(x, y) \in \mathrm{R}^2$.

1° $ab' - a'b \neq 0$. Le système des équations (3) et (4) admet une solution unique (n° 335) :

$$y = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}; \quad x = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$$

Écrivons que cette solution satisfait à l'équation (3) :

$$\frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} = \left(\frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}\right)^2$$

soit :

$$\boxed{(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0.} \qquad (6)$$

Si cette relation est vérifiée les équations (1) et (2) ont alors une seule racine commune :

$$x = \frac{ca' - c'a}{a'b - a'b} = \frac{bc' - b'c}{ca' - c'a}.$$

2° $ab' - a'b = 0$. Le calcul précédent n'est plus valable. On voit directement que les équations (1) et (2) qui peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} a'(ax^2 + bx + c) = 0 \\ a(a'x^2 + b'x + c') = 0 \end{cases} \quad \text{deviennent} \quad \begin{cases} a'(ax^2 + bx) + a'c = 0 \\ a'(ax^2 + bx) + ac' = 0. \end{cases}$$

Elles sont compatibles si $ac' - a'c = 0$, ce qui montre que l'on a alors $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Les équations (1) et (2) ont leurs coefficients proportionnels et admettent les mêmes racines. Dans ce cas, la relation (6) est encore vérifiée.

L'expression placée au premier membre de cette relation se nomme *résultant* des équations (1) et (2). Donc :

***Pour que deux équations du second degré aient au moins une racine commune il faut et il suffit que leur résultant soit nul.***

On voit par suite que l'élimination d'une variable entre deux équations du second degré par rapport à cette variable revient à former le résultant de ces deux équations. Ce procédé pourra être utilisé pour éliminer $x$ (ou $y$) entre les deux équations d'un système du second degré tel que celui du n° 428.

## PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

**436. Définition.** — ***Un problème est du second degré lorsque sa solution algébrique exige la résolution d'une équation du second degré à une inconnue.***

Le choix des inconnues, la mise en équations et la recherche des conditions supplémentaires auxquelles doivent satisfaire les inconnues, se font comme pour un problème du premier degré. Signalons que :

***Dans les problèmes de nature géométrique il est très souvent avantageux de choisir une inconnue angulaire.***

On ramène ensuite la résolution de l'équation ou du système trouvé à celle d'une équation unique du second degré par rapport à l'inconnue principale $x$.

Il est bien rare que la nature du problème, ou sa résolution, n'impose pas des conditions d'inégalité telles que : $x < \alpha$, $x > \alpha$ ou $\alpha < x < \beta$ à l'inconnue $x$.

La discussion d'un problème du second degré conduit ainsi à l'étude de la position des racines d'un trinôme $f(x)$ par rapport à un nombre $\alpha$ ou par rapport à deux nombres $\alpha$ et $\beta$, que l'on peut parfois faire graphiquement ou géométriquement.

**437. 1^er^ cas : l'inconnue finale n'est soumise à aucune condition.** — Seule la condition $\Delta \geqslant 0$ de l'équation du second degré $f(x) = 0$ peut introduire une limitation aux valeurs des données.

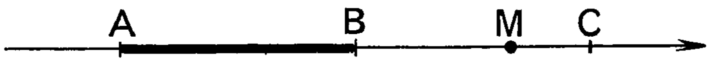
EXEMPLE. — *On considère un segment* AB *de longueur* a *et un nombre algébrique* m. *Trouver sur la droite* AB *un point* M *tel que :* $\overline{MA}^2 + m\overline{AB}.\overline{MB} = 0$.

Orientons la droite AB dans le sens AB (fig. 165) et posons : $\overline{AM} = x$.

On obtient : $\overline{AB} = a$ et $\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{AM} = a - x$.

La relation de l'énoncé s'écrit :

$$x^2 + ma(a - x) = 0.$$




Soit : $\boxed{x^2 - max + ma^2 = 0}$

Fig. 165.

Réciproquement toute racine de cette équation fournit une solution du problème.

Or : $$\Delta = (ma)^2 - 4ma^2 = m(m - 4)a^2$$

$\Delta$ est donc nul pour $m = 0$ et pour $m = 4$. Il est négatif pour $0 < m < 4$; positif pour $m < 0$ ou pour $m > 4$. Donc :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m < 0$ ou $m > 4$ .......................... | 2 solutions : | $x = \frac{a}{2}[m \pm \sqrt{m(m-4)}]$ | |
| $m = 0$ .......................... | 1 solution : | $x = 0$ | (M en A) |
| $m = 4$ .......................... | 1 solution : | $x = 2a$ | (M en C) |
| $0 < m < 4$ .......................... | 0 solution. | | |

**438. 2^e^ cas : L'inconnue finale est soumise à une condition unique.** — Le plus souvent l'inconnue devra être positive. Nous serons amenés à étudier le signe de $\Delta$, P et S (nº 378).

Plus généralement, $\alpha$ étant un nombre donné ou dépendant du paramètre, l'inconnue $x$ devra satisfaire à une condition de la forme $x < \alpha$ ou $x > \alpha$. Nous serons alors amenés à étudier le signe de $\Delta$, $af(\alpha)$ et $\frac{S}{2} < \alpha$ (nº 396).

EXEMPLE. — *On considère un demi-cercle de diamètre* A'A = 2 R *et de centre* O. *Soit* P *le milieu de* OA. *D'un point* M *du prolongement* AX de A'A *on mène la tangente* MT *au demi-cercle. Déterminer le point* M *de façon que, m étant un nombre positif donné, l'on ait :* $\overline{MT}^2 = m\overline{MP}^2$.

Posons $\overline{OM} = x$ en orientant OX dans le sens OX (fig. 166). Dans le triangle rectangle OMT, on a :

$\overline{MT} = \overline{OM} - \overline{OT} = x^2 - R^2.$

D'autre part :

$\overline{PM}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OP}^2 = x - \frac{R}{2}$

et par suite $\overline{MP}^2 = \left(x - \frac{R}{2}\right)^2.$

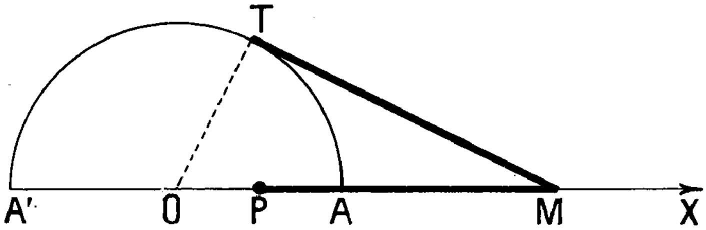


Fig. 166.

La relation s'écrit : $x^2 - R^2 = m\left(x - \frac{R}{2}\right)^2$

Soit : $$\boxed{(m-1)\,x^2 - mRx + (m+4)\,\frac{R^2}{4} = 0}$$

avec la condition : $$\boxed{x \geqslant R}$$

Discussion. — Nous obtenons pour $m \neq 1$ une équation du second degré :

$$\Delta = R^2\,[m^2 - (m-1)(m+4)] = (4 - 3m)\,R^2 \implies \left(m \leqslant \frac{4}{3}\right)$$

$$af(R) = (m-1)\left[(m-1)\,R^2 - mR^2 + (m+4)\,\frac{R^2}{4}\right] = \frac{m\,(m-1)\,R^2}{4} \qquad (0 \text{ et } 1)$$

$$\frac{S}{2} - R = \frac{mR}{2\,(m-1)} - R = \frac{2-m}{m-1}\cdot\frac{R}{2} \qquad (1 \text{ et } 2)$$

On peut établir le tableau suivant :

| $m$ | $\Delta$ | $af(R)$ | $\frac{S}{2} - R$ | Position des racines | Solutions |
|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | | | | | |
| | | | $-$ | | |
| 2 | $-$ | $+$ | 0 | Pas de racines | 0 solution |
| | | | $+$ | | |
| $\frac{4}{3}$ | 0 | .......... | ....R.... | $R < x' = x'' = 2R$ | 1 sol. : $x = 2R$ |
| | $+$ | $+$ | $+$ | $R < x' < x''$ | 2 sol. : $x = \frac{m \pm \sqrt{4-3m}}{2\,(m-1)}\,R$ |
| 1 | | | | $x = \frac{5R}{4}$ | 1 sol. : $x = \frac{5R}{4}$ |
| | $+$ | $-$ | $-$ | $x' < R < x''$ | 1 sol. : $x'' = \frac{m - \sqrt{4-3m}}{2\,(m-1)}\,R$ |
| 0 | | | | | |

Pour $m < 1$, le dénominateur $2\,(m-1)$ est négatif. La plus grande racine $x''$ est celle que l'on obtient en prenant le signe $-$ devant le radical $\sqrt{4 - 3m}$.

Observons qu'en posant $\overline{AM} = x$ on obtient l'équation :

$$(m-1)\,x^2 + (m-2)\,Rx + m\,\frac{R^2}{4} = 0$$

dont il suffit de discuter l'existence et le signe des racines.

**439. 3e cas : L'inconnue finale est soumise à une double condition.**

Il en est ainsi lorsque l'inconnue finale $x$ doit appartenir à un segment donné $[\alpha, \beta]$ et vérifier la double condition : $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

On aura ainsi $0 \leqslant x \leqslant 2\,R$ si $x$ est la longueur d'une corde d'un cercle de rayon R; $-1 \leqslant u \leqslant 1$ si $u$ est le sinus ou le cosinus d'un angle $\theta$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ si $t$ est la tangente de la moitié d'un angle aigu etc. Parfois les nombres $\alpha$ et $\beta$ s'introduisent au cours de la résolution et peuvent alors dépendre du paramètre.

On est ainsi amené à étudier la position relative des racines de l'équation du second degré finale et des nombres $\alpha$ et $\beta$, donc à étudier le signe de $\Delta$, $af(\alpha)$, $af(\beta)$, $\frac{S}{2} - \alpha$ et $\frac{S}{2} - \beta$ (no 398) à moins que l'on ne puisse opérer graphiquement (no 322).

**440. Exemple I.** — *On considère un demi-cercle de diamètre* AB = 2 R *et une longueur* $l$ *donnée. Déterminer un point* M *de ce demi-cercle se projetant en* H *sur* AB, *de façon que :*

$$\overline{MA}^2 + 2\,\overline{MH}^2 = 2\,l^2.$$

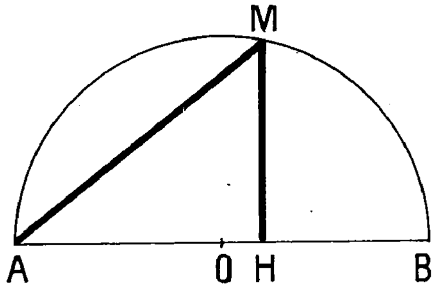



Fig. 167.

Posons : AH = $x$. Dans le triangle rectangle AMB (fig. 167) on a (sens positif $\overrightarrow{AB}$) :

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AH} = 2\,Rx$$

$$\text{et} \quad \overline{MH}^2 = \overline{AH}\cdot\overline{HB} = x(2\,R - x).$$

Ce qui donne l'équation : $2\,Rx + 2x\,(2\,R - x) = 2\,l^2$.

Soit : $$\boxed{x^2 - 3\,Rx + l^2 = 0} \qquad (1)$$

Réciproquement, toute racine de cette équation fournira une solution du problème pourvu que : $0 \leqslant x \leqslant 2\,R$. Or cette équation qui s'écrit : $-x^2 + 3\,Rx = l^2$ n'est autre que l'équation aux abscisses des points d'intersection de la parabole : $y = -x^2 + 3\,Rx$ par la droite variable d'équation : $y = l^2$.

On obtient ainsi :

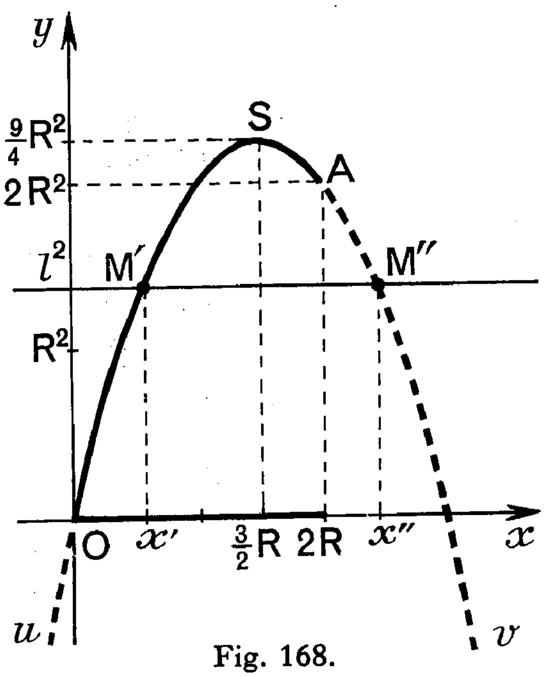



Fig. 168.

| $l^2$ | Racines | Solutions |
|---|---|---|
| $\infty$ | Pas de racines | 0 solution |
| $\frac{9\,R^2}{4}$ | $0 < x' = x'' < 2\,R$ | 1 sol. $x = \frac{3\,R}{2}$ |
| | $0 < x' < x'' < 2\,R$ | $x = \frac{3\,R \pm \sqrt{9\,R^2 - 4l^2}}{2}$ |
| $2\,R^2$ | $0 < x' < x'' = 2\,R$ | 2 sol. : $x' = R$; $x'' = 2\,R$ |
| | $0 < x' < 2R < x''$ | $x = \frac{2\,R - \sqrt{9\,R^2 - 4l^2}}{2}$ |
| 0 | $x' = 0 < 2\,R < x''$ | —— 1 sol. : $x = 0$ |

**441. Exemple II.** — *On considère un quart de cercle de centre* O *et de rayon* R *limité en* A *et* B. *Un point* M *de ce quart de cercle se projette en* P *sur* OA. *Déterminer* OP *de façon que :* OP + 2 PM = $l$ ($l$ *longueur donnée*).

MISE EN ÉQUATION. — Posons $OP = x$. Dans le triangle rectangle OPM on obtient (fig. 169) :

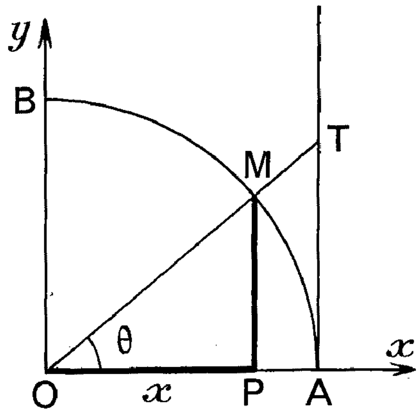



Fig. 169.

$$\overline{PM}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OP}^2 = R^2 - x^2$$

d'où : $MP = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Il faut donc : $x + 2\sqrt{R^2 - x^2} = l$. (1)

Toute solution positive ou nulle de cette équation convient, car si cette équation est vérifiée on a :

$$R^2 - x^2 \geqslant 0,$$

donc : $x \leqslant R$. L'équation (1) s'écrit :

$$2\sqrt{R^2 - x^2} = l - x.$$

Elle est équivalente au système (n° 35) :

$$\begin{cases} 4(R^2 - x^2) = (l - x)^2 \\ l - x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (1) \quad \boxed{\begin{matrix} 5x^2 - 2lx + l^2 - 4R^2 = 0 \\ x \leqslant l \end{matrix}} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Nous sommes donc amenés à chercher les racines de l'équation (2) telles que :

$$0 \leqslant x \leqslant l.$$

DISCUSSION. — On obtient : $\Delta' = l^2 - 5(l^2 - 4R^2) = 4(5R^2 - l^2)$

$$af(0) = 5(l^2 - 4R^2); \quad af(l) = 5[5l^2 - 2l^2 + l^2 - 4R^2] = 20(l^2 - R^2).$$

$$\frac{S}{2} = \frac{l}{5} > 0 \text{ et } \frac{S}{2} - l = -\frac{4l}{5} < 0.$$

Les valeurs remarquables de $l$ sont donc : $R\sqrt{5}$, $2R$ et $R$. D'où le tableau :

| $l$ | $\Delta'$ | $af(0)$ | $af(l)$ | POSITION DES RACINES | SOLUTIONS |
|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | | | | | |
| | $-$ | $+$ | $+$ | Pas de racines | 0 solution |
| $R\sqrt{5}$ | ....0.... | $5R^2$ | $80R^2$ | $0 < x' = x'' < l$ | 1 sol. $x = \frac{R\sqrt{5}}{5}$ |
| | $+$ | $+$ | $+$ | $0 < x' < x'' < l$ | 2 sol. : $x = \frac{1}{5}(l \pm 2\sqrt{5R^2 - l^2})$ |
| $2R$ | .......... | ....0.... | $60R^2$ | $x' = 0 < x'' < l$ | 2 sol. $x' = 0, x'' = \frac{4R}{5}$ |
| | $+$ | $-$ | $+$ | $x' < 0 < x'' < l$ | 1 sol. : $x = \frac{1}{5}(l + 2\sqrt{5R^2 - l^2})$ |
| $R$ | .......... | $-15R^2$ | ....0.... | $x' < 0 < x'' = l$ | 1 sol. : $x'' = R$ |
| | $+$ | $-$ | $-$ | $x' < 0 < l < x''$ | 0 solution |
| $0$ | | | | | |

N. B. Il y avait avantage à prendre pour inconnue AT (ou tg θ) $= t \in [0, \infty[$. On était conduit à une discussion du type II (n° 438). Avec étude du signe des racines (Δ, P, S).

Montrons plutôt comment on pouvait opérer géométriquement.

## 442. Solution géométrique.

Dans le repère orthonormé $xOy$ obtenu en prolongeant OA et OB (fig. 169), $\overline{OP} = x$ et $\overline{PM} = y$ ne sont autres que les coordonnées du point M. On voit que les nombres positifs $x$ et $y$ sont astreints à vérifier le système :

$$\text{(II)} \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 & (4) \\ x + 2y = l & (5) \end{cases}$$

avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

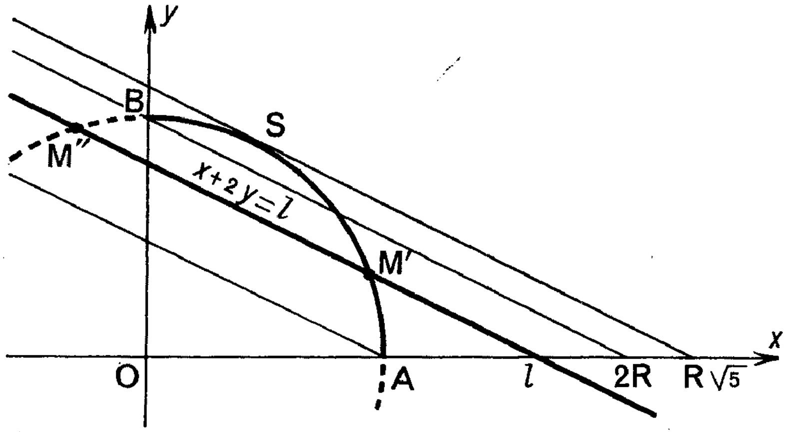


Fig. 170.

Le point M est donc dans le 1[er] quadrant (fig. 170), à l'intersection du cercle C donné : $x^2 + y^2 = R^2$ avec la droite $\Delta$ d'équation $x + 2y = l$. D'autre part l'équation (2) n'est autre que l'équation aux abscisses des points d'intersection de (C) et de $\Delta$, ce qui permet d'en faire une discussion géométrique.

Lorsque $l$ varie, la droite $\Delta$ reste perpendiculaire au vecteur $\vec{V}$ (1, 2). Elle est tangente en S $\left(\frac{R}{\sqrt{5}}, \frac{2R}{\sqrt{5}}\right)$ pour $l = R\sqrt{5}$, passe par B pour $l = 2R$ et par A pour $l = R$. D'où les conclusions en accord avec le tableau précédent :

| | | |
|---|---|---|
| $l > R\sqrt{5}$ | $\Delta$ extérieure au cercle | 0 solution |
| $l = R\sqrt{5}$ | $\Delta$ tangente en S | 1 solution (M en S) |
| $2R \leqslant l < R\sqrt{5}$ | $\Delta$ coupe $\overset{\frown}{AB}$ en 2 points | 2 solutions : M′ et M″ |
| $R \leqslant l < 2R$ | $\Delta$ coupe $\overset{\frown}{AB}$ en 1 point | 1 solution : M′ |
| $l < R$ | $\Delta$ ne coupe pas l'arc AB | 0 solution |

Cette méthode géométrique de discussion peut s'appliquer chaque fois que l'on demande de déterminer analytiquement un point M situé sur une courbe (C) donnée : $F(x, y) = 0$ et satisfaisant à une condition donnée, fonction d'un paramètre $m$, qui peut se ramener à la forme $ax + by + c = m$ ou $y - \beta = m(x - )\alpha$. On est donc conduit à étudier les intersections de la courbe (C) par une droite variable $\Delta$, parallèle à une direction fixe $(-b, a)$ ou issue d'un point fixe $(\alpha, \beta)$.

## EXERCICES

— Résoudre les systèmes d'équations suivants et discuter s'il y a lieu.

**1506.** $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x^2 - y^2 = 40. \end{cases}$

**1507.** $\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ (x - 2)(y - 3) = 18. \end{cases}$

**1508.** $\begin{cases} 2x + 3y = 50 \\ (x - y)^2 = 25. \end{cases}$

**1509.** $\begin{cases} 7x - 4y = 13 \\ (x + y)^2 = 256. \end{cases}$

**1510.** $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ x + y = m. \end{cases}$

**1511.** $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0. \end{cases}$

**1512.** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 24 \\ x + y = 8. \end{cases}$

**1513.** $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6. \end{cases}$

**1514.** $\begin{cases} y^2 = x^2 - 3x + 2 \\ y - m(x - 1) = 0. \end{cases}$

**1515.** $\begin{cases} \dfrac{x}{x - a} + \dfrac{y}{y - b} = 2. \\ ax + by = 2ab. \end{cases}$

**1516.** $\begin{cases} 5y - 3x = -111\,xy \\ 2y + 5x = 30\,xy. \end{cases}$

**1517.** $\begin{cases} 5x(x - 8) - 3y(y + 1) = -111 \\ 2x(x - 8) + 5y(y + 1) = 30. \end{cases}$

— Résoudre les systèmes suivants :

**1518.** $\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 25 \\ 2x^2 - 15\,xy + 18\,y^2 = -10. \end{cases}$

**1519.** $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 5x + y - 2 \\ x^2 + 3xy + y^2 + 6x + 2y = 3. \end{cases}$

**1520.** $\begin{cases} xy + y + 4 = 0 \\ xy - 4x + 2y - 10 = 0. \end{cases}$

**1521.** $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 - 8x = 0 \\ 8x^2 - 9xy + 3y^2 - 8x + 8 = 0. \end{cases}$

— Résoudre et discuter, s'il y a lieu, les systèmes suivants :

**1522.** $\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 89. \end{cases}$

**1523.** $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^3 + y^3 = 133. \end{cases}$

**1524.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = x + y + 17. \end{cases}$

**1525.** $\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 42 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 145. \end{cases}$

**1526.** $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^3 + y^3 = 3(x + y). \end{cases}$

**1527.** $\begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2 - xy + y^2 = 19. \end{cases}$

**1528.** $\begin{cases} x^3 - y^3 = a^3 \\ x^2 + xy + y^2 = b^2. \end{cases}$

**1529.** $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ x^2 - xy + y^2 = b^2. \end{cases}$

**1530.** $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133. \end{cases}$

**1531.** $\begin{cases} x^4 + y^4 = 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4) \\ xy = a^2 - b^2. \end{cases}$

**1532.** $\begin{cases} x^4 - x^2y^2 + y^4 = 117 \\ x^2 - xy\sqrt{3} + y^2 = 3. \end{cases}$

**1533.** $\begin{cases} x^3 = ax + by \\ y^3 = ay + bx. \end{cases}$

**1534.** $\begin{cases} 2x^2 - 3xy = y^2 - 3x - 1 \\ 2y^2 - 3xy = x^2 - 3y - 1. \end{cases}$

**1535.** $\begin{cases} \dfrac{x + y}{a + b} = \dfrac{ab - 1}{xy - 1} \\ xy - ab = x + y - a - b. \end{cases}$

— Résoudre et discuter, s'il y a lieu, les systèmes suivants :

**1536.** $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ x + y + z = 2 \\ xy - z = 1. \end{cases}$

**1537.** $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 5x - 3y = 1 \\ xy - (x + y) + 1 = 0. \end{cases}$

**1538.** $\begin{cases} x + y = z - 3 \\ xy = 10 - z \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

**1539.** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + z^2 + 5 = 0 \\ (x - 2)(y - 2) + 4 = 0. \end{cases}$

**1540.** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2. \end{cases}$

**1541.** $\begin{cases} 4xy = x + y \\ 7yz = y + z \\ 5xz = z + x. \end{cases}$

**1542.** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$

**1543.** $\begin{cases} x(y + z) = a \\ y(z + x) = b \\ z(x + y) = c. \end{cases}$

**1544.** $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 39 \\ y^2 + yz + z^2 = 201 \\ z^2 + zx + x^2 = 147. \end{cases}$

**1545.** $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ xy + yz + zx = 47 \\ xyz = 60. \end{cases}$

**1546.** $\begin{cases} 36x^2 = 9y^2 = 4z^2 \\ x + y + z = 6. \end{cases}$

**1547.** $\begin{cases} ax^2 = by^2 = cz^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{d}. \end{cases}$

— Déterminer le paramètre $m$ pour que les racines des équations suivantes vérifient la relation indiquée :

**1548.** $x^2 + (3m + 2)x + m^2 - 2m - 5 = 0.$ Relation : $x' - 3x'' = 0.$

**1549.** $x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 7 = 0.$ $3x' + 5x'' = 34.$

**1550.** $(m - 4)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0.$ $x'x'' + 2x' + 1 = 0.$

**1551.** $(2m - 1)x^2 - 4x + 2(2m + 1) = 0.$ $x' + 2x'' - 8 = 0.$

**1552.** $x^2 - (m - 3)x + 4m + 8 = 0.$ $3x' + x'' = 37.$

**1553.** $mx^2 - 2(m + 5)x + m + 4 = 0$ $x'x'' = x' - 4x''.$

— Déterminer $m$ de façon que les équations en $x$ suivantes aient au moins une racine commune que l'on calculera :

**1554.** $\begin{cases} 2x^2 + 3mx + 1 = 0 \\ 2mx^2 - x - m = 0. \end{cases}$

**1555.** $\begin{cases} x^2 + x(m - 1) - m(2m - 1) = 0 \\ x^2 + x(4 - 5m) - 2m(4 - 3m) = 0. \end{cases}$

**1556.** $\begin{cases} x^2 - 2mx + m + 5 = 0 \\ x^2 - mx + m - 1 = 0. \end{cases}$

**1557.** $\begin{cases} 2x^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0 \\ 2x^2 - (2m + 5)x + 2m - 1 = 0. \end{cases}$

**1558.** $\begin{cases} x^2 - 2mx + 25 = 0. \\ mx^2 - 8x - 17m = 0. \end{cases}$

**1559.** $\begin{cases} 2x^2 + x(4m - 7) + 3 - 2m = 0 \\ 5x^2 - x(5m + 1) + m = 0. \end{cases}$

**1560.** Résoudre le système :

$$(y + 1)(z - 1) = 48; \quad (z + 1)(x - 1) = 20; \quad (x + 1)(y - 1) = 16$$

**1561.** Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 = 29 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Déduire du résultat que l'on peut mettre $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}}$ sous la forme $x + y\sqrt{5}$.

**1562.** 1° Quelle condition doivent vérifier les nombres $a$, $b$, $c$, $d$ pour que le polynôme :

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

puisse se mettre sous la forme : $f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^2 + \gamma x^2$
$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignant des constantes.

2° Cette condition étant remplie, montrer que la résolution de l'équation $f(x) = 0$ se ramène à la résolution de deux équations du second degré dont les coefficients dépendent du paramètre $b$.

3° On suppose de plus $a = 2$, $c = +8$, discuter suivant les valeurs de $b$ le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$.

**1563.** Résoudre le système d'équations : $\begin{cases} \dfrac{x + y}{1 - xy} = p \\ \dfrac{(1 - x^2)(1 - y^2) + 4xy}{(1 + x^2)(1 + y^2)} = q. \end{cases}$

On pourra poser : $x = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$; $y = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$. Application numérique : $p = 1$; $q = \dfrac{1}{2}$.

**1564.** 1° Résoudre le système de trois équations à trois inconnues $x$, $y$, $z$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 4xy = z^2 \\ x + y = mz. \end{cases} \qquad \text{(E)}$$

où $m$ est un nombre positif donné. Discussion. Nombre de solutions.

2° Trouver entre quelles limites doit être compris le nombre $m$ pour qu'il existe un triangle T, dont les côtés aient pour mesures trois nombres positifs $x$, $y$, $z$, satisfaisant aux équations (E).

3° Le triangle peut-il être rectangle ou isocèle, et pour quelles valeurs de $m$ ?

4° A quelles conditions doit satisfaire le nombre $m$ pour que le triangle T ait un angle obtus.

5° Déterminer $m$ de façon que l'aire du triangle T ait une valeur donnée $k$. Pour quelle valeur de $m$ cette aire est-elle la plus grande possible ?

**1565.** Résoudre le système d'équations (où $a$, $b$, $c$ sont des nombres donnés) :

$$y + \frac{1}{z} = a; \qquad z + \frac{1}{x} = b; \qquad x + \frac{1}{y} = c.$$

1° Ce système admet deux solutions : si l'une de ces solutions est formée de nombres rationnels, il en est de même de l'autre. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $a$, $b$, $c$ soient des nombres rationnels et que l'on ait : $abc - a - b - c = n + \frac{1}{n}$, $n$ étant un nombre rationnel.

2° Que deviennent les valeurs trouvées pour $x$, $y$, $z$ quand on y remplace respectivement $a$, $b$, $c$ par $\beta + \frac{1}{\gamma}$; $\gamma + \frac{1}{\alpha}$; $\alpha + \frac{1}{\beta}$?

## Problèmes du second degré.

— On considère sur un demi-cercle de diamètre AB = 2R, un point M qui se projette orthogonalement en H sur AB, en K sur la tangente B$z$ au point B. La longueur $l$ ou le rapport $k$ étant donnés, déterminer la position du point M et discuter dans les cas suivants :

**1566.** AH + MH = $l$.

**1567.** AH − MH = $l$.

**1568.** MA + MB = $l$.

**1569.** MA − MB = $l$.

**1570.** MA + MK = $l$.

**1571.** MA − MK = $l$.

**1572.** MH + MK = $l$.

**1573.** MH − MK = $l$.

**1574.** MA = $k$ MK

**1575.** $\overline{MA}^2 + k\,\overline{MH}^2 = l^2$

**1576.** Par un point A situé dans un angle droit, on mène une sécante BAC qui détermine sur les côtés de l'angle deux segments OC = $x$, OB = $y$. Déterminer cette sécante de manière que l'on ait : $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{c^2}$. On désignera par $a$ et $b$ les distances du point A aux côtés O$x$ et O$y$.

**1577.** Trouver sur une demi-circonférence de centre O, limitée au diamètre AB, un point D tel que si l'on mène DE parallèle à AB et qu'on joigne D et A la somme des cordes AD et DE soit égale à une longueur donnée $l$. Discuter.

*Nota.* — On distinguera deux cas de figure suivant que l'arc AB est inférieur ou supérieur au quart de circonférence.

**1578.** Soient un angle droit et une circonférence C, de rayon R, tangente aux deux côtés de cet angle. On porte les longueurs OA = $x$ sur O$x$, OB = $y$ sur O$y$.

1° Quelle relation doit-il exister entre $x$ et $y$ pour que la droite AB soit tangente à C ?

2° Calculer $x$ et $y$ pour que le triangle OAB ait pour surface $m\,R^2$, $m$ étant un nombre positif donné. Discuter et interpréter géométriquement les résultats de la discussion.

**1579.** Dans un cercle donné, tracer une corde AB telle que la différence entre sa longueur et sa distance OH au centre ait une valeur donnée $l$. Inconnue, OH = $x$. Discuter en supposant d'abord $l$ positif, puis $l$ négatif. Solution géométrique.

**1580.** Trouver sur un demi-cercle de diamètre $AB = 2\,R$ un point M tel que, si l'on abaisse la perpendiculaire MP sur AB, on ait : $AP + 2\,PM = l$. ($l$ étant une longueur donnée.) Discuter. Solution analytique et construction géométrique.

**1581.** On donne dans un cercle de rayon R deux rayons perpendiculaires OA, OB. Trouver sur le quadrant AMB un point M tel qu'en menant de M les perpendiculaires MP sur OA, MQ sur OB on ait $MP + MQ = mR$, $m$ désignant un nombre positif donné. Inconnues : $MP = x$, $MQ = y$. Discuter géométriquement. Pour cela montrer qu'en prolongeant OP au delà de P d'une longueur PI convenablement choisie, on peut déduire du point I une construction simple du point cherché.

**1582.** On donne un triangle rectangle isocèle AOB ($OA = OB = a$), la demi-droite OX parallèle à AB et de même sens, une sécante APM coupant OB en P, OX en M. On pose $OM = x$.

1° Évaluer en fonction de $x$ et de $a$ les hauteurs $y$ et $z$, issues de P, des triangles PAB et POM.

2° Calculer $x$ de manière que la somme des surfaces de ces triangles ait une valeur donnée $\frac{ma^2}{2}$.

Discuter en supposant $a$ fixe, $m$ variable.

**1583.** Soient A et B deux points diamétralement opposés sur un cercle donné de rayon R. Sur la perpendiculaire au plan du cercle menée par B, on considère un point S tel que $BS = R$.

1° On prend un point quelconque M sur le cercle; montrer que toutes les faces du tétraèdre SAMB sont des triangles rectangles.

Soit P la projection de M sur le diamètre AB; on pose $x = AP$. Évaluer l'aire du triangle SAM en fonction des longueurs R et $x$.

2° Déterminer $x$ de façon que l'aire du triangle SAM ait une valeur donnée $\frac{m^2}{2}$. Discuter.

**1584.** Soit un angle de sommet O ayant pour mesure 60°; sur un côté on porte une longueur $OA = 4\,a$ et du point A on abaisse la perpendiculaire AB sur l'autre côté. Soit P le milieu de OB. Un point variable M du segment OA est déterminé par $OM = x$; et l'on désigne par H sa projection sur OB.

1° Calculer OB, OH, MH et la somme $\overline{MP}^2 + \overline{MB}^2$.

2° Déterminer $x$ de façon que : $\overline{MP}^2 + \overline{MB}^2 = k^2$. (1)

Discuter suivant les valeurs du paramètre $k$.

3° Construire géométriquement le point M répondant à la condition (1) et retrouver la discussion précédente.

**1585.** 1° Soit ABCD un tétraèdre régulier ($AB = l$); démontrer que les arêtes opposées AB et CD sont orthogonales.

2° Démontrer que la section du tétraèdre par le plan mené par un point P de BC parallèlement à AB et à CD est un rectangle.

3° Calculer les côtés de ce rectangle en fonction de $l$ et de $BP = x$. Quel doit être $x$ pour que la section soit un carré ? Déterminer $x$ sachant que la diagonale de ce rectangle a une longueur $d$. Discussion.

4° Trouver le lieu du centre de ce rectangle.

**1586.** On considère le quart AB d'un cercle de centre O de rayon R. Un point M de l'arc de cercle est défini par la distance $AM = x$.

1° Calculer en fonction de R et $x$ la distance MP de M au rayon OB.

2° Déterminer $x$ de manière que : $MA + MP = k$ ($k$ étant une longueur donnée). Discuter.

3° Pour une valeur convenable de $k$, l'équation du 2e degré ainsi obtenue admet une racine double. Préciser la position de M qui lui correspond.

**1587.** Inscrire dans un demi-cercle un triangle rectangle ABC dont on connaît le périmètre (A = 1 droit).

1° On donnera une solution algébrique en calculant $AB = x$, $AC = y$, connaissant $BC = 2\,R$ et le périmètre $= 2\,p\,(p > 2\,R)$.

En déduire d'abord la surface, puis la hauteur, en fonction de R et $p$.

*Application :* $R = 1$, $p = \sqrt{2} + 1$.

2° Donner une solution géométrique du problème.

**1588.** Soit un triangle équilatéral ABC de côté $a$. D'un point M de AC entre A et C, on mène la perpendiculaire à BC rencontrant le prolongement de AB en P et on joint BM.

1° Calculer $AM = x$ de manière que $MB = k.MP$, $k$ étant un nombre donné.

Discuter en faisant varier $k$.

2° Construction géométrique du point M.

**1589.** On donne un triangle ABC, rectangle en A, moitié du triangle équilatéral CBB'; on connaît l'hypoténuse $BC = 2\,a$.

1° Calculer en fonction de $a$ les deux côtés AB et AC.

2° Déterminer un point M sur BC, situé entre B et C ou aux extrémités du segment BC, tel que, MP étant la perpendiculaire menée de M à AC, la somme des carrés des quatre côtés du trapèze BMPA soit égale au carré d'une longueur donnée $ma$. On posera $AP = x$, $PM = y$ et on discutera graphiquement l'équation en $x$ qui en résulte.

3° Solution analytique du problème en considérant $x$ et $y$ coordonnées de M dans un repère orthonormé $xAy$. En déduire la construction géométrique des solutions et la discussion géométrique.

**1590.** On donne un angle droit XOY, le point A sur le côté OX, tel que $OA = \sqrt{3}$, le point B sur le côté OY, tel que $OB = 1$, et la demi-droite OZ située à l'intérieur de l'angle XOY, qui fait avec OX l'angle XOZ mesuré par $\alpha$.

P étant la projection orthogonale de A sur OZ, on joint le point B. On demande :

1° de calculer à l'aide des données et de l'angle $\alpha$ l'expression de la somme $\overline{PO}^2 + \overline{PB}^2$;

2° de déterminer l'angle $\alpha$ pour que cette somme ait une valeur déterminée $k$. Discuter la possibilité du problème suivant les valeurs de $k$. Calculer l'angle $\alpha$ dans la cas particulier $k = 4 - \sqrt{3}$.

3° de retrouver à l'aide de constructions géométriques la solution et les résultats de la discussion de la 2e partie.

**1591.** Dans un triangle ABC, on donne l'angle $B = 30°$, le rapport $\dfrac{AC}{AB} = k$ et la distance $d$ qui sépare sur BC le pied D de la bissectrice de l'angle A du pied D' de la bissectrice extérieure de l'angle adjacent à l'angle A. Calculer les trois côtés du triangle. Discuter et chercher si l'angle en C du triangle est aigu ou obtus. Même question pour l'angle A; même problème en supposant $B = 150°$.

**1592.** Sur le côté $BC = a$ d'un triangle équilatéral fixe ABC, on prend un point M variable, d'où l'on abaisse les perpendiculaires MP sur AB et MQ sur AC.

1° Trouver la relation entre AP et AQ.

2° Lieu du centre de la circonférence passant par A, P, Q.

3° Former et discuter l'équation du 2e degré ayant pour racines les longueurs AP et AQ sachant que PQ a une longueur donnée $l$. Construction géométrique.

**1593.** On considère deux axes O$x$ et O$y$ faisant un angle de 45°, sur l'axe O$y$, deux points fixes A et B tels que : $\overline{OA} = a$; $\overline{OB} = 2\,a$ et sur O$x$, un point M tel que $\overline{OM} = x$.

1° Calculer $x$ de manière que l'on ait : $3\,MB^2 + 2\,MA^2 = k\,(3\,MB^2 - 2\,MA^2)$, $k$ désignant un nombre donné. Discuter.

2° Dans le cas où le problème admet deux solutions, montrer qu'il existe, entre les abscisses $x_2$ et $x_1$ des points correspondants, une relation indépendante de $k$.

Examiner le cas où $x_1 = x_2$.

# PROBLÈMES DE RÉVISION

**1594.** Soit l'équation : $mx^3 + (m - 3)\,x^2 - mx + 2 = 0$.

1° Calculer $m$ pour que cette équation admette le nombre $-1$ comme solution.

2° Montrer que, dans ces conditions, le premier membre de l'équation donnée peut se mettre sous la forme : $(x + 1)\,(ax^2 + bx + c)$ : $a$, $b$, $c$, étant 3 nombres à calculer.

3° Dans les mêmes conditions, résoudre l'équation donnée.

**1595.** 1° Construire sur le même graphique les courbes représentant les fonctions $y_1 = -x^2 + 1$ et $y_2 = x^2 + 2x - 3$.

2° Calculer les coordonnées de leurs points d'intersection A et B.

3° Montrer que, quel que soit $m$, ces points A et B appartiennent à la courbe représentative de la fonction : $y = [(m - 1)\,x^2 + 2mx - 3m + 1]\,\dfrac{1}{m + 1}$.

Cette courbe rencontre O$x$ en deux points dont l'un est fixe quand $m$ varie, et dont l'autre a une abscisse que l'on exprimera en fonction de $m$. Pour qu'elle valeur de $m$ ces deux points sont-ils confondus, et que peut-on dire alors de la droite O$x$ ?

**1596.** On considère l'expression : $F(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1}$.

1° Construire dans un repère orthonormé $xOy$ la courbe $y = F(x)$.

2° Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $F(x) > -4$ ?

3° Si deux valeurs distinctes $\alpha$ et $\beta$ sont telles que $F(\alpha) = F(\beta)$, montrez que ces valeurs sont racines d'une même équation de la forme : $x^2 - px + p - 7 = 0$.

Étudier suivant les valeurs de $p$ l'existence et le signe des racines réelles de cette équation.

**1597.** Étant donné l'équation : $ax^2 - 2\,(a + 1)\,x + a + 2 = 0$.

1° Pour quelles valeurs de $a$ l'équation a-t-elle des racines ? Calculer ces racines.

2° Étudier la variation de la somme S et du produit P des racines de l'équation donnée. Tracer les courbes représentant les variations de S et de P. Montrer comment on pourrait déduire ces deux courbes l'une de l'autre.

3° On considère le trinôme : $y = ax^2 - 2\,(a + 1)\,x + a + 2$.

Pour une valeur déterminée de $a$, la variation de $y$ est représentée par une certaine courbe C.

*a*) Quelle est la forme de cette courbe ?

*b*) Les courbes C coupent-elles toujours O$x$ ? Montrer qu'elles passent toutes par un point fixe et qu'elles admettent la même tangente en ce point.

*c*) Tracer sur le même graphique les courbes C′ et C″ correspondant respectivement aux valeurs $a = -2$, $a = 1$.

**1598.** 1° On considère l'expression : $x^2(x - m) + 19x - 7x^2 - 12m$.

Trouver la valeur qu'il faut donner à $m$ pour que l'expression s'annule lorsqu'on y remplace $x$ par 1. Le paramètre $m$ ayant la valeur ainsi obtenue, montrer qu'on peut mettre $x - 1$ en facteur dans l'expression précédente; en déduire les trois valeurs de $x$ qui annulent cette expression.

2° On marque, sur un axe orienté $x'Ox$, les trois points A, B, C ayant pour abscisses respectives les trois valeurs de $x$ obtenues au numéro précédent se suivant dans l'ordre croissant. On trace le cercle $\Gamma$ de centre B et de rayon BC, et on lui mène du point A les deux tangentes AM et AN (M et N étant les points de contact). Montrer que le quadrilatère AMCN est un losange et donner les valeurs de ses angles.

**1599.** Soit (H) la courbe représentative de la fonction : $y = \frac{1 + x}{1 - x}$.

1° Construire la courbe (H). Calculer la pente $m$ de la droite qui joint deux points A et B situés sur (H) et dont les abscisses $a$ et $b$ sont données.

Interpréter et contrôler au moyen de la dérivée de la fonction $y$ le résultat obtenu en faisant $a = b = -1$ dans l'expression de $m$.

2° On suppose que B est déduit de A par la construction suivante (T) : la parallèle à $Ox$ menée par A coupant en K la droite $y = x$, le point B est obtenu par l'intersection avec (H) de la parallèle à $Oy$ menée par K. Calculer $b$ en fonction de $a$.

Soit C le point déduit de B par la construction (T); calculer son abscisse $c$ en fonction de $a$.

Soit enfin D le point d'abscisse $d$ déduit de C par la construction (T). Quelle particularité remarquable ce point présente-t-il vis-à-vis du point A ?

3° Reprendre l'étude du paragraphe 2° ci-dessus en donnant à $a$ la valeur tg $\alpha$, $\alpha$ désignant un angle quelconque donné. Quelles sont en fonction de $\alpha$ les valeurs de $b$, $c$, $d$ ? Comment peut-on en déduire la particularité que présentent A et D ?

**1600.** 1° Tracer, par rapport à un système d'axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, la ligne (L) représentative de la fonction $y = x + 1$ et la ligne (C) représentative de la fonction : $y = \frac{4}{x + 1}$. Déterminer les points communs à ces deux lignes.

2° Par un point M de (L) on mène la parallèle MA à $y'y$, coupant (C) en A, et la parallèle MB à $x'x$, coupant (C) en B. Soit P le quatrième sommet du rectangle construit sur MA et MB. Démontrer que le point P appartient à la ligne (L). Lieu géométrique du milieu D de AB quand M parcourt (L).

3° Démontrer, dans les mêmes conditions, que les point M et P restent conjugués harmoniques de deux points fixes.

**1601.** 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \frac{x + 5}{-x + 3}$ et tracer la courbe représentative (H). Construire sur le même graphique la droite (D) d'équation $y = 2x + 3$. La courbe (H) et la droite (D) ont deux points communs A et B. Calculer les coordonnées de A et de B.

2° Par le point de l'axe des $y$ qui a pour ordonnée $m$ on mène la parallèle D(′) à (D). Quelle est l'équation de (D′) ? A quelles conditions doit satisfaire $m$ pour que (D′) et (H) se coupent ?

3° Dans le cas où (D′) et (H) ont deux points communs (que l'on désignera par A′ et B′), trouver les coordonnées du milieu I et A′B′. Montrer que I se déplace sur une droite fixe ($\Delta$) quand (D′) se déplace en restant parallèle à (D). Montrer que ($\Delta$) passe par le centre de symétrie de (H) et qu'aux points où ($\Delta$) coupe (H), la tangente à (H) est parallèle à (D).

**1602.** On donne l'équation du second degré : $x^2 - 3x + \frac{5}{4} - m = 0$.

1° Entre quelles limites doit varier $m$ pour que cette équation ait deux racines comprises entre 0 et 2 ?

2° Soit (P) la courbe : $y = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$. Tracer cette courbe et retrouver sur le graphique le résultat obtenu à la question précédente.

3° Construire, sur le même graphique, la courbe (H) : $y = \dfrac{3\,(3x + 5)}{4\,(x + 3)}$. Former l'équation donnant les abscisses des points communs à (P) et (H). Montrer que l'un de ces points, soit A, est sur $Oy$.

4° Sachant que l'angle de deux courbes, en un point qui leur est commun, est égal à l'angle de leurs tangentes en ce point, montrer que les courbes (P) et (H) se coupent en A sous un angle droit.

5° Les tangentes en A aux courbes (P) et (H) rencontrent l'axe $x'x$ en M et N. Évaluer la longueur MN.

**1603.** 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \dfrac{2x}{x - 3}$ et tracer la courbe représentative (C).

2° Soient A et B deux points de cette courbe tels que les droites OA et OB aient pour pentes respectives $\alpha$ et $\beta$. Calculer les coordonnées des points A et B et former l'équation du premier degré en $x$ et $y$ qui représente la droite AB.

3° Quelle relation existe-t-il entre $\alpha$ et $\beta$ lorsque l'angle AOB est droit ?

Montrer que, si un angle droit AOB pivote autour du point O, la droite AB qui joint les points où ses côtés coupent la courbe (C) se déplace parallèlement à elle-même.

**1604.** On considère la fonction de $x$ : $y = -x^2 + 2\,(m + 1)\,x + m - 5$.

1° Étudier les variations de cette fonction. Construire sur un même graphique les courbes représentatives $(C_0)$ et $(C_2)$ correspondant aux valeurs $m = 0$ et $m = 2$ du paramètre.

2° Montrer que, lorsque $m$ varie, les courbes représentatives $(C_m)$ des fonctions $y$ passent par un point fixe, I.

3° *a*) Pour quelles valeurs de $m$ la courbe $(C_m)$ a-t-elle un seul point commun avec l'axe $x'Ox$ ? On trouve deux valeurs de $m$, à chacune desquelles correspond un point commun. Soient A et B les deux points ainsi obtenus. Quelles sont les abscisses de A et B ?

*b*) Pour quelles valeurs de $m$ la courbe $(C_m)$ coupe-t-elle l'axe $x'Ox$ en deux points, M′ et M″ ?

4° Montrer que, lorsque $m$ varie, les points M′ et M″ restent conjugués harmoniques par rapport à A et B.

**1605.** On considère un quart de cercle limité aux deux rayons perpendiculaires OA et OB. La tangente en un point quelconque M de ce quart de cercle rencontre respectivement en C et D le prolongement des rayons OA et OB. Le point M se projette sur OA en H. Soient R le rayon du quart de cercle, $x$ la longueur OH.

1° Calculer, en fonction de R et de $x$, les longueurs MH, OC, HC et OD.

2° Déterminer $x$ de façon que OD = 2 MH. Quelle est alors la valeur de l'angle AOM ?

3° Étudier les variations de OC en fonction de $x$. Courbe représentative. Déterminer $x$ pour que OC soit égal à 2 R. Quelle est alors la valeur de l'angle AOM ?

**1606.** On donne dans un plan P un demi-hexagone régulier ABCD (AB = BC = CD = $a$). Sur la perpendiculaire en A au plan P on porte AS = $2a$.

1° Démontrer que les cinq points S, A, B, C, D, sont sur une même sphère. Le plan P partage cette sphère en deux calottes dont on demande le rapport des rayons polaires.

2° M étant un point variable du segment AS, on pose SM = $x$. Étudier, quand M se déplace entre S et A, la variation en fonction de $x$, de $y = \overline{MS}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$.

Pour la courbe représentative on fera $a = 1$ et l'on déterminera la position des tangentes à cette courbe aux points d'abscisses $x = 0$, $x = 2a$.

3° Par le point E de rencontre des droites AB et CD, on mène la parallèle EZ à AD. Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur EZ. Évaluer la distance SH ainsi que le cosinus et le sinus de l'angle des deux droites SE et AD. On mène par SE le plan Q parallèle à AD. Déterminer l'intersection des plans Q et ASC.

**1607.** On considère un repère orthonormé $xOy$ et un point B dont les projections orthogonales sur les axes sont A sur $Ox$, C sur $Oy$. On suppose OC = 1, OA positif, et l'on pose OA = $x$.

1° *a)* Placer, dans l'intérieur du rectangle OABC, un point M également distant de $Ox$ et de $Oy$, et tel que sa distance à $Ox$ soit le double de sa distance à CB.

*b)* Ce qui précède n'est possible que si $x$ satisfait à une certaine condition. Quelle est cette condition ? Dans toute la suite du problème, on supposera la condition réalisée.

2° *a)* Calculer, en fonction de $x$, les distances AM et BM.

*b)* On considère la quantité $y = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - \overline{AB}^2$. Étudier ses variations en fonction de $x$ et construire la courbe représentative.

*c)* Pour quelles valeurs de $x$ cette fonction $y$ est-elle positive ? Montrer qu'alors l'angle AMB est aigu, et réciproquement.

*d)* Retrouver ce dernier résultat en calculant la tangente trigonométrique de l'angle AMB, en considérant celui-ci comme la somme de deux autres angles.

*e)* D'après la valeur de $x$, reconnaître si M est situé dans le triangle ACO ou dans le triangle ACB.

**1608.** 1° On considère l'équation :

$$\text{(E)} \qquad (x + 1)\, y^2 - x^3 y + x^2 (x - 1) = 0.$$

où $y$ est l'inconnue et $x$ un paramètre. Pour quelles valeurs de $x$ cette équation a-t-elle une racine double ? Quelle est, dans chaque cas, la valeur de cette racine double ?

Calculer les racines dans le cas général.

2° Construire les courbes $C_1$ et $C_2$ représentatives des variations des fonctions :

$$y_1 = \frac{x}{x + 1} \quad \text{et} \quad y_2 = x\,(x - 1).$$

$C_1$ et $C_2$ étant rapportées au même système d'axes de coordonnées, quelles sont les coordonnées de leurs points d'intersections ?

3° $C_1$ et $C_2$ passent toutes deux par l'origine O des coordonnées. Quelles sont les tangentes en O à $C_1$ et $C_2$ ?

4° On désigne par Y la plus petite des racines de l'équation (E). Déduire de l'étude du § 2° le tracé de la courbe représentative des variations de Y.

**1609.** 1° Construire sur le même graphique la courbe ($P_1$) représentative des variations de la fonction : $y = x^2 - x + 1$ et la courbe ($P_2$) représentative de la fonction : $y = 2x^2 - 3x + 2$.

2° La construction précédente montre que ces deux courbes sont tangentes en un point A dont on calculera les coordonnées.

3° Calculer le coefficient directeur de la tangente commune en A et trouver la fonction dont cette tangente $t't$ représente les variations.

4° Par le point B de l'axe $Oy$, d'ordonnée $b$, on mène la parallèle à $t't$. Quelle est l'équation représentée par cette parallèle ? Quelle condition doit vérifier $b$ pour que cette droite coupe ($P_1$) en deux points distincts ? pour qu'elle coupe ($P_2$) ? Équations donnant les abscisses des points communs.

5° Montrer que les segments découpés par ($P_1$) et ($P_2$) sur la parallèle à $t't$ ont même milieu M. Quel est le lieu du point M quand B varie sur $Oy$ ?

**1610.** 1° Calculer l'angle aigu dont la tangente égale le cosinus.

2° Un point M se déplace sur un arc de circonférence AB qui est le quart d'une circonférence. Le rayon est désigné par R, le centre par O, l'angle AOM par $2\alpha$, la projection de M sur le diamètre OB perpendiculaire à OA par H.

On demande de déterminer $\alpha$ par la condition AM − HM = R.

3° Quelle est la valeur de $\alpha$ quand la corde AM est tangente au cercle de diamètre OH ? Calculer OH dans cette hypothèse.

Quelle est la valeur de $\alpha$ quand la droite OB est tangente au cercle de diamètre AM ?

4° Étudier les variations de la fonction $y = \text{AM} + \text{HM}$, en prenant $x = \sin\alpha$ comme variable indépendante. Construire la courbe représentant ces variations.

**1611.** On considère les deux fonctions :

$$y = x^2 + 3\,x + 1 \qquad \text{et} \qquad y = x^2 + px + q$$

dont les graphiques représentatifs par rapport à deux axes perpendiculaires O$x$ et O$y$ sont respectivement les deux courbes $(\Gamma)$ et $(\Gamma')$.

1° Calculer $p$ et $q$ pour que ces deux courbes se coupent en un point A situé sur O$y$ et qu'en ce point la tangente à la courbe $(\Gamma')$ ait pour coefficient directeur $-2$.

*Dans toute cette seconde partie,* p *et* q *conserveront ces valeurs.*

2° Construire alors sur un même graphique les courbes $(\Gamma)$ et $(\Gamma')$. Établir les équations des droites tangentes à $(\Gamma)$ et à $(\Gamma')$ au point A. Ces droites coupent l'axe O$x$ en B et C. Calculer les abscisses de ces deux points. Calculer tg $\alpha$, $\alpha$ étant l'angle *aigu* formé par les deux droites tangentes.

**1612.** 1° Construire en orthonormées la courbe C représentant graphiquement les variations de la fonction : $y = x^2 - 1$.

2° On considère la droite d'équation : $y = 2\,x \operatorname{cotg} \varphi$, $\varphi$ désignant un angle donné. Montrer que, quel que soit $\varphi$, cette droite rencontre la courbe C en deux points $M_1$, $M_2$ et calculer les coordonnées de ces deux points en fonction de $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$.

3° Désignant par A le point de la courbe C situé sur O$y$, montrer que, quel que soit $\varphi$, les droites $AM_1$, $AM_2$ sont perpendiculaires.

4° Quel est le lieu du milieu I du segment $M_1M_2$ lorsque $\varphi$ varie ?

**1613.** 1° Le plan étant rapporté à deux axes rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$, construire la courbe (H) représentant les variations de la fonction : $y = \dfrac{2\,(x-1)}{x-2}$.

2° On coupe la courbe (H) par une droite (D) variable, $y = x \operatorname{tg} \varphi$. Exprimer en fonction de $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ les coordonnées des points M et N d'intersection. Expliquer pourquoi les coordonnées de l'un de ces points se déduisent de celles de l'autre lorsqu'on change $t$ en $-\dfrac{1}{t}$.

3° Montrer que les tangentes en M et N à la courbe (H) ont pour équations :

$$2\,x + (1+t)^2\,y = 2\,(1+t^2)$$

et

$$2\,t^2x + (1-t)^2\,y = 2\,(1+t^2).$$

Montrer que les coordonnées X et Y du point d'intersection S de ces tangentes satisfont aux relations : $X + Y = 2$ et $X + Y \operatorname{tg} \varphi = 0$. En déduire le lieu du point S lorsque $\varphi$ varie et l'angle de OS avec la droite (D).

**1614.** Sur un quart de circonférence AB de rayon R et de centre O, on considère un point variable M dont la position est définie par l'angle AOM $= \theta$.

1° Calculer en fonction de R et de $\theta$ l'aire S du rectangle OPMQ, P et Q étant les projections de M sur OA et OB.

2° Exprimer S en fonction de R et d'une seule ligne trigonométrique de l'angle $2\,\theta$, puis en fonction de R et de tg $\theta$.

3° Écrire une équation déterminant $\theta$ de manière que S soit l'aire d'un carré de côté $l$. En déduire que $l$ ne peut pas dépasser $\frac{R}{\sqrt{2}}$ et qu'alors l'équation détermine deux positions du point M. Comment sont situées ces deux positions sur l'arc AB ?

4° On suppose que $l = \frac{R}{2}$. Calculer les valeurs de $\theta$ et construire avec la règle et le compas les points M correspondants.

**1615.** On considère la fonction : $y = x^2 + px + q$.

1° Déterminer $p$ et $q$ de façon que le courbe représentative coupe l'axe $y'y$ au point d'ordonnée 1 et soit tangente à la droite : $y = -3$. On trouvera deux solutions, donc deux courbes.

2° Construire les courbes trouvées dans la première partie et calculer les coefficients directeurs des tangentes à ces courbes au point où elles se coupent.

3° Revenant au cas général, on suppose que l'équation (E) : $x^2 + px + q = 0$ admet deux racines, et on les désigne par tg $a$ et tg $b$. Trouver la relation qui doit exister entre $p$ et $q$ pour que l'on ait : $a + b = \frac{\pi}{3}$.

4° Calculer $p$ et $q$ lorsque, en outre de la condition ci-dessus, l'équation (E) vérifie celle d'avoir une racine égale à $+1$. Déduire de ce calcul la valeur de tg $\frac{\pi}{12}$.

**1616.** Soient les deux équations du second degré :

$$(1) \quad x^2 + mx - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad (2) \quad x^2 - x - 1 = 0$$

1° Sans calculer les racines de ces équations, montrer que ces racines existent et étudier leur signe.

2° Calculer les racines de l'équation (2).

3° On pose $f(x) = x^2 + mx - 1$ et $g(x) = x^2 - x - 1$. On appelle $x'$ et $x''$ ($x' < x''$) les racines de l'équation (1). On appelle $a$ et $b$ ($a < b$) les racines de l'équation (2). Montrer que $f(a) = a\,(m + 1)$. En déduire que, si $m > -1$, le nombre $a$ est compris entre $x'$ et $x''$. Montrer que, si $m > -1$, le nombre $b$ est supérieur à $x''$.

Reprendre l'étude précédente, relative aux positions respectives de $a$, $b$, $x'$, $x''$, lorsque $m < -1$.

4° Tracer sur un même graphique les courbes (F) et (G) représentant respectivement les variations des fonctions : $y = x^2 - 1$ et $y = x^2 - x - 1$.

Montrer qu'elles ont un seul point commun, dont on calculera les coordonnées. Constater que ce tracé permet de vérifier, dans un cas particulier, le classement relatif des nombres $a$, $b$, $x'$, $x''$ de la question 3°.

**1617.** Dans un repère orthonormé $xOy$ on donne deux points fixes, A (de coordonnées $x = -a$, $y = 0$) et B (de coordonnées $x = a$, $y = 0$). Un point H d'ordonnées $t$ *positive* varie sur O$y$. Enfin, $k$ étant un nombre constant, non nul et différent de 1, on considère le point P variable sur $y'Oy$ défini par $\frac{\overline{PH}}{\overline{PO}} = k$. On appelle (C) le cercle circonscrit au triangle APB et D la droite d'équation $y = t$.

1° *a*) Calculer, en fonction de $a$, $k$ et $t$, l'ordonnée de P et celle du point Q diamétralement opposé à P sur (C).

*b*) En supposant $k > 1$, comment faut-il choisir $t$ pour que D coupe (C) en deux points, distincts on confondus ? Étudier l'intersection de D et de (C) quand $k < 1$.

2° Lorsque D et (C) se coupent, on appelle M celui de leurs deux points communs dont l'abscisse $x$ est positive. Calculer $x^2$ en fonction de $a$, $k$ et $t$. Étudier les variations de $x^2$ en fonction de $t$, en distinguant les cas $0 < k < 1$ et $k > 1$.

3° *a*) Calculer $MA^2$ et $MB^2$ en fonction de $a$, $x$ et $t$. Exprimer ensuite ces deux grandeurs en fonction seulement de $a$, $k$ et $x$.

*b*) Calculer MA, MB, MA + MB, MA — MB en fonction de $a$, $k$ et $x$. On distinguera les cas $0 < k < 1$ et $k > 1$. En déduire, dans ces deux cas, le lieu de M quand $t$ varie.

4° Les lieux obtenus pour deux valeurs de $k$ inverses l'une de l'autre, à savoir $k = h$ et $k' = \frac{1}{h}$ ($h$ donné plus grand que 1) se coupent en un point I. Calculer IA + IB et IA — IB en fonction de $a$ et $h$. En déduire le lieu de I quand $h$ varie de 1 à $+\infty$.

**1618.** On considère la fonction : $y(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x}$.

1° Étudier la variation de cette fonction et construire sa courbe représentative (échelle : 1 cm par unité sur chaque axe). Préciser la position de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = x$. Montrer que le point O de coordonnées nulles est centre de symétrie de la courbe. Est-ce le seul ? Quels sont les points de la courbe qui ont des coordonnées entières ?

2° On considère l'équation : $\cos 2a - 2(m + 2)\cos a + 2m + 11 = 0$, (1)

où $a$ est l'inconnue, exprimée en radians, supposée comprise entre 0 et $\pi$, et $m$ un paramètre.

Montrer, en posant $\cos a = x + 1$, que l'équation (1) peut s'étudier en utilisant la courbe construite au 1°. En particulier, dresser le tableau donnant le nombre des solutions de l'équation (1) suivant les valeurs données à $m$.

3° Résoudre l'équation (1) pour $m = -6$. On donnera la valeur de $a$ avec la plus grande précision possible.

**1619.** On considère la fonction $y$ de la variable $x$ définie par l'égalité : $y = \dfrac{x - 2}{(x - 1)^2}$.

A) 1° Étudier la variation de cette fonction et construire sa courbe représentative (C) dans un système d'axes orthonormé $x'Ox$ et $y'Oy$ (échelle : 2 centimètres par unité sur chaque axe). Construire les tangentes à la courbe (C) aux points d'abscisses 0 et 2.

2° Soit (D) la droite d'équation $y = h$, où $h$ est un paramètre. Étudier, suivant les valeurs de $h$, le nombre des points communs aux courbes (C) et (D).

Lorsque (C) et (D) se coupent en deux points, on désigne ces deux points par $M_1$ et $M_2$ et leurs abscisses respectives par $x_1$ et $x_2$. Déterminer $h$ de manière que la longueur du segment de droite $M_1M_2$ soit égale à $\sqrt{5}$.

B) Dans toute la suite du problème, on suppose $h = -1$ et $x_1 < x_2$.

1° Montrer que l'angle $M_1OM_2$ est droit. Calculer l'abscisse du milieu de $M_1M_2$; en déduire une construction géométrique simple des points $M_1$ et $M_2$.

2° On pose $x_1 = -2\sin\alpha$. Calculer successivement $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 4\alpha$. En déduire, sans table, la valeur en radians de l'angle $\alpha$, sachant qu'il satisfait à la condition $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

En suivant une méthode analogue, donner les expressions des angles $\beta$ vérifiant la relation

$$x_2 = 2\sin\beta.$$

**1620.** On considère la fonction : $y = \dfrac{x^2 + (m - 2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$,

où $x$ est la variable et $m$ un paramètre. Soit (C) la courbe représentative, par rapport à un système d'axe rectangulaires, $Ox$, $Oy$.

1° *a*) Pour qu'elles valeurs de $m$ la fonction est-elle toujours croissante ?

*b*) Pour quelles valeurs de $m$ admet-elle un maximum et un minimum ?

2° Montrer que toutes les courbes (C) passent par un point fixe, A. Déterminer $m$ pour que la tangente en A à (C) soit parallèle à la droite d'équation $20x + 9y = 0$. Achever, dans ce cas, l'étude des variations de la fonction et tracer la courbe (C ) correspondante.

3° Soit B le point de l'axe O$y$ défini par $\overline{OB} = \lambda$. Soit (D) la parallèle à O$x$ menée par B. Pour quelles valeurs de $\lambda$ la parallèle (D) coupe-t-elle $(C_0)$ en deux points, M et M' ? On désigne par B' le conjugué harmonique de B par rapport à M et M'. Calculer en fonction de $\lambda$ les coordonnées de B'. Déterminer et construire, sur le même graphique que $(C_0)$, la courbe $(\Gamma)$ lieu géométrique de B' lorsque $\lambda$ varie.

4° Calculer les coordonnées des points communs à $(C_0)$ et $(\Gamma)$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

5° Établir une relation indépendante de $m$ entre les abscisses des points d'une courbe (C) correspondant au maximum et au minimum. Montrer que les projections de ces deux points sur l'axe O$x$ sont deux points conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes.

**1621.** On considère la fonction : $\dfrac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$, dans laquelle $a$ et $b$ désignent les coordonnées d'un point M d'un plan P rapporté à deux axes rectangulaires O$a$ et O$b$.

1° Quelle relation doit-il exister entre $a$ et $b$ ou quelles valeurs $a$ et $b$ doivent-elles avoir pour que $y$ garde une valeur constante pour toutes les valeurs de $x$ ? En déduire le lieu des positions de M sur le plan P pour lesquels cette condition est vérifiée.

2° Déterminer la région $R_1$ du plan P dans laquelle M doit se trouver pour que $y$ conserve un signe invariable pour toutes les valeurs de $x$. Quelle est la courbe qui limite la région $R_1$ ?

3° Déterminer la région $R_2$ du plan P dans laquelle doit se trouver M pour que $y$ ait un maximum ou un minimum. Quelle est la courbe qui limite la région $R_2$

4° Déterminer $a$ et $b$ de façon que la fonction $y$ passe par un minimum, de valeur $m$ donnée, pour $x = c$, valeur donnée, $m$ et $c$ étant des nombres différents de $+ 1$ et $- 1$. Examiner si $m$ peut être quelconque.

**1622.** Dans un triangle ABC, la médiatrice de BC coupe BC en M, AC en D et la droite AB en E. Dans toutes les parties du problème, les triangles ABC sont tels que AC > AB et que $\dfrac{DA}{DC} = k$ nombre positif donné.

1° Évaluer en fonction de $k$ les rapports $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{BE}}$ et $\dfrac{\overline{ME}}{\overline{MD}}$. Montrer que les côtés du triangle sont liés par la relation : $b^2 - c^2 = ka^2$. Deux des sommets du triangle étant donnés, trouver les lieux du troisième sommet et des point D et E dans les cas suivants :

*a)* On donne B et C. *b)* On donne C et A. *c)* On donne A et B.

2° Montrer que les angles du triangle vérifient la relation : $\sin(B - C) = k \sin(B + C)$. En déduire que les quantités : $\dfrac{\sin B \cos C}{\sin A}$, $\dfrac{\sin C \cos B}{\sin A}$, $\dfrac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}$, $\dfrac{\sin 2B - \sin 2C}{\sin 2A}$ s'expriment en fonction de $k$ et donner leurs expressions.

3° Connaissant l'angle A, calculer les angles B et C. Discuter.

4° Construire géométriquement le triangle ABC, connaissant l'angle A et le côté BC = $a$. Discuter.

**1623.** 1° Étudier la variation de la fonction : $y = \dfrac{x^2 + 2x}{(x - 1)^2}$. Tracer la courbe représentative (C).

2° Soit (D)' la droite de coefficient directeur $m$, passant par l'origine des coordonnées. Former l'équation donnant les abscisses des points communs à (C) et (D). Discuter, suivant les valeurs de $m$, le nombre de ces points communs. Pour quelles valeurs de $m$ les courbes (C) et (D) sont-elles tangentes ?

3° Soit l'équation : $(k - 1) \sin^2 t - 2(k + 1) \sin t + k = 0$,
où $t$ désigne un arc inconnu, compris entre 0 et $2\pi$, et $k$ un paramètre.

Exprimer $k$ en fonction de $\sin t$. Montrer ensuite qu'en coupant la courbe (C) par une parallèle variable à l'axe des abscisses on peut étudier, suivant les valeurs de $k$, le nombre de solutions de cette équation. Déterminer $k$ pour qu'il existe des arcs complémentaires solutions de l'équation.

4° On considère la fonction : $y = a \dfrac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$. Quelle est sa dérivée ? Pour quelles valeurs de $x$ cette dérivée s'annule-t-elle ? Comment la courbe représentative $(C_a)$ de cette fonction se déduit-elle de la courbe (C) ?

La courbe $(C_a)$ coupe l'axe des abscisses en deux points. Déterminer $a$ pour que les tangentes à la courbe $(C_a)$ en ces points soient perpendiculaires.

**1624.** 1° Construire la courbe (C) d'équation : $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1}$. Démontrer que le point de rencontre des deux asymptotes est un centre de symétrie.

2° On considère la droite (D) de coefficient directeur $a$ et passant par le point I d'abscisse — 1 de l'axe $x'Ox$. Discuter le nombre de points d'intersection de (D) et de (C), suivant les valeurs de $a$. Trouver l'équation des tangentes à la courbe (C) issues de I et les coordonnées des points de contact. Traduire graphiquement cette discussion en harchurant la partie du plan où se trouvent les droites (D) ne coupant pas (C).

3° Dans le cas où la droite (D) coupe (C) en deux points A et B, trouver l'abscisse du milieu M de AB et celle du conjugué harmonique J de I par rapport à A et B. Trouver et construire sur le graphique précédent le lieu (H) de M et le lieu $(\Delta)$ de J. Montrer que certains points remarquables de (C) se trouvent sur (H) et $(\Delta)$.

**1625.** 1° Résoudre et discuter l'équation : $\cos^2\theta + 2m\sin\theta - p = 0$ (E)
où $\theta$ est l'inconnue et $m$ et $p$ des paramètres. (On prendra pour inconnue auxiliaire $u = \sin\theta$).

2° Considérant $m$ et $p$ comme les coordonnées d'un point M d'un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires $Om$, $Op$, interpréter graphiquement les résultats de la discussion précédente et dire combien l'équation (E) a de solutions, suivant la position du point M dans le plan.

3° Examiner le cas particulier où $m$ et $p$ sont liés par la relation $p = m + 1$.

4° Étudier les variations de la fonction : $y = \dfrac{x^2}{2x-1}$ et tracer la courbe représentative.

5° Utiliser cette courbe représentative pour retrouver graphiquement les résultats de la question 3°.

**1626.** On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2 R et de centre O. Un point M de ce demi-cercle est projeté orthogonalement en H sur AB. Le problème consiste à déterminer le point M (ou les points M) tels que : $MA + 2\,MB = kR$, $k$ étant un nombre positif donné.

1° En prenant pour inconnue $\overline{OH} = x$, on montrera que la résolution du problème conduit à une équation irrationnelle, qu'on discutera.

2° En prenant pour inconnues $MA = u$ et $MB = v$, on formera un système de deux équations, que l'on discutera. Interpréter géométriquement la solution de ce système.

3e En prenant pour inconnue l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, résoudre et discuter le problème.

**1627.** 1° Soit la fonction : $f(x) = \dfrac{x^2 + px + 1}{2x^2 - 3x + 1}$. Déterminer $p$ pour que $f(x)$ admette un maximum ou un minimum pour $x = 0$. Construire la courbe représentative de cette fonction pour cette valeur de $p$.

2° Utiliser les résultats précédents pour l'étude de la fonction : $g(u) = \dfrac{\sin^2 u - 3\sin u + 1}{2\sin^2 u - 3\sin u + 1}$, et sa représentation graphique. Comment déduirait-on simplement de cette dernière celle de la fonction $h(v) = f(\cos v)$, pour la valeur $p$ déterminée plus haut ?

3° Quelles sont les valeurs de $u$ qui satisfont à la condition $g(u) \geqslant 1$ ?

4° Peut-on choisir le paramètre $p$ de telle sorte que $f(x)$ tende vers une limite finie quand $x$ tend vers 1 ?

Le paramètre $p$ étant ainsi fixé, peut-on compléter la définition de $f(x)$ de telle sorte que cette fonction soit définie et continue pour $x = 1$ ? Quelle est alors sa représentation graphique ?

**1628.** 1° Simplifier : $A = \dfrac{x^2 - x}{x^3 + x - x^2 - 1}$, $\quad B = \dfrac{10\,y^2 - 2\,y}{25\,y^2 - 1}$.

2° En égalant les valeurs de A et de B sous leur forme simplifiée on trouve une relation entre $x$ et $y$. Étudier la fonction $y = f(x)$ définie par cette relation et construire la courbe représentative (C) de ses variations dans un système d'axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$.

3° Déterminer l'équation de la tangente à (C) au point O, ainsi que les coordonnées du point où cette tangente recoupe (C).

4° Soit une droite passant par O, de pente variable $m$. Pour quelles valeurs de $m$ cette droite coupe-t-elle (C) en deux points, M′ et M″, autres que O ? Lieu du conjugué harmonique de O par rapport à M′ et M″ lorsque $m$ varie dans ces conditions.

5° Une parallèle à $x'Ox$, d'ordonnée $h$, coupe (C), en général, en deux points, P′ et P″. Déterminer $h$ pour que le segment P′P″ ait une longueur donnée $l$. Nombre de solutions.

*Application numérique* : $l = \sqrt{5}$.

**1629.** On donne la fonction : $y = \dfrac{a\,(x^2 - 1) - x\,(a^2 - 1)}{x^2 + 1}$, $a$ étant une constante.

1° Déterminer les valeurs de $x$ qui annulent $y$ et celles qui annulent sa dérivée; vérifier que ces valeur s'expriment rationnellement en fonction de $a$.

2° On suppose $a = 1$; étudier les variations de $y$ et construire la courbe correspondante dans un repère orthonormé $xOy$. Cette courbe coupe $Ox$ en deux points, A et B, et les points correspondant au minimum et au maximum se projettent sur $Ox$ aux points C et D; démontrer que les cercles de diamètres AB et CD se coupent sur $Oy$. Ce résultat subsiste-t-il pour une valeur quelconque de $a$ ?

3° Dans le cas général, où $a$ est quelconque, on pose $x = \operatorname{tg} u$, $a = \operatorname{tg} \alpha$. Démontrer la relation : $y = \dfrac{\sin^2 (u - \alpha)}{2 \cos^2 \alpha}$.

**1630.** On considère la fonction : $y = \dfrac{x^2 + 2\,x + 1}{2\,x^2 - x + 1}$.

1° Valeurs de définition de $x$. Calcul de sa dérivée.

2° Trouver les limites de $y$ quand $x$ tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

3° Représenter graphiquement la fonction $y$ sur papier millimétré, après avoir dressé le tableau de variation de $y$.

4° En remarquant que l'équation : $(2\,m - 1)\,x^2 - (m + 2)\,x + m - 1 = 0 \qquad (1)$

peut s'écrire : $m = \dfrac{x^2 + 2\,x + 1}{2\,x^2 - x + 1}$ et en utilisant le graphique de la fonction $y$, étudier, suivant valeurs de $m$, l'existence et le signe des racines de l'équation (1).

**1631.** On considère la fonction $y$ de la variable $x$ définie par :

$$y = \frac{x^2 - x\,(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{x^2 + 1},$$

où $a$ et $b$ désignent des angles donnés vérifiant les inégalités $-\dfrac{\pi}{2} < b < a < \dfrac{\pi}{2}$, et l'on désigne par (Γ) la courbe représentative de cette fonction dans un système d'axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Vers quelle limite tend $y$ quand on fait tendre $x$ vers l'infini ? Calculer l'abcisse $c$ du point d'intersection de l'asymptote et de la courbe (Γ) : exprimer $c$ en fonction de l'angle $a + b$. Étudier le cas où $a + b = 0$.

2° Étudier les variations de $y$ et construire la courbe (Γ) quand $a = \dfrac{\pi}{3}$ et $b = -\dfrac{\pi}{3}$. On calculera la dérivée première $y'$ et la dérivée seconde $y''$ de la fonction $y$ et l'on déterminera les points où $y''$ s'annule.

3° On revient au cas général : $a + b \neq 0$. Calculer la dérivée $y'$ de la fonction $y$. Déterminer les valeurs $x_1$ et $x_2$ de la variable $x$ pour lesquelles on a $y' = 0$ et montrer que $x_1$ et $x_2$ peuvent s'exprimer simplement au moyen des fonctions trigonométriques d'un seul angle. $M_1$ et $M_2$ désignant les points correspondants de $(\Gamma)$, quelle est la projection, sur l'asymptote, du milieu de $M_2M_1$ ?

4° Étudier les variations de $y$ et construire la courbe $(\Gamma)$ pour les valeurs $a = \frac{\pi}{4}$ et $b = 0$. On prendra 2 cm comme unité de longueur sur chacun des axes (1 unité = 2 cm).

**1632.** On désigne par $(C_m)$ la courbe représentative de la fonction : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - 2}$ ($m$ étant une constante donnée).

1° Étudier la variation de la fonction $f(x)$ pour $m = 0$. Tracer la courbe $(C_0)$ correspondante. Déterminer les deux asymptotes de cette courbe et montrer que leur point d'intersection I, est centre de symétrie pour $(C_0)$.

2° Pour quelles valeurs de $m$ la fonction $f(x)$ est-elle constamment croissante ? Pour quelles valeurs de $m$ cette fonction admet-elle un maximum et un minimum ? Exprimer en fonction de $m$ les coordonnées des deux points correspondants de $(C_m)$ et trouver leur lieu géométrique quand $m$ varie.

3° Soit K le point où la courbe $(C_m)$ coupe l'axe O$y$. Écrire l'équation de la tangente en K à la courbe $(C_m)$ et montrer que cette tangente coupe l'asymptote oblique de $(C_m)$ en un point fixe, T, dont on donnera les coordonnées.

**1633.** On considère la fonction : $y = \dfrac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3}$, (1)

1° Étudier les variations de la fonction correspondant à $m = 4$. Construire la courbe représentative et montrer qu'elle a un axe de symétrie.

2° Quelles sont les valeurs de $m$ pour lesquelles la fonction (1) : *a*) n'admet ni maximum ni minimum; *b*) admet un maximum et un minimum; *c*) admet seulement un minimum ? Qu'y a-t-il de particulier si $m = 1$ ou $m = 3$ (l'étude des fonctions correspondantes n'est pas demandée) ?

3° Calculer en fonction de $m$ les coordonnées du point A d'intersection de la courbe $(C_m)$ représentant la fonction (1) et de son asymptote parallèle à l'axe $x'x$. Calculer les coordonnées du point B autre que O et A, d'intersection de la courbe $(C_m)$ et de la droite OA.

4° Calculer les coordonnées du point M, conjugué harmonique de O par rapport aux points A et B. Quel est le lieu géométrique de M ?

En supposant connus les résultats de la question 3°, retrouver géométriquement le lieu de M.

**1634.** On considère la fonction : $y_m = \dfrac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}$.
où $x$ est la variable et $m$ un paramètre. A chaque valeur de $m$ correspondent une fonction $y_m$ et une courbe représentative $(C_m)$.

1° Montrer que toutes les courbes $(C_m)$ passent par trois points fixes, indépendants de $m$, dont on déterminera les coordonnées.

2° Dans toute la suite du problème, on choisira $m$ de telle façon que le point P, intersection de $(C_m)$ et de l'asymptote parallèle à $x'x$, ait pour abscisse $\frac{3}{2}$. Montrer que la fonction $y_m$ ainsi déterminée est la fonction $y_0$. Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative $(C_0)$.

3° Former l'équation aux abscisses des points d'intersection de $(C_0)$ et de la droite D d'équation $y = tx$. Discuter le nombre de points d'intersection, suivant les valeurs de $t$. Former les équations des tangentes issues de O à la courbe $(C_0)$ et trouver les coordonnées des points de contact. Étudier la position de $(C_0)$ par rapport à sa tangente en O.

4° Calculer la dérivée seconde de $y_0$ et les valeurs de $x$ qui l'annulent. Montrer que les points correspondants de $(C_0)$ sont alignés.

5° Dans le cas où D coupe $(C_0)$ en deux points, A et B, distincts de O, trouver le lieu du milieu, I, de AB. Déterminer ses points d'intersection avec $(C_0)$.

**1635.** On donne la fonction : $y = \dfrac{\cos x + \lambda \sin x}{\sin^2 x}$ dans laquelle $\lambda$ est un paramètre.

1° Étudier les variations de $y$. Discuter, suivant les valeurs données à $\lambda$ les formes que prend la courbe $C_\lambda$ représentant ces variations.

2° La courbe $C_\lambda$ admet, pour certaines valeurs de $\lambda$, des points où la tangente est parallèle à l'axe $Ox$. Calculer l'ordonnée de ces points uniquement en fonction de leur abscisse. Tracer la courbe lieu de ces points.

3° On donne à $\lambda$ la valeur 3. Construire avec précision la courbe C . Quel est le nombre des valeurs de $x$ comprises entre 0 et $3\pi$ qui satisfont à l'équation : $\cos x + 3 \sin x = 2\sqrt{2} \sin^2 x$ ?

Résoudre cette équation et démontrer que parmi les solutions se trouvent $x = \dfrac{7\pi}{12}$ ; $x = \dfrac{23\pi}{12}$.

**1636.** 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \sin x + \dfrac{1}{8} \operatorname{tg} x = f(x)$.

Tracer la courbe représentative de la fonction dans l'intervalle $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Calculer les valeurs $x_1$, $y_1$ correspondant au point M où la fonction atteint un maximum relatif pour : $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

2° Montrer que l'on a : $y = 2 \operatorname{tg} x \cos \dfrac{x+a}{2} \cos \dfrac{x-a}{2}$ avec $\cos a = \dfrac{1}{8}$.

Calculer $y$ pour les valeurs $x = \dfrac{p\pi}{12}$, $p$ prenant successivement les valeurs 0, 1, ... 11, 12.

3° La droite $y = y_1$ coupe la courbe d'équation $y = f(x)$ en deux points d'abscisses $x = b$, $x = c$ situés dans l'intervalle $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ et différents de M. Former l'équation du 2e degré qui admet pour racines $\cos b$ et $\cos c$. Calculer $b$ et $c$.

**Rapports trigonométriques naturels de GRADE en GRADE**

| Grad. | Radians | Sin | 1/Sin | Tang. | Cotg. | 1/Cos | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0,000 | 0,0000 | infini | 0,0000 | infini | 1.000 | 1,000 | 1,571* | **100** |
| **1** | 0,016* | 0,0157 | 63,66 | 0,0157 | 63,66* | 1,000 | 0,9999* | 1,555 | **99** |
| **2** | 0,031 | 0,0314 | 31,84* | 0,0314 | 31,82 | 1,000 | 0,9995 | 1,539 | **98** |
| **3** | 0,047 | 0,0471 | 21,23* | 0,0472* | 21,20 | 1,001 | 0,9989* | 1,524* | **97** |
| **4** | 0,063* | 0,0628* | 15,93* | 0,0629 | 15,89 | 1,002* | 0,9980 | 1,508* | **96** |
| **5** | 0,079* | 0,0785* | 12,75* | 0,0787 | 12,71* | 1,003 | 0,9969* | 1,492 | **95** |
| **6** | 0,094 | 0,0941 | 10,63* | 0,0945 | 10,58* | 1,004 | 0,9956* | 1,477* | **94** |
| **7** | 0,110* | 0,1097 | 9,113* | 0,1104 | 9,058* | 1,006 | 0,9940* | 1,461* | **93** |
| **8** | 0,126* | 0,1253 | 7,979* | 0.1263 | 7,916* | 1,008* | 0,9921 | 1,445 | **92** |
| **9** | 0,141 | 0,1409 | 7,097 | 0,1423 | 7,026 | 1,010 | 0,9900 | 1,429 | **91** |
| **10** | 0,157 | 0,1564 | 6,392 | 0,1584* | 6,314* | 1,012 | 0,9877* | 1,414* | **90** |
| **11** | 0,173* | 0,1719 | 5,816 | 0,1745 | 5,730* | 1,015 | 0,9851 | 1,398 | **89** |
| **12** | 0,188 | 0,1874* | 5,337* | 0,1908* | 5,242 | 1,018 | 0,9823* | 1,382 | **88** |
| **13** | 0,204 | 0,2028* | 4,931 | 0,2071* | 4,829* | 1,021 | 0,9792 | 1,367* | **87** |
| **14** | 0,220* | 0,2181 | 4,584 | 0,2235 | 4,474* | 1,025* | 0,9759 | 1,351* | **86** |
| **15** | 0,236* | 0,2334 | 4,284* | 0,2401* | 4,165 | 1,028 | 0,9724* | 1,335 | **85** |
| **16** | 0,251 | 0,2487* | 4,201 | 0,2568* | 3,895* | 1,032 | 0,9686* | 1,319 | **84** |
| **17** | 0,267 | 0,2639* | 3,790* | 0,2736* | 3,655 | 1,037* | 0.9646* | 1,304* | **83** |
| **18** | 0,283* | 0,2790* | 3,584 | 0,2905 | 3,442 | 1,041 | 0,9603* | 1,288 | **82** |
| **19** | 0,298 | 0,2940 | 3,401* | 0,3076 | 3,251* | 1,046 | 0,9558* | 1,272 | **81** |
| **20** | 0,314 | 0,3090 | 3,236 | 0,3249 | 3,078* | 1,051 | 0,9511* | 1,257* | **80** |
| **21** | 0,330* | 0,3239 | 3,087 | 0,3424* | 2,921* | 1,057* | 0,9461* | 1,241* | **79** |
| **22** | 0,346* | 0,3387 | 2,952 | 0,3600 | 2.778* | 1,063* | 0,9409* | 1,225 | **78** |
| **23** | 0,361 | 0,3535* | 2,829 | 0,3779* | 2,646 | 1·069 | 0,9354 | 1,210* | **77** |
| **24** | 0,377* | 0,3681 | 2,716 | 0,3959 | 2,526* | 1,076* | 0,9298* | 1,194* | **76** |
| **25** | 0,393* | 0,3827* | 2,613 | 0,4142 | 2,414 | 1,082 | 0,9239* | 1.178 | **75** |
| **26** | 0,408 | 0,3971 | 2,518* | 0,4327 | 2,311* | 1,090* | 0,9178* | 1,162 | **74** |
| **27** | 0,424 | 0,4115 | 2,430 | 0,4515 | 2,215* | 1,097 | 0,9114 | 1,147* | **73** |
| **28** | 0,440* | 0,4258* | 2,349* | 0,4706* | 2,125 | 1,105 | 0,9048 | 1,131* | **72** |
| **29** | 0,456* | 0,4399 | 2,273 | 0,4899* | 2,041 | 1,114* | 0,8980 | 1,115 | **71** |
| **30** | 0,471 | 0,4540* | 2,203* | 0,5095 | 1,963* | 1,122 | 0,8910 | 1,100* | **70** |
| **31** | 0,487* | 0,4679 | 2,137 | 0,5295* | 1,889* | 1,132* | 0,8838* | 1,084* | **69** |
| **32** | 0,503* | 0,4818* | 2,076* | 0,5498* | 1,819* | 1,141 | 0,8763 | 1,068 | **68** |
| **33** | 0,518 | 0,4955* | 2,018 | 0,5704* | 1,753 | 1,151 | 0,8686 | 1,052 | **67** |
| **34** | 0,534 | 0,5090 | 1,964 | 0,5914* | 1,691* | 1,162* | 0,8607 | 1,037* | **66** |
| **35** | 0,550* | 0,5225* | 1,914* | 0,6128 | 1,632* | 1,173* | 0,8526 | 1,021 | **65** |
| **36** | 0,565 | 0,5358 | 1,866 | 0,6346 | 1,576* | 1,184 | 0,8443 | 1,005 | **64** |
| **37** | 0,581 | 0,5490 | 1,821 | 0,6569* | 1,522 | 1,196 | 0.8358 | 0,990* | **63** |
| **38** | 0,597* | 0,5621* | 1,779 | 0,6796* | 1,471 | 1,209 | 0,8271* | 0,974* | **62** |
| **39** | 0,613* | 0,5750 | 1,739 | 0,7028 | 1,423* | 1,222 | 0,8181 | 0,958 | **61** |
| **40** | 0,628 | 0.5878* | 1,701 | 0,7265 | 1,376 | 1,236 | 0,8090 | 0,942 | **60** |
| **41** | 0 644 | 0,6004 | 1,666* | 0,7508 | 1,332* | 1,250 | 0,7997* | 0,927* | **59** |
| **42** | 0,660* | 0,6129 | 1,632* | 0,7757* | 1,289 | 1,266* | 0,7902* | 0,911 | **58** |
| **43** | 0,675 | 0,6252 | 1,599 | 0,8012* | 1,248 | 1,281 | 0,7804 | 0,895 | **57** |
| **44** | 0,691 | 0,6374 | 1,569* | 0,8273* | 1,209* | 1,298* | 0,7705 | 0,880* | **56** |
| **45** | 0,707* | 0,6494 | 1,540* | 0,8541* | 1,171* | 1,315 | 0,7604 | 0,864* | **55** |
| **46** | 0,723* | 0,6613 | 1,512 | 0,8816 | 1,134 | 1,333 | 0,7501 | 0,848 | **54** |
| **47** | 0,738 | 0,6730 | 1,486* | 0,9099 | 1,099* | 1,352 | 0,7396 | 0,833* | **53** |
| **48** | 0,754* | 0,6845 | 1,461* | 0,9391* | 1,065* | 1,372* | 0,7290* | 0,817* | **52** |
| **49** | 0,770* | 0,6959 | 1,437* | 0,9691* | 1,032* | 1,393* | 0,7181 | 0,801 | **51** |
| **50** | 0,785 | 0,7071 | 1,414 | 1,0000 | 1,000 | 1,414 | 0,7071 | 0,785 | **50** |
| | | Cos. | 1/Cos | Cotg | Tang | 1/Sin | Sin | Radians | Grad. |

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

## Rapports trigonométriques naturels de DEGRÉ en DEGRÉ

| Deg. | Radians | Sin | $\frac{1}{\text{Sin}}$ | Tang. | Cotg | $\frac{1}{\text{Cos}}$ | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0,0000 | 0,0000 | infini | 0,000 | infini | 1,000 | 1,0000 | 1,5708* | **90** |
| **1** | 0,0175* | 0,0175* | 57,30* | 0,0175* | 57,29* | 1,000 | 0,9998 | 1,5533 | **89** |
| **2** | 0,0349 | 0,0349* | 28,65 | 0,0349 | 28,64* | 1,001* | 0,9994* | 1,5359* | **88** |
| **3** | 0,0524* | 0,0523 | 19,11* | 0,0524 | 19,08 | 1,001* | 0,9986 | 1,5184 | **87** |
| **4** | 0,0698 | 0,0698* | 14,34* | 0,0699 | 14,30 | 1 002 | 0,9976* | 1,5010* | **86** |
| **5** | 0,0873* | 0,0872* | 11,47 | 0,0875* | 11,43 | 1,004* | 0,9962* | 1,4835 | **85** |
| **6** | 0,1047 | 0,1045 | 9,567* | 0,1051 | 9,514 | 1,006* | 0,9945 | 1,4661* | **84** |
| **7** | 0,1222* | 0,1219* | 8,206* | 0,1228* | 8,144 | 1,008* | 0,9925 | 1,4486 | **83** |
| **8** | 0,1396 | 0,1392* | 7,185 | 0,1405 | 7,115 | 1,010* | 0,9903* | 1,4312* | **82** |
| **9** | 0,1571* | 0,1564 | 6,392 | 0,1584* | 6,314* | 1,012 | 0,9877* | 1,4137 | **81** |
| **10** | 0,1745 | 0,1736 | 5,759* | 0,1763 | 5,671 | 1,015 | 0,9848 | 1,3963* | **80** |
| **11** | 0,1920* | 0,1908 | 5,241* | 0,1944* | 5,145* | 1,019* | 0 9816 | 1,3788 | **79** |
| **12** | 0,2094 | 0,2079 | 4,810* | 0,2126* | 4,705* | 1,022 | 0,9781 | 1,3614* | **78** |
| **13** | 0,2269* | 0,2250* | 4,445 | 0,2309* | 4,331 | 1,026 | 0,9744* | 1,3439 | **77** |
| **14** | 0,2443 | 0 2419 | 4,134* | 0,2493 | 4,011* | 1,031* | 0,9703* | 1,3265* | **76** |
| **15** | 0,2618* | 0,2588 | 3,864* | 0,2679 | 3,732 | 1,035 | 0,9659 | 1,3090* | **75** |
| **16** | 0,2793* | 0,2756 | 3,628* | 0,2867 | 3,487 | 1,040 | 0,9613* | 1,2915 | **74** |
| **17** | 0,2967 | 0,2924* | 3,420 | 0,3057 | 3,271* | 1,046* | 0,9563 | 1,2741* | **73** |
| **18** | 0,3142* | 0,3090 | 3,236 | 0,3249 | 3,078* | 1,051 | 0,9511* | 1,2566 | **72** |
| **19** | 0,3316 | 0,3256* | 3,072* | 0,3443 | 2,904 | 1,058* | 0,9455 | 1,2392* | **71** |
| **20** | 0,3491* | 0,3420 | 2,924* | 0,3640* | 2,747 | 1,064 | 0,9397* | 1,2217 | **70** |
| **21** | 0,3665 | 0,3584* | 2,790 | 0,3839* | 2,605 | 1,071 | 0,9336* | 1,2043* | **69** |
| **22** | 0,3840* | 0,3746 | 2,669 | 0,4040 | 2,475 | 1,079* | 0,9272* | 1,1868 | **68** |
| **23** | 0,4014 | 0,3907 | 2,559 | 0,4245* | 2,356* | 1,086 | 0,9205 | 1,1694* | **67** |
| **24** | 0,4189* | 0,4067 | 2,459* | 0,4452 | 2,246 | 1,095* | 0,9135 | 1,1519 | **66** |
| **25** | 0,4363 | 0,4226 | 2,366 | 0,4663 | 2,145* | 1,103 | 0,9063 | 1,1345* | **65** |
| **26** | 0,4538* | 0,4384* | 2,281 | 0,4877 | 2,050 | 1,113* | 0,8988* | 1,1170 | **64** |
| **27** | 0,4712 | 0,4540* | 2,203* | 0,5095 | 1,963* | 1,122 | 0,8910 | 1,0996* | **63** |
| **28** | 0,4887* | 0,4695* | 2,130 | 0 5317 | 1,881* | 1,133* | 0,8929 | 1,0821 | **62** |
| **29** | 0,5061 | 0,4848 | 2,063* | 0,5543 | 1,804 | 1,143 | 0,8746 | 1,0647* | **61** |
| **30** | 0,5236* | 0,5000 | 2,000 | 0,5774* | 1,732 | 1,155* | 0,8660 | 1,0472* | **60** |
| **31** | 0,5411* | 0,5150 | 1,942* | 0,6009* | 1,664 | 1,167* | 0,8572* | 1,0297 | **59** |
| **32** | 0,5585 | 0,5299 | 1,887 | 0,6249* | 1,600 | 1,179 | 0,8480 | 1,0123* | **58** |
| **33** | 0,5760* | 0,5446 | 1,836 | 0,6494 | 1,540* | 1,192 | 0,8387* | 0,9948 | **57** |
| **34** | 0,5934 | 0,5592* | 1,788 | 0,6745 | 1,483* | 1,206 | 0,8290 | 0,9774* | **56** |
| **35** | 0,6109* | 0,5736* | 1,743 | 0,7002 | 1,428 | 1,221* | 0,8192* | 0,9599 | **55** |
| **36** | 0,6283 | 0,5878* | 1,701 | 0,7265 | 1,376 | 1,236 | 0,8090 | 0,9425* | **54** |
| **37** | 0,6458* | 0,6018 | 1,662* | 0,7536* | 1,327 | 1,252 | 0,7986 | 0,9250 | **53** |
| **38** | 0,6632 | 0,6157* | 1,624 | 0,7813* | 1,280* | 1,269 | 0,7880 | 0,9076* | **52** |
| **39** | 0,6807* | 0,6293 | 1,589 | 0,8098* | 1,235* | 1,287* | 0,7771 | 0,8901 | **51** |
| **40** | 0,6981 | 0,6428* | 1,556* | 0,8391* | 1,192* | 1,305 | 0,7660 | 0,8727* | **50** |
| **41** | 0,7156* | 0,6561* | 1,524 | 0,8693* | 1,150 | 1,325 | 0,7547 | 0,8552 | **49** |
| **42** | 0,7330 | 0,6691 | 1,494 | 0,9004 | 1,111* | 1,346* | 0,7431 | 0,8378* | **48** |
| **43** | 0,7505* | 0,6820* | 1,466 | 0,9325 | 1 072 | 1,367 | 0,7314 | 0,8203 | **47** |
| **44** | 0,7679 | 0,6947* | 1,440* | 0,9657* | 1,036* | 1,390 | 0,7193 | 0,8029* | **46** |
| **45** | 0,7854* | 0,7071 | 1,414 | 1,0000 | 1,000 | 1,414 | 0,7071 | 0,7854* | **45** |
| | | Cos | $\frac{1}{\text{Cos}}$ | Cotg | Tang. | $\frac{1}{\text{Sin}}$ | Sin | Radians | Deg. |

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

# TABLE DES MATIÈRES

## LIVRE I : FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE



## LIVRE II : TRIGONOMÉTRIE

## LIVRE III : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS



Imprimé en France
IMPRIMERIE FIRMIN-DIDOT. - PARIS - MESNIL - IVRY - 4206
Dépôt légal : 1er trimestre 1967.
N°d'Éditeur C. 11239, X. (MV. f. SB 4)