

COURS MATHÉMATIQUES TERMINALE *D*

Ferdinand K. KPOTUFE¹

2015-2016



1. Enseignant de Mathématiques((+228) 98 66 60 26 / 93 12 15 63)

TABLE DES MATIÈRES

I	GÉOMÉTRIE-ALGÈBRE	5
1	ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES	6
1.1	Nombres complexes	7
1.1.1	Forme algébrique d'un nombre complexe	7
1.1.2	Nombres complexes nuls	8
1.1.3	Egalité de deux nombres complexes	8
1.1.4	Conjugué d'un nombre complexe	8
1.1.5	Module d'un nombre complexe	9
1.1.6	Calcul dans \mathbb{C}	9
1.2	Représentation géométrique d'un nombre complexe	10
1.2.1	Plan complexe	10
1.2.2	Affixe et distance d'un vecteur	11
1.2.3	Argument d'un nombre complexe	11
1.2.4	Détermination de l'argument par calcul	12
1.3	Autres formes d'un nombre complexe	13
1.3.1	Forme trigonométrique	13
1.3.2	Forme exponentielle	14
1.4	Résolution d'équations complexes	16
1.4.1	Racine n -ième d'un nombre complexe	16
1.4.2	Cas particulier des racines carrées ($n = 2$)	16
1.4.3	Équations complexes du 2^{nd} degré	17
1.4.4	Équations complexes du n -ième degré	17
1.5	Configuration du plan et nombres complexes	19
1.6	Exercices d'entraînement	20
1.6.1	Exercices niveau 1 : Faciles	20
1.6.2	Exercices de niveau 2 : Renforcement	20
1.6.3	Exercice de niveau 3 : Classiques	22
2	GÉOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES	24
2.1	TRANSFORMATIONS USUELLES ET NOMBRES COMPLEXES	24
2.2	Similitudes directes planes	26
2.3	Nature et éléments caractéristiques de $z' = az + b$	26
2.4	Lieu géométriques et nombres complexes	26
2.4.1	Cercle de centre A et de rayon R	26

2.4.2	Droite	27
2.4.3	Démi-droite	27
2.5	Exercices d'entraînement	27
2.5.1	Exercices de niveau 1	27
2.5.2	Exercices de niveau 2	29
II	ANALYSE	30
3	LIMITES-CONTINUITÉS	31
3.1	Limites	32
3.1.1	Rappels(Notions de base :limites de référence)	32
3.1.2	Limites à gauche, limite à droite	32
3.1.3	Opérations sur les limites	33
3.1.4	Limite d'une fonction composée	34
3.1.5	Calcul de limites	34
3.1.6	Propriétés de comparaison	35
3.1.7	Théorème d'encadrement	35
3.1.8	Théorème des gendarmes	35
3.2	Continuité d'une fonction	35
3.2.1	Continuité en un point	35
3.2.2	Continuité sur un intervalle	36
3.2.3	Prolongement par continuité	36
3.2.4	Image d'un intervalle par une fonction continue	36
3.2.5	Calcul approché des zéros d'une fonction continue	37
3.2.6	Bijection	37
3.2.7	Fonction puissance d'exposant rationnel	38
3.3	Exercices d'entraînement	38
4	DÉRIVÉE-PRIMITIVES	40
4.1	Dérivation	40
4.1.1	Dérivabilité en x_0	40
4.1.2	Opération sur les dérivées	41
4.1.3	Dérivée successive	42
4.1.4	Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective	42
4.1.5	Inégalité des accroissements finis	42
4.2	Primitives	42
4.2.1	Tableaux récapitulatifs	43
4.2.2	Autre forme de calcul de primitive	43
4.3	Exercices d'entraînement	44
5	ÉTUDES DE FONCTIONS	46
5.1	Plan d'étude d'une fonction	46
5.2	Parité-Périodicité d'une fonction	47
5.2.1	Parité	47
5.2.2	Périodicité d'une fonction	47
5.3	Axe de symétrie-Centre de symétrie	47
5.4	Points particuliers	48
5.4.1	Points d'intersection	48
5.4.2	Extréma	48
5.4.3	Points d'inflexion	48

5.5	Branches infinies	48
5.5.1	Asymptotes	48
5.5.2	Direction asymptotique	49
5.6	Exemple d'étude de fonctions	49
5.7	Exercices d'entraînement	49
6	FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN	52
6.1	Définitions et Propriétés	52
6.1.1	Définition	52
6.1.2	Conséquences	52
6.1.3	Ensemble de définition de $\ln(f(x))$ et $\ln(f(x))$	53
6.1.4	Variation de \ln et conséquences	53
6.1.5	Propriétés algébriques de \ln	53
6.1.6	Équations comportant \ln	54
6.1.7	Inéquations comportant \ln	54
6.2	Dérivée-Primitive-limites	54
6.2.1	Variation et représentation graphique de \ln	54
6.2.2	Limites remarquables	55
6.2.3	Dérivée de $\ln(f(x))$ et $\ln(f(x))$	55
6.2.4	Primitives	56
6.3	Fonction logarithme de base a	56
6.4	Exercices d'entraînement	56
7	FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES	59
7.1	Exercices d'entraînement	59
8	SUITES NUMÉRIQUES	62
8.1	Généralité	62
8.1.1	Définitions	62
8.1.2	Détermination d'une suite	62
8.1.3	Propriétés des suites	63
8.1.4	Suite arithmétique & géométrique	63
8.1.5	Démonstration par récurrence	64
8.2	Limites d'une suite numérique	64
8.2.1	Limite infinie	64
8.2.2	Suite convergente	65
8.2.3	Suites de référence	65
9	INTÉGRATIONS	67
9.1	Définition et Propriétés	67
9.1.1	Définition	67
9.1.2	Conséquences et Propriétés	68
9.1.3	Inégalité de la moyenne	69
9.1.4	Valeur moyenne d'une fonction	70
9.1.5	Intégration par partie	70
9.2	Calcul d'aire , interprétation graphique d'une intégrale	71
9.2.1	Intégration d'une fonction paire, impaire et périodique	71
9.2.2	Aire d'une partie du plan limitée par une fonction	71
9.2.3	Aire d'une partie du plan limitée par deux fonctions	71
9.3	Calcul approché d'une intégrale	72
9.4	Exercices d'entraînement	73

10 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	76
10.1 Généralité	76
10.1.1 Définition	76
10.1.2 Notation	76
10.2 Les types d'équations différentielles	77
10.2.1 Équation du type $y' = f(x)$	77
10.2.2 Équation du type $y'' = f(x)$	77
10.2.3 Équation du type $y' - ay = 0, a \in \mathbb{R}^*$	77
10.2.4 Équation différentielle du premier ordre avec second membre.	77
10.2.5 Équation différentielle du second degré du type $y'' - \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}$	77
10.2.6 Équation différentielle du second degré du type $y'' + \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}$	77
10.2.7 Équation différentielle du second degré du type $ay'' + by' + cy = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$	77
10.3 Exercices d'entraînement	78
III ORGANISATION DES DONNÉES	79
11 ANALYSE COMBINATOIRES (DÉNOMBREMENT)	80
12 PROBABILITÉS	81
13 STATISTIQUES	82

Première partie

GÉOMÉTRIE-ALGÈBRE

CHAPITRE 1

ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

Sommaire

1.1 Nombres complexes	7
1.1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe	7
1.1.2 Nombres complexes nuls	8
1.1.3 Égalité de deux nombres complexes	8
1.1.4 Conjugué d'un nombre complexe	8
1.1.5 Module d'un nombre complexe	9
1.1.6 Calcul dans \mathbb{C}	9
1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe	10
1.2.1 Plan complexe	10
1.2.2 Affixe et distance d'un vecteur	11
1.2.3 Argument d'un nombre complexe	11
1.2.4 Détermination de l'argument par calcul	12
1.3 Autres formes d'un nombre complexe	13
1.3.1 Forme trigonométrique	13
1.3.2 Forme exponentielle	14
1.4 Résolution d'équations complexes	16
1.4.1 Racine n -ième d'un nombre complexe	16
1.4.2 Cas particulier des racines carrées ($n = 2$)	16
1.4.3 Équations complexes du 2^{nd} degré	17
1.4.4 Équations complexes du n -ième degré	17
1.5 Configuration du plan et nombres complexes	19
1.6 Exercices d'entraînement	20
1.6.1 Exercices niveau 1 : Faciles	20
1.6.2 Exercices de niveau 2 : Renforcement	20
1.6.3 Exercice de niveau 3 : Classiques	22

INTRODUCTION

Activité 1.1.

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(E) : x^2 + 1 = 0$ (1.1)

Résolution

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= 0^2 - 4(1)(1) \\
 &= -4 \implies \Delta < 0. \text{ d'où } \underline{S_{\mathbb{R}} = \emptyset}
 \end{aligned}$$

Dans \mathbb{R} , l'équation 1.1 n'a pas de solution ; le problème mathématique qui se pose est de construire un nouvel ensemble contenant \mathbb{R} et dans lequel les propriétés de l'addition et de la multiplication sont vérifiées. On suppose l'existence d'un nombre *imaginaire* noté i vérifiant :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

L'ensemble cherché est appelé *ensemble des nombres complexes* noté \mathbb{C} et on a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

NB : l'inconnue pour les nombres complexes est souvent notée z .

Ainsi dans cet ensemble l'équation 1.1 :

$$\begin{aligned}
 (E) : x^2 + 1 = 0 &\text{ devient } z^2 - (-1) = 0 \\
 &\iff z^2 - (-1) = 0 \\
 &\iff z^2 - (i)^2 = 0 \\
 &\iff (z - i)(z + i) = 0 \\
 &\iff z = i \text{ ou } z = -i. \text{ D'où } \underline{S_{\mathbb{C}} = \{-i, i\}}
 \end{aligned}$$

1.1 Nombres complexes

Définition 1.1. On appelle *nombre complexe*, tout nombre s'écrivant sous la forme $a+ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.1. $5 + 2i$, $1 + 2i$; 2 et i sont des nombres complexes.

1.1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Lorsqu'on qu'un nombre complexe s'écrit sous la forme :

$$\boxed{z = a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}}$$

on dit que z est sous sa *forme algébrique*.

Vocabulaire

- a est appelé *Partie réelle* de z notée $\mathcal{R}_e(z)$.
- b est appelé *Partie imaginaire* de z notée $\mathcal{I}_m(z)$.

Remarques : Soit $z = a + ib$

$$\iff z \text{ est } \mathbf{réel} (z \in \mathbb{R}) \iff \mathcal{I}_m(z) = 0$$

$$\iff z \text{ est } \mathbf{imaginaire pur} (z \in i\mathbb{R}) \iff \mathcal{R}_e(z) = 0$$

Exemple 1.2. .

1. $z = 3 - 2i : \mathcal{R}_e(z) = 3$ et $\mathcal{I}_m(z) = -2$
2. Déterminer x et y pour que $z = 3 + (x - 1)i$ soit un réel, puis imaginaire pur
 $z \in \mathbb{R} \iff \mathcal{I}_m(z) = 0$ c'est-à-dire $x - 1 = 0$ D'où $x = 1$

1.1.2 Nombres complexes nuls

Soit $z = a + ib$

$$z = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$$

Exemple 1.3. . Déterminons x et y pour que $z = (x + 1) + i(2y - 3)$ soit nul.
 D'après ce qui précède, On a :

$$\begin{aligned} z = 0 &\iff x + 1 = 0 \text{ et } 2y - 3 = 0 \\ &\iff x = -1 \text{ et } y = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

1.1.3 Egalité de deux nombres complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

$$z = z' \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Exemple 1.4. . Déterminons x et y pour que $z = (x + 2) + 3iy$ et $z' = 3i$ soient égaux.
 D'après ce qui précède, On a :

$$\begin{aligned} z = z' &\iff x + 2 = 0 \text{ et } 3y = 3 \\ &\iff x = -2 \text{ et } y = 1 \end{aligned}$$

1.1.4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.2. Soit $z = a + ib$

Le conjugué du nombre complexe z est noté \bar{z} et vaut : $a - ib$.

$$\bar{z} = a - ib$$

Exemple 1.5. Les conjugués des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 3 - 5i$ et $z_3 = 0$ sont respectivement : $\bar{z}_1 = 3 - 2i, \bar{z}_2 = 3 + 5i$ et $\bar{z}_3 = 0$

Propriété 1.1. Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \\ \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' \\ z \times \bar{z} = (\mathcal{R}_e(z))^2 + (\mathcal{I}_m(z))^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, z \neq 0 \\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, z' \neq 0 \\ \overline{z^n} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Remarques : Pour tout $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$)

- ☞ $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}_e(z) = 2x \implies x = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- ☞ $z - \bar{z} = 2\mathcal{I}_m(z) = 2iy \implies y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- ☞ $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- ☞ $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$.

1.1.5 Module d'un nombre complexe

Définition 1.3. On appelle module d'un nombre complexe z , le nombre noté $|z|$ et vaut $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$. on le calcule en posant $z = a + ib \rightarrow z \times \bar{z} = a^2 + b^2 \implies |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Attention : Le nombre module d'un nombre complexe est **toujours positif**.

Exemple 1.6. Les modules des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$ et $z_3 = 2i$ sont respectivement : $|z_1| = \sqrt{13}$, $|z_2| = 5$ et $|z_3| = 2$

Propriété 1.2. Soient z et z' deux nombres complexes.

$$\left\{ \begin{array}{l} |z| = 0 \iff z = 0 \\ |z| = |\bar{z}| \\ |z * z'| = |z| * |z'| \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{Z} \\ \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0 \\ |z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ (inégalité triangulaire)} \end{array} \right.$$

Remarques : Soit $z = a + ib$

☞ Si $z \in \mathbb{R}$ alors $|z| = |a|$

☞ Si $z \in i\mathbb{R}$ alors $|z| = |b|$

1.1.6 Calcul dans \mathbb{C}

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

Addition

On a :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

Démonstration : évidente

Multiplication

On a :

$$z * z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Démonstration : Confère cahier de notes

Exemple 1.7. . Ecrire plus simplement l'expression $A = (2 - 3i)^2 - (2 + 3i)(1 + i)$

Résolution

$$\begin{aligned} A &= (2 - 3i)^2 - (2 + 3i)(1 + i) \\ &= ((2)^2 - 2(2)(3i) + (3i)^2) - (2 + 2i + 3i + 3i^2) \text{ or } i^2 = -1 \text{ donc} \\ &= (4 - 12i - 9) - (2 + 5i - 3) \\ &= (-5 - 12i) - (-1 + 5i) \\ &= (-5 + 1) - 12i - 5i \\ &= -4 - 17i \implies \underline{A = -4 - 17i} \end{aligned}$$

NB : opp(z) = $-z$

Quotient

$$\begin{cases} \text{Si } z \neq 0, \text{ alors } \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \text{Si } z' \neq 0, \text{ alors } \frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} \end{cases}$$

Démonstration : Confère cahier de notes

Exemple 1.8. Ecrire le nombre complexe suivant sans i au dénominateur : $B = \frac{2 - 3i}{1 + 3i}$

Résolution

$$\begin{aligned} B &= \frac{2 - 3i}{1 + 3i} \\ &= \frac{(2 - 3i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} \\ &= \frac{-7 - 9i}{10} \implies B = \frac{-7}{10} - \frac{9}{10}i \end{aligned}$$

Exercice 1.1. .

- Calculer le module des nombres complexes suivants : $z_1 = (2 - i)(1 + i)$ $z_2 = \frac{1 + i}{2 - i}$ $z_3 = \left(\frac{i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^4$
- Soit $Z = \frac{z - i}{z + i}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que $Z \in \mathbb{R}$
- Soit $Z = \frac{z - 2}{2z - 1}$. On pose $z = x + iy$
 - Déterminer $\mathcal{R}_e(z)$ et $\mathcal{I}_m(z)$
 - Déterminer l'ensemble des points $M(x, y) \in \mathcal{P}$ pour que $Z \in \mathbb{R}$

Solution.

- $|z_1| = \sqrt{10}$, $|z_2| = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $|z_3| = \frac{9}{4}$
- Il suffit de résoudre $\bar{Z} = Z$ i.e. $\left(\frac{z - i}{z + i}\right) = \frac{z - i}{z + i}$. Ce qui conduira à la condition Z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = z$, $z \neq -i \iff z = bi, b \neq -1$.
- (a) $\mathcal{R}_e(Z) = \frac{2x(x - 2) + y(2y - 1)}{4x^2 + (2y - 1)^2}$ et $\mathcal{I}_m(Z) = \frac{2xy - (2y - 1)(x - 2)}{4x^2 + (2y - 1)^2}$
 (b) L'ensemble E cherché est tel que : $E = \{M(x, y) / Z \in \mathbb{R} \iff \mathcal{I}_m(Z) = 0\}$

E est la droite $(D) : y = \frac{1}{4}(2 - x)$ privé du points $A(0, \frac{1}{2})$ ou $E = (D) - A$

1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

1.2.1 Plan complexe

Soit \mathcal{P} le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

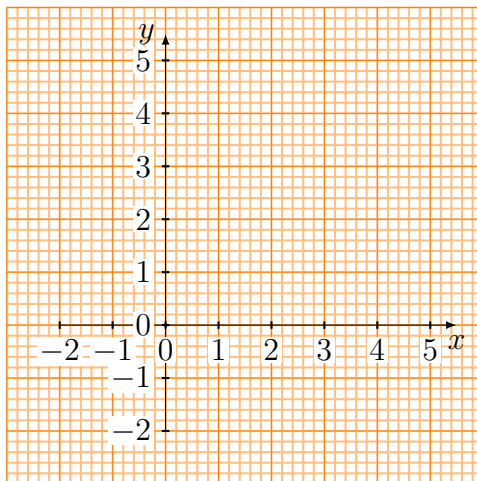
\mathcal{V} : l'ensemble des vecteurs du plan rapporté à la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

\mathbb{C} : l'ensemble des nombres complexes. Soit $z = x + iy$ et M sa représentation :

- ☞ M est appelé **point image** de z noté $M(z)$
 - ☞ \overrightarrow{OM} est appelé **vecteur image** de z noté $\overrightarrow{OM}(z)$
 - ☞ z est appelé **affixe** du point M noté z_M
- On représente $z = x + iy$ par le point $M(x, y)$

- ♣ L'axe (O, \vec{e}_1) est appelé **axe des réels**.
- ♣ L'axe (O, \vec{e}_2) est appelé **axe des imaginaires purs**.

Exemple 1.9. Représenter le nombre complexe suivant : $z = 4 + 3i$



Exemple 1.10. .

1. Les affixes des points $A(2, 3)$ $B(3, 0)$ $C(0, -5)$ sont respectivement $z_A = 3 + 3i$, $z_B = 3$ et $z_C = -5i$
2. Les points images de E, F et G d'affixes respectives $z_E = -4i$ $z_F = 2 - 3i$ $z_G = \sqrt{2}$ sont respectivement $E(0, -4)$, $F(2, -3)$ et $G(\sqrt{2}, 0)$

1.2.2 Affixe et distance d'un vecteur

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On a :

$$\begin{cases} z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \\ AB = |z_B - z_A| \end{cases} \text{ Ainsi } OA = \|\overrightarrow{OA}\| = |z_A|$$

Exemple 1.11. Soient $z_A = 2 + i$ et $z_B = 2 - i$. Calculer $z_{\overrightarrow{AB}}$ et AB

Solution

$$z_{\overrightarrow{AB}} = -2i \text{ et } AB = 2$$

1.2.3 Argument d'un nombre complexe

Définition 1.4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ l'affixe de \overrightarrow{OM} et $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé. On appelle :

- ♣ **Argument** de z noté $Arg(z)$, la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Oe_1, OM})$ c'est-à-dire

$$Arg(z) = (\widehat{Oe_1, OM}).$$

- ♣ **argument** de z noté $arg(z)$ tel que : $arg(z) = Arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exemple 1.12. Après avoir représenté le nombre complexe $z = 3 - 2i$, placer l'Argument de ce dernier

Remarques : Soit $k \in \mathbb{Z}$

- ♣ Si $z \in i\mathbb{R}^*$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 - Si $z \in i\mathbb{R}_+^*$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
 - Si $z \in i\mathbb{R}_-^*$ alors $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- ♣ Si $z \in \mathbb{R}^*$ alors $\arg(z) = k\pi$.
 - Si $z \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\arg(z) = 2k\pi$.
 - Si $z \in \mathbb{R}_-^*$ alors $\arg(z) = \pi + 2k\pi$.

1.2.4 Détermination de l'argument par calcul

Soit $z = a + ib$ avec θ et M respectivement son argument et son point image.

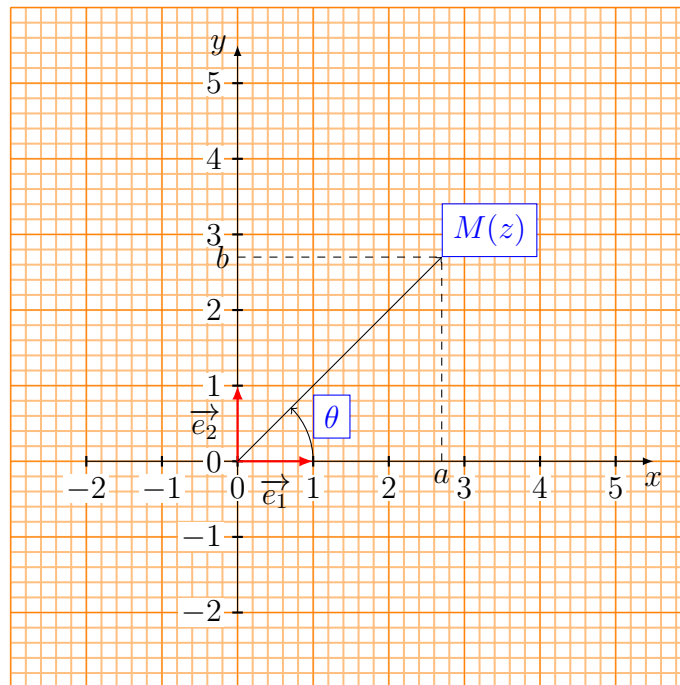


FIGURE 1.1 – Détermination d'Argument par calcul

On a d'après la Figure 1.1 ci-dessus :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \end{cases} \implies \begin{cases} \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{|z|}\right) \\ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{|z|}\right) \end{cases}$$

Exemple 1.13. Déterminer l'Argument de $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

Résolution

Soit $\theta = \text{Arg}(z_1)$. On a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{|z_1|} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{|z_1|} \end{cases} \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ D'où } \boxed{\theta = \text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{3}}$$

Propriété 1.3. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

a) **Fondamentales**

$$\boxed{\text{Arg}(z * z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \mid \text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z') \mid \text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z) \mid \text{Arg}(-z) = \pi + \text{Arg}(z)}$$

b) **Conséquences**

$$\boxed{\text{Arg}(z^n) = n * \text{Arg}(z), n \in \mathbb{Z} \quad \mid \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z) \quad \mid \quad \text{Arg}(-\bar{z}) = \pi - \text{Arg}(z)}$$

Remarques :

Soient A, B et C trois points distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C . On a :

$$\boxed{\text{mes}(\widehat{AB}, \widehat{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

1.3 Autres formes d'un nombre complexe

1.3.1 Forme trigonométrique

Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \notin (0, 0)$ tel que $\text{Arg}(z) = \theta$.

On a : $z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$. Or $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ et
$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|} = \cos(\theta) \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|} = \sin(\theta) \end{cases}$$

D'où $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

Par conséquent, lorsqu'un nombre complexe z s'écrit sous la forme :

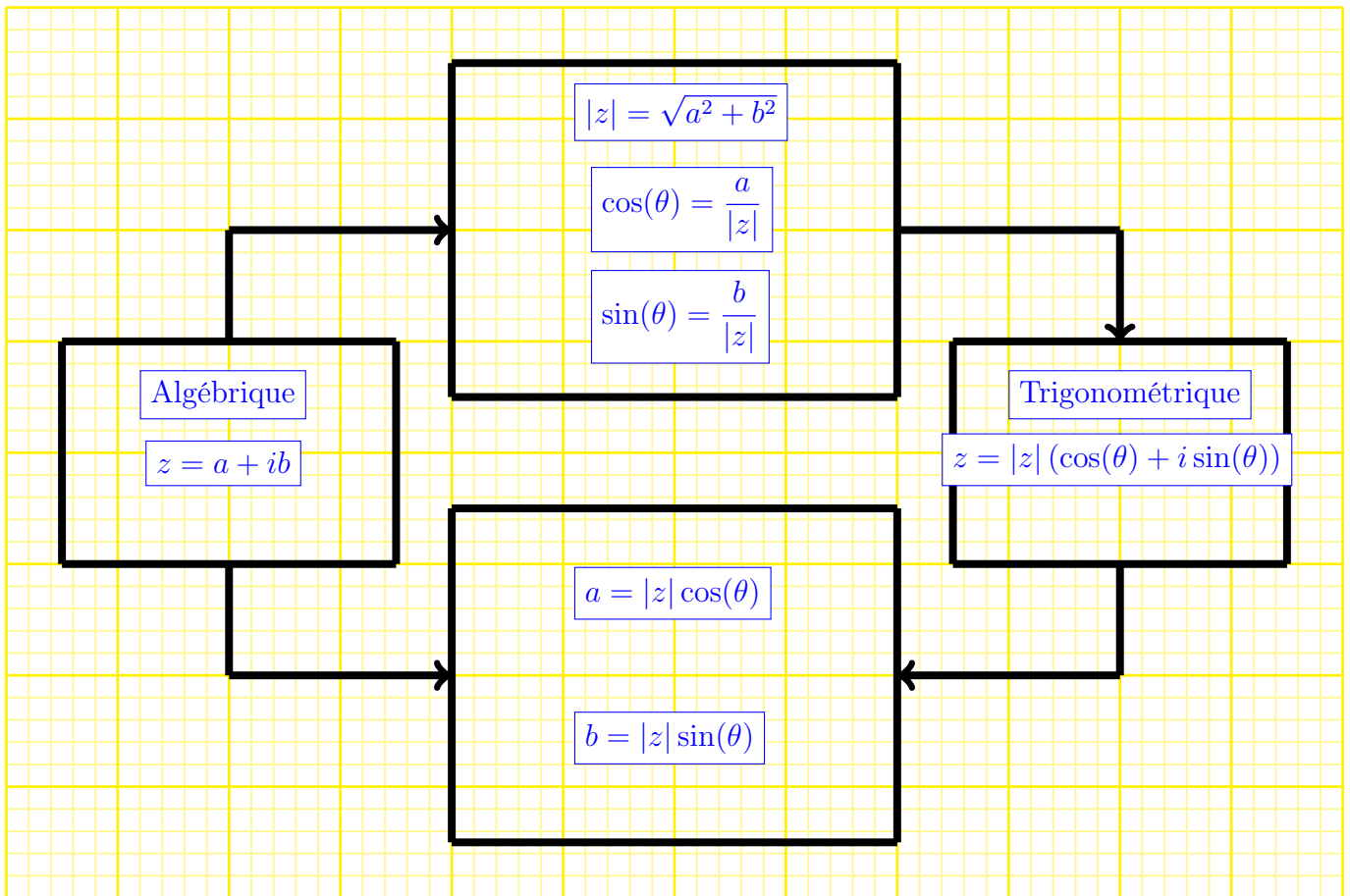
$$\boxed{z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))}$$

on dit que z est sous sa **forme trigonométrique**.

Exemple 1.14. Déterminer la forme trigonométrique de $z_1 = 1, z_2 = i$ et $z_3 = 1 - i$

CE QU'IL FAUT RETENIR

Forme Algébrique \iff Forme Trigonométrique



1.3.2 Forme exponentielle

On pose :

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta} \text{ avec } \theta = \text{Arg}(z)$$

L'écriture $z = |z|e^{i\theta}$ est appelée **forme exponentielle** de z . En posant $|z| = r$, on a :

$$z = re^{i\theta}$$

Propriété 1.4. Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$. On a :

$$z * z' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad \left| \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}, z' \neq 0 \right| \quad \left| \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}, z \neq 0 \right| \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

♣ Formule de MOIVRE

Pour $n \in \mathbb{Z}$, On a :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Cette écriture est la formule de Moivre

♣ Formules de EULER

a) Fondamentales

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad \left| \quad \sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2i}, n \in \mathbb{Z} \right.$$

b) Conséquences ($n = 1$)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \quad \left| \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i} \right.$$

Ces écritures sont connues sous le nom de formules de Euler

Démonstration : Confère cahier de cours

♣ Binôme de NEWTON

Soient a et b deux nombres complexes non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \text{ avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

♣ Triangle de PASCAL

n (<i>degré</i>)	<i>Coefficients</i>				
0	$1(a+b)^0$				
1	$1(a)$	$1(b)$			
2	$1(a^2)$	$2(ab)$	$1(b^2)$		
3	$1(a^3)$	$3(a^2b)$	$3(ab^2)$	$1(b^3)$	
4	$1(a^4)$	$4(a^3b)$	$6(a^2b^2)$	$4(ab^3)$	$1(b^4)$
5	$1(a^5)$	$5(a^4b)$	$10(a^3b^2)$	$10(a^2b^3)$	$5(ab^4)$ $1(b^5)$

♣ Linéarisation

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= (\cos \theta)^4 \\ &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4}{2^4} \\ &= \frac{1}{2^4} \left((e^{i\theta})^4 (e^{-i\theta})^0 + 4 (e^{i\theta})^3 (e^{-i\theta})^1 + 6 (e^{i\theta})^2 (e^{-i\theta})^2 + 4 (e^{i\theta})^1 (e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4 \right) \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6) \text{ Or } 2\cos(4\theta) = e^{4i\theta} - e^{-4i\theta} \text{ et } 2\cos(2\theta) = e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} \text{ d'où} \\ &= \frac{1}{2^4} (2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6) \\ &= \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8} \implies \cos^4 \theta = \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

1.4 Résolution d'équations complexes

1.4.1 Racine n-ième d'un nombre complexe

Définition 1.5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$. On appelle racine n-ième de Z , tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ / $z^n = Z$. Les racines n-ièmes de Z sont les solutions de l'équation (E) : $z^n = Z$.

Résolvons l'équation

$$(E) : z^n = Z \quad (1.2)$$

Pour cela posons $z = \rho e^{i\alpha}$ et $Z = r e^{i\theta}$ ($\rho > 0, r > 0$).

Ainsi l'équation $z^n = Z$ devient $(\rho e^{i\alpha})^n = r e^{i\theta} \iff \rho^n e^{in\alpha} = r e^{i\theta}$

$$\implies \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \text{ car } r > 0. \text{ D'où}$$

$$S_{(E)} = \{z_k\} \text{ avec } z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Exemple 1.15. Déterminer les racines cubiques de $Z = -i$

Remarques :

- ☞ Si $n = 2$, on a deux racines carrées qui sont opposées.
- ☞ Si $n > 2$, les racines sont les affixes des sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.
- ☞ On peut obtenir toutes les racines n-ième d'un nombre complexe Z en multipliant l'une d'entre elle par les racines n-ième de 1.

Exemple 1.16. Déterminons les racines cubique de $Z = -i$

Les racines cubiques de 1 sont : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\} \implies z_0 = 1, z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ Or une racine cubique de $-i$ est : i donc

$$\begin{cases} Z_0 = iz_0 \\ Z_1 = iz_1 \\ Z_2 = iz_2 \end{cases} \text{ Or } i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ D'où } \begin{cases} Z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} * 1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ Z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} * e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ Z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} * e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

1.4.2 Cas particulier des racines carrées ($n = 2$)

L'équation de départ 1.2 devient :

$$z^2 = Z \quad (1.3)$$

Posons $z = x + iy$ et $Z = a + ib$, On a : 1.3 $\implies (x + iy)^2 = (a + ib) \iff x^2 - y^2 - 2ixy = a + ib$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

De plus, à partir de 1.3, on a : $|z^2| = |Z| \implies |z|^2 = |Z| \implies x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

On résous alors le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Exemple 1.17. Déterminons les racines carrées de $-5 - 12i$

Cela revient à trouver $z = x + iy$ tel que $z^2 = -5 - 12i$, ici $a = -5$ et $b = -12$

$$\text{On a : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} \\ 2xy = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases}$$

En sommant les deux premières équations, on a : $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$ dans la troisième équation :

$$\text{Pour } x = 2 \implies 2y = -6 \implies y = -3$$

$$\text{Pour } x = -2 \implies -2y = -6 \implies y = 3 \text{ D'où } S = \{-2 + 3i ; 2 - 3i\}$$

1.4.3 Équations complexes du 2nd degré

C'est une équation de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \tag{1.4}$$

Comment résoudre une telle équation (1.4) ?

Démarche

☞ On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Puis,

☞ On calcule une racine carrée de Δ notée δ . Et enfin,

☞ Les solutions de l'équation 1.4 sont données par : $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$

Remarque

Si a, b et c sont des réels alors Δ est réel.

Exemple 1.18. Résoudre dans \mathbb{C} , les équations $z^2 - 5z + 7 = 0$ et $z^2 - 3iz - 1 + 3i$

Résolution de la deuxième équation

$$\text{On a : } \Delta = (-3i)^2 - 4(1)(-1+3i) = -5 - 12i \text{ En résolvant le système } \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

, on obtient $\delta_1 = -2 + 3i$ et $\delta_2 = 2 - 3i$.

$$\text{D'où, en prenant } \delta = \delta_1, \text{ les solutions de l'équation en question sont : } \begin{cases} z_1 = \frac{3i - (-2 + 3i)}{2 \times 1} \\ z_2 = \frac{3i + (-2 + 3i)}{2 \times 1} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \underline{\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -1 + 3i \end{cases}}$$

1.4.4 Équations complexes du n -ième degré

Ces équations sont de la forme :

$$P(z) = 0 \text{ avec } P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \text{ où } (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \tag{1.5}$$

Procédure de résolution de l'équation 1.5

☞ On cherche une racine évidente. Puis,

☞ On utilise la méthode par identification ou celle de la division euclidienne.

Remarque : Si $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et z_0 est solution de (E) alors \bar{z}_0 l'est aussi.

Exercice 1.2. Résolution dans \mathbb{C}

1. Soit $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8, z \in \mathbb{C}$

a) Calculer $P(i)$.

b) Résoudre $P(z) = 0$

2. soit $Q(z) = z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i, z \in \mathbb{C}$

a) Démontrer que Q admet deux solutions imaginaires pures.

b) En déduire la résolution de $Q(z) = 0$

Solution

1. (a) $P(i) = 0$

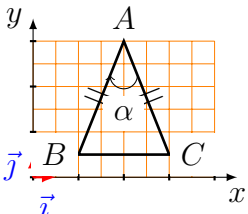
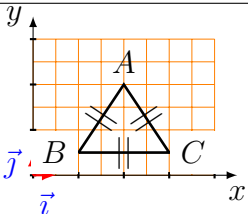
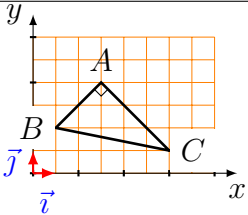
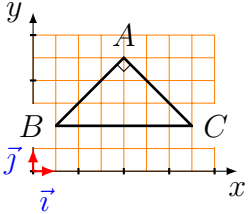
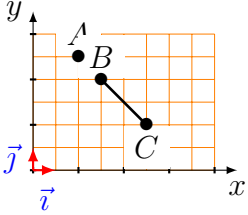
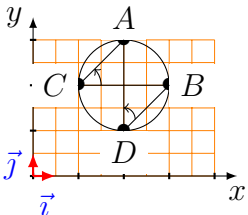
(b) $S = \{2 - 2i, 2 + 2i, -i, i\}$

2. (a) Les imaginaires purs sont i et $-i$.

(b) $S = \{-i, i, 1 - i\}$

1.5 Configuration du plan et nombres complexes

TABLEAU RÉCAPITULATIF

Natures	Configuration	Caracté. géométrique	Caracté. complexe
Triangle ABC isocèle		$\begin{cases} AB = AC \\ \text{mes}\hat{A} = \alpha \end{cases}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha} \text{ (ou } e^{-i\alpha}\text{)}$
Triangle ABC équilatéral		$\begin{cases} AB = AC = BC \\ \text{mes}\hat{A} = \frac{\pi}{3} \end{cases}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ (ou } e^{-i\frac{\pi}{3}}\text{)}$
Triangle ABC rectangle en A		$\text{mes}\hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi, b \in \mathbb{R}^*$
Triangle ABC rectangle isocèle en A		$\begin{cases} AB = AC \\ \text{mes}\hat{A} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ (ou } -i\text{)}$
Trois points A, B et C sont alignés		$\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Les points A, B, C et D sont cocycliques		$\begin{cases} \text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \\ \text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \end{cases}$	$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \div \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}^*$

1.6 Exercices d'entraînement

1.6.1 Exercices niveau 1 : Faciles

Exercice 1

- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants $2 + 4i$, $5 - 2i$, i , 0 , $(2 - i)(2 + 5i)$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On donne $z = 2x^2 + 2x - 4 + ix$. Déterminer x pour que :
 - z soit nul.
 - z soit un réel.
 - z soit un imaginaire pur.

Exercice 2

- Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2 + i)(1 - i) - (3 + 2i)$$

$$z_2 = \frac{1}{2 - i\sqrt{3}} \quad z_3 = \frac{5 + 4i}{2 - i}$$

$$z_4 = \frac{3-3i}{i} \quad z_5 = (1 + i)^2(1 - 3i)^3$$
- Soit A, B et C des points d'affixes respectives $z_A = 1 - 2i$, $z_B = i$ et $z_C = 5 + i$. Déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} puis calculer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 3

- Déterminer le module et le conjugué des nombres complexes suivants :

$$2 + 4i, \quad 2i(2 + 4i), \quad 3 - i, \quad \frac{2 + i}{3 - 6i},$$

$$(2 + i)^7$$
- Soit $z \in \mathbb{C}$ et M_z . Placer les points $M_1(-z)$, $M_2(\bar{z})$ et $M_3(\overline{-z})$
- Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que :
 - $|z + 3| = |z - i|$
 - $|2 + iz| = 3$
 - $|1 + i\bar{z}| = 2$

Exercice 4

- Ecrire z sous forme algébrique dans chacun des cas suivants :
 - $|z| = 3$ et $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$
 - $|z| = 1$ et $\text{Arg}(z) = \frac{18\pi}{3}$

- Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$1 + i, \quad -i, \quad 1, \quad (1 + i)e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{1 + i}{e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

- On donne $z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ et $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ Ecrire sous forme exponentielle : $z_1 \times z_2$, $(z_1)^{12}$, $\frac{1}{z_2}$, et $\frac{z_1}{z_2}$

Exercice 5

- Soit $A(\sqrt{3} + 2i)$, $B(\sqrt{3} + i)$, $C(-2i)$ et $D(1 - i)$. Calculer $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.
- Soit $A(1 + i)$, et $B(-1 + i\sqrt{3})$. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les A, B et $M(z)$ soient alignés.
- Soient $A(1 + 2i)$ et $B(4 + 5i)$. Déterminer l'affixe z_C du point C pour que ABC soit rectangle isocèle en A

Exercice 6

- Déterminer le module et l'argument de : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
- En déduire la forme exponentielle de z_1 et z_2
- Calculer les complexes suivants :
 - $z = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$
 - $z' = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$
- Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$.

1.6.2 Exercices de niveau 2 : Renforcement

Exercice 7

- Soit z un nombre complexe de module 1 et d'Argument 2θ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Calculer le module et l'argument en fonction de θ si possible des nombres complexes suivants :
 - \bar{z}
 - $1 + z$
 - $1 - z$
 - $\frac{(1 - z)^2}{\bar{z}(1 + z)}$
- Soient $Z_1 = 1 + i$ et $Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$
 - Déterminer le module et l'argument de Z_1 et Z_2 .
 - Ecrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit $Z_1 \times Z_2$.

- (c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 8

On donne le nombre complexe $z = \frac{1 + \sqrt{2} - i}{1 + \sqrt{2} + i}$

1. Mettre z sous forme algébrique.
2. Calculer le module et un argument de z
3. Calculer z^8 et z^{1989}

Exercice 9

On considère l'équation

$$(E) : z \in \mathbb{C}, z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$$

1. (a) Montrer que (E) admet une solution réelle z_1 que l'on précisera.
(b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout complexe z , on ait : $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - 1)(z - 2 - 2i)(az + b)$.
- (c) Résoudre (E) .

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1, 2 + 2i$ et $1 - i$.

- (a) Représenter A, B et C
- (b) Déterminer le module et un argument de $\frac{2 + 2i}{1 - i}$ et de $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du triangle OBC . Que représente la droite (OA) pour ce triangle ? justifier.
- (c) D est le point d'affixe 2. Quelle est la nature du quadrilatère $OCDB$? justifier.

Exercice 10

Soit l'application f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par

$$f(z) = \frac{z - 2i}{z + 1}. \text{ On désigne par } A, B, M \text{ et } M' \text{ les points du plan d'affixes respectives } -1, 2i, z \text{ et } f(z)$$

1. Calculer le module et un argument de $f(i)$.
2. Interpréter géométriquement $|f(z)|$ et pour $z \neq -1, z \neq 2i$, arg $f(z)$
3. Déterminer et représenter les ensembles :
 - (a) (E_1) des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.
 - (b) (E_2) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif.
 - (c) (E_3) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

4. (a) Calculer pour $z \neq -1, |f(z) - 1| * |z + 1|$
(b) On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Montrer M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 11

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1 - i)(1 + 2i), \quad z_2 = \frac{2 + 6i}{3 - i}, \quad z_3 = \frac{4i}{i - 1}$$

M_1, M_2 et M_3 désignent respectivement leurs images respectives dans le plan complexes muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1, z_2 et z_3 .
2. Placer M_1, M_2 et M_3 sur le plan complexe.
3. Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ puis en déduire la nature du triangle $M_1M_2M_3$.
4. Construire le point M_4 pour que $M_1M_2M_3M_4$ soit un parallélogramme et déterminer son affixe z_4 .

Exercice 12

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E) : z^5 = 1$. Représenter les points images des solutions dans le plan complexe de base orthonormée $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Quelle est la nature de la figure obtenue ?
2. (a) Montre que la somme des solutions de l'équation (E) est nulle.
(b) En déduire que $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$
(c) Démontrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$
3. Soit l'équation $(E') : (z - 1)^5 = (z + 1)^5, z \in \mathbb{C}$
 - (a) Démontrer que si z_0 est solution de (E') alors $\left| \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \right| = 1$. En déduire que les solutions de (E') sont des imaginaire pures.
 - (b) Résoudre (E') .

Exercice 13

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation complexe suivante :

$$z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$$

2. Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives $-1 + 2i$ et $3 - i$.

- (a) Déterminer l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de la rotation r d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme le point A en B .
- (b) Soit l'homothétie h de centre Ω d'affixe $1 + i$ et de rapport -2 . Identifier la transformation $F = h \circ r$ (en le justifiant) et donner ces éléments caractéristiques.
- (c) Déterminer l'image de la droite (Δ) : $3x + 4y - 5 = 0$

Exercice 14

1. Les points A, B, C ont pour affixes respectives :

$$z_A = -1 + i, z_B = 2 + i, z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

- (a) Placez les points A, B, C .
- (b) Calculez les affixes des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BC} .
- (c) Déduisez de la question 2. les longueurs AB, AC, BC . Le triangle ABC est-il rectangle en C ?
2. Représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée.

$$|z - 3| = |z - (1 + i)|; \arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2}$$

$$|z + 3 - i| \leq 2; \arg(i(z + 1)) = -\frac{\pi}{2}$$

$$|z| < |z + 3 - i| < 2; \arg(4i - 2z) = \frac{3\pi}{4}$$

INDICATIONS :

On peut bien sûr, utiliser les calculs analytiques, en posant $z = x + iy$. On a cependant avantage à raisonner en termes de distances ($|z_A - z_B| = AB$)

$$\arg z_M = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \text{ et } \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB}).$$

1.6.3 Exercice de niveau 3 : Classiques**Exercice 15**

1. Soit α un nombre réel. Exprimer en fonction de $\cos(\alpha)$ l'expression :
- $$A(\alpha) = 4\sin^2(\alpha) + 4\cos(\alpha) - 5.$$
2. On suppose que $\alpha \in]0; 2\pi[$. Déterminer suivant les valeurs de α les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant :
- $$\begin{cases} z_1 \neq z_2 \\ z_1 + z_2 = 2\sin(\alpha) + 1 \\ z_1 \times z_2 = (1 - \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \end{cases}$$
- On écrira z_1 et z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.

Exercice 16

1. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct, on pose $Z = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$.
- (a) Mettre Z sous forme trigonométrique.
- (b) Calculer les racines 5-ième (cinquième) de Z et représenter les points images sur un cercle.
2. On donne les nombres complexes z_1 et z_2 définis par :
- $$Z_1 = -8\sqrt{3} + 8i \text{ et } Z_2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$
- (a) Ecrire le nombre complexe Z_1 sous forme trigonométrique. Déterminer les racines carrées de Z_1 sous forme trigonométrique.
- (b) Calculer $(Z_2)^2$.
- (c) Utiliser ce dernier résultat pour exprimer les racines carrées de Z_1 sous forme algébrique.
- (d) En déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$

Exercice 17

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (Unité : 2cm).

Soit θ un nombre réel avec $\theta \in [-\pi; \pi]$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation :
- $$(E) : Z^2 - 4\sin(\theta)Z + 4 = 0.$$
2. Calculer le module et un argument de chacune des solutions de l'équation (E) , puis du nombre complexe $U = \frac{2 - Z_1}{2 - Z_2}$.
3. Exprimer en fonction de θ $S = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ et $S' = Z_1^4 + Z_2^4$.
4. Pour quelles valeurs de θ a-t-on $S' = 0$.

Exercice 18

1. On considère dans \mathbb{C} le polynôme P défini par :
 $P(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4$. Ce polynôme admet trois racines a, b et c qui sont des nombres complexes.

(a) Sans calculer a, b et c , déterminer :

- i. $\alpha = a + b + c$
- ii. $\beta = ab + ac + bc$
- iii. $\delta = abc$
- iv. $\varphi = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(b) On donne $a = 1; b = 2 + 2i$. En déduire c .

2. Dans le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1, Z_B = 2 + 2i$ et $Z_C = 1 - i$.

(a) Placer les points A, B et C sur le repère.

- (b) i. Ecrire sous forme trigonométrique $\frac{b}{c}$.
 ii. En déduire la nature du triangle OBC .

(c) Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier la réponse.

- (d) Soit D le point d'affixe $d = c(1 - e^{i\frac{\pi}{2}})$.
 i. Déterminer la forme algébrique de D .
 ii. Quelle est la nature de $OCDB$?

Exercice 19

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct. On considère le point A_1 d'affixe

$$Z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1. Calculer $|Z_1|$. En déduire que A_1 est sur le cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 1. Représenter A_1 sur le repère (Unité : 4cm).
2. On considère le point A_0 d'affixe 1 et les points A_n d'affixes $Z_n = (Z_1)^n$ où n est un entier naturel non nul.

(a) Calculer Z_2 . Représenter A_0 et A_2 sur le même repère.

(b) Calculer $|Z_n|$. En déduire que les points A_n sont sur le cercle \mathcal{C} .

3. Démontrer que :

$$Z_{n+1} - Z_n = (Z_1)^n \left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

En déduire le module de $Z_{n+1} - Z_n$ puis la distance $A_n A_{n-1}$.

4. (a) Déduire des questions précédentes que les triangles $OA_n A_{n+1}$ sont équilatéraux.

(b) Donner une mesure des angles $A_n O A_{n+1}$. En déduire que $A_6 = A_0$

(c) Représenter les points A_n sur le même repère.

Exercice 20

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (Unité : 1cm). On considère dans l'ensemble \mathbb{C} les équations suivantes :

$$(E) : z^2 - (4 + i)z + 5(1 + i) = 0$$

et

$$(E') : z^3 - (8 + 5i)z^2 + (17 + 25i)z - 40i = 0$$

1. Résoudre l'équation (E) .
2. Résoudre l'équation (E') sachant qu'elle admet une racine dont le point image dans le plan complexe appartient à la droite d'équation $y = x$.
3. On désigne par E, F et G les points d'affixes respectives $z_1 = 4 + 4i, z_2 = 1 + 2i$ et $z_3 = 3 - i$.
 - (a) On pose $Z = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - 2}$. Ecrire Z sous forme algébrique et en déduire la nature de triangle EFG .
 - (b) Déterminer l'affixe du point H pour que $EFGH$ soit un carré.

CHAPITRE 2

GÉOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES

Sommaire

2.1 TRANSFORMATIONS COMPLEXES	USUELLES	ET	NOMBRES
2.1	TRANSFORMATIONS COMPLEXES		24
2.2	Similitudes directes planes		26
2.3	Nature et éléments caractéristiques de $z' = az + b$		26
2.4	Lieu géométriques et nombres complexes		26
2.4.1	Cercle de centre A et de rayon R		26
2.4.2	Droite		27
2.4.3	Démi-droite		27
2.5	Exercices d'entraînement		27
2.5.1	Exercices de niveau 1		27
2.5.2	Exercices de niveau 2		29

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

2.1 TRANSFORMATIONS USUELLES ET NOMBRES COMPLEXES

$M(z)$ et $M'(z')$ désignent un point et son image ainsi que leur affixe par une transformations. On a le tableau suivant :

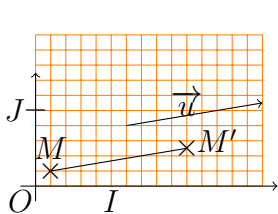


FIGURE 2.1 –

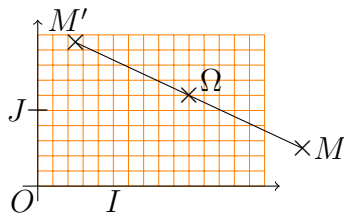


FIGURE 2.2 –

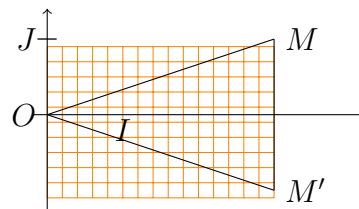


FIGURE 2.3 –

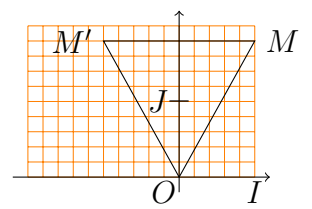


FIGURE 2.4 –

2.1. TRANSFORMATIONS USUELLES ET NOMBRES COMPLEXES

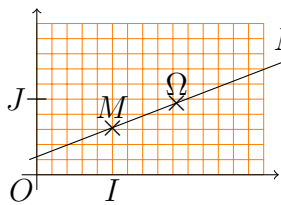


FIGURE 2.5 –

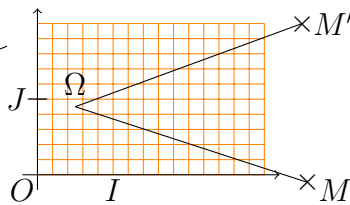


FIGURE 2.6 –

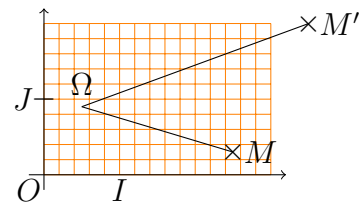


FIGURE 2.7 –

Transformations	$(\mathcal{M}) = M'$	Définitions géométriques	Ecritures complexes
Translation de vecteur \vec{u} noté $t_{\vec{u}}$	FIGURE 2.1	$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$Z_{\overrightarrow{MM'}} = Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow$ $Z_{M'} = Z_M + Z_{\vec{u}}$ $z' = z + b$ avec $Z_{\vec{u}} = b$
Symétrie centrale S_{Ω}	FIGURE 2.2	$S_{\Omega}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$Z_{\overrightarrow{MM'}} = -Z_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow$ $Z_{M'} = -Z_M + 2Z_{\vec{\Omega}}$ $z' = -z + 2\omega$ avec $Z_{\Omega} = \omega$
Symétrie par rapport à l'axe $(OI) : S_{(OI)}$	Figure 2.3	$S_{(OI)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \\ -\text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$
Symétrie par rapport à l'axe des imaginaires pur $(OJ) : S_{(OJ)}$	Figure 2.4	$S_{(OJ)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \\ \pi - \text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$	$z' = -\bar{z}$
Homothétie de centre Ω et de rapport $k : h_{(\Omega, k)}$	Figure 2.5	$h_{(\Omega, k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$Z_{\overrightarrow{MM'}} = kZ_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow$ $Z_{\Omega} = \omega$ $z' = kz + \omega(1 - k)$
Rotation de centre Ω et d'angle $\alpha : r_{(\Omega, \alpha)}$	Figure 2.6	$r_{(\Omega, \alpha)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$	$Z_{\overrightarrow{MM'}} = e^{i\alpha} Z_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow$ $Z_{\Omega} = \omega$ $z' = e^{i\alpha} z + \omega(1 - e^{i\alpha})$
Similitude de centre Ω , d'angle α et de rapport $k : S_{(\Omega, \alpha, k)}$	Figure 2.7	$S_{(\Omega, \alpha, k)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$	$Z_{\overrightarrow{MM'}} = ke^{i\alpha} Z_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow$ $Z_{\Omega} = \omega$ $z' = ke^{i\alpha} z + \omega(1 - ke^{i\alpha})$

2.2 Similitudes directes planes

Définition 2.1. On appelle **Similitude directe plane** toute transformation directe (qui conserve les angles) d'écriture complexe : $z' = az + b, a \in \mathbb{C}^*$ où $M(z)$ et $M(z')$ désignent un point et son image ainsi que leur affixe.

Dans ces conditions on a :

- ♣ Pour $a = 1 \rightarrow z' = z + b$ implique que la transformation est une **translation**.
- ♣ Pour $a = -1 \rightarrow z' = -z + b$ implique que la transformation est une **symétrie centrale**.
- ♣ Pour $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ implique que la transformation est une **homothétie**.
- ♣ Pour $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ tel que $|a| = 1$ implique que la similitude directe est une **rotation**.

2.3 Nature et éléments caractéristiques de $z' = az + b$

Soit $z' = az + b$ si $|a| \neq 1$ alors $z' = az + b$ est l'écriture complexe de la similitude directe plane (nature) de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \text{Arg}(a)$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$.
Ainsi l'écriture complexe d'une similitude directe plane de rapport k , d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est de la forme

$$z' = ke^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$$

RÉCAPITULATION

Soit $z' = az + b$

- Une **translation** ($a = 1$) est caractérisée par son vecteur.
- Une **rotation** ($|a| = 1$) est caractérisée par son centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et par son angle $\alpha = \text{Arg}(a)$.
- Une **homothétie** ($a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$) est caractérisée par son centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et par son rapport $k = a$.
- Une **similitude directe plane** est caractérisée par son rapport $k = |a|$, son angle $\alpha = \text{Arg}(a)$ et son centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$.

Exemple 2.1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation :

$$z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i$$

2.4 Lieu géométriques et nombres complexes

Soit $A(z_A), M(z)$ et $R > 0$

2.4.1 Cercle de centre A et de rayon R

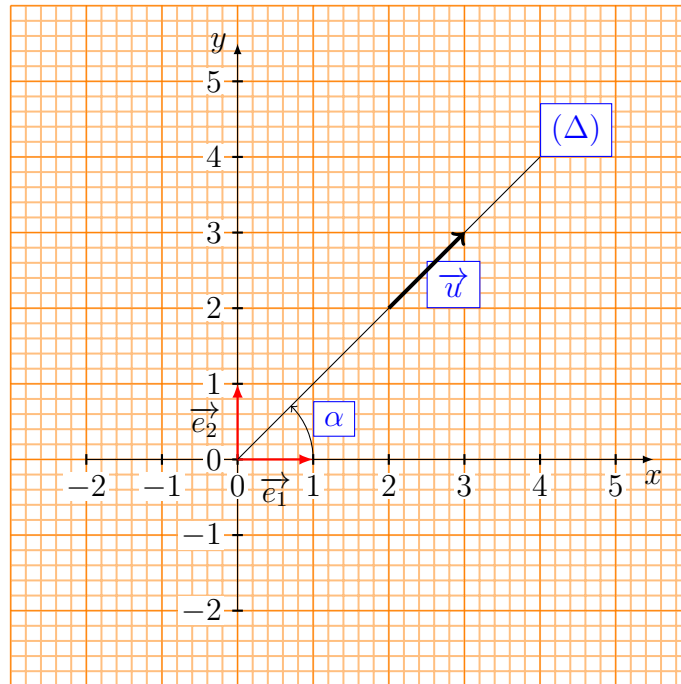
$$M \in \mathcal{C}(A, R) \implies AM = R \iff |z - z_A| = R$$

Nous pouvons aussi caractériser le cercle par $\widehat{AM, BM} = \frac{\pi}{2}[\pi] \iff M$ appartient au cercle de diamètre

$$[AB] \iff \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \frac{z - z_A}{z - z_B} = \alpha i \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

2.4.2 Droite

Une droite est caractérisée par un point A et un vecteur directeur \vec{u}



Ainsi $\Delta(A, \vec{u}) : \widehat{(\vec{e}_1, \vec{u})} = \alpha + k\pi \Rightarrow \arg(z = -z_A) = \alpha + k\pi$

2.4.3 Démi-droite

Dans ce cas on a : $\arg(z = -z_A) = \alpha + k\pi$

Exercice 2.1. Confère BAC II (série D)2009 Exercice 2

2.5 Exercices d'entraînement

2.5.1 Exercices de niveau 1

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- soient $\vec{u}(3 - 2i)$ et $\Omega(1 - i)$. Déterminer l'écriture complexe des transformations suivantes : $t_{\vec{u}}, h_{(O, \frac{3}{2})}, r_{(O, \frac{\pi}{6})}$ et $r_{(\Omega, \frac{\pi}{8})}$
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations du plan qui au point $M(z)$ associe le point $M'(z)$:

(a) $h : z' \mapsto z - i$

(b) $f : z' \mapsto 3z - 4i$

(c) $g : z' \mapsto (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})z$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On donne $A(1 + \frac{1}{2}i)$ et $B(2 + i)$

- Vérifier que les points O, A et B sont alignés.
 - Déterminer le rapport et l'angle orienté de la similitude directe S de centre O qui transforme A en B .
 - Quelle est l'écriture complexe de S . Construire $S(B)$.
- Déterminer, suivant les valeurs de $t \in \mathbb{C}$, la nature et les éléments caractéristiques de la transformation plane qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z' = itz + 2 - i$

Exercice 3

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation complexe suivante :

$$z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$$

- Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives $-1 + 2i$ et $3 - i$.

- (a) Déterminer l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de la rotation r d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme le point A en B .
- (b) Soit l'homothétie h de centre Ω d'affixe $1 + i$ et de rapport -2 . Identifier la transformation $F = h \circ r$ (en le justifiant) et donner ces éléments caractéristiques.
- (c) Déterminer l'image de la droite $(\Delta) : 3x + 4y - 5 = 0$

Exercice 4

Soit l'application f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par

$f(z) = \frac{z - 2i}{z + 1}$. On désigne par A, B, M et M' les points du plan d'affixes respectives $-1, 2i, z$ et $f(z)$

- Calculer le module et un argument de $f(i)$.
- Interpréter géométriquement $|f(z)|$ et pour $z \neq -1, z \neq 2i, \arg f(z)$
- Déterminer et représenter les ensembles :
 - (E_1) des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.
 - (E_2) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif.
 - (E_3) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.
- Calculer pour $z \neq -1, |f(z) - 1| \times |z + 1|$
 - On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Montrer M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 5

On considère l'application complexe f définie sur \mathbb{C} vers \mathbb{C} par :

$$f(z) = iz\bar{z} + \left(3 - \frac{1}{2}i\right)\bar{z} + \left(-2 + \frac{1}{2}i\right)z + 1 + 4i$$

- Ecrire $f(z)$ sous la forme algébrique. (On pose $z = x + iy$ et \bar{z} est le conjugué de z)
 - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.
- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit les points du plan M, M', A et B d'affixe respectif $z, f(z), z_A = i$ et $z_B = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$.
 - Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M du plan tel M' appartienne à l'axe $(O; \vec{v})$.

- Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tel M' appartienne à l'axe $(O; \vec{u})$.
- Soit (Π) le demi-plan contenant le point O et de frontière l'ensemble (D) et $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $\arg(f(z)) = 2k\pi$ si et seulement si $M \in (\Pi) \cap (C)$. Déduire la nature de l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que $\arg(f(z)) = 2k\pi$.

3. On donne les points Ω et A' d'affixes respectives $\omega = 2 - i, z_{A'} = 2 + i$ et F une similitude direct de centre Ω transformant A en A' .

- Déterminer l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de F .
- Déterminer et construire l'ensemble (Ω') image de (Ω) par F .

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Unité 2cm.

- Placer les points K, L, M d'affixes respectives $z_K = 1 + i, z_L = 1 - i, z_M = -i\sqrt{3}$. On complètera la figure dans les questions suivantes.
- On note N le symétrique de M par rapport à L . Vérifier que l'affixe z_N de N est $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.
 - La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point N en le point C et le point M en le point A . Déterminer les affixes z_A et z_C des points A et C .
 - La translation du vecteur d'affixe $2i$ transforme le point M en D et le point N en B . Déterminer les affixes z_D et z_B des points D et B .
- Montrer que le point K est le milieu des segments $[DB], [AC]$
 - Monter que : $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$
 - En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
- Soit M' un point du plan d'affixe z . Déterminer et construire l'ensemble des points M' tel que $\text{Arg} \left(\frac{z_C - z}{z_A - z} \right) = -\frac{\pi}{2}$

2.5.2 Exercices de niveau 2

Exercice 7

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives $Z_A = 3, Z_B = 2 + i, Z_C = 3 + 2i$ et $Z_D = 1 + 2i$.

1. (a) Donner l'écriture complexe de la similitude directe f qui laisse invariant le point B et transforme A en C .
(b) Donner les éléments caractéristiques de f .
2. (a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g du plan dont l'écriture complexe est $Z' = 2Z + 6 + 2i$.
(b) En déduire l'écriture complexe, la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ f$.
3. Soit la transformation S du plan dont l'écriture complexe est : $Z' = 21Z + 5i$.
(a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S .
(b) Déterminer l'affixe du point E du plan dont l'image par S est D .
(c) donner la nature du triangle BDE .

Exercice 8

Soit φ l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $Z \mapsto iZ + 1 + 3i$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $\varphi(Z)$. On note le point Ω d'affixe $2 + i$.

1. Déterminer l'image par f du point Ω .
2. Soit Z un nombre complexe distinct de $2 + i$.
(a) Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument du nombre

complexe : $\frac{\varphi(Z) - 2 - i}{Z - 2 - i}$ en utilisant les points Ω, M et M' .

- (b) Montrer que $\frac{\varphi(Z) - 2 - i}{Z - 2 - i}$ est une constante à calculer.

3. Déduire des questions précédentes, la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.
4. Définir analytiquement f .
5. Déterminer et construire l'image de la droite (Δ) d'équation : $y = x$ par f .

Exercice 9

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' définie par : $Z' = a^3z + a - 1$ où a désigne un nombre complexe.

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes a pour lesquels f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes a pour lesquels f est une translation.
Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes a pour lesquels f est une homothétie de rapport 8.
Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.
4. Caractériser f lorsque $a = \sqrt{3} + i$

Deuxième partie

ANALYSE

CHAPITRE 3

LIMITES-CONTINUITÉS

Sommaire

3.1	Limites	32
3.1.1	Rappels(Notions de base :limites de référence)	32
3.1.2	Limites à gauche, limite à droite	32
3.1.3	Opérations sur les limites	33
3.1.4	Limite d'une fonction composée	34
3.1.5	Calcul de limites	34
3.1.6	Propriétés de comparaison	35
3.1.7	Théorème d'encadrement	35
3.1.8	Théorème des gendarmes	35
3.2	Continuité d'une fonction	35
3.2.1	Continuité en un point	35
3.2.2	Continuité sur un intervalle	36
3.2.3	Prolongement par continuité	36
3.2.4	Image d'un intervalle par une fonction continue	36
3.2.5	Calcul approché des zéros d'une fonction continue	37
3.2.6	Bijection	37
3.2.7	Fonction puissance d'exposant rationnel	38
3.3	Exercices d'entraînement	38

3.1 Limites

3.1.1 Rappels(Notions de base :limites de référence)

$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0, n \in \mathbb{N}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2n+1}} = \begin{cases} \infty \text{ si } n < 0 \\ 0 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty \text{ si } n > 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty, \text{ si } n \text{ est pair}$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ <
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}$ >	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

Exemple 3.1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x-3)^5}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda x)}{x}$

3.1.2 Limites à gauche, limite à droite

Exercice 3.1. Soit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Etudier la limite de f en 2.

Résolution

– Calculons D_f puis posons $N(x) = x + 1$ et $D(x) = x - 2$

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ et $N(2) = 3, D(2) = 0$. De plus :

on a le tableau de signe de $D(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$		0	
		$-$	$+$

– D'où

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty \text{ car } \begin{cases} x+1 \rightarrow 3 > 0 \\ x-2 \rightarrow 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty \text{ car } \begin{cases} x+1 \rightarrow 3 > 0 \\ x-2 \rightarrow 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

– Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

$$< \qquad \qquad \qquad >$$

3.1.3 Opérations sur les limites

LES TABLEAUX RÉCAPITULATIFS

Soient f et g deux fonctions numériques, l et l' sont des nombres réels, a est un nombre réel ou un infini.

Limites de la somme

La limite de la somme de deux fonctions est égale à la somme des limites c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure

Limites du produit

La limite du produit de deux fonctions est égale au produit des limites c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) =$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure

Limites du quotient

La limite du quotient de deux fonctions est égale au quotient des limites c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$l'(l' \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	$l'(l' > 0)$	$l'(l' < 0)$	$l'(l' > 0)$	$l'(l' < 0)$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Indéter.	Indéter.

D'après ces tableaux, on a quatre formes indéterminées qui sont : $-\infty + \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

3.1.4 Limite d'une fonction composée

Soient f et g deux fonctions numériques.

Définition 3.1. Soient D_f et D_g leur ensemble de définition respectifs. On a :

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$$

Exemple 3.2. Soient $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = 2x - 1$. Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$

Propriété 3.1. Soient a, l et $l' \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow l} g(x) = l'$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l'$$

Exemple 3.3. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$$

3.1.5 Calcul de limites

Cas de fonctions polynômes et rationnelles

Soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0$. On a :

$$\text{Soit } Q(x) \neq 0 \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

Exemple 3.4. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 - 8x + 1}$$

Cas de fonctions irrationnelles

Dans ce cas, on utilise soit une **factorisation**, soit **l'expression conjuguée**.

Exemple 3.5. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 9} + x)$$

Utilisation du taux de variation

On a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Exemple 3.6. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

3.1.6 Propriétés de comparaison

$\forall x \in]a, +\infty[$, f et g deux fonctions définies sur $]a, +\infty[$.

- Si $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l'$ alors $l \leq l'$

Exemple 3.7. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin(x))$

3.1.7 Théorème d'encadrement

Soient f et g deux fonctions définies sur $]a, +\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$.

Si $\forall x$ suffisamment grand on a $|f(x) - l| \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Exemple 3.8. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = 1$$

3.1.8 Théorème des gendarmes

Soient u, v et f trois fonctions et a un réel. $\forall x$ suffisamment grand, si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x)$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Exemple 3.9. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

3.2 Continuité d'une fonction**3.2.1 Continuité en un point**

Soit f une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$. f est continue en x_0 si :

1. f est définie en x_0 et
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple 3.10. Etudier la continuité de la fonction $f(x) = \begin{cases} (2x+1)\sin\left(\frac{1}{2x+1}\right), & \text{si } x \neq -\frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

3.2.2 Continuité sur un intervalle

Soit $I \subset \mathbb{R}$, on dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I .

Exemple 3.11. – Toute fonction monômes est continue sur \mathbb{R} .

- Les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont continues sur \mathbb{R} .
- La fonction $|x|$ est continue sur \mathbb{R} .
- La fonction \sqrt{x} est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction partie entière $E(x)$ n'est pas continue sur \mathbb{R} .

Propriété 3.2. Si f et g sont deux fonctions continues sur I . Alors :

- $f + g$, $f \times g$, kf ($k \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues sur I .
- Si $g \neq 0$ sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- Si $g \geq 0$ sur I alors \sqrt{g} est continue sur I .
- Toute fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

3.2.3 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur I ne contenant pas x_0 telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. On appelle prolongement par continuité de f en x_0 , la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq x_0 \\ l, & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

Exemple 3.12. Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 0 ? Si oui, déterminer ce prolongement.

3.2.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété 3.3. soient a et b deux nombres réels.

♣ Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle. Dans la suite, Soit f une fonction continue, On a :

♣ Si f est strictement croissante sur :

♠ $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

♠ $]a, b[$ alors $f(]a, b[) =] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$

♠ $]a, b]$ alors $f(]a, b]) =] \lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)[$

♣ Si f est strictement décroissante sur :

♠ $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

♠ $]a, b[$ alors $f(]a, b[) =] \lim_{x \rightarrow b} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

♠ $]a, b]$ alors $f(]a, b]) =]f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

3.2.5 Calcul approché des zéros d'une fonction continue

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.1 (Théorème des valeurs intermédiaires 1). Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$. Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un nombre réel $c \in [a, b]/f(c) = 0$

Théorème 3.2 (Théorème des valeurs intermédiaires 2). Si f est continue sur $[a, b]$ et si elle est strictement monotone sur $[a, b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe un unique nombre réel $c \in]a, b[/ f(c) = 0$

Détermination des zéros de f

Pour déterminer les zéros de f , on utilise la méthode de balayage ou celle de dichotomie.

Exemple 3.13. Soit l'équation $(E) : x^3 + x + 1 = 0$.

- Démontrer que (E) admet une seule solution $x_0 \in [-1, 0]$
- Déterminer un encadrement de x_0 à 10^{-2} près.

Résolution :

- Soit $f(x) = x^3 + x + 1$. Comme f est une fonction polynôme alors elle est continue sur \mathbb{R} donc sur $[-1, 0]$.
 $\forall x \in [-1, 0]$, f est dérivable en x et $f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[-1, 0]$. De plus $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1 \Rightarrow f(-1) \times f(0) < 0$. On en déduit que $(E) \iff f(x) = 0$ admet un unique solution $x_0 \in [-1, 0] / f(x_0) = 0$
- Encadrement de x_0 par la méthode de balayage. On a :

x	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.69	-0.68
$f(x)$	-1	-0.6	0.31	-0.04	+0.184	-0.018	0.005

par suite $-0.69 < x_0 < -0.68$

3.2.6 Bijection

Théorème 3.3. Soit f une fonction numérique et I un intervalle de \mathbb{R} . Si f est continue et est strictement monotone sur I alors elle réalise une bijection de I sur $J = f(I)$

Exemple 3.14. Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x-1}{2x+3}$$

- Montrer que f réalise une bijection de $] -\frac{3}{2}, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
- Déterminer alors sa réciproque.

Conséquence 3.1. .

- Si f est une fonction bijective alors sa réciproque f^{-1} l'est aussi. Dans ce cas f^{-1} réalise une bijection de $f(I)$ sur I et f^{-1} a le même sens de variation que f .
- Les représentations graphiques de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$

3.2.7 Fonction puissance d'exposant rationnel

Fonction racine n -ième

Définition 3.2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On appelle **Fonction racine n -ième** la bijection réciproque de la fonction bijective :

$$\varphi_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^n$$

En posant $\varphi_n(x) = y$, on a $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$ d'où la fonction racine n -ième est donnée par :

$$\varphi_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}}$$

Propriété 3.4. Soit x, y deux nombres réels strictement positifs et n un entier supérieur ou égal à 2. On a :

$$\begin{cases} x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} \\ (\sqrt[n]{y})^n = y \end{cases}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*, n > 2, m > 2$

$$\begin{cases} x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a} \\ (\sqrt[n]{a}) \times (\sqrt[n]{b}) = (\sqrt[n]{ab}) \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a} \\ (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \\ \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \times n]{a^{m+n}} \end{cases}$$

Exemple 3.15. Écrire plus simplement l'expression $A = \frac{\sqrt[3]{8a^9}}{(2\sqrt{a})^3}$, avec $a > 0$

3.3 Exercices d'entraînement

♣ Limites : fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - x + 1$
2. $f(x) = x^4 - 16x + 5$
3. $f(x) = -x^4 + 7x^3 + 5x^2 - x + 2$
4. $f(x) = x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 1$
5. $f(x) = \frac{x+1}{-2x+3}$
6. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{2x+1}$
7. $f(x) = \frac{x\sqrt{2}+1}{2x^2-x+1}$
8. $f(x) = \frac{x^3+1}{2x^3-x^2-1}$
9. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x+1}$

10. $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} - \frac{x-1}{x+2}$
11. $f(x) = \frac{2x^2-x+3}{2x+1} - \frac{x^2+1}{x-2} + 1$
12. $f(x) = \frac{x^4+2x^3-x}{x^2+1} - \frac{x^3-x^2-x}{x+1}$

Étudier les limites en x_0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}, \quad x_0 = -2$
2. $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^2(x+1)}, \quad x_0 = 1$
3. $f(x) = 1 + \frac{2x^2}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+1)(x+2)}, \quad x_0 = -1$
4. $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x(x^2-1)} + \frac{x^2+x+1}{x^2+x} - \frac{2x+3}{x^2+2x+2}, \quad x_0 = -1$

♣ Limites : fonctions comportant des radicaux

Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1} - 2x$
2. $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1} - x\sqrt{2}$
3. $f(x) = x(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1})$
4. $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

♣ **Limite de fonctions composées**

Etudier les limites des fonctions suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{2x^2 + x\sqrt{x} + 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) \sin\left(\frac{1}{x^2 + x}\right)$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

♣ **Limite et comparaison des fonctions**

Etudier les limites des fonctions suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} + \frac{2x + 1}{x + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 + \cos x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x \cos x$

♣ **Continuité**

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

1. $x \mapsto x^2 + x + 1, \quad I = \mathbb{R}$
2. $x \mapsto \frac{x + 1}{2x - 1}, \quad I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$
3. $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1}, \quad I = \mathbb{R}_+^*$

4. $x \mapsto \sqrt{\frac{2 + x}{1 - 2x}}, \quad I = \left[-2; \frac{1}{2}\right[$
5. $x \mapsto \sqrt{\frac{2x - 5}{x - 1}}, \quad I =]-\infty; 1[$

Etudier la continuité de la fonction suivante :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x - 1|$

♣ **Prolongement par continuité**

• Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $]0; 1]$.

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
2. $f(x) = \frac{\tan x}{x}$
3. $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

Peut-on prolonger par continuité la fonction f en 1 ?

• f est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{6x}{x+2}, & \text{pour } x \in]-\infty; 1[\\ f(x) = \sqrt{3x+1}, & \text{pour } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

♣ **Valeur approchée**

1. On considère la fonction polynôme définie de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x - \frac{10}{4}$
 - (a) Montrer que l'équation $(E) : f(x) = 0$ admet une seule solution dont on précisera la valeur approchée à 10^{-2} près.
 - (b) Déterminer l'image par f de $[-1; 4]$.

CHAPITRE 4

DÉRIVÉE-PRIMITIVES

Sommaire

4.1	Dérivation	40
4.1.1	Dérivabilité en x_0	40
4.1.2	Opération sur les dérivées	41
4.1.3	Dérivée successive	42
4.1.4	Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective	42
4.1.5	Inégalité des accroissements finis	42
4.2	Primitives	42
4.2.1	Tableaux récapitulatifs	43
4.2.2	Autre forme de calcul de primitive	43
4.3	Exercices d'entraînement	44

4.1 Dérivation

4.1.1 Dérivabilité en x_0

Soit f une fonction numérique et x_0 un réel.

- On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, (l \in \mathbb{R}) \text{ i.e. } \lim_{x \xrightarrow{\text{droite}} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \xrightarrow{\text{gauche}} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

NB : Souvent on pose $l = f'(x_0)$

Interprétation graphique

Dans ce cas f admet une tangente T d'équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

- On dit que f n'est pas dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty, \text{ ou i.e. } \lim_{x \xrightarrow{\text{droite}} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \xrightarrow{\text{gauche}} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interprétation graphique

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$: (\mathcal{C}_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$: (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.
- $\lim_{x \xrightarrow{\text{droite}} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ et $\lim_{x \xrightarrow{\text{gauche}} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l'$ et $l \neq l'$ alors (C_f) admet deux demi-tangentes d'équations $(T_d) : y = l(x - x_0) + f(x_0)$ et $(T_g) : y = l'(x - x_0) + f(x_0)$

Exemple 4.1. Etudier la dérivabilité de $f(x) = \sqrt{x}$ en 0 et interpréter graphiquement la solution

4.1.2 Opération sur les dérivées

Dérivée des fonctions élémentaires

Fonction f	Fonction f'	f est dérivable sur
$x \mapsto c [c \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto 0$	\mathbb{R}
$x \mapsto ax (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^r (r \in \mathbb{Q}^*)$	$x \mapsto rx^{r-1}$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x^r} (r \in \mathbb{Q}^*)$	$x \mapsto -\frac{r}{x^{r+1}}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, \infty[$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	\mathbb{R}
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	\mathbb{R}
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[(k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \cotan(x)$	$x \mapsto -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$]k\pi, \pi + k\pi[(k \in \mathbb{Z})$

Opérations

Fonctions	$u + v$	au	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée	$u' + v'$	au'	$u'v + uv'$	$\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
Condition	-	$a \in \mathbb{R}$	-	$v \neq 0$	$v \neq 0$

Compositions

fonction	$u \circ v$	u^r	\sqrt{u}	$\cos(u)$	$\sin(u)$
Dérivée	$v' \times u' \circ v$	$ru'u^{r-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$-u' \sin(u)$	$u' \cos(u)$
Condition	-	$r \in \mathbb{Q}^*$	$u(x) > 0$	-	-

Exemple 4.2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes : $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ et $h(x) = \sin^4(x)$

4.1.3 Dérivée successive

Soit f une fonction dérivable sur I . Si f' est dérivable sur I , sa dérivée est appelée **dérivée seconde de f** notée f'' ou f^2 . Par itération, la dérivée n -ième de f est la dérivée de $(n-1)$ -ième de f i.e $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Notation différentielle

$$f^{(1)} = \frac{df}{dx}(x) \quad f^{(2)} = \frac{d^2f}{dx^2}(x) \dots f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

4.1.4 Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit f une fonction bijective sur I . Si de plus, f est dérivable sur I tel que $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$ alors la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple 4.3. Soit $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$. Calculer $(f^{-1})'(1)$

4.1.5 Inégalité des accroissements finis

Théorème 4.1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , a et b deux éléments de I tels que $a < b$. S'il existe deux nombres des nombres M et m tels que pour tout x élément de I , $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Conséquence 4.1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , $I \subset \mathbb{R}$. S'il existe un réel $k > 0; \forall x \in I$ tel que $|f'(x)| \geq k$ alors $\forall (a, b) \in I^2$, on a : $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

Exemple 4.4. .

1. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, Montrer que $1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2}$
2. Donner une interprétation graphique du résultat.
3. Donner un encadrement de $\sqrt{1.1}$ à 10^{-2} près.

4.2 Primitives

Définition 4.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle K . On appelle primitives de f sur K , toute fonction F dérivable sur K telle que sa dérivée soit égale à f c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$.

Exemple 4.5. Montrer que $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + x + c$ avec c un réel, est une primitive de $f(x) = 2x^2 + 1$

Propriété 4.1. .

- Toute fonction continue sur K admet une primitive sur K .
- Si F est une primitive de f sur K alors \forall le nombre réel c la fonction qui à x associe $F(x) + c$ est aussi une primitive de f .

Exemple 4.6. Déterminer les primitives des fonction suivantes : $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x^3 + 3x^2$

Soit f une fonction continue sur K , x_0 un réel de K et $y_0 \in \mathbb{R}$. Une existe une et une primitive de la fonction f sur K qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Exemple 4.7. Déterminer les primitives de $f(x) = x^2 + \cos(3x)$ puis en déduire la primitive de f qui prend la valeur 0 en $\frac{\pi}{2}$

4.2.1 Tableaux récapitulatifs

Primitives des fonctions élémentaires

Fonction f	Une primitive de f	f Sur l'intervalle
$x \mapsto a [a \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto ax + c$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^r (r \in \mathbb{Q}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x^r} (r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	$x \mapsto \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}} + c$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0, \infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c$	\mathbb{R}
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c$	$] -\frac{\pi}{2} + k, \frac{\pi}{2} + k [(k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \mapsto -\cotan(x)$	$]k\pi, \pi + k\pi [(k \in \mathbb{Z})$

Opérations et Compositions

Fonction f	au'	$u' + v'$	$u'u^r$	$\frac{u'}{u^r}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u' \cos(u)$	$u' \sin(u)$
Une primitive	au	$u + v$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	$2\sqrt{u}$	$\sin(u)$	$-\cos(u)$
Condition	$a \in \mathbb{R}^*$	-	$r \in \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{Q}^* - \{1\}$, u ne s'annule pas sur K	u est strictement positive sur K	-	-

4.2.2 Autre forme de calcul de primitive

Exercice 4.1. .

Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : pour tout nombre réel x différent de 1, $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$.

- Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel $x \neq 1$, $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$.
- En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

3. Déterminer la primitive de f sur $]1, +\infty[$ prenant la valeur 8 en 3.

Solution

1. $a = 3$ et $b = 2$

2. $F(x) = 3x - \frac{2}{x-1} + c$ où $c \in \mathbb{R}$

3. La primitive qui prend la valeur 8 en 3 est $F(x) = 3x - \frac{2}{x-1}$

4.3 Exercices d'entraînement

FONCTION DÉRIVÉE

Exercice 1

a est un nombre réel et f_a est la fonction définie par :

$$f_a(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + a}{x^2}$$

- Déterminer les intervalles sur lesquels f_a est dérivable.
- Calculer f'_a
- Déterminer a pour que la représentation graphique de f_a ait, en son point d'abscisse -1 , une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 0$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 12}{7x - 1}$ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

2. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ $g(x) = \sqrt{\cos^2(x) - 1}$

3. $f(x) = \frac{1}{(3x-8)^3}$ $g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

Exercice 3

- Dans chacun des cas suivant, étudier les variations de la fonction f puis préciser ses extrema.
 - $f(x) = x^3 - 3x + 2$
 - $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$
- Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, appliquer les inégalités des accroissements finis à fonction *sinus* sur $[0; x]$. En déduire que : pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0.85 < \sin(x) < x$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux nombres réels.}$$

- Déterminer a et b pour que la tangente (T) à la représentation graphique \mathcal{C} de la fonction f , au point d'abscisse 0, ait pour équation : $y = 3x + 2$.
- Préciser la position de (T) par rapport à \mathcal{C} .
- Étudier les variations de f .

Exercice 5

- (a) Démontrer que, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $12x + 8 \leq (x + 2)^3 \leq \frac{75x}{4} + 8$.
(b) En déduire un encadrement de $(2.01)^3$ à 10^{-3} près.
- Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ et soit r l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ sur $]0, +\infty[$ avec $1 \leq r \leq 2$
 - Déterminer la dérivée g' et montrer que, pour tout nombre réel de $]1, +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 - En déduire que, pour tout nombre réel de $]1, +\infty[$, $|g(x) - r| \leq \frac{1}{2}|x - r|$

PRIMITIVES

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction f :

- $f(x) = x^3 + x^2 + 3$
- $f(x) = (2x - 1)^3$
- $f(x) = (-2x + 3)(x - 1)$
- $f(x) = x^4 + x^2 - 1$
- $f(x) = 5(2x + 1)^{14}$
- $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)^2$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur K de la fonction f :

- $f(x) = (x - 1)^2$, $K = [0; +\infty[$.
- $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$, $K =]1; +\infty[$.
- $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^4}$, $K =]0; +\infty[$.

$$4. f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}, K =]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

Dans le cas 1) Déterminer la primitive qui prend la valeur 0 en 2.

Exercice 8

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \cos^3(3x).$$

(a) Linéariser $f(x)$.

(b) En déduire la primitive F_0 de f qui prend la valeur 2 en $\frac{\pi}{3}$ après avoir déterminé l'ensemble des primitives $F(x)$.

2. Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

(a) Développer l'expression :

$$u(x) = (x^2 + 1)^2 + 2x.$$

(b) En déduire a et b tels que :

$$g(x) = a + \frac{bx}{(x^2 + 1)^2}.$$

(c) En déduire l'ensemble des primitives de $g(x)$ sur \mathbb{R} , puis la primitive G_0 qui prend la valeur 2 en 0.

Exercice 9

On donne $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. (a) Montrer que $f(x) = 4\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

(b) Linéariser $f(x)$.

2. (a) Déterminer une primitive de f sur \mathbb{R} .

(b) En déduire la primitive F_1 de f qui s'annule en zéro.

Exercice 10

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x\cos(2x)$.

(a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) Vérifier que $f''(x) + 4f(x) = -4\sin(2x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(c) Déterminer les primitives de f sur \mathbb{R} et préciser celle qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

2. Soit g la fonction définie par $f(x) = \cos(x) - \frac{4}{3}\cos^3(x)$.

(a) Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

(b) i. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}; g''(x) = -9g(x)$.

ii. En déduire les primitives de g sur \mathbb{R}

iii. Trouver la primitive de g sur \mathbb{R} qui s'annule en $\frac{\pi}{6}$

Exercice 11

On se propose de déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sin^4(x)$ sur \mathbb{R} .

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Exprimer $f(x)$ en fonction de $f''(x)$ et de $\cos(2x)$.

3. En déduire l'ensemble des primitives de f sur \mathbb{R} . Quelle est alors celle qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 12

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ par

$$f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}.$$

(a) Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout x distincts de $-\frac{1}{2}$, $f(x) =$

$$\frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$$

(b) En déduire les primitives de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

(c) Déterminer la primitive F de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ qui prend la valeur 1 en 0.

2. f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}$.

(a) Déterminer les réels α, β et γ pour que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

(b) Déterminer la primitive sur \mathbb{R} de f qui s'annule en 0.

CHAPITRE 5

ÉTUDES DE FONCTIONS

Sommaire

5.1	Plan d'étude d'une fonction	46
5.2	Parité-Périodicité d'une fonction	47
5.2.1	Parité	47
5.2.2	Périodicité d'une fonction	47
5.3	Axe de symétrie-Centre de symétrie	47
5.4	Points particuliers	48
5.4.1	Points d'intersection	48
5.4.2	Extréma	48
5.4.3	Points d'inflexion	48
5.5	Branches infinies	48
5.5.1	Asymptotes	48
5.5.2	Direction asymptotique	49
5.6	Exemple d'étude de fonctions	49
5.7	Exercices d'entraînement	49

5.1 Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, on étudie d'abord les *variations* de cette fonction puis on la *représente* dans un repère.

- Pour étudier les variations d'une fonction, il faut :
 1. Déterminer son ensemble de définition.
 2. Déterminer son ensemble d'étude si possible à partir de parité ou de la périodicité.
 3. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble d'étude (ou ensemble de définition).
 4. Déterminer sa dérivée puis le signe de la dérivée.
 5. Dédurre les sens de variations et le tableau de variation.
- Pour représenter graphiquement une fonction, il faut chercher :
 1. les branches infinies.
 2. les droites particulières.
 3. les éléments de symétrie et les points particuliers si possible.
 4. faire peut être un tableau de valeur puis tracer la courbe de la fonction.

5.2 Parité-Périodicité d'une fonction

5.2.1 Parité

Définition 5.1. Soit f une fonction.

- On dit qu'une fonction f est **paire** lorsque son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et que si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$ et que $f(-x) = f(x)$.
- On dit qu'une fonction f est **impaire** lorsque son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et que si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$ et que $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence 5.1. .

- Le D_f d'une fonction paire ou impaire se réduit à l'ensemble d'étude $E = D_f \cap [0, +\infty[$
- La courbe représentative d'une **fonction paire** est symétrique par rapport à l'axe des **ordonnées**.
- La courbe représentative d'une **fonction impaire** est symétrique par rapport à **l'origine** du repère.

5.2.2 Périodicité d'une fonction

Définition 5.2. On dit qu'une fonction est périodique de période $T \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x \in D_f, (x + T) \in D_f \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

Conséquence 5.2. .

- si le pla est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et si f est périodique de période T alors la courbe de f est invariable par la translation de vecteur $(kT)\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$.
- Pour étudier une fonction périodique de période T , il suffit de faire l'étude sur un intervalle d'amplitude T et on obtient la totalité de la courbe par la translation de vecteur $(kT)\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$.

NB : Les fonctions $x \mapsto \sin(ax + b)$ et $x \mapsto \cos(ax + b)$ sont périodique de période $\frac{2\pi}{|a|}$ et la fonction $s \mapsto \tan(ax + b)$ a pour période $\frac{\pi}{|a|}$.

Exemple 5.1. Soit la fonction $f(x) = \cos(2x)$ définie sur \mathbb{R} . Etudier la parité et la périodicité de f et en déduire son ensemble de d'étude E .

5.3 Axe de symétrie-Centre de symétrie

- la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
 - Montrer que $\forall x \in D_f, (x + a) \in D_f$ et $g : x \mapsto f(a + x)$ est paire.
 - Montrer que $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
 - Montrer que $\forall a - h \in D_f, (a + h) \in D_f, f(a - h) = f(a + h)$.
- Le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
 - Montrer que $\forall x \in D_f, (x + a) \in D_f$ et $g : x \mapsto f(a + x) - b$ est impaire.
 - Montrer que $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
 - Montrer que $\forall a - h \in D_f, (a + h) \in D_f, f(a - h) + f(a + h) = 2b$.

Exemple 5.2. Montrer que :

1. la droite $(\Delta) : x = 2$ est un axe de symétrie pour la courbe de $f(x) = x^2 - 4x + 7$.
2. le point $\Omega(1, 3)$ est un centre de symétrie pour la courbe de $g(x) = \frac{3x - 9}{x - 1}$

5.4 Points particuliers

5.4.1 Points d'intersection

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f une fonction.

♣ L'ensemble des points d'intersection de la courbe (\mathcal{C}_f) avec l'axe des abscisses est :

$$(\mathcal{C}_f) \cap (OI) = \{M(x, y) \in \mathcal{P} / f(x) = 0\}$$

♣ L'ensemble des points d'intersection de la courbe (\mathcal{C}_f) avec l'axe des ordonnées est :

$$(\mathcal{C}_f) \cap (OJ) = \{M(0, f(0)) \in \mathcal{P}\}$$

5.4.2 Extréma

On obtient les *extréma (maxima ou minima)* au point où la *dérivée première s'annule en changeant de signe*. C'est-à-dire :

$$M(x_0, f(x_0)) \quad / \quad f'(x_0) = 0$$

- Le point $M(x_0, f(x_0))$ est *maximum* lorsque $f''(x_0) < 0$.
- Le point $M(x_0, f(x_0))$ est *minimum* lorsque $f''(x_0) > 0$.

5.4.3 Points d'inflexion

Le point d'inflexion est le point en lequel la dérivée seconde (f'') s'annule en changeant de signe. Graphiquement, le point d'inflexion est le point où la courbe traverse sa tangente.

5.5 Branches infinies

5.5.1 Asymptotes

Soit f une fonction et (\mathcal{C}_f) sa courbe.

Asymptote parallèle à l'un des axes

Définition 5.3. .

- Lorsque $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = l$, on dit que la droite $(\mathcal{D}) : y = l$ est une asymptote horizontale à (\mathcal{C}_f) .
- Lorsque $\lim_{|x| \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, on dit que la droite $(\mathcal{D}) : x = x_0$ est une asymptote verticale à (\mathcal{C}_f) .

Remarque : Une courbe et son asymptote peuvent se couper.

Asymptote oblique

Soit a, b des réels. Lorsque

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

on dit que la droite $(\mathcal{D}) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à (\mathcal{C}_f) .

Exercice 5.1. Soit $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

1. Déterminer les réels a, b et c pour que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$.

2. Démontrer que la droite $(\mathcal{D}) : y = ax + b$ est une asymptote oblique.
3. Étudier la position relative de la courbe avec la droite (\mathcal{D})

NB : D'une manière générale, les courbes de deux fonctions f et g sont asymptotes l'une de l'autre si

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

5.5.2 Direction asymptotique

On étudiera les directions asymptotiques dans le cas où

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

On calcule dans ce cas :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$$

Puis on utilise le tableau suivant :

$a = \pm\infty$	(\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe (O, \vec{i})	
$a = 0$	(\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe (O, \vec{j})	
$a \in \mathbb{R}^*$	$b \in \mathbb{R}$,	(\mathcal{C}_f) admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote oblique
	b n'existe pas	(\mathcal{C}_f) admet une direction asymptotique d'équation : $y = ax$
	$b = \infty$	(\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction la droite : $y = ax$
a n'existe pas	Ni asymptote, ni branche parabolique, ni direction asymptotique.	

Exemple 5.3. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Étudier les branches infinies de f .

5.6 Exemple d'étude de fonctions

Étudier et tracer les fonction suivantes :

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 \quad h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$

5.7 Exercices d'entraînement

PARTIE A

Problème 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{1+x}}$ et (\mathcal{C}) sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier la limite de $\frac{f(x)}{x-3}$ quand x tend vers 3 à gauche. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Étudier les variations de f (limites, dérivée, sens de variation et tableau de variation).

4. (a) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse $x = 2$.
 - (b) Déterminer l'intersection de (\mathcal{C}) avec (T).
 - (c) Préciser la position de (\mathcal{C}) par rapport à (T).
5. Construire (\mathcal{C}).

PARTIE B

1. Montrer que f est une bijection de l'ensemble de définition de f vers un intervalle J à préciser.
2. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f . Calculer les valeurs de f^{-1} puis de $(f^{-1})'$ en 1 et en $\sqrt{3}$.
3. Construire la courbe (\mathcal{C}') représentative de f^{-1} dans le repère initial.
4. Soit (Γ) la courbe d'équation $x(y^2 + 1) + y^2 - 3 = 0$
 - (a) Expliquer comment (Γ) s'obtient à partir de (\mathcal{C}).
 - (b) Construire (Γ) dans le repère précédent.

Problème 2**PARTIE A**

Soit la fonction numérique f_m définie par $f_m(x) = \sqrt{x^2 + 2mx + 4} - x$. On désigne par (\mathcal{C}_m) sa courbe dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_m suivant les valeurs de m .
2. Montrer que toutes les courbes (\mathcal{C}_m) passent par un point fixe que l'on déterminera.

PARTIE B

Dans cette partie on suppose $m = 0$ et on pose $f(x) = f_0(x)$, (\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_0).

1. (a) Montrer que pour tout nombre réel x , $\sqrt{x^2 + 4} > |x|$.
- (b) En déduire le signe de $x - \sqrt{x^2 + 4}$ sur \mathbb{R} .
2. (a) Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
- (b) Calculer la limite de f en $-\infty$.
3. (a) Calculer $f'(x)$ et en déduire son signe à partir des résultats de 1.-b).
- (b) Étudier le sens de variation de f , puis dresser son tableau de variation.

4. (a) Donner une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse O .
- (b) Étudier la branche infinie de (\mathcal{C}).
- (c) Construire (\mathcal{C}), (T) et les asymptotes de (\mathcal{C}).

PARTIE C

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle que l'on précisera.
2. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative.
 - (a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} .
 - (b) Étudier le sens de variation de f^{-1} , puis dresser son tableau de variation.
3. Comment s'obtient (Γ) à partir de (\mathcal{C})? Construire (Γ) dans le même repère que (\mathcal{C}).
4. Définir explicitement f^{-1} .

Problème 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x - 2)\sqrt{4 - x^2}$. On désigne par \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- (b) Étudier la dérivabilité de f en -2 et en 2 .
- (c) En déduire la nature des tangentes aux points d'abscisse -2 et 2 .
2. Étudier la nature les variations de f .
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = f(x) + 4$
 - (a) Étudier les variations de h .
 - (b) Déduire de la question 3(a) que l'équation $f(x) = -4$ admet exactement deux solutions α et β ($\alpha < \beta$) Déterminer β puis donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
4. Tracer la courbe (\mathcal{C}_f).
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1, 2]$.
 - (a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} sur un intervalle J à préciser.
 - (b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} .

- (c) Soit $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ la courbe de g^{-1} . Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ au point d'abscisse -4 .
- (d) Tracer $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ dans le même repère que (\mathcal{C}_f) .

Problème 4

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$

- (a) Étudier la parité de f .
- (b) Peut-on choisir un ensemble d'étude pour f ?
Si oui préciser cet ensemble.
- (a) Étudier la dérivabilité de f en 1.
- (b) Donner l'ensemble de sur lequel f est dérivable.
- (a) Étudier les variations de f' et tracer \mathcal{C}_f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- (b) En déduire l'ensemble Γ des points M du plan qui vérifient $y^2 = |x^2 - 1|$ et construire Γ .

Problème 5

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$

- Étudier la parité de f et en déduire l'intervalle d'étude pour f .
- Étudier la dérivabilité de f en 1 et déterminer la dérivée de f sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
- Quelle est le signe de $f'(x)$ (On peut poser si nécessaire $u = \sqrt{x^2 - 1}$)
- (a) $\forall x \in [1, +\infty[$, mettre sous forme : $f(x) = \frac{x}{2} - 1 + g(x)$ où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

- (b) En déduire une équation d'une asymptote à la courbe (\mathcal{C}_f) de f .

5. Construire (\mathcal{C}_f) .

Problème 4

Partie A

Soit le nombre complexe $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $M(x, y)$ le point image du nombre complexe z dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. À tout point complexe d'affixe $x \neq -2$, on associe le nombre complexe : $Z = \frac{iz^2}{z+2}$.

- Écrire Z sous forme algébrique.
- Déterminer et représenter l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur.

Partie B

On se propose de représenter l'ensemble (F) des points du plan tels que Z soit réel.

- Exprimer y en fonction de x .
- On considère la fonction numérique définie par $f(x) = |x| \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$.
 - Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
 - Étudier la dérivabilité de f en -2 et en 0 .
 - Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
 - Tracer la courbe (\mathcal{C}_f) de la fonction de f .
- En déduire le tracé de l'ensemble (F) .

Partie C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0; 2[$.

- Démontrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
- Soit g^{-1} la bijection de g .
 - g^{-1} est-elle dérivable sur J ?
 - Calculer $(g^{-1})'(\sqrt{3})$.

CHAPITRE 6

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Sommaire

6.1 Définitions et Propriétés	52
6.1.1 Définition	52
6.1.2 Conséquences	52
6.1.3 Ensemble de définition de $\ln(f(x))$ et $\ln(f(x))$	53
6.1.4 Variation de \ln et conséquences	53
6.1.5 Propriétés algébriques de \ln	53
6.1.6 Équations comportant \ln	54
6.1.7 Inéquations comportant \ln	54
6.2 Dérivée-Primitive-limites	54
6.2.1 Variation et représentation graphique de \ln	54
6.2.2 Limites remarquables	55
6.2.3 Dérivée de $\ln(f(x))$ et $\ln(f(x))$	55
6.2.4 Primitives	56
6.3 Fonction logarithme de base a	56
6.4 Exercices d'entraînement	56

6.1 Définitions et Propriétés

6.1.1 Définition

On appelle fonction logarithme Népérien, la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction qui à $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Elle est notée \ln et est définie par :

$$\begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) \end{array}$$

6.1.2 Conséquences

- L'ensemble de définition de \ln est : $]0, +\infty[$.
- $\ln(1) = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\ln(x))' = \frac{1}{x}$

6.1.3 Ensemble de définition de $\ln(f(x))$ et $\ln(|f(x)|)$

– Soit $g(x) = \ln(f(x))$, on a : $D_g = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) > 0\}$

– Soit $g(x) = \ln(|f(x)|)$, on a : $D_g = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \neq 0\}$

Exemple 6.1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(9 - x^2) \quad g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad h(x) = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \quad k(x) = \ln(x) - \ln(x-1)$$

Solution

$$D_f =]-3, 3[\quad D_g =]-1, 1[\quad D_h = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad D_k =]1, +\infty[$$

6.1.4 Variation de \ln et conséquences

On a : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$. $\forall x \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$ et donc \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Donc $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(a) = \ln(b) &\iff a = b \\ \ln(a) < \ln(b) &\iff a < b \end{aligned}$$

Cas particuliers ($a \in]0, \infty[$)

- Si $a < 1 \iff \ln(a) < \ln(1) \iff \ln(a) < 0$
- Si $a > 1 \iff \ln(a) > \ln(1) \iff \ln(a) > 0$

D'où

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \ln(x) < 0 \\ \forall]1, +\infty[, \ln(x) > 0 \end{aligned}$$

NB : Il existe un unique nombre réel strictement positif noté e tel que $2 < e < 3$ et $\ln(e) = 1$ avec $e \simeq 2.718$.

6.1.5 Propriétés algébriques de \ln

Soit a, b deux nombres réels strictement positifs ($]0, +\infty[$) et $r \in \mathbb{Q}$. On a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \quad \ln(a^r) = r\ln(a) \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Exemple 6.2. Simplifier l'expression : $A = \ln(\sqrt{2} - 1)^{10} + \ln(1 + \sqrt{2})^{11}$

Solution $A = \ln(\sqrt{2} + 1)$

6.1.6 Équations comportant \ln

Activité 6.1. Résoudre dans \mathbb{R}

- $\ln(x - 3) = 1$
- $\ln(-2x + 4) = \ln(x + 4)$
- $\ln(2x - 3) + 2\ln(x + 1) = \ln(6x - 3)$
- $\ln(x - 1) - \ln(3 - x) = 1$

Solution

- $D_V =]3, +\infty[$ et $S = \{e + 3\}$
- $D_V =]-4, 2[$ et $S = \{0\}$
- $D_V =]\frac{3}{2}, +\infty[$ et $S = \{2\}$
- $D_V =]1, 3[$ et $S = \{\frac{3e+1}{e+1}\}$

6.1.7 Inéquations comportant \ln

Activité 6.2. Résoudre dans \mathbb{R}

- $\ln(-x + 2) > \ln(x + 3)$
- $\ln(x - 1) - \ln(x) \leq 0$

Solution

- $D_V =]-3, 2[$ et $S =]-3, -\frac{1}{2}[$
- $D_V =]1, +\infty[$ et $]1, +\infty[$

6.2 Dérivée-Primitive-limites

6.2.1 Variation et représentation graphique de \ln

Soit $f(x) = \ln(x)$. On a : $D_f =]0, +\infty[$.

– Limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

– Dérivée

$\forall x \in]0, +\infty[$, f est dérivable en x et $f'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) > 0$ D'où f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

– Tableau de variation

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

– Branches infinies

– On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Donc \mathcal{C}_f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) .

– $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à \mathcal{C}_f .

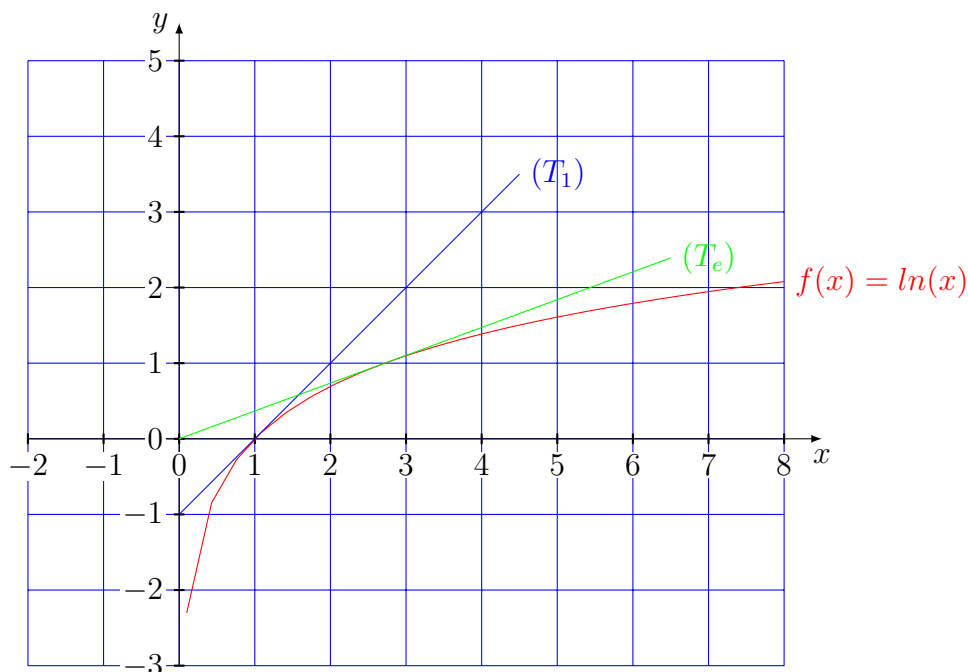
>

– Tangente en $x_0 = 1$ et $x_0 = e$

– $(T_1) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) \implies y = x - 1$ car $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$.

– $(T_e) : y = f'(e)(x - e) + f(e) \implies y = \frac{1}{e}$ car $f'(e) = \frac{1}{e}$ et $f(e) = 1$.

– Courbe



6.2.2 Limites remarquables

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
	$>$
$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0, \alpha > 0$
$>$	$>$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Exemple 6.3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln(x)}{1 - \ln(x)} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} = 0$$

6.2.3 Dérivée de $\ln(f(x))$ et $\ln(|f(x)|)$

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas. On a :

$$[\ln(f(x))] = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad [\ln(|f(x)|)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Exemple 6.4. Soit $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 1)$ $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. On a :

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-1} \quad g'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

6.2.4 Primitives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas. La fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$ admet une primitive sur K noté $F(x) = \ln|f(x)| + c$

Exemple 6.5. Les primitives des fonctions $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+3}$ et $g(x) = \frac{1}{(x+3)(x-1)}$ sont respectivement $F(x) = \ln|x^2-x+3| + c$ et $G(x) = \frac{1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + c$

6.3 Fonction logarithme de base a

Soit a un réel supérieur à 0 et différent de 1. On appelle **fonction logarithme de base a** notée \log_a , la fonction définie par :

$$\begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$

Exemple 6.6. Si $a = 10$ alors \log_{10} est appelé **logarithme décimal**. Ainsi, on a :

$$\begin{array}{l} \log_{10} :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$

6.4 Exercices d'entraînement

FONCTIONS LOGARITHMES

Problème 1

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$.

- Étudier les variations de g , puis déduire le signe de $g(x)$ sur son ensemble de définition.
- On considère la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln(x)}{x}$.
 - Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Déterminer la dérivée f' de la fonction f .
 - Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$, puis en déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- Étudier les branches infinies à la courbe (\mathcal{C}) de f .
- En utilisant la question 1), montrer que la courbe (\mathcal{C}) de f reste en-dessous de la droite d'équation $y = x$.
- (a) Montrer que la courbe (\mathcal{C}) coupe l'axe des abscisses en un unique point dont l'abscisse α vérifie $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

(b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

- (a) Déterminer les coordonnées du point A intersection de (\mathcal{C}) avec la droite d'équation : $y = \frac{x}{2}$.
 - Écrire une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) en A .
 - Déterminer un point B de (\mathcal{C}) où la tangente à (\mathcal{C}) est parallèle à la droite d'équation : $y = \frac{x}{2}$.
- A l'aide de tout ce qui précède, construire la courbe (\mathcal{C}) ainsi que la droite d'équation : $y = \frac{x}{2}$.
- (a) Montrer que la fonction f admet une bijection réciproque f^{-1} .
 - Construire la courbe (\mathcal{C}') de f^{-1} dans le même repère que (\mathcal{C}) .
- Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1.

Problème 2

Le plan est muni du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (Unité : 2cm). On considère les fonctions g et h définies de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $g(x) = \frac{x^2 + x + 2\ln(x+1)}{x+1}$;
 $h(x) = (x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1)$.

1. (a) Calculer $h'(x)$. En déduire que h admet un minimum.
Quel est le signe de $h(x)$.
- (b) Étudier la variation de g . On remarquera que sur $] -1, +\infty[$, $g'(x)$ a le signe de $h(x)$.
- (c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (\mathcal{C}) représentative de g dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à (D) .
- (d) Déterminer la tangente (T) à (\mathcal{C}) en O .
- (e) Démontrer qu'il existe un unique point A de (\mathcal{C}) où (\mathcal{C}) admet une tangente (T') parallèle à (D) . Déterminer les coordonnées de A .
- (f) Construire (\mathcal{C}) , (D) , (T) et (T') .
2. Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $g(x) = x + m$. Placer ces solutions par rapport à 0 et e^{-1} .
3. (a) Justifier que g est une bijection de $] -1; +\infty[$ sur l'intervalle J que l'on précisera. En déduire que g admet une bijection réciproque g^{-1} .
- (b) Tracer dans le même repère la courbe (Γ) représentative de g^{-1} .
4. (a) Définir une primitive sur $] -1; +\infty[$ de la fonction f définie pour tout $x \in] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x} \ln(x+1)$.
- (b) En déduire une primitive de g sur $] -1; +\infty[$ qui s'annule en e^{-1} .

Problème 3

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1 + 2 \ln(x)}{x}$$

et la fonction

$$\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}.$$

On désigne par (\mathcal{C}_f) et

(\mathcal{C}_φ) les courbes représentatives de f et φ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

1. Étudier le sens de variation de f .
2. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes à la courbe (\mathcal{C}_f) .

- (b) Étudier la position de (\mathcal{C}_f) par rapport à l'axe des abscisses et donner une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}_f) au point d'intersection de (\mathcal{C}_f) avec l'axe des abscisses.

3. (a) Dresser le tableau de variation de f .
- (b) Tracer la courbe (\mathcal{C}_f) et (T) , dans le même repère. (Unité graphique : 4cm)

Partie B

1. (a) Démontrer que la position relative de (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_φ) peut se déduire du signe de : $g(x) = (1 + 2 \ln(x)) - x$
 - (b) En utilisant les variations de g , prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans chacun des intervalles $]0, 2[$ et $]2; +\infty[$.
On note α la solution appartenant à $]2; +\infty[$, vérifier que $3 < \alpha < 4$.
 - (c) Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
 - (d) En conclure sur la position de (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_φ) .
 2. Soit h la fonction définie par $h(x) = 1 + 2 \ln(x)$.
 - (a) Vérifier que les équations $g(x) = 0$ et $h(x) = x$ sont équivalentes.
 - (b) Donner le sens de variation de h .
Montrer que l'on a : $x' < h(x') < \alpha < h(x'') < x''$.
 3. (a) Vérifier que pour tout $x \in [3; 4]$ on a $0 < h'(x) \leq \frac{2}{3}$ puis que $|h'(x)| \leq \frac{2}{3}$
 - (b) Montrer que pour tout $x \in [3; 4]$, $h(x) \in [3; 4]$.
 - (c) Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que $|h'(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$.
4. Tracer (\mathcal{C}_φ) sur le même graphique que (\mathcal{C}_f) .

Problème 4**Partie A**

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$. On note par (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (Unité graphique 2 cm).

1. (a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- (b) Étudier les variations de f sur $] -1; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations.

- (c) Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans $] - 1; +\infty[$.
2. On veut étudier la position relative de (\mathcal{C}_f) et de la courbe (\mathcal{P}) d'équation : $y = \frac{1}{2}x^2$. Pour cela, introduisons la fonction g définie sur $] - 1; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$
- (a) Étudier les variations de g .
- (b) Déduire le signe de $g(x)$.
- (c) Étudier la position relative de (\mathcal{C}_f) et de (\mathcal{P}) .
3. Tracer les courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{P}) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
4. Soit λ un nombre strictement supérieur à -1 et inférieur ou égal à 0 . ($-1 < \lambda \leq 0$). On note E_λ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan, $\lambda \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq f(x)$.
- (a) Hachurer E_λ sur le dessin.
- (b) À l'aide d'une intégration par partie et en remarquant que $f'(x) = \frac{x}{x+1}$, Calculer $\int_\lambda^0 \ln(1+x) dx$.
- (c) Calculer en cm^2 , l'aire de E_λ .

Partie B

Dans cette partie on étudie la suite (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

- Déterminer la limite de la suite (U_n) .
- En utilisant la partie A, montrer que pour tout entier $n \geq 1, 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n^2}$.
- Déduire un entier n_0 et que pour tout $n \geq n_0$ on ait : $U_n \leq 10^{-10}$.

Problème 5

f_n est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = x - n - \frac{n \ln(x)}{x}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par (\mathcal{C}_{f_n}) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) : (Unité graphique 2cm).

- Soit pour tout n , la fonction g_n définie sur \mathbb{R} par $g_n(x) = x^2 - n + n \ln(x)$.
 - Déterminer l'ensemble de définition D_{g_n} de g_n puis calculer les limites aux bornes.
 - Étudier le sens de variation de g_n puis dresser son tableau de variation.
 - Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution notée α_n et que $\alpha_n \in [1; 3]$ puis déduire le signe de $g_n(x)$.
- Déterminer l'ensemble de définition (D_{f_n}) de f_n puis calculer les limites aux bornes.
 - Exprimer $f'_n(x)$ en fonction de $g_n(x)$ puis en déduire le sens de variation de f_n . Dresser le tableau de variation.
 - Montrer que la droite $(D_n) : y = x - n$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à (\mathcal{C}_{f_n}) .
 - α_n étant le nombre déterminé en A-3), Montrer que $\alpha_1 = 1$ et $1, 2 < \alpha_2 < 1, 3$.
 - Dresser le tableau de variation de f_1 et de f_2 .
 - Représenter dans le même repère (D_1) ; (D_2) ; (\mathcal{C}_{f_1}) et (\mathcal{C}_{f_2}) .
 - Calculer l'aire S_1 de la partie du plan comprise en (\mathcal{C}_{f_1}) et les droites d'équation $x = 1, x = e$ et $y = 0$.
- On pose $U(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$
 - Calculer la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers 0 à droite et en $+\infty$.
 - Étudier les variations de U puis dresser son tableau de variation.
 - Montrer que l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique β tel que $\beta \in]0; 1[$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f_n(\beta) = \beta$.
 - Déduire alors que toutes les courbes (\mathcal{C}_{f_n}) passent par un point fixe B .
 - Donner la position relative de $(\mathcal{C}_{f_{n+1}})$ par rapport à (\mathcal{C}_{f_n}) .

CHAPITRE 7

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

Sommaire

7.1 Exercices d'entraînement	59
--	----

7.1 Exercices d'entraînement

Problème 1

f est la fonction sur \mathbb{R} définie par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$. On note (\mathcal{C}_f) la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On pose $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x}$.

Partie A

- Étudier les variations de g et déduire le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .
- Montrer que $f'(x) = g(x)$ puis étudier les variations de f .
- (a) Montrer que la droite $(D) : y = x + 1$ est asymptote oblique pour (\mathcal{C}_f) , puis étudier la position relative de (\mathcal{C}_f) et de (D) .
(b) La courbe (\mathcal{C}_f) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D) . Déterminer les coordonnées du point A .
- Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur \mathbb{R} une unique solution notée α telle que $0 < \alpha < 1$.
- (a) Construire la droite (D) , placer le point A puis construire la courbe (\mathcal{C}_f) et la tangente en A à la courbe (\mathcal{C}_f) .
(b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α .

Partie B

- Démontrer que sur \mathbb{R} , l'équation $f(x) = 2$ équivaut à l'équation $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$.
- (a) On appelle h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$. Étudier les variations de h sur $[0; 1]$.
(b) En déduire que $\forall x \in [0; 1], h(x) \in [0; 1]$.
(c) Étudier les variations de h' sur $[0; 1]$.
(d) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1], 0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$.
- On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
 - Démontrer que la suite $\forall x \in \mathbb{N}, U_n \in [0; 1]$.
 - Démontrer que $\forall x \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$.
 - Démontrer que $\forall x \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
 - Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
 - Déterminer un entier p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α .

Problème 2

On se propose d'étudier la famille de fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$, où $n \in \mathbb{N}$.

On pourra remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$.

Partie A1. *Étude de f_0*

(a) n est fixé dans \mathbb{N} . Étudier les variations de f_n ainsi que les branches infinies de sa courbe représentative (\mathcal{C}_n) (on ne construira pas cette courbe). On fera un tableau de variation pour chacun des cas : $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$.

(b) Démontrer que lorsque n décrit \mathbb{N} , les courbes (\mathcal{C}_n) passent par un point fixe Ω que l'on déterminera.

2. *Étude des fonctions f_0 et f_1*

(a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = f_0(-x)$. Que peut-on en déduire pour les courbes (\mathcal{C}_0) et (\mathcal{C}_1) ?

(b) Calculer $f_0''(x)$, dérivée seconde de f_0 . Pour quelle valeur de x_0 a-t-on $f_0'(x_0) = 0$?

Trouver une équation de la tangente à (\mathcal{C}_0) au point d'abscisse x_0 .

(c) Démontrer que le point Ω déterminé au 1 - b) est centre de symétrie de chacune des courbes (\mathcal{C}_0) et (\mathcal{C}_1).

(d) Construire les courbes (\mathcal{C}_0) et (\mathcal{C}_1) dans le même repère orthonormé (4cm).

3. *Étude de f_2*

(a) Démontrer que f_2 admet une application réciproque notée φ dont on précisera seulement l'ensemble de définition et quelques propriétés (continuité, sens de variation, dérivabilité) On notera (Γ) la courbe représentative de φ .

(b) Trouver une équation de la tangente à (\mathcal{C}_2) au point d'abscisse nulle et une équation de la tangente à (Γ) au point $B(\frac{1}{2}, 0)$.

(c) Construire les courbes (\mathcal{C}_2) et (Γ) dans un autre repère orthonormé (4cm).

Partie B Soit la suite réelle définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. (a) Remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ où $g(x) = 1 + e^x$.
En déduire la valeur de U_0 .

(b) Calculer $U_0 + U_1$, en déduire la valeur de U_1

2. (a) Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = U_n + U_{n+1}$.

Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

(b) En déduire que V_n tend vers une limite quand n tend vers l'infini et calculer cette limite.

3. Après avoir étudié le signe de U_n , déduire de 2 - b) que U_n tend vers une limite quand n tend vers l'infini et calculer cette limite.

Problème 3Partie A

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définie par :

$f_m(x) = e^x - m(x + 1)$, où m est paramètre réel. On désigne par (\mathcal{C}_m) la courbe représentation de f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (Unité : 2cm).

1. Étudier les variations de la fonction f_1 et tracer sa courbe représentative graphique (\mathcal{C}_1).

2. Soit la droite (Δ) : $y = x - 1$. Calculer en centimètre carré l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limité par (\mathcal{C}_1), par la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. (où α est un réel négatif). Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

3. Étudier, suivant les valeurs de m , les variations de f_m . On précisera les limites de f_m aux bornes de l'ensemble de définition.

4. Montrer que toutes les courbes passent par un point fixe B dont les coordonnées sont indépendantes de m .

5. Montrer que la droite (D_m) : $y = -mx - m$ est asymptote à (\mathcal{C}_m) et déterminer la position de cette courbe par rapport à (D_m).

Partie B

À tout point M du plan (\mathcal{P}) d'affixe z , ($z = x + iy$), on associe, par une application T , le point M' d'affixe z' ($z' = x' + iy'$) :

$$T : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$M \longmapsto M'/z' = (1 - i)z + 1 + i$$

1. Quelle est la nature de T , Déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer l'expression analytique de T .
3. Déterminer l'ensemble (\mathcal{C}'_1) , image de la courbe (\mathcal{C}_1) par T .

Partie C

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = x - \ln(x^2).$$

1. Étudier les variations de g et tracer sa courbe représentation (Γ) dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Préciser les branches infinies.
2. Tracer la courbe (\mathcal{C}'_1) dans le même repère que (Γ) .

CHAPITRE 8

SUITES NUMÉRIQUES

Sommaire

8.1 Généralité	62
8.1.1 Définitions	62
8.1.2 Détermination d'une suite	62
8.1.3 Propriétés des suites	63
8.1.4 Suite arithmétique & géométrique	63
8.1.5 Démonstration par récurrence	64
8.2 Limites d'une suite numérique	64
8.2.1 Limite infinie	64
8.2.2 Suite convergente	65
8.2.3 Suites de référence	65

8.1 Généralité

8.1.1 Définitions

Une suite est une application de \mathbb{N} ou d'une partie de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

- L'image de $n \in \mathbb{N}$ par une suite U est notée U_n (on lit U indice n). La suite considérée peut être notée aussi $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Si I est l'ensemble de définition de la suite, on note $(U_n)_{n \in I}$.
- Dans le cas où l'ensemble de définition de la suite est \mathbb{N} , U_0, U_1, \dots, U_n sont respectivement appelés **premier terme, deuxième terme, ..., n-ième terme**
- Une suite est dite finie (resp. infinie) selon que le nombre de terme reste **limité** (resp. **illimité**.)

8.1.2 Détermination d'une suite

Une suite numérique (U_n) est généralement définie :

- Soit par une **formule explicite** permettant de déterminer le terme U_n en fonction de n .

Ces suites sont du type $U_n = f(n)$ où f désigne une fonction numérique de la variable naturelle n . Dans ce cas on ramène l'étude de la suite à l'étude d'une fonction pour utiliser les propriétés de cette dernière.

Exemple 8.1. $U_n = n + (-1)^n$

- Soit par une **formule de récurrence** permettant de déterminer les termes U_n en fonction des termes d'indices inférieurs. Dans ce cas, la donnée des premiers termes (en nombre suffisant) permet de calculer de proche en proche les autres termes de la suite.

Exemple 8.2. $(U_n) : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + 2U_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

8.1.3 Propriétés des suites

Une suite est dite :

- **Constante** si et seulement si $U_{n+1} = U_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- **Stationnaire** si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.
- **Croissante** (resp. **Décroissante**) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n \geq 0$ (resp. $U_{n+1} - U_n \leq 0$).
- **Majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R} / U_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
- **Minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R} / U_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$.
- **Bornée** si elle est à la fois **majorée et minorée** c'est-à-dire $\exists A \in \mathbb{R}_+^* / |U_n| \leq A, \forall n \in \mathbb{N}$.
- **Périodique** si et seulement si il existe $\rho \in \mathbb{N}^* / U_{n+\rho} = U_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

8.1.4 Suite arithmétique & géométrique

Suite arithmétique

Définition 8.1. Une **suite arithmétique** est une suite de nombre où chacun d'eux sauf le premier (donné) est la **somme** du précédent et d'un nombre fixe appelé **raison** souvent notée r .

Si U_n est une suite arithmétique de raison r alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r$$

Si U_a est l'un des termes connu alors la forme explicite de la suite est :

$$U_n = U_a + (n - a)r$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $S = U_k + U_{k+1} + \dots + U_l$ On a :

$$S = \frac{N}{2}(U_k + U_l) \text{ où } N = l - k + 1 : \text{ nombre de termes}$$

Ainsi :

$$S = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

Suite géométrique

Définition 8.2. Une **suite géométrique** est une suite de nombre où chacun d'eux sauf le premier (donné) est le **produit** du précédent par un nombre fixe appelé **raison** souvent notée q .

Si V_n est une suite géométrique de raison q alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = q \times U_n$$

Si V_a est l'un des termes connu alors la forme explicite de la suite est :

$$V_n = q^{n-a} V_a$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $S = V_k + V_{k+1} + \dots + V_l$ On a :

$$S = V_k \times \frac{1 - q^N}{1 - q} \text{ où } N = l - k + 1 : \text{ nombre de termes}$$

Ainsi :

$$S = V_1 + v_2 + \dots + V_n = V_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

8.1.5 Démonstration par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut adopter la *démonstration par récurrence*. Elle consiste :

1. Initialement, à établir que (P_n) est vraie pour une valeur particulière n_0 .
2. Ensuite à supposer que (P_n) est vraie au rang $k (k \geq n_0)$ et montrer qu'elle l'est aussi au rang $k + 1$.
3. Puis on tire la conclusion que (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 8.3. Soit (U_n) définie par $U_n = 2^{n+1} - 3n - 2$. Prouver que $U_n \geq 0, \forall n \geq 2$

Résolution

Procédons par récurrence sur n la démonstration. Soit $(P_n) : U_n \geq 0, \forall n \geq 2$

1. On a : $U_2 = 0 \implies U_2 \geq 0$ donc (P_2) est vraie.
2. Supposons que (P_n) est vraie au rang k c'est-à-dire $U_k \geq 0$
Montrons que (P_n) est aussi vraie au rang $k + 1$
On a :

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= 2^{(k+1)+1} - 3(k+1) - 2 \\ &= 2^{k+2} - 3k - 5 \\ &= 2^{k+2} - 6k + 3k - 4 - 1 \\ &= 2(2^{k+1} - 3k - 2) + 3k - 1 \\ &= 2U_k + 3k - 1 \text{ or } U_k \geq 0 \text{ et } 3k - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

donc $U_{k+1} \geq 0 \implies (P_n)$ est vraie.

3. D'où $U_n \geq 0, \forall n \geq 2$

8.2 Limites d'une suite numérique**8.2.1 Limite infinie**

On dit qu'une suite U_n a une limite infinie si elle prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque n devient de plus en plus grand. On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n| = +\infty$. Ainsi une suite qui a une limite infinie est dite *divergente*.

8.2.2 Suite convergente

La suite U_n est dite convergente et converge vers $l, l \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n| = l$

Exemple 8.4. Etudier la convergence de la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1}$

NB :

- Une suite géométrique de raison q tel que $|q| < 1$ ou $-1 < q < 1$ converge toujours vers 0.
- Toute suite non convergente est divergente.

Propriété 8.1. .

- Toute suite convergente admet une limite **unique**.
- Toute suite convergente est bornée (La réciproque est fausse).

Contre exemple : $U_n = (-1)^n$

- Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est **convergente**.
- Soient (U_n) et (V_n) deux suites quelconques telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$
 - Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$.

8.2.3 Suites de référence

Comparaison de suites de termes a^n et n^α

Suites	Conditions	Limites
$a^n, a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$	$a \leq -1$	Pas de limite
	$ a < 1$	0
	$a = 1$	1
	$a > 1$	$+\infty$
$n^\alpha, a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$	$\alpha < 0$	0
	$\alpha = 0$	1
	$\alpha > 0$	$+\infty$

Suite définie par récurrence

Propriété 8.2. Soit U_n une suite dont le terme général vérifie $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction. Si la suite (U_n) converge vers un réel l et que f est continue en l alors $f(l) = l$.

NB : Toute solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée **point fixe** de la fonction f . L'existence d'un point fixe pour la fonction f ne prouve pas que la suite $(U_n)/U_{n+1} = f(U_n)$ converge.

Exercice 8.1. On donne la suite (V_n) définie par :
$$\begin{cases} V_0 = \sqrt{2} \\ V_{n+1} = 2 + \frac{1}{V_n} \end{cases}$$

1. On considère l'équation $\ln(x + 3) = x$. Démontrer que cette équation admet dans \mathbb{R}_+ une solution unique $\alpha \in [1, 2]$.

2. On désigne par $f : x \mapsto \ln(x + 3)$ et par $K = [1, 2]$

(a) Démontrer que $f(K) \subset K$.

(b) Démontrer que pour tout $x \in K$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

3. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \ln(U_n + 3) \end{cases} \quad \forall n \geq 0.$

(a) Montrer que $\forall n, U_n \in K$.

(b) Démontrer que par l'inégalité des accroissements finis et par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

CHAPITRE 9

INTÉGRATIONS

Sommaire

9.1 Définition et Propriétés	67
9.1.1 Définition	67
9.1.2 Conséquences et Propriétés	68
9.1.3 Inégalité de la moyenne	69
9.1.4 Valeur moyenne d'une fonction	70
9.1.5 Intégration par partie	70
9.2 Calcul d'aire , interprétation graphique d'une intégrale	71
9.2.1 Intégration d'une fonction paire, impaire et périodique	71
9.2.2 Aire d'une partie du plan limitée par une fonction	71
9.2.3 Aire d'une partie du plan limitée par deux fonctions	71
9.3 Calcul approché d'une intégrale	72
9.4 Exercices d'entraînement	73

9.1 Définition et Propriétés

9.1.1 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle K . a et b deux éléments de K . On appelle *intégrale de a à b de f* , le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur K . On note :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

et on lit : *somme ou intégrale de a à b de $f(x)dx$* . a et b sont les bornes de l'intégrale et x est appelée *variable muette*.

Remarque : On peut aussi noter :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(w)dw = \int_a^b f(u)du$$

Exemple 9.1. Déterminer :

$$A = \int_2^4 (5x)dx \quad B = \int_0^1 (x^2)dx.$$

Résolution

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 (5x)dx \\ &= \left[\frac{5}{2}x^2 \right]_2^4 \\ &= \frac{5}{2}(4)^2 - \frac{5}{2}(2)^2 \\ &= 30 \implies \underline{A = 30} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B &= \int_0^1 (x^2)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 \\ &= 30 \implies \underline{A = \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

9.1.2 Conséquences et Propriétés

Propriété 9.1. Soit f une fonction continue sur K , a et b deux éléments de K . On a :

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Propriété 9.2. Soit f une fonction continue sur K , $a \in K$. La fonction :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est la primitive de f sur K et qui s'annule en a .

Application linéaire Soit f une application. f est linéaire si et seulement si :

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Propriété 9.3 (Linéarité de l'intégrale). Soient f et g deux fonctions continues sur K , a et b deux éléments de K , et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \Bigg| \quad \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

On exprime ces deux propriétés en disant que l'intégrale est linéaire.

Propriété 9.4 (Relation de Chasles). Soit f une fonction continue sur K , a, b et c deux éléments de K , On a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Exemple 9.2. Calculer

$$C = \int_0^2 |x-1|dx$$

Résolution Posons $f(x) = |x - 1|$. Écrivons la d'abord sans le symbole de la valeur absolue, on a :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$ x - 1 $		$-x + 1$	0	$x - 1$	

Donc,

$$\begin{aligned}
 C &= \int_0^2 |x - 1| dx \\
 &= \int_0^1 (-x + 1) dx + \int_1^2 (x - 1) dx \\
 &= \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 \\
 &= \left[\left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{0}{2} + 0 \right) \right] + \left[\left(-\frac{2^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] \\
 &= 1 \quad \underline{C=1}
 \end{aligned}$$

Propriété 9.5 (Positivité de l'intégrale). Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et positive alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Propriété 9.6 (Comparaison). Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Remarque : on a :

$$\begin{aligned}
 -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \text{ sur } [a, b] &\implies -\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \\
 &\iff \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx
 \end{aligned}$$

9.1.3 Inégalité de la moyenne

Soient f une fonction continue sur K , a et $b \in K/a < b$.

Si M et m sont deux éléments de $\mathbb{R}/\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \tag{9.1}$$

qui est connue sous la formule de **l'inégalité de la moyenne**.

Remarque : Si $m = -M, M > 0$ alors (9.1) devient :

$$-M(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \implies \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$$

9.1.4 Valeur moyenne d'une fonction

(9.1) $\implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. En divisant tous les termes par $b-a$, on a :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

On appelle *valeur moyenne de f sur* $[a, b]$, le nombre réel

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Conséquence

Théorème de la moyenne

On a : pour $a < b$,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Or $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$, donc il existe un réel $c \in [a, b]$ /

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \implies (b-a)f(c) = \int_a^b f(x)dx$$

Exercice 9.1. Calculer

$$I = \int_0^1 (x^3 + 2x + 1)dx \quad J = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right) dx \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^3(x)dx \quad L = \int_{-4}^{-3} \frac{dt}{t(t+1)^2}$$

Solution

$$I = \frac{9}{4} \quad J = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \quad K = \frac{2}{15}$$

9.1.5 Intégration par partie

Soient u et v deux fonctions dérivables sur K/u' et v' soient continues sur K . Soient a et b deux éléments de K . On a :

$$\int_a^b u(t) \times v'(t)dt = [u(t) \times v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) \times v(t)$$

cette formule est connue sous le nom *d'intégration par partie*.

Preuve

Exemple 9.3. Calculer

$$I = \int_1^2 \ln(t)dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^t \sin(t)e^t dt$$

Solution

$$I = 2\ln(2) - 1 \quad J = \frac{1 + e^\pi}{2}$$

9.2 Calcul d'aires, interprétation graphique d'une intégrale

9.2.1 Intégration d'une fonction paire, impaire et périodique

Soit f une fonction continue sur K et $a \in \mathbb{R}$.

- Si f est paire alors

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \times \int_0^a f(x)dx$$

- Si f est impaire alors

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

- Si f est périodique de période T alors

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Exemple 9.4. Déterminer :

$$A = \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\cos^2(3x)} \quad B = \int_{-3}^3 \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx \quad C = \int_3^{3+\frac{2\pi}{3}} \sin^2(3x) dx$$

9.2.2 Aire d'une partie du plan limitée par une fonction

Soit f une fonction définie sur K , a et $b \in K/a < b$.

On veut calculer l'aire du domaine (*Delta*) délimité par la courbe (\mathcal{C}_f) de f , l'axe (OI) et les droites d'équations $x = a, x = b$ qui est notée $\mathcal{A}(\Delta)$.

1. Si f est continue et positive ($f(x) > 0$) alors :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left(\int_a^b f(t)dt \right) \times \mu_a$$

où μ_a est l'unité d'aire du rectangle de dimension (OI) et (OJ).

2. Si f est continue et négative ($f(x) < 0$) alors :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left(- \int_a^b f(t)dt \right) \times \mu_a$$

3. Cas où f n'admet pas de signe constant.

Dans ce cas on doit subdiviser (Δ) en 2 ou plusieurs domaines pour que la fonction ait un signe constant sur ces domaines.

Exemple :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \mathcal{A}(\Delta_1) + \mathcal{A}(\Delta_2) + \mathcal{A}(\Delta_3) \quad (9.2)$$

$$= \left[\int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \right] \times \mu_a \quad (9.3)$$

9.2.3 Aire d'une partie du plan limitée par deux fonctions

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\Delta) : \begin{cases} a & \leq x \leq b \\ g(x) & \leq y \leq f(x) \end{cases}$ On a :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left(\int_a^b (f(t) - g(t))dt \right) \times \mu_a$$

- par défaut de $A = \int_a^b f(x)dx$ est : $A_1 = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$.
- par excès de $A = \int_a^b f(x)dx$ est : $A_2 = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$.

9.4 Exercices d'entraînement

EXERCICE 1

On pose

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$$

- Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
 - Calculer $f'(x)$ de f pour $x \in \mathbb{R}$.
 - Déduire la valeur exacte de I .
- A l'aide d'une intégration par parties portant sur K , exprimer K en fonction de J .
 - Montrer que $I = J + K$. En déduire les valeurs de K et J .
 - Calculer

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

EXERCICE 2

On pose

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

- Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.
 - Calculer $f'(x)$.
 - Déduire la valeur exacte de I .
- Vérifier que $J + 2I = K$.
 - A l'aide d'une intégration par parties portant sur K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
 - En déduire les valeurs de J et de K .

EXERCICE 3

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \text{ et } \forall n > 0, U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

- Soit f la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Calculer la dérivée f' de f . En déduire U_0 .
 - Calculer U_1 .
- Prouver que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que la suite (U_n) est convergente.
 - Montrer que pour tout nombre réel $x \in [0; 1]$ et $\forall n \geq 1$, on a :
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$
 Déterminer alors la limite de U_n .
- Pour tout $n \geq 3$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{x^2+1} dx$$

- Vérifier que $\forall n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.
- Par une intégration par parties portant sur I_n , montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x) dx \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x) dx$$

- Calculer I_0 et J_0 .
- Soit n un entier naturel non nul ;
 - En intégrant par partie I_n puis J_n , montrer que I_n et J_n vérifient le système :
$$(S) : \begin{cases} I_n + nJ_n &= 1 \\ -nI_n + J_n &= e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$
 - En déduire, pour n entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n .

EXERCICE 5

On pose pour tout entier n ,

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$$

1. Démontrer que pour tout entier n , I_n existe et est minorée par 0.
2. Calculer I_0 .
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .
4. (a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.
(b) En déduire la valeur de I_2, I_3 et de I_4

EXERCICE 6

1. Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système suivant : (S) :

$$\begin{cases} a - b &= 0 \\ a + b + c &= \frac{\pi}{2} \\ a + b - 3c &= 0 \end{cases}$$
2. On se propose de calculer simultanément les valeurs des trois intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x \sin^2 x dx$$

- (a)
 - i. Montrer que : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.
 - ii. En déduire $I - J$
 - (b)
 - i. Montrer que : $\cos^4 x - \sin^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x = 1$.
 - ii. En déduire $I + J + K$
 - (c)
 - i. Montrer que : $\cos^4 x - \sin^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x = \cos 4x$.
 - ii. En déduire $I + J - 3K$
3. Déduire de ce précède que I, J et K vérifient le système (S), puis donner leur valeurs

EXERCICE 7

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(x) dx$$

1. (a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$$

- (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J + \frac{5}{12}$$

- (c) Montrer de même que

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I - \frac{5}{12}$$

2. (a) Calculer $I + J$.
- (b) Calculer $I - J$.
- (c) En déduire les intégrales I et J .

EXERCICE 8

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale I définie par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$$

1. (a) Montrer l'existence de nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \quad \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$$
- (b) En déduire le calcul de I_0 .
2. (a) Montrer par une intégration par partie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$$
- (b) En déduire le calcul de I .

EXERCICE 9

(I_n) est la suite numérique définie par :

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. En utilisant la technique d'intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .
2. Démontrer que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Soit $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$.
Exprimer S_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

EXERCICE 10

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

1. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$,

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

(b) Trouver une primitive G de g sur $[1; +\infty[$.

2. Trouver une primitive F de la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

3. En utilisant la technique d'intégration par parties et les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x dx$$

EXERCICE 11

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ et } \forall n > 0, U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

1. (a) Soit f la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Calculer la dérivée f' de f . En déduire U_0 .
 (b) Calculer U_1 .
 2. (a) Prouver que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que la suite (U_n) est convergente.

- (b) Montrer que pour tout nombre réel $x \in [0; 1]$ et $\forall n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Déterminer alors la limite de U_n .

3. Pour tout $n \geq 3$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{x^2 + 1} dx$$

- (a) Vérifier que $\forall n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.

- (b) Par une intégration par parties portant sur I_n , montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.

EXERCICE 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 (x+1)^n e^{-x} dx$.

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties I_1 .
 2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = (n+1)I_n + 1 - \frac{2^{n+1}}{e}$.
 3. Exprimer I_2 en fonction de I_1 . En déduire I_3 en fonction de I_2 puis calculer I_3 .
 4. Soit

$$I = \int_0^1 (x+1)(x^2 - 4)e^{-x} dx$$

- (a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
 (b) En déduire I en fonction de I_1, I_2 et I_3 .
 (c) Calculer I .

CHAPITRE 10

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Sommaire

10.1 Généralité	76
10.1.1 Définition	76
10.1.2 Notation	76
10.2 Les types d'équations différentielles	77
10.2.1 Équation du type $y' = f(x)$	77
10.2.2 Équation du type $y'' = f(x)$	77
10.2.3 Équation du type $y' - ay = 0, a \in \mathbb{R}^*$	77
10.2.4 Équation différentielle du premier ordre avec second membre.	77
10.2.5 Équation différentielle du second degré du type $y'' - \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}$	77
10.2.6 Équation différentielle du second degré du type $y'' + \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}$	77
10.2.7 Équation différentielle du second degré du type $ay'' + by' + cy = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$	77
10.3 Exercices d'entraînement	78

10.1 Généralité

10.1.1 Définition

Soit $P(x) = e^{2x}$. P est dérivable sur \mathbb{R} et $P'(x) = 2e^{2x}$. La fonction P est liée à P' par la relation $P' - 2P = 0$. Nous disons que l'équation $y' - 2y = 0$ (où y est l'inconnu) constitue une équation dont P est la solution. On appelle ainsi une équation différentielle, une relation qui lie une fonction et ses dérivées.

10.1.2 Notation

La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

NB : Une équation différentielle est dite d'ordre n si le plus grand ordre de la dérivée est n .

Exemple 10.1. $y'' + y' + 3y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle sur un intervalle K ouvert, c'est déterminer l'ensemble des solutions sur K , de cette équation différentielle.

10.2 Les types d'équations différentielles

10.2.1 Équation du type $y' = f(x)$

Résoudre sur \mathbb{R} , $y' = 28x^3$

10.2.2 Équation du type $y'' = f(x)$

Résoudre $y'' = \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$

10.2.3 Équation du type $y' - ay = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$

Toute équation différentielle de la forme $y' - ay = 0$ avec $a \neq 0$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant sans second membre.

10.2.4 Équation différentielle du premier ordre avec second membre.

Soient $(E) : ay' + by = f(x)$ et $(E') : ay' + by = 0$

- Si y_1 et y_2 sont solution de (E) alors $y_1 - y_2$ est solution de (E')

Preuve

- Si y_1 est solution particulière de (E) et y une solution de (E') alors $y_1 + y$ est solution de (E) .

Preuve

Démarche de résolution de l'équation $(E) : ay' + by = f(x)$

L'équation (E) se résout en deux étapes :

Étape 1 on Résous $(E') : ay' + by = 0$ appelée équation homogène pour trouver y .

Étape 2 On cherche une solution particulière y_1 de (E)

Ainsi la solution générale de (E) est la somme des solutions des deux étapes i.e $y + y_1$.

Exemple 10.2. Soit $(E) : 3y' + 2y = \frac{4}{3}e^{2x}$. Après avoir vérifié que $f(x) = \frac{1}{6}e^{2x}$ est une solution particulière de (E) , Déterminer la solution générale de (E) .

10.2.5 Équation différentielle du second degré du type $y'' - \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}$

La solution générale de cette équation est donnée par $y = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Exemple 10.3. Résoudre : $y'' - 4y = 0$

10.2.6 Équation différentielle du second degré du type $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}$

La solution générale de cette équation est donnée par $y = A\cos(\omega x) + B\sin(-\omega x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Exemple 10.4. Résoudre : $y'' + 9y = 0$

10.2.7 Équation différentielle du second degré du type $ay'' + by' + cy = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

Pour résoudre une telle équation, on résout d'abord l'équation $ar^2 + br + c = 0$ appelée **équation caractéristique**. Et après, on calcule le discriminant de cette équation et on applique le tableau suivant :

Δ	Solution de l'équation caractéristique	Solution générale de l'équation différentielle
$\Delta = 0$	une solution double : r_0	$x \mapsto (Ax + B)e^{r_0x}; A, B \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$	Deux (02) solutions r_1 et r_2	$x \mapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}; A, B \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées : $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))e^{\alpha x}; A, B \in \mathbb{R}$

Exemple 10.5. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$

10.3 Exercices d'entraînement

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : y'' + 6y' + 9y = 9x^2 + 12x + 2.$$

1. Trouver un polynôme $P(x)$ de degré 2, solution de (E_1) .
2. Soit f une application deux fois dérivables sur \mathbb{R} . On pose $g(x) = e^{3x}(f(x) - P(x))$.
 - (a) Si on suppose que f est une solution de (E) , écrire une équation différentielle dont g est une solution; on la note E_2 .
 - (b) Résoudre (E_1) et (E_2) (donner leurs solutions générales).
 - (c) Déterminer la solution de h de (E_1) dont la courbe admet une tangente horizontale au point $A(0; 1)$.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) : f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x. \text{ où } f \text{ désigne une fonction numérique définie sur } \mathbb{R} \text{ que l'on cherche à déterminer.}$$

1. Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E_1) .
2. Démontrer que la fonction f est solution de l'équation (E_1) si et seulement si la fonction

$h = (f - g)$ est solution de l'équation différentielle $h'' - 3h' + 2h = 0$ (E_2).

3. Résoudre l'équation différentielle (E_2) . En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_1) .
4. Déterminer la solution particulière φ de l'équation différentielle (E_1) telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$

EXERCICE 3

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : f'(x) + f(x) = 2(x + 1)e^{-x}.$$

1. Déterminer a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ soit solution de (E_1) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y' + y = 0$.
3. On pose $u = f - g$.
 - (a) Montrer que si la fonction f est solution de (E_1) alors u est solution de (E_2) .
 - (b) Réciproquement, montrer que si u est solution de (E_2) , alors $f = g + u$.
 - (c) En déduire, pour tout x de \mathbb{R} l'expression de $f(x)$ lorsque f est solution de (E) .
4. Déterminer la solution h de (E_1) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Troisième partie

ORGANISATION DES DONNÉES

CHAPITRE 11

ANALYSE COMBINATOIRES (DÉNOMBREMENT)

CHAPITRE 12

PROBABILITÉS

CHAPITRE 13

STATISTIQUES