CARGO

Collection de Mathématiques

3^{e}

Guide pédagogique

ISBN : 978-2-7531-0468-6

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Racine carrée d'un nombre positif [1 p 99]	20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27	52, 53,	
2	Opérations sur les racines carrées [2 p 99]	36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51	54, 55, 56, 57	59, 60, 61, 62, 63, 64,65, 66, 67, 68, 69
	Apprendre à réduire des expressions comportant des radicaux [1 p 100]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10		
3	Valeur exacte ou encadrement d'une racine carrée [3 p 99]	28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35	58	63, 68, 69
	Apprendre à trouver la valeur d'une racine carrée [2 p 101]	11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer Art géométrique

1. Aire du carré bleu : 16 dm²,
aire du carré orange : 8 dm²,
aire du carré vert : 4 dm²,
aire du carré jaune : 2 dm²,
aire du carré rouge : 1 dm².

2.a. L'aire d'un carré, dont le côté mesure a (dm), est égale à a^2 (dm²).

b.c. Les côtés des carrés bleu, vert et rouge mesurent respectivement 4 dm, 2 dm et 1 dm.

3.a. Les côtés des carrés orange et jaune mesurent (sur le dessin)
≈ 2,8 dm et ≈ 1,4 dm.

b. On vérifie que : $2{,}8^2 \approx 8$ et $1{,}4^2 \approx 2$.

Les valeurs obtenues ne sont pas des valeurs exactes.

1 Racine carrée de 2

1. *ABCD* est un carré, dont le côté mesure 1 dm.
ACEF est un carré, dont les diagonales se coupent en *D*.

2.a. Aire du carré *ABCD* : 1 dm².

b. Aire du triangle *ADC* : 0,5 dm².

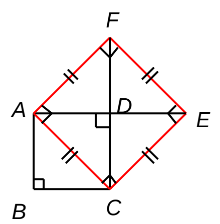
c. Aire du carré *ACEF* : 4×0,5 = 2 dm².

3.a. La longueur $d = AC$ est (*mesure effectuée sur une figure soignée*) comprise entre 1,4 dm et 1,5 dm.

b. D'après la propriété de Pythagore, on doit avoir $d^2 = 1^2+1^2 = 2$.

c. Si $d = 1{,}4$ alors $d^2 = 1{,}96$; si $d = 1{,}5$ alors $d^2 = 2{,}25$.
Constat : il est impossible d'écrire d sous la forme d'un nombre décimal (ou rationnel) ;
la valeur exacte de d s'appelle la racine carrée de 2 et se note $\sqrt{2}$.

d. On a : $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.



2 Propriétés des racines carrées

A Observer avec des exemples

1.a.

n	p	$\sqrt{n}$	$\sqrt{p}$	$\sqrt{n} \times \sqrt{p}$	$n \times p$	$\sqrt{n \times p}$
4	9	2	3	6	36	6
36	4	6	2	12	144	12
16	25	4	5	20	400	20

b. On constate que : $\sqrt{n} \times \sqrt{p} = \sqrt{n \times p}$.

2.a.

n	p	$\sqrt{n}$	$\sqrt{p}$	$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}}$	$\frac{n}{p}$	$\sqrt{\frac{n}{p}}$
36	9	6	3	2	4	2
64	16	8	4	2	4	2
100	25	10	5	2	4	2

b. On constate que : $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{n}{p}}$.

B Conjecture des propriétés

n et p désignant deux nombres réels positifs, on a : $\sqrt{n} \times \sqrt{p} = \sqrt{n \times p}$ (propriété 1) ;

si $p \neq 0$, $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{n}{p}}$ (propriété 2).

C Observer avec des contre-exemples

n	p	$\sqrt{n}$	$\sqrt{p}$
16	9	4	3
25	16	5	4
13	12	≈ 3,6	≈ 3,4

$\sqrt{n} + \sqrt{p}$	$n + p$	$\sqrt{n + p}$
7	25	5
9	41	≈ 6,4
≈ 7	25	5

$\sqrt{n} - \sqrt{p}$	$n - p$	$\sqrt{n - p}$
1	7	≈ 2,6
1	9	3
≈ 0,2	1	1

On en conclut que pour deux nombres réels positifs n et p (tels que $n>p$) on a : $\sqrt{n} + \sqrt{p} \neq \sqrt{n + p}$ et $\sqrt{n} - \sqrt{p} \neq \sqrt{n - p}$.

3 Carrés parfaits

1. On considère la liste des nombres : 32 ; 48 ; 49 ; 81 ; 92 ; 121 ; 136 ; 169.

a. 49 ($=7^2$), 81 ($=9^2$), 121($=11^2$) et 169($=13^2$) sont les carrés parfaits de cette liste.

b. On a : $25<32<36$; $36<48<49$; $81<92<100$; $121<136<144$.

c. Donc : $5< \sqrt{32} <6$; $6< \sqrt{48} <7$; $9< \sqrt{92} <10$; $11< \sqrt{136} <12$.

2. Autres nombres qui sont des carrés parfaits : 1 ($=1^2$), 4 ($=2^2$), 9 ($=3^2$), 16 ($=4^2$), 25 ($=5^2$), 36 ($=6^2$), 64 ($=8^2$), 100 ($=10^2$), 144 ($=12^2$), 196 ($=14^2$), 225 ($=15^2$), 256 ($=16^2$), 289 ($=17^2$) ...

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à réduire des expressions comportant des radicaux

Exercice 1

a. $\sqrt{12} = \sqrt{2\times2\times3} = \underline{2\sqrt{3}}$;

b. $\sqrt{32} = \sqrt{2\times2\times2\times2\times2} = \underline{4\sqrt{2}}$;

c. $\sqrt{162} = \sqrt{3\times3\times3\times3\times2} = \underline{9\sqrt{2}}$;

d. $\sqrt{10^3} = \sqrt{10\times10\times10} = \underline{10\sqrt{10}}$:

e. $\sqrt{800} = \sqrt{2\times2\times2\times10\times10} = \underline{20\sqrt{2}}$;

f. $\sqrt{175} = \sqrt{5\times5\times7} = \underline{5\sqrt{7}}$.

Exercice 2

a. $\sqrt{15\times45} = \sqrt{3\times5\times9\times5} = \underline{15\sqrt{3}}$;

b. $\sqrt{21\times14} = \sqrt{3\times7\times2\times7} = \underline{7\sqrt{6}}$;

c. $\sqrt{24\times36} = \sqrt{4\times6\times4\times9} = \underline{12\sqrt{6}}$;

d. $\sqrt{60\times40} = \sqrt{6\times10\times4\times10} = \underline{20\sqrt{6}}$;

e. $\sqrt{50\times14} = \sqrt{2\times25\times2\times7} = \underline{10\sqrt{7}}$;

f. $\sqrt{18\times48} = \sqrt{2\times9\times3\times16} = \underline{12\sqrt{6}}$.

Exercice 3

a. $\sqrt{900} = \sqrt{9\times100} = 3\times10 = \underline{30}$;

b. $\sqrt{6}\times\sqrt{54} = \sqrt{6\times6\times9} = 6\times3 = \underline{18}$;

c. $\sqrt{5}\times\sqrt{125} = \sqrt{5\times5\times25} = 5\times5 = \underline{25}$.

Exercice 4

a. $3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 7\sqrt{6} = \underline{5\sqrt{6}}$;

b. $\sqrt{4}\times\sqrt{7} + \sqrt{9}\times\sqrt{7} = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = \underline{5\sqrt{7}}$;

c. $8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2 = \underline{3\sqrt{2} + 2}$;

d. $5\sqrt{5} + \sqrt{4} - 2\sqrt{5} - 6 = \underline{3\sqrt{5} - 4}$.

Exercice 5

a. $2\sqrt{12} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{4\times3} - 4\sqrt{3} = \underline{0}$;

b. $\sqrt{98} + \sqrt{18} = \sqrt{2\times49} + \sqrt{2\times9} = 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \underline{10\sqrt{2}}$;

c. $5\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + \sqrt{25} = 5\sqrt{4\times5} - 3\sqrt{16\times5} + \sqrt{25}$
$= 10\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 5 = \underline{5 - 2\sqrt{5}}$;

d. $7\sqrt{7} + \sqrt{63} - \sqrt{112} = 7\sqrt{7} + \sqrt{7\times9} - \sqrt{7\times16}$
$= 7\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} = \underline{6\sqrt{7}}$.

Exercice 6

a. $5\sqrt{2}\times\sqrt{18} = 5\sqrt{2\times2\times9} = 5\left(\sqrt{2\times2}\right)\times\left(\sqrt{9}\right) = \underline{30}$;

b. $\sqrt{5}\times2\sqrt{35} = 2\sqrt{5\times5\times7} = 2\left(\sqrt{5\times5}\right)\times\sqrt{7} = \underline{10\sqrt{7}}$;

c. $\sqrt{10^3}\times3\sqrt{10^2} = \sqrt{10^2}\times\sqrt{10}\times3\sqrt{10^2} = \underline{300\sqrt{10}}$;

d. $\sqrt{10^4}\times2\sqrt{8} = 10^2\times2\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{2} = \underline{400\sqrt{2}}$.

Exercice 7

a. $\sqrt{6}\times\sqrt{30}\times\sqrt{5} = \sqrt{6}\times\left(\sqrt{6}\times\sqrt{5}\right)\times\sqrt{5} = \underline{30}$;

b. $\sqrt{45}\times2\sqrt{30} = \left(\sqrt{5}\times\sqrt{9}\right)\times2\times\left(\sqrt{5}\times\sqrt{6}\right) = \underline{30\sqrt{6}}$;

c. $\sqrt{5}\times\sqrt{7}\times\sqrt{70} = \sqrt{5}\times\sqrt{7}\times\left(\sqrt{5}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}\right) = \underline{35\sqrt{2}}$;

d. $\sqrt{22}\times\sqrt{55}\times\sqrt{10} = \sqrt{2}\times\sqrt{11}\times\sqrt{5}\times\sqrt{11}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5} = \underline{110}$.

Exercice 8

a. $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = \underline{4}$; b. $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{63}{7}} = \sqrt{9} = \underline{3}$;

c. $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{162}{2}} = \sqrt{81} = \underline{9}$; d. $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \underline{\frac{7}{8}}$;

e. $\sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{36}} = \underline{\frac{11}{6}}$; f. $\frac{1}{5}\times\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{1}{5}\times\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}} = \underline{\frac{1}{9}}$.

Exercice 9

a. $4\sqrt{\frac{27}{16}} = 4\times\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \underline{3\sqrt{3}}$; b. $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{3\times6}{8\times6}} = \underline{\sqrt{\frac{3}{8}}}$;

c. $\frac{12}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}\times\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \underline{\sqrt{12}}$;

d. $\frac{\sqrt{10^6}}{\sqrt{10^2}} = \sqrt{\frac{10^6}{10^2}} = \sqrt{10^4} = \underline{100}$;

e. $\frac{\sqrt{10^5}}{\sqrt{10^4}} = \sqrt{\frac{10^5}{10^4}} = \underline{\sqrt{10}}$;

f. $\sqrt{\frac{100\times10^5}{10^3}} = \sqrt{\frac{10^7}{10^3}} = \sqrt{10^4} = \underline{100}$.

Exercice 10

- $\sqrt{12\,100} = \sqrt{121}\times\sqrt{100} = 110$;
- $\sqrt{10}\times\sqrt{40} = \sqrt{10\times10\times4} = 20$;
- $\frac{\sqrt{10\times10^4}}{\sqrt{250}} = \sqrt{\frac{10\times10^4}{10\times25}} = \frac{100}{5} = 20$;

donc : $\sqrt{10}\times\sqrt{40} = \frac{\sqrt{10\times10^4}}{\sqrt{250}} < \sqrt{12\,100}$.

Exercice 11

a. $\sqrt{169} = \underline{13}$; b. $\sqrt{1\,444} = \underline{38}$;

c. $\sqrt{3\,025} = \underline{55}$; d. $\sqrt{400} = \underline{20}$;

e $\sqrt{4\,900} = \underline{70}$; f. $\sqrt{3\,721} = \underline{61}$.

Exercice 12

a. $\sqrt{12\,100} = \underline{110}$; b. $\sqrt{90\,000} = \underline{300}$;

c. $\sqrt{756\,900} = \underline{870}$; d. $\sqrt{250\,000} = \underline{500}$;

e. $\sqrt{792\,100} = \underline{890}$; f. $\sqrt{484 \times 10^4} = \underline{22 \times 10^2}$.

Exercice 13

a. $\sqrt{0{,}16} = \underline{0{,}4}$; b. $\sqrt{2{,}25} = \underline{1{,}5}$;

c. $\sqrt{27{,}04} = \underline{5{,}2}$; d. $\sqrt{0{,}003\,6} = \underline{0{,}06}$;

e. $\sqrt{0{,}518\,4} = \underline{0{,}72}$; f. $\sqrt{0{,}052\,9} = \underline{0.23}$.

Exercice 14

$\sqrt{2} \approx \underline{1{,}414}$; b. $\sqrt{5} \approx \underline{2{,}236}$;

c. $\sqrt{7} \approx \underline{2{,}646}$; d. $\sqrt{10} \approx \underline{3{,}162}$;

e. $\sqrt{15} \approx \underline{3{,}873}$; f. $\sqrt{23} \approx \underline{4{,}796}$.

Exercice 15

a. $\sqrt{500} \approx \underline{22{,}360}$; b. $\sqrt{1\,300} \approx \underline{36{,}056}$;

c. $\sqrt{2\,200} \approx \underline{46{,}904}$; d. $\sqrt{90\,000} = \underline{300}$;

e. $\sqrt{140\,000} \approx \underline{374{,}166}$; e. $\sqrt{24 \times 10^4} \approx \underline{489{,}898}$.

Exercice 16

a. $\sqrt{0{,}06} \approx \underline{0{,}245}$; b. $\sqrt{0{,}16} = \underline{0{,}4}$;

c. $\sqrt{0{,}17} \approx \underline{0{,}412}$; d. $\sqrt{0{,}000\,8} \approx \underline{0{,}028}$;

e. $\sqrt{0{,}001\,2} \approx \underline{0{,}035}$; f. $\sqrt{0{,}002\,1} \approx \underline{0{,}046}$.

Exercice 17

a. $64<70<81$, donc : $\underline{8 < \sqrt{70} < 9}$;

b. $676<700<729$, donc : $\underline{26 < \sqrt{700} < 27}$;

c. $961<1\,000<1\,024$, donc : $\underline{31 < \sqrt{1\,000} < 32}$;

d. $36<38<49$, donc : $\underline{6 < \sqrt{38} < 7}$;

e. $529<545<576$, donc : $\underline{23 < \sqrt{545} < 24}$;

f. $1\,764<1\,830<1\,849$, donc : $\underline{42 < \sqrt{1\,830} < 43}$.

Exercice 18

a. $53\,824<54\,000<54\,289$, donc :
$\underline{232 < \sqrt{54\,000} < 233}$;

b. $22\,500<22\,512<22\,801$, donc :
$\underline{150 < \sqrt{22\,512} < 151}$;

c. $139\,876 < 140 \times 10^3 < 140\,625$,
$\underline{374 < \sqrt{140 \times 10^3} < 375}$.

Exercice 19

$\sqrt{2} + \sqrt{8} \approx 4{,}24$ et $\sqrt{3} + \sqrt{7} \approx 4{,}38$ (arrondis au centième).

On a $\sqrt{2} + \sqrt{8} \neq \sqrt{3} + \sqrt{7}$; donc un quadrilatère, dont deux côtés opposés mesurent (en cm) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ et $\sqrt{3} + \sqrt{7}$, ne peut pas être un parallélogramme.

Activités d'application

Définition de la racine carrée

Exercice 20

1. 71, 64, 1, 0 et 0,09 (nombres positifs) admettent une racine carrée.

2. $\sqrt{71}$ n'est pas un nombre décimal ;
$\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$.

Exercice 21

a. Il est vrai que «la racine carrée de 4 est égale à 2» ; en effet : 2 est positif et $2^2 = 4$.

b. Il est faux que «2 est le seul nombre dont le carré est égal à 4» ; en effet $(-2)^2 = 4$.

c. Il est faux que «–4 est la racine carrée de –16» ; en effet –16, nombre négatif, n'a pas de racine carrée ; de plus –4, nombre négatif, ne peut pas être une racine carrée.

d. Il est vrai que « $\sqrt{3}$ est la valeur exacte de la racine carrée de 3» ; en effet $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

e. Il est faux que «1,41 est la valeur exacte de la racine carrée de 2» ; en effet $1{,}41^2 = 1{,}988\,1 \neq 2$.

f. Il est faux que «la racine carrée de 5 est égale à 25» ; en effet $25^2 \neq 5$.

Exercice 22

a. $\left(\sqrt{13}\right)^2 = \underline{13}$; b. $\sqrt{99} \times \sqrt{99} = \underline{99}$;

c. $\left(\sqrt{10^2}\right)^2 = \underline{10^2}$; d. $\sqrt{0^2} = \underline{0}$;

e. $\sqrt{0{,}2^2} = \underline{0{,}2}$; f. $\sqrt{\pi^2} = \underline{\pi}$.

Exercice 23

a. $\left(2\sqrt{11}\right)^2 = 2^2 \times \left(\sqrt{11}\right)^2 = \underline{44}$; b. $2\sqrt{11^2} = 2 \times 11 = \underline{22}$;

c. $\left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = \underline{25}$; d. $\left(\sqrt{2^2}\right)^3 = 2^3 = \underline{8}$;

e. $\dfrac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2}} = \underline{\dfrac{3}{2}}$; f. $\dfrac{\left(\sqrt{7}\right)^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2} = \underline{\dfrac{7}{10}}$.

Exercice 24

Kinjo n'a pas raison.

En effet, lorsque n est un nombre négatif, $\sqrt{n^2} = -n$.

Exercice 25

a. 36 est un carré parfait, car $\sqrt{36} = 6$;

b. 32 n'est pas un carré parfait, car $5 < \sqrt{32} < 6$;

c. 48 n'est pas un carré parfait, car $6 < \sqrt{48} < 7$;

d. 0,4 n'est pas un carré parfait, car $0{,}4 \notin \mathbb{N}$;

e. 0 est un carré parfait, car $\sqrt{0} = 0$;

f. 0,16 n'est pas un carré parfait, car $0{,}16 \notin \mathbb{N}$;

g. 121 est un carré parfait, car $\sqrt{121} = 11$;

h. 10 000 est un carré parfait, car $\sqrt{10\,000} = 100$.

Exercice 26

a. $\sqrt{49} = \underline{7}$; b. $\sqrt{10^4} = \underline{100}$;

c. $\sqrt{144} = \underline{12}$; d. $\sqrt{169} = \underline{13}$;

e. $\sqrt{0{,}01} = \underline{0{,}1}$; f. $\sqrt{0{,}64} = \underline{0{,}8}$;

g. $\sqrt{3\,600} = \underline{60}$; h. $\sqrt{1{,}21} = \underline{1{,}1}$.

Exercice 27

a. Pour les 64 bonbons jaunes, Ngu pourra faire 8 paquets de 8 bonbons ; elle utilisera tous les bonbons jaunes.

Pour les 81 bonbons verts, Ngu pourra faire 9 paquets de 9 bonbons ; elle utilisera tous les bonbons verts.

b. Pour les 76 bonbons rouges, Ngu pourra faire 8 paquets de 8 bonbons ; il lui restera 12 bonbons rouges.

Pour les 104 bonbons mauves, Ngu pourra faire 10 paquets de 10 bonbons ; il lui restera 4 bonbons mauves.

Utilisation de tables

Exercice 28

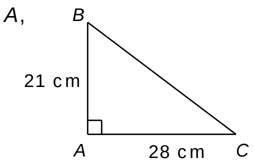
a. $\sqrt{196} = \underline{14}$; b. $\sqrt{625} = \underline{25}$;

c. $\sqrt{3\,969} = \underline{63}$; d. $\sqrt{57\,600} = \underline{240}$;

e. $\sqrt{160\,000} = \underline{400}$; f. $\sqrt{37{,}21 \times 10^4} = \underline{6{,}1 \times 10^2}$.

Exercice 29

a. Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a (propriété de Pythagore) :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$.



b. $BC^2 = 21^2 + 28^2 = \underline{1\,225}$;
$BC = \sqrt{1\,225} = \underline{35\text{ cm}}$.

Exercice 30

a. $\sqrt{0{,}49} = \underline{0{,}7}$; b. $\sqrt{3{,}61} = \underline{1{,}9}$;

c. $\sqrt{30{,}25} = \underline{5{,}5}$; d. $\sqrt{0{,}0081} = \underline{0{,}09}$;

e. $\sqrt{0{,}044\,1} = \underline{0{,}21}$; f. $\sqrt{0{,}722\,5} = \underline{0{,}85}$.

Exercice 31

a. $\sqrt{8} \approx \underline{2{,}83}$; b. $\sqrt{13} \approx \underline{3{,}61}$; c. $\sqrt{17} \approx \underline{4{,}12}$;

d. $\sqrt{200} = \sqrt{2 \times 100} = \sqrt{2} \times \sqrt{100} \approx 1{,}414 \times 10 \approx \underline{14{,}14}$;

e. $\sqrt{1\,000} = \sqrt{10 \times 100} = \sqrt{10} \times \sqrt{100} \approx 3{,}162 \times 10 \approx \underline{31{,}62}$;

f. $\sqrt{70\,000} = \sqrt{7 \times 10\,000} = \sqrt{7} \times \sqrt{10\,000}$
$\approx 2{,}645\,75 \times 100 \approx \underline{264{,}58}$.

Exercice 32

a. $\sqrt{0{,}02} = \sqrt{\dfrac{2}{100}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}} \approx \dfrac{1{,}414\,2}{10} \approx \underline{0{,}141}$;

b. $\sqrt{0{,}19} = \sqrt{\dfrac{19}{100}} = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{100}} \approx \dfrac{4{,}358\,9}{10} \approx \underline{0{,}436}$;

c. $\sqrt{0{,}5} = \sqrt{\dfrac{50}{100}} = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{100}} \approx \dfrac{7{,}071\,1}{10} \approx \underline{0{,}707}$;

d. $\sqrt{0{,}003\,5} = \sqrt{\dfrac{35}{10\,000}} = \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{10\,000}} \approx \dfrac{5{,}916\,1}{100} \approx \underline{0{,}059}$;

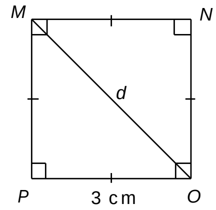
e. $\sqrt{0{,}004} = \sqrt{\dfrac{40}{10\,000}} = \dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{10\,000}} \approx \dfrac{6{,}324\,6}{100} \approx \underline{0{,}063}$;

f. $\sqrt{0{,}000\,7} = \sqrt{\dfrac{7}{10\,000}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{10\,000}} \approx \dfrac{2{,}645\,8}{100} \approx \underline{0{,}026}$.

Exercice 33

La mesure d de la diagonale d'un carré de côté 3 cm est égale à : $\sqrt{3^2 + 3^2} = \underline{3\sqrt{2}\text{ cm}}$.

Arrondie de cette mesure au dixième : $d \approx \underline{4{,}2\text{ cm}}$.



Exercice 34

1. En utilisant la table des carrés ou une calculatrice :

a. $\sqrt{324} < \sqrt{360} < \sqrt{361}$, donc : $18 < \sqrt{360} < 19$;

b. $\sqrt{484} < \sqrt{500} < \sqrt{529}$, donc : $22 < \sqrt{500} < 23$;

c. $\sqrt{841} < \sqrt{850} < \sqrt{900}$, donc : $29 < \sqrt{850} < 30$.

2. a. $\sqrt{360} \approx 19$, car 360 est « plus proche de 361 » ;

b. $\sqrt{500} \approx 22$, car 500 est « plus proche de 484 » ;

c. $\sqrt{850} \approx 29$, car 850 est « plus proche de 841 ».

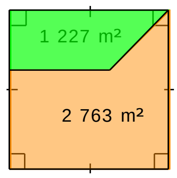
(C*ette «méthode» n'est à utiliser qu'en l'absence de calculatrice.*)

Exercice 35

Aire totale du terrain :
1 227+2 763=3 990 m².

Mesure du côté de ce terrain :
$c = \sqrt{3\,990} \approx 63{,}166\ldots$ m.

Donc : $\underline{63 < c < 64}$.



Propriétés des racines carrées

Exercice 36

a. $\sqrt{124} < \sqrt{235}$; b. $\sqrt{17} < \sqrt{17{,}05}$;

c. $2\sqrt{4} < 4\sqrt{4}$; d. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.

Justification : si $0 < x < y$ alors $\sqrt{x} < \sqrt{y}$;

Exercice 37

a. $\left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$ et $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$, donc : $\underline{\sqrt{17} < 3\sqrt{2}}$;

b. $\left(7\sqrt{3}\right)^2 = 147$ et $\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 80$, donc : $\underline{7\sqrt{3} > 4\sqrt{5}}$.

c. $\left(3\sqrt{72}\right)^2 = 648$ et $\left(6\sqrt{18}\right)^2 = 648$, donc : $\underline{3\sqrt{72} = 6\sqrt{18}}$;

d. $\left(4\sqrt{13}\right)^2 = 208$ et $\left(9\sqrt{2}\right)^2 = 162$, donc : $\underline{4\sqrt{13} > 9\sqrt{2}}$.

Exercice 38

a. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \underline{5\sqrt{3}}$; b. $\sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = \underline{6\sqrt{3}}$;

c. $\sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = \underline{10\sqrt{3}}$; d. $\sqrt{243} = \sqrt{81 \times 3} = \underline{9\sqrt{3}}$;

e. $\sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = \underline{7\sqrt{3}}$; f. $\sqrt{1\,200} = \sqrt{400 \times 3} = \underline{20\sqrt{3}}$.

Exercice 39

a. $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \underline{2\sqrt{7}}$; b. $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \underline{3\sqrt{5}}$;

c. $\sqrt{275} = \sqrt{25 \times 11} = \underline{5\sqrt{11}}$;

d. $\sqrt{1\,500} = \sqrt{100 \times 15} = \underline{10\sqrt{15}}$;

e. $\sqrt{324} = \sqrt{9 \times 36} = \underline{18}$; f. $\sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = \underline{6\sqrt{5}}$.

Exercice 40

a. $\sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \times 10} = \underline{10\sqrt{10}}$;

b. $\sqrt{10^2 \times 10^5} = \sqrt{10^6 \times 10} = \underline{10^3\sqrt{10}}$;

c. $\sqrt{9 \times 27} = \sqrt{9 \times 9 \times 3} = \underline{9\sqrt{3}}$;

d. $\sqrt{28 \times 35} = \sqrt{4 \times 7 \times 7 \times 5} = \underline{14\sqrt{5}}$;

e. $\sqrt{15 \times 12 \times 10} = \sqrt{3 \times 5 \times 3 \times 4 \times 5 \times 2} = \underline{30\sqrt{2}}$;

f. $\sqrt{24 \times 66} = \sqrt{4 \times 6 \times 6 \times 11} = \underline{12\sqrt{11}}$.

Exercice 41

$\sqrt{256}=16$. Liste des nombres égaux à $\sqrt{256}$:

$2\sqrt{64}$; $16\sqrt{1}$; $4\sqrt{16}$; $4\sqrt{64}$; $8\sqrt{4}$.

Justifications :

$2\sqrt{128}=\sqrt{4\times128}=\sqrt{512}\neq\sqrt{256}$;

$2\sqrt{64}=2\times8=\sqrt{256}$;

$4\sqrt{32}=\sqrt{16\times32}=\sqrt{512}\neq\sqrt{256}$;

$16\sqrt{1}=16=\sqrt{256}$;

$4\sqrt{16}=4\times4=16=\sqrt{256}$;

$\sqrt{2^8}=\sqrt{2^4\times2^4}=2^4=16=\sqrt{256}$;

$4\sqrt{64}=4\times8=32\neq\sqrt{256}$;

$8\sqrt{4}=8\times2=16=\sqrt{256}$.

Exercice 42

Différentes écritures de $\sqrt{72}$:

$\underline{\sqrt{36}\times\sqrt{2}}=\sqrt{36\times2}$;

$\underline{6\sqrt{2}}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}$;

$\underline{3\sqrt{8}}=\sqrt{9}\times\sqrt{8}$.

Exercice 43

a. $2\sqrt{7}+5\sqrt{7}=\underline{7\sqrt{7}}$;

b. $4\sqrt{6}+4-7\sqrt{6}=\underline{4-3\sqrt{6}}$;

c. $2\sqrt{8}-3\sqrt{2}=2\sqrt{4}\times\sqrt{2}-3\sqrt{2}=4\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\underline{\sqrt{2}}$;

d. $\sqrt{75}+3\sqrt{12}-4\sqrt{3}=5\sqrt{3}+6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\underline{7\sqrt{3}}$;

e. $5\sqrt{28}-3\sqrt{63}=10\sqrt{7}-9\sqrt{7}=\underline{\sqrt{7}}$;

f. $\sqrt{50}-6-3\sqrt{18}+\sqrt{4}=5\sqrt{2}-6-9\sqrt{2}+2=\underline{-4-4\sqrt{2}}$.

Exercice 44

Périmètre du carré de côté $3\sqrt{2}$: $\underline{12\sqrt{2}}$;

périmètre de l'hexagone régulier de côté $\sqrt{8}$: $\underline{6\sqrt{8}}$;

donc les deux périmètres sont égaux.

Exercice 45

a. $2\sqrt{14}\times\sqrt{7}=2\sqrt{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}=\underline{14\sqrt{2}}$;

b. $4\sqrt{12}\times4\times\sqrt{3}=4\sqrt{4}\times\sqrt{3}\times4\times\sqrt{3}=\underline{96}$;

c. $2\sqrt{15}\times5\sqrt{20}=2\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times5\sqrt{4}\times\sqrt{5}=\underline{100\sqrt{3}}$;

d. $\sqrt{27}\times\sqrt{48}\times\sqrt{32}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}\times\sqrt{16}\times\sqrt{3}\times\sqrt{16}\times\sqrt{2}$

$=\underline{144\sqrt{2}}$.

Exercice 46

Aire du rectangle de côtés $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{10}$:

$3\sqrt{2}\times2\sqrt{10}=3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\underline{12\sqrt{5}}$.

Exercice 47

a. $\sqrt{3}\left(4\sqrt{3}+3\right)=4\sqrt{3}\times\sqrt{3}+3\sqrt{3}=\underline{12+3\sqrt{3}}$;

b. $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{12}\right)=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{4}+\sqrt{3}\times\sqrt{4}=\underline{6+2\sqrt{3}}$;

c. $-\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-4\right)=\underline{4\sqrt{7}-7}$;

d. $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)\left(2\sqrt{5}\right)=3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}+2\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$

$=\underline{30+10\sqrt{3}}$.

Exercice 48

a. $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{54}{6}}=\sqrt{9}=\underline{3}$;

b. $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{45}}=\sqrt{\dfrac{5\times5\times3}{5\times3\times3}}=\underline{\sqrt{\dfrac{5}{3}}}$;

c. $\dfrac{23}{\sqrt{23}}=\underline{\sqrt{23}}$;

d. $\dfrac{8}{\sqrt{2}}=\underline{4\sqrt{2}}$;

e. $\dfrac{\sqrt{105}}{\sqrt{28}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}}{\sqrt{4}\times\sqrt{7}}=\underline{\dfrac{\sqrt{15}}{2}}$;

f. $\dfrac{\sqrt{128}}{\sqrt{36}}=\dfrac{\sqrt{4}\times\sqrt{16}\times\sqrt{2}}{6}=\underline{\dfrac{4\sqrt{2}}{3}}$.

Exercice 49

a. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=2+2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+3=\underline{5+2\sqrt{6}}$;

b. $\left(5+\sqrt{7}\right)^2=25+2\times5\times\sqrt{7}+7=\underline{32+10\sqrt{7}}$;

c. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{5}\times\sqrt{2}+2=\underline{7-2\sqrt{10}}$;

d. $\left(3+\sqrt{11}\right)^2=9+2\times3\times\sqrt{11}+11=\underline{20+6\sqrt{11}}$;

e. $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=4-3=\underline{1}$;

f. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)=5-13=\underline{-8}$.

Exercice 50

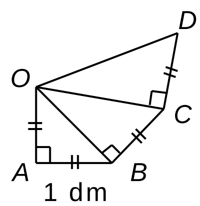
Largeur d'un rectangle d'aire 36 cm² et de longueur $4\sqrt{3}$ cm : $\dfrac{36}{4\sqrt{3}}=\dfrac{9}{\sqrt{3}}=\underline{3\sqrt{3}\text{ cm}}$.

Exercice 51

$OB=\sqrt{1^2+1^2}=\underline{\sqrt{2}\text{ dm}}$;

$OC=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\underline{\sqrt{3}\text{ dm}}$;

$OD=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=\underline{2\text{ dm}}$.



Exercice 52 Existence d'une racine carrée

1. Nombres dont la racine carrée existe :

5 ; $2-\sqrt{3}$; $\left(2-\sqrt{10}\right)^2$ (*nombres réels positifs*).

Nombres dont la racine carrée n'existe pas :

-3 ; $2-\sqrt{8}$; $\sqrt{5}-3$ (*nombres réels négatifs*).

2. n désigne un nombre réel positif et p un nombre réel négatif ; nombres dont la racine carrée existe :

n ; $-p$; $(-n)^2$ (*nombres réels positifs*).

nombres dont la racine carrée n'existe pas :

p ; $p-n$; $\dfrac{n}{p}$ (*nombres réels négatifs*).

Exercice 53 Utiliser correctement une propriété

1.a. *Lorsque a est un nombre réel positif,* $\sqrt{a^2} = \underline{a}$.

b. $(-a)^2 = (-a)\times(-a) = a\times a = a^2$.

2.a. Il est *faux* que $\sqrt{(-3)^2} = -3$;

en effet : $\sqrt{(-3)^2} = 3$.

b. Il est *vrai* que $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{7}-2$.

c. Il est *vrai* que $\sqrt{\left(\sqrt{8}-2\right)^2} = \sqrt{8}-2$.

d. Il est *faux* que $\sqrt{\left(5-\sqrt{30}\right)^2} = 5-\sqrt{30}$;

en effet : $\sqrt{\left(5-\sqrt{30}\right)^2} = \sqrt{30}-5$.

Exercice 54 Opérations sur les racines carrées

$\sqrt{36-11} = 5 = \sqrt{4}+\sqrt{9}$;

$\sqrt{4+9} = \sqrt{13} = \sqrt{26}\times\sqrt{0{,}5}$;

$\sqrt{(-9)^2} = 9 = \sqrt{9^2}$;

$\sqrt{27} = 3\sqrt{3} = \sqrt{75-48}$;

$\sqrt{9-4} = \sqrt{5} = \sqrt{5}\times\sqrt{1}$.

Exercice 55 Des erreurs fréquentes

$\sqrt{4+12} = \cancel{\sqrt{4}+\sqrt{12} = 2+12 =}\ 14$.

$\sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$.

$\sqrt{16+9} = \cancel{\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 =}\ 7$.

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

$\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} = \cancel{2-\sqrt{7} \text{ car } \sqrt{a^2} = a.}$

$\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{7}-2$ car $\sqrt{a^2} = a$, si $a>0$,

$\sqrt{a^2} = -a$, si $a<0$.

Exercice 56 Extraire un nombre du radical

1. a et b désignent deux nombres réels positifs.

D'après la propriété du §2 (page 99) « $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$ »,

on a : $\sqrt{a^2\times b} = \sqrt{a^2}\times\sqrt{b}$;

d'après l'une des propriétés du §1 (page 99) « $\sqrt{a^2} = a$ »,

on a : $\sqrt{a^2}\times\sqrt{b} = a\sqrt{b}$.

2. $\sqrt{588} = \sqrt{2\times2\times3\times7\times7} = \sqrt{2^2\times3\times7^2}$

$= \sqrt{(2\times7)^2\times3} = 2\times7\times\sqrt{3} = \underline{14\sqrt{3}}$.

3.a. $\sqrt{605} = \sqrt{5\times11\times11} = \sqrt{5\times11^2} = \underline{11\sqrt{5}}$;

b. $\sqrt{108} = \sqrt{2\times2\times3\times3\times3} = \sqrt{2^2\times3\times3^2}$

$= \sqrt{(2\times3)^2\times3} = 2\times3\times\sqrt{3} = \underline{6\sqrt{3}}$;

c. $\sqrt{5\,200} = \sqrt{2\times2\times2\times2\times5\times5\times13} = \sqrt{4^2\times5^2\times13}$

$= \sqrt{(4\times5)^2\times13} = 4\times5\times\sqrt{13} = \underline{20\sqrt{13}}$.

Exercice 57 Sans radical au dénominateur

1.a. $\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \dfrac{6\sqrt{3}\times\sqrt{12}}{\sqrt{12}\times\sqrt{12}} = \dfrac{6\sqrt{36}}{12} = \dfrac{6\times6}{2\times6} = \underline{3}$;

b. $\dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{3\sqrt{14}}{2}}$;

c. $\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \dfrac{4\sqrt{5}\times\sqrt{8}}{\sqrt{8}\times\sqrt{8}} = \dfrac{4\sqrt{5}\times\sqrt{4}\times\sqrt{2}}{8} = \dfrac{8\sqrt{10}}{8} = \underline{\sqrt{10}}$.

2.a. $\dfrac{3}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{3\times\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \dfrac{3\sqrt{3}-3}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1} = \underline{\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}}$;

b. $\dfrac{5}{\sqrt{6}+2} = \dfrac{5\times\left(\sqrt{6}-2\right)}{\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}-2\right)} = \dfrac{5\sqrt{6}-10}{\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2} = \underline{\dfrac{5\sqrt{6}-10}{2}}$;

c. $\dfrac{4}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{4\times\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{8+4\sqrt{2}}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$= \dfrac{8+4\sqrt{2}}{2} = \underline{4+2\sqrt{2}}$.

Exercice 58 Encadrement et arrondi

1.a. $\underline{37 < \sqrt{1\,412} < 38}$.

b. $37{,}5^2 = 1\,406{,}25$, donc :

- $37{,}5^2 < 1\,412$,
- l'arrondi à l'unité de $\sqrt{1\,412}$ est $\underline{38}$.

2.a. $\sqrt{141\,200} = \sqrt{1\,412\times100} = 10\sqrt{1\,412}$,

donc : $\underline{370 < \sqrt{141\,200} < 380}$.

b. $375^2 = 140\,525$ et $376^2 = 141\,376$, donc :

$\underline{375 < \sqrt{141\,200} < 376}$.

Exercice 59 Dans le cube

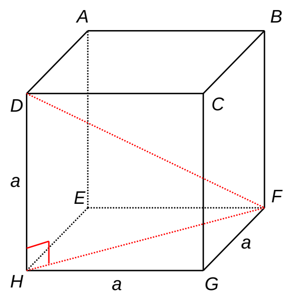
ABCDEFGH est un cube de côté *a*.

a. D'après la propriété de Pythagore dans le triangle *HGF* rectangle en *G*, on a :

$HF = \sqrt{a^2 + a^2} = \underline{a\sqrt{2}}$.

b. D'après la propriété de Pythagore dans le triangle *DHF* rectangle en *H*, on a :

$DF = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \underline{a\sqrt{3}}$.

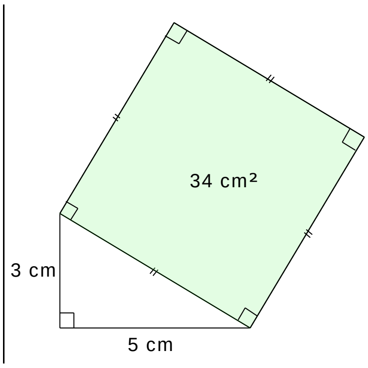


Exercice 60 Carré à construire

Comme 34 = 25+9,

on a : $\sqrt{34} = \sqrt{5^2 + 3^2}$.

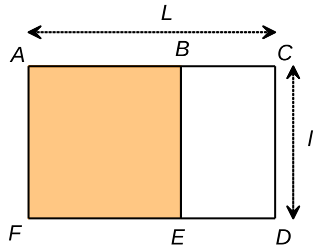
On en déduit que le côté d'un carré, d'aire égale à 34 cm², a la même longueur que l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm et 3 cm.



Pour tracer un carré d'aire égale à 34 cm² :

- construire un triangle rectangle, dont les côtés mesurent 5 cm et 3 cm ;
- construire un carré, dont la mesure du côté est égale à celle de l'hypoténuse du triangle rectangle.

Exercice 61 Rectangle et nombre d'or



Sur la figure ci-dessus, *ACDF* est un rectangle et *ABEF* est un carré.

a. Si *FD* = *L* et *FE* = *l*, alors *ED* = *L*–*l* ;

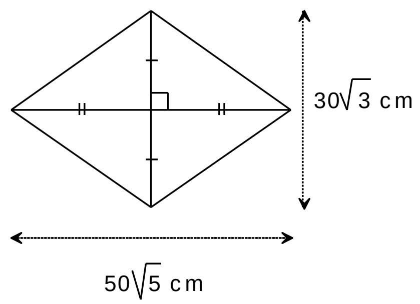
si $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{CD}{ED}$, alors $\dfrac{L}{l} = \dfrac{l}{L-l}$.

b. Le nombre d'or est une valeur particulière de $\dfrac{L}{l}$:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \underline{1{,}62}.$$

c. Un rectangle d'or, de 10 cm de largeur, doit avoir pour longueur : $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \times 10 \approx \underline{162\ \text{mm}}$.

Exercice 62 Le cerf-volant



Périmètre du cerf-volant :

$$4\sqrt{\left(15\sqrt{3}\right)^2 + \left(25\sqrt{5}\right)^2} = 4\sqrt{675 + 3\,125}$$
$$= 4\sqrt{3\,800} = \underline{40\sqrt{38}\ \text{cm}}.$$

Aire du tissu nécessaire :

$$4 \times \frac{15\sqrt{3} \times 25\sqrt{5}}{2} = \underline{750\sqrt{15}\ \text{cm}^2}.$$

Exercice 63 Des nombres entiers

a. $N = 2\sqrt{75} - \sqrt{108} = 2\sqrt{25 \times 3} - \sqrt{36 \times 3}$

$= 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = \underline{4\sqrt{3}}$.

$P = 2\sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{9 \times 3} - \sqrt{16 \times 3}$

$= 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \underline{2\sqrt{3}}$.

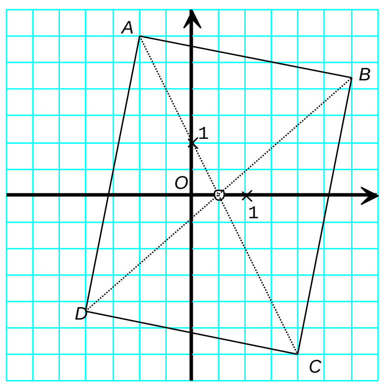
b. $N \times P = 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = \underline{24}$; $\frac{N}{P} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \underline{2}$.

c. $\underline{6 < N < 7}$.

Exercice 64 Racine carrée et nombre premier

$A = 3\sqrt{243} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{81 \times 3} - 2\sqrt{3} = 27\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \underline{25\sqrt{3}}$.

Exercice 65 Racines carrées et coordonnées



Dans le repère orthonormé ci-contre, on a :

$A(-1 ; 3)$,

$B(3 ; \sqrt{5})$,

$C(2 ; -3)$,

$D(-2 ; -\sqrt{5})$.

1. Les coordonnées du milieu I de $[AC]$ sont :

$$\left(\frac{-1+2}{2} ; \frac{3-3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; 0\right) ;$$

les coordonnées du milieu J de $[BD]$ sont :

$$\left(\frac{3-2}{2} ; \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; 0\right).$$

2. On en déduit que le quadrilatère $ABCD$, dont les diagonales se coupent en leur milieu, est un parallélogramme.

3.a. $AC = \sqrt{[2-(-1)]^2 + [-3-3]^2} = \sqrt{3^2 + 6^2}$

$= \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$;

$BD = \sqrt{[-2-3]^2 + [-\sqrt{5}-\sqrt{5}]^2} = \sqrt{5^2 + 2^2 \times 5}$

$= \sqrt{25 + 20} = \sqrt{45}$.

b. On en déduit que le parallélogramme $ABCD$, dont les diagonales ont la même longueur, est un rectangle.

Exercice 66 Vrai ou faux ?

a. « $\sqrt{(-2)^2} = 2$ » est une égalité <u>vraie</u>.

b. « $\sqrt{0{,}025} - \sqrt{6{,}4} = \frac{-3}{4\sqrt{10}}$ » est une égalité <u>fausse</u> ;

en effet :

- $\sqrt{0{,}025} - \sqrt{6{,}4} = \sqrt{\frac{25}{1\,000}} - \sqrt{\frac{6\,400}{1\,000}} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{6\,400}}{\sqrt{1\,000}}$

  $= \frac{5-80}{10\sqrt{10}} = \frac{-75}{10\sqrt{10}} = \frac{-7{,}5}{\sqrt{10}}$;

- $\frac{-3}{4\sqrt{10}} = \frac{-0{,}75}{\sqrt{10}}$.

c. « $(2x-3)^2 = 4x^2 - 9$ » est une égalité <u>fausse</u> ;

en effet : $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.

Exercice 67 Questionnaire à choix multiples

1. $A = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \underline{-2+\sqrt{5}}$; en effet : $\sqrt{5} > 2$.

2. Si $B = \sqrt{3} + 2\sqrt{123}$, alors $B^2 = \underline{495 + 4\sqrt{369}}$;

en effet : $(\sqrt{3} + 2\sqrt{123})^2 = 3 + 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{123} + 4 \times 123$

$= 3 + 492 + 4\sqrt{3 \times 123}$

$= 495 + 4\sqrt{369}$.

3. $C = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \underline{6 - \sqrt{35}}$;

en effet : $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{7 - 2\sqrt{7} \times \sqrt{5} + 5}{7-5}$

$= \frac{12 - 2\sqrt{35}}{2} = 6 - \sqrt{35}$.

Activités d'intégration

Exercice 68 Les boîtes en carton

1.a. Contenance

de la boîte *A* : 1 dm^3 = 1 000 cm^3 ; de la boîte *B* : 2 dm^3 = 2 000 cm^3 ;
de la boîte *C* : 3 dm^3 = 3 000 cm^3 ; de la boîte *D* : 4 dm^3 = 4 000 cm^3.

b. Si toutes les boîtes ont une hauteur de 10 cm, aire de la base carrée :

de la boîte *A* : 100 cm² ; de la boîte *B* : 200 cm² ;
de la boîte *C* : 300 cm² ; de la boîte *D* : 400 cm².

c. Longueur exacte du côté de la base carrée :

de la boîte *A* : 10 cm ; de la boîte *B* : $10\sqrt{2}$ cm ;
de la boîte *C* : $10\sqrt{3}$ cm ; de la boîte *D* : 20 cm.

d. Valeur décimale, exacte ou arrondie au dixième de cm, du côté de la base carrée :

de la boîte *A* : 10 cm ; de la boîte *B* : ≈ 14,1 cm ;
de la boîte *C* : ≈ 17,3 cm ; de la boîte *D* : 20 cm.

2.a. Si toutes les boîtes ont une hauteur de 20 cm, aire de la base carrée :

de la boîte *E* : 50 cm² ; de la boîte *F* : 100 cm² ;
de la boîte *G* : 150 cm² ; de la boîte *H* : 200 cm².

b. Longueur exacte du côté de la base carrée :

de la boîte *E* : $\sqrt{50}$ cm ; de la boîte *F* : 10 cm ;
de la boîte *G* : $\sqrt{150}$ cm ; de la boîte *H* : $\sqrt{200}$ cm.

c. Valeur décimale, exacte ou arrondie au dixième de cm, du côté de la base carrée :

de la boîte *E* : ≈ 7,1 cm ; de la boîte *F* : 10 cm ;
de la boîte *G* : ≈ 12,2 cm ; de la boîte *H* : ≈ 14,1 cm.

Exercice 69 Le mobile

1. Si $\mathcal{A}$ est l'aire du disque *A*, alors les aires des disques *B*, *C* et *D* sont respectivement égales à $2\mathcal{A}$, $3\mathcal{A}$ et $4\mathcal{A}$.

2. On appelle *a*, *b*, *c* et *d* les rayons respectifs des disques *A*, *B*, *C* et *D*.

a. L'aire de *A* est égale à πa^2 ; l'aire de *B* est égale à πb^2 ; donc : $\pi b^2 = 2\pi a^2$ et $\underline{b = a\sqrt{2}}$.

b. De la même façon : $\pi c^2 = 3\pi a^2$ et $\underline{C = a\sqrt{3}}$; $\pi d^2 = 4\pi a^2$ et $\underline{d = 2a}$.

3. Si le cercle *A* a pour rayon 1 cm, alors le rayon du disque *B* est égal à $\underline{\sqrt{2} \approx 1{,}4 \text{ cm}}$,
le rayon du disque *C* est égal à $\underline{\sqrt{3} \approx 1{,}7 \text{ cm}}$,
le rayon du disque *D* est égal à <u>2 cm</u>.

4. Si le cercle *D* a pour rayon 6 cm, alors le rayon du disque *A* est égal à <u>3 cm</u>,
le rayon du disque *B* est égal à $\underline{3\sqrt{2} \approx 4{,}2 \text{ cm}}$,
le rayon du disque *C* est égal à $\underline{3\sqrt{3} \approx 5{,}2 \text{ cm}}$.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Ensemble des nombres réels [1 p 110]	21, 22,	53	
2	Intervalles de $\mathbb{R}$ [2 p 110]	23, 24, 25, 26, 27, 28	54	60
3	Propriétés des inégalités [3 p 110]	29, 30		
4	Comparaison de nombres réels [4 p 111]	31, 32, 33, 34, 35, 36	55, 56	61, 70
	Apprendre à comparer des nombres réels [1 p 112]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13		
5	Principes d'encadrement [5 p 111]	37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46	57, 58, 59	62, 63, 65, 66, 67, 69, 71, 72
	Apprendre à encadrer des nombres réels [2 p 113]	14, 15, 16, 17, 18, 19, 20		
	Valeur absolue [6 p 111]	47, 48, 49, 50, 51, 52		64, 68

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer Au marché

1.a. Encadrement du prix de chaque produit :

$$280 \text{ F CFA} \leq R(\text{1 kg de riz}) \leq 320 \text{ F CFA}$$
$$240 \text{ F CFA} \leq PDT(\text{1 kg de pomme de terre}) \leq 280 \text{ F CFA}$$
$$550 \text{ F CFA} \leq M(\text{1 kg de maquereau}) \leq 650 \text{ F CFA}$$
$$2\,500 \text{ F CFA} \leq B(\text{1 kg de bœuf}) \leq 2\,900 \text{ F CFA}.$$

b. Encadrement du coût total T des achats de Fatou :

$$10\times280+10\times240+3\times550+2\times2\,500 \leq 10R+10PDT+3M+2B \leq 10\times320+10\times280+3\times650+2\times2\,900$$
$$2\,800+2\,400+1\,650+5\,000 \leq T \leq 3\,200+2\,800+1\,950+5\,800$$
$$\underline{11\,850 \text{ F CFA} \leq T \leq 13\,750 \text{ F CFA}}.$$

c. Avec 13 000 F CFA, Fatou n'a pas assez d'argent pour acheter tous les produits de la meilleure qualité.

d. En choisissant le prix minimal pour chaque produit, il lui restera après ses achats : $13\,000-11\,850=\underline{1\,150 \text{ F CFA}}$.

2.a. Avec 10% de réduction sur les prix, au kg, du maquereau et du bœuf, on a :

$$550\times(1-10\%) \leq M(\text{1 kg de maquereau}) \leq 650\times(1-10\%)$$
$$550\times0,9 \leq M(\text{1 kg de maquereau}) \leq 650\times0,9$$
$$495 \text{ F CFA} \leq M(\text{1 kg de maquereau}) \leq 585 \text{ F CFA},$$

$$2\,500\times(1-10\%) \leq B(\text{1 kg de bœuf}) \leq 2\,900\times(1-10\%)$$
$$2\,500\times0,9 \leq B(\text{1 kg de bœuf}) \leq 2\,900\times0,9$$
$$2\,250 \text{ F CFA} \leq B(\text{1 kg de bœuf}) \leq 2\,610 \text{ F CFA},$$

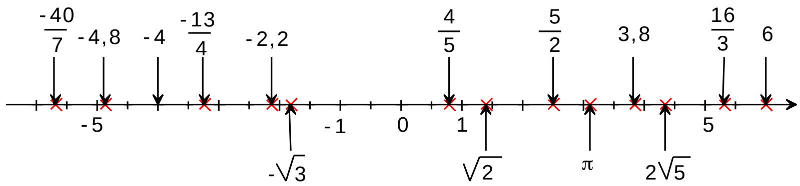
donc : $10\times280+10\times240+3\times495+2\times2\,250 \leq 10R+10PDT+3M+2B \leq 10\times320+10\times280+3\times585+2\times2\,610$

$$2\,800+2\,400+1\,485+4\,500 \leq T \leq 3\,200+2\,800+1\,755+5\,220$$
$$\underline{11\,185 \text{ F CFA} \leq T \leq 12\,975 \text{ F CFA}}.$$

b. Maintenant Fatou peut acheter tous les produits de la meilleure qualité.

1 Droite des nombres réels

1.a.



b. Les nombres 6 ; –4 ; 3,8 ; –2,2 ; $\frac{4}{5}$; $-\frac{13}{4}$; $\frac{13}{3}$ et $-\frac{40}{7}$ appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

c. Parmi ces nombres, $\frac{16}{3}$ (= 5,33...) et $-\frac{40}{7}$ (= –5,71...) n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.

2.a. $\sqrt{2} \approx 1{,}41$; $-\sqrt{3} \approx -1{,}73$; $2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ et $\pi \approx 3{,}14$.

b. Les nombres $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$; $2\sqrt{5}$ et π, qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, sont appelés nombres irrationnels.

3. *L'ensemble des nombres réels est formé par la réunion des nombres rationnels et des nombres irrationnels.*

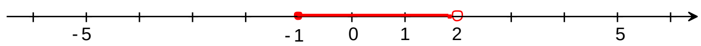
2 Notion d'intervalle

1. Représentations d'un nombre *a*, supérieur ou égal à –1 et inférieur à 2 :

- avec des inégalités :

  $-1 \leq a < 2$

- sur la droite des nombres réels :



- avec un intervalle :

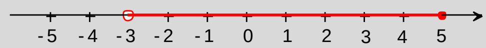
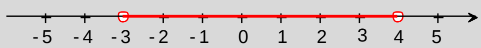
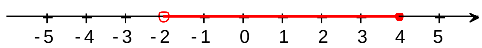
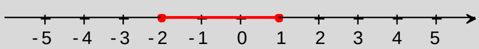
  $a \in [-1 ; 2[$

a. Pour indiquer que –1 est une valeur qui peut être prise par *a*,
on inclut cette valeur à la fois sur la portion de droite par « • » et sur l'intervalle par « [–1 ; 2[» ;

pour indiquer que 2 ne fait pas partie des valeurs possibles de *a*,
on exclut cette valeur à la fois sur la portion de droite par « o » et sur l'intervalle par « [–1 ; 2[».

b. Valeurs possibles pour *a* : –1 ; –0,2 ; 0,5 ; 1 ; 1,7 ; ....

2.

Signification	Inégalités	Représentation sur la droite	Intervalle
a est un nombre strictement supérieur à 3 et inférieur ou égal à 5	$3 < a \leq 5$		]3 ; 5]
a est un nombre strictement supérieur à –3 et strictement inférieur à 4	$-3 < a < 4$		]–3 ; 4[
a est un nombre strictement supérieur à –2 et inférieur ou égal à 4	$-2 < a \leq 4$		]–2 ; 4]
a est un nombre supérieur ou égal à –2 et inférieur ou égal à 1	$-2 \leq a \leq 1$		[–2 ; 1]

3 Règles sur les inégalités

1.a.

Exemple 1 : $5 > 3$	Exemple 2 : $-7 < -4$	Exemple 3 : $5 > 3$	Exemple 4 : $-7 < -4$
$5+2 > 3+2$	$-7+3 < -4+3$	$5-2 > 3-2$	$-7-3 < -4-3$

b. Règle : *ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.*

2.a.

Exemple 1 : $4 < 6$	Exemple 2 : $4 < 6$	Exemple 3 : $-6 > -10$	Exemple 4 : $-6 > -10$
$4 \times 5 < 6 \times 5$	$\frac{4}{2} < \frac{6}{2}$	$-6 \times 5 > -10 \times 5$	$\frac{-6}{3} > \frac{-10}{3}$

b. Règle : *multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif non nul ne change pas le sens de l'inégalité.*

3.a.

Exemple 1 : $4 > 2$	Exemple 2 : $-8 < -5$	Exemple 3 : $4 > 2$	Exemple 4 : $-15 > -25$
$4 \times (-3) < 2 \times (-3)$	$-8 \times (-3) > -5 \times (-3)$	$\frac{4}{-2} < \frac{2}{-2}$	$\frac{-15}{-5} < \frac{-25}{-5}$

b. Règle : *multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif non nul change le sens de l'inégalité.*

4 Comparaison de nombres

1.a.

n	0,01	0,25	1	4	100
n^2	0,000 1	0,062 5	1	16	10 000
$\sqrt{n}$	0,1	0,5	1	2	10
$\frac{1}{n}$	100	4	1	0,25	0,01

b. Si a et b désignent deux nombres réels strictement positifs tels que $a<b$, alors :

- $a^2<b^2$;
- $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;
- $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

2.a.

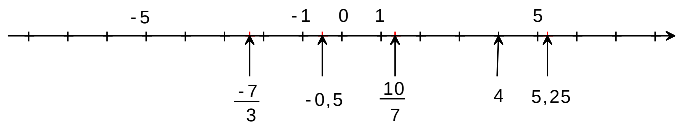
n	–10	–4	–1	–0,5	–0,2
n^2	100	16	1	0,25	0,04
$\frac{1}{n}$	–0,1	–0,25	–1	–2	–5

b. Si a et b désignent deux nombres réels strictement négatifs tels que $a<b$, alors :

- $a^2>b^2$;
- $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

5 Distance à zéro et valeur absolue

1.a.



a	–5	$-\frac{7}{5}$	–1	–0,5	0	1	$\frac{10}{7}$	4	5	5,25
Distance à zéro de a	5	$\frac{7}{5}$	1	0,5	0	1	$\frac{10}{7}$	4	5	5,25

La distance à zéro d'un nombre a est appelée valeur absolue de a et est notée : $|a|$.

b. La valeur absolue d'un nombre quelconque est toujours positive : $|a| \geq 0$.

2. $|-6| = 6$; $|2| = 2$; $\left|-\frac{5}{6}\right| = \frac{5}{6}$; $|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$; $|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$; $|4{,}87| = 4{,}87$.

3.a. $|-4| = |4| = 4$; $|-2{,}1| = |2{,}1| = 2{,}1$.

b. Les valeurs absolues de deux nombres opposés sont égales.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à comparer des nombres réels

Exercice 1

a. Si $p = 7^2 - 12$ et $q = 37 + \sqrt{2}$,
alors : $p-q = 49-12-37 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} < 0$;
donc : $p<q$;

b. si $p = 2(\sqrt{3} + 1)$ et $q = \frac{9}{4} + 2\sqrt{3}$,
alors : $p-q = 2\sqrt{3} + 2 - \frac{9}{4} - 2\sqrt{3} = -\frac{1}{4} < 0$;
donc : $p<q$.

Exercice 2

a. Si $p = \sqrt{7}(\sqrt{5} - 1)$ et $q = \sqrt{35} - 2\sqrt{7}$,
alors : $p-q = \sqrt{35} - \sqrt{7} - \sqrt{35} + 2\sqrt{7} = \sqrt{7} > 0$;
donc : $p>q$;

b. si $p = (2 - \sqrt{7})^2$ et $q = 3(4 - \sqrt{7})$,
alors : $p-q = 4 - 4\sqrt{7} + 7 - 12 + 3\sqrt{7} = -1 - \sqrt{7} < 0$;
donc : $p<q$.

Exercice 3

a. Si $p = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $q = 2(\sqrt{2} + 1)$,
alors : $p-q = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$;
donc : $p>q$;

b. si $p = 8 + \sqrt{7}$ et $q = 2(\sqrt{7} + 3)$,
alors : $p-q = 8 + \sqrt{7} - 2\sqrt{7} - 6 = 2 - \sqrt{7} < 0$;
donc : $p<q$.

Exercice 4

a. Si $p = 2\sqrt{7}$ et $q = 3\sqrt{3}$, alors : $p^2=28$, $q^2=27$ et $p^2>q^2$;
comme $p>0$ et $q>0$, on a : $p>q$;

b. si $p = 4\sqrt{6}$ et $q = 3\sqrt{10}$,
alors : $p^2=96$, $q^2=90$ et $p^2>q^2$;
comme $p>0$ et $q>0$, on a : $p>q$.

Exercice 5

a. Si $p=\sqrt{\frac{10}{7}}$ et $q=\sqrt{\frac{4}{3}}$,

alors : $p^2=\frac{10}{7}=\frac{30}{21}$, $q^2=\frac{4}{3}=\frac{28}{21}$ et $p^2>q^2$;

comme $p>0$ et $q>0$, on a : $p>q$;

b. si $p=\sqrt{\frac{18}{11}}$ et $q=\sqrt{1{,}7}$,

alors : $p^2=\frac{18}{11}=\frac{180}{110}$, $q^2=1{,}7=\frac{17}{10}=\frac{187}{110}$ et $p^2<q^2$;

comme $p>0$ et $q>0$, on a : $p<q$.

Exercice 6

a. Si $p=-7$ et $q=-2\sqrt{11}$, alors : $p^2=49$, $q^2=44$ et $p^2>q^2$;

comme $p<0$ et $q<0$, on a : $p<q$;

b. si $p=-2\sqrt{13}$ et $q=-\sqrt{6}\times\sqrt{8}$,

alors : $p^2=52$, $q^2=48$ et $p^2>q^2$;

comme $p<0$ et $q<0$, on a : $p<q$.

Exercice 7

a. Si $p=-9$ et $q=-4\sqrt{6}$, alors : $p^2=81$, $q^2=96$ et $p^2<q^2$;

comme $p<0$ et $q<0$, on a : $p>q$;

b. si $p=\frac{-2}{\sqrt{3}}$ et $q=\frac{-3}{\sqrt{7}}$,

alors : $p^2=\frac{4}{3}=\frac{28}{21}$, $q^2=\frac{9}{7}=\frac{27}{21}$ et $p^2>q^2$;

comme $p<0$ et $q<0$, on a : $p<q$.

Exercice 8

a. Si $p=\frac{1}{89}$ et $q=\frac{2}{181}$,

alors : $\frac{1}{p}=89$, $\frac{1}{q}=\frac{181}{2}=90{,}5$ et $\frac{1}{p}<\frac{1}{q}$;

comme $p>0$ et $q>0$, on a : $p>q$;

b. si $p=\frac{1}{14{,}5}$ et $q=\frac{3}{46}$,

alors : $\frac{1}{p}=14{,}5=\frac{29}{2}=\frac{87}{6}$, $\frac{1}{q}=\frac{46}{3}=\frac{92}{6}$ et $\frac{1}{p}<\frac{1}{q}$;

comme $p>0$ et $q>0$, on a : $p>q$.

Exercice 9

a. Si $p=\frac{2}{17}$ et $q=\frac{3}{25}$,

alors : $\frac{1}{p}=\frac{17}{2}=\frac{51}{6}$, $\frac{1}{q}=\frac{25}{3}=\frac{50}{6}$ et $\frac{1}{p}>\frac{1}{q}$;

comme $p>0$ et $q>0$, on a : $p<q$;

b. si $p=\frac{1}{\sqrt{10}}$ et $q=\frac{1}{3}$,

alors : $\frac{1}{p}=\sqrt{10}$, $\frac{1}{q}=3$ et $\frac{1}{p}>\frac{1}{q}$,

comme $p>0$ et $q>0$, on a : $p<q$.

Exercice10

a. Si $p=\frac{1}{\sqrt{17}}$ et $q=\frac{1}{3\sqrt{2}}$,

alors : $\left(\frac{1}{p}\right)^2=17$, $\left(\frac{1}{q}\right)^2=18$ et $\left(\frac{1}{p}\right)^2<\left(\frac{1}{q}\right)^2$,

comme $p>0$ et $q>0$, on a : $\frac{1}{p}<\frac{1}{q}$ puis $p>q$;

b. si $p=\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $q=\frac{2}{\sqrt{18}}$,

alors : $\left(\frac{1}{p}\right)^2=5$, $\left(\frac{1}{q}\right)^2=\frac{18}{4}$ et $\left(\frac{1}{p}\right)^2>\left(\frac{1}{q}\right)^2$,

comme $p>0$ et $q>0$, on a : $\frac{1}{p}>\frac{1}{q}$ puis $p<q$.

Exercice 11

a. Si $p=\frac{-1}{\sqrt{13}}$ et $q=\frac{-1}{2\sqrt{3}}$,

alors : $\left(\frac{1}{p}\right)^2=13$, $\left(\frac{1}{q}\right)^2=12$ et $\left(\frac{1}{p}\right)^2>\left(\frac{1}{q}\right)^2$,

comme $p<0$ et $q<0$, on a : $\frac{1}{p}<\frac{1}{q}$ puis $p>q$;

b. si $p=\frac{-1}{2\sqrt{5}}$ et $q=\frac{-1}{3\sqrt{3}}$,

alors : $\left(\frac{1}{p}\right)^2=20$, $\left(\frac{1}{q}\right)^2=27$ et $\left(\frac{1}{p}\right)^2<\left(\frac{1}{q}\right)^2$,

comme $p<0$ et $q<0$, on a : $\frac{1}{p}>\frac{1}{q}$ puis $p<q$.

Exercice 12

Comme $\sqrt{3}>\sqrt{2}>0>-\sqrt{2}>-\sqrt{3}$,

on a : $\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>0>-\frac{1}{\sqrt{3}}>-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 13

Si a et b sont deux nombres réels tels que $a<b$, alors :

a. $a+\sqrt{2}<b+\sqrt{2}$;

b. $a-\sqrt{3}<b-\sqrt{3}$;

c. $a\times\pi<b\times\pi$;

d. $\frac{a}{-5}>\frac{b}{-5}$.

Exercice 14

a. $5 < \sqrt{32} < 6$.

b. $6 \times 5 - 25 < 6\sqrt{32} - 25 < 6 \times 6 - 25$

$5 < 6\sqrt{32} - 25 < 11$;

$42 - 7 \times 6 < 42 - 7\sqrt{32} < 42 - 7 \times 5$

$0 < 42 - 7\sqrt{32} < 7$.

Exercice 15

a. $3 < \sqrt{11} < 4$.

b. $\frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{11}} < \frac{1}{3}$

$0{,}25 < \frac{1}{\sqrt{11}} < 0{,}34$.

Exercice 16

a. $2 < \sqrt{7} < 3$ et $4 < \sqrt{17} < 5$

b. On a : $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{2}$; donc : $\frac{4}{3} < \sqrt{\frac{17}{7}} < \frac{5}{2}$.

Exercice 17

On donne : $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ et $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$.

a. $2{,}4 + 1{,}4 < \sqrt{6} + \sqrt{2} < 2{,}5 + 1{,}5$

$3{,}8 < \sqrt{6} + \sqrt{2} < 4$.

b. $-1{,}5 < -\sqrt{2} < -1{,}4$

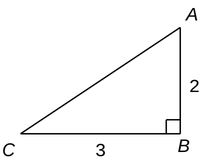
$2{,}4 - 1{,}5 < \sqrt{6} - \sqrt{2} < 2{,}5 - 1{,}4$

$0{,}9 < \sqrt{6} - \sqrt{2} < 1{,}1$.

Exercice 18

On donne : $3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7$ et $3{,}1 < \pi < 3{,}2$.

Dans le triangle *ABC*, rectangle en *B*,
on a : $AC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.
Périmètre de *ABC* : $p = 3 + 2 + \sqrt{13}$;
encadrement de *p* : $5 + 3{,}6 < p < 5 + 3{,}7$
$8{,}6 < p < 8{,}7$.



Périmètre du cercle de rayon $\sqrt{13}$: $q = 2\pi\sqrt{13}$;
encadrement de *q* : $2 \times 3{,}1 \times 3{,}6 < q < 2 \times 3{,}2 \times 3{,}7$
$22{,}32 < q < 23{,}68$.

Exercice 19

On donne : $-2{,}2 < x < 1{,}4$ et $-0{,}6 < y < 3{,}2$.

a. On a : $-2{,}2 - 0{,}6 < x + y < 1{,}4 + 3{,}2$
$-2{,}8 < x + y < 4{,}6$;
donc les valeurs que peut prendre $x + y$ sont :
0 ; –1,7 ; 1,5 ; 1,8.

b. On a : $-3{,}2 < -y < 0{,}6$
$-2{,}2 - 3{,}2 < x - y < 1{,}4 + 0{,}6$
$-5{,}4 < x - y < 2$;
donc les valeurs que peut prendre $x - y$ sont :
–3,2 ; 0 ; 0,6.

Exercice 20

On donne : $x \in]0{,}3 \,;\, 0{,}5[$ et $y \in]1{,}2 \,;\, 2{,}1[$

a. On a : $0{,}3 \times 1{,}2 < xy < 0{,}5 \times 2{,}1$
$0{,}36 < xy < 1{,}05$.

b. On a : $\frac{1}{2{,}1} < \frac{1}{y} < \frac{1}{1{,}2}$ puis $\frac{0{,}3}{2{,}1} < \frac{x}{y} < \frac{0{,}5}{1{,}2}$

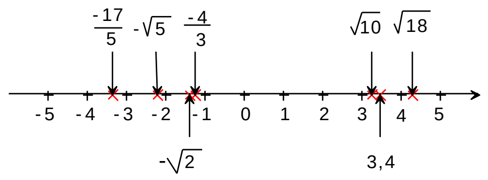
$0{,}14 < \frac{x}{y} < 0{,}42$

c'est-à-dire : $\frac{x}{y} \in]0{,}14 \,;\, 0{,}42[$.

Activités d'application

Nombres réels et intervalles

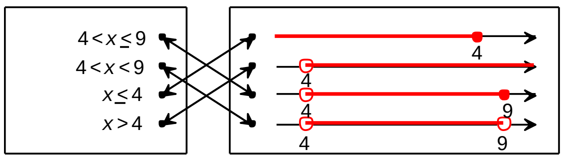
Exercice 21



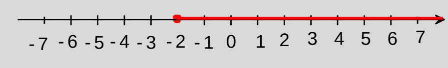
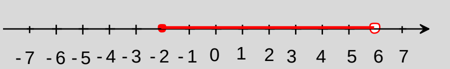
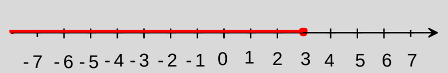
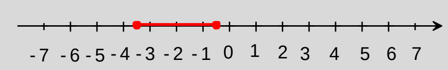
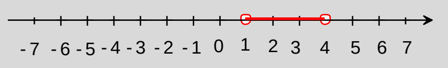
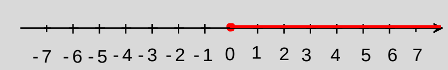
$\sqrt{10} \approx 3{,}2$; $-\sqrt{5} \approx -2{,}2$; $-\dfrac{17}{5} = -3{,}4$;

$\sqrt{18} \approx 4{,}2$; $-\sqrt{2} \approx -1{,}4$; $-\dfrac{4}{3} \approx 1{,}3$.

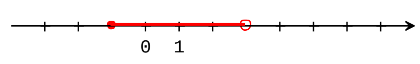
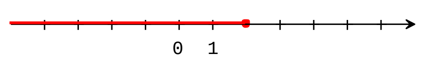
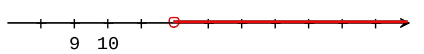
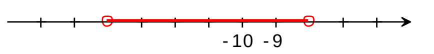
Exercice 22



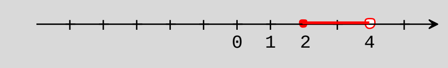
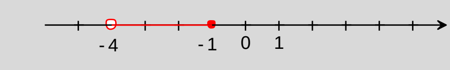
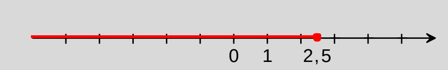
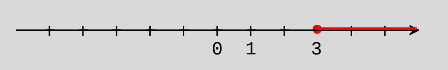
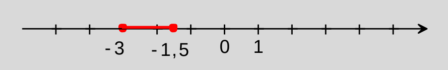
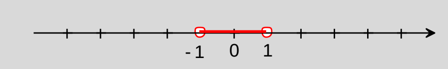
Exercice 23

a. $x>-2$	
b. $-2 \leq x<6$	
c. $x \leq 3$	
d. $-3{,}5 \leq x \leq -0{,}5$	
e. $1<x<4$	
f. $x \geq 0$	

Exercice 24

a. 	[–1 ; 3[
b. 	]← ; 2]
c. 	]12 ; →[
d. 	]–14 ; –8[

Exercice 25

a. [2 ; 4[	
b.]–4 ; –1]	
c.]← ; 2,5]	
d.]3 ; →[	
e. [–3 ; –1,5]	
f.]–1 ; 1[	

Exercice 26

a. 1, 2 et 3 sont trois nombres de l'intervalle]–2 ; 6[;

b. –3, –2 et 0 sont trois nombres de l'intervalle [–3 ; 1[;

c. 11 010, 12 000 et 25 000 sont trois nombres de l'intervalle $]10^4$; →[;

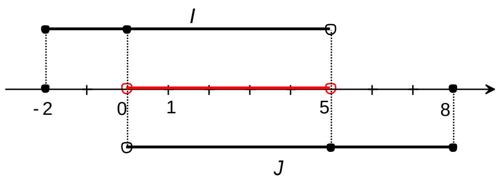
d. $3 \leq 3 < 6$; $3 \leq 4{,}5 < 6$; $3 \leq 5 < 6$;

e. $-4 < -3{,}7 < -3$; $-4 < -3{,}5 < -3$; $-4 < -3{,}25 < -3$;

f. $-0{,}5 < -0{,}4 < 0$; $-0{,}5 < -0{,}32 < 0$; $-0{,}5 < -0{,}27 < 0$.

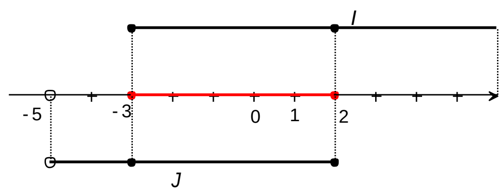
Exercice 27

a.



Si $I=[-2$; $5[$ et $J=]0$; $8]$, alors : $I \cap J =]0$; $5[$;

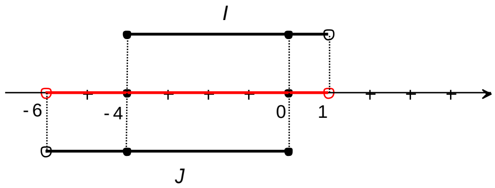
b.



si $I=[-3$; →[et $J=]-5$; $2]$, alors : $I \cap J=[-3$; $2]$.

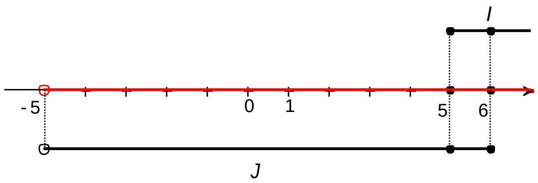
Exercice 28

a.



Si $I=[-4\ ;\ 1[$ et $J=]-6\ ;\ 0]$, alors : $\underline{I \cup J =]-6\ ;\ 1[}$;

b.



si $I=[5\ ;\ \rightarrow[$ et $J=]-5\ ;\ 6]$, alors : $\underline{I \cup J = [-5\ ;\ \rightarrow[}$.

Exercice 29

Si $x \geq 3$ alors :

a. $x+4 \geq 7$; b. $x-6 \geq -3$;

c. $5x \geq 15$; d. $3x-4 \geq 5$;

e. $\frac{x}{4} \geq \frac{3}{4}$; f. $-x \leq -3$.

Exercice 30

Si $y<-2$ alors :

a. $7y<-14$; b. $-2y>4$;

c. $3y-5<-11$; d. $-y+7>9$;

e. $\frac{1}{y} > -\frac{1}{2}$; f. $\frac{-2}{y} < 1$.

Comparaison de nombres

Exercice 31

a. Si $a = 6^2 - 4\sqrt{3}$ et $b = 4\left(8 - \sqrt{3}\right)$, alors :

- $a\text{-}b = 36 - 4\sqrt{3} - 32 + 4\sqrt{3} = 4$,
- comme $4>0$, on a : $\underline{a>b}$;

b. si $a = \frac{19}{5}$ et $b = \sqrt{4}\left(1 + \sqrt{4}\right)$, alors :

- $a\text{-}b = \frac{19}{5} - \sqrt{4} - 4 = -\frac{1}{5} - \sqrt{4}$,
- comme $-\frac{1}{5} - \sqrt{4} < 0$, on a : $\underline{a<b}$;

c. si $a = 2\sqrt{5}$ et $b = 4\sqrt{2}$, alors :

- $a^2=20$, $b^2=32$ et $a^2<b^2$,
- comme a et b sont positifs, on a : $\underline{a<b}$.

Exercice 32

a. Si $a=-10$ et $b = -3\sqrt{11}$, alors :

- $a^2=100$, $b^2=99$ et $a^2>b^2$,
- comme a et b sont négatifs, on a : $\underline{a<b}$;

b. si $a = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ et $b = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}$, alors :

- $a^2 = \frac{13}{5} = \frac{39}{15}$, $b^2 = \frac{14}{6} = \frac{35}{15}$ et $a^2>b^2$,
- comme a et b sont positifs, on a : $\underline{a>b}$;

c. si $a = \frac{1}{12{,}5}$ et $b = \frac{2}{24}$, alors :

- $a = \frac{1}{12{,}5}$, $b = \frac{1}{12}$ avec $12{,}5>12$,
- comme a et b sont positifs, on a : $\underline{a<b}$.

Exercice 33

a. Si $a = 4\sqrt{5}$ et $b = 2\left(1 + \sqrt{5}\right)$, alors :

- $a\text{-}b = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 2 = 2\left(\sqrt{5} - 1\right)$,
- comme $\sqrt{5} > 1$, on a : $\underline{a>b}$;

b. si $a = 6 - 2\sqrt{3}$ et $b = 4 - \sqrt{3}$, alors:

- $a\text{-}b = 6 - 2\sqrt{3} - 4 + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$,
- comme $2 > \sqrt{3}$, on a : $\underline{a>b}$;

c. si $a = -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ et $b=-2$, alors:

- $a^2 = \frac{13}{5}$, $b^2 = 4 = \frac{20}{5}$ et $a^2<b^2$,
- comme a et b sont négatifs, on a : $\underline{a>b}$.

Exercice 34

- $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$ et $\left(2\sqrt{7}\right)^2 = 28$, donc : $\left(4\sqrt{3}\right)^2 > \left(2\sqrt{7}\right)^2$;
  $4\sqrt{3}$ et $2\sqrt{7}$ étant positifs, on a : $A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7} > 0$;
- $B = 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5} > 0$;
- $\left(2\sqrt{15}\right)^2 = 60$ et $\left(3\sqrt{6}\right)^2 = 54$, donc : $\left(2\sqrt{15}\right)^2 > \left(3\sqrt{6}\right)^2$;
  $2\sqrt{15}$ et $3\sqrt{6}$ étant positifs, on a : $C = 2\sqrt{15} - 3\sqrt{6} > 0$.

Exercice 35

a. $\left(\sqrt{11}\right)^2 = 11 = \dfrac{396}{36}$; $\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6 = \dfrac{216}{36}$;

$\left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{49}{9} = \dfrac{196}{36}$; $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12 = \dfrac{432}{36}$;

$\left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{49}{4} = \dfrac{441}{36}$; $3^2 = 9 = \dfrac{324}{36}$;

or : $\dfrac{196}{36} < \dfrac{216}{36} < \dfrac{324}{36} < \dfrac{396}{36} < \dfrac{432}{36} < \dfrac{441}{36}$;

comme $\dfrac{7}{3}$; $\sqrt{6}$; 3 ; $\sqrt{11}$; $2\sqrt{3}$; $\dfrac{7}{2}$ sont positifs,

on a : $\underline{\dfrac{7}{3} < \sqrt{6} < 3 < \sqrt{11} < 2\sqrt{3} < \dfrac{7}{2}}$.

b. $\left(-\sqrt{7}\right)^2 = 7 = \dfrac{6\,300}{900}$; $(-8{,}5)^2 = \left(\dfrac{85}{10}\right)^2 = \dfrac{65\,025}{900}$;

$\left(-\dfrac{8}{3}\right)^2 = \dfrac{64}{9} = \dfrac{6\,400}{900}$; $\left(-2\sqrt{2}\right)^2 = 8 = \dfrac{7\,200}{900}$;

$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{5}{3} = \dfrac{1\,500}{900}$; $(-3)^2 = 9 = \dfrac{8\,100}{900}$;

or : $\dfrac{1\,500}{900} < \dfrac{6\,300}{900} < \dfrac{6\,400}{900} < \dfrac{7\,200}{900} < \dfrac{8\,100}{900} < \dfrac{65\,025}{900}$;

comme $-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$; $-\sqrt{7}$; $-\dfrac{8}{3}$; $-2\sqrt{2}$; -3 ; $-8{,}5$ sont

négatifs, on a : $\underline{-8{,}5 < -3 < -2\sqrt{2} < -\dfrac{8}{3} < -\sqrt{7} < -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}$.

c. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{11}}\right)^2 = \dfrac{1}{11}$; $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{1}{12}$;

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = \dfrac{1}{10}$;

$\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{8}$; $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}\right)^2 = \dfrac{2}{19} = \dfrac{1}{9{,}5}$;

or : $8 < 9 < 9{,}5 < 10 < 11 < 12$,

donc : $\dfrac{1}{12} < \dfrac{1}{11} < \dfrac{1}{10} < \dfrac{1}{9{,}5} < \dfrac{1}{9} < \dfrac{1}{8}$;

comme $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ sont positifs,

on a : $\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{3}} < \dfrac{1}{\sqrt{11}} < \dfrac{1}{\sqrt{10}} < \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}} < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$.

Exercice 36

Parmi : $-\sqrt{3}$; $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$; $-\dfrac{15}{7}$; $2\sqrt{2}$; $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{4}$; $-\sqrt{6}$;

seuls les nombres $-\sqrt{3}$ et $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ appartiennent à $[-2 ; 2[$.

En effet : $(-2)^2 = (2)^2 = 4$;

- $\left(-\sqrt{3}\right)^2 = 3 < 4$ et $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} < 4$;
- $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} > 2$; $-\dfrac{15}{7} < -2$; $\sqrt{4} = 2$;
  $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 > 4$; $\left(-\sqrt{6}\right)^2 = 6 > 4$.

Encadrements

Exercice 37

a. $\underline{4 < \sqrt{18} < 5}$; en effet :

- ces trois nombres sont positifs,
- $4^2 = 16$, $\left(\sqrt{18}\right)^2 = 18$, $5^2 = 25$ et $16 < 18 < 25$.

b. On en déduit que : $5 \times 4 + 5 < 5\sqrt{18} + 5 < 5 \times 5 + 5$

c'est-à-dire : $\underline{25 < 5\sqrt{18} + 5 < 30}$.

Exercice 38

a. $\underline{5 < \sqrt{29} < 6}$; en effet :

- ces trois nombres sont positifs,
- $5^2=25$, $\left(\sqrt{29}\right)^2=29$, $6^2=36$ et $25<29<36$.

b. On en déduit que : $\frac{2}{6} < \frac{2}{\sqrt{29}} < \frac{2}{5}$,

c'est-à-dire : $\underline{0{,}3 < \frac{2}{\sqrt{29}} < 0{,}4}$.

Exercice 39

a. $\underline{8 < \sqrt{75} < 9}$; en effet :

- ces trois nombres sont positifs,
- $8^2=64$, $\left(\sqrt{75}\right)^2=75$, $9^2=81$ et $64<75<81$.

b. On en déduit que : $\underline{\frac{5}{9} < \frac{5}{\sqrt{75}} < \frac{5}{8}}$.

c. On a donc : $\underline{0{,}5 < \frac{5}{\sqrt{75}} < 0{,}7}$.

d. $\frac{5}{\sqrt{75}} = \frac{5}{\sqrt{25} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc : $\underline{0{,}5 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 0{,}7}$.

Exercice 40

On donne : $3{,}87 < \sqrt{15} < 3{,}88$ et $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$.

- On a : $3{,}87 + 1{,}73 < \sqrt{15} + \sqrt{3} < 3{,}88 + 1{,}74$;
  c'est-à-dire : $\underline{5{,}60 < \sqrt{15} + \sqrt{3} < 5{,}62}$.
- On a : $3{,}87 \times 1{,}73 < \sqrt{15} \times \sqrt{3} < 3{,}88 \times 1{,}74$;
  c'est-à-dire : $\underline{6{,}69 < \sqrt{15} \times \sqrt{3} < 6{,}76}$.
- On a : $\frac{3{,}87}{1{,}74} < \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} < \frac{3{,}88}{1{,}73}$
  c'est-à-dire : $\underline{2{,}22 < \sqrt{5} < 2{,}24}$.

Exercice 41

On donne : $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$ et $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

- On a : $2{,}64 - 1{,}42 < \sqrt{7} - \sqrt{2} < 2{,}65 - 1{,}41$;
  c'est-à-dire : $\underline{1{,}22 < \sqrt{7} - \sqrt{2} < 1{,}24}$.
- On a : $2{,}64 \times 1{,}41 < \sqrt{7} \times \sqrt{2} < 2{,}64 \times 1{,}42$;
  c'est-à-dire : $\underline{3{,}72 < \sqrt{14} < 3{,}75}$.
- On a : $\frac{2{,}64}{1{,}42} < \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} < \frac{2{,}65}{1{,}41}$
  c'est-à-dire : $\underline{1{,}85 < \sqrt{3{,}5} < 1{,}88}$.

Exercice 42

Soit x et y tels que : $3 < x < 5$ et $\sqrt{2} < y < 2$.

a.
- $3 + \sqrt{2} < x + y < 5 + 2$ donc $\underline{3 + \sqrt{2} < x + y < 7}$;
- $3 - 2 < x - y < 5 - \sqrt{2}$ donc $\underline{1 < x - y < 5 - \sqrt{2}}$;
- $2\times3+3\times\sqrt{2} < 2x + 3y < 2\times5+3\times2$
  donc $\underline{6 + 3\sqrt{2} < 2x + 3y < 16}$.

b.
- $3 \times \sqrt{2} < x \times y < 5 \times 2$ donc $\underline{3\sqrt{2} < x \times y < 10}$;
- $\frac{3}{2} < \frac{x}{y} < \frac{5}{\sqrt{2}}$ donc $\underline{\frac{3}{2} < \frac{x}{y} < \frac{5\sqrt{2}}{2}}$;
- $\frac{2 \times 3}{3 \times 2} < \frac{2x}{3y} < \frac{2 \times 5}{3 \times \sqrt{2}}$ donc $\underline{1 < \frac{2x}{3y} < \frac{5\sqrt{2}}{3}}$.

Exercice 43

Soit x et y tels que : $\sqrt{2} < x < 4$ et $\sqrt{3} < y < 5$.

a. On a : $2 < x^2 < 16$ et $3 < y^2 < 25$.

b. On en déduit que : $-25 < -y^2 < -3$

$2-25 < x^2-y^2 < 16-3$,

c'est-à-dire : $\underline{-23 < x^2-y^2 < 13}$.

Exercice 44

Soit x et y tels que : $-3{,}5 < x < -0{,}5$ et $2 < y < 4{,}5$.

On a : $4 < 2y < 9$ et $-9 < -2y < -4$.

a. Si $m=x+2y$, alors $\underline{0{,}5 < m < 8{,}5}$.

b. Si $n=x-2y$, alors $\underline{-12{,}5 < n < -4{,}5}$ et $4{,}5 < -n < 12{,}5$.

c. Si $p=m-n$, alors $\underline{5 < p < 21}$.

Exercice 45

Encadrement du gain hebdomadaire G d'Ali :

60 000 F CFA< G <70 000 F CFA.

Encadrement des dépenses (nourriture et autres) hebdomadaires D d'Ali : 25 000+15 000< D <30 000+20 000

40 000 F CFA< D <50 000 F CFA.

Encadrement de ce qu'il reste à Ali à la fin de la semaine :

60 000–50 000< G–D <70 000–40 000

c'est-à-dire : <u>10 000 F CFA< G–D <30 000 F CFA</u>.

Exercice 46

Désignons par L, l et S les longueur, largeur et superficie du jardin rectangulaire de Noah. On a : $l = \frac{S}{L}$.

Si $850<S<900$ et $45<L<50$, alors : $\frac{1}{50} < \frac{1}{L} < \frac{1}{45}$;

on en déduit que : $\frac{850}{50} < \frac{S}{L} < \frac{900}{45}$

c'est-à-dire : $17< l <20$;

la largeur du jardin de Noah est comprise entre <u>17 et 20 m</u>.

Exercice 47

a. « Un nombre et son opposé ont des valeurs absolues opposées » est une affirmation fausse.

b. « Un nombre et son inverse ont la même valeur absolue » est une affirmation fausse.

c. « Une valeur absolue n'est jamais négative » est une affirmation vraie.

d. « Si a et b sont deux nombres, alors $|a - b| = |b - a|$ » est une affirmation vraie.

Exercice 48

a. $|-0{,}1| = \underline{0{,}1}$; b. $\left|\frac{1}{3}\right| = \underline{\frac{1}{3}}$; c. $|0{,}03| = \underline{0{,}03}$;

d. $|0| = \underline{0}$; e. $|-\sqrt{3}| = \underline{\sqrt{3}}$; f. $|\sqrt{7}| = \underline{\sqrt{7}}$.

Exercice 49

a. $|1 - \sqrt{3}| = \underline{\sqrt{3} - 1}$ car $\sqrt{3} > 1$;

b. $|\sqrt{5} - 2| = \underline{\sqrt{5} - 2}$ car $\sqrt{5} > 2$;

c. $|\sqrt{7} - 3| = \underline{3 - \sqrt{7}}$ car $\sqrt{7} < 3$;

d. $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \underline{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ car $\sqrt{2} < \sqrt{3}$;

e. $\left|\frac{-1}{\sqrt{2}}\right| = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ car $\frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$;

f. $\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right| = \underline{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ car $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > 0$.

Exercice 50

$A = |6 - 2| + |4 - 5| - |7 - 3|$

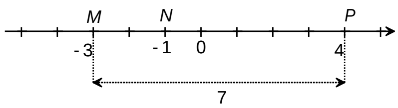
$A = (6 - 2) + (5 - 4) - (7 - 3) = \underline{1}$;

$B = |2 - \sqrt{3}| + |2 - \sqrt{5}| - |\sqrt{3} - \sqrt{5}|$

$B = (2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - 2) - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \underline{0}$;

$C = |5(3 - 2\sqrt{5})| + 2|4 - \sqrt{5}| = 5(2\sqrt{5} - 3) + 2(4 - \sqrt{5}) = \underline{8\sqrt{5} - 7}$.

Exercice 51



a. Sur la figure, distance entre les nombres -3 et 4 : 7.
Calcul de cette distance : $|4 - (-3)| = |7| = 7$.

b. Distance entre -3 et -1 :
sur la figue : 2 ; calcul : $|-1 - (-3)| = |2| = 2$;

distance entre -1 et 4 :
sur la figue : 5 ; calcul : $|4 - (-1)| = |5| = 5$.

Exercice 52

a. Distance entre -3 et 5 : $|5 - (-3)| = |8| = \underline{8}$;

b. distance entre -6 et -1 : $|-1 - (-6)| = |5| = \underline{5}$;

c. distance entre 4 et -6 : $|4 - (-6)| = |10| = \underline{10}$;

d. distance entre $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$: $\left|\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2}{2}\right| = \underline{1}$;

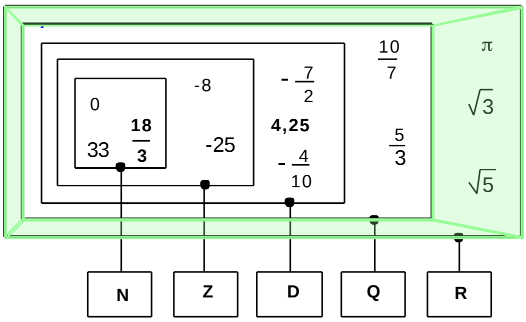
e. distance entre $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{2}$: $|\sqrt{3} - (-\sqrt{2})| = \underline{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$;

f. distance entre $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$: $|\sqrt{2} - (-\sqrt{2})| = \underline{2\sqrt{2}}$.

Exercice 53 Les ensembles de nombres

a. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels ;
$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux ;
$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels ;
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels ;
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

b.



c. $4{,}25 \in \mathbb{D}$; $-8 \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$; $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$;

$0 \in \mathbb{N}$; $\frac{18}{3} \in \mathbb{N}$; $-\frac{4}{10} \in \mathbb{D}$; $\pi \in \mathbb{R}$.

d. $33 \in \mathbb{N}$; $-25 \in \mathbb{Z}$; $-\frac{7}{2} \in \mathbb{D}$; $\frac{10}{7} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$.

e. La partie coloriée correspond aux nombres irrationnels.

Exercice 54 Crochets et intervalles

1. $x < 4$ peut aussi s'écrire : $x \in]\leftarrow ; 4[$.
2. $x \geq -2$ peut aussi s'écrire : $x \in [-2 ; \rightarrow[$.
3. $x > 6$ peut aussi s'écrire : $x \in]6 ; \rightarrow[$.
4. $-2 < x \leq 3$ peut aussi s'écrire : $x \in]-2 ; 3]$.
5. $4 > x \geq 3$ peut aussi s'écrire : $x \in [3 ; 4[$.

Exercice 55 Chercher l'erreur

a. Kamga s'est trompé ; en effet, les nombres p et q étant négatifs, si $q^2 > p^2$ alors : $q < p$.

b. Pour obtenir une rédaction correcte, il suffit de compléter et changer la dernière ligne :
« $q^2 > p^2$; comme p et q sont négatifs, on a : $q < p$. »

Exercice 56 Acquérir les bons réflexes

a. Pour comparer $p = \left(6 - \sqrt{3}\right)^2$ et $q = 12\left(3 - \sqrt{3}\right)$, *étudier le signe de leur différence* :

$$p - q = \left(36 - 12\sqrt{3} + 3\right) - \left(36 - 12\sqrt{3}\right) = 3,$$

comme $p - q > 0$, alors $p > q$;

b. pour comparer $p = 5\sqrt{7}$ et $q = 7\sqrt{5}$, *comparer leurs carrés* : $\left(5\sqrt{7}\right)^2 = 25 \times 7 = 175$ et $\left(7\sqrt{5}\right)^2 = 49 \times 5 = 245$,
comme $p^2 < q^2$, p et q sont positifs, alors $p < q$;

c. pour comparer $p = \frac{1}{82{,}5}$ et $q = \frac{7}{574}$, *comparer leurs inverses* : $\frac{1}{p} = 82{,}5$ et $\frac{1}{q} = \frac{574}{7} = 82$,

comme $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$, p et q sont positifs, alors $p < q$.

Exercice 57 Bien comprendre un énoncé

L et l désignent la longueur et la largeur d'un rectangle.

1. On a : $8 \leq L \leq 12$ et $3 \leq l \leq 5$.

2. Encadrement du périmètre P de ce rectangle :

$$2(8+3) \leq P \leq 2(12+5)$$
$$22 \leq P \leq 34 \;;$$

Encadrement de l'aire A de ce rectangle :

$$8 \times 3 \leq A \leq 12 \times 5$$
$$24 \leq A \leq 60.$$

Exercice 58 Comprendre un raisonnement

On donne : $x \geq -2$.

a. Je multiplie chaque membre par 2 : $2x \geq -4$.
J'ajoute 3 à chaque membre : $2x + 3 \geq -4 + 3$.
Donc : $\underline{2x + 3 \geq -1}$.

b. Je multiplie chaque membre par -1 : $-x \leq 2$.
J'ajoute 2 à chaque membre : $-x + 2 \leq 2 + 2$.
Donc : $\underline{-x + 2 \leq 4}$.

c. Je multiplie chaque membre par -8 : $-8x \leq -8 \times (-2)$.
Donc : $\underline{-8x \leq 16}$.

d. Je multiplie chaque membre par 3 : $3x \geq -6$.
J'enlève $\sqrt{3}$ à chaque membre : $3x - \sqrt{3} \geq -6 - \sqrt{3}$.
Donc : $\underline{3x - \sqrt{3} \geq -6 - \sqrt{3}}$.

e. Je multiplie chaque membre par -1 : $-x \leq 2$.
Je divise chaque membre par 5 : $\frac{-x}{5} \leq \frac{2}{5}$.
Donc : $\underline{-\frac{x}{5} \leq \frac{2}{5}}$.

f. Je multiplie chaque membre par $-\frac{5}{3}$: $-\frac{5x}{3} \leq \frac{10}{3}$.
J'ajoute $\frac{3}{2}$ à membre par 5 : $-\frac{5x}{3} + \frac{3}{2} \leq \frac{10}{3} + \frac{3}{2}$.
Donc : $\underline{-\frac{5x}{3} + \frac{3}{2} \leq \frac{29}{6}}$.

Exercice 59 Bien choisir le symbole d'inégalité

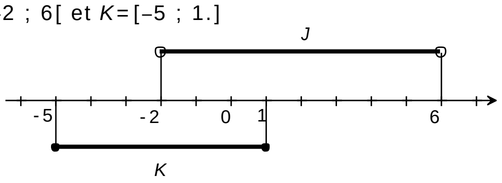
On donne : $2 \leq x < 5$ et $1 < y \leq 7$.

	Encadrements faux	Encadrements corrigés
a.	$3 \leq x+y \leq 12$	$3 < x+y < 12$
b.	$2 < xy \leq 35$	$2 < xy < 35$
c.	$1 < x-y < -2$	$-5 \leq x-y < 4$
d.	$\frac{1}{5} < \frac{y}{x} < \frac{7}{2}$	$\frac{1}{5} < \frac{y}{x} \leq \frac{7}{2}$

Exercice 60 Intervalles et ensembles de nombres

On donne : $J=]-2\ ;\ 6[$ et $K=[-5\ ;\ 1.]$

1. Ci-contre la représentation de J et K sur la droite des nombres réels.



2.a. Si $x \in J$ et $x \in K$ alors $-2 < x \leq 1$;

b. si $x \in J$ ou $x \in K$ alors $-5 \leq x < 6$;

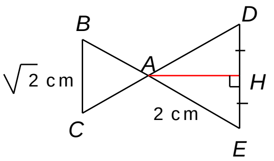
c. si $x \in J$ et $x \notin K$ alors $1 < x < 6$;

d. si $x \notin J$ et $x \in K$ alors $-5 \leq x \leq -2$;

e. si $x \notin J$ et $x \notin K$ alors $x < -5$ ou $6 \leq x$;

f. si $x \notin J$ ou $x \notin K$ alors $x \leq -2$ ou $1 < x$.

Exercice 61 Comparer des périmètres



Dans la figure ci-contre :

- les triangles ABC et ADE sont équilatéraux,
- H est le milieu de $[DE]$.

(AH), médiane issue de A dans le triangle équilatéral ADE, est aussi hauteur issue de A.

a. On a : $HE=$ <u>1 cm</u> et $AH=\sqrt{AE^2-HE^2}=\sqrt{4-1}=\underline{\sqrt{3}\text{ cm}}$.

b. Périmètre du triangle ABC : $3\sqrt{2}$ cm ;

périmètre du triangle AHE : $2+1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$ cm ;

or : $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18=12+6$ et $\left(3+\sqrt{3}\right)^2=9+6\sqrt{3}+3=12+6\sqrt{3}$,

donc : $\left(3\sqrt{2}\right)^2<\left(3+\sqrt{3}\right)^2$ et $3\sqrt{2}<3+\sqrt{3}$.

C'est le triangle AHE qui possède le plus grand périmètre.

Exercice 62 Encadrements et comparaisons

On donne :

$a=7\sqrt{11}+4$; $b=5\sqrt{19}$; $c=6\sqrt{13}+10$; $d=9\sqrt{17}-3$.

On a :

$7\times 3+4<7\sqrt{11}+4<7\times 4+4$; donc : $25<a<32$;

$5\times 4<5\sqrt{19}<5\times 5$; donc : $20<b<25$;

$6\times 3+10<6\sqrt{13}+10<6\times 4+10$; donc : $28<c<34$;

$9\times 4-3<9\sqrt{17}-3<9\times 5-3$; donc : $33<d<42$.

b. Grâce à ces encadrement, on obtient : $b<a<d$.

c. Si on donne : $3{,}3<\sqrt{11}<3{,}4$; $3{,}6<\sqrt{13}<3{,}7$; $4{,}1<\sqrt{17}<4{,}2$; $4{,}3<\sqrt{19}<4{,}4$;

alors :

$7\times 3{,}3+4<7\sqrt{11}+4<7\times 3{,}4+4$ et : $27{,}1<a<27{,}8$;

$5\times 4{,}3<5\sqrt{19}<5\times 4{,}4$ et : $21{,}5<b<22$;

$6\times 3{,}6+10<6\sqrt{13}+10<6\times 3{,}7+10$ et : $31{,}6<c<32{,}2$;

$9\times 4{,}1-3<9\sqrt{17}-3<9\times 4{,}2-3$; et : $33{,}9<d<34{,}8$.

Grâce à ces nouveaux encadrements, on a : $b<a<c<d$.

Exercice 63 La clôture

L et l désignant les longueur et largeur du terrain rectangulaire de Yene, on a :

$$48 \text{ m} \leq L \leq 50 \text{ m} \quad \text{et} \quad 32 \text{ m} \leq l \leq 34 \text{ m}.$$

a. Encadrement du périmètre P de ce terrain :

$$2(48+32) \leq P \leq 2(50+34)$$
$$\underline{160 \text{ m} \leq P \leq 168 \text{ m}}.$$

b. En laissant sur la clôture de ce terrain trois ouvertures de largeur comprise entre 3 m et 4 m, la longueur C de clôture nécessaire est telle que :

$$160-3\times 4 \leq C \leq 168-3\times 3$$
$$\underline{148 \text{ m} \leq C \leq 159 \text{ m}}.$$

c. $\dfrac{148}{5}=29{,}6$; donc il faut 30 panneaux de 5 m pour une clôture de 148 m (longueur minimale) ;

$\dfrac{159}{4}=39{,}75$; donc il faut 40 panneaux de 4 m pour une clôture de 159 m (longueur maximale) ;

finalement, entre <u>30 et 40 panneaux</u> sont nécessaires.

Exercice 64 Valeurs absolues

a. $\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$ et $3^2=9$;

donc : $2\sqrt{2}<3$ et $\left|2\sqrt{2}-3\right|=3-2\sqrt{2}$;

$2^2=4$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$;

donc : $2>\sqrt{2}$ et $\left|2-\sqrt{2}\right|=2-\sqrt{2}$;

on en déduit que :

$\left|2\sqrt{2}-3\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|=3-2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=\underline{5-3\sqrt{2}}$.

b. $1^2=1$ et $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$;

donc : $1<\sqrt{3}$ et $\left|1-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-1$;

$\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ et $5^2=25$;

donc : $2\sqrt{3}<5$ et $\left|2\sqrt{3}-5\right|=5-2\sqrt{3}$;

on en déduit que :

$\left|1-\sqrt{3}\right|-\left|2\sqrt{3}-5\right|=\sqrt{3}-1-5+2\sqrt{3}=\underline{3\sqrt{3}-6}$.

c. $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ et $4^2=16$;

donc : $3\sqrt{2}>4$ et $\left|3\sqrt{2}-4\right|=3\sqrt{2}-4$;

$1^2=1$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$;

donc : $1<\sqrt{2}$ et $\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$;

on en déduit que :

$\left|3\sqrt{2}-4\right|+\left|1-\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}-4+\sqrt{2}-1=\underline{4\sqrt{2}-5}$.

d. $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ et $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$;

donc : $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ et $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

$\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$ et $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$;

donc : $2\sqrt{2}>\sqrt{3}$ et $\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$;

on en déduit que :

$\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}=\underline{\sqrt{2}}$.

Exercice 65 Simplification de racines carrées

a. $A = \dfrac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)^2}{4}$

$A = \dfrac{\left(8+2\sqrt{8}\sqrt{3}+3\right)+\left(8-2\sqrt{8}\sqrt{2}+3\right)}{4} = \dfrac{22}{4} = \underline{\dfrac{11}{2}}$.

b. On a : $\underline{5 < A < 6}$.

Exercice 66 Simplification de fractions

a. $B = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{11} + \dfrac{7}{3} = \dfrac{2\times 55}{3\times 55} - \dfrac{12\times 3}{55\times 3} + \dfrac{7\times 55}{3\times 55}$

$B = \dfrac{9\times 55 - 3\times 12}{3\times 55} = \dfrac{3\times 55 - 12}{55} = \underline{\dfrac{153}{55}}$.

b. $\dfrac{153}{55} \approx 2{,}7818181\ldots$; donc : $\underline{2{,}781 < \dfrac{153}{55} < 2{,}782}$.

Exercice 67 Troncature et encadrements

a. $E = \dfrac{\dfrac{7}{5}-\dfrac{4}{3}}{\dfrac{7}{5}\times\dfrac{4}{3}} = \dfrac{\dfrac{1}{15}}{\dfrac{28}{15}} = \dfrac{1}{15}\times\dfrac{15}{28} = \underline{\dfrac{1}{28}}$.

b. $\dfrac{1}{28} = 0{,}035\,71\ldots$; donc :

$\underline{E \approx 0{,}035}$ (troncature à trois décimales) ;

$\underline{0<E<1}$ (encadrement de E par deux entiers consécutifs).

c. $\dfrac{1}{E} = 28$, donc $\dfrac{1}{E}$ est un entier naturel.

Exercice 68 Encadrement et valeurs absolues

On considère les nombres réels $a = 2+\sqrt{5}$ et $b = -2+\sqrt{5}$.

1. $a^2 = \left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 4 + 2\times 2\times\sqrt{5} + 5 = \underline{9+4\sqrt{5}}$;

$b^2 = \left(-2+\sqrt{5}\right)^2 = 4 - 2\times 2\times\sqrt{5} + 5 = \underline{9-4\sqrt{5}}$;

$ab = \left(2+\sqrt{5}\right)\left(-2+\sqrt{5}\right) = -4+5 = \underline{1}$.

2. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2+b^2}{ab} = \dfrac{9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}}{1} = \underline{18}$.

3. $Y = \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2-b^2}{ab} = \dfrac{\left(9+4\sqrt{5}\right)-\left(9-4\sqrt{5}\right)}{1} = 8\sqrt{5}$;

si $2{,}236\,0 < \sqrt{5} < 2{,}236\,1$,

alors : $8\times 2{,}236\,0 < 8\sqrt{5} < 8\times 2{,}236\,1$

$\underline{17{,}888\,0 < Y < 17{,}888\,8}$.

4. $(-2)^2 = 4$ et $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$;

donc : $\sqrt{5} > 2$ et $\left|-2+\sqrt{5}\right| = \underline{-2+\sqrt{5}}$.

Exercice 69 A la fontaine

a. Encadrement du nombre N de gobelets (contenant entre 0,4 L et 0,5 L) que Charles peut remplir avec un bidon qui contient entre 25 L et 30 L :

$\dfrac{25}{0{,}5} \le N \le \dfrac{30}{0{,}4}$

$\underline{50 \le N \le 75}$.

b. Encadrement de la quantité Q d'eau utilisée pour remplir 20 gobelets : $20\times 0{,}4 \le Q \le 20\times 0{,}5$

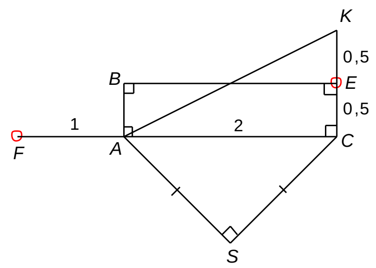
$8\text{ L} \le Q \le 10\text{ L}$;

Encadrement de la quantité R d'eau qui reste alors dans le bidon : $25-10 \le R \le 30-8$

$\underline{15\text{ L} \le R \le 22\text{ L}}$.

Activités d'intégration

Exercice 70 Tous les chemins mènent à l'école



1. $AK = \sqrt{AC^2 + CA^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$;

$AC^2 = AS^2 + CS^2 = 2AS^2$, donc : $AS = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = \sqrt{\frac{2^2}{2}} = \sqrt{2}$.

On en déduit les longueurs :

- du trajet via B (Babila) : $FA+AB+BE = 1+0{,}5+2 = 3{,}5$ km ;
- du trajet via K (Kouma) : $FA+AK+KE = 1+\sqrt{5}+0{,}5 = \left(\sqrt{5}+1{,}5\right)$ km ;
- du trajet via S (Sonia) : $FA+AS+SC+CE = 1+\sqrt{2}+\sqrt{2}+0{,}5 = \left(2\sqrt{2}+1{,}5\right)$ km.

2. Trajet de lundi : $2\left(\sqrt{5}+1{,}5\right) = \left(2\sqrt{5}+3\right)$km ; trajet de mardi : $\left(2\sqrt{2}+1{,}5\right)+3{,}5 = \left(2\sqrt{2}+5\right)$km.
Or : $\left(2\sqrt{5}+3\right) \approx 7{,}47$ km et $\left(2\sqrt{2}+5\right) \approx 7{,}83$ km ; donc c'est le trajet de lundi qui a été le plus court.

Exercice 71 Le voyage en voiture

Première étape
- longueur du trajet : entre 160 km et 180 km ;
- heure de départ : entre 15 h et 15 h 15 ;
- heure d'arrivée : entre 17 h 45 et 18 h.

Deuxième étape
- longueur du trajet : entre 120 km et 140 km ;
- heure de départ : entre 18 h 15 et 18 h 30 ;
- heure d'arrivée : entre 20 h et 20 h 15.

1. Encadrement de la longueur totale D du trajet parcouru par Abas : $160+120 \le D \le 180+140$
$280 \text{ km} \le D \le 320 \text{ km}$.

2.a. Encadrement de la durée T_1 de la première étape : 17 h 45–15 h 15 $\le T_1 \le$ 18 h–15 h
2 h 30 min $\le T_1 \le$ 3 h.

b. Encadrement de la durée T_2 de la deuxième étape : 20 h–18 h 30 $\le T_2 \le$ 20 h 15–18 h 15
1 h 30 min $\le T_2 \le$ 2 h.

c. Encadrement de la durée totale T pendant laquelle Abas a roulé : 2 h 30 min+1 h 30 min $\le T \le$ 3 h+2 h
4 h $\le T \le$ 5 h.

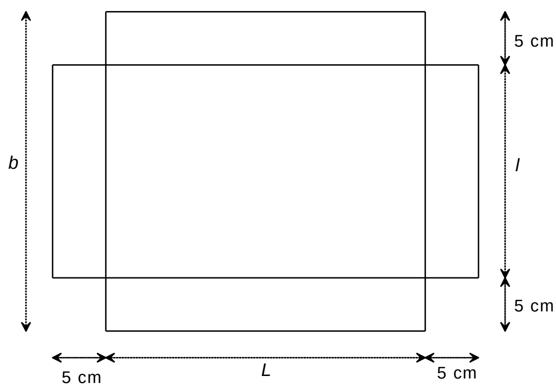
3.a. Pour une distance D parcourue en un temps T, la vitesse moyenne est : $V_m = \frac{D}{T}$.

b. Encadrement de la vitesse moyenne d'Abas sur la totalité de son parcours : $\frac{280}{5} \le V_m \le \frac{320}{4}$
$\underline{56 \text{ km/h} \le V_m \le 80 \text{ km/h}}$.

Exercice 72 La boîte en carton

1. Encadrement de la largeur b de la bande de carton : $29-1 \le b \le 29+1$
$\underline{28 \text{ cm} \le b \le 30 \text{ cm}}$;

encadrement du volume $\mathcal{V}$ de la boîte : $2\,600-100 \le \mathcal{V} \le 2\,600+100$
$\underline{2\,500 \text{ cm}^3 \le \mathcal{V} \le 2\,700 \text{ cm}^3}$.



2.a. L'aire du fond de la boîte est : $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{V}}{5}$.

b. Encadrement de l'aire du fond de la boîte : $\frac{2\,500}{5} \le \frac{\mathcal{V}}{5} \le \frac{2\,700}{5}$
$\underline{500 \text{ cm}^2 \le \mathcal{A} \le 540 \text{ cm}^2}$.

3.a. Encadrement de la largeur l de la boîte : $28-10 \le l \le 30-10$
$\underline{18 \text{ cm} \le l \le 20 \text{ cm}}$.

b. Encadrement de la longueur $L = \frac{\mathcal{A}}{l}$ de la boîte : $\frac{500}{20} \le \frac{\mathcal{A}}{l} \le \frac{540}{18}$
$\underline{25 \text{ cm} \le L \le 30 \text{ cm}}$.

c. Plusieurs possibilités pour L :
si $\underline{L = 25 \text{ cm}}$, lorsque b = 30 cm on a : $\mathcal{V} = 20 \times 5 \times 25 = 2\,500$ cm^3 ;
si $\underline{L = 27 \text{ cm}}$, lorsque b = 30 cm on a : $\mathcal{V} = 20 \times 5 \times 27 = 2\,700$ cm^3 ;
si $\underline{L = 30 \text{ cm}}$, lorsque b = 28 cm on a : $\mathcal{V} = 18 \times 5 \times 30 = 2\,700$ cm^3 ;
………

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Inverse d'un nombre relatif non nul [1 p 122]	27, 28	63, 64	
2	Puissances de 10 et écriture scientifique [2 p 122]	29, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62	65	73
3, 4	Puissance à exposant un entier relatif [3 p 122]	30, 31, 32, 33, 34	64, 66, 67	
	Apprendre à utiliser les notations sur les puissances [1 p 124]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12		
5, 6	Opérations sur les puissances [4 p 123]	35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54	68, 69	70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84
	Apprendre à utiliser les propriétés sur les puissances [2 p 125]	13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer Micro-organismes et maladies

1.a. Longueur de l'image de la salmonelle sur la revue : 7,2 cm = 0,072 m = $\underline{7{,}2\times10^{-2}\text{ m}}$;

grossissement utilisé : 20 000 = $\underline{2\times10^{4}}$.

b. Longueur réelle de la salmonelle : 0,072÷20 000 m = 0,000 0036 m = $\underline{3{,}6\times10^{-6}\text{ m}}$.

c. Comme 1 µm (micromètre) = 10^{-6} m, la longueur réelle de cette bactérie est : <u>3,6 µm</u>.

2.a. A partir d'une seule bactérie, qui se divise en 2 toutes les heures, il y aura :

- après 1 heure, 2 = $\underline{2^1}$ bactéries ;
- après 2 heures, 4 = $\underline{2^2}$ bactéries ;
- après 4 heures, 16 = $\underline{2^4}$ bactéries ;

b. Nombre de bactéries : après 8 heures, $\underline{2^8 = 256}$; après 24 heures, $\underline{2^{24} = 16\,777\,216}$.

3. Diamètre réel du VIH (virus du sida) : 100 nm = 10^{-7} m ;

sur une photo grossie 20 000 fois, son diamètre est : $10^{-7}\times2\times10^{4} = \underline{2\times10^{-3}\text{ m}}$.

1 Inverse d'un nombre relatif non nul

1. $-5\times\left(-\frac{1}{5}\right) = 1$; $\frac{4}{7}\times\frac{7}{4} = 1$.

Pour chaque couple, $\left(-5\ ;-\frac{1}{5}\right)$ et $\left(\frac{4}{7}\ ;\frac{7}{4}\right)$, les deux nombres sont inverses l'un de l'autre.

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit <u>est égal à 1</u>.

2. a, n et p sont des nombres non nuls ; l'inverse de a est $\frac{1}{a}$ et l'inverse de $\frac{n}{P}$ est $\frac{P}{n}$.

2 Ecriture scientifique

1. a. m et n désignant deux nombres entiers relatifs, on a :

- $\underline{10^m \times 10^n = 10^{m+n}}$; • $\underline{\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}}$; • $\underline{10^{-m} = \dfrac{1}{10^m}}$.

b. On en déduit que : • $A = 10^4 \times 10^3 = 10^7$; • $B = 10^5 \times 10^{-3} = 10^2$; • $C = 10^7 \times 10^{-9} = 10^{-2} = \dfrac{1}{10^2}$;

• $D = \dfrac{10^5}{10^2} = 10^3$; • $E = \dfrac{10^4}{10^{-2}} = 10^6$; • $F = \dfrac{10^3}{10^7} = 10^{-4} = \dfrac{1}{10^4}$.

2. $4\,570 = 4{,}57 \times 10^3$; $0{,}003\,71 = 3{,}71 \times 10^{-3}$; $-26{,}1 \times 10^2 = -2{,}61 \times 10^3$; $0{,}89 \times 10^{-3} = 8{,}9 \times 10^{-4}$.

3 Puissances à exposant un nombre entier relatif

1.a.

$:4$ $:4$ $:4$ $:4$ $:4$ $:4$ $:4$ $:4$

Ecriture entière ou fractionnaire	256	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4^2}$	$\frac{1}{4^3}$	$\frac{1}{4^4}$
Ecriture avec exposant	4^4	4^3	4^2	4^1	4^0	4^{-1}	4^{-2}	4^{-3}	4^{-4}

b. La division par 4, qui fait passer d'une colonne à la colonne suivante, correspond à la soustraction du nombre 1 sur l'exposant de la puissance de 4.

2. a

$:\frac{3}{2}$ $:\frac{3}{2}$ $:\frac{3}{2}$ $:\frac{3}{2}$ $:\frac{3}{2}$ $:\frac{3}{2}$ $:\frac{3}{2}$ $:\frac{3}{2}$

Ecriture entière ou fractionnaire	$\frac{243}{32}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$
Ecriture avec exposant	$\left(\frac{3}{2}\right)^5$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^0$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

b. La division par $\frac{3}{2}$, qui fait passer d'une colonne à la colonne suivante, correspond à la soustraction du nombre 1 sur l'exposant de la puissance de $\frac{3}{2}$.

3. Propriété : a désignant un nombre réel non nul et n un nombre entier relatif, on a : $\underline{\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}}$.

4.a. $\dfrac{1}{3^4} = 3^{-4}$; b. $\dfrac{1}{5^3} = 5^{-3}$; c. $\dfrac{1}{8^{-5}} = 8^5$; d. $\dfrac{1}{9} = 9^{-1}$; e. $\dfrac{1}{11^{-3}} = 11^3$.

4 Signe d'une puissance

1. • $-3^3 = -27$; • $(-3)^3 = -27$; • $2^4 = 16$; • $(-2)^4 = 16$; • $2^5 = 32$; • $(-2)^5 = -32$.

2. • $5^7 > 0$; • $(-5)^3 < 0$; • $2^3 > 0$; • $(-2)^3 < 0$; • $(-10)^4 > 0$; • $(-10)^5 < 0$.

3. a désigne un nombre réel non nul et n un nombre entier relatif.

a. Lorsque a est positif : a^n est toujours positif.

b. Lorsque a est négatif : a^n est positif quand n est pair ; a^n est négatif quand n est impair.

5 Puissances de produits ou de quotients

1.a. $(-7 \times 2)^3 = (-7 \times 2) \times (-7 \times 2) \times (-7 \times 2) = \left[(-7) \times (-7) \times (-7)\right] \times (2 \times 2 \times 2) = (-7)^3 \times 2^3$.

$(5 \times 3)^{-4} = \dfrac{1}{(5 \times 3)^4} = \dfrac{1}{5^4 \times 3^4} = \dfrac{1}{5^4} \times \dfrac{1}{3^4} = 5^{-4} \times 3^{-4}$.

b. Propriété : a et b sont deux nombres réels non nuls, n est un nombre entier relatif : $\underline{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$.

2.a. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^5 = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \dfrac{3^5}{5^5}$. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = 2^4 \times \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{2^{-4}} \times 3^{-4} = \dfrac{3^{-4}}{2^{-4}}$.

b. Propriété : a et b sont deux nombres réels non nuls, n est un nombre entier relatif : $\underline{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$.

3.a. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$ donc $(a + b)^n \neq a^n + b^n$.

b. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \neq a^2 - b^2$ donc $(a - b)^n \neq a^n - b^n$.

6 Produits, quotients ou puissances de puissances

1.a.

- $8^3 \times 8^5 = (8 \times 8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8) = 8^8$;
- $(-7)^{-2} \times (-7)^5 = \dfrac{1}{(-7)^2} \times (-7)^5 = \dfrac{(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)}{(-7)\times(-7)} = (-7)^3$;

b.

- $\dfrac{4^6}{4^3} = \dfrac{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4} = 4^3$;
- $\dfrac{2^7}{2^{-2}} = 2^7 \times \dfrac{1}{2^{-2}} = 2^7 \times 2^2 = 2^9$;
- $\dfrac{5^{-4}}{5^2} = 5^{-4} \times \dfrac{1}{5^2} = 5^{-4} \times 5^{-2} = 5^{-6} = \dfrac{1}{5^6}$;

c.

- $\left(5^3\right)^2 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5^6$;
- $\left(4^{-2}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{4^2}\right) \times \left(\dfrac{1}{4^2}\right) \times \left(\dfrac{1}{4^2}\right) = \dfrac{1}{4^6} = 4^{-6}$;
- $\left(3^{-2}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(3^{-2}\right)^2} = \dfrac{1}{3^{-4}} = 3^4$.

2. Propriétés : *a* est un nombre réel non nul, *m* et *n* sont deux nombres entiers relatifs :

- $\underline{a^m \times a^n = a^{m+n}}$;
- $\underline{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$;
- $\underline{\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}}$.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à utiliser les notations sur les puissances

Exercice 1

a. $5^4 = 625$; b. $(-8)^2 = 64$;

c. $7^3 = 343$; d. $2^5 = 32$.

Exercice 2

a. $2^3 = 8$; b. $(-2)^3 = -8$;

c. $-2^3 = -8$; d. $3^5 = 243$.

Exercice 3

a. $10^3 = 1\,000$; b. $(-10)^4 = 10\,000$;

c. $10^{-2} = \dfrac{1}{100}$; d. $-10^{-3} = -\dfrac{1}{1\,000}$;

e. $(-10)^{-3} = -\dfrac{1}{1\,000}$; f. $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$.

Exercice 4

a. $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 5^2 = 25$; b. $\left(\sqrt{3}\right)^6 = 3^3 = 27$;

c. $\left(-\sqrt{2}\right)^4 = 2^2 = 4$; d. $\left(\sqrt{2}\right)^{-4} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$;

e. $\left(-\sqrt{7}\right)^{-2} = 7^{-1} = \dfrac{1}{7}$; f. $\left(-\sqrt{3}\right)^{-6} = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$.

Exercice 5

a. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{2}{1}\right)^2 = 4$; b. $\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{-1} = \left(-\dfrac{7}{1}\right)^1 = -7$;

c. $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-3} = \left(-\dfrac{5}{3}\right)^3 = -\dfrac{125}{27}$; d. $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{-5} = \left(\dfrac{5}{7}\right)^5 = \dfrac{3\,125}{16\,807}$;

e. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{-4} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \dfrac{9}{4}$; f. $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)^{-4} = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\right)^4 = \dfrac{49}{25}$.

Exercice 6

Ecriture scientifique :

a. $14\,507 = 1{,}450\,7 \times 10^4$;

b. $2\,347 = 2{,}347 \times 10^3$;

c. $1\,070 = 1{,}07 \times 10^3$.

Exercice 7

Ecriture scientifique :

a. $0{,}000\,12 = 1{,}2 \times 10^{-4}$;

b. $0{,}043\,7 = 4{,}37 \times 10^{-2}$;

c. $0{,}000\,351 = 3{,}51 \times 10^{-4}$.

Exercice 8

L'écriture scientifique de $243{,}7 \times 10^4$ est : $2{,}437 \times 10^6$.

$3{,}20 \times 10^{-3}$ et $2{,}471 \times 10^2$ sont des nombres écrits en écriture scientifique.

Exercice 9

$\left(-\dfrac{12}{5}\right)^7 < 0$ (puissance impaire d'un nombre négatif) ;

$\left(2\sqrt{7}\right)^6 > 0$ (puissance d'un nombre positif) ;

$(-4)^9 < 0$ (puissance impaire d'un nombre négatif).

Exercice 10

a. $-8 = (-2)^3$; b. $\dfrac{1}{4} = (-2)^{-2}$; c. $-\dfrac{1}{32} = (-2)^{-5}$.

Exercice11

a. $\dfrac{1}{125} = 5^{-3}$; b. $1\,000 = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-3}$; c. $-27 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$.

Exercice 12

a. $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2^3} = 2^{-3}$; b. $-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{(-2)^1} = (-2)^{-1}$;

c. $\dfrac{49}{81} = \dfrac{7^2}{9^2} = \left(\dfrac{7}{9}\right)^2 = \left(\dfrac{9}{7}\right)^{-2}$; d. $-32 = (-2)^5 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$.

2 Apprendre à utiliser les propriétés sur les puissances

Exercice 13

a. $7^5 \times 2^5 = 14^5$; b. $(-3)^4 \times 2^4 = (-6)^4$;

c. $(\sqrt{3})^7 \times 2^7 = (2\sqrt{3})^7$.

Exercice 14

a. $\dfrac{3^4}{8^4} = \left(\dfrac{3}{8}\right)^4$; b. $\dfrac{(-2)^5}{6^5} = \left(-\dfrac{2}{6}\right)^5 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^5$;

c. $\dfrac{(\sqrt{5})^3}{(\sqrt{2})^3} = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^3$.

Exercice 15

a. $12^5 \times 10^5 = (12 \times 10)^5 = 120^5$; b. $(-3)^4 \times (-2)^4 = 6^4$;

c. $(\sqrt{3})^6 \times (\sqrt{2})^6 = (\sqrt{3} \times \sqrt{2})^6 = (\sqrt{6})^6 = \left((\sqrt{6})^2\right)^3 = 6^3$.

Exercice 16

a. $\dfrac{14^7}{3^7} = \left(\dfrac{14}{3}\right)^7$; b. $\dfrac{2^{-5}}{7^{-5}} = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{-5}$;

c. $\dfrac{(-4)^8}{(-5)^8} = \left(\dfrac{-4}{-5}\right)^8 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^8$.

Exercice 17

a. $\left((-3)^2\right)^3 = (-3)^6 = 3^6$; b. $\left((\sqrt{2})^3\right)^6 = (\sqrt{2})^{18} = 2^9$;

c. $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\right)^5 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{20}$.

Exercice 18

a. $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-7} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^7$;

b. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^6$;

c. $\dfrac{3^4}{(-2)^{-4}} = 3^4 \times (-2)^4 = 6^4$.

Exercice 19

a. $\left(-\dfrac{2}{7}\right)^{-4} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = \left(-\dfrac{2 \times 1}{7 \times 2}\right)^{-4} = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-4} = 7^4$;

b. $\left(\dfrac{\sqrt{8}}{3}\right)^{-3} \times (6\sqrt{8})^{-3} = \left(\dfrac{6\sqrt{8} \times \sqrt{8}}{3}\right)^{-3} = (2 \times 8)^{-3} = \left(\dfrac{1}{16}\right)^3$;

c. $\dfrac{5^{-2}}{9^{-2}} = \left(\dfrac{9}{5}\right)^2$; d. $\dfrac{(-12)^{-3}}{3^{-3}} = \left(\dfrac{-12}{3}\right)^{-3} = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^3$;

e. $\dfrac{(-5)^{-4}}{(-15)^{-4}} = \left(\dfrac{-5}{-15}\right)^{-4} = 3^4$.

Exercice 20

a. Si $3^2 \times a^n = 12^2$, alors $a^n = \dfrac{12^2}{3^2} = 4^2$;

b. Si $a^n \times 8^{-3} = 16^{-3}$, alors $a^n = \dfrac{16^{-3}}{8^{-3}} = 2^{-3}$.

Exercice 21

a. Si $3^{-4} \times a^n = 3^{-9}$, alors $a^n = \dfrac{3^{-9}}{3^{-4}} = 3^{-5}$;

b. si $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \times a^n = \dfrac{2}{5}$, alors $a^n = \dfrac{\frac{2}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$.

Exercice 22

a. Si $\dfrac{a^n}{(-5)^4} = (-5)^2$, alors $a^n = (-5)^2 \times (-5)^4 = (-5)^6$;

b. si $\dfrac{(\sqrt{3})^7}{a^n} = \sqrt{3}$, alors $a^n = \dfrac{(\sqrt{3})^7}{\sqrt{3}} = (\sqrt{3})^6 = 3^3$.

Exercice 23

a. Si $(a^n)^3 = 2^{15} = (2^5)^3$, alors $a^n = 2^5$;

b. si $(a^n)^5 = (-\sqrt{3})^{20} = \left((-\sqrt{3})^4\right)^5$, alors $a^n = (-\sqrt{3})^4$.

Exercice 24

a. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = 1$;

b. $(-7)^{2\,015} \times (-7)^{2\,014} = (-7)^1 = -7$.

c. $\dfrac{(\sqrt{3})^8}{\left((\sqrt{3})^4\right)^2} = \dfrac{(\sqrt{3})^8}{(\sqrt{3})^8} = 1$;

d. $\dfrac{1}{5} \times \dfrac{(-5)^7}{(-5)^6} = \dfrac{(-5)^7}{5 \times 5^6} = \left(\dfrac{-5}{5}\right)^7 = -1$.

Exercice 25

Si $A = 5\sqrt{2} \times 10^3$ et $B = \sqrt{2} \times 10^{-2}$, alors :

- $A^2 = (5\sqrt{2})^2 \times (10^3)^2 = 50 \times 10^6 = 5 \times 10^7$;
- $A \times B = 5\sqrt{2}\sqrt{2} \times 10^{3-2} = 10 \times 10 = 1 \times 10^2$;
- $\dfrac{A}{B} = \dfrac{5\sqrt{2} \times 10^3}{\sqrt{2} \times 10^{-2}} = 5 \times 10^5$; • $\dfrac{B}{A} = \dfrac{\sqrt{2} \times 10^{-2}}{5\sqrt{2} \times 10^3} = 2 \times 10^{-6}$.

Exercice 26

Si $C = \dfrac{2}{5} \times 10^{-2}$ et $D = \dfrac{5}{4} \times 10^5$, alors :

- $C^2 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \times \left(10^{-2}\right)^2 = \dfrac{4}{25} \times 10^{-4} = 1{,}6 \times 10^{-5}$;
- $C \times D = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{5}{4} \times 10^{-2+5} = \dfrac{1}{2} \times 10^3 = 5 \times 10^2$;
- $\dfrac{C}{D} = \dfrac{\frac{2}{5} \times 10^{-2}}{\frac{5}{4} \times 10^5} = \dfrac{8}{25} \times 10^{-7} = 3{,}2 \times 10^{-8}$;
- $\dfrac{D}{C} = \dfrac{\frac{5}{4} \times 10^5}{\frac{2}{5} \times 10^{-2}} = \dfrac{25}{8} \times 10^7 = 3{,}125 \times 10^7$.

Activités d'application

Calculs avec une puissance

Exercice 27

Nombres égaux à l'inverse de $-\frac{3}{8}$:

$\frac{-8}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$; $\frac{24}{-9}$; $\frac{8}{-\sqrt{9}}$; $-\frac{8}{3}$; $\frac{-2^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$.

Exercice 28

Ecriture sous forme d'une fraction irréductible :

a. $\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \times \frac{3}{2} = \underline{\frac{3}{2}}$;

b. $\frac{1}{-\frac{4}{7}} = 1 \times \left(-\frac{7}{4}\right) = \underline{-\frac{7}{4}}$;

c. $10 \div \frac{15}{8} = 10 \times \frac{8}{15} = \underline{\frac{16}{3}}$;

d. $\frac{7}{2} \div 4 = \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} = \underline{\frac{7}{8}}$;

e. $\frac{11}{14} \div \frac{3}{7} = \frac{11}{14} \times \frac{7}{3} = \underline{\frac{11}{6}}$;

f. $\frac{\sqrt{3}}{3} \div \frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{5}{2\sqrt{3}} = \underline{\frac{5}{6}}$.

Exercice 29

a. $10^4 = 10\ 000$: dix mille ;

b. $10^{-2} = 0{,}01$: un centième ;

c. $10^7 = 10\ 000\ 000$: dix millions ;

d. $10^{-4} = 0{,}000\ 1$: un dix millième.

Exercice 30

a. $3^5 = \underline{243}$; b. $(-5)^3 = \underline{-125}$; c. $0{,}2^3 = \underline{0{,}008}$;

d. $(-8)^2 = \underline{64}$; e. $\left(-\sqrt{7}\right)^4 = \underline{49}$; f. $(-15)^0 = \underline{1}$.

Exercice 31

a. $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \underline{\frac{1}{81}}$; b. $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \underline{\frac{1}{81}}$;

c. $(-0{,}5)^{-1} = \frac{1}{-0{,}5} = \underline{-2}$; d. $\left(\sqrt{11}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\sqrt{11}\right)^2} = \underline{\frac{1}{11}}$;

e. $(-1)^{-6} = \underline{1}$; f. $\left(-\frac{7}{8}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{1}{\frac{49}{64}} = \underline{\frac{64}{49}}$.

Exercice 32

a. $36 = \underline{6^2}$; b. $16 = \underline{2^4}$; c. $-27 = \underline{(-3)^3}$;

d. $-\frac{1}{8} = \underline{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$; e. $\frac{49}{9} = \underline{\left(\frac{7}{3}\right)^2}$; f. $\frac{64}{27} = \underline{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$.

Exercice 33

a. $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = \underline{5^{-2}}$; b. $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = \underline{10^{-2}}$;

c. $-\frac{1}{5} = \frac{1}{(-5)^1} = \underline{(-5)^{-1}}$; d. $81 = 3^4 = \underline{\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}}$;

e. $\frac{100}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \underline{\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}}$; f. $\frac{81}{64} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \underline{\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}}$.

Exercice 34

$\left(-\sqrt{3}\right)^6 > 0$ (puissance paire d'un nombre négatif) ;

$\left(\frac{4}{7}\right)^5 > 0$ (puissance d'un nombre positif) ;

$\left(-\frac{2}{3}\right)^{2\,015} < 0$ (puissance impaire d'un nombre négatif).

Exercice 35

a. $8^3 \times 6^3 = \underline{48^3}$; b. $(-5)^{-2} \times (0{,}4)^{-2} = \underline{2^{-2}}$;

c. $(-9)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \underline{15^4}$.

Exercice 36

a. $\left(\sqrt{3}\right)^{-1} \times \left(3\sqrt{3}\right)^{-1} = \underline{9^{-1}}$; b. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \underline{\left(\frac{15}{8}\right)^{-3}}$;

c. $\left(\frac{3}{8}\right)^{-3} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} = \underline{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}$. d. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-5} \times \left(\frac{10}{3}\right)^{-5} = \underline{\left(\frac{4}{3}\right)^{-5}}$.

Exercice 37

a. $\frac{9^2}{5^2} = \underline{\left(\frac{9}{5}\right)^2}$; b. $\frac{12^{-2}}{4^{-2}} = \underline{3^{-2}}$;

c. $\frac{(-4)^{-3}}{7^{-3}} = \underline{\left(-\frac{4}{7}\right)^{-3}}$.

Exercice 38

a. $\frac{6^4}{1{,}5^4} = \underline{4^4}$; b. $\frac{\left(2\sqrt{5}\right)^5}{4^5} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{4}\right)^5 = \underline{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^5}$;

c. $\frac{(-27)^{-1}}{(-9)^{-1}} = \underline{(-3)^{-1}} = \underline{-\frac{1}{3}}$.

Exercice 39

a. Si $\frac{1}{3^4} \times x = 27$, alors $x = 27 \times 3^4 = \underline{3^7}$;

b. si $2^{-5} \times x = 10^5$, alors $x = \frac{10^5}{2^{-5}} = \underline{20^5}$;

c. si $7^3 \times x = 21^3$, alors $x = \frac{21^3}{7^3} = \underline{3^3}$.

Exercice 40

a. Si $-8x^n = (ax)^3$, alors $a = -2$ et $n = 3$;

b. Si $\frac{36}{25}x^n = (ax)^2$, alors $a = \frac{6}{5}$ et $n = 2$;

c. Si $ax^{-2} = (5x)^n$, alors $a = \frac{1}{25}$ et $n = -2$.

Exercice 41

a. $(2\,468)^{10} \times \left(\frac{1}{1\,234}\right)^{10} = \left(\frac{2\,468}{1\,234}\right)^{10} = \underline{2^{10}} = \underline{1\,024}$.

b. $2^{10} = 2^5 \times 2^5 = 32 \times 32$; Gambo a raison.

Exercice 42

a. $(-18)^3 \times (-18)^1 = (-18)^4$; b. $7^{-2} \times 7^5 = 7^3$;

c. $2^{-5} \times 2^2 = 2^{-3}$.

Exercice 43

a. $\left(\sqrt{5}\right)^4 \times \left(\sqrt{5}\right)^{-4} = \underline{\left(\sqrt{5}\right)^0} = \underline{1}$; b. $\frac{7}{8} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{-2} = \underline{\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}} = \underline{\frac{8}{7}}$;

c. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \underline{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$.

Exercice 44

a. $\frac{9^6}{9^5} = \underline{9}$; b. $\frac{14^{-3}}{14^{-2}} = \underline{14^{-1}} = \underline{\frac{1}{14}}$;

c. $\frac{(-0{,}25)^{-4}}{(-0{,}25)^3} = \underline{(-0{,}25)^{-7}} = \underline{(-4)^7}$;

Exercice 45

a. $\frac{\left(\sqrt{12}\right)^3}{\left(\sqrt{12}\right)^{-4}} = \underline{\left(\sqrt{12}\right)^7}$; b. $\frac{8^4}{8} = \underline{8^3}$;

c. $\frac{7^5}{7^0} = \underline{7^5}$.

Exercice 46

a. $\left(11^4\right)^2 = \underline{11^8}$; b. $\left(9^{-3}\right)^{-3} = \underline{9^9}$;

c. $\left(2^{-2}\right)^5 = \underline{2^{-10}}$.

Exercice 47

a. $\left(\left(\sqrt{6}\right)^2\right)^{-4} = \underline{6^{-4}}$; b. $\left(\left(\frac{8}{5}\right)^3\right)^0 = \underline{1}$;

c. $\left(\left(-\frac{9}{2}\right)^{-1}\right)^{-1} = \underline{-\frac{9}{2}}$.

Exercice 48

a. Si $6{,}3^3 \times 6{,}3^n = 6{,}3^2$ alors $3+n = 2$
$n = \underline{-1}$;

b. si $8^n \times 8^{-4} = 8^2$ alors $n-4 = 2$
$n = \underline{6}$;

c. si $3^{-5} \times 3^n = 3^4$, alors $-5+n = 4$
$n = \underline{9}$;

d. si $\left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$, alors $n-4 = -4$
$n = \underline{0}$.

Exercice 49

a. Si $\dfrac{12^2}{12^n} = 12^4$ alors $2-n = 4$

$n = \underline{-2}$;

b. si $\dfrac{(-4{,}5)^n}{(-4{,}5)^{-1}} = (-4{,}5)^{-3}$ alors $n+1 = -3$

$n = \underline{-4}$;

c. si $\dfrac{(\sqrt{7})^n}{(\sqrt{7})^{-4}} = (\sqrt{7})^2$ alors $n+4 = 2$

$n = \underline{-2}$;

d. si $\dfrac{10^{-4}}{10^n} = 10^{-1}$ alors $-4-n = -1$

$n = \underline{-3}$.

Exercice 50

a. Si $\left(13^2\right)^n = 13^{-6}$, alors $2n = -6$

$n = -3$;

b. si $\left(3{,}6^n\right)^{-2} = 3{,}6^8$, alors $-2n = 8$

$n = -4$;

c. si $\left(4^{-3}\right)^n = 4^0$, alors $-3n = 0$

$n = 0$;

d. si $\left(\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n\right)^{-1} = \left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-3}$, alors $-n = -3$

$n = 3$.

Exercice 51

a. Après le 2e prélèvement de $\dfrac{1}{5}$ sur les $\dfrac{4}{5}$ de la somme initiale, il reste $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{4}{5} = \underline{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}$ de cette somme initiale ;

après le 3e prélèvement de $\dfrac{1}{5}$ sur les $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$ de la somme initiale, il reste $\dfrac{4}{5} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \underline{\left(\dfrac{4}{5}\right)^3}$ de cette somme initiale ;

après n prélèvements, il reste $\underline{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n}$ de la somme initiale.

b. Pour $n=2$, $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25} = 0{,}64$;

pour $n=3$, $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \dfrac{64}{125} = 0{,}512$;

pour $n=4$, $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^4 = \dfrac{256}{625} = 0{,}4096$.

c. C'est donc après 4 prélèvements qu'il restera moins de la moitié de la somme initiale.

Exercice 52

a. $9^2 \times 5^2 = \underline{45^2}$;

b. $(-4)^{-2} \times (-4)^3 = \underline{-4}$;

c. $0{,}7^{-4} \times 0{,}7^{-1} = \underline{0{,}7^{-5}}$;

d. $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-2} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{6 \times 5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-2} = \underline{10^2}$.

Exercice 53

a. $\dfrac{6^{-1}}{6^{-2}} = \underline{6}$;

b. $\dfrac{3^3}{0{,}5^3} = \left(\dfrac{3}{0{,}5}\right)^3 = \underline{6^3}$;

c. $\dfrac{(\sqrt{10})^3}{(\sqrt{10})^{-3}} = (\sqrt{10})^6 = \underline{10^3}$;

d. $\dfrac{(-0{,}5)^{-1}}{0{,}2^{-1}} = \left(-\dfrac{0{,}5}{0{,}2}\right)^{-1} = -\dfrac{2}{5} = \underline{-0{,}4}$.

e. $\dfrac{(-6)^{-4}}{(-6)^2} = \underline{(-6)^{-6}}$;

f. $\dfrac{7^{-5}}{0{,}7^{-5}} = \left(\dfrac{7}{0{,}7}\right)^{-5} = \underline{10^{-5}}$.

Exercice 54

a. $(2\sqrt{2})^4 = 2^4 \times (\sqrt{2})^4 = 16 \times 4 = \underline{64}$;

b. $(5\sqrt{3})^{-2} = \dfrac{1}{(5\sqrt{3})^2} = \dfrac{1}{5^2 \times (\sqrt{3})^2} = \dfrac{1}{25 \times 3} = \underline{\dfrac{1}{75}}$;

c. $14^2 \times \left(\dfrac{1}{7}\right)^2 = \left(\dfrac{14}{7}\right)^2 = 2^2 = \underline{4}$;

d. $\left(\dfrac{2^2}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \underline{\dfrac{64}{27}}$;

e. $\left(\dfrac{\sqrt{12}}{4}\right)^{-4} = \left(\dfrac{4}{\sqrt{12}}\right)^4 = \dfrac{4^4}{(\sqrt{12})^4} = \dfrac{4^2 \times 4^2}{12^2} = \dfrac{4^2}{3^2} = \underline{\dfrac{16}{9}}$;

f. $\dfrac{(2\sqrt{5})^3}{(4\sqrt{5})^3} = \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \underline{\dfrac{1}{8}}$.

Exercice 55

1. a. $5\,400 = \underline{5{,}4 \times 10^3}$; b. $-268{,}9 = \underline{-2{,}689 \times 10^2}$;

c. $300\,000 = \underline{3 \times 10^5}$; d. $0{,}003\,4 = \underline{3{,}4 \times 10^{-3}}$;

e. $15{,}07 = \underline{1{,}507 \times 10}$; f. $0{,}000\,006 = \underline{6 \times 10^{-6}}$.

Exercice 56

2. a. $183 \times 10^4 = 1{,}83 \times 10^2 \times 10^4 = \underline{1{,}83 \times 10^6}$;

b. $0{,}003 \times 10^2 = 3 \times 10^{-3} \times 10^2 = \underline{3 \times 10^{-1}}$;

c. $-45{,}7 \times 10^2 = -4{,}57 \times 10 \times 10^2 = \underline{-4{,}57 \times 10^3}$;

d. $351{,}8 \times 10^{-5} = 3{,}518 \times 10^2 \times 10^{-5} = \underline{3{,}518 \times 10^{-3}}$;

e. $0{,}000\,25 \times 10^{-3} = 2{,}5 \times 10^{-4} \times 10^{-3} = \underline{2{,}5 \times 10^{-7}}$.

f. $66{,}66 \times 10^{-1} = 6{,}666 \times 10 \times 10^{-1} = \underline{6{,}666}$.

Exercice 57

a. $7{,}2 \times 10^2 \times 5 \times 10^3 = 36 \times 10^5 = \underline{3\,600\,000}$;

b. $0{,}5 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^2 = 4 \times 10^{-1} = \underline{0{,}4}$;

c. $-\dfrac{1}{3} \times 10^{-4} \times 6 \times 10^5 = -2 \times 10^1 = \underline{-20}$;

d. $-\dfrac{1}{5} \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3 = -\dfrac{3}{5} \times 10^0 = -6 \times 10^{-1} = \underline{-0{,}6}$.

Exercice 58

a. $\dfrac{13 \times 10^2}{5 \times 10^5} = \dfrac{13}{5} \times 10^{-3} = 2{,}6 \times 10^{-3} = \underline{0{,}002\,6}$;

b. $\dfrac{2 \times 10^{-1}}{-3 \times 10^{-4}} = -\dfrac{2}{3} \times 10^3 \approx -0{,}666\ldots \times 10^3 \approx \underline{-666{,}666\ldots}$;

c. $\dfrac{8 \times 10^3}{16 \times 10^{-3}} = \dfrac{1}{2} \times 10^6 = 5 \times 10^5 = \underline{500\,000}$;

Exercice 59

a. $\dfrac{-3 \times 10^{-2}}{4 \times 10^4} = -\dfrac{3}{4} \times 10^{-6} = -7{,}5 \times 10^{-7} = \underline{-0{,}000\,000\,75}$;

b. $\dfrac{\sqrt{3} \times 10^3}{2\sqrt{3} \times 10^2} = \dfrac{1}{2} \times 10 = \underline{5}$;

c. $\dfrac{0{,}2 \times 10^{-1}}{\frac{1}{6} \times 10^{-3}} = 1{,}2 \times 10^2 = \underline{120}$.

Exercice 60

Longueur du ruban : 150 m $= \underline{1{,}5 \times 10^2 \text{ m}}$;

largeur du ruban : 8 mm = 0,008 m $= \underline{8 \times 10^{-3} \text{ m}}$;

aire d'une face du ruban :

$1{,}5 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-3} = 12 \times 10^{-1} = \underline{1{,}2 \text{ m}^2}$.

Exercice 61

1 AL (année-lumière) ≈ 9 500 milliards de km

$\approx 9\,500 \times 10^9 \text{ km} \approx \underline{9{,}5 \times 10^{12} \text{ km}}$.

Distance de la Terre à la galaxie d'Andromède :

2 millions d'AL $\approx 2 \times 10^6 \times 9{,}5 \times 10^{12} \text{ km} \approx \underline{1{,}9 \times 10^{19} \text{ km}}$.

Exercice 62

Masse approximative d'une molécule d'eau : 3×10^{-23} g.

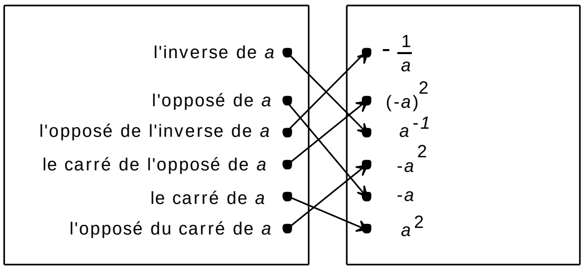
Masse de 1,5 L d'eau : 1 500 g.

Nombre de molécules d'eau dans une bouteille de 1,5 L :

$$\frac{1\,500}{3 \times 10^{-23}} \approx 5 \times 10^2 \times 10^{23} \approx \underline{5 \times 10^{25}}.$$

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 63 Comprendre le vocabulaire



Exercice 64 Connaître le signe

1. Signe de chaque nombre :

a. $-3^3 < 0$ (opposé d'une puissance d'un nombre positif) ;

b. $(-3)^3 < 0$ (puissance impaire d'un nombre négatif) ;

c. $-3^{-3} < 0$ (opposé d'une puissance d'un nombre positif) ;

d. $(-3)^{-3} < 0$ (puissance impaire d'un nombre négatif) ;

e. $-3^4 < 0$ (opposé d'une puissance d'un nombre positif) ;

f. $(-3)^4 > 0$ (puissance paire d'un nombre négatif) ;

g. $-3^{-4} < 0$ (opposé d'une puissance d'un nombre positif) ;

h. $(-3)^{-4} > 0$ (puissance paire d'un nombre négatif).

2.a. Nombres égaux : $-3^3 = (-3)^3$; $-3^{-3} = (-3)^{-3}$;

b. nombres inverses l'un de l'autre :

-3^3 et -3^{-3} ; $(-3)^3$ et $(-3)^{-3}$;

-3^4 et -3^{-4} ; $(-3)^4$ et $(-3)^{-4}$;

b. nombres opposés l'un de l'autre :

-3^4 et $(-3)^4$; -3^{-4} et $(-3)^{-4}$.

Exercice 65 Ecriture scientifique

1. Raisons pour lesquelles aucun des nombres suivants n'est présenté en écriture scientifique :

$A = 23{,}147 \times 10^{-4}$:

23,147 a 2 chiffres non nuls avant la virgule ;

$B = 0{,}003\,85 \times 10^3$:

0,003 85 n'a pas un chiffre non nul avant la virgule ;

$C = 1{,}5 \times 2^8$:

2^8 n'est pas une puissance de 10 ;

$D = 1{,}5 \times 10^2 \times 2{,}2 \times 10^3$:

ce nombre n'est pas écrit sous la forme $a \times 10^n$.

2. Ecriture scientifique des ces nombres :

$A = 2{,}314\,7 \times 10^{-3}$; $B = 3{,}85$;

$C = 384 = 3{,}84 \times 10^2$; $D = 3{,}3 \times 10^5$.

3. $E = 2{,}347 \times 10^5 = 234\,700$;

$F = 2{,}85 \times 10^{-4} = 0{,}000\,285$.

Exercice 66 Changer le signe de l'exposant

1. a. $7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$; b. $(-4)^{-5} = \left(-\frac{1}{4}\right)^5$; c. $12^{-1} = \frac{1}{12}$;

d. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4} = 4^4$; e. $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-1} = -7$; f. $\left(\frac{2}{9}\right)^{-4} = \left(\frac{9}{2}\right)^4$;

g. $\left(\frac{5}{12}\right)^{-3} = \left(\frac{12}{5}\right)^3$; h. $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{4}$.

2.a. $11^2 = \left(\frac{1}{11}\right)^{-2}$; b. $(-6)^3 = \left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$; c. $17 = \left(\frac{1}{17}\right)^{-1}$;

d. $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = 3^{-5}$; e. $\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = (-5)^{-4}$; f. $\left(\frac{3}{8}\right)^4 = \left(\frac{8}{3}\right)^{-4}$;

g. $\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}\right)^{-3}$; h. $\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-2}$.

Exercice 67 Observer pour comprendre

1.a. $5^{-2} < 5^{-1} < 5^0 < 5^2 < 5^3$.

b. $0{,}2^2 < 0{,}2^1 < 0{,}2^0 < 0{,}2^{-1} < 0{,}2^{-2}$.

(*Résultats obtenus par calculs.*)

2. Constat : si $a>0$, les puissances de a sont :
- dans le même ordre que celui des exposants, si $a>1$;
- dans l'ordre opposé à celui des exposants, si $0<a<1$.

3. $(-2)^3 < (-2)^{-3} < (-2)^0 < (-2)^{-2} < (-2)^2$.

(*Résultats obtenus par calculs.*)

4. Constat : si $a<0$, les puissances successives de a sont :
- positives lorsque l'exposant est pair ;
- négatives lorsque l'exposant est impair.

Exercice 68 Corriger des erreurs

☐ $(-3)^7 \times (-3)^5 = (-3)^{7+5} = \underline{(-3)^{12}} \neq (-3)^{7\times 5}$;

☐ $10^4 + 10^2 = \underline{10\,100} \neq 10^{4+2}$;

☐ $\frac{5^3}{5^{-2}} = 5^{3-(-2)} = \underline{5^5} \neq 5^{3-2}$;

☐ $4^5 - 4^3 = \underline{960} \neq 4^{5-3}$;

☐ $\left(2^3\right)^3 = 2^{3\times 3} = \underline{2^9} \neq 2^6$.

Exercice 69 Problème guidé

1. S'il disparaît un tiers des poissons au cours de la première année, il en reste donc deux tiers à la fin de la première année. Donc : $R_1 = \frac{2}{3}$.

A la fin de la 2e année : $R_2 = R_1 \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

A la fin de la ne année : $Rn = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2. $R_2 = \frac{4}{9}$; $R_3 = \frac{8}{27} \approx \underline{0{,}29}$; $R_4 = \frac{16}{81} \approx \underline{0{,}20}$; $R_5 = \frac{32}{243}$.

La première fraction inférieure à un quart est $R_4 = \frac{16}{81}$.

C'est donc à la fin de la 4e année qu'il restera moins du quart de la quantité initiale de poissons.

Exercice 70 Combinaison de puissances

a. $R = \left(3^{-2}\right)^3 = \underline{3^{-6}}$; $S = 6^{-3} \times 3^{-3} = \underline{18^{-3}}$.

b. $\dfrac{R}{S} = \dfrac{3^{-6}}{6^{-3} \times 3^{-3}} = \dfrac{6^3 \times 3^3}{3^6} = \dfrac{2^3 \times 3^3 \times 3^3}{3^6} = 2^3 = \underline{8}$.

Exercice 71 Simplifications d'expressions

a. $A = \dfrac{5^{-3} \times 5^2}{2^{-1} \times 6^{-1}} = \dfrac{2 \times 6}{5} = \dfrac{12}{5}$;

$B = \dfrac{2 \times 10^2 \times 2{,}5 \times 10^{-4}}{6 \times 10^4 \times 0{,}2 \times 10^{-5}} = \dfrac{5 \times 10^{-2}}{1{,}2 \times 10^{-1}} = \dfrac{5}{12}$.

b. A n'est pas l'opposé de B ;
A et B sont inverses l'un de l'autre.

Exercice 72 Résolutions d'équations

a. Si $5^7 \times x = 5^4$, alors : $x = \dfrac{5^4}{5^7} = \underline{5^{-3}}$;

b. si $3 \times \left(10^4\right)^2 \times x = 9\,000$, alors :

$$x = \dfrac{9\,000}{3 \times \left(10^4\right)^2} = \dfrac{9 \times 10^3}{3 \times 10^8} = \underline{3 \times 10^{-5}} \text{ ;}$$

c. si $4^{-3} \times 5^2 \times x = 5^3 \times 4^{-1}$, alors :

$$x = \dfrac{5^3 \times 4^{-1}}{4^{-3} \times 5^2} = \underline{5 \times 4^2} = \underline{80} \text{ ;}$$

d. si $\dfrac{x}{3^4 \times (-5)^7} = 3^{-3} \times 5^5$, alors :

$$x = 3^{-3} \times 5^5 \times 3^4 \times (-5)^7 = \underline{-3 \times 5^{12}} \text{ ;}$$

e. si $7^2 \times x = 7^3 \times 7$, alors : $x = \dfrac{7^3 \times 7}{7^2} = \underline{7^2} = \underline{49}$;

f. si $10^3 \times 10^{-5} \times x^2 = 10^6$, alors :

$$x^2 = \dfrac{10^6}{10^3 \times 10^{-5}} = 10^8 \text{ et } x = \underline{10^4} \text{ ou } x = \underline{-10^4}.$$

Exercice 73 Ecriture scientifique et encadrements

a. $247 \times 10^3 = 2{,}47 \times 10^5$;
donc : $\underline{10^5 < 247 \times 10^3 < 10^6}$;

b. $12{,}08 \times 10^2 = 1{,}208 \times 10^3$;
donc : $\underline{10^3 < 12{,}08 \times 10^2 < 10^4}$;

c. $45{,}7 \times 10^{-2} = 4{,}57 \times 10^{-1}$;
donc : $\underline{10^{-1} < 45{,}7 \times 10^{-2} < 10^0}$;

d. $0{,}33 \times 10^{-3} = 3{,}3 \times 10^{-4}$;
donc : $\underline{10^{-4} < 0{,}33 \times 10^{-3} < 10^{-3}}$;

e. $0{,}004 \times 10^{-3} = 4 \times 10^{-6}$;
donc : $\underline{10^{-6} < 0{,}004 \times 10^{-3} < 10^{-5}}$;

f. $45{,}7 \times 10^{-1} = 4{,}57 \times 10^0$;
donc : $\underline{1 < 45{,}7 \times 10^{-1} < 10}$.

Exercice 74 Etablir l'égalité

a. $\dfrac{8{,}8 \times 10^5}{2{,}2 \times 10^2} = 4 \times 10^3$ donc :

$$2{,}2 \times 10^2 \times \boxed{4 \times 10^3} = 8{,}8 \times 10^5 \text{ ;}$$

b. $\dfrac{5 \times 10^2}{1{,}25 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^5$ donc :

$$1{,}25 \times 10^{-3} \times \boxed{4 \times 10^5} = 5 \times 10^2 \text{ ;}$$

c. $\dfrac{3{,}6 \times 10^6}{4 \times 10^4} = 9 \times 10$ donc :

$$4 \times 10^4 \times \boxed{9 \times 10} = 3{,}6 \times 10^6 \text{ ;}$$

d. $\dfrac{1{,}6 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-2}} = 4 \times 10^{-3}$ donc :

$$4 \times 10^{-2} \times \boxed{4 \times 10^{-3}} = 1{,}6 \times 10^{-4}.$$

Exercice 75 Goutte à goutte

a. Nombre de gouttes d'eau tombées en une heure :
$70 \times 60 = \underline{4\,200}$.

b. Volume d'une goutte d'eau :
$\dfrac{147}{4\,200} = 0{,}035 = \underline{3{,}5 \times 10^{-2} \text{ mL}}$.

c. Quantité d'eau perdue en un an :
$147 \times 24 \times 365 = 1\,287\,720$ mL
$= 1{,}287\,720 \times 10^6$ mL
$= \underline{1{,}287\,720 \text{ m}^3}$.

Exercice 76 Puissances de nombres premiers

$$\frac{2^7 \times 3^5 \times 5}{3^4 \times 2^8 \times 5^2} = \frac{3}{2 \times 5} = \underline{\frac{3}{10}}.$$

Exercice 77 Fraction irréductible

$$D = \frac{21 \times 10^{-3} \times 5^3}{3 \times 10^2 \times 2^{-3}} = \frac{3 \times 7 \times 10^{-3} \times 5^3 \times 2^3}{3 \times 10^2} = \underline{\frac{7}{100}}.$$

Exercice 78 Les différentes techniques de calcul

$$A = \frac{3}{8} - \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3 - 10}{8} = \underline{-\frac{7}{8}}\ ;$$

$$B = \frac{\frac{8}{5} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{32 - 5}{20}}{\frac{5 + 2}{5}} = \frac{27}{20} \times \frac{5}{7} = \underline{\frac{27}{28}}\ ;$$

$$C = \frac{4\left(10^{-2}\right)^3 \times 10^2}{16 \times 10^{-3}} = \frac{4 \times 10^{-4}}{16 \times 10^{-3}} = \frac{10^{-1}}{4} = \underline{\frac{1}{40}}.$$

Exercice 79 Deux expressions à simplifier

$$R = \frac{6 \times 10^{14} \times 2 \times 10^6}{5 \times \left(10^3\right)^4} = \frac{6 \times 2 \times 10^{20}}{5 \times 10^{12}} = \frac{12 \times 10^8}{5} = \underline{24 \times 10^7}\ ;$$

$$S = \frac{5 \times 10^5 \times \left(2 \times 10^{-1}\right)^3}{6 \times 10^4 \times \left(4 \times 10^{-1}\right)^2} = \frac{5 \times 8 \times 10^2}{6 \times 16 \times 10^2} = \underline{\frac{5}{12}}.$$

Exercice 80 Produit et quotient de produits

On donne :

$A = 8 \times 10^3$; $B = 0{,}5 \times 10^{-2}$; $C = 4 \times 10^4$; $D = 0{,}1 \times 10^{-1}$.

a. $A{\times}B{\times}C{\times}D = 8 \times 0{,}5 \times 4 \times 0{,}1 \times 10^3 \times 10^{-2} \times 10^4 \times 10^{-1}$

$= 1{,}6 \times 10^4 = \underline{16\ 000}$;

b. $\dfrac{A \times B}{C \times D} = \dfrac{8 \times 0{,}5 \times 10^3 \times 10^{-2}}{4 \times 0{,}1 \times 10^4 \times 10^{-1}} = \dfrac{4 \times 10}{4 \times 10^2} = 10^{-1} = \underline{0{,}1}.$

Exercice 81 Calculs de produits et de quotients

$$P = \frac{6 \times 10^3 \times 0{,}2 \times 10^{-4}}{2{,}4 \times 10^{-1} \times 2 \times 10^3} = \frac{1{,}2 \times 10^{-1}}{4{,}8 \times 10^2} = \underline{\frac{1}{4} \times 10^{-3}}\ ;$$

$$Q = \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-5} \times 5 \times 10^3}{\frac{1}{2} \times 10^2 \times 15 \times 10^{-3}} = \frac{\frac{5}{2} \times 10^{-2}}{\frac{15}{2} \times 10^{-1}} = \underline{\frac{1}{3} \times 10^{-1}}.$$

Exercice 82 Equation avec x^2

1. L'ensemble des solutions de l'équation $10^5 x^2 = 10^{-3}$ est $\{ 10^{-4}\ ;\ -10^{-4} \}$;

en effet : $10^5\left(10^{-4}\right)^2 = 10^{5-8} = 10^{-3}$,

$10^5\left(-10^{-4}\right)^2 = 10^{5-8} = 10^{-3}$.

2. L'ensemble des solutions de l'équation $5^{-4} x^2 = \left(5^3\right)^4$ est $\{ 5^8\ ;\ -5^8 \}$;

en effet : $5^{-4}\left(5^8\right)^2 = 5^{-4+16} = \left(5^3\right)^4$,

$5^{-4}\left(-5^8\right)^2 = 5^{-4+16} = \left(5^3\right)^4$.

Activités d'intégration

Exercice 83 Le beau ruban

1.

	Ruban entier	Après 1 partage	Après 2 partages	Après 3 partages	Après 4 partages	Après 5 partages	Après 6 partages
Nombre de morceaux	1	2	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$
Longueur d'un morceau (en m)	1	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{1}{16} = 0{,}062\ 5$	$\frac{1}{32} = 0{,}031\ 25$	$\frac{1}{64} = 0{,}015\ 625$

2.a. Pour obtenir au moins 60 morceaux, Angu doit effectuer 6 partages.

b. Longueur de chaque morceau, après 6 partages : $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0{,}015\ 625 = \underline{1{,}562\ 5 \times 10^{-2}\text{m}} \approx \underline{16\text{ mm}}$.

3. Après n partages, n désignant un nombre entier naturel non nul :

a. nombre de morceaux de ruban : $\underline{2^n}$;

b. longueur de chaque morceau : $\underline{\frac{1}{2^n}\text{ m}}$.

4. En repliant le ruban en trois morceaux de même longueur :

	Ruban entier	Après 1 partage	Après 2 partages	Après 3 partages	Après 4 partages	Après 5 partages	Après 6 partages
Nombre de morceaux	1	3	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$	$3^6 = 729$
Longueur d'un morceau (en m)	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81} \approx 0{,}012\ 345$	$\frac{1}{243} \approx 0{,}004\ 115$	$\frac{1}{729} \approx 0{,}001\ 371$

Pour obtenir au moins 60 morceaux, Angu doit effectuer 4 partages.

Longueur de chaque morceau, après 4 partages : $\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \approx 0{,}012\ 345 \approx \underline{1{,}234\ 5 \times 10^{-2}\text{m}} \approx \underline{12\text{ mm}}$.

Exercice 84 Atomes d'or

1.a. Diamètre d'un atome sur la photo :7,5 mm = 0,007 5 m = $\underline{7{,}5 \times 10^{-3}\text{ m}}$;

grossissement du microscope : 25 millions = 25 000 000 = $\underline{2{,}5 \times 10^{7}}$.

b. Diamètre réel d'un atome d'or : $\frac{7{,}5 \times 10^{-3}}{2{,}5 \times 10^{7}} = \underline{3 \times 10^{-10}\text{ m}} = \underline{0{,}3\text{ nm}}$.

2.a. 1 cm = 0,01 m = 1×10^{-2} m ;

nombre d'atomes qui pourraient être juxtaposés le long d'une arête de 1 cm d'un cube :

$\frac{1 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-10}} \approx \underline{3{,}3 \times 10^{7}}$ (≈ 33 millions).

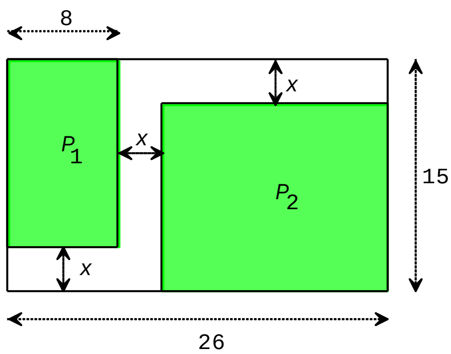
b.Si la masse de 1 cm^3 d'or est de 19,3 g et celle d'un atome d'or de $3{,}27 \times 10^{-22}$ g, alors le nombre d'atomes d'or contenu dans le cube de 1 cm d'arête est : $\frac{19{,}3}{3{,}27 \times 10^{-22}} = \frac{19{,}3}{3{,}27} \times 10^{22} \approx \underline{6 \times 10^{22}}$.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1,2	Développement, factorisation (rappels) [1 p 134]	24, 25, 26, 27, 28, 29		67
3	Identités remarquables (rappels) [2 p 134]	30, 31, 32, 33, 34, 35, 36	55, 56	62
4	Monôme, polynôme [3 p 134 et 135]	37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45	57, 58, 59	68, 69, 71, 72, 73
	Apprendre à développer, ordonner, décrire des polynômes [1 p 136]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11		
5	Addition et multiplication de polynômes [4 p 135]	46, 47, 48		63, 64, 65, 66
6	Fraction rationnelle [5 p 135]	49, 50, 51, 52, 53, 54	60, 61	69, 70
	Apprendre à simplifier une fraction rationnelle [2 p 137]	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer Aménagement d'un jardin



1.a. Longueur de P_1 : $15-x$,
aire de P_1 : $8\times(15-x) = 120-8x$.

b. Longueur de P_2 : $26-8-x = 18-x$,
largeur de P_2 : $15-x$,
aire de P_2 : $(18-x)\times(15-x) = x^2 - 33x + 270$.

c. Aire de l'ensemble des deux parcelles :

$$120-8x + x^2 - 33x + 270 = \underline{x^2 - 41x + 390},$$

aire de l'allée : $26\times 15 - \left(x^2 - 41x + 390\right) = \underline{41x - x^2}$.

2.a. pour $x = 1$ m, l'aire des deux parcelles est : $1^2 - 41\times 1 + 390 = 350$ m²,
l'aire de l'allée est : $390-350 = 40$ m² ;

pour $x = 2$ m, l'aire des deux parcelles est : $2^2 - 41\times 2 + 390 = 312$ m²,
l'aire de l'allée est : $390-312 = 78$ m² ;

pour $x = 3$ m, l'aire des deux parcelles est : $3^2 - 41\times 3 + 390 = 276$ m²,
l'aire de l'allée est : $390-276 = 114$ m².

b. Pour que l'ensemble des deux parcelles cultivées occupe les $\frac{4}{5}$ de la superficie du jardin, Charles doit choisir comme largeur de l'allée : $x = 2$ m ; en effet : pour $x = 1$, $\frac{350}{390} = \frac{35}{39} > \frac{4}{5}$; pour $x = 2$, $\underline{\frac{312}{390} = \frac{4}{5}}$; pour $x = 3$, $\frac{276}{390} = \frac{46}{65} < \frac{4}{5}$.

3. A l'échelle $\frac{1}{200}$, les dimensions du plan sont, en cm, égales à la moitié de celles, en m, de la réalité :

- le jardin, de dimensions 26 m et 15 m, est représenté par un rectangle de dimensions 13 cm et 7,5 cm ;
- la parcelle P_1, de dimensions 13 m et 16 m, est représentée par un rectangle de dimensions 6,5 cm et 8 cm ;
- la parcelle P_2, de dimensions 13 m et 8 m, est représentée par un rectangle de dimensions 6,5 cm et 4 cm ;
- la largeur de l'allée, égale à 2 m, est représentée par 1 cm.

1 Développement d'une expression

1. 1^re^ méthode : $8(7+3) = 8 \times 10 = 80$; $6(5-2) = 6 \times 3 = 18$;
2^e^ méthode : $8(7+3) = 8 \times 7 + 8 \times 3 = 56 + 24 = 80$; $6(5-2) = 6 \times 5 - 6 \times 2 = 30 - 12 = 18$.

La 2^e^ méthode est appelée développement d'un produit ou d'une somme.

2. a, b, c et d désignent des nombres réels.
a. $a(b+c) = ab + ac$ et $a(b-c) = ab - ac$.
b. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ et $(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$.

3. a. $3(y+2) = 3y + 6$; b. $2x(x+4) = 2x^2 + 8x$;
c. $(y+4)(3y+5) = 3y^2 + 17y + 20$; d. $(4x+3)(x-7) = 4x^2 - 25x - 21$.

2 Factorisation d'une expression

1. $A = 3x^2 + 6 = 3 \times x^2 + 3 \times 2 = 3\left(x^2 + 2\right)$; $B = 5y^2 - 7y = y \times 5y - y \times 7 = y(5y - 7)$.

Cette méthode de calcul est appelée factorisation d'une expression.

2. a. $6x + 9 = 3(2x + 3)$; b. $7x^2 + 2x = x(7x + 2)$; c. $4y - 4x = 4(y - x)$;
d. $4y^2 - 12y = 4y(y - 3)$; e. $6x^3 + 9x^2 - 3x = 3x\left(2x^2 + 3x - 1\right)$.

3. $C = (x+4)(x-3) + 5(x+4)$.
a. $(x+4)$ est le facteur commun aux deux termes de cette somme.
b. $C = (x+4)(x-3) + 5(x+4) = (x+4)[(x-3)+5] = (x+4)(x-3+5) = (x+4)(x+2)$.

4. a. $(x-2)(x+5) + 8(x-2) = (x-2)[(x+5)+8] = (x-2)(x+5+8) = (x-2)(x+13)$;
b. $(2x+5)(3x-1) - (2x+5)(2x-6) = (2x+5)[(3x-1) - (2x-6)] = (2x+5)(3x-1-2x+6) = (2x+5)(x+5)$.

3 Les identités remarquables

1.a. $\underline{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = \underline{a^2 + 2ab + b^2}$;
b. $\underline{(a-b)^2} = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = \underline{a^2 - 2ab + b^2}$;
c. $\underline{(a+b)(a-b)} = a^2 - ab + ba - b^2 = \underline{a^2 - b^2}$.

2.a. $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$; b. $(2x-7)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = 4x^2 - 28x + 49$;
c. $(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$; d. $(2x-6)(2x+6) = (2x)^2 - 6^2 = 4x^2 - 36$.

3.a. A, B, D, F et G ne sont pas des identités remarquables ;

$C = 49 + 14x + x^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times x + x^2 = (7+x)^2$; $E = 16 + 24x^2 + 9x^4 = 4^2 + 2 \times 4 \times \left(3x^2\right) + \left(3x^2\right)^2 = \left(4 + 3x^2\right)^2$;

$H = 49 - 28x + 4x^2 = 7^2 - 2 \times 7 \times (2x) + (2x)^2 = (7 - 2x)^2$; $I = 4x^4 - 20x^2 + 25 = \left(2x^2\right)^2 - 2 \times \left(2x^2\right) \times 5 + 5^2 = \left(2x^2 - 5\right)^2$.

b. K n'est pas une identité remarquable.
$J = x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x+2)(x-2)$; $L = 64 - 4x^2 = 8^2 - (2x)^2 = (8+2x)(8-x)$;

$M = 4x^4 - 100 = \left(2x^2\right)^2 - 10^2 = \left(2x^2 + 10\right)\left(2x^2 - 10\right)$.

4 Les polynômes

On considère le polynôme $5x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 7$, de variable x et de degré 4.

$-2x^3$ est appelé monôme de degré 3. Le coefficient de ce monôme de degré 3 est égal à –2.
7 est le terme constant du polynôme.

1.a. $4x^2$ est le monôme de degré 2 de ce polynôme.

b. 5 est le coefficient du monôme de degré 4 de ce polynôme.

2.

Polynôme	Degré du polynôme	Monôme de degré 2	Coefficient du monôme de degré 1	Terme constant
$-x^2 + 2x - 5$	2	$-x^2$	2	–5
$x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1$	5	$3x^2$	0	–1
$2x^4 + x^3 + 6x + 8$	4		6	8

3. Valeurs prises par chacun des polynômes pour certaines valeurs de x :

x	0	1	–1	2
$-x^2 + 2x - 5$	–5	–4	–8	–5
$x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1$	–1	–1	5	11
$2x^4 + x^3 + 6x + 8$	8	17	3	60

5 Opérations sur les polynômes

Partie A : Observer sur des exemples

	Situation 1	Situation 2	Situation 3
	$A = 2x + 1$ $B = 3x^2 + 4x + 2$	$A = -4x^3 + x + 1$ $B = 4x^3 + x^2$	$A = x^5 - 4x$ $B = 2x^2 + 3$
Degré de A	1	3	5
Degré de B	2	3	2
$A+B$	$(2x+1) + (3x^2 + 4x + 2)$ = $3x^2 + 6x + 3$	$(-4x^3 + x + 1) + (4x^3 + x^2)$ = $x^2 + x + 1$	$(x^5 - 4x) + (2x^2 + 3)$ = $x^5 + 2x^2 - 4x + 3$
Degré de $A+B$	2	2	5
$A \times B$	$(2x+1)(3x^2 + 4x + 2)$ = $6x^3 + 11x^2 + 8x + 2$	$(-4x^3 + x + 1)(4x^3 + x^2)$ = $-16x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 5x^3 + x^2$	$(x^5 - 4x)(2x^2 + 3)$ = $2x^7 + 3x^5 - 8x^3 - 12x$
Degré de $A \times B$	3 (=1+2)	6 (=3+3)	7 (=5+2)

Partie B : Conjecturer des propriétés

Propriété 1 *Lorsqu'on fait la somme de deux polynômes, le degré du polynôme obtenu est inférieur ou égal au degré du polynôme initial du plus haut degré.*

Propriété 2 *Lorsqu'on fait le produit de deux polynômes, le degré du polynôme obtenu est égal à la somme des degrés des deux polynômes initiaux.*

6 Fractions rationnelles

On donne les expressions : $A = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x - 3}$; $B = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 8}{x^2 + x - 6}$.

1. Valeurs prises par A et B pour certaines valeurs de x :

x	0	1	–1	4
A	$-\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2-4+1}{1-3} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2+4+1}{-1-3} = -\dfrac{7}{4}$	$\dfrac{32-16+1}{4-3} = 17$
B	$-\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{3-2+8}{1+1-6} = -\dfrac{9}{4}$	$\dfrac{-3-2+8}{1-1-6} = -\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{192-32+8}{16+4-6} = 12$

2.a. Il est impossible de calculer B pour $x = 2$, car le dénominateur de B s'annule pour cette valeur de x.

b. Il est impossible de calculer A pour $x = 3$, car le dénominateur de A s'annule pour cette valeur de x.

3.a. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et $3x^2 - 3x = 3x(x-1)$; donc : $C = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 3x} = \underline{\dfrac{(x-1)^2}{3x(x-1)}}$.

b. $(x - 1)$ est le facteur commun au numérateur et au dénominateur de C.

c. Lorsque $x \neq 1$, on a : $C = \underline{\dfrac{x-1}{3x}}$.

d. Pour $x = 8$, $C = \dfrac{8-1}{3 \times 8} = \underline{\dfrac{7}{24}}$.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à développer, ordonner, décrire des polynômes

Exercice 1

Pour le polynôme $A = 6x^3 + x^2 - 5x + 7$,
- x est sa variable, 3 est son degré,
- 6 est le coefficient de son monôme de degré 3,
- 7 est son terme constant ;

Pour le polynôme $B = 9y^5 - y^4 - 2y^3 + 8y - 2$,
- y est sa variable, 5 est son degré,
- –2 est le coefficient de son monôme de degré 3,
- –2 est son terme constant ;

Pour le polynôme $C = x^6 + 3x^4 - 5x^3 + 1$,
- x est sa variable, 6 est son degré,
- –5 est le coefficient de son monôme de degré 3,
- 1 est son terme constant.

Exercice 2

Pour le polynôme $A = -y^4 + 10y^3 + 8y^2 - 1$,
- y est sa variable, 4 est son degré,
- 10 est le coefficient de son monôme de degré 3,
- –1 est son terme constant ;

Pour le polynôme $B = 7x^5 - 13x^3 - 2x^2 + 8x$,
- x est sa variable, 5 est son degré,
- –13 est le coefficient de son monôme de degré 3,
- 0 est son terme constant ;

Pour le polynôme $C = y^7 - y^5 - 3y^4 + 2y^2 - 7$,
- y est sa variable, 7 est son degré,
- 0 est le coefficient de son monôme de degré 3,
- –7 est son terme constant.

Exercice 3

a. $5(2 + x) = \underline{5x + 10}$;

b. $-4(1 - 3x) = \underline{12x - 4}$;

c. $y(6 + y) = \underline{y^2 + 6y}$;

d. $-6x\left(\dfrac{x}{2} - 4\right) = \underline{-3x^2 + 24x}$;

e. $2x\left(2x^2 - 3\right) = \underline{4x^3 - 6x}$;

f. $-4y^2(8 - 2y) = \underline{8y^3 - 32y^2}$.

Exercice 4

a. $4(x + 1) - 6x = \underline{-2x + 4}$;

b. $-3\left(12 - y^2\right) + 6y^2 = \underline{9y^2 - 36}$;

c. $y(1 + 6y) + 8y = \underline{6y^2 + 9y}$;

d. $3x\left(5 - \dfrac{2x}{3}\right) + 2x^2 = \underline{15x}$;

e. $3x^3 + 2x^2(5 - 3x) = \underline{-3x^3 + 10x^2}$;

f. $7x\left(x^2 - 2\right) + 10x^2 = \underline{7x^3 + 10x^2 - 14x}$.

Exercice 5

a. $(x + 6)(x + 3) = \underline{x^2 + 9x + 18}$;

b. $(5 + y)(y - 2) = \underline{y^2 + 3y - 10}$;

c. $(3y - 1)(3y + 2) = \underline{9y^2 + 3y - 2}$;

d. $4(x + 5)(x - 6) = \underline{4x^2 - 4x - 120}$;

e. $(5y + 3)\left(2y^2 - 1\right) = \underline{10y^3 + 6y^2 - 5y - 3}$;

f. $(x + 7)\left(x^2 - 3x\right) = \underline{x^3 + 4x^2 - 21x}$.

Exercice 6

a. $(x+7)^2 = \underline{x^2+14x+49}$;

b. $(x-3)^2 = \underline{x^2-6x+9}$;

c. $(3y+4)^2 = \underline{9y^2+24y+16}$;

d. $(4y-7)^2 = \underline{16y^2-56y+49}$;

e. $(5-4x)^2 = \underline{16x^2-40x+25}$;

f. $\left(y^2-2\right)^2 = \underline{y^4-4y^2+4}$.

Exercice 7

a. $(x+6)(x-6) = \underline{x^2-36}$;

b. $(4y+3)(4y-3) = \underline{16y^2-9}$;

c. $(7x+1)(7x-1) = \underline{49x^2-1}$;

d. $(1-7y)(1+7y) = \underline{-49y^2+1}$;

e. $(3+2x)(3-2x) = \underline{-4x^2+9}$;

f. $(2y-6)(2y+6) = \underline{4y^2-36}$.

Exercice 8

a. $(4+x)(x-4) = \underline{x^2-16}$;

b. $(3-5y)(5y+3) = \underline{-25y^2+9}$;

c. $\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right) = \underline{x^4-16}$;

d. $\left(8-3y^2\right)\left(8+3y^2\right) = \underline{-9y^4+64}$;

e. $\left(\sqrt{3}+2x\right)\left(\sqrt{3}-2x\right) = \underline{-4x^2+3}$;

f. $\left(\frac{x}{2}+3\right)\left(\frac{x}{2}-3\right) = \underline{\frac{x^2}{4}-9}$.

Exercice 9

a. $(2x+3)^2 = \underline{4x^2+12x+9}$.

b. $(3x-2)^2 = \underline{9x^2-12x+4}$.

c. On en déduit que :

$A = (2x+3)^2 + (3x-2)^2 = 4x^2+12x+9+9x^2-12x+4$

$= \underline{13x^2+13}$.

Exercice 10

a. $A = (5x+2)^2 = \underline{25x^2+20x+4}$.

b. $B = (5x-2)^2 = \underline{25x^2-20x+4}$.

c. On en déduit que :

$A+B = \underline{50x^2+8}$ et $A-B = \underline{40x}$.

Exercice11

a. $A = (3-4x)^2 = \underline{16x^2-24x+9}$,

$B = \left(2x^2+3\right)(x-7) = \underline{2x^3-14x^2+3x-21}$.

b. $A+B = \underline{2x^3+2x^2-21x-12}$;

$A-B = \underline{-2x^3+30x^2-27x+30}$;

$A\times B = \left(16x^2-24x+9\right)\left(2x^3-14x^2+3x-21\right)$

$= 32x^5-224x^4+48x^3-336x^2-48x^4+336x^3$

$-72x^2+504x+18x^3-126x^2+27x-189$

$= \underline{32x^5-272x^4+384x^3-534x^2+531x-189}$.

2 Apprendre à factoriser un polynôme, à simplifier une fraction

Exercice 12

$A = 6x^2+6 = \underline{6\left(x^2+1\right)}$;

$B = 10y-5 = \underline{5(2y-1)}$;

$C = 2x^3-5x = \underline{x\left(2x^2-5\right)}$;

$D = 6y^4-9y = \underline{3y\left(2y^3-3\right)}$.

Exercice 13

$A = 2x^3-4x^2+2x = 2x\left(x^2-2x+1\right) = \underline{2x(x-1)^2}$;

$B = -7y^3+14y^2-35y = \underline{-7y\left(y^2-2y+5\right)}$;

$C = x^4-4x^2 = x^2\left(x^2-4\right) = \underline{x^2(x+2)(x-2)}$;

$D = 5y^4-20y^2-10y = \underline{5y\left(y^3-4y-2\right)}$.

Exercice 14

$A = 3x(x-4) + 3x(4x+1) = \underline{3x(5x-3)}$;

$B = y(y+1) - (y+1)(1-4y) = \underline{(y+1)(5y-1)}$;

$C = (y-1)(2y+3) - 2(y-1) = \underline{(y-1)(2y+1)}$.

Exercice 15

$A = (x+2)(3x-1) + (x+2)(2x+3)$
$\quad = (x+2)\left[(3x-1) + (2x+3)\right] = \underline{(x+2)(5x+2)}$;

$B = (6y+7)(y+5) - (y+5)(8-3y)$
$\quad = (y+5)\left[(6y+7) - (8-3y)\right] = \underline{(y+5)(9y-1)}$;

$C = (3x+5)(x-6) + (3x+5)(7-2x)$
$\quad = (3x+5)\left[(x-6) + (7-2x)\right] = \underline{(3x+5)(-x+1)}$.

Exercice 16

$A = (2x+3)^2 - 7(2x+3) = (2x+3)\left[(2x+3) - 7\right]$
$\quad = \underline{(2x+3)(2x-4)}$;

$B = (1+y)^2 + 5(1+y) = (1+y)\left[(1+y) + 5\right]$
$\quad = \underline{(1+y)(y+6)}$;

$C = (2y-5)^2 - (2y-5)(y+4) = (2y-5)\left[(2y-5) - (y+4)\right]$
$\quad = \underline{(2y-5)(y-9)}$.

Exercice 17

$A = x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = \underline{(x+2)^2}$;

$B = y^2 + 12y + 36 = y^2 + 2 \times y \times 6 + 6^2 = \underline{(y+6)^2}$;

$C = 9 + 6x + x^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times x + x^2 = \underline{(3+x)^2}$;

$D = 9y^2 + 12y + 4 = (3y)^2 + 2 \times 3y \times 2 + 2^2 = \underline{(3y+2)^2}$.

Exercice 18

$A = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = \underline{(x-3)^2}$;

$B = y^2 - 10y + 25 = y^2 - 2 \times y \times 5 + 5^2 = \underline{(y-5)^2}$;

$C = 9x^2 - 18x + 9 = (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 3 + 3^2 = \underline{(3x-3)^2}$;

$D = 4y^4 - 4y^2 + 1 = \left(2y^2\right)^2 - 2 \times \left(2y^2\right) \times 1 + 1^2 = \underline{\left(2y^2 - 1\right)^2}$.

Exercice 19

$A = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = \underline{(x+2)(x-2)}$;

$B = 9y^2 - 4 = (3y)^2 - 2^2 = \underline{(3y+2)(3y-2)}$;

$C = 1 - x^2 = 1^2 - x^2 = \underline{(1+x)(1-x)}$;

$D = 25y^2 - 49 = (5y)^2 - 7^2 = \underline{(5y+7)(5y-7)}$.

Exercice 20

$A = (x+3)^2 - 16 = (x+3)^2 - 4^2 = \left[(x+3) + 4\right]\left[(x+3) - 4\right]$
$\quad = \underline{(x+7)(x-1)}$;

$B = (2y+1)^2 - 9 = (2y+1)^2 - 3^2$
$\quad = \left[(2y+1) + 3\right]\left[(2y+1) - 3\right] = \underline{(2y+4)(2y-2)}$;

$C = 36 - (x-5)^2 = 6^2 - (x-5)^2 = \left[6 + (x-5)\right]\left[6 - (x-5)\right]$
$\quad = \underline{(x+1)(11-x)}$;

$D = \left(y^2+4\right)^2 - 4y^4 = \left(y^2+4\right)^2 - \left(2y^2\right)^2$
$\quad = \left[\left(y^2+4\right) + \left(2y^2\right)\right]\left[\left(y^2+4\right) - \left(2y^2\right)\right]$
$\quad = \underline{\left(3y^2+4\right)\left(-y^2+4\right)}$.

Exercice 21

$A = \dfrac{5x(2x-5)}{x(7x+1)} = \underline{\dfrac{5(2x-5)}{7x+1}}$, pour $x \neq 0$;

$B = \dfrac{3x^2(3-x)}{6x^2\left(5x^2+8\right)} = \underline{\dfrac{3-x}{2\left(5x^2+8\right)}}$, pour $x \neq 0$;

$C = \dfrac{7x(3x+8)}{(x-4)(3x+8)} = \underline{\dfrac{7x}{x-4}}$, pour $x \neq -\dfrac{8}{3}$;

$D = \dfrac{\left(x^2+1\right)(9x-5)}{\left(x^2-6\right)\left(x^2+1\right)} = \underline{\dfrac{9x-5}{x^2-6}}$.

Exercice 22

a. $A = 4(2x+3) - 7x(2x+3) = \underline{(4-7x)(2x+3)}$;

$B = (2x+3)(x+1) + (2x+3)^2 = (2x+3)\left[(x+1) + (2x+3)\right]$
$\quad = \underline{(2x+3)(3x+4)}$.

b. $F = \dfrac{4[2x+3] - 7x(2x+3)}{(2x+3)(x+1) + (2x+3)^2} = \dfrac{(4-7x)(2x+3)}{(2x+3)(3x+4)}$
$\quad = \underline{\dfrac{4-7x}{3x+4}}$, pour $x \neq -\dfrac{3}{2}$.

Exercice 23

a. $A = (2x+1)(5x-2) - (2x+1)(2x-6)$
$\quad = (2x+1)\left[(5x-2) - (2x-6)\right] = \underline{(2x+1)(3x+4)}$;

$B = (3x+4)^2 + (3x+4)(x-2) = (3x+4)\left[(3x+4) + (x-2)\right]$
$\quad = (3x+4)(4x+2)$
$\quad = \underline{2(3x+4)(2x+1)}$;

$C = 16x^2 + 16x + 4 = (4x)^2 + 2 \times (4x) \times 2 + 2^2 = (4x+2)^2$
$\quad = \underline{4(2x+1)^2}$.

b. $F = \dfrac{A}{B} = \dfrac{(2x+1)(3x+4)}{2(3x+4)(2x+1)} = \underline{\dfrac{1}{2}}$, pour $x \neq -\dfrac{4}{3}$ et $x \neq -\dfrac{1}{2}$;

$G = \dfrac{B}{C} = \dfrac{2(3x+4)(2x+1)}{4(2x+1)^2} = \underline{\dfrac{(3x+4)}{2(2x+1)}}$;

$H = \dfrac{A}{C} = \dfrac{(2x+1)(3x+4)}{4(2x+1)^2} = \underline{\dfrac{(3x+4)}{4(2x+1)}}$.

Activités d'application

Expressions littérales

Exercice 24

$A = 7x + 6 - (9y + 15) + 4y - 3x = 7x + 6 - 9y - 15 + 4y - 3x$
$= \underline{4x - 5y - 9}$;

$B = 14 - \left(8a^2 - 15a\right) - 6a + 7 = 14 - 8a^2 + 15a - 6a + 7$
$= \underline{-8a^2 + 9a + 21}$;

$C = -3y + \left(20y - x^2 + 3\right) - 12 = -3y + 20y - x^2 + 3 - 12$
$= \underline{-x^2 + 17y - 9}$;

$D = 6ab - 7b(-a) + 12a - (6b + 3) = 6ab + 7ba + 12a - 6b - 3$
$= \underline{13ab + 12a - 6b - 3}$.

Exercice 25

a. $7(3y - 6) = \underline{21y - 42}$;

b. $x(4 - 5x) = \underline{-5x^2 + 4x}$;

c. $2a(-3a + 6) = \underline{-6a^2 + 12a}$;

d. $(7b - 2)(-5) = \underline{-35b + 10}$.

Exercice 26

a. $(x + 5)(6 + x) = 6x + x^2 + 30 + 5x = \underline{x^2 + 11x + 30}$;

b. $(2y + 3)(3 - y) = 6y - 2y^2 + 9 - 3y = \underline{-2y^2 + 3y + 9}$;

c. $(4b - 7)(7b + 5) = 28b^2 + 20b - 49b - 35$
$= \underline{28b^2 - 29b - 35}$;

d. $\left(\sqrt5 - y^2\right)\left(y - \sqrt5\right) = \sqrt5 y - 5 - y^3 + \sqrt5 y^2$
$= \underline{-y^3 + \sqrt5 y^2 + \sqrt5 y - 5}$.

Exercice 27

a. $5y - 10 = \underline{5(y - 2)}$;

b. $9a - 3b = \underline{3(3a - b)}$;

c. $6x^2 - x^3 = \underline{x^2(6 - x)}$;

d. $a - 6a^2 + 7ab = \underline{a(-6a + 7b + 1)}$.

Exercice 28

a. $(x + 1)(x + 3) - 2(x + 1) = (x + 1)[(x + 3) - 2]$
$= \underline{(x + 1)^2}$;

b. $5x(x + 7) + x^2(x + 7) = \underline{x(x + 7)(x + 5)}$;

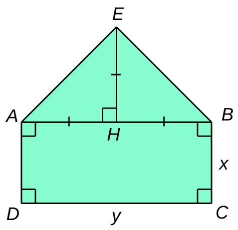
c. $(3x - 2)(x + 4) - x(3x - 2) = (3x - 2)(x + 4 - x)$
$= \underline{4(3x - 2)}$;

d. $-2x(x + 8) - (x + 2)(x + 8) = (x + 8)[-2x - (x + 2)]$
$= \underline{(x + 8)(-3x - 2)}$.

Exercice 29

a. $AH = HB = HE = \underline{\dfrac{y}{2}}$.

b. $AE = \sqrt{AH^2 + HE^2}$
$= \sqrt{\left(\dfrac{y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2}$
$= \sqrt{2 \times \dfrac{y^2}{4}} = \underline{\dfrac{\sqrt2}{2} y}$.



c. Périmètre de $AEBCD$:
$2 \times \dfrac{\sqrt2}{2} y + 2x + y = \underline{2x + \left(\sqrt2 + 1\right) y}$.

d. Aire de AHE : $\dfrac12 \left(\dfrac{\sqrt2}{2} y\right)^2 = \underline{\dfrac{y^2}{4}}$;

Aire de $AEBCD$: $xy + 2\left(\dfrac{y^2}{4}\right) = \underline{\dfrac{y^2}{2} + xy}$.

c. Si $x = 2$ et $y = 6$, l'aire de $AEBCD$ est égale à :
$\dfrac{6^2}{2} + 2 \times 6 = \underline{30 \text{ cm}^2}$.

Identités remarquables

Exercice 30

a. $(a+6)^2 = \underline{a^2 + 12a + 36}$;

b. $(x-5)^2 = \underline{x^2 - 10x + 25}$;

c. $(2b+3)^2 = \underline{4b^2 + 12b + 9}$;

d. $(8-y)^2 = \underline{64 - 16y + y^2}$;

e. $\left(x^2+3\right)^2 = \underline{x^4 + 6x^2 + 9}$;

f. $(-6+2a)^2 = \underline{36 - 24a + 4a^2}$.

Exercice 31

a. $(a+5)(a-5) = \underline{a^2 - 25}$;

b. $(7-x)(7+x) = \underline{49 - x^2}$;

c. $(4b-3)(4b+3) = \underline{16b^2 - 9}$;

d. $(1+3y)(3y-1) = \underline{9y^2 - 1}$.

Exercice 32

a. $x^2 - 6x + 9 = \underline{(x-3)^2}$;

b. $4 + 4a + a^2 = \underline{(2+a)^2}$;

c. $4y^2 + 8y + 4 = 4\left(y^2 + 2y + 1\right) = \underline{4(y+1)^2}$;

d. $16 - 9b^2 = 4^2 - (3b)^2 = \underline{(4+3b)(4-3b)}$.

Exercice 33

a. $4x^2 + 9y^2 + 12xy = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times (3y) + (3y)^2$
$= \underline{(2x+3y)^2}$;

b. $-36a + 36 + 9a^2 = 9\left(a^2 - 4a + 4\right) = \underline{9(a-2)^2}$;

c. $8y^2 + 16 + y^4 = \left(y^2\right)^2 + 2 \times y^2 \times 4 + 4^2 = \underline{\left(y^2+4\right)^2}$;

d. $-x^4 + 100 = 10^2 - \left(x^2\right)^2 = \underline{\left(10 + x^2\right)\left(10 - x^2\right)}$.

Exercice 34

a. $(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$;

b. $(3a+6)^2 = 9a^2 + 36a + 36$;

c. $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$;

d. $(2-3b)^2 = 4 - 12b + 9b^2$.

Exercice 35

a. $3x^2 - 48 = 3\left(x^2 - 16\right) = \underline{3(x+4)(x-4)}$;

b. $28 - 7a^2 = 7\left(4 - a^2\right) = \underline{7(2+a)(2-a)}$;

c. $5y^2 + 10y + 5 = 5\left(y^2 + 2y + 1\right) = \underline{5(y+1)^2}$;

d. $27 - 72b + 48b^2 = 3\left(9 - 24b + 16b^2\right) = \underline{3(3-4b)^2}$.

Exercice 36

a. Si le nombre choisi est 7, alors
- on retranche 2 : $7-2 = 5$,
- on élève au carré : $5^2 = 25$,
- on ajoute le quadruple du nombre choisi : $25+4\times7 = 53$,
- on retranche 4 : $53-4 = 49$.

b. On obtient le carré du nombre choisi.

c. Si le nombre choisi est x, alors
- on retranche 2 : $x-2$,
- on élève au carré : $(x-2)^2$,
- on ajoute le quadruple du nombre choisi : $(x-2)^2 + 4x$,
- on retranche 4 : $(x-2)^2 + 4x - 4 = x^2 - 4x + 4 + 4x - 4$.

On obtient : x^2.

Exercice 37

a. $x^2 + \frac{2}{x} + 6$ n'est pas un polynôme ;

b. $7y^2 - y$ est un polynôme de degré 2 ;

c. $2x^3 + 7x^2 - \sqrt{x} + 4$ n'est pas un polynôme ;

d. $-a^3 - 3$ est un polynôme de degré 3.

Exercice 38

Pour le polynôme $A = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 2$,
x est sa variable, 3 est son degré,
–3 est le coefficient de son monôme de degré 2,
2 est son terme constant ;

Pour le polynôme $B = 2y^6 - 3y^5 + y^2 + 3y - 2$,
y est sa variable, 6 est son degré,
1 est le coefficient de son monôme de degré 2,
–2 est son terme constant ;

Pour le polynôme $C = a^4 + 3a^3 - a^2$,
a est sa variable, 4 est son degré,
–1 est le coefficient de son monôme de degré 2,
0 est son terme constant ;

Pour le polynôme $D = -y^2 + 7y + 25$,
y est sa variable, 2 est son degré,
–1 est le coefficient de son monôme de degré 2,
25 est son terme constant.

Exercice 39

a. $(-1)\left(6x^2\right) = -6x^2$ est un monôme de degré 2 ;

b. $y \times y \times 5 \times y^2 = 5y^4$ est un monôme de degré 4 ;

c. $-x^2 \times 7x^3 = -7x^5$ est un monôme de degré 5.

Exercice 40

- $A = 3x - 8 + 4x^2 - (5x + 3) - 2^2$
  $= \underline{4x^2 - 2x - 15}$;
  A est un polynôme de degré 2 ;
- $B = 12 - 7y + 6y^2 - \left(2y + 8y^3\right) + 4y(-y)$
  $= \underline{-8y^3 + 2y^2 - 9y + 12}$;
  B est un polynôme de degré 3 ;
- $C = -x + 7x^2 - 6 - 3 \times 3x^3 + 6x + 5(-1)$
  $= \underline{-9x^3 + 7x^2 + 5x - 11}$;
  C est un polynôme de degré 3.

Exercice 41

a. $A = 5(x + 2) - 4x + 3$
$= 5x + 10 - 4x + 3 = \underline{x + 13}$;

$B = 8(3 - x) - 5x^2(x - 2)$
$= 24 - 8x - 5x^3 + 10x^2 = \underline{-5x^3 + 10x^2 - 8x + 24}$;

$C = (2x - 5)(3 + 4x) + 6\left(3 - x^2\right)$
$= 6x + 8x^2 - 15 - 20x + 18 - 6x^2 = \underline{2x^2 - 14x + 3}$;

$D = 4x(3 + x) - (1 - 3x)\left(x^2 + 1\right)$
$= 12x + 4x^2 - \left(x^2 + 1 - 3x^3 - 3x\right) = \underline{3x^3 + 3x^2 + 15x - 1}$.

b.

	$x = 1$	$x = -1$
$A = x + 13$	14	12
$B = -5x^3 + 10x^2 - 8x + 24$	21	47
$C = 2x^2 - 14x + 3$	–9	19
$D = 3x^3 + 3x^2 + 15x - 1$	20	–16

Exercice 42

$A = (x + 5)^2 - \left(3x^3 - 5x + 13\right)$
$= x^2 + 10x + 25 - 3x^3 + 5x - 13 = \underline{-3x^3 + x^2 + 15x + 12}$;

$B = (7 - x)^2 - (x - 1)(x + 1)$
$= 49 - 14x + x^2 - x^2 + 1 = \underline{-14x + 50}$;

$C = (2x - 3)(2x + 3) - (6 - x)^2$
$= 4x^2 - 9 - \left(36 - 12x + x^2\right) = \underline{3x^2 + 12x - 45}$;

$D = \left(x^2 - 1\right)^2 + \left(2x^2 - 1\right)\left(2x^2 + 1\right)$
$= x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^4 - 1 = \underline{5x^4 - 2x^2}$.

Exercice 43

$A = 2x^4 - 4x^3 + 8x = \underline{2x\left(x^3 - 2x^2 + 4\right)}$;

$B = 9x^5 - 6x^4 + 3x^2 = \underline{3x^2\left(3x^3 - 2x^2 + 1\right)}$;

$C = (2x - 1)(7x + 3) + (2x - 1)(2 - x)$
$= (2x - 1)(7x + 3 + 2 - x) = \underline{(2x - 1)(6x + 5)}$;

$D = (5x + 3)^2 + (7 - 2x)(5x + 3)$
$= (5x + 3)(5x + 3 + 7 - 2x) = \underline{(5x + 3)(3x + 10)}$.

Exercice 44

a. $16x^2 - 9 = (4x)^2 - 3^2 = \underline{(4x+3)(4x-3)}$.

b. $E = 16x^2 - 9 + (4x+3)(6-2x)$
$= (4x+3)(4x-3+6-2x) = \underline{(4x+3)(2x+3)}$.

c. $E = 8x^2 + 12x + 6x + 9 = \underline{8x^2 + 18x + 9}$.

d. Pour $x = 2$, $E = 32+36+9 = \underline{77}$;
pour $x = -1$, $E = 8-18+9 = \underline{-1}$.

Exercice 45

$A = 4x^2 - 4x + 1 + (2x-1)(5-x) = (2x-1)^2 + (2x-1)(5-x)$
$= (2x-1)(2x-1+5-x) = \underline{(2x-1)(x+4)}$;

$B = (2x+3)(x+4) + 4x^2 + 12x + 9$
$= (2x+3)(x+4) + (2x+3)^2 = (2x+3)(x+4+2x+3)$
$= \underline{(2x+3)(3x+7)}$;

$C = (4x-5)^2 + 16x^2 - 25 = (4x-5)^2 + (4x+5)(4x-5)$
$= (4x-5)(4x-5+4x+5) = \underline{8x(4x-5)}$;

$D = (1-3x)(3-x) - 9x^2 + 1$
$= (1-3x)(3-x) + (1+3x)(1-3x) = (1-3x)(3-x+1+3x)$
$= \underline{(1-3x)(2x+4)}$.

Exercice 46

a. Si $A = 3x^2 - 8x + 5$ et $B = x^3 + 2x - 4$,
alors : $A+B = \underline{x^3 + 3x^2 - 6x + 1}$;

b. Si $A = -2x^5 + 3x^2 - 12$ et $B = 7x^4 + 9x^3 + 6x + 7$,
alors : $A+B = \underline{-2x^5 + 7x^4 + 9x^3 + 3x^2 + 6x - 5}$;

c. Si $A = 2x^2 + 13 - 4x^3 + x$ et $B = 6x^2 - 4 + 3x$,
alors : $A+B = -4x^3 + 8x^2 + 4x + 9$.

Exercice 47

a. $A = (4x-3)(4x+3) - 6(x^2-3)$
$= 16x^2 - 9 - 6x^2 + 18 = \underline{10x^2 + 9}$;

$B = (2x-1)^2 + (x+7)(2x-1)$
$= 4x^2 - 4x + 1 + 2x^2 - x + 14x - 7 = \underline{6x^2 + 9x - 6}$.

b. $A+B = (10x^2+9) + (6x^2+9x-6) = \underline{16x^2 + 9x + 3}$.

c. $A-B = (10x^2+9) - (6x^2+9x-6) = \underline{4x^2 - 9x + 15}$.

Exercice 48

1.a. $A = x^2 - 3x$ est un polynôme de degré 2 ;
$B = 3x - 4$ est un polynôme de degré 1 ;
donc $A \times B$ est un polynôme de degré 3.

b. $A = 3x^3 - x^2 + 2$ est un polynôme de degré 3 ;
$B = -x^2 + 1$ est un polynôme de degré 2 ;
donc $A \times B$ est un polynôme de degré 5.

2.a. $A \times B = (x^2 - 3x) \times (3x - 4) = 3x^3 - 4x^2 - 9x^2 + 12x$
$A \times B = \underline{3x^3 - 13x^2 + 12x}$;

b. $A \times B = (3x^3 - x^2 + 2) \times (-x^2 + 1)$
$A \times B = -3x^5 + 3x^3 + x^4 - x^2 - 2x^2 + 2$
$A \times B = \underline{-3x^5 + x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2}$.

Exercice 49

Les valeurs interdites de $\dfrac{4x^2+5x-3}{x^2-3x+2}$ sont 1 et 2, qui annulent le dénominateur.

Exercice 50

a. $4x^2-8x=\underline{4x(x-2)}$.

b. Les valeurs interdites de $\dfrac{x^2+3}{4x^2-8x}$ sont celles qui annulent le dénominateur : 0 et 2.

Exercice 51

$A=\dfrac{x(x-4)}{x(6x+2)}=\underline{\dfrac{x-4}{6x+2}}$, pour $x\neq 0$;

$B=\dfrac{3x(5-2x)}{3x^2(5x+4)}=\underline{\dfrac{5-2x}{x(5x+4)}}$;

$C=\dfrac{3x^2(x-6)}{(x-6)(2x+7)}=\underline{\dfrac{3x^2}{2x+7}}$, pour $x\neq 6$;

$D=\dfrac{(x^2-1)(7x-5)}{(x^2+4)(1-x^2)}=\underline{\dfrac{5-7x}{x^2+4}}$, pour $x\neq -1$ et $x\neq 1$.

Exercice 52

a. $A=\dfrac{5x^2-5x}{4x-4}=\underline{\dfrac{5x(x-1)}{4(x-1)}}$;

$B=\dfrac{2x^3+x^2+5x}{3x^2-2x}=\underline{\dfrac{x(2x^2+x+5)}{x(3x-2)}}$;

$C=\dfrac{x^2+3x}{x^2-9}=\underline{\dfrac{x(x+3)}{(x+3)(x-3)}}$;

$D=\dfrac{4x^2-4x+1}{10x^2-5x}=\underline{\dfrac{(2x-1)^2}{5x(2x-1)}}$.

b. $A=\dfrac{5x^2-5x}{4x-4}=\underline{\dfrac{5x}{4}}$, pour $x\neq 1$;

$B=\dfrac{2x^3+x^2+5x}{3x^2-2x}=\underline{\dfrac{2x^2+x+5}{3x-2}}$, pour $x\neq 0$;

$C=\dfrac{x^2+3x}{x^2-9}=\underline{\dfrac{x}{x-3}}$, pour $x\neq -3$;

$D=\dfrac{4x^2-4x+1}{10x^2-5x}=\underline{\dfrac{2x-1}{5x}}$, pour $x\neq\dfrac{1}{2}$.

Exercice 53

a. $A=-4x^2+49=7^2-(2x)^2=\underline{(7+2x)(7-2x)}$;

$B=4x^2-28x+49=(2x)^2-2\times 2x\times 7+7^2=\underline{(2x-7)^2}$.

b. $F=\dfrac{-4x^2+49}{4x^2-28x+49}=\dfrac{(7+2x)(7-2x)}{(7-2x)(7-2x)}$

$=\underline{\dfrac{7+2x}{7-2x}}$, pour $x\neq\dfrac{7}{2}$.

Exercice 54

a. $F=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\underline{\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}$;

$G=\dfrac{9x^2-6x+1}{9x^2-1}=\underline{\dfrac{(3x-1)^2}{(3x+1)(3x-1)}}$;

$H=\dfrac{-25+4x^2}{-4x^2+20x-25}=\underline{\dfrac{(2x+5)(2x-5)}{-(2x-5)^2}}$;

$I=\dfrac{16-25x^2}{25x^2-40x+16}=\underline{\dfrac{(4+5x)(4-5x)}{(5x-4)^2}}$.

b. $F=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\underline{\dfrac{x+1}{x-1}}$, pour $x\neq -1$;

$G=\dfrac{9x^2-6x+1}{9x^2-1}=\underline{\dfrac{3x-1}{3x+1}}$, pour $x\neq\dfrac{1}{3}$;

$H=\dfrac{-25+4x^2}{-4x^2+20x-25}=\underline{\dfrac{2x+5}{5-2x}}$;

$I=\dfrac{16-25x^2}{25x^2-40x+16}=\underline{\dfrac{4+5x}{4-5x}}$.

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 55 Comprendre des formulations

a et *b* désignent deux nombres réels.

Le carré de leur somme est associé à $(a+b)^2$.

La différence de leurs carrés est associé à $a^2 - b^2$.

Leur double produit est associé à $2ab$.

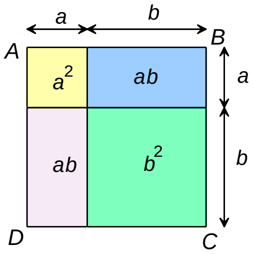
Le carré de leur différence est associé à $(a-b)^2$.

La somme de leur carré est associé à $a^2 + b^2$.

Le produit de leur carré est associé à a^2b^2.

Exercice 56 Aires et identités remarquables

a et *b* désignent deux nombres réels positifs.



1. a. a^2 est l'aire du carré jaune ;

b. b^2 est l'aire du carré vert ;

c. $(a+b)^2$ est l'aire du carré *ABCD* ;

d. ab est l'aire de chaque rectangle (bleu ou mauve).

2.a. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

b. On retrouve cette égalité à l'aide des aires colorées : l'aire du carré *ABCD* est égale à la somme des aires des quatre quadrilatères colorés.

Exercice 57 Ne rien oublier

Exemple :

$A = 2x(3x+5) + 2x$
$A = 2x(3x+5) + 2x \times 1$
$A = 2x[(3x+5)+1]$
$A = 2x(3x+6)$.

$B = 5x(2x+7) + 5x$
$B = 5x(2x+7) + 5x \times 1$
$B = 5x[(2x+7)+1]$
$B = 5x(2x+8)$;

$D = (3x+1)(x-4) + (3x+1)$
$D = (3x+1)(x-4) + (3x+1) \times 1$
$D = (3x+1)[(x-4)+1]$
$D = (3x+1)(x-3)$;

$C = 3x^2(x+2) - 3x^2$
$C = 3x^2(x+2) - 3x^2 \times 1$
$C = 3x^2[(x+2)-1]$
$C = 3x^2(x+1)$;

$E = (5x-4)(x+1) - (5x-4)$
$E = (5x-4)(x+1) - (5x-4) \times 1$
$E = (5x-4)[(x+1)-1]$
$E = (5x-4)\,x$.

Exercice 58 Vocabulaire

$A = 4x^3 - 3x^2 + 10$; $B = 7y^4 - 3y^3 + y^2 + 3$;

$C = -z^6 + z^3 - z^2 - 1$; $D = t^5 + 6t^3 - 5t^2 + t$.

Polynômes	A	B	C	D
Variable	x	y	z	t
Degré	3	4	6	5
Monôme de degré 2	$-3x^2$	y^2	$-z^2$	$-5t^2$
Terme constant	10	3	−1	0

Exercice 59 Chercher l'erreur

Consigne : développer, réduire et ordonner le polynôme

$$A = 2x(1-x) + 7(x^2 - 2).$$

Gondo

- solution : $A = 2x - x + 7x^2 - 2$
  $A = 7x^2 + x - 2$;
- erreurs commises : a oublié, en développant, de multiplier x par $2x$ et -2 par 7.

Noha

- solution : $A = 2x \times 1 + 2x \times -x + 7 \times x^2 + 7 \times -2$
  $A = 2x - 2x^2 + 7x^2 - 14$
  $A = 2x + 5x^2 - 14$;
- erreurs commises : - a omis, à la 1[ère] ligne, des parenthèses autour de $-x$ et -2 ;
  - résultat correct mais non présenté sous la forme ordonnée.

Oumar

- solution : $A = 2x \times 1 + 2x \times (-1x) + 7 \times x^2 + 7 \times (-2)$
  $A = 2x - 2x + 7x^2 - 14$
  $A = 7x^2 - 14$;
- erreur commise : $2x \times (-1x) \neq -2x$.

Bonne solution : $A = 2x \times 1 + 2x \times (-x) + 7 \times x^2 + 7 \times (-2)$

$A = 2x - 2x^2 + 7x^2 - 14$

$A = \underline{5x^2 + 2x - 14}$.

Exercice 60 Valeur(s) interdite(s) d'une fraction rationnelle

Consigne : indiquer la (ou les) valeur(s) interdite(s) de

$$F = \frac{(x+7)^2 - 5x(x+7)}{(x+7)(x-3)}.$$

a. Détail des calculs de chacun des élèves.

Dahirou

réponse : j'ai trouvé deux valeurs interdites : $x = -7$ et $x = 3$;

calcul : ce sont les valeurs qui annulent le dénominateur.

Azah

réponse : j'ai factorisé le numérateur et ensuite j'ai simplifié F ; je n'ai trouvé qu'une valeur interdite : 3.

calcul $F = \dfrac{(x+7)^2 - 5x(x+7)}{(x+7)(x-3)} = \dfrac{(x+7)(x+7-5x)}{(x+7)(x-3)}$

$F = \dfrac{7-4x}{x-3}$.

b. C'est Dahirou qui a raison.

Exercice 61 Mauvaise simplification

a. En posant $F = \dfrac{x^2+6x+9}{x(x+3)} = \dfrac{x^2+6+9}{(x+3)}$, Fatou a simplifié par x, qui n'est pas un facteur du numérateur.

b. $F = \dfrac{x^2+6x+9}{x(x+3)} = \dfrac{(x+3)^2}{x(x+3)} = \dfrac{x+3}{x}$, pour $x \neq -3$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 62 Du calcul mental

1.a. $[a+b]^2 - (a-b)^2 = \left(a^2 + 2ab + b^2\right) - \left(a^2 - 2ab + b^2\right)$

$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$

$= 4ab$.

b. • $101^2 - 99^2 = (100+1)^2 - (100-1)^2$

$= 4 \times 100 \times 1 = \underline{400}$;

• $105^2 - 95^2 = (100+5)^2 - (100-5)^2$

$= 4 \times 100 \times 5 = \underline{2\ 000}$;

• $510^2 - 490^2 = (500+10)^2 - (500-10)^2$

$= 4 \times 500 \times 10 = \underline{20\ 000}$.

2.a. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = \left(a^2 + 2ab + b^2\right) + \left(a^2 - 2ab + b^2\right)$

$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$= 2\left(a^2 + b^2\right)$.

b. • $101^2 + 99^2 = (100+1)^2 + (100-1)^2$

$= 2\left(100^2 + 1^2\right) = \underline{20\ 002}$;

• $104^2 + 96^2 = (100+4)^2 + (100-4)^2$

$= 2\left(100^2 + 4^2\right) = \underline{20\ 032}$;

• $510^2 + 490^2 = (500+10)^2 + (500-10)^2$

$= 2\left(500^2 + 10^2\right) = \underline{500\ 200}$.

Exercice 63 Somme et différence de polynômes

On donne : $A = 3x(5x-2)$ et $B = 25x^2 - 20x + 4$.

a. $A+B = 3x(5x-2) + (5x-2)^2$

$= 15x^2 - 6x + 25x^2 - 20x + 4 = \underline{40x^2 - 26x + 4}$.

b. $A-B = 3x(5x-2) - (5x-2)^2 = (5x-2)[3x - (5x-2)]$

$= (5x-2)(3x - 5x + 2) = \underline{2(5x-2)(1-x)}$.

Exercice 64 Produit et quotient de polynômes

On donne : $A = 4x^2 - 4x + 1 + (5-x)(2x-1)$,

$B = 5x(2x-1) + 4x^2 - 1$.

a. $A = (2x-1)^2 + (5-x)(2x-1)$

$= (2x-1)(2x - 1 + 5 - x)$

$= \underline{(2x-1)(x+4)}$;

$B = 5x(2x-1) + (2x+1)(2x-1)$

$= (2x-1)(5x + 2x + 1)$

$= \underline{(2x-1)(7x+1)}$.

b. $A \times B = (2x-1)(x+4)(2x-1)(7x+1)$

$= \underline{(2x-1)^2(x+4)(7x+1)}$.

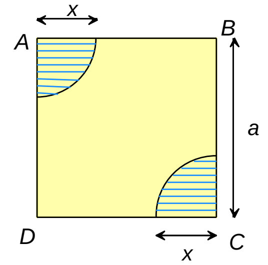
c. $\dfrac{A}{B} = \dfrac{(2x-1)(x+4)}{(2x-1)(7x+1)} = \underline{\dfrac{x+4}{7x+1}}$, pour $x \neq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 65 Le carré rongé

1. a. Aire d'un quart de cercle, de rayon x : $\underline{\dfrac{\pi x^2}{4}}$.

b. Aire de la partie jaune :

$a^2 - 2 \times \dfrac{\pi x^2}{4} = \underline{\dfrac{2a^2 - \pi x^2}{2}}$.

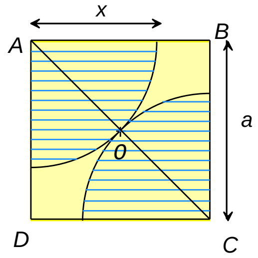


2.a. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{a^2 + a^2}$

$= \sqrt{2a^2} = \underline{a\sqrt{2}}$.

b. $x = \dfrac{AC}{2} = \underline{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}$.



c. Aire de la partie jaune :

$\dfrac{2a^2 - \pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{2a^2 - \dfrac{\pi a^2}{2}}{2} = \underline{\dfrac{(4-\pi)\,a^2}{4}}$.

Exercice 66 Des volumes de solides

Volume du prisme droit à base triangulaire :

$\mathscr{B} \times h = \dfrac{2x}{2} \times (2+x) = \underline{x^2 + 2x}$.

Volume de la pyramide à base carrée :

$\dfrac{\mathscr{B} \times h}{3} = \dfrac{(2x+1)^2 \times (x+3)}{3}$

$= \dfrac{\left(4x^2 + 4x + 1\right)(x+3)}{3}$

$= \dfrac{4x^3 + 12x^2 + 4x^2 + 12x + x + 3}{3}$

$= \underline{\dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{16}{3}x^2 + \dfrac{13}{3}x + 1}$.

Volume du cylindre :

$\mathscr{B} \times h = \pi(3x-5)^2 \times (2x+3)$

$= \pi\left(9x^2 - 30x + 25\right)(2x+3)$

$= \pi\left(18x^3 + 27x^2 - 60x^2 - 90x + 50x + 75\right)$

$= \underline{18\pi x^3 - 33\pi x^2 - 40\pi x + 75\pi}$.

Exercice 67 Factorisations

a. $A = (x-1)^2 - 121 = (x-1)^2 - 11^2$
$A = (x-1+11)(x-1-11)$
$A = \underline{(x+10)(x-12)}$.

b. $B = (2x+1)^2 - 16 = (2x+1)^2 - 4^2$
$B = (2x+1+4)(2x+1-4)$
$B = \underline{(2x+5)(2x-3)}$.

c. $C = 25x^2 - 16 = (5x)^2 - 4^2$
$C = \underline{(5x+4)(5x-4)}$.

Exercice 68 Questionnaire à choix multiples

1. La forme développée et réduite de $P = (3x+1)^2$, suivant les puissances décroissantes de x
est : $\underline{9x^2 + 6x + 1}$;

en effet : $P = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 1 + 1^2$.

2. La forme factorisée de
$Q = 9x^2 + 6x + 1 - (3x+1)(4x+5)$
est : $\underline{(3x+1)(-4-x)}$. ;

en effet : $Q = (3x+1)^2 - (3x+1)(4x+5)$
$Q = (3x+1)\left[(3x+1) - (4x+5)\right] = (3x+1)(-x-4)$.

Exercice 69 Polynômes et fractions rationnelles

1. La forme développée de :

$$A = (3-2x)(4x+5) + 5(9-4x^2)$$

est : $\underline{-28x^2 + 2x + 60}$;

en effet : $A = 12x + 15 - 8x^2 - 10x + 45 - 20x^2$.

2. La forme factorisée de :

$$A = (3-2x)(4x+5) + 5(9-4x^2)$$

est : $\underline{(3-2x)(14x+20)}$;

en effet : $A = (3-2x)(4x+5) + 5(3-2x)(3+2x)$
$A = (3-2x)\left[(4x+5) + 5(3+2x)\right]$.

3. La condition d'existence de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(2+2x)(x-5)}$$

est : $\underline{x \neq -1 \text{ et } x \neq 5}$.

Exercice 70 Simplifier une fraction rationnelle

a. $A = x^2 - 169 = (x+13)(x-13)$.

b. $\dfrac{A}{B} = \dfrac{x^2 - 169}{(x-13)(x+2)}$

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{(x+13)(x-13)}{(x-13)(x+2)} = \underline{\dfrac{x+13}{x+2}}$, pour $x \neq 13$.

Activités d'intégration

Exercice 72 L'enclos

1. L'aire d'un enclos de 35 m de longueur et 15 m de largeur est : 35×15 = 525 m².

2. En augmentant la largeur de x mètres et diminuant la longueur de x mètres :

a. les dimensions du nouvel enclos sont : en longueur (35–x) m, en largeur (15+x) m ;

b. l'aire de ce nouvel enclos est : $\mathscr{A} = (35 - x)(15 + x)\ \text{m}^2$;

c. on a : $\mathscr{A} = 525 + 35x - 15x - x^2 = -x^2 + 20x + 525$.

3.a.

x (en m)	4	6	8	10	12
$\mathscr{A} = -x^2 + 20x + 525$ (en m²)	589	609	621	625	621

b. L'aire est la plus grande pour x = 10 m. L'enclos est alors un carré de 25 m de côté.

c. Pour x = 8, les dimensions de l'enclos sont, en m, de : 27 (35-8) et 23 (15+8) ;
pour x = 12, les dimensions de l'enclos sont, en m, de : 23 (35-12) et 27 (15+12) ;
donc l'aire est la même dans les deux cas.

Exercice 73 La masse idéale

1. Pour une femme :

a. $M_F = T - 100 - \frac{T - 150}{2,5} = \left(1 - \frac{1}{2,5}\right) T - 100 + \frac{150}{2,5}$

$M_F = 0,6\,T - 40$;

b. Masse idéale d'une femme mesurant 170 cm :

$M_F = 0,6 \times 170 - 40 = 62$ kg ;

Pour un homme :

a. $M_H = T - 100 - \frac{T - 150}{4} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) T - 100 + \frac{150}{4}$

$M_H = 0,75\,T - 62,5$.

b. Masse idéale d'un homme mesurant 190 cm :

$M_H = 0,75 \times 190 - 62,5 = 80$ kg.

2.a. Différence de masse entre un homme et une femme de même taille T :

$M_H – M_F = 0,75\,T - 62,5 - 0,6\,T - 40$.

b. $M_H – M_F = 0,15\,T - 22,5$.

c. Différence de masse entre un homme et une femme de 180 cm chacun :

$M_H – M_F = 0,15 \times 180 - 22,5 = 4,5$ kg.

Exercice 74 Les boîtes à trésors

1.a. Volume de boîte cubique : $V_0 = 8^3 = 512\ \text{cm}^3$; volume de l'autre boîte : $V_1 = 9 \times 9 \times 7 = 567\ \text{cm}^3$.

b. La deuxième boîte (non cubique) est la plus volumineuse. La différence de volume est de : $55\ \text{cm}^3$.

2.a. Volume de la seconde boîte, en fonction de x : $V_x = (8 + x)(8 + x)(8 - x)$.

b. $V_x = \left(64 + 16x + x^2\right)(8 - x) = 512 - 64x + 128x - 16x^2 + 8x^2 - x^3$

$V_x = -x^3 - 8x^2 + 64x + 512$.

c. $V_x - V_0 = -x^3 - 8x^2 + 64x + 512 - 512 = -x^3 - 8x^2 + 64x$.

3.a.

x (en cm)	1	2	3	4	5	6	7
$V_x - V_0 = -x^3 - 8x^2 + 64x$ (en cm^3)	55	88	93	64	–5	–120	–287

La différence de volume entre la première boîte (cubique) et la seconde boîte (non cubique) est la plus grande :

- « en faveur de la seconde » pour x = 3,
- « en faveur de la première » pour x = 7.

b. Le volume de la seconde boîte est plus petit que celui de la boîte cubique pour x = 5, 6 et 7.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Equation du premier degré à une inconnue [1a p 145]	15, 16, 17, 18, 19	33, 34	39, 40, 41, 42, 46, 47, 49, 51
	Equation produit [1b p 145]	20, 21, 22, 23, 24		
	Equation se ramenant à une équation produit [1c p 145]		35, 36	43, 45, 48, 52, 54
	Apprendre à résoudre une équation [p 146]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14		
2	Inéquation du premier degré à une inconnue [2a p 145]	25, 26, 27, 28	35, 37	41, 44, 50, 53
	Système d'inéquations du premier degré à une inconnue [2b p 145]	29, 30, 31	35, 38	

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Le cinéma

Soit l et h les largeur et hauteur respectives de l'image.

Partie ① Le cinéma muet

Ici $l = 2$ et on cherche h tel que $\frac{4}{3} = \frac{24}{h}$. On a $4h = 72$; c'est-à-dire : $h = 18$.

La hauteur d'une telle pellicule est 18 mm.

Partie ② Le cinéma sonore

1. Maintenant $l = 24–2 = 22$ mm.

2. On cherche h tel que $1{,}37 = \frac{22}{h}$. On a $1{,}37\times h = 22$; c'est-à-dire : $h = \frac{22}{1{,}37} \approx 16$.

La hauteur d'une telle pellicule est 16 mm.

Partie ③ Le DVD

Ici $h = 18$ et on cherche l tel que $1{,}25 = \frac{l}{18}$ On a $l = 1{,}25\times 18$; c'est-à-dire : $l = 22{,}5$.

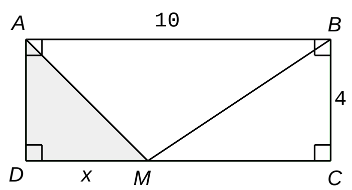
La largeur d'une telle pellicule est 22,5 mm.

Activités de découverte

1 Une nouvelle équation

Situation ①

ADM est un triangle rectangle en *D*, donc son aire est : $\mathcal{A} = \frac{AD \times DM}{2} = \frac{4 \times x}{2} = 2x$ cm².



1. $\mathcal{A} = 8$ cm² équivaut à $2x = 4$, c'est-à-dire : $x = 4$; donc : $DM = 4$ cm.

2. $\mathcal{A} = 12$ cm² équivaut à $2x = 12$, c'est-à-dire : $x = 6$; donc : $DM = 6$ cm.

3. Il n'y a pas de point *M* sur le segment [*BC*] pour lequel l'aire de *ADM* est de 25 cm².

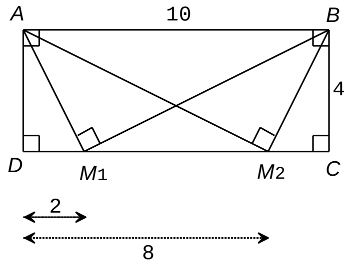
En effet l'aire de *ADM* est maximale lorsque $M = C$; elle est alors égale à : $\frac{4 \times 10}{2} = 20$ cm².

Situation ②

1. a. *ADM* est un triangle rectangle en *D*.

D'après la propriété de Pythagore, on a : $AM^2 = AD^2 + DM^2 = 4^2 + x^2$;

c'est-à-dire : $AM^2 = \underline{x^2 + 16}$.



b. *BCM* est un triangle rectangle en *C* et $CM = 10 - x$.

D'après la propriété de Pythagore, on a : $BM^2 = BC^2 + CM^2 = 4^2 + (10 - x)^2$;

c'est-à-dire : $BM^2 = 16 + 100 - 20x + x^2 = \underline{x^2 - 20x + 116}$.

2. a. $2(x-2)(x-8) = (2x-4)(x-8) = 2x^2 - 16x - 4x + 32 = 2x^2 - 20x + 32$.

b. D'après les propriétés de Pythagore, *ABM* est rectangle en *M* si et seulement si $AB^2 = AM^2 + MB^2$

si et seulement si $10^2 = x^2 + 16 + x^2 - 20x + 116$

si et seulement si $100 = 2x^2 - 20x + 132$

si et seulement si $2x^2 - 20x + 32 = 0$

si et seulement si $2(x-2)(x-8) = 0$.

3.a.

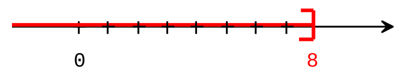
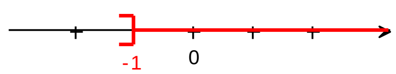
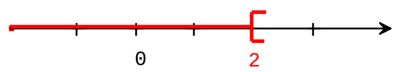
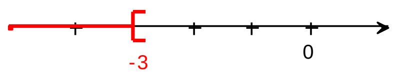
Valeur de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur de $x-2$	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de $x-8$	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2
Valeur de $2(x-2)(x-8)$	32	14	0	–10	–16	–18	–16	–10	0	14	32

b. 2 et 8 sont deux solutions de l'équation $2(x-2)(x-8) = 0$.

c. Il existe au moins deux points du segment [*BC*], pour lequel *ABM* est rectangle en *M* : M_1, à 2 cm de *D*, et M_2 à 8 cm de *D*.

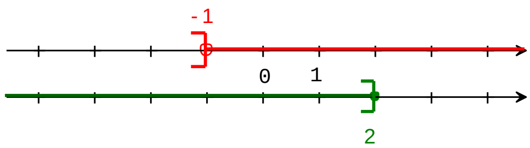
2 Résoudre une inéquation

1.

Inéquation	Opération effectuée	Solutions	Représentations	Intervalle
$x-5 \leq 3$	J'ajoute 5 aux deux membres de l'inéquation	$x \leq 8$		]← ; 8]
$x+4>3$	Je soustrais 4 aux deux membres de l'inéquation	$x>-1$		]–1 ; →[
$3x<6$	Je divise par 3 les deux membres de l'inéquation	$x<2$		]← ; 2[
$-5x>15$	Je divise par –5 les deux membres de l'inéquation	$x<-3$		]← ; –3[

2.a.

$x+4>3$	$3x \leq 6$
$\boxed{x>-1}$	$\boxed{x \leq 2}$



b. • –2 est solution de $3x \leq 6$ mais n'est pas solution de $x+4>3$; donc –2 n'est pas solution de $x+4>3$ et de $3x \leq 6$;

• 1 est solution de $x+4>3$ et de $3x \leq 6$;

• 4 est solution de $x+4>3$ mais n'est pas solution de $3x \leq 6$; donc 4 n'est pas solution de $x+4>3$ et de $3x \leq 6$.

c. L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} x + 4 > 3 \\ 3x \leq 6 \end{cases}$ est l'intervalle]–1 ; 2].

Apprendre à résoudre une équation

Exercice 1

a. $(x+3)(x-7) = 0$ équivaut à $x+3 = 0$ ou $x-7 = 0$
$x = -3$ ou $x = 7$.
Donc 3 et 7 sont les solutions de cette équation.

b. $(x+1)(2x-6) = 0$ équivaut à $x+1 = 0$ ou $2x-6 = 0$
$x = -1$ ou $x = 3$.
Donc -1 et 3 sont les solutions de cette équation.

Exercice 2

a. $(1-x)(2+x) = 0$ équivaut à $1-x = 0$ ou $2+x = 0$
$1 = x$ ou $x = -2$.
Donc 1 et 2 sont les solutions de cette équation.

b. $(3+x)(1-4x) = 0$ équivaut à $3+x = 0$ ou $1-4x = 0$
$x = -3$ ou $1 = 4x$
$x = -3$ ou $\frac{1}{4} = x$.

Donc -3 et $\frac{1}{4}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 3

a. $(2x+3)(3x+7) = 0$ équivaut à $2x+3 = 0$ ou $3x+7 = 0$
$2x = -3$ ou $3x = -7$
$x = -\frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{7}{3}$.

Donc $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de cette équation.

b. $(2-5x)(-4-5x) = 0$ équivaut à $2-5x = 0$ ou $-4-5x = 0$
$2 = 5x$ ou $-4 = 5x$
$\frac{2}{5} = x$ ou $-\frac{4}{5} = x$.

Donc $-\frac{4}{5}$ et $\frac{2}{5}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 4

a. $(2+3x)(1-7x) = 0$ équivaut à $2+3x = 0$ ou $1-7x = 0$
$3x = -2$ ou $1 = 7x$
$x = -\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{7} = x$.

Donc $-\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{7}$ sont les solutions de cette équation.

b. $(1+3x)(-1-4x) = 0$ équivaut à $1+3x = 0$ ou $-1-4x = 0$
$3x = -1$ ou $-1 = 4x$
$x = -\frac{1}{3}$ ou $-\frac{1}{4} = x$.

Donc $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{3}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 5

a. $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{2}{3}x\right) = 0$ équivaut à $x+\frac{1}{4} = 0$ ou $1-\frac{2}{3}x = 0$

$x = -\frac{1}{4}$ ou $1 = \frac{2}{3}x$

$x = -\frac{1}{4}$ ou $x = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

Donc $-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{2}$ sont les solutions de cette équation.

b. $\left(2x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) = 0$ équivaut à $2x+\frac{1}{3} = 0$ ou $x-\frac{1}{4} = 0$

$2x = -\frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{4}$

$x = \frac{-\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6}$ ou $x = \frac{1}{4}$.

Donc $-\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{4}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 6

a. $\left(3x-\frac{1}{7}\right)\left(5x+\frac{1}{4}\right) = 0$ équivaut à $3x-\frac{1}{7} = 0$ ou $5x+\frac{1}{4} = 0$

$3x = \frac{1}{7}$ ou $5x = -\frac{1}{4}$

$x = \frac{\frac{1}{7}}{3} = \frac{1}{21}$ ou $x = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$.

Donc $-\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{21}$ sont les solutions de cette équation.

b. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}x-\frac{7}{12}\right) = 0$ équivaut à

$\frac{2}{3}x+\frac{1}{4} = 0$ ou $\frac{1}{5}x-\frac{7}{12} = 0$.

$\frac{2}{3}x = -\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}x = \frac{7}{12}$

$x = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{8}$ ou $x = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{5}} = \frac{35}{12}$.

Donc $-\frac{3}{8}$ et $\frac{35}{12}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 7

1. Si $x = \frac{1}{9}$, alors :

$$\left(3x - \frac{1}{3}\right)\left(-2x + \frac{4}{5}\right) = \left(3 \times \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)\left(-2 \times \frac{1}{9} + \frac{4}{5}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{9} + \frac{4}{5}\right) = 0 \times \left(\frac{-2}{9} + \frac{4}{5}\right) = 0.$$

Donc $\frac{1}{9}$ est une solution de cette équation.

2. $\left(3x - \frac{1}{3}\right)\left(-2x + \frac{4}{5}\right) = 0$ équivaut à :

$$3x - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad -2x + \frac{4}{5} = 0$$
$$3x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{5} = 2x$$
$$x = \frac{\frac{1}{3}}{9} = \frac{1}{9} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{10}.$$

Donc $\frac{4}{10}$ est l'autre solution de cette équation.

Exercice 8

a. • $x^2 = 4$ équivaut à $x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = 0$.

• $x^2 = 4$ équivaut à $x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = -2$ ou $x = 2$.

Donc –2 et 2 sont les solutions de cette équation.

b. • $x^2 = 100$ équivaut à $x^2 - 100 = (x+10)(x-10) = 0$.

• $x^2 = 100$ équivaut à $x + 10 = 0$ ou $x - 10 = 0$

$x = -10$ ou $x = 10$.

Donc –10 et 10 sont les solutions de cette équation.

Exercice 9

a. • $x^2 = 121$ équivaut à $x^2 - 121 = (x+11)(x-11) = 0$.

• $x^2 = 121$ équivaut à $x + 11 = 0$ ou $x - 11 = 0$

$x = -11$ ou $x = 11$.

Donc –11 et 11 sont les solutions de cette équation.

b. • $x^2 = 81$ équivaut à $x^2 - 81 = (x+9)(x-9) = 0$.

• $x^2 = 81$ équivaut à $x + 9 = 0$ ou $x - 9 = 0$

$x = -9$ ou $x = 9$.

Donc –9 et 9 sont les solutions de cette équation.

Exercice 10

a. • $x^2 = 7$ équivaut à $x^2 - 7 = \left(x + \sqrt{7}\right)\left(x - \sqrt{7}\right) = 0$.

• $x^2 = 7$ équivaut à $x + \sqrt{7} = 0$ ou $x - \sqrt{7} = 0$

$x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$.

Donc $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$ sont les solutions de cette équation.

b. • $x^2 = 15$ équivaut à $x^2 - 15 = \left(x + \sqrt{15}\right)\left(x - \sqrt{15}\right) = 0$.

• $x^2 = 15$ équivaut à $x + \sqrt{15} = 0$ ou $x - \sqrt{15} = 0$

$x = -\sqrt{15}$ ou $x = \sqrt{15}$.

Donc $-\sqrt{15}$ et $\sqrt{15}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 11

a. • $4x^2 = 6$ équivaut à

$$x^2 = \frac{6}{4}$$
$$x^2 - \frac{6}{4} = 0$$
$$\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0.$$

• $4x^2 = 6$ équivaut à $x + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$ ou $x - \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$

$x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Donc $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $\frac{\sqrt{6}}{2}$ sont les solutions de cette équation.

b. • $3x^2 = 25$ équivaut à

$$x^2 = \frac{25}{3}$$
$$x^2 - \frac{25}{3} = 0$$
$$\left(x + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = 0.$$

• $3x^2 = 25$ équivaut à $x + \frac{5\sqrt{3}}{3} = 0$ ou $x - \frac{5\sqrt{3}}{3} = 0$

$x = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ou $x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Donc $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 12

1. $(2x+3)(x+4) - 5(2x+3) = (2x+3)\left[(x+4) - 5\right]$

$= (2x+3)(x-1)$.

2. $(2x+3)(x+4) - 5(2x+3) = 0$

$(2x+3)(x-1) = 0$

$2x + 3 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ ou $x = 1$.

Donc $-\frac{3}{2}$ et 1 sont les solutions de cette équation.

Exercice 13

1. $(x+5)(1-4x) + 3(x+5) = (x+5)\left[(1-4x) + 3\right]$

$= (x+5)(4-4x)$.

2. $(x+5)(1-4x) + 3(x+5) = 0$

$(x+5)(4-4x) = 0$

$x + 5 = 0$ ou $4 - 4x = 0$

$x = -5$ ou $x = 1$.

Donc –5 et 1 sont les solutions de cette équation.

Exercice 14

1. $(2x+1)(-5-x) + 2(2x+1) = (2x+1)\left[(-5-x) + 2\right]$

$= (2x+1)(-x-3)$.

2. $(2x+1)(-5-x) + 2(2x+1) = 0$

$(2x+1)(-x-3) = 0$

$2x + 1 = 0$ ou $-x - 3 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ ou $x = -3$.

Donc –3 et $-\frac{1}{2}$ sont les solutions de cette équation.

Activités d'application

Équations

Exercice 15

a. $7x+3=3x-2$

$7x-3x=-2-3$

$x=-\frac{5}{4}$.

$\boxed{S=\left\{-\frac{5}{4}\right\}}$.

b. $x+40=3x$

$40=3x-x$

$x=\frac{40}{2}$.

$\boxed{S=\{20\}}$.

c. $\frac{1}{2}-x=\frac{5}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=x$

$x=-\frac{4}{2}$.

$\boxed{S=\{-2\}}$.

d. $3x+\sqrt{5}=7\sqrt{5}$

$3x=7\sqrt{5}-\sqrt{5}$

$x=\frac{6\sqrt{5}}{3}$.

$\boxed{S=\{2\sqrt{5}\}}$.

Exercice 16

a. $3x+7=5(x+1)$

$7-5=5x-3x$

$2=2x$

$x=1$.

$\boxed{S=\{1\}}$

b. $4-(5-2x)=2(3x+1)$

$4-5+2x=6x+2$

$-3=4x$

$x=-\frac{3}{4}$.

$\boxed{S=\left\{-\frac{3}{4}\right\}}$.

c. $-7(1-2x)=4x$

$-7+14x=4x$

$10x=7$

$x=\frac{7}{10}$.

$\boxed{S=\left\{\frac{7}{10}\right\}}$.

d. $\frac{x}{2}+7=-5-\frac{x}{4}$

$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=-5-7$

$\frac{3}{4}x=-12$

$x=\frac{-12}{\frac{3}{4}}=-12\times\frac{4}{3}=-16$

$\boxed{S=\{-16\}}$

e. $5\sqrt{2}+x=3x-\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}+\sqrt{2}=3x-x$

$2x=6\sqrt{2}$

$x=3\sqrt{2}$.

$\boxed{S=\{3\sqrt{2}\}}$.

f. $7-\frac{1}{3}x=2x+\frac{1}{4}$

$7-\frac{1}{4}=2x+\frac{1}{3}x$

$\frac{7}{3}x=\frac{27}{4}$

$x=\frac{\frac{27}{4}}{\frac{7}{3}}=\frac{27}{4}\times\frac{3}{7}=\frac{81}{28}$.

$\boxed{S=\left\{\frac{81}{28}\right\}}$.

Exercice 17

Un nombre x, dont le triple augmenté de 2 est égal à son double diminué de 3, est tel que : $3x+2=2x-3$

$3x-2x=-3-2$

$x=-5$.

Ce nombre est <u>-5</u>.

Exercice 18

$x+\frac{5}{100}x=840$ équivaut à $\frac{105}{100}x=840$

$x=840\times\frac{100}{105}=800$.

Donc le prix de l'article avant augmentation était de <u>800 F CFA</u>.

Exercice 19

Le volume de la sphère (de rayon r) est égal à celui du cylindre (de hauteur h et de base le disque de rayon r)

si et seulement si $\frac{4}{3}\pi r^3=\pi r^2 h$

si et seulement si $h=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}=\frac{4}{3}r$.

Lorsque $r=5$ cm, $h=\frac{20}{3}$ cm.

Exercice 20

a. $(x+1)(2x+3)=0$ équivaut à

$x+1=0$ ou $2x+3=0$.

Donc $-\frac{3}{2}$ et -1 sont les solutions de cette équation.

b. $3x(2x+5)=0$ équivaut à

$3x=0$ ou $2x+5=0$.

Donc $-\frac{5}{2}$ et 0 sont les solutions de cette équation.

c. $(2x+7)(3x-12)=0$ équivaut à

$2x+7=0$ ou $3x-12=0$.

Donc $-\frac{7}{2}$ et 4 sont les solutions de cette équation.

d. $(3-2x)(4x-5)=0$ équivaut à

$3-2x=0$ ou $4x-5=0$.

Donc $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 21

a. $x^2 - 9 = 0$ équivaut à $(x+3)(x-3) = 0$

$x + 3 = 0$ ou $x - 3 = 0$.

Donc –3 et 3 sont les solutions de cette équation.

b. $3x^2 - 4x = 0$ équivaut à $x(3x-4) = 0$

$x = 0$ ou $3x - 4 = 0$.

Donc 0 et $\frac{4}{3}$ sont les solutions de cette équation.

c. $4x^2 - 25 = 0$ équivaut à $(2x+5)(2x-5) = 0$

$2x + 5 = 0$ ou $2x - 5 = 0$.

Donc $-\frac{5}{2}$ et $\frac{5}{2}$ sont les solutions de cette équation.

d. $3x(x+2) + 6(x+2) = 0$ équivaut à $(3x+6)(x+2) = 0$

$3(x+2)(x+2) = 0$

$x + 2 = 0$.

Donc –2 est la solution de cette équation.

Exercice 22

a. $x^2 = 16$ équivaut à $(x+4)(x-4) = 0$

$x + 4 = 0$ ou $x - 4 = 0$.

Donc –4 et 4 sont les solutions de cette équation.

b. $x^2 = 5$ équivaut à $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) = 0$

$x + \sqrt{5} = 0$ ou $x - \sqrt{5} = 0$.

Donc $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$ sont les solutions de cette équation.

c. $4x^2 = 1$ équivaut à $(2x+1)(2x-1) = 0$

$2x + 1 = 0$ ou $2x - 1 = 0$.

Donc $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sont les solutions de cette équation.

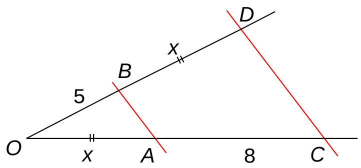
d. $\frac{x^2}{9} = \frac{25}{4}$ équivaut à $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0$

$$\left(\frac{x}{3} + \frac{5}{2}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$\frac{x}{3} + \frac{5}{2} = 0$ ou $\frac{x}{3} - \frac{5}{2} = 0$.

Donc $-\frac{15}{2}$ et $\frac{15}{2}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 23



(AB)//(CD) donc, d'après la propriété de Thalès,

on a : $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$;

c'est-à-dire : $\frac{x}{8} = \frac{5}{x}$.

Finalement : $x^2 = 40$ équivaut à $x^2 - 40 = 0$

$$(x + 2\sqrt{10})(x - 2\sqrt{10}) = 0.$$

Donc $x = 2\sqrt{10}$ (*puisque une longueur est positive*).

Exercice 24

1. • $\underline{(3x+1)^2 - 49} = 9x^2 + 6x + 1 - 49 = \underline{9x^2 + 6x - 48}$;

• $\underline{(3x+1)^2 - 49} = (3x+1)^2 - 7^2 = (3x+1+7)(3x+1-7)$

$= \underline{(3x+8)(3x-6)}$.

2. $E(x) = (3x+1)^2 - 49 = 9x^2 + 6x - 48 = (3x+8)(3x-6)$.

• $E(x) = 0$ équivaut à $(3x+8)(3x-6) = 0$

$3x + 8 = 0$ ou $3x - 6 = 0$.

Donc $-\frac{8}{3}$ et 2 sont les solutions de l'équation $E(x) = 0$.

• $E(x) = 9x^2$ équivaut à $9x^2 + 6x - 48 = 9x^2$

$6x - 48 = 0$.

Donc 8 est la solution de l'équation $E(x) = 9x^2$.

• $E(x) = 15$ équivaut à $(3x+1)^2 - 49 = 15$

$(3x+1)^2 - 64 = 0$

$(3x+1+8)(3x+1-8) = 0$

$(3x+9)(3x-7) = 0$.

Donc –3 et $\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $E(x) = 15$.

Exercice 25

a. $x - 3 > 5$ équivaut à $8 < x$;
donc l'intervalle solution est $]8\ ;\ \to[$.

b. $x + 3 \leq 2$ équivaut à $x \leq -1$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow\ ;\ -1]$.

c. $2 < 1 + x$ équivaut à $1 < x$;
donc l'intervalle solution est $]1\ ;\ \to[$.

d. $-5x \geq 7$ équivaut à $x \leq -\frac{7}{5}$;

donc l'intervalle solution est $]\leftarrow\ ;\ -\frac{7}{5}]$.

e. $\frac{x}{9} \leq 4$ équivaut à $x \leq 36$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow\ ;\ 36]$.

f. $7 - 3x \geq -2$ équivaut à $x \leq 3$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow\ ;\ 3]$.

Exercice 26

a. $2x + 3 \leq 3x + 1$ équivaut à $2 \leq x$;
donc l'intervalle solution est $[2\ ;\ \to[$.

b. $-13x + 15 > -6x + 6$ équivaut à $7x < 9$

c'est-à-dire $x < \frac{9}{7}$;

donc l'intervalle solution est $]\leftarrow\ ;\ \frac{9}{7}[$.

c. $x > -2x + 1$ équivaut à $\frac{1}{3} < x$;

donc l'intervalle solution est $]\frac{1}{3}\ ;\ \to[$.

d. $5x - 10 \leq 3x + 2$ équivaut à $x \leq 6$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow\ ;\ 6]$.

e. $8 - (x - 7) \leq 4 + 3x$ équivaut à $\frac{11}{4} \leq x$;

donc l'intervalle solution est $[\frac{11}{4}\ ;\ \to[$.

f. $\frac{1}{2}x - 3 \geq \frac{5x}{6} + 2$ équivaut à $-5 \geq \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)x$

équivaut à $-5 \geq \frac{2}{6}x$

c'est-à-dire $x \leq -15$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow\ ;\ -15]$.

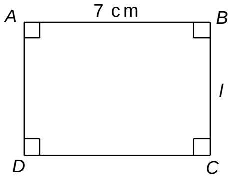
Exercice 27

Soit x le nombre de poissons vendus sur une semaine.
Le vendeur réalise un bénéfice lorsque : $40x \geq 290 \times 7$

c'est-à-dire : $x \geq \frac{2\,030}{40} = 50{,}75$.

C'est en vendant plus de 51 poissons, que le vendeur fera un bénéfice.

Exercice 28



Périmètre du rectangle *ABCD* :
$2 \times 7 + 2 \times l = 14 + 2\,l$.

1. Ce périmètre est égal à 36 cm
équivaut à $14 + 2\,l = 36$

c'est-à-dire $l = \frac{36 - 14}{2} = 11$ cm.

2. Ce périmètre est inférieur ou égal à 32 cm

équivaut à $14 + 2\,l \leq 32$ ou $l \leq \frac{32 - 14}{2}$;

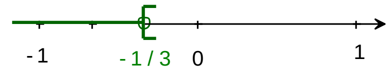
c'est-à-dire $l \in]0\ ;\ 9]$.

Exercice 29

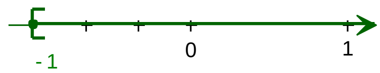
1. • $3x + 1 < 0$ équivaut à $x < -\frac{1}{3}$;

• $2x + 3 \leq 5x + 6$ équivaut à $-3 \leq 3x$
équivaut à $-1 \leq x$.

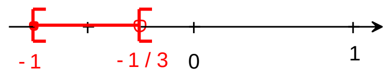
2. • $x < -\frac{1}{3}$



• $-1 \leq x$



$x < -\frac{1}{3}$
et
$-1 \leq x$



3. Donc l'intervalle solution du système $\begin{cases} 3x + 1 < 0 \\ 2x + 3 \leq 5x + 6 \end{cases}$

est : $\left[-1\ ;\ -\frac{1}{3}\right[$.

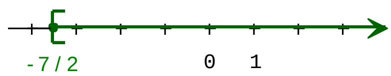
Exercice 30

1. • $2x + 7 \geq 0$ équivaut à $2x \geq -7$

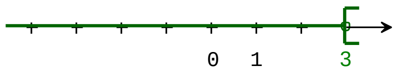
équivaut à $-\frac{7}{2} \leq x$;

• $12 - 4x > 0$ équivaut à $12 > 4x$
équivaut à $x < 3$.

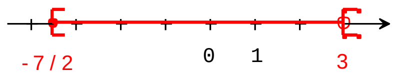
2. • $-\frac{7}{2} \leq x$



• $x < 3$



$-\frac{7}{2} \leq x$
et
$x < 3$



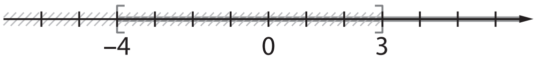
3. Donc l'intervalle solution du système $\begin{cases} 2x + 7 \geq 0 \\ 12 - 4x > 0 \end{cases}$

est : $\left[-\frac{7}{2}\ ;\ 3\right[$.

Exercice 31

a. $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2x-6 \leq 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -4 \leq x \\ x \leq 3 \end{cases}$.

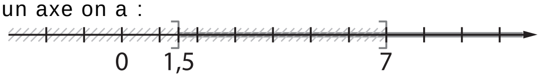
Sur un axe on a :



L'intervalle solution du système est $[-4\ ;\ 3]$.

b. $\begin{cases} -2x+3 < 0 \\ 7x-49 \leq 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \frac{3}{2} < x \\ x \leq 7 \end{cases}$.

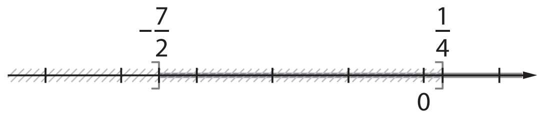
Sur un axe on a :



L'intervalle solution du système est $\left]\frac{3}{2}\ ;\ 7\right]$.

c. $\begin{cases} 2x+7 > 0 \\ -4x+1 > 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -\frac{7}{2} < x \\ x < \frac{1}{4} \end{cases}$.

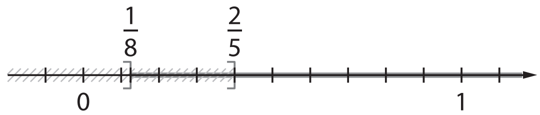
Sur un axe on a :



L'intervalle solution du système est $x \in \left]-\frac{7}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\right[$

d. $\begin{cases} 2x-\frac{1}{4} > 0 \\ -5x+2 \geq 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \frac{1}{8} < x \\ x \leq \frac{2}{5} \end{cases}$.

Sur un axe on a :



L'intervalle solution du système est $x \in \left]\frac{1}{8}\ ;\ \frac{2}{5}\right]$

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 32 Bien s'exprimer

Le double produit de x et y est $2xy$.

La différence des carrés de x et de y est $x^2 - y^2$.

Le double de la somme de x et y est $2(x+y)$.

Le carré de la somme de x et y est $(x+y)^2$.

Exercice 33 Éviter des erreurs fréquentes

Paul

$5x+3 = 2x+7$

$3x = 4$

$x = \frac{4}{-3}$ ← erreur

Résolution correcte

$5x+3 = 2x+7$

$3x = 4$

$x = \frac{4}{3}$

Claire

$7x-3 \leq 9x+3$

$-2x \leq 6$

$x \leq -3$

↑

erreur

Résolution correcte

$7x-3 \leq 9x+3$

$-2x \leq 6$

$x \geq \frac{6}{-2}$

$x \geq -3$

Exercice 34 Bien traduire

1. Si x désigne le nombre de spectateurs dans les tribunes, alors $50\,000-x$ désigne le nombre de spectateurs dans les populaires.

2. L'équation qui correspond au problème est :
$$300x+180(50\,000-x) = 1\,140\,000.$$

3. $300x+900\,000-180x = 1\,140\,000$
$$120x = 240\,000$$
$$x = 2\,000.$$

Il y a donc 2 000 spectateurs dans les tribunes et 49 800 dans les populaires.

Exercice 35 Vrai ou faux ?

1. Faux ; l'équation $2x^2 = 32$ a deux solutions : –4 et 4.

2. Faux ; les solutions de l'équation $(3x+7)(4x+1) = 0$ sont $-\frac{7}{3}$ et $-\frac{1}{4}$ (opposés de $\frac{7}{3}$ et $\frac{1}{4}$).

3. Vrai ; $3x+7 \leqslant 5x-1$ équivaut à $8 \leq 2x$
équivaut à $4 \leq x$.

4. Faux ; $\begin{cases} 2x-6 \geq 0 \\ 20-5x > 5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x \geq 6 \\ 15 > 5x \end{cases}$
équivaut à $\begin{cases} 3 \leq x \\ x < 3 \end{cases}$,
donc ce système n'a pas de solution.

Exercice 36 Se ramener à une équation du 1er degré

Situation ①

$(3x+7)(4x-5)=0$ équivaut à $3x+7=0$ ou $4x-5=0$,

c'est-à-dire $x=-\dfrac{7}{3}$ ou $x=\dfrac{5}{4}$;

les solutions de cette équation sont $-\dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{5}{4}$.

Situation ②

$4x^2=5x$ équivaut à $4x^2-5x=0$,

c'est-à-dire $x(4x-5)=0$,

ou encore $x=0$ ou $x=\dfrac{5}{4}$;

les solutions de cette équation sont 0 et $\dfrac{5}{4}$.

Situation ③

$(3x+7)^2-(3x+7)(x+5)=0$

équivaut à $(3x+7)\left[(3x+7)-(x+5)\right]=0$,

c'est-à-dire $(3x+7)(2x+2)=0$,

ou encore $x=-\dfrac{7}{3}$ ou $x=-1$;

les solutions de cette équation sont $-\dfrac{7}{3}$ et -1.

Situation ④

$2x^2=6$ équivaut à $x^2=3$, c'est-à-dire $x^2-3=0$,

ou encore $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$,

ou encore $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$;

les solutions de cette équation sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Exercice 37 Intervalle solution

1.

Inéquation de départ	Opération effectuée sur chaque membre	Inéquation équivalente
$3x<6$	diviser par 3	$x<2$
$x-2\leq 4$	ajouter 2	$x\leq 6$
$-3x>9$	diviser par -3	$x<-3$
$-x<-3$	diviser par -1	$x>3$
$\dfrac{x}{2}>4$	multiplier par 2	$x>8$

2. $x<2$ équivaut à $x\in]\leftarrow\,;\,2[$;
$x\leq 6$ équivaut à $x\in]\leftarrow\,;\,6]$;
$x<-3$ équivaut à $x\in]\leftarrow\,;\,-3[$;
$x>3$ équivaut à $x\in]3\,;\,\rightarrow[$;
$x>8$ équivaut à $x\in]8\,;\,\rightarrow[$.

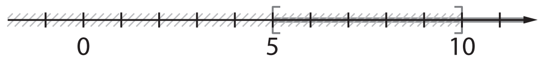
Exercice 38 Texte à trous

1. Un des côtés d'un rectangle mesure *12* cm. Quelle doit être la mesure de l'autre côté pour que le périmètre soit *inférieur* à *44* cm et l'aire *supérieure* à *60* cm² ?

2.

$$12x\geqslant 60 \qquad x\geqslant\frac{60}{12} \qquad x\geqslant 5$$

$$2(x+12)\leqslant 44 \qquad x+12\leqslant 22 \qquad x\leqslant 10$$



3. L'autre côté mesure entre 5 cm et 10 cm ; cette mesure étant un nombre entier naturel, les valeurs possibles sont : 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

Exercices d'approfondissement

Exercice 39 Calcul de bénéfice

1. Si x est le nombre d'œufs achetés à la foire, alors le nombre d'œufs non cassés est $x-10$.

Prix d'achat : $40x$; prix de vente : $60(x-10)$;

bénéfice : $\dfrac{1}{4}\times 40x=10x$.

On a donc :

$$60(x-10)-40x=10x$$
$$60x-600-40x=10x$$
$$10x=600$$
$$x=60.$$

Yempo a acheté 60 œufs.

2. Bénéfice réalisé par Yempo : 10×60 = 600 F CFA.
(*Vérification* : $60\times 50-40\times 60=600$.)

Exercice 40 Notes et moyenne

Soit x la note de mathématiques de Rakoto.

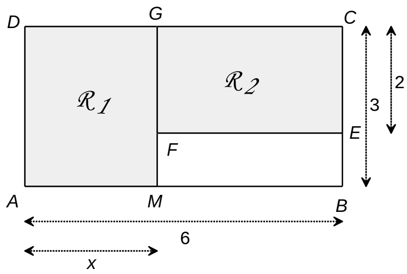
On a : $\dfrac{14\times 4+13\times 3+x\times 4}{4+3+4}=15$.

C'est-à-dire : $\dfrac{56+39+4x}{11}=15$

$$95+4x=165$$
$$4x=70$$
$$x=17{,}5.$$

Donc 17,5 est la note de mathématiques de Rakoto.

Exercice 41 En géométrie



1. Périmètres de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$: $2(3+x)$ et $2[2+(6-x)]$.
Ces périmètres sont égaux lorsque :

$$2(3+x) = 2[2+(6-x)]$$
$$3 + x = 8 - x$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ cm.}$$

2. Aires de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$: $3x$ et $2(6-x)$.
L'aire de $\mathcal{R}_1$ est strictement inférieure à celle de $\mathcal{R}_2$ lorsque :

$$3x < 2(6-x)$$
$$3x < 12 - 2x$$
$$5x < 12$$
$$x < \frac{12}{5}$$
$$x < 2{,}4 \text{ cm.}$$

Exercice 42 Élection

Si x le nombre de voix obtenues par le vainqueur, alors x–22, x–30 et x–73 sont les nombres de voix obtenues par les trois autres candidats.

On a : $x+(x-22)+(x-30)+(x-73) = 5\,219$

$$4x - 125 = 5\,219$$
$$4x = 5\,344$$
$$x = 1\,336.$$

Le vainqueur a obtenu 1 336 voix et les trois autres 1 314, 1 306 et 1 263 voix.

Exercice 43 Avec des identités remarquables

1.a. $81x^2 - 9 = 9\left(9x^2 - 1\right) = 9(3x+1)(3x-1)$.

b. $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$.

c. $25x^2 - 20x + 4 = (5x-2)^2$.

2.a. $81x^2 - 9 = 0$ équivaut à $9(3x+1)(3x-1) = 0$;
les solutions de cette équation sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$.

b. $4x^2 + 4x + 1 = 0$ équivaut à $(2x+1)^2 = 0$;
la solution de cette équation est $-\frac{1}{2}$.

c. $25x^2 - 20x + 4 = 0$ équivaut à $(5x-2)^2 = 0$
la solution de cette équation est $\frac{2}{5}$.

Exercice 44 Charge maximale

Soit x le nombre d'enfants transportés.
Masse du bus avec les enfants : $6\,000+70+35x$.

Pour respecter la réglementation, il faut que :

$$6\,070+35x<8\,000$$
$$35x<1\,930$$
$$x < \frac{1\,930}{35}.$$

Donc le nombre maximum d'enfants, qui peuvent être transportés avec ce bus, est égal à 55.

S'entraîner au BEPC

Exercice 45 Factorisations

a. $A = (x-1)^2 - 121 = (x-1)^2 - 11^2$
$A = [(x-1)+11][(x-1)-11] = (x+10)(x-12)$.

b. $B = (2x+1)^2 - 16 = (2x+1)^2 - 4^2$
$B = [(2x+1)+4][(2x+1)-4] = (2x+5)(2x-3)$.

c. $C = 25x^2 - 16 = (5x)^2 - 4^2 = (5x+4)(5x-4)$.

Exercice 46 Les mangues d'Atangana

Soit x le nombre de mangues achetées par Atangana.

Prix d'achat : $20x$; recette : $50(x-15)$;

bénéfice : $\frac{1}{4} \times 20x = 5x$.

On a : (*mise en équation*) : $50(x-15)-20x = 5x$.
Donc (*résolution*) :

$$50x-750-20x = 5x$$
$$25x = 750$$
$$x = 30.$$

Atangana a acheté 30 mangues.

Exercice 47 Une aire égale au périmètre

1. Périmètre du rectangle : $2(6+x)$;
aire du rectangle : $6x$.

Dire que le périmètre et l'aire sont exprimés par le même nombre entier naturel équivaut à : $2(6+x) = 6x$
c'est-à-dire : $12 = 4x$
ou encore : $4x-12 = 0$.

2. $4x-12 = 0$ équivaut à $x = 3$;
La mesure de l'autre côté est 3 cm.

Exercice 48 Une équation produit

a. $P = (x+1)^2 + (x+1)(3x-5)$

$P = x^2 + 2x + 1 + 3x^2 + 3x - 5x - 5 = 4x^2 - 4$.

b. $P = 4(x^2 - 1) = 4(x+1)(x-1)$.

c. $(x+1)(4x-4) = 0$ équivaut à $x+1 = 0$ ou $4x-4 = 0$

$x = -1$ ou $x = 1$;

les solutions de cette équation sont –1 et 1.

Exercice 49 Équation et rectangle

Soit x la largeur du rectangle.

On a : $2[(x+5)+x] = 50$

c'est-à-dire : $(x+5)+x = 25$

ou encore : $2x = 20$.

Les deux dimensions du rectangle sont : 10 cm et 15 cm.

Exercice 50 Quatre expressions

1. $p(x) = 25x^2 - 81 = (5x)^2 - 9^2 = (5x+9)(5x-9)$.

$q(x) = x^2 + 14x + 49 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x+7)^2$.

2.● $(x+3)(x-5) = 0$ équivaut à $x+3 = 0$ ou $x-5 = 0$

$x = -3$ ou $x = 5$;

les solutions de cette équation sont –3 et 5.

● $(x+4)^2 = 0$ équivaut à $x+4 = 0$

$x = -4$

La solution de cette équation est –4.

Exercice 51 Location d'une machine

1. $15x+20 = 110$ équivaut à $15x = 90$

$x = 6$.

2. Soit x le nombre d'heures passées sur la machine.

On a : $2\,000+1\,500x = 11\,000$

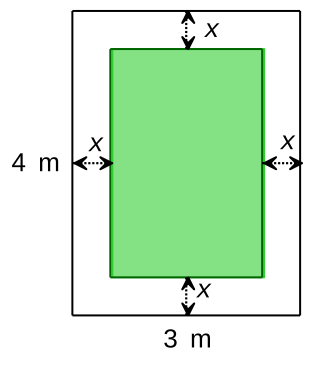
$1\,500x = 9\,000$

$x = \frac{9\,000}{1\,500} = 6$;

M. Kafinda a passé 6 heures sur la machine.

Activités d'intégration

Exercice 52 Un tableau harmonieux



1.a. Aire de la partie verte : $(4-2x)(3-2x) = 12 - 6x - 8x + 4x^2 = 4x^2 - 14x + 12$.

b. Le contour en blanc et la partie verte ont la même aire si et seulement si l'aire de la partie verte est égale à la moitié de l'aire totale du tableau,

c'est-à-dire : $4x^2 - 14x + 12 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

$4x^2 - 14x + 6 = 0$

$2x^2 - 7x + 3 = 0$.

2. $(x-3)(2x-1) = 2x^2 - 6x - x + 3 = 2x^2 - 7x + 3$.

3. On en déduit que $2x^2 - 7x + 3 = 0$ équivaut à $(x-3)(2x-1) = 0$

$x - 3 = 0$ ou $2x - 1 = 0$

$x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$.

Vues les dimensions du tableau :

● la largeur du contour est égale à 0,5 m ;

● l'aire de la portion à peindre est égale à (4–2×0,5)(3–2×0,5) =3×2 = 6 m² (*résultat déjà établi à la question 1.b*).

Exercice 53 Téléphonie mobile

1. Pour x minutes de communication :
- $980+13x$ est le montant d'une facture de l'abonnement OLA ;
- $950+14,5x$ est le montant d'une facture de l'abonnement BYE.

2. Le forfait OLA est plus rentable lorsque : $980+13x < 950+14,5x$.

3. $980+13x < 950+14,5x$ équivaut à $980-950 < 14,5x-13x$
$30 < 1,5x$
$20 < x$.

Si Mr Bieme téléphone moins de 20 minutes, il doit choisir BYE ; sinon, il doit choisir OLA.

Exercice 54 Créer un logo

1. Si x est la longueur, en cm, du côté du carré rouge, alors l'aire de ce carré rouge est x^2 ;
l'aire du carré jaune est $(x+2)^2$; l'aire du carré vert est $(x+4)^2$.

2. On a : $x^2+(x+2)^2+(x+4)^2 = 116$.

3.a. $x^2+(x+2)^2+(x+4)^2 = x^2+\left(x^2+4x+4\right)+\left(x^2+8x+16\right) = 3x^2+12x+20$.

b. $(x+8)(x-4) = x^2-4x+8x-32 = x^2+4x-32$.

4. $x^2+(x+2)^2+(x+4)^2 = 116$ équivaut à $3x^2+12x+20 = 116$
$3x^2+12x-96 = 0$
$3\left(x^2+4x-32\right) = 0$
$3(x+8)(x-4) = 0$

Finalement, la longueur x (*nombre positif*) du côté du carré rouge est égale à 4 cm ;
celles des côtés des carrés jaune et vert sont respectivement égales à 6 cm et à 8 cm ;
la longueur totale du logo est alors de 18 cm.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1, 2, 3	Système de deux équations à deux inconnues [1 p 154]	21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32	45, 46, 47, 48	51, 52, 53, 54, 56, 57, 59, 60, 61
	Apprendre à résoudre un système d'équations [1 p 156]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10		
4	Inéquation à deux inconnues [2 p 155]	33, 34, 35, 36, 37, 38	49, 50	58
5	Système d'inéquations à deux inconnues [3 p 155]	39, 40, 41, 42, 43, 44		55, 62
	Apprendre à résoudre un système d'inéquations [2 p 157]	11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Artisanat en métal

1. a. $4 \times 10 + 3 \times 35 = 145$.

b. Cela ne correspond pas au temps mis par Joseph l'après-midi.
On peut en conclure que l'hypothèse de Vincent n'est pas correcte.

2.a. $2 \times 50 + 5 \times 5 = 125$.

b. Cela ne correspond pas au temps mis par Joseph le matin.
On peut en conclure que l'hypothèse de Linda n'est pas correcte.

3. $2 \times 35 + 5 \times 25 = 195$;
$4 \times 35 + 3 \times 25 = 215$.
Cette proposition est en accord avec le temps de travail du matin et de l'après-midi de Joseph.

Activités de découverte

1. Méthode par substitution

1. $18x+3y$ correspond à l'épaisseur de 18 livres de poche et 3 dictionnaires.
On sait qu'elle vaut 75 cm. Donc : $18x+3y = 75$.

L'épaisseur d'un dictionnaire correspond à celle de quatre livres de poche donc : $y = 4x$.

2.a. On peut remplacer les 3 dictionnaires par $3 \times 4 = 12$ livres de poche.
Donc on peut mettre $18+12 =$ 30 livres de poche sur une étagère.

b. $30x = 75$.

3.a. On a $x = \frac{75}{30}$, c'est-à-dire : $x = 2{,}5$.
L'épaisseur d'un livre de poche vaut donc 2,5 cm.

b. On a $y = 4x$, c'est-à-dire : $y = 4 \times 2{,}5 = 10$.
L'épaisseur d'un dictionnaire vaut donc 10 cm.

2 Méthode par combinaisons linéaires

1. $6x$ est le prix de 6 cartes rouges et $2y$ est le prix de 2 cartes jaunes.
Donc $6x+2y$ correspond à la somme d'argent reçue par Joseph en une heure.
On sait qu'il a gagné 36 000 F CFA ; donc $\underline{6x+2y = 36\ 000}$.

De la même manière, $4x+5y$ correspond à la somme d'argent reçue par Fatoumata en une heure.
On sait qu'elle a gagné 35 000 F CFA ; donc $\underline{4x+5y = 35\ 000}$.

2.a. En travaillant 2 heures, Joseph vendra $2\times 6 = 12$ cartes rouges.
En travaillant 3 heures, Fatoumata vendra $3\times 4 = 12$ cartes rouges.
Fatoumata a donc raison en affirmant qu'ils vendront alors le même nombre de cartes rouges.

b. L'équation « $12x+4y = 72\ 000$ » correspond à la somme d'argent gagnée par Joseph en 2 heures.
L'équation « $12x+15y = 105\ 000$ » correspond à la somme d'argent gagnée par Fatoumata en 3 heures.

c. En soustrayant terme à terme ces deux équations, on obtient $11y = 33\ 000$.

Donc le prix de 11 cartes jaunes est de <u>33 000 F CFA</u> et celui d'une seule carte jaune est de $\dfrac{33\ 000}{11} = \underline{3\ 000 \text{ F CFA}}$.

d. On obtient :
$$\begin{aligned} 6x+2\times 3\ 000 &= 36\ 000 \\ 6x+6\ 000 &= 36\ 000 \\ 6x &= 30\ 000 \\ x &= \frac{3\ 000}{6} \\ x &= 5\ 000. \end{aligned}$$
Le prix d'une carte rouge est de <u>5 000 F CFA</u>.

3. $6\times 5\ 000+2\times 3\ 000 = 30\ 000+6\ 000 = 36\ 000$ et $4\times 5\ 000+5\times 3\ 000 = 20\ 000+15\ 000 = 35\ 000$;
les égalités établies à la question 1. sont bien vérifiées.

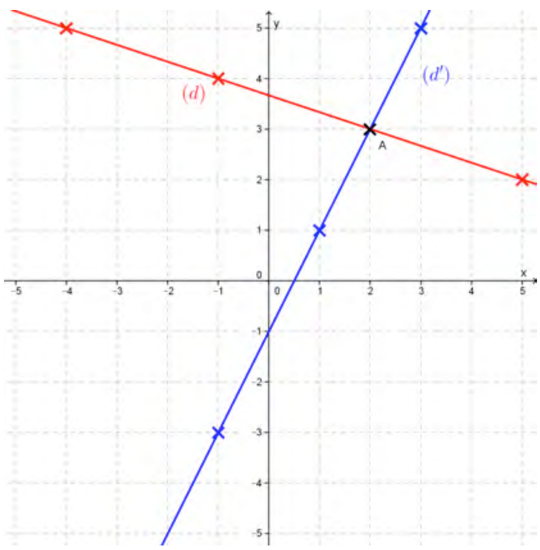
3 Interprétation graphique d'un système

1. On donne les droites

(d) : $x + 3y = 11$;

(d') : $2x - y = 1$.

2.a.b.



c. Le point A, qui est à la fois en rouge et en bleu, a pour coordonnées $\underline{(2\ ;\ 3)}$.

3. On souhaite résoudre le système (S) : $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

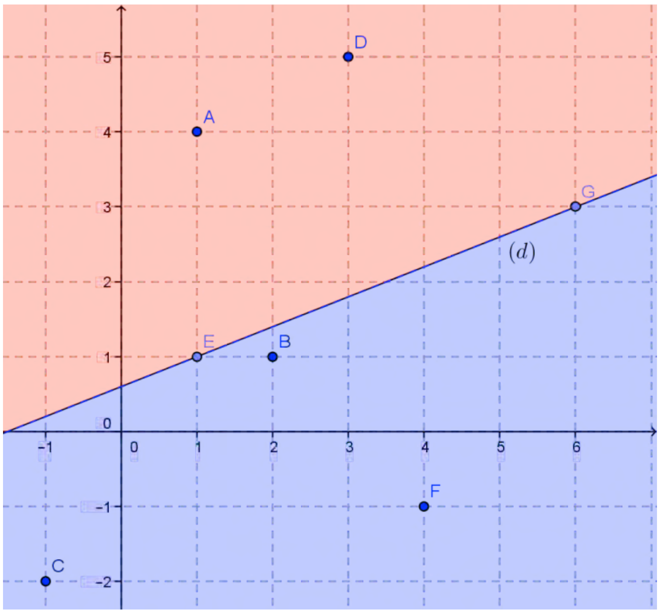
a. Un point, dont les coordonnées vérifient les deux égalités de ce système, est à la fois sur les droites (d) et (d') ;
<u>il s'agit donc du point *A*.</u>

b. En résolvant le système, on obtient comme solution $(x\ ;\ y) = (2\ ;\ 3)$, ce qui est bien les coordonnées du point A.

4 Demi-plan

(d) est la droite d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.

1.



2.

Point	Coordonnées $(x\ ;\ y)$	$2x-5y+3$	A-t-on $2x-5y+3 > 0$?
A	(1 ; 4)	–15	Non
B	(2 ; 1)	2	Oui
C	(–1 ; –2)	11	Oui
D	(3 ; 5)	–16	Non
E	(1 ; 1)	0	Non
F	(4 ; –1)	16	Oui
G	(6 ; 3)	0	Non

3.a. Les points dont les coordonnées vérifient l'inégalité $2x–5y+3 > 0$ sont situés <u>en-dessous de la droite (d)</u>.

b. Les points dont les coordonnées vérifient $2x–5y+3 = 0$ sont situés <u>sur de la droite (d)</u>.

c. Les points dont les coordonnées vérifient $2x–5y+3 < 0$ sont situés <u>au-dessus de la droite (d)</u>.

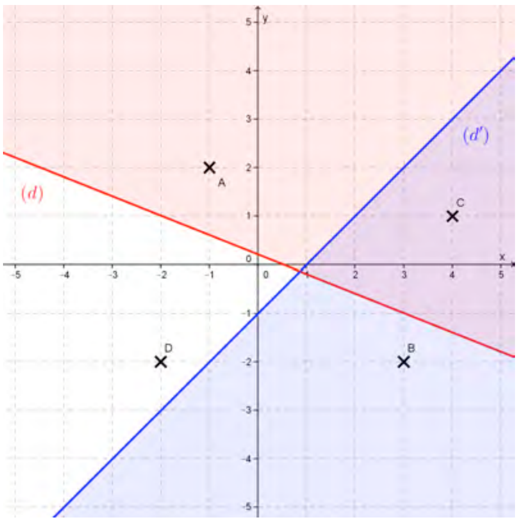
4. Le demi-plan situé au dessus de la droite (d) a pour inéquation $2x–5y+3 < 0$; c'est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient cette inéquation.

5 Système d'inéquations à deux inconnues

1.a. Sur le graphique 1, le point A est dans la zone colorée. Il n'est donc pas solution de l'inéquation $2x+5y < 1$.
Sur le graphique 2, le point A est dans la zone non colorée. Il est donc solution de l'inéquation $–x+y > 1$.

b. Le point B est solution de l'inéquation $2x+5y < 1$ et n'est pas solution de l'inéquation $–x+y > 1$.
Le point C n'est pas solution de l'inéquation $2x+5y < 1$ et n'est pas solution de l'inéquation $–x+y > 1$.
Le point D est solution de l'inéquation $2x+5y < 1$ et est solution de l'inéquation $–x+y > 1$.

2.



3.a. Le point A n'est pas solution du système (S) car il n'est pas solution de la première inéquation.

b. Le point B n'est pas solution du système (S) car il n'est pas solution de la seconde inéquation.
Le point C n'est pas solution du système (S) car il n'est solution d'aucune des deux inéquations du système (S).
Le point D est solution du système (S) car il est solution des deux inéquations du système (S).

c. Les solutions du système (S) sont <u>les points qui ne sont dans aucune partie colorée</u>.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à résoudre un système d'équations

Exercice 1

$4\times1+5\times2 = 4+10 = 14$ et $2\times1-3\times2 = 2-6 = -4$,

donc (1 ; 2) est solution du système $\begin{cases}4x+5y=14\\2x-3y=-4\end{cases}$.

Exercice 2

$-5-6\times5 = -35$ et $-7\times(-5)+2\times5 = 45$,

donc (–5 ; 5) est solution du système $\begin{cases}x-6y=-35\\-7x+2y=45\end{cases}$.

Exercice 3

$2\times5+7\times2 = 10+14 = 24$ et $3\times5-4\times2 = 15-8 = 7$,

donc (5 ; 2) est la solution du système $\begin{cases}2x+7y=24\\3x-4y=7\end{cases}$,

c'est-à-dire $A(5\ ;\ 2)$ est le point d'intersection des droites (d) : $2x+7y=24$ et (d') : $3x-4y=7$.

Exercice 4

a. $(x\ ;\ y)=(2\ ;\ 4)$; b. $(x\ ;\ y)=(-11\ ;\ 2)$.

Exercice 5

a. $(x\ ;\ y)=(0\ ;\ 2)$; b. $(x\ ;\ y)=(-2\ ;\ 1{,}5)$.

Exercice 6

a. $(e\ ;\ f)=(1{,}2\ ;\ -0{,}2)$; b. $(e\ ;\ f)=(-4\ ;\ -2)$.

Exercice 7

a. $(x\ ;\ y)=(-18\ ;\ 5)$; b. $(x\ ;\ y)=(3\ ;\ -1)$.

Exercice 8

a. $(x\ ;\ y)=(-1\ ;\ 1)$; b. $(x\ ;\ y)=(-2\ ;\ 0)$.

Exercice 9

a. $(i\ ;\ j)=(3\ ;\ 1)$; b. $(i\ ;\ j)=(0{,}6\ ;\ 0{,}2)$.

Exercice 10

On donne les droites (d) : $3x+4y=5$,
(d') : $-6x+5y=16$.

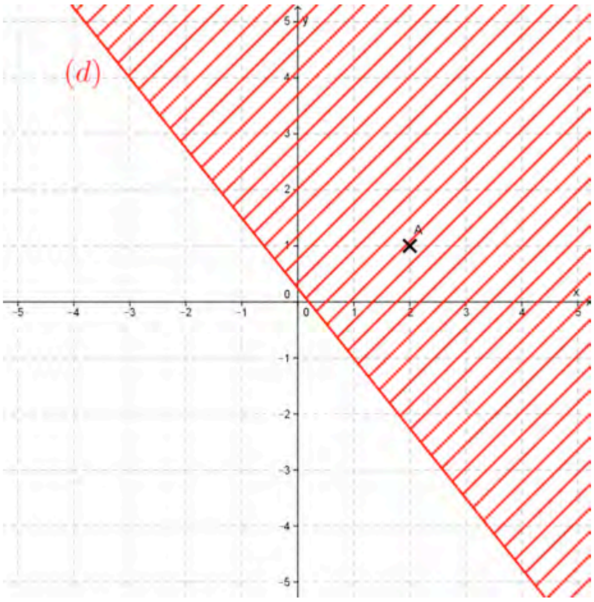
1. (–1 ; 2) est la solution du système $\begin{cases}3x+4y=5\\-6x+15y=16\end{cases}$.

2. $A(-1\ ;\ 2)$ est le point d'intersection de (d) et (d').

2 Apprendre à résoudre un système d'inéquations

Exercice 11

1.2. (d) est la droite d'équation $5x+4y-1=0$,
A est le point de coordonnées $(2\ ;\ 1)$.

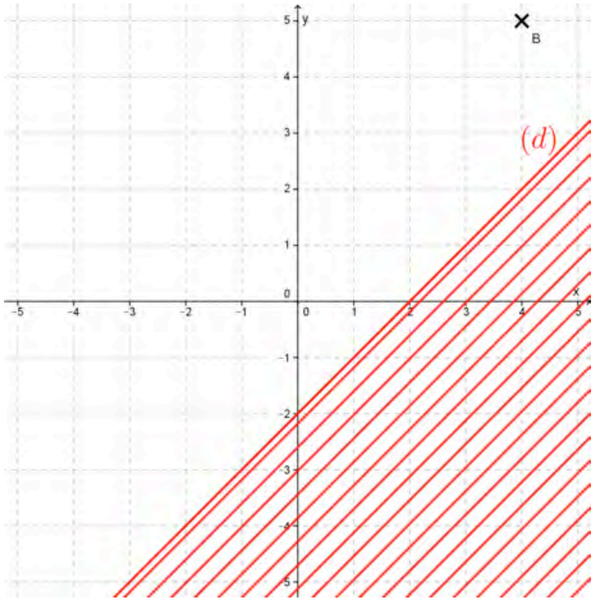


3.a. $5\times2+4\times1-1 = 13 > 0$, donc les coordonnées du point A ne vérifient pas l'inéquation $5x+4y-1<0$.

b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $5x+4y-1<0$ est le demi-plan non coloré, situé en-dessous de (d), droite non comprise.

Exercice 12

1. 2. (d') est la droite d'équation $y=x-2$,
B est le point de coordonnées $(4\ ;\ 5)$.



3.a. $5 \geq 4-2$, donc les coordonnées du point B vérifient donc l'inéquation $y \geq x-2$.

b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \geq x-2$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d'), droite comprise.

Exercice 13

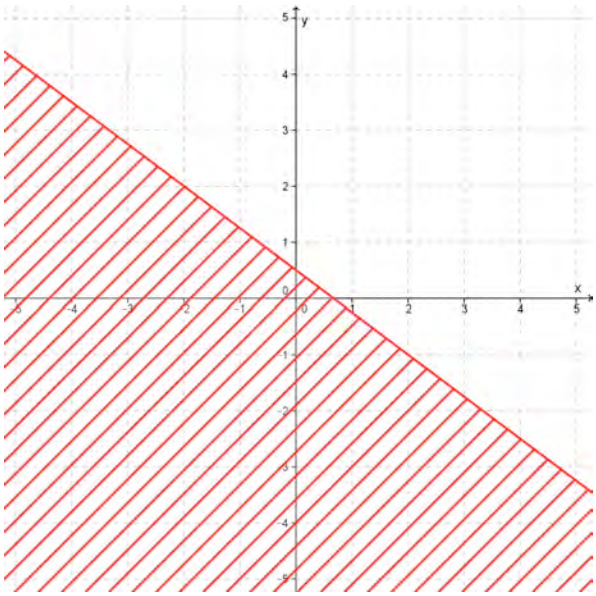
(d) est la droite d'équation $x - 2y + 2 = 0$.

a. Inéquation du demi-plan rouge : $x - 2y + 2 < 0$;

b. inéquation du demi-plan bleu : $x - 2y + 2 > 0$.

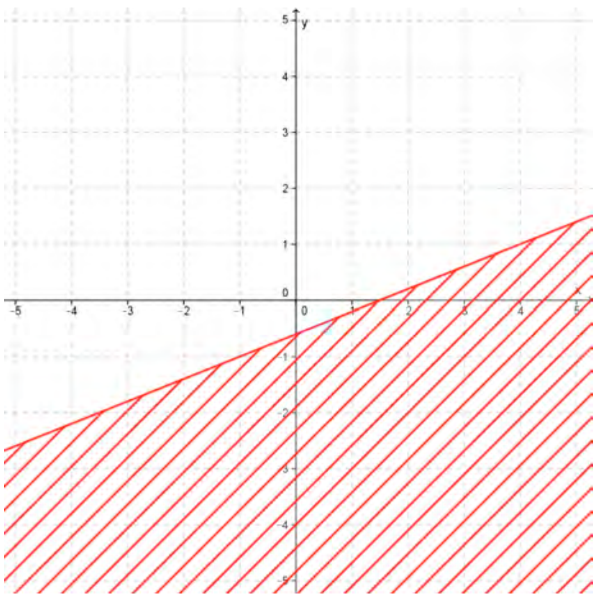
Exercice 14

a. (d) est la droite d'équation $3x + 4y - 2 = 0$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x + 4y - 2 > 0$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d), droite non comprise.

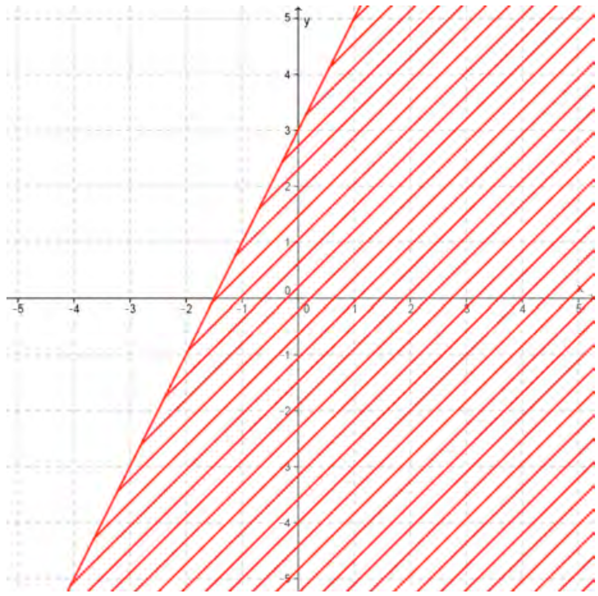
b. (d') est la droite d'équation $2x - 5y - 3 = 0$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x - 5y - 3 \leq 0$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d'), droite comprise.

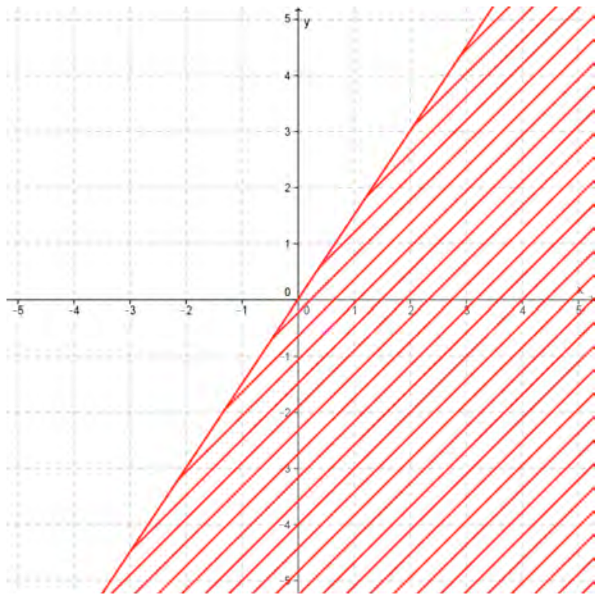
Exercice 15

a. (d) est la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x - y + 3 < 0$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d), droite non comprise.

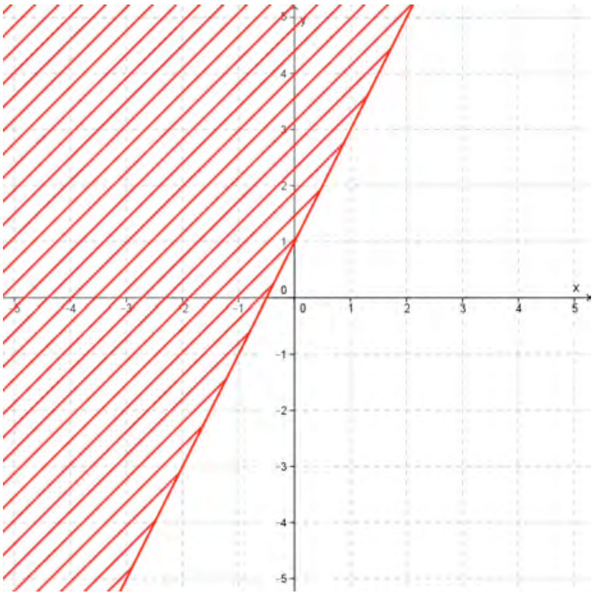
b. (d') est la droite d'équation $-3x + 2y = 0$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x + 2y \geq 0$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d'), droite comprise.

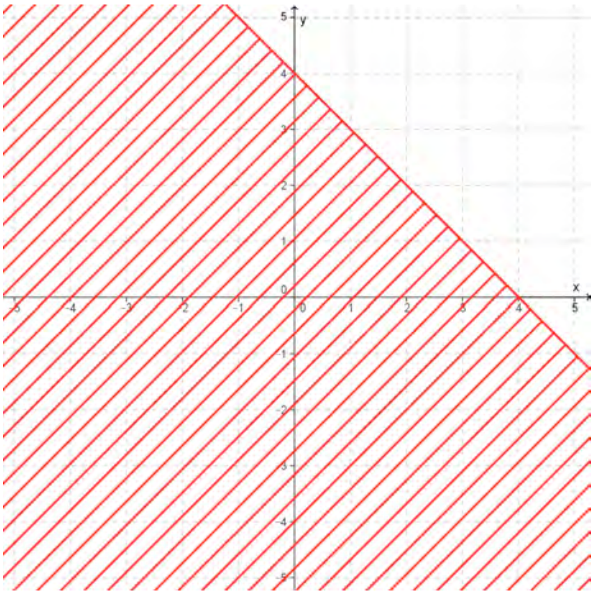
Exercice 16

a. (d) est la droite d'équation $y = 2x + 1$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $y < 2x + 1$ est le demi-plan non coloré, situé en-dessous de (d), droite non comprise.

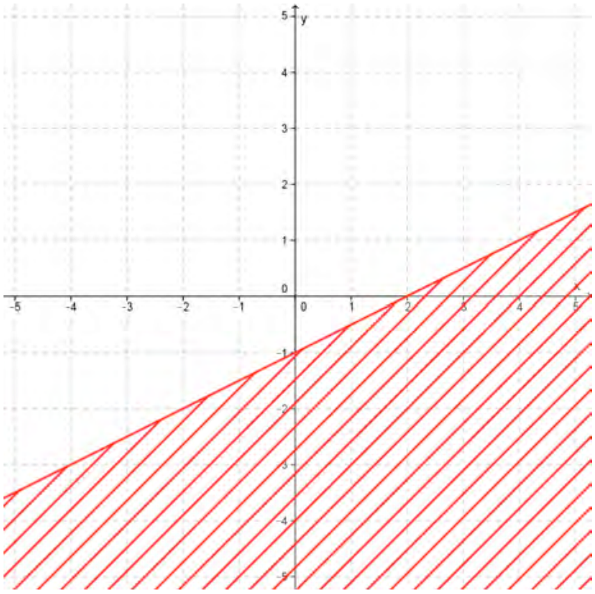
b. (d') est la droite d'équation $y = -x + 4$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \geq -x + 4$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d'), droite comprise.

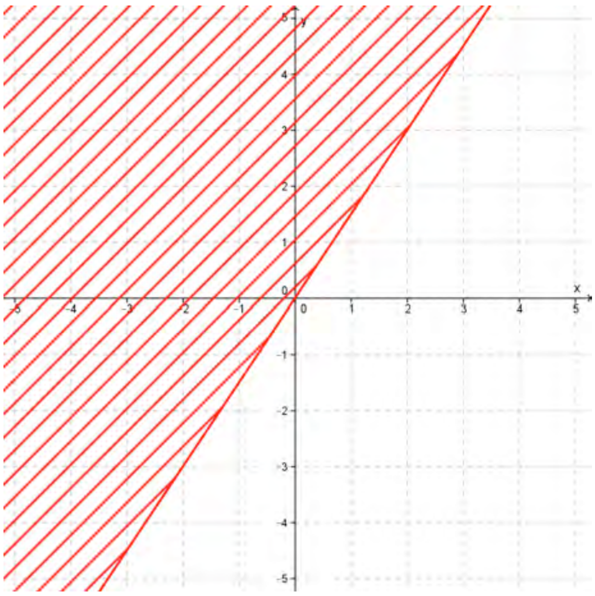
Exercice 17

a. (d) est la droite d'équation $y = 0{,}5x - 1$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $y > 0{,}5x - 1$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d), droite non comprise.

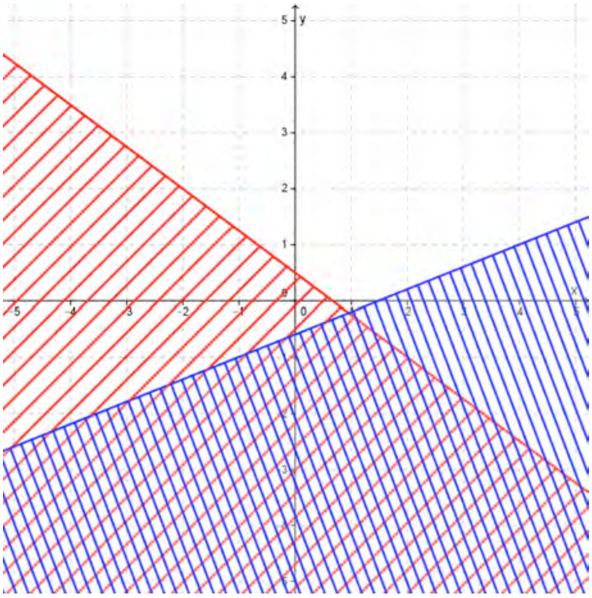
b. (d') est la droite d'équation $y = 1{,}5x$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \leq 1{,}5x$ est le demi-plan non coloré, situé en-dessous de (d'), droite comprise.

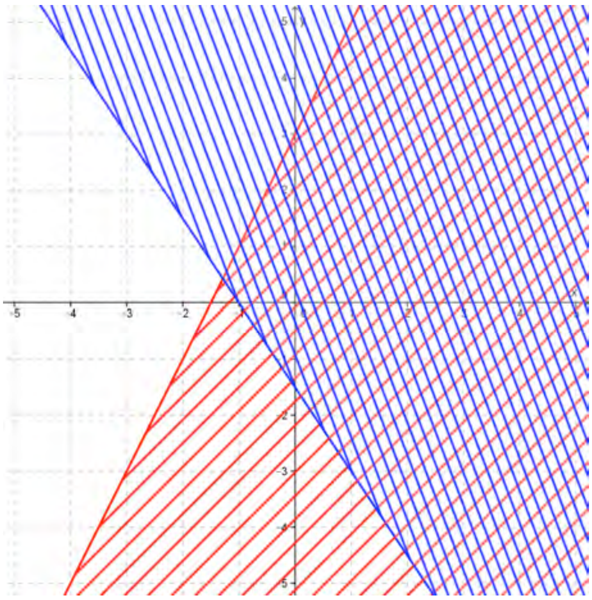
Exercice 18

a. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $3x + 4y - 2 = 0$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $2x - 5y - 3 = 0$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} 3x + 4y - 2 > 0 \\ 2x - 5y - 3 \leq 0 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge non comprise et demi-droite bleue comprise.

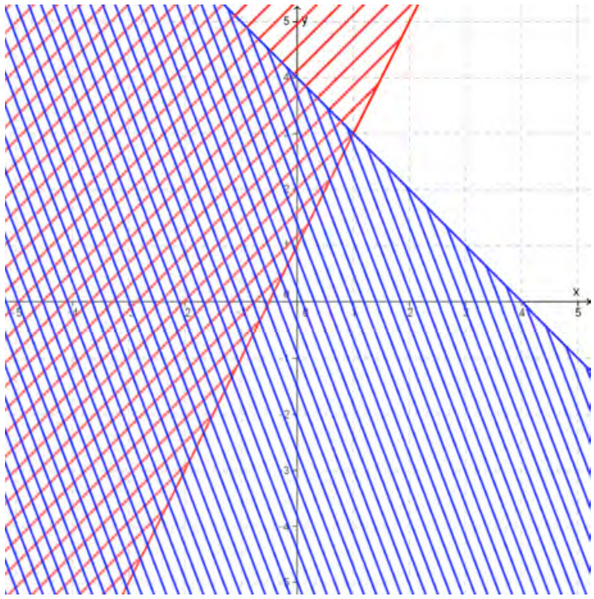
b. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $2x - y + 3 = 0$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $-3x - 2y - 3 = 0$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} 2x - y + 3 < 0 \\ -3x - 2y - 3 \geq 0 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge non comprise et demi-droite bleue comprise.

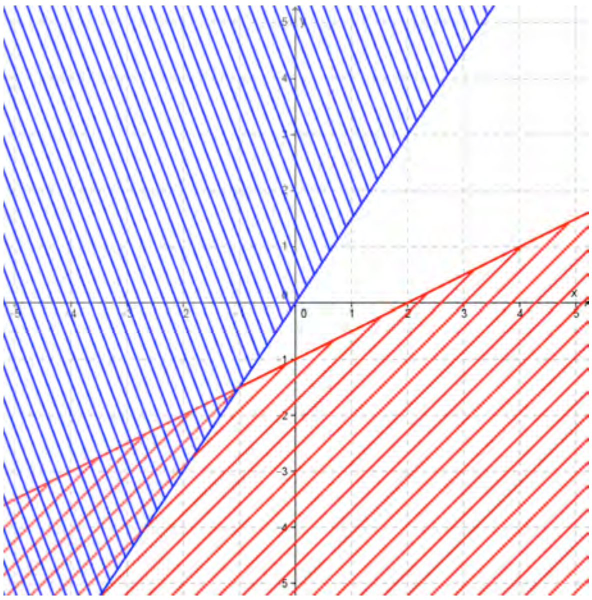
Exercice 19

a. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $y = 2x + 1$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $y = -x + 4$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} y < 2x + 1 \\ y \geq -x + 4 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge non comprise et demi-droite bleue comprise.

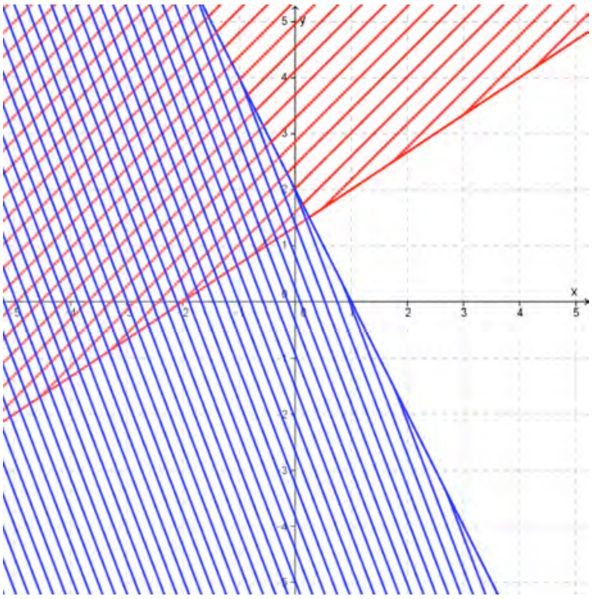
b. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $y = 0{,}5x - 1$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $y = 1{,}5x$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} y > 0{,}5x - 1 \\ y \leq 1{,}5x \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge non comprise et demi-droite bleue comprise.

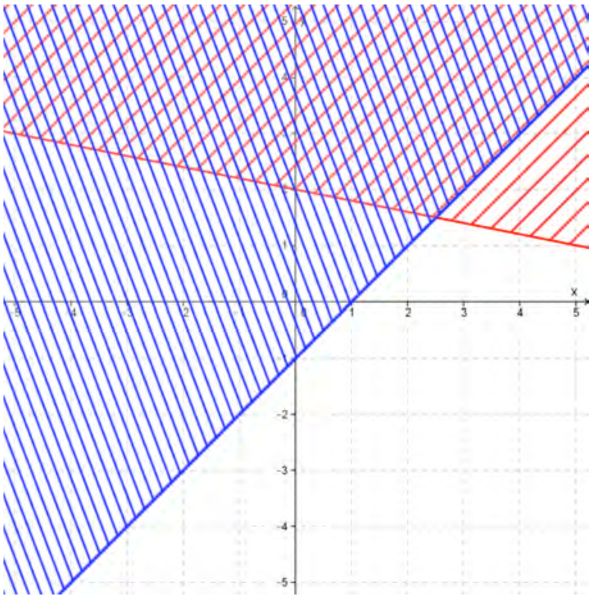
Exercice 20

a. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $-2x+3y-4=0$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $y=-2x+2$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases}-2x+3y-4\le 0\\ y\ge -2x+2\end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge et demi-droite bleue comprises.

b. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $x+5y-10=0$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $y=x-1$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases}x+5y-10<0\\ y\le x-1\end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge non comprise et demi-droite bleue comprise.

Activités d'application

Systèmes d'équations

Exercice 21

a. $(x\ ;\ y)=(1\ ;\ -1)$ est la solution du système

$$\begin{cases}2x+y=1\\4x+3y=1\end{cases}.$$

b. $(x\ ;\ y)=(-2\ ;\ -1)$ est la solution du système

$$\begin{cases}x-3y=1\\3x+2y=-8\end{cases}.$$

Exercice 22

a. $(a\ ;\ b)=(3\ ;\ -1)$ est la solution du système

$$\begin{cases}a+b=2\\a-b=4\end{cases}.$$

b. $(a\ ;\ b)=(2\ ;\ 1)$ est la solution du système

$$\begin{cases}3a-b=5\\-a+3b=1\end{cases}.$$

Exercice 23

a. $(x\ ;\ y)=(-4\ ;\ -39)$ est la solution du système

$$\begin{cases}3x=-12\\6x-y=15\end{cases}.$$

b. $(s\ ;\ t)=\left(-\frac{4}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$ est la solution du système

$$\begin{cases}3s+3t=1\\4s+2t=-2\end{cases}.$$

Problèmes

Exercice 24

1. $4x+6y$ représente la masse de 4 bananes et 6 mangues, c'est-à-dire 3 kg.
$8x+7y$ représente la masse de 8 bananes et 7 mangues, c'est-à-dire 4 kg.

2.a. $(x\ ;\ y) =$ (0,15 ; 0,4) est la solution du système

$$\begin{cases} 4x + 6y = 3 \\ 8x + 7y = 4 \end{cases}.$$

b. La masse d'une banane est de 0,15 kg = <u>150 g</u> et celle d'une mangue est 0,4 kg = <u>400 g</u>.

Exercice 25

1. $a+e$ représente le nombre total d'entrées, c'est-à-dire 420.

$600a+200e$ représente la recette totale, c'est-à-dire 204 000 F CFA.

2.a. $(a\ ;\ e) =$ (390 ; 30) est la solution du système

$$\begin{cases} a + e = 420 \\ 600a + 200e = 204\,000 \end{cases}.$$

b. Le nombre d'entrées adultes est de <u>390</u> et celui d'entrées enfants est de <u>30</u>.

Exercice 26

1. $\begin{cases} 11x + 6y = 1\,000 \\ 8x + 8y = 1\,000 \end{cases}$.

2. $(x\ ;\ y) =$ (50 ; 75) est la solution de ce système.
Le nombre de places dans un bus moyen est de <u>50</u> et celui d'un grand bus est de <u>75</u>.

Exercice 27

1. $\begin{cases} b + a = 150 \\ b - a = 60 \end{cases}$.

2. $(a\ ;\ b) =$ (45 ; 105) est la solution de ce système.

Exercice 28

1. $\begin{cases} 9f = h \\ f + h = 14\,500 \end{cases}$.

2. $(h\ ;\ f) =$ (13 050 ; 1 450) est la solution de ce système. On en déduit qu'il y a eu <u>13 050 hommes</u> et <u>1 450 femmes</u> dans le stade.

Exercice 29

1. $\begin{cases} 2L + 2l = 16 \\ 4L + 2l = 26 \end{cases}$.

2. $(L\ ;\ l) =$ (5 ; 3) est la solution de ce système.
On en déduit que la longueur du rectangle vaut <u>5 cm</u> et sa largeur <u>3 cm</u>.

Intersection de droites

Exercice 30

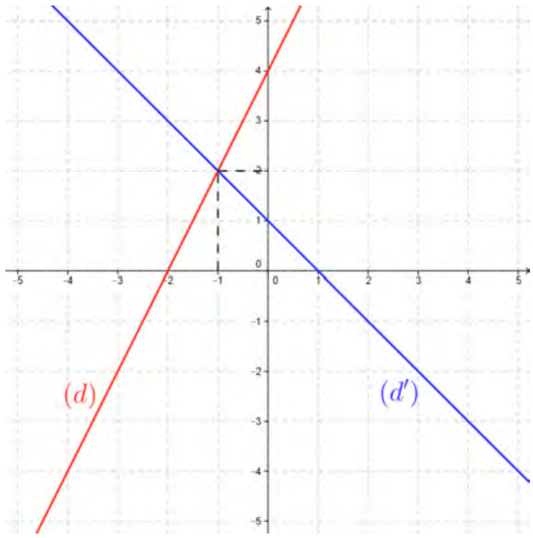
(d_1) est la droite (*rouge*) d'équation $2x - y + 5 = 0$.
(d_2) est la droite (*bleue*) d'équation $3x + 5y + 1 = 0$.

1. Coordonnées (*lues sur le manuel*) du point d'intersection de (d_1) et (d_2) : $A(-2\ ;\ 1)$.

2.a. On retrouve les coordonnées du point A, en résolvant le système : $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + 5y + 1 = 1 \end{cases}$.

Exercice 31

1. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $y = 2x + 4$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $y = -x + 1$.

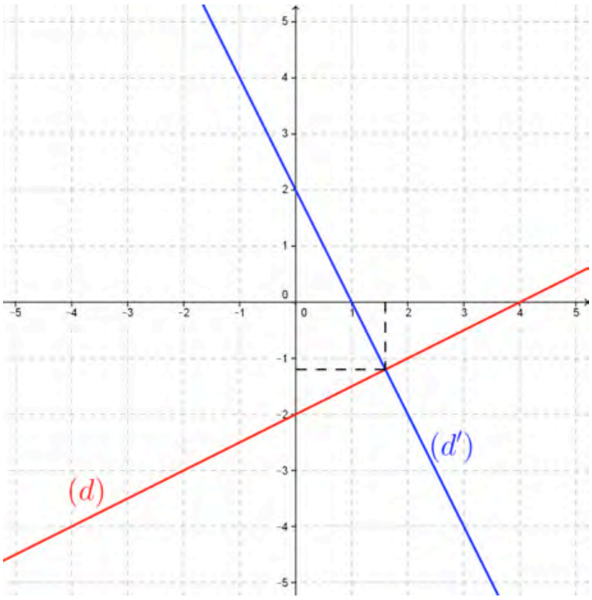


2. a. Coordonnées (*lues sur le manuel*) du point d'intersection de (d) et (d') : $A(-1\ ;\ 2)$.

b. On retrouve les coordonnées du point A, en résolvant le système : $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x + 1 \end{cases}$.

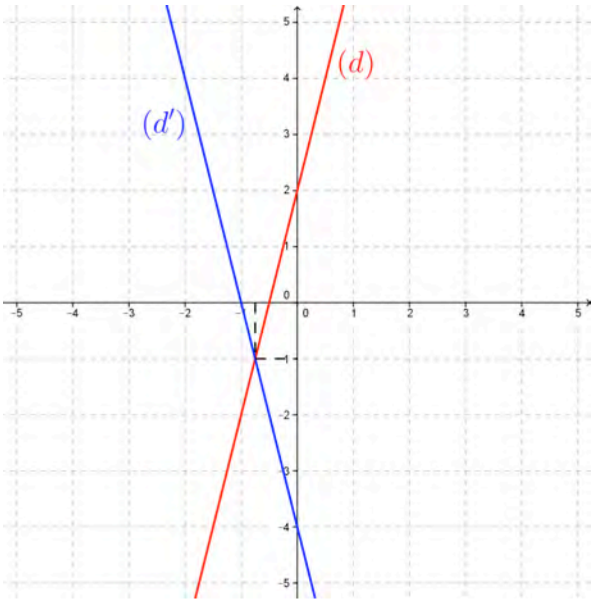
Exercice 32

a. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $x - 2y = 4$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $2x + y = 2$.



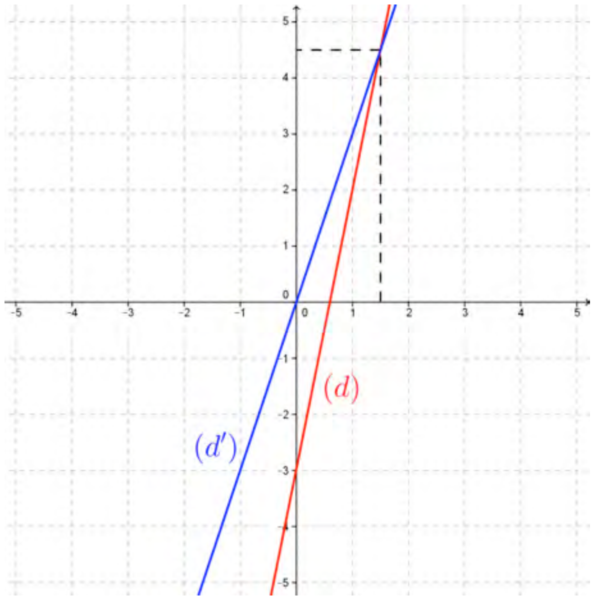
Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'), on résout le système $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$;
la solution est $(x\ ;\ y) = (1{,}6\ ;\ -1{,}2)$.

b. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $y = 4x + 2$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $y = -4x - 4$.



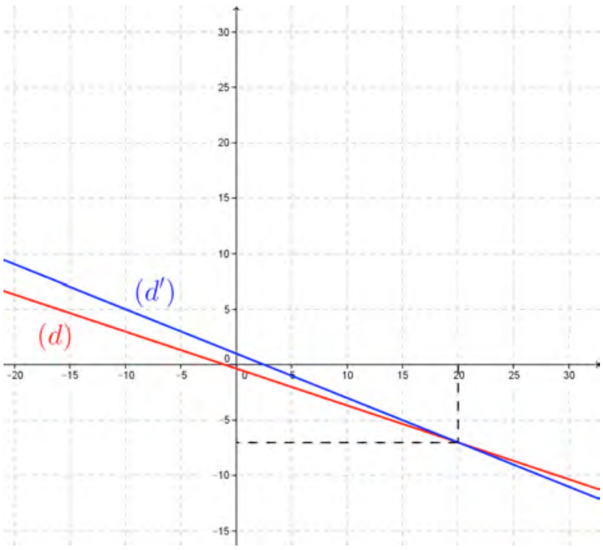
Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'), on résout le système $\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = -4x - 4 \end{cases}$;
la solution est $(x\ ;\ y) = (-0{,}75\ ;\ -1)$.

c. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $5x - y = 3$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $y = 3x$.



Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'), on résout le système $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ y = 3x \end{cases}$;
la solution est $(x\ ;\ y) = (1{,}5\ ;\ 4{,}5)$.

d. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $x + 3y + 1 = 0$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $2x + 5y - 5 = 0$.



Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'), on résout le système $\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ 2x + 5y - 5 = 0 \end{cases}$;
la solution est $(x\ ;\ y) = (20\ ;\ -7)$.

Demi-plan et inéquation à deux inconnues

Exercice 33

Les points $A(1\ ;\ 2)$, $D(2\ ;\ 2)$ et $F(0\ ;\ 0)$ appartiennent au demi-plan d'inéquation $4x-y+2 > 0$.

Exercice 34

Les demi-plans qui contiennent le point $A(3\ ;\ 1)$ sont ceux d'inéquations :
$2x-y-1 > 0$;
$-5x+3y-2 \leq 0$;
$-x+2y+1 \geq 0$;
$x-5 < 0$.

Exercice 35

(d) est la droite d'équation $2x-5y+3=0$.

1.a. Les coordonnées de A (*lues sur le manuel*) sont $(2\ ;\ 3)$.

b. $2x_A-5y_A+3 = 2\times2-5\times3+3 = -8 < 0$.

2. Inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d) comprise : $2x-5y+3 \leq 0$.

Exercice 36

(d') est la droite d'équation $y=-1{,}5x+2$.

1.a. Les coordonnées de B sont $(-2\ ;\ 1)$.

b. $-1{,}5x_B+2 = -1{,}5\times(-2)+2 = 5$; donc $y_B < -1{,}5x_B+2$.

2. Inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d') non comprise : $y < -1{,}5x+2$.

Exercice 37

a. • (d_1) est la droite d'équation $3x+y-1=0$;
• $O(0\ ;\ 0)$ appartient au demi-plan non coloré, de frontière (d_1) ;
• $3\times0+0-1=-1<0$.
Donc l'inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d_1), est : $3x+y-1<0$.

b. • (d_2) est la droite d'équation $x-y+1=0$.
• $O(0\ ;\ 0)$ n'appartient pas au demi-plan non coloré, de frontière (d_2) ;
• $0-0+1=1>0$.
Donc l'inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d_2) est : $x-y+1<0$.

Exercice 38

a. • (d_1) est la droite d'équation $y=-0{,}25x+2$;
• $O(0\ ;\ 0)$ appartient au demi-plan non coloré, de frontière (d_1) ;
• $0<-0{,}25\times0+2$.
Donc l'inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d_1), est : $y<-0{,}25x+2$.

b. • (d_2) est la droite d'équation $y=6x-3$;
• $O(0\ ;\ 0)$ n'appartient pas au demi-plan non coloré, de frontière (d_2) ;
• $0>6\times0-3$.
Donc l'inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d_2), est : $y<6x-3$.

Système d'inéquations

Exercice 39

$J(-2\ ;\ -3)$, $N(1\ ;\ -3)$ et $O(0\ ;\ 0)$ appartiennent à l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} 3x+y-1<0 \\ 2x-3y+4 \geq 0 \end{cases}$.

Exercice 40

(d) est la droite d'équation $4x-y+2=0$;
(d') est la droite d'équation $x+2y-1=0$.

1.a. Coordonnées de A (*lues sur le manuel*) : $(-2\ ;\ 3)$.

b. $4x_A-y_A+2 = 4\times(-2)-3+2 = -9 < 0$;
$x_A+2y_A-1 = -2+2\times3-1 = 3 > 0$.

2. Donc les points de la partie non colorée du plan sont les solutions du système : $\begin{cases} 4x-y+2<0 \\ x+2y-1>0 \end{cases}$.

Exercice 41

(d) est la droite d'équation $x-2y+1=0$;
(d') est la droite d'équation $4x+5y-1=0$.

$A(0\ ;\ 1)$ appartient à la partie non colorée du plan ;
or : $0-2\times1+1=-1<0$ et $4\times0+5\times1-1=4>0$;
donc les points de la partie non colorée du plan sont les solutions du système : $\begin{cases} x-2y+1<0 \\ 4x+5y-1>0 \end{cases}$.

Exercice 42

(d) est la droite d'équation $x-4y+7=0$;
(d') est la droite d'équation $4x-y+5=0$.

a. $0-4\times0+7=7>0$ et $4\times0-0+5=5>0$;
donc les points de la partie du plan colorée en rouge sont les solutions du système : $\begin{cases} x-4y+7>0 \\ 4x-y+5>0 \end{cases}$;

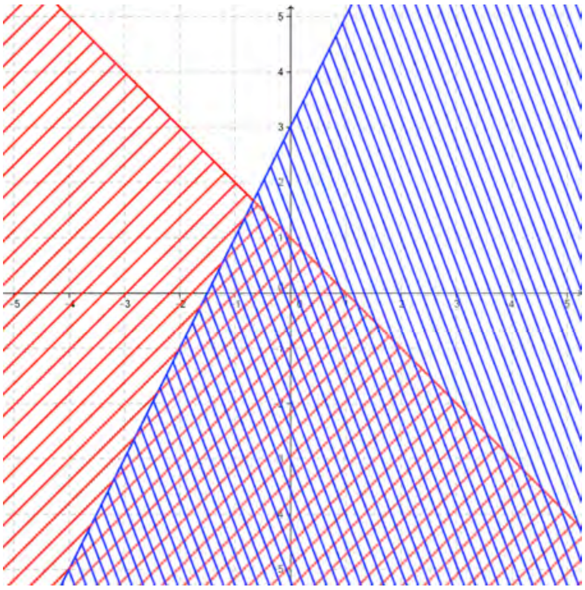
b. les points de la partie du plan colorée en bleu
[*changement de position par rapport à la droite (d)*]
sont les solutions du système : $\begin{cases} x-4y+7<0 \\ 4x-y+5>0 \end{cases}$;

c. les points de la partie du plan colorée en vert
[*changement de position par rapport à la droite (d')*]
sont les solutions du système : $\begin{cases} x-4y+7>0 \\ 4x-y+5<0 \end{cases}$;

d. les points de la partie du plan colorée en jaune
[*changement de position par rapport aux droites (d) et (d')*]
sont les solutions du système : $\begin{cases} x-4y+7<0 \\ 4x-y+5<0 \end{cases}$

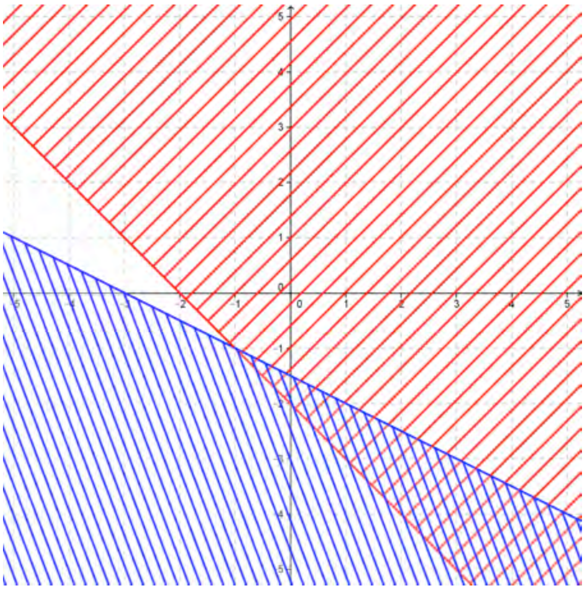
Exercice 43

a. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $x + y - 1 = 0$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $4x - 2y + 6 = 0$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 4x - 2y + 6 < 0 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge comprise et demi-droite bleue non comprise.

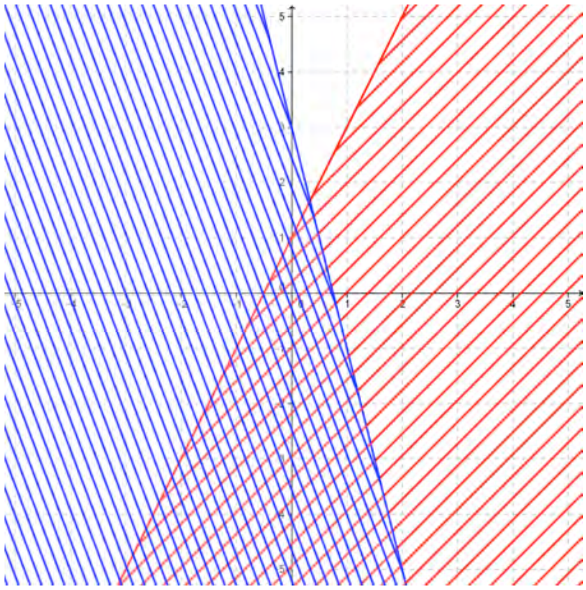
b. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $x + y + 2 = 0$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $2x + 4y + 6 = 0$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} x + y + 2 \leq 0 \\ 2x + 4y + 6 > 0 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge comprise et demi-droite bleue non comprise.

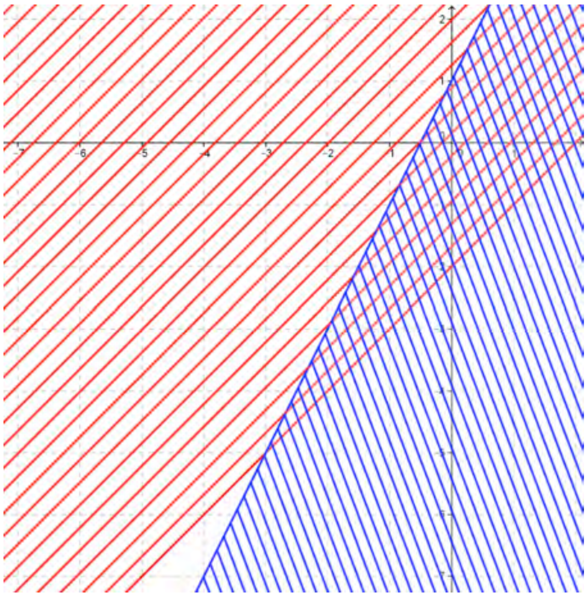
Exercice 44

a. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $y = 2x + 1$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $y = -4x + 3$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} y \geq 2x + 1 \\ y > -4x + 3 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge comprise et demi-droite bleue non comprise.

b. (d) est la droite (*rouge*) d'équation $y = x - 2$.
(d') est la droite (*bleue*) d'équation $y = 2x + 1$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} y \leq x - 2 \\ y > 2x + 1 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge comprise et demi-droite bleue non comprise.

Exercice 45 Résolution par substitution

Résolution du système (S) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$.

1. Finalisation des travaux :

Mouafo	René
$2x-3y = 5$	$2x-3y = 5$
$2x+3\left(\dfrac{6-x}{2}\right) = 5$	$2(6-2y)-3y = 5$
$4x-3(6-x) = 10$	$12-4y-3y = 5$
$4x-18+3x = 10$	$-7y = -7$
$7x = 28$	$y = 1.$
$x = 4.$	D'où $x = 6-2\times1 = 4$.
D'où : $y = \dfrac{6-4}{2} = 1$.	Solution de (S) : $(4\ ;\ 1)$.
Solution de (S) : $(4\ ;\ 1)$.	

2.a. Les deux solutions trouvées sont identiques.

b. C'est René qui a effectué les calculs les plus rapides.

Exercice 46 Un système, plusieurs méthodes

(S) est le système $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 11x + 3y = 12 \end{cases}$.

1. Elimination de l'inconnue x.

a. $\begin{cases} 55x + 22y = 11 \\ -55x - 15y = -60 \end{cases}$.

b. On additionne les deux nouvelles égalités :

$$7y = -49$$
$$y = -7\ ;$$

d'où : $5x+2\times(-7) = 1$

$$5x = 15$$
$$x = 3.$$

La solution du système (S) est $(3\ ;\ -7)$.

2. Elimination de l'inconnue y.

a. $\begin{cases} 15x + 6y = 3 \\ -22x - 6y = -24 \end{cases}$.

b. On additionne les deux nouvelles égalités. :

$$-7x = -21$$
$$x = 3\ ;$$

d'où : $5\times3+2y = 1$

$$2y = -14$$
$$y = -7.$$

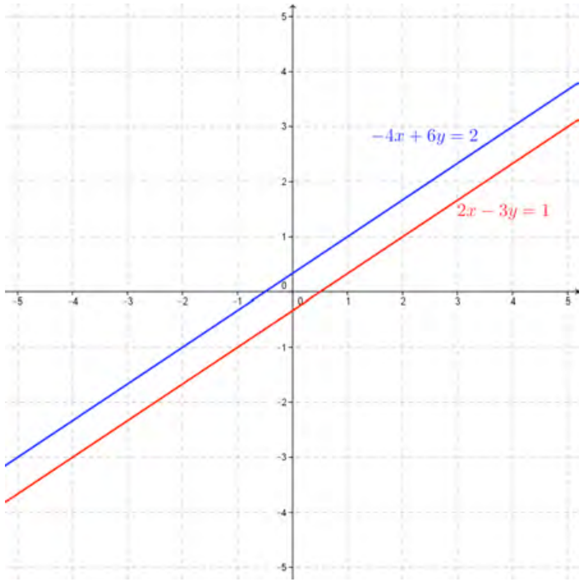
La solution du système (S) est $(3\ ;\ -7)$.

3. Les deux solutions sont identiques.

Exercice 47 Système sans solution

1. Le produit d'un nombre a par 0 vaut toujours 0. Il n'existe donc pas de nombre a tel que $0\times a=5$.

2.a.



b. Les deux droites sont parallèles.
En effet : $2\times6-(-4)\times(-3)=12-12=0$.

3. (S) est le système $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$.

a. On multiplie la première équation par 2 :

$\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$;

on additionne les deux équations : $0x+0y = 4$.
Donc le système (S) n'a pas de solution.

b. Si le système (S) avait une solution, elle correspondrait aux coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $2x - 3y = 1$ et $-4x + 6y = 2$.

Or ces deux droites sont strictement parallèles ; donc elles n'ont pas de point d'intersection et le système (S) n'a pas de solution.

Exercice 48 Calculer pour contrôler la lecture

1. Résolution du système $\begin{cases} 13x + 12y = 50 \\ x - y = -2 \end{cases}$.

On multiplie la seconde équation par 12 :

$\begin{cases} 13x + 12y = 50 \\ 12x - 12y = -24 \end{cases}$.

On additionne les deux nouvelles égalités :

$$25x = 26$$
$$x = \frac{26}{25}$$
$$x = 1{,}04\ ;$$

d'où : $1{,}04-y = -2$

$$-y = -3{,}04$$
$$y = 3{,}04.$$

La solution du système est $(1{,}04\ ;\ 3{,}04)$.

2. Le professeur rappelle à l'élève qu'on ne peut pas affirmer à partir d'une représentation graphique.

Exercice 49 Pas de conclusion hâtive

(d) est la droite d'équation $x - 2y - 3 = 0$.

1.a. Points situés « au-dessus » de (d) :
(1 ; 2), (3 ; 1), … ;

b. points situés « en-dessous » de (d) :
(3 ; –1), (4 ; 0),….

2. (3 ; –1) et (4 ; 0) vérifient l'inégalité $x - 2y - 3 > 0$.

3. Kadidiatou pense *à tort* qu'on peut relier le signe d'inégalité figurant dans une inéquation avec la position par rapport à la droite d'équation associée.

Exercice 50 Sur la frontière

(d) est la droite d'équation $3x + 2y - 4 = 0$.

1.

Point	Coordonnées (x ; y)	$3x + 2y - 4$
A	(2 ; –1)	0
B	(2 ; 1)	4

2.a. A n'appartient pas au plan d'inéquation
$3x + 2y - 4 > 0$;

b. A appartient au plan d'inéquation
$3x + 2y - 4 \geq 0$.

3.a. B appartient au plan d'inéquation
$3x + 2y - 4 > 0$;

b. B appartient au plan d'inéquation
$3x + 2y - 4 \geq 0$.

4.a. Le point A appartient au demi-plan de frontière (d) et au-dessus de (d), droite comprise, et n'appartient pas au demi-plan de frontière (d) et au-dessus de (d), droite non comprise.

b. Le point B appartient au demi-plan de frontière (d) et au-dessus de (d), droite comprise, et appartient au demi-plan de frontière (d) et au-dessus de (d), droite non comprise.

Exercices d'approfondissement

Exercice 51 Système et racines carrées

a. Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par $\sqrt{3}$ et la seconde par $-\sqrt{2}$,

$$\begin{cases} \sqrt{2}\ x + \sqrt{3}\ y = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}\ x + \sqrt{2}\ y = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{équivaut à}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sqrt{2}\ x + \sqrt{3}\sqrt{3}\ y = \sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}\sqrt{3}\ x - \sqrt{2}\sqrt{2}\ y = -\sqrt{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{6}\ x + 3\ y = \sqrt{6} \\ -\sqrt{6}\ x - 2\ y = -\sqrt{6} \end{cases}.$$

Solution de ce système : $\underline{(x\ ;\ y) = (1\ ;\ 0)}$.

b. . Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par $\sqrt{3}$ et la seconde par $-\sqrt{2}$,

$$\begin{cases} \sqrt{2}\ x + \sqrt{3}\ y = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}\ x + \sqrt{2}\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{équivaut}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sqrt{2}\ x + \sqrt{3}\sqrt{3}\ y = \sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}\sqrt{3}\ x - \sqrt{2}\sqrt{2}\ y = \sqrt{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{6}\ x + 3\ y = \sqrt{6} \\ -\sqrt{6}\ x - 2\ y = \sqrt{6} \end{cases}.$$

Solution de ce système : $\underline{(x\ ;\ y) = (-5\ ;\ 2\sqrt{6})}$.

Exercice 52 Système et fractions

1.a. Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par 15 et la seconde par 4,

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{3} + \dfrac{4y}{5} = \dfrac{2}{15} \\ \dfrac{3x}{2} - \dfrac{5y}{4} = \dfrac{11}{4} \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} 10x + 12y = 2 \\ 6x - 5y = 11 \end{cases}.$$

b. Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par 6 et la seconde par –10,

$$\begin{cases} 10x + 12y = 2 \\ 6x - 5y = 11 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} 60x + 72y = 12 \\ -60x + 50y = -110 \end{cases}.$$

Solution de ce système : $\underline{(x\ ;\ y) = \left(\dfrac{71}{61}\ ;\ \dfrac{-49}{61}\right)}$.

2.a. Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par 12 et la seconde par –15,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-x}{3} + \dfrac{y}{5} = \dfrac{-1}{15} \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}.$$

Solution de ce système : $\underline{(x\ ;\ y) = \left(1\ ;\ \dfrac{4}{3}\right)}$.

b. Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par 8 et la seconde par –60,

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{2} + \dfrac{9y}{8} = \dfrac{-15}{8} \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{2y}{15} = \dfrac{-8}{15} \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} 12x + 9y = -15 \\ -12x + 8y = 32 \end{cases}.$$

Solution de ce système : $\underline{(x\ ;\ y) = (-2\ ;\ 1)}$.

Exercice 53 Sodas citron et sodas orange

On note c le prix d'un soda citron et o le prix d'un soda orange ; $(c\ ;\ o)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 3c + 5o = 3\ 300 \\ 6c + 2o = 3\ 000 \end{cases}.$$

La solution de ce système est : $(c\ ;\ 0) = (350\ ;\ 450)$.

Donc les clients de la 3e table vont payer :

$5 \times 350 + 4 \times 450 = \underline{3\ 550\ \text{F CFA}}$.

Exercice 54 Intersection de droites

a. Equation de la droite (d), qui passe par les points $A(4\ ;\ 2)$ et $B(-2\ ;\ -1)$: $x - 2y = 0$;

équation de la droite (d'), qui passe par les points $C(-1\ ;\ 2)$ et $D(8\ ;\ -1)$: $x + 3y = 5$.

Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'), on résout le système $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$;

la solution de ce système est : $(x\ ;\ y) = (2\ ;\ 1)$,

donc les droites (d) et (d') se coupent au point de coordonnées $(2\ ;\ 1)$.

b. Equation de la droite (d), qui passe par les points $A(1\ ;\ 4)$ et $B(4\ ;\ -2)$: $2x + y = 6$;

équation de la droite (d'), qui est perpendiculaire à (d) et passe par le point $C(-1\ ;\ -2)$: $x - 2y = 3$.

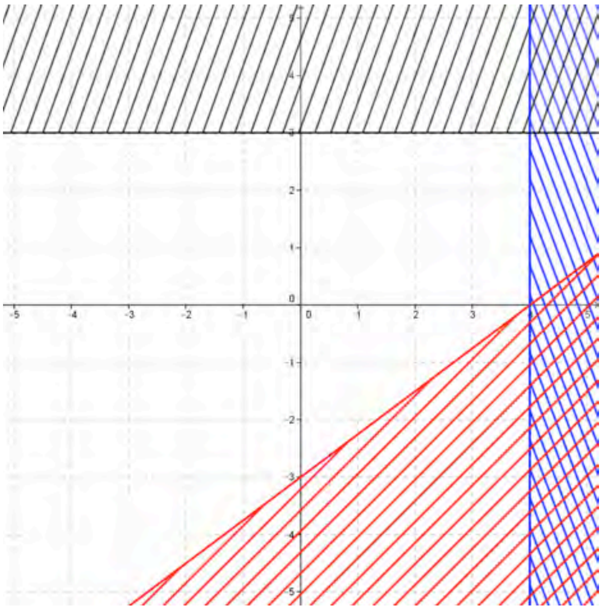
Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'), on résout le système $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$;

la solution de ce système est : $(x\ ;\ y) = (3\ ;\ 0)$,

donc les droites (d) et (d') se coupent au point de coordonnées $(3\ ;\ 0)$.

Exercice 55 Points à coordonnées entières

1. La droite *bleue* a pour équation : $x = 4$,
la droite *noire* a pour équation : $y = 3$,
la droite *rouge* a pour équation : $3x - 4y - 12 = 0$.



Le domaine du plan qui correspond au système d'inéquations $\begin{cases} x < 4 \\ y \leq 3 \\ 3x - 4y - 12 \leq 0 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée de ce plan, segment bleu non compris, demi-droites noire et rouge comprises.

2. $(1\ ;\ 3)$, $(2\ ;\ 2)$, $(3\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ -1)$, $(-2\ ;\ 3)$, $(-4\ ;\ -2)$ … sont des exemples de coordonnées de points qui conviennent.

S'entraîner au BEPC

Exercice 56 Dimensions d'un rectangle

1. La solution du système $\begin{cases} x + y = 25 \\ y - x = 5 \end{cases}$ est $(10\ ;\ 15)$.

2. Soit y et x la longueur et la largeur, en cm, du rectangle ;
- le périmètre vaut 50 cm équivaut à $2(x + y) = 50$
c'est-à-dire $x + y = 25$,
- la longueur a 5 cm de plus que la largeur équivaut à $y - x = 5$,
- finalement x et y vérifient le système $\begin{cases} x + y = 25 \\ y - x = 5 \end{cases}$.

Donc la longueur du rectangle vaut 15 cm et sa largeur vaut 10 cm.

Exercice 57 L'âge du père

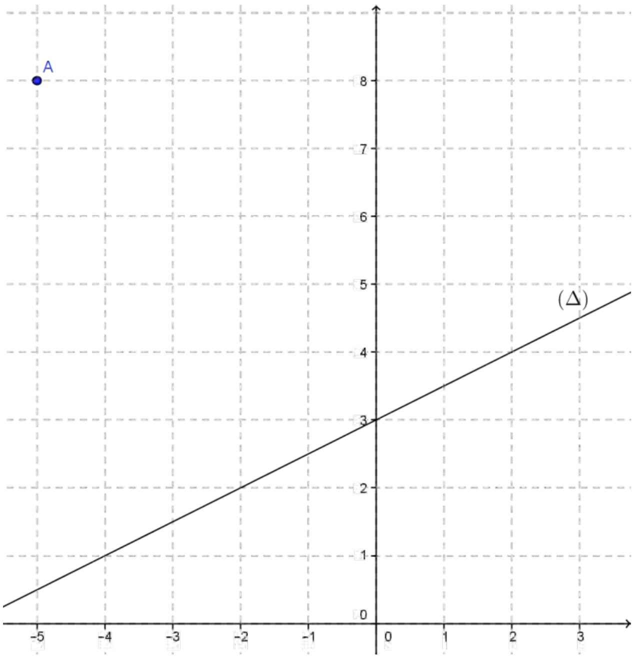
La solution du système $\begin{cases} x - 2y - 12 = 0 \\ x = 3y \end{cases}$ est $(36\ ;\ 12)$.

2. Soit x et y les âges respectifs du père et du cousin ;
- on a $x = 3y$, car l'âge du père est le triple de l'âge du cousin,
- on a $x - 12 = 2y$, car l'âge du père, diminué de 12, est le double de l'âge du cousin.
- finalement x et y vérifient le système $\begin{cases} x - 2y - 12 = 0 \\ x = 3y \end{cases}$.

Donc l'âge du père est 36 ans, celui du cousin est 12 ans.

Exercice 58 Recherche d'inéquation

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$, (Δ) est la droite d'équation $x - 2y + 6 = 0$.



2.a. Le point $A(-5\ ;\ 8)$ n'appartient pas au demi-plan de frontière (Δ) et contenant le point $O(0\ ;\ 0)$;
en effet : $x_O - 2y_O + 6 = 0 - 2 \times 0 - 6 = \underline{6 > 0}$,

$x_A - 2y_A + 6 = -5 - 2 \times 8 + 6 = \underline{-15 < 0}$.

b. Inéquation du demi-plan limité par (Δ) et contenant le point A : $\underline{x - 2y + 6 < 0}$.

Exercice 59 Fèves de Cacao

1. La solution du système $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ est $(7\ ;\ 5)$.

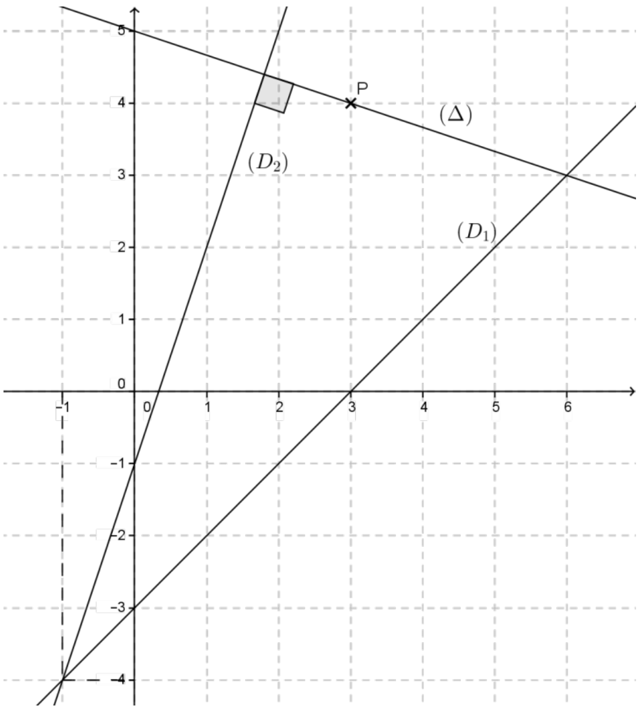
2. Soit x et y les productions respectives en tonnes des villages A et B ;
- on a $x + y = 12$, car A et B ont produit ensemble 12 tonnes de fèves,
- on a $x + 3 = 2y$, car si on ajoute 3 tonnes à la production de A, on obtient le double de la production de B,
- finalement x et y vérifient le système $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$.

Donc la production du village A est de 7 tonnes et celle du village B est de 5 tonnes.

Exercice 60 Équations cartésiennes de droites

1. La solution du système $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$ est $(-1\ ;\ -4)$.

2.a. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$, (D_1) et (D_2) sont les droites d'équations respectives $x - y - 3 = 0$ et $3x - y - 1 = 0$.



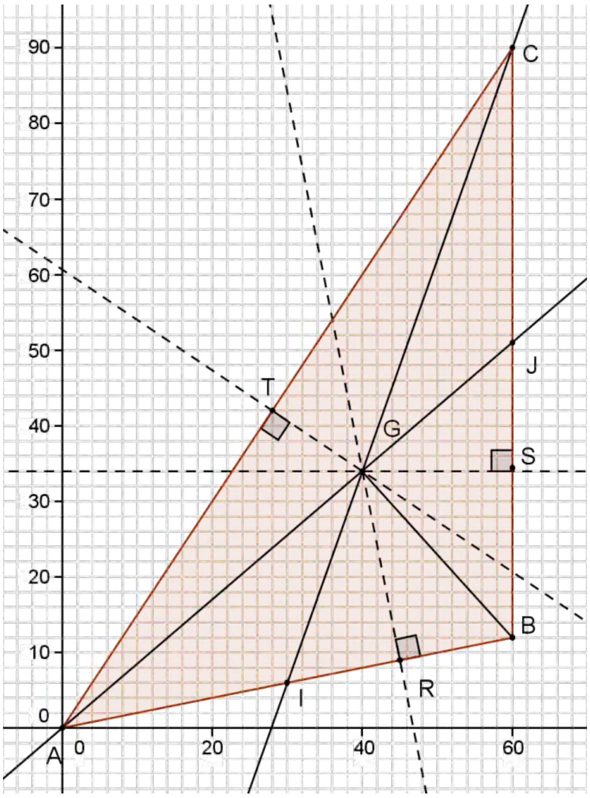
b. Les coordonnées du point d'intersection de (D_1) et (D_2) sont $(-1\ ;\ -4)$.

c. Equation de la droite (Δ), passant par $P(3\ ;\ 4)$ et perpendiculaire à (D_2) : $x + 3y = 15$.

Activités d'intégration

Exercice 61 Terrain à partager

1.



Dans le plan muni d'un repère orthonormé :

$A(0\ ;\ 0)$, $B(60\ ;\ 12)$, $C(60\ ;\ 90)$.

2.a. $I(30\ ;\ 6)$ est le milieu de $[AB]$;

$J(60\ ;\ 51)$ est le milieu de $[BC]$.

b. Équation de la médiane (IC) : $14x-5y = 390$;

Équation de la médiane (JA) : $17x-20y = 0$.

c. G, centre de gravité du triangle ABC, a pour coordonnées la solution du système $\begin{cases}14x - 5y = 390\\ 17x - 20y = 0\end{cases}$,

c'est-à-dire : $G(40\ ;\ 34)$.

3. Aire du triangle ABG

a. La droite perpendiculaire à (AB) et passant par G a pour équation : $5x+y = 234$.

b. La droite (AB) a pour équation : $x-5y = 0$.

R, pied de la hauteur issue de G dans le triangle ABG, a pour coordonnées la solution du système $\begin{cases}5x + y = 234\\ x - 5y = 0\end{cases}$,

c'est-à-dire : $R(45\ ;\ 9)$.

c. $AB = \sqrt{(60-0)^2 + (12-0)^2} = 12\sqrt{26}$;

$RG = \sqrt{(40-45)^2 + (34-9)^2} = \sqrt{5^2 + 25^2} = 5\sqrt{26}$.

d. $\mathcal{A}_{ABG} = \dfrac{AB \times RG}{2} = \dfrac{12\sqrt{26} \times 5\sqrt{26}}{2} = \underline{780}$.

e. Aire du triangle BCG

- La droite perpendiculaire à (BC) et passant par G a pour équation : $y = 34$.
- La droite (BC) a pour équation : $x = 60$.
- S, pied de la hauteur issue de G dans le triangle BCG, a pour coordonnées la solution du système $\begin{cases}y = 34\\ x = 60\end{cases}$,

c'est-à-dire : $S(60\ ;\ 34)$.

- $BC = \sqrt{(60-60)^2 + (90-12)^2} = 78$;

$SG = \sqrt{(40-60)^2 + (34-34)^2} = 20$;

donc $\mathcal{A}_{BCG} = \dfrac{BC \times SG}{2} = \dfrac{78 \times 20}{2} = \underline{780}$.

Aire du triangle CAG

- La droite perpendiculaire à (CA) et passant par G a pour équation : $2x+3y = 182$.
- La droite (CA) a pour équation : $3x-2y = 0$.
- T, pied de la hauteur issue de G dans le triangle CAG, a pour coordonnées la solution du système

$\begin{cases}2x + 3y = 182\\ 3x - 2y = 0\end{cases}$,

c'est-à-dire : $T(28\ ;\ 42)$.

- $CA = \sqrt{(60-0)^2 + (90-0)^2} = 30\sqrt{13}$;

$TG = \sqrt{(40-28)^2 + (34-42)^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = 4\sqrt{13}$;

donc $\mathcal{A}_{CAG} = \dfrac{CA \times TG}{2} = \dfrac{30\sqrt{13} \times 4\sqrt{13}}{2} = \underline{780}$.

f. Les aires des triangles ABG, BCG et CAG étant égales, le partage est équitable.

Exercice 62 Recherche d'un bénéfice maximum

Soit x le nombre de rouleaux de type *A* et y le nombre de rouleaux de type *B*.

1.a. D'après la contrainte $\square$, x doit être supérieur ou égal à 4, c'est-à-dire : $x \geq 4$.

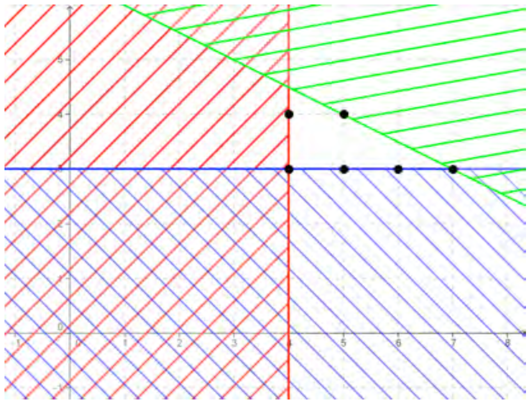
b. D'après la contrainte $\square$, y doit être supérieur ou égal à 3, c'est-à-dire : $y \geq 3$.

c. D'après la contrainte $\square$, x et y vérifient l'inégalité : $x + 2y \leq 13$.

2. Résolution graphique du système $\begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 3 \\ x + 2y \leq 13 \end{cases}$:

les solutions sont les coordonnées des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge ($x = 4$), demi-droite bleue ($y = 3$) et demi-droite verte ($x + 2y = 13$) comprises.

3. Les points à coordonnées entières de la partie du plan précédente correspondent aux productions possibles :
$(4 ; 3)$, $(5 ; 3)$, $(6 ; 3)$, $(7 ; 3)$, $(4 ; 4)$ et $(5 ; 4)$.



4.

Point	$(4 ; 3)$	$(5 ; 3)$	$(6 ; 3)$	$(7 ; 3)$	$(4 ; 4)$	$(5 ; 4)$
Bénéfice en milliers de F CFA	231	252	273	294	280	301

La production qui assure le plus grand bénéfice est 7 rouleaux de type *A* et 3 rouleaux de type *B*.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Applications linéaires - Définitions [1a p 166]	18, 19, 24, 25, 27, 36, 37	40, 41, 42, 46	50, 52
2	Applications linéaires - Propriétés [1b p 166]	22, 23, 27	43	47
3	Applications linéaires - Représentation graphique [1c p 166]	24, 26	43	48, 51, 52
4	Applications affines - Définitions [2a p 167]	28, 29, 30	40, 41, 42	50,
5	Applications affines - Représentation graphique [2b p 167]	33, 34, 35, 38, 39	44, 46	48, 49, 51, 52, 53
	Apprendre déterminer une image et un antécédent [1 p 168]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7		
	Apprendre à représenter une application [2 p 169]	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17		
6	Sens de variation [3 p 167]	20, 21, 31, 32	45	

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Les avions de ligne

Un avion de ligne vole à la vitesse constante de 800 km/h.

1.a. Distance parcourue en 2 heures : 800×2 = 1 600 km.

b. Distance parcourue en 3 heures et 30 minutes : 800×3,5 = 2 800 km.

2.a. Si t, d et v désignent respectivement le temps (en h) de vol, la distance (en km) parcourue et la vitesse moyenne (en km/h), alors $v = \frac{d}{t}$ ou $d = v \times t$.

b.

Temps t (en h)	2	3,5	4	5,25	8,5
Distance d (en km)	1 600	2 800	3 200	4 200	6 800

Ce tableau est un tableau de proportionnalité, dont le coefficient de proportionnalité vaut 800.

3. La vitesse moyenne de ce second avion est : $\frac{1\,935}{2{,}25} = 860$ km/h.

Activités de découverte

1 Application linéaire

Le débit moyen du fleuve Sanaga est de 2 100 m^3/s.

1. Soit V le volume d'eau écoulé ;
- pour t = 2 s, V = 2 100×2 = 4 200 m^3 (en 2 s, il s'écoule 4 200 m^3 d'eau) ;
- pour t = 30 s, V = 2 100×30 = 63 000 m^3 (en 30 s, il s'écoule 63 000 m^3 d'eau) ;
- pour t = 1 min = 60 s, V = 2 100×60 = 126 000 m^3 (en 1 min, il s'écoule 126 000 m^3 d'eau).

2.a. $V(2)$ correspond au volume d'eau, en m^3, écoulé en 2 s ;
$V(30)$ correspond au volume d'eau, en m^3, écoulé en 30 s ;
$V(60)$ correspond au volume d'eau, en m^3, écoulé en 60 s, c'est-à-dire en 1 min.

b. On a : $2\,100 = \frac{V(t)}{t}$; donc : $V(t) = 2\,100 \times t$.

3.a.

Durée de l'écoulement t (en s)	1	2	10	30	60	100
Volume écoule $V(t)$ (en m^3)	2 100	4 200	21 000	63 000	126 000	210 000

b. On a un tableau de proportionnalité, puisque : $\frac{2\,100}{1} = \frac{4\,200}{2} = \frac{21\,000}{10} = \frac{63\,000}{30} = \frac{126\,000}{60} = \frac{210\,000}{100} = 2\,100$.

c. Son coefficient de proportionnalité est égal à 2 100.

2 Propriétés des applications linéaires

Partie A : Observations sur un exemple

f est l'application linéaire définie par $f(x) = 6x$.

1.

x	10	20	40	50	70	80	100	120
$f(x)$	60	120	240	300	420	480	600	720

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité, dont l'un des coefficients de proportionnalité est égal à 6.

2.a. $720 = 120+600$, donc : $f(120) = f(20)+f(100)$.

b. $420 = 120+300$, donc : $f(70) = f(20)+f(50)$.

3.a. $300 = 5\times60$, donc : $f(50) = 5\times f(10)$.

b. $480 = 4\times120$, donc : $f(80) = 4\times f(20)$.

Partie B : Cas général

f est l'application linéaire définie par $f(x) = ax$.

On a $f(u) = a\times u$ et $f(v) = a\times v$, donc :

- $f(u+v) = a\times(u+v) = a\times u+a\times v = f(u)+f(v)$.
- $f(ku) = a\times(ku) = k\times(a\times u) = k\times f(u)$.

3 Représentation graphique des applications linéaires

1.a. L'application *f* qui, à une somme *x*, exprimée en RWF, fait correspondre sa valeur en F CFA est : $f(x) = 0{,}8x$.

b.

x	1 000	2 000	5 000	10 000
$f(x)$	800	1 600	4 000	8 000

Interprétation :
1 000 RWF correspondent à 800 F CFA,
2 000 RWF correspondent à 1 600 F CFA,
5 000 RWF correspondent à 4 000 F CFA,
10 000 RWF correspondent à 8 000 F CFA.

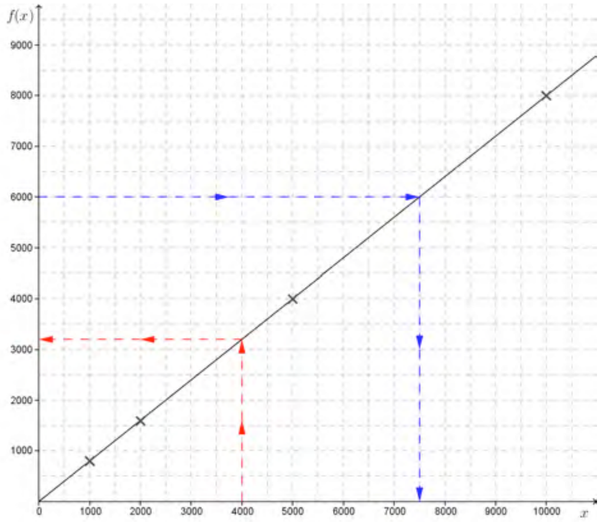
3. D'après le graphique ci-contre :

a. un prix de 4 000 RWF correspond à 3 200 F CFA ;

b. une somme de 6 000 F CFA correspond à 7 500 RWF.

Ces résultats peuvent être vérifiés par calculs.

2.a.



b. Constat : tous les points sont alignés et la droite qui passe par tous ces points passe également par l'origine du repère.

4 Application affine

1.a. Les 200 minutes ont coûté : $75\times200 = 15\ 000$ F CFA ; on y ajoute le prix du forfait : $15\ 000+8\ 000=23\ 000$; montant de la facture de Mireille : 23 000 F CFA.

b. Les 300 minutes ont coûté : $75\times300=22\ 500$ F CFA ; on y ajoute le prix du forfait : $22\ 500+8\ 000=30\ 500$; montant de la facture d'Henri : 30 500 F CFA.

2. *x* désigne la durée mensuelle de communication (en min) et $f(x)$ le montant de la facture correspondante (en F CFA)

a. $f(100)$ correspond au montant de la facture, en F CFA, quand on téléphone 100 minutes.
$f(400)$ correspond au montant de la facture, en F CFA, quand on téléphone 400 minutes.

b. Les *x* minutes coûtent, en F CFA, $75\times x = 75x$; on y ajoute le prix du forfait : $75x+8\ 000$; finalement : $f(x) = 75x+8\ 000$.

c. $f(100) = 75\times100+8\ 000 = 7\ 500+8\ 000 = 15\ 500$;
$f(400) = 75\times400+8\ 000 = 30\ 000+8\ 000 = 38\ 000$.

5 Représentation graphique des applications affines

f désigne l'application affine définie par : $f(x) = 0{,}5x+2$.

1.a. $f(-5) = 0{,}5\times(-5)+2 = -2{,}5+2 = -0{,}5$.

b. $f(-2) = 0{,}5\times(-2)+2 = -1+2 = 1$, donc l'image de -2 par f est 1 ;
$f(0) = 0{,}5\times0+2 = 0+2 = 2$, donc l'image de 0 par f est 2 ;
$f(1) = 0{,}5\times1+2 = 0{,}5+2 = 2{,}5$, donc l'image de 1 par f est 2,5 ;
$f(3) = 0{,}5\times3+2 = 1{,}5+2 = 3{,}5$, donc l'image de 3 par f est 3,5 ;
$f(4) = 0{,}5\times4+2 = 2+2 = 4$, donc l'image de 4 par f est 4.

c. $f(x) = 0{,}5x+2$; pour que $f(x) = 7$, il faut que $0{,}5x+2=7$.
On résout l'équation
$$0{,}5x+2 = 7$$
$$0{,}5x = 5$$
$$x = 10.$$

d. On cherche x tel que $f(x) = -1$.
On résout alors $0{,}5x+2 = -1$
$0{,}5x = -3$
$x = -6$.
Donc l'antécédent de -1 par f est -6.

On cherche x tel que $f(x) = 2{,}5$.
On résout alors $0{,}5x+2 = 2{,}5$
$0{,}5x = 0{,}5$
$x = 1$.
Donc l'antécédent de 2,5 par f est 1.

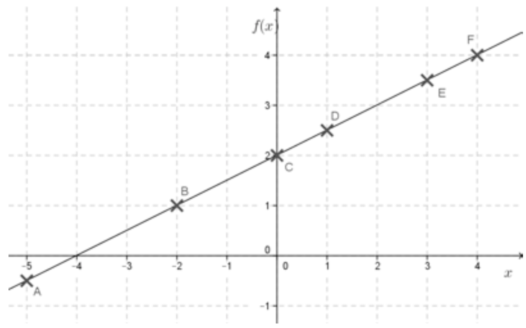
On cherche x tel que $f(x) = 5$.
On résout alors $0{,}5x+2 = 5$
$0{,}5x = 3$
$x = 6$.
Donc l'antécédent de 5 par f est 6.

e.

x	–6	–5	–2	0	1	3	4	6	10
$f(x)$	–1	–0,5	1	2	2,5	3,5	4	5	7

2.a. $A(-5\ ;\ -0{,}5)$, $B(-2\ ;\ 1)$,
$C(0\ ;\ 2)$, $D(1\ ;\ 2{,}5)$,
$E(3\ ;\ 3{,}5)$, $F(4\ ;\ 4)$.

b.



Constat : les points sont alignés.

3.a. L'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ est l'ensemble des points d'abscisse x et d'ordonnée $y = 0{,}5x+2$. Or il a été vu dans le chapitre sur les équations de droite qu'un tel ensemble est une droite.

b. Equation de cette droite : $y = 0{,}5x+2$.

6 Sens de variation

1. g est l'application affine définie par : $g(x) = -2x+3$.

a. $g(-5) = -2\times(-5)+3 = 13$, $g(-1) = -2\times(-1)+3 = 5$, $g(0) = -2\times0+3 = 3$,
$g(3) = -2\times3+3 = -3$, $g(10)=-2\times10+3=-17$.

b. $-5<-1<0<3<10$ et $g(-5)>g(-1)>g(0)>g(3)>g(10)$.

c. Les nombres –5, –1, 0, 3 et 10 ne sont pas rangés dans le même ordre que leurs images.

2. h est l'application affine définie par : $h(x) = 5x-2$.

a. $h(-5) = 5\times(-5)-2 = -27$, $h(-1) = 5\times(-1)-2 = -7$, $h(0) = 5\times0-2=-2$,
$h(3) = 5\times3-2 = 13$, $h(10) = 5\times10-2 = 48$.

b. $-5<-1<0<3<10$ et $h(-5)<h(-1)<h(0)<h(3)<h(10)$.

c. Les nombres –5, –1, 0, 3 et 10 sont rangés dans le même ordre que leurs images.

3. f est l'application affine définie par : $f(x) = ax+b$.

a. f est croissante quand a est strictement positif.

b. f est décroissante quand a est strictement négatif.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à déterminer une image et un antécédent

Exercice 1

a. L'image de –2 par f_1 est 1 ;
b. l'image de 2 par f_1 est 3 ;
c. l'antécédent de 3 par f_1 est 2 ;
d. l'antécédent de 1 par f_1 est –2.

Exercice 2

a. L'image de 4 par f_2 est –3 ;
b. l'image de –4 par f_2 est 1 ;
c. l'antécédent de –3 par f_2 est 4 ;
d. l'antécédent de 0 par f_2 est –1.

Exercice 3

a. L'image de –1 par f_3 est 1 ;
b. l'image de 3 par f_3 est –3 ;
c. l'antécédent de –2 par f_3 est 2 ;
d. l'antécédent de 2 par f_3 est –2.

Exercice 4

f est l'application définie par : $f(x) = -2,5x$.

1.a. $f(1)=-2,5\times1=-2,5$; b. $f(-4)=-2,5\times(-4)=10$;
c. $f(6)=-2,5\times6=-15$; d. $f(-7)=-2,5\times(-7)=17,5$.

2.a. L'antécédent par f de –5 est 2 ;
b. l'antécédent par f de 7,5 est –3 ;
c. l'antécédent par f de –12,5 est 5 ;
d. l'antécédent par f de 25 est –10.

Exercice 5

g est l'application définie par : $g(x) = -4x + 6$.

1.a. $g(0)=-4\times0+6=6$; b. $g(-1)=-4\times(-1)+6=10$;
c. $g(4)=-4\times4+6=-10$; d. $g(-5)=-4\times(-5)+6=26$.

2.a. L'antécédent par g de 2 est 1 ;
b. l'antécédent par g de –6 est 3 ;
c. l'antécédent par g de 8 est –0,5 ;
d. l'antécédent par g de –5 est 2,75.

Exercice 6

1. La distance parcourue $f(t)$ est égale au produit de la vitesse (75) par le temps écoulé (t) ; donc : $f(t)=75t$.

2.a. $f(5) = 375$; l'antécédent de 600 par f est 8.

b. La distance parcourue par le bus en 5 heures est de 375 km ; il faut 8 heures pour parcourir 600 km.

Exercice 7

1. La masse $g(v)$ d'un morceau d'acajou est égale au produit de sa masse volumique (700) par son volume (v). Donc $g(v) = 700v$.

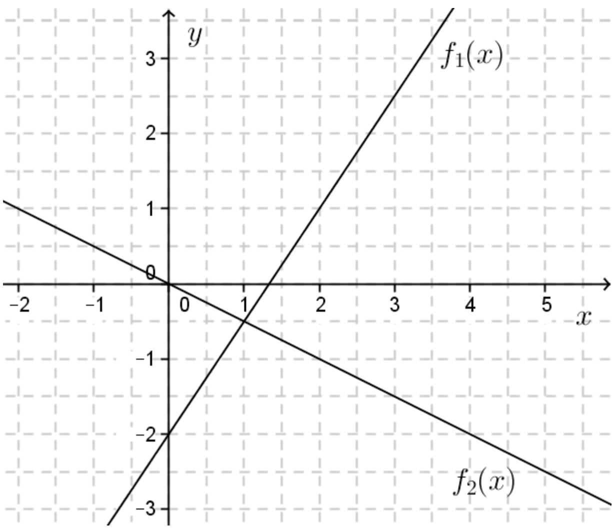
2.a. $g(0,5) = 350$; l'antécédent de 210 par g est 0,3.

b. 0,5 m^3 d'acajou pèse 350 kg ; 210 kg d'acajou ont un volume de 0,3 m^3.

2 Apprendre à représenter une application

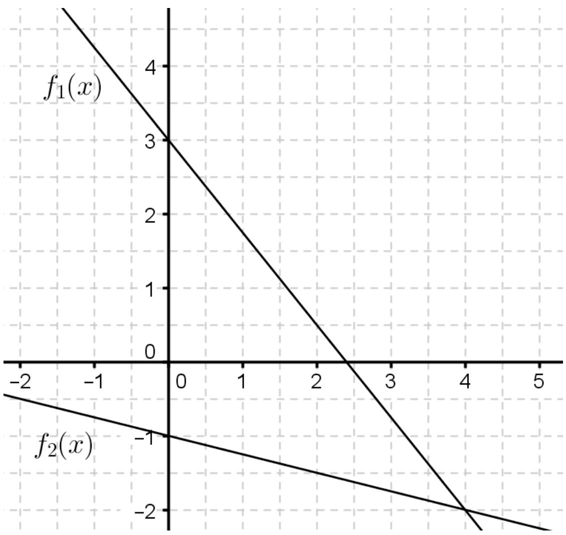
Exercice 8

$f_1(x) = 1,5x - 2$ et $f_2(x) = -0,5x$.



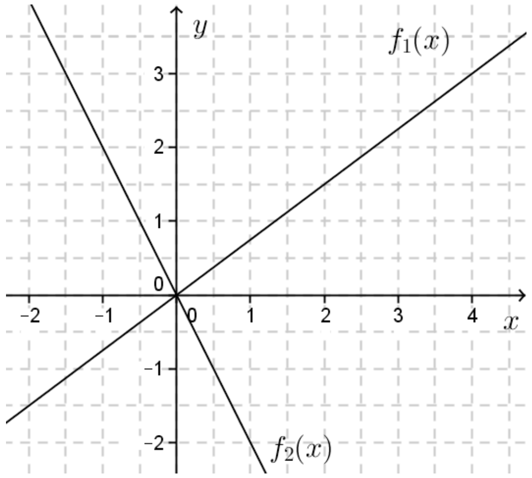
Exercice 9

$f_1(x) = -1,25x + 3$ et $f_2(x) = -0,25x - 1$.



Exercice 10

$f_1(x) = 0{,}75x$ et $f_2(x) = -2x$.



Exercice 11

f_1 est décroissante et f_2 est croissante.

Exercice 12

f_1 est croissante et f_2 est décroissante.

Exercice 13

$f_1(x) = 3x + 1$; $f_2(x) = -1{,}5x$; $f_3(x) = 4x$.

f_1 est croissante ; f_2 est décroissante ; f_3 est croissante.

Exercice 14

$f_1(x) = -5x + 2$; $f_2(x) = -x + 3$; $f_3(x) = 2$.

f_1 est décroissante ; f_2 est décroissante ; f_3 est constante.

Exercice 15

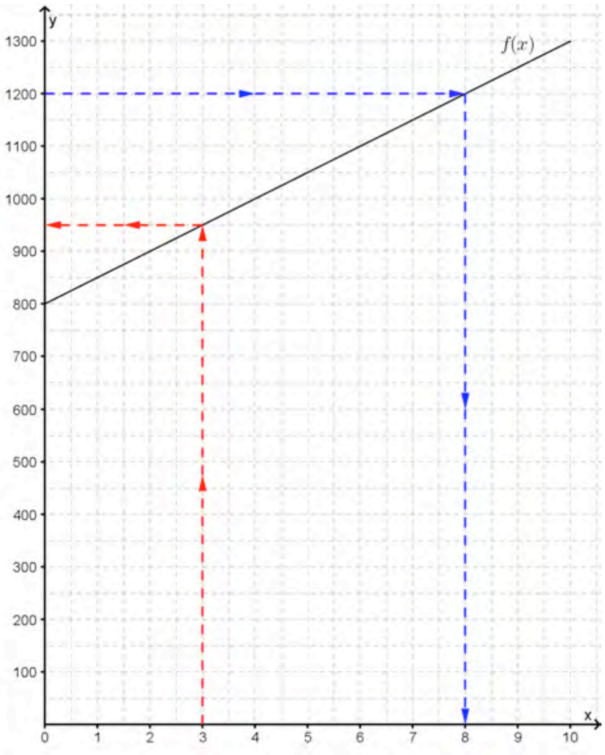
$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 2$; $f_2(x) = -\frac{1}{4}x + 3$; $f_3(x) = \frac{1}{3}x + 1$.

f_1 est croissante ; f_2 est décroissante ; f_3 est croissante.

Exercice 16

1.a. 2015 correspond à $n=5$; b. 2020 correspond à $n=10$.

2.



$f(n) = 800 + 50n$.

3.a. 2013 correspond à $n=3$, on lit graphiquement $f(3)$: la population en 2013 sera de <u>950 habitants</u>.

b. L'antécédent de 1 200 est 8 et $n=8$ correspond à 2018 : il y aura 1 200 habitants en <u>2018</u>.

Exercice 17

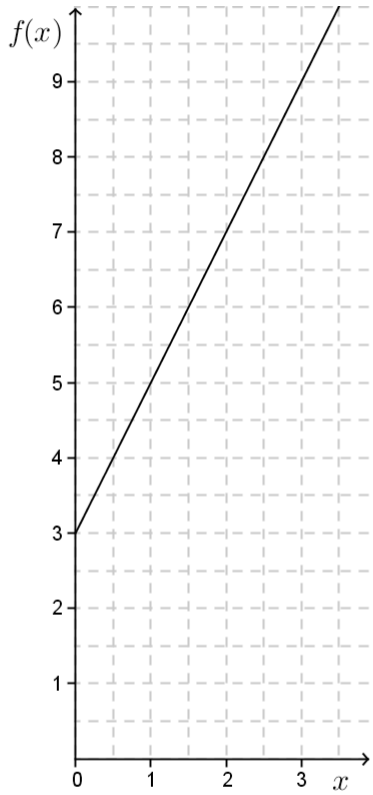
f est l'application qui à x fait correspondre le périmètre du triangle.

1. $AB+AC+BC=x+x+3=2x+3$; donc : $(x)=2x+3$.

2.a. f est une application croissante.

b. Cela est cohérent avec la figure car, quand la valeur de x augmente, le contour de cette figure est plus long.

3.



Représentation graphique de f.

Activités d'application

Applications linéaires

Exercice 18

f est l'application linéaire définie par : $f(x) = -3{,}5x$.

1.a. $f(2) = -7$; b. $f(-4) = 14$;
c. $f(7) = -24{,}5$; d. $f(-10) = 35$.

2.a. L'antécédent de –3,5 par *f* est 1 ;
b. l'antécédent de –10,5 par *f* est 3 ;
c. l'antécédent de 21 par *f* est –6 ;
d. l'antécédent de 0 par *f* est 0.

Exercice 19

f est l'application linéaire définie par : $f(x) = 4x$.

x	1	2	4	–4	5	16
$f(x)$	4	8	16	–16	20	64

Exercice 20

f est l'application linéaire telle que $f(2) = 3$.

1. $f(0) = 0$ donc $f(0) < f(2)$.

2. Une application linéaire ne pouvant être que croissante, décroissante ou constante, celle-ci est nécessairement croissante.

Exercice 21

Si *f* désigne une application linéaire, alors $f(0) = 0$;

a. si $f(3) = -2$, alors $f(0) > f(3)$ et *f* est décroissante ;

b. si $f(5) = 1$, alors $f(0) < f(5)$ et *f* est croissante ;

c. si $f(-2) = -4$, alors $f(-2) < f(0)$ et *f* est croissante ;

d. si $f(-7) = 6$, alors $f(-7) > f(0)$ et *f* est décroissante.

Exercice 22

1. *f* est l'application linéaire telle que :
$f(2) = -12$ et $f(7) = -42$.

a. $f(9) = f(2+7) = f(2)+f(7)$
$= -12+(-42) = -54$;

b. $f(8) = f(4\times 2) = 4\times f(2)$
$= 4\times(-12) = -48$;

c. $f(21) = f(3\times 7) = 3\times f(7)$
$= 3\times(-42) = -126$;

d. $f(29) = f(8+21) = f(8)+f(21)$
$= -48+(-126) = -174$.

2. *g* est l'application linéaire telle que :
$g(15) = 66$ et $g(25) = 110$.

a. $176 = 66+110 = g(15)+g(25) = g(15+25) = g(40)$,
donc l'antécédent de 176 par *g* est 40 ;

b. $-66 = -1\times 66 = -1\times g(15) = g(-1\times 15) = g(-15)$,
donc l'antécédent de –66 par *g* est –15 ;

c. $440 = 4\times 110 = 4\times g(25) = g(4\times 25) = g(100)$,
donc l'antécédent de 440 par *g* est 100 ;

d. $374 = 440+(-66) = g(100)+g(-15)$
$= g(100+(-15)) = g(85)$,
donc l'antécédent de 374 par *g* est 85.

Exercice 23

f est l'application linéaire telle que $f(6) = \sqrt{5}$.

a. • $f(12) = f(2\times 6) = 2\times f(6) = 2\sqrt{5}$;
• $f(6\sqrt{5}) = \sqrt{5}\times f(6) = \sqrt{5}\times\sqrt{5} = 5$.

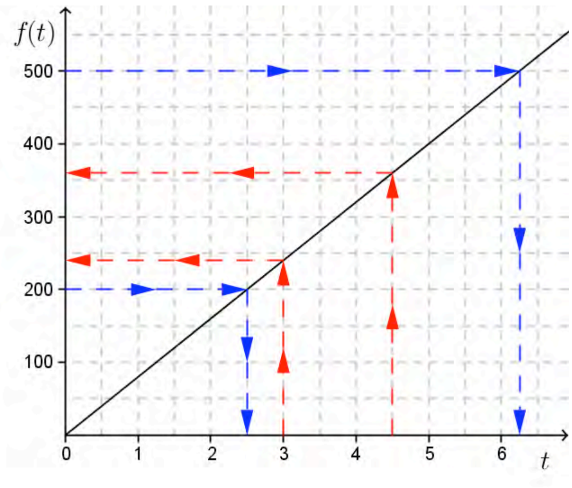
b. • $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} = = 2\times f(6) = f(2\times 6) = f(12)$,
donc l'antécédent de $\sqrt{20}$ par *f* est 12 ;
• $5\sqrt{5} = 5\times f(6) = f(5\times 6) = f(30)$,
donc l'antécédent de $5\sqrt{5}$ par *f* est 30.

Exercice 24

1.a. La distance parcourue est égale au produit de la vitesse et du temps écoulé depuis le départ ;
donc : $f(t) = 80\times t = 80t$.

b. $f(t)$ est de la forme $a\times t$, avec $a = 80$;
donc *f* est une application linéaire.

2.



Représentation graphique de *f*.

3. Déterminations graphiques :

a. $f(3) = 240$ et $f(4{,}5) = 360$;

b. l'antécédent de 200 par *f* est 2,5 et l'antécédent de 500 par *f* est 6,25.

c. Interprétation des résultats précédents :

• la distance parcourue par le train en 3 h est de 240 km et celle parcourue en 4,5 h (ou 4 h 30 min) est de 360 km ;

• le temps mis par le train pour effectuer 200 km est de 2,5 h (ou 2 h 30 min) et celui mis pour effectuer 500 km est de 6,25 h (ou 6 h 15 min).

Exercice 25

f est l'application qui à *x* associe le périmètre d'un triangle équilatéral *ABC*, de côté *x* cm.

1.a. $f(x) = x+x+x = 3x$.

b. $f(x)$ est de la forme $a \times x$, avec $a = 3$;
donc *f* est une application linéaire.

2.a. $f(1{,}5) = 3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ et $f(6) = 3 \times 6 = 18$.

b. L'antécédent de 15 par *f* est 3 et l'antécédent de 33 par *f* est 11.

c. Interprétation des résultats précédents :

● le périmètre d'un triangle équilatéral, de côté 1,5 cm, est égal à 4,5 cm ; celui d'un triangle équilatéral, de côté 6 cm, est égal à 18 cm.

● un triangle équilatéral, de périmètre 15 cm, a ses côtés de longueur 5 cm ; celui, de périmètre 33 cm, a ses côtés de longueur 11 cm.

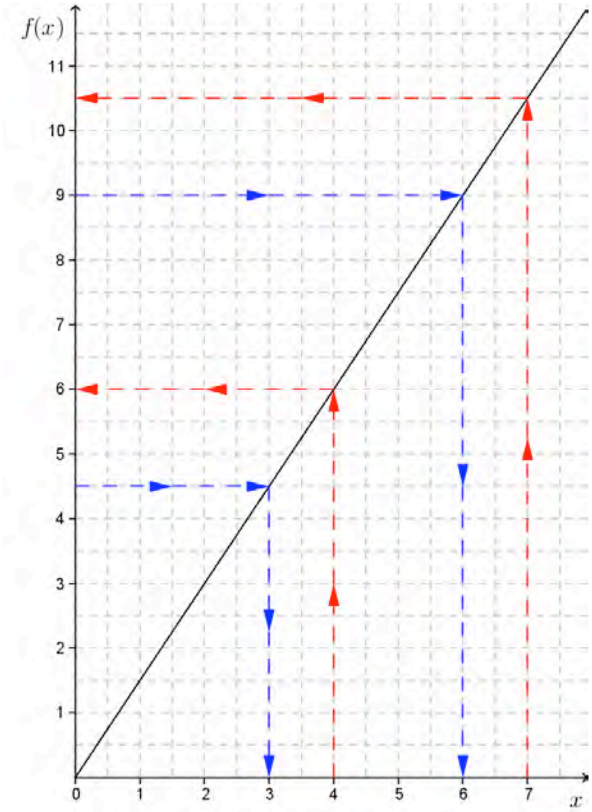
Exercice 26

Le débit d'une rivière a été mesuré à 1,5 m³/s.

1.a. La quantité d'eau écoulée est égale au produit du débit et du temps d'écoulement ;
donc $f(t) = 1{,}5 \times t = 1{,}5t$.

b. $f(t)$ est de la forme $a \times t$, avec $a = 1{,}5$;
donc *f* est une application linéaire.

2.



Représentation graphique de *f*.

3. Déterminations graphiques :

a. $f(4) = 6$ et $f(7) = 10{,}5$;

b. l'antécédent de 4,5 par *f* est 3 et l'antécédent de 9 par *f* est 6.

c. Interprétation des résultats précédents :

● la quantité d'eau écoulée en 4 h est de 6 m³ et celle écoulée en 7 h est de 10,5 m³.

● le temps d'écoulement de 4,5 m³ est de 3 h et celui de 9 m³ est de 6 h.

Exercice 27

1. La masse d'essence, contenue dans une cuve, est égale au produit de la masse volumique de l'essence par son volume. Or, d'après la pesée, la masse volumique de l'essence est égale à 0,75 kg/L.
Donc $f(\mathcal{V}) = 0{,}75 \times \mathcal{V} = 0{,}75\mathcal{V}$.

2.a. $f(100) = 75$, $f(250) = 187{,}5$ et $f(800) = 600$.

b. Interprétation des résultats précédents :
une cuve de 100 L d'essence contient 75 kg d'essence, une de 250 L en contient 187,5 kg et une de 800 L en contient 600 kg.

Exercice 28

f est l'application affine définie par $f : x \mapsto 3x - 4$.

1.a. $f(1) = -1$; b. $f(-2) = -10$;
c. $f(5) = 11$; d. $f(0) = -4$.

2.a. L'antécédent de 23 par *f* est 9 ;
b. l'antécédent de –16 par *f* est –4 ;
c. l'antécédent de 32 par *f* est 12 ;
d. l'antécédent de –19 par *f* est –5.

Exercice 29

f est l'application affine définie par $f : x \mapsto -2x + 3$.

x	0	–1	6	9	11	–29
$f(x)$	3	5	–9	–15	–19	61

Exercice 30

f est l'application affine définie par $f : x \mapsto \sqrt{2}x + 3$.

a. • $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 3 = 5$;
• $f\left(\sqrt{18}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{18} + 3 = \sqrt{36} + 3 = 9$.

b. • Résolution de l'équation : $\sqrt{2}x + 3 = 7$

$$\sqrt{2}x = 4$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

donc l'antécédent de 7 par *f* est $2\sqrt{2}$;

• résolution de l'équation : $\sqrt{2}x + 3 = 13$

$$\sqrt{2}x = 10$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2},$$

donc l'antécédent de 13 par *f* est $5\sqrt{2}$.

Exercice 31

f est l'application affine telle que $f(4) = 6$ et $f(7) = 3$.

1. On a : $f(4) > f(7)$.

2. Une application affine ne pouvant être que croissante, décroissante ou constante, celle-ci est nécessairement décroissante.

Exercice 32

f est une application affine.

a. Si $f(3) = -2$ et $f(5) = -4$, alors $f(3) > f(5)$;
donc *f* est nécessairement décroissante ;

b. si $f(-1) = 3$ et $f(0) = 4$, alors $f(-1) < f(0)$;
donc *f* est nécessairement croissante ;

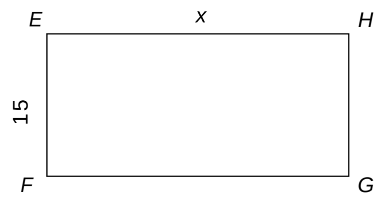
c. si $f(4) = 6$ et $f(0) = 2$, alors $f(4) > f(0)$;
donc *f* est nécessairement croissante ;

d. si $f(-2) = 5$ et $f(-6) = -4$, alors $f(-2) > f(-6)$;
donc *f* est nécessairement croissante.

Exercice 33

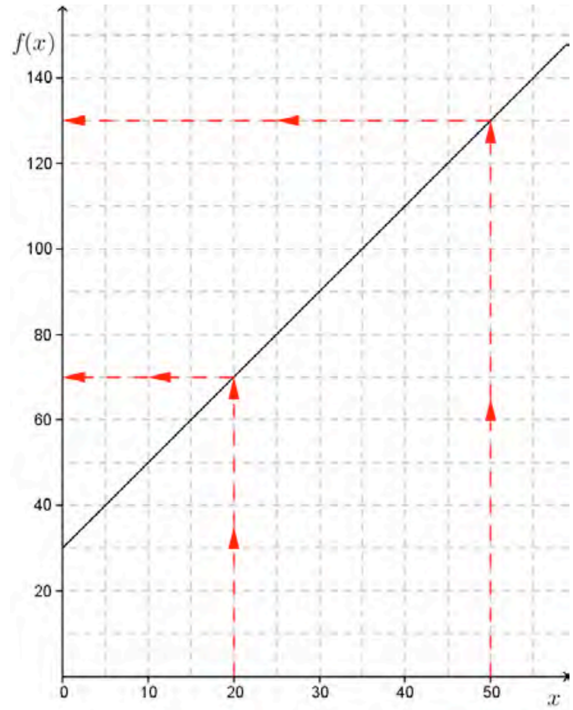
EFGH est un rectangle tel que *EF* = 18 mm et *FG* = *x* mm.

1.



2. Soit *f* l'application qui à *x* fait correspondre le périmètre, en mm, de *EFGH*.
On a : $f(x) = 2 \times (FG + EF) = 2 \times (x + 15) = 2x + 30$.

3.



Représentation graphique de *f*.

4.a. Déterminations graphiques :
$f(20) = 70$ et $f(50) = 130$.

b. • Vérifications par un calcul :
$f(20) = 2 \times 20 + 30 = 70$ et $f(50) = 2 \times 50 + 30 = 130$;

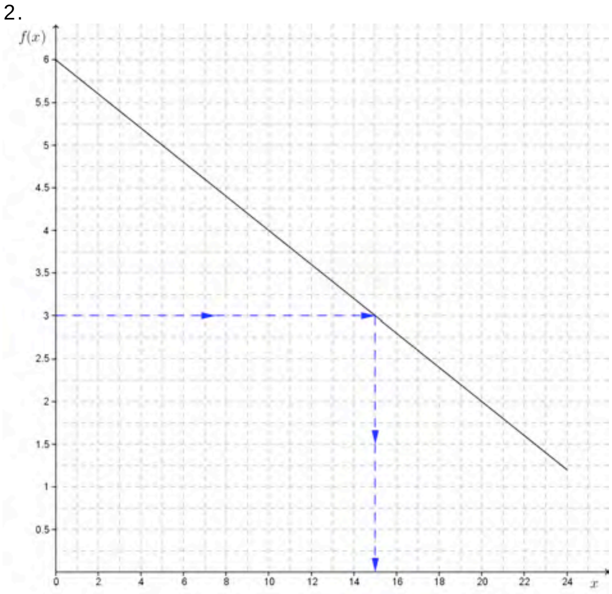
• interprétation de ces résultats :
le périmètre d'un rectangle, de longueur 20 mm et de largeur 15 mm, est égal à 70 mm ;
le périmètre d'un rectangle, de longueur 50 mm et de largeur 15 mm, est égal à 130 mm.

Exercice 34

f est l'application définie par $f(h) = 6 - 0{,}2h$.

1. f est une application affine, dont le coefficient $(-0{,}2)$ est négatif ; cette application est donc décroissante. On en déduit que le bassin se vide.

2.



Représentation graphique de f.

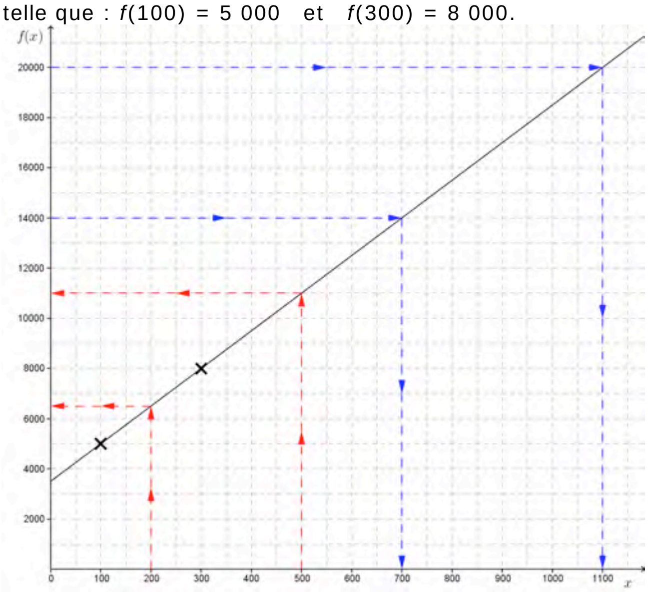
3.a. A la fin de la journée, le bassin ne sera par vide car on lit sur le graphique que $h(24) > 0$.

b. Le bassin faisant 6 m de profondeur, il sera à moitié vide quand le niveau d'eau sera à 3 m ; on cherche donc un antécédent de 3 par f :

- détermination graphique : l'antécédent de 3 par f est 15 ; le bassin sera donc vidé de moitié à 15 h ;
- vérification par un calcul : $f(15) = 6 - 0{,}2 \times 15 = 3$.

Exercice 35

1.a.b. Représentation graphique de l'application affine f telle que : $f(100) = 5\,000$ et $f(300) = 8\,000$.



2. Déterminations graphiques :

a. $f(200) \approx 6\,500$ et $f(500) \approx 11\,000$; donc le coût de fabrication :
- de 200 objets est d'environ 6 500 F CFA,
- de 500 objets est de 11 000 F CFA ;

b. l'antécédent de 14 000 par f est 700 et l'antécédent de 20 000 par f vaut 1 100 ; donc on peut fabriquer :
- environ 700 objets avec 14 000 F CFA,
- environ 1 100 objets avec 20 000 F CFA.

Exercice 36

f application affine telle que : $f(2) = -1$ et $f(6) = 7$.

1. Si $f(x) = ax + b$, alors $\begin{cases} f(2) = -1 \\ f(6) = 7 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} 2a + b = -1 \\ 6a + b = 7 \end{cases}$.

2. On soustrait ces deux lignes, on obtient alors :

$$\begin{aligned} 2a - 6a &= -1 - 7 \\ -4a &= -8 \\ a &= 2 \ ; \end{aligned}$$

on remplace a par 2 dans la première équation :

$$\begin{aligned} 2 \times 2 + b &= -1 \\ b &= -5. \end{aligned}$$

La solution de ce système est $(2 \ ; -5)$ et $f(x) = 2x - 5$.

Exercice 37

f application affine telle que : $f(1) = -2$ et $f(4) = -11$.

1. Si $f(x) = ax + b$, alors $\begin{cases} f(1) = -2 \\ f(4) = -11 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} a + b = -2 \\ 4a + b = -11 \end{cases}$.

2. On soustrait ces deux lignes, on obtient alors :

$$\begin{aligned} a - 4a &= -2 - (-11) \\ -3a &= 9 \\ a &= -3 \ ; \end{aligned}$$

on remplace a par -3 dans la première équation :

$$\begin{aligned} -3 + b &= -1 \\ b &= 2. \end{aligned}$$

La solution du système est $(-3 \ ; 2)$ et $f(x) = -3x + 2$.

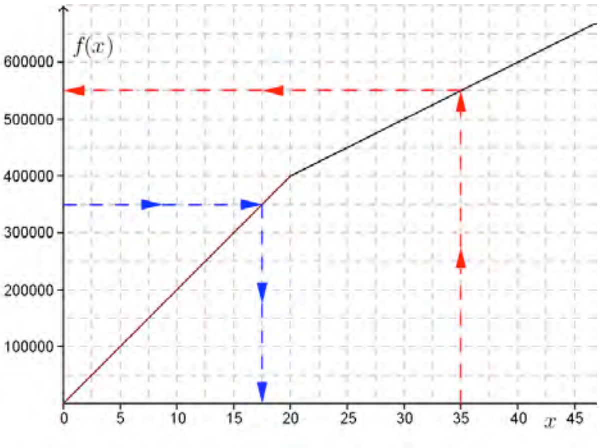
Applications affines par morceaux

Exercice 38

1.

Quantité (en t)	5	10	15	20	30	40
Prix (en millier de F CFA)	100	200	300	400	500	600

2.



Représentation graphique

3. Déterminations graphiques :

a. du prix d'une commande de 35 t : <u>550 000 F CFA</u> (c'est l'image de 35) ;

b. de la quantité correspondant à 350 000 F CFA : <u>17,5 t</u> (c'est l'antécédent de 350 000).

Exercice 39

1.a. 20 minutes après son départ, Charline se trouvait à 2 km de son village (c'est l'image de 20).

b. Pour parcourir 3 km, Charline a mis 30 min (c'est le premier antécédent de 3).

2.a. Le moment où Charline a dû rebrousser chemin correspond à l'abscisse du point à partir duquel la fonction devient décroissante. Graphiquement, on lit que ce moment est arrivé 40 min après son départ.

b. Le moment où Charline est repartie vers le village voisin correspond à l'abscisse du point à partir duquel la fonction redevient croissante. Graphiquement, on lit que ce moment est arrivé 60 min après son départ.

3. Pour arriver au village voisin, Charline a finalement mis 80 min (c'est l'antécédent de 6).

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 40 Vocabulaire

f et g sont les applications définies par :

$$f : x \mapsto 3x + 2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto -5x \,.$$

1. $f(4) = 3\times4+2 = 14$ et $g(7) = -5\times7 = -35$.

2.a. L'application f est une application *affine*.

b. L'application g est une application *linéaire* et aussi une application *affine*.

c. 14 est *l'image* de 4 par l'application f.

d. 4 est *l'antécédent* de 14 par l'application f.

e. L'*image* de 7 par l'application g vaut –35.

f. L'*antécédent* de –35 par l'application g est 7.

Exercice 41 Situations concrètes

La situation ☐ correspond à l'application

$$h : x \mapsto 200 - 60x \;;$$

la situation ☐ correspond à l'application

$$g : x \mapsto 200 + 60x \;;$$

la situation ☐ correspond à l'application

$$f : x \mapsto 60x \,.$$

Exercice 42 Reconnaitre graphiquement

La droite (d_1) est la représentation graphique de l'application $k : x \mapsto 0{,}5x + 2$;

la droite (d_2) est la représentation graphique de l'application $g : x \mapsto 0{,}5x - 1$;

la droite (d_3) est la représentation graphique de l'application $h : x \mapsto 1{,}5x$;

la droite (d_4) est la représentation graphique de l'application $f : x \mapsto -x + 2$.

Exercice 43 Bien comprendre des propriétés

f est une application linéaire.

1. • $f(u+v) = f(u)+f(v)$; • $f(ku) = k\times f(u)$.

2. On sait que $f(3) = -2$ et $f(-6) = 4$.

x	–3	6	30	24	–12	12
$f(x)$	2	–4	–20	–16	8	–8

Exercice 44 Procéder dans le bon sens

1.a. Jean a repéré le nombre 3 sur l'axe des abscisses. Il a ensuite repéré le point de la représentation graphique ayant même abscisse puis a lu l'ordonnée de ce point.

b. *Erreur commise* :
Jean n'a pas repéré le nombre 3 sur le bon axe.
Bonne réponse :
il aurait dû repérer le nombre 3 sur l'axe des ordonnées, puis lire graphiquement l'antécédent de 3 par f, qui est 4.

c. Jean aurait bien répondu si la question posée avait été « Détermine graphiquement l'image de 3 par f ».

2.a. L'image de 5 par f est 4 ;

b. l'antécédent de 5 par f est 6.

Exercice 45 Sens de variation

1. Le coefficient a de f vaut $5 > 0$;
donc f est croissante.

Le coefficient a de g vaut $-5 < 0$;
donc g est décroissante.

2. La droite (d) bleue est la représentation graphique d'une application croissante.
C'est donc celle de l'application f.

La droite (Δ) rouge est la représentation graphique d'une application décroissante.
C'est donc celle de l'application g.

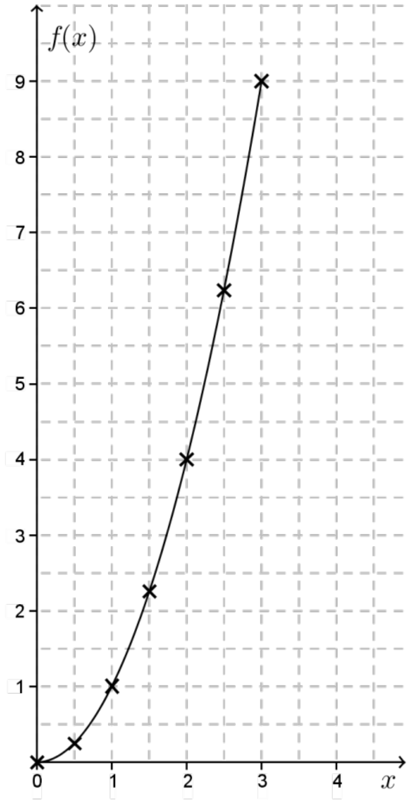
Exercice 46 Ni affine, ni linéaire

1. Aire d'un carré de côté x : $\mathcal{A}(x) = x^2$.

2.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\mathcal{A}(x)$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

3.

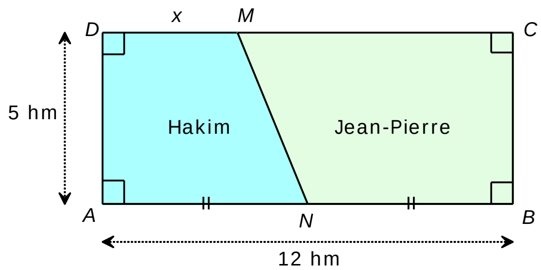


Représentation graphique

4. L'application, qui à x fait correspondre $\mathcal{A}(x)$, n'est ni linéaire, ni affine, car les points ne sont pas alignés.

Exercices d'approfondissement

Exercice 47 Partage de terrain



1. Aire de rectangle $ABCD$: $5 \times 12 = 60$ hm².

Donc l'aire du terrain de Hakim sera de $\dfrac{60}{3} = 20$ hm².

2. Le terrain $ADMN$ de Hakim est un trapèze rectangle de bases [AN] et [DM], de hauteur [AD] ;

N étant le milieu de [AB], $AN = 6$ hm ; posons $DM = x$.

a. L'aire de $ADMN$ est : $\dfrac{AN + DM}{2} \times AD$

c'est-à-dire : $f(x) = \dfrac{5\left(6 + x\right)}{2}$.

b. $f(x) = \dfrac{30 + 5x}{2} = 2{,}5x + 15$; f est une application affine.

3.a.
$$\begin{aligned} f(x) &= 20 \\ 2{,}5x + 15 &= 20 \\ 2{,}5x &= 5 \\ x &= 2 \text{ ;} \end{aligned}$$
donc l'antécédent de 20 par f est 2.

b. Pour réaliser le partage attendu, placer le point M à 2 hm du point D sur [DC].

Exercice 48 Augmentation et diminution

1. Les prix d'un magasin augmentent de 10%.

a.

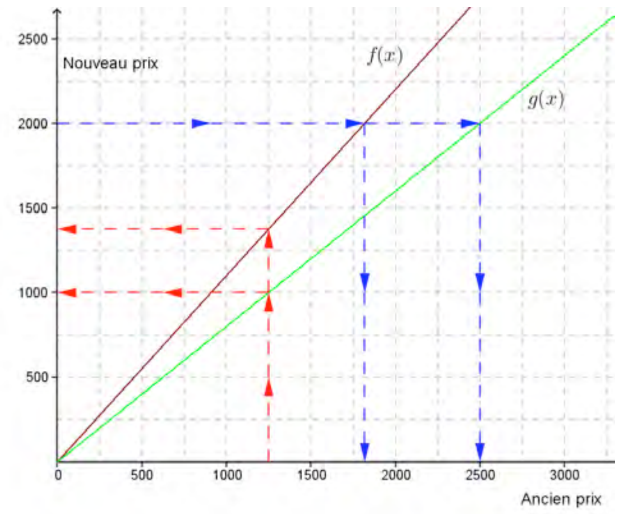
Ancien prix (en F CFA)	100	200	500	1 000
Nouveau prix (en F CFA)	110	220	550	1 100

b. L'application f, qui à un ancien prix x fait correspondre le nouveau prix $f(x)$, est définie par :

$$f(x) = x + x \times 10\% = 1{,}1x.$$

2. Les prix d'un autre magasin diminuent de 20%.
L'application g, qui à un ancien prix x fait correspondre le nouveau prix $g(x)$, est définie par :

$$g(x) = x - x \times 20\% = 0{,}8x.$$



Représentation graphique des applications f et g.

4.a. Si le coût initial d'un article est de 1 250 F CFA :

lecture graphique de son nouveau prix :

- 1[er] magasin : ≈ 1 375 F CFA,
- 2[e] magasin : 1 000 F CFA ;

calcul de son nouveau prix :

- 1[er] magasin : $f(1\ 250) = 1{,}1 \times 1\ 250 = 1\ 375$ F CFA,
- 2[e] magasin : $g(1\ 250) = 0{,}8 \times 1\ 250 = 1\ 000$ F CFA.

b. Si le nouveau prix d'un article est de 2 000 F CFA :

lecture graphique de son coût initial :

- 1[er] magasin : ≈ 1 800 F CFA,
- 2[e] magasin : 2 500 F CFA ;

calcul de son coût initial x :

- 1[er] magasin : on résout $f(x) = 2\ 000$
  $1{,}1x = 2\ 000$
  $x \approx 1\ 818$ F CFA,
- 2[e] magasin : on résout $g(x) = 2\ 000$
  $0{,}8x = 2\ 000$
  $x = 2\ 500$ F CFA.

Exercice 49 Changements de températures

1. $86-32 = 54$, $54 \times 5 = 270$ et $270 \div 9 = 30$.
Donc une température de 86°F correspond bien à une température de 30°C.

2. On note f l'application qui à une température x, en degrés Fahrenheit (°F), fait correspondre cette température en degrés Celsius (°C).
Expression de $f(x)$ en fonction de x :

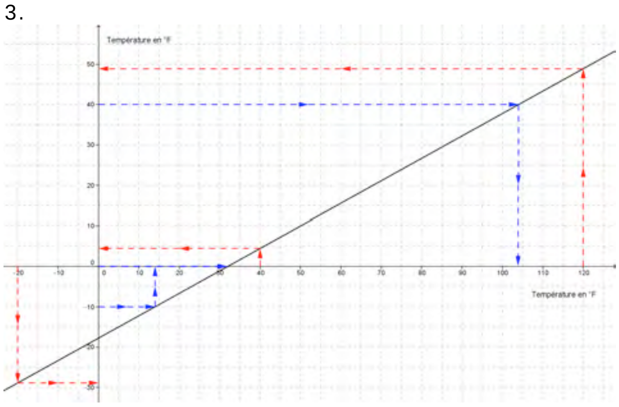
on soustrait 32 : $x - 32$

on multiplie par 5 : $5(x-32) = 5x - 160$

on divise par 9 : $\dfrac{5x-160}{9} = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$;

donc : $f(x) = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$.

3.



Représentation graphique de l'application f

4. Détermination graphique de conversions :

a. –20°F, 40°F et 120°F correspondent respectivement à ≈ –29°C, ≈ 4°C et ≈ 49°C ;

b. –10°C, 0°C et 40°C correspondent respectivement à ≈ 14°F, ≈ 32°F et ≈ 104°F.

5. Détermination des mêmes conversions par calculs :

a.• $f(-20) = \dfrac{5}{9} \times (-20) - \dfrac{160}{9} = -\dfrac{260}{9} \approx -29$,

donc : <u>–20°F ≈ –29°C</u> ;

• $f(40) = \dfrac{5}{9} \times (40) - \dfrac{160}{9} = \dfrac{40}{9} \approx 4$,

donc : <u>40°F ≈ 4°C</u> ;

• $f(120) = \dfrac{5}{9} \times (120) - \dfrac{160}{9} = \dfrac{440}{9} \approx 49$,

donc : <u>120°F ≈ 49°C</u> ;

b. • $f(x) = -10$ équivaut à $\dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9} = -10$

$5x - 160 = -90$

$5x = 70$

$x = 14$,

donc : <u>–10°C = 14°F</u> ;

• $f(x) = 0$ équivaut à $\dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9} = 0$

$5x - 160 = 0$

$5x = 160$

$x = 32$,

donc : <u>0°C = 32°F</u> ;

• $f(x) = 40$ équivaut à $\dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9} = 40$

$5x - 160 = 360$

$5x = 520$

$x = 104$,

donc : <u>40°C = 104°F</u> ;

Exercice 50 Voyage Yaoundé - Kribi

1.a. Coût de x voyages par la formule 1 :
$Y_1 = 2\ 500x$.

b. Coût de x voyages par la formule 2 :
$Y_2 = 1\ 500x + 10\ 000$.

2. f et g sont les applications affines définies par :
$f(x) = 2\ 500x$ et $g(x) = 1\ 500x + 10\ 000$.

$f(0) = 2\ 500 \times 0 = 0$;

$g(0) = 1\ 500 \times 0 + 10\ 000 = 10\ 000$;

$f(4) = 2\ 500 \times 4 = 10\ 000$;

$g(6) = 1\ 500 \times 6 + 10\ 000 = 19\ 000$.

Exercice 51 Animaux de labour

1.

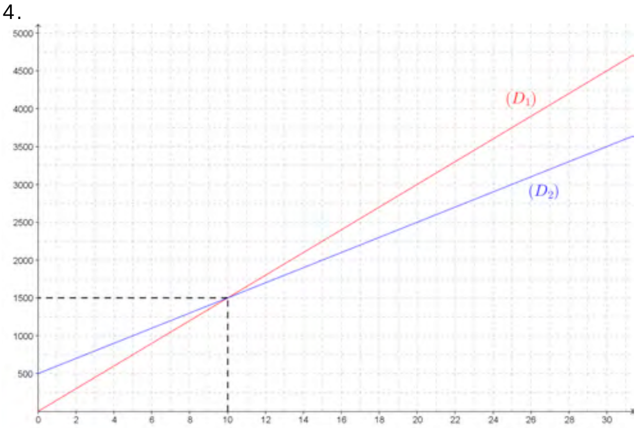
Nombre de jours de location	9	17	30
Montant de la location avec un âne	1 350	2 550	4 500
Montant de la location avec un bœuf	1 400	2 200	3 500
Montant de la location avec un cheval	3 000	3 000	3 000

2. Pour 9 jours, il est plus avantageux de louer un âne ;
pour 17 jours, il est plus avantageux de louer un bœuf ;
pour 30 jours, il est plus avantageux de louer un cheval.

3.a. $y_A = 150x$; $y_B = 100x + 500$; $y_C = 3\ 000$.

b. y_C est toujours égal à 3 000.

4.



(D_1) et (D_2) sont les droites d’équations respectives :
$y = 150x$ et $y = 100x + 500$.

5. Le nombre de jours, où les locations d’un âne et d’un bœuf reviennent au même coût, est l’abscisse du point d’intersection de (D_1) et (D_2) : $f(x) = g(x)$

$$150x = 100x + 500$$
$$50x = 500$$
$$x = 10.$$

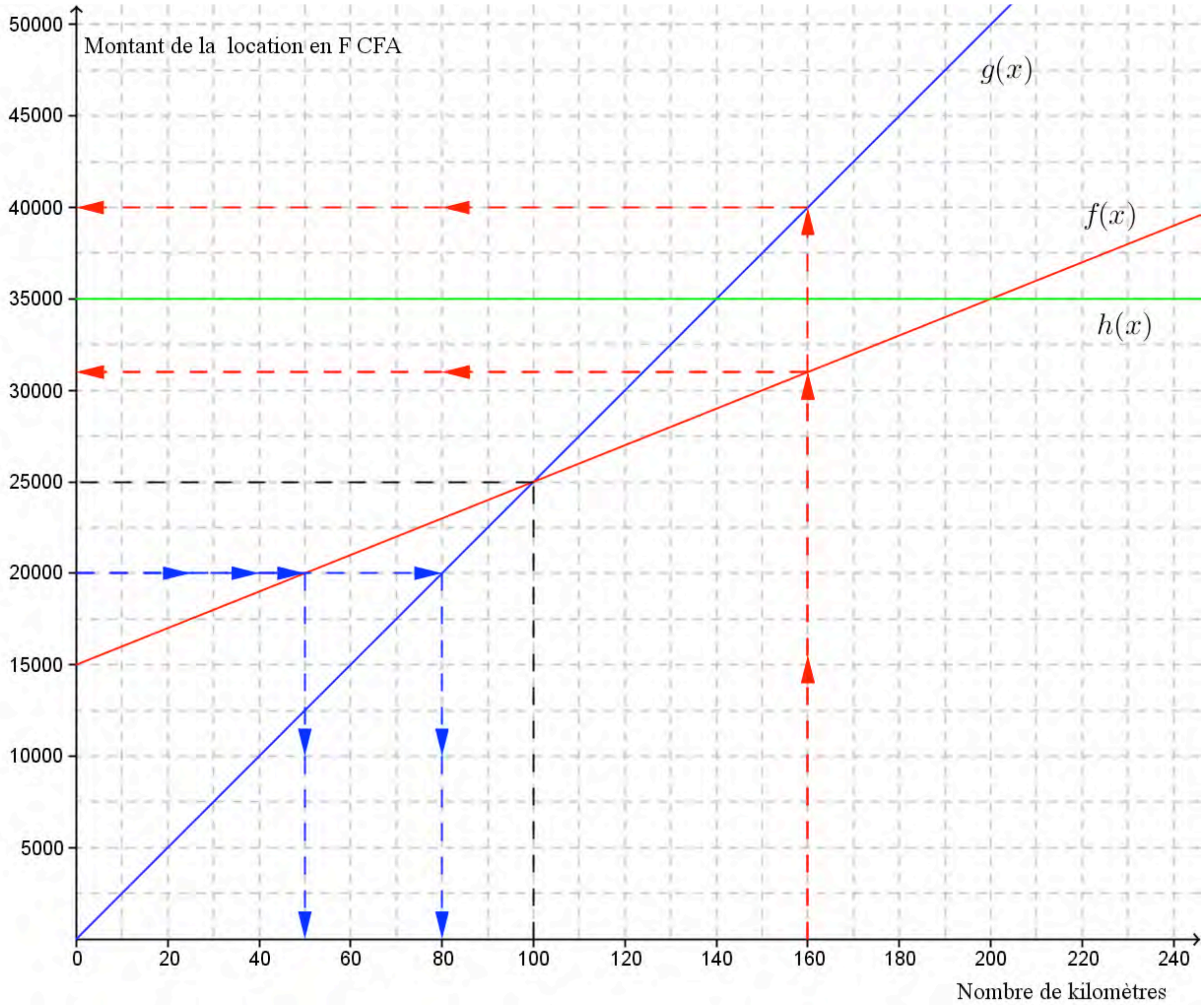
Donc un âne et un bœuf reviennent au même coût pour 10 jours de location.

Exercice 52 Choisir sa formule

1. Coûts de la location d'une voiture pour effectuer un trajet de 60 km :
formule A : $100 \times 60 + 15\,000 = 6\,000 + 15\,000 = 21\,000$ F CFA ;
formule B : $250 \times 60 = 15\,000$ F CFA ;
formule C : 35 000 F CFA (*ne dépend pas du nombre de kilomètres parcourus*).

2.a. Formule A : $f(x) = 100x + 15\,000$; formule B : $g(x) = 250x$; formule C : $h(x) = 35\,000$.

b.



Représentations graphiques des applications *f*, *g* et *h*.

3. Lectures graphiques :

a. la formule A est la plus avantageuse pour un trajet de 160 km ;
prix alors payé : $f(160) = 100 \times 160 + 15\,000 = 16\,000 + 15\,000 = 31\,000$ F CFA ;

b. la formule B permet de parcourir le plus grand nombre de kilomètres, avec un budget de 20 000 F CFA ;
on résout $g(x) = 20\,000$
$250x = 20\,000$
$x = 80$; on pourra alors parcourir 80 km.

4.a. Les représentations graphiques des applications *f* et *g* se croisent au point d'abscisse 100 ;
pour un trajet de 100 km, on a donc le choix entre les deux formules A et B, qui coûtent autant.

b. $f(100) = 100 \times 100 + 15\,000 = 10\,000 + 15\,000 = 25\,000$ et $g(100) = 250 \times 100 = 25\,000$;
pour un trajet de 100 km, le coût des formules A et B est bien identique (25 000 F CFA).

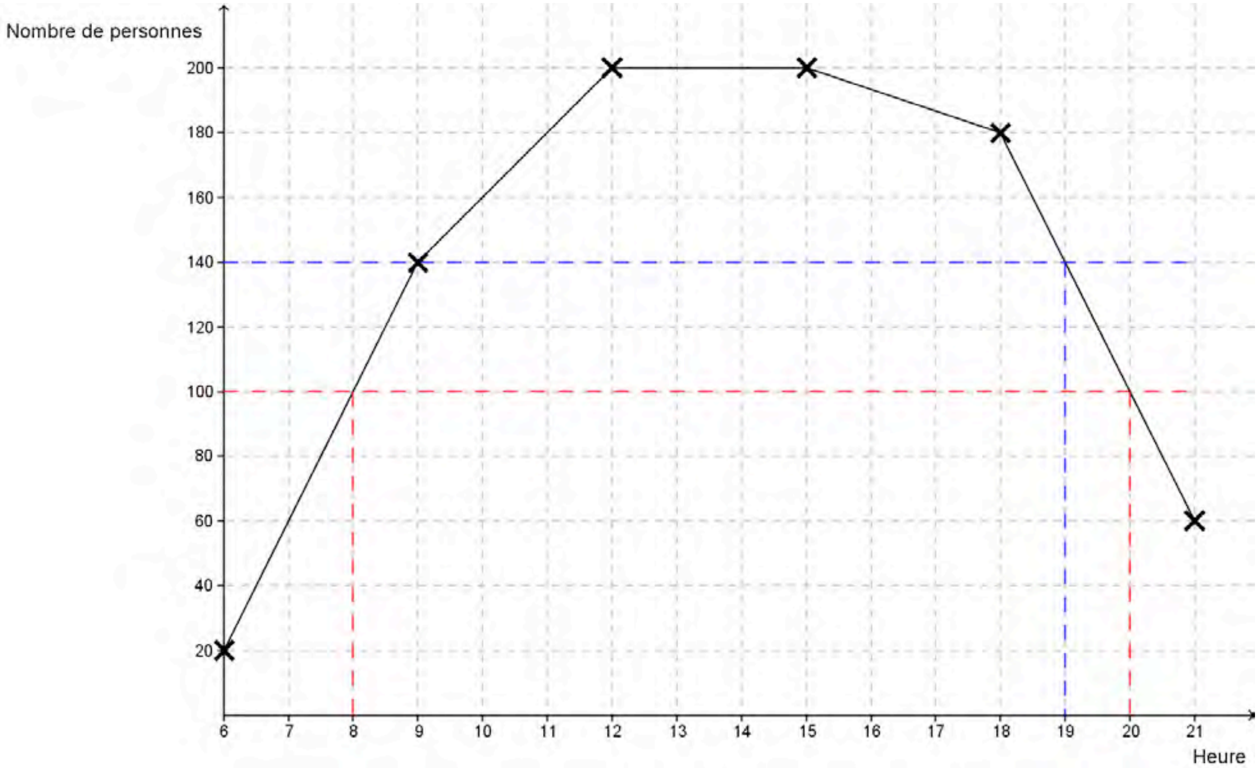
5. Lectures graphiques :

- pour un trajet de moins de 100 km, la formule B est la plus avantageuse ;
- pour un trajet compris entre 200 km et 200 km, la formule A est la plus avantageuse ;
- pour un trajet de plus de 200 km, la formule C est la plus avantageuse.

Exercice 53 Gestion de flux

Heure de la journée	6 h	9 h	15 h	15 h	18 h	21 h
Nombre de personnes présentes dans l'aéroport	20	140	200	200	180	60

1.a. Représentation des points correspondant aux données ci-dessus :



b. En joignant les points successifs à la règle, on obtient une indication sur l'évolution, en fonction de l'heure, du nombre de personnes présentes dans l'aéroport.

2.a. Le nombre de personnes présentes dans l'aéroport augmente entre 6 h et 12 h ;

b. le nombre de personnes présentes dans l'aéroport diminue entre 15 h et 21 h ;

c. le nombre de personnes présentes dans l'aéroport est stable entre 12 h et 15 h.

3. Le nombre de personnes présentes dans l'aéroport est supérieur à 100 entre 8 h et 20 h.

4. En fin de journée, le nombre de personnes présentes dans l'aéroport est inférieur à 140 à partir de 19 h (jusqu'à 21 h).

15 *Statistiques*

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Vocabulaire statistique	1, 2, 3, 4, 6, 11	16, 17	19, 20, 21, 22, 23, 25
1	Calculer des fréquences en écriture fractionnaire, en pourcentages	3, 4, 7, 8, 14	15, 18	21, 23, 24, 26
Pour démarrer 1	Calculer une moyenne et l'interpréter	7, 8, 9		20, 21, 24, 27
Pour démarrer	Lire un diagramme statistique	5, 6, 11, 12, 14	15, 18	20, 21, 24
1	Représenter un diagramme circulaire ou semi-circulaire		18	19, 23
2	Ranger des données statistiques en classes	1, 2, 3, 4, 13	18	19, 20, 26, 27
2	Représenter un histogramme	1, 2, 3, 4, 13, 14	15, 16, 18	19, 20, 25, 26, 27

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Parc national de Waza

1. a. C'est lors de la 8^e journée qu'il a aperçu le plus de lion.
b. Durant ces dix dernières journées, il a aperçu 40 éléphants.
c. Durant ces dix dernières journées, il a aperçu 46 lions. Donc il a aperçu plus de lions.

2. Nombre moyen de lions aperçus lors de ces dix journées : $m_l = \dfrac{3+7+2+6+5+1+8+9+2+3}{10} = 4{,}6$.

Nombre moyen d'éléphants aperçus lors de ces dix journées : $m_e = \dfrac{1+5+4+9+2+5+5+9}{10} = 4$.

3. a. $\dfrac{5}{10} \times 100 = 50\%$. Il a aperçu plus de 3 lions durant 50% de ces 10 journées.

b. $\dfrac{5}{10} \times 100 = 50\%$. Il a aperçu moins de 5 éléphants durant 50% de ces 10 journées.

Activités de découverte

1 Vocabulaire et diagramme semi-circulaire (rappel)

1. a. Le caractère étudié est le nombre de buts par match.
b. Les valeurs prises par le caractère sont 0, 1, 2 et 3.
c. L'effectif correspondant à la valeur 2 est 15.
d. L'effectif total est : 8+10+15+7 = 40. Cela signifie que Samy a joué 40 matchs.

e.

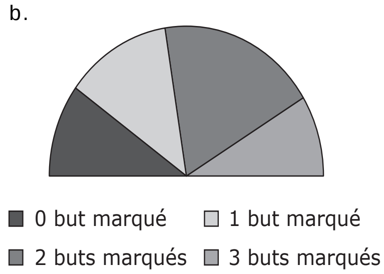
Nombre de buts marqués	0	1	2	3	Total
Nombre de matchs	8	10	15	7	40
Fréquence (écriture fractionnaire)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{40}$	1
Fréquence (en pourcentage)	20	25	37,5	17,5	100

2. a. $m = \frac{8 \times 0 + 10 \times 1 + 15 \times 2 + 7 \times 3}{40} = \frac{61}{40} = 1{,}525$.
b. Durant ces 40 matchs, Samy a marqué (en moyenne) 1,525 but par match.

3. a. Le coefficient de proportionnalité est $\frac{180}{100} = 1{,}8$.

Nombre de buts marqués	0	1	2	3	Total
Nombre de matchs	20	25	37,5	17,5	100
Fréquence (en pourcentage)	36	45	67,5	31,5	180

b.



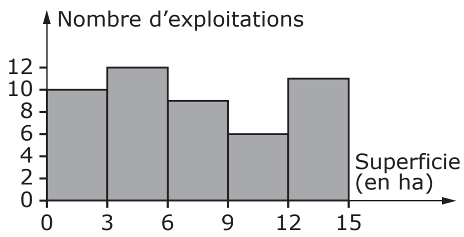
2 Regroupement en classes et histogramme

1. a. 10 exploitations agricoles ont une superficie inférieure à 3 ha.

b.

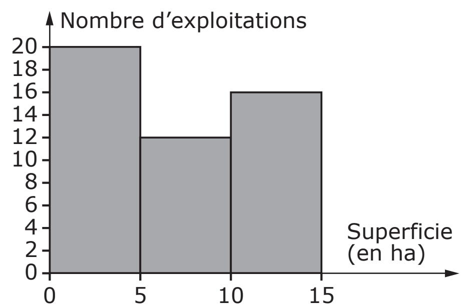
Superficie (en ha)	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15]
Nombre d'exploitations	10	12	9	6	11

2. a.



b.

Superficie (en ha)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15]
Nombre d'exploitations	20	12	16



Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à construire et à interpréter un histogramme

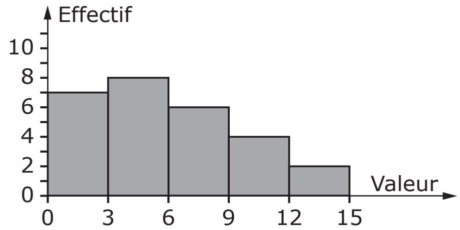
Exercice 1

1\. a.

Classe	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[
Effectif	7	8	6	4	2

b. La classe modale est [3 ; 6[.

2\.



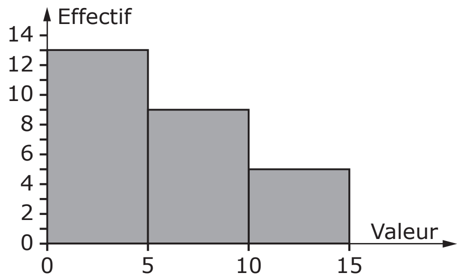
Exercice 2

1\. a.

Classe	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[12 ; 15[
Effectif	13	9	5

b. La classe modale est [0 ; 5[.

2\.



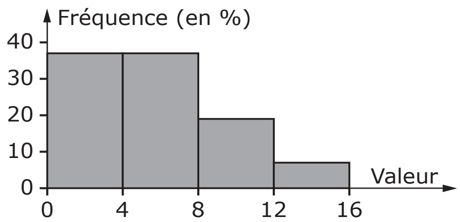
Exercice 3

1\. a.

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[
Fréquence (en %)	37	37	19	7

b. Les classes modales sont [0 ; 4[et [4 ; 8[.

2\.



Exercice 4

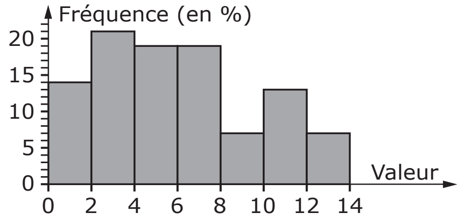
1\. a.

Classe	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[
Fréquence (en %)	15	22	19	19

Classe	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[
Fréquence (en %)	7	11	7

b. La classe modale est [2 ; 4[.

2\.



Exercice 5

a. L'étude a été menée sur 20 jours.

b. $\frac{14}{20} \times 100 = 70$.

70% de ses trajets ont duré moins de 40 min.

Exercice 6

a. $100-(10+20+15+25) = 30$.
30% des poissons pèsent entre 2 et 3 kg.

b. La classe modale est [2 ; 3[.

Activités d'application

Moyenne – Fréquence

Exercice 7

$m = \dfrac{3+7+8+1+2+4+3+7+4+2}{10} = 4{,}1.$

Exercice 8

a. $m = \dfrac{73+75+77+78}{4} = 75{,}75.$

b. En moyenne, entre 2008 et 2011, 75,75% de la population camerounaise a un accès à l'eau traitée.

Exercice 9

$m = \dfrac{5\times 10+25\times 20+30\times 30+15\times 40+5\times 50}{80} = 28{,}75.$

Valeur	10	20	30	40	50	Total
Effectif	5	25	30	15	5	80
Fréquence (en fraction)	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1
Fréquence (en %)	6,25	31,25	18,75	18,75	6,25	100

Exercice 10

1. $m = \dfrac{13\times 0+10\times 1+7\times 2+6\times 3+2\times 4}{38} = \dfrac{50}{38} \approx 1{,}32.$
Durant cette saison, Lionel Messi a marqué environ 1,32 buts par match.

2.a. $\dfrac{23}{38}\times 100 \approx 61$; Lionel Messi a marqué moins de 2 buts lors de 61% des matchs.

b. $\dfrac{8}{38}\times 100 \approx 21$; Lionel Messi a marqué au moins 3 buts lors de 21% des matchs.

c. $\dfrac{2}{38}\times 100 \approx 5$; Lionel Messi a marqué plus de 3 buts lors de 5% des matchs.

Regroupement en classes – Histogramme

Exercice 11

1. Cette enquête a porté sur 40 jours.

2.a. La classe modale est [80 ; 100[; son effectif est de 11 jours.

b. 6+1+3 = 10 ; il y a eu au moins 100 visiteurs par jour durant 10 jours.

Exercice 12

a. Faux, elle a porté sur 27 jours.

b. Vrai, [4 ; 5[est la classe modale.

c. Vrai, $\dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$.

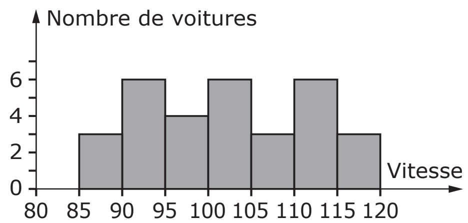
Exercice 13

1.a.

Vitesse (en km/h)	[80 ; 85[	[85 ; 90[	[90 ; 95[	[95 ; 100[
Nombre de voitures	0	3	5	4

Vitesse (en km/h)	[100 ; 105[	[105 ; 110[	[110 ; 115[	[115 ; 120[
Nombre de voitures	6	3	6	3

b. Histogramme associé :



2.a. 9 voitures étaient en excès de vitesse.

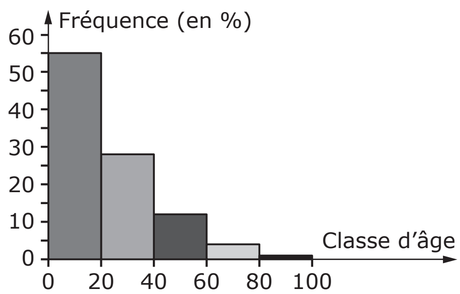
b. $\dfrac{9}{30}\times 100 = 30$; 30% des véhicules étaient en excès de vitesse.

Exercice 14

a. et b.

Classe d'âge	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100[	Total
Mesure de l'angle	197	102	43	15	3	360
Fréquence (en %)	55	28	12	4	1	100

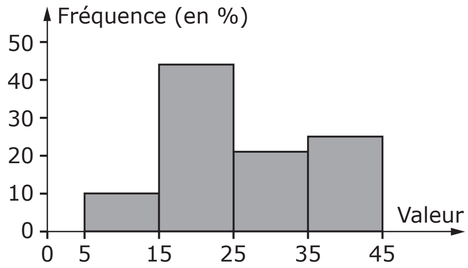
c.



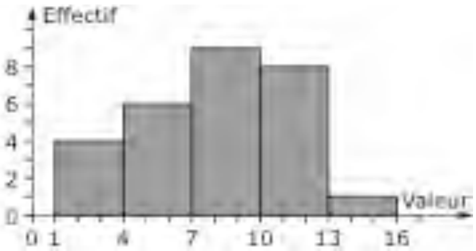
Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 15 Vérifier ses calculs

Classe	[5 ; 15[	[15 ; 25[	[25 ; 35[	[35 ; 45[
Fréquence (en %)	10	45	20	25

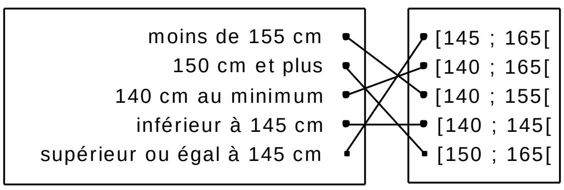


Exercice 16 Construire un exemple



Exercice 17 Plus de…, moins de …

1. Expression Intervalle



2.a. $\frac{14}{40} \times 100 = 35$; donc 35% des élèves de cette classe mesurent moins de 150 cm.

b. $\frac{13}{40} \times 100 = 32{,}5$; donc 32,5% des élèves de cette classe sont de taille supérieure ou égale à 155 cm.

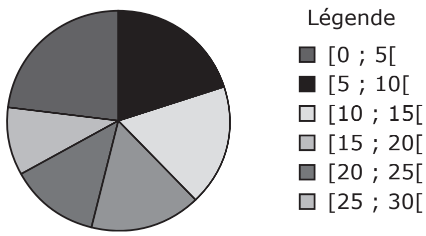
Exercice 18 D'un graphique à un autre

1.

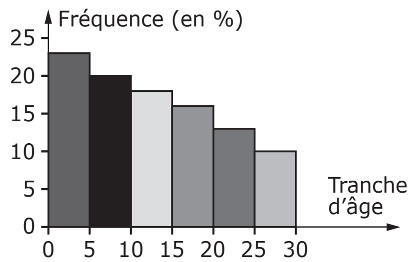
Tranche d'âge	Nombre de pers.(en milliers)	Fréquence (en %)	Mesure (en degrés)
[0 ; 5[	2 464	23	83
[5 ; 10[	2 154	20	72
[10 ; 15[	1 969	18	65
[15 ; 20[	1 704	16	57
[20 ; 25[	1 430	13	47
[25 ; 30[	1 150	10	36
Total	10 871	100	360

2.a. • La colonne 4 est utile pour construire le diagramme circulaire ;
• la colonne 3 est utile pour construire l'histogramme des fréquences en pourcentage.

b. • Diagramme circulaire

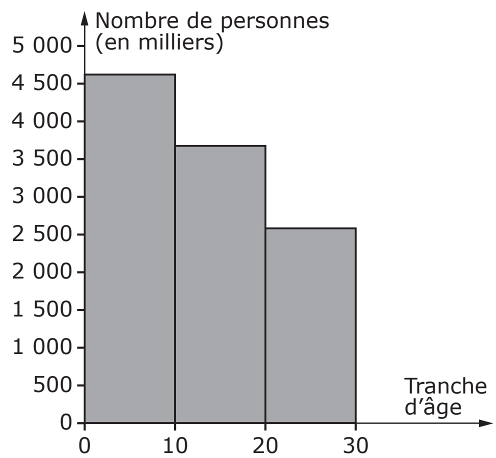


• Histogramme des fréquences en pourcentage



c.

Tranche d'âge	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[
Nombre de pers. (en milliers)	4 618	3 673	2 580



Exercices d'approfondissement

Exercice 19 Capitales africaines

1. a. 45 capitales sont concernées.

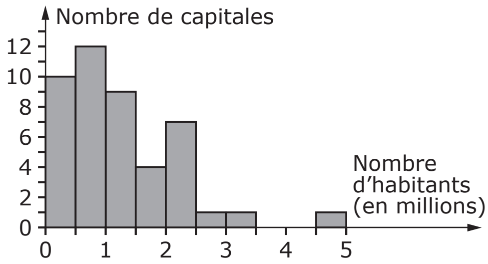
b.

Nombre d'habitants (en millions)	[0 ; 0,5[	[0,5 ; 1[	[1 ; 1,5[	[1,5 ; 2[	[2 ; 2,5[
Nombre de capitales	10	12	9	4	6

Nombre d'habitants (en millions)	[2,5 ; 3[	[3 ; 3,5[	[3,5 ; 4[	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[
Nombre de capitales	2	1	0	0	1

c. La classe modale est [0,5 ; 1[.

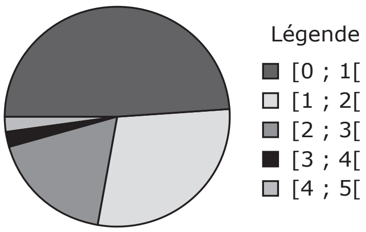
d. Histogramme associé :



2.a.

Nombre d'habitants (en millions)	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	Total
Nombre de capitales	22	13	8	1	1	45
Mesure (en degrés)	176	104	64	8	8	360

b. Diagramme circulaire associé :



Exercice 20 Morceaux de musique

1. a. Le baladeur de la jeune fille contient 25 morceaux de musique.

b. La classe modale est [210 ; 240[. Elle contient 9 morceaux de musique, c'est-à-dire 36% des morceaux.

2.a.

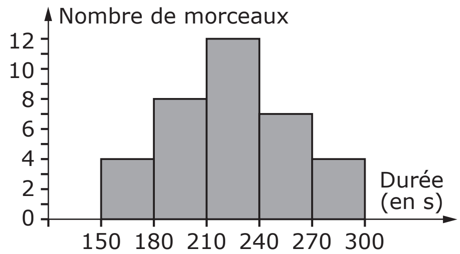
$$m = \frac{2 \times 160 + 2 \times 180 + 2 \times 210 + 1 \times 230 + 2 \times 255 + 1 \times 280}{10}$$

$$m = \frac{2\,120}{10} = 212 \text{ s.}$$

La durée moyenne de ces morceaux est de 212 s.

b.

Durée (en s)	[150 ; 180[	[180 ; 210[	[210 ; 240[	[240 ; 270[	[270 ; 300[
Nombre de morceaux	4	8	12	7	4



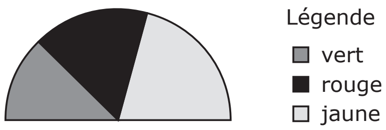
Exercice 21 Les tenues de sport

1. Le caractère étudié est la couleur de la tenue de sport.

2.

Couleur	VERT	ROUGE	JAUNE	Total
Angle	45°	60°	75°	180°
Effectif	225	300	375	900

3.



Exercice 22 Récolte de café

1. 100 (=14+18+12+16+30+10) planteurs ont été interrogés.

2.

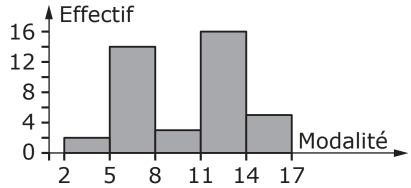
Classe	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectif	14	18	12	16	30	10
Fréquence (en %)	14	18	12	16	30	10

3. 14+18+12+16 = 60 ; donc 60 planteurs ont récolté moins de 40 tonnes de café.

Exercice 23 Grande consommation de cahiers

1. La classe modale est [11 ; 14[.

2.



3. • Cette classe compte 40 élèves.

• 2+14+3 = 19 ; donc 19 élèves ont utilisé moins de 11 cahiers.

Activités d'intégration

Exercice 26 Espérance de vie

1.a. Hommes :

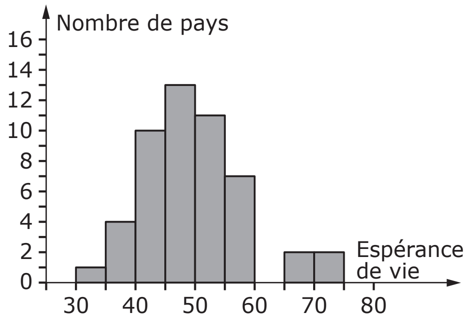
Espérance de vie	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	[60 ; 65[	[65 ; 70[	[70 ; 75[	[75 ; 80[	Total
Nombre de pays	1	4	10	13	11	7	0	2	2	0	50
Fréquence (en %)	2	8	20	26	22	14	0	4	4	0	100

Femmes :

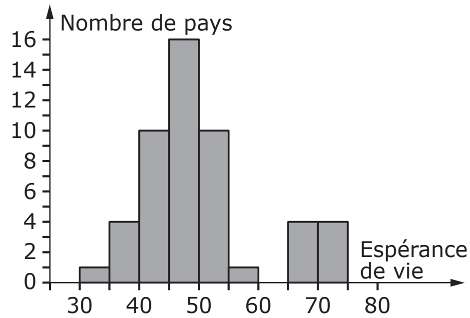
Espérance de vie	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	[60 ; 65[	[65 ; 70[	[70 ; 75[	[75 ; 80[	Total
Nombre de pays	1	4	10	4	16	10	1	0	2	2	50
Fréquence (en %)	2	8	20	8	32	20	2	0	4	4	100

b. Histogrammes associés à ces deux séries :

Hommes



Femmes



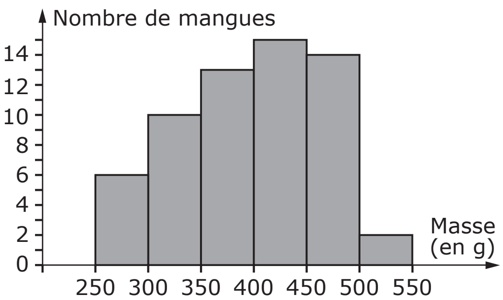
2.a. $1+4+10+13 = 28$ et $\frac{28}{50} \times 100 = 56$; donc dans 56% des pays, les hommes ont moins de 50 ans d'espérance de vie.

b. $10+1+2+2 = 15$ et $\frac{15}{50} \times 100 = 30$; donc dans 30% des pays, les femmes ont 55 ans ou davantage d'espérance de vie.

Exercice 27 Les mangues de Mariam

1.a. • $60-(6+10+13+14+2) = 15$; donc la donnée manquante est 15.
• La classe modale est [400 ; 450[.

b.



c. $6+10+13+15 = 44$ et $\frac{44}{60} \times 100 \approx 73$; donc 73% des mangues pèsent moins de 450 g.

2.a. $m = \frac{2 \times 300 + 5 \times 305 + 6 \times 310 + 5 \times 315 + 2 \times 320}{20} = \frac{6\,200}{20} = 310$;
donc les mangues achetées par Ahmed pèsent en moyenne 310 g.

b. $\frac{6\,200}{100} \times 60 = 3\,720$; donc Ahmed a payé 3 720 F CFA à Mariam.