I. TEMBINE

Maths
Méthodes et Astuces
Terminale S

Toutes les méthodes et astuces à connaître pour résoudre les exercices.

Édition **Salut πaths !**

"En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue."

John Von Neumann, savant mathématicien.

" Les chercheurs se sont rendus compte que l'intelligence humaine dépend essentiellement des connaissances. L'intelligence crée des connaissances, les utilise, en génère de nouvelles... "

***Patrick Brézillon**, chercheur au CNRS.*

Chapitre 1 -

LES SUITES NUMÉRIQUES

Remarques :
- Une suite u se note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (u_n) ou tout simplement u.
- Ne pas confondre la suite (u_n) et son terme de rang n, u_n (ils sont comme f et $f(x)$).
- À l'écrit, mettre suffisamment bas les indices pour ne pas confondre u_{n+1} et u_n+1 .

A) GÉNÉRALITÉ SUR LES SUITES : calcul de termes, représentation graphique, sens de variations.

Compétence 1 ***
Comment calculer un terme u_k d'une suite u, k∈ℕ ?

Méthode
- Si la suite u est définie de façon explicite, soit $u_n = f(n)$, on remplace tous les indices n par k et on effectue les calculs.
- Si u est définie par récurrence, soit $u_{n+1} = f(u_n)$, on remplace n par $k-1$ pour obtenir u_k .

Pourquoi ?
Parce qu'une suite est une fonction qui ne transforme que des entiers naturels en nombres réels. Ses termes peuvent donc se calculer comme les images par une fonction : on remplace les n par le nombre donné.

Exemples
Soit (u_n) , (v_n) , w_n et z_n quatre suites définies, pour tout entier naturel n, par : $u_n = -4n+5$,
$v_n = \dfrac{6n^2-4n+15}{5+n}$,
$w_0 = -2$ et $w_{n+1} = 2w_n^2 - 7n - 4$,
$z_0 = 1$, $z_1 = -3$ et $z_{n+2} = 2z_{n+1} + 3z_n - 5$.
Calculer :
a) u_0 , u_1 , u_β $(\beta \in \mathbb{N})$, u_{n+1} , u_n+1 , u_{n-1} , u_n-1 , u_{n+2} et u_n+2 ;
b) v_0 , v_1 , v_α $(\alpha \in \mathbb{N})$, v_{n+1} , v_n+1, v_{n-1} , v_n-1 ;
c) w_1 , w_2 , w_n et w_{n+2} ;
d) z_2 , z_3 et z_{n+1} .

Solutions
a) $u_n = -4n+5$, n∈ℕ. On a :
$u_0 = -4\times 0+5 = 5$;
$u_1 = -4\times 1+5 = 1$;
$u_\beta = -4\times\beta+5$;
$u_{n+1} = -4(n+1)+5 = -4n-4+5 = -4n+1$ (attention, pour faire apparaître n+1, on ne met pas 1 à côté de n, mais on **remplace** n par $(n+1)$ comme on l'a fait avec β) ;
$u_n+1 = (-4n+5)+1 = -4n+6$ (ne pas confondre u_{n+1} et u_n+1 : d'où la précaution d'écrire les indices assez bas) ;
$u_{n-1} = -4(n-1)+5 = -4n+4+5 = -4n+9$ (on a remplacé n par $(n-1)$) ;
$u_n-1 = (-4n+5)-1 = -4n+4$;
$u_{n+2} = -4(n+2)+5 = -4n-3$;
$u_n+2 = -4n+5+2 = -4n+7$.

b) $v_n = \dfrac{6n^2 - 4n + 15}{5 + n}$, n∈ℕ.

En remplaçant tous les n par 0 dans l'expression de v_n, on obtient :

$v_0 = \dfrac{6\times 0^2 - 4\times 0 + 15}{5 + 0} = \dfrac{15}{5} = 3$.

En procédant de la même façon avec 1, on a :

$v_1 = \dfrac{6\times 1^2 - 4\times 1 + 15}{5 + 1} = \dfrac{17}{6}$.

On remplace n par α ; ce qui donne :

$v_\alpha = \dfrac{6\times \alpha^2 - 4\times \alpha + 15}{5 + \alpha}$.

On a : $v_{n+1} = \dfrac{6(n+1)^2 - 4(n+1) + 15}{5 + (n+1)}$ (mettre toujours (n+1) entre parenthèses).

$= \dfrac{6n^2 + 8n + 17}{6 + n}$.

Mais $v_n + 1 = \dfrac{6n^2 - 4n + 15}{5 + n} + 1 = ... = \dfrac{6n^2 - 3n + 20}{5 + n}$.

De même : $v_{n-1} = \dfrac{6(n-1)^2 - 4(n-1) + 15}{5 + (n-1)}$

$= \dfrac{6n^2 - 16n + 25}{4 + n}$;

alors que $v_n - 1 = \dfrac{6n^2 - 4n + 15}{5 + n} - 1 = ... = \dfrac{6n^2 - 5n + 10}{5 + n}$.

c) $w_0 = -2$ et $w_{n+1} = 2w_n^2 - 7n - 4$, n ∈ ℕ.

Pour obtenir w_1, on remplace n par 0 dans w_{n+1} :

$w_{0+1} = 2w_0^2 - 7\times 0 - 4$

$w_1 = 2\times(-2)^2 - 4$

$w_1 = 4$.

Dans la formule $w_{n+1} = 2w_n^2 - 7n - 4$, on remplace tous les n par 1 pour obtenir :

$w_2 = 2w_1^2 - 7\times 1 - 4 = 2\times(4)^2 - 7 - 4 = 21$.

En remplaçant tous les n par $(n-1)$ dans $w_{n+1} = 2w_n^2 - 7n - 4$, on a :

$w_n = 2w_{n-1}^2 - 7(n-1) - 4 = 2w_{n-1}^2 - 7n + 3$.

Pour u_{n+2}, on met $(n+1)$ à la place de tous les n ; ce qui donne :

$w_{n+2} = 2w_{n+1}^2 - 7(n+1) - 4 = 2w_{n+1}^2 - 7n - 11$.

d) $z_0 = 1$, $z_1 = -3$ et $z_{n+2} = 2z_{n+1} + 3z_n - 5$, n ∈ ℕ.

En substituant 0 à n dans $z_{n+2} = 2z_{n+1} + 3z_n - 5$, on a:

$z_2 = 2z_1 + 3z_0 - 5 = 2\times(-3) + 3\times 1 - 5 = -8$.

On procède de la même façon pour obtenir :

$z_3 = 2z_2 + 3z_1 - 5 = 2\times(-8) + 3\times(-3) - 5 = -30$.

Pour trouver z_{n+1}, il suffit de remplacer tous les n par $(n-1)$:

$z_{n+1} = 2z_n + 3z_{n-1} - 5$.

Compétence 2 ***

Comment déterminer le sens de variation d'une suite ?

Méthode 1 * ("méthode de la différence", la plus utilisée)**

- On calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier n.
- On détermine ensuite le signe du résultat obtenu (grâce aux mêmes méthodes qui permettent

d'étudier le signe d'une fonction dérivée).

- Si $u_{n+1}-u_n \geq 0$, on conclut que la suite (u_n) est croissante et si $u_{n+1}-u_n \leq 0$, (u_n) est décroissante.

Pourquoi ?

Définition du cours : une suite u est croissante ⇔ $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout n ∈ ℕ. Or cette inégalité est équivalente à $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$; d'où la méthode.

De la même façon, u décroissante ⇔ $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n ∈ ℕ ⇔ $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$.

Ainsi, pour montrer qu'une suite est croissante (ou décroissante), il suffit de montrer que $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ (ou $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$).

Exemple 1

Déterminer le sens de variation de la suite u définie, pour tout n ∈ ℕ, par $u_n=-3n^2+5$.

Solution

Déterminons la valeur de $u_{n+1}-u_n$, puis son signe :

on a $u_{n+1}-u_n=-3(n+1)^2+5-(-3n^2+5)$

$=-3n^2-6n-3+5+3n^2-5$

$=-6n-3$.

Comme $n \geqslant 0$, alors $-6n-3<0$.

La suite u est donc décroissante.

Exemple 2

Déterminer le sens de variation de la suite suivante :

$u_n=\dfrac{5n-2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Solution

Pour déterminer le sens de variation de la suite (u_n) , étudions le signe de $u_{n+1}-u_n$.

Pour tout n∈ℕ, on a :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5(n+1)-2}{(n+1)+1}-\frac{5n-2}{n+1}=\frac{5n+3}{n+2}-\frac{5n-2}{n+1}$$

$$=\frac{(5n+3)(n+1)-(5n-2)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$=\frac{(5n^2+8n+3)-(5n^2+8n-4)}{(n+2)(n+1)}$$

$$=\frac{7}{(n+2)(n+1)}.$$

Comme $n \geqslant 0$, $(n+2)>0$ et $(n+1)>0$; donc $(n+2)(n+1)>0$.

On en déduit que $u_{n+1}-u_n>0$ pour tout n∈ℕ.

La suite (u_n) est donc croissante.

Exemple 3

On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} \end{cases}$, n ∈ ℕ.

On suppose que $u_n \geqslant 1$ pour tout n ∈ ℕ.

Déterminer le sens de variation de u.

Solution

Soit n ∈ ℕ.

On a $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n$

$$u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+4}-\frac{u_n(u_n+4)}{u_n+4}$$

$$u_{n+1}=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$$

Comme $u_n\geqslant 1$, alors $u_n+4\geqslant 0$; $u_{n+1}-u_n$ est donc du signe du numérateur $-u_n^2-u_n+2$, un trinôme du second degré qui a pour racines -2 et 1.
On en déduit son tableau de signe :

u_n	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-u_n^2-u_n+2$		-	0	+	0	-	

Par hypothèse, pour tout n ∈ ℕ, $u_n\geqslant 1$. On a donc $-u_n^2-u_n+2\leqslant 0$ pour tout n ∈ ℕ et donc $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$.
Ce qui permet de conclure que la suite u est décroissante.

Exemple 4
Déterminer le sens de variation des suites définies par :
a) $u_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, n∈ℕ.
b) $w_n=2{,}5^n$, n∈ℕ.

Solution
a) Pour n∈ℕ, $u_{n+1}-u_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^n\times\left(\frac{3}{4}\right)^1-(3/4)^n$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}-1\right).$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(-\frac{1}{4}\right)<0 .$$

La suite u est donc décroissante.

b) Pour n∈ℕ, on a $w_{n+1}-w_n=2{,}5^{n+1}-2{,}5^n=2{,}5^n(2{,}5-1)=2{,}5^n(1{,}5)$.
Comme $2{,}5^n>0$ pour n∈ℕ et $1{,}5>0$, on a $w_{n+1}-w_n>0$ pour tout n∈ℕ.
On en déduit que la suite w est croissante.

Méthode 2 ***
Si la suite est définie par récurrence, c'est-à-dire $u_{n+1}=f(u_n)$, et que l'énoncé demande explicitement de montrer que la suite u est croissante (ou décroissante), alors, grâce à une démonstration par récurrence, on montre que l'on a $u_{n+1}\geqslant u_n$ (ou $u_{n+1}\leqslant u_n$).
Dans certains cas (f donnée sous forme de quotient), on exploite la croissance de f sur un intervalle contenant tous les u_n pour démontrer l'hypothèse de récurrence.

Pourquoi ?
Définition du cours : la suite u est croissante ⇔ $u_{n+1}\geqslant u_n$ pour tout n ∈ ℕ.
Et u décroissante ⇔ $u_{n+1}\leqslant u_n$ pour tout n ∈ ℕ.

Exemple 1
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n\geqslant 2$ par $u_{n+1}=5u_n-2$ et $u_1=-3$. Montrer que la suite u est

décroissante.

Solution
Montrer que la suite (u_n) est décroissante revient à montrer que la proposition " $u_{n+1} \leqslant u_n$ " est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
Démontrons cette proposition par récurrence :

a) **Rédaction longue (pour mieux comprendre)** :
- Montrons que la proposition est vraie lorsque $n = 1$, c'est-à-dire $u_2 \leqslant u_1$:
on a $u_1 = -3$ et $u_2 = 5u_1 + 2 = 5 \times (-3) - 2 = -17$ (on a remplacé tous les n par 1 dans $u_{n+1} = -5u_n - 2$).
Comme $-17 < -3$, on a bien $u_2 < u_1$.
La proposition est donc vraie pour $n = 1$.

- Montrons que si la proposition est vraie pour un entier $k \geqslant 1$, alors elle l'est aussi pour l'entier suivant $(k+1)$:
Supposons que la proposition est vraie pour un entier $k \geqslant 1$, c'est-à-dire $u_{k+1} \leqslant u_k$, et montrons qu'elle l'est aussi pour $(k+1)$, soit $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.
Pour traiter cette partie nous disposons de deux techniques :

Technique 1 :
On obtient u_{k+2} , en remplaçant n par $k+1$ dans $u_{n+1} = 5u_n - 2$; ce qui donne $u_{k+2} = 5u_{k+1} - 2$.
Par hypothèse, on a $u_{k+1} \leqslant u_k$; donc $5u_{k+1} \leq 5u_k$ et $5u_{k+1} - 2 \leqslant 5u_k - 2$, soit $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

Technique 2 :
On remarque que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 5x - 2$, une fonction affine de coefficient directeur $a = 5 > 0$, donc croissante sur ℝ.
Comme $u_{k+1} \leqslant u_k$ par hypothèse, et f croissante sur ℝ, on en déduit que $f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k)$ (la croissance garde l'ordre).
Mais, par définition, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$.
On a donc $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

- La proposition étant vraie pour $n = 1$ et vraie pour $(k+1)$ lorsqu'elle est supposée vraie pour un entier k, on peut conclure qu'elle l'est pour tous les entiers $n \geqslant 1$.
La suite (u_n) est donc bien décroissante.

b) **Rédaction courte :**
Montrons par récurrence que la proposition " $u_{n+1} \leqslant u_n$ ", est vraie pour tout n∈ℕ.
- **Initialisation** : on a $u_1 = -3$ et $u_2 = 5u_1 + 2 = 5 \times (-3) - 2 = -17$; donc $u_2 \leqslant u_1$.
La proposition est donc vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité** : supposons que pour un entier $k \geqslant 1$, $u_{k+1} \leqslant u_k$; montrons alors que $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.
Technique 1 (valable pour des cas simples)
On a: $u_{k+1} \leqslant u_k \Leftrightarrow 5u_{k+1} \leqslant 5u_k \Leftrightarrow 5u_{k+1} - 2 \leqslant 5u_k - 2 \Leftrightarrow u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$; d'où le résultat.

Technique 2 (valable pour tous les cas)
On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 5x - 2$ sur ℝ.
La fonction affine f de coefficient directeur positif est croissante sur ℝ.
Comme $u_{k+1} \leqslant u_k$, on a $f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k)$ et donc $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

- **Conclusion** : La proposition étant vraie pour $n = 1$ et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle l'est aussi pour tout n∈ℕ.
La suite (u_n) est donc décroissante.

Remarques :

- Garder en tête que $u_{n+1} = f(u_n)$ signifie "un terme de la suite (u_n) est l'image par f du terme précédent" ; ainsi $u_{40} = f(u_{39})$, $u_{k+2} = f(u_{k+1})$, $u_k = f(u_{k-1})$ …
- La technique 2 qui consiste à utiliser la croissance de f est plus générale que la technique 1 qui ne marche que pour des cas simples (fonctions affines, racines carrées...).
- Il arrive que l'on note P_n la proposition " $u_{n+1} \leqslant u_n$ " (ou toute autre proposition).
Un avantage de cette présentation est qu'au lieu d'écrire "La proposition est vraie pour $n = 1$ " il suffit de dire " P_1 est vraie" ou encore " P_k est vraie" à la place de "la proposition est vraie pour un entier k".
Vous n'êtes cependant pas obligés d'adopter cette façon de procéder, source de confusion chez pas mal d'élèves.

Exemple 2

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} \end{cases}$, n ∈ ℕ.

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$

On suppose $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout n ∈ ℕ.
Montrer que la suite u est décroissante.

Solution
La suite u est décroissante signifie, par définition, que pour tout tout n ∈ ℕ on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Montrons par récurrence qu'on a bien " $u_{n+1} \leqslant u_n$ " pour tout n ∈ ℕ.
- On a $u_0=2$ et $u_1=\dfrac{3u_0+2}{u_0+4}=\dfrac{4}{3} \leqslant 2$ donc $u_1 \leqslant u_0$.
La proposition " $u_{n+1} \leqslant u_n$ " est ainsi vérifiée pour $n=0$.

- Supposons que $u_{k+1} \leqslant u_k$ pour un entier k ∈ ℕ.
Montrons que $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.
A cause du quotient, l'encadrement membre à membre ne marche pas.
Essayons : on a $u_{k+1} \leqslant u_k$ donc $3u_{k+1}+2 \leqslant 3u_k+2$ mais aussi $u_{k+1}+4 \leqslant u_k+4$.
On pourrait être tenté d'écrire $\dfrac{3u_{k+1}+2}{u_{k+1}+4} \leqslant \dfrac{3u_k+2}{u_k+4}$ en divisant membre à membre. Malheureusement, aucun résultat ne le permet.
Voici pourquoi : on a 5>4 et 10>1 mais, en divisant membre à membre, on obtient $\dfrac{5}{10} > \dfrac{4}{1}$ soit 0,5>4 qui est faux).

Comme $u_{n+1}=f(u_n)$, la bonne piste consiste à montrer que la fonction f est croissante (ce sera toujours le cas) sur $[0;1]$, l'intervalle qui contient tous les u_n . On utilise ensuite cette croissance pour prouver que $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.
La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ et, après calcul, obtient $f'(x)=\dfrac{10}{(x+4)^2}>0$ car $(x+4)^2>0$ sur $[0;1]$ et $10>0$.
La fonction f est donc croissante sur $[0;1]$.
Revenons à l'étape hérédité de notre démonstration par récurrence.
Par hypothèse, on a $u_{k+1} \leqslant u_k$.
Comme pour tout n ∈ ℕ, $u_n \in [0;1]$ et f croissante sur l'intervalle $[0;1]$, on a alors $f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k)$ (la croissance garde l'ordre : raison pour laquelle f sera toujours croissante dans ce type d'exercice).
Or $f(u_{k+1})=u_{k+2}$ et $f(u_k)=u_{k+1}$. Donc $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

- La proposition " $u_{n+1} \leqslant u_n$ " étant vraie pour $n=0$ et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n ∈ℕ.

Méthode 3 ***
Si la suite (u_n) s'écrit comme une fonction, c'est-à-dire $u_n = f(n)$ pour tout n, alors :
- On étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

- Si f est croissante sur $[0;+\infty[$, on conclut que la suite (u_n) l'est aussi.
- Si f est décroissante sur $[0;+\infty[$, on conclut que la suite (u_n) l'est aussi.

Pourquoi ?
- Graphiquement, si $u_n=f(n)$, alors la représentation graphique de la suite u est constituée de points parcourant la courbe de f. D'où le lien entre leurs variations.
- Plus rigoureusement, f est croissante sur I= $[0;+\infty[$ $\Leftrightarrow$ si a et b $\in I$ et $a\leqslant b$ alors $f(a)\leqslant f(b)$. Comme $n+1\geqslant n$ alors $f(n+1)\geqslant f(n)$, soit $u_{n+1}\geqslant u_n$; donc u croissante. Idem pour f décroissante.

Exemple

Soit $u_n = \dfrac{5n-2}{n+1}$, n∈ℕ. Déterminer le sens de variation de (u_n).

Solution

On remarque que pour tout n∈ℕ, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{5x-2}{x+1}$.
Étudions le sens de variation de f sur $[0\ ;+\infty[$:
f , fonction rationnelle, est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{7}{(x+1)^2}$ pour tout $x \in [0\ ;+\infty[$.
Comme pour $x \in [0\ ;+\infty[$ $(x+1)^2 > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $[0\ ;+\infty[$.
Ce qui signifie que f est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
La suite (u_n) aussi est donc croissante.

Méthode 4 ("méthode des quotients" quasiment jamais utilisée en Terminale S)
Si tous les termes u_n sont strictement positifs, alors : - On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
- On compare le résultat obtenu à 1.
- On conclut que la suite (u_n) est croissante si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$ et décroissante si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1$.

Pourquoi ?
Définition du cours : u croissante $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}\geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $u_n\neq 0$, alors $u_{n+1}\geqslant u_n$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Même raisonnement pour u décroissante.

Exemple

Déterminer le sens de variation des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{6}{7^n}$.

Solution

Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n>0$.

D'autre part, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\dfrac{6}{7^{n+1}}}{\dfrac{6}{7^n}}=\dfrac{6}{7^{n+1}}\times\dfrac{7^n}{6}=\dfrac{7^n}{7^{n+1}}\times\dfrac{6}{6}=\dfrac{1}{7}$.

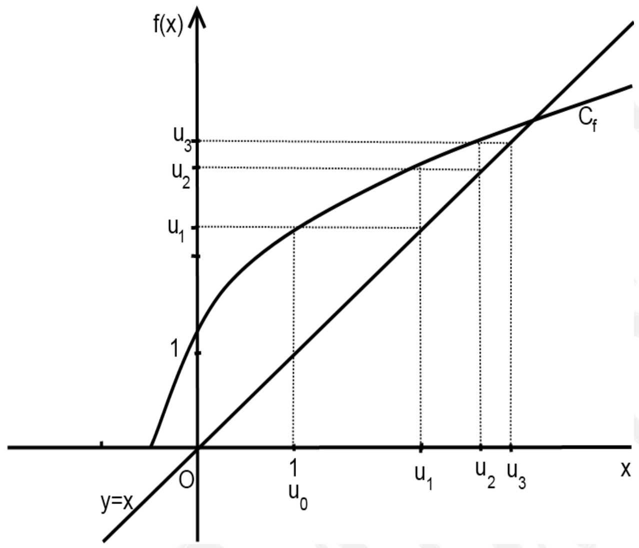
Comme $\dfrac{1}{7} < 1$, on en déduit $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ pour tout n∈ℕ.

Ce qui signifie que la suite (v_n) est décroissante.

Compétence 3 ***
Comment représenter les termes d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ sur l'axe des abscisses ?

Méthode
- On place le premier terme sur l'axe des abscisses (u_0 par exemple).
- Grâce à la courbe de f, on lit graphiquement $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
- Pour pouvoir lire $u_2 = f(u_1)$, on replace u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- On procède de la même façon pour obtenir u_3 , u_4 … sur l'axe des abscisses.

Pourquoi ?
La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ donne $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, etc ... autrement, un terme est l'image par f du précédent. La courbe de f permet donc de déterminer progressivement les termes de la suite u.



Exemple
Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n∈ℕ, $u_{n+1} = \sqrt{2 + 4u_n}$. Dans un repère orthonormal, on donne la courbe C_f de la fonction $f(x) = \sqrt{2 + 4x}$ et celle de la droite (D) d'équation $y = x$. Construire, grâce à C_f et (D) , les termes u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .

Solution
On remarque que pour tout n∈ℕ, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On a donc $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$ …
C_f et la droite (D) permettent donc d'obtenir les termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessus.

B) SUITES ARITHMÉTIQUES

Compétence 4 ***
Comment montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique ?

Méthode
- On calcule, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ jusqu'à trouver une constante r. On a donc $u_{n+1} - u_n = r$.
- On conclut alors que la suite (u_n) est arithmétique de raison r.

Pourquoi ?

Définition du cours : (u_n) est une suite arithmétique $\Leftrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+r$ où r est un réel $\Leftrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=r$.

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit donc de montrer que $u_{n+1}-u_n=r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1

Les suites $w_n = -\dfrac{2}{7}+\dfrac{5n}{4}$ et $v_n = 3n^2-1$, définies pour tout entier n, sont-elles arithmétiques ?

Solution

a) Soit $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1}-w_n = -\dfrac{2}{7}+\dfrac{5(n+1)}{4}-\left(-\dfrac{2}{7}+\dfrac{5n}{4}\right)=-\dfrac{2}{7}+\dfrac{5n+5}{4}+\dfrac{2}{7}-\dfrac{5n}{4}=\dfrac{5}{4}$.

Comme $w_{n+1}-w_n=\dfrac{5}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut conclure que (w_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{5}{4}$.

b) On procède de la même façon avec (v_n) :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= 3(n+1)^2-1-(3n^2-1) \\ &= 3n^2+6n+3-1-3n^2+1 \\ &= 6n+3 \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n$ n'étant pas constant, on peut conclure que la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Remarque : si des erreurs de calcul ou d'autres raisons empêchent de réussir à montrer que u est arithmétique, on l'admet et on calcule sa raison $r=u_1-u_0$ ou u_2-u_1 … qui peut être utilisée pour traiter les questions suivantes.

Exemple 2 (adapté de sujet de bac)

On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$ et la suite (v_n) par $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Solution

Soit n un entier naturel. On a :
$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{u_{n+1}-3}-\frac{1}{u_n-3} \\ &= \frac{6-u_n}{3u_n-9}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{6-u_n-3}{3u_n-9}=\frac{3-u_n}{-3(3-u_n)}=-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(v_n) est bien une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

Compétence 5 ***

Comment montrer qu'une suite u n'est pas arithmétique ?

Méthode

- On calcule u_1-u_0 et u_2-u_1 .
- On constate qu'ils ne sont pas égaux.
- On conclut alors que la suite u n'est pas arithmétique.

Pourquoi ?

Définition du cours : (u_n) est une suite arithmétique $\Leftrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+r$ où r est un réel $\Leftrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=r$ $\Leftrightarrow$ $u_1-u_0=u_2-u_1=u_3-u_2=\ldots=r$.

Donc si $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, alors la suite u n'est pas arithmétique.

Exemple

Montrer que la suite v définie, pour tout n ∈ ℕ, par $v_n = 3n^2 - 1$ n'est pas arithmétique.

Solution

Montrons que $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$.

On a $v_0 = -1$, $v_1 = 2$ et $v_2 = 3\times(2)^2 - 1 = 11$; donc $v_1 - v_0 = 3$ et $v_2 - v_1 = 9$.

Comme $v_2 - v_1 \neq v_1 - v_0$, on conclut que la suite v n'est pas arithmétique.

Compétence 6 ***

Comment exprimer le terme u_n en fonction de n après avoir montré que la suite u est arithmétique ?

Méthode

On applique le résultat du cours : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_1 + (n-1)r$ si le premier terme de la suite u est u_1.

La formule générale, quasiment jamais utilisée en terminale, mais valable pour tout terme, est $u_n = u_p + (n-p)r$.

Pourquoi ?

Propriété du cours (classe de 1ère) : si une suite u est arithmétique de raison r, alors $u_n = u_0 + nr$. Plus généralement, $u_n = u_p + (n-p)r$, $p \in \mathbb{N}$.

Plus concrètement, si u est arithmétique, alors $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r$ donc $u_2 = u_0 + r + r = u_0 + 2r$, $u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$, ..., $u_n = u_0 + nr$.

Exemple

On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$ et la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Solution

a) Déjà traité dans l'exemple 2 de la compétence 4.

b) Comme la suite v_n est arithmétique, on a : $v_n = v_0 + nr$, pour tout n∈ℕ.

$v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 3} = -\dfrac{1}{6}$ et $r = -\dfrac{1}{3}$, ce qui conduit à $v_n = -\dfrac{1}{6} + n\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, n∈ℕ, soit

$v_n = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}n, n \in \mathbb{N}$.

On ne sait pas si la suite u est arithmétique ou géométrique ; il n'y a donc pas de formule directe pour calculer u_n.

Par contre, (u_n) et (v_n) étant liées par la relation $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$, la connaissance de l'une permet le calcul de l'autre.

Dans la relation $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$, calculons u_n en fonction de v_n :

pour n∈ℕ, on a $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$; ce qui, en faisant un produit en croix, donne $v_n(u_n - 3) = 1$,

$v_n u_n - 3v_n = 1$, puis $u_n = \dfrac{1+3v_n}{v_n} = \dfrac{1+3\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n\right)}{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n} = \dfrac{6n-3}{1+2n}$.

Pour tout n∈ℕ, on a donc $u_n = \dfrac{6n-3}{1+2n}$.

Compétence 7 ***
Comment compter le nombre de termes dans une somme de termes consécutifs d'une suite ?

Méthode
On a $\textit{nombre de termes} = \textit{dernier indice} - \textit{premier indice} + 1$.

Pourquoi ?
La somme $u_{10} + u_{11} + u_{12}$ *contient 3 termes consécutifs ; et pourtant* $12 - 10 = 2 \neq 3$ *. Donc vigilance.*

Exemple
Combien de termes contient la somme $u_9 + u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{19}$?

Solution
Il n'y a pas $19 - 9 = 10$ termes mais bien $19 - 9 + 1 = 11$ termes (compter pour voir).

Compétence 8 ***
Comment calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Méthode
On applique la formule du cours :
$S = (\textit{nombre de termes})\dfrac{(\textit{premier terme} + \textit{dernier terme})}{2}$.
Attention : ici, "premier terme" désigne le "premier terme de la somme" et non le "premier terme de la suite".

Pourquoi ?
Formule du cours.

Exemple
Une suite (u_n) étant arithmétique, calculer $u_9 + u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{19}$.

Solution
Comme la suite (u_n) est arithmétique, on a $u_9 + u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{19} = 11 \times \dfrac{u_9 + u_{19}}{2}$.

Il suffit ensuite de remplacer u_9 et u_{19} par leurs valeurs pour terminer le calcul.
Si nécessaire, on peut utiliser les formules $u_9 = u_p + (9 - p)r$ et $u_{19} = u_p + (9 - p)r$ pour obtenir u_9 et u_{19} à partir de n'importe quel terme connu u_p .

C) SUITES GÉOMÉTRIQUES

Compétence 9 ***
Comment montrer qu'une suite (u_n) est géométrique ?

Méthode 1 ***

- On calcule u_{n+1} jusqu'à trouver $u_{n+1} = q\, u_n$, avec q∈ℝ.
- On conclut que la suite u est géométrique de raison q.

Remarque : il faut éviter l'emploi de la méthode qui consiste à montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$.

Efficace en classe de première (en présence de puissances), cette méthode se révèle moins pratique en terminale. Par ailleurs, il faudrait montrer que $u_n \neq 0$ pour tout n avant d'entamer les calculs, une raison de plus pour éviter cette méthode.

Pourquoi ?

Définition du cours : une suite u est géométrique ⇔ Pour tout n ∈ ℕ, $u_{n+1} = q \times u_n$ *, où q est un réel.*
La méthode n'est donc qu'une application directe du cours.

Exemple 1 (extrait de sujet bac)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$.

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

Solution

Soit n ∈ ℕ. Calculons v_{n+1} (on remplace tous les n par $(n+1)$ dans l'expression de v_n) :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}=\frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}}=\frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1-u_n}{1+2u_n}}=\frac{3u_n}{1-u_n}=3\left(\frac{u_n}{1-u_n}\right)=3v_n\ .$$

Comme, pour tout n ∈ ℕ, on a $v_{n+1}=3\times v_n$, on peut affirmer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3.

Astuce : en fin de calcul, il peut arriver que l'on soit bloqué à l'étape qui consiste à faire apparaître qv_n . Une astuce consiste à écrire v_n , puis à trouver q. Ici, par exemple, cela donnerait : $v_{n+1} = \ldots = \frac{3u_n}{1-u_n} = ?\left(\frac{u_n}{1-u_n}\right)$. On voit facilement qu'il faut mettre 3 à la place du point d'interrogation. Cette astuce se révèle très efficace dans des exercices plus complexes. Pensez-y.

Exemple 2 (sujet type bac)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$; $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$.

Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Solution

Pour n ∈ℕ, montrons que $w_{n+1} = qw_n$ où q∈ℝ.

On a, pour un entier naturel n :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2}$$

$$=\frac{u_{n+1}-u_n}{2}=\frac{\frac{u_n+v_n}{2}-u_n}{2}$$

$$=\frac{v_n-u_n}{4}$$

$$=\frac{1}{4}w_n\ .$$

w est ainsi une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Méthode 2 *

Si, après plusieurs tentatives, on ne parvient pas à montrer que u est géométrique, on l'admet et on calcule sa raison $q = \frac{u_2}{u_1}$ ou $\frac{u_3}{u_2}$ … que l'on utilise pour traiter les questions suivantes.

Exemple

Énoncé précédent.

Solution

Des erreurs de calcul ou d'autres raisons font que la précédente méthode ne marche pas.

Dans ce cas, on admet que (w_n) est une suite géométrique et on calcule sa raison $q = \frac{w_1}{w_0}$.

On a $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$ et $w_1 = v_1 - u_1$.

Comme $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2}$ et $v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{15}{4}$, on obtient $w_1 = \frac{15}{4} - \frac{7}{2} = \frac{1}{4}$.

Donc $q = \frac{w_1}{w_0} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$.

Compétence 10 ***

Comment montrer qu'une suite u n'est pas géométrique ?

Méthode

- On calcule $\frac{u_1}{u_0}$ et $\frac{u_2}{u_1}$.
- On constate qu'ils sont différents.
- On conclut que la suite u n'est pas géométrique.

Pourquoi ?

Définition du cours : une suite u est géométrique ⇔ Pour tout n ∈ ℕ, $u_{n+1} = q \times u_n$, où q est un réel.

On a donc $u_1 = qu_0$, soit $\frac{u_1}{u_0} = q$, $u_2 = qu_1$ soit $\frac{u_2}{u_1} = q$ …. Ainsi, si $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$, alors la suite u n'est pas géométrique.

Exemple

Soit $w_n = -5n^2 + 1$, n ∈ ℕ.

Montrer que la suite w n'est pas géométrique.

Solution

On a $w_0 = 1$, $w_1 = -4$ et $w_2 = -19$.

donc $\frac{w_1}{w_0} = -4$ et $\frac{w_2}{w_1} = \frac{19}{4}$.

Comme $\frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}$, alors la suite w n'est pas géométrique.

Compétence 11 ***

Comment exprimer u_n en fonction de n après avoir montré que la suite u est géométrique ?

Méthode

On applique le résultat du cours : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$ si le premier terme de

la suite u est u_1.
La formule générale, quasiment jamais utilisée en terminale mais valable pour tout terme, est $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Pourquoi ?
- Propriété du cours (classe de 1ère) : si u est une suite géométrique de raison q ∈ℝ, alors, pour tout n ∈ℕ, on a $u_n = u_0 \times q^n$ et plus généralement, $u_n = u_p \times q^{n-p}$, p∈ℕ.
- Plus concrètement, si u est géométrique, alors $u_1 = q \times u_0$, $u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 \times u_0$, $u_3 = q \times u_2 = q \times (q^2 \times u_0) = q^3 \times u_0$ .... D'où la formule générale $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple 1
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :
$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$; $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2}$.
Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b) Exprimer w_n en fonction de n.

Solution
a) Déjà montré dans l'exemple 2 de la compétence 9.
b) Comme w est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$, on en déduit que :

$$w_n = w_0 q^n = (v_0 - u_0) \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}.$$

Exemple 2
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies, pour tout n ∈ℕ, par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} \end{cases} \text{ et } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

a) Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
c) En déduire u_n en fonction de n.

Solution
a) Montrons que $v_{n+1} = q v_n$ où q∈ℝ.
Pour n ∈ ℕ, on a :
$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2}$ or, d'après l'énoncé, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$; donc :

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2} = \frac{\dfrac{2u_n - 2}{u_n + 4}}{\dfrac{5u_n + 10}{u_n + 4}} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} = \frac{2}{5}\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right) = \frac{2}{5} v_n.$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$.

b) D'après le cours, (v_n) étant une suite géométrique, on a $v_n = v_0 \times q^n$.
Ici, $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\dfrac{1}{2}$ et $q = \dfrac{2}{5}$. Ce qui donne $v_n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

c) Comme on connaît v_n en fonction de n, il suffit d'exprimer u_n en fonction de v_n :

on a, pour n $\in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ d'où, en faisant un produit en croix, on a successivement $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$, $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$, $v_n u_n - u_n = -2v_n - 1$, $u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1$ et enfin $u_n = \dfrac{-2v_n - 1}{v_n - 1}$.

Pour terminer, on remplace v_n par $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$:

$$u_n = \frac{-2\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) - 1}{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - 1} = \frac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - 1}{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - 1}$$

Attention : ne pas simplifier par 2 ; les puissances sont prioritaires sur les multiplications.
Ainsi, $3 \times 2^5 \neq 6^5$.

Compétence 12 ***
Comment calculer une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique ?

Méthode

On applique la formule du cours : $S = (\textit{premier terme}) \times \dfrac{1 - q^{(\textit{nombre de termes})}}{1 - q}$.

Pourquoi ?
- Formule du cours (1ère S).
- Pour mémoriser cette formule, se rappeler qu'elle est construite sur le squelette $\dfrac{1 - q}{1 - q}$.

Exemple 1
Soit (u_n) une suite géométrique.
Calculer $\sum_{k=9}^{19} u_k = u_9 + u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{19}$.

Solution
On constate que de u_9 à u_{19} , cela fait $19 - 9 + 1 = 11$ termes.

Comme la suite (u_n) est géométrique, on a $u_9 + u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{19} = u_9 \times \dfrac{1 - q^{11}}{1 - q}$.

En remplaçant u_9 et q par leurs valeurs (non précisées dans l'énoncé), on obtient une valeur plus précise de la somme cherchée.

Exemple 2
Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
Démontrer que $1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1 - e}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$.

Solution
L'écriture $\dfrac{1 - e}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$ fait penser au squelette $\dfrac{1 - q}{1 - q}$.
On est donc en présence de la somme de terme consécutifs d'une suite géométrique.
Déterminons la.
Soit n $\in \mathbb{N}^*$.

On remarque que $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=e^{\frac{0}{n}}+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}$.
Les numérateurs varient de 0 à n-1. Ici, n ne varie pas, c'est une constante.
Choisissons donc une autre variable ; k, par exemple.

Le terme général de la suite dont on additionne les termes est donc $u_k=e^{\frac{k}{n}}$, $k\in\mathbb{N}$.
Montrons que (u_k) est une suite géométrique pour pouvoir appliquer la formule de la somme.
On a $u_{k+1}=e^{\frac{k+1}{n}}=e^{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}}\times e^{\frac{k}{n}}=e^{\frac{1}{n}}u_k$.

On en déduit que (u_k) est une suite géométrique de raison $q=e^{\frac{1}{n}}$.
La formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique donne :

$$\begin{aligned}1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}&=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}\\&=u_0\times\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}\\&=1\times\frac{1-e^{\frac{n}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}\\&=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}.\end{aligned}$$

Remarque : si le fait que n soit une constante est gênant, remplacez-le par exemple par p.

Compétence 13 *
Comment traiter les exercices sur les pourcentages successifs (capital, intérêt composé, évolution de population, probabilité ...) ?

Méthode
On ramène le problème à une étude de suite.
- Pour des augmentations se rappeler que
" $nouveau=ancien+pourcentage\times ancien$ "
- Pour les diminutions
" $nouveau=ancien-pourcentage\times ancien$ ".

Exemple
Au 1er janvier 2010, la population d'un pays est estimée à 654.000 habitants. Une augmentation de 1,8% est prévue chaque année.
a) Calculer p_1, la population en 2011.
b) En notant p_n la population au bout de n années, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire p_n en fonction de n.
c) Combien d'habitants comptera ce pays en 2025?

Solution
a) On a $p_1=p_0+\frac{1,8}{100}\times p_0=654000+0,018\times654000=665772$.

b) La population au bout de $(n+1)$ années est égale à celle de l'année précédente, c'est-à-dire p_n, plus l'augmentation qui vaut 1,8% de p_n.
Ce qui se résume en $p_{n+1}=p_n+\frac{1,8}{100}\times p_n$, $n\in\mathbb{N}$.
En développant, on obtient :
$p_{n+1}=p_n+0,018\,p_n=p_n(1+0,018)=1,018\,p_n$, $n\in\mathbb{N}$.
De $p_{n+1}=1,018\,p_n$, $n\in\mathbb{N}$, on déduit que la suite (p_n) est géométrique de raison $q=1,018$.
On a donc $p_n=p_0\times q^n=654000\times1,018^n$, $n\in\mathbb{N}$.

Cette formule permet de calculer directement la population au bout de n'importe quel nombre d'années n.

c) La population en 2025 correspond à celle au bout de 25 ans, soit p_{25} : $p_{25}=654000\times1{,}018^{25}\approx$ 1021580 .

Attention : pour déterminer p_n en fonction de n dans ce type d'exercice, il ne faut pas multiplier le pourcentage par n, puis continuer les calculs : les pourcentages ne s'additionnent pas.
(On a par exemple $p_2\neq p_0+2\times\frac{1{,}8}{100}\times p_0$ …).

D) DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

Compétence 14 ***
Comment démontrer par récurrence qu'une proposition donnée est vraie ?

Méthode

Chapitre 2 -

LES NOMBRES COMPLEXES

Ce chapitre contient un assez grand nombre de résultats à connaître.
Sans être particulièrement difficile, sa maîtrise nécessite tout de même pas mal d'entraînement (il faudra traiter au moins 4 sujets type bac pour consolider les compétences acquises).

A) CALCULER AVEC LES NOMBRES COMPLEXES

Compétence 1 ***
Comment faire des calculs avec les nombres complexes ?

Méthode
On calcule comme d'habitude tout en se rappelant que $i^2 = -1$.

Pourquoi ?
- Les nombres complexes sont par définition les nombres de la forme $a + ib$ *où a et b sont deux nombres réels et i le nombre imaginaire vérifiant* $i^2 = -1$ *.*
- Les calculs dans $\mathbb{C}$ *sont réalisés avec les mêmes règles que dans* $\mathbb{R}$*. La petite nouveauté à prendre en compte, c'est* $i^2 = -1$ *.*
- Si $z = a + ib$ *, alors, son conjugué,* $\bar{z} = a - ib$ *vérifiant :* $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ *,* $\overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$ *,* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ *et* $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n$ *.*

Exemple 1
Soit $z = 2 - 5i$, $z' = -7 + 3i$ et $Z = i$ deux nombres complexes.
Calculer :
a) $z + z'$; b) $z - z'$; c) z^2 ; d) zz' ; e) $\bar{z}$; f) $\overline{z'}$; g) Z^3 ; h) Z^4 ; j) Z^5 .

Solution
On calcule comme au collège :
a) $z + z' = 2 - 5i + (-7 + 3i) = 2 - 5i - 7 + 3i = -5 - 2i$;

b) $z - z' = 2 - 5i - (-7 + 3i) = 2 - 5i + 7 - 3i = 9 - 8i$;

c) $z^2 = (2 - 5i)^2 = 4 - 20i + 25i^2 = 4 - 20i - 25 = -21 - 20i$;

d) $zz' = (2-5i)(-7+3i)$
$= 2\times(-7) + 2\times 3i - 5i\times(-7) - 5i\times 3i$
$= -14 + 6i + 35i - 15i^2$
$= -14 + 41i + 15$
$= 1 + 41i$.

e) Par définition, on a $\overline{z} = 2 + 5i$.

f) De même, $\overline{z'} = -7 - 3i$.

g) $Z^3 = i^3 = i\times i^2 = i\times(-1) = -i$.

h) $Z^4 = i\times i^3 = i\times(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$.

j) $Z^5 = i\times i^4 = i\times 1 = i$.

Exemple 2
Déterminer le conjugué $\overline{Z}$ du nombre complexe Z dans les cas suivants :
a) $Z=-4-9i$; b) $Z=6i-5$; c) $Z=z+3i$ où $z\in\mathbb{C}$.

Solution
a) Par définition, si $z=a+ib$ alors son conjugué $\overline{z}$ vaut $a-ib$.
On a donc $\overline{Z}=-4+9i$.

b) Mettons d'abord Z sous la forme correcte $a+ib$; ce qui donne $Z=-5+6i$.
On en déduit $\overline{Z}=-5-6i$.

c) Attention : $\overline{Z}\neq z-3i$.
En effet, comme $z\in\mathbb{C}$, alors $\overline{Z}=\overline{z+3i} = \overline{z} + \overline{3i} = \overline{z} - 3i$.

Compétence 2 ***
Comment déterminer la forme algébrique d'un complexe écrit comme quotient de deux autres ?

Méthode
On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Pourquoi ?
- D'une part, par définition, la forme algébrique d'un complexe est $a+ib$ où a et $b\in\mathbb{R}$.
- D'autre part, d'après le cours, si $z=a+ib$ alors $\overline{z}=a-ib$ et $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 \in\mathbb{R}$ (identité remarquable). On transforme donc le dénominateur en un nombre réel en le multipliant par son conjugué.
- Enfin, $\frac{A}{B} = \frac{A}{B}\times\frac{C}{C}$ (car $\frac{C}{C}=1$).

Exemples

a) Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = \dfrac{8-i}{4+3i}$; $z_2 = \dfrac{2-5i}{i-1}$; $z_3 = \dfrac{-6+5i}{7}$.

b) Donner l'inverse des nombres complexes suivants :

$z_4 = -i$; $z_5 = 1+i$; $z_6 = 5i-4$.

Solution

a)

On a $z_1 = \dfrac{8-i}{4+3i} \times \dfrac{4-3i}{4-3i} = \dfrac{32-4i-24i-3}{16+9} = \dfrac{29-28i}{25} = \dfrac{29}{25} - \dfrac{28}{25}i$.

Remarque : pour calculer $(4+3i)(4-3i)$, on peut développer directement ou, pour être plus rapide et pour éviter les erreurs de calcul, utiliser le résultat du cours : si $z = a+ib$ alors $z \times \bar{z} = a^2+b^2$.

Comme $\overline{4+3i} = 4-3i$ alors $(4+3i)(4-3i) = (4+3i)(\overline{4+3i}) = 4^2+3^2$.

- Avant de calculer z_2 , remarquons que le conjugué de $i-1$ n'est pas $i+1$ mais $-i-1$. En effet, $i-1 = -1+i$.

On a donc $z_2 = \dfrac{2-5i}{i-1} \times \dfrac{-i-1}{-i-1} = \dfrac{-2i-2-5+5i}{2} = -\dfrac{7}{2} + \dfrac{3}{2}i$

(on a encore utilisé le résultat $z\bar{z} = a^2+b^2$).

- Ici, nul besoin de multiplier par le conjugué du dénominateur. On a directement :

$z_3 = \dfrac{-6+5i}{7} = -\dfrac{6}{7} + \dfrac{5}{7}i$.

b) L'inverse d'un complexe non nul Z est, par définition, $\dfrac{1}{Z}$.

- L'inverse de z_4 est donc $\dfrac{1}{z_4} = \dfrac{1}{-i} = \dfrac{1}{-i} \times \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{1} = i$.

- z_5 a pour inverse $\dfrac{1}{z_5} = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

- On a

$$\frac{1}{z_6} = \frac{1}{5i-4} = \frac{1}{5i-4} \times \frac{-5i-4}{-5i-4} = \frac{-5i-4}{(-5)^2+(-4)^2} = \frac{-5i-4}{41} = -\frac{4}{41} - \frac{5}{41}i.$$

B) NOMBRES COMPLEXES ET ÉQUATIONS

Compétence 3 ***
Comment résoudre une équation complexe contenant un ou deux quotients ?

Méthode
On applique un produit en croix pour faire disparaître les fractions puis on résout l'équation comme d'habitude.

Pourquoi ?

- Pour $B \neq 0$ *et* $D \neq 0$, *on a* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$.

Exemple
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
a) $5z + 1 = \frac{3 - z}{z}$; b) $\frac{-z - 4}{z} = \frac{3z+1}{8 - 3z}$.

Solution
a) Valeurs interdites : $z \neq 0$.

Pour tout $z \neq 0$, on a $5z + 1 = \frac{3 - z}{z} \Leftrightarrow z(5z + 1) = 3 - z$

$\Leftrightarrow 5z^2 + 2z - 3 = 0$.

Cette dernière équation admet pour discriminant $\Delta = 64$.

On en déduit les deux solutions $z_1 = -1$ et $z_2 = \frac{3}{5}$.

L'ensemble S des solutions de l'équation $5z + 1 = \frac{3 - z}{z}$ est donc

$S = \left\{-1 ; \frac{3}{5}\right\}$.

b) Valeurs interdites : $z \neq 0$ et $8 - 3z \neq 0$, soit $z \neq 0$ et $z \neq \frac{8}{3}$.

Pour $z \neq 0$ et $z \neq \frac{8}{3}$, $\frac{-z - 4}{z} = \frac{3z+1}{8 - 3z} \Leftrightarrow (-z - 4)(8 - 3z) = (3z+1)(z)$

$\Leftrightarrow -8z + 3z^2 - 32 + 12z = 3z^2 + z \Leftrightarrow 3z = 32 \Leftrightarrow z = \frac{32}{3}$.

L'équation $\frac{-z - 4}{z} = \frac{3z+1}{8 - 3z}$ admet donc une unique solution : $\frac{32}{3}$.

Compétence 4 ***
Comment résoudre une équation complexe contenant z et $\overline{z}$?

Méthode
- On remplace z par son écriture algébrique $(x+iy)$ puis on développe.
- On regroupe tous les termes réels (ne contenant pas i), et tous les termes imaginaires purs (contenant i) en factorisant par **+i**.
- On termine en utilisant la propriété $A+iB=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ et } B=0$.

Pourquoi ?
- Théorème du cours : tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = x + iy$, où x et y ∈ ℝ.
*- Propriété : si $z = a + ib$, alors $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ **ET** $b = 0$.*

Exemple
Résoudre dans ℂ l'équation $z^2-3\overline{z}+2=0$.

Solution
Posons $z=x+iy$ où x et y sont des réels que nous allons déterminer.
On a, $z^2-3\overline{z}+2=0 \Leftrightarrow (x+iy)^2-3(x-iy)+2=0 \Leftrightarrow$
$x^2+2xyi-y^2-3x+3yi+2=0 \Leftrightarrow (x^2-3x-y^2+2)+\mathrm{i}(2xy+3y)=0 \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x^2-3x-y^2+2=0 \\ 2xy+3y=0 \end{cases}$.

Or $2xy+3y=0 \Leftrightarrow y(2x+3)=0 \Leftrightarrow y=0$ ou $x=-\dfrac{3}{2}$.

Pour $y=0$, l'équation $x^2-3x-y^2+2=0$ devient $x^2-3x+2=0$ dont les solutions, après résolution de l'équation du second degré, sont : 1 et 2 .
Les couples $(1;0)$ et $(2;0)$ sont donc les solutions du système.
D'autre part, pour $x=-\dfrac{3}{2}$ l'équation $x^2-3x-y^2+2=0$ devient

$\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{2}-y^2+2=0$ dont les solutions, après résolution, sont : $\sqrt{\dfrac{35}{4}}$ et $-\sqrt{\dfrac{35}{4}}$.

On déduit que $\left(-\dfrac{3}{2};\sqrt{\dfrac{35}{4}}\right)$ et $\left(-\dfrac{3}{2};-\sqrt{\dfrac{35}{4}}\right)$ sont deux autres solutions du système.
En conclusion, en remplaçant x et y par leur valeurs dans $z=x+iy$, l'équation $z^2-3\overline{z}+2=0$ admet 4 solutions qui sont : $z_1=1$, $z_2=2$,
$z_3=-\dfrac{3}{2}+\sqrt{\dfrac{35}{4}}\mathrm{i}$ et $z_4=-\dfrac{3}{2}-\sqrt{\dfrac{35}{4}}\mathrm{i}$.

Compétence 5 ***
Comment résoudre une équation complexe du second degré à coefficients réels ?

Méthode
On calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta > 0$, alors, comme dans $\mathbb{R}$, l'équation admet deux racines réelles :
$z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors, comme dans $\mathbb{R}$, l'équation admet une racine unique $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet 2 racines complexes :
$z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Pourquoi ?
Théorème du cours sur les équations du second degré $az^2 + bz + c = 0$ *où a, b et c* $\in \mathbb{R}$.

Exemples
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
a) $-7z^2 + 4z + 3 = 0$; b) $4z^2 - 5z + 6 = 0$;
c) $-4z^2 + 12z - 9 = 0$.

Solution
a) Calculons le discriminant de l'équation :
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times(-7)\times 3 = 100 > 0$.
L'équation admet donc deux solutions :
$z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+\sqrt{100}}{2\times(-7)} = -\dfrac{3}{7}$ et
$z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-\sqrt{100}}{2\times(-7)} = 1$.

b) Le discriminant de l'équation vaut $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times 4\times 6 = -71$.
Comme $\Delta < 0$, les solutions de l'équation sont :
$z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
Soit $z_1 = \dfrac{5+i\sqrt{71}}{8}$ et $z_2 = \dfrac{5-i\sqrt{71}}{8}$.

c) L'équation a pour discriminant
$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4\times(-4)\times 9 = 144 - 144 = 0$.

Elle admet donc une unique solution : $z_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-12}{2\times(-4)} = \dfrac{3}{2}$.

Compétence 6 ***
Comment déterminer des réels a, b et c tels que $P(z)=(z-z')(az^2+bz+c)$, P étant un polynôme donné ?

Méthode
- On développe $(z-z')(az^2+bz+c)$ pour le mettre sous la même forme que P(z).
- On regroupe par factorisation les termes en z^3 , z^2 , z puis les constantes.
- Par identification des coefficients, on établit un système d'équation que vérifient a, b et c.
- On résout le système pour trouver a, b et c.

Pourquoi ?
Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont le même degré et si les coefficients de leurs termes de même degré sont égaux.

Concrètement : $ax^2+bx+c=Ax^2+Bx+C \Leftrightarrow \begin{cases} a=A \\ b=B \\ c=C \end{cases}$.

Exemple 1
Pour tout nombre complexe z, on définit la fonction f par
$f(z)=z^3+(\sqrt{3}-\mathrm{i})z^2+(1-i\sqrt{3})z-\mathrm{i}$.
a) Déterminer des réels a, b et c tels que $f(z)=(z-\mathrm{i})(az^2+bz+c)$, pour tout z de $\mathbb{C}$.
b) Résoudre l'équation $f(z)=0$ dans $\mathbb{C}$.

Solution
a) Soit $z\in\mathbb{C}$.
On a $(z-\mathrm{i})(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz-iaz^2-ibz-ic$
$=az^3+(b-ia)z^2+(c-ib)z-ic$
Mais $f(z)=(z-\mathrm{i})(az^2+bz+c)$
$\Leftrightarrow z^3+(\sqrt{3}-\mathrm{i})z^2+(1-i\sqrt{3})z-\mathrm{i}=az^3+(b-ia)z^2+(c-ib)z-ic$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - ia = \sqrt{3} - \mathrm{i} \\ c - ib = 1 - i\sqrt{3} \\ -ic = -\mathrm{i} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \cdot \\ c = 1 \end{cases}$$

On a donc $f(z) = (z - \mathrm{i})(z^2 + \sqrt{3}z + 1)$.

b) $f(z) = 0 \Leftrightarrow (z - \mathrm{i})(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$
$\Leftrightarrow z - \mathrm{i} = 0$ ou $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$
$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}$ ou $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.

L'équation $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -1$.

Elle admet donc les deux solutions $z_1 = \dfrac{-\sqrt{3} - \mathrm{i}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2}$.

Les nombres complexes $z_N - z_B$, $\dfrac{-\sqrt{3} - \mathrm{i}}{2}$, $\dfrac{-\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2}$ sont donc les solutions de l'équation $f(z) = 0$.

Exemple 2

Pour tout nombre complexe z, on définit la fonction f par
$f(z) = z^3 + (\sqrt{3} - \mathrm{i})z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - \mathrm{i}$.
Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.

Solution

Cherchons une solution imaginaire pure de l'équation $f(z) = 0$.
Soit $z = y\mathrm{i}$ un imaginaire pur solution de $f(z) = 0$, avec $y \in \mathbb{R}$.
Alors $(y\mathrm{i})^3 + (\sqrt{3} - \mathrm{i})(y\mathrm{i})^2 + (1 - i\sqrt{3})z - \mathrm{i} = 0$, soit
$-iy^3 + (\sqrt{3} - \mathrm{i})(-y^2) + (1 - i\sqrt{3})(y\mathrm{i}) - \mathrm{i} = 0$, ou encore
$-iy^3 - \sqrt{3}y^2 + iy^2 + iy + \sqrt{3}y - \mathrm{i} = 0$, puis
$(-\sqrt{3}y^2 + \sqrt{3}y) + \mathrm{i}(-y^3 + y^2 + y - 1) = 0$.

Ce qui donne $\begin{cases} -\sqrt{3}y^2 + \sqrt{3}y = 0 \\ -y^3 + y^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$ (E).

On a $-\sqrt{3}y^2 + \sqrt{3}y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}y(-y + 1) = 0$
$\Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 1$.

En remplaçant y par 0 dans l'équation $-y^3 + y^2 + y - 1 = 0$ du système (E),

on obtient $-1=0$ qui est faux. Donc y≠0.
Par contre, $y=1$ vérifie l'équation $-y^3+y^2+y-1=0$.
$y=1$ est donc solution de (E).
En résumé, si $f(z)=0$ admet une solution imaginaire pure, alors il vaut $z=y\mathrm{i}$, soit $z=\mathrm{i}$.
Montrons que l'imaginaire pur trouvé convient :
On a $f(\mathrm{i})=\mathrm{i}^3+(\sqrt{3}-\mathrm{i})\mathrm{i}^2+(1-i\sqrt{3})\mathrm{i}-\mathrm{i}$
$=-\mathrm{i}-\sqrt{3}+\mathrm{i}+\mathrm{i}+\sqrt{3}-\mathrm{i}$
$=0$.
L'équation $f(z)=0$ admet bien une solution imaginaire pure : i.

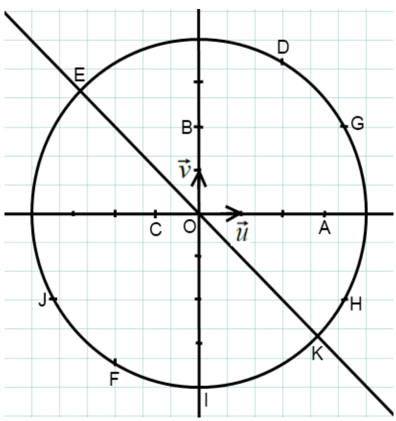
C) MODULES ET ARGUMENTS

Compétence 7 ***
Comment déterminer graphiquement le module d'un complexe z_M ?

Méthode
On utilise le fait que $|z_M|=OM$.

Pourquoi ?
Définition du cours : Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère un point M d'affixe z. Le module de z, noté $|z|$, est la distance OM.

Exemple
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, déterminer graphiquement le module des affixes des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et K.



Solution
On lit directement : $|z_A|=OA=3$,
$|z_B|=OB=2$, $|z_C|=OC=1$, $|z_D|=OD=4$
(c'est le rayon du cercle c de centre O et de rayon OD).
Les affixes des points restants, tous situés sur le cercle c, ont pour module 4.

Compétence 8 ***

Comment lire graphiquement un argument d'un complexe z_M ?

Méthode

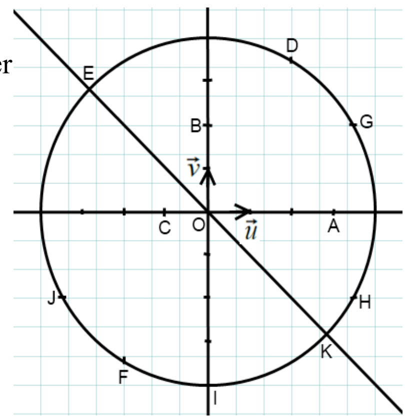
On lit $arg(z_M)=(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})[2\pi]$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ l'angle orienté formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$.

Pourquoi ?

Définition du cours : Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère un point M d'affixe z. On appelle argument de z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, déterminer graphiquement un argument des affixes des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et K.



Solution

On lit sur le graphique :

$arg(z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{OA})=0[2\pi]$;

$arg(z_B)=(\vec{u};\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$;

$arg(z_C)=(\vec{u};\overrightarrow{OC})=\pi[2\pi]$;

$arg(z_D)=(\vec{u};\overrightarrow{OD})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ (car son cosinus vaut $\frac{1}{2}$ et son sinus est positif) ; $arg(z_E)=(\vec{u};\overrightarrow{OE})=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ (car la droite divise l'angle droit en deux angles égaux) ; $arg(z_F)=(\vec{u};\overrightarrow{OF})=\frac{-2\pi}{3}[2\pi]$ (son cosinus vaut $\frac{-1}{2}$ et son sinus est négatif) ; $arg(z_G)=(\vec{u};\overrightarrow{OG})=\frac{\pi}{6}[2\pi]$ (son sinus vaut $\frac{1}{2}$, son cosinus est positif) ;

$arg(z_H)=(\vec{u};\overrightarrow{OH})=\frac{-\pi}{6}[2\pi]$; $arg(z_I)=(\vec{u};\overrightarrow{OI})=\frac{-\pi}{2}[2\pi]$;

$arg(z_J)=(\vec{u};\overrightarrow{OJ})=\frac{-5\pi}{6}[2\pi]$; $arg(z_K)=(\vec{u};\overrightarrow{OK})=\frac{-\pi}{4}[2\pi]$.

Compétence 9 ***

Comment déterminer le module d'un complexe donné sous sa forme algébrique $z=a+ib$?

Méthode

On applique la formule du cours : $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Pourquoi ?
- Propriété du cours : si $z = x + iy$ *alors* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- On a les propriétés suivantes sur les modules : $|zz'| = |z| \times |z'|$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $|z^n| = |z|^n$.

Exemple
Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :
a) $z_1 = -3+2i$; b) $z_2 = -6$; c) $z_3 = 9i$; d) $z_4 = (-1+i)(4-8i)$;
e) $z_5 = \frac{1+i}{6-5i}$; f) $z_6 = (\sqrt{7}+\sqrt{5}i)^4$.

Solution
a) $|z_1| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$.

b) $|z_2| = \sqrt{(-6)^2} = 6$.

c) $|z_3| = 9$.

d) Pour $|z_4|$, on applique la formule $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; on a donc
$|z_4| = |-1+i| \times |4-8i|$.
En procédant comme pour le calcul de $|z_1|$, on obtient :
$|z_4| = \sqrt{2} \times \sqrt{80} = 4\sqrt{10}$.

e) De même, pour calculer $|z_5|$, on utilise $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. On obtient ainsi
$|z_5| = \frac{|1+i|}{|6-5i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{61}}$.

f) Pour terminer, la relation $|z^n| = |z|^n$ permet de calculer $|z_6|$.
On a $|z_6| = |\sqrt{7}+\sqrt{5}i|^4 = \sqrt{12}^4 = 144$.

Compétence 10 ***
Comment déterminer un argument d'un complexe donné sous sa forme algébrique $z = a+ib$?

Méthode
- Si $z = a$ ou $z = ib$ on obtient $\arg(z)$ sans calcul (voir exemple).
- Si $z = a+ib$, on pose $arg(z) = \theta$ et $|z| = r$:
On calcule $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Puis $\cos\theta=\frac{a}{r}$ et $\sin\theta=\frac{b}{r}$.

On déduit la valeur de θ grâce aux résultats de trigonométrie.

Pourquoi ?

- Propriétés du cours.

- De plus : $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$, $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$ *et* $\arg(z^n)=n\arg(z)$ *(pour retenir facilement ces résultats, il suffit de se rappeler que arg opère exactement comme la fonction ln :* $\ln(aa')=\ln(a)+\ln(a')$ *...).*

Exemple

Déterminer un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=2$; $z_2=-8$; $z_3=7\mathrm{i}$; $z_4=-21\mathrm{i}$; $z_5=-1+\mathrm{i}$;

$z_6=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$; $z_7=(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{6})(1-\mathrm{i})$; $z_8=\frac{(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{6})}{(1-\mathrm{i})}$;

$z_9=(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{6})^7$; $z_{10}=(\sqrt{5}-\mathrm{i})(\sqrt{5}+\mathrm{i})$.

Solution

Pour z_1, z_2, z_3 et z_4, on détermine un argument sans calcul. En effet, le point d'affixe $z_1=2$, donc de coordonnées $(2;0)$, étant situés sur la partie positive de l'axe des abscisses, on en déduit, sans calcul et en utilisant la définition de l'argument, que

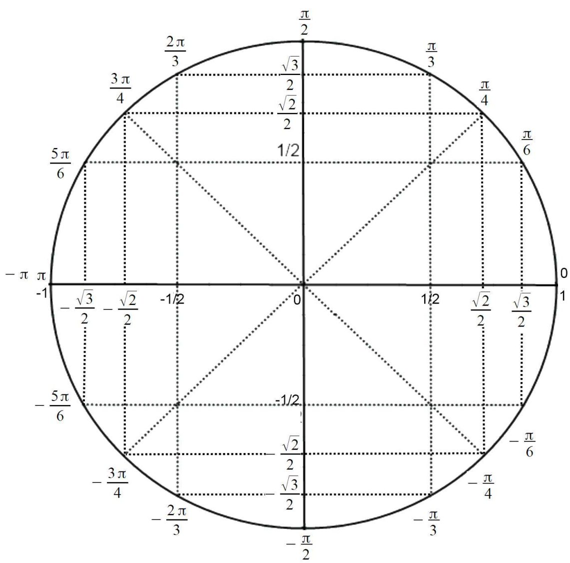
$arg(z_1)=0[2\pi]$.

Par le même procédé, on obtient :

$arg(z_2)=\pi[2\pi]$,

$arg(z_3)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et

$arg(z_4)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.



Par contre, pour le reste, il va falloir calculer. On utilisera le cercle trigonométrique (ci-contre) pour déterminer les angles.

- Posons $|z_5|=r$ et $arg(z_5)=\theta$.

On a r = $\sqrt{a^2+b^2}$ donc $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

D'autre part, $\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ (on a multiplié $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ par $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$).

Et $\sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

De $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, on déduit que $\theta=\frac{\pi}{4}$ ou $3\frac{\pi}{4}$ (voir cercle trigonométrique).

Mais comme $\cos\theta<0$, on choisit donc $\theta=3\frac{\pi}{4}$.

On conclut que $arg(z_5)=3\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

En procédant comme pour z_5 , on a : $|z_6|=r=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{-\sqrt{3}}{2})^2}=1$.

- Pour $\theta=arg(z_6)$, on a : $\cos\theta=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

De $\cos\theta=\frac{1}{2}$, on déduit que $\theta=\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{-\pi}{3}$ (voir cercle trigonométrique).

Mais $\sin\theta$ étant négatif, on conclut que $\theta=arg(z_6)=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

- Pour déterminer $arg(z_7)$ remarquons que $z_7=zz'$ où $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ et $z'=1-i$. Par suite, $arg(z_7)=arg(zz')=arg(z)+arg(z')$. Il suffit donc de déterminer $arg(z)$ et $arg(z')$.

On a $|z|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

D'autre part, $arg(z)=\theta$ est tel que : $\cos\theta=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

À l'aide du cercle trigonométrique, on déduit que $\theta=arg(z)=\frac{\pi}{3}$.

Après un calcul similaire, on trouve $arg(z')=-\frac{\pi}{4}$.

On obtient ainsi $arg(z_7)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

- Pour $arg(z_8)$, on remarque que $z_8=\frac{z}{z'}$ avec $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ et $z'=1-i$.

Comme $arg(z_8)=arg\left(\frac{z}{z'}\right)=arg(z)-arg(z')$, il suffit de calculer $arg(z)$ et $arg(z')$ pour obtenir $arg(z_8)$.

Or $arg(z)=\frac{\pi}{3}$ et $arg(z')=-\frac{\pi}{4}$ d'où $arg(z_8)=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\pi}{12}[2\pi]$.

- Pour z_9 , on a $z_9=z^7$ où $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$.

On en déduit que $arg(z_9)=arg(z^7)=7\,arg(z)=\frac{7\pi}{3}[2\pi]$.

La méthode utilisée pour $arg(z_7)$ ne marche pas pour z_{10} . Essayer pour voir (on trouve par exemple $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ qui n'est pas une valeur remarquable).

Ici, il suffit de développer l'expression de z_{10} . On obtient :

$z_{10}=(\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}+i)=5+1=6$; d'où $arg(z_{10})=0[2\pi]$.

Remarque : pour pouvoir déterminer θ, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ doivent prendre l'une des valeurs remarquables suivantes : 0, ± 1 , $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; sinon, soit il y a une erreur de calcul, soit il faut changer de méthode (sauf si l'énoncé demande explicitement une valeur approchée de l'angle θ ; dans ce cas, on trouve θ à la calculatrice).

Compétence 11 ***

Comment déterminer l'ensemble des points M(z) tels que $|z-z'|=k$ ou plus généralement $|...|=|...|$?

Méthode

- On se ramène dans tous les cas à $|z-z_A|=k$ ou $|z-z_A|=|z-z_B|$.
- Ce qui équivaut à $AM=k$ ou $AM=BM$.
- On conclut alors qu'on a un cercle dans le premier cas et une médiatrice dans le second.

Pourquoi ?

Propriété du cours : si les points A et B ont pour affixes z_A et z_B, alors $AB=|z_A-z_B|$.

Exemple

Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tels que :

a) $|z+3|=8$; b) $|z-5+2i|=1$; c) $|9iz+4-7i|=\sqrt{2}$;

d) $|z+6+5i|=|z-2i|$; e) $|\bar{z}-5+i|=9$.

Solution

a) $|z+3|=8 \Leftrightarrow |z-(-3)|=8 \Leftrightarrow |z_M-z_A|=8$ avec $z_A=-3$.

On a donc $|z+3|=8 \Leftrightarrow AM=8$.

Ainsi, l'ensemble des points M vérifiant $|z+3|=8$ est le cercle de centre $A(-3\ ;\ 0)$ et de rayon 8.

b) $|z-5+2i|=1 \Leftrightarrow |z-(5-2i)|=1 \Leftrightarrow |z_M-z_A|=1$ avec $z_A=5-2i$.

On a donc $|z-5+2i|=1 \Leftrightarrow AM=1$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 1.

c) $|9iz+4-7i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|9i\left(z+\frac{4-7i}{9i}\right)\right|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|9i\left(z+\frac{-4i+7}{9}\right)\right|=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow |9i|\times\left|z-\frac{-7+4i}{9}\right|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|z-\frac{-7+4i}{9}\right|=\frac{\sqrt{2}}{9}$$

On termine comme au a) et b) : les points M sont sur le cercle de centre $A\left(\frac{-7+4i}{9}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

d) Cette fois, on remarque que z est présent dans les deux membres de l'équation.
On a $|z+6+5i|=|z-2i| \Leftrightarrow |z-(-6-5i)|=|z-(2i)| \Leftrightarrow |z_M-z_A|=|z_M-z_B|$ où $z_A=-6-5i$ et $z_B=2i$.
On a donc $|z+6+5i|=|z-2i| \Leftrightarrow AM=BM$. Ce qui signifie que l'ensemble des points M vérifiant l'égalité est la médiatrice du segment [AB].

e) On a $|\overline{z}-5+i|=9 \Leftrightarrow |\overline{\overline{z}-5+i}|=9$ (on a utilisé le fait que $|Z|=|\overline{Z}|$)
$\Leftrightarrow |z-5-i|=9$.
On termine comme au a) ou b).
L'ensemble cherché est le cercle de centre $A(5+i)$ et de rayon 9.

Compétence 12 *
Comment déterminer l'ensemble des points M(z) tels que $arg(z-z_A)=\theta$?

Méthode
On utilise la définition de l'argument,
$arg(z_M)=(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OM})$, ou l'une des deux relations
$arg(z_B-z_A)=\arg(z_{\overrightarrow{AB}})=(\vec{u}\ ;\overrightarrow{AB})$,
$$arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_D}\right)=arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{DC}}}\right)=(\overrightarrow{DC}\ ;\overrightarrow{AB})[2\pi].$$

Pourquoi ?
Propriétés du cours.

Exemples
Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie :
a) $arg(z)=\frac{\pi}{2}[\pi]$; b) $arg(z+3i)=-\frac{\pi}{6}[2\pi]$;
c) $arg(z-5-i)=\frac{-\pi}{4}[\pi]$.

Solution
a) On a $arg(z)=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{2}[\pi]$.
On en déduit que l'ensemble des points M est l'axe des ordonnées privé du point O, origine du repère.
Remarque : on exclut le point O car M ne peut être remplacé par O. En effet, l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OO})$, angle formé par le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur nul, ne peut être défini.

b) On a $arg(z)=-\frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u};\overrightarrow{OM})=-\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

On en déduit que l'ensemble des points M cherché est la demi-droite (OA) privé du point O, où A est un point du plan complexe tel que $(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\frac{-\pi}{6}$.

c) On a $arg(z-5-i)=-\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow arg(z-(5+i))=-\frac{\pi}{4}[\pi]$.
Comme, d'après le cours, $arg(z_B-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AB})$, on a donc :
$arg(z-(5+i))=-\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow (\vec{u};\overrightarrow{CM})=-\frac{\pi}{4}[\pi]$, avec $z_C=5+i$.
On en déduit que l'ensemble cherché est la droite (CD) privé du point C, où D est un point du plan complexe vérifiant $(\vec{u};\overrightarrow{CD})=-\frac{\pi}{4}$.

D) FORMES ALGÉBRIQUE, TRIGONOMÉTRIQUE ET EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE

Compétence 13 ***
Comment passer de la forme algébrique $z=a+ib$ d'un complexe à sa forme trigonométrique ou exponentielle ?

Méthode

Chapitre 3 -

LES PRIMITIVES

Compétence 1 ***
Comment montrer qu'une fonction f est une primitive d'une autre fonction g sur un intervalle I ?

Méthode
On montre que pour tout $x \in I$, f est dérivable et que $f'(x)=g(x)$ (on calcule $f'(x)$ pour obtenir g(x)).

Pourquoi ?
Définition du cours : On appelle primitive d'une fonction f sur un intervalle I, toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple
Montrer, dans les quatre cas suivants, que la fonction f est une primitive de g :

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{2-x^2}$, $x \in [2\,;+\infty[$ et $g(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{(2-x^2)^2}$, $x \in [2\,;+\infty[$.

b) $f(x)=-\dfrac{4}{1-x}$, $x \in]-\infty\,;1[$ et $g(x)=-\dfrac{4}{(1-x)^2}$, $x \in]-\infty\,;1[$.

c) $f(x)=xe^{-x^2+3}$, $x \in \mathbb{R}$ et $g(x)=e^{-x^2+3}-2x^2\mathrm{e}^{-x^2+3}$, $x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x)=x\ln x-x$, $x\in]0\,;+\infty[$ et $g(x)=\ln x$, $x\in]0\,;+\infty[$.

Solution
a) f , fonction rationnelle définie sur $[2\,;+\infty[$, est dérivable sur cet intervalle.

De plus, pour tout $x \in [2\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2-x^2-(x-1)(-2x)}{2-x^2}$, ou encore $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{(2-x^2)^2}=g(x)$.

Comme $f'(x)=g(x)$ sur $[2\,;+\infty[$, on peut conclure que f est une primitive de g.

Attention : f n'est pas LA primitive de g mais UNE parmi une infinité. $h(x)=f(x)+2$ est aussi une primitive de g. Plus généralement, toutes les fonctions $f(x)+k$ sont des primitives de g.

b) La fonction f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et pour tout $x \in]-\infty ; 1[$

$f'(x) = -\dfrac{4}{(1-x)^2} = g(x)$.

On peut donc affirmer qu'une primitive de g est f.

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) = e^{-x^2+3} - 2xe^{-x^2+3} = g(x)$.

f est bien une primitive de g.

d) f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \ln x + \dfrac{x \times 1}{x} - 1 = \ln x = g(x)$.

La fonction g a donc pour primitive f.

Compétence 2 ***
Comment montrer qu'une fonction f admet une primitive sur I ?

Méthode
Il suffit de montrer que f est continue sur I.

Pourquoi ?
Théorème du cours : toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Compétence 3 ***
Comment déterminer une primitive d'une fonction f ?

Méthode 1 ***
On applique les résultats, regroupés dans le tableau qui suit, sur les primitives des fonctions de référence :

Fonction f définie sur un intervalle I	**Une primitive F de f sur I**	**L'intervalle I**
$f(x) = k$, k constante réelle	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n>0$; $\mathbb{R}^*$ si $n<-1$.
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0\,;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$F(x)=\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$

Pourquoi ?
-Tableau des primitives du cours.
- En dérivant les primitives F, on obtient bien f.

Exemple
Déterminer sur l'intervalle I, une primitive des fonctions suivantes :
a) $f(x)=-5+x-4x^2$, $I=\mathbb{R}$.
b) $g(x)=\dfrac{3x^3+5x^2-8x-9}{x^2}$, $I=\mathbb{R}^*$.
c) $h(x)=4x^5+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$, $]I=0\,;+\infty[$.
d) $m(x)=\dfrac{3}{8}\sin x$, $I=\mathbb{R}$.
e) $p(x)=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{5}{x^5}+2$, I=$\mathbb{R}$*.

Solution
a) La fonction f est une somme; il suffit donc de faire la somme des primitives de chaque terme. Ainsi, une primitive F de f sur I est :
$$F(x)=-5x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3 .$$

b) Attention : une primitive de $\dfrac{f}{g}$ n'est pas $\dfrac{F}{G}$.
Pour trouver une primitive de g , il suffit de simplifier son expression.
Pour tout $x\in I$, on a :
$$g(x)=\frac{3x^3+5x^2-8x-9}{x^2}=\frac{3x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{8x}{x^2}-\frac{9}{x^2}$$
$$=3x+5-\frac{8}{x}-\frac{9}{x^2}=3x+5-8\times\frac{1}{x}-9\times\frac{1}{x^2} .$$
Une primitive G de g sur I a donc pour expression :

$$G(x)=\frac{3}{2}x^2+5x-8\times\ln x-9\left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{3}{2}x^2+5x-8\ln x+\frac{9}{x},\ x\in I.$$

Remarques :
- on détermine de la même façon une primitive de fonctions s'écrivant sous la même forme que $g(x)=\frac{5x^3-x^2+4}{6}$.
- Si la dérivée de f se note f', une primitive de f n'a pas de notation fixée : on le note habituellement F mais toute autre lettre peut être employée s'il n'y a pas risque de confusion et si nécessaire.

c) Pour tout $x\in I$, $h(x)=4x^5+\frac{3}{\sqrt{x}}=4x^5+3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

h a donc pour primitive sur I, la fonction H :
$H(x)=\frac{4}{6}x^6+3(2\sqrt{x})=\frac{2}{3}x^6+6\sqrt{x}$, $x\in I$.

d) Une primitive M de m sur I est :
$M(x)=\frac{3}{8}(-\cos x)$ ou encore $M(x)=-\frac{3}{8}\cos x$, $x\in I$.

e) Pour tout $x\in I$, $p(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x^5}+2=x^{-3}-5(x^{-5})+2$.

On en déduit qu'une primitive P de p sur I est :
$$P(x)=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}-5\left(\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}\right)+2x$$
$$=\frac{1}{-2}x^{-2}-5\left(\frac{1}{-4}x^{-4}\right)+2x$$
$$=-\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{4x^4}+2x,\ x\in I.$$

Remarques :
- Pour retenir toutes les formules sur les primitives, la meilleure méthode consiste à les manipuler autant que possible. Connaître ces formules est indispensable.
- Une primitive de $f(x)=\sqrt{x}$ peut être obtenue en remarquant que $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ et en utilisant le résultat (hors programme) : $x\longmapsto x^{\alpha}$ a pour primitive $x\longmapsto\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$. Ce qui donne $F(x)=\frac{2}{3}\times x^{\frac{3}{2}}$.

Méthode 2 ***
- On reconnaît une forme usuelle.
- On "crée" u' (qui est en général incomplet).
- On applique le cours.

Le tableau suivant contient les principales formes usuelles à reconnaître pour trouver une primitive (u est une fonction dérivable sur un intervalle I) :

Fonction f définie sur un intervalle I	**Une primitive F de f sur I**	**Conditions**
$f = kg$	$F = kG$, avec G primitive de g	k constante réel
$f = u'u^n$, $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < -1$, il faut $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$.
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln u$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$.
$f = u'e^u$	$F = e^u$	
$f = u'\cos u$	$F = \sin u$	
$f = u'\sin u$	$F = -\cos u$	

Astuce : ce tableau se déduit directement de la précédente ; il suffit de remplacer dans la première colonne les x par u, puis de multiplier par . u'. Ainsi, x^n devient $u' \times u^n = u'u^n$, $\frac{1}{x} \rightarrow u' \times \frac{1}{u} = \frac{u'}{u}$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow u' \times \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{u'}{\sqrt{u}}$, $e^x \rightarrow u' \times e^u = u'e^u$ … Les réponses, elles, coïncident : $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ et $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$.
Ne surtout pas oublier u'.

Pourquoi ?
- Tableau des primitives du cours.
- En dérivant les primitives F, on obtient bien f.

Exemple
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :
a) $f(x) = (6x - 7)(3x^2 - 7x + 1)^3$, $I = \mathbb{R}$.
b) $g(x) = (x - 8)(x^2 - 16x - 5)^2$, $I = \mathbb{R}$; .
c) $h(x) = \sin x \cos^5 x$, I=$\mathbb{R}$.
d) $g(x) = (4x + 4)(x^2 + 2x - 6)$, I=$\mathbb{R}$.
e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $I =]0 ; +\infty[$ (classique à connaître).

f) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{(x^3 - 6x + 2)^5}$, $I = [3 ; +\infty[$.

g) $f(x) = \dfrac{5\cos 2x}{\sin^2(2x)}$, $I = \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

h) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{-x^2 + 5}}$, $I = [3 ; +\infty[$.

i) $g(x) = \dfrac{xe^{-2x^2-1}}{e^{-2x^2-1}}$, I=ℝ.

j) $h(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$, $I =]1 ; +\infty[$ (classique à connaître).

k) $f(x) = \dfrac{-8\cos(4x)}{\sin(4x)}$, $I = \left]0 ; \dfrac{\pi}{4}\right[$.

l) $g(x) = (-x + 1)e^{x^2 - 2x}$, I=ℝ.

m) $f(x) = \sin x \cos x$, I=ℝ (classique à connaître).

Solution

a) La puissance 3 et le produit de fonctions indiquent que la fonction f est de la forme $u'u^n$ où $u(x) = 3x^2 - 7x + 1$; et donc $u'(x) = 6x - 7$, x∈I.
On remarque que l'on a bien (ce qui n'est pas le cas en général)
$f(x) = u'(x)u^3(x)$
sur I.
Comme $f = u'u^3$, on en déduit qu'une primitive F de f sur I est :
$F = \dfrac{1}{4}u^4$ ou, plus précisément, $F(x) = \dfrac{1}{4}(3x^2 - 7x + 1)^4$, $x \in I$.

b) Ici aussi, la présence d'une puissance et d'un produit de fonctions font penser à la forme $u'u^n$ pour g avec $u(x) = (x^2 - 4x - 5)^2$; donc
$u'(x) = 2x - 4$, x∈I.
Cette fois, pas de chance, l'expression de g ne contient pas exactement u' : il va falloir faire apparaître u' dans g .
Pour x∈I, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - 8)(x^2 - x - 5)^2 \\ &= \frac{2}{2}(x - 8)(x^2 - 4x - 5)^2 \quad \text{(on peut sauter cette étape une fois que l'on a compris)} \\ &= \frac{1}{2}\times 2(x - 8)(x^2 - 4x - 5)^2 \\ &= \frac{1}{2}(2x - 16)(x^2 - 4x - 5)^2 \\ &= \frac{1}{2}u'(x)u^2(x) . \end{aligned}$$

De $g = \dfrac{1}{2}u'u^2$, on déduit qu'une primitive de g sur I est :

$G = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} u^3$; ce qui donne $G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(x^2 - 16x - 5)^3$ ou encore
$G(x) = \frac{1}{6}(x^2 - 16x - 5)^3$, $x \in I$.

c) Présence de puissance et de produit de fonctions : la fonction h est de la forme $u'u^n$ où $u(x) = \cos x$ et donc $u'(x) = -\sin x$, $x \in I$.
Créons u' dans l'expression de h ; pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin x \cos^5 x \\ &= -(-\sin x \cos^5 x) \\ &= -u'(x) u^5(x). \end{aligned}$$

$h = -u'u^5$. On peut conclure qu'une primitive H de h sur I est :
$H = -\frac{1}{6} u^6$; soit $H(x) = -\frac{1}{6} \cos^6 x$, $x \in I$.

d) g est un produit de fonctions; cela se voit aisément. Mais une puissance se cache dans son expression. En effet :
$g(x) = (12x^2 + 4)(2x^3 + 2x - 6)^1$, $x \in I$.
La fonction g est donc de la forme $u'u^n$, où $u(x) = 2x^3 + 2x - 6$ et donc $u'(x) = 6x^2 + 2$, $x \in I$.
Faisons apparaître u' dans g. Pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(6x^2 + 2)(2x^3 + 2x - 6)^1 \text{ (on a mis 2 en facteur pour créer u')} \\ &= 2u'(x) u^1(x). \end{aligned}$$

$g = 2u'u^1$; une primitive G de la fonction g sur I est donc :

$$G = 2 \times \frac{1}{2} u^2 \text{ soit } G(x) = u^2(x) = (2x^3 + 2x - 6)^2, \ x \in I.$$

Remarque : une autre méthode, fastidieuse et longue, consiste à développer et à réduire g, puis à trouver les primitives de chaque terme. Cette façon de procéder permet, néanmoins, de trouver une primitive de $f(x) = (x^2 - 3x + 4)^2$: u' ne pouvant être créée, f ne peut être mise sous la forme $u'u^n$).

e) Un cas classique à connaître.
A première vue, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est un quotient ; la seule forme qui conviendrait serait $\frac{u'}{u}$. Mais on constate que ce n'est pas la bonne (si $u(x) = x$ alors $u'(x) = 1 \neq \ln x$ ...).
L'astuce consiste à décomposer f : $f(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$, $x \in I$.
On constate que la fonction f est un produit de la forme $u'u = u'u^1$.
Une primitive F de f s'obtient donc directement :
$F = \frac{1}{2} u^2$; ou encore $F(x) = \frac{1}{2} u^2(x)$, soit $F(x) = \frac{1}{2} \ln^2(x)$, $x \in I$.

f) Pour x∈I, $h(x)=\dfrac{x^2-2}{(x^3-6x+2)^5}=(x^2-2)(x^3-6x+2)^{-5}$.

La fonction h est donc de la forme $u'u^n$, où $u(x)=x^3-6x+2$ et $u'(x)=3x^2-6$, x∈I.

Transformons $h(x)$ pour qu'elle contienne $u'(x)$:

pour x∈I, $h(x)=\dfrac{1}{3}\times 3(x^2-2)(x^3-6x+2)^{-5}$

$$=\frac{1}{3}(3x^2-6)(x^3-6x+2)^{-5}$$

$$=\frac{1}{3}u'(x)u^{-5}(x)\ .$$

$h=\dfrac{1}{3}u'u^{-5}$. On en déduit qu'une primitive H de h sur I est :

$H=\dfrac{1}{3}\times+\dfrac{1}{(-5+1)}u^{-5+1}$; soit

$$H(x)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{-4}(x^3-6x+2)^{-4}$$

$$=\frac{1}{-12(x^3-6x+2)^4}\ ,\ x\in I\ .$$

g) Ici, pour x∈I, $f(x)=\dfrac{5\cos(2\mathrm{x})}{\sin^2(2x)}=5\cos(2x)\times\sin^{-2}(2x)$.

La fonction f est donc de la forme $u'u^n$, où $u(x)=\sin(2x)$ et donc $u'(x)=2\cos(2x)$, x∈I.

Réécrivons $f(x)$ pour faire apparaître $u'(x)$:

pour x∈I, $f(x)=5\times\dfrac{1}{2}\times 2\cos(2x)\sin^{-2}(2x)$

$$=\frac{5}{2}\times u'(x)u^{-2}(x)\ .$$

$f=\dfrac{5}{2}u'u^{-2}$; ce qui permet de dire qu'une primitive de f sur I est la fonction F définie par : $F=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{(-2+1)}\times\sin^{(-2+1)}$; soit

$F(x)=-\dfrac{5}{2\sin(2x)}$, x∈I.

h) La forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ de g est évidente avec $u(x)=-x^2+5$ et $u'(x)=-2x$, pour x∈I.

Il suffit de faire apparaître -2 à côté de x au numérateur pour pouvoir appliquer le cours :

sur I, $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{-x^2+5}}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-2x}{\sqrt{-x^2+5}}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

$g = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

La fonction g a donc pour primitive sur I, la fonction G, définie par :

$G(x) = -\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{u(x)} \;=\; -\sqrt{-x^2+5}\,,\; x\in I$.

i) La fonction g est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, où $u(x) = e^{-2x^2-1}$ et donc

$u'(x) = -4xe^{-2x^2-1}$, x∈I.

Créons $u'(x)$ dans l'expression de g :

$$g(x) = \frac{xe^{-2x^2-1}}{\mathrm{e}^{-2x^2-1}}$$
$$= \frac{1}{-4}\times\frac{-4xe^{-2x^2-1}}{\mathrm{e}^{-2x^2-1}}$$
$$= -\frac{1}{4}\times\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

On en déduit G, une primitive de g sur I :

$G(x) = -\dfrac{1}{4}\ln\left(\mathrm{e}^{-2x^2-1}\right),\; x\in I$.

j) Un autre cas classique à connaître.

Réécrivons h .

Pour tout x∈I, $h(x) = \dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$.

Réécrit ainsi, la forme $\dfrac{u'}{u}$ de h devient évidente ; $u(x) = \ln x$ et

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$, x∈I.

Comme, pour x∈I, $h(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, on en déduit qu'une primitive H sur I de la fonction h est définie par :

$$H(x) = \ln(u(x))$$
$$= \ln(\ln(x)),\; x\in I.$$

Remarque : sur $I =]1\,;+\infty[$, on a $\ln x > 0$, donc $\ln(\ln x)$ est bien définie.

k) f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où $u(x) = \sin(4x)$ et donc $u'(x) = 4\cos(4x)$, x∈I.

Sur I, on a $f(x) = \dfrac{-8\cos(4x)}{\sin(4x)} = -2\times\dfrac{4\cos(4x)}{\sin(4x)} = -2\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

$f = -2\dfrac{u'}{u}$, d'où une primitive F sur I de f est donnée par :

$F = -2\ln u$, soit $F(x) = -2\ln(\sin(4x))$, $x \in I$.

Remarque : sur $I = \left]0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$, $\sin(4x) > 0$. Donc $\ln(\sin(4x))$ est bien définie.

l) La fonction g est de la forme $u' e^u$, où $u(x) = x^2 - 2x$ et donc $u'(x) = 2x - 2$, x∈I.

Pour x∈I, on a
$$\begin{aligned} g(x) &= (-x+1)e^{x^2-2x} \\ &= -\frac{1}{2}\times(-2)(-x+1)e^{x^2-2x} \\ &= -\frac{1}{2}(2x-2)e^{x^2-2x} \\ &= -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)} . \end{aligned}$$

Une primitive G sur I de la fonction g est donc :

$G(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2-2x}$, $x \in I$.

m) Soit $f(x) = \sin x \cos x$, définie sur ℝ.

Il faut voir que f est de la forme $u'u$ ou, plus précisément, $u'u^1$, avec $u(x) = \sin x$ et $u'(x) = \cos x$.

On en déduit qu'une primitive F de f sur ℝ est $F(x) = \frac{(\sin x)^2}{2}$.

Compétence 4 ***

Comment déterminer LES primitives d'une fonction f ?

Méthode

Chapitre 4 -

PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

A) LE PRODUIT SCALAIRE

Propriétés utiles : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs du plan ; $k \in \mathbb{R}$.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Compétence 1 ***

Comment calculer le produit scalaire de deux vecteurs ?

Méthode 1 * (**Angles)

Lorsque l'angle entre les deux vecteurs est connu, on pense à utiliser $\vec{u} . \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$.

Remarque : $\|\vec{u}\|$ désigne la longueur du vecteur $\vec{u}$.

Attention, si $\|\vec{AB}\| = \text{AB}$, on n'a pas $\|\vec{u}\| = u$.

Pourquoi ?

Définition du cours.

Exemple

Soit ABC un triangle tel que $AC = 4$, $BC = 6$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$.

Déterminer $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$.

Solution

On a $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = \vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \times CB \times \cos \widehat{ACB} = 4 \times 6 \times \cos \frac{\pi}{6}$

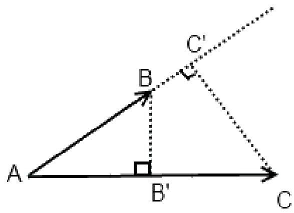
$= 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

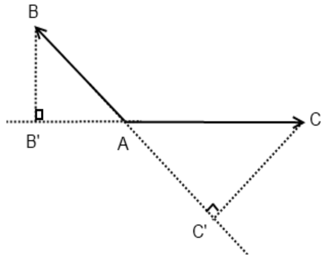
Méthode 2 *** (Projection orthogonale)

On applique le résultat du cours :

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB' \times AC = AB \times AC'$ (figure de gauche).

Et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB' \times AC = -AB \times AC'$ (figure de droite).

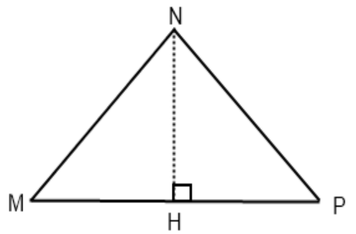




Pourquoi ?
-Propriété du cours.
- Schématiquement, on remplace l'un des deux vecteurs par son projeté orthogonal sur l'autre.
Ce qui donne $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC}$ *ou encore* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$ *(ne pas oublier cette possibilité).*
- Les résultats s'obtiennent en appliquant la méthode des angles à la deuxième partie de l'égalité.

Exemple
Soit MNP un triangle isocèle en N tel que MP=6.
Calculer $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$.

Solution
Pour commencer, réalisons une figure (ci-contre).
Soit H le projeté orthogonal de N sur la droite (MP). (NH) est donc la hauteur passant par N. Le triangle MNP étant isocèle en N, (NH) est aussi une médiane. Par conséquent, le point H est milieu de [MP] ; d'où $MH=3$.
Et $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MP}=MH\times MP=3\times6=18$.



Méthode 3 *** (Coordonnées)
Lorsque l'on se trouve dans un repère orthonormal et que les coordonnées de $\vec{u}(x~;~y~;~z)$ et $\vec{v}(x'~;y'~;z')$ sont connues, on applique la formule $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

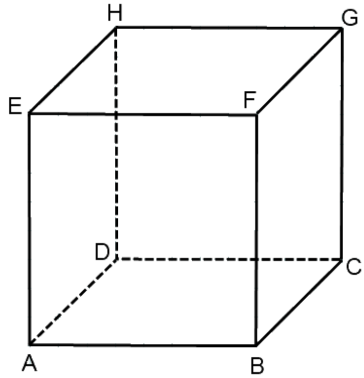
Pourquoi ?
Propriété du cours.

Exemple 1
Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit $E(-1~;1~;2)$, $F(3~;1~;-2)$ et $G(2~;-1~;-1)$.
Calculer $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{EF}$.

Solution
Déterminons les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{GF}(1~;2~;-1)$ et $\overrightarrow{EF}(4~;0~;-4)$.
Comme nous sommes dans un repère orthonormal, on a :

$\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{EF} = 1\times4 + 2\times0 - 1\times(-4) = 8$.

Exemple 2
Dans le cube ABCDEFGH ci-contre, d'arête 1cm, déterminer $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CE}$.



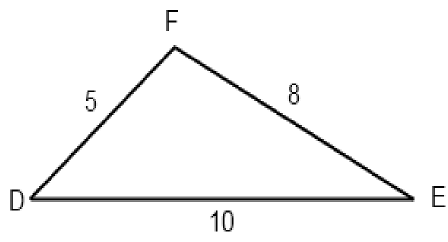
Solution
Comme ABCDEFGH est un cube, le repère $(D ; \overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DH})$ est orthonormal.
Dans ce repère, on peut lire les coordonnées des points intervenants dans le produit scalaire (voir compétence 17) : $D(0 ; 0 ; 0)$, $F(1 ; 1 ; 1)$, $C(0 ; 1 ; 0)$ et $E(1 ; 0 ; 1)$.
On a donc $\overrightarrow{DF}(1 ; 1 ; 1)$ et $\overrightarrow{CE}(1 ; -1 ; 1)$.
Pour terminer, $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CE} = 1\times1 + 1\times(-1) + 1\times1 = 1$.

Remarque : si l'arête du cube vaut a , dans ce cas on choisit le repère $\left(D ; \frac{1}{a}\overrightarrow{DA} ; \frac{1}{a}\overrightarrow{DC} ; \frac{1}{a}\overrightarrow{DH}\right)$; ce choix fait que la distance AB, par exemple, reste égale à a.
Sans les coefficients $\frac{1}{a}$, on aurait AB=1, ce qui est faux.

Méthode 4 *** (Normes)
Lorsque l'on connaît les mesures des trois côtés d'un triangle, on utilise le résultat : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.

Pourquoi ?
Propriété du cours qui vient du développement de $(\vec{u} - \vec{v})^2$.

Exemple
Dans le triangle EDF donné ci-contre, déterminer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$.



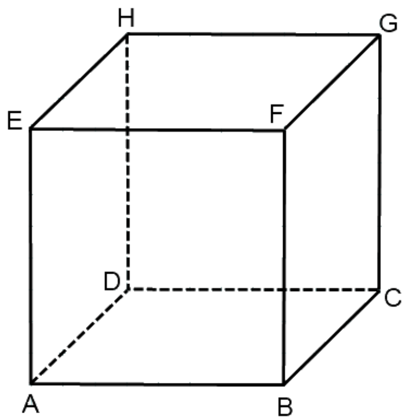
Solution
Ici, on ne connaît ni angle, ni coordonnées ; de plus, le projeté de E sur (DF) ou celui de F sur (DE) donne des longueurs inconnues.
On pense donc "la méthode des normes" :
On a $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{DE}\|^2 + \|\overrightarrow{DF}\|^2 - \|\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF}\|^2\right)$.
Comme $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FD}$ et $\|\overrightarrow{DE}\| = DE$), alors :

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\left(DE^2 + DF^2 - FE^2\right)$$
$$\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\left(10^2 + 5^2 - 8^2\right) = \frac{61}{2} .$$

Méthode 5 *** (Relation de Chasles)
Lorsque, dans un cube, un tétraèdre…, les vecteurs n'ont pas une même origine, on remplace un vecteur par un autre qui lui est égal ou on applique la relation de Chasles pour créer un "lien" entre les deux vecteurs.

Pourquoi ?
Propriétés du cours : $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MY}$ *et* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.

Exemple 1
Dans le cube ABCDEFGH ci-contre, d'arête a, déterminer :
a) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AF}$; b) $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{CE}$.



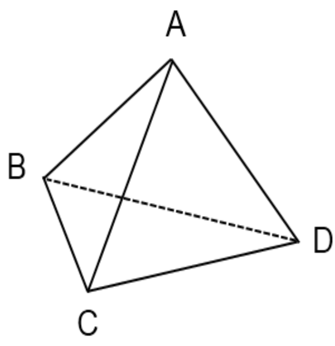
Solution
a) Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont "éloignés" mais on remarque que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$; donc $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = a^2$, par projection.

b) Les deux vecteurs n'ont pas une origine commune.
Essayons la relation de Chasles.
$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{CE} = \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}\right)$

$$= \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AE}$$
$$= 0 + a^2 + 0 - a^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + a^2$$
$$= a^2$$

Remarque : on décompose un vecteur suivant les arêtes du cube. Ainsi, dans certains cas, on aura juste besoin de décomposer un seul des deux vecteurs. On a, par exemple,
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}\right) = \ldots$

Exemple 2
Dans le tétraèdre régulier ABCD d'arête a, déterminer $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$.



Solution
On a $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right)$
$$= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$$
$$= CB \times CA \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - CB \times CD \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= a^2 \times \frac{1}{2} - a^2 \times \frac{1}{2} = 0 .$$

Remarque : on peut choisir de décomposer $\overrightarrow{BC}$ au lieu de $\overrightarrow{AD}$. Le résultat reste le même.

Exemple 3
On considère deux point A et D de l'espace et on désigne par I le milieu

du segment $[AD]$.
Démontrer que pour tout point M : $\vec{MD}.\vec{MA} = MI^2 - IA^2$.

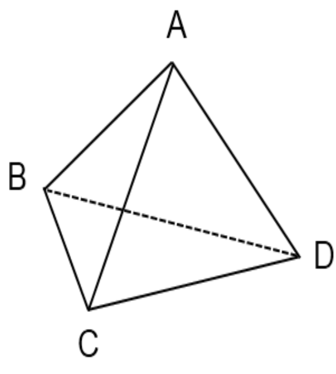
Solution
Soit M un point de l'espace.
On a $\vec{MD}.\vec{MA} = (\vec{MI}+\vec{ID}).(\vec{MI}+\vec{IA})$
$= \vec{MI}^2 + \vec{MI}.\vec{IA} + \vec{ID}.\vec{MI} + \vec{ID}.\vec{IA}$.
I milieu de $[AD]$, donc $\vec{ID} = -\vec{IA}$.
On a donc $\vec{MD}.\vec{MA} = MI^2 + \vec{MI}.\vec{IA} - \vec{IA}.\vec{MI} - \vec{IA}.\vec{IA}$
$= MI^2 - IA^2$

Compétence 2 ***
Comment montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ?

Méthode 1 ***
On montre que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ en calculant $\vec{u}\cdot\vec{v}$ à l'aide de l'une des 5 méthodes de calcul du produit scalaire.

Pourquoi ?
Définition du cours : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Exemple
Soit ABCD un tétraèdre régulier de côté a
(figure ci-contre).
Montrer que les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ sont orthogonaux.



Solution
Montrons, grâce à la relation de Chasles, que
$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = 0$.
On a $\vec{AC}\cdot\vec{BD} = (\vec{AD} + \vec{DC})\cdot\vec{BD}$
$= \vec{AD}\cdot\vec{BD} + \vec{DC}\cdot\vec{BD}$
$= \vec{DA}\cdot\vec{DB} - \vec{DC}\cdot\vec{DB}$
Le tétraèdre étant régulier, les triangles ADC et ABC sont équilatéraux. Donc
$\vec{DA}.\vec{DB} = \frac{1}{2}a^2$ et $\vec{DC}\cdot\vec{DB} = \frac{1}{2}a^2$.
On en déduit que $\vec{AC}\cdot\vec{BD} = 0$.
Les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ sont donc orthogonaux.

Remarque : pour calculer un produit scalaire, il faut, si possible, faire en sorte que les deux vecteurs commencent par le même point : cela facilite la lecture de l'angle mais aussi les projections orthogonaux. Exemple : $\vec{MN}\cdot\vec{NP} = -\vec{NM}\cdot\vec{NP}$.

Méthode 2 *
On montre qu'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites orthogonaux de l'espace ou des vecteurs normaux de deux plans perpendiculaires.

Pourquoi ?
Propriété du cours : deux plans P_1 de vecteur normal $\vec{n_1}$ et P_2 de vecteur normal $\vec{n_2}$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux.

B) APPLICATION DU PRODUIT SCALAIRE : équation cartésienne d'un plan - vecteur normal à un plan

Compétence 3 ***
Comment déterminer une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$?

Méthode 1 ***
- On détermine un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ au plan $\mathscr{P}$ et un point A lui appartenant et dont les coordonnées sont connues.
Une équation partielle de $\mathscr{P}$ est alors : $ax+by+cz+d=0$.
- Le nombre d s'obtient en remplaçant x, y et z par les coordonnées de A.

Pourquoi ?
Théorème du cours : dans un repère orthonormal, un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a\;;\;b\;;\;c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$.
Réciproquement, l'ensemble des points $M(x\;;\;y\;;\;z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\;;\;b\;;\;c)$.

Exemple 1
Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit $A(1\;;-2\;;2)$ et $\vec{n}(3\;;-1\;;1)$ un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$.
Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

Solution
Comme $\vec{n}(3\;;-1\;;1)$ un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{P}$ a pour équation partielle $3x-y+z+d=0$ où d est un réel à déterminer.
On sait que A∈$\mathscr{P}$; ses coordonnées vérifient donc l'équation de $\mathscr{P}$,
soit $3x_A-y_A+z_A+d=0$ ou $3\times1-(-2)+2+d=0$, ce qui donne $d=-7$.
Le plan $\mathscr{P}$ a donc pour équation : $3x-y+z-7=0$.

Exemple 2
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2\ ;4\ ;-1)$ et $B(1\ ;-1\ ;5)$. Déterminer une équation cartésienne du plan p, plan médiateur du segment $[AB]$.

Solution
Pour déterminer une équation de $\mathscr{P}$, trouvons un de ses points et un vecteur qui lui est normal.
Par définition, $\mathscr{P}$ est le plan médiateur de $[AB]$ signifie que le plan $\mathscr{P}$ passe par le milieu de $[AB]$ et que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
Le milieu I de $[AB]$ est donc un point de $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
Comme on a $I\left(\frac{3}{2}\ ;\frac{3}{2}\ ;2\right)$ et $\overrightarrow{AB}(-1\ ;-5\ ;6)$, une équation partielle de $\mathscr{P}$ est : $-x-5y+6z+d=0$.
$A\in\mathscr{P}\Leftrightarrow -\frac{3}{2}-5\left(\frac{3}{2}\right)+6\times2+d=0 \Leftrightarrow d=-3$.
Le plan $\mathscr{P}$ a donc pour équation : $-x-5y+6z-3=0$.

Méthode 2 ** (exigible par votre professeur)
- On détermine un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ au plan $\mathscr{P}$ et un point A lui appartenant dont on connaît les coordonnées.
- On considère un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du plan $\mathscr{P}$.
$M\in\mathscr{P}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.
- Le calcul de $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ aboutit à une équation de $\mathscr{P}$.

Pourquoi ?
Théorème du cours : soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$, et A un point de $\mathscr{P}$.
Le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Exemple
Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit $A(1\ ;-2\ ;2)$ et $\vec{n}(3\ ;-1\ ;1)$ un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$.
Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

Solution
Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point du plan p.
$M\in\mathscr{P}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\vec{0}$.
Comme $\overrightarrow{AM}(x-1\ ;y+2\ ;z-2)$, on a :
$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\vec{0} \Leftrightarrow 3(x-1)-(y+2)+(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-y+z-7=0$.
Une équation du plan $\mathscr{P}$ est donc : $3x-y+z-7=0$.

Compétence 4 ***
Comment montrer qu'un vecteur $\vec{u}$ est normal à un plan $\mathscr{P}$?

Méthode 1 ***

Si l'on connaît une équation du plan p de la forme $ax + by + cz + d = 0$, alors on montre que $\vec{u}$ et $\vec{n}(a\ ;b\ ;c)$, un vecteur normal à $\mathscr{P}$, sont colinéaires.

Pourquoi ?

Chapitre 5 -

LOI NORMALE, ÉCHANTILLONNAGE ET ESTIMATION

A) LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE $\mathcal{N}$ (0 ; 1)

Compétence 1 ***
Comment calculer $p(a \leqslant Z \leqslant b)$ lorsque la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$?

Méthode 1 ***
A la calculatrice (consulter si nécessaire la notice d'utilisation) :
- Casio (à partir de graph 35+) : aller dans STAT+DIST+NORM+Ncd.
Rentrer la valeur de a pour lower, b pour upper, 0 pour μ puis 1 pour μ.
- TI : aller dans DIST + normalcdf(a,b) ou normalFRep(a,b).

Remarque : μ est l'espérance de X et μ son écart-type.

Pourquoi ?

- Par définition, $p(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \, dx$.

Mais on ne sait pas calculer cette intégrale à l'aide de primitives. Il faut donc, entre autres possibilités, utiliser une calculatrice.

Exemple
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Calculer $p(-4 < Z < 1)$ et $p(3 \leqslant Z < 11)$ à 10^{-3} près.

Solution
La calculatrice donne directement :
$p(-4 < Z < 5) \approx 0{,}841$ et $p(3 \leqslant Z < 11) \approx 0.001$

Remarque : $p(a < Z < b) = p(a \leqslant Z < b) = p(a \leqslant Z \leqslant b) = p(a < z \leqslant b)$.
Cela vient de, par exemple, $p(a \leqslant Z \leqslant b) = p((a < Z < b) ou (Z = a) ou (Z = b))$
$= p(a < Z < b) + p(Z = a) + p(Z = b)$
$= p(a < Z < b)$ car $p(Z = \alpha) = 0 \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Méthode 2 ***
- On a $p(a \leqslant X \leqslant b) = p(X \leqslant b) - p(X \leqslant a)$.
- Connaissant les valeur de $p(X \leqslant b)$ et $p(X \leqslant a)$, en général fournies dans les sujets de bac, on déduit la valeur de $p(a \leqslant X \leqslant b)$.

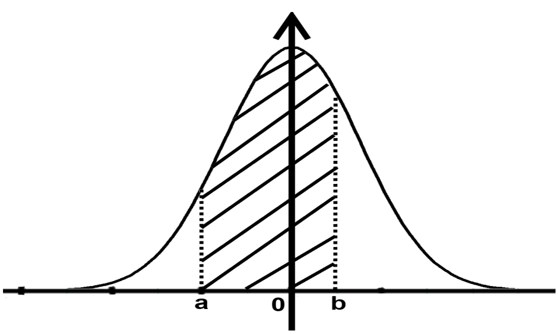
Pourquoi ?
Voir le "Pourquoi ?" de la compétence suivante (courbe).

Exemple
Voir exemple de la compétence 9.

Compétence 2 ***
Comment calculer $p(Z = a)$, $p(Z \leqslant a)$, $p(Z \geqslant b)$, $p(|Z| \leqslant a)$ lorsque la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}$ (0;1) ?

Méthode
- $P(Z = a) = 0 \quad \forall$ a∈ℝ.
- Pour un nombre positif a, on a :
$p(Z \leqslant a) = \dfrac{1}{2} + p(0 \leqslant Z \leqslant a)$ et $p(Z \leqslant -a) = p(Z \geqslant a)$.
- Pour un nombre positif a, on a :
$p(Z \geqslant a) = \dfrac{1}{2} - p(0 \leqslant Z \leqslant a)$ et $p(Z \geqslant -a) = p(Z \leqslant a)$.
- $p(|Z| \leqslant a) = p(-a \leqslant Z \leqslant a)$.

Pourquoi ?
- On a $P(Z = a) = 0$ car $(Z = a) \Leftrightarrow (a \leqslant Z \leqslant a)$ donc
$p(Z=a) = p(a \leqslant Z \leqslant a) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = p(a \leqslant Z \leqslant a) = 0$ *où f est la fonction densité de la loi normale centrée réduite.*
- Les autres résultats découlent du fait que l'axe des ordonnées est axe de symétrie à la courbe de la fonction densité f, la surface totale sous la courbe est égale à 1, les deux surfaces de part et d'autre de l'axe de symétrie, l'axe des ordonnées) valent chacune $\frac{1}{2}$ et que les différentes probabilités ne sont que des aires.



Connaître ces formules est indispensable mais les apprendre par cœur est une pure perte de temps. Il est plus efficace de les comprendre graphiquement.

Exemples
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Calculer, à 10^{-4} près :
a) $p(X < 1{,}5)$;
b) $p(X \leqslant -2)$;
c) $p(X \geqslant 0{,}8)$;
d) $p(X > -2{,}5)$;
e) $p(|X| < 1{,}7)$;
f) $p((X < -2) \cup (X > 4))$;
g) $p((X < 1{,}1) \cup (X > -1))$;
h) $p((X > 5) \cup (X > -2))$;
i) $p((X < -2) \cap (X > 4))$;
j) $p((X < 1{,}1) \cap (X > -1))$;
k) $p((X > 3) \cap (X > -2))$;
l) $p_{(X \leqslant 2{,}6)}(X > 0{,}4)$.

Solutions

a) on a $p(X < 1{,}5) = \dfrac{1}{2} + p(0 < X < 1{,}5) \approx 0{,}9332.$

b) $p(X \leqslant -2) = p(X \geqslant 2) = \dfrac{1}{2} - p(0 < X < 2) \approx 0{,}0228.$

c) $p(X \geqslant 0{,}8) = \dfrac{1}{2} - p(0 < X < 0{,}8) \approx 0{,}2119.$

d) $p(X > -2{,}5) = p(X < 2{,}5) = \dfrac{1}{2} + p(0 < X < 2{,}5) \approx 0{,}9938.$

e) $p(|X| < 1{,}7) = p(-1{,}7 < X < 1{,}7) \approx 0{,}9109.$

f) Comme $(X < -2) \cap (X > 4) = \varnothing$, on a :
$$p((X < -2) \cup (X > 4)) = p(X < -2) + p(X > 4) \approx 0{,}0228.$$
(on a utilisé la bonne vieille formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ...).

g) On a $(X < 1{,}1) \cup (X > -1) =]-\infty;+\infty[$.
Donc $p((X < 1{,}1) \cup (X > -1)) = 1$.

h) Comme $(X > 5) \cup (X > -2) = (X > -2)$ alors
$p((X > 5) \cup (X > -2)) = p(X > -2) = ... \approx 0{,}9772.$

i) $p((X < -2) \cap (X > 4)) = 0$ car $(X < -2) \cap (X > 4) = \varnothing$.

j) $(X < 1{,}1) \cap (X > -1) = (-1 < X < 1{,}1)$ donc
$p((X < 1{,}1) \cap (X > -1)) = p(-1 < X < 1{,}1) \approx 0{,}8413$.

k) On a $(X > 3) \cap (X > -2) = (X > 3)$. D'où
$p((X > 3) \cap (X > -2)) = p(X > 3) \approx 0{,}0013$.

l) Appliquons la formule $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$:

$$p_{(X \leqslant 2{,}6)}(X > 0{,}4) = \frac{p((X \leqslant 2{,}6) \cap (X > 0{,}4))}{p(X \leqslant 2{,}6)}$$
$$= \frac{p(0.4 < X \leqslant 2{,}6)}{p(X \leqslant 2{,}6)}$$
$$\approx \frac{0{,}344578}{0{,}995338}$$
$$\approx 0{,}3462.$$

Compétence 3 ***
Étant donné un réel $p \in \,]0\,;\,1[$, comment déterminer le réel x tel que $p(Z \leqslant x) = p$, où Z est la variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$?

Méthode
On résout cette équation grâce à la calculatrice qui donne directement la valeur de x.
- Casio : STAT+DIST+NORM+InvNormCD(p).
- TI : DIST+FracNormal(p).

Pourquoi ?
Un nombre $p \in [0\,;\,1]$ étant donné, il s'agit de trouver le réel x tel que l'aire sous la courbe de la fonction densité f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,x]$ soit égale à p. Ce que permet de faire la calculatrice.

Exemples
La variable aléatoire Z suit la loi centrée réduite.
Calculer (à 10^{-3} près) les valeurs de x :
a) $p(Z < x) = 0{,}0785$;
b) $p(Z \leqslant x) = 0{,}9602$;
c) $p(Z > x) = 0{,}4631$;
d) $p(-x < Z < x) = 0{,}1195$.

Solution
a) La calculatrice donne directement $x \approx -1.415$.

b) On obtient à la calculatrice $x \approx 1.753$.

c) La calculatrice ne donnant la valeur de x que lorsque l'équation est sous la forme $p(Z \leqslant x) = p$, ramenons-nous à ce cas :
$p(Z > x) = p(Z < -x)$ pour tout réel x. Donc $p(Z > x) = 0{,}4631$ équivaut à $p(Z < -x) = 0{,}4631$. La calculatrice donne $-x \approx -0{,}093$.
On en déduit que $x \approx 0{,}093$.

d) Comme précédemment, ramenons-nous à la forme $p(Z \leqslant x) = p$:
on a $p(-x < Z < x) = 1 - p(Z < -x) - p(Z > x)$ pour x réel (l'aire totale moins les deux "bouts").
Donc $p(-x < Z < x) = 1 - p(Z < -x) - p(Z < -x)$
$= 1 - 2p(Z < -x)$.
On a donc, $p(-x < Z < x) = 0{,}1195$ équivaut tour à tour à
$1 - 2p(Z < -x) = 0{,}1195$ puis $p(Z < -x) = \dfrac{1 - 0{,}1195}{2}$ et enfin
$p(Z < -x) = 0{,}44025$.
À la calculatrice, on obtient $-x \approx -0{,}150$, soit $x \approx 0{,}150$.

Remarque : certaines calculatrices récentes permettent de résoudre directement les équations du type $p(Z \geqslant x)$ et $p(-x < Z < x)$ (consulter la notice d'utilisation).

B) LOI NORMALE $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$

Compétence 4 ***
Comment calculer $p(a < X < b)$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$?

Méthode 1 ***

Chapitre 6 - ARITHMÉTIQUE

De tous les chapitres, l'arithmétique est celui qui possède le plus de caractéristiques des maths du supérieur : clarté, rigueur, élégance, concision, niveau d'abstraction assez élevé. Sa maîtrise requiert donc pas mal d'entraînement.
Les compétences qui suivent doivent être maîtrisées. Mais cela ne représente que la moitié du chemin.
Il faudra en plus retravailler les différentes démonstrations du cours pour s'imprégner du mode de raisonnement en arithmétique, faire suffisamment d'exercices variés et, malgré leurs énoncés parfois effrayantes, se frotter à plusieurs sujets de type bac.

A) DIVISION EUCLIDIENNE / DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

Propriétés utiles en exercice : a, b et c sont trois entiers relatifs non nuls.
- Si c divise b et b divise a, alors c divise a.
- Si a divise b et b divise a, alors a et b sont égaux ou opposés.
- Si c divise et b, alors, pour tous entiers u et v, c divise ua+vb (appelé combinaison linéaire de a et b).

Compétence 1 ***
Comment déterminer le reste de la division euclidienne de a par b, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$?

Méthode
- On met l'entier a sous la forme $a = qb + r$, avec impérativement $0 \leqslant r < |b|$.
- L'entier positif r est alors le reste cherché.

Pourquoi ?
Théorème du cours : Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple d'entiers relatifs $(q\,;\,r)$ tels que : $a = bq + r$ ET $0 \leqslant r < |b|$.
q est appelé quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b.

Exemple 1
Déterminer le reste de la division euclidienne de a par b dans les cas suivants :
1) $a = 51$ et $b = 13$;
2) $a = -145$ et $b = 31$;
3) $a = -576$ et $b = -138$.

Solution

1) On a $51 = 13\times3 + 12$. Comme $0\leqslant 12 < 13$, le reste demandé est 12.

2) On a $-145 = 31\times(-4) + 21$. $0\leqslant 21 < 31$, donc le reste de la division euclidienne de -145 par 31 est 21.

3) On a $-576 = -138\times5 + 114$.
$0\leqslant 114 < |-138|$ soit $0\leqslant 114 < 138$. Le reste de la division euclidienne de -576 par -138 est donc 114.
Attention : on a aussi $-576 = -138\times4 - 24$. Mais -24, entier négatif, ne peut, par définition de la division euclidienne, être un reste. D'où la solution proposée.

Exemple 2
Soit $m = 42n + 193$ où $m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$.
a) Déterminer le reste de la division euclidienne de m par 42.
b) Déterminer le reste de la division euclidienne de m par 7.

Solution

a) On remarque que $193 > 42$. 193 ne peut donc pas être le reste de la division euclidienne de m par 42.
Mettons m sous la forme $m = nq + r$ où $0\leqslant r < 42$.
On a $m = 42n + 193$; or $193 = 4\times42 + 25$.
Donc $m = 42n + 4\times42 + 25$
Soit $m = 42(n+4) + 25$.
Le reste cherché est 25 car $0\leqslant 25 < 42$.

b) Écrivons m sous la forme $m = 7q + r$ où $0\leqslant r < 6$.
On a $m = 42n + 193$; comme $42 = 7\times6$ et $193 = 7\times27 + 4$, on a

$$m = 7\times6n + 7\times27 + 4$$
$$m = 7(6n + 27) + 4.$$

m est sous la forme $m = 7q + 4$ avec $0\leqslant 4 < 7$.
On en déduit que le reste de la division euclidienne de m par 7 est 4.

Exemple 3
Déterminer le reste de la division euclidienne de $5n + 19$ par $n + 3$, où $n\in\mathbb{N}$.

Solution

On a $5n + 19 = 5(n+3) + 4$.
- Si $0\leqslant 4 < n + 3$, ce qui est équivalent à $n > 1$, alors 4 est le reste cherché.
-Si $n = 1$, alors $5n + 19 = 24$ et $n + 3 = 4$. Or $24 = 4\times6 + 0$.
Le reste est donc 0.
-Si $n = 0$, $5n + 19 = 19$ et $n + 3 = 3$.
De l'égalité $19 = 3\times6 + 1$ et du fait que $1 < 3$, on déduit que le reste est 1.

Exemple 4
Montrer que tout entier naturel n s'écrit sous la forme 5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3 ou 5k+4 avec $k \in \mathbb{N}$.

Solution
Effectuons la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ de n par 5. On obtient :
$n = 5k + r$ avec $0 \leqslant r < 5$ et $k \in \mathbb{N}$.
Les différentes valeurs possibles pour le reste r sont donc : 0, 1, 2, 3 ou 4.
Par conséquent, suivant les valeurs de r, celles de l'entier n peuvent être :

- $n = 5k$ si $r = 0$;
- $n = 5k + 1$ si $r = 1$;
- $n = 5k + 2$ si $r = 2$;
- $n = 5k + 3$ si $r = 3$;
- et enfin, $n = 5k + 4$, si $r = 4$.

Remarque : on montre, en procédant de la même façon, que tout entier naturel n s'écrit 2k ou 2k+1 ou encore 3k, 3k+1 ou 3k+2 ou encore 4k, 4k+1, 4k+2 ou 4k+3 etc …

Compétence 2 ***
Comment montrer qu'un entier naturel r est le reste de la division euclidienne de a par b ?

Méthode
On montre que $a = qb + r$ ET que $0 \leqslant r < b$, $q \in \mathbb{Z}$.

Pourquoi ?
Définition-Théorème du cours : Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple d'entiers relatifs $(q\,;\,r)$ tels que : $a = bq + r$ ET $0 \leqslant r < |b|$.
q est appelé quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b.

Exemple
Vrai ou faux ?
a) Si $m = 3n + 11$, alors 11 est le reste de la division euclidienne de m par 3.
b) Si $a = 11b + 3$, alors 3 est le reste de la division euclidienne de a par b.
c) Si $c = 11d + 3$, alors 3 est le reste de la division euclidienne de c par 11.
d) Si $a = 7b - 4$, alors -4 est le reste de la division euclidienne de a par 7.

Solution
a) L'égalité $m = 3n + 11$ est sous la bonne forme $(a = bq + r)$. Mais, comme on n'a pas $11 < 3$, la proposition est fausse.

b) Ici aussi, la forme est bonne. Ne connaissant pas b, la condition $3 < b$ n'est pas nécessairement vraie (on peut bien avoir $b = 2$). Donc faux.

c) On a $c = 11d + 3$. Comme $0 \leqslant 3 < 11$, on peut affirmer que 3 est le reste de la division euclidienne de c par 11. Donc proposition vraie.

d) On a la forme $a = bq + r$. De plus $-4 < 7$. Mais, attention, on n'a pas $0 \leqslant -4$.
La condition $0 \leqslant r$ n'étant pas remplie, le nombre -4 ne peut être le reste.

Compétence 3 ***
Comment montrer que b divise a, avec a $\in \mathbb{Z}$ et b$\in \mathbb{Z}^*$? (ou que b est un diviseur de a ou encore que a est un multiple de b)

Méthode 1 ***
On montre que $a = kb$ où k est un entier relatif.

Pourquoi ?
Définition du cours : soit a et b $\in \mathbb{Z}^*$. On dit que b divise a s'il existe k $\in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$.

Exemples
1) Démontrer que 17 divise 323.
2) Démontrer que $n - 1$ divise $7n^2 - 5n - 2$, $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq 1$.
3) Démontrer que $2n + 3$ divise $12n^2 + 16n - 3$, $n \in \mathbb{Z}$.
4) Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $\dfrac{5n + 7}{n + 2}$ soit un entier relatif.
5) Montrer que 9 divise $4^n - 1 - 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6) Montrer que 7 ne divise pas $3 \times 7^{1984} + 2$.

Solutions
1) On a $323 = 19 \times 17$. 323 est donc divisible par 17.

2) Montrons que $7n^2 - 5n - 2 = K(n - 1)$ où K$\in \mathbb{Z}$.
K Ne peut être que de la forme $(an + b)$ avec a et b deux entiers relatifs.
Déterminons donc a et b tels que :

$$\begin{aligned} 7n^2 - 5n - 2 &= (an + b)(n - 1) \text{ soit} \\ &= an^2 - an + bn - b \\ &= an^2 + (-a + b)n - b . \end{aligned}$$

Par identification des deux membres (en comparant les coefficients de n^2 , n et la constante réelle de part et d'autre de l'égalité) , on obtient :

$$\begin{cases} a = 7 \\ -a + b = -5 \\ -b = -2 \end{cases}$$ soit $a = 7$ et $b = 2$.

On a donc $7n^2 - 5n - 2 = (n-1)(7n+2)$.

Comme $7n + 2 \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut affirmer que $n - 1$ divise $7n^2 - 5n - 2$.

3) En procédant comme au b), on aboutit à :
$12n^2 + 16n - 3 = (2n+3)(6n-1)$.
$6n - 1 \in \mathbb{Z}$, donc $2n + 3$ divise $12n^2 + 16n - 3$.

4) La fraction $\frac{5n+7}{n+2}$ est entier relatif signifie que $n + 2$ divise $5n + 7$ (on a par exemple $\frac{18}{3}$ qui est un entier mais pas $\frac{18}{4}$).
Déterminons donc tous les entiers relatifs tels que $n + 2$ divise $5n + 7$.
Si le nombre $n + 2$ divise $5n + 7$, comme il divise aussi $n + 2$, alors il divise toute combinaison linéaire de $5n + 7$ et $n + 2$.
$n + 2$ divise donc $1 \times (5n+1) - 5(n+2) = -3$.
Les diviseurs de -3 sont : -3, -1, 1 et 3.
On a donc $n + 2 = -3$ ou $n + 2 = -1$ ou $n + 2 = 1$ ou $n + 2 = 3$ soit $n = -5$ ou $n = -3$ ou $n = -1$ ou $n = 1$.
Réciproquement, si $n = -5$, $n + 2 = -3$ divise $5n + 3 = -18$. De même pour $n = -3$, $n = -1$ et $n = 1$.
Les valeurs cherchées de n sont donc -3, -1, 1 et 3.

5) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, " 9 divise $4^n - 1 - 3n$ ".
Pour cela, on utilise une démonstration par récurrence :
- lorsque $n = 0$, $4^n - 1 - 3n = 4^0 - 1 - 3 \times 0 = 0$ et 9 divise 0 (en effet, $0 = 0 \times 9$).
La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que 9 divise $4^k - 1 - 3k$. Montrons que 9 divise alors $4^{k+1} - 1 - 3(k+1)$.
On a $4^{k+1} - 1 - 3(k+1) = 4 \times 4^k - 1 - 3k - 3$

$$= 4 \times 4^k - 3k - 4$$
$$= 4 \times 4^k - 4 - 12k + 9k$$ (on s'est arrangé pour pouvoir factoriser par 4 afin de faire apparaître $4^k - 1 - 3k$).

On a donc $4^{k+1} - 1 - 3(k+1) = 4(4^k - 1 - 3k) + 9k$.
Or par hypothèse, 9 divise $4^k - 1 - 3k$. Mais comme 9 divise aussi $9k$, on en déduit que 9 divise $4^{k+1} - 1 - 3(k+1)$.

- La proposition étant vraie pour 0 et héréditaire, on peut conclure, grâce au principe de récurrence, qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) On a $3\times7^{1984}+2=3\times7\times7^{1983}+2=7(3\times7^{1983})+2$.
Comme $0\leqslant 2<7$, le reste de la division euclidienne de $3\times7^{1984}+2$ par 7 est 2. Ce reste étant non nul, on peut affirmer que 7 ne divise pas $3\times7^{1984}+2$.

Méthode 2 ***
On montre que $a\equiv 0[b]$.

Pourquoi ?
Définition de la congruence.

Exemple (voir compétence 19)

Compétence 4 ***
Comment montrer que si d divise a et b alors d divise c ?

Méthode
On écrit c comme combinaison linéaire de a et b, c'est-à-dire $c=\alpha a+\beta b$ où α et β sont deux entiers relatifs et on conclut que d divise c.

Pourquoi ?
Propriété du cours : soit a, b et d $\in \mathbb{Z}^*$. Si d divise a et b alors, pour tous entiers relatifs u et v, d divise $ua+vb$.

Exemples
1) Soit d et n deux entiers naturels.
Montrer que si d divise $5n-1$ et d divise $3n+2$, alors d divise 13.
2) n étant un entier relatif, démontrer que si $n+1$ divise $5n-4$, alors $n+1$ divise 9.
3) Pour $n \in \mathbb{Z}$, déterminer toutes les valeurs de n telles que $n+3$ divise $7n-2$.

Solutions
1) D'après le cours, si d divise $5n-1$ et d divise $3n+2$, alors d divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres.
On choisit les coefficients de tel sorte que les n disparaissent :
on a $5(3n+2)-3(5n-1)=15n+10-15n+3=13$.
d divise donc bien 13.
2) Comme $n+1$ divise à la fois $5n-4$ et $n+1$, alors $n+1$ divise toute combinaison linéaire de $5n-4$ et $n+1$.
$n+1$ divise donc $5(n+1)-(5n-4)=5n+5-5n+4=9$.

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n+3$ divise $7n-2$. Comme $n+3$ divise aussi $n+3$, on en déduit que $n+3$ divise $7(n+3)-(7n-2)=23$.
23 étant un nombre premier, les nombres qui le divisent (ses diviseurs) sont -23, -1, 1 et 23.
Étudions les différentes possibilités :
- si $n+3=-23$, alors $n=-26$. Pour cette valeur de n, on a bien $n+3$ divise $7n-2$. En effet, pour $n=-26$, $n+3=-23$ et $7n-2=-184=8\times(-23)=8(n+3)$.
-Si $n+3=-1$, alors $n=-4$ et la proposition " $n+3$ divise $7n-2$ est vérifiée.
- Si $n+3=1$, alors $n=-2$ et $n+3$ divise $7n-2$.
- Enfin, si $n+3=23$, alors $n=20$. $n+3$ divise $7n-2$ pour cette valeur de n.
Les valeurs de n recherchées sont donc -23, -1, 1 et 23.

Compétence 5 ***
Comment déterminer tous les diviseurs positifs d'un entier naturel a ?

Méthode
- On décompose a en produit de facteurs premiers (voir compétence 8).
- On établit, grâce à un arbre, les différentes possibilités.

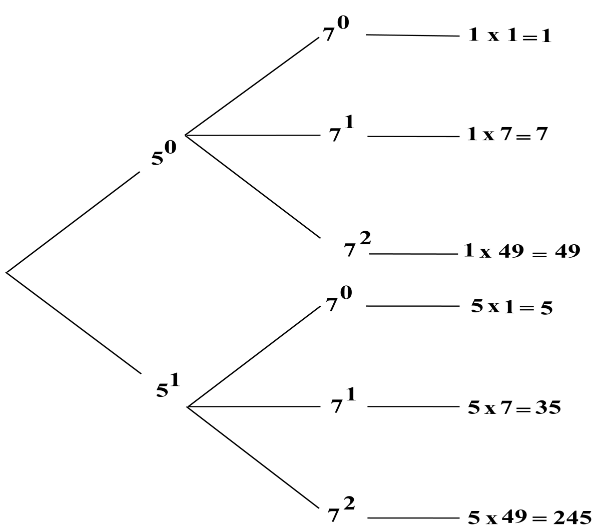
Pourquoi ?
Théorème fondamental de l'arithmétique : tout entier $n \geqslant 2$ s'écrit de façon unique sous la forme : $n=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_k^{\alpha_k}$ où p_1, p_2, ..., p_k sont des nombres premiers tels que $p_1<p_2<\ldots<p_k$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des éléments non nuls de $\mathbb{N}$.

Exemple
Déterminer tous les diviseurs positifs de 245.

Solution
Décomposons 245 en produit de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $245=5\times 7^2$



L'arbre ci-dessus fournit toutes les combinaisons possibles entre les diviseurs 5 et 7 de 245.
On en déduit que les diviseurs positifs de 245 sont donc 1, 5, 7, 35, 45, 245.

Compétence 6 ***
Comment montrer qu'un entier relatif n est pair ou impair ?

Méthode
- On montre que $n = 2k$ où $k \in \mathbb{Z}$ pour prouver que n est pair.
- On montre que $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ pour prouver que n est impair.

Pourquoi ?
Définition : un entier relatif n est dit pair s'il est multiple de 2 sinon il est dit impair.

Exemples
1) Montrer que $b = 4n^2 + 6n + 1$ est impair, $n \in \mathbb{Z}$.
2) Montrer que le nombre $a = n^2 + 5n + 6$ est pair, $n \in \mathbb{Z}$.
3) Montrer que si un nombre entier p est pair alors p^2 l'est aussi.
4) Montrer que si q est impair alors q^2 est impair.

Solutions
1) Mettons b sous la forme $2k+1$:
$b = 2(2n^2 + 3n) + 1 = 2k + 1$ avec $k = 2n^2 + 3n \in \mathbb{Z}$.
b est donc impair.

2) Montrons que a peut se mettre sous la forme 2k.
Tout entier ne pouvant être que pair ou impair, procédons par disjonction des cas :
- si n est pair alors $n = 2m$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et donc $a = (2m)^2 + 5(2m) + 6$,
$a = 4m^2 + 10m + 6 = 2(2m^2 + 5m + 3) = 2k$ où $k = 2m^2 + 5m + 3 \in \mathbb{Z}$. Le nombre a est donc pair.
- si n est impair, c'est-a-dire $n = 2m + 1$ où $m \in \mathbb{Z}$, on a
$a = (2m + 1)^2 + 5(2m + 1) + 6$
$= \ldots$
$= 4m^2 + 14m + 12 = 2(2m^2 + 7m + 6) = 2k$ où $k = 2m^2 + 7m + 6 \in \mathbb{Z}$. A est donc pair.
On peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, a est pair.
Autre méthode : $5n^2 + 5n + 6 = (n + 2)(n + 3)$ qui sont deux nombres consécutifs. Leur produit est donc pair.

3) Soit p un entier pair. On a donc $p = 2k$ où k∈ℤ et
$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.
La proposition "si p est pair alors p^2 est pair " est donc vraie.

4) q étant impair, on a $q = 2k + 1$ où k∈ ℤ. Donc
$q^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 2 = 2m + 1$, m∈ℤ.
On peut donc affirmer que si q est impair, q^2 l'est aussi.

B) NOMBRES PREMIERS / PGCD DE DEUX ENTIERS

Compétence 7 ***
Comment vérifier qu'un nombre entier n est premier ?

Méthode

Chapitre 7 -

ALGORITHMES

A) LES PRINCIPAUX ALGORITHMES À SAVOIR CONSTRUIRE ET MANIPULER.

Compétence 1 ***
Comment écrire un algorithme qui calcule un terme d'une suite numérique définie par récurrence ?

Méthode
Voir exemple.

Exemple
Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n ∈ ℕ, $u_{n+1} = -7u_n + 4$.
Écrire un algorithme qui permet de calculer un terme quelconque de la suite u.

Solution

Algorithme	**Commentaire**
Variables **:** N est un entier ; U est un réel.	→ On nomme U et N deux espaces mémoires où des données vont être stockées et utilisées.
Début	
Saisir N ;	→ On entre l'indice N du terme désiré (par ex. 10 pour u_{10}).
1→ U ;	→ L'espace mémoire U reçoit la valeur $1=u_0$.
Pour i variant de 1 à N -7U+4 → U	→ le contenu de U est écrasé N fois par de nouvelles valeurs obtenues successivement en ajoutant 4 au produit de -7 par l'ancienne valeur.
Fin Pour	→ Arrêt après N itérations.
Afficher U.	→ La dernière valeur contenue dans l'espace mémoire U est affichée. C'est u_N .

Compétence 2 ***
Comment écrire un algorithme qui génère les N premiers termes d'une suite numérique définie par récurrence ?

Méthode
Voir exemple.

Exemple
Soit (v_n) la suite définie pour tout n ∈ ℕ par :
$$\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = 5v_n - 8 \end{cases}.$$
Écrire un algorithme qui permet de calculer les termes $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Solution

Algorithme	Commentaire
Variables : P est un entier ; V est un réel. **Début :** saisir P ; -3→ V ; Pour i variant de 1 à N 5V-8 → V Afficher V Fin Pour.	→ Après chaque calcul, la nouvelle valeur obtenue de V est sauvegardée. → Arrêt après le dernier calcul. La valeur des N premiers termes de la suite sont affichées.

Compétence 3 ***
Comment écrire un algorithme qui détermine le plus petit entier n tel que $u_n > c$?

Méthode

Chapitre 8 -

OUTILS POUR CALCULER PLUS EFFICACEMENT

A) RÈGLES DE CALCUL

Les puissances (Penser aussi à lire les formules de la droite vers la gauche)

1) $a^n \times a^p = a^{n+p}$; 2) $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p} = \dfrac{1}{a^{p-n}}$; 3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; 4) $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$;

5) $(a^n)^p = a^{np}$; 6) $(ab)^n = a^n \times b^n$; 7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; 8) $a^0 = 1$;

9) $a^1 = a$; 10) $x^2 = c$ (avec $c \geqslant 0$) équivaut à $x = \sqrt{c}$ ou $x = -\sqrt{c}$.

Les racines carrées

1) $\sqrt{0} = 0$; 2) $\sqrt{1} = 1$; 3) $(\sqrt{x})^2 = x$ avec x>=0 ;

4) Attention ! $\sqrt{(x^2)} = |x|$ donc x si $x \geqslant 0$ et $-x$ si $x \leqslant 0$;

5) $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$; 6) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$;

7) Attention ! $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Les fractions

1) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+cb}{bd}$, b et d non nuls (on met au même dénominateur) ;

2) $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$, b et d non nuls (on multiple les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux) ;

3) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$, b et d non nuls (on multiplie la fraction en haut par l'inverse de celle du bas) ;

4) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{c}$, b et c non nuls (pour obtenir une écriture équivalente à $\dfrac{a}{b}$) ;

5) $\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$, b≠0 et c≠0 (pour simplifier $\frac{a}{b}$).

La factorisation

1) ΔO + ΩΔ = Δ(O+Ω) (principe de factorisation) ;
2) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ (identité remarquable la plus utilisée) ;
3) $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$;
4) $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$;
5) $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ (le cas particulier $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ peut dépanner) ;
6) $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$;
7) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1)$.

Le développement

1) $\Delta(O+\Omega)=\Delta\times O+\Delta\times\Omega$ (principe de développement) ;
2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;
3) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$;
4) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ (à connaître absolument) ;
5) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ et $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (voir méthode dénombrement) ;

B) QUELQUES ASTUCES DE CALCUL

1) Écrire $A=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $B=\frac{c}{\sqrt{3}}$ sans racines au dénominateur.

Astuce : $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $B=\frac{c}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{c\sqrt{3}}{3}$.

2) Écrire $D=\frac{x}{x+1}$ comme somme (ou différence) de deux fractions.

Astuce : $D=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$.

3) Dans $f(x)=\frac{x}{3x^2-7}$ faire apparaître $6x$ au numérateur.

Astuce : $f(x)=\frac{6}{6}\times\frac{x}{3x^2-7}=f(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{6x}{3x^2-7}\right)$.

4) Écrire $A=\frac{a}{b}$ sous forme de produit.

Astuce : $A=a\times\frac{1}{b}$.

5) Écrire $a \times b$ sous forme de quotient.

Astuce : $B = \dfrac{a}{\dfrac{1}{b}}$.

6) Faire rentrer 3 sous la racine dans $R = 3\sqrt{5x-2}$.
Astuce : $R = \sqrt{9} \times \sqrt{5x-2} = \sqrt{9(5x-2)}$

7) Faire sortir x de sous la racine dans $R = \sqrt{x^2+1}$.
Astuce : $R = \sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = |x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

8) Écrire $A = a+b$ comme une différence.
Astuce : $A = a-(-b)$.

9) Écrire $B = a-b$ comme une somme.
Astuce : $B = a+(-b)$.

10) Mettre φ en facteur dans A= $\alpha\beta+\gamma\phi$.
Astuce : $A = \alpha\beta+\gamma\phi = \phi\left(\dfrac{\alpha\beta}{\phi}+\gamma\right)$.

11) Factoriser $A = 3x^2-5$.
Astuce : A= $(\sqrt{3})^2 x^2 - (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{5})^2$ =($\sqrt{3}$ x + $\sqrt{5}$)($\sqrt{3}$ x - $\sqrt{5}$).

12) Écrire $A = 2^{2n+1}$ comme un produit.
Astuce : $A = 2^{2n} \times 2^1 = 2 \times 2^{2n}$ (Attention : 2×2^{2n} n'est pas égal à 4^{2n} : la puissance est prioritaire sur la multiplication).

13) Montrer que A=B.
Astuce 1 : on développe A pour trouver B.
Astuce 2 : on développe B pour trouver A (il ne faut pas oublier cette possibilité !).
Astuce 3 : on montre que A-B=0.
Astuce 4 : on développe A pour aboutir à C, puis B pour trouver C.
Astuce 5 : on montre que $\dfrac{A}{B} = 1$ ou $\dfrac{B}{A} = 1$ si A≠0 ou B≠0.
Astuce 6 : si A et B sont du même signe, on montre que $A^2 = B^2$.
Astuce 7 : si A et B sont tous deux positifs, on montre que $\sqrt{A} = \sqrt{B}$.
Astuce 8 : on montre que $A \leqslant B$ et $B \leqslant A$.