PAPYRUS

ISSA HAMA

Mathématiques Terminale D

- Sujets et Corrigés
- Conseils et Méthodes de travail

Le Baccalauréat au Niger

Bac 2000 à 2018

SUJET DU BAC 2000

EXERCICE 1

Soit θ un angle tel que $0 \leq \theta < \pi$.

1). Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation en z suivante : $z^2 - 4(1 + \cos\theta)z + 8(1 + \cos\theta) = 0$ (E).

On désignera par z_1 et z_2 les solutions de (E).

2). Déterminer en fonction de $\frac{\theta}{2}$ le module et l'argument de chacune des solutions z_1 et z_2.

3). Trouver θ pour que le produit $z_1.z_2$ soit égal à 8.

EXERCICE 2

En 1990, l'effectif de la population d'une région donnée est P_0 et, avec un accroissement annuel de 1,2 %, devient P_n, n années après.

1). Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire l'expression de P_n en fonction de n et P_0.

2). En quelle année cette région aura-t-elle une population double de ce qu'elle était en 1990 ?

3). En 1990, le nombre d'agriculteurs de cette région, que l'on désigne par A_0 représente les 78 % de la population totale.

Chaque année, ce pourcentage diminue de 0,5 %.

En désignant par A_n le nombre d'agriculteurs au bout de n années après 1990, exprimer alors A_n en fonction de P_n.

Trouver l'année à partir de laquelle le nombre d'agriculteurs représente moins de la moitié totale de la région.

<u>NB :</u> On donne : $\ell n\, 2 = 0,6931$; $\ell n(1,012) = 0,0119$

où ℓn désigne le logarithme népérien.

PROBLÈME

La partie C est indépendante des parties A et B.

A. On considère les deux équations différentielles (E) et (H) suivantes dans lesquelles y est une fonction numérique de la variable réelle x, e désignant la base du logarithme népérien :

(E) : $y'' - 9y = 6e^{-3x}$.

(H) : $y'' - 9y = 0$.

1). Vérifier que la fonction numérique u définie par $u(x) = -xe^{-3x}$ est une solution particulière de (E).

2). Déterminer la solution générale de l'équation (H).

3). Soit f une fonction numérique deux fois dérivable.

a). Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f-u)$ est solution de (H).

b). En déduire toutes les solutions de (E) et donner la solution particulière f de (E) vérifiant : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $f'(0) = 0$.

B. On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$g(x) = -\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$.

Soit (C) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité 3 cm.

1). Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

2). Donner l'équation de la droite (T_1) tangente à la courbe (C) au point d' abscisse $x = -\frac{1}{3}$.

3). Donner l'équation de la droite (T_2) tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $x = \frac{1}{3}$.

4). Tracer (T_1), (T_2) et (C).

5). Soit t un réel positif.

Calculer l'intégrale : $I(t) = \int_{-\frac{1}{3}}^{t} g(x)dx$.

6). Déterminer la limite de $I(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

C. Soient a et b deux nombres réels.
On considère la fonction numérique $f_{a,b}$ de la variable réelle x définie par : $f_{a,b}(x) = [\, x^2 - 2(a+1)x + 2(a+1) + b \,]e^x$.
1). Etudier le sens de variation de la fonction $f_{a,b}$ et dresser son tableau de variation ; discuter selon les valeurs de a et b.
2). On suppose que les réels a et b sont les résultats de deux lancers successifs d'un dé dont les faces, numérotées de 1 à 6, ont la même probabilité d'apparition.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
Evénement A : « $f_{a,b}(0) \geq 12$ ».
Evénement B : « $f_{a,b}$ admet un maximum et un minimum ».

SUJET DU BAC 2001

EXERCICE 1

Pour élire leur conseiller départemental, les habitants du village de ZATA ont à choisir parmi 3 candidats : Ado, Bala et Kadri. Chaque électeur vote pour un seul candidat.
A la fin du vote, on a constaté que 60 % des habitants de ZATA ont effectivement voté.
On suppose que la probabilité pour qu'un électeur choisisse Ado est égale à $3/8$, celle de Bala est égale à $1/2$ et celle de Kadri est égale à $1/8$ et ceci indépendamment des autres électeurs.

1). On prend au hasard et successivement 5 habitants de ZATA. Quelle est la probabilité que ces 5 habitants aient effectivement voté ?

2). Calculer la probabilité pour qu'un habitant quelconque de ZATA choisisse Bala.

3). On prend au hasard 5 habitants de ZATA et on note X la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues par Bala.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

4). Calculer la probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Kadri.

5). Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et P_n la probabilité pour que, parmi n habitants qui votent, aucun ne choisisse Kadri.
Calculer P_n.

6). Quel est le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que Kadri obtienne au moins une voix avec une probabilité supérieure ou égale à $15/16$?

EXERCICE 2

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation en z suivante : $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 24 - 10i = 0$ (E).

PROBLÈME

Le problème comporte deux parties : I et II.

Partie I : n étant un entier naturel non nul, on note f_n la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :
$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ell n(x)$, ℓn désignant le logarithme népérien.

1). Dresser le tableau de variation de f_n. En déduire l'existence d'un réel unique a_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

2). Démontrer que $1 \leq a_n \leq e^2$ et que $\ell n(a_n) = 2 - \frac{2}{n}a_n$.

3). Exprimer $f_{n+1}(a_n)$ en fonction de a_n et n, puis en déduire le sens de variation de la suite de terme général a_n.

4). Démontrer que la suite de terme général a_n est convergente. On note ℓ sa limite.

5). En utilisant les résultats de la deuxième question, calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\ell n(a_n)$. En déduire ℓ.

Partie II : Soit g la fonction définie dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x - \ell n(x)}{2\sqrt{x}}$ et la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x}$.
(C) et (C') désignent les représentations graphiques de g et h respectivement dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ du plan (**unité** : 2 cm).

1). Calculer les limites de g lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

2). Vérifier que $g'(x) = \frac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.
En déduire le tableau de variation de g.

3). Préciser les positions relatives des deux courbes (C) et (C') et calculer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $[\,g(x) - h(x)\,]$.

4). Tracer les courbes (C) et (C').

5). On pose $I = \int_1^2 g(x)dx$.

a). Calculer $J = \int_1^2 \frac{\ell n(x)}{2\sqrt{x}}dx$ à l'aide d'une intégartion par parties.

b). En déduire la valeur de I.

SUJET DU BAC 2002

EXERCICE 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations :

(E_1) : $3z^2 + 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i = 0$

(E_2) : $3z^2 + 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i = \overline{z} + \frac{2}{3} + i$

où i est tel que $i^2 = -1$ et $\overline{z}$ le conjugué de z.

1).a). Résoudre l'équation (E_1).

b). Montrer que $9\left(z + \frac{2}{3} - i\right)^2 = 3\overline{z} + 2 + 3i$.

c). En déduire que pour tout nombre complexe z solution de l'équation (E_2), il existe un nombre complexe $\varphi(z)$ tel que : $[\varphi(z)]^2 = \overline{\varphi(z)}$.

d). En posant $\varphi(z) = T$, démontrer que $T = 0$ ou $|T| = 1$, puis résoudre l'équation $T^2 = \overline{T}$.

2). Résoudre l'équation (E_2).

3). On donne, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé les points A, B, C d'affixes respectives :

$z_1 = -\frac{1}{3} + i$; $z_2 = -\frac{5}{6} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$; $z_3 = -\frac{5}{6} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$.

a). Quelle est la nature du triangle ABC ?

b). Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un losange.

EXERCICE 2

Le budget d'une entreprise, en fonction du temps exprimé en années, est donné en millions de francs par le tableau suivant :

Temps (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Recettes (y_i)	4	5	5	7	8	9	9	9
Dépenses (z_i)	4	5	$\boldsymbol{\alpha}$	8	7	8	$\boldsymbol{\beta}$	9

1).a). Représenter le nuage des points des recettes en fonction du temps.

b). Déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement des recettes par rapport au temps. Tracer cette droite.

2). On suppose que la moyenne des dépenses, notée $\overline{z}$, est égale à 7 et que la variance $V(z)$ vaut 3.

Déterminer α et β tel que $\alpha < \beta$.

PROBLÈME

I. Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$.

Déterminer la solution g de (E) vérifiant les conditions suivantes : $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$; e désignant la base du logarithme népérien.

II. 1). On pose $h(x) = (1 + x)e^{-x}$.

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x \in]-1 ; +\infty[\\ f(-1) = 0 \end{cases}.$$

a). Démontrer que f est continue sur $[-1 ; +\infty[$.

b). Etudier la dérivabilité à droite de f en $x = -1$.

c). Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

d). Etudier le sens de variation de f.

2). Tracer la courbe représentative Γ de f dans un repère orthonormé (**unité** = 4cm).

3). Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $\left[-1 ; -\frac{1}{2}\right]$.

a). Démontrer que f_1 est une bijection de $\left[-1 ; -\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera f_1^{-1} la bijection réciproque de f_1. Calculer $f_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$.

b). Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} au point $x = 0$.

c). Tracer la courbe représentative Γ^{-1} de f_1^{-1} dans le même repère que Γ.

4).a). Montrer que pour tout $x \in \left[-1 ; -\frac{1}{2}\right]$, on a :

$0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e$.

b). En déduire que : $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$.

c). Soit S l'aire en cm^2 du domaine du plan limité par les droites d'équations $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{e}{2}}$, $y = -\frac{1}{2}$ et la courbe Γ^{-1}.

Donner un encadrement de S à 10^{-2} près.

III. Soit (u_n) la suite définie par :

Pour tout entier $n \in \text{IN}$, $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

1). Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[n ; n+1]$ on a : $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

En déduire que $\forall n \in \text{IN}$, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

2). Démonter que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

<u>N.B :</u> On prendra : $e = 2{,}72$; $\sqrt{e} = 1{,}65$.

SUJET DU BAC 2003

EXERCICE 1

Le tableau suivant donne la répartition de cent ménages selon les deux caractères x et y suivants :
x désigne le nombre de pièces habitées et y le nombre d'enfants par ménage.

x \ y	0	1	2	3	4	Total $n_{.j}$
1	6	2	1	0	0	9
2	5	12	8	1	1	27
3	2	7	15	11	3	38
4	0	1	8	14	3	26
Total $n_{i.}$	13	22	32	26	7	100

On donne :

$\sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, x_j = 281$; $\sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, {x_j}^2 = 875$

$\sum_{i=0}^{4} n_{i.} y_i = 192$; $\sum_{i=0}^{4} n_{i.} {y_i}^2 = 496$

$\sum_{j=1}^{4} \sum_{i=0}^{4} n_{ij} x_j y_i = 604.$

1).a). Calculer pour la série x (en tenant compte des effectifs $n_{.j}$ pour la valeur de x) la moyenne arithmétique $\overline{x}$ et l'écart type σ_x.

b). Calculer pour la série y (en tenant compte des effectifs $n_{.j}$ pour la valeur de y) la moyenne arithmétique $\overline{y}$ et l'écart type σ_y.

2). Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Existe-t-il une liaison entre les deux variables x et y ?

Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Un sac contient trois boules indiscernables au toucher marquées 1, 2 et 3. Une épreuve consiste à prélever une première boule du sac dont le numéro sera noté a, puis sans la remettre dans le sac, une seconde boule dont le numéro sera noté b.

Au résultat $(a\ ;\ b)$ d'une épreuve, on associe l'application du plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ dans lui-même, qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ fait correspondre le point M′ d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que :

$z' = \alpha.z$ avec $\alpha = \frac{a}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}b\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}b\right)\right]$.

1). Quelles sont les résultats $(a\ ,b)$ possibles ?
Caractériser géométriquement les applications correspondantes.

2). Soit A le point d'affixe $z_0 = \sqrt{3} + i$ et A′ le point d'affixe $z_0' = \alpha.z_0$, image de A par l'application associée au résultat d'une épreuve.
Calculer le module et l'argument de z_0 et ceux de $z_0{}'$ suivant les valeurs de $(a\ ,b)$.

3). Calculer la probabilité de l'événement
E_1 : ≪ O, A, A′ sont alignés ≫, puis celle de l'événement
E_2 : ≪ z_0' est imaginaire pur ≫.

4). Quelle est la loi de probabilité de l'aléa numérique X qui au résultat $(a\ ,b)$ d'une épreuve associe le module de z_0' ?
Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLÈME

On désigne par f_m la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f_m(x) = \ell n(x^2 - m)$ où $m \in \mathrm{IR}$

(ℓn désigne le logarithme népérien).

1).a). Indiquer suivant les valeurs de m, l'ensemble de définition de f_m et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b). Etudier la parité de f_m.

c). Etudier les variations de f_m. Donner les différents tableaux de variation de f_m selon les valeurs de m.

d). Donner la nature des branches infinies des courbes représentatives (C_m) des fonctions f_m lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

e). Tracer dans un même repère orthonormé (unité : 2cm) les courbes (C_{-1}), (C_0) et (C_1).

Préciser les points d'intersection avec l'axe des abscisses et les tangentes en ces points.

2). Dans cette question, on pose $m = -\frac{3}{4}$.

a). On se propose d'étudier la position de la courbe $\left(C_{-\frac{3}{4}}\right)$ par rapport à la demi-droite D dont une équation est $y = x$, pour x positif seulement.

Pour cela on considère la fonction g définie par :

$\forall x \in \mathrm{IR}^+$, $\quad g(x) = x - \ell\mathrm{n}\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)$.

Etudier le sens de variation de cette fonction.

Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $g(0)$ et de $g\left(\frac{3}{2}\right)$.

En déduire que $g(x)$ est positif et la position de $\left(C_{-\frac{3}{4}}\right)$ par rapport à D.

N.B : On ne demande pas l'étude de la limite de g quand x tend vers $+\infty$, ni la représentation graphique de g.

On donne : $\ell\mathrm{n}2 = 0{,}69$ et $\ell\mathrm{n}3 = 1{,}09$.

b). Montrer que la fonction $f_{-\frac{3}{4}}$ définie une bijection de IR^+ vers un ensemble que l'on précisera.

Déterminer la fonction réciproque ; indiquer son ensemble de définition et son sens de variation.

c). Tracer dans un même repère orthonormé (unité : 2 cm) autre que le précédent, la représentation graphique de $f_{-\frac{3}{4}}$ pour x positif et celle de sa fonction réciproque.

3). Dans cette question, on pose $m = 0$.

Calculer l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées x et y vérifient : $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ f_0(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$, ($\alpha \in]0;1[$).

Quelle est la limite de cette aire quand α tend vers 0 par valeurs supérieures ?

SUJET DU BAC 2004

EXERCICE 1

I. On considère la suite (u_n) définie par ses premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et par la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathrm{IN}, \quad u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n$. (1)

1). Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

2). Déterminer v_n en fonction de n.

En déduire u_n en fonction de n.

3). Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

II. On définit la suite (w_n) par ses premiers termes w_0 et w_1 ($w_0 \in \mathrm{IR}^{+*}$, $w_1 \in \mathrm{IR}^{+*}$) et par la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathrm{IN}, \quad w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2(w_n)^3}$.

EXERCICE 2

Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 - m(1+i)z^2 + im^2z = 0$

où m est un complexe donné non nul.

a). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b). Soient O, A et B les points images des solutions de l'équation (E) tels que B soit l'image de A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que OAB est un triangle isocèle rectangle en O.

2).a). Déterminer m pour que l'équation (E) admette pour solution le complexe $1+i$.

b). Résoudre l'équation (E) dans chacun des cas trouvés.

3). Soit M le point d'affixe m, on suppose que M décrit dans le plan complexe le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$.

a). Déterminer le centre et le rayon de (C).

b). Déterminer l'image du cercle (C) par la rotation R.

PROBLÈME

Partie A :

Soit f_k la fonction définie sur IR par : $f_k(x) = (2-x)e^x - k$ où k est un réel fixé tel que $0 < k < e$.

1). Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

2). Exprimer $f_k'(x)$. En déduire le tableau de variation de f_k.

3).a). Etablir que l'équation $f_k(x) = 0$ admet deux solutions, une notée α_k appartenant à $]-\infty\,;1[$ et une autre notée β_k appartenant à $]1\,;+\infty[$.

b). Montrer que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$.

On démontre de même que $e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$

Partie B :

k est un réel fixé tel que : $0 < k < e$.

1). Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur IR par : $u(x) = e^x - kx$.

a). Etudier le sens de variation de u.

b). Justifier la propriété suivante : pour tout réel x, $e^x - kx > 0$.

2). Soit g_k la fonction définie par : $g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$.

On note C_k la courbe représentative de g_k dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a). Déterminer la limite de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

b). Prouver que $g_k{}'(x) = \frac{k.f_k(x)}{(e^x - kx)^2}$.

c). En déduire le tableau de variation de g_k.

Calculer $g_k(1)$.

3). On note M_k et N_k les points de la courbe C_k d'abscisses respectives α_k et β_k.

a). En utilisant la question 3).b). (Partie A), montrer que $g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$.

b). Donner de même $g_k(\beta_k)$.

c). Déduire de la question précédente que lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe H dont on donnera une équation.

4). Déterminer la position relative des courbes C_1 et C_2.

b). Prouver que $\alpha_2 = 0$.

c). En prenant comme unités $2\ cm$ sur l'axe des abscisses et $4\ cm$ sur l'axe des ordonnées, construire les courbes C_1 et C_2 et H sur le même graphique.

On prendra : $\alpha_1 = -1{,}1$; $\beta_1 = 1{,}8$; $\beta_2 = 1{,}6$.

5). Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1.

a). Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine du plan défini par :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \lambda \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases}.$$

b). Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

SUJET DU BAC 2005

EXERCICE 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 2e$ et par la relation de récurrence :

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e - u_n}$, $n > 0$.

Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \dfrac{u_n + e}{u_n}$.

1). Calculer u_2 et montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $u_n < 0$.

2).a). Calculer v_{n+1} en fonction de u_n.

b). Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

3). Soit la suite (w_n) définie par $w_n = v_{n+1} - ev_n$ pour $n \geq 1$.

a). Déterminer la nature de la suite (w_n).

b). Calculer $S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$.

c). Calculer la limite de $\ell n \left|\dfrac{1 + S_n}{1 + n}\right|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et une pièce dont on distingue les cotés pile (P) et face (F).

A chaque lancer, on associe le nombre complexe $z = \rho . e^{i\frac{n\pi}{6}}$ défini de la manière suivante : $\rho = 1$ si la face (F) apparaît sur la pièce ; $\rho = 2$ si la face (P) apparaît sur la pièce ; n est le nombre lu sur la face supérieure du dé.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité : 2cm). On note M le point d'affixe z et Y son ordonnée.

1). La pièce et le dé ne sont pas truqués.

a). Déterminer l'ensemble des points M que l'on peut obtenir et les placer dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. (Les points obtenus seront notés A_n pour $\rho = 1$ et B_n pour $\rho = 2$, n étant l'entier lu sur le dé).

b). Quelle est la probabilité pour que l'ordonnée Y soit égale à 1 ?

2). On remplace le dé par une deuxième pièce non truquée.

Le jeu consiste à lancer les deux pièces non truquées.

Avant de les lancer un joueur doit payer m francs.

Si le lancer amène une seule face, le joueur gagne 5 F, si le lancer amène deux faces, il gagne 30 F.

Si non il perd la partie (c'est à dire il gagne 0 F).

On appelle X le gain net obtenu, gain exprimé en fonction de m.

a). Déterminer la probabilité d'obtenir deux faces et celle d'obtenir une face.

b). Dresser la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c). Calculer l'espérance mathématique de X.

d). Quel doit être le prix de la partie pour que ce jeu soit équitable ?

e). On donne $m = 10$.

i) Calculer la variance et l'écart type de X.

ii) Définir la fonction de répartition F de X et la tracer.

PROBLÈME

Soit f la fonction numérique définie sur IR par :

$f(x) = \sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt{3}\, x.$

A. 1). Déterminer le domaine de définition de f.

2). Etudier le comportement de f aux bornes de son domaine de définition.

3). Etudier les variations de f.

4). On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan P rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

Préciser les asymptotes à la courbe (C). Construire la courbe (C).

B. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = \sqrt{3}\, x - \sqrt{3x^2 + 1}$.

1). On désigne par (C′) la courbe représentative de g.

a). Montrer que (C′) se déduit de (C) par la symétrie de centre O.

b). Tracer (C′) dans le même repère que (C).

2). Soient I et J deux points appartenant respectivement à (C) et (C′) tels qu'ils aient même projeté orthogonal K sur la droite $x'Ox$.

Montrer qu'on a : $\overrightarrow{KI} . \overrightarrow{KJ} + 1 = 0$.

3). On désigne par (H) la réunion des courbes (C) et (C′).

Montrer qu'un point M appartient à (H) si et seulement si ses coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'équation $y^2 - 2\sqrt{3}\, xy - 1 = 0$.

C. Soit h la fonction numérique définie par :

$h(x) = \ell n\left(\sqrt{3}\, x + \sqrt{3x^2 + 1}\right)$

(où ℓn désigne le logarithme népérien).

1). Déterminer le domaine de définition de h.

(On remarquera que $h(x) = \ell n[\, f(x)\,]$).

2). Etudier la parité de h.
3). Déduire le sens de variation de h de celui de f.
4). Construire la courbe représentative (Γ) de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
5). Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1}.
Construire sa courbe représentative (Γ^{-1}) dans le repère précédent.

SUJET DU BAC 2006

EXERCICE 1

1). Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, soit P le polynôme en z suivant :
$P(z) = z^3 + (-7+2i)z^2 + (15-4i)z - 25 + 10i$.
Calculer $P(5-2i)$ et résoudre l'équation $P(z) = 0$.
2). Soit S la similitude plane directe de centre I d'affixe $z_I = -3-2i$ et qui transforme le point A d'affixe $z_A = 1+2i$ en B d'affixe $z_B = 5-2i$.
a). Déterminer f, l'application complexe associée à S.
b). Déterminer les éléments caractéristiques de S.
c). Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;\,-2)$.
Déterminer l'équation de la droite (D') image de la droite (D) par S.

EXERCICE 2

En 2004, la campagne électorale pour les élections municipales a fait rage dans un village du Niger.

Deux groupes de listes A et B s'affrontent par joutes oratoires quotidiennes.

Chaque jour de campagne on interroge un électeur pris au hasard et on définit les événements suivants :

A_n : « L'électeur est favorable à la liste A au $n^{ième}$ jour de campagne ».

B_n : « L'électeur est favorable à la liste B au $n^{ième}$ jour de campagne ».

On note p_n et q_n les probabilités respectives des événements A_n et B_n et on admet que chaque électeur ne se détermine que pour les listes A et B.

1). Donner une relation simple entre p_n et q_n.

2). Les arguments des uns et des autres sont si convaincants et les électeurs sont indécis qu'à l'issue de chaque jour de campagne, 20% des électeurs favorables à la liste A et 30% des électeurs favorables à la liste B changent d'avis pour le jour suivant.

a). Déterminer l'arbre des probabilités.

b). Donner $p(A_{n+1}/ A_n)$ et $p(A_{n+1}/ B_n)$.

c). Montrer que :

$p(A_{n+1} \cap A_n) = 0{,}8p_n$ et que $p(A_{n+1} \cap B_n) = 0{,}3q_n$.

En déduire que :

$p(A_{n+1}) = 0{,}8p_n + 0{,}3q_n$ puis que $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.

3). Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = p_n - 0{,}6$.

a). Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. Quelle est sa limite ?

b). En déduire la limite de la suite (p_n).

PROBLÈME

Partie A :

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction g_n définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$g_n(x) = -nx\ell n(x) + 2 - x$.

1). Etudier les variations de g_n sur $]1 ; +\infty[$.

2).a). Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet sur $]1 ; +\infty[$ une unique solution α_n appartenant à l'intervalle $]1 ; 2[$.

b). En déduire le signe de $g_n(x)$ sur $]1 ; +\infty[$.

Partie B :

n étant un entier naturel non nul, on considère la fonction numérique f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ell n(x) & \text{si } x \in]0 ; 1] \\ f_n(x) = (2-x)^n \ell n(x) & \text{si } x \in]1 ; +\infty[. \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

(ℓn désigne le logarithme népérien).

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal (unités graphiques : 4cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

1).a). Etudier la continuité de f_n en $x_0 = 0$ et en $x_1 = 1$.

b). Etudier la dérivabilité de f_n en $x_0 = 0$ et en donner une interprétation graphique.

c). Montrer que f_n est dérivable en $x_1 = 1$ et déterminer une équation de la tangente (T) à (C_n) au point d'abscisse 1.

2). Calculer suivant la parité de n, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

3).a). Calculer $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; 1[$.

b). Etudier le signe de $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; 1[$.

4).a). Montrer que $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $f_n'(x) = \dfrac{(2-x)^{n-1}}{x} \times g_n(x)$.

b). Montrer que $f_n(\alpha_n) = \dfrac{(2-\alpha_n)^{n+1}}{n.\alpha_n}$.

5). On suppose désormais que n est pair.

a). Dresser le tableau de variation de f_n.

b). Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement le résultat.

c). Construire (C_2). On prendra $\alpha_2 = 1{,}35$.

6). Soit β un nombre réel de l'intervalle $]\,0\,;1\,[$.

a). Déterminer $\mathcal{A}_\beta$, l'aire géométrique, en cm², du domaine limité par (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = \beta$ et $x = 1$.

b). Calculer $\lim\limits_{\beta \to 0} \mathcal{A}_\beta$.

SUJET DU BAC 2007

EXERCICE 1

On considère la suite (U_n) définie par :

$U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{{U_n}^2}{2U_n - 1}$

pour tout n entier naturel.

1). Montrer par récurrence que $U_n > 1, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

2). On pose $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n}$ et $W_n = \ell n\, V_n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

a). Montrer que la suite (W_n) est géométrique.

b). Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n, V_n puis U_n en fonction de n.

c). En déduire la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 2

Une urne contient 5 jetons portant respectivement les chiffres 1, 1, 1, 2 et 2. les jetons portant des chiffres identiques sont indiscernables. On effectue trois tirages successifs d'un jeton en ne remettant pas à chaque fois le jeton tiré de l'urne.

Ces chiffres, dans l'ordre où ils sont tirés, sont appelés x, y, z.

1). Donner les éléments de Ω l'univers des éventualités.

2). On définit la probabilité d'un événement élémentaire $\{(x, y, z)\}$ par : $p\{(x, y, z)\} = a(x + y + z) + b$

où a et b sont des réels.

Déterminer a et b en sachant que p est une probabilité et que les événements :

$A = \{(x, y, z) \in \Omega, x = 1\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \Omega, y = z\}$

satisfont la propriété : $p(A) - p(B) = \frac{4}{35}$.

3). On suppose que $a = \frac{1}{10}$ et $b = -\frac{2}{7}$.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend la valeur 3 si les trois chiffres sont impairs, la valeur 1 si un chiffre est impair et les deux autres pairs, et prend la valeur -2 s'il y a un chiffre pair et deux chiffres impairs.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer son espérance mathématique et son écart type.

PROBLÈME

Soit la fonction numérique f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1 & \text{si } x < 1 \\ (x-1)\ell n\, x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(Où ℓn désigne le logarithme népérien).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f et par (Δ) la première bissectrice.

1). Montrer que f est continue et dérivable en 1.

2).a). Montrer que pour $x < 1$ on a : $f'(x) > 0$.

b). Montrer que pour $x > 1$ on a : $f'(x) > 0$.

c). Dresser le tableau de variations de f.

3).a). Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b). Montrer que pour tout $x < 1$ on a :

$f(x) - (x+1) = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right] - 1$.

Montrer que la courbe (C) admet la droite (D) d'équation $y = x + 1$ comme asymptote quand x tend vers $-\infty$.

c). En admettant les inégalités $\frac{x-1}{x-2} \leq (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right] \leq 1$ pour tout $x < 1$, en déduire la position de (C) par rapport à (D) pour tout $x < 1$.

d). Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α appartenant à $\left]-1\ ;\ -\frac{1}{2}\right[$.

4). Construire (C).

On précisera les points d'intersection de (C) avec (Δ).

5). En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (Δ), (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

6).a). Montrer que f est une bijection de IR dans IR et qu'elle admet une réciproque f^{-1}(on ne demande pas de calculer $f^{-1}(x)$).

b). Construire la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère que (C).

c). Calculer l'aire $\mathcal{A}_{boucle}$ de la courbe par (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

SUJET DU BAC 2008

EXERCICE 1

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ définie par la donnée de son premier terme u_1 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2 + \frac{4}{u_n + 1}$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

1). Démontrer qu'il existe deux valeurs de u_1 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est constante.

On suppose désormais que la suite n'est pas constante et que $u_1 > -1$.

2). Démontrer par récurrence que $u_n > -1$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

3). On pose $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2}$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

a). Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b). Exprimer v_n en fonction de n et calculer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

4). Exprimer u_n en fonction de v_n.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 2

Soit $P(z) = 3z^3 + \left(-5\sqrt{3} + 10i\right)z^2 + \left(5 - 15i\sqrt{3}\right)z + 24i$.

1).a). Calculer $P(-3i)$.

b). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2). Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$, on considère les points $A(0\,;-3)\,;B(\sqrt{3}\,;-1)\,,C\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

Déterminer les éléments géométriques de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

A). Soit la fonction numérique g_n définie sur $]-\infty\,;0]$ par : $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

Dresser le tableau de variations de g_n et en déduire que $g_n(x)$ est négatif ou nul pour x appartenant à $]-\infty\,;0]$.

B). Soit la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} xe^x - nx & \text{si } x \leq 0 \\ x^n(1-\ell n x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité : 4 cm).

1).a). Etudier la continuité de f_n en $x = 0$.

b). Etudier la dérivabilité de f_n en $x = 0$.

2).a). Calculer $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b). Etudier le signe de $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3).a). Calculer $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

b). Déduire de la partie A). le signe de $f_n'(x)$ sur l' intervalle $]-\infty\,;0[$.

4). Dresser le tableau de variations de f_n.

5). Cas où $n = 1$ ou $n = 2$.

a). Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression $f_2(x) - f_1(x)$.

b). En déduire la position relative des courbes (C_1) et (C_2) et montrer que (C_1) et (C_2) se coupent en trois points dont on précisera les coordonnées.

6).a). Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_1) en $-\infty$.

b). Montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C_2) en $-\infty$.

c). Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

7). Construire (C_1) et (C_2) sur le même graphique.

8). Calculer en intégrant par parties, l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

SUJET DU BAC 2009

EXERCICE 1

A). En notant $P(A/B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et $\overline{B}$ l'événement contraire de B, démontrer que : $P(A / \overline{B}) = \frac{P(A) - P(A/B) \times P(B)}{1 - P(B)}$.

[Indication : écrire $A = (A \cap B) + (A \cap \overline{B})$].

B). Lors d'une récente campagne d'abattage des chiens errants, on a pu établir les statistiques suivantes :

* 30 % des chiens étaient enragés.
* Parmi les chiens abattus, 40% étaient enragés.

1). En désignant par b ($b \neq 1$) la probabilité pour qu'un chien errant soit abattu lors de la campagne d'abattage, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un chien errant survivant soit enragé.

2). Quelle est la plus petite valeur de b pour laquelle p est inferieur ou égal à 0,1 ?

3). A l'issue de la campagne d'abattage, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale 1/3.

Une campagne d'abattage est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la campagne d'abattage.
Quelle est dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la campagne d'abattage ?

EXERCICE 2

1). Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble D des points M, du plan complexe, d'affixe $z = x + iy$, tels que : $|z - 3 - 2i| = |z - 7 + 2i|$.
Le plan sera rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

2). Caractériser géométriquement la transformation ponctuelle φ du plan complexe associée à l'application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, défini par $f : z \longmapsto z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

3). Quelle est l'ensemble D', image par φ de l'ensemble D déterminé au 1). ?
Représenter graphiquement D'.

PROBLÈME

A). On considère l'équation différentielle :
$y'' - 2y' + y = 1 - x$. (1)

1). Déterminer un polynôme g du premier degré solution de l'équation (1).

2).a). Démontrer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR, est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. (2)

b). Résoudre l'équation différentielle (2).

c). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d). Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant :
$h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.

3).a). Soit h la fonction numérique de variable réelle x définie sur IR par $h(x) = e^x - x - 1$.
Etudier ses variations et dresser son tableau de variation.

b). En déduire le signe de $h(x)$ pour tout réel x.

B). On considère la fonction numérique f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \ell n(x+1) + e^{-x} - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(ℓn désigne le logarithme népérien).

1).a). Etudier la continuité de f en 0.

b). Etudier la dérivabilité de f en 0.

2).a). Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty\,;0\,[$.

b). Montrer que pour $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{e^x(1+x)}$.

En déduire le sens de variation de f sur $[\,0\,;+\infty[$.

c). Dresser le tableau de variation de f sur IR.

3). Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $\left(0\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ (unité : 2cm).

4). Montrer que la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,;-1\,[$ admet une bijection de $]-\infty\,;-1[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

5). Calculer l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

SUJET DU BAC 2010

EXERCICE 1

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$z^3 - 3\sqrt{3}iz^2 - (9 - 3\sqrt{3}i)z + 8 = 0 \quad$ (E).

1). Montrer que (E) possède une solution réelle z_1 que l'on déterminera.

2). Résoudre (E).

3). Ecrire les trois solutions z_1, z_2, z_3 sous forme trigonométrique. (avec $|z_2| < |z_3|$).

4). Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère les trois points :

M_1 d'affixe z_1, M_2 d'affixe z_2 et M_3 d'affixe z_3.

Soit S la similitude plane directe transformant M_1 en M_2 et M_2 en M_3. Préciser les éléments caractéristiques de S.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle : $y'' + 4y = 3\sin(x)$. (1)

1). Déterminer le réel α pour que la fonçtion g définie par $g(x) = \alpha\sin(x)$ soit une solution de (1).

2).a). Démontrer qu'une fonction f, deux fois dérivable sur IR, est solution de (1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$. (2)

b). Résoudre l'équation différentielle (2).

c). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d). Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions :

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'(\pi) = 0$.

PROBLÈME

A). On considère la fonction numérique f définie par :

$f(x) = |x+1| + \frac{1}{x-1}$.

1). Donner le domaine de définition de f et écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

2). Etudier les limites aux bornes du domaine de définition de f.

3). Etudier la dérivabilité de f en -1.

4). Etudier la variation de f et dresser son tableau de variation.

5). Montrer que la courbe représentative (C) de f admet trois asymptotes dont on donnera les équations.

6). Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité 2cm).

7). Montrer que la restriction de f à $[\,0\,;1\,[$ admet une bijection de $[\,0\,;1\,[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Tracer la courbe représentative de la réciproque dans le même graphique que (C).

8).a). Calculer les intégrales : $s_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} f(x)dx$ et $s_2 = \int_{-1}^{0} f(x)dx$.

b). En déduire l'aire de la portion du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\sqrt{2}$ et $x = 0$.

B). 1). A toute suite $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}^*}$ de nombres réels strictement supérieurs à 1, on associe la suite $(v_n)_{n\in \mathrm{IN}^*}$ définie par :

$v_n = \ell n(u_n - 1)$.

Sachant que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r (r \neq 0)$ et de premier terme $v_1 = 0$, donner l'expression du terme général u_n en fonction de n et de r.

2). Comment choisir le réel r pour que la suite $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}^*}$ soit convergente ? Dans ce cas donner la limite.

3). Calculer, en fonction de u_n, l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) de f, les droites d'équations $y = x+1$, $x = 2$ et $x = u_n$.

SUJET DU BAC 2011

EXERCICE 1

Soit la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ définie par

$u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \dfrac{6+u_n}{2+u_n}$.

1). Montrer par récurrence que tous les termes de cette suite sont strictement positifs.

2). On considère la suite $(v_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \dfrac{-2+u_n}{3+u_n}$.

a). Montrer que $(v_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b). Donner l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

c). Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 2

Une urne contient trois boules blanches, trois boules rouges et trois boules noires.

On prélève simultanément trois boules de l'urne.

Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1). Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore, c'est-à-dire composé d'une seule couleur.

2). Calculer la probabilité d'un prélèvement tricolore, c'est-à-dire composé de trois couleurs.

3). Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement bicolore c'est-à-dire composé de deux couleurs.

4). Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore ?

PROBLÈME

A). On considère l'équation différentielle :

$y'' - 2y' + y = x - 1.$ (1)

1). Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation différentielle (1).

2).a). Démontrer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0.$ (2)

b). Résoudre l'équation différentielle (2).

c). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d). Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.

B). Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. Unité 1cm.

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + 1 - e^x$

et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1). Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2). Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C).

3). Tracer (D) e t (C) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

4).a). Soit α un réel strictement négatif.

Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

b). Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

5).a). Montrer que la restriction de f à $[0\,;+\infty[$ réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b). Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque sur le même graphique que (C).

C). Soit m un réel et la fonction f_m définie sur IR par : $f_m(x) = m(x+1) - e^x$.

On note Γ_m la courbe représentative de f_m.

1). Trouver l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m admet un maximum.

2). Soit le point M_m l'ordonnée maximale de Γ_m.

Donner une équation de l'ensemble des points M_m.

SUJET DU BAC 2012

EXERCICE 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère la transformation ponctuelle F, qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$z' = m^3 z + m(m+1), \quad m \in \mathbb{C}^*$.

1). Donner la nature de la transformation F.

2). On suppose que $m = 1 + i$.

Donner dans ce cas, les éléments géométriques de F.

3). Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une translation.

4). Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une homothétie de rapport 8.

EXERCICE 2

1). Linéariser l'expression $f(x) = \sin^3 x \cos x$.

2). Chercher une primitive de $f(x) - \frac{1}{4}\sin 2x$.

PROBLÈME

A). On considère l'équation différentielle

$y''+y'-2y=-3e^{x}$. (1)

1). Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur IR par $g(x)=axe^{x}$ soit une solution de l'équation différentielle (1).

2).a). Démontrer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h-g$ est solution de l'équation différentielle $y''+y'-2y=0$. (2)

b). Résoudre l'équation différentielle (2).

c). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d). Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions : $h(0)=1$ et $h'(0)=0$.

B). Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. (Unité : 1cm).

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(1-x)e^{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1). Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2). Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x=-1$.

3). Tracer la courbe (C) dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

4).a). Soit α un réel supérieur à 1.

Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

b). Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)$.

5).a). Montrer que la restriction de f à $]-\infty\,;0\,]$ est une bijection de $]-\infty\,;0\,]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b). Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C).

6). Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite (Δ_m) d'équation $y = m$.

SUJET DU BAC 2013

EXERCICE 1

1).a). Trouver les racines carrées du nombre complexe $5 - 12i$.

b). Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $(z + 2i)(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i) = 0$.

2). Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives : $2i$; $2 - i$ et $-1 - 3i$.

Soit S la similitude plane directe de laissant le point B invariant et transformant A en C.

a). Trouver la relation liant l'affixe z du point M et l'affixe z' de son image M' par S.

b). Déterminer les éléments caractéristiques de S.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique définie par son premier terme $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \text{IN}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3}$.

1). Calculer u_1 et u_2.

2). Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$\forall\, n \in \text{IN}$, $v_n = \ell n\left(\frac{u_n}{u_n + 2}\right)$.

a). Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b). Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

PROBLÈME

A). On considère l'équation différentielle

$y''-2y'+y=-x+3.$ (1)

1). Vérifier que la fonction g définie sur IR par $g(x)=-x+1$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2).a). Démontrer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h-g$ est solution de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0.$ (2)

b). Résoudre l'équation différentielle (2).

c). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d). Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0)=0$ et $h'(0)=-1$.

B). On considère la fonction numérique u définie sur IR par :

$u(x)=xe^{x}-1.$

1). Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

2).a). Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α.

b). Vérifier que $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

c). En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x.

C). Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

(Unité : 2cm).

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(x-1)(e^{x}-1)$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1).a). Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout réel x, $f'(x)=u(x)$.

b). Dresser le tableau de variation de f.

2).a). Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x+1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b). Préciser les positions relatives de (C) et (D).

3). Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
(On prendra $\alpha = 0{,}55$).
4). Soit λ un réel strictement négatif.
a). Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan compris entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.
b). Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.
5).a). Montrer que la restriction de f à $]-\infty\,;0]$ est une bij ection de $]-\infty\,;0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b). Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C).

SUJET DU BAC 2014

EXERCICE 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme P défini par :
$P(z) = z^3 + (-7 + 2i)z^2 + (15 - 4i)z - 25 + 10i$.
1).a). Vérifier que $P(5 - 2i) = 0$.
b). Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
2). Soit S la similitude plane directe de centre I d'affixe $z_I = -3 - 2i$ et qui transforme le point A d'affixe $z_A = 1 + 2i$ en B d'affixe $z_B = 5 - 2i$.
a). Déterminer f, l'application complexe associée à S.
b). Déterminer les éléments caractéristiques de S.

EXERCICE 2

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathrm{IN}$, $u_{n+1} = {u_n}^2 + 2u_n$.

On considère la suite réelle (v_n) définie par : $v_n = \ell n(u_n + 1)$.

1). Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2). Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

3). Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

PROBLÈME

A). On considère l'équation différentielle : $y'' - y' = e^x$. (1)

1). Vérifier que la fonction g définie sur IR par $g(x) = xe^x$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2).a). Démontrer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$. (2)

b). Résoudre l'équation différentielle (2).

c). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d). Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions :

$h(0) = -4$ et $h'(0) = 1$.

B). On considère la fonction numérique u définie sur IR par :

$u(x) = xe^x - 4$.

1). Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

2).a). Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α.

b). Vérifier que $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

c). En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x.

C). Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
(Unité : 1cm).
Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = e^x - 4\ln(x)$
et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
1).a). Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout réel x non nul $f'(x) = \frac{u(x)}{x}$.
b). Dresser le tableau de variation de f.
2). Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
(On prendra $\alpha = 1{,}25$).
3). Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$.
a). Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.
b). Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0.
4). Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\,2\,;\,+\infty\,[$.
a). Montrer que g est une bijection de l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b). Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de g dans le même graphique que $(\mathscr{C})$.
5). Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, où m est un paramètre réel.

SUJET DU BAC 2015

EXERCICE 1

1). Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $z^4 + 4iz^2 + 12 = 0$.

2). Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $1 + i$ et $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

Soit S la similitude de centre O qui transforme A en B.

a). Déterminer les éléments caractéristiques de S.

c). Soit (D) la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Déterminer une équation de la droite (D') image de la droite (D) par S.

EXERCICE 2

Une urne contient 4 boules roses, trois boules vertes et deux boules jaunes indiscernables. On tire simultanément trois boules de l'urne. 1). Déterminer la probabilité d'obtenir :

a). les trois couleurs.

b). les deux boules jaunes.

c). au moins une boule jaune.

2). Soit X la variable aléatoire qui à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules jaunes tirées.

a). Déterminer la loi de probabilité de X.

b). Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

c). Définir la fonction de répartition de X.

PROBLÈME

A). On considère l'équation différentielle :

$y'' - 2y' + y = 2e^{x+1}$. (1)

1). Vérifier que la fonction g définie sur IR par $g(x) = x^2e^{x+1}$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2).a). Démontrer que la fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. (2)

b). Résoudre l'équation différentielle (2).

c). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d). Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions : $h(0) = e$ et $h'(0) = -e$.

B). Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. (Unité : 1cm).

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{x+1}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1).a). Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f .

2). Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

3). Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur IR par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{x+1}$ soit une primitive de f.

4). Soit λ un réel strictement négatif.

a). Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.

b). Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $-\infty$.

5). Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1\,; +\infty[$.

a). Montrer que g est une bijection de l'intervalle $[1\,; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b). Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de g dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

6). Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$, où m est un paramètre réel non nul.

SUJET DU BAC 2016

EXERCICE 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère la transformation ponctuelle F, qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$z' = m^3 z + m(m+1), \quad m \in \mathbb{C}^*$.

1). Donner la nature de la transformation F.

2). On suppose que $m = 1 + i$.
Donner dans ce cas, les éléments géométriques de F.

3). Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une translation.

4). Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une homothétie de rapport 8.

EXERCICE 2

1). Linéariser l'expression $f(x) = \sin^3 x \cos x$.

2). Chercher une primitive de $f(x) - \frac{1}{4}\sin 2x$.

PROBLÈME

A). On considère l'équation différentielle

$y'' + y' - 2y = -3e^x$. (1)

1). Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = axe^x$ soit une solution de l'équation différentielle (1).

2).a). Démontrer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$. (2)

b). Résoudre l'équation différentielle (2).

c). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d). Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions :
$h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$.

B). Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
(Unité : 1cm).

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (1 - x)e^{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1). Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2). Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x = -1$.

3). Tracer la courbe (C) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

4).a). Soit α un réel supérieur à 1.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

b). Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

5).a). Montrer que la restriction de f à $]-\infty\,;0]$ est une bijection de $]-\infty\,;0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b). Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C).

6). Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite (Δ_m) d'équation $y = m$.

SUJET DU BAC 2017

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) :

$$z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0.$$

1). Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2.

2). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3). Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2i$, $z_C = 6 - 2i$.

a). Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b). Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ?

c). Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B.

Donner l'écriture complexe de S et préciser son centre Ω.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n}$.

1). Calculer u_2, u_3 et u_4.

2). On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \ell n\, u_n$.

Montrer que la suite (v_n) vérifie pour tout entier naturel n :

$v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$.

3). On définit les suites (x_n) et (y_n) par :

$x_n = v_{n+1} - v_n$ et $y_n = v_{n+1} + \frac{1}{2} v_n$.

a). Montrer que (x_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.
b). Montrer (y_n) est une suite constante.
c). Vérifier que $v_n = \frac{2}{3}(y_n - x_n)$ puis en déduire l'expression de v_n en fonction de n.

4).a). Montrer que $u_n = \left[e^{\frac{2}{3}\ell n 2}\right]^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
b). En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

PROBLÈME

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + \ell n(x)$.
1). Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2).a). Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $]0;+\infty[$.
b). Montrer que $0{,}548 < \alpha < 0{,}549$.
3). Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - x + \frac{1 + \ell n(x)}{2x}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant comme unité graphique 4 cm.
1).a). Déterminer la limite de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
b). Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c). Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à (C).
Etudier la position de (C) par rapport à l'asymptote (D).

2).a). Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$.

b). Dresser le tableau de variation de f.

3).a). Montrer que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$.

b). Donner alors un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

4).a). Calculer les coordonnées du point de (C) où la tangente est parallèle à (D). Donner une équation de cette tangente T.

b). Tracer (C), (D) et T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c). Soit λ un réel supérieur à $\frac{1}{e}$.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (D) et les droite d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = \lambda$.

d). Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

SUJET DU BAC 2018

EXERCICE 1

1). Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = 0$,
où y est une fonction définie et dérivable sur IR.

a). Résoudre l'équation (E).

b). Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

2). Calculer la valeur moyenne de f sur $[0;1]$.

3). Déterminer en fonction de n la valeur moyenne de f sur $[n\ ;\ n+1]$.

4). Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$ pour tout n entier positif ou nul.

a). Calculer la valeur exacte de u_0, u_1 et u_2.

b). Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c). Déterminer la valeur exacte de la somme :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 .$$

EXERCICE 2

Le tableau ci-dessous rend compte de l'évolution de la population d'un village de 1995 à 2001.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'habitants y_i	3000	2545	2165	1840	1566	1332	1135

Le maire du village se demande quelle sera la population du village en 2005.

1). Dessiner le nuage des points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ ainsi que la droite des moindres carrés.

2). Quel constat faites-vous par rapport à la question du maire ?

3). En fait on peut penser à un ajustement par une courbe d'équation $y = ab^x$ avec $0 < b < 1$ et $a > 0$.

On peut déduire $\ell ny = x\ell nb + \ell na$, d'où l'idée de prendre $z_i = \ell ny$.

a). Compléter le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ell ny$	8,01						

b). Donner une équation des moindres carrés pour la série $(x_i\ ;\ z_i)$.

c). Déduisez-en a et b tels que $y = ab^x$.

d). Estimer la population du village en 2005.

PROBLÈME

1). On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;0\ [$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x}.$$

a). Etudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1\ ;\ 0\ [$.

b). Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe.

Déduisez-en le sens de variation de f.

c). Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0\ [$.

d). Montrer que la fonction f admet un maximum sur $]-1\ ;\ 0\ [$, et déduisez-en le signe de $f(x)$ sur cet intervalle.

e). Dessiner la courbe C_f représentative de f

dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(unités graphiques : 4 cm en abscisses, 1cm en ordonnées).

2). Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

Déduisez-en, sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, la primitive F, s'annulant pour $x = -\frac{1}{2}$, de la fonction f.

3). On considère la fonction g définie sur $]-1\,;0[$ par :

$$g(x) = \ell n\left(\frac{-x}{x+1}\right).$$

a). Etudier les limites de g aux bornes de l'intervalle $]-1\,;\,0[$.

b). Vérifier que, pour tout x de $]-1\,;\,0[$, on a :

$$g'(x) = f(x).$$

Déduisez-en les variations de g sur $]-1\,;\,0[$.

CORRIGÉS

CORRIGÉ DU BAC 2000

EXERCICE 1

Données : θ est un angle vérifiant $0 \leq \theta < \pi$;

$z^2 - 4(1+\cos\theta)z + 8(1+\cos\theta) = 0$ (E).

1). Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) :

*** Discriminant Δ :**

$\Delta = [-4(1+\cos\theta)]^2 - 4(1)[8(1+\cos\theta)]$

$\Delta = 16(1+\cos\theta)^2 - 32(1+\cos\theta)$

$\Delta = 16(1+2\cos\theta+\cos^2\theta) - 16\times 2(1+\cos\theta)$

$\Delta = 16[1+2\cos\theta+\cos^2\theta - 2(1+\cos\theta)]$

$\Delta = 16[1+2\cos\theta+\cos^2\theta - 2 - 2\cos\theta]$

$\Delta = 16[\cos^2\theta - 1] = 16(-\sin^2\theta) = 4^2\times(i\sin\theta)^2$

$\Delta = (4i\sin\theta)^2$.

*** Racines carrées de Δ :**

De ce qui précède, on peut déduire que les racines carrées de Δ sont : $4i\sin\theta$ et $-4i\sin\theta$.

*** Solutions de (E) :**

$z_1 = \frac{4(1+\cos\theta) - 4i\sin\theta}{2(1)} = \frac{2(1+\cos\theta) - 2i\sin\theta}{(1)} = 2(1+\cos\theta) - 2i\sin\theta$;

$z_2 = \frac{4(1+\cos\theta) + 4i\sin\theta}{2(1)} = 2(1+\cos\theta) + 2i\sin\theta$.

*** Ensemble de solutions de (E) :**

$S_{\mathbb{C}} = \{\, 2(1+\cos\theta) - 2i\sin\theta \;;\; 2(1+\cos\theta) + 2i\sin\theta \,\}$.

2). Déterminons le module et l'argument de z_1 et z_2 en fonction de $\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

Rappel de trigonométrie :

Pour tout réel θ, on a :

$1+\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$; $\sin\theta = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)$; $-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)$.

En utilisant ces formules, on peut avoir :

$z_1 = 2(1+\cos\theta) - 2i\sin\theta$

$z_1 = 2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - 2i\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$z_1 = 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$z_1 = 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]$.

Or $0 \le \theta < \pi$, donc $0 \le \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

Par conséquent, $|z_1| = 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z_1) = -\frac{\theta}{2}[2\pi]$.

De plus, z_1 et z_2 sont **conjugués**, ce qui permet d'avoir :

$|z_2| = |z_1| = 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z_2) = -\arg(z_1) = \frac{\theta}{2}[2\pi]$.

3). Trouvons θ pour que le produit $z_1.z_2$ soit égal à 8 :

z_1 et z_2 sont conjugués, ce qui permet d'avoir :

$z_1.z_2 = z_1.\overline{z_1} = |z_1|^2 = \left(4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 = 16\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Ainsi, $z_1.z_2 = 8$ si et seulement si $16\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 8$.

On aura alors :

$16\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 8$, soit $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$,

soit $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$, soit $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion :

Pour avoir $z_1.z_2 = 8$, il faut choisir $\theta = \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2

1). Montrons que (P_n) est une suite géométrique et précisons sa raison :

Population en 1990 : P_0 ;

Population en $(1990+1)$: $P_1 = P_0 + (0{,}012)P_0 = 1{,}012.P_0$;

Population en $(1990+2)$: $P_2 = P_1 + (0{,}012)P_1 = 1{,}012.P_1$;

Population en $(1990+n)$: $P_n = P_{n-1} + (0{,}012)P_{n-1} = 1{,}012.P_{n-1}$.

$P_n = 1{,}012.P_{n-1} \Leftrightarrow P_{n+1} = 1{,}012.P_n$.

On en déduit que (P_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}012$ et de premier terme P_0.

$*$ **Déduisons-en l'expression de P_n en fonction de n et P_0 :**

(P_n) étant une suite géométrique de raison $q = 1{,}012$ et de premier terme P_0, donc $P_n = P_0 \times q^n = P_0.(1{,}012)^n$.

Conclusion : $P_n = P_0.(1{,}012)^n$.

2). Déterminons l'année où cette région aura une population double de ce qu'elle était en 1990 :

On doit résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $P_n = 2P_0$.

$P_n = 2P_0$ si et seulement si $P_0.(1{,}012)^n = 2P_0$.

On aura alors :

$(1{,}012)^n = 2$, soit $n.\ell n(1{,}012) = \ell n(2)$, soit $n = \frac{\ell n(2)}{\ell n(1{,}012)}$,

soit $n = \frac{0{,}6931}{0{,}0119} = 58{,}2436$, soit $n \approx 59$.

D'où l'année recherchée est $(1990 + 59)$, soit l'année 2049.

3). Exprimons A_n en fonction de P_n :

Nombre d'agriculteurs en 1990 : $A_0 = 0{,}78\ P_0$;

Nombre d'agriculteurs en $(1990+1)$: $A_1 = (0{,}78 - 1 \times 0{,}005)\ P_1$;

Nombre d'agriculteurs en $(1990+2)$: $A_2 = (0{,}78 - 2 \times 0{,}005)\ P_2$;

Nombre d'agriculteurs en $(1990+3)$: $A_3 = (0{,}78 - 3 \times 0{,}005)\ P_3$;

Nombre d'agriculteurs en $(1990+n)$: $A_n = (0{,}78 - n \times 0{,}005)\ P_n$.

Conclusion : $A_n = (0{,}78 - n \times 0{,}005)\ P_n$.

∗ Trouvons l'année à partir de laquelle le nombre d'agriculteurs représente moins de la moitié totale de la région :

Nombre d'agriculteurs en $(1990 + n)$: A_n ;

Population totale en $(1990 + n)$: P_n .

Donc, on doit résoudre dans IN^* , l'inéquation $A_n < \frac{1}{2}P_n$.

$A_n < \frac{1}{2}P_n$ si et seulement si $(0{,}78 - n \times 0{,}005)\, P_n < \frac{1}{2}P_n$.

On aura alors :

$(0{,}78 - n \times 0{,}005) < \frac{1}{2}$, soit $\left(0{,}78 - \frac{1}{2}\right) < n \times 0{,}005$,

soit $\frac{\left(0{,}78 - \frac{1}{2}\right)}{0{,}005} < n$, soit $n > \frac{\left(0{,}78 - \frac{1}{2}\right)}{0{,}005}$, soit $n > 56$.

Donc l'année recherchée est $(1990 + 56)$, soit l'année 2046.

PROBLÈME

A. Données :

(E) : $y'' - 9y = 6e^{-3x}$.

(H) : $y'' - 9y = 0$.

1). Vérifions que la fonction numérique u définie par $u(x) = -xe^{-3x}$ est une solution particulière de (E) :

$u(x) = -xe^{-3x}$, donc $D_u = IR$.

u est une solution particulière de (E) si et seulement si :

$\forall\, x \in IR,\ u''(x) - 9u(x) = 6e^{-3x}$.

u est deux fois dérivable sur IR et $\forall\, x \in IR$:

$u'(x) = (-xe^{-3x})' = (-x)'(e^{-3x}) + (e^{-3x})'(-x)$

$u'(x) = (-1)(e^{-3x}) + (-3e^{-3x})(-x)$

$u'(x) = -e^{-3x} + 3xe^{-3x}$;

$u''(x) = (-e^{-3x} + 3xe^{-3x})' = (-e^{-3x})' + (3xe^{-3x})'$

$u''(x) = -(-3e^{-3x}) + 3(e^{-3x}) - 3e^{-3x}(3x)$

$u''(x) = 3e^{-3x} + 3e^{-3x} - 9xe^{-3x}$

$u''(x) = 6e^{-3x} - 9xe^{-3x}$.

Ce qui permet d'avoir :

$u''(x) - 9u(x) = 6e^{-3x} - 9xe^{-3x} - 9(-xe^{-3x})$

$u''(x) - 9u(x) = 6e^{-3x} - 9xe^{-3x} + 9xe^{-3x}$

$u''(x) - 9u(x) = 6e^{-3x}$.

Ce qui signifie que u est une solution particulière de (E).

2). Déterminons la solution générale de l'équation (H) :

■ Résolution de l'équation différentielle $y'' - 9y = 0$:

- Equation caractéristique (E_C) : $r^2 - 9 = 0$.
- Solutions de (E_C) :

$r^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (r+3)(r-3) = 0 \Leftrightarrow r = -3$ ou $r = 3$.

Les solutions de (E_C) sont alors $r_1 = -3$ et $r_2 = 3$.

- Solution générale de (H) :

$y_{(H)} = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{-3x} + Be^{3x}$

$y_{(H)} = Ae^{-3x} + Be^{3x}$, avec A et B des constantes réelles.

3).a). Montrons que f est solution de (E) si et seulement si $(f-u)$ est solution de (H) :

- **Supposons que f est solution de (E), démontrons que $(f-u)$ est solution de (H) :**

f est solution de (E) signifie que :

$f''(x) - 9f(x) = 6e^{-3x}$.

Or $u''(x) - 9u(x) = 6e^{-3x}$.

Ce qui permet d'avoir :

$f''(x) - 9f(x) = u''(x) - 9u(x)$

$f''(x) - u''(x) - 9f(x) + 9u(x) = 0$

$(f-u)''(x) - 9(f-u)(x) = 0$.

Ce qui signifie que $(f-u)$ est solution de (H).

• **Supposons que $(f-u)$ est solution de (H), démontrons que f est solution de (E) :**

$(f-u)$ est solution de (H) signifie que :

$(f-u)''(x) - 9(f-u)(x) = 0$

$f''(x) - u''(x) - 9f(x) + 9u(x) = 0$

$f''(x) - 9f(x) = u''(x) - 9u(x)$.

Or $u''(x) - 9u(x) = 6e^{-3x}$.

Ce qui permet d'avoir :

$f''(x) - 9f(x) = 6e^{-3x}$.

Ce qui signifie que f est solution de (E).

Conclusion :

f est solution de (E) si et seulement si $(f-u)$ est solution de (H).

b). Solutions de (E) :

$(f-u)$ est solution de (H), donc $(f-u)(x) = Ae^{-3x} + Be^{3x}$.

On obtient $f(x) - u(x) = Ae^{-3x} + Be^{3x}$

soit, $f(x) = u(x) + Ae^{-3x} + Be^{3x}$,

soit $f(x) = -xe^{-3x} + Ae^{-3x} + Be^{3x}$,

avec A et B des constantes réelles.

∗ **Solution f de (E) vérifiant : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f'(0) = 0$:**

$f(x) = -xe^{-3x} + Ae^{-3x} + Be^{3x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ (en posant $X = -3x$) ;

$\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}(-3x)e^{(-3x)} = \frac{1}{3}\left(\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X}\right) = \frac{1}{3}(0) = 0$

(en posant $X = -3x$) ;

De ce qui précède, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 + 0 + \lim\limits_{x\to+\infty} Be^{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} Be^{3x}$.

Ainsi , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si et seulement si $B = 0$.

f est dérivable sur IR et $\forall x \in$ IR :

$f'(x) = (-xe^{-3x} + Ae^{-3x} + Be^{3x})'$

$f'(x) = (-1)(e^{-3x}) + (-3e^{-3x})(-x) - 3Ae^{-3x} + 3Be^{3x}$

$f'(x) = -e^{-3x} + 3xe^{-3x} - 3Ae^{-3x} + 3Be^{3x}$

$f'(x) = (-1 + 3x - 3A + 3B)e^{-3x}$.

Ainsi $f'(0) = (-1 + 0 - 3A + 3B)e^{0} = -1 - 3A + 3B$.

$f'(0) = 0$ si et seulement si $-1 - 3A + 3B = 0$.

Or $B = 0$, donc on aura $-1 - 3A = 0$, soit $A = -\frac{1}{3}$.

Ce qui permet d'écrire :

$f(x) = -xe^{-3x} + Ae^{-3x} + Be^{3x}$

$f(x) = -xe^{-3x} - \frac{1}{3}e^{-3x} = -\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$.

Conclusion :

La solution particulière f recherchée est telle que :

$f(x) = -\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$ et $D_f = \mathbb{R}$.

B.

1). Etudions les variations de g et dressons son tableau de variations :

$g(x) = -\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$ et $D_g = \mathbb{R} =]-\infty\ ; +\infty[$.

■ **Limites aux bornes de D_g :**

* $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} -\left(x + \frac{1}{3}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-3x} = +\infty \end{cases}$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-xe^{-3x} - \frac{1}{3}e^{-3x}\right)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-3x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0 \end{cases}$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

* **Etude de la dérivabilité de g et calcul de $g'(x)$:**

$g(x) = -\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$.

g est le produit de deux fonctions :

La fonction $x \longmapsto -\left(x + \frac{1}{3}\right)$ et la fonction $x \longmapsto e^{-3x}$.

$x \longmapsto -\left(x+\frac{1}{3}\right)$ est une fonction affine, elle est dérivable sur IR ;

$x \longmapsto e^{-3x}$ est une fonction exponentielle, elle est dérivable sur IR.

Par conséquent, g est dérivable sur IR et $\forall\, x \in$ IR :

$$g'(x) = \left(-\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)'(e^{-3x}) + (e^{-3x})'\left(-\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$g'(x) = -e^{-3x} - 3e^{-3x}\left(-\left(x+\frac{1}{3}\right)\right) = -e^{-3x} + e^{-3x}(3x+1)$$

$$g'(x) = (-1 + 3x + 1)e^{-3x} = 3xe^{-3x}$$

$$g'(x) = 3xe^{-3x}.$$

■ **Sens de variation de g sur IR :**

$g'(x) = 3xe^{-3x}$.

$\forall\, x \in$ IR, $3e^{-3x} > 0$, donc $g'(x)$ a le même signe que x.

Si $x \in\,]-\infty\,;\,0]$, $g'(x) \leq 0$, d'où g est décroissante ;

Si $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$, $g'(x) > 0$, d'où g est strictement croissante.

■ **Tableau de variations de g :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0

Indication : $g(0) = -\left(0+\frac{1}{3}\right)e^{0} = -\frac{1}{3}$.

2). Donnons l'équation de la tangente (T_1) à (C) au point d'abscisse $x = -\frac{1}{3}$:

$\forall\, x \in$ IR, $g(x) = -\left(x+\frac{1}{3}\right)e^{-3x}$ et $g'(x) = 3xe^{-3x}$.

D'où (T_1) : $y = g'\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) + g\left(-\frac{1}{3}\right)$;

$g'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3\left(-\frac{1}{3}\right)} = -e$ et $g\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.$

Par conséquent, $(T_1) : y = -e\left(x + \frac{1}{3}\right).$

3). Donnons l'équation de la tangente (T_2) à (C) au point d'abscisse $x = \frac{1}{3}$:

$(T_2) :\ y = g'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right)$;

$g'\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)e^{-3\left(\frac{1}{3}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$;

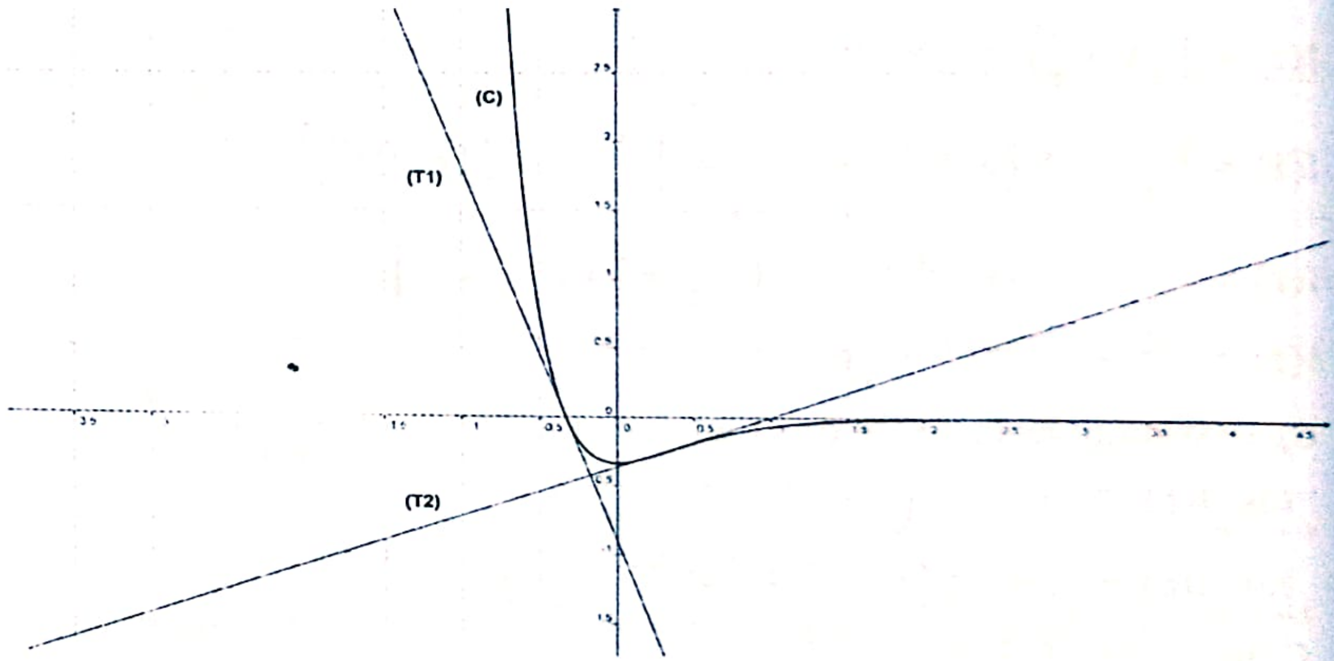
$g\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)e^{-3\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{-2}{3}e^{-1} = \frac{-2}{3} \times \frac{1}{e} = \frac{-2}{3e}.$

D'où $(T_2) :\ y = \frac{1}{e}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3e} = \frac{1}{e}x - \frac{1}{3e} - \frac{2}{3e} = \frac{1}{e}x - \frac{3}{3e} = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$,

$(T_2) :\ y = \frac{1}{e}(x - 1).$

4). Traçons (T_1), (T_2) et (C) :

Figure :



5). Calculons $\mathbf{I(t)=\int_{-\frac{1}{3}}^{t} g(x)dx}$:

$$I(t)=\int_{-\frac{1}{3}}^{t} g(x)dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{t}\left(-\left(x+\frac{1}{3}\right)e^{-3x}\right)dx.$$

Utilisons une intégration par parties :

Posons $u(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)$ et $v'(x)=-e^{-3x}$.

Ce qui permet de trouver $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\frac{1}{3}e^{-3x} \end{cases}$.

Ainsi, $I(t)=[\,u(x).v(x)\,]_{-\frac{1}{3}}^{t}-\int_{-\frac{1}{3}}^{t} u'(x).v(x)dx$

$$I(t)=\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{-\frac{1}{3}}^{t}-\int_{-\frac{1}{3}}^{t}\left(1\times\frac{1}{3}e^{-3x}\right)dx$$

$$I(t)=\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{-\frac{1}{3}}^{t}+\frac{1}{9}\int_{-\frac{1}{3}}^{t}(-3e^{-3x})dx$$

$$I(t)=\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{-\frac{1}{3}}^{t}+\frac{1}{9}[e^{-3x}]_{-\frac{1}{3}}^{t}$$

$$I(t)=\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{9}e^{-3x}\right]_{-\frac{1}{3}}^{t}$$

$$I(t)=\left[\frac{1}{3}e^{-3x}.\left(x+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\right]_{-\frac{1}{3}}^{t}=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)e^{-3x}\right]_{-\frac{1}{3}}^{t}$$

$$I(t)=\left[\frac{1}{3}\left(t+\frac{2}{3}\right)e^{-3t}\right]-\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)e^{-3\left(-\frac{1}{3}\right)}\right]$$

$$I(t)=\frac{1}{3}\left(t+\frac{2}{3}\right)e^{-3t}-\frac{1}{9}e.$$

6). Déterminons la limite de $\mathbf{I(t)}$ lorsque $t\to+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\left(t+\frac{2}{3}\right)e^{-3t}-\frac{1}{9}e\right]$$

$$\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3}te^{-3t}+\frac{2}{9}e^{-3t}-\frac{1}{9}e\right);$$

$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -te^{-3t}=0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-3t}=0 \end{cases}$, d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)=-\frac{e}{9}$.

C.

Donnée : $f_{a,b}(x) = [\,x^2 - 2(a+1)x + 2(a+1) + b\,]e^x$.

1). Sens et tableau de variation de la fonction $f_{a,b}$:

■ **Domaine de définition :**

La fonction $f_{a,b}$ est définie sur IR.

■ **Limites aux bornes :**

Pour tout réel x, on peut écrire :

$f_{a,b}(x) = x^2e^x - 2(a+1)xe^x + 2(a+1)e^x + be^x$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}, \text{ d'où } \lim_{x \to -\infty} f_{a,b}(x) = 0.$$

$f_{a,b}(x) = [\,x^2 - 2(a+1)x + 2(a+1) + b\,]e^x$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} [\,x^2] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{cases}, \text{ d'où } \lim_{x \to +\infty} f_{a,b}(x) = +\infty.$$

■ **Sens de variation :**

$f_{a,b}$ est dérivable sur IR et pour tout réel x on a :

$f'_{a,b}(x) = [\,2x - 2(a+1) + x^2 - 2(a+1)x + 2(a+1) + b\,]e^x$

$f'_{a,b}(x) = [\,x^2 - 2(a+1-1)x + b\,]e^x$

$f'_{a,b}(x) = [\,x^2 - 2ax + b\,]e^x$.

$\forall\ x \in$ IR, $e^x > 0$, donc le signe de $f'_{a,b}(x)$ dépend du signe du polynôme $[\,x^2 - 2ax + b\,]$.

∗ Résolvons dans IR, l'équation $x^2 - 2ax + b = 0$:

Discriminant :

$\Delta = (-2a)^2 - 4(1)(b) = 4a^2 - 4b = 4(a^2 - b)$.

∗ Signe de $(x^2 - 2ax + b)$ suivant les valeurs de a et b :

1^er^ cas : $(\,a^2 > b$ avec $b < 0$ ou $b \geq 0)$.

Dans ce cas, $\Delta > 0$ et l'équation admet deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{2a - \sqrt{4(a^2-b)}}{2(1)} = a - \sqrt{(a^2-b)} \quad \text{et} \quad x_2 = a + \sqrt{(a^2-b)}.$$

Remarquez que $x_1 < x_2$.

■ **Sens de variation du 1er cas :**

Si $x \in]-\infty\,;\,x_1[\ \cup\ ]x_2\,;+\infty[$, $x^2 - 2ax + b > 0$.

D'où $f'_{a,b}(x) > 0$ et $f_{a,b}$ est strictement croissante ;

Si $x \in [x_1\,;\,x_2]$, $x^2 - 2ax + b \leq 0$.

D'où $f'_{a,b}(x) \leq 0$ et $f_{a,b}$ est décroissante.

■ **Tableau de variations du 1er cas :**

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_{a,b}$	0 ↗	$f_{a,b}(x_1)$	↘	$f_{a,b}(x_1)$	↗ $+\infty$

2ème cas ($a^2 = b$ avec $b \geq 0$).

Dans ce cas, $\Delta = 0$ et l'équation admet deux racines confondues x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = x_2 = \frac{2a}{2(1)} = a.$$

Le polynôme $x^2 - 2ax + b$ s'annule, mais ne change pas de signe et $\forall\, x \in \text{IR}$, $x^2 - 2ax + b \geq 0$.

Par conséquent, $f_{a,b}$ est strictement croissante sur $]-\infty\,;a[$.

et croissante sur $[a\,;+\infty[$.

■ **Tableau de variations du 2ème cas :**

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$	$+$	0	$+$
$f_{a,b}$	0 ↗	$f_{a,b}(a)$	$f_{a,b}(a)$ ↗ $+\infty$

3ème cas ($a^2 < b$ avec $b > 0$).

Dans ce cas, $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune racine et $\forall\, x \in \mathrm{IR},\ x^2 - 2ax + b > 0$.

Par conséquent, $f_{a,b}$ est strictement croissante sur IR.

Tableau de variations du 3ème cas :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_{a,b}(x)$	$+$	
$f_{a,b}$	0 ↗	$+\infty$

2). Calculons $p(A)$ et $p(B)$:

$f_{a,b}(x) = [\,x^2 - 2(a+1)x + 2(a+1) + b\,]e^x$.

$f_{a,b}(0) = 2(a+1) + b$.

$\text{Card}(\Omega) = 6^2 = 36$.

A : « $f_{a,b}(0) \geq 12$ ».

$f_{a,b}(0) \geq 12$ si et seulement si $2(a+1) + b \geq 12$

Les valeurs prises par a sont $1, 2, 3, 4, 5$ et 6.

Les valeurs prises par $2(a+1)$ sont $4,\ 6,\ 8,\ 10, 12$ et 14.

Les valeurs prises par b sont $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ et 6.

Présentons l'ensemble des valeurs prises par $2(a+1) + b$:

b \ $2(a+1)$	4	6	8	10	12	14
1	5	7	9	11	13	15
2	6	8	10	12	14	16
3	7	9	11	13	15	17
4	8	10	12	14	16	18
5	9	11	13	15	17	19
6	10	12	14	16	18	20

Sur les 36 cas du tableau, on a 21 cas où $2(a+1) + b \geq 12$.

D'où $p(A) = \frac{21 \text{ cas}}{36 \text{ cas}} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

B : « $f_{a,b}$ admet un maximum et un minimum ».

$f_{a,b}$ admet un maximum et un minimum dans le cas où $\Delta > 0$.

$\Delta > 0$ signifie que $a^2 > b$.

Les valeurs prises par a sont $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ et 6.

Les valeurs prises par a^2 sont $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25$ et 36.

Les valeurs prises par b sont $1, 2, 3, 4, 5$ et 6.

Présentons l'ensemble des couples $(a^2\ ;\ b)$:

b \ a^2	1	4	9	16	25	36
1	(1 ; 1)	(4 ; 1)	(9 ; 1)	(16 ; 1)	(25 ; 1)	(36 ; 1)
2	(1 ; 2)	(4 ; 2)	(9 ; 2)	(16 ; 2)	(25 ; 2)	(36 ; 2)
3	(1 ; 3)	(4 ; 3)	(9 ; 3)	(16 ; 3)	(25 ; 3)	(36 ; 3)
4	(1 ; 4)	(4 ; 4)	(9 ; 4)	(16 ; 4)	(25 ; 4)	(36 ; 4)
5	(1 ; 5)	(4 ; 5)	(9 ; 5)	(16 ; 5)	(25 ; 5)	(36 ; 5)
6	(1 ; 6)	(4 ; 6)	(9 ; 6)	(16 ; 6)	(25 ; 6)	(36 ; 6)

Sur les **36 couples** $(a^2 ; b)$ du tableau, on a **27 couples** où $a^2 > b$.
D'où $p(\mathrm{B}) = \frac{27 \text{ couples}}{36 \text{ couples}} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

CORRIGÉ DU BAC 2001

EXERCICE 1

1). Déterminons la probabilité que les 5 habitants de ZATA pris au hasard et successivement aient effectivement voté :

Considérons les événements suivants :

V : ≪ l'habitant de ZATA a voté ≫.

A : ≪ l'électeur a choisi Ado ≫.

B : ≪ l'électeur a choisi Bala ≫.

K : ≪ l'électeur a choisi Kadri ≫.

D'après l'énoncé :

$p(\mathrm{V}) = \frac{60}{100} = 0{,}6$; $p(\mathrm{A}/\mathrm{V}) = \frac{3}{8}$; $p(\mathrm{B}/\mathrm{V}) = \frac{1}{2}$; $p(\mathrm{K}/\mathrm{V}) = \frac{1}{8}$.

On est ici en face d'une **loi binominale.**

« Choisir un habitant de ZATA » est appelé **épreuve** ;

On a répété **5 fois** cette action, donc $n = 5$.

« Trouver que l'habitant choisi ait voté » est appelé **succès.**

On a trouvé que tous les cinq ont voté, donc $k = 5$.

La probabilité de ce succès est $p = p(\mathrm{V}) = 0{,}6$.

La probabilité recherchée est donc $\alpha = \mathrm{C}_n^k . p^k(1-p)^{n-k}$,

soit $\alpha = \mathrm{C}_5^5 . (0{,}6)^5(1-0{,}6)^{5-5} = 0{,}0777$.

2). Calculons la probabilité pour qu'un habitant quelconque de ZATA choisisse Bala :

La probabilité recherchée est $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{V})$.

On sait que $p(\mathrm{B}/\mathrm{V}) = \frac{p(\mathrm{B}\cap\mathrm{V})}{p(\mathrm{V})}$, donc $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{V}) = p(\mathrm{V}) \times p(\mathrm{B}/\mathrm{V})$,

soit $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{V}) = 0{,}6 \times \frac{1}{2} = 0{,}3$.

3). Déterminons la loi de probabilité de X :

X est la variable aléatoire associée au nombre de voix obtenues par Bala. Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

On est en face d'une loi binominale de paramètres :

$n = 5$, $p = p(\mathrm{B} \cap \mathrm{V}) = 0{,}3$ et $k \in \{0;1;2;3;4;5\}$.

A chaque valeur de X, la probabilité associée sera :

$\alpha = \mathrm{C}_n^k . p^k(1-p)^{n-k}$.

Ce qui permet d'avoir :

$p(\mathrm{X}=0) = \mathrm{C}_5^0 . (0{,}3)^0(1-0{,}3)^{5-0} = 0{,}16807$;

$p(\mathrm{X}=1) = \mathrm{C}_5^1 . (0{,}3)^1(1-0{,}3)^{5-1} = 0{,}36015$;

$p(\mathrm{X}=2) = \mathrm{C}_5^2 . (0{,}3)^2(1-0{,}3)^{5-2} = 0{,}3087$;

$p(\mathrm{X}=3) = \mathrm{C}_5^3 . (0{,}3)^3(1-0{,}3)^{5-3} = 0{,}1323$;

$p(\mathrm{X}=4) = \mathrm{C}_5^4 . (0{,}3)^4(1-0{,}3)^{5-4} = 0{,}02835$;

$p(\mathrm{X}=5) = \mathrm{C}_5^5 . (0{,}3)^5(1-0{,}3)^{5-5} = 0{,}0243$.

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,16807	0,36015	0,3087	0,1323	0,02835	0,00243

Calculons E(X) et V(X) :

X suit une loi binominale, donc $E(X) = n.p$ et $V(X) = np(1-p)$.

On aura $E(X) = 5 \times 0{,}3 = 1{,}5$ et $V(X) = 1{,}5(1-0{,}3) = 1{,}05$.

4). Calculons la probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Kadri :

La probabilité recherchée est $p(K \cap V)$.

On sait que $p(K / V) = \frac{p(K \cap V)}{p(V)}$, donc $p(K \cap V) = p(V) \times p(K / V)$,

soit $p(K \cap V) = 0{,}6 \times \frac{1}{8} = 0{,}075$.

5). Calculons $\mathbf{P}_n$:

On est en face d'une loi binominale.

La probabilité d'avoir zéro (0) succès pendant les n épreuves répétées est $P_n = C_n^0.(0{,}75)^0(1-0{,}075)^n = (0{,}925)^n$.

6). Déterminons le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que Kadri obtienne au moins une voix avec une probabilité supérieure ou égale à 15/16 :

≪ Avoir zéro voix ≫ et ≪ Avoir au moins une voix≫ sont deux **événements contraires**, donc la probabilité que Kadri ait au moins une voix est $\overline{P_n} = 1 - P_n = 1 - (0{,}925)^n$.

Le nombre minimum d'habitants s'obtient en résolvant dans IN l'inéquation $\overline{P_n} > 15/16$.

On aura $1 - (0{,}925)^n > 15/16$, soit $(0{,}925)^n > 1 - \frac{15}{16}$,

soit $\ell n(0{,}925)^n > ln\left(\frac{1}{16}\right)$, soit $n.\ell n(0{,}925) = \ell n\left(\frac{1}{16}\right)$,

soit $n = \frac{\ell n\left(\frac{1}{16}\right)}{\ell n(0{,}925)} = 35{,}5635$.

Le nombre minimum recherché d'habitants est $\boldsymbol{n = 36}$.

EXERCICE 2

Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) :

$\boldsymbol{z^4 - (5 - 14i)z^2 - 24 - 10i = 0}$ **:**

Changement de variable :

Posons $z^2 = u$ avec u un nombre complexe non nul.

(E) devient alors $u^2 - (5 - 14i)u - 24 - 10i = 0$ (E_u).

Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_u) :

∗ Discriminant Δ :

$\Delta = (5 - 14i)^2 - 4(1)(-24 - 10i)$

$\Delta = 5^2 - 2(5)(14i) + (14i)^2 - 4(1)(-24 - 10i)$

$\Delta = 25 - 140i - 196 + 96 + 40i$

$\Delta = -75 - 100i$ d'où $|\Delta| = \sqrt{(-75)^2 + (-100)^2} = 125.$

∗ Racines carrées de Δ :

Soit un nombre complexe $v = x + i\,y$ tel que $v^2 = \Delta$.

On aura ainsi :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ xy(\text{du signe de } \mathrm{Im}(\Delta)) \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x^2 + y^2 = 125 \\ x^2 - y^2 = -75 \\ xy < 0 \end{cases},$$

$$\text{soit } \begin{cases} 2x^2 = 50 \\ 2y^2 = 200 \\ xy < 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 100 \\ xy < 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x = -5 \text{ ou } x = 5 \\ y = -10 \text{ ou } y = 10, \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} x = -5 \\ y = 10 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 5 \\ y = -10 \end{cases}, \text{ soit } v = -5 + 10i \text{ ou } v = 5 - 10i.$$

Les racines carrées de Δ sont $v_1 = -5 + 10i$ et $v_2 = 5 - 10i$.

∗ Solutions de l'équation (E_u) :

En utilisant une seule racine carrée de Δ :

$$u_1 = \frac{(5 - 14i) - v_1}{2(1)} = \frac{(5 - 14i) - (-5 + 10i)}{2(1)} = \frac{10 - 24i}{2} = 5 - 12i\ ;$$

$$u_2 = \frac{(5 - 14i) + v_1}{2(1)} = \frac{(5 - 14i) + (-5 + 10i)}{2(1)} = \frac{-4i}{2} = -2i.$$

∗ Solutions de l'équation (E) :

Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = u$:

Les solutions de cette équation sont les **racines carrées de** $\boldsymbol{u}$.

Racines carrées de $\boldsymbol{u_1}$:

Soit $z = x + i\,y$ tel que $z^2 = u_1$.

On aura ainsi :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |u_1| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(u_1) \\ xy(\text{du signe de } \mathrm{Im}(u_1)) \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x^2 + y^2 = |5 - 12i| = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ xy < 0 \end{cases},$$

$$\text{soit } \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 8 \\ xy < 0 \end{cases}, \text{soit } \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ y = -2 \text{ ou } y = 2, \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}, \text{soit } z = -3 + 2i \text{ ou } z = 3 - 2i.$$

Les solutions recherchées sont : $z_1 = -3 + 2i$ et $z_2 = 3 - 2i$.

Racines carrées de $\boldsymbol{u_2}$:

Soit $z = x + iy$ tel que $z^2 = u_2$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |u_2| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(u_2) \\ xy(\text{du signe de } \mathrm{Im}(u_2)) \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x^2 + y^2 = |-2i| = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ xy < 0 \end{cases},$$

$$\text{soit } \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 2 \\ xy < 0 \end{cases}, \text{soit } \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 1 \\ y = -1 \text{ ou } y = 1, \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \text{soit } z = -1 + i \text{ ou } z = 1 - i.$$

Conclusion :

Les solutions de (E) sont : $-3 + 2i$; $3 - 2i$; $-1 + i$ et $1 - i$.

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{-3 + 2i \; ; \; 3 - 2i \; ; \; -1 + i \; ; \; 1 - i\}$.

PROBLÈME

Partie I :

$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ell n(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $D_{f_n} =]\,0\,;\,+\infty\,[$.

1). Dressons le tableau de variation de f_n :

Limites aux bornes de D_{f_n} :

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - n + \frac{n}{2}\ell n(x)\right)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x - n) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{n}{2}\ell n(x) = +\infty \end{cases}$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

* $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x - n + \frac{n}{2}\ell n(x)\right)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} (x - n) = -n \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{n}{2}\ell n(x) = -\infty \end{cases}$, d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = -\infty$.

* **Sens de variations de f_n :**

$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ell n(x)$.

• Dérivabilité et dérivée de f_n :

f_n est la somme de deux fonctions : $x \longmapsto x - n$ et $x \longmapsto \frac{n}{2}\ell n(x)$.

La fonction $x \longmapsto x - n$ est une fonction polynôme, elle est continue et dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$;

La fonction $x \longmapsto \frac{n}{2}\ell n(x)$ est une fonction logarithme, elle est continue et dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Donc f_n est continue et dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

$\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[$, $f_n'(x) = \left(x - n + \frac{n}{2}\ell n(x)\right)' = 1 + \frac{n}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{2x+n}{2x}$.

$f_n'(x) = \frac{2x+n}{2x}$.

Or $\forall x \in]\,0\,;\,+\infty\,[$, $(2x+n) > 0$ et $2x > 0$, donc $f_n'(x) > 0$.

D'où f_n est strictement croissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

∗ **Tableau de variations de f_n :**

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	
f_n	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

∗ **Déduisons-en l'existence d'un réel unique a_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$:**

D'après son tableau de variation, f_n est continue et strictement croissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Donc f_n est bijective de $]\,0\,;\,+\infty\,[$ sur IR.

De plus, $0 \in\,]-\infty\,;+\infty\,[$.

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution réelle unique a_n.

2). **Démontrons que $1 \leq a_n \leq e^2$ et que $\ell n(a_n) = 2 - \frac{2}{n}a_n$:**

■ **Démontrons que $1 \leq a_n \leq e^2$:**

$f_n(1) = 1 - n + \frac{n}{2}\ell n(1) = 1 - n$ et $1 - n < 0$, donc $f_n(1) < 0$;

$f_n(e^2) = e^2 - n + \frac{n}{2}\ell n(e^2) = e^2 - n + n = e^2$, donc $f_n(e^2) > 0$.

$\begin{cases} f_n(1) < 0 \\ f_n(e^2) > 0 \end{cases}$, donc $f_n(1) \times f_n(e^2) < 0$.

Par conséquent, $a_n \in [\,1\ ;\ e^2\,]$.

On peut aussi écrire $1 \leq a_n \leq e^2$.

■ **Démontrons que $\ell n(a_n) = 2 - \frac{2}{n}a_n$:**

En posant $f_n(a_n) = 0$, on trouve $a_n - n + \frac{n}{2}\ell n(a_n) = 0$,

soit $\frac{n}{2}\ell n(a_n) = n - a_n$, soit $\ell n(a_n) = \frac{2n - 2a_n}{n} = 2 - \frac{2}{n}a_n$.

3). Exprimons $f_{n+1}(a_n)$ en fonction de a_n et n, puis déduisons-en le sens de variation de la suite de terme général a_n :

$f_{n+1}(x) = x - (n+1) + \frac{n+1}{2}\ell n(x)$ implique que

$f_{n+1}(a_n) = a_n - (n+1) + \frac{n+1}{2}\ell n(a_n)$.

Or $\ell n(a_n) = 2 - \frac{2}{n}a_n$.

Ce qui permet d'avoir :

$f_{n+1}(a_n) = a_n - (n+1) + \frac{n+1}{2}\left[2 - \frac{2}{n}a_n\right]$

$f_{n+1}(a_n) = a_n - n - 1 + (n+1) - \frac{n+1}{n}a_n$

$f_{n+1}(a_n) = a_n - n - 1 + n + 1 - a_n - \frac{1}{n}a_n$

$f_{n+1}(a_n) = -\frac{1}{n}a_n$.

■ **Sens de variation de la suite de terme général a_n :**

• Etudions le signe de la différence $a_{n+1} - a_n$:

a_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$, ce qui permet d'écrire $f_n(a_n) = 0$, puis $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} f_{n+1}(a_{n+1}) = 0 \\ f_{n+1}(a_n) = -\frac{1}{n}a_n \end{cases}$;

Donc $f_{n+1}(a_{n+1}) - f_{n+1}(a_n) = 0 - \left(-\frac{1}{n}a_n\right) = \frac{1}{n}a_n$.

D'où $f_{n+1}(a_{n+1}) - f_{n+1}(a_n) > 0$ car $\frac{1}{n} > 0$ et $a_n > 0$;

$f_{n+1}(a_{n+1}) - f_{n+1}(a_n) > 0$ signifie que $f_{n+1}(a_{n+1}) > f_{n+1}(a_n)$.

Rappelons que f_n est bijective et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. Il en est de même pour f_{n+1}.

Donc si $f_{n+1}(a_{n+1}) > f_{n+1}(a_n) > 0$ alors $a_{n+1} > a_n$.

Par conséquent, la suite (a_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

4). Démontrons que la suite $(a_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est convergente :

D'après la 2ème question, $1 \leq a_n \leq e^2$, d'où la suite $(a_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est majorée par e^2.

D'après la 3ème question, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
En résumé, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée,
d'où elle est convergente.
Soit ℓ la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5). Calculons la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\ell n(a_n)$ en utilisant les résultats de la 2ème question et déduisons-en ℓ :

D'après la 2ème question, $\ell n(a_n) = 2 - \frac{2}{n} a_n$.

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell n(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{2}{n} a_n\right)$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n) = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n}\right) = 0 \end{cases}, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \ell n(a_n) = 2 - 0 \times \ell = 2.$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell n(a_n) = 2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e^2$.

On en déduit que $\ell = e^2$.

Partie II :

$g(x) = \frac{2x - \ell n(x)}{2\sqrt{x}}$ et $D_g =]\,0\,;\,+\infty\,[$; $h(x) = \sqrt{x}$.

1). Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

■ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{2x - \ell n(x)}{2\sqrt{x}}\right)$;

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} (2x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (-\ell n(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (2\sqrt{x}) = 0^+ \end{cases}, \text{ d'où } \lim_{x\to 0^+} g(x) = \text{«} \frac{+\infty}{0^+} \text{»} = +\infty.$$

■ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x - \ell n(x)}{2\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x}} - \frac{\ell n(x)}{2\sqrt{x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{\ell n(\sqrt{x}^2)}{2\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{2\ell n(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{\ell n(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ell n(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right) = 0$ (en posant $X = \sqrt{x}$).

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2). Vérifions que $g'(x) = \frac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}$ **:**

$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ell n(x) \Longrightarrow f_1(x) = x - 1 + \frac{\ell n(x)}{2}$.

g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$ on aura :

$$g'(x) = \left(\frac{2x - \ell n(x)}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{(2x - \ell n(x))'(2\sqrt{x}) - (2\sqrt{x})'(2x - \ell n(x))}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right)(2\sqrt{x}) - \left(\frac{2}{2\sqrt{x}}\right)(2x - \ell n(x))}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{\left(\frac{2x-1}{x}\right)(2\sqrt{x}) - \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)(2x - \ell n(x))}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{(2\sqrt{x})(2x-1) - \sqrt{x}(2x - \ell n(x))}{x(2\sqrt{x})^2} = \frac{(2\sqrt{x})(2x-1) - 2\sqrt{x}\left(x - \frac{\ell n(x)}{2}\right)}{x(2\sqrt{x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{(2\sqrt{x})\left[(2x-1) - \left(x - \frac{\ell n(x)}{2}\right)\right]}{x(2\sqrt{x})^2} = \frac{(2\sqrt{x})\left[2x - 1 - x + \frac{\ell n(x)}{2}\right]}{x(2\sqrt{x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{\left[x - 1 + \frac{\ell n(x)}{2}\right]}{x(2\sqrt{x})} = \frac{\left[x - 1 + \frac{\ell n(x)}{2}\right]}{2x\sqrt{x}} = \frac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}.$$

Par conséquent, $g'(x) = \frac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}$ pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$.

Déduisons-en le tableau de variation de g **:**

$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ 2x\sqrt{x} > 0$.

Donc $g'(x)$ a le même signe que $f_1(x)$.

$f_1(x) = x - 1 + \frac{\ell n(x)}{2} \Longrightarrow f_1(1) = 1 - 1 + \frac{\ell n(1)}{2} = 0$.

Etudions le signe de $f_1(x)$ **sur** $]0\,;1]$ **et** $]1\,;+\infty[$ **:**

• Si $x \in]0\,;1]$, on aura :

$\begin{cases} x \leq 1 \\ \ell n(x) \leq 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ \ell n(x) \leq 0 \end{cases}$, d'où $x - 1 + \frac{\ell n(x)}{2} \leq 0$, soit $f_1(x) \leq 0$.

Conséquence : g est décroissante sur $]0\,;1]$.

Si $x \in]1\,;+\infty[$, on aura :

$\begin{cases} x > 1 \\ \ell n(x) > 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ \ell n(x) > 0 \end{cases}$, d'où $x - 1 + \frac{\ell n(x)}{2} > 0$, soit $f_1(x) > 0$.

Conséquence : g est strictement croissante sur $]0\,;1]$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Indication : $g(1) = \frac{2(1) - \ell n(1)}{2\sqrt{1}} = 1.$

3). Précisons les positions relatives des deux courbes (C) et (C') et calculons la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $[\,g(x) - h(x)\,]$:

• $\forall\, x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[$:

$$g(x) - h(x) = \frac{2x - \ell n(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{2x - \ell n(x) - 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{-\ell n(x)}{2\sqrt{x}}$$

• $\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[,\ 2\sqrt{x} > 0$.

D'où $g(x) - h(x)$ a le même signe que $-\ell n(x)$.

$-\ell n(x) = 0 \Leftrightarrow \ell n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Conclusion :

* **Si** $\boldsymbol{x} \in \,]\,\mathbf{0}\,;\,\mathbf{1}\,[\,, -\ell n(x) > 0$, d'où $g(x) - h(x) > 0$.

Dans ce cas, la courbe (C) est **au dessus** de la courbe (C') ;

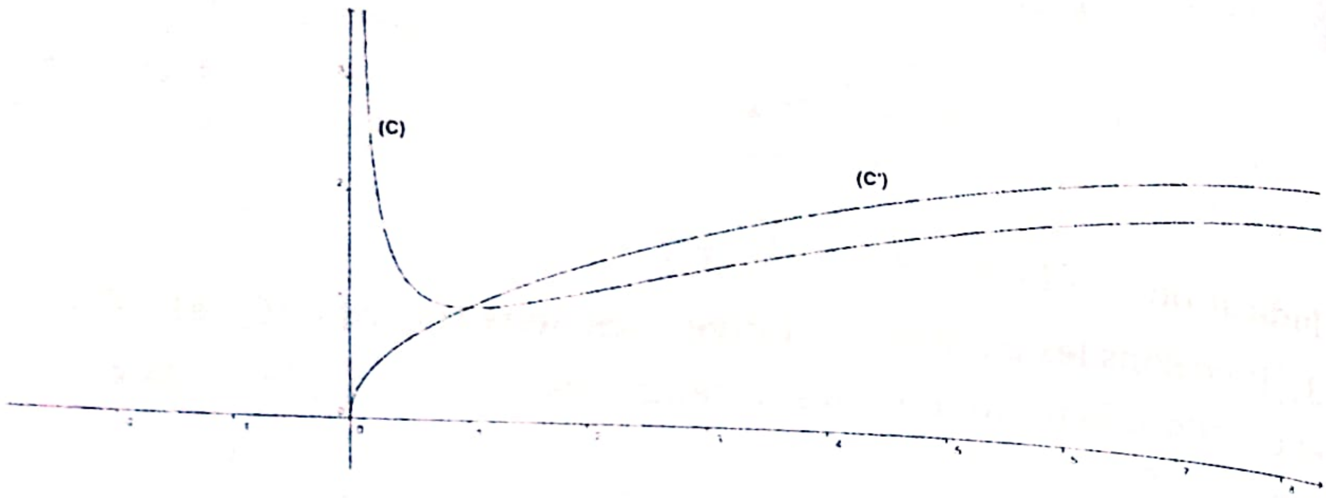
* **Si** $\boldsymbol{x = 1}$, les courbes (C) et (C') **se croisent** au point de coordonnées $\big(1\,;g(1)\big)$: le point de coordonnées $(1\,;1)$;

* **Si** $\boldsymbol{x} \in \,]\,\mathbf{1}\,;\,+\infty\,[\,, -\ell n(x) < 0$, d'où $g(x) - h(x) < 0$.

Dans ce cas, la courbe (C) est **en dessous** de la courbe (C').

4). Traçons les courbes (C) et (C') :

Figure :



Remarque :

$\forall\, x \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[\,,\;\; g(x) - h(x) = \frac{-\,\ell n(x)}{2\sqrt{x}}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-\,\ell n(x)}{2\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-\,\ell n(\sqrt{x}^2)}{2\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-\,2\ell n(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-\,\ell n(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right) = 0$ (en posant $X = \sqrt{x}$).

Ce qui permet d'affirmer que les courbes (C) et (C') sont asymptotes (voir figure).

5).a). Calculons $J = \int_1^2 \frac{\ell n(x)}{2\sqrt{x}}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties :

$J = \int_1^2 \frac{\ell n(x)}{2\sqrt{x}}\,dx \;\; = \int_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \ell n(x)\right) dx.$

Posons $\begin{cases} u(x) = \ell n(x) \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$. Ce qui permet d'avoir $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$.

En intégrant par parties on obtient :

$J = [\,u(x).v(x)\,]_1^2 - \int_1^2 u'(x).v(x)dx$

$$J = [\sqrt{x}.\ell n(x)]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{x} \times \sqrt{x}\right) dx$$

$$J = [\sqrt{x}.\ell n(x)]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$J = [\sqrt{x}.\ell n(x)]_1^2 - [2\sqrt{x}]_1^2 = [\sqrt{x}.\ell n(x) - 2\sqrt{x}]_1^2$$

$$J = [\sqrt{x}.\ell n(x)]_1^2 = [\sqrt{x}(\ell n(x) - 2)]_1^2$$

$$J = \left(\sqrt{2}(\ell n(2) - 2)\right) - \left(\sqrt{1}(\ell n(1) - 2)\right) = 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\ell n(2)$$

$$J = 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\ell n(2).$$

b). Déduisons-en la valeur de $I = \int_1^2 g(x)dx$:

$$I = \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{2x - \ell n(x)}{2\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{2x}{2\sqrt{x}} - \frac{\ell n(x)}{2\sqrt{x}}\right) dx$$

$$I = \int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{\ell n(x)}{2\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^2 (\sqrt{x})dx - \int_1^2 \left(\frac{\ell n(x)}{2\sqrt{x}}\right) dx.$$

Or $\quad J = \int_1^2 \frac{\ell n(x)}{2\sqrt{x}} dx.$

Donc $\quad I = \int_1^2 (\sqrt{x})dx - J = \int_1^2 (x^{1/2})dx - J = \left[\frac{x^{\left(1+\frac{1}{2}\right)}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)}\right]_1^2 - J$

$$I = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 - J = \left(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - J$$

$$I = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) - \frac{2}{3} - (2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\ell n(2))$$

$$I = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} - 2 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\ell n(2)$$

$$I = \frac{4\sqrt{2} - 2 - 6 + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,\ell n(2)}{3} = \frac{10\sqrt{2} - 8 - 3\sqrt{2}\,\ell n(2)}{3} = \frac{10\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,\ell n(2) - 8}{3}$$

$$I = \frac{10\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,\ell n(2) - 8}{3}.$$

EXERCICE 1

Données :

(E_1) : $3z^2 + 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i = 0$

(E_2) : $3z^2 + 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i = \overline{z} + \frac{2}{3} + i.$

1).a). Résolvons l'équation (E_1) :

* Discriminant Δ :

$\Delta = \left(2(2-3i)\right)^2 - 4(3)\left(-\frac{5}{3} - 4i\right)$

$\Delta = (4-6i)^2 + 20 + 48i$

$\Delta = (4)^2 - 2(4)(6i) + (6i)^2 + 20 + 48i$

$\Delta = 16 - 48i - 36 + 20 + 48i$

$\Delta = 36 - 36 + 48i - 48i = 0.$

$\Delta = 0$, donc l'équation admet une racine double z_0 telle que :

$z_0 = \frac{-\left(2(2-3i)\right)}{2(3)} = -\frac{2}{3} + i.$

Donc l'ensemble de solutions de (E_1) est $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{2}{3} + i\right\}$.

b). Montrons que $9\left(z + \frac{2}{3} - i\right)^2 = 3\overline{z} + 2 + 3i$:

Soit un polynôme P tel que $P(z) = 3z^2 + 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i.$

(E_1) devient alors l'équation $P(z) = 0.$

(E_1) admet une racine double z_0, d'où z_0 est un zéro du polynôme P et on peut écrire :

$P(z) = 3(z - z_0)^2 = 3\left(z - \left(-\frac{2}{3} + i\right)\right)^2 = 3\left(z + \frac{2}{3} - i\right)^2.$

Or (E_2) : $3z^2 + 2(2-3i)z - \frac{5}{3} - 4i = \overline{z} + \frac{2}{3} + i.$

(E_2) devient alors l'équation $P(z) = \overline{z} + \frac{2}{3} + i\,.$

Ce qui permet d'avoir :

$3\left(z+\frac{2}{3}-i\right)^2=\overline{z}+\frac{2}{3}+i.$

En multipliant cette équation par 3, on obtient :

$3^2\left(z+\frac{2}{3}-i\right)^2=3\left(\overline{z}+\frac{2}{3}+i\right)$, soit $9\left(z+\frac{2}{3}-i\right)^2=3\overline{z}+2+3i$.

Conclusion : $9\left(z+\frac{2}{3}-i\right)^2=3\overline{z}+2+3i.$

c). Déduisons-en que pour tout nombre complexe z solution de l'équation (E_2), il existe un nombre complexe $\varphi(z)$ tel que $[\varphi(z)]^2=\overline{\varphi(z)}$:

Si $9\left(z+\frac{2}{3}-i\right)^2=3\overline{z}+2+3i$, alors on peut écrire :

$3^2\left(z+\frac{2}{3}-i\right)^2=3\left(\overline{z}+\frac{2}{3}+i\right)$

$\left[3\left(z+\frac{2}{3}-i\right)\right]^2=3\left(\overline{z}+\frac{2}{3}+i\right)$

$\left[3\left(z+\frac{2}{3}-i\right)\right]^2=\overline{3\left(z+\frac{2}{3}-i\right)}.$

En posant $\varphi(z)=3\left(z+\frac{2}{3}-i\right)$ l'équation précédente devient :

$[\varphi(z)]^2=\overline{\varphi(z)}$.

On en déduit que pour tout z solution (E_2), il existe un nombre complexe $\varphi(z)$ tel que $[\varphi(z)]^2=\overline{\varphi(z)}$.

d). En posant $\varphi(z)=T$, démontrons que $T=0$ ou $|T|=1$, puis résolvons l'équation $T^2=\overline{T}$:

Soit à résoudre l'équation $[\varphi(z)]^2=\overline{\varphi(z)}$:

En posant $\varphi(z)=T$, l'équation devient alors $T^2=\overline{T}$.

En utilisant le module de chaque coté on obtient :

$|T^2|=|\overline{T}|$, soit $|T|^2=|\overline{T}|=|T|$, soit $|T|^2=|T|$,

soit $|T|(|T|-1)=0$, soit $|T|=0$ ou $|T|=1$,

soit $T=0$ ou $|T|=1$.

■ **Résolvons l'équation $T^2 = \overline{T}$:**

Posons $T = a + i\,b$

Ainsi $T^2 = \overline{T} \Leftrightarrow (a+ib)^2 = a - i\,b \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = a - i\,b$

$\Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = a - ib$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ b(2a+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ b = 0 \text{ ou } a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = b^2 \\ b = 0 \text{ ou } a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b^2 = a^2 - a \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Les solutions de l'équation $T^2 = \overline{T}$ sont donc :

$0\,;\ 1\ ;\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Par conséquent, $S_C = \left\{0\,;\ 1\ ;\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$

2). Résolvons l'équation (E_2) :

Rappelons que $\varphi(z) = 3\left(z + \frac{2}{3} - i\right) = T.$

* Si $T = 0$, on aura $3\left(z + \frac{2}{3} - i\right) = 0$, soit $z = -\frac{2}{3} + i$;

$*$ **Si T = 1**, on aura $3\left(z+\frac{2}{3}-i\right)=1$, soit $z+\frac{2}{3}-i=\frac{1}{3}$,

soit $z=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+i=-\frac{1}{3}+i$;

$*$ **Si** $\mathbf{T}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$, on aura $3\left(z+\frac{2}{3}-i\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

soit $z+\frac{2}{3}-i=-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$, soit $z=-\frac{2}{3}+i-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$,

soit $z=-\frac{5}{6}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$;

$*$ **Si** $\mathbf{T}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$, on aura $3\left(z+\frac{2}{3}-i\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

soit $z+\frac{2}{3}-i=-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$, soit $z=-\frac{2}{3}+i-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$,

soit $z=-\frac{5}{6}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$.

Les solutions de l' équation (E_2) sont alors :

$-\frac{2}{3}+i$; $-\frac{1}{3}+i$; $-\frac{5}{6}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$; $-\frac{5}{6}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$.

D' où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{2}{3}+i\ ;\ -\frac{1}{3}+i\ ;\ -\frac{5}{6}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i\ ;\ -\frac{5}{6}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i\right\}$.

3).a). Nature du triangle ABC :

Données : $z_1=z_A=-\frac{1}{3}+i$; $z_2=z_B=-\frac{5}{6}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$;

$z_3=z_C=-\frac{5}{6}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$.

Déterminions les cotés du triangle ABC :

$AB=|z_B-z_A|=\left|-\frac{5}{6}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i+\frac{1}{3}-i\right|$

$AB=\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{36}}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$BC=|z_C-z_B|=\left|-\frac{5}{6}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i+\frac{5}{6}-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i\right|$

$BC=\left|-\frac{2\sqrt{3}}{6}i\right|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$CA=|z_A-z_C|=\left|-\frac{1}{3}+i+\frac{5}{6}-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)i\right|$

$$CA = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ BC = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ CA = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$, donc $AB = BC = CA$, d'ìo ABC est équilatéral.

b). Déterminons l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un losange :

ABDC est un losange si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Soit $z_D = x + iy$ l'affixe de D. Soit donc $D(x\,;y)$.

A, B, C sont les points d'affixes respectives :

$-\frac{1}{3} + i$; $-\frac{5}{6} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$; $-\frac{5}{6} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i$.

Donc $A\left(-\frac{1}{3}\,;1\right)$; $B\left(-\frac{5}{6}\,;1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ et $C\left(-\frac{5}{6}\,;\,1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

Ce qui permet d'avoir :

$\overrightarrow{AD}\left(x + \frac{1}{3}\,;\,y - 1\right)$ et $\overrightarrow{BC}\left(-\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\,;1 - \frac{\sqrt{3}}{6} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$,

soit $\overrightarrow{AD}\left(x + \frac{1}{3}\,;\,y - 1\right)$ et $\overrightarrow{BC}\left(0\,;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

$\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ **et** $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ **sont orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 0\left(x + \frac{1}{3}\right) + (y - 1)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1\,;$$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{CD}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_{\overrightarrow{CD}} \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_{\overrightarrow{CD}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = x + \frac{5}{6} \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_{\overrightarrow{CD}} \end{cases}.$$

$$-\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = x + \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{-5 + 2 - 5}{6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

Par conséquent, $\begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = 1 \end{cases}$ et $z_D = x + i\,y = -\frac{4}{3} + i$.

EXERCICE 2

Données :

Temps (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Recettes (y_i)	4	5	5	7	8	9	9	9
Dépenses (z_i)	4	5	α	8	7	8	β	9

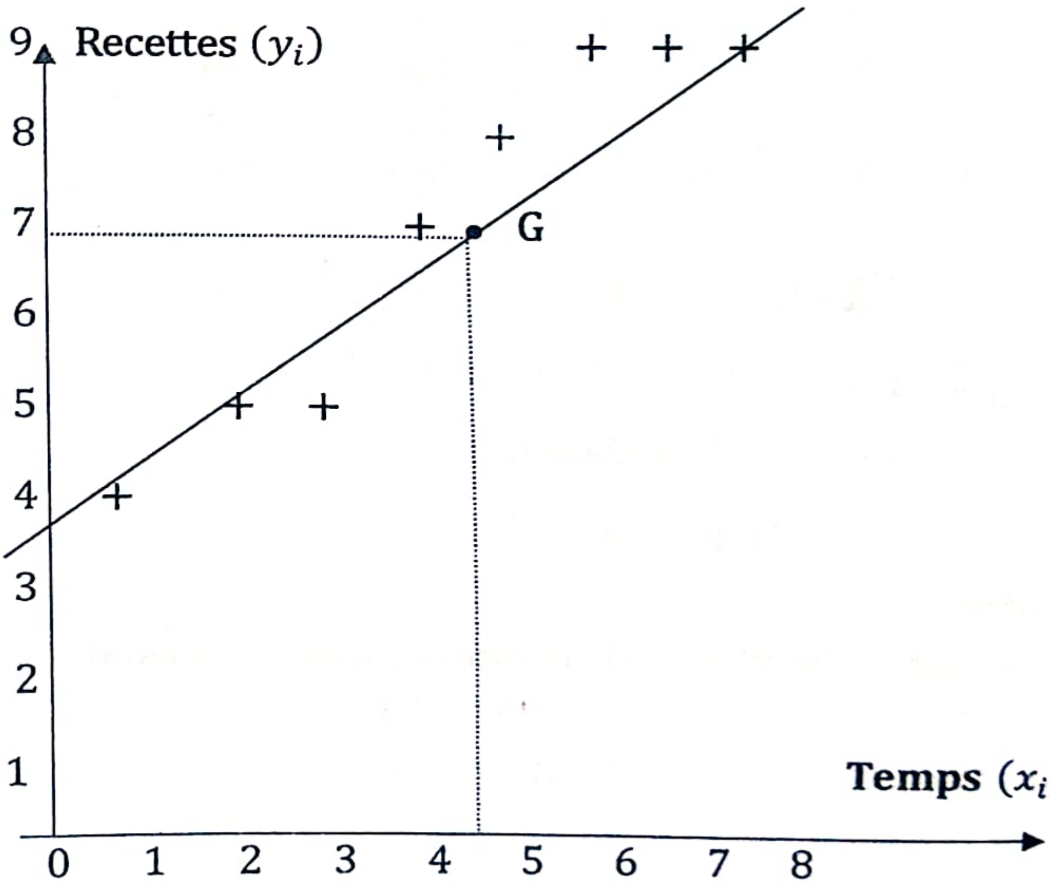
1).a). Représentons le nuage des points des recettes en fonction du temps :

Coordonnées du point moyen G :

$$x_G = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

et $y_G = \frac{4+5+5+7+8+9+9+9}{8} = \frac{56}{8} = 7.$

Figure :



b). Déterminons par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement des recettes par rapport au temps :

L'équation de la droite d'ajustement est de la forme

$y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(x\,;y)}{\text{V}(x)}$; $b = \overline{y} - a\overline{x}$;

$\overline{x} = x_G = \frac{9}{2}$ et $\overline{y} = y_G = 7$.

Représentons en extension l'ensemble des valeurs prises par

x_i ; y_i ; z_i ; $x_i y_i$; x_i^2 et z_i^2 et leurs totaux :

x_i	y_i	z_i	$x_i y_i$	x_i^2	z_i^2
1	4	4	4	1	16
2	5	5	10	4	25
3	5	α	15	9	α^2
4	7	8	28	16	64
5	8	7	40	25	49
6	9	8	54	36	64
7	9	β	63	49	β^2
8	9	9	72	64	81
36	56	$41 + \alpha + \beta$	286	204	$299 + \alpha^2 + \beta^2$

$\text{cov}(x\,;y) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y} = \frac{1}{8}(286) - \frac{9}{2} \times 7 = 4{,}25.$

$\text{V}(x) = \left(\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i^2\right) - \overline{x}^{\,2} = \frac{1}{8}(204) - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5{,}25.$

Donc $a = \frac{\text{cov}(x\,;y)}{\text{V}(x)} = \frac{4{,}25}{5{,}25} = 0{,}8095 \approx 0{,}81$;

$b = \overline{y} - a\overline{x} = 7 - 0{,}81 \times \frac{9}{2} = 3{,}35.$

Conclusion :

Une équation recherchée de la droite d'ajustement est donc :

$y = ax + b$ c'est-à-dire $y = 0{,}81x + 3{,}35.$

Pour la représentation de cette droite, voir figure.

2). Déterminons α et β tel que $\alpha < \beta$:

Données : $\overline{z} = 7$ et $V(z) = 3$.

D'après le tableau précédent on a :

$\sum_{i=1}^{8} z_i = 41 + \alpha + \beta$ et $\sum_{i=1}^{8} {z_i}^2 = 299 + \alpha^2 + \beta^2$.

Ce qui permet d'avoir :

$\overline{z} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} z_i = \frac{1}{8}(41 + \alpha + \beta) = 7$;

$V(z) = \left(\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} {z_i}^2\right) - \overline{z}^2 = \frac{1}{8}(299 + \alpha^2 + \beta^2) - 7^2 = 3$.

Résolvons dans $\mathbb{N}^{*2}$ le système $\begin{cases} \frac{1}{8}(41 + \alpha + \beta) = 7 \\ \frac{1}{8}(299 + \alpha^2 + \beta^2) - 7^2 = 3 \end{cases}$:

$\frac{1}{8}(41 + \alpha + \beta) = 7 \Leftrightarrow 41 + \alpha + \beta = 56 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 15$;

$\frac{1}{8}(299 + \alpha^2 + \beta^2) - 7^2 = 3 \Leftrightarrow 299 + \alpha^2 + \beta^2 = 8(7^2 + 3) = 416$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 416 - 299 = 117$.

Le système devient $\begin{cases} \alpha + \beta = 15 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 117 \end{cases}$, soit $\begin{cases} \beta = 15 - \alpha \\ \alpha^2 + \beta^2 = 117 \end{cases}$,

soit $\begin{cases} \beta = 15 - \alpha \\ \alpha^2 + (15 - \alpha)^2 = 117 \end{cases}$.

$\alpha^2 + (15 - \alpha)^2 = 117 \Leftrightarrow \alpha^2 + 225 - 30\alpha + \alpha^2 = 117$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2 - 30\alpha + 225 - 117 = 0$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2 - 30\alpha + 108 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 15\alpha + 54 = 0$.

- Résolvons dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $\alpha^2 - 15\alpha + 54 = 0$:

* Discriminant : $\Delta = (-15)^2 - 4(1)(54) = 9 = 3^2$.

* Solutions : $\alpha_1 = \frac{15 - 3}{2(1)} = 6$ et $\alpha_2 = \frac{15 + 3}{2(1)} = 9$.

Si $\alpha = \alpha_1 = 6$, alors $\beta = 15 - \alpha = 15 - 6 = 9$;

Si $\alpha = \alpha_1 = 9$, alors $\beta = 15 - \alpha = 15 - 9 = 6$.

Or $\alpha < \beta$, donc on prendra $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 9 \end{cases}$.

PROBLÈME

I. Donnée : (E) : $y'' + 2y' + y = 0$.

Déterminons la solution g de (E) vérifiant les conditions : $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$:

Résolvons l'équation (E) :

L'équation caractéristique de (E) est (E_c) : $r^2 + 2r + 1 = 0$.

$r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$ (racine bouble).

La solution générale de (E) se présente sous la forme de :

$y_G = (Ax + B)e^{-x}$ avec A et B des constantes réelles.

Si g est solution de (E), on peut écrire $g(x) = (Ax + B)e^{-x}$.

Les conditions $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{1}{e}$ permettent d'avoir :

$g(0) = Be^0 = B = 1$ et $g(1) = (A + B)e^{-1} = (A + 1)e^{-1} = \frac{2}{e}$.

D'où $B = 1$ et $A + 1 = 2$, soit $A = 1$.

Par conséquent, $g(x) = (x + 1)e^{-x}$.

II. **1). a). Démontrons que f est continue sur $[-1\,;+\infty[$:**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{x+1}} \text{ si } x \in]-1\,;+\infty[\\ f(-1) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } h(x) = (1+x)e^{-x}.$$

Simplifions l'expression $f(x)$:

Si $x \in]-1\,;+\infty[$ on aura :

$$f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{x+1}} = \frac{(1+x)e^{-x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{(1+x)e^{-x}\sqrt{x+1}}{(x+1)} = e^{-x}\sqrt{x+1}.$$

Donc $\begin{cases} f(x) = e^{-x}\sqrt{x+1} \text{ si } x \in]-1\,;+\infty[\\ f(-1) = 0 \end{cases}$.

- Continuité de f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$:

f est le produit de deux fonctions : $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto \sqrt{x+1}$.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est une fonction exponentielle, elle est continue sur IR ; la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est une fonction irrationnelle, elle est continue sur $]-1\,;+\infty[$.

D'où la continuité de f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

■ Continuité à droite de $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{h(x)}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(1+x)e^{-x}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(1+x)e^{-x}\sqrt{x+1}}{(x+1)}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} e^{-x}\sqrt{x+1} = e^{-1}\sqrt{-1+1} = 0.$$

Or $f(-1) = 0$, donc $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 0$.

D'où f est continue à droite en $x = -1$.

Conclusion : f est continue sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

b). Etudions la dérivabilité à droite de f en $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{e^{-x}\sqrt{x+1}-0}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{e^{-x}(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{e^{-1}}{\sqrt{-1+1}} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty.$$

Par conséquent, f n'est pas dérivable à droite de $x = -1$.

c). Calculons $\lim_{x\to +\infty} f(x)$:

Utilisons l'expression simplifiée de $f(x)$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{-x}\sqrt{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0 \end{cases}, \text{d'où } \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \times 1 \times 0 = 0.$$

d). Etudions le sens de variation de f :

f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et $\forall x \in]-1\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(e^{-x}\sqrt{x+1}\right)' = (e^{-x})'\sqrt{x+1} + \left(\sqrt{x+1}\right)'e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x}\sqrt{x+1} + \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x+1}} = \left(-\sqrt{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)e^{-x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{-2(x+1)+1}{2\sqrt{x+1}}\right)e^{-x} = \left(\frac{-2x-1}{2\sqrt{x+1}}\right)e^{-x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{-2x-1}{2\sqrt{x+1}}\right)e^{-x}.$$

$\forall x \in]-1\,;+\infty[\,, 2\sqrt{x+1} > 0$ et $e^{-x} > 0$.

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(-2x-1)$.

$-2x-1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que :

• Si $x \in \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$, $(-2x-1) > 0$ et $f'(x) > 0$.

D'où f est strictement croissante sur $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$;

• Si $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $(-2x-1) \leq 0$ et $f'(x) \leq 0$.

D'où f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

■ **Tableau de variation de f :**

<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td></td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+\infty$ $+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f</td><td></td><td></td><td>$\sqrt{\frac{e}{2}}$</td><td>↘</td></tr>
<tr><td>0</td><td>↗</td><td></td><td>0</td></tr>
</table>

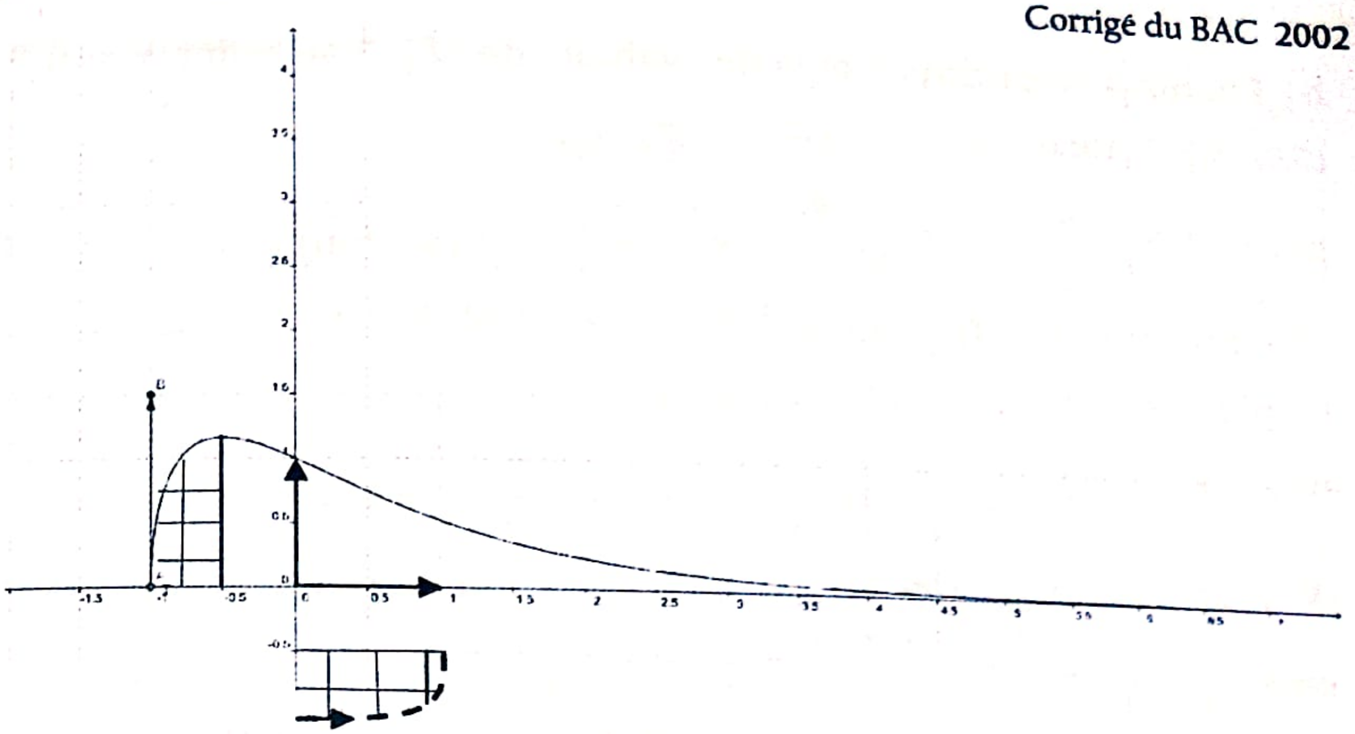
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{1/2}\sqrt{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{e} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

2). Traçons la courbe représentative de Γ de f :

Précédemment, $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que la courbe Γ de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut, au point d'abscisse $x = -1$.

De plus, la courbe Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses du repère).



NB : La Courbe Γ^{-1} est en pointillés.

3).a). Démontrons que f_1 est une bijection de $\left[-1\,;-\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J :

f est continue et strictement monotone (croissante) sur l'intervalle $\left[-1\,;-\frac{1}{2}\right]$.

f_1 étant la restriction de f à l'intervalle $\left[-1\,;-\frac{1}{2}\right]$, donc f_1 aussi est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-1\,;-\frac{1}{2}\right]$.

D'où f_1 réalise une bijection de $\left[-1\,;-\frac{1}{2}\right]$ sur $J=\left[0\,;\sqrt{\frac{e}{2}}\right]$.

* **Calculons $f_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right)$:**

En utilisant le tableau de variation de f :

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f_1\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{e}{2}}$.

Ce qui permet d'avoir : $f_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right)=-\frac{1}{2}$.

b). Etudions la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} au point $x = 0$:

Utilisons la formule $f^{-1\prime}(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$:

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x} = f_1^{-1\prime}(0) = \frac{1}{f_1'\left(f_1^{-1}(0)\right)}$.

$f(-1) = 0$, donc $f_1(-1) = 0$, d'où $f_1^{-1}(0) = -1$.

De plus, $f'(x) = f_1'(x) = \left(\frac{-2x-1}{2\sqrt{x+1}}\right)e^{-x}$;

D'où $f_1^{-1\prime}(0) = \frac{1}{f_1'\left(f_1^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f_1'\left(f_1^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f_1'(-1)}$.

Or $f_1'(-1) = \left(\frac{2-1}{2\sqrt{0^+}}\right)e = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x} = \frac{1}{f_1'(-1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Par conséquent, la fonction f_1^{-1} est dérivable en $x = 0$.

Si f_1^{-1} est dérivable en $x = 0$, elle est d'abord continue en $x = 0$.

En conclusion, f_1^{-1} est continue et dérivable en $x = 0$.

c). Traçons la courbe représentative Γ^{-1} de f_1^{-1} dans le même repère que Γ :

* $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x} = 0$, donc la courbe Γ^{-1} admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0. (Voir figure).

4).a). Montrons que $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e$ pour tout $x \in \left[-1\,;-\frac{1}{2}\right]$:

Utilisons la forme simplifiée de $f(x)$: $f(x) = e^{-x}\sqrt{x+1}$.

■ Encadrement de e^{-x}:

$x \in \left[-1\,;-\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq -x \leq 1$

$\Leftrightarrow e^{1/2} \leq e^{-x} \leq e^1 \Leftrightarrow \sqrt{e} \leq e^{-x} \leq e$.

■ Encadrement de $\sqrt{x+1}$:

$-1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-1 \leq 1+x \leq 1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 1+x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

■ Encadrement de $f(x)$:

$$\begin{cases}\sqrt{e} \leq e^{-x} \leq e \\ 0 \leq \sqrt{x+1} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}.$$

En multipliant membre à membre on obtient :

$0 \times \sqrt{e} \leq e^{-x}\sqrt{x+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \times e$, soit $0 \leq e^{-x}\sqrt{x+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e$,

soit $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e$.

Conclusion : Pour tout $x \in \left[-1 ; -\frac{1}{2}\right]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e$.

b). Déduisons-en que $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$:

$0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e$ pour $x \in \left[-1 ; -\frac{1}{2}\right]$;

De plus, f est croissante sur $\left[-1 ; -\frac{1}{2}\right]$.

En intégrant chaque membre de l'encadrement on obtient :

$\int_{-1}^{-1/2}(0)dx \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \int_{-1}^{-1/2}\left(\frac{e\sqrt{2}}{2}\right)dx$,

soit $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \left[\left(\frac{e\sqrt{2}}{2}\right)x\right]_{-1}^{-1/2}$,

soit $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \left(\frac{e\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{e\sqrt{2}}{2}\right)(-1)$,

soit $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \left(-\frac{e\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\frac{e\sqrt{2}}{2}\right)$,

soit $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$.

c). Donnons un encadrement de S à 10^{-2} près :

Considérons les deux parties rallées sur la figure. (Voir figure).

Ces deux parties ont la même aire.

Une des parties est l'aire S.

Donc, pour calculer S , on peut simplement calculer l'autre aire, c'est-à-dire l'aire limitée par la courbe Γ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, on aura $S = \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx \times (4\ cm \times 4\ cm)$.

Or $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$.

Donc $0 \times 16\ cm^2 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx \times 16\ cm^2 \leq \frac{e\sqrt{2}}{4} \times 16\ cm^2$,

soit $0 \times 16\ cm^2 \leq S \leq \frac{e\sqrt{2}}{4} \times 16\ cm^2$,

soit $0 \times 16\ cm^2 \leq S \leq \frac{2{,}72 \times \sqrt{2}}{4} \times 16\ cm^2$

soit $0 \leq S \leq 15{,}39$.

III. $n \in$ IN, $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

1). Démontrons que pour tout réel x de l'intervalle $[\,n\,;\,n+1\,]$ on a : $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$:

$x \in [\,n\,;\,n+1\,]$ signifie que $x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$.

Or f est décroissante sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty[$.

D'où, si $x \in [\,n\,;\,n+1\,]$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

• Déduisons-en que $\forall\ n \in$ IN, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$:

On sait que $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

En intégrant chaque membre sur $[\,n\,;\,n+1\,]$, on obtient :

$\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$,

soit $[\,x.f(n+1)\,]_n^{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq [\,x.f(n)\,]_n^{n+1}$,

soit $(n+1)f(n+1) - nf(n+1) \leq u_n \leq (n+1)f(n) - nf(n)$,

soit $(n+1-n)f(n+1) \leq u_n \leq (n+1-n)f(n)$,

soit $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

2). Démontons que la suite (u_n) est décroissante et convergente :

* **Démontrons que (u_n) est décroissante :**

$f(n+1) \leq u_n \leq f(n) \Leftrightarrow f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1)$.

De plus $f(n+1) \leq u_n \leq f(n) \Leftrightarrow -f(n) \leq -u_n \leq -f(n+1)$.

Donc $\begin{cases} f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1) \\ -f(n) \leq -u_n \leq -f(n+1) \end{cases}$.

En additionnant membre à membre on obtient :

$f(n+2) - f(n) \leq u_{n+1} - u_n \leq f(n+1) - f(n+1)$,

soit $f(n+2) - f(n) \leq u_{n+1} - u_n \leq 0$.

$u_{n+1} - u_n \leq 0$ signifie que la suite (u_n) **est décroissante.**

* **Démontrons que (u_n) est convergente :**

D'après le tableau de variation de f, $f(x) \geq 0$ si $x \in [0 ; +\infty[$.

Donc si $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$, alors on aura $u_n \geq 0$.

D'où (u_n) est minorée par 0.

De ce qui précède, (u_n) est **décroissante et minorée.**

Par conséquent, (u_n) est **convergente.**

CORRIGÉ DU BAC 2003

EXERCICE 1

Données :

$\sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, x_j = 281$; $\sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, x_j^{\,2} = 875$

$\sum_{i=0}^{4} n_{i.} y_i = 192$; $\sum_{i=0}^{4} n_{i.} y_i^{\,2} = 496$

$\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=0}^{4} n_{ij} x_j y_i = 604.$

1).a). Calculons la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ_x de la série x :

■ Moyenne de x :

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, x_j$.

D'après le tableau, $N = 100$.

Donc $\bar{x} = \frac{1}{100}(281) = 2{,}81.$

■ Ecart type de x :

$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$;

$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, x_j^{\,2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{100}(875) - (2{,}81)^2 = 0{,}8539.$

Donc $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0{,}8539} = 0{,}924.$

b). Calculons la moyenne $\bar{y}$ et l'écart type σ_y de la série y :

■ Moyenne de y :

$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{4} n_{i.} y_i = \frac{1}{100}(192) = 1{,}92$.

■ Ecart type de y :

$\sigma_y = \sqrt{V(y)}$;

$V(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{4} n_{i.} y_i^{\,2} - (\bar{y})^2 = \frac{1}{100}(496) - (1{,}92)^2 = 1{,}2736.$

Donc $\sigma_y = \sqrt{V(y)} = \sqrt{1{,}2736} = 1{,}129.$

2). Calculons le coefficient de corrélation linéaire :

■ Covariance :

$\mathrm{cov}(x\,;\,y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=0}^{4} n_{ij} x_j y_i - \bar{x}\,\bar{y}$

$\mathrm{cov}(x\,;\,y) = \frac{1}{100}(604) - 2{,}81 \times 1{,}92 = 0{,}6468.$

■ **Coefficient de corrélation linéaire :**

$$r = \frac{\text{cov}(x\,;y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0{,}6468}{0{,}924 \times 1{,}129} = 0{,}62\,.$$

■ Liaison entre les deux variables x et y :

$|r| = |0{,}62| = 0{,}62$, donc $|r| < 0{,}87$ car $0{,}62 < 0{,}87$.

D'où la corrélation linéaire entre les deux variables x et y est **faible**. Par conséquent, l'ajustement linéaire entre x et y n'est pas valide.

EXERCICE 2

1). Résultats $(\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b})$ possibles :

On est en face d'un tirage successif et sans remise de deux (2) boules parmi 3, d'où $\text{Card}(\Omega) = A_3^2 = 6$.

Présentons les résultats $(a\,,b)$ possibles dans un tableau :

a \ b	1	2	3
1		$(1\,,2)$	$(1\,,3)$
2	$(2\,,1)$		$(2\,,3)$
3	$(3\,,1)$	$(3\,,2)$	

NB : Le tirage sans remise explique les cases vides du tableau. Par exemple, on ne peut pas avoir $(1\,,1)$ ou $(2\,,2)$ ou $(3\,,3)$.

■ **Caractérisons géométriquement les applications correspondantes :**

Pour un couple $(a\,,b)$ on a :

$$z' = \alpha . z \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{a}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}b\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}b\right)\right].$$

L'application correspondante est la similitude de centre O, de rapport $\frac{a}{2}$ et d'angle dont une mesure est $\left(\frac{\pi}{3}b\right)$.

Présentons ces similitudes dans un tableau :

(a,b)	Centre	Rapport $\left(\frac{a}{2}\right)$	Angle $\left(\frac{\pi}{3}b\right)$	Nature	Ecriture complexe
$(1,2)$	O	$1/2$	$\frac{2\pi}{3}$	Similitude plane directe	$z' = (-1 + i\sqrt{3})z$
$(1,3)$	O	$1/2$	π	Homothétie	$z' = -\frac{1}{2}z$
$(2,1)$	O	1	$\frac{\pi}{3}$	Rotation	$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$
$(2,3)$	O	1	π	Symétrie centrale	$z' = -z$
$(3,1)$	O	$3/2$	$\frac{\pi}{3}$	Similitude plane directe	$z' = \frac{3}{4}(1 + i\sqrt{3})z$
$(3,2)$	O	$3/2$	$\frac{2\pi}{3}$	Similitude plane directe	$z' = \frac{3}{4}(-1 + i\sqrt{3})z$

2). Données :

$\alpha = \frac{a}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}b\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}b\right)\right]$; $z_0 = \sqrt{3} + i$ et $z_0' = \alpha . z_0$.

Calculons le module et l'argument de z_0 et ceux de z_0' suivant les valeurs de (a,b) :

■ Module et argument de z_0 :

$$|z_0| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2.$$

$$\begin{cases} \cos(\arg(z_0)) = \frac{\mathrm{Re}\,(z_0)}{|z_0|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\arg(z_0)) = \frac{\mathrm{Im}\,(z_0)}{|z_0|} = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{soit } \arg(z_0) = \frac{\pi}{6}(2\pi).$$

Module et argument de α :

$\alpha = \frac{a}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}b\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}b\right)\right]$, donc $|\alpha| = \frac{a}{2}$ et $\arg(\alpha) = \left(\frac{\pi}{3}b\right)(2\pi)$.

■ Module et argument de $z_0{}'$:

$z_0' = \alpha . z_0 \Longrightarrow |z_0{}'| = |\alpha . z_0| = |\alpha| . |z_0| = \frac{a}{2} \times 2 = a$.

$\arg(z_0{}') = \arg(\alpha . z_0) = \arg(\alpha) + \arg(z_0) = \left(\frac{\pi}{3}b + \frac{\pi}{6}\right)(2\pi)$

$\arg(z_0{}') = \left(\frac{\pi}{3}b + \frac{\pi}{6}\right)(2\pi)$.

Présentons dans un tableau l'ensemble des valeurs prises par $|z_0{}'|$ et $\arg(z_0{}')$:

$(a\,,b)$	$\|z_0{}'\| = a$	$\arg(z_0{}') = \left(\frac{\pi}{3}b + \frac{\pi}{6}\right)(2\pi)$
$(1\,,2)$	1	$\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)(2\pi) = \frac{5\pi}{6}(2\pi)$
$(1\,,3)$	1	$\frac{7\pi}{6}(2\pi) = -\frac{5\pi}{6}(2\pi)$
$(2\,,1)$	2	$\frac{3\pi}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$
$(2\,,3)$	2	$\frac{7\pi}{6}(2\pi) = -\frac{5\pi}{6}(2\pi)$
$(3\,,1)$	3	$\frac{\pi}{2}(2\pi)$
$(3\,,2)$	3	$\frac{5\pi}{6}(2\pi)$

3). Calculons les probabilités $p(E_1)$ et $p(E_2)$:

E_1: « O, A, A' sont alignés »

O, A et A' sont alignés si et seulement si $\frac{z_{A'} - z_O}{z_A - z_O}$ est réel.

Or $z_{A'} = z_0{}'$; $z_O = 0$; $z_A = z_0$.

Ainsi, $\frac{z_{A'} - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_{A'}}{z_A} = \frac{z_0{}'}{z_0}$.

D' où $\frac{z_{A'} - z_O}{z_A - z_O} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_0{}'}{z_0} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\alpha \cdot z_0}{z_0} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$.

Or $\alpha = \frac{a}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}b\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}b\right)\right]$.

α est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$.

$\mathrm{Im}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}b\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}b = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Or $b = \{1 ; 2 ; 3\}$.

Donc $\frac{\pi}{3}b = k\pi \Leftrightarrow (k = 1$ et $b = 3)$.

Parmi les six (6) couples (a , b) du tableau, on a deux (2) qui correspondent à $b = 3$: $(1 ; 3)$ et $(2 ; 3)$.

Ce qui permet de trouver $p(E_1) = \frac{2 \text{ couples}}{6 \text{ couples}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

E_2 : « z_0' est imaginaire pur ».

z_0' est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z_0') = \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Dans le tableau, on a deux (2) cas qui y correspondent.

Ainsi, $p(E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4). Loi de probabilité de X qui au résultat (a , b) d'une épreuve associe le module de z_0' :

Les valeurs prises par $X = |z_0{}'|$ sont 1, 2 et 3 (voir tableau).

$p(X = 1) = \frac{2 \text{ couples}}{6 \text{ couples}} = \frac{1}{3}$; $p(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $p(X = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

■ **Calculons l'espérance mathématique de X :**

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, p(X = x_i) = \left(1 \times \frac{1}{3}\right) + \left(2 \times \frac{1}{3}\right) + \left(3 \times \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{3} = 2.$

PROBLÈME

$f_m(x) = \ell n(x^2 - m)$ avec $m \in IR$.

1).a). **Indiquons suivant les valeurs de m, l'ensemble de définition de f_m et les limites aux bornes de l'ensemble de définition :**

■ **Ensemble de définition D_m de f_m suivant les valeurs de m :**

$D_m = \{ x \in IR \,/\, x^2 - m > 0 \}$.

On aura alors 3 cas de discussion : $m < 0$; $m = 0$; $m > 0$.

1^er cas $(m < 0)$:

Si $m < 0$, alors $-m > 0$ et $x^2 - m > 0$ pour tout réel x.

Dans ce cas la fonction f_m est définie sur IR :

$D_m = IR =]-\infty\,;+\infty[$.

2^ème cas $(m = 0)$:

Si $m = 0$, alors $f_m(x) = \ell n(x^2)$.

Dans ce cas, la fonction f_m est définie pour tout réel x **non nul :**

$D_m = IR - \{0\} =]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty[$.

3^ème cas $(m > 0)$:

$x^2 - m > 0 \Leftrightarrow x^2 = m \Leftrightarrow (x - \sqrt{m})(x + \sqrt{m}) > 0.$

Dans ce cas, $D_m = \left]-\infty\,;-\sqrt{m}\right[\,\cup\,\left]\sqrt{m}\,;+\infty\right[$.

Présentons dans un tableau les résultats obtenus :

$m < 0$	$D_m =]-\infty\,;+\infty[$
$m = 0$	$D_m =]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty[$
$m > 0$	$D_m = \left]-\infty\,;-\sqrt{m}\right[\,\cup\,\left]\sqrt{m}\,;+\infty\right[$

∗ **Limites aux bornes de D_m suivant les valeurs de m :**

■ **1er cas $(m < 0)$:**

$D_m = IR =]-\infty\,;\,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ell n(x^2 - m) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ell n(x^2)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ell n(X) = +\infty$ (En posant $X = x^2$).

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ell n(x^2 - m) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ell n(x^2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ell n(X) = +\infty$ (En posant $X = x^2$).

■ **2ème cas $(m = 0)$:**

$D_m = IR - \{0\} =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ell n(x^2 - m) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ell n(x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ell n(X) = +\infty$ (En posant $X = x^2$).

• $\lim\limits_{x\to0^-} f_m(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \ell n(x^2) = \lim\limits_{X\to0^+} \ell n(X) = -\infty$ (Avec $X = x^2$).

• $\lim\limits_{x\to0^+} f_m(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \ell n(x^2) = \lim\limits_{X\to0^+} \ell n(X) = -\infty$ (Avec $X = x^2$).

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ell n(x^2 - m) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ell n(x^2) = +\infty$.

■ **3ème cas $(m > 0)$:**

$D_m =]-\infty\,;-\sqrt{m}\,[\,\cup\,]\sqrt{m}\,;\,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ell n(x^2 - m) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ell n(x^2) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{m})^-} f_m(x) = \lim\limits_{x\to(-\sqrt{m})^-} \ell n(x^2 - m) = \lim\limits_{X\to0^+} \ell n(X) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to(\sqrt{m})^+} f_m(x) = \lim\limits_{x\to(\sqrt{m})^+} \ell n(x^2 - m) = \lim\limits_{X\to0^+} \ell n(X) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ell n(x^2 - m) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ell n(x^2) = +\infty$.

Présentons dans un tableau les résultats obtenus :

$m < 0$	$\lim\limits_{-\infty} f_m = +\infty$	$\lim\limits_{+\infty} f_m = +\infty$
$m = 0$	$\lim\limits_{-\infty} f_m = +\infty$ $\lim\limits_{0^-} f_m = -\infty$	$\lim\limits_{+\infty} f_m = +\infty$ $\lim\limits_{0^+} f_m = -\infty$
$m > 0$	$\lim\limits_{-\infty} f_m = +\infty$ $\lim\limits_{(-\sqrt{m})^-} f_m = -\infty$	$\lim\limits_{+\infty} f_m = +\infty$ $\lim\limits_{(\sqrt{m})^+} f_m = -\infty$

b). Etudions la parité de f_m :

$f_m(x) = \ell n(x^2 - m)$.

$\forall\, x \in D_m$, $\forall\, (-x) \in D_m$, on aura :

$f_m(-x) = \ell n((-x)^2 - m) = \ell n(x^2 - m) = f_m(x)$.

D'où f_m est une fonction paire.

c). Etudions les variations de f_m et donnons les différents tableaux de variation de f_m selon les valeurs de m :

■ **1er cas $(m < 0)$:**

Sens de variation du 1er cas :

$f_m(x) = \ell n(x^2 - m)$ et $D_m = \mathrm{IR} =]-\infty\,;+\infty[$.

Dans ce cas, f_m est dérivable sur IR et pour tout x élément de IR on aura : $f'_m(x) = \left(\ell n(x^2 - m)\right)' = \dfrac{(x^2-m)'}{(x^2-m)} = \dfrac{2x}{x^2-m}$.

D'après D_m , $x^2 - m > 0$.

D'où $f'_m(x)$ est du signe de $2x$, ou simplement du signe de x.

Ce qui permet d'avoir :

Si $x \in]-\infty\,;0\,[$, $f'_m(x) < 0$, d'où f_m est strictement décroissante ;

Si $x \in]-\infty\,;\,0\,]$, $f'_m(x) \geq 0$, d'où f_m est croissante.

Tableau de variation du 1er cas $(m < 0)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
f_m	$+\infty$	$\searrow$	$\ell n(-m)$	$\nearrow$	$+\infty$

■ 2ème cas $(m = 0)$:

$D_m = IR - \{0\} =]-\infty\,; 0[\ \cup\ ]0\,; +\infty[$.

Dans ce cas, f_m est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

$\forall\, x \in]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$, on aura :

$f'_m(x) = \dfrac{2x}{x^2 - m}$, donc $f'_m(x)$ est du signe de x.

Ce qui permet d'avoir :

- Si $x \in]-\infty\,;\,0[$, $f'_m(x) < 0$, d'où f_m est strictement décroissante ;
- Si $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'_m(x) > 0$, d'où f_m est strictement croissante.

Tableau de variation du 2ème cas $(m = 0)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
f_m	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

■ $3^{\text{ème}}$ **cas** $(m > 0)$:

$D_m = \left]-\infty\,;-\sqrt{m}\right[\cup \left]\sqrt{m}\,;+\infty\right[$.

Pour tout $x \in D_m$:

$f'_m(x) = \frac{2x}{x^2 - m}$, $f'_m(x)$ est du signe de x car $x^2 - m > 0$.

Ce qui permet d'avoir :

* Si $x \in \left]-\infty\,;-\sqrt{m}\right[$, alors $x < 0$, donc $f'_m(x) < 0$, d'où f_m est strictement décroissante ;

* Si $x \in \left]\sqrt{m}\,;+\infty\right[$, alors $x > 0$, donc $f'_m(x) > 0$, d'où f_m est strictement croissante.

Tableau de variation du $3^{\text{ème}}$ cas $(m > 0)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$				$+$	
f_m	$+\infty$	↘	$-\infty$		$-\infty$	↗	$+\infty$

d). Donnons la nature des branches infinies des courbes représentatives C_m des fonctions f_m lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$:

$f_m(x) = \ell n(x^2 - m)$.

Etudions la limite de $\frac{f_m(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers $+\infty$, ou déterminons simplement la limite quand $|x|$ tend vers $+\infty$ de $\frac{f_m(x)}{x}$:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f_m(x)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\ell n(x^2-m)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\ell n\left[x^2\left(1-\frac{m}{x^2}\right)\right]}{x}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f_m(x)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\ell n(x^2)+\ell n\left(1-\frac{m}{x^2}\right)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\ell n(x^2)}{x}+\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\ell n\left(1-\frac{m}{x^2}\right)}{x}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f_m(x)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}2\frac{\ell n(|x|)}{x}+\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\ell n\left(1-\frac{m}{x^2}\right)}{x}.$$

Or $\begin{cases}\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{\ell n(|x|)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell n(x)}{x}=0\\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{\ell n\left(1-\frac{m}{x^2}\right)}{x}=\dfrac{\ell n(1)}{+\infty}=0\end{cases}$, d' où $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{f_m(x)}{x}=0.$

Par conséquent, (C_m) admet des branches paraboliques dirigées vers l'axe des abscisses du repère en $-\infty$ et en $+\infty$.

e). Traçons dans un même repère orthonormé (unité : 2cm) les courbes $(C_{-1}),(C_0)$ et (C_1) ; Précisons les points d'intersection avec l'axe des abscisses et les tangentes en ces points :

■ **Etude de la courbe (C_{-1}) :**

$f_{-1}(x)=\ell n(x^2+1)$ et $D_{-1}=IR=]-\infty\,;+\infty[\ \ (m<0)$.

• Tableau de variations de f_{-1} :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_{-1}(x)$	$-$	0	$+$
f_{-1}	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

(C_{-1}) admet comme minimum le point O et des branches paraboliques dirigées vers l'axe des abscisses du repère en $-\infty$ et en $+\infty$.

De plus, le point d'intersection de (C_{-1}) et l'axe des abscisses est le point O, la tangente en O est une tangente horizontale, donc elle est d'équation $y=0$.

■ **Etude de la courbe (C_0) :**

$f_0(x) = \ell n(x^2)$ et $D_0 = IR - \{0\} =]-\infty\,;0\,[\cup]\,0\,;+\infty[$.

• **Tableau de variations de f_0 :**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_0'(x)$	$-$	||	$+$
f_0	$+\infty \searrow -\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

(C_0) admet des branches paraboliques dirigées vers l'axe des abscisses du repère en $-\infty$ et en $+\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est une asymptote verticale de (C_0).

• **Intersection de (C_0) avec l'axe des abscisses :**

$f_0(x) = 0 \Leftrightarrow \ell n(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

Ainsi, (C_0) croise l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-1\,;0)$ et $(1\,;0)$.

• **Equation de la tangente à (C_0) au point d'abscisse $x = -1$:**

$f_0'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Donc on aura :

$y = f_0'(-1)(x+1) + f_0(-1)$

$y = \left(\frac{2}{-1}\right)(x+1) + 0$

$y = -2x - 2$.

• **Equation de la tangente à (C_0) au point d'abscisse $x = 1$:**

$y = f_0'(1)(x-1) + f_0(1)$

$y = 2(x+1) + 0$

$y = 2x + 2$.

■ **Etude de la courbe (C_1) :**

$f_1(x) = \ell n(x^2 - 1)$ et $D_1 =]-\infty\,; -1\,[\ \cup\ ]\,1\,;+\infty\,[$. $(m > 0)$

• **Tableau de variations de f_1 :**

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$			$+$	
f_1	$+\infty$ ↘	$-\infty$		$-\infty$ ↗	$+\infty$

(C_1) admet des branches paraboliques dirigées vers l'axe des abscisses du repère en $-\infty$ et en $+\infty$;

Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont des asymptotes verticales de (C_1).

• **Intersection de (C_1) avec l'axe des abscisses :**

$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow \ell n(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2$

$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.

Ainsi, (C_1) croise l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-\sqrt{2}\,;0)$ et $(\sqrt{2}\,;0)$.

• **Equation de la tangente à (C_1) au point d'abscisse $x = -\sqrt{2}$:**

$f_1'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$.

Donc une équation de la tangente sera :

$y = f_1'(-\sqrt{2})(x + \sqrt{2}) + f(-\sqrt{2})$

$y = -2\sqrt{2}(x + \sqrt{2}) + 0$

$y = -2x\sqrt{2} - 4$.

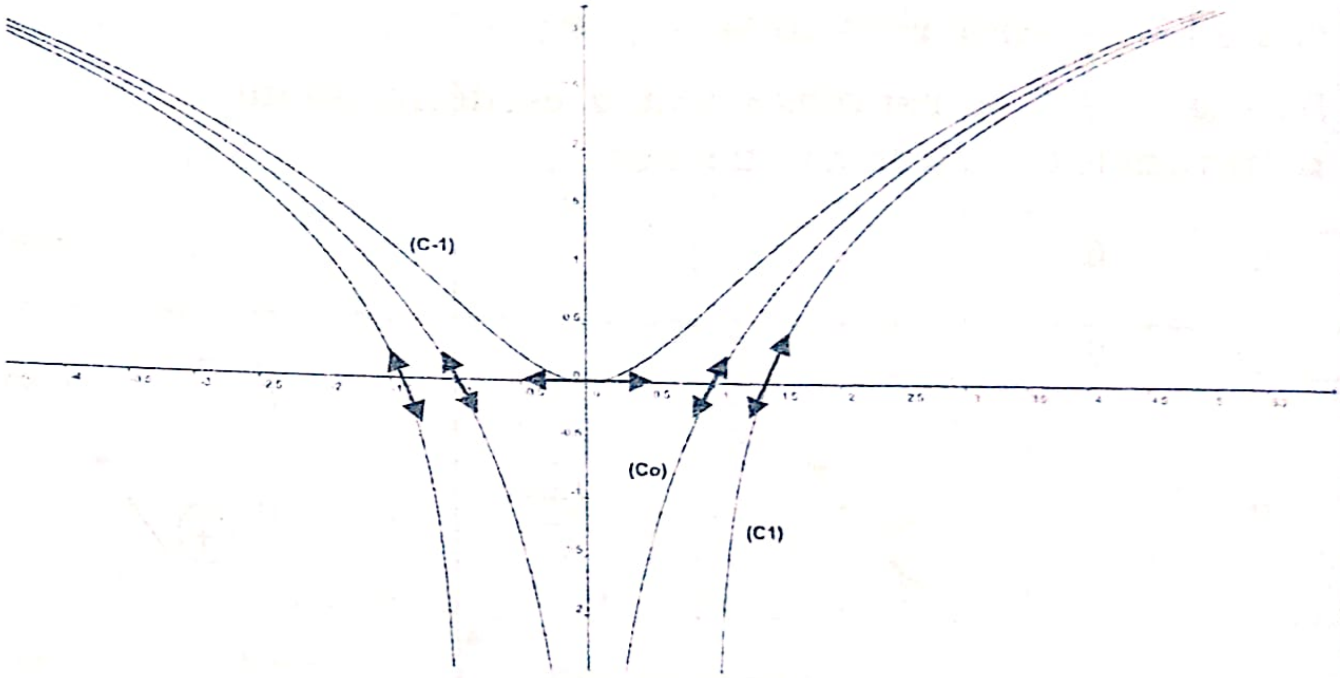
• **Equation de la tangente à (C_1) au point d'abscisse $x = \sqrt{2}$:**

$y = f_1'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + f(\sqrt{2})$

$y = 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 0$

$y = 2x\sqrt{2} - 4.$

* **Courbes $(C_{-1}), (C_0)$ et (C_1) :**



2). On donne $m = -\frac{3}{4}$.

a). $\forall x \in \mathrm{IR}^+,\quad g(x) = x - \ell n\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)$

■ **Etudions le sens de variation de g :**

La fonction g est dérivable sur IR^+ et $\forall x \in \mathrm{IR}^+$:

$$g'(x) = \left[x - \ell n\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\right]' = 1 - \frac{2x}{\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)} = \frac{\left(x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right)}{\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)}.$$

Pour tout x élément de IR^+, $\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) > 0$.

Donc $g'(x)$ est du signe de $\left(x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right)$.

• Résolvons dans IR$^+$, l'équation $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$:

Discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4(1)\left(\frac{3}{4}\right) = 1 = 1^2$.

Solutions : $x_1 = \frac{2-1}{2(1)} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{2+1}{2(1)} = \frac{3}{2}$.

Conclusion :

Si $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$, on a $x^2 - 2x + \frac{3}{4} > 0$.

D'où $g'(x) > 0$ et par conséquent g est strictement croissante.

Si $x \in \left[\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right]$, on a $x^2 - 2x + \frac{3}{4} \leq 0$.

D'où $g'(x) \leq 0$ et par conséquent g est décroissante.

■ **Dressons le tableau de variations de g :**

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	0		0		0	
g	$\ell n\left(\frac{4}{3}\right)$	$+$ ↗	$\frac{1}{2}$	$+$ ↘	$\frac{3}{2} - \ell n 3$	$+$ ↗ $+\infty$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ell n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} - \ell n(1) = \frac{1}{2}$.

$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \ell n\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} - \ell n 3$.

• **Calculons une valeur approchée à 10^{-2} près de $g(0)$ et $g\left(\frac{3}{2}\right)$:**

On donne : $\ell n2 = 0{,}69$ et $\ell n3 = 1{,}09$.

$g(x) = x - \ell n\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)$.

Donc $g(0) = 0 - \ell n\left(0^2 + \frac{3}{4}\right) = -\ell n\left(\frac{3}{4}\right) = \ell n\left(\frac{4}{3}\right) = \ell n4 - \ell n3$

$g(0) = 2\ell n2 - \ell n3 = 2(0{,}69) - 1{,}09 = 0{,}29$.

$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \ell n\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} - \ell n(3) = \frac{3}{2} - 1{,}09 = 0{,}41$.

• **Déduisons de ce qui précède, que $g(x)$ est positif :**

D'après le tableau de variation de g (voir tableau), la plus petite valeur prise par $g(x)$ est $\ell n\left(\frac{4}{3}\right) = 0{,}29$, donc $g(x) > 0$ pour tout réel positif x.

• **Position relative de $\left(C_{-\frac{3}{4}}\right)$ par rapport à D :**

$g(x) > 0 \Longrightarrow x - \ell n\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) > 0 \Longrightarrow x > ln\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)$.

Par conséquent, la demi-droite (D) est au dessus de $\left(C_{-\frac{3}{4}}\right)$.

b). Montrons que la fonction $f_{-\frac{3}{4}}$ définie une bijection de IR$^+$ vers un ensemble et précisons cet ensemble :

***Tableau de variations de $f_{-\frac{3}{4}}$ (cas de $m < 0$) sur IR$^+$ seulement :**

x	0	$+\infty$
$f'_{-\frac{3}{4}}(x)$	0	$+$
$f_{-\frac{3}{4}}$	$\ell n\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$ $+\infty$

La fonction $f_{-\frac{3}{4}}$ est continue et strictement monotone (croissante) sur IR$^+$, ce qui permet d'affirmer que $f_{-\frac{3}{4}}$ réalise une bijection de IR$^+$ sur l'intervalle $\left[\ell n\left(\frac{3}{4}\right) ; +\infty\right[$. (Voir tableau)

• **Déterminons la fonction réciproque $f_{-\frac{3}{4}}^{-1}$:**

Posons $f'_{-\frac{3}{4}}(x) = y$.

$f_{-\frac{3}{4}}^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \ell n\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) = y \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4} = e^y \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{e^y - \frac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{e^y - \frac{3}{4}}$ ou $x = \sqrt{e^y - \frac{3}{4}}$.

Comme x est positif, on prendra $x = \sqrt{e^y - \frac{3}{4}}$.

Par conséquent, $f_{-\frac{3}{4}}^{-1}(x) = \sqrt{e^x - \frac{3}{4}}$.

• **Ensemble de définition et sens de variation de $f_{-\frac{3}{4}}^{-1}$:**

La fonction réciproque $f_{-\frac{3}{4}}^{-1}$ est définie sur $\left[\ell n\left(\frac{3}{4}\right) ; +\infty\right[$ et elle est strictement croissante $\left(\text{comme } f_{-\frac{3}{4}}\right)$ sur IR$^+$.

c). Traçons dans un même repère orthonormé (unité : 2 cm) autre que le précédent, la représentation graphique de $f_{-\frac{3}{4}}$ pour x positif ainsi que celle de sa fonction réciproque $f_{-\frac{3}{4}}^{-1}$:

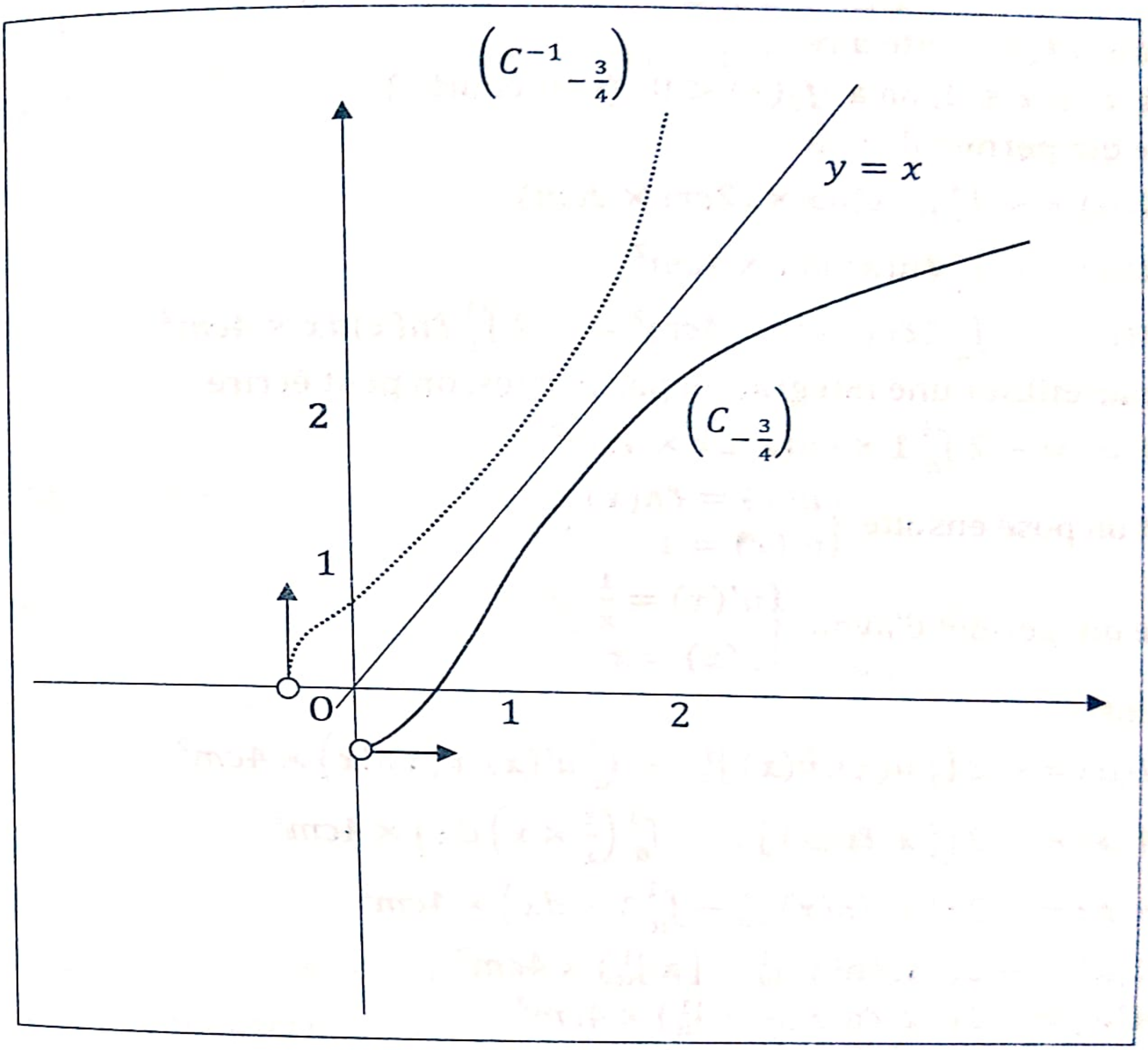
$f_{-\frac{3}{4}}(x) = \ell n\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.

$\forall x \in [0 ; +\infty[, f_{-\frac{3}{4}}(x) = 0 \Leftrightarrow \ell n\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ car $x \in [0 ; +\infty[$.

Donc la courbe $\left(C_{-\frac{3}{4}}\right)$ coupe l'axe des abscisses au point de cordonnées $\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.

De plus, $f_{-\frac{3}{4}}(0) = \ell n\left(\frac{3}{4}\right)$, d'où la courbe $\left(C_{-\frac{3}{4}}\right)$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\left(0\ ;\ \ell n\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.



3). On pose $m = 0$.

■ **Calculons l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées x et y vérifient :** $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ f_0(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$, $(\alpha \in]0;1[)$:

Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ cette aire.

Si $\alpha \leq x \leq 1$, on a $f_0(x) < 0$ (voir courbe).

Ce qui permet d'avoir :

$\mathcal{A}(\alpha) = -\int_\alpha^1 f_0(x)dx \times (2cm \times 2cm)$

$\mathcal{A}(\alpha) = -\int_\alpha^1 \ell n(x^2)dx \times 4cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = -\int_\alpha^1 2\ell n(x)dx \times 4cm^2 = -2\int_\alpha^1 \ell n(x)dx \times 4cm^2$.

Pour utiliser une intégration par parties, on peut écrire

$\mathcal{A}(\alpha) = -2\int_\alpha^1 1 \times \ell n(x)dx \times 4cm^2$.

Et on pose ensuite $\begin{cases} u(x) = \ell n(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$.

Ainsi :

$\mathcal{A}(\alpha) = -2\left([u(x).v(x)]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 u'(x).v(x)dx\right) \times 4cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = -2\left([x.\ell n(x)]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \left(\frac{1}{x} \times x\right)dx\right) \times 4cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = -2\left([x.\ell n(x)]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 1 \times dx\right) \times 4cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = -2([x.\ell n(x)]_\alpha^1 - [x]_\alpha^1) \times 4cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = -2([x.\ell n(x) - x]_\alpha^1) \times 4cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = -2([x(\ell n(x) - 1)]_\alpha^1) \times 4cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = -2[(\ell n(1) - 1) - \alpha(\ell n(\alpha) - 1)] \times 4cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = -2[-1 - \alpha(\ell n(\alpha) - 1)] \times 4cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = (2 + 2\alpha\ell n(\alpha) - 2\alpha) \times 4cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = (8 + 8\alpha\ell n(\alpha) - 8\alpha)cm^2$.

■ **Déterminons la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tend vers 0^+ :**

$\mathcal{A}(\alpha) = (8 + 8\alpha\ell n(\alpha) - 8\alpha)cm^2$;

$\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} (8 + 8\alpha\ell n(\alpha) - 8\alpha)\, cm^2.$

$\begin{cases} \lim\limits_{\alpha \to 0^+} 8\alpha\ell n(\alpha) = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to 0^+} 8\alpha = 0 \end{cases}$, d'où $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha) = 8\, cm^2.$

CORRIGÉ DU BAC 2004

EXERCICE 1

I.

$u_0 = 1$; $u_1 = 2$; $\forall\, n \in \text{IN},\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n$.

1). Montrons que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique :

$\forall\ n \in \text{IN},\quad v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n - u_{n+1}$

$v_{n+1} = \left(\frac{2}{5} - 1\right)u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n = -\frac{3}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n = -\frac{3}{5}(u_{n+1} - u_n)$

$v_{n+1} = -\frac{3}{5}v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1.$

2). Déterminons v_n en fonction de n :

$v_n = v_0 \times q^n = (1) \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n$

$v_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n.$

■ **Déduisons-en u_n en fonction de n :**

Posons $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{3}{5}$,

donc on peut écrire :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-(q)^{n+1}}{1-(q)} = 1 \times \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$$

$$S_n = \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{8/5} = \frac{5}{8}\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right].$$

• **Exprimons S_n en fonction de u_n :**

$v_n = u_{n+1} - u_n$, donc on peut avoir :

$v_0 = u_1 - u_0$

$v_1 = u_2 - u_1$

$v_2 = u_3 - u_2$

....

$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

$v_n = u_{n+1} - u_n$

En additionnant membre à membre et en simplifiant on obtient :

$v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} + v_n = -u_0 + u_{n+1}$,

soit $S_n = -u_0 + u_{n+1}$.

$$S_n = -u_0 + u_{n+1} \Leftrightarrow \frac{5}{8}\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right] = -u_0 + u_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = u_0 + \frac{5}{8}\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]$$

$$\Leftrightarrow u_n = u_0 + \frac{5}{8}\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n}\right]$$

$$\Leftrightarrow u_n = 1 + \frac{5}{8}\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n}\right]$$

$$\Leftrightarrow u_n = 1 + \frac{5}{8} - \frac{5}{8}\left(-\frac{3}{5}\right)^{n} = \frac{13}{8} - \frac{5}{8}\left(-\frac{3}{5}\right)^{n}.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{13}{8} - \frac{5}{8}\left(-\frac{3}{5}\right)^{n}$.

3). Déterminons la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{13}{8} - \frac{5}{8}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$.

$\left|-\frac{3}{5}\right| < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{13}{8}$.

II.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2(w_n)^3}$, $(w_0 \in \mathbb{R}^{+*}, w_1 \in \mathbb{R}^{+*})$.

1). Montrons que la suite (t_n) définie par $t_n = \ell n(w_n)$ vérifie la relation (1) :

Relation (1) : $u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n$.

Montrons alors que $t_{n+2} = \frac{2}{5}t_{n+1} + \frac{3}{5}t_n$:

$t_{n+2} = \ell n(w_{n+2}) = \ell n\left[\sqrt[5]{(w_{n+1})^2(w_n)^3}\right]$

$t_{n+2} = \ell n\left[(w_{n+1})^{2/5}(w_n)^{3/5}\right]$

$t_{n+2} = \ell n\left[(w_{n+1})^{2/5}\right] + \ell n\left[(w_n)^{3/5}\right]$

$t_{n+2} = \frac{2}{5}\ell n(w_{n+1}) + \frac{3}{5}\ell n(w_n)$.

Or $t_{n+1} = \ell n(w_{n+1})$ et $t_n = \ell n(w_n)$.

Donc $t_{n+2} = \frac{2}{5}t_{n+1} + \frac{3}{5}t_n$.

D'où la suite (t_n) définie par $t_n = \ell n(w_n)$ vérifie la relation (1).

2). Déduisons-en la limite de la suite (t_n), puis celle de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$:

Si la suite (t_n) vérifie la relation (1), alors les suites (t_n) et (u_n) sont de même nature.

Pour la suite (u_n), on avait une suite (v_n) telle que $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Donc pour (t_n), il existe une suite (v_n) telle que $v_n = t_{n+1} - t_n$.

Ce qui permet d'avoir :

$v_0 = t_1 - t_0 = \ell n(w_1) - \ell n(w_0) = \ell n\left(\frac{w_1}{w_0}\right)$

$v_0 = \ell n\left(\frac{w_1}{w_0}\right)$.

De plus, pour la suite (u_n) on avait

$$S_n = v_0 \times \frac{1-(q)^{n+1}}{1-(q)} = -u_0 + u_{n+1}.$$

Donc pour la suite (t_n), on aura

$$S_n = v_0 \times \frac{1-(q)^{n+1}}{1-(q)} = -t_0 + t_{n+1}.$$

Ce qui permet d'avoir :

$$t_{n+1} - t_0 = v_0 \times \frac{1-(q)^{n+1}}{1-(q)}$$

$$t_{n+1} = t_0 + v_0 \times \frac{1-(q)^{n+1}}{1-(q)}.$$

Or $t_0 = \ell n(w_0)$; $v_0 = \ell n\left(\frac{w_1}{w_0}\right)$; $q = \left(-\frac{3}{5}\right)$.

Donc $t_{n+1} = \ell n(w_0) + \ell n\left(\frac{w_1}{w_0}\right) \times \frac{1-(q)^{n+1}}{1-(q)}$.

D'où $t_n = \ell n(w_0) + \ell n\left(\frac{w_1}{w_0}\right) \times \frac{1-(-3/5)^n}{1-(-3/5)}$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$, ce qui permet d'avoir :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \ell n(w_0) + \ell n\left(\frac{w_1}{w_0}\right) \times \frac{1-0}{1-(-3/5)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \ell n(w_0) + \frac{5}{8}\ell n\left(\frac{w_1}{w_0}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \ell n(w_0) + \frac{5}{8}[\ell n(w_1) - \ell n(w_0)]$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{5}{8}\ell n(w_1) + \left(1 - \frac{5}{8}\right)\ell n(w_0).$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \frac{5}{8}\ell n(w_1) + \frac{3}{8}\ell n(w_0)$.

■ **Déterminons** $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$:

$t_n = \ell n(w_n) \Longrightarrow w_n = e^{t_n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = e^{\left(\frac{5}{8}\ell n(w_1) + \frac{3}{8}\ell n(w_0)\right)} = e^{\frac{5}{8}\ell n(w_1)} \times e^{\frac{3}{8}\ell n(w_0)}$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = e^{\ell n({w_1}^{5/8})} \times e^{\ell n({w_0}^{3/8})} = {w_1}^{5/8} \times {w_0}^{3/8}.$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \sqrt[8]{{w_1}^5{w_0}^3}$.

EXERCICE 2

(E) : $z^3 - m(1+i)z^2 + im^2z = 0.$

a). Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E):

$z^3 - m(1+i)z^2 + i\,m^2z = 0 \Leftrightarrow z[z^2 - m(1+i)z + i\,m^2] = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 - m(1+i)z + im^2 = 0.$

■ **Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - m(1+i)z + im^2 = 0$:**

• Discriminant Δ :

Rappelons que $(1+i)^2 = 2i$ et $(1-i)^2 = -2i.$

Ce qui permet d'avoir :

$\Delta = (-m(1+i))^2 - 4(1)(im^2)$

$\Delta = m^2(1+i)^2 - 4im^2$

$\Delta = 2im^2 - 4im^2 = -2im^2 = (-2i)m^2 = (1-i)^2m^2$

$\Delta = [(1-i)m]^2.$

• Racines carrées de Δ :

$\Delta = [(1-i)m]^2$, donc les racines carrées de Δ sont :

$(1-i)m$ et $(-1+i)m$.

• Solutions :

En utilisant une seule racine carrée de Δ :

$z_1 = \frac{m(1+i)-(1-i)m}{2(1)} = \frac{m+mi-m+mi}{2} = \frac{2mi}{2} = mi$;

$z_2 = \frac{m(1+i)+(1-i)m}{2(1)} = \frac{m+mi+m-mi}{2} = \frac{2m}{2} = m.$

• Ensemble de solutions de (E) :

$S_{\mathbb{C}} = \{0\,;\, m\,;\, mi\}.$

b). Montrons que OAB est un triangle isocèle rectangle en O :

• Ecriture complexe de la rotation R :

R est une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc son écriture complexe est $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}.z = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)z = i\,z$;

Soit $z' = iz.$

B est l'image de A par R, donc $z_B = iz_A$.

$z_B = iz_A \Leftrightarrow \frac{z_B}{z_A} = i \Leftrightarrow \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = i.$

Ainsi, on peut avoir :

$\left|\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right| = \frac{OB}{OA} = |i| = 1$ et $\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi].$

Soit $OB = OA$ et $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi].$

Par conséquent, le triangle OAB est isocèle rectangle en O.

2).a). Déterminons m pour que l'équation (E) admette pour solution le complexe $1 + i$:

Les solutions de (E) sont : 0, m et mi.

$1 + i$ est solution de (E) si et seulement si :

$m = 1 + i$ ou $mi = 1 + i$.

$mi = 1 + i \Leftrightarrow m = \frac{1+i}{i} = -i(1+i) = -i + 1 = 1 - i.$

Donc, $1 + i$ est solution de (E) si et seulement si

$m = 1 + i$ ou $m = 1 - i$.

b). Résolvons l'équation (E) dans chacun des cas trouvés :

Pour l'équation (E), on a $S_{\mathbb{C}} = \{0\,;\, m\,;\, mi\}$.

- Si $\boldsymbol{m = 1 + i}$, on aura $S_{\mathbb{C}} = \{0\,;\, 1+i\,;\, i(1+i)\}$,
soit $S_{\mathbb{C}} = \{0\,;\, 1+i\,;\, -1+i\}$.
- Si $\boldsymbol{m = 1 - i}$, on aura $S_{\mathbb{C}} = \{0\,;\, 1-i\,;\, i(1-i)\}$,
soit $S_{\mathbb{C}} = \{0\,;\, 1-i\,;\, 1+i\}$.

3). (C) d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$.

a). Déterminons le centre et le rayon de (C) :

$x^2 + y^2 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = 0$ (Début de carré)

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$

Donc le centre de (C) est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$;

le rayon de (C) est $\frac{1}{2}$.

b). Déterminons l'image du cercle (C) par la rotation R :

Rappel : R est d'écriture complexe $z' = iz$.

- **Centre du cercle image (C') :**

Soit $\omega\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$ le centre du cercle (C) et soit $r = \frac{1}{2}$ son rayon.

Soit $\omega' = R(\omega)$ le centre du cercle image (C') et soit r' son rayon.

$\omega\left(\frac{1}{2}\,;0\right) \Longrightarrow z_\omega = \frac{1}{2}$.

$\omega' = R(\omega) \Longrightarrow z_{\omega'} = iz_\omega = i\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}i$. D'où $\omega'\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$.

- **Rayon de (C') :**

$r' = |k|.r = r = \frac{1}{2}$ car R est une rotation (de rapport $k = 1$).

Conclusion :

(C') est un cercle de centre $\omega'\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r' = \frac{1}{2}$.

PROBLÈME

Partie A :

$f_k(x) = (2 - x)e^x - k$ avec k un réel fixé tel que $0 < k < e$.

1). Déterminons les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[(2 - x)e^x - k\ ] = \lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x - k)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = -k$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[\ (2 - x)e^x - k\ ]$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (2 - x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = -\infty$.

2). Exprimons $f'_k(x)$: Rappelons que $f_k(x) = (2 - x)e^x - k$.

La fonction f_k est dérivable sur IR car :

La fonction $x \longmapsto (2 - x)$ est une fonction polynôme, elle est dérivable sur IR ; la fonction $x \longmapsto e^x$ est la fonction exponentielle, elle est dérivable sur IR ; La fonction $x \longmapsto -k$ est une fonction constante, elle est dérivable sur IR.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = [\,(2-x)e^x - k\,]' = [\,(2-x)e^x\,]' + 0$

$f_k'(x) = (2-x)'(e^x) + (e^x)'(2-x)$

$f_k'(x) = -e^x + e^x(2-x) = (-1+2-x)e^x = (1-x)\,e^x$

$f_k'(x) = (1-x)e^x.$

■ **Déduisons-en le tableau de variation de f_k :**

$f_k'(x) = (1-x)e^x.$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $f_k'(x)$ est du signe de $(1-x)$.

$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

• $\forall x \in \,]-\infty\,;1\,[$, $(1-x) > 0$, donc $f_k'(x) > 0$.

D'où f_k est strictement croissante ;

• $\forall x \in [\,1\,;+\infty\,[$, $(1-x) \leq 0$, donc $f_k'(x) \leq 0$.

D'où f_k est décroissante.

De plus, $f_k(1) = (2-1)e^1 - k = e - k.$

x	$-\infty$	α_k	1	β_k	$+\infty$
$f_k'(x)$	$+$		0	$-$	
f_k	$-k$ ↗	$-$ $+$	$e-k$	↘ $+$ $-$	$-\infty$

3).a). Etablissons que l'équation $f_k(x) = 0$ admet deux solutions, une notée α_k appartenant à $]-\infty\,;1\,[$ et une autre notée β_k appartenant à $]\,1\,;+\infty\,[$:

Remarque : $0 < k < e$, donc $e - k > 0$.

D'après son tableau de variation, la fonction f_k est continue, strictement croissante sur $]-\infty\,;1\,[$ et strictement décroissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$.

De plus, $0 \in \,]-k\,;e-k\,[$ et $0 \in \,]-\infty\,;e-k\,[$ car $e - k > 0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_k(x) = 0$ admet deux solutions, $\alpha_k \in]-\infty ; 1[$ et une autre notée β_k appartenant à $]1 ; +\infty[$.

b). Montrons que $\boldsymbol{e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)}$ **:**

Supposons que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$.

• Démontrons que $f_k(\alpha_k) = 0$.

$f_k(x) = (2 - x)e^x - k \Longrightarrow f_k(\alpha_k) = (2 - \alpha_k)e^{\alpha_k} - k$.

Si $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$, on obtient :

$e^{\alpha_k} - k\alpha_k = e^{\alpha_k}\alpha_k - e^{\alpha_k} - k\alpha_k + k$

$e^{\alpha_k} - e^{\alpha_k}\alpha_k + e^{\alpha_k} = k\alpha_k - k\alpha_k + k$

$2e^{\alpha_k} - e^{\alpha_k}\alpha_k = k$

$(2 - \alpha_k)e^{\alpha_k} - k = 0$

$f_k(\alpha_k) = 0$.

(Ce qui est vrai car α_k est solution de l'équation $f_k(x) = 0$).

Conclusion : $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$.

* **Démontrons que** $\boldsymbol{e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)}$ **:**

β_k est aussi solution de l'équation $f_k(x) = 0$, donc β_k vérifie l'égalité : $e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$.

4). Précisons le signe de $\boldsymbol{f_k(x)}$ **suivant les valeurs de** $\boldsymbol{x}$ **:**

En plaçant α_k et β_k dans le tableau de variations de f_k on aura :

• Si $x \in]-\infty ; \alpha_k] \cup [\beta_k ; +\infty[$, $f_k(x) \leq 0$;

• Si $x \in [\alpha_k ; \beta_k]$, $f_k(x) > 0$.

Présentons le signe dans un tableau :

x	$-\infty$	α_k		1		β_k	$+\infty$
$f_k(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Partie B :

k est un réel fixé tel que $0 < k < e$.

1). $u(x) = e^x - kx$ et $D_u = \text{IR}$.

a). Etudions le sens de variation de u :

u est dérivable sur IR et pour tout réel x, on aura :

$u'(x) = (e^x - kx)' = e^x - k$.

$u'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - k = 0 \Leftrightarrow e^x = k \Leftrightarrow x = \ell n(k)$.

On en déduit que :

- Si $x \in]-\infty\,;\, \ell n(k)[$, $u'(x) < 0$.

D'où u est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\, \ell n(k)[$.

- Si $x \in [\ell n(k)\,;+\infty[$, $u'(x) \geq 0$.

D'où u est croissante sur $[\ell n(k)\,;\,+\infty[$.

b). Justifions la propriété suivante : pour tout réel x, $e^x - kx > 0$:

Limites de $u(x)$ quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - kx)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -kx = +\infty \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - k\right)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		$\ell n(k)$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	$k(1-\ell n(k))$	$\nearrow$	$+\infty$

$u(\ell n(k)) = e^{\ell n(k)} - k\ell n(k) = k - k\ell n(k) = k(1 - \ell n(k))$.

• **Signe de $k(1-\ell n(k))$:**

$0 < k < e \Rightarrow \ell n(k) < \ell n(e) \Longrightarrow \ell n(k) < 1 \Rightarrow 1-\ell n(k) > 0$.

$\begin{cases} k > 0 \\ 1-\ell n(k) > 0 \end{cases}$, d'où $k(1-\ell n(k)) > 0$.

D'après le tableau de variations de u, la plus petite valeur prise par $u(x)$ est $k(1-\ell n(k))$ et $k(1-\ell n(k)) > 0$.

Donc $u(x) > 0 \quad \forall\, x \in$ IR.

$u(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - kx > 0$.

Conclusion : Pour tout réel x, $e^x - kx > 0$.

2). $g_k(x) = \dfrac{e^x - k}{e^x - kx}$.

Remarque : Précédemment, $e^x - kx > 0$ pour tout réel x.

Donc la fonction g_k est définie sur $]-\infty\,;+\infty[$.

a). Déterminons la limite de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x-k}{e^x-kx}\right)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-kx) = +\infty \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-k}{e^x-kx}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{(e^x-k)}{e^x}}{\frac{(e^x-kx)}{e^x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-\frac{k}{e^x}\right)}{\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{k}{e^x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}\right) = 0 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x) = 1$.

b). Prouvons que $g_k'(x) = \dfrac{k.f_k(x)}{(e^x-kx)^2}$:

$g_k(x) = \dfrac{e^x-k}{e^x-kx}$ et $D_{g_k} =$ IR.

g_k est le quotient de deux fonctions :

Les fonctions $x \longmapsto e^x - k$ et $x \longmapsto e^x - kx$ qui sont toutes deux, des fonctions exponentielles dérivables sur IR.

Donc la fonction g_k est dérivable sur IR.

Pour tout réel x :

$$g_k{}'(x) = \left(\frac{e^x - k}{e^x - kx}\right)' = \frac{(e^x - k)'(e^x - kx) - (e^x - kx)'(e^x - k)}{(e^x - kx)^2}$$

$$g_k'(x) = \frac{e^x(e^x - kx) - (e^x - k)(e^x - k)}{(e^x - kx)^2} = \frac{e^x(e^x - kx) - (e^x - k)^2}{(e^x - kx)^2}$$

$$g_k'(x) = \frac{e^{2x} - kxe^x - (e^{2x} - 2ke^x + k^2)}{(e^x - kx)^2}$$

$$g_k'(x) = \frac{e^{2x} - kxe^x - e^{2x} + 2ke^x - k^2}{(e^x - kx)^2} = \frac{-kxe^x + 2ke^x - k^2}{(e^x - kx)^2} = \frac{k(-xe^x + 2e^x - k)}{(e^x - kx)^2}$$

$$g_k'(x) = \frac{k[(2 - x)e^x - k]}{(e^x - kx)^2}.$$

Or $f_k(x) = (2 - x)e^x - k$.

Par conséquent, $g_k{}'(x) = \dfrac{k . f_k(x)}{(e^x - kx)^2}$.

c). Déduisons-en le tableau de variation de g_k :

$g_k{}'(x)$ est du signe de $f_k(x)$ car $k > 0$ et $(e^x - kx)^2 > 0$.

Rappelons le signe de $f_k(x)$:

x	$-\infty$		α_k		1		β_k		$+\infty$
$f_k(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Ce qui permet d'avoir :

x	$-\infty$		α_k		β_k		$+\infty$
$f_k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g_k	0	$\searrow$	$g_k(\alpha_k)$	$\nearrow$	$g_k(\beta_k)$	$\searrow$	1

* **Calculons $g_k(1)$:**

$$g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx} \Longrightarrow g_k(1) = \frac{e^1 - k}{e^1 - k(1)} = \frac{e - k}{e - k} = 1.$$

3).a). En utilisant la question 3).b). (Partie A), montrons que $g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$:

$$g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx} \Longrightarrow g_k(\alpha_k) = \frac{e^{\alpha_k} - k}{e^{\alpha_k} - k\alpha_k}.$$

Dans la question 3).b). (Partie A), on a démontré que
$e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$.
Ce qui permet d'avoir :

$$g_k(\alpha_k) = \frac{e^{\alpha_k} - k}{e^{\alpha_k} - k\alpha_k} = \frac{(e^{\alpha_k} - k)}{(e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)} = \frac{1}{\alpha_k - 1}.$$

Conclusion : $g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$.

b). Donnons de même $g_k(\beta_k)$

$$g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx} \Longrightarrow g_k(\beta_k) = \frac{e^{\beta_k} - k}{e^{\beta_k} - k\beta_k}.$$

Dans la question 3).b). (Partie A), on a démontré que
$e^{\beta_k} - k\beta_k = \left(e^{\beta_k} - k\right)(\beta_k - 1)$.
Ce qui permet d'avoir :

$$g_k(\beta_k) = \frac{e^{\beta_k} - k}{e^{\beta_k} - k\beta_k} = \frac{(e^{\beta_k} - k)}{(e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)} = \frac{1}{\beta_k - 1}.$$

Conclusion : $g_k(\beta_k) = \frac{1}{\beta_k - 1}$.

c). Déduisons de la question précédente que lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe H et donnons-en une équation :

M_k et N_k sont les points de la courbe C_k d'abscisses α_k et β_k, donc on peut écrire $x_{\mathrm{M}_k} = \alpha_k$ et $x_{\mathrm{N}_k} = \beta_k$.

Exprimons les ordonnées des points M_k et N_k :

$$y_{\mathrm{M}_k} = g_k\left(x_{\mathrm{M}_k}\right) = g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1} = \frac{1}{x_{\mathrm{M}_k} - 1}$$

et $y_{\mathrm{N}_k} = g_k\left(x_{\mathrm{N}_k}\right) = g_k(\beta_k) = \frac{1}{\beta_k - 1} = \frac{1}{x_{\mathrm{N}_k} - 1}$.

En résumé on a $y_{M_k} = \frac{1}{x_{M_k} - 1}$ et $y_{N_k} = \frac{1}{x_{N_k} - 1}$.

En conclusion, lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe H dont une équation est $y = \frac{1}{x-1}$.

4).a). Déterminons la position relative des courbes C_1 et C_2 :

Pour tout réel x, étudions alors le signe de la différence $g_1(x) - g_2(x)$:

$$g_1(x) - g_2(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x}\right) - \left(\frac{e^x - 2}{e^x - 2x}\right)$$

$$g_1(x) - g_2(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x - 2x) - (e^x - x)(e^x - 2)}{(e^x - x)(e^x - 2x)}$$

$$g_1(x) - g_2(x) = \frac{e^{2x} - 2xe^x - e^x + 2x - e^{2x} + 2e^x + xe^x - 2x}{(e^x - x)(e^x - 2x)}$$

$$g_1(x) - g_2(x) = \frac{-xe^x + e^x}{(e^x - x)(e^x - 2x)} = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)(e^x - 2x)}.$$

Dans la question 1).b)., on a $\forall x \in \mathrm{IR}, e^x - kx > 0$.

Donc $\begin{cases}(e^x - x) > 0 \\ (e^x - 2x) > 0\end{cases}$.

$\begin{cases}(e^x - x) > 0 \\ (e^x - 2x) > 0 \\ e^x > 0\end{cases}$, donc $g_1(x) - g_2(x)$ est du signe de $(1 - x)$.

- Si $x \in]-\infty ; 1[$, $(1 - x) > 0$, donc $g_1(x) - g_2(x) > 0$.

D'où C_1 au dessus de C_2 si $x \in]-\infty ; 1[$;

- Si $x = 1$, $g_1(1) = g_2(1) = g_k(1) = 1$.

D'où C_1 et C_2 se coupent au point de coordonnées $(1 ; 1)$.

- Si $x \in]1 ; +\infty[$, $(1 - x) < 0$, donc $g_1(x) - g_2(x) < 0$.

D'où C_1 est en dessous de C_2 si $x \in]1 ; +\infty[$.

b). Prouvons que $\alpha_2 = 0$:

Rappelons que dans la partie A, 3). a)., α_k est solution de l'équation $f_k(x) = 0$. Donc α_2 est solution de l'équation $f_2(x) = 0$ et on peut écrire $f_2(\alpha_2) = 0$.

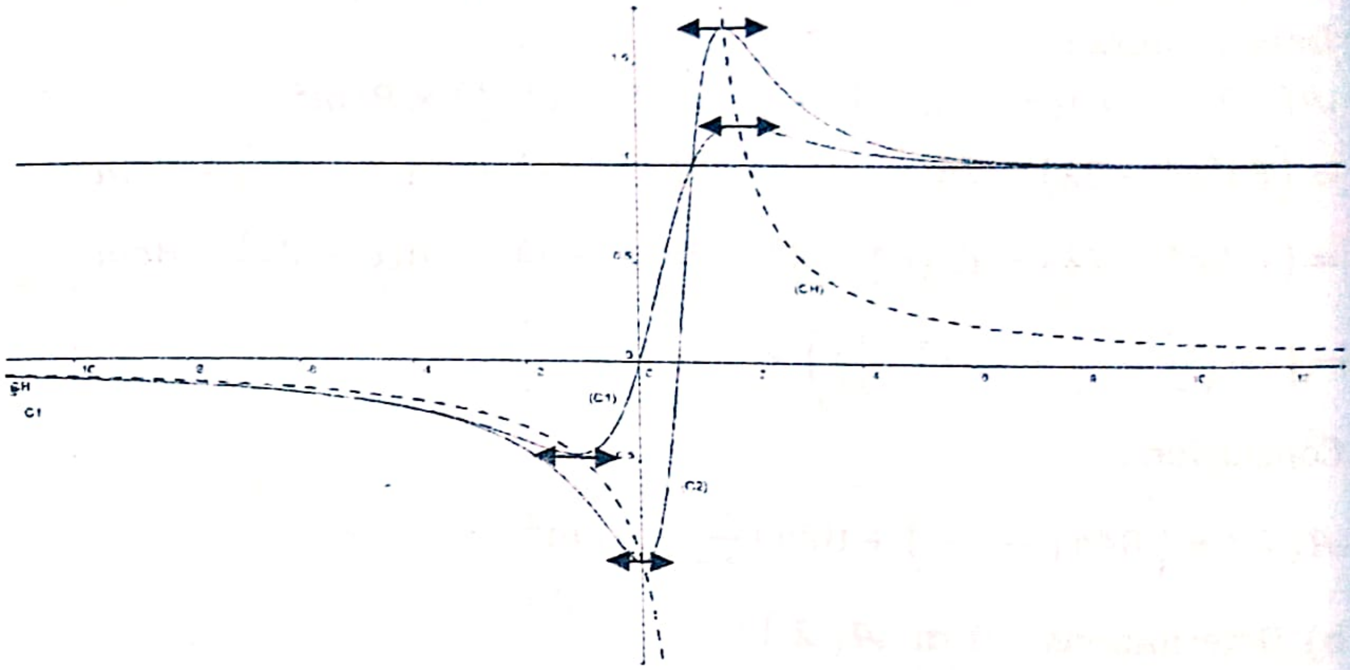
$f_k(x) = (2 - x)e^x - k \Rightarrow f_2(x) = (2 - x)e^x - 2$.

Ce qui permet d'écrire $f_2(0) = (2 - 0)e^0 - 2 = 2 - 2 = 0$.

$\begin{cases} f_2(\alpha_2) = 0 \\ f_2(0) = 0 \end{cases}$, d'où $\alpha_2 = 0$.

c). Construisons les courbes C_1 et C_2 et H sur le même graphique :

$\alpha_1 = -1{,}1$; $\alpha_2 = 0$; $\beta_1 = 1{,}8$; $\beta_2 = 1{,}6$.



5). Soit $\lambda > 1$.

a). Calculons, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine du plan défini par : $\begin{cases} 1 \leq x \leq \lambda \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases}$:

Si $x \in]1 ; +\infty[$, $g_1(x) - g_2(x) < 0$ (Voir 4).b). de la Partie B).

D'où $\mathcal{A}(\lambda) = -\int_1^\lambda (g_1(x) - g_2(x))dx \times (2cm \times 4cm)$.

On aura :

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_1^\lambda (g_2(x) - g_1(x))dx \times 8cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\int_1^\lambda g_2(x)dx - \int_1^\lambda g_1(x)dx\right) \times 8cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\int_1^\lambda \left(\frac{e^x - 2}{e^x - 2x}\right) dx - \int_1^\lambda \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x}\right) dx\right) \times 8cm^2$.

On reconnait facilement la forme de primitive de $\frac{u'}{u}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\int_1^{\lambda} \frac{(e^x - 2x)'}{(e^x - 2x)} dx - \int_1^{\lambda} \frac{(e^x - x)'}{(e^x - x)} dx\right) \times 8cm^2$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left([\,\ell n|e^x - 2x|\,]_1^{\lambda} - [\,\ell n|e^x - x|\,]_1^{\lambda}\right) \times 8cm^2.$$

Or $\forall x \in IR$, $e^x - 2x > 0$ et $e^x - x > 0$ (Voir **1).b).** Partie B).

Donc on aura :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left([\,\ell n(e^x - 2x)\,]_1^{\lambda} - [\,\ell n(e^x - x)\,]_1^{\lambda}\right) \times 8cm^2$$

$$= \left(\ell n(e^{\lambda} - 2\lambda) - \ell n(e - 2) - \ell n(e^{\lambda} - \lambda) + \ell n(e - 1)\right) \times 8cm^2$$

$$= \left(\ell n(e^{\lambda} - 2\lambda) - \ell n(e^{\lambda} - \lambda) + \ell n(e - 1) - \ell n(e - 2)\right) \times 8cm^2$$

$$= \left(\ell n\left(\frac{e^{\lambda} - 2\lambda}{e^{\lambda} - \lambda}\right) + \ell n\left(\frac{e - 1}{e - 2}\right)\right) \times 8cm^2.$$

Conclusion :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(8\ell n\left(\frac{e^{\lambda} - 2\lambda}{e^{\lambda} - \lambda}\right) + 8\ell n\left(\frac{e - 1}{e - 2}\right)\right) cm^2.$$

b). Déterminons $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$ **:**

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{e^{\lambda} - 2\lambda}{e^{\lambda} - \lambda}\right) = \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{e^{\lambda}\left(1 - \frac{2\lambda}{e^{\lambda}}\right)}{e^{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{e^{\lambda}}\right)}\right) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\left(1 - \frac{2\lambda}{e^{\lambda}}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{e^{\lambda}}\right)}.$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{2\lambda}{e^{\lambda}}\right) = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{\lambda}{e^{\lambda}}\right) = 0 \end{cases}, \text{donc } \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{e^{\lambda} - 2\lambda}{e^{\lambda} - \lambda}\right) = \frac{1}{1} = 1.$$

On en déduit que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \left(8\ell n(1) + 8\ell n\left(\frac{e-1}{e-2}\right)\right) cm^2$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \left(8\ell n\left(\frac{e - 1}{e - 2}\right)\right) cm^2.$$

CORRIGÉ DU BAC 2005

EXERCICE 1

$(u_n) : \begin{cases} u_1 = 2e \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e - u_n} \end{cases}$ avec $n > 0$; $v_n = \dfrac{u_n + e}{u_n}$.

1). ■ **Calculons u_2 :**

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e-u_n} \Longrightarrow u_2 = \dfrac{u_1}{e-u_1} = \dfrac{2e}{e-2e} = \dfrac{2e}{-e} = -2$

$u_2 = -2.$

■ **Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $u_n < 0$:**

On sait que $u_2 = -2$, donc $u_2 < 0$;

$u_3 = \dfrac{u_2}{e-u_2} = \dfrac{-2}{e-(-2)} = \dfrac{-2}{e+2}$, donc $u_3 < 0$.

Supposons que $u_n < 0$ et démontrons que $u_{n+1} < 0$:

$u_n < 0 \Leftrightarrow -u_n > 0 \Leftrightarrow e - u_n > e$.

Or $e > 0$, d'où $e - u_n > 0$.

$\begin{cases} e - u_n > 0 \\ u_n < 0 \end{cases}$, d'où $\dfrac{u_n}{e-u_n} < 0$, soit $u_{n+1} < 0$.

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n < 0$.

2).a). **Calculons v_{n+1} en fonction de u_n :**

$v_n = \dfrac{u_n + e}{u_n} \Leftrightarrow v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + e}{u_{n+1}}$.

Or $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e-u_n}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n}{e-u_n} + e}{\dfrac{u_n}{e-u_n}} = \frac{\dfrac{u_n + e(e-u_n)}{(e-u_n)}}{\dfrac{u_n}{(e-u_n)}} = \frac{u_n + e^2 - e\,u_n}{u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n(1-e) + e^2}{u_n}.$$

b). Calculons v_{n+1} en fonction de v_n :

$v_n = \frac{u_n + e}{u_n} \Leftrightarrow u_n v_n = u_n + e \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = e \Leftrightarrow u_n = \frac{e}{(v_n - 1)}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$v_{n+1} = \frac{u_n(1-e)+e^2}{u_n} = \frac{\frac{e}{(v_n-1)} \times (1-e) + e^2}{\frac{e}{(v_n-1)}}$$

$$v_{n+1} = \frac{e(1-e)+e^2(v_n-1)}{e} = \frac{e[(1-e)+e(v_n-1)]}{e} = (1-e) + e(v_n - 1)$$

$v_{n+1} = 1 - e + ev_n - e = 1 - 2e + ev_n$

Conclusion : $v_{n+1} = 1 - 2e + ev_n$.

3). (w_n) : $w_n = v_{n+1} - ev_n$ pour $n \geq 1$.

a). Déterminons la nature de la suite (w_n) :

$w_n = v_{n+1} - ev_n = 1 - 2e + ev_n - ev_n = 1 - 2e$

$w_n = 1 - 2e$ et $1 - 2e$ est un réel constant.

Donc la suite (w_n) est une suite constante.

b). Calculons $S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$:

(w_n) étant une suite constante, donc $w_1 = w_2 = \cdots = w_n$.

Ce qui permet d'avoir :

$S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

$S_n = (1-2e) + (1-2e) + \cdots + (1-2e)$ (n fois).

Par conséquent $S_n = n(1-2e)$.

c). Calculons la limite de $\ell n\left|\frac{1+S_n}{1+n}\right|$ lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \ell n\left|\frac{1+S_n}{1+n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \ell n\left|\frac{1+n(1-2e)}{1+n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \ell n\left|\frac{n(1-2e)}{n}\right|$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ell n\left|\frac{1+S_n}{1+n}\right| = \ell n|1-2e| = \ell n(-(1-2e))$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ell n\left|\frac{1+S_n}{1+n}\right| = \ell n(2e-1).$$

EXERCICE 2

1).a). Déterminons l'ensemble des points A_n et B_n et plaçons ces points dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$:

Pour $\rho = 1$, on aura les points :

$A_1\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$; $A_2\left(e^{i\frac{2\pi}{6}}\right)$; $A_3\left(e^{i\frac{3\pi}{6}}\right)$; $A_4\left(e^{i\frac{4\pi}{6}}\right)$; $A_5\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$; $A_6\left(e^{i\frac{6\pi}{6}}\right)$.

Pour $\rho = 2$, on aura les points :

$B_1\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$; $B_2\left(2e^{i\frac{2\pi}{6}}\right)$; $B_3\left(2e^{i\frac{3\pi}{6}}\right)$; $B_4\left(2e^{i\frac{4\pi}{6}}\right)$; $B_5\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$; $B_6\left(2e^{i\frac{6\pi}{6}}\right)$.

Après simplification, on obtient :

$A_1\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$; $A_2\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$; $A_3\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$; $A_4\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$; $A_5\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$; $A_6\left(e^{i\pi}\right)$;

$B_1\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$; $B_2\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$; $B_3\left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$; $B_4\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$; $B_5\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$; $B_6\left(2e^{i\pi}\right)$.

De plus :

$e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;

$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$;

$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;

$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$.

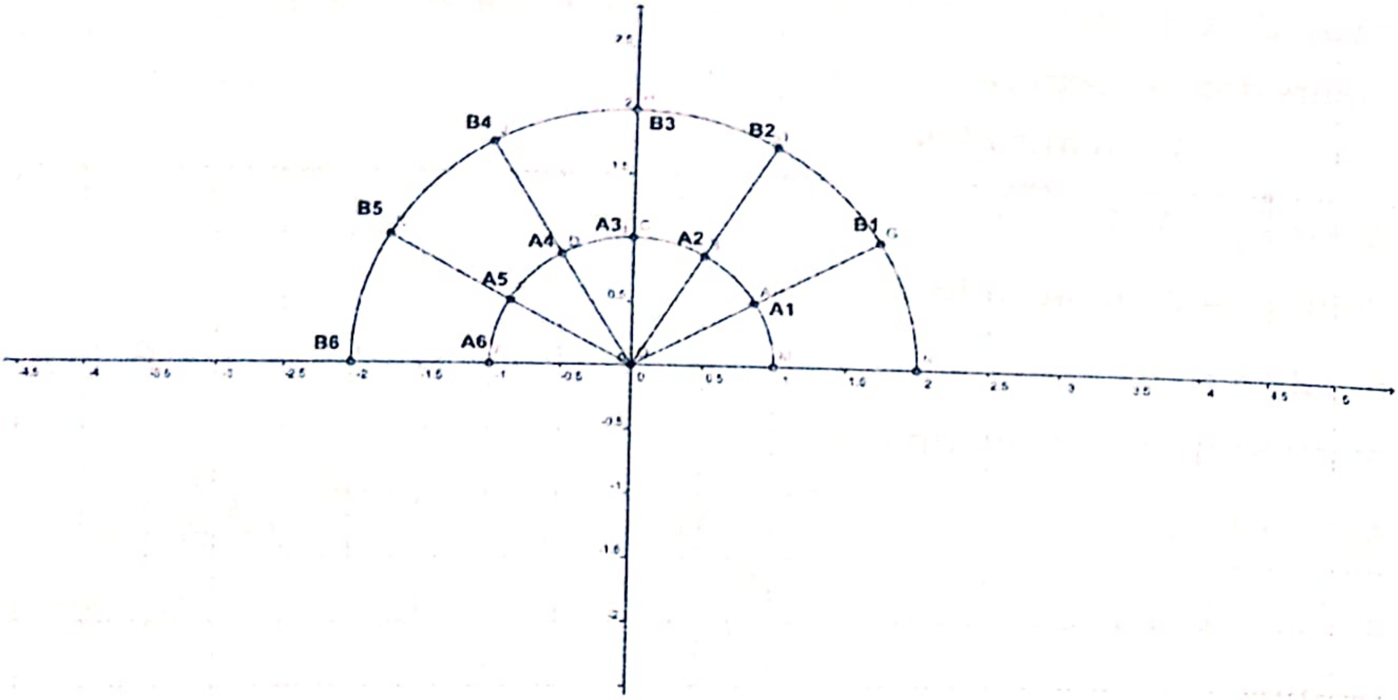
Ce qui permet d'avoir :

$A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; $A_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; $A_3(i)$; $A_4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$A_5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; $A_6(-1)$; $B_1(\sqrt{3} + i)$; $B_2(1 + i\sqrt{3})$; $B_3(2i)$;

$B_4(-1 + i\sqrt{3})$; $B_5(-\sqrt{3} + i)$; $B_6(-2)$.

Figure :



b). Déterminons la probabilité pour que Y soit égale à 1 :

Y est l'ordonnée de M, donc Y est la partie imaginaire de l'affixe de M. Parmi les **12 points** précédents, on a **3 points** dont l'affixe possède une partie imaginaire égale à 1 :

$A_3(i)$; $B_1(\sqrt{3}+i)$; $B_5(-\sqrt{3}+i)$.

D'où la probabilité pour que Y soit égal à 1 est :

$p(Y=1)=\frac{3\text{ points}}{12\text{ points}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

2).a). Déterminons la probabilité d'obtenir deux faces et celle d'obtenir une face :

Désignons par F_1 et F_2 les cotés faces des deux dés.

Désignons par P_1 et P_2 les cotés piles des deux dés.

Présentons dans un tableau l'ensemble des résultats possibles.

	F_1	P_1
F_2	$(F_1;F_2)$	$(P_1;F_2)$
P_2	$(F_1;P_2)$	$(P_1;P_2)$

Soit $p(\mathrm{F})$ la probabilité d'obtenir une face ;
Soit $p(\mathrm{FF})$ la probabilité d'obtenir deux faces.
D'après le tableau, $\mathrm{card}(\Omega) = 4$. (Quatre couples possibles).

$$p(\mathrm{FF}) = \frac{1 \text{ couple}}{4 \text{ couples}} = \frac{1}{4}.$$

$$p(\mathrm{F}) = \frac{2 \text{ couples}}{4 \text{ couples}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

b). Dressons la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

X est le gain net obtenu par le joueur.
Le joueur a misé m francs.

- S'il reçoit 5 francs, le gain net est de $(5 - m)$ francs ;
- S'il reçoit 30 francs, le gain net est de $(30 - m)$ francs ;
- S'il reçoit 0 francs, le gain net est de $(-m)$ francs ;

Les valeurs prises par X sont : $5 - m$, $30 - m$ et $-m$.
On écrit $X(\Omega) = \{5 - m \;;\; 30 - m \;;\; -m\}$.
Déterminons les différentes probabilités associées :

$$p(X = 5 - m) = p(\text{obtenir une face}) = p(\mathrm{F}) = \frac{1}{2}.$$

$$p(X = 30 - m) = p(\text{obtenir deux faces}) = p(\mathrm{FF}) = \frac{1}{4}.$$

$$p(X = -m) = p(\text{obtenir deux piles}) = p(\mathrm{PP}) = \frac{1}{4}.$$ (Voir tableau).

x_i	$-m$	$5 - m$	$30 - m$	TOTAL
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

c). Calculons l'espérance mathématique de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p(X = x_i).$$

$$E(X) = \frac{1}{4} \times (-m) + \frac{1}{2} \times (5 - m) + \frac{1}{4} \times (30 - m)$$

$$E(X) = \frac{-m + 10 - 2m + 30 - m}{4} = \frac{40 - 4m}{4} = \frac{4(10 - m)}{4}$$

$$E(X) = 10 - m.$$

d). Déterminons le prix de la partie pour que ce jeu soit équitable :

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$.

$E(X) = 0 \Leftrightarrow 10 - m = 0 \Leftrightarrow m = 10.$

Le prix de la partie est donc de 10 francs.

e). On donne $m = 10$.

i). Calculons la variance et l'écart type de X :

Pour $m = 10$, $E(X) = 0$ et la loi de probabilité sera :

x_i	-10	-5	20	TOTAL
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$E(X^2) = \left((-10)^2 \times \tfrac{1}{4}\right) + \left((-5)^2 \times \tfrac{1}{2}\right) + \left(20^2 \times \tfrac{1}{4}\right)$$

$$E(X^2) = \frac{100 + 50 + 400}{4} = \frac{550}{4} = 137{,}5.$$

* **Variance** $V(X)$:

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 137{,}5 - 0^2 = 137{,}5.$

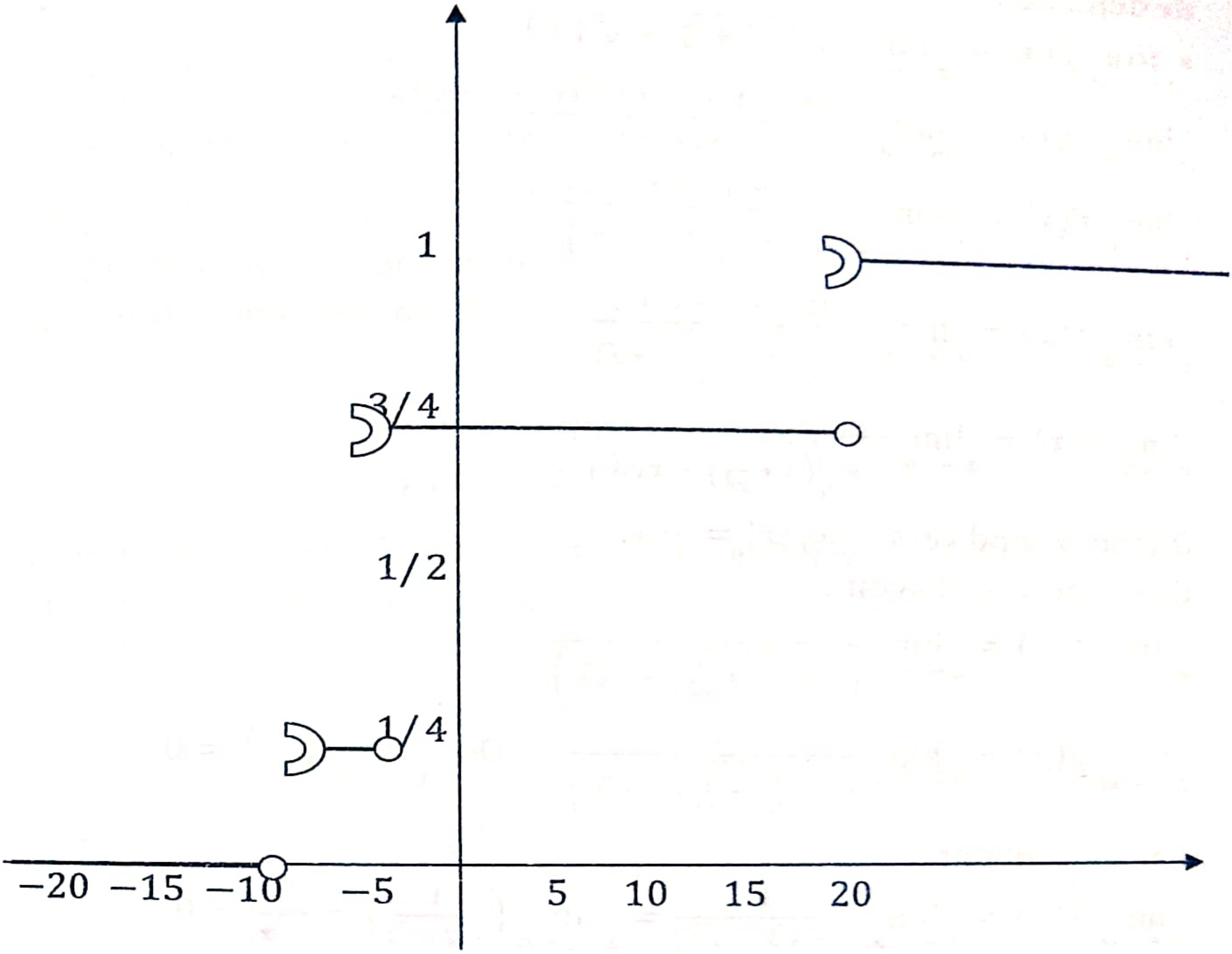
* **Ecart type** $\sigma(X)$:

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{137{,}5} = 11{,}73.$

ii). Définition et représentation de la fonction de répartition :

La fonction de répartition F de la variable X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -10 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -10 < x \leq -5 \\ \frac{3}{4} & \text{si } -5 < x \leq 20 \\ 1 & \text{si } x > 20 \end{cases}.$$



PROBLÈME

$f(x) = \sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt{3}\,x.$

Partie A :

1). Déterminons le domaine de définition de f :

$\forall\, x \in IR,\ 3x^2 + 1 > 0.$ D'où f est définie sur IR.

$D_f =]-\infty\,;\,+\infty[.$

2). Etudions le comportement de f aux bornes de son domaine de définition :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3}\,x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3}\,x)(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}\,x)}{(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}\,x)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{3x^2+1})^2-(x\sqrt{3})^2}{\left(\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-x\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(3x^2+1)-(3x^2)}{\left(|x|\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-x\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(|x|\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-x\sqrt{3}\right)}.$$

Quand x tend vers $-\infty$, $|x| = -x$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(-x\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-x\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(-\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{3}\right)}.$$ Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x(-\sqrt{3}-\sqrt{3})} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{-2x\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3}\,x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}+x\sqrt{3}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}+x\sqrt{3}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} + x\sqrt{3}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{3}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2x\sqrt{3} = +\infty.$$

3). Etudions les variations de f :

■ **Sens de variations de f :**

$f(x) = \sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}\,x.$

f est la somme de deux fonctions :

$x \longmapsto \sqrt{3x^2+1}$ et $x \longmapsto x\sqrt{3}.$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{3x^2+1}$ est définie et dérivable sur IR ;

la fonction $x \longmapsto x\sqrt{3}$ est dérivable sur IR.

D'où la fonction f est dérivable sur IR.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = \left(\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}\,x\right)' = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} + \sqrt{3} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} + \sqrt{3}$$

$$f'(x) = \frac{3x + \sqrt{3}\,.\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{3x^2+1}} = \frac{3x+\sqrt{3(3x^2+1)}}{\sqrt{3x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{3x+\sqrt{9x^2+3}}{\sqrt{3x^2+1}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+\sqrt{9x^2+3}}{\sqrt{3x^2+1}}.$$

$\forall\, x \in$ IR, $\sqrt{3x^2+1} > 0$, donc $\forall\, x \in$ IR **$f'(x)$ a le même signe que $3x + \sqrt{9x^2+3}$.**

• **Résolvons dans IR, l'équation $3x + \sqrt{9x^2+3} = 0$:**

$3x + \sqrt{9x^2+3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+3} = -3x.$

Domaine de validité de cette équation irrationnelle :

$D_v = \{\, x \in \text{IR} \,/\; 9x^2+3 \geq 0 \;;\; -3x \geq 0 \,\}.$

$9x^2 + 3 > 0 \ \forall x \in IR$.

$-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 0]$.

$\forall x \in]-\infty ; 0]$:

$\sqrt{9x^2+3} = -3x \Leftrightarrow 9x^2 + 3 = (-3x)^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 3 = 9x^2 \Leftrightarrow 3 = 0$.

(Ce qui est faux car $3 \neq 0$).

D'où $S_{IR} = \{\}$.

L'équation $3x + \sqrt{9x^2+3} = 0$ n'admet pas de solutions dans IR, donc $3x + \sqrt{9x^2+3}$ ne s'annule pas et il garde un signe constant sur IR.

- Etudions le signe de $3x + \sqrt{9x^2+3}$ suivant les valeurs de x :

Comme $3x + \sqrt{9x^2+3}$ garde un signe constant sur IR, exploitons le cas où $x > 0$.

$x > 0 \Leftrightarrow 3x > 0$.

De plus, $\sqrt{9x^2+3} > 0$ pour tout réel x.

Donc $3x + \sqrt{9x^2+3} > 0$ pour tout réel x.

D'où $f'(x) > 0$ pour tout réel x et par conséquent,

f est strictement croissante sur IR.

■ Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	0 ↗	$+\infty$

4). ■ Précisons les asymptotes à la courbe (C) :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, donc la courbe (C) admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses du repère).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

- **Etudions alors la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$:**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}\,x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} + \sqrt{3}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} + \sqrt{3}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{|x|\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} + \sqrt{3}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} + \sqrt{3}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{3}\right).$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$

Ce qui permet d'avoir :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

- **Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x\sqrt{3} \right]$:**

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x\sqrt{3} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}\,x - 2x\sqrt{3} \right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x\sqrt{3} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{3x^2+1} - x\sqrt{3} \right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x\sqrt{3} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} - x\sqrt{3} \right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x\sqrt{3} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} - x\sqrt{3} \right].$$

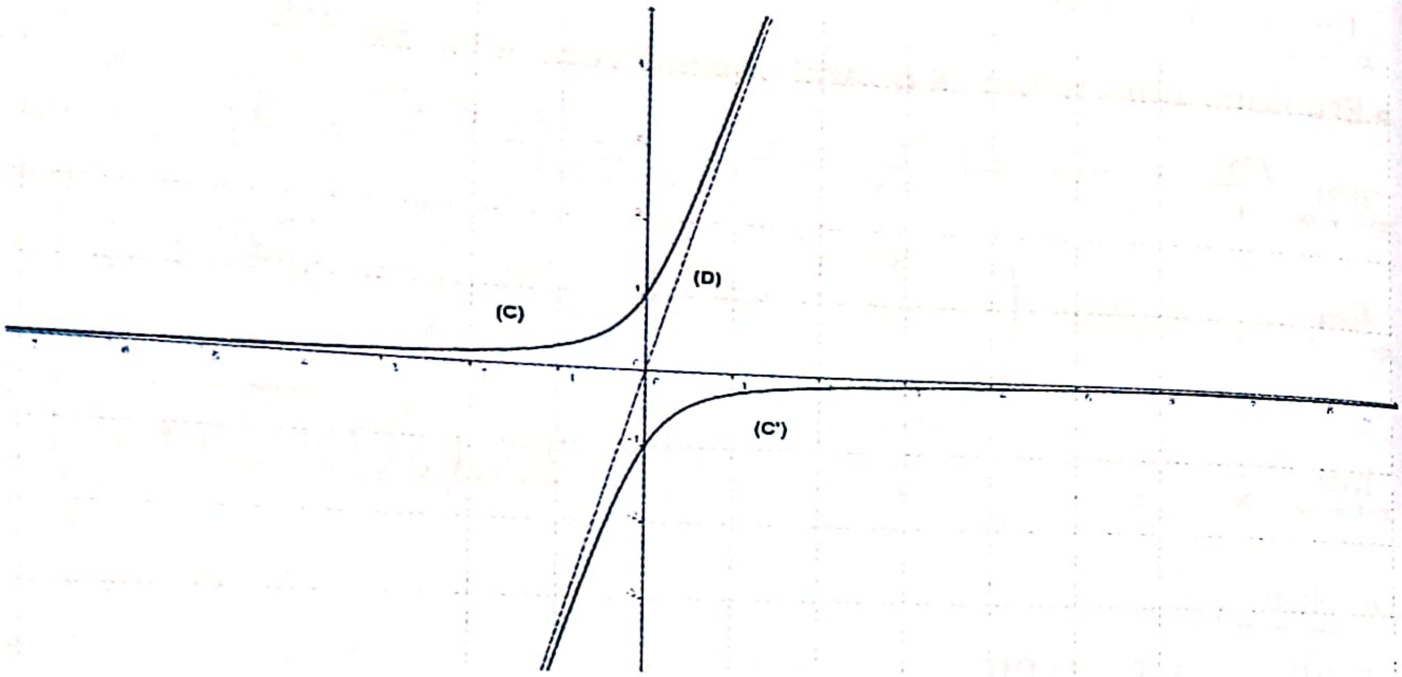
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$

Ce qui permet d'avoir :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x\sqrt{3} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x\sqrt{3} - x\sqrt{3} \right] = 0.$$

Par conséquent, la courbe (C) admet en $+\infty$ une asymptote oblique (D) d'équation $y = 2x\sqrt{3}$.

- **Construisons la courbe (C) :**



Partie B :

$g(x) = \sqrt{3}\,x - \sqrt{3x^2 + 1}$.

1).a). Montrons que (C') se déduit de (C) par la symétrie de centre O :

Pour tout réel x :

$g(-x) = -x\sqrt{3} - \sqrt{3(-x)^2 + 1} = -x\sqrt{3} - \sqrt{3x^2 + 1}$

$g(-x) = -\left(x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2 + 1}\right)$.

Or $f(x) = x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2 + 1}$.

Donc $g(-x) = -f(x)$, d'où $g(-x) + f(x) = 0$.

Par conséquent, la courbe (C') se déduit de la courbe (C) par la symétrie de centre O.

b). Traçons (C') dans le même repère que (C) :

Voir figure.

2). Montrons qu'on a : $\overrightarrow{\mathbf{KI}}.\overrightarrow{\mathbf{KJ}}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$:

Soit x l'abscisse du point K.

K est le projeté des points I et J sur l'axe $x'Ox$, donc :

$$\begin{cases} x_I = x_J = x_K = x \\ y_K = 0 \end{cases}.$$

De plus, $\begin{cases} y_I = f(x_I) = f(x) = x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2+1} \\ y_J = g(x_J) = g(x) = x\sqrt{3}-\sqrt{3x^2+1} \end{cases}.$

Ce qui permet d'avoir :

$\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ} = (x_I - x_K)(x_J - x_K) + (y_I - y_K)(y_J - y_K)$

$\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ} = (x-x)(x-x) + (g(x)-0)(f(x)-0)$

$\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ} = 0 + f(x)g(x) = f(x)g(x)$

$\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ} = \left(x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2+1}\right)\left(x\sqrt{3}-\sqrt{3x^2+1}\right)$

$\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ} = (x\sqrt{3})^2 - \left(\sqrt{3x^2+1}\right)^2 = 3x^2 - (3x^2+1)$

$\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ} = -1.$

Par conséquent, $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}+1=0.$

3). Montrons qu'un point M appartient à (H) si et seulement si ses coordonnées (x ; y) vérifient l'équation $y^2-2\sqrt{3}\,xy-1=0$:

Considérons dans IR, l'équation (E_y) d'inconnue y définie par : $y^2-2\sqrt{3}\,xy-1=0.$

Résolvons dans IR, (E_y) :

$y^2-2\sqrt{3}\,xy-1=0 \Leftrightarrow y^2-(2x\sqrt{3})y-1=0.$

- Discriminant :

$\Delta = \left(2\sqrt{3}\,x\right)^2 - 4(1)(-1) = 12x^2+4 = 4(3x^2+1)$

$\Delta = \left[\,2\sqrt{3x^2+1}\,\right]^2.$

• Solutions :

$$y_1 = \frac{2\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3x^2+1}}{2(1)} = \sqrt{3}\,x - \sqrt{3x^2+1} = g(x)$$

$$y_2 = \frac{2\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3x^2+1}}{2(1)} = \sqrt{3}\,x + \sqrt{3x^2+1} = f(x).$$

Donc $f(x)$ et $g(x)$ sont les solutions de l'équation (E_y).

(H) étant la réunion des courbes (C) et (C').

Par conséquent, un point M appartient à (H) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'équation

$(E_y) : y^2 - 2\sqrt{3}\,xy - 1 = 0.$

Partie C :

$h(x) = \ell n\left(\sqrt{3}\,x + \sqrt{3x^2+1}\right)$

1). Déterminons le domaine de définition de h :

Remarque : $h(x) = \ell n[\,f(x)\,]$.

$D_h = \{\, x \in IR \,/\, f(x) > 0 \,\}$.

• Résolvons dans IR, l'équation $f(x) = 0$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}\,x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+1} = -\sqrt{3}\,x$.

Pour tout x appartenant au domaine de validité de cette équation :

$\sqrt{3x^2+1} = -\sqrt{3}\,x = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2+1}\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\,x\right)^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 3x^2 \Leftrightarrow 1 = 0$ (Ce qui est faux car $1 \neq 0$).

Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solutions dans IR.

D'où $f(x)$ ne s'annule pas et il garde un signe constant sur IR.

Par conséquent, d'après le tableau de variations de f, $f(x) > 0$ pour tout réel x.

On en déduit que : $D_h = IR =]-\infty\,;+\infty[$.

2). Etudions la parité de h :

$\forall\, x \in IR, \forall(-x) \in IR$:

$h(-x) = \ell n\left(-x\sqrt{3} + \sqrt{3(-x)^2+1}\right) = \ell n\left(-x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2+1}\right)$

$h(-x) = \ell n\left(\sqrt{3x^2+1} - x\sqrt{3}\right) = \ell n\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+1} + x\sqrt{3}}\right)$

$h(-x) = -\ell n\left(\sqrt{3x^2+1} + x\sqrt{3}\right) = -\ell n\left(\sqrt{3}\,x + \sqrt{3x^2+1}\right)$

$h(-x) = -h(x)$.

Par conséquent, h est une fonction **impaire.**

3). Déduisons le sens de variation de h de celui de f :

$h(x) = \ell n[f(x)]$.

h est dérivable sur IR et pour tout réel x :

$h'(x) = (\ell n[f(x)])' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Or $\forall x \in$ IR, $f'(x) > 0$ et $f(x) > 0$.

D'où $\forall x \in$ IR, $h'(x) > 0$.

Par conséquent, la fonction h est strictement croissante sur IR.

4). Construisons la courbe représentative (Γ) de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé :

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ell n[f(x)] = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ell n[f(x)] = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Dressons le tableau de variations de h :

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
h	$-\infty$ ↗	$+\infty$

*** Etude des branches infinies de la courbe (Γ) :**

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ell n(\sqrt{3}\,x + \sqrt{3x^2+1})}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ell n(\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}\,x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ell n\left(\frac{(\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}\,x)(\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3}\,x)}{(\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3}\,x)}\right)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ell n\left(\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}\right)^2-(x\sqrt{3})^2}{\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}\,x\right)}\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ell n\left(\frac{3x^2+1-3x^2}{\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}\,x\right)}\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ell n\left(\frac{1}{\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}\,x\right)}\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\ell n\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}\,x\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\ell n\left(\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-x\sqrt{3}\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\ell n\left(|x|\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-x\sqrt{3}\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\ell n\left(-x\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-x\sqrt{3}\right)}{x}.$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0.$

Ce qui permet d'avoir :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\ell n(-x\sqrt{3}-x\sqrt{3})}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ell n(-2x\sqrt{3})}{(-x)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ell n(-x)+\ell n(2\sqrt{3})}{(-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ell n(-x)}{(-x)}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ell n(2\sqrt{3})}{(-x)}=0$$

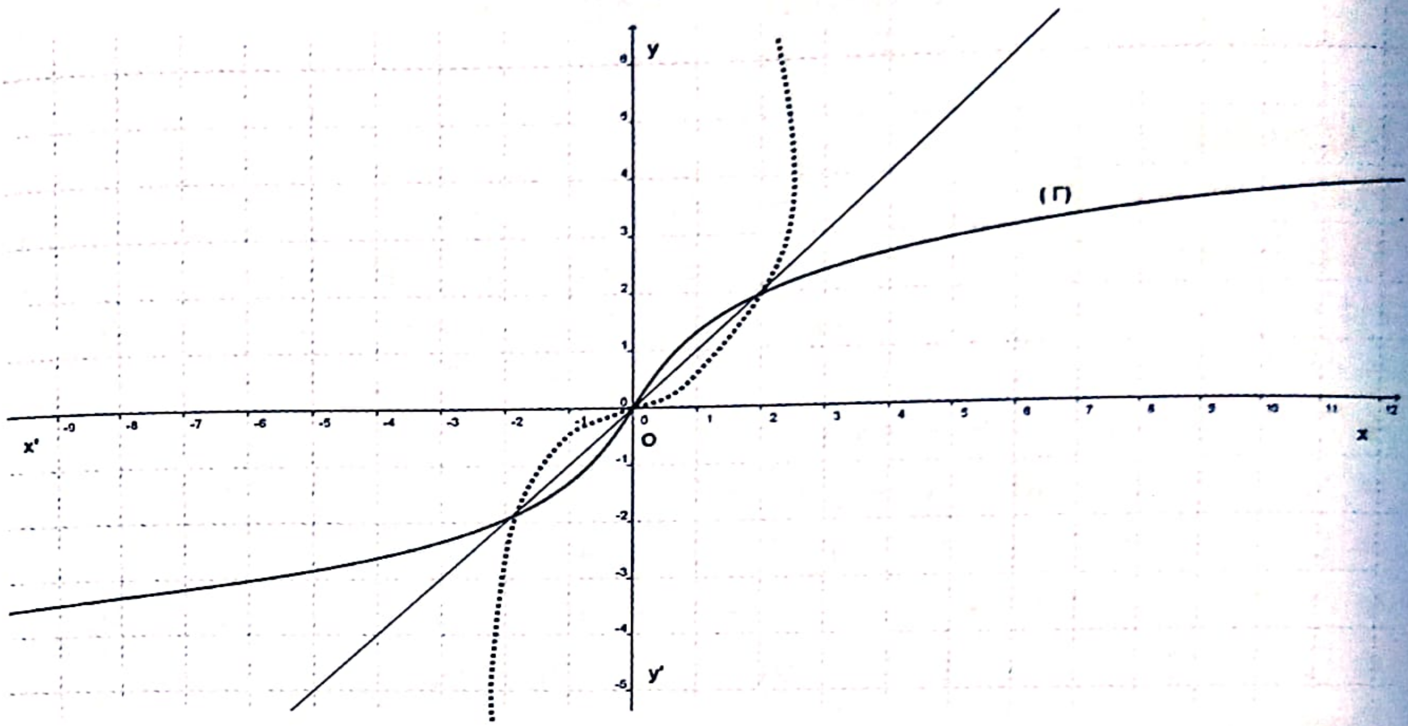
$$\text{car}\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ell n(-x)}{(-x)}=0\\[2mm]\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ell n(2\sqrt{3})}{(-x)}=0\end{cases}.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=0$, d'où la courbe (Γ) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses du repère en $-\infty$.

h étant une fonction impaire, on en déduit que la courbe (Γ) admet aussi une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses du repère en $+\infty$.

NB : On peut aussi démontrer facilement que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=0$, puis utiliser la parité de f et conclure.

Figure :



5). Montrons que h admet une fonction réciproque h^{-1} :
La fonction h est continue et strictement monotone (croissante) sur IR, d'où h est bijective et elle admet une fonction réciproque h^{-1}.

* **Courbe de la fonction réciproque :** Voir figure.
La courbe (Γ^{-1}) est représentée en pointillés.

CORRIGÉ DU BAC 2006

EXERCICE 1

$P(z) = z^3 + (-7 + 2i)z^2 + (15 - 4i)z - 25 + 10i$ dans $\mathbb{C}$.

1). Calculons $P(5-2i)$ et résolvons l'équation $P(z) = 0$:

$P(5-2i) = (5-2i)^3 + (-7+2i)(5-2i)^2 + (15-4i)(5-2i) - 25 + 10i$

$= (5)^3 - 3(5)^2(2i) + 3(5)(2i)^2 - (2i)^3 + (-7+2i)(25 - 20i - 4)$

$+ 75 - 30i - 20i - 8 - 25 + 10i$

$= 125 - 150i - 60 + 8i + (-7+2i)(21 - 20i) + 42 - 40i$

$= 125 - 150i - 60 + 8i - 147 + 140i + 42i + 40 + 42 - 40i$

$= (125 - 60 - 147 + 40 + 42) + i(-150 + 8 + 140 + 42 - 40)$

$= (207 - 207) + i(-190 + 190) = 0 + 0i = 0.$

Donc $P(5-2i) = 0$.

■ **Résolvons l'équation $P(z) = 0$:**

$P(5-2i) = 0$, donc $P(z)$ peut s'écrire sous la forme de

$P(z) = \big(z - (5-2i)\big)(az^2 + bz + c)$ avec a , b et c des nombres complexes que l'on déterminera.

On aura ainsi :

$P(z) = \big(z - (5-2i)\big)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = (z - 5 + 2i)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + bz^2 + cz - 5az^2 - 5bz - 5c + 2iaz^2 + 2ibz + 2ic$

$P(z) = az^3 + (b - 5a + 2ia)z^2 + (c - 5b + 2ib)z + c(-5 + 2i)$.

Or $P(z) = z^3 + (-7+2i)z^2 + (15-4i)z - 25 + 10i$.

Par identification , on peut poser :

$$\begin{cases} az^3 = z^3 \\ (b - 5a + 2ia)z^2 = (-7+2i)z^2 \\ c(-5+2i) = -25 + 10i \end{cases}.$$

Ce qui permet d'avoir :

$\begin{cases} a = 1 \\ b - 5 + 2i = -7 + 2i \\ c(-5 + 2i) = 5(-5 + 2i) \end{cases}$, soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$.

D'où $P(z) = (z - 5 + 2i)(z^2 - 2z + 5)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 5 + 2i)(z^2 - 2z + 5) = 0$

$\Leftrightarrow (z - 5 + 2i) = 0$ ou $(z^2 - 2z + 5) = 0$.

■ **Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$:**

• Discriminant Δ :

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = -16 = (4i)^2$.

• Racines carrées de Δ :

Les racines carrées de Δ sont $-4i$ et $4i$.

• Solutions :

En utilisant une seule racine carrée de Δ :

$z_1 = \frac{2 - 4i}{2(1)} = 1 - 2i$ et $z_2 = \frac{2 + 4i}{2(1)} = 1 + 2i$.

• Ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$:

$S_{\mathbb{C}} = \{ 5 - 2i \ ; \ 1 - 2i \ ; \ 1 + 2i \}$.

2). $z_I = -3 - 2i$; $z_A = 1 + 2i$; $z_B = 5 - 2i$.

a). Déterminons f, l'application complexe associée à S :

Posons $f(z) = z' = az + b$.

Déterminons les complexes a et b :

La similitude S est de centre I, donc $z_I = \frac{b}{1-a}$, d'où $b = z_I(1 - a)$.

S transforme A en B, donc $z_B = az_A + b$.

$\begin{cases} b = z_I(1 - a) \\ z_B = az_A + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_I(1 - a) \\ z_B = az_A + z_I(1 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_I(1 - a) \\ z_B - z_I = a(z_A - z_I) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = z_I(1 - a) \\ a = \frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5-2i+3+2i}{1+2i+3+2i} \\ b = z_I(1 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{4+4i} = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{1^2+1^2} \\ b = z_I(1 - a) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - i \\ b = (-3 - 2i)(1 - 1 + i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - i \\ b = 2 - 3i \end{cases}$.

Conclusion :

f est l'application d'écriture complexe $z' = (1-i)z + 2 - 3i$.

b). Déterminons les éléments caractéristiques de S :

- Rapport (soit k) de S :

$k = |a| = |(1-i)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

- Angle (soit θ) de S :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(a)}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{, soit } \theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi].$$

Conclusion :

S est la similitude plane directe de centre de rapport $\sqrt{2}$, de centre le point I d'affixe $-3-2i$, et d'angle $-\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

c). Déterminons l'équation de la droite (D′), image de la droite (D) par S :

(D) passe par A (1 ; 2) et son vecteur directeur est $\vec{u}(1\,;\,-2)$.

• Equation de (D) :

Soit $M(x\,;y)$ un point de (D).

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont alors colinéaires.

Or $\overrightarrow{AM}(x-1; y-2)$ et $\vec{u}(1\,;\,-2)$.

($\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$) $\Leftrightarrow -2(x-1) - 1(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow -2x - y + 4 = 0$. Donc (D) : $-2x - y + 4 = 0$.

Choisissons au hasard un 2ème point appartenant à (D) :

Si $x = 0$, on aura $y = 4$. Soit le point E d'affixe $z_E = 4i$.

• Déterminons les images des points A et E par S :

L'image du point A par S est le point B d'affixe $5-2i$.

Déterminons l'image de E par S :

$z_{E'} = (1-i)z_E + 2 - 3i = 4i(1-i) + 2 - 3i$

$z_{E'} = 4i + 4 + 2 - 3i = 6 + i$. Soit E′ (6 ; 1).

On a ainsi E′ (6 ; 1) et B (5 ; −2) qui sont deux points de (D′).

• **Ecrivons alors une équation de (D′) :**

Soit $M(x\,;y)$ un point de (D′).

Les vecteurs $\overrightarrow{E'M}$ et $\overrightarrow{E'B}$ seront alors colinéaires.

Or $\overrightarrow{E'M}(x-6\,;y-1)$ et $\overrightarrow{E'B}(-1\,;\,-3)$.

($\overrightarrow{E'M}$ colinéaire à $\overrightarrow{E'B}$) $\Leftrightarrow -3(x-6)+1(y-1)=0$

$\Leftrightarrow -3x+y+17=0$.

Conclusion : $(D') : -3x+y+17=0$.

EXERCICE 2

A_n : « L'électeur est favorable à la liste A au $n^{ième}$ jour de campagne ».

B_n : « L'électeur est favorable à la liste B au $n^{ième}$ jour de campagne ».

1). Donnons une relation simple entre p_n et q_n :

$p_n = p(A_n)$ et $q_n = p(B_n)$.

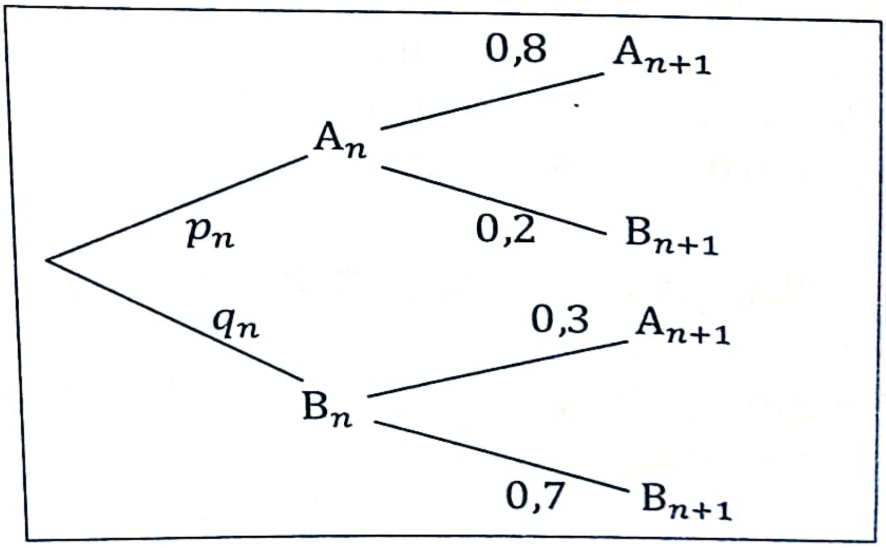
Remarquez que les événements A_n et B_n sont contraires.

Ce qui permet d'avoir :

$p(A_n) = 1 - p(B_n)$, d'où $p_n = 1 - q_n$.

Conclusion : $p_n = 1 - q_n$.

2).a). Déterminons l'arbre des probabilités :



☆ **Comment compléter l'arbre de probabilités ?**

D'après l'énoncé, 20% des électeurs favorables à la liste A changent d'avis le jour suivant pour être favorables à la liste B, ce qui permet d'écrire :

$p(B_{n+1}/A_n) = 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2.$

(On écrit sur l'arbre 0,2 entre B_{n+1} et A_n).

$p(B_{n+1}/A_n)$: Probabilité de ceux qui sont favorables à la liste B le $(n+1)^{ième}$ jour sachant qu'ils étaient favorables à la liste A le $n^{ième}$ jour.

De plus, d'après l'énoncé, 30% des électeurs favorables à la liste B changent d'avis le jour suivant pour être favorables à la liste A, ce qui permet décrire :

$p(A_{n+1}/B_n) = 30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3.$

(On écrit sur l'arbre 0,3 entre A_{n+1} et B_n).

$p(A_{n+1}/B_n)$: Probabilité de ceux qui sont favorables à la liste A le $(n+1)^{ième}$ jour sachant qu'ils étaient favorables à la liste B le $n^{ième}$ jour.

Pour les 0,8 et 0,7 on utilise la loi de probabilité :

$0{,}8 = 1 - \mathbf{0{,}2}$ et $0{,}7 = 1 - \mathbf{0{,}3}$.

b). Donnons $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1}/B_n)$:

Entre A_{n+1} et A_n on peut lire sur l'arbre 0,8.

Entre A_{n+1} et B_n on peut lire sur l'arbre 0,3.

D'où $p(A_{n+1}/A_n) = 0{,}8$ et $p(A_{n+1}/B_n) = 0{,}3$.

c). Montrons que

$\boldsymbol{p(A_{n+1} \cap A_n) = 0{,}8p_n}$ **et que** $\boldsymbol{p(A_{n+1} \cap B_n) = 0{,}3q_n}$ **:**

En utilisant l'arbre :

* $p(A_{n+1} \cap A_n) = p(A_n) \times p(A_{n+1}/A_n) = p_n \times 0{,}8 = 0{,}8p_n.$

D'où $p(A_{n+1} \cap A_n) = 0{,}8p_n.$

$* \ p(A_{n+1} \cap B_n) = p(B_n) \times p(A_{n+1}/ B_n) = q_n \times 0{,}3 = 0{,}3q_n$.

D'où $p(A_{n+1} \cap B_n) = 0{,}3q_n$.

- **Déduisons-en que**

$\boldsymbol{p(A_{n+1}) = 0,8p_n + 0,3q_n}$ **puis que** $\boldsymbol{p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3}$:

$\begin{cases} p(A_{n+1} \cap A_n) = 0{,}8p_n \\ p(A_{n+1} \cap B_n) = 0{,}3q_n \end{cases}$.

$p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n)$

D'où $p(A_{n+1}) = 0{,}8p_n + 0{,}3q_n$.

- **Démontrons que** $\boldsymbol{p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3}$:

On a $p(A_{n+1}) = 0{,}8p_n + 0{,}3q_n$.

Donc $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}3q_n$.

Or $p_n = 1 - q_n$, d'où $q_n = 1 - p_n$.

Ce qui permet d'avoir :

$p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}3(1 - p_n) = 0{,}8p_n + 0{,}3 - 0{,}3p_n$

$p_{n+1} = (0{,}8 - 0{,}5)p_n + 0{,}3$

$p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.

Conclusion : $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.

3). Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = p_n - 0{,}6$.

a). Montrons que $\boldsymbol{(u_n)}$ est une suite géométrique :

$u_n = p_n - 0{,}6$, donc $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}6$.

On aura :

$u_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3 - 0{,}6$

$u_{n+1} = 0{,}5p_n - 0{,}3$

$u_{n+1} = 0{,}5(p_n - 0{,}6)$. Or $u_n = p_n - 0{,}6$.

Donc $u_{n+1} = 0{,}5.u_n$.

Par conséquent, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$.

■ **Déterminons la limite de $\boldsymbol{(u_n)}$:**

La suite (u_n) est de 1er terme $u_1 = (p_1 - 0{,}6)$.

(u_n) étant une suite géométrique, donc $u_n = u_1.q^{n-1}$.

$u_n = (p_1 - 0{,}6).(0{,}5)^{n-1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(p_1 - 0{,}6).(0{,}5)^{n-1} = 0$ car $|0{,}5| < 1$.

b). Déduisons-en la limite de la suite (p_n) :

$u_n = p_n - 0{,}6$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(p_n - 0{,}6) = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0{,}6$.

PROBLÈME

Partie A :

$g_n(x) = -nx\ell n(x) + 2 - x$ avec $n \in \mathrm{IN}^*$ et $D_{g_n} =]1\,;+\infty[$.

1). Etudions les variations de g_n sur $]1\,;+\infty[$:

g_n est la somme de deux fonctions :

$x \longmapsto -nx\ell n(x)$ et $x \longmapsto 2 - x$.

La fonction $x \longmapsto -nx\ell n(x)$ est le produit de deux fonctions qui sont dérivables sur $]1\,;+\infty[$;

La fonction $x \longmapsto 2 - x$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$.

Donc g_n est dérivable sur $]1\,;+\infty[$.

$\forall x \in]1\,;+\infty[$, $g_n'(x) = (-nx\ell n(x) + 2 - x)'$

$g_n'(x) = (-nx)'(\ell n(x)) + (\ell n(x))'(-nx) - 1$

$g_n'(x) = -n\ell n(x) + \frac{1}{x}(-nx) - 1$

$g_n'(x) = -n\ell n(x) - n - 1$

$g_n'(x) = -(n\ell n(x) + n + 1)$.

$\forall x \in]1\,;+\infty[, \forall n \in \mathrm{IN}^*, \begin{cases} n\ell n(x) > 0 \\ n+1 > 0 \end{cases}$, d'où $g_n'(x) < 0$.

Par conséquent, la fonction g_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2).a). Montrons que l'équation $g_n(x) = 0$ admet sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ une solution α_n appartenant à l'intervalle $]\,1\,;\,2\,[$:

• **Limites de g_n aux bornes de D_{g_n} :**

$$\lim_{x\to 1} g_n(x) = \lim_{x\to 1}(-nx\ell n(x) + 2 - x) = -n\ell n(1) + 2 - 1 = 1.$$

$$\lim_{x\to +\infty} g_n(x) = \lim_{x\to +\infty}(-nx\ell n(x) + 2 - x)$$

$$\lim_{x\to +\infty} g_n(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(-n\ell n(x) + \frac{2}{x} - 1\right).$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty}[-n\ell n(x)] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \end{cases}, \text{ donc } \lim_{x\to +\infty} g_n(x) = -\infty.$$

■ **Tableau de variations de g_n :**

x	1		α_n		$+\infty$
$g'_n(x)$			$-$		
g_n	1	$\oplus$	0	$\ominus$	$-\infty$

D'après son tableau de variations, la fonction g_n est continue et strictement décroissante sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

De plus $0 \in\,]-\infty\,;\,1\,[$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g_n(x) = 0$ admet sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ une unique solution α_n.

Démontrons que $\alpha_n \in\,]\,1\,;\,2\,[$:

$g_n(1) = 1$ et $g_n(2) = -2n\ell n(2) + 2 - 2 = -2n\ell n(2)$.

Donc $g_n(1) > 0$ et $g_n(2) < 0$.

D'où $\alpha_n \in\,]\,1\,;\,2\,[$.

b). Déduisons-en le signe de $g_n(x)$ sur $]1\,;+\infty[$:

Le signe de $g_n(x)$ e st indiqué dans le tableau de variations de g_n.

x	1		α_n	$+\infty$
$g_n(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$

Partie B :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ell n(x) & \text{si } x \in]0\,;1] \\ f_n(x) = (2-x)^n \ell n(x) & \text{si } x \in]1\,;+\infty[. \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

$D_{f_n} = [0\,;+\infty[$.

1).a). Etudions la continuité de f_n en $x_0 = 0$ et en $x_1 = 1$:

• **Continuité de f_n à droite de $x_0 = 0$:**

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ell n(x) = 0$, donc la fonction f_n est continue à droite de $x_0 = 0$.

• **Continuité de f_n à gauche de $x_0 = 0$:**

f_n n'est pas définie à gauche de $x_0 = 0$ car $D_{f_n} = [0\,;+\infty[$,

donc f_n n'est pas continue à gauche de $x_0 = 0$.

• **Continuité de f_n en $x_0 = 0$:**

La fonction f_n est continue à droite de $x_0 = 0$ mais n'est pas continue à gauche de $x_0 = 0$.

Par conséquent, f_n n'est pas continue en $x_0 = 0$.

• **Continuité de f_n à droite de $x_1 = 1$:**

$\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2-x)^n \ell n(x) = (2-1)^n \ell n(1) = 0$, donc la fonction f_n est continue à droite de $x_1 = 1$.

• **Continuité de f_n à gauche de $x_1 = 1$:**

$\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^n \ell n(x) = 1^n \ell n(1) = 0$, donc la fonction f_n est continue à droite de $x_1 = 1$.

- **Continuité de f_n en $x_1 = 1$:**

$\lim\limits_{x \to 1^-} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f_n(x) = 0.$

De plus $f_n(1) = 1^n \ell n(1) = 0.$

Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f_n(x) = f_n(1) = 0.$

Par conséquent, la fonction f_n est continue en $x_1 = 1$.

b). Etudions la dérivabilité de f_n en $x_0 = 0$ et donnons-en une interprétation graphique :

f_n est dérivable à droite de $x_0 = 0$ mais f_n n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^n \ell n(x) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} [\, x^{n-1} \ell n(x)\,] = 0.$

Interprétation graphique :

La courbe (C_n) de la fonction f_n admet au point d'abscisse $x_0 = 0$ une demi tangente horizontale dirigée vers la droite.

c). Montrons que f_n est dérivable en $x_1 = 1$ et déterminons une équation de la tangente (T) à (C_n) au point d'abscisse 1 :

- **Dérivabilité de f_n à droite de $x_1 = 1$:**

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{(2-x)^n \ell n(x) - 0}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ell n(x)}{x - 1} (2 - x)^n.$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ell n(x)}{x - 1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (2 - x)^n = (2 - 1)^n = 1^n = 1 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x - 1} = 1.$

D'où f_n est dérivable à droite de $x_1 = 1.$

- **Dérivabilité de f_n à gauche de $x_1 = 1$:**

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^n \ell n(x) - 0}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\ell n(x)}{x - 1} \times x^n.$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\ell n(x)}{x - 1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} x^n = 1^n = 1 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x - 1} = 1.$

De plus, si $x \in]\, 0 ; 1]$, $f_n(x) = x^n \ell n(x).$

D'où $f_n'(x) = (x^n)'(\ell n(x)) + (\ell n(x))'(x^n)$

$f_n'(x) = nx^{n-1}(\ell n(x)) + \left(\frac{1}{x}\right)(x^n) = nx^{n-1}(\ell n(x)) + x^{n-1}$

$f_n'(x) = x^{n-1}[\, n\ell n(x) + 1\,]$.

Ce qui permet d'avoir $f_n'(1) = 1^{n-1}[\, n\ell n(1) + 1\,] = 1$.

On déduit de ce qui précède que :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x-1} = f_n'(1) = 1.$$

Conclusion :

La fonction f_n est dérivable à gauche et à droite de $x_1 = 1$.

De plus, $\lim_{x\to 1^-} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x-1} = f_n'(1) = 1$.

Par conséquent, la fonction f_n est dérivable en $x_1 = 1$.

- **Déterminons une équation de la tangente (T) à (C_n) au point d'abscisse 1 :**

(T) : $y = f_n'(1)(x-1) + f_n(1)$

(T) : $y = 1(x-1) + 0$

(T) : $y = x - 1$.

2). Calculons suivant la parité de n, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$:

$f_n(x) = (2-x)^n \ell n(x)$ si $x \in]\,1\,;\,+\infty[$.

1er cas (n est pair) :

Dans ce cas $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (2-x)^n = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \ell n(x) = +\infty \end{cases}$, d'où $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

2ème cas (n est impair) :

Dans ce cas $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (2-x)^n = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \ell n(x) = +\infty \end{cases}$, d'où $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

3).a). Calculons $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]\,0\,;1\,[$:

Si $x \in]\,0\,;1\,]$, $f_n(x) = x^n \ell n(x)$.

f_n est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$ et $\forall x \in]\,0\,;1\,[$, on aura :

$f_n'(x) = x^{n-1}[\, n\ell n(x) + 1\,]$(Voir **1).c.)**).

b). Etudions le signe de $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0;1[$:

Si $x \in]0;1]$, $f_n'(x) = x^{n-1}[n\ell n(x) + 1]$.

Si $x \in]0;1]$, $x^{n-1} > 0$. Donc $f_n'(x)$ est du signe de $n\ell n(x) + 1$.

Posons $n\ell n(x) + 1 = 0$:

$n\ell n(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ell n(x) = -\frac{1}{n} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{n}}$.

Ce qui permet d'avoir :

- Si $x \in \left]0;e^{-\frac{1}{n}}\right]$, $n\ell n(x) + 1 \leq 0$, d' où$f_n'(x) \leq 0$.
- Si $x \in \left]e^{-\frac{1}{n}};1\right[$, $n\ell n(x) + 1 > 0$, d' où$f_n'(x) > 0$.

4).a). Montrons que $\forall\, x \in]1;+\infty[$, $f_n'(x) = \frac{(2-x)^{n-1}}{x} \times g_n(x)$:

$f_n(x) = (2-x)^n \ell n(x)$ si $x \in]1;+\infty[$.

f_n est le produit de deux fonctions dérivables $]1;+\infty[$, donc f_n est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout x élément de $]1;+\infty[$, on aura :

$f_n'(x) = ((2-x)^n)'\ell n(x) + (\ell n(x))'(2-x)^n$

$f_n'(x) = n(-1)(2-x)^{n-1}\ell n(x) + \frac{1}{x}(2-x)^n$

$f_n'(x) = (2-x)^{n-1}\left[-n\ell n(x) + \frac{1}{x}(2-x)^1\right]$

$f_n'(x) = (2-x)^{n-1}\left[\frac{-nx\ell n(x) + 2 - x}{x}\right]$

$f_n'(x) = \frac{(2-x)^{n-1}}{x} \times [-nx\ell n(x) + 2 - x]$.

Or $g_n(x) = -nx\ell n(x) + 2 - x$.

Donc $f_n'(x) = \frac{(2-x)^{n-1}}{x} \times g_n(x)$.

Conclusion : $\forall\, x \in]1;+\infty[$ $f_n'(x) = \frac{(2-x)^{n-1}}{x} \times g_n(x)$.

b). Montrons que $f_n(\alpha_n) = \frac{(2-\alpha_n)^{n+1}}{n.\alpha_n}$:

Rappelons que $g_n(x) = -nx\ell n(x) + 2 - x$ et que $g_n(\alpha_n) = 0$ avec $\alpha_n \in]1;+\infty[$.

$g_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow -n\alpha_n \ell n(\alpha_n) + 2 - \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \ell n(\alpha_n) = \frac{(2-\alpha_n)}{n\alpha_n}$.

On a $f_n(x) = (2-x)^n \ell n(x)$ si $x \in]1\,;+\infty[$.

Donc $f_n(\alpha_n) = (2-\alpha_n)^n \ell n(\alpha_n)$.

Or $\ell n(\alpha_n) = \frac{(2-\alpha_n)}{n\alpha_n}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$f_n(\alpha_n) = (2-\alpha_n)^n \times \frac{(2-\alpha_n)}{n\alpha_n} = \frac{(2-\alpha_n)^{n+1}}{n.\alpha_n}.$$

Conclusion : $f_n(\alpha_n) = \frac{(2-\alpha_n)^{n+1}}{n.\alpha_n}$ avec $\alpha_n \in]1\,;+\infty[$.

5). On suppose que n est pair.

a). Dressons le tableau de variation de f_n :

Rappelons que :

* Si $x \in \left]0\,;e^{-\frac{1}{n}}\right]$, $f_n'(x) \leq 0$;

* Si $x \in \left]e^{-\frac{1}{n}}\,;1\right[$, $f_n'(x) > 0$;

* $\forall\, x \in]1\,;+\infty[$, $f_n'(x) = \frac{(2-x)^{n-1}}{x} \times g_n(x)$;

Donc $\forall\, x \in]1\,;+\infty[$, $f_n'(x) = \frac{(2-x)^n}{x} \times \frac{g_n(x)}{(2-x)}$.

Si n est pair et si $x \in]1\,;+\infty[$, on aura $\frac{(2-x)^n}{x} \geq 0$.

D'où $f_n'(x)$ sera du signe de $\frac{g_n(x)}{(2-x)}$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

- Etudions le signe de $\frac{g_n(x)}{(2-x)}$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$:

x	1		α_n		2		$+\infty$
$g_n(x)$	‖	$+$	0	$-$		$-$	
$(2-x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{g_n(x)}{(2-x)}$	‖	$+$	0	$-$	╳	$+$	

NB : Voir le signe de $g_n(x)$ dans la partie A, question 2).b).

■ Tableau de variations de f_n si n **est pair** :

x	0	$e^{-\frac{1}{n}}$		α_n		2	$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$ 0 $-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f_n	0 ↘	$\frac{-1}{e.n}$	↗	$f_n(\alpha_n)$	↘	0	↗ $+\infty$

Justifications :

$*$ f_n n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, ce qui explique la double barre en 0 dans le tableau de variations.

Mais f_n est dérivable à droite de $x_0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = 0$.

Ce qui explique le **zéro** (0) qui est placé à droite de la double barre.

$*$ $f_n(0) = 0$.

$*$ Si $x \in]\,0\,;1\,]$, $f_n(x) = x^n \ell n(x)$. Ce qui permet d'avoir :

$$f_n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \ell n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{e.n}.$$

$*$ Si $x \in]\,1\,;+\infty\,[$, $f_n(x) = (2-x)^n \ell n(x)$.

Donc $f_n(2) = (2-2)^n \ell n(2) = 0^n \ell n(2) = 0$.

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ si n est pair. (Voir Partie B. 2).).

b). Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$:

• Si $x \in]\,0\,;1\,]$, $f_n(x) = x^n \ell n(x)$.

D'où $f_2(x) = x^2 \ell n(x)$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 \ell n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ell n(x) = +\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ell n(x) \end{cases}$.

• Si $x \in \,]1\,;+\infty[$, $f_n(x) = (2-x)^n \ell n(x)$.
D'où $f_2(x) = (2-x)^2 \ell n(x)$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2-x)^2 \ell n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(4-4x+x^2)\ell n(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{(4-4x+x^2)}{x} \times \ell n(x)\right]$.

$$\text{Or } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(4-4x+x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ell n(x) = +\infty \end{cases}.$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = +\infty$.

Interprétons graphiquement le résultat :

Dans les deux cas précédents, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = +\infty$, d'où la courbe (C_2) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées du repère.

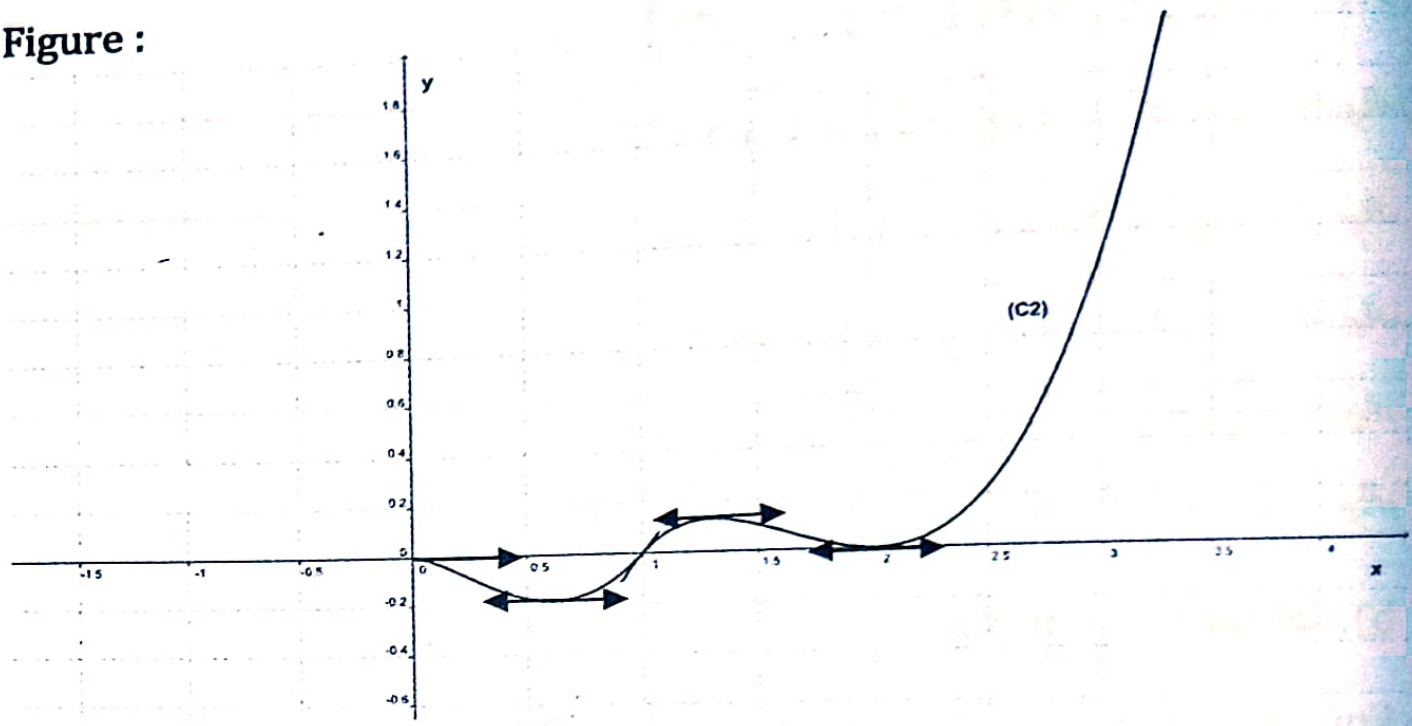
c). Construisons la courbe (C_2) avec $\alpha_2 = 1,35$:

• Tableau de variations de f_2 :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$		α_2		2	$+\infty$
$f_2'(x)$	‖ 0 $-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f_2	0 ↘	$\frac{-1}{2e}$	↗	$0,13$	↘	0	↗ $+\infty$

$f_2(\alpha_2) = f_2(1,35) = (2-1,35)^2 \ell n(1,35) = 0,13$.
(Utilisez une calculatrice)

Figure :



6). Soit β un nombre réel de l'intervalle $]\,0\,;1\,[$.

a). Déterminons $\mathcal{A}_\beta$ l'aire géométrique, en cm², du domaine limité par (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\beta$ et $x=1$:

$\forall\, x \in [\,\beta\,;\,1\,]$, $f_2(x) = x^2\ell\mathrm{n}(x)$ et $f_2(x) \leq 0$, (Voir courbe).

Donc $\mathcal{A}_\beta = -\int_\beta^1 f_2(x)dx \times (4cm \times 5cm)$

$\mathcal{A}_\beta = -\int_\beta^1[\,x^2\ell\mathrm{n}(x)\,]dx \times (20\ cm^2)$.

Utilisons une technique d'intégration par parties :

Posons $\begin{cases} u(x) = \ell\mathrm{n}(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$, ainsi $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir :

$\mathcal{A}_\beta = -\left([\,u(x)v(x)\,]_1^\beta - \int_\beta^1 u'(x)v(x)dx\right) \times (20\ cm^2)$

$\mathcal{A}_\beta = -\left(\left[\frac{1}{3}x^3\ell\mathrm{n}(x)\right]_\beta^1 - \int_\beta^1 \left(\frac{1}{3x}x^3\right)dx\right) \times (20\ cm^2)$

$$\mathcal{A}_\beta = -\left(\left[\frac{1}{3}x^3\ell n(x)\right]_\beta^1 - \frac{1}{3}\int_\beta^1 x^2 dx\right) \times (20\ cm^2)$$

$$\mathcal{A}_\beta = -\left(\left[\frac{1}{3}x^3\ell n(x)\right]_\beta^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\beta^1\right) \times (20\ cm^2)$$

$$\mathcal{A}_\beta = -\left(\frac{1}{3}\left[x^3\ell n(x) - \frac{x^3}{3}\right]_\beta^1\right) \times (20\ cm^2)$$

$$\mathcal{A}_\beta = -\frac{1}{3}\left[\left(1^3\ell n(1) - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\beta^3\ell n(\beta) - \frac{\beta^3}{3}\right)\right] \times (20\ cm^2)$$

$$\mathcal{A}_\beta = -\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3} - \beta^3\ell n(\beta) + \frac{\beta^3}{3}\right] \times (20\ cm^2)$$

$$\mathcal{A}_\beta = \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\beta^3\ell n(\beta) - \frac{\beta^3}{9}\right] \times (20\ cm^2).$$

b). Calculons $\lim\limits_{\beta\to 0} \mathcal{A}_\beta$:

$$\lim_{\beta\to 0} \mathcal{A}_\beta = \lim_{\beta\to 0} \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\beta^3\ell n(\beta) - \frac{\beta^3}{9}\right] \times (20\ cm^2).$$

On sait que $\lim\limits_{\beta\to 0}\left(\beta^3\ell n(\beta)\right) = 0$ et $\lim\limits_{\beta\to 0}\left(\frac{\beta^3}{9}\right) = 0$.

Ce qui permet d'avoir

$$\lim_{\beta\to 0} \mathcal{A}_\beta = \lim_{\beta\to 0}\left(\frac{1}{9} - 0 + 0\right) \times (20\ cm^2) = \frac{20}{9} cm^2 .$$

Conclusion : $\lim\limits_{\beta\to 0} \mathcal{A}_\beta = 2{,}22\ cm^2$ (Valeur approchée).

CORRIGÉ DU BAC 2007

EXERCICE 1

Donnée :

$$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n{}^2}{2U_n - 1} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1). Montrons par récurrence que $U_n > 1, \ \forall \ n \in IN$:

$U_0 = 2$ et $2 > 1$, donc $U_0 > 1$.

$U_{n+1} = \dfrac{U_n{}^2}{2U_n - 1} \Longrightarrow U_1 = \dfrac{U_0{}^2}{2U_0 - 1} = \dfrac{2^2}{2(1) - 1} = \dfrac{4}{1} = 4.$

$U_1 = 4$ et $4 > 1$, donc $U_1 > 1$.

On a ainsi $\begin{cases} U_0 > 1 \\ U_1 > 1 \end{cases}$.

$\forall \ n \in IN$, **supposons que $U_n > 1$ et démontrons que $U_{n+1} > 1$:**

∗ Signe de $2U_n - 1$:

$U_n > 1 \Leftrightarrow 2U_n > 2 \Leftrightarrow 2U_n - 1 > 2 - 1 \Leftrightarrow 2U_n - 1 > 1.$

Si $2U_n - 1 > 1$, alors $\mathbf{2U_n - 1 > 0}$.

Ce qui permet d'avoir :

$U_n > 1 \Leftrightarrow U_n - 1 > 0 \Leftrightarrow (U_n - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow U_n^2 - 2U_n + 1 > 0$

$\Leftrightarrow U_n^2 > 2U_n - 1 \Leftrightarrow \dfrac{U_n^2}{2U_n - 1} > 1$ car $2U_n - 1 > 0.$

$\dfrac{U_n^2}{2U_n - 1} > 1 \Leftrightarrow U_{n+1} > 1.$

Conclusion : $U_n > 1, \ \forall \ n \in IN$.

2). On pose $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n}$ et $W_n = \ell n \, V_n, \ \forall \ n \in IN$.

a). Montrons que la suite (W_n) est géométrique :

$\forall \ n \in IN$, (W_n) est géométrique si et seulement si il existe un réel non nul q tel que $W_{n+1} = q.W_n$.

$\forall\ n \in \text{IN}, \begin{cases} V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n} \\ W_n = \ell n\, V_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1}} \\ W_{n+1} = \ell n\, V_{n+1} \end{cases}.$

Ce qui permet d'avoir :

$\forall\ n \in \text{IN},$

$$W_{n+1} = \ell n\, V_{n+1} = \ell n\left(\frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1}}\right) = \ell n\left(\frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1}}\right)$$

$$W_{n+1} = \ell n\left[\frac{\frac{U_n{}^2}{2U_n - 1} - 1}{\frac{U_n{}^2}{2U_n - 1}}\right] = \ell n\left[\frac{\frac{U_n{}^2 - 2U_n + 1}{2U_n - 1}}{\frac{U_n{}^2}{2U_n - 1}}\right] = \ell n\left[\frac{U_n{}^2 - 2U_n + 1}{U_n{}^2}\right]$$

$$W_{n+1} = \ell n\left[\frac{(U_n - 1)^2}{U_n{}^2}\right] = \ell n\left[\left(\frac{U_n - 1}{U_n}\right)^2\right] = 2\ell n\left(\frac{U_n - 1}{U_n}\right) = 2\ell n V_n$$

$W_{n+1} = 2W_n.$

Ce qui montre que la suite (W_n) est géométrique, de raison $q = 2$ et de 1er terme W_0 tel que :

$$W_0 = \ell n\, V_0 = \ell n\left(\frac{U_0 - 1}{U_0}\right) = \ell n\left(\frac{2 - 1}{2}\right) = \ell n\left(\frac{1}{2}\right) = -\,\ell n(2)$$

$W_0 = -\,\ell n(2).$

b). $\forall\, n \in$ IN, exprimons W_n, V_n puis U_n en fonction de n :

* **Expression de W_n en fonction de n :**

(W_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1er terme $W_0 = -\,\ell n(2)$.

Ce qui permet d'avoir :

$W_n = W_0 \times q^n$

$W_n = (-\,\ell n(2)) \times 2^n$

$W_n = -\,2^n \ell n(2).$

* **Expression de V_n en fonction de n :**

$W_n = \ell n\, V_n \Leftrightarrow V_n = e^{W_n}.$

Ce qui permet d'avoir :

$$V_n = e^{W_n} = e^{(-\,2^n \ell n(2))} = e^{(2^n(-\,\ell n(2)))} = e^{(2^n(\ell n(1/2)))}$$

$$V_n = e^{\ell n\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = \frac{1^{2^n}}{2^{2^n}} = \frac{1}{2^{2^n}}$$

$V_n = \frac{1}{2^{2^n}}$.

* **Expression de U_n en fonction de n :**

$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n} \Leftrightarrow U_n V_n = U_n - 1 \Leftrightarrow U_n V_n - U_n = -1$

$\Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = -1 \Leftrightarrow U_n = \frac{-1}{V_n - 1} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{1 - V_n}$.

Or $V_n = \frac{1}{2^{2^n}}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$U_n = \frac{1}{1 - V_n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{2^n}}} = \frac{1}{\frac{2^{2^n} - 1}{2^{2^n}}} = \frac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1}$$

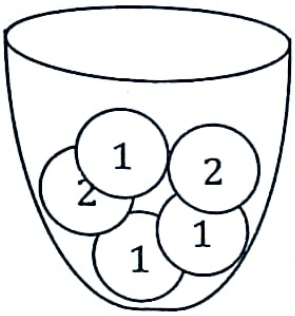
$$U_n = \frac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1}.$$

c). Déduisons-en la limite de la suite (U_n) :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2^{2^n}}{2^{2^n}}\right) = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1.$$

Par conséquent $\lim (U_n) = 1$.

EXERCICE 2



Urne contenant 5 jetons indiscernables numérotés 1, 1,1, 2, 2.

1). Donnons les éléments de Ω l'univers des éventualités :

On est en face d'un tirage **successif et sans remise de trois jetons** portant les chiffres 1, 1, 1, 2 et 2 .

Dans ce cas, l'ensemble des **triplets** qu'on peut avoir avec les chiffres 1, 1, 1, 2 et 2 sont :

$(1,1,1)$; $(1,1,2)$; $(1,2,1)$; $(1,2,2)$; $(2,1,1)$; $(2,1,2)$; $(1,1,1)$.

On écrit :

$\Omega = \{(1,1,1)$; $(1,1,2)$; $(1,2,1)$; $(1,2,2)$; $(2,1,1)$; $(2,1,2)$; $(2,2,1)\}$.

2). Données :

$A = \{ (x,\ y,\ z) \in \Omega,\ x = 1 \}$ et $B = \{ (x,\ y,\ z) \in \Omega,\ y = z \}$.

$p\{ (x,\ y,\ z) \} = a(x + y + z) + b$.

Déterminons a et b en sachant que p est une probabilité et que $p(A) - p(B) = \frac{4}{35}$:

On a $p\{ (x,\ y,\ z) \} = a(x + y + z) + b$. Ce qui permet d' avoir

$p\{(1,1,1)\} = a(1 + 1 + 1) + b = 3a + b.$

$p\{(1,1,2)\} = a(1 + 1 + 2) + b = 4a + b.$

$p\{(1,2,1)\} = a(1 + 2 + 1) + b = 4a + b.$

$p\{(1,2,2)\} = a(1 + 2 + 2) + b = 5a + b.$

$p\{(2,1,1)\} = a(2 + 1 + 1) + b = 4a + b.$

$p\{(2,1,2)\} = a(2 + 1 + 2) + b = 5a + b.$

$p\{(2,2,1)\} = a(2 + 2 + 1) + b = 5a + b.$

En additionnant membre à membre, on trouve :

$p(\Omega) = \sum p\{ (x,\ y,\ z) \} = 30a + 7b.$

p est une probabilité si et seulement si $p(\Omega) = 1.$

$p(\Omega) = 1 \Leftrightarrow 30a + 7b = 1.$

• Déterminons $p(A)$:

$A = \{ (x,\ y,\ z) \in \Omega,\ x = 1 \}$ signifie que :

$A = \{ (1,1,1) ;\ (1,1,2) ;\ (1,2,1) ;\ (1,2,2) \}.$

Ce qui permet d'avoir :

$p(A) = p\{(1,1,1)\} + p\{(1,1,2)\} + p\{(1,2,1)\} + p\{(1,2,2)\}$

$p(A) = (3a + b) + (4a + b) + (4a + b) + (5a + b)$

$p(A) = 16a + 4b.$

• Déterminons $p(B)$:

$B = \{ (x,\ y,\ z) \in \Omega,\ y = z \}$ signifie que :

$B = \{ (1,1,1) ;\ (1,2,2) ;\ (2,1,1) \}.$

Ce qui permet d'avoir :

$p(B) = p\{ (1,1,1) \} + p\{ (1,2,2) \} + p\{ (2,1,1) \}$

$p(B) = (3a + b) + (5a + b) + (4a + b)$

$p(B) = 12a + 3b.$

De ce qui précède, on a $\begin{cases} 30a + 7b = 1 \\ p(\mathrm{A}) = 16a + 4b \\ p(\mathrm{B}) = 12a + 3b \end{cases}$.

Ainsi : $\begin{cases} p(\Omega) = 1 \\ p(\mathrm{A}) - p(\mathrm{B}) = \frac{4}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30a + 7b = 1 \\ (16a + 4b) - (12a + 3b) = \frac{4}{35} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 30a + 7b = 1 \\ 4a + b = \frac{4}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30a + 7b = 1 \\ -28a - 7b = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30a + 7b = 1 \\ 2a - 7b = 1 - \frac{4}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 30a + 7b = 1 \\ 2a = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{7} \\ a = \frac{1}{10} \end{cases}$.

3). On suppose que $\boldsymbol{a = \frac{1}{10}}$ et $\boldsymbol{b = -\frac{2}{7}}$.

■ **Déterminons la loi de probabilité de X :**

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont -2 ; 1 ; 3.

On écrit $\mathrm{X}(\Omega) = \{-2\,;\,1\,;\,3\}$.

Déterminons les différentes probabilités associées :

- $p(\mathrm{X} = -2) = p(\text{un chiffre pair et deux autres impairs})$

$p(\mathrm{X} = -2) = p\{(1,1,2)\} + p\{(2,1,1)\} + p\{(1,2,1)\}$

$p(\mathrm{X} = -2) = (4a + b) + (4a + b) + (4a + b) = 12a + 3b$

$p(\mathrm{X} = -2) = 12\left(\frac{1}{10}\right) + 3\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{6}{5} - \frac{6}{7} = \frac{42 - 30}{35} = \frac{12}{35}$.

- $p(\mathrm{X} = 1) = p(\text{un chiffre impair et les deux autres pairs})$

$p(\mathrm{X} = 1) = p\{(1,2,2)\} + p\{(2,1,2)\} + p\{(2,2,1)\}$

$p(\mathrm{X} = 1) = (5a + b) + (5a + b) + (5a + b) = 15a + 3b$

$p(\mathrm{X} = 1) = 15\left(\frac{1}{10}\right) + 3\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{2} - \frac{6}{7} = \frac{21 - 12}{14} = \frac{9}{14}$.

- $p(\mathrm{X} = 3) = p(\text{trois chiffres impairs})$

$p(\mathrm{X} = 3) = p\{(1,1,1)\} = 3a + b$

$p(\mathrm{X} = 3) = 3\left(\frac{1}{10}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{10} - \frac{2}{7} = \frac{21 - 20}{70} = \frac{1}{70}$.

x_i	-2	1	3	Total
$p(X = x_i)$	$\frac{12}{35}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{1}{70}$	1

Vérification de la loi de probabilité :

$$\frac{12}{35} + \frac{9}{14} + \frac{1}{70} = \frac{(12 \times 2) + (9 \times 5) + 1}{70} = \frac{24 + 45 + 1}{70} = \frac{70}{70} = 1.$$

■ **Calculons l'espérance mathématique et l'écart type de X :**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \,.\, p(X = x_i)$$

$$E(X) = \left(-2 \times \frac{12}{35}\right) + \left(1 \times \frac{9}{14}\right) + \left(3 \times \frac{1}{70}\right) = \frac{-48 + 45 + 3}{70} = 0.$$

■ **Déterminons la variance de X :**

$$V(X) = E(X^2) - [\,E(X)\,]^2.$$

$$E(X^2) = \left((-2)^2 \times \frac{12}{35}\right) + \left(1^2 \times \frac{9}{14}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{70}\right) = \frac{150}{70} = \frac{15}{7}.$$

Donc $V(X) = E(X^2) - [\,E(X)\,]^2 = \frac{15}{7} - 0^2 = \frac{15}{7}.$

■ **Déterminons l'écart type de X :**

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{15}{7}} = 1{,}464.$$

PROBLÈME

$$f : \begin{cases} f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1 & \text{si } x < 1 \\ (x-1)\ell n\, x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad ; \quad D_f = IR.$$

1). Montrons que f est continue et dérivable en 1 :

$f(x) = (x-1)\ell n\, x + 1$ si $x \geq 1$, ce qui permet d'avoir :

$f(1) = (1-1)\ell n\, 1 + 1 = 1.$

• **Continuité de f à gauche de 1 :**

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1.$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x-1) = 0^- \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{x-1}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \end{cases}, \text{ donc } \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1.$$

D'où f est continue à gauche de 1.

- **Continuité de f à droite de 1 :**

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)\ell n\, x + 1$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \ell n\, x = 0 \end{cases}, \text{ donc } \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1.$$

D'où f est continue à droite de 1.

Conclusion :

f est continue à gauche et à droite de 1.

De plus, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1$.

D'où f est continue en 1.

■ **Etude de la dérivabilité de f en 1 :**

$f(x) = (x-1)\ell n\, x + 1$ si $x \geq 1$.

f est la somme de deux fonctions : $x \longmapsto (x-1)\ell n\, x$ et $x \longmapsto 1$.

La fonction $x \longmapsto (x-1)\ell n\, x$ est le produit de deux fonctions toutes deux dérivables pour $x \geq 1$. La fonction $x \longmapsto 1$ est constante elle est aussi dérivable pour $x \geq 1$.

Donc pour $x \geq 1$, f est dérivable et $\forall\, x \in [\,1\,;\,+\infty\,[$:

$f'(x) = (x-1)'\ell n\, x + (\ell n\, x)'(x-1)$

$f'(x) = \ell n\, x + \frac{x-1}{x}$. D'où $f'(1) = \ell n\, 1 + \frac{1-1}{1} = 0$.

- **Dérivabilité de f à gauche de 1 :**

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1 - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{x-1}\right) = -\infty.$$

f est donc dérivable à gauche de 1.

• **Dérivabilité de f à droite de 1 :**

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\ell n\,x+1-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\ell n\,x}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\ell n\,x=\ell n(1)=0.$$

f est donc dérivable à droite de 1.

Conclusion :

f est dérivable à gauche et à droite de 1.

De plus, $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0.$

Par conséquent, f est dérivable en 1.

En conclusion f est continue et dérivable en 1.

2).a). Montrons que pour $x<1$ on a : $f'(x)>0$:

$f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}+1$ si $x<1$.

f est dérivable pour sur $]-\infty;1[$ et $\forall\, x\in\,]-\infty;1[$:

$$f'(x)=(x-1)'e^{\frac{1}{x-1}}+\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)'(x-1)$$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x-1}}+\left(\frac{1}{x-1}\right)'e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}(x-1)$$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x-1}}-\frac{1}{(x-1)^2}e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}(x-1)=e^{\frac{1}{x-1}}-\frac{1}{(x-1)}e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x-1}}\left[1-\frac{1}{(x-1)}\right]=e^{\frac{1}{x-1}}\left[1-\frac{1}{(x-1)}\right]$$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x-1}}\left[1+\frac{1}{1-x}\right].$$

Or, si $x<1$ $\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}>0\\ \frac{1}{1-x}>0\\ 1>0\end{cases}$, donc $e^{\frac{1}{x-1}}\left[1+\frac{1}{1-x}\right]>0$. D'où $f'(x)>0$.

Conclusion : Pour $x<1$ on a : $f'(x)>0$.

b). Montrons que pour $x>1$ on a : $f'(x)>0$:

Pour $x>1$, f est dérivable et $\forall\, x\in\,]1;+\infty[$:

$$f'(x)=(x-1)'\ell n\,x+(\ell n\,x)'(x-1)$$

$f'(x) = \ell n\, x + \frac{x-1}{x}$.

Or, si $x > 1$ $\begin{cases} \ell n\, x > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, donc $\ell n\, x + \frac{x-1}{x} > 0$. D' où $f'(x) > 0$.

Conclusion : Pour $x > 1$ on a : $f'(x) > 0$.

c). Dressons le tableau de variations de f :

Limites de f :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) = 0 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left((x-1)\ell n\, x + 1\right)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ell n\, x = +\infty \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour $x < 1$ on a $f'(x) > 0$, d'où f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,; 1[$.

Pour $x > 1$ on a $f'(x) > 0$, d'où f est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,; +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f			1		$+\infty$
		$\nearrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$		1		

3).a). Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)\ell n\, x + 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)\ell n\, x}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(x-1)}{x} \times \ell n\, x + \frac{1}{x} \right].$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x-1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, x \quad = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \text{, d'où } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

- **Interprétation graphique :**

La courbe de f admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées du repère.

b). Montrons que pour tout $x < 1$ on a :

$$\boldsymbol{f(x) - (x+1) = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] - 1} \textbf{ :}$$

On a $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1$ si $x < 1$.

Donc, si $x < 1$ on aura :

$$f(x) - (x+1) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1 - (x+1)$$

$$f(x) - (x+1) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1 - x - 1$$

$$f(x) - (x+1) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + (1-x) - 1$$

$$f(x) - (x+1) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} - (x-1) - 1$$

$$f(x) - (x+1) = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] - 1.$$

Conclusion :

Pour tout $x < 1$ on a : $f(x) - (x+1) = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] - 1.$

Montrons que la courbe (C) admet la droite (D) d'équation $y = x + 1$ comme asymptote quand x tend vers $-\infty$:

(D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} [\, f(x) - (x+1)\,] = 0.$

• Déterminons alors $\lim\limits_{x \to -\infty} [\, f(x) - (x+1)\,]$:

Précédemment, on a $f(x) - (x+1) = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right] - 1.$

Ce qui permet d'avoir :

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to -\infty} (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right] - 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left[e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} - 1\right]}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} - 1.$$

Posons $u = \left(\frac{1}{x-1}\right)$. Ainsi, quand $x \to -\infty$, $u \to 0$ et on aura

$$\lim_{x \to -\infty} [\, f(x) - (x+1)\,] = \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Conclusion : La courbe (C) admet la droite (D) d'équation $y = x + 1$ comme asymptote quand x tend vers $-\infty$.

c). En admettant les inégalités $\frac{x-1}{x-2} \leq (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right] \leq 1$ pour tout $x < 1$, déduisons-en la position de (C) par rapport à (D) pour tout $x < 1$:

Admettons que $\frac{x-1}{x-2} \leq (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} + 1\right] \leq 1$ pour $x < 1$.

En retranchant 1 dans chaque membre on trouve :

$$\frac{x-1}{x-2} - 1 \leq (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} + 1\right] - 1 \leq 1 - 1.$$

Ou simplement $\frac{1}{x-2} \leq (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} + 1\right] - 1 \leq 0.$

Or $f(x) - (x+1) = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right] - 1.$

Ce qui permet d'avoir :

$$\frac{1}{x-2} \leq f(x) - (x+1) \leq 0.$$

L'inégalité $f(x) - (x+1) \leq 0$ signifie que la courbe (C) de la fonction f est en dessous de la droite (D).

Conclusion : Pour tout $x < 1$, (C) est en dessous de (D).

d). Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α appartenant à $\left]-1 \,;\, -\frac{1}{2}\right[$:

D'après son tableau de variations, f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty \,;\, 1\,[$.

De plus, $0 \in\,]-\infty \,;\, 1\,[$ (Voir tableau) ;

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution (soit α) appartenant à l'intervalle $]-\infty \,;\, 1\,[$.

• Démontrons que $\alpha \in \left]-1 \,;\, -\frac{1}{2}\right[$:

$f(-1) = (-1-1)e^{\frac{1}{-1-1}} + 1 = 1 - 2e^{-1/2} = -0{,}21$.

Donc $f(-1) < 0$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)e^{\frac{1}{-1/2\,-1}} + 1 = 1 - \frac{3}{2}e^{-2/3} = 0{,}22$.

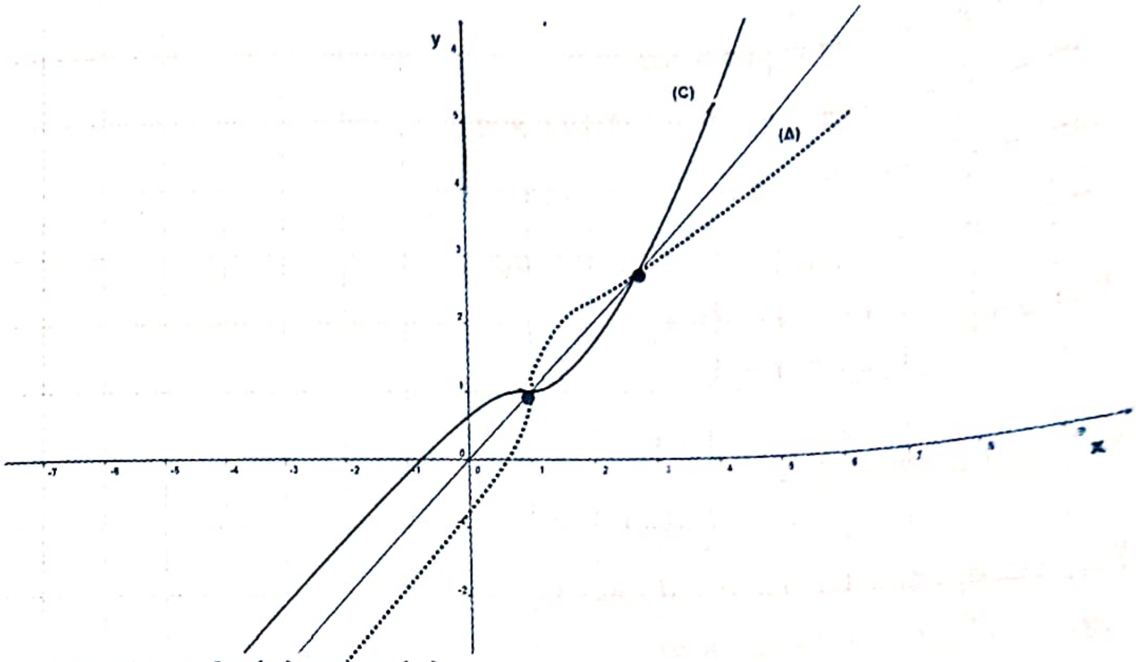
Donc $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$.

$\begin{cases} f(-1) < 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases}$, d'où $f(-1) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$.

Par conséquent $\alpha \in \left]-1 \,;\, -\frac{1}{2}\right[$.

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α appartenant à $\left]-1 \,;\, -\frac{1}{2}\right[$.

4). Construisons (C) :



Intersection de (C) avec (Δ) :

(Δ) est la $1^{\text{ère}}$ bissectrice du repère, donc $(\Delta) : y = x$.

La courbe (C) croise la droite (Δ) si et seulement si $f(x) = x$.

Rappelez vous que $f(1) = 1$.

D'où on a le point de coordonnées $(1 ; 1)$. (Voir courbe).

De plus si $x \geq 1$, $f(x) = (x - 1)\ell n\, x + 1$.

D'où $f(e) = (e - 1)\ell n\, e + 1 = e - 1 + 1 = e$.

$f(e) = e$ permet de trouver le point de coordonnées $(e ; e)$.

(Voir courbe).

Conclusion :

(C) et (Δ) se croisent aux points de coordonnées $(1 ; 1)$ et $(e ; e)$.

5). En utilisant une intégration par parties, calculons l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (Δ), (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$:

Sur l'intervalle $[1 ; e]$, la droite (Δ) est au dessus de la courbe (C) (voir courbe).

D'où $\mathcal{A} = \int_1^e [x - f(x)]dx \times (unité\ d'aire)$.

$f(x) = (x-1)\ell n\, x + 1$ si $x \geq 1$.

On aura ainsi :

$\mathcal{A} = \int_1^e [x - f(x)]dx \times ua$

$\mathcal{A} = \int_1^e [x - (x-1)\ell n\, x - 1\,]dx \times ua$

$\mathcal{A} = \int_1^e [\,(x-1) - (x-1)\ell n\, x]dx \times ua$

$\mathcal{A} = \int_1^e [\,(x-1)(1 - \ell n\, x)\,]dx \times ua.$

Posons $\begin{cases} u(x) = 1 - \ell n\, x \\ v'(x) = x - 1 \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir $\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} - x \end{cases}$.

En intégrant par parties, on aura :

$\mathcal{A} = \int_1^e u(x).\,v'(x)dx \times ua$

$\mathcal{A} = \left([\,u(x)v(x)\,]_1^e - \int_1^e u'(x).\,v(x)dx\right) \times ua$

$\mathcal{A} = \left(\left[\,(1 - \ell n\, x)\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x}.\left(\frac{x^2}{2} - x\right)dx\right) \times ua$

$\mathcal{A} = \left(\left[\,(1 - \ell n\, x)\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_1^e + \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx\right) \times ua$

$\mathcal{A} = \left(\left[\,(1 - \ell n\, x)\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_1^e + \left[\left(\frac{x^2}{4} - x\right)\right]_1^e\right) \times ua$

$\mathcal{A} = \left[0 - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) + \left(\frac{e^2}{4} - e\right) - \left(\frac{1^2}{4} - 1\right)\right] \times ua$

$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2} + \frac{e^2}{4} - e + \frac{3}{4}\right] \times ua$

$\mathcal{A} = \left(\frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{4}\right) \times ua.$

6).a). Montrons que f est une bijection de IR dans IR et qu'elle admet une réciproque f^{-1} :

La fonction f est continue et strictement monotone (croissante) sur IR. Donc f est une bijection de IR dans IR (voir tableau de variations) et f admet une réciproque f^{-1}.

b). Construisons la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère que (C) :

Les courbes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice du repère (la droite (Δ)).

Sur la figure, la courbe (Γ) est en pointillés.

c). Calculons l'aire $\mathcal{A}_{boucle}$ de la courbe par (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$:

L'aire $\mathcal{A}_{boucle}$ vaut le double de l'aire $\mathcal{A}$ (voir figure).

Ce qui permet d'avoir :

$$\mathcal{A}_{boucle} = 2\mathcal{A} = 2\left(\frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{4}\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}_{boucle} = \left(\frac{e^2}{2} - 2e + \frac{5}{2}\right) \times ua.$$

CORRIGÉ DU BAC 2008

EXERCICE 1

$$(u_n)_{n\in \mathrm{IN}^*} : \begin{cases} u_1 \in \mathrm{IR} \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{4}{u_n + 1} \end{cases} .$$

1). Démontrons qu'il existe deux valeurs de u_1 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}^*}$ est constante :

$(u_n)_{n\in \mathrm{IN}^*}$ est constante si et seulement si :

$\forall\ n \in \mathrm{IN}^*,\ u_{n+1} = u_n.$

$u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow 2 + \dfrac{4}{u_n+1} = u_n \Leftrightarrow 2 + \dfrac{4}{u_n+1} - u_n = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(u_n+1) + 4 - u_n(u_n+1)}{u_n+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\,u_n + 2 + 4 - {u_n}^2 - u_n}{u_n+1}$

$\Leftrightarrow 2\,u_n + 2 + 4 - {u_n}^2 - u_n = 0$ et $u_n + 1 \neq 0.$

$\Leftrightarrow -{u_n}^2 + u_n + 6 = 0$ et $u_n \neq -1.$

- **Résolvons dans $\mathrm{IR} - \{-1\}$, l'équation $-{u_n}^2 + u_n + 6 = 0$:**

Discriminant :

$\Delta = (1)^2 - 4(-1)(6) = 25 = 5^2.$

Solutions : $\dfrac{-1-5}{2(-1)} = 3$ et $\dfrac{-1+5}{2(-1)} = -2$.

Conclusion :

La suite $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}^*}$ est constante si $u_1 = 3$ ou si $u_1 = -2.$

2). Démontrons par récurrence que $u_n > -1$ pour tout n appartenant à IN^* :

$$(u_n)_{n\in \mathrm{IN}^*} : \begin{cases} u_1 > -1 \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{4}{u_n + 1} \end{cases} .$$

On sait que $u_1 > -1.$

Supposons que $u_n > -1$ et démontrons que $u_{n+1} > -1.$

$u_n > -1 \Leftrightarrow u_n + 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{u_n+1} > 0 \Leftrightarrow 2 + \dfrac{4}{u_n+1} > 2$

$\Leftrightarrow u_{n+1} > 2.$ Or $2 > -1$, d'où $u_{n+1} > -1.$

Conclusion : $u_n > -1$ pour tout n appartenant à IN^*.

3). $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2}$ pour tout n appartenant à IN^*.

a). Démontrons que la suite (v_n) est géométrique :

Pour tout n appartenant à IN^* :

$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 2}$. Or $u_{n+1} = 2 + \frac{4}{u_n + 1}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 2} = \frac{\left(2 + \frac{4}{u_n + 1}\right) - 3}{\left(2 + \frac{4}{u_n + 1}\right) + 2} = \frac{\left(\frac{4}{u_n + 1} - 1\right)}{\left(4 + \frac{4}{u_n + 1}\right)} = \frac{4 - u_n - 1}{4u_n + 4 + 4} = \frac{3 - u_n}{4u_n + 8}$$

$$v_{n+1} = \frac{-(u_n - 3)}{4(u_n + 2)} = -\frac{1}{4}\left(\frac{u_n - 3}{u_n + 2}\right). \text{ Or } v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2}.$$

Donc $v_{n+1} = -\frac{1}{4} v_n$.

Par conséquent, (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_1 = \left(\frac{u_1 - 3}{u_1 + 2}\right)$.

b). Exprimons v_n en fonction de n et calculons la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$:

(v_n) étant géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de 1er terme v_1 donc :

$$v_n = v_1 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$v_n = \left(\frac{u_1 - 3}{u_1 + 2}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \forall n \in IN^*.$$

Limite de v_n quand n tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_1 - 3}{u_1 + 2}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0 \text{ car } \left|-\frac{1}{4}\right| < 1.$$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0.$$

4). Exprimons u_n en fonction de v_n :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 3 \Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -3 - 2v_n$$

$$\Leftrightarrow (v_n - 1)u_n = -3 - 2v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{-3 - 2v_n}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{3 + 2v_n}{1 - v_n}.$$

■ **Démontons que la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et calculons sa limite :**

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3+2v_n}{1-v_n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3+2(0)}{1-0} = 3$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Conclusion :

La suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ est convergente (elle converge vers 3).

Sa limite est 3.

EXERCICE 2

$P(z) = 3z^3 + (-5\sqrt{3} + 10i)z^2 + (5 - 15i\sqrt{3})z + 24i.$

1).a). Calculons $P(-3i)$:

$P(-3i) = 3(-3i)^3 + (-5\sqrt{3} + 10i)(-3i)^2 + (5 - 15i\sqrt{3})(-3i) + 24i$

$P(-3i) = 3(27i) - 9(-5\sqrt{3} + 10i) - 3i(5 - 15i\sqrt{3}) + 24i$

$P(-3i) = 81i + 45\sqrt{3} - 90i - 15i - 45\sqrt{3} + 24i$

$P(-3i) = (45\sqrt{3} - 45\sqrt{3}) + i(81 + 24 - 90 - 15)$

$P(-3i) = (45\sqrt{3} - 45\sqrt{3}) + i(105 - 105)$

$P(-3i) = 0 + 0i = 0.$

Conclusion : $P(-3i) = 0.$

b). Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$:

$P(-3i) = 0$, donc on peut écrire :

$P(z) = (z + 3i)(az^2 + bz + c)$ avec a, b et c des complexes que l'on déterminera par une méthode d'identification.

Ce qui permet d'avoir :

$P(z) = (z + 3i)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + 3aiz^2 + 3biz + 3ic$

$P(z) = az^3 + (b + 3ai)z^2 + (c + 3bi)z + 3ic.$

Or $P(z) = 3z^3 + (-5\sqrt{3} + 10i)z^2 + (5 - 15i\sqrt{3})z + 24i.$

Par identification partielle, on peut avoir :

$$\begin{cases} az^3 = 3z^3 \\ (b+3ai)z^2 = (-5\sqrt{3}+10i)z^2 \\ 3i\,c = 24i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ (b+9i) = (-5\sqrt{3}+10i) \\ c = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5\sqrt{3}+i\,. \\ c = 8 \end{cases}$$

D'où $P(z) = (z+3i)\big(3z^2 + (-5\sqrt{3}+i)z + 8\big)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+3i)\big(3z^2 + (-5\sqrt{3}+i)z + 8\big) = 0$

$\Leftrightarrow z + 3i = 0$ ou $3z^2 + \big(-5\sqrt{3}+i\big)z + 8 = 0.$

• **Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $\boldsymbol{3z^2 + \big(-5\sqrt{3}+i\big)z + 8 = 0}$:**

Discriminant Δ :

$\Delta = \big(-5\sqrt{3}+i\big)^2 - 4(3)(8)$

$\Delta = \big(-5\sqrt{3}\big)^2 + 2\big(-5\sqrt{3}\big)(i) + i^2 - 96$

$\Delta = 75 - 10i\sqrt{3} - 1 - 96 = (75 - 1 - 96) - 10i\sqrt{3}$

$\Delta = -22 - 10i\sqrt{3}.$

Racines carrées de Δ :

Soit un nombre complexe δ défini par $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{(-22)^2 + \big(-10\sqrt{3}\big)^2} \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = -22 \\ xy < 0 \text{ car } -10\sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{784} \\ x^2 - y^2 = -22 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 28 \\ x^2 - y^2 = -22 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 6 \\ 2y^2 = 50 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 25 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} \\ y = 5 \text{ ou } y = -5 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \big(\delta = \sqrt{3} - 5i$ ou $\delta = -\sqrt{3} + 5i\big).$

Les racines carrées de Δ sont $\sqrt{3}-5i$ et $-\sqrt{3}+5i$.

Solutions de l'équation $3z^2+(-5\sqrt{3}+i)z+8=0$:

En utilisant une seule racine carrée de Δ, on peut trouver :

$$z_1=\frac{-(-5\sqrt{3}+i)-(\sqrt{3}-5i)}{2(3)}=\frac{5\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+5i}{6}=\frac{4\sqrt{3}+4i}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}i$$

et $$z_2=\frac{-(-5\sqrt{3}+i)+(\sqrt{3}-5i)}{2(3)}=\frac{5\sqrt{3}-i+\sqrt{3}-5i}{6}=\frac{6\sqrt{3}-6i}{6}=\sqrt{3}-i.$$

Ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$:

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{-3i\ ;\ \sqrt{3}-i\ ;\ \frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}i\right\}.$$

2). $A(0\,;-3)\,;B(\sqrt{3}\ ;-1)\,,C\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

Déterminons les éléments géométriques de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C :

Soit S d'écriture complexe $z'=az+b$ avec $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$.

- Déterminons les complexes a et b :

D'après l'énoncé, $S(A)=B$ et $S(B)=C$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\begin{cases}S(A)=B\\S(B)=C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}az_A+b=z_B\\az_B+b=z_C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=z_B-az_A\\a(z_A-z_B)=(z_B-z_C)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=z_B-az_A\\a=\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_B}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=z_B-az_A\\a=\dfrac{(\sqrt{3}-i)-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}i\right)}{(-3i)-(\sqrt{3}-i)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=z_B-az_A\\a=\dfrac{(3\sqrt{3}-3i-2\sqrt{3}-2i)}{3(-3i-\sqrt{3}+i)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=z_B-az_A\\a=\dfrac{(\sqrt{3}-5i)}{3(-\sqrt{3}-2i)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=z_B-az_A\\a=\dfrac{(\sqrt{3}-5i)(-\sqrt{3}+2i)}{3(-\sqrt{3}-2i)(-\sqrt{3}+2i)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=z_B-az_A\\a=\dfrac{-3+2i\sqrt{3}+5i\sqrt{3}+10}{3[(-\sqrt{3})^2+(-2i)^2]}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=z_B-az_A\\a=\dfrac{7+7i\sqrt{3}}{3[7]}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=z_B-az_A\\a=\frac{1}{3}(1+i\sqrt{3})\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=\sqrt{3}-i-\frac{1}{3}(-3i)(1+i\sqrt{3})\\a=\frac{1}{3}(1+i\sqrt{3})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\sqrt{3}-i+i-\sqrt{3}\\a=\frac{1}{3}(1+i\sqrt{3})\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{1}{3}(1 + i\sqrt{3}) \end{cases}.$$

Par conséquent, l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1}{3}(1 + i\sqrt{3})z$.

Ce qui permet d'avoir :

Rapport de S (soit k) :

$k = |a| = \left|\frac{1}{3}(1 + i\sqrt{3})\right| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{2}{3}$.

Angle de S (soit θ) :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(a)}{|a|} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|} = \frac{\sqrt{3}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ soit } \theta = \frac{\pi}{3}\,[2\pi].$$

Centre de S : Point O (origine du repère) car $b = 0$.

Conclusion :

S est une similitude plane directe de centre O, de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

PROBLÈME

A). $n \in \mathbb{N}^*$, g_n définie sur $]-\infty\,; 0]$ par : $g_n(x) = (1 + x)e^x - n$.

■ **Dressons le tableau de variations de g_n :**

• **Dérivabilité de g_n :**

g est la somme de deux fonctions : $x \longmapsto (1 + x)e^x$ et $x \longmapsto -n$.
La fonction $x \longmapsto (1 + x)e^x$ est le produit d'une fonction polynôme $x \longmapsto (1 + x)$ et de la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $]-\infty\,; 0]$. La fonction $x \longmapsto -n$ est constante, elle est dérivable sur $]-\infty\,; 0]$.

Par conséquent, g_n est dérivable sur $]-\infty\,; 0]$.

• **Dérivée de g_n :**

$\forall\, x \in\,]-\infty\,; 0]$, $g_n'(x) = \left((1 + x)e^x - n\right)'$

$g_n'(x) = (1 + x)'(e^x) + (e^x)'(1 + x) + 0$

$g_n'(x) = e^x + e^x(1 + x) = (1 + 1 + x)e^x$

$g_n'(x) = (2 + x)e^x$.

• **Signe de $g'_n(x)$ et sens de variation de g_n :**

$g'_n(x) = (2 + x)e^x$.

$g'_n(x)$ est du signe de $(2 + x)$ car $e^x > 0 \ \forall \ x \in IR$.

$2 + x = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

$\forall \ x \in]-\infty ; -2]$, $(2 + x) \leq 0$, donc $g'_n(x) \leq 0$.

D'où g_n est décroissante sur $]-\infty ; -2]$.

$\forall \ x \in]-2 ; 0]$, $(2 + x) > 0$, donc $g'_n(x) > 0$.

D'où g_n est strictement croissante sur $]-2 ; 0]$.

• **Limites de g_n en $-\infty$ et en 0 :**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \big((1 + x)e^x - n\big) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + xe^x - n)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x) = -n$.

$\lim\limits_{x\to 0} g_n(x) = \lim\limits_{x\to 0}\big((1 + x)e^x - n\big) = \lim\limits_{x\to 0}\big((1 + 0)e^0 - n\big) = 1 - n$.

• Tableau de variations de g_n :

x	$-\infty$	-2	0
$g'_n(x)$	$-$	0	$+$
g_n	$-n$ ↘	$g_n(-2)$	↗ $1-n$

$g_n(-2) = (1 - 2)e^{-2} - n = -e^{-2} - n = -(e^{-2} + n)$.

■ **Déduisons-en que $g_n(x) \leq 0 \ \ \forall \ x \in]-\infty ; 0]$:**

Signe des éléments qui figurent dans le tableau de variations :

$-n \leq 0$; $g_n(-2) = -(e^{-2} + n)$ et $-(e^{-2} + n) < 0$; $1 - n \leq 0$.

On en déduit que toutes les valeurs prises par $g_n(x)$ sont négatives ou nulles. On en déduit que le réel $g_n(x)$ est négatif ou nul pour x appartenant à $]-\infty ; 0]$.

On écrit $g_n(x) \leq 0 \ \ \forall \ x \in]-\infty ; 0]$

B). f_n est définie par $f_n(x) = \begin{cases} xe^x - nx & \text{si } x \leq 0 \\ x^n(1 - \ell nx) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1).a). Etudions la continuité de f_n en $x = 0$:

- **Calcul de $f_n(0)$:**

$f_n(x) = xe^x - nx$ si $x \leq 0$, ce qui permet d'avoir :

$f_n(0) = (0)e^0 - n(0) = 0.$

$f_n(0) = 0.$

- **Continuité de f_n à gauche de $x = 0$:**

$\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (xe^x - nx) = (0)e^0 - n(0) = 0.$

D'où f_n est continue à gauche de $x = 0$.

- **Continuité de f_n à droite de $x = 0$:**

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^n(1 - \ell nx) \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^n - x^n \ell nx).$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x^n = 0^n = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ell nx = 0 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0.$

D'où f_n est continue à droite de $x = 0$.

Conclusion :

f_n est continue à gauche et à droite de $x = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = f_n(0) = 0.$

D'où f_n est continue en $x = 0$.

Par conséquent $D_{f_n} = \mathbb{R} =]-\infty\,; +\infty[$.

b). Etudions la dérivabilité de f_n en $x = 0$:

- **Calcul de $f_n{}'(0)$:**

Si $x \leq 0$, $f_n(x) = xe^x - nx$.

f_n est dérivable pour tout $x \leq 0$ comme elle est la différence de deux fonctions dérivables pour tout $x \leq 0$.

Si $x \leq 0$, $f_n'(x) = (xe^x - nx)' = 1 \times e^x + e^x \times x - n$

$f_n'(x) = e^x + xe^x - n = (1 + x)e^x - n.$

Ce qui permet d'avoir :

$f_n'(0) = (1 + 0)e^0 - n = 1 - n$

$f_n'(0) = 1 - n.$

• **Dérivabilité de f_n à gauche de $x = 0$:**

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{xe^x-nx-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}(e^x-n)=(e^0-n)$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=1-n\,.$$

Donc f_n est dérivable à gauche de $x = 0$.

• **Dérivabilité de f_n à droite de $x = 0$:**

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^n(1-\ell nx)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x^{n-1}(1-\ell nx)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}(x^{n-1}-x^{n-1}\ell nx).$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}x^{n-1}=0^{n-1}=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}x^{n-1}\ell nx=0\end{cases}\text{, donc }\lim_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=0.$$

Donc f_n est dérivable à droite de $x = 0$.

Conclusion :

f_n est dérivable à gauche et à droite de $x = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=1-n$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=0.$

• Si **$n = 1$**, alors $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=f_n'(0)=0.$

D'où f_n est dérivable en $x = 0$;

• Si **$n \neq 1$**, alors $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}.$

D'où f_n n'est pas dérivable en $x = 0$.

2).a). Calculons $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$:

$f_n(x)=x^n(1-\ell nx)$ si $x>0$.

f_n est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ comme elle est le produit de deux fonctions dérivables sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

$\forall\, x \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[,\ f_n'(x)=[\,x^n(1-\ell nx)\,]'$

$$f_n'(x)=(nx^{n-1})(1-\ell nx)+\left(-\frac{1}{x}\right)\times x^n$$

$$f_n'(x)=(nx^{n-1})(1-\ell nx)-x^{n-1}=[\,n(1-\ell nx)-1\,]x^{n-1}.$$

Donc $f_n'(x)=[\,n(1-\ell nx)-1\,]x^{n-1}$ si $x\in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$.

b). Etudions le signe de $f'_n(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$f'_n(x) = [\,n(1-\ell nx)-1\,]x^{n-1}$ si $x \in]0\,;+\infty[$.

$f'_n(x)$ est du signe de $[\,n(1-\ell nx)-1\,]$ car

$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad x^{n-1} > 0$.

$n(1-\ell nx)-1 = 0 \Leftrightarrow 1-\ell nx = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ell nx = \left(1-\frac{1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow x = e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}$.

Conclusion :

Si $x \in \left]0\,;\ e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right[$, $\quad [\,n(1-\ell nx)-1\,] > 0$, d'où $f'_n(x) > 0$.

Si $x \in \left[e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)};+\infty\right[$, $\quad [\,n(1-\ell nx)-1\,] \leq 0$, d'où $f'_n(x) \leq 0$.

Présentons cette étude dans un tableau :

x	0		$e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	$+$	0	$-$

3). a). Calculons $f'_n(x)$ **sur l'intervalle** $]-\infty\,;0[$:

$f'_n(x) = (1+x)e^x - n$ si $]-\infty\,;0[$ (voir 1).b). Partie B).).

b). Déduisons de la partie A). le signe de $f'_n(x)$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$:

$f'_n(x) = (1+x)e^x - n$ si $]-\infty\,;0[$.

Or $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

D'où $f'_n(x) = g_n(x)$ si $]-\infty\,;0[$.

De plus, $g_n(x) \leq 0 \quad \forall x \in]-\infty\,;0]$. (Partie A).

Par conséquent, $f'_n(x) \leq 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

4). Dressons le tableau de variations de f_n :

Limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - nx) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-nx) = +\infty \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n(1-\ell n x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1-\ell n x) = -\infty . \end{cases}$$

Rappelons que :

$*$ Si $x \in \left]0\,;\, e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right[$, $f'_n(x) > 0$.

$*$ Si $x \in \left[e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\,;+\infty\right[$, $f'_n(x) \leq 0$.

$*$ Si $x \in]-\infty\,;0\,[$, $f'_n(x) \leq 0$.

Ce qui permet d'avoir :

Tableau de variations du 1^{er} cas $(\boldsymbol{n \neq 1})$:

x	$-\infty$	0		$e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$ $1-n$	//////	0 $+$	0	$-$
f_n	$+\infty$ ↘	0	↗	$\frac{e^{(n-1)}}{n}$	↘ $-\infty$

$$f_n\left(e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right) = \left[e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right]^n \left(1-\ell n\left[e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right]\right)$$

$$f_n\left(e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right) = e^{(n-1)}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}e^{(n-1)} = \frac{e^{(n-1)}}{n}.$$

Tableau de variations du $2^{\text{ème}}$ cas $(\boldsymbol{n = 1})$:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'_1(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f_1	$+\infty$ ↘	0	↗	1	↘ $-\infty$

5). Cas où $\boldsymbol{n = 1}$ ou $\boldsymbol{n = 2}$.

a). Etudions suivant les valeurs de $\boldsymbol{x}$ le signe de l'expression $\boldsymbol{f_2(x) - f_1(x)}$:

Rappelons que $f_n(x) = \begin{cases} xe^x - nx & \text{si } x \leq 0 \\ x^n(1 - \ell nx) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

• **Si** $\boldsymbol{x \leq 0}$, on aura $\begin{cases} f_2(x) = xe^x - 2x \\ f_1(x) = xe^x - x \end{cases}$.

D'où $f_2(x) - f_1(x) = (xe^x - 2x) - (xe^x - x)$

$f_2(x) - f_1(x) = -x$.

Or $x \leq 0$, donc $-x \geq 0$, d'où $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$.

Par conséquent, **si** $\boldsymbol{x \leq 0}$, $\boldsymbol{f_2(x) - f_1(x) \geq 0}$.

• **Si** $\boldsymbol{x} > 0$, on aura $\begin{cases} f_2(x) = x^2(1 - \ell nx) \\ f_1(x) = x(1 - \ell nx) \end{cases}$.

D'où $f_2(x) - f_1(x) = \left(x^2(1 - \ell nx)\right) - x(1 - \ell nx)$

$f_2(x) - f_1(x) = (x^2 - x)(1 - \ell nx)$.

$(x^2 - x)(1 - \ell nx) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(1 - \ell nx) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1) = 0$ ou $(1 - \ell nx) = 0$ (car $x > 0$)

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$.

Etude du signe de $(x - 1)(1 - \ell nx)$ pour $x > 0$:

x	0		1		e		$+\infty$
$(x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-\ell nx)$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)(1-\ell nx)$	$\Vert$	$-$		$+$		$-$	

Présentons l'étude de signe dans un tableau :

x	$-\infty$	0		1		e	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

b). Déduisons-en la position relative des courbes (C_1) et (C_2) et montrons que (C_1) et (C_2) se coupent en trois points dont on précisera les coordonnées :

x	$-\infty$	0		1		e	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
Position relative	(C_2) au dessus de (C_1)	(C_2) coupe (C_1)	(C_2) en dessous de (C_1)	(C_2) coupe (C_1)	(C_2) au dessus de (C_1)	(C_2) coupe (C_1)	(C_2) en dessous de (C_1)

D'après ce tableau, les courbes (C_1) et (C_2) se coupent en trois points dont les coordonnées sont : $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$ et $\binom{e}{0}$.

6).a). Montrons que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_1) en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f_1(x) - (-x)] = \lim_{x\to-\infty}[xe^x - x + x] = \lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0.$$

Donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_1) en $-\infty$.

b). Montrons que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C_2) en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f_2(x) - (-2x)] = \lim_{x\to-\infty}[xe^x - 2x - (-2x)] = \lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0.$$

Donc la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C_2) en $-\infty$.

c). Calculons $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\ell nx)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(1-\ell nx) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1-\ell nx)}{x} = \lim_{x\to+\infty}x(1-\ell nx) = -\infty$$

car $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}(1-\ell nx) = -\infty\end{cases}$.

* **Interprétons graphiquement ces résultats :**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = -\infty$, donc la courbe (C_1) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des l'axe des ordonnées du repère en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = -\infty$, donc la courbe (C_2) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des l'axe des ordonnées du repère en $+\infty$.

7). **Construisons (C_1) et (C_2) sur le même graphique :**

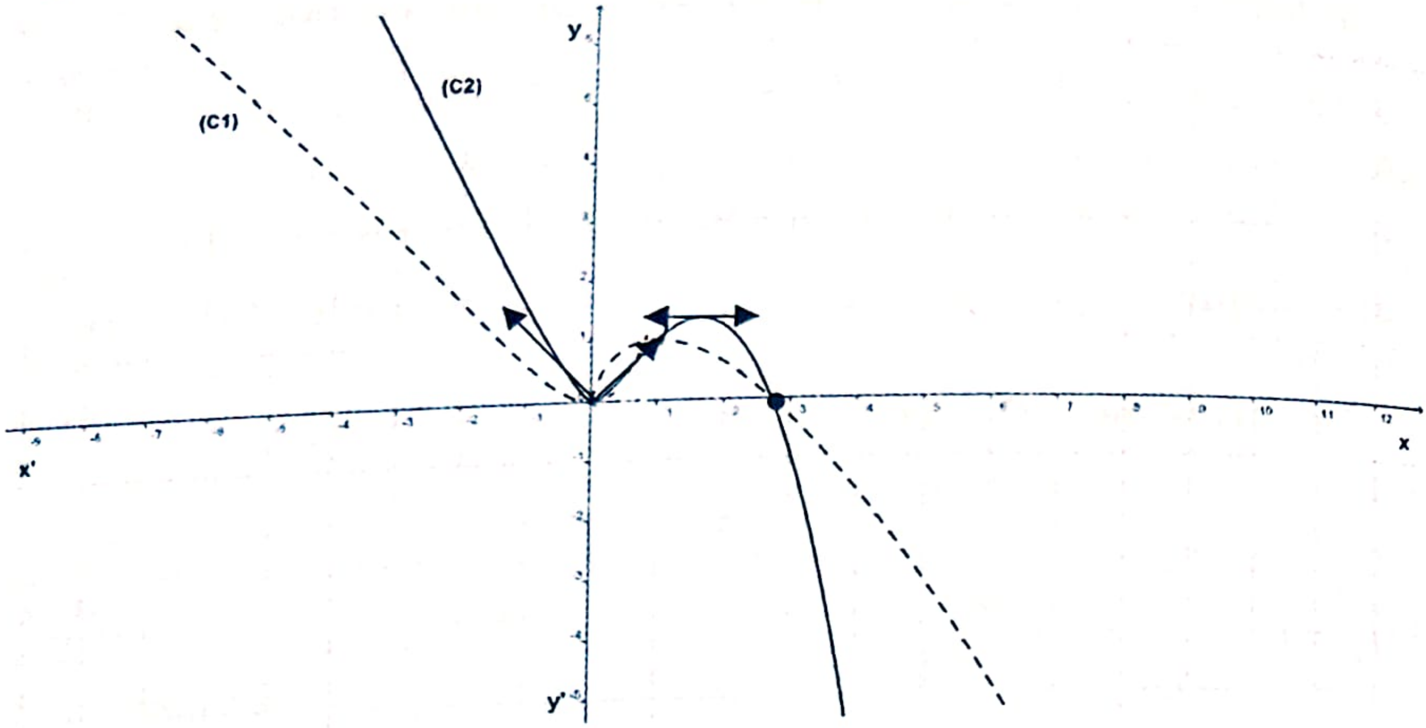
• Tableaux de variations de f_1 :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f_1	$+\infty$ ↘	0	↗	1	↘ $-\infty$

• Tableau de variations de f_2 :

x	$-\infty$	0		$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f_2'(x)$	$-$ $\quad -1$		0 $\quad +$	0	$-$
f_2	$+\infty$ ↘	0	↗	$\frac{e}{2}$	↘ $-\infty$

Figure :



8). Calculons en intégrant par parties, l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes d'équations $x = 1$ et $x = e$:

Si $x \in [\,1\,;e\,]$, (C_2) est au dessus de (C_1).

Désignons par $\mathcal{A}$ l'aire recherchée.

Ainsi on aura :

$\mathcal{A} = \int_1^e [\,f_2(x) - f_1(x)\,]dx \times (4cm \times 4cm)$

$\mathcal{A} = \int_1^e [\,(x^2 - x)(1 - \ell n x)\,]dx \times 16\ cm^2.$

En utilisant une intégration par parties :

Posons $\begin{cases} u(x) = 1 - \ell n\, x \\ v'(x) = x^2 - x \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir $\begin{cases} u'(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

D'où $\mathcal{A} = \int_1^e u(x).v'(x)dx \times ua$

$\mathcal{A} = \left([\,u(x)v(x)\,]_1^e - \int_1^e u'(x).v(x)dx\right) \times ua$

$$\mathcal{A} = \left(\left[\,(1-\ell n\, x)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)dx\right)\times ua$$

$$\mathcal{A} = \left(\left[\,(1-\ell n\, x)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^e + \int_1^e \left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}\right)dx\right)\times ua$$

$$\mathcal{A} = \left(\left[\,(1-\ell n\, x)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^e + \left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{4}\right]_1^e\right)\times ua$$

$$\mathcal{A} = \left(0-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{e^3}{9}-\frac{e^2}{4}\right)-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)\right)\times ua$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{6}+\left(\frac{e^3}{9}-\frac{e^2}{4}\right)+\frac{5}{36}\right)\times ua$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{e^3}{9}-\frac{e^2}{4}+\frac{11}{36}\right)\times 16\ cm^2$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{16}{9}e^3-4e^2+\frac{44}{9}\right)\ cm^2.$$

CORRIGÉ DU BAC 2009

EXERCICE 1

A). Démontrons que $P(A\,/\,\overline{B}\,) = \frac{P(A)-P(A/B)\times P(B)}{1-P(B)}$:

On sait que $A = (A\cap B) + (A\cap\overline{B}\,)$.

Donc $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B}\,)$.

D'où $P(A\cap\overline{B}\,) = P(A) - P(A\cap B)$.

On sait de plus que

$P(\overline{B}\,) = 1 - P(B)$ et que $P(A\cap B) = P(A/B)\times P(B)$

Ce qui permet d'avoir :

$$P(A\,/\,\overline{B}\,) = \frac{P(A\cap\overline{B}\,)}{P(\overline{B}\,)} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)} = \frac{P(A)-P(A/B)\times P(B)}{1-P(B)}.$$

Conclusion : $P(A\,/\,\overline{B}\,) = \frac{P(A)-P(A/B)\times P(B)}{1-P(B)}$.

B). $*$ 30 % des chiens étaient enragés.

$*$ Parmi les chiens abattus, 40% étaient enragés.

1). Calculons en fonction de b la probabilité p pour qu'un chien errant survivant soit enragé :

Considérons les événements suivants :

A : « Le chien errant est enragé »

B : « Le chien errant est abattu »

$\overline{B}$: « Le chien errant est survivant ».

Désignons par b $(b \neq 1)$ la probabilité pour qu'un chien errant soit abattu. Donc $b = P(B)$.

La probabilité p pour qu'un chien errant survivant soit enragé est $p = P(A/\overline{B})$.

Or $P(A/\overline{B}) = \frac{P(A) - P(A/B) \times P(B)}{1 - P(B)}$ et $P(B) = b$.

On aura ainsi :

$$p = \frac{P(A) - P(A/B) \times P(B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A/B) \times b}{1 - b}$$

$$p = \frac{P(A) - P(A/B) \times b}{1 - b}.$$

D'après l'énoncé $P(A) = \frac{30}{100} = 0{,}3$ et $P(A/B) = \frac{40}{100} = 0{,}4$.

Ce qui permet de trouver :

$$p = \frac{0{,}3 - 0{,}4\,b}{1 - b}.$$

2). Déterminons la plus petite valeur de b pour laquelle p est inferieur ou égal à $0,1$:

b est une probabilité et $b \neq 1$, donc $b < 1$ et $(1 - b) > 0$.

Résolvons dans IN l'inéquation $p \leq 0{,}1$:

$$p \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{0{,}3 - 0{,}4\,b}{1 - b} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}3 - 0{,}4b \leq 0{,}1(1 - b)$$

$$\Leftrightarrow 0{,}3 - 0{,}4b \leq 0{,}1 - 0{,}1b \Leftrightarrow (0{,}3 - 0{,}1) \leq b(0{,}4 - 0{,}1)$$

$$\Leftrightarrow 0{,}2 \leq 0{,}3b \Leftrightarrow 2 \leq 3b \Leftrightarrow b \geq \frac{2}{3}.$$

Conclusion : La plus petite valeur de b pour laquelle p est inferieur ou égal à $0{,}1$ est $b_0 = \frac{2}{3}$.

3). Déterminons la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la campagne d'abattage :

On est en face d'une loi binominale ($n = 10$ épreuves répétées).

Le succès obtenu(nombre de territoires décontaminés) sera noté k.

La probabilité recherchée est notée $p(X \geq 8)$.

Et $p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)$.

Rappelons que $\boldsymbol{p(X = k) = C_n^k p'^k (1 - p')^{n-k}}$.

$\boldsymbol{p'}$ est la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage . D'après l'énoncé $p' = 1/3$.

De ce qui précède, on peut avoir :

$$p(X = 8) = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{10-8} = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = 0{,}003048\,;$$

$$p(X = 9) = C_{10}^{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{10-9} = C_{10}^{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}0003387$$

$$p(X = 9) = C_{10}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{10-10} = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \times 1 = 0{,}000017.$$

On en déduit que :

$p(X \geq 8) \approx 0{,}003048 + 0{,}0003387 + 0{,}000017$

$p(X \geq 8) \approx 0{,}0034.$

EXERCICE 2

1). Déterminons et représentons graphiquement l'ensemble D des points M, du plan complexe, d'affixe $z = x + iy$, tels que : $|z - 3 - 2i| = |z - 7 + 2i|$:

Considérons A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives : $z_A = 3 + 2i$ et $z_B = 7 - 2i$.

Ce qui permet d'avoir :

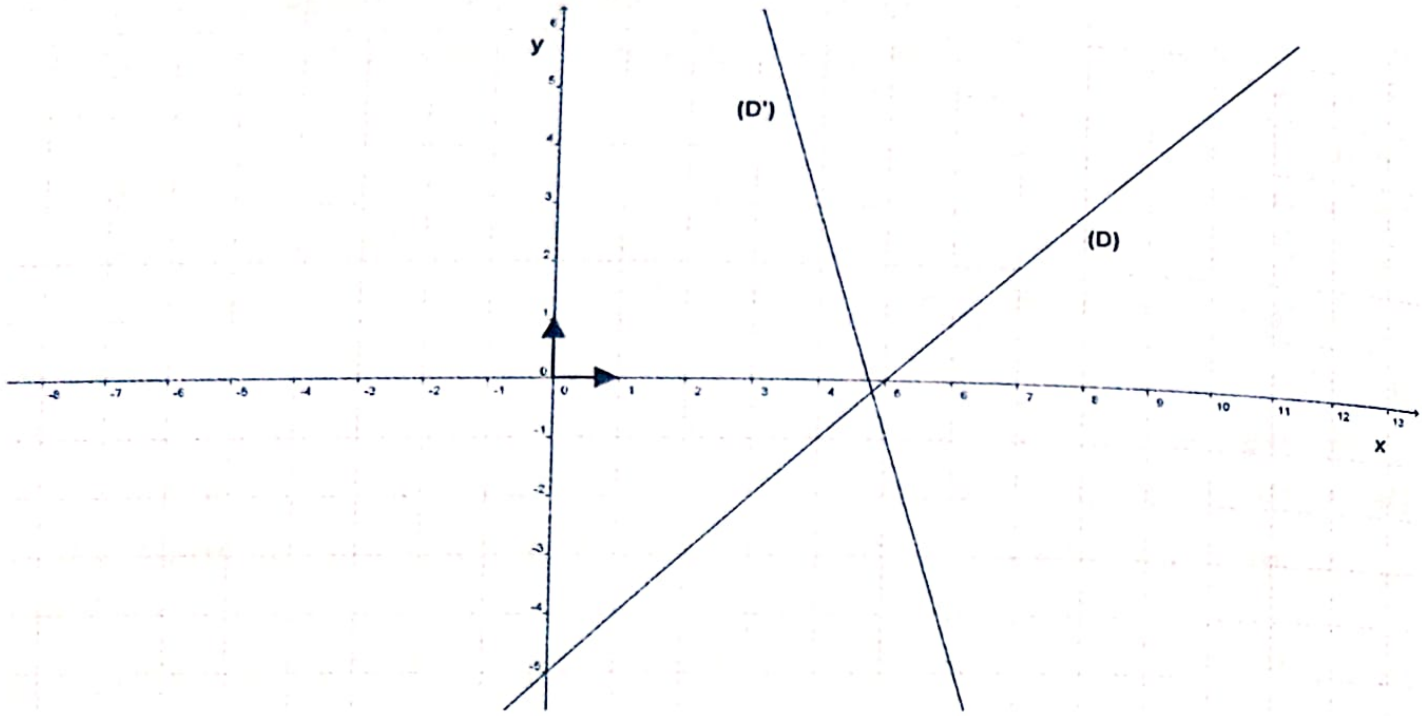
$|z - 3 - 2i| = |z - 7 + 2i| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow MA = MB.$

L'ensemble D recherché est donc la médiatrice de $[AB]$.

Représentation graphique :

On peut placer les points A $(3\,;2)$ et B $(7\,;-2)$, puis tracer la médiatrice de $[AB]$.

Figure :



2). Caractérisons géométriquement la transformation ponctuelle φ du plan complexe associée à l'application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, défini par $f : z \longmapsto z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$:

* Rapport (soit k) de φ :

$$k = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

* Angle (soit θ) de φ :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ soit } \theta = \frac{\pi}{3}\,[2\pi].$$

* Centre (soit le point d'affixe ω) :

$$z_\omega = \frac{-5i\sqrt{3}}{1 - (1 + i\sqrt{3})} = \frac{-5i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 5 \text{, d'où } \omega(5\,;0).$$

3). Déterminons l'ensemble D', image par φ de l'ensemble D :

Equation de la droite D :

D est la médiatrice de [AB] avec A (3 ; 2) et B (7 ; – 2).

Soit I le milieu de [AB]. Donc $I\left(\frac{3+7}{2} ; \frac{2-2}{2}\right)$, soit I (5 ; 0).

Soit $M(x ; y)$ un point de la droite D.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont alors orthogonaux.

On a $\overrightarrow{AB}(4 ; -4)$ et $\overrightarrow{IM}(x-5 ; y)$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$4(x-5)-4y=0$

$4x-20-4y=0$

$x-5-y=0$

$y=x-5.$

D'où $D : y=x-5$.

Si $x=0$, on aura $y=-5$. Soit $J(0 ; -5)$ un autre point de D.

• Déterminons les images des points I et J par φ :

φ est d'écriture complexe $f(z)=\left(1+i\sqrt{3}\right)z-5i\sqrt{3}$.

I et J sont d'affixes respectives $z_I=5$ et $z_J=-5i$.

Ce qui permet d'avoir :

$f(z_I)=f(z_\omega)=z_\omega=5$ car $\omega=I$.

$f(z_I)=5$. Soit $z_{I'}=5$, soit $\mathbf{I'(5 ; 0)}$.

$f(z_J)=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_J-5i\sqrt{3}$

$f(z_J)=-5i\left(1+i\sqrt{3}\right)-5i\sqrt{3}$

$f(z_J)=-5i+5\sqrt{3}-5i\sqrt{3}=5\sqrt{3}-5i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Soit $z_{J'}=5\sqrt{3}-5i\left(1-\sqrt{3}\right)$, soit $\mathbf{J'\left(5\sqrt{3} ; -5\left(1+\sqrt{3}\right)\right)}$.

Ecrivons une équation de la droite (I'J') :

Soit $M(x ; y)$ un point de la droite (I'J').

Les vecteurs $\overrightarrow{I'M}$ et $\overrightarrow{I'J'}$ sont alors colinéaires.

On a $\overrightarrow{I'M}(x-5\,;\,y)$ et $\overrightarrow{I'J'}\left(5\sqrt{3}-5\,;-5\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$.

$\overrightarrow{I'M}$ et $\overrightarrow{I'J'}$ sont colinéaires si et seulement si :

$-5\left(1+\sqrt{3}\right)(x-5)-y\left(5\sqrt{3}-5\right)=0$

$\left(-5-5\sqrt{3}\right)(x-5)-y\left(5\sqrt{3}-5\right)=0$

$-5x+25-5x\sqrt{3}+25\sqrt{3}-5y\sqrt{3}+5y=0$

$-x+5-x\sqrt{3}+5\sqrt{3}-y\sqrt{3}+y=0$

$\left(-1-\sqrt{3}\right)x+\left(-\sqrt{3}+1\right)y+\left(5+5\sqrt{3}\right)=0$

$-\left(1+\sqrt{3}\right)x+\left(1-\sqrt{3}\right)y+5\left(1+\sqrt{3}\right)=0$

$\left(1+\sqrt{3}\right)x-\left(1-\sqrt{3}\right)y-5\left(1+\sqrt{3}\right)=0.$

Conclusion :

L'ensemble D', image par φ de l'ensemble D est une droite dont une équation est $\left(1+\sqrt{3}\right)x-\left(1-\sqrt{3}\right)y-5\left(1+\sqrt{3}\right)=0.$

Représentons graphiquement D' : Voir figure.

PROBLÈME

A). $y''-2y'+y=1-x.\quad (1)$

1). Déterminons un polynôme g du premier degré solution de l'équation (1) :

Posons $g(x)=ax+b$ et déterminons les réels a et b.

g est solution de (1) si et seulement si :

$g''(x)-2g'(x)+g(x)=1-x.$

g est définie sur IR et g est deux fois dérivable sur IR :

$\forall\, x\in \mathrm{IR}$, $g'(x)=a$ et $g''(x)=0.$

Ce qui permet d'avoir $\forall\, x\in \mathrm{IR}$:

$g''(x)-2g'(x)+g(x)=1-x \Leftrightarrow 0-2(a)+ax+b=1-x$

$\Leftrightarrow ax+(b-2a)=-x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b+2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}.$

Conclusion : Le polynôme g défini sur IR par $g(x)=-x-1$ est solution de l'équation différentielle (1).

2).a). Démontrons qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR, est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. (2) :

*** Supposons que $(h - g)$ est solution (2), démontrons alors que h est solution de (1) :**

$(h - g)$ est solution de (2) signifie que $\forall\, x \in$ IR :

$(h - g)''(x) - 2(h - g)'(x) + (h - g)(x) = 0$

$h''(x) - g''(x) - 2h'(x) + 2g'(x) + h(x) - g(x) = 0$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) - [\, g''(x) - 2g'(x) + g(x)\,] = 0.$

Or $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 1 - x.$

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) - (1 - x) = 0$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = 1 - x.$

Ce qui signifie que h est solution de l'équation différentielle (1).

*** Supposons que h est solution de (1), démontrons alors que $(h - g)$ est solution (2) :**

h est solution de (1) signifie que $\forall\, x \in$ IR :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = 1 - x.$

Or $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 1 - x.$

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x)$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) - g''(x) + 2g'(x) - g(x) = 0$

$h''(x) - g''(x) - 2h'(x) + 2g'(x) + h(x) - g(x) = 0$

$h''(x) - g''(x) - 2\big(h'(x) - g'(x)\big) + h(x) - g(x) = 0$

$(h - g)''(x) - 2(h - g)'(x) + (h - g)(x) = 0.$

Ce qui signifie que $(h - g)$ est solution (2).

Conclusion :

Une fonction h, deux fois dérivable sur IR, est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de (2).

b). Résolvons l'équation différentielle (2) :

$y'' - 2y' + y = 0$. (2).

L'équation caractéristique de (2) est $r^2 - 2r + 1 = 0$.

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$.

Les solutions de (2) sont les fonctions f définies sur IR par $\boldsymbol{f(x) = (Ax + B)e^x}$ avec A et B des constantes réelles.

- Ensemble de solutions de (2) :

$S_G = \{ f : x \longmapsto (Ax + B)e^x \; ; \; (A\,;B) \in \mathrm{IR}^2 \}$.

c). Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) :

$(h - g)$ est solution de (2) signifie que $\forall\, x \in \mathrm{IR}$:

$(h-g)(x) = f(x) = (Ax + B)e^x$

$h(x) - g(x) = (Ax + B)e^x$

$h(x) = (Ax + B)e^x + g(x)$

$h(x) = (Ax + B)e^x - x - 1$.

Conclusion :

L'ensemble de solutions de (1) est

$S_G = \{ h : \; x \longmapsto (Ax + B)e^x - x - 1 \; ; \; (A\,;B) \in \mathrm{IR}^2 \}$.

d). Trouvons la solution de l'équation (1) vérifiant $\boldsymbol{h(0) = 0}$ et $\boldsymbol{h'(0) = 0}$:

$h(x) = (Ax + B)e^x - x - 1$ pour tout réel x.

$\forall\, x \in \mathrm{IR}$,

$h'(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x - 1$

$h'(x) = (Ax + A + B)e^x - 1$.

Ainsi :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A(0) + B)e^0 - 0 - 1 = 0 \\ (A(0) + A + B)e^0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B - 1 = 0 \\ A + B - 1 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = 0 \end{cases}$. D'où $h(x) = (Ax + B)e^x - x - 1 = e^x - x - 1$.

Conclusion :

La solution de l'équation (1) vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$ est telle que $h(x) = e^x - x - 1$.

3).a). $h(x) = e^x - x - 1$ et $D_h = \mathrm{IR} =]-\infty\,;+\infty[$.

Etudions les variations de h et dressons son tableau de variation :

Limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x - x - 1) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-x-1) = +\infty \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^x - x - 1) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

h est dérivable sur IR et $\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $h'(x) = e^x - 1$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ell n(1) = 0$.

Conclusion :

Si $x \in]-\infty\,;0]$, $h'(x) \leq 0$.

D'où h est décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

Si $x \in]0\,;+\infty[$, $h'(x) > 0$.

D'où h est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Dressons le tableau de variations de h sur IR :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

b). Déduisons-en le signe de $h(x)$ pour tout réel x :

D'après le tableau de variations de h, la plus petite valeur prise par $h(x)$ est 0. Donc pour tout réel x, on a $h(x) \geq 0$.

B). f est définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \ell n(x+1) + e^{-x} - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

1).a). Etudions la continuité de f en 0 :

∗ Calcul de $f(0)$:

$f(x) = \ell n(x+1) + e^{-x} - 1$ si $x \geq 0$.

Donc $f(0) = \ell n(0+1) + e^{0} - 1 = \ell n(1) + 1 - 1 = 0$

$f(0) = 0$.

∗ Continuité de f à gauche de 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} xe^{x+1} = 0 \times e^{0+1} = 0$.

Donc f est continue à gauche de 0.

∗ Continuité de f à droite de 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\ell n(x+1) + e^{-x} - 1) = \ell n(1) + 1 - 1 = 0$.

Donc f est continue à droite de 0.

Conclusion :

f est continue à gauche et à droite de 0.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

Par conséquent, f est continue en 0.

b). Etudions la dérivabilité de f en 0 :

∗ Calcul de $f'(0)$:

$f(x) = \ell n(x+1) + e^{-x} - 1$ si $x \geq 0$.

f est dérivable sur $[0\,; +\infty[$ comme elle est la somme de trois fonctions dérivables sur $[0\,; +\infty[$.

$\forall x \in [0\,; +\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{x+1} - e^{-x}$.

D'où $f'(0) = \frac{1}{0+1} - e^{0} = 1 - 1 = 0$.

$*$ **Dérivabilité de f à gauche de 0 :**

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{xe^{x+1} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{x+1} = e^{0+1} = e.$

Donc f est dérivable à gauche de 0.

$*$ **Dérivabilité de f à droite de 0 :**

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ell n(x+1) + e^{-x} - 1 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ell n(x+1)}{x} - \dfrac{e^{-x} - 1}{(-x)}.$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ell n(x+1)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{(-x)} - 1}{(-x)} = 1 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 - 1 = 0.$

(En posant $X = -x$ pour calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{(-x)} - 1}{(-x)}$).

Par conséquent, f est dérivable à droite de 0.

Conclusion : f est dérivable à gauche et à droite de 0.

Mais $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ car $e \neq 0$.

En conclusion, f n'est pas dérivable en 0.

2).a). Calculons $f'(x)$ pour $x < 0$ et dressons le tableau de variation de f sur $]-\infty\,; 0[$:

$*$ **Calcul de $f'(x)$ pour $x < 0$:**

$f(x) = xe^{x+1}$ si $x < 0$.

f est le produit de deux fonctions sur $]-\infty\,; 0[$, donc f est dérivable sur $]-\infty\,; 0[$ et $\forall x \in]-\infty\,; 0[$:

$f'(x) = (xe^{x+1})' = 1 \times e^{x+1} + e^{x+1} \times x = (1 + x)e^{x+1}$

$f'(x) = (1 + x)e^{x+1}$.

$*$ **Dressons le tableau de variation de f sur $]-\infty\,; 0[$:**

Limites de f en $-\infty$ et en 0^- :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} \times e^{1} = 0 \times e^{1} = 0.$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} xe^{x+1} = 0e^{0+1} = 0.$

$\forall x \in]-\infty\,; 0[$, $f'(x) = (1 + x)e^{x+1}$.

$f'(x)$ est du signe de $(1 + x)$ car $\forall x \in \mathrm{IR}$, $e^{x+1} > 0$.

On en déduit le sens de variation de f :

$\forall\, x \in \,]-\infty\,;-1[$, $(1+x) < 0$. D'où $f'(x) < 0$.

Par conséquent f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1\,[$.

$\forall\, x \in [-1\,;0\,[$, $(1+x) \geq 0$. D'où $f'(x) \geq 0$.

Par conséquent f est croissante sur $[-1\,;0\,[$.

Conclusion :

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = (-1)e^{-1+1} = (-1)e^{0} = -1.$

b). Montrons que pour $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{e^x(1+x)}$:

$f(x) = \ell n(x+1) + e^{-x} - 1 \quad$ si $x \geq 0$.

$\forall\, x \in [\,0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - e^{-x}$.

Ce qui permet d'avoir :

$\forall\, x \in [\,0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - e^{-x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - (x+1)}{(x+1)e^x} = \frac{e^x - x - 1}{e^x(x+1)} = \frac{h(x)}{e^x(1+x)}.$$

Conclusion : Pour $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{e^x(1+x)}$.

*** Déduisons-en le sens de variation de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$:**

On sait que $h(x) \geq 0$ pour tout réel x (Partie **A**). **3**).**b**).).

Donc $h(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.

De plus, $\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[$, $e^x(1+x) > 0$.

D'où $f'(x)$ est du signe de $h(x)$ $\forall\, x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$.

Conclusion :

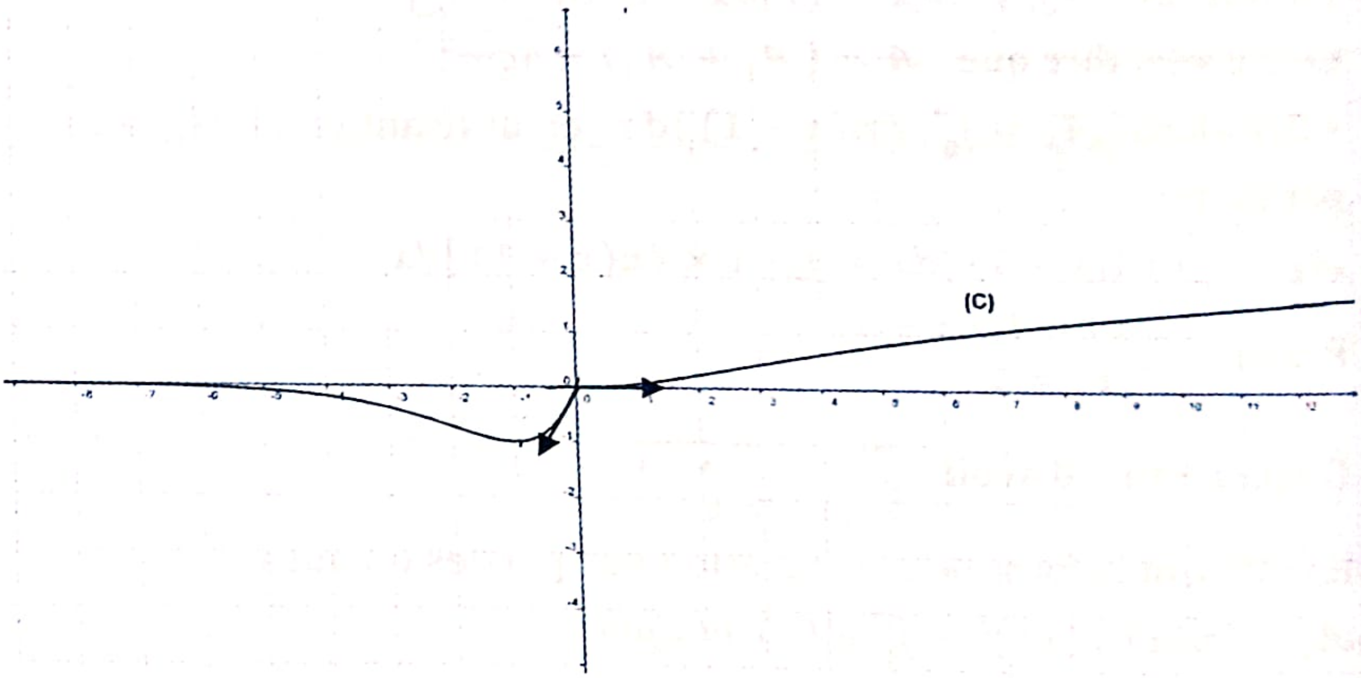
$f'(x) \geq 0$ $\forall\, x \in [\,0\,;\,+\infty[$ et f est croissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

c). **Dressons le tableau de variation de f sur IR :**

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$ e	//	0 $+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0 0	$\nearrow$	$+\infty$

3). Construisons la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ d'unité graphique 2cm :

Figure :



4). Montrons que la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\ ;-1[$ admet une bijection de $]-\infty\ ;-1[$ sur un intervalle J :

La fonction f est continue et strictement monotone (décroissante) sur l'intervalle $]-\infty\ ;-1[$.

On déduit que f admet une bijection de $]-\infty\ ;-1[$ sur l'intervalle $J =]-1\ ;0[$. (Voir tableau de variations).

La restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,;-1[$ aussi est continue et strictement monotone (décroissante) sur $]-\infty\,;-1[$.
Elle admet aussi une bijection de $]-\infty\,;-1\,[$ sur l'intervalle $J=]-1\,;0\,[$.

5). Calculons l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$:

Désignons par $\mathcal{A}$ l'aire recherchée .
Si $x\in[\,0\,;3\,]$, $f(x)\geq 0$. (Voir figure).
On aura ainsi :

$$\mathcal{A}=\int_0^3 f(x)dx\times(2cm\times 2cm).$$

$$\mathcal{A}=\int_0^3[\,\ell n(x+1)+e^{-x}-1\,]dx\times(2cm\times 2cm).$$

Posons $\mathcal{A}_1=\int_0^3[\,\ell n(x+1)\,]dx$ et $\mathcal{A}_2=\int_0^3[\,e^{-x}-1\,]dx.$

Ce qui veut dire que $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)\times 4cm^2.$

* **Calculons $\mathcal{A}_1=\int_0^3[\,\ell n(x+1)\,]dx$ en utilisant une intégration par parties :**

$$\mathcal{A}_1=\int_0^3[\,\ell n(x+1)\,]dx=\int_0^3[\,1\times\ell n(x+1)\,]dx\,.$$

Posons $\begin{cases}u(x)=\ell n(x+1)\\ v'(x)=1\end{cases}.$

Ce qui permet d'avoir $\begin{cases}u'(x)=\dfrac{1}{x+1}\\ v(x)=x\end{cases}.$

En utilisant la formule d'intégration par parties on aura :

$$\mathcal{A}_1=[\,u(x).v(x)\,]_0^3-\int_0^3 u'(x).v(x)dx$$

$$\mathcal{A}_1=[\,x\ell n(x+1)\,]_0^3-\int_0^3\frac{x}{x+1}dx.$$

Or $\forall\,x\in[\,0\,;3\,]$, $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+0}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}.$

Ce qui permet d'avoir :

$$\mathcal{A}_1=[\,x\ell n(x+1)\,]_0^3-\int_0^3\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\mathcal{A}_1=[\,x\ell n(x+1)\,]_0^3-[\,x-\ell n(x+1)\,]_0^3$$

$\mathcal{A}_1 = [\, x\ell n(x+1) - x + \ell n(x+1)\,]_0^3$
$\mathcal{A}_1 = [\,(x+1)\ell n(x+1) - x]_0^3$
$\mathcal{A}_1 = \big((3+1)\ell n(3+1) - 3\big) - \big((0+1)\ell n(0+1) - 0\big)$
$\mathcal{A}_1 = 4\ell n4 - 3 = 4\ell n2^2 - 3 = 8\ell n2 - 3.$

* **Calculons** $\mathcal{A}_2 = \int_0^3 [\, e^{-x} - 1\,]dx$ **:**

$\mathcal{A}_2 = \int_0^3 (e^{-x} - 1)dx = [\,- e^{-x} - x\,]_0^3$
$\mathcal{A}_2 = (- e^{-3} - 3) - (- e^0 - 0) = - e^{-3} - 3 + 1$
$\mathcal{A}_2 = - e^{-3} - 2.$

Conclusion :

$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \times 4cm^2$
$\mathcal{A} = (8\ell n2 - 3 - e^{-3} - 2) \times 4cm^2$
$\mathcal{A} = (8\ell n2 - e^{-3} - 5) \times 4cm^2$
$\mathcal{A} = 4(8\ell n2 - e^{-3} - 5)cm^2$

Une valeur approchée de l'aire recherchée est $1{,}981\ cm^2$.

CORRIGÉ DU BAC 2010

EXERCICE 1

Donnée : $z^3 - 3\sqrt{3}iz^2 - (9 - 3\sqrt{3}i)z + 8 = 0$ (E).

1). Montrons que (E) possède une solution réelle z_1 et déterminons z_1 :

Soit $z_1 = k$ la solution réelle de (E).

Dans ce cas, z_1 est solution de (1) signifie que :

$k^3 - 3\sqrt{3}ik^2 - (9 - 3\sqrt{3}i)k + 8 = 0$

$k^3 - 3ik^2\sqrt{3} - 9a + 3ik\sqrt{3} + 8 = 0$

$(k^3 - 9k + 8) + i(-3k^2\sqrt{3} + 3k\sqrt{3}) = 0$

$\begin{cases} k^3 - 9k + 8 = 0 \\ -3k^2\sqrt{3} + 3k\sqrt{3} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} k^3 - 9k + 8 = 0 \\ 3k\sqrt{3}(-k + 1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} k^3 - 9k + 8 = 0 \\ k = 0 \quad \text{ou} \quad k = 1 \end{cases}$.

* Si $k = 1$, alors $k^3 - 9k + 8 = 1^3 - 9 + 8 = 9 - 9 = 0$;
* Si $k = 0$, alors $k^3 - 9k + 8 = 8$ et $8 \neq 0$.

Conclusion :

(E) possède une solution réelle z_1 et $z_1 = 1$.

2). Résolvons (E) :

Soit P un polynôme défini par :

$P(z) = z^3 - 3\sqrt{3}iz^2 - (9 - 3\sqrt{3}i)z + 8$.

Dans ce cas résoudre (E) revient à résoudre l'équation $P(z) = 0$.

z_1 est solution de (E) signifie que $P(1) = 0$.

Donc on peut écrire $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$ avec a, b et c des complexes à déterminer par une méthode d'identification.

On aura ainsi :

$P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c$

$P(z) = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c.$

Or $P(z) = z^3 - 3\sqrt{3}i\, z^2 - (9 - 3\sqrt{3}i)z + 8.$

Par identification partielle, on peut avoir $\begin{cases} az^3 = z^3 \\ (b-a)z^2 = -3\sqrt{3}iz^2 \\ -c = 8 \end{cases}.$

$\begin{cases} az^3 = z^3 \\ (b-a)z^2 = -3\sqrt{3}iz^2 \\ -c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ (b-1) = -3\sqrt{3}i \\ -c = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - 3i\sqrt{3}. \\ c = -8 \end{cases}$ D'où $P(z) = (z-1)\left(z^2 + \left(1 - 3i\sqrt{3}\right)z - 8\right).$

■ Résolution de l'équation $P(z) = 0$:

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1)\left(z^2 + \left(1 - 3i\sqrt{3}\right)z - 8\right) = 0$

$\Leftrightarrow (z-1) = 0$ ou $\left(z^2 + \left(1 - 3i\sqrt{3}\right)z - 8\right) = 0$

$\Leftrightarrow z = 1$ ou $z^2 + \left(1 - 3i\sqrt{3}\right)z - 8 = 0.$

Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + \left(1 - 3i\sqrt{3}\right)z - 8 = 0$:

* Discriminant Δ :

$\Delta = \left(1 - 3i\sqrt{3}\right)^2 - 4(1)(-8)$

$\Delta = 1 - 6i\sqrt{3} + \left(3i\sqrt{3}\right)^2 + 32$

$\Delta = 1 - 6i\sqrt{3} - 27 + 32 = 6 - 6i\sqrt{3}.$

$\Delta = 6 - 6i\sqrt{3}.$

* Racines carrées de Δ :

Soit un nombre complexe δ défini par $\delta = x + i\,y$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{(6)^2 + \left(-6\sqrt{3}\right)^2} \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = 6 \\ xy < 0 \ \left(\text{car } -6\sqrt{3} < 0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ x^2 - y^2 = 6 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 6 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 3 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = -3 \\ y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3} \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ou } \begin{cases} x = -3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow (\delta = 3 - i\sqrt{3} \text{ ou } \delta = -3 + i\sqrt{3}).$$

Les racines carrées de Δ sont : $3 - i\sqrt{3}$ et $-3 + i\sqrt{3}$.

* Solutions de l'équation $z^2 + (1 - 3i\sqrt{3})z - 8 = 0$:

En utilisant une seule racine carrée de Δ on peut trouver :

$$\frac{-(1 - 3i\sqrt{3}) - (3 - i\sqrt{3})}{2(1)} = \frac{-1 + 3i\sqrt{3} - 3 + i\sqrt{3}}{2(1)} = \frac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = -2 + 2i\sqrt{3} ;$$

$$\frac{-(1 - 3i\sqrt{3}) + (3 - i\sqrt{3})}{2(1)} = \frac{-1 + 3i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3}}{2(1)} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}.$$

Conclusion :

L'ensemble de solutions de (E) est :

$S_{\mathbb{C}} = \{1 ; 1 + i\sqrt{3} ; -2 + 2i\sqrt{3}\}$.

3). Ecrivons les trois solutions z_1, z_2, z_3 sous forme trigonométrique avec $|z_2| < |z_3|$:

• Identifions z_2 et z_3 :

$$|-2 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4 ;$$

$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Or $2 < 4$, donc $|1 + i\sqrt{3}| < |-2 + 2i\sqrt{3}|$.

D'où $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

• **Forme trigonométrique de z_1 :**

$z_1 = 1$, donc $|z_1| = 1$ et $\arg(z_1) = 0[2\pi]$.

Ce qui permet d'écrire $z_1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$.

• **Forme trigonométrique de z_2 :**

$z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. On a $|z_2| = 2$.

• Déterminons l'argument de z_2 :

$$\begin{cases}\cos(\arg(z_2)) = \frac{1}{2}\\ \sin(\arg(z_2)) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}, \text{ d'où } \arg(z_2) = \frac{\pi}{3}[2\pi].$$

Ce qui permet d'écrire $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

• **Forme trigonométrique de z_3 :**

$z_3 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On a $|z_3| = 4$.

Déterminons l'argument de z_3 :

$$\begin{cases}\cos(\arg(z_3)) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}\\ \sin(\arg(z_3)) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}, \text{ d'où } \arg(z_3) = \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

Ce qui permet d'écrire $z_3 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

4). On donne : $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$.

$S(M_1) = M_2$ et $S(M_2) = M_3$.

Précisons les éléments caractéristiques de S :

• **Ecriture complexe de S :**

Soit $z' = az + b$ la forme de l'application complexe associée à S.
avec $(a\,;b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Déterminons les complexes a et b :

$$\begin{cases}S(M_1) = M_2\\ S(M_2) = M_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}az_1 + b = z_2\\ az_2 + b = z_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = z_2 - az_1\\ a(z_1 - z_2) = (z_2 - z_3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b = z_2 - az_1\\ a = \frac{(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = z_2 - az_1\\ a = \frac{(1 + i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3})}{(1 - 1 - i\sqrt{3})}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = z_2 - az_1\\ a = \frac{(3 - i\sqrt{3})}{(-i\sqrt{3})}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b = z_2 - az_1\\ a = \frac{i\sqrt{3}(3 - i\sqrt{3})}{i\sqrt{3}(-i\sqrt{3})}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = z_2 - az_1\\ a = \frac{(3i\sqrt{3} + 3)}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = 1 + i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})\\ a = 1 + i\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b = 0\\ a = 1 + i\sqrt{3}\end{cases}.$$

Par conséquent, $z' = (1 + i\sqrt{3})z$.

Remarque :

$z' = (1 + i\sqrt{3})z = z_2 . z.$

Ce qui permet d'avoir facilement :

* Rapport (soit k) de S :

$k = |1 + i\sqrt{3}| = |z_2| = 2.$

* Angle (soit θ) de S :

$\theta = \arg(1 + i\sqrt{3}) = \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} [\, 2\pi \,].$

* Centre de S :

S est de centre O (origine du repère) car $b = 0$.

Conclusion :

S est de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{3} [2\pi]$ et de centre O.

EXERCICE 2

Donnée : $y'' + 4y = 3\sin(x)$. (1)

1). Déterminons le réel α pour que la fonction g définie par $g(x) = \alpha \sin(x)$ soit une solution de (1) :

g est définie sur IR et g est deux fois dérivable sur IR.

Ainsi, pour tout réel x :

$g'(x) = (\alpha \sin(x))' = \alpha\cos(x)$ et $g''(x) = -\alpha \sin(x).$

g est une solution de (1) si et seulement si :

$g''(x) + 4g(x) = 3\sin(x)$

$-\alpha \sin(x) + 4\alpha \sin(x) = 3\sin(x)$

$3\alpha \sin(x) = 3\sin(x)$

$3\alpha = 3$

$\alpha = 1.$

Conclusion : g est une solution de (1) si et seulement si $\alpha = 1$.

2).a). Démontrons qu'une fonction f, deux fois dérivable sur IR, est solution de (1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ (2) :

∗ Supposons que f est solution de (1), démontrons alors que $(f - g)$ est solution de (2) :

f est solution de (1) signifie que $\forall x \in$ IR :

$f''(x) + 4f(x) = 3\sin(x)$.

Or $g''(x) + 4g(x) = 3\sin(x)$.

Ce qui permet d'avoir :

$f''(x) + 4f(x) = g''(x) + 4g(x)$

$f''(x) - g''(x) + 4f(x) - 4g(x) = 0$

$(f - g)''(x) + 4(f - g)(x) = 0$.

Ce qui signifie que $(f - g)$ est solution de (2).

∗ Supposons que $(f - g)$ est solution de (2), démontrons alors que f est solution de (1) :

$(f - g)$ est solution de (2) signifie que $\forall x \in$ IR :

$(f - g)''(x) + 4(f - g)(x) = 0$

$f''(x) - g''(x) + 4f(x) - 4g(x) = 0$

$f''(x) + 4f(x) = g''(x) + 4g(x)$.

Or $g''(x) + 4g(x) = 3\sin(x)$.

Ce qui permet d'avoir :

$f''(x) + 4f(x) = 3\sin(x)$.

Ce qui signifie que f est solution de (1).

Conclusion :

Une fonction f, deux fois dérivable sur IR, est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si la fonction $(f - g)$ est solution de l'équation différentielle (2).

b). Résolvons l'équation différentielle (2) :

$y'' + 4y = 0$ (2).

L'équation caractéristique de (2) est $r^2 + 4 = 0$.

$r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -4 \Leftrightarrow r^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow r = 2i$ ou $r = -2i$.

Les solutions de (2) sont les fonctions h définies sur IR par :

$h(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{0x} = A\cos 2x + B\sin 2x$.

A et B sont des constantes réelles.

Ensemble de solutions de (2) :

$S_G = \{ h : x \longmapsto A\cos 2x + B\sin 2x \ ; \ (A ; B) \in \mathrm{IR}^2 \}$.

c). Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) :

$(f - g)$ est solution de (2) signifie que $\forall x \in \mathrm{IR}$:

$(f - g)(x) = h(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$

$f(x) - g(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$

$f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + g(x)$

$f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + \sin x$.

Conclusion :

L'ensemble de solutions de (1) est

$S_G = \{ f : x \longmapsto A\cos 2x + B\sin 2x + \sin x \ ; \ (A ; B) \in \mathrm{IR}^2 \}$.

d). Trouvons la solution de (1) vérifiant les conditions :

$\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$ **et** $\boldsymbol{f'(\pi) = 0}$ **:**

$f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + \sin x$.

f est dérivable sur IR et pour tout réel x on a :

$f'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \cos x$.

Exprimons $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f'(\pi)$:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + B\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\cos \pi + B\sin \pi + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -A + 0 + 1 = -A + 1$.

$f'(\pi) = -2A\sin 2\pi + 2B\cos 2\pi + \cos \pi = 2B - 1$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f'(\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + 1 = 0 \\ 2B - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Conclusion :

La solution de l'équation (1) vérifiant les conditions $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'(\pi) = 0$ est la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x$.

PROBLÈME

A). f : $f(x) = |x+1| + \frac{1}{x-1}$.

1). Donnons le domaine de définition de f et écrivons $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue :

* **Domaine de définition de f :**

$D_f = \{ x \in \text{IR} \,/\, x - 1 \neq 0 \}$.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

D'où $D_f = \text{IR} - \{1\} =]-\infty\,;1\,[\, \cup\,]\,1\,;\,+\infty\,[$.

* **Ecrivons $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue :**

$|x+1| = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Ce qui permet d'avoir :

Si $x \in]-\infty\,;-1]$; $|x+1| = -x-1$ d'où $f(x) = -x-1+\frac{1}{x-1}$;

Si $x \in]-1\,;1\,[$; $|x+1| = x+1$ d'où $f(x) = x+1+\frac{1}{x-1}$;

Si $x \in]\,1\,;+\infty\,[$; $|x+1| = x+1$ d'où $f(x) = x+1+\frac{1}{x-1}$.

Conclusion :

$$f(x) = \begin{cases} -x-1+\frac{1}{x-1} & \text{si } x \in]-\infty\,;-1\,] \\ x+1+\frac{1}{x-1} & \text{si } x \in]-1\,;1\,[\\ x+1+\frac{1}{x-1} & \text{si } x \in]\,1\,;+\infty\,[\end{cases}.$$

2). Etudions les limites aux bornes du domaine de définition de f :

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x-1+\frac{1}{x-1}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 1 + 1 = 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{x-1}\right) = -\infty.$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to 1^+} (x+1) = 1 + 1 = 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right) = +\infty.$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) = 0.$

Conclusion :

x_0	$-\infty$	1^-	1^+	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3). Etudions la dérivabilité de f en -1 :

∗ Calcul de $f(-1)$:

$f(x) = -x - 1 + \frac{1}{x-1}$ si $x \in]-\infty\,; -1]$. Ce qui permet d'avoir :

$f(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}.$

$f(-1) = -\frac{1}{2}$.

∗ Calcul de $f'(-1)$:

$f(x) = -x - 1 + \frac{1}{x-1}$ si $x \in]-\infty\,; -1]$.

f est ici la somme de deux fonctions qui sont toutes deux dérivables sur $]-\infty\,; -1]$.

Donc f est dérivable sur $]-\infty\,; -1]$ et $\forall\, x \in]-\infty\,; -1]$:

$f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-1)^2}.$

Ce qui permet d'avoir $f'(-1) = -1 - \frac{1}{(-1-1)^2} = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}.$

$f'(-1) = -\frac{5}{4}.$

$*$ **Dérivabilité de f à gauche de -1 :**

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{-x-1+\frac{1}{x-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-}\frac{\frac{2-x^2}{x-1}+\frac{1}{2}}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to -1^-}\frac{4-2x^2+x-1}{2(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{-2x^2+x+3}{2(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)(-2x+3)}{2(x+1)(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to -1^-}\frac{(-2x+3)}{2(x-1)} = \frac{(2+3)}{2(-1-1)} = -\frac{5}{4}.$$

Donc f est dérivable à gauche de -1.

$*$ **Dérivabilité de f à droite de -1 :**

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+}\frac{x+1+\frac{1}{x-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{2}}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2+x-1}{2(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)(2x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1^+}\frac{(2x-1)}{2(x-1)} = \frac{3}{4}.$$

Donc f est dérivable à droite de -1.

Conclusion :

f est dérivable à gauche et à droite de -1.

Mais $\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \neq \lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$ car $-\frac{5}{4} \neq \frac{3}{4}$.

En conclusion, f n'est pas dérivable en -1.

Conséquence graphique :

f n'est pas dérivable en -1, donc la courbe (C) admet au point d'abscisse -1 deux demi-tangentes dont les équations sont les suivantes :

$*$ **Equation de la demi-tangente à gauche de -1 :**

$$y = -\frac{5}{4}(x+1) + f(-1)$$
$$y = -\frac{5}{4}(x+1) - \frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{4}.$$

$*$ **Equation de la demi-tangente à droite de -1 :**

$$y = \frac{3}{4}(x+1) + f(-1)$$
$$y = \frac{3}{4}(x+1) - \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}.$$

4). Etudions la variation de f et dressons son tableau de variation :

$$f(x) = \begin{cases} -x-1+\frac{1}{x-1} & \text{si } x \in]-\infty ; -1] \\ x+1+\frac{1}{x-1} & \text{si } x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\end{cases}.$$

f n'est pas dérivable en -1, d'où elle est dérivable sur $]-\infty ; -1[$, sur $]-1 ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

Ce qui permet d'avoir :

$$f'(x) = \begin{cases} -1-\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x \in]-\infty ; -1[\\ 1-\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\end{cases}.$$

* $\forall x \in]-\infty ; -1[$, $f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-1)^2} = -\left(1 + \frac{1}{(x-1)^2}\right)$.

Donc $\forall x \in]-\infty ; -1[$, $f'(x) < 0$.

D'où **f est strictement décroissante sur** $]-\infty ; -1[$.

* $\forall x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $x(x-2)$ car $\forall x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, on a $(x-1)^2 > 0$.

Etudions le signe de $x(x-2)$ pour $x \in]-1 ; 1[\cup]1 + \infty[$:

$x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

x	-1		0		1		2	$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

Par conséquent :

f est croissante sur $]-1 ; 0]$ et sur $[2 ; +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$ et sur $]1 ; 2[$.

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-\quad -\frac{5}{4}$		$\frac{3}{4}\quad +$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$

5). Montrons que la courbe représentative (C) de f admet trois asymptotes dont on donnera les équations :

$$f(x)=\begin{cases} -x-1+\frac{1}{x-1} & \text{si } x\in\,]-\infty\,;-1] \\ x+1+\frac{1}{x-1} & \text{si } x\in\,]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[\end{cases}.$$

Ce qui permet d'avoir :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.$

D'où la droite d'équation $y=-x-1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.$

D'où la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, d'où la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale de (C).

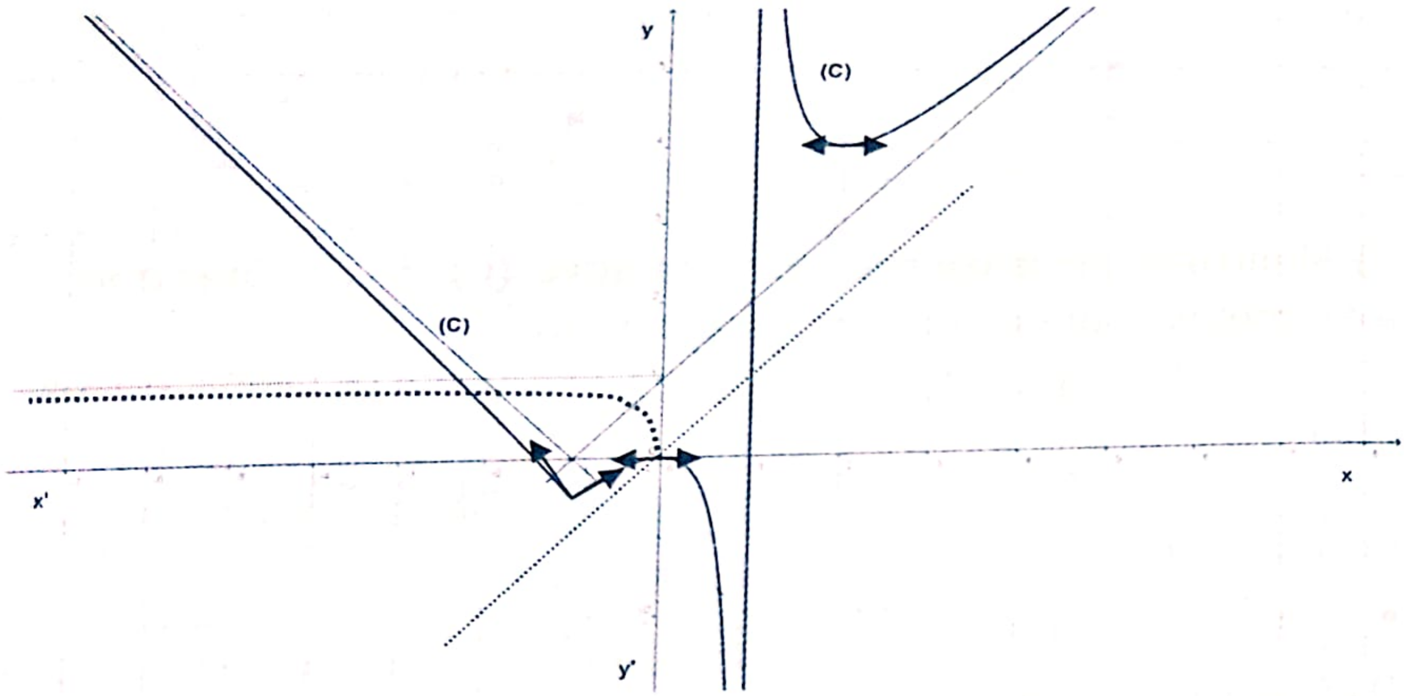
Conclusion :

La courbe représentative (C) de f admet **trois asymptotes** dont les équations sont les suivantes :

* $y=-x-1$ (asymptote oblique à (C) en $-\infty$).
* $y=x+1$ (Asymptote à (C) en $+\infty$).
* $x=1$ (Asymptote verticale de (C)).

6). Construisons la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ (unité 2cm) :

Figure :



7). Montrons que la restriction de f à $[\mathbf{0}\,;\mathbf{1}\,[$ admet une bijection de $[\mathbf{0}\,;\mathbf{1}\,[$ sur un intervalle J et traçons la courbe représentative de la réciproque dans le même graphique que (C) :

La fonction f est continue et strictement monotone (décroissante) sur l'intervalle $[\,0\,;1\,[$.

D'où f est une bijection de l'intervalle $[\,0\,;1\,[$ sur l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to1^-} f(x)\,;\,\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right] = \,]-\infty\,;0\,]$ (voir tableau).

La restriction de f à l'intervalle $[\,0\,;1\,[$ est donc une bijection de $[\,0\,;1\,[$ sur $J = \,]-\infty\,;0\,]$ et elle admet en ce sens une réciproque qu'on notera f^{-1}.

La courbe de la réciproque f^{-1} est tracée en pointillés (Voir figure) . Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

8).a). Calculons les intégrales s_1 et s_2 :

$s_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} f(x)dx$ et $s_2 = \int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Si $x \in [-\sqrt{2}\,;\,-1]$, $f(x) = -x - 1 + \frac{1}{x-1}$.

Ce qui permet d'avoir :

- $s_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-1}\left(-x - 1 + \frac{1}{x-1}\right)dx$

$s_1 = \left[-\frac{x^2}{2} - x + \ell n|x-1|\right]_{-\sqrt{2}}^{-1}$

$s_1 = \left(-\frac{1}{2} + 1 + \ell n|-1-1|\right) - \left(-\frac{2}{2} + \sqrt{2} + \ell n|-\sqrt{2}-1|\right)$

$s_1 = \left(\frac{1}{2} + \ell n(2)\right) - \left(\sqrt{2} - 1 + \ell n(\sqrt{2}+1)\right)$

$s_1 = \left(\frac{1}{2} + 1 + \ell n(2)\right) - \sqrt{2} - \ell n(\sqrt{2}+1)$

$s_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} + \ell n(2) - \ell n(\sqrt{2}+1)$

Si $x \in [-1\,;\,0]$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

Ce qui permet d'avoir :

- $s_2 = \int_{-1}^{0}\left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + \ell n|x-1|\right]_{-1}^{0}$

$s_2 = (0 + \ell n|-1|) - \left(\frac{1}{2} - 1 + \ell n|-1-1|\right)$

$s_2 = \frac{1}{2} - \ell n(2)$.

Conclusion :

$s_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} + \ell n(2) - \ell n(\sqrt{2}+1)$ et $s_2 = \frac{1}{2} - \ell n(2)$.

b). Déduisons-en l'aire de la portion du plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\sqrt{2}$ et $x = 0$:

Si $x \in [-\sqrt{2}\,;0]$, $f(x) \leq 0$ car (C) est en dessous de l'axe des abscisses (voir courbe).

Désignons par $\mathcal{A}$ l'aire recherchée.

Ce qui permet d'avoir :

$\mathcal{A} = -\int_{-\sqrt{2}}^{0} f(x)dx \times (unité\ d'aire)$

$\mathcal{A} = -\left(\int_{-\sqrt{2}}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx\right) \times 4cm^2$

$\mathcal{A} = -(s_1 + s_2) \times 4cm^2$

$\mathcal{A} = -\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} + \ell n(2) - \ell n(\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2} - \ell n(2)\right) \times 4cm^2$

$\mathcal{A} = -\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} + \ell n(2) - \ell n(\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2} - \ell n(2)\right) \times 4cm^2$

$\mathcal{A} = -\left(2 - \sqrt{2} - \ell n(\sqrt{2}+1)\right) \times 4cm^2$

$\mathcal{A} = \left(\sqrt{2} - 2 + \ell n(\sqrt{2}+1)\right) \times 4cm^2.$

B). 1). $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : v_n = \ell n(u_n - 1)$.

Sachant que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r (r \neq 0)$ et de premier terme $v_1 = 0$, donnons l'expression du terme général u_n en fonction de n et de r :

$*$ Expression de v_n en fonction de n :

(v_n) est une suite arithmétique de raison r et de 1er terme v_1, ce qui permet d'avoir :

$v_n = v_1 + (n-1) \times r$

$v_n = 0 + (n-1) \times r$

$v_n = (n-1)r.$

$*$ Expression de u_n en fonction de n :

$v_n = \ell n(u_n - 1) \Leftrightarrow e^{v_n} = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = 1 + e^{v_n}.$

Or $v_n = (n-1)r.$

Donc $u_n = 1 + e^{(n-1)r}$.

2). Choisissons r pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit convergente et dans ce cas donnons sa limite :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{(n-1)r} = 0.$

$\lim\limits_{n \to +\infty} e^{(n-1)r} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (n-1)r = -\infty \Leftrightarrow r \in \mathbb{R}_-^*$.

Pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit convergente on doit choisir un réel r strictement négatif.

• **Limite de la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$:**

$u_n = 1 + e^{(n-1)r}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{(n-1)r} = 0$

si $(u_n)_{n\in IN^*}$ est convergente.

D'où $\lim((u_n)_{n\in IN^*}) = 1$.

3). Calculons, en fonction de u_n, l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) de f, les droites d'équations $y = x + 1$, $x = 2$ et $x = u_n$:

Désignons par $\mathcal{A}_n$ cette aire.

On sait que $\lim((u_n)_{n\in IN^*}) = 1$ et $u_n = 1 + e^{(n-1)r}$.

Donc $\begin{cases} u_n < 2 \\ u_n > 1 \end{cases}$ ou simplement $1 < u_n < 2$.

Ainsi, pour $x \in [\,u_n\,;2\,]$, la courbe (C) est au dessus de son asymptote (la droite d'équation $y = x + 1$) et au dessus de l'axe des abscisses.

D'où $\mathcal{A}_n = \left(\int_{u_n}^{2}(f(x) - (x+1))dx\right) \times ua.$

Ce qui permet d'avoir :

$$\mathcal{A}_n = \left(\int_{u_n}^{2}\left(x + 1 + \frac{1}{x-1} - (x+1)\right)dx\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}_n = \left(\int_{u_n}^{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)dx\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}_n = \left([\,\ell n(x-1)]_{u_n}^{2}\right) \times 4cm^2$$

$$\mathcal{A}_n = \left(\ell n(2-1) - \ell n(u_n - 1)\right) \times 4cm^2$$

$$\mathcal{A}_n = \left(-\,\ell n(u_n - 1)\right) \times 4cm^2$$

$$\mathcal{A}_n = \left(4\ell n\left(\frac{1}{u_n - 1}\right)\right) cm^2.$$

CORRIGÉ DU BAC 2011

EXERCICE 1

$(u_n)_{n\in IN^*} : \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{6+u_n}{2+u_n} \end{cases}$

1). Montrons par récurrence que tous les termes de cette suite sont strictement positifs :

$u_1 = 1$ et $1 > 0$, donc u_1 est strictement positif.

Supposons que $u_n > 0$, démontrons que $u_{n+1} > 0$.

Si $u_n > 0$, alors $\begin{cases} 6 + u_n > 0 \\ 2 + u_n > 0 \end{cases}$, d'où $\dfrac{6+u_n}{2+u_n} > 0$ ou $u_{n+1} > 0$.

Conclusion :

Tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ sont strictement positifs.

2). $(v_n)_{n\in IN^*}$ est la suite de terme général $v_n = \dfrac{-2+u_n}{3+u_n}$.

a). Montrons que $(v_n)_{n\in IN^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison :

$v_n = \dfrac{-2+u_n}{3+u_n} \Leftrightarrow v_{n+1} = \dfrac{-2+u_{n+1}}{3+u_{n+1}}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$v_{n+1} = \frac{-2+\frac{6+u_n}{2+u_n}}{3+\frac{6+u_n}{2+u_n}} = \frac{-4-2u_n+6+u_n}{6+3u_n+6+u_n} = \frac{2-u_n}{12+4u_n} = \frac{-(-2+u_n)}{4(3+u_n)}$$

$v_{n+1} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{-2+u_n}{3+u_n}\right)$. Or $v_n = \dfrac{-2+u_n}{3+u_n}$.

Donc $v_{n+1} = -\dfrac{1}{4}v_n$.

Conclusion :

$(v_n)_{n\in IN^*}$ est une suite géométrique de premier terme

$v_1 = \dfrac{-2+u_1}{3+u_1} = \dfrac{-2+1}{3+1} = -\dfrac{1}{4}$ et de raison $-\dfrac{1}{4}$.

b). Donnons l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n :

* Expression de v_n en fonction de n :

$(v_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ étant géométrique de 1er terme $v_1 = -\frac{1}{4}$

et de raison $-\frac{1}{4}$, donc on peut écrire $v_n = v_1 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$v_n = \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1+1}$$

$$v_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n}.$$

* Expression de u_n en fonction de n :

$$v_n = \frac{-2+u_n}{3+u_n} \Leftrightarrow 3v_n + v_n u_n = -2 + u_n \Leftrightarrow (v_n - 1)u_n = (-3v_n - 2)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-3v_n - 2}{v_n - 1} = \frac{3v_n + 2}{1 - v_n}. \text{ Or } v_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n}.$$

Ce qui permet d'avoir :

$$u_n = \frac{3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 2}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}.$$

c). Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

* $v_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$.

* $u_n = \frac{3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 2}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 2}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{2}{1} = 2$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

EXERCICE 2

Une urne $\begin{cases} 3 \text{ Boules blanches} \\ 3 \text{ Boules rouges} \\ 3 \text{ Boules noires} \end{cases}$

On prélève **simultanément trois** (3) boules (parmi 9) de l'urne.

Les prélèvements sont supposés équiprobables.

L'univers des éventualités Ω a donc pour cardinal C_9^3.

On note : $\text{card}(\Omega) = C_9^3 = 84$.

1).Calculons la probabilité d'un prélèvement unicolore :

Désignons par $p(1C)$ la probabilité d'obtenir une seule couleur.

Ainsi, $p(1C) = \frac{C_3^3 + C_3^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{3}{84} = \frac{1}{28}$.

2). Calculons la probabilité d'un prélèvement tricolore :

Désignons par $p(3C)$ la probabilité d'obtenir trois couleurs.

Ainsi, $p(3C) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_3^1}{C_9^3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{84} = \frac{27}{84} = \frac{9}{28}$.

3). Déduisons des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement bicolore :

Désignons par $p(2C)$ la probabilité d'obtenir deux couleurs.

Ainsi, $p(1C) + p(2C) + p(3C) = 1$.

Ce qui permet d'avoir :

$p(2C) = 1 - p(1C) - p(3C)$

$p(2C) = 1 - \frac{1}{28} - \frac{9}{28} = \frac{28-1-9}{28} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$.

$p(2C) = \frac{9}{14}$.

4). Déterminons la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore :

Désignons par $p(2R / 2C)$ la probabilité recherchée.

Ainsi, $p(2R / 2C) = \frac{p(2R \cap 2C)}{p(2C)}$.

$p(2R \cap 2C)$ est la probabilité d'avoir deux boules rouges dans un tirage bicolore et $p(2R \cap 2C) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{C_9^3} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$.

D'où $p(2R\ /\ 2C) = \frac{p(2R\ \cap\ 2C)}{p(2C)} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{9}{14}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$p(2R\ /\ 2C) = \frac{1}{3}$.

PROBLÈME

A). $y'' - 2y' + y = x - 1$. (1)

1). Déterminons les réels a et b pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation différentielle (1) :

g est deux fois dérivable sur IR et $\forall\ x \in$ IR :

$g'(x) = a$ et $g''(x) = 0$.

Pour tout réel x :

g est solution de (1) $\Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x - 1$

$\Leftrightarrow 0 - 2a + ax + b = x - 1 \Leftrightarrow ax + (b - 2a) = x - 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = x \\ (b - 2a) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ (b - 2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Conclusion :

Pour qu'une fonction g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation différentielle (1), il faut que $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$.

2).a). Démontrons qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. (2) :

• Supposons que h est solution de (1), démontrons alors que $(h - g)$ est solution de (2) :

h est solution de (1) signifie que $\forall\ x \in$ IR :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x - 1$.

Or $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x - 1$.

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x)$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) - g''(x) + 2g'(x) - g(x) = 0$

$\left(h''(x) - g''(x)\right) - 2\left(h'(x) - g'(x)\right) + \left(h(x) - g(x)\right) = 0$

$(h-g)''(x) - 2(h-g)'(x) + (h-g)(x) = 0.$

Ce qui signifie que $(h-g)$ est solution de (2).

*** Supposons que $h - g$ est solution de (2), démontrons alors que h est solution de (1) :**

$(h-g)$ est solution de (2) signifie que $\forall\, x \in$ IR :

$(h-g)''(x) - 2(h-g)'(x) + (h-g)(x) = 0$

$\left(h''(x) - g''(x)\right) - 2\left(h'(x) - g'(x)\right) + \left(h(x) - g(x)\right) = 0$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) - g''(x) + 2g'(x) - g(x) = 0$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x).$

Or $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x - 1.$

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x - 1.$

Ce qui signifie que h est solution de (1).

Conclusion :

Une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $(h-g)$ est solution de l'équation différentielle (2).

b). Résolvons l'équation différentielle (2) :

$y'' - 2y' + y = 0.$ (2).

L'équation caractéristique de (2) est $r^2 - 2r + 1 = 0.$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1.$

Les solutions de (2) sont les fonctions u définies sur IR par

$\boldsymbol{u(x) = (Ax + B)e^x}$ avec A et B des constantes réelles.

Ensemble de solutions de (2) :

$S_G = \{u : x \longmapsto (Ax + B)e^x \,;\, (A\,;B) \in \mathrm{IR}^2\}.$

c). Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) :

$(h-g)$ est solution de (2) signifie que $\forall\, x \in$ IR :

$(h-g)(x) = u(x) = (Ax + B)e^x$

$h(x) - g(x) = (Ax + B)e^x$

$h(x) = (Ax + B)e^x + g(x)$
$h(x) = (Ax + B)e^x + x + 1.$

Conclusion :

L'ensemble de solutions de (1) est

$S_G = \{ h : x \longmapsto (Ax + B)e^x + x + 1 ; (A ; B) \in IR^2 \}.$

d). Trouvons la solution de l'équation (1) vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$:

$h(x) = (Ax + B)e^x + x + 1$ pour tout réel x.

$\forall x \in IR,$

$h'(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x + 1$

$h'(x) = (Ax + A + B)e^x + 1.$

Ainsi :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A(0) + B)e^0 + 0 + 1 = 0 \\ (A(0) + A + B)e^0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + 1 = 0 \\ A + B + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 0 \end{cases}.$$

D'où $h(x) = (Ax + B)e^x + x + 1 = - e^x + x + 1.$

Conclusion :

La solution de l'équation (1) vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$ est telle que $h(x) = x + 1 - e^x$.

B). Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + 1 - e^x$.

1). Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation :

$f(x) = x + 1 - e^x$ et $D_f = IR =]-\infty ; +\infty[$.

Limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

$* \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1 - e^x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty \end{cases}$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.}$

$* \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1 - e^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

$$\text{car}\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0\end{cases}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

f est dérivable sur IR et $\forall x \in$ IR, $f'(x) = 1 - e^x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ell n(1) = 0.$

Conclusion :

Si $x \in]-\infty\,;0]$, $f'(x) \geq 0$.

D'où f est croissante sur $]-\infty\,;0]$.

Si $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$.

D'où f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Dressons le tableau de variations de f sur IR :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

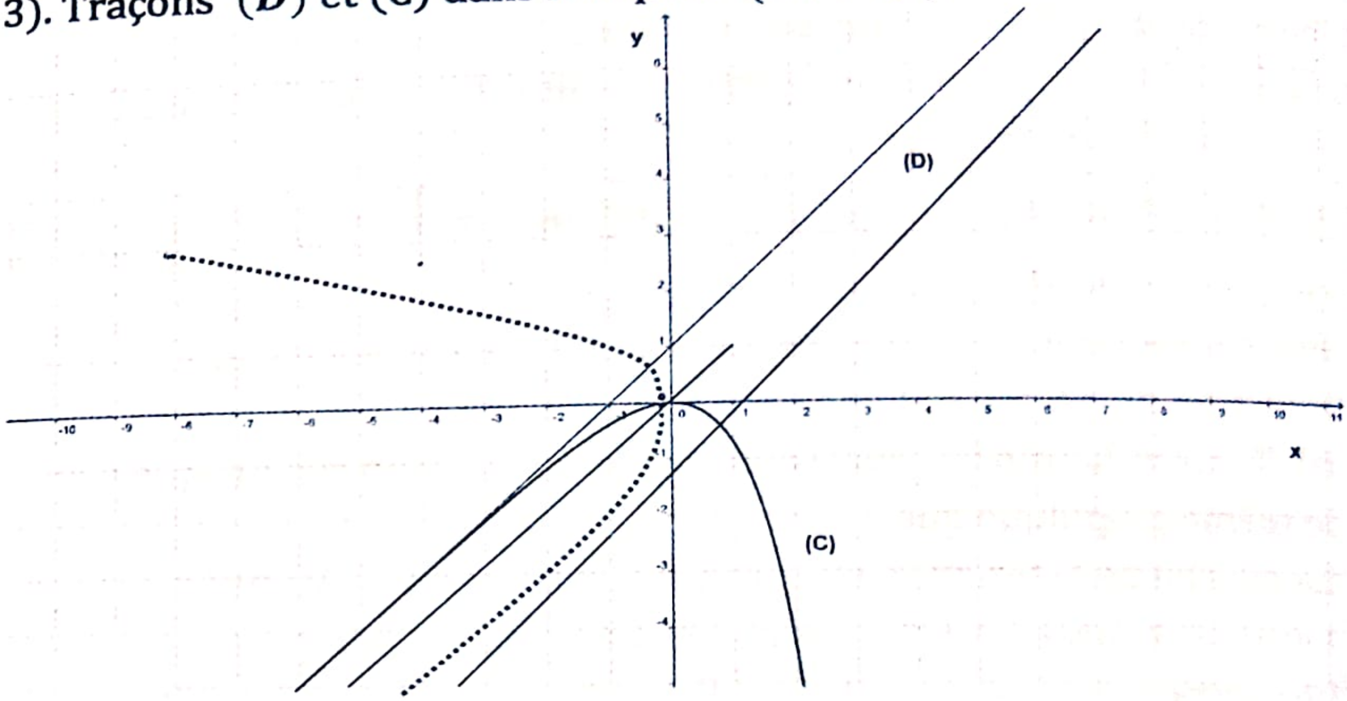
2). Montrons que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to-\infty}[x + 1 - e^x - (x+1)]$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to-\infty}[-e^x] = 0 \text{ car } \lim_{x\to-\infty}[e^x] = 0.$$

Par conséquent, la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C).

3). Traçons (D) et (C) dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$:



4).a). Soit α un réel strictement négatif.

Calculons l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C) et (D) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$:

Pour $x \in [\alpha\,;0]$ on a $f(x) \leq 0$ et (C) qui est en dessous de la droite (D).

Ce qui permet d'avoir :

$\mathcal{A}(\alpha) = \left(\int_{\alpha}^{0}[\,(x+1) - f(x)\,]dx\right) \times (unité\ d'aire)$

$\mathcal{A}(\alpha) = \left(\int_{\alpha}^{0}[\,x + 1 - x - 1 + e^{x}\,]dx\right) \times ua$

$\mathcal{A}(\alpha) = \left(\int_{\alpha}^{0} e^{x}dx\right) \times ua = [\,e^{x}\,]_{\alpha}^{0} \times ua$

$\mathcal{A}(\alpha) = (e^{0} - e^{\alpha}) \times ua = (1 - e^{\alpha}) \times 1cm^{2}$

$\mathcal{A}(\alpha) = (1 - e^{\alpha})cm^{2}.$

b). Calculons $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$:

$\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to -\infty}(1 - e^{\alpha})cm^{2} = 1cm^{2}$ car $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} e^{\alpha} = 0.$

$\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 1cm^{2}.$

5).a). Montrons que la restriction de f à $[\,0\,;\,+\infty[$ réalise une bijection de $[\,0\,;\,+\infty[$ sur un intervalle J :

La fonction f est continue et strictement monotone (décroissante) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

D'où f est une bijection de $[\,0\,;\,+\infty[$ sur $J = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)\right]$ ou $J =]-\infty\,;0\,]$.

Par conséquent, la restriction de f à $[\,0\,;\,+\infty[$ réalise une bijection de $[\,0\,;\,+\infty\,[$ sur $J =]-\infty;0\,]$.

b). Traçons la courbe représentative de la fonction réciproque sur le même graphique que (C) :

La courbe de la fonction réciproque est tracée en **pointillés.**

Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première **bissectrice** du repère (la droite d'équation $y = x$). (Voir figure)

* La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) donc la droite d'équation $x = y + 1$ ou $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe de la fonction réciproque.

C). f_m est définie sur IR par $f_m(x) = m(x+1) - e^x$.

1). Trouvons l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m admet un maximum :

f_m est dérivable sur IR et $\forall\, x \in \text{IR}\quad f_m'(x) = m - e^x$.

f_m admet un maximum en $x_0 = a$ si et seulement si :

$$\begin{cases} f_m{}'(x) > 0 \text{ si } & x \in\,]-\infty\,;\,a\,[\\ f_m{}'(a) = 0 & \\ f_m{}'(x) < 0 & \text{si } x \in\,]\,a\,;\,+\infty\,[\end{cases}.$$

$\forall\, x \in \text{IR}\quad f_m'(x) = m - e^x$. Discutons suivant les valeurs de m :

1er cas $(m < 0)$:

Dans ce cas $f_m'(x) < 0\ \ \forall\, x \in \text{IR}$.

Donc l'équation $f_m'(x) = 0$ n'admet pas de racines dans IR.

Par conséquent, f_m n'admet pas de maximum.

$2^{ème}$ cas $(m = 0)$:

Dans ce cas $f'_m(x) = -e^x \; \forall x \in IR$.

Donc $f'_m(x) < 0$ car $-e^x < 0 \; \forall x \in IR$.

D'où l'équation $f'_m(x) = 0$ n'admet pas de racines dans IR.

Par conséquent, f_m n'admet pas de maximum.

$3^{ème}$ cas $(m > 0)$:

Dans ce cas, $\forall x \in IR$:

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow m - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = m \Leftrightarrow x = \ell n(m)$.

De plus :

$f_m(\ell n(m)) = m(\ell n(m) + 1) - e^{\ell n(m)}$

$f_m(\ell n(m)) = m\ell n(m) + m - m$

$f_m(\ell n(m)) = m\ell n(m)$.

Par conséquent, pour $m > 0$ f_m admet un maximum en $x_0 = \ell n(m)$.

Conclusion :

L'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m admet un maximum est l'ensemble des réels m strictement positifs$(m > 0)$.

2). **Soit le point M_m d'ordonnée maximale de Γ_m.**

Donnons une équation de l'ensemble des points M_m :

D'après ce qui précède (voir $3^{ème}$ cas), on a $M_m(\ell n(m)\,;m\ell n(m))$.

Donc pour le point M_m, on a $\begin{cases} x = \ell n(m) \\ y = m\ell n(m) \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\begin{cases} x = \ell n(m) \\ y = m\ell n(m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = e^x \\ y = e^x \ell n(e^x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = e^x \\ y = xe^x \end{cases}.$$

Conclusion :

Une équation de l'ensemble des points M_m est $y = xe^x$.

CORRIGÉ DU BAC 2012

Le sujet du BAC 2012 a été proposé comme sujet du BAC 2016.
Autrement dit, les deux sujets sont identiques.
Par conséquent, pour la correction du BAC 2012,
voir la correction du BAC 2016.

CORRIGÉ DU BAC 2013

EXERCICE 1

1).a). Trouvons les racines carrées du nombre complexe $5-12i$:

Soit un complexe δ défini par $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = 5-12i$.

$$\delta^2 = 5-12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = |5-12i| = \sqrt{(5)^2+(-12)^2} \\ x^2-y^2 = \mathrm{Re}(5-12i) = 5 \\ xy<0 \ (\text{car } \ -12<0\ ) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \\ xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=18 \\ 2y^2=8 \\ xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y^2=4 \\ xy<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ou } x=-3 \\ y=2 \text{ ou } y=-2 \\ xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow (\delta = 3-2i \quad \text{ou} \quad \delta = -3+2i).$

Conclusion :

Les racines carrées de $5-12i$ sont $3-2i$ et $-3+2i$.

b). Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $(z+2i)(z^2-(1+4i)z-5+5i)=0$:

$(z+2i)(z^2-(1+4i)z-5+5i)=0$ si et seulement si

$(z+2i)=0$ ou $(z^2-(1+4i)z-5+5i)=0$.

* $(z+2i)=0 \Leftrightarrow z=-2i$.

* **Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-(1+4i)z-5+5i=0$:**

Discriminant Δ :

$\Delta = (1+4i)^2 - 4(1)(-5+5i)$

$\Delta = 1+8i-16+20-20i$

$\Delta = 5-12i$.

D'après la question 1).a)., les racines carrées de Δ sont :

$3-2i$ et $-3+2i$.

Solutions de l'équation $z^2 - (1+4i)z - 5 + 5i = 0$:

En utilisant une seule racine carrée de Δ,

$$z_1 = \frac{(1+4i)+3-2i}{2(1)} = \frac{4+2i}{2} = 2+i \quad \text{et}$$

$$z_2 = \frac{(1+4i)-3+2i}{2(1)} = \frac{-2+6i}{2} = -1+3i.$$

Conclusion :

L'ensemble de solutions de l'équation

$(z+2i)(z^2-(1+4i)z-5+5i) = 0$ est :

$S_{\mathbb{C}} = \{-2i\,;\ 2+i\ ;\ -1+3i\ \}$.

2). $S(B) = B$ et $S(A) = C$.

$A(2i)$, $B(2-i)$ et $C(-1-3i)$.

a). Trouvons la relation liant l'affixe z du point M et l'affixe z' de son image M' par S :

Soit f l'application complexe associée à S définie par

$f(z) = z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

• Déterminons les complexes a et b :

D'après l'énoncé, $S(B) = B$ et $S(A) = C$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\begin{cases} S(B) = B \\ S(A) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(z_B) = z_B \\ f(z_A) = z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_B + b = z_B \\ az_A + b = z_C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = z_B(1-a) \\ a(z_B - z_A) = (z_B - z_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_B(1-a) \\ a = \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = z_B(1-a) \\ a = \frac{(2-i)-(-1-3i)}{(2-i)-(2i)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_B(1-a) \\ a = \frac{3+2i}{2-3i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_B(1-a) \\ a = \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = z_B(1-a) \\ a = \frac{6+9i+4i-6}{2^2+(-3)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_B(1-a) \\ a = \frac{13i}{13} = i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = (2-i)(1-i) \\ a = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1-3i \\ a = i \end{cases}.$$

Conclusion : $z' = i\,z + 1 - 3i$.

b). Déterminons les éléments caractéristiques de S :

$z' = iz + 1 - 3i.$

• Rapport (soit k) de S :

$k = |i| = 1.$ D'où S est une **rotation.**

* Angle (soit θ) de S :

$\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi].$

• Centre de S :

B est le centre de S car $S(B) = B.$

Conclusion :

S est une rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}[2\pi].$

<u>EXERCICE 2</u>

On considère la suite numérique définie par son premier terme $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathrm{IN},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3}.$

1). Calculons u_1 et u_2 :

• $\forall\, n \in \mathrm{IN},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3} \Longrightarrow u_1 = \frac{u_0}{u_0 + 3} = \frac{1}{1 + 3} = \frac{1}{4}.$

$u_1 = \frac{1}{4}.$

• $\forall\, n \in \mathrm{IN},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3} \Longrightarrow u_2 = \frac{u_1}{u_1 + 3} = \frac{1/4}{1/4 + 3} = \frac{1/4}{13/4} = \frac{1}{13}.$

$u_2 = \frac{1}{13}.$

2). (v_n) : $\forall\, n \in \mathrm{IN},\ v_n = \ell n\left(\frac{u_n}{u_n + 2}\right).$

a). Montrons que (v_n) est une suite arithmétique et précisons son premier terme et sa raison :

$\forall\, n \in \mathrm{IN},\ v_n = \ell n\left(\frac{u_n}{u_n + 2}\right) \Leftrightarrow v_{n+1} = \ell n\left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+1} + 2}\right).$

Or $\forall\, n \in \mathrm{IN},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3}.$

Ce qui permet d'avoir :

$$\forall\, n \in \mathrm{IN},\ v_{n+1} = \ell n\left(\frac{\frac{u_n}{u_n + 3}}{\frac{u_n}{u_n + 3} + 2}\right)$$

$$v_{n+1} = \ell n\left(\frac{\frac{u_n}{u_n+3}}{\frac{u_n+2u_n+6}{u_n+3}}\right) = \ell n\left(\frac{u_n}{u_n+2u_n+6}\right) = \ell n\left(\frac{u_n}{3u_n+6}\right)$$

$$v_{n+1} = \ell n\left[\frac{1}{3}\left(\frac{u_n}{u_n+2}\right)\right] = \ell n\left(\frac{1}{3}\right) + \ell n\left(\frac{u_n}{u_n+2}\right)$$

$v_{n+1} = -\ell n(3) + \ell n\left(\frac{u_n}{u_n+2}\right)$. Or $\forall\, n \in \mathrm{IN},\ v_n = \ell n\left(\frac{u_n}{u_n+2}\right)$.

Par conséquent, $v_{n+1} = v_n - \ell n(3)$.

Conclusion :

(v_n) est une suite arithmétique de 1er terme

$v_0 = \ell n\left(\frac{u_0}{u_0+2}\right) = \ell n\left(\frac{1}{3}\right) = -\ell n(3)$ et de raison $r = -\ell n(3)$.

b). Exprimons v_n, puis u_n en fonction de n :

∗ Expression de v_n en fonction de n :

(v_n) étant une suite arithmétique de 1er terme

$v_0 = -\ell n(3)$ et de raison $r = -\ell n(3)$, ce qui permet d'avoir :

$v_n = v_0 + (n-0)r$

$v_n = -\ell n(3) - n.\ell n(3)$

$v_n = -(n+1)\ell n(3)\ \ \forall\, n \in \mathrm{IN}$.

∗ Expression de u_n en fonction de n :

$\forall\, n \in \mathrm{IN},\ v_n = \ell n\left(\frac{u_n}{u_n+2}\right) \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_n+2} = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = u_n e^{v_n} + 2e^{v_n}$

$\Leftrightarrow u_n - u_n e^{v_n} = 2e^{v_n} \Leftrightarrow u_n(1 - e^{v_n}) = 2e^{v_n}$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{2e^{v_n}}{1-e^{v_n}}$. Or $v_n = -(n+1)\ell n(3)\ \ \forall\, n \in \mathrm{IN}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$u_n = \frac{2e^{v_n}}{1-e^{v_n}} = \frac{2e^{-(n+1)\ell n(3)}}{1-e^{-(n+1)\ell n(3)}} = \frac{2e^{\ell n(3^{-n-1})}}{1-e^{\ell n(3^{-n-1})}} = \frac{2(3^{-n-1})}{1-3^{-n-1}}$$

$$u_n = \frac{2(3^{-n-1})(3^{n+1})}{(1-3^{-n-1})(3^{n+1})} = \frac{2(3^0)}{(3^{n+1}-3^0)} = \frac{2}{(3^{n+1}-1)}.$$

Conclusion :

$$\forall\, n \in \mathrm{IN}, \begin{cases} v_n = -(n+1)\ell n(3) \\ u_n = \frac{2}{3^{n+1}-1} \end{cases}.$$

PROBLÈME

A). $y'' - 2y' + y = -x + 3.$ (1)

1). Vérifions que la fonction g définie sur IR par $g(x) = -x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (1) :

g est deux fois dérivable sur IR et $\forall x \in$ IR :

$g'(x) = -1$ et $g''(x) = 0.$

Ce qui permet d'avoir $\forall x \in$ IR :

$g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0 - 2(-1) - x + 1$

$g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 2 - x + 1$

$g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -x + 3.$

Ce que signifie que la fonction g définie sur IR par $g(x) = -x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2).a). Démontrons qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ (2) :

$*$ Supposons que **h est solution de (1), démontrons alors que $(h - g)$ est solution de (2) :**

h est solution de (1) signifie que $\forall x \in$ IR :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = -x + 3.$

Or $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -x + 3.$

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x)$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) - g''(x) + 2g'(x) - g(x) = 0$

$\big(h''(x) - g''(x)\big) - 2\big(h'(x) - g'(x)\big) + \big(h(x) - g(x)\big) = 0$

$(h - g)''(x) - 2(h - g)'(x) + (h - g)(x) = 0.$

Ce qui signifie que $(h - g)$ est solution de (2).

$*$ Supposons que **$h - g$ est solution de (2), démontrons alors que h est solution de (1) :**

$(h - g)$ est solution de (2) signifie que $\forall x \in$ IR :

$(h - g)''(x) - 2(h - g)'(x) + (h - g)(x) = 0$

$(h''(x) - g''(x)) - 2(h'(x) - g'(x)) + (h(x) - g(x)) = 0$
$h''(x) - 2h'(x) + h(x) - g''(x) + 2g'(x) - g(x) = 0$
$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x).$
Or $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -x + 3.$
Ce qui permet d'avoir :
$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = -x + 3.$
Ce qui signifie que h est solution de (1).

Conclusion :

Une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $(h - g)$ est solution de l'équation différentielle (2).

b). Résolvons l'équation différentielle (2) :

$y'' - 2y' + y = 0.$ (2).
L'équation caractéristique de (2) est $r^2 - 2r + 1 = 0.$
$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1.$
Les solutions de (2) sont les fonctions u définies sur IR par
$\boldsymbol{u(x) = (Ax + B)e^x}$ avec A et B des constantes réelles.

Ensemble de solutions de (2) :

$S_G = \{ u : x \longmapsto (Ax + B)e^x ; (A ; B) \in \mathrm{IR}^2 \}.$

c). Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) :

$(h - g)$ est solution de (2) signifie que $\forall x \in \mathrm{IR}$:
$(h - g)(x) = u(x) = (Ax + B)e^x$
$h(x) - g(x) = (Ax + B)e^x$
$h(x) = (Ax + B)e^x + g(x)$
$h(x) = (Ax + B)e^x - x + 1.$

Conclusion :

L'ensemble de solutions de (1) est
$S_G = \{ h : x \longmapsto (Ax + B)e^x - x + 1 ; (A ; B) \in \mathrm{IR}^2 \}.$

d). Trouvons la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0) = 0$ et $h'(0) = -1$:

$h(x) = (Ax + B)e^x - x + 1$ pour tout réel x.

$\forall\, x \in$ IR,

$h'(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x - 1$

$h'(x) = (Ax + A + B)e^x - 1.$

Ainsi :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A(0) + B)e^0 - 0 + 1 = 0 \\ (A(0) + A + B)e^0 - 1 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B + 1 = 0 \\ A + B - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}.$$

Ce qui permet d'avoir $\forall\, x \in$ IR :

$h(x) = (Ax + B)e^x - x + 1$

$h(x) = (x - 1)e^x - x + 1$

$h(x) = (x - 1)e^x - (x - 1)$

$h(x) = (x - 1)(e^x - 1).$

Conclusion :

La solution de l'équation (1) vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = -1$ est la fonction h définie sur IR par $h(x) = (x - 1)(e^x - 1)$.

B). $u(x) = xe^x - 1$ et $D_u =$ IR $=]-\infty\,;+\infty[$.

1). Etudions les variations de u et dressons son tableau de variation :

$*$ Limites de u en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} (xe^x - 1) = -1 \text{ car } \lim_{x \to -\infty} (xe^x) = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} (xe^x - 1) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (-1) = -1 \end{cases}.$$

u est dérivable sur IR et $\forall\, x \in$ IR, $u'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$.

$\forall\, x \in$ IR, $e^x > 0$, donc $u'(x)$ est du signe de $(x + 1)$ $\forall\, x \in$ IR.

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

On en déduit le sens de variation de u sur IR :

$\forall\, x \in \left]-\infty\,;-1\right]$, $x+1 \leq 0$, d'où $u'(x) \leq 0$.

Par conséquent, u est décroissante sur $\left]-\infty\,;-1\right]$.

$\forall\, x \in \left]-1\,;+\infty\right[$, $x+1 > 0$, d'où $u'(x) > 0$.

Par conséquent, u est strictement croissante sur $\left]-1\,;+\infty\right[$.

De plus, $u(-1) = (-1)e^{(-1)} - 1 = -1 - \frac{1}{e} = -\left(1+\frac{1}{e}\right)$.

Tableau de variations de u sur IR :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0			$+$	
u	-1	↘	$-\left(1+\frac{1}{e}\right)$	↗	0	↗	$+\infty$

2).a). Montrons que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α :

D'après le tableau de variation de u :

* Si $x \in \left]-\infty\,;-1\right[$, l'équation $u(x) = 0$ n'admet pas de solution car $u(x) < 0 \;\; \forall\, x \in \left]-\infty\,;-1\right[$.
* u est continue et strictement croissante sur $\left]-1\,;+\infty\right[$.

De plus, $0 \in \left]u(-1)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\right[$, c'est-à-dire que 0 appartient à l'intervalle $\left]-\left(1+\frac{1}{e}\right);+\infty\right[$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution (soit α).

b). Vérifions que $0,5 < \alpha < 0,6$:

$\begin{cases} u(0,5) = 0,5e^{0,5} - 1 = -0,17 \\ u(0,6) = 0,6e^{0,6} - 1 = 0,09 \end{cases}$, donc $\begin{cases} u(0,5) < 0 \\ u(0,6) > 0 \end{cases}$,

d'où $u(0,5) \times u(0,6) < 0$.

Par conséquent, $0,5 < \alpha < 0,6$.

c). Déduisons-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x :

En plaçant α dans le tableau de variation de u on retrouve facilement le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x :

* Si $x \in]-\infty\,;\alpha]$, $u(x) \leq 0$.
* Si $x \in]\alpha\,;+\infty[$, $u(x) > 0$.

Présentons cette étude de signe dans un tableau :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$u(x)$	$-$		$+$

C). $f(x) = (x-1)(e^x - 1)$ et $D_f = \mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$.

1).a). Calculons la dérivée f' de f et vérifions que, pour tout réel x, $f'(x) = u(x)$:

f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$x \longmapsto x - 1$ et $x \longmapsto e^x - 1$. D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ on aura :

$f'(x) = 1(e^x - 1) + e^x(x-1)$

$f'(x) = e^x - 1 + xe^x - e^x$

$f'(x) = xe^x - 1$.

Or $u(x) = xe^x - 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, $f'(x) = u(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b). Dressons le tableau de variation de f :

* Limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)(e^x - 1) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 1) = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)(e^x - 1) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 1) = +\infty \end{cases}$$

$f'(x) = u(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}$, donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$.

Ce qui permet d'avoir :

* $\forall x \in]-\infty\,;\alpha\,]$, $u(x) \leq 0$, donc $f'(x) \leq 0$.

D'où f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\alpha\,]$.

* $\forall x \in]\alpha\,;+\infty\,[$, $u(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$.

D'où f est strictement croissante sur l'intervalle $]\,\alpha\,;+\infty\,[$.

De plus, $f'(\alpha) = u(\alpha) = 0$.

*** Calcul de $f(\alpha)$:**

On sait que $u(\alpha) = 0$.

$u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$.

Or $f(\alpha) = (\alpha - 1)(e^{\alpha} - 1)$.

Ce qui permet d'avoir :

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = (\alpha - 1)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}.$$

$$f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}.$$

Conclusion :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$	$\nearrow$ $+\infty$

2).a). Montrons que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \to -\infty} [(x-1)(e^x - 1) - (-x+1)]$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \to -\infty} [xe^x - x - e^x + 1 + x - 1]$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \to -\infty} [xe^x - e^x] = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}.$$

Par conséquent, la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b). Précisons les positions relatives de (C) et $(\boldsymbol{D})$:

$\forall\, x \in$ IR, $\quad f(x) - (-x+1) = xe^x - e^x = (x-1)e^x$.

$\forall\, x \in$ IR, $e^x > 0$, donc $f(x) - (-x+1)$ est du signe de $(x-1)$.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ce qui permet d'avoir :

$*$ $\forall\, x \in\,]-\infty\,; 1\,[$, $\;(x-1) < 0$. D'où $\; f(x) - (-x+1) < 0$.

Par conséquent (C) est en dessous de (D).

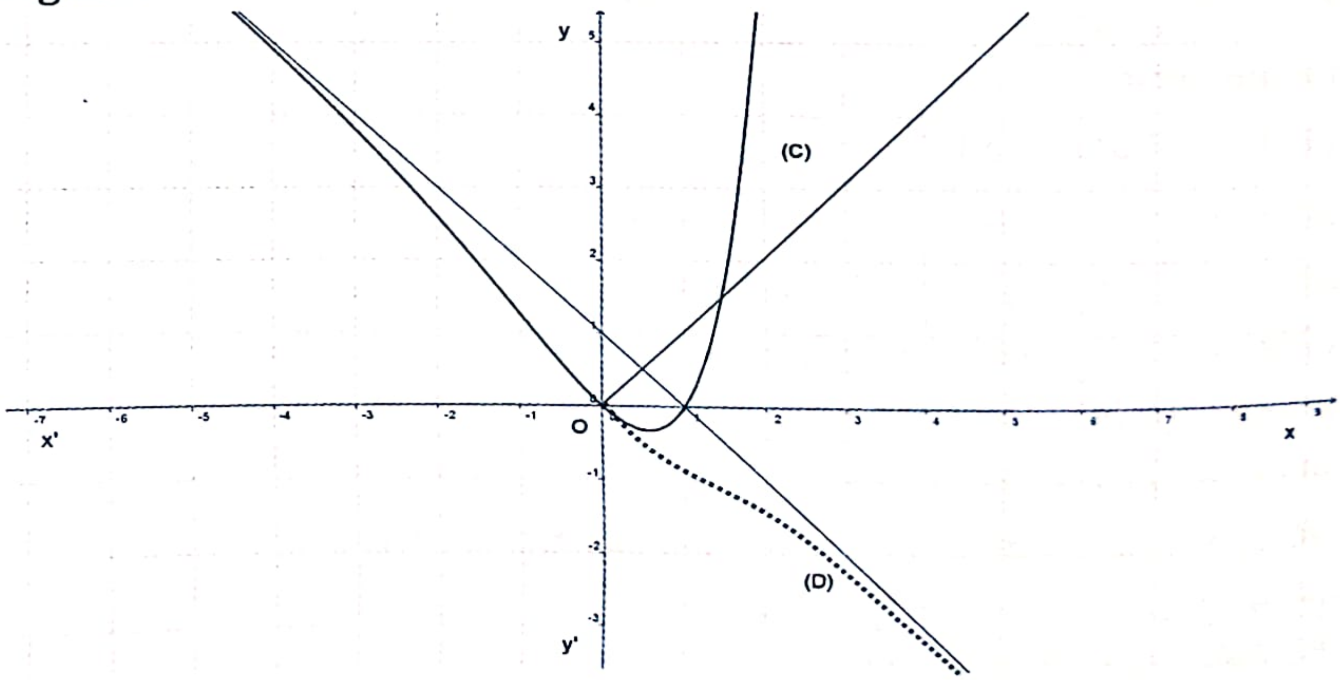
$*$ $\forall\, x \in\,]\,1\,; +\infty\,[$, $\;(x-1) > 0$. D'où $\; f(x) - (-x+1) > 0$.

Par conséquent (C) est au dessus de (D).

$*$ (C) et (D) se croisent au point d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $y = f(1) = 0$. Soit le point de coordonnées $(1\,; 0)$.

3). Traçons la droite $(\boldsymbol{D})$ et la courbe (C) dans le repère$\left(\boldsymbol{O}\,;\,\vec{\boldsymbol{i}}\,;\,\vec{\boldsymbol{j}}\right)$ en prenant $\boldsymbol{\alpha = 0{,}55}$:

Figure :



4). Soit λ un réel strictement négatif.

a). Calculons l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan compris entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$:

Si $x \in [\lambda\,; 0]$, $f(x) \geq 0$.

De plus, (C) est en dessous de la droite (D).

Ainsi, on aura :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^0 [\,(-x+1) - f(x)]dx \times (\text{unité d'aire})$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^0 [\,(-x+1) - (x-1)(e^x - 1)\,]dx \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^0 [\,-x + 1 - xe^x + x + e^x - 1\,]dx \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^0 [\,e^x - xe^x\,]dx \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^0 [\,(1-x)e^x\,]dx \times ua.$$

Intégration par parties :

En posant $\begin{cases} u(x) = (1-x) \\ v'(x) = e^x \end{cases}$, on trouve $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left([\,u(x)v(x)\,]_\lambda^0 - \int_\lambda^0 u'(x).v(x)\,dx\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left([\,(1-x)e^x]_\lambda^0 - (-e^x)dx\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left([\,(1-x)e^x + e^x\,]_\lambda^0\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left([\,e^x - xe^x + e^x\,]_\lambda^0\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left([\,2e^x - xe^x\,]_\lambda^0\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left([\,(2-x)e^x\,]_\lambda^0\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left[\,(2-0)e^0 - (2-\lambda)e^\lambda\,\right] \times (2cm \times 2cm)$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(2 - 2e^\lambda - \lambda e^\lambda\right) \times 4cm^2.$$

b). Calculons $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left[\,\left(2 - 2e^\lambda - \lambda e^\lambda\right) \times 4cm^2\,\right] = 2 \times 4cm^2 = 8cm^2$$

car $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^\lambda = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \lambda e^\lambda = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 8cm^2$.

5).a). Montrons que la restriction de f à $]-\infty\,;0]$ est une bij ection de $]-\infty\,;0]$ sur un intervalle J que l'on précisera :

La fonction f est continue et strictement monotone (décroissante) sur l'intervalle $]-\infty\,;0\,]$.

D'où f est une bijection de $]-\infty\,;0\,]$ sur $J=\left[\,f(0)\,;\,\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$ ou $J=[\,0\,;\,+\infty\,[$.

Par conséquent, la restriction de f à $]-\infty\,;0\,]$ est une bij ection de $]-\infty\,;0\,]$ sur $J=[\,0\,;\,+\infty\,[$.

b). Traçons la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C) :

La courbe de la fonction réciproque est tracée en **pointillés.**

Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première **bissectrice** du repère (la droite d'équation $y=x$). (Voir figure)

$*$ La droite d'équation $y=-x+1$ est asymptote à (C) donc la droite d'équation $x=-y+1$ ou $y=1-x$ est asymptote oblique à la courbe de la fonction réciproque.

CORRIGÉ DU BAC 2014

EXERCICE 1

$P(z) = z^3 + (-7 + 2i)z^2 + (15 - 4i)z - 25 + 10i.$

1).a). Vérifions que $P(5 - 2i) = 0$:

$P(5 - 2i) = (5 - 2i)^3 + (-7 + 2i)(5 - 2i)^2 + (15 - 4i)(5 - 2i) - 25 + 10i$

$= (5)^3 - 3(5)^2(2i) + 3(5)(2i)^2 - (2i)^3 + (-7 + 2i)(25 - 20i - 4)$

$+75 - 30i - 20i - 8 - 25 + 10i$

$= 125 - 150i - 60 + 8i + (-7 + 2i)(21 - 20i) + 42 - 40i$

$= 125 - 150i - 60 + 8i - 147 + 140i + 42i + 40 + 42 - 40i$

$= (125 - 60 - 147 + 40 + 42) + i(-150 + 8 + 140 + 42 - 40)$

$= (207 - 207) + i(-190 + 190) = 0 + 0i = 0.$

Par conséquent, $P(5 - 2i) = 0$.

b). Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$:

$P(5 - 2i) = 0$, donc $P(z)$ peut s'écrire sous la forme de

$P(z) = \big(z - (5 - 2i)\big)(az^2 + bz + c)$ avec a, b et c des nombres complexes que l'on déterminera.

On aura ainsi :

$P(z) = \big(z - (5 - 2i)\big)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = (z - 5 + 2i)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + bz^2 + cz - 5az^2 - 5bz - 5c + 2iaz^2 + 2ibz + 2ic$

$P(z) = az^3 + (b - 5a + 2ia)z^2 + (c - 5b + 2ib)z + c(-5 + 2i).$

Or $P(z) = z^3 + (-7 + 2i)z^2 + (15 - 4i)z - 25 + 10i.$

Par identification, on peut poser :

$$\begin{cases} az^3 = z^3 \\ (b - 5a + 2ia)z^2 = (-7 + 2i)z^2 \\ c(-5 + 2i) = -25 + 10i \end{cases}.$$

Ce qui permet d'avoir :

$\begin{cases} a = 1 \\ b - 5 + 2i = -7 + 2i \\ c(-5 + 2i) = 5(-5 + 2i) \end{cases}$, soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$.

D'où $P(z) = (z - 5 + 2i)(z^2 - 2z + 5)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 5 + 2i)(z^2 - 2z + 5) = 0$

$\Leftrightarrow (z - 5 + 2i) = 0$ ou $(z^2 - 2z + 5) = 0$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$:

* Discriminant Δ :

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = -16 = (4i)^2$.

* Racines carrées de Δ :

Les racines carrées de Δ sont $-4i$ et $4i$.

* Solutions de l'équation :

En utilisant une seule racine carrée de Δ :

$z_1 = \frac{2 - 4i}{2(1)} = 1 - 2i$ et $z_2 = \frac{2 + 4i}{2(1)} = 1 + 2i$.

Conclusion :

L'équation $P(z) = 0$ admet pour ensemble de solutions :

$S_{\mathbb{C}} = \{ 5 - 2i \ ; \ 1 - 2i \ ; \ 1 + 2i \}$.

2). $z_I = -3 - 2i$; $z_A = 1 + 2i$; $z_B = 5 - 2i$.

a). Déterminons f, l'application complexe associée à S :

Posons $f(z) = z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

• Déterminons les complexes a et b :

La similitude S est de centre I, donc $z_I = \frac{b}{1-a}$ et $b = z_I(1 - a)$.

S transforme A en B, donc $z_B = az_A + b$.

$\begin{cases} b = z_I(1 - a) \\ z_B = az_A + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_I(1 - a) \\ z_B = az_A + z_I(1 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_I(1 - a) \\ z_B - z_I = a(z_A - z_I) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = z_I(1 - a) \\ a = \frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5-2i+3+2i}{1+2i+3+2i} \\ b = z_I(1 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{4 + 4i} = \frac{2}{1 + i} = \frac{2(1 - i)}{1^2+1^2} \\ b = z_I(1 - a) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - i \\ b = (-3 - 2i)(1 - 1 + i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - i \\ b = 2 - 3i \end{cases}$.

Conclusion :

f est l'application d'écriture complexe $z' = (1-i)z + 2 - 3i$.

b). Déterminons les éléments caractéristiques de S :

* Rapport (soit k) de S :

$k = |a| = |(1-i)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

* Angle (soit θ) de S :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(a)}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{, soit } \theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi].$$

Conclusion :

S est une similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$,
de centre le point I d'affixe $-3-2i$, et d'angle $-\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

EXERCICE 2

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n{}^2 + 2u_n \end{cases} \quad \forall\, n \in \mathrm{IN}.$$

(v_n) : $v_n = \ell n(u_n + 1)$.

1). Montrons que (v_n) est une suite géométrique, précisons la raison et le premier terme :

$\forall\, n \in \mathrm{IN}$ $v_n = \ell n(u_n + 1) \Leftrightarrow v_{n+1} = \ell n(u_{n+1} + 1)$.

Or $u_{n+1} = u_n{}^2 + 2u_n$.

Ce qui permet d'avoir :

$v_{n+1} = \ell n(u_{n+1} + 1) = \ell n(u_n{}^2 + 2u_n + 1) = \ell n[(u_n + 1)^2]$

$v_{n+1} = 2\ell n(u_n + 1) = 2\, v_n$ car $v_n = \ell n(u_n + 1)$.

$v_{n+1} = 2\, v_n$ d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$
et de 1er terme $v_0 = \ell n(u_0 + 1) = \ell n(4 + 1) = \ell n(5)$.

Conclusion :

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1er terme
$v_0 = \ell n(5)$.

2). Exprimons v_n, puis u_n en fonction de n :

* **Expression de v_n en fonction de n :**

(v_n) étant une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1er terme $v_0 = \ell n(5)$, ce qui permet d'avoir :

$v_n = v_0 . q^n = \ell n(5) \times 2^n$

$v_n = 2^n \ell n(5) \quad \forall\, n \in \mathrm{IN}.$

* **Expression de u_n en fonction de n :**

$\forall\, n \in \mathrm{IN} \quad v_n = \ell n(u_n + 1) \Leftrightarrow u_n + 1 = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = e^{v_n} - 1.$

Ce qui permet d'avoir :

$u_n = e^{2^n \ell n(5)} - 1 = e^{\ell n\left(5^{2^n}\right)} - 1 = 5^{2^n} - 1$

$u_n = 5^{2^n} - 1 \quad \forall\, n \in \mathrm{IN}.$

3). Calculons la somme S_n en fonction de n :

S_n est la somme des $(n+1)$ termes d'une suite géométrique, ce qui permet d'avoir :

$\forall\, n \in \mathrm{IN},$

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \ell n(5) \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = -\left(1 - 2^{n+1}\right) \ell n(5).$

$S_n = \left(2^{n+1} - 1\right) \ell n(5).$

Conclusion :

$\forall\, n \in \mathrm{IN}, \qquad S_n = \left(2^{n+1} - 1\right) \ell n(5).$

PROBLÈME

A). $\qquad y'' - y' = e^x. \quad (1)$

1). Vérifions que la fonction g définie sur IR par $g(x) = xe^x$ est une solution de l'équation différentielle (1) :

g est deux fois dérivable sur IR et $\forall\, x \in \mathrm{IR}$:

$g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

et $g''(x) = e^x + e^x(x+1) = (x+2)e^x.$

Donc $\forall\, x \in \mathrm{IR},\ g'(x) = (x+1)e^x$ et $g''(x) = (x+2)e^x.$

Ce qui permet d'avoir $\forall x \in IR$:

$g''(x) - g'(x) = (x+2)e^x - (x+1)e^x$

$g''(x) - g'(x) = (x+2-x-1)e^x$

$g''(x) - g'(x) = e^x$.

Ce que signifie que la fonction g définie sur IR par $g(x) = xe^x$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2).a). Démontrons qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ (2) :

∗ Supposons que h est solution de (1), démontrons alors que $(h-g)$ est solution de (2) :

h est solution de (1) signifie que $\forall x \in IR$:

$h''(x) - h'(x) = e^x$.

Or $g''(x) - g'(x) = e^x$.

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) - h'(x) = g''(x) - g'(x)$

$h''(x) - h'(x) - g''(x) + g'(x) = 0$

$\left(h''(x) - g''(x)\right) - \left(h'(x) - g'(x)\right) = 0$

$(h-g)''(x) - (h-g)'(x) = 0$.

Ce qui signifie que $(h-g)$ est solution de (2).

∗ Supposons que $h - g$ est solution de (2), démontrons alors que h est solution de (1) :

$(h-g)$ est solution de (2) signifie que $\forall x \in IR$:

$(h-g)''(x) - (h-g)'(x) = 0$

$\left(h''(x) - g''(x)\right) - \left(h'(x) - g'(x)\right) = 0$

$h''(x) - h'(x) - g''(x) + g'(x) = 0$

$h''(x) - h'(x) = g''(x) - g'(x)$.

Or $g''(x) - g'(x) = e^x$.

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) - h'(x) = e^x$.

Ce qui signifie que h est solution de (1).

Conclusion :

Une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $(h - g)$ est solution de l'équation différentielle (2).

b). Résolvons l'équation différentielle (2) :

$y'' - y' = 0$. (2).

L'équation caractéristique de (2) est $r^2 - r = 0$.

$r^2 - r = 0 \Leftrightarrow r(r-1) = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 1$.

Les solutions de (2) sont les fonctions u définies sur IR par

$\boldsymbol{u(x) = Ae^{0x} + Be^{1x} = A + Be^x}$

avec A et B des constantes réelles.

Ensemble de solutions de (2) :

$S_G = \{ u : x \longmapsto A + Be^x ; (A ; B) \in \mathrm{IR}^2 \}$.

c). Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) :

$(h - g)$ est solution de (2) signifie que $\forall x \in \mathrm{IR}$:

$(h - g)(x) = u(x) = A + Be^x$

$h(x) - g(x) = A + Be^x$

$h(x) = A + Be^x + g(x)$

$h(x) = A + Be^x \; xe^x$.

Conclusion :

L'ensemble de solutions de (1) est

$S_G = \{ h : x \longmapsto A + Be^x + xe^x ; (A ; B) \in \mathrm{IR}^2 \}$.

d). Trouvons la solution de (1) vérifiant les conditions $\boldsymbol{h(0) = -4}$ et $\boldsymbol{h'(0) = 1}$:

$h(x) = A + Be^x + xe^x$ pour tout réel x.

$\forall x \in$ IR,

$h'(x) = Be^x + e^x + xe^x$

$h'(x) = (B + x + 1)e^x$.

Ainsi :

$$\begin{cases} h(0) = -4 \\ h'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + Be^0 + 0e^0 = -4 \\ (B + 0 + 1)e^0 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -4 \\ B + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -4 \end{cases}.$$

Ce qui permet d'avoir $\forall x \in$ IR :

$h(x) = A + Be^x + xe^x$

$h(x) = xe^x - 4$.

Conclusion :

La solution de l'équation (1) vérifiant $h(0) = -4$ et $h'(0) = 1$ est la fonction h définie sur IR par $h(x) = xe^x - 4$.

B). On considère la fonction numérique u définie sur IR par :

$u(x) = xe^x - 4$.

1). Etudions les variations de u et dressons son tableau de variation :

$*$ Limites de u en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - 4) = -4 \text{ car } \lim_{x\to-\infty}(xe^x) = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^x - 4) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}(-4) = -4 \end{cases}.$$

u est dérivable sur IR et $\forall x \in$ IR, $u'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.

$\forall x \in$ IR, $e^x > 0$, d'où $u'(x)$ est du signe de $(x+1)$ $\forall x \in$ IR.

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.On en déduit le sens de variation de u sur IR :

• $\forall x \in]-\infty\,;-1]$, $x + 1 \leq 0$, d'où $u'(x) \leq 0$.

Par conséquent, u est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$;

$\forall x \in]-1\,;+\infty[$, $x + 1 > 0$, d'où $u'(x) > 0$.

Par conséquent, u est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

De plus, $u(-1) = (-1)e^{(-1)} - 4 = -4 - \frac{1}{e} = -\left(4 + \frac{1}{e}\right)$.

Tableau de variations de u sur IR :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
u	-1	$\searrow$	$-\left(4+\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2).a). Montrons que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α :

D'après le tableau de variation de u :

$*$ Si $x \in]-\infty ; -1[$, l'équation $u(x) = 0$ n'admet pas de solution car $u(x) < 0 \;\; \forall x \in]-\infty ; -1[$.

$*$ u est continue et strictement croissante sur $]-1 ; +\infty[$.

De plus, $0 \in \left] u(-1) ; \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) \right[$, c'est-à-dire que 0 appartient à l'intervalle $\left] -\left(4+\frac{1}{e}\right) ; +\infty \right[$.

Donc d'après le **théorème des valeurs intermédiaires,** l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution (soit α).

b). Vérifions que $1,2 < \alpha < 1,3$:

$\begin{cases} u(1,2) = 1,2e^{1,2} - 4 = -0,01 \\ u(1,3) = 1,3e^{1,3} - 4 = 0,77 \end{cases}$, donc $\begin{cases} u(1,2) < 0 \\ u(1,3) > 0 \end{cases}$,

d'où $u(1,2) \times u(1,3) < 0$.

Par conséquent, $1,2 < \alpha < 1,3$.

c). Déduisons-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x :

En plaçant α dans le tableau de variation de u on retrouve facilement le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x :

$*$ Si $x \in]-\infty ; \alpha]$, $u(x) \leq 0$.

$*$ Si $x \in]\alpha ; +\infty[$, $u(x) > 0$.

Présentons cette étude de signe dans un tableau :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$u(x)$	$-$		$+$

C).

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = e^x - 4\ell n(x)$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1).a). Calculons la dérivée f' de f et vérifions que, pour tout réel x non nul $f'(x) = \frac{u(x)}{x}$:

f est la différence de deux fonctions dérivables sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$:
$x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto -4\ell n(x)$. D'où f est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
Ainsi, $\forall\, x \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$ on aura :
$f'(x) = e^x - \frac{4}{x} = \frac{xe^x - 4}{x}$. Or $u(x) = xe^x - 4$.
Par conséquent, $f'(x) = \frac{u(x)}{x}$ $\forall\, x \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$.

b). Dressons le tableau de variation de f:

∗ Limites de f en 0^+ et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x - 4\ell n(x)\right) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-4\ell n(x)\right) = +\infty \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x - 4\ell n(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left[1 - 4\frac{\ell n(x)}{e^x}\right] = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ell n(x)}{e^x}\right) = 0 \end{cases}.$$

$f'(x) = \frac{u(x)}{x}$ $\forall\, x \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$, donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$.
Ce qui permet d'avoir :
∗ $\forall\, x \in\,]\,0\,;\,\alpha\,]$, $u(x) \leq 0$, donc $f'(x) \leq 0$.
D'où f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\alpha\,]$.

$*$ $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $u(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$.

D'où f est strictement croissante sur l'intervalle $]\alpha ; +\infty[$.

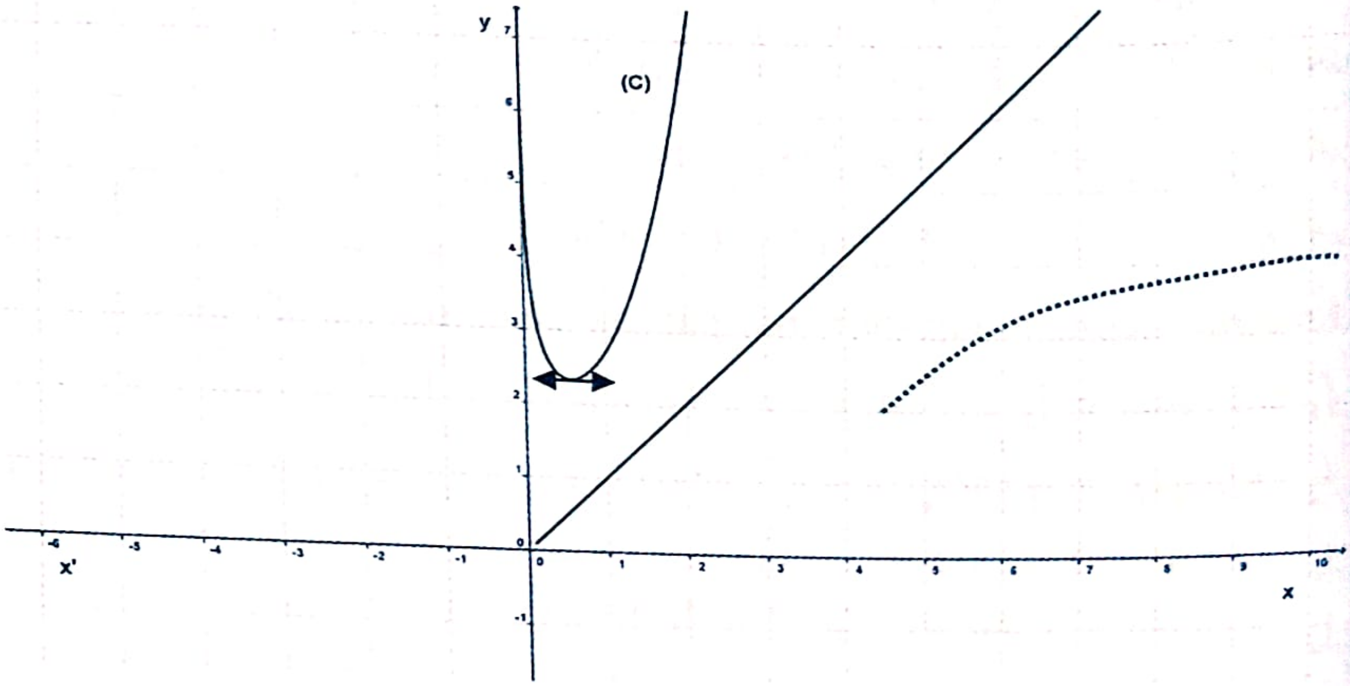
De plus, $f'(\alpha) = \frac{u(\alpha)}{\alpha} = \frac{0}{\alpha} = 0$.

Conclusion :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

2). Traçons la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ en prenant $\alpha = 1,25$:

Figure :



Justification du tracé de la courbe :

* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à $(\mathscr{C})$.

* $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x}{x} - 4\frac{\ell n(x)}{x}\right) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ell n(x)}{x}\right) = 0 \end{cases}$.

D'où $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées du repère.

3). Soit $\boldsymbol{\lambda}$ un réel tel que $\mathbf{0} < \lambda < 1$.

a). Calculons l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $\boldsymbol{x = \lambda}$ et $\boldsymbol{x = 1}$:

Si $x \in [\lambda ; 1]$, $f(x) > 0$

($(\mathscr{C})$ est au dessus de l'axe des abscisses).

Ce qui permet d'avoir :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\int_\lambda^1 f(x)dx\right) \times (unité\ d'aire)$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\int_\lambda^1 (e^x - 4\ell n(x))dx\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\int_\lambda^1 e^x dx - 4\int_\lambda^1 \ell n(x)dx\right) \times ua.$$

En utilisant une intégration par parties calculons $\int_\lambda^1 \ell n(x)dx$:

$$\int_\lambda^1 \ell n(x)dx = \int_\lambda^1 1 \times \ell n(x)dx = [x\ell n(x)]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 x \times \frac{1}{x}dx$$

$$\int_\lambda^1 \ell n(x)dx = [x\ell n(x)]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 1 \times dx$$

$$\int_\lambda^1 \ell n(x)dx = [x\ell n(x)]_\lambda^1 - [x]_\lambda^1$$

$$\int_\lambda^1 \ell n(x)dx = [x\ell n(x) - x]_\lambda^1$$

$$\int_\lambda^1 \ell n(x)dx = (1\ell n(1) - 1) - (\lambda\ell n(\lambda) - \lambda)$$

$$\int_\lambda^1 \ell n(x)dx = \lambda - \lambda\ell n(\lambda) - 1.$$

Calculons alors $\mathcal{A}(\lambda)$:

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\int_{\lambda}^{1} e^x dx \; - 4\int_{\lambda}^{1} \ell n(x)dx\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left([e^x]_{\lambda}^{1} - 4(\lambda - \lambda\ell n(\lambda) - 1)\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left((e^1 - e^{\lambda}) - 4(\lambda - \lambda\ell n(\lambda) - 1)\right) \times ua$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(e - e^{\lambda} - 4\lambda + 4\lambda\ell n(\lambda) + 4\right) \times (1cm \times 1cm)$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(4 + e - 4\lambda + 4\lambda\ell n(\lambda) - e^{\lambda}\right) \times 1cm^2.$$

Conclusion :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(4 + e - 4\lambda + 4\lambda\ell n(\lambda) - e^{\lambda}\right)cm^2.$$

b). Calculons la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(4 + e - 4\lambda + 4\lambda\ell n(\lambda) - e^{\lambda}\right)cm^2.$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0}\left(4 + e - 4\lambda + 4\lambda\ell n(\lambda) - e^{\lambda}\right)cm^2.$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to 0} (4 + e - 4\lambda) = 4 + e \\ \lim\limits_{\lambda \to 0} \left(\lambda\ell n(\lambda)\right) = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to 0} e^{\lambda} = e^0 = 1 \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} (4 + e - 1)cm^2 = (3 + e)cm^2.$$

Conclusion :

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathcal{A}(\lambda) = (3 + e)cm^2.$$

4). Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\,2\,;\,+\infty\,[$.

a). Montrons que g est une bijection de l'intervalle $[\,2\,;\,+\infty\,[$ sur un intervalle J :

La fonction f est continue et strictement monotone (croissante) sur l'intervalle $[\,2\,;\,+\infty[$.

D'où f est une bijection de $[\,2\,;\,+\infty[$ sur $J = \left[f(2)\,;\, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$.

$f(2) = e^2 - 4\ell n(2)$. Donc $J = [\,e^2 - 4\ell n(2)\ ;\ +\infty\,[$.

Par conséquent, la restriction g de f à l'intervalle $[2\,;+\infty[$ est une bijection de $[2\,;+\infty[$ sur $J = [e^2 - 4\ell n(2)\,;+\infty[$.

Remarque :

$e^2 - 4\ell n(2) \approx 4{,}16$. Donc $J = [4{,}16\,;+\infty[$.

b). Traçons la courbe représentative (Γ) de la réciproque de g dans le même graphique que $(\mathscr{C})$:

La courbe (Γ) est tracée en **pointillés.**

Les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère (la droite d'équation $y = x$). (Voir figure)

* $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées du repère, donc (Γ) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses du repère.

5). Déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, où m est un paramètre réel :

Traçons la droite d'équation $y = m$ (droite horizontale) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Essayons de « glisser verticalement » cette droite et notons le nombre de points d'intersection avec la courbe $(\mathscr{C})$.

Ce nombre est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Ce qui permet de trouver :

* Si $m \in]-\infty\,; f(\alpha)[$, il n'y a aucun point d'intersection entre $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation $y = m$.

Dans ce cas l'équation $f(x) = m$ n'admet **aucune solution.**

* Si $m = f(\alpha)$, il y a un point d'intersection entre $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation $y = m$.

Dans ce cas l'équation $f(x) = m$ admet **une seule solution.**

* Si $m \in]f(\alpha)\,; +\infty[$, il y aura deux points d'intersection entre $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation $y = m$.

Dans ce cas, l'équation $f(x) = m$ admet **deux solutions.**

CORRIGÉ DU BAC 2015

EXERCICE 1

1). Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $z^4 + 4iz^2 + 12 = 0$:

Changement de variable : Posons $u = z^2$.

L'équation devient alors $u^2 + 4iu + 12 = 0 \quad (E_u)$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_u) :

* Discriminant Δ :

$\Delta = (4i)^2 - 4(1)(12) = -16 - 48 = -64 = (8i)^2$.

On en déduit que les racines carrées de Δ sont : $-8i$ et $8i$.

* Solutions de (E_u) :

En utilisant une seule racine carrée de Δ

$u_1 = \frac{-4i-8i}{2(1)} = -6i$ et $u_2 = \frac{-4i+8i}{2(1)} = 2i$.

* Solutions de l'équation $z^4 + 4iz^2 + 12 = 0$:

Rappelons que $u = z^2$.

Ce qui signifie que les solutions de l'équation $z^4 + 4iz^2 + 12 = 0$ sont les racines carrées de u.

Racines carrées de $u_1 = -6i$:

Soit un nombre complexe δ défini par $\delta = x + i\,y$ tel que $\delta^2 = u_1$.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |u_1| = |-6i| = 6 \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(u_1) = 0 \\ xy < 0 \text{ car } -6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 6 \\ 2y^2 = 6 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 3 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3} \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\delta = \sqrt{3} - i\sqrt{3} \text{ ou } \delta = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}\right).$$

Racines carrées de $u_2 = 2i$:

Soit un nombre complexe δ défini par $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = u_2$.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |u_2| = |2i| = 2 \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(u_2) = 0 \\ xy > 0 \text{ car } 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 2 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (\delta = 1 + i$ ou $\delta = -1 - i)$.

Conclusion :

L'ensemble de solutions de l'équation $z^4 + 4iz^2 + 12 = 0$

est $S_{\mathbb{C}} = \{ 1 + i \ ; -1 - i \ ; \sqrt{3} - i\sqrt{3} \ ; -\sqrt{3} + i\sqrt{3} \}$.

2). $\boldsymbol{z_A = 1 + i}$ et $\boldsymbol{z_B = \sqrt{3} - i\sqrt{3}}$; $\boldsymbol{S(O) = O}$ et $\boldsymbol{S(A) = B}$.

a). Déterminons les éléments caractéristiques de S :

Soit S d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Déterminons les complexes a et b :

D'après l'énoncé, $S(O) = O$ et $S(A) = B$.

Ce qui permet d'avoir :

$$\begin{cases} S(O) = O \\ S(A) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_O + b = z_O \\ az_A + b = z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{z_B}{z_A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1+i} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{(\sqrt{3} - i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1^2+1^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -i\sqrt{3} \end{cases}.$$

D'où S d'écriture complexe $z' = -i\sqrt{3}z$.

Conclusion :

* Rapport de S (soit k) :

$k = |a| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

* Angle de S (soit θ) :

$\theta = \arg(a) = \arg(-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

* Centre de S :

Point O (origine du repère).

c). Soit (D) la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Déterminons une équation de la droite (D') image de la droite (D) par S :

* **Equation de le droite (D) :**

$z_B = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$, donc $B(\sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{3})$.

Soit $M(x\,;y)$ un point de (D).

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{u}$ seront alors colinéaires.

Or $\overrightarrow{BM}(x-\sqrt{3}\ ;\ y+\sqrt{3})$ et $\vec{u}(1\,;\,0)$.

($\overrightarrow{BM}$ colinéaire à $\vec{u}$) $\Leftrightarrow 0(x-\sqrt{3}) - 1(y+\sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow y = -\sqrt{3}$. D'où **$(D) : y = -\sqrt{3}$.**

* Expression **analytique** de S :

$z' = -i\sqrt{3}z \Leftrightarrow x' + iy' = -i\sqrt{3}(x + i\,y)$

$\Leftrightarrow x' + iy' = y\sqrt{3} - xi\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} \end{cases}$.

Or $(D) : y = -\sqrt{3}$.

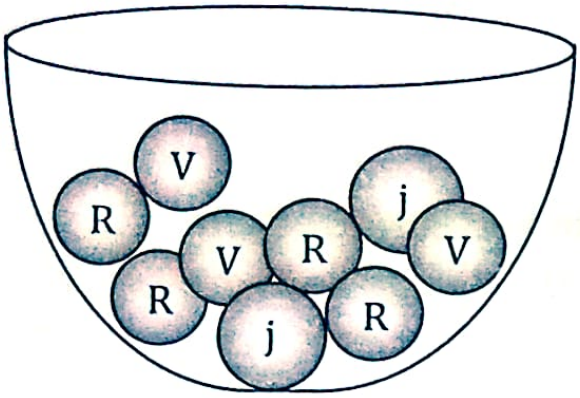
$y = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x' = y\sqrt{3} = -\sqrt{3}(\sqrt{3}) = -3$.

$x' = -3$ signifie que $(D') : x = -3$.

Conclusion :

$(D') : x = -3$.

EXERCICE 2



1).a). Déterminons la probabilité d'obtenir les trois couleurs :

On effectue un tirage simultané de trois (3) boules parmi 9.

Donc l'univers des éventualités Ω a pour cardinal :

$\mathrm{Card}(\Omega) = C_9^3 = 84$.

Désignons par $p(3C)$ la probabilité d'obtenir trois couleurs.

Ainsi, $p(3C) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_9^3} = \frac{4\times3\times2}{84} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$.

b). Déterminons la probabilité d'obtenir les deux boules jaunes :

Désignons par $p(2J)$ cette probabilité.

Ainsi, $p(2J) = \frac{C_2^2 \times C_7^1}{C_9^3} = \frac{1 \times 7}{84} = \frac{7}{84} = \frac{1}{12}$.

b). Déterminons la probabilité d'obtenir au moins une boule jaune :

Désignons par $p(1J)$ cette probabilité.

Ainsi, $p(1J) = \frac{(C_2^1 \times C_7^2) + (C_2^2 \times C_7^1)}{C_9^3} = \frac{(2 \times 21) + (1 \times 7)}{84} = \frac{49}{84}$.

2).a). Déterminons la loi de probabilité de X :

X est la variable aléatoire qui à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules jaunes tirées.

Les valeurs prises par X sont alors : 0 ; 1 ; 2.

On écrit $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$.

Déterminons les différentes probabilités associées :

$p(X = 0) = p(aucune\ boule\ jaune) = \frac{C_2^0 \times C_7^3}{C_9^3} = \frac{35}{84} = \frac{5}{12}$.

$p(X=1) = p(1\ boule\ jaune) = \frac{C_2^1 \times C_7^2}{C_9^3} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$.

$p(X=1) = p(2\ boules\ jaunes) = p(2J) = \frac{7}{84} = \frac{1}{12}$.

On vérifie que $\frac{5}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{5+6+1}{12} = \frac{12}{12} = 1$.

x_i	0	1	2	TOTAL
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{12}{12} = 1$

b). Calculons l'espérance mathématique et l'écart type de X :

∗ **Espérance mathématique de X :**

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = \left(0 \times \frac{5}{12}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2 \times \frac{1}{12}\right) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$E(X) = \frac{2}{3}$.

∗ Variance de X :

$V(X) = E(X^2) - [\,E(X)\,]^2$.

$E(X^2) = \left(0^2 \times \frac{5}{12}\right) + \left(1^2 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{12}\right) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

D'où $V(X) = \frac{5}{6} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{15-8}{18} = \frac{7}{18}$.

$V(X) = \frac{7}{18}$.

∗ **Ecart type de X :**

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{7}{18}} = 0{,}623.$

c). Définissons la fonction de répartition de X :

La fonction de répartition F de la variable X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{5}{12} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{11}{12} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

PROBLÈME

A). On considère l'équation différentielle :

$y'' - 2y' + y = 2e^{x+1}$. (1)

1). Vérifions que la fonction g définie sur IR par $g(x) = x^2e^{x+1}$ est une solution de l'équation différentielle (1) :

g est deux fois dérivable sur IR et $\forall x \in$ IR :

$g'(x) = 2xe^{x+1} + x^2e^{x+1} = (x^2 + 2x)e^{x+1}$;

$g''(x) = (2x + 2 + x^2 + 2x)e^{x+1} = (x^2 + 4x + 2)e^{x+1}$.

Ce qui permet d'avoir $\forall x \in$ IR :

$g''(x) - 2g'(x) + g(x)$

$= (x^2 + 4x + 2)e^{x+1} - 2(x^2 + 2x)e^{x+1} + x^2e^{x+1}$

$= (x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x + x^2)e^{x+1}$

$= 2e^{x+1}$.

Donc $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 2e^{x+1}$.

Ce que signifie que la fonction g définie sur IR par $g(x) = x^2e^{x+1}$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2).a). Démontrons que la fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. (2)

*** Supposons que h est solution de (1), démontrons alors que $(h - g)$ est solution de (2) :**

h est solution de (1) signifie que $\forall x \in$ IR :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = 2e^{x+1}$.

Or $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 2e^{x+1}$.

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x)$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) - g''(x) + 2g'(x) - g(x) = 0$

$(h''(x) - g''(x)) - 2(h'(x) - g'(x)) + (h(x) - g(x)) = 0$

$(h - g)''(x) - 2(h - g)'(x) + (h - g)(x) = 0$.

Ce qui signifie que $(h - g)$ est solution de (2).

∗ Supposons que $h-g$ est solution de (2), démontrons alors que h est solution de (1) :

$(h-g)$ est solution de (2) signifie que $\forall\, x \in \mathrm{IR}$:

$(h-g)''(x) - 2(h-g)'(x) + (h-g)(x) = 0$

$\left(h''(x) - g''(x)\right) - 2\left(h'(x) - g'(x)\right) + \left(h(x) - g(x)\right) = 0$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) - g''(x) + 2g'(x) - g(x) = 0$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x).$

Or $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 2e^{x+1}.$

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = 2e^{x+1}.$

Ce qui signifie que h est solution de (1).

Conclusion :

La fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $(h-g)$ est solution de l'équation différentielle (2).

b). Résolvons l'équation différentielle (2) :

$y'' - 2y' + y = 0.$ (2).

L'équation caractéristique de (2) est $r^2 - 2r + 1 = 0.$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1.$

Les solutions de (2) sont les fonctions u définies sur IR par $\boldsymbol{u(x) = (Ax+B)e^x}$ avec A et B des constantes réelles.

Ensemble de solutions de (2) :

$S_G = \{u : x \longmapsto (Ax+B)e^x \,;\, (A\,;B) \in \mathrm{IR}^2\}.$

c). Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) :

$(h-g)$ est solution de (2) signifie que $\forall\, x \in \mathrm{IR}$:

$(h-g)(x) = u(x) = (Ax+B)e^x$

$h(x) - g(x) = (Ax+B)e^x$

$h(x) = (Ax+B)e^x + g(x)$

$h(x) = (Ax+B)e^x + x^2e^{x+1}.$

Conclusion :

L'ensemble de solutions de (1) est

$S_G = \{ h : x \longmapsto (Ax+B)e^x + x^2e^{x+1} ; (A ; B) \in IR^2 \}$.

d). Trouvons la solution de (1) vérifiant les conditions $\boldsymbol{h(0) = e}$ et $\boldsymbol{h'(0) = -e}$:

$h(x) = (Ax+B)e^x + x^2e^{x+1}$ pour tout réel x.

$\forall\, x \in IR$,

$h'(x) = Ae^x + (Ax+B)e^x + (x^2+2x)e^{x+1}$

$h'(x) = (Ax+A+B)e^x + (x^2+2x)e^{x+1}$.

Ainsi :

$$\begin{cases} h(0) = e \\ h'(0) = -e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = e \\ A + B = -e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = e \\ A = -2e \end{cases}.$$

Ce qui permet d'avoir $\forall\, x \in IR$:

$h(x) = (Ax+B)e^x + x^2e^{x+1}$

$h(x) = (-2ex+e)e^x + x^2e^{x+1}$

$h(x) = (-2x+1)e.e^x + x^2e^{x+1}$

$h(x) = (-2x+1)e^{x+1} + x^2e^{x+1}$

$h(x) = (x^2-2x+1)e^{x+1}$.

Conclusion :

La solution de l'équation (1) vérifiant $h(0) = e$ et $h'(0) = -e$ est la fonction h définie sur IR par $h(x) = (x^2-2x+1)e^{x+1}$.

B). Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie sur IR par $\boldsymbol{f(x) = (x^2-2x+1)e^{x+1}}$

1).a). Calculons la dérivée $\boldsymbol{f'}$ de $\boldsymbol{f}$ et dressons le tableau de variation de $\boldsymbol{f}$:

f est le produit de deux fonctions dérivables sur IR :

$x \longmapsto x^2-2x+1$ et $x \longmapsto e^{x+1}$. D'où f est dérivable sur IR.

Ainsi, $\forall\, x \in IR$ on aura :

$f'(x) = (2x-2+x^2-2x+1)e^{x+1}$

$f'(x) = (x^2-1)e^{x+1}$.

$*$ **Sens de variation de f :**

$f'(x) = (x^2 - 1)e^{x+1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^{x+1} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(x^2 - 1)$.

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

Ce qui permet d'avoir :

$*$ $\forall\, x \in \,]-\infty\,;\,-1\,] \cup [\,1\,;\,+\infty\,[$, $(x^2 - 1) \geq 0$, d'où $f'(x) \geq 0$.

Par conséquent, f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1\,]$ et sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$.

$*$ $\forall\, x \in \,]-1\,;1\,[$, $(x^2 - 1) < 0$, d'où $f'(x) < 0$.

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-1\,;1\,[$.

Limites aux bornes :

$*$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 2x + 1)e^{x+1}$

$$= \lim_{x\to-\infty} (x^2e^{x+1} - 2xe^{x+1} + e^{x+1}) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+1} = 0 \end{cases}.$$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

$*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 2x + 1)e^{x+1} = +\infty$

$$\text{car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 2x + 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty \end{cases}. \qquad \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 2 + \dfrac{1}{x}\right)e^{x+1} = +\infty$

$$\text{car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 2 + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty \end{cases}. \qquad \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}.$$

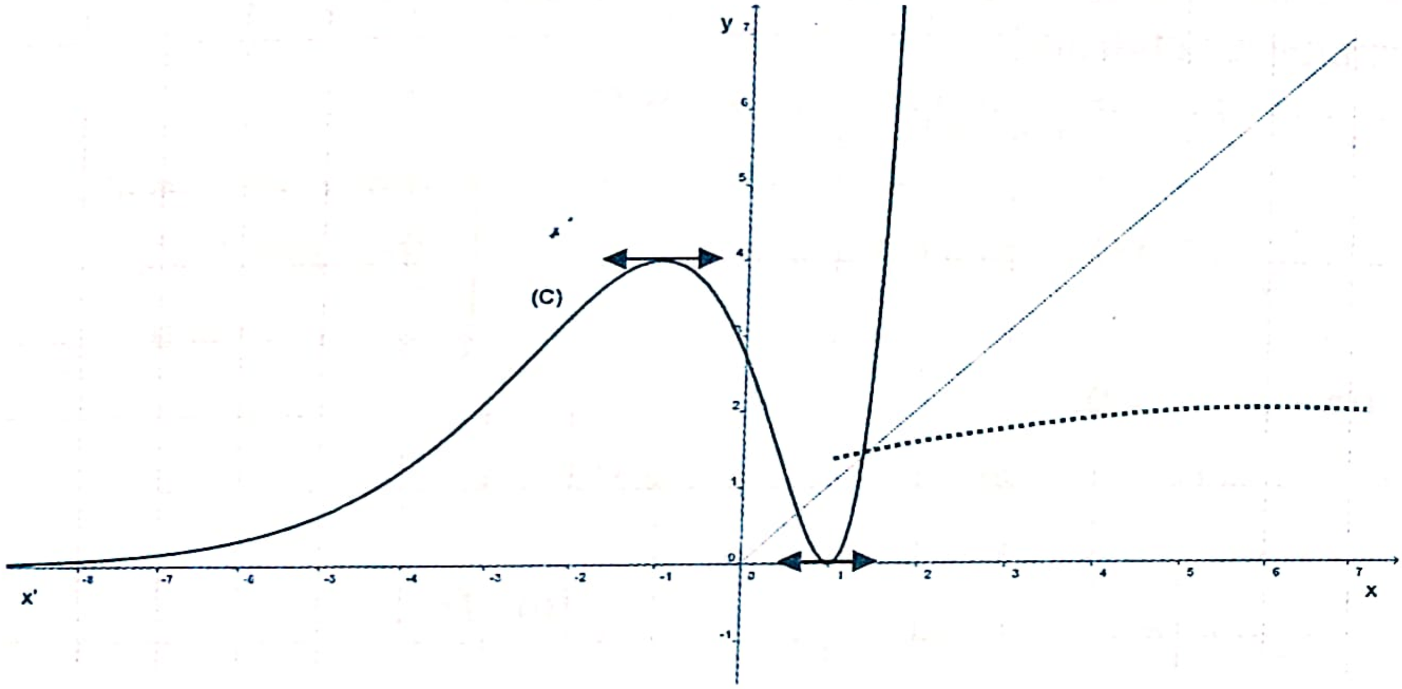
De plus, $f(-1) = (1 + 2 + 1)e^0 = 4$ et $f(1) = (1 - 2 + 1)e^2 = 0$.

Conséquences graphiques :

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) en $-\infty$ et une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées du repère.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2). Traçons la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$:



3). Déterminons les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur IR par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{x+1}$ soit une primitive de f :

F est une primitive de f sur IR signifie que $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (2ax + b + ax^2 + bx + c)e^{x+1} = f(x)$

$\Leftrightarrow (ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^{x+1} = (x^2 - 2x + 1)e^{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -2 \\ b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Conclusion :

$F(x) = (x^2 - 4x + 5)e^{x+1}$.

4). Soit $\boldsymbol{\lambda}$ un réel strictement négatif.

a). Calculons l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $\boldsymbol{x = \lambda}$ et $\boldsymbol{x = 0}$:

$F(x) = (x^2 - 4x + 5)e^{x+1}$.

Si $x \in [\lambda ; 0], f(x) \geq 0$ ($(\mathscr{C})$ est au dessus de l'axe des abscisses).

Ainsi, on aura :

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^0 f(x)dx \times (\text{unité d'aire})$

$\mathcal{A}(\lambda) = \big(F(0) - F(\lambda)\big) \times ua$

$\mathcal{A}(\lambda) = \big(5e - (\lambda^2 - 4\lambda + 5)e^{\lambda+1}\big) \times 1cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \big(5e - (\lambda^2 - 4\lambda + 5)e^{\lambda+1}\big)cm^2$.

Conclusion :

$\mathcal{A}(\lambda) = \big(5e - (\lambda^2 - 4\lambda + 5)e^{\lambda+1}\big)cm^2$.

b). Calculons la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand $\boldsymbol{\lambda}$ tend vers $-\infty$:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \big(5e - (\lambda^2 - 4\lambda + 5)e^{\lambda+1}\big)cm^2$$

$$= \lim_{\lambda \to -\infty} \Big(5e - \big(\lambda^2 e^{\lambda+1} - 4\lambda e^{\lambda+1} + 5e^{\lambda+1}\big)\Big) = 5e.cm^2$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \lambda^2 e^{\lambda+1} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \lambda e^{\lambda+1} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{\lambda+1} = 0 \end{cases}$.

Conclusion :

$\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = (5e)cm^2$.

5).a). Montrons que g est une bijection de l'intervalle $[\,1\,;\,+\infty\,[$ sur un intervalle J que l'on précisera :

La fonction f est continue et strictement monotone (croissante) sur l'intervalle $[\,1\,;\,+\infty[$.

D'où f est une bijection de $[\,1\,;\,+\infty\,[$ sur $J = \left[f(1)\,;\,\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

ou $J = [\,0\,;\,+\infty\,[$.

Par conséquent, la restriction g de f à $[\,1\,;\,+\infty\,[$ est une bijection de $[\,1\,;\,+\infty\,[$ sur $J = [\,0\,;\,+\infty\,[$.

b). Traçons la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C) :

La courbe de la fonction réciproque est tracée en **pointillés.**

Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère (la droite d'équation $y = x$). (Voir figure)

6). Déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$, où m est un paramètre réel non nul :

Soit (D_m) la droite d'équation $y = mx$.

(D_m) est une droite qui passe par l'origine du repère.

Soit α_m l'angle que fait (D_m) avec l'axe des abscisses.

Soit $M(x\,;y)$ un point de (D_m).

Ce qui permet d'avoir :

$$\tan\alpha_m = \frac{y_M}{x_M} = \frac{mx}{x} = m.$$

D'où $m = \tan\alpha_m$.

Discutons autour de l'angle α_m :

1er cas ($\alpha_m = 0$) :

(D_m) devient la droite d'équation $y = 0$.

On obtient ainsi un seul point de contact entre $(\mathscr{C})$ et (D_m).

Par conséquent, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.

2ème cas : $\alpha_m \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Dans ce cas, on a deux points de contact entre $(\mathscr{C})$ et (D_m).

Par conséquent, l'équation $f(x) = mx$ admet **deux solutions.**

3ème cas : $\alpha_m \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$.

On obtient dans ce cas un seul point de contact entre $(\mathscr{C})$ et (D_m).

Par conséquent, l'équation $f(x) = mx$ admet **une unique solution.**

CORRIGÉ DU BAC 2016

EXERCICE 1

$F : z' = m^3 z + m(m+1),\ \ m \in \mathbb{C}^*$.

1). Donnons la nature de la transformation F :

L'écriture complexe de F est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, d'où F est une similitude plane directe.

2). On suppose que $m = 1 + i$.

Donnons dans ce cas, les éléments géométriques de F :

Si $m = 1 + i$, alors on aura :

$z' = (1+i)^3 z + (1+i)(1+i+1)$

$z' = (1+i)(1+i)^2 z + (1+i)(2+i)$

$z' = (1+i)(1+2i-1)z + (1+i)(2+i)$

$z' = 2i(1+i)z + 2 + i + 2i - 1$

$z' = (-2+2i)z + 1 + 3i$.

Ce qui permet d'avoir :

$*$ **Rapport** (soit k) de F :

$k = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

* **Angle** (soit θ) de F :

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}, \text{ soit } \theta = \frac{3\pi}{4}[2\pi].$$

* **Centre** (soit Ω) de F :

$$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+3i}{1-(-2+2i)} = \frac{1+3i}{3-2i} = \frac{(1+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+9i-6}{3^2+(-2)^2} = \frac{-3+11i}{13}$$

$$z_\Omega = -\frac{3}{13} + \frac{11}{13}i.$$

D'où $\Omega\left(-\frac{3}{13} ; \frac{11}{13}\right)$.

Conclusion :

Pour $m = 1 + i$, F est une similitude plane directe de rapport $2\sqrt{2}$, d'angle $\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ et de centre le point de coordonnées $\left(-\frac{3}{13} ; \frac{11}{13}\right)$.

3). Déterminons l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une translation :

F est une translation si et seulement si $a = 1$.

$a = 1 \Leftrightarrow m^3 = 1 \Leftrightarrow m^3 - 1^3 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m^2+m+1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$ ou $m^2 - m + 1 = 0$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $m^2 + m + 1 = 0$:

* Discriminant Δ :

$\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

Les racines carrées de Δ sont alors $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$.

* Solutions :

$$m_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2(1)} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2(1)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Conclusion :

Les valeurs de m pour lesquelles F est une translation sont :

$1 ; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4). Déterminons l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une homothétie de rapport 8 :

F est une homothétie de rapport 8 si et seulement si $a = 8$.

$a = 8 \Leftrightarrow m^3 = 8 \Leftrightarrow m^3 = 2^3 \Leftrightarrow m^3 - 2^3 = 0$

$\Leftrightarrow (m-2)(m^2 + 2m + 4) = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$ ou $m^2 + 2m + 4 = 0$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $m^2 + 2m + 4 = 0$:

* Discriminant Δ :

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$.

Les racines carrées de Δ sont alors $2i\sqrt{3}$ et $-2i\sqrt{3}$.

* Solutions :

$m_1 = \dfrac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2(1)} = -1 - i\sqrt{3}$ et $m_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

Conclusion :

Les valeurs de m pour lesquelles F est une homothétie de rapport 8 sont : 2, $-1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$.

EXERCICE 2

1). Linéarisons l'expression $f(x) = \sin^3 x \cos x$:

Formules d'Euler : $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

Ce qui permet d'avoir :

$$f(x) = (\sin x)^3 \cos x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^3 (e^{ix} + e^{-ix})}{(2i)^3(2)} = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^2 (e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})}{(2i)^3(2)}$$

$$f(x) = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^2 (e^{2ix} - e^{-2ix})}{(2i)^3(2)} = \frac{(e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix})(e^{2ix} - e^{-2ix})}{(2i)^3(2)}$$

$$f(x) = \frac{(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})(e^{2ix} - e^{-2ix})}{(2i)^3(2)}$$

$$f(x) = \frac{e^{4ix} - e^0 - 2e^{2ix} + 2e^{-2ix} + e^0 - e^{-4ix}}{(2i)^3(2)} = \frac{(e^{4ix} - e^{-4ix}) - 2(e^{2ix} - e^{-2ix})}{(2i)^3(2)}$$

$$f(x) = \frac{1}{2(2i)^2}\left[\frac{(e^{4ix} - e^{-4ix})}{2i} - 2\frac{(e^{2ix} - e^{-2ix})}{2i}\right]$$

$f(x) = -\frac{1}{8}[\sin 4x - 2\sin 2x].$

Conclusion :

$f(x) = -\frac{1}{8}[\sin 4x - 2\sin 2x].$

2). Cherchons une primitive de $x \longmapsto f(x) - \frac{1}{4}\sin 2x$:

Posons $g(x) = f(x) - \frac{1}{4}\sin 2x.$

Désignons par $x \longmapsto G(x)$ la primitive recherchée.

$g(x) = f(x) - \frac{1}{4}\sin 2x = -\frac{1}{8}[\sin 4x - 2\sin 2x] - \frac{1}{4}\sin 2x$

$g(x) = -\frac{1}{8}[\sin 4x - 2\sin 2x + 2\sin 2x]$

$g(x) = -\frac{1}{8}[\sin 4x].$

D'où $G(x) = -\frac{1}{8}\left(\frac{-\cos 4x}{4}\right) + C = \frac{1}{32}\cos 4x + C.$

Conclusion :

Une primitive de la fonction $x \longmapsto f(x) - \frac{1}{4}\sin 2x$

est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{32}\cos 4x + C$ avec C une constante réelle.

PROBLÈME

A). $y'' + y' - 2y = -3e^x.$ (1)

1). Déterminons le réel a pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = axe^x$ soit une solution de l'équation différentielle (1) :

g est définie sur IR et g est deux fois dérivable sur IR.

Ainsi, pour tout réel x :

$g'(x) = ae^x + axe^x = (ax + a)e^x.$

$g''(x) = (a + ax + a)e^x = (ax + 2a)e^x.$

g est une solution de (1) si et seulement si :

$g''(x) + g'(x) - 2g(x) = -3e^x$

$(ax + 2a)e^x + (ax + a)e^x - 2axe^x = -3e^x$

$(ax + 2a + ax + a - 2ax)e^x$

$3ae^x = -3e^x$

$3a = -3$

$a = -1.$

Conclusion :

g est une solution de (1) si et seulement si $a = -1.$

2).a). Démontrons qu'une fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$ (2) :

$*$ **Supposons que h est solution de (1), démontrons alors que $(h - g)$ est solution de (2) :**

h est solution de (1) signifie que $\forall\, x \in$ IR :

$h''(x) + h'(x) - 2h(x) = -3e^x.$

Or $g''(x) + g'(x) - 2g(x) = -3e^x.$

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) + h'(x) - 2h(x) = g''(x) + g'(x) - 2g(x)$

$h''(x) + h'(x) - 2h(x) - g''(x) - g'(x) + 2g(x) = 0$

$\big(h''(x) - g''(x)\big) + \big(h'(x) - g'(x)\big) - 2\big(h(x) - g(x)\big) = 0$

$(h - g)''(x) + (h - g)'(x) - 2(h - g)(x) = 0.$

Ce qui signifie que $(h - g)$ est solution de (2).

$*$ **Supposons que $h - g$ est solution de (2), démontrons alors que h est solution de (1) :**

$(h - g)$ est solution de (2) signifie que $\forall\, x \in$ IR :

$(h - g)''(x) + (h - g)'(x) - 2(h - g)(x) = 0$

$\big(h''(x) - g''(x)\big) + \big(h'(x) - g'(x)\big) - 2\big(h(x) - g(x)\big) = 0$

$h''(x) + h'(x) - 2h(x) - g''(x) - g'(x) + 2g(x) = 0$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) + g'(x) - 2g(x).$

Or $g''(x) + g'(x) - 2g(x) = -3e^x.$

Ce qui permet d'avoir :

$h''(x) + h'(x) - 2h(x) = -3e^x.$

Ce qui signifie que h est solution de (1).

Conclusion :

La fonction h, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si la fonction $(h - g)$ est solution de l'équation différentielle (2).

b). Résolvons l'équation différentielle (2) :

$y'' + y' - 2y = 0.$ (2).

L'équation caractéristique de (2) est $r^2 + r - 2 = 0.$

$r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r - 1)(r + 2) = 0 \Leftrightarrow r = 1$ ou $r = -2.$

Les solutions de (2) sont les fonctions u définies sur IR par :

$\boldsymbol{u(x) = Ae^x + Be^{-2x}}$ avec A et B des constantes réelles.

Ensemble de solutions de (2) :

$S_G = \{ u : x \longmapsto Ae^x + Be^{-2x} \; ; \; (A \,; B) \in \mathrm{IR}^2 \}.$

c). Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) :

$(h - g)$ est solution de (2) signifie que $\forall x \in \mathrm{IR}$:

$(h - g)(x) = u(x) = Ae^x + Be^{-2x}$

$h(x) - g(x) = Ae^x + Be^{-2x}$

$h(x) = Ae^x + Be^{-2x} + g(x)$

$h(x) = Ae^x + Be^{-2x} - xe^x$.

Conclusion :

L'ensemble de solutions de l'équation différentielle (1) est

$S_G = \{ h : x \longmapsto Ae^x + Be^{-2x} - xe^x \; ; \; (A \,; B) \in \mathrm{IR}^2 \}.$

d). Trouvons la solution de (1) vérifiant les conditions $\boldsymbol{h(0) = 1}$ et $\boldsymbol{h'(0) = 0}$:

$h(x) = Ae^x + Be^{-2x} - xe^x$ pour tout réel x.

D'où $h(0) = A + B.$

$\forall x \in \mathrm{IR},$

$h'(x) = Ae^x - 2Be^{-2x} - (e^x + xe^x)$

$h'(x) = Ae^x - 2Be^{-2x} - (e^x + xe^x)$

D'où $h'(0) = A - 2B - 1.$

Ainsi :

$$\begin{cases} h(0)=1 \\ h'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-2B-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+2B=2 \\ A-2B=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \end{cases}.$$

Ce qui permet d'avoir $\forall\, x \in$ IR :

$h(x) = Ae^{x} + Be^{-2x} - xe^{x}$

$h(x) = e^{x} - xe^{x}$

$h(x) = (1-x)e^{x}$.

Conclusion :

La solution de l'équation (1) vérifiant $h(0)=1$ et $h'(0)=0$ est la fonction h définie sur IR par $h(x)=(1-x)e^{x}$.

B). Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(1-x)e^{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1). Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation :

La fonction f est dérivable sur IR car elle est le produit de deux fonctions qui sont dérivables sur IR.

$\forall\, x \in$ IR $f'(x) = -e^{x} + (1-x)e^{x} = (1-x-1)e^{x}$

$f'(x) = -xe^{x}$.

$\forall\, x \in$ IR, $e^{x} > 0$, d'où $f'(x)$ est du signe de $-x$.

Ce qui permet d'avoir :

$\forall\, x \in]-\infty\,;0]$, $-x \geq 0$ et $f'(x) \geq 0$, d'où f est croissante ;

$\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $-x < 0$ et $f'(x) < 0$, d'où f est strictement décroissante.

• **Limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et calcul de $f(0)$:**

$*\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)e^{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}-xe^{x}) = 0$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x}) = 0$.

$*\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^{x} = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}) = +\infty$.

$*\ f(0) = (1-0)e^{0} = 1$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2). Déterminons l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x = -1$:

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (1-x)e^x$ et $f'(x) = -xe^x$.

D'où $f(-1) = 2e^{-1}$ et $f'(-1) = e^{-1}$.

Ce qui permet d'avoir :

(T) : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

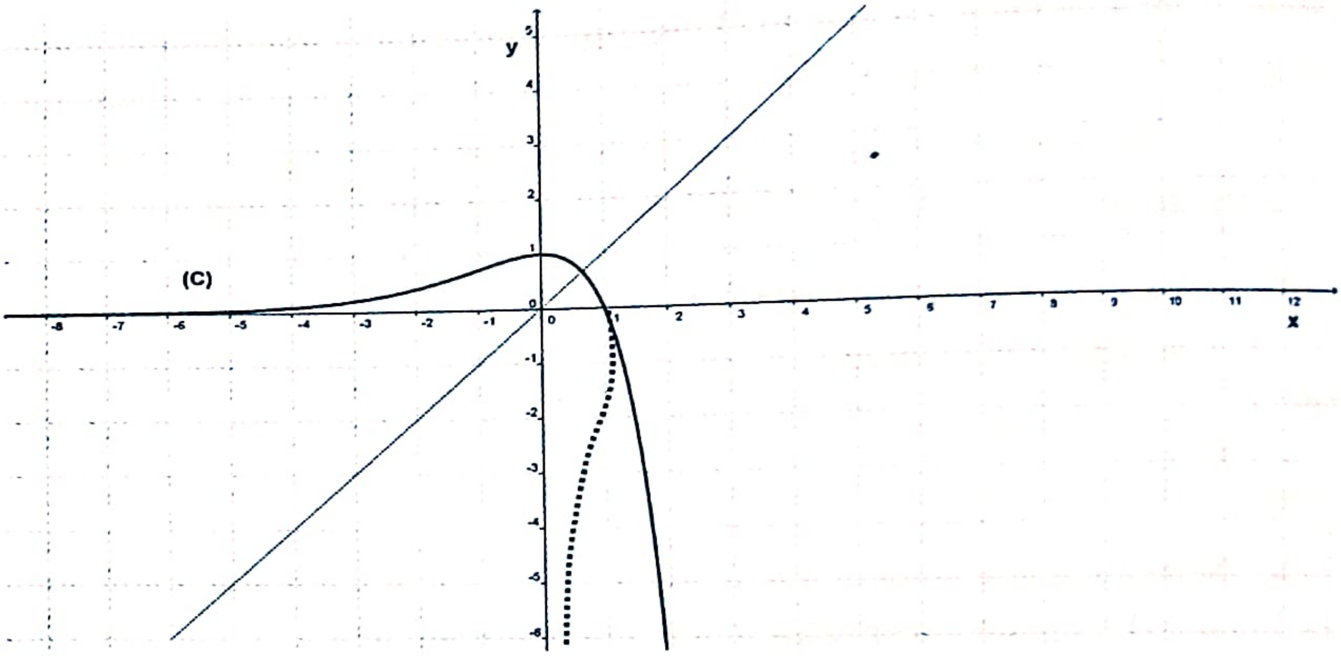
(T) : $y = e^{-1}(x+1) + 2e^{-1} = (x+1+2)\,e^{-1}$

(T) : $y = \frac{1}{e}(x+3)$

(T) : $y = \frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$.

3). Traçons la courbe (C) dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$:

Figure :



4).a). Soit α un réel supérieur à 1.

Calculons l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$:

Si $x \in [\,1\,;\alpha\,]$, $f(x) \leq 0$.

((C) est en dessous de l'axe des abscisses).

Ce qui permet d'avoir :

$\mathcal{A}(\alpha) = \left(-\int_1^\alpha f(x)dx\right) \times (unité\ d'aire)$

$\mathcal{A}(\alpha) = \left(-\int_1^\alpha (1-x)e^x dx\right) \times ua$

$\mathcal{A}(\alpha) = \left(\int_1^\alpha (x-1)e^x dx\right) \times ua.$

Utilisons une intégration par parties :

Posons $\begin{cases} u(x) = x-1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$, ce qui permet d'avoir $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$.

D'où $\mathcal{A}(\alpha) = \left([\,u(x)v(x)\,]_1^\alpha - \int_1^\alpha u'(x)v(x)dx\right) \times ua$

$\mathcal{A}(\alpha) = \left([(x-1)e^x]_1^\alpha - \int_1^\alpha e^x dx\right) \times ua$

$\mathcal{A}(\alpha) = ([\,(x-1)e^x\,]_1^{\alpha} - [\,e^x\,]_1^{\alpha}) \times ua$

$\mathcal{A}(\alpha) = ([\,(x-1)e^x - e^x\,]_1^{\alpha}) \times ua$

$\mathcal{A}(\alpha) = ([\,(x-2)e^x\,]_1^{\alpha}) \times ua$

$\mathcal{A}(\alpha) = \big((\alpha-2)e^{\alpha} - (1-2)e^1\big) \times ua$

$\mathcal{A}(\alpha) = \big((\alpha-2)e^{\alpha} + e\big) \times 1cm^2$

$\mathcal{A}(\alpha) = \big((\alpha-2)e^{\alpha} + e\big)cm^2.$

b). Calculons $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$:

$\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \big((\alpha-2)e^{\alpha} + e\big)cm^2 = +\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\alpha \to +\infty} (\alpha - 2) = +\infty \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} e^{\alpha} = +\infty \end{cases}$.

$\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = +\infty.$

5).a). Montrons que la restriction de f à $]-\infty\,;\mathbf{0}\,]$ est une bijection de $]-\infty\,;\mathbf{0}\,]$ sur un intervalle J que l'on précisera :

La fonction f est continue et strictement monotone (croissante) sur l'intervalle $]-\infty\,;0\,]$.

D'où f est une bijection de $]-\infty\,;0\,]$ sur $J = \left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\,;f(0)\right]$

ou $J =]0\,;1]$.

Par conséquent, la restriction g de f à $]-\infty\,;0]$ est une bijection de $]-\infty\,;0\,]$ sur $J = [\,0\,;+\infty\,[$.

b). Traçons la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C) :

La courbe de la fonction réciproque est tracée en **pointillés.**

Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère (la droite d'équation $y = x$). (Voir figure)

6). Déterminons graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite (Δ_m) d'équation $y = m$:

Traçons la droite d'équation $y = m$ (droite horizontale) dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

Essayons de « **glisser verticalement** » cette droite et notons le nombre de points d'intersection entre (C) et (Δ_m).

Ce nombre est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Ce qui permet de trouver :

* Si $m \in]-\infty\ ;\ 0\ ]$, on a un seul point d'intersection entre (C) et la droite (Δ_m).

Dans ce cas l'équation $f(x) = m$ admet une **unique solution.**

* Si $m \in]\ 0\ ;\ 1\ [$, on a deux points d'intersection entre (C) et la droite (Δ_m).

Dans ce cas, l'équation $f(x) = m$ admet **deux solutions.**

* Si $m = 1$, on a un seul point d'intersection entre (C) et la droite (Δ_m).

Par conséquent, l'équation $f(x) = m$ admet **une seule solution.**

CORRIGÉ DU BAC 2017

EXERCICE 1

Donnée : (E) : $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$.

1). Démontrons que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 :

Soit P un polynôme en z défini par :

$P(z) = z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i$.

Posons $z_1 = x$ et $z_2 = iy$ avec x et y des réels non nuls.

z_1 et z_2 sont solutions de (E) signifie que $\begin{cases} P(z_1) = 0 \\ P(z_2) = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} P(z_1) = 0 \\ P(z_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ P(iy) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 9x^2 + (22 + 12i)x - 12 - 36i = 0 \\ (iy)^3 - 9(iy)^2 + (22 + 12i)(iy) - 12 - 36i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 9x^2 + 22x + 12xi - 12 - 36i = 0 \\ -iy^3 + 9y^2 + 22iy - 12y - 12 - 36i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^3 - 9x^2 + 22x - 12) + i(12x - 36) = 0 \\ (9y^2 - 12y - 12) + i(-y^3 + 22y - 36) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 9x^2 + 22x - 12 = 0 & \textbf{(1)} \\ 12x - 36 = 0 & \textbf{(2)} \\ 9y^2 - 12y - 12 = 0 & \textbf{(3)} \\ -y^3 + 22y - 36 = 0 & \textbf{(4)} \end{cases}$$

■ **Résolvons dans IR l'équation $12x - 36 = 0$ (2) :**

$12x - 36 = 0 \Leftrightarrow 12x = 36 \Leftrightarrow x = \frac{36}{12} \Leftrightarrow x = 3$.

■ **Vérifions l'équation $x^3 - 9x^2 + 22x - 12 = 0$ (1) :**

Si $\boldsymbol{x = 3}$, alors on aura :

$x^3 - 9x^2 + 22x - 12 = 3^3 - 9(3)^2 + 22(3) - 12$

$x^3 - 9x^2 + 22x - 12 = 27 - 81 + 66 - 12 = 93 - 93$

$x^3 - 9x^2 + 22x - 12 = 0$.

■ **Résolvons dans IR l'équation $9y^2 - 12y - 12 = 0$ (3) :**

∗ Discriminant :

$\Delta = (-12)^2 - 4(9)(-12) = 576 = 24^2$.

∗ Solutions : $y_1 = \frac{12-24}{2(9)} = -\frac{4}{3}$ et $y_2 = \frac{12+24}{2(9)} = \frac{36}{18} = 2$.

■ **Vérifions l'équation $-y^3 + 22y - 36 = 0$ (4) :**

∗ **Si $y = -\frac{4}{3}$**, alors on aura :

$$-y^3 + 22y - 36 = -\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 22\left(-\frac{4}{3}\right) - 36$$

$$-y^3 + 22y - 36 = -\left(-\frac{64}{27}\right) + \left(-\frac{88}{3}\right) - 36$$

$$-y^3 + 22y - 36 = \frac{64}{27} - \frac{88}{3} - 36 = \frac{64 - 9\times 88 - 36\times 27}{27}$$

$$-y^3 + 22y - 36 = -\frac{1700}{27} \text{ et } -\frac{1700}{27} \neq 0.$$

∗ **Si $y = 2$**, alors on aura :

$$-y^3 + 22y - 36 = -(2)^3 + 22(2) - 36$$

$$-y^3 + 22y - 36 = -8 + 44 - 36 = 44 - 44$$

$$-y^3 + 22y - 36 = 0.$$

Conclusion :

De ce qui précède, on prendra $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir : $\begin{cases} z_1 = x = 3 \\ z_2 = iy = 2i \end{cases}$.

On conclut que l'équation (E) admet une solution réelle $z_1 = 3$ et une solution imaginaire pure $z_2 = 2i$.

2). Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

Rappelons que (E) admet deux solutions z_1 et z_2.

Or (E) est une équation du 3ème degré.

Recherchons alors la 3ème solution de (E).

Soit z_3 cette solution.

Ainsi, $P(z)$ peut s'écrire sous la forme :

$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(az + b)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Déterminons les complexes a et b :

$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(az + b)$

$P(z) = (az + b)(z - 3)(z - 2i)$

$P(z) = (az + b)(z^2 - 2iz - 3z + 6i)$

$P(z) = az^3 - 2aiz^2 - 3az^2 + 6aiz + bz^2 - 2biz + 6ib$

$P(z) = az^3 + (-2ai - 3a + b)z^2 + (6ai - 2bi) + 6ib.$

Or $P(z) = z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i$.

Par identification partielle, on peut avoir $\begin{cases} az^3 = z^3 \\ 6ib = -12 - 36i \end{cases}$.

$\begin{cases} az^3 = z^3 \\ 6ib = -12 - 36i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{-12 - 36i}{6i} = \frac{-2 - 6i}{i} = 2i - 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 + 2i \end{cases}$.

D'où $P(z) = (z - 3)(z - 2i)(z - 6 + 2i)$.

$z - 6 + 2i = 0 \Leftrightarrow z = 6 - 2i.$

Par conséquent $z_3 = 6 - 2i.$

Conclusion : $S_C = \{ 3 \,;\, 2i \,;\, 6 - 2i \}$.

3). Donnée : $z_A = 3,\ z_B = 2i,\ z_C = 6 - 2i.$

a). Plaçons les points A, B et C dans le plan complexe :

b). ■ Montrons que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(6-2i)-3}{2i-3} = \frac{3-2i}{-3+2i} = \frac{-(-3+2i)}{(-3+2i)} = -1$ et $-1 \in$ IR.

D'où $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel.

On en déduit que les points A, B et C sont alignés (Voir figure).

c). Ecriture complexe et centre Ω de la similitude S :

D'après l'énoncé, S est d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$, $S(A) = B$.

■ Ecriture complexe de S :

Soit $\theta = \frac{\pi}{4}$ l'angle de S et soit $k = \sqrt{2}$ son rapport.

Soit $z' = az + b$ l'écriture complexe de S avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$\begin{cases} k = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = ke^{i\theta} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow a = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i \Leftrightarrow a = 1 + i.$

$S(A) = B \Leftrightarrow z_B = az_A + b \Leftrightarrow b = z_B - az_A = 2i - (1+i)(3)$

$\Leftrightarrow b = 2i - 3 - 3i \Leftrightarrow b = -3 - i.$

$\begin{cases} a = 1 + i \\ b = -3 - i \end{cases}$, d'où l'écriture complexe de S est :

$z' = (1+i)z - 3 - i.$

■ Centre Ω de S :

$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-3-i}{1-(1+i)} = \frac{-3-i}{-i} = i(-3-i) = -3i + 1 = 1 - 3i.$

D'où le centre de S est $\Omega(1\,;\,-3)$.

EXERCICE 2

$(u_n)_{n\in \mathrm{IN}}$ est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$.

1). Calculons u_2, u_3 et u_4 :

■ $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \Rightarrow u_{0+2} = \sqrt{u_{0+1}u_0} \Rightarrow u_2 = \sqrt{u_1u_0}$

$\Rightarrow u_2 = \sqrt{(2)(1)} \Rightarrow u_2 = \sqrt{2}$;

■ $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \Rightarrow u_{1+2} = \sqrt{u_{1+1}u_1} \Rightarrow u_3 = \sqrt{u_2u_1}$

$\Rightarrow u_3 = \sqrt{(\sqrt{2})(2)} \Rightarrow u_3 = \sqrt{2\sqrt{2}}$;

■ $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \Rightarrow u_{2+2} = \sqrt{u_{2+1}u_1} \Rightarrow u_4 = \sqrt{u_3u_2}$

$\Rightarrow u_4 = \sqrt{\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})} \Rightarrow u_3 = \sqrt{\sqrt{2\sqrt{2} \times 2}}$

$\Rightarrow u_3 = \sqrt{\sqrt{4\sqrt{2}}} \Rightarrow u_3 = \sqrt{\sqrt{2^2\sqrt{2}}} \Rightarrow u_3 = \sqrt{2\sqrt{\sqrt{2}}}$.

2). (v_n) est la suite définie par : $v_n = \ell n\, u_n$.

Montrons que pour tout $n \in \mathrm{IN}$, $v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$:

$v_n = \ell n\, u_n \Leftrightarrow v_{n+2} = \ell n\, u_{n+2} \Leftrightarrow v_{n+2} = \ell n\sqrt{u_{n+1}u_n}$

$\Leftrightarrow v_{n+2} = \frac{1}{2}\ell n(u_{n+1}u_n)$

$\Leftrightarrow v_{n+2} = \frac{1}{2}[\ell n(u_{n+1}) + \ell n(u_n)]$

$\Leftrightarrow v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$.

3). Donnée : $x_n = v_{n+1} - v_n$ et $y_n = v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$.

a). Montrons que (x_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$:

$x_n = v_{n+1} - v_n \Leftrightarrow x_{n+1} = v_{n+2} - v_{n+1}$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n) - v_{n+1}$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n - v_{n+1}$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}v_{n+1} - v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = -\frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = -\frac{1}{2}(v_{n+1} - v_n)$.

Or $x_n = v_{n+1} - v_n$.

Donc $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n$.

D'où (x_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

b). Montrons (y_n) est une suite constante :

$y_n = v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n \Leftrightarrow y_{n+1} = v_{n+2} + \frac{1}{2}v_{n+1}$

$\Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n) + \frac{1}{2}v_{n+1}$

$\Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}v_{n+1}$

$\Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$

$\Leftrightarrow y_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$. Or $y_n = v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$.

Donc $y_{n+1} = y_n$.

D'où (y_n) est une suite constante.

c). Vérifions que $v_n = \frac{2}{3}(y_n - x_n)$ puis déduisons-en l'expression de v_n en fonction de n :

Rappelons que $\begin{cases} y_n = v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n \\ x_n = v_{n+1} - v_n \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir :

$\frac{2}{3}(y_n - x_n) = \frac{2}{3}\left[v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n - v_{n+1} + v_n \right]$

$\frac{2}{3}(y_n - x_n) = \frac{2}{3}\left[v_{n+1} - v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n + v_n \right]$

$\frac{2}{3}(y_n - x_n) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}v_n + v_n \right]$

$\frac{2}{3}(y_n - x_n) = \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}v_n \right] = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}v_n = v_n$

$\frac{2}{3}(y_n - x_n) = v_n$.

D'où $v_n = \frac{2}{3}(y_n - x_n)$.

■ **Expression de v_n en fonction de n :**

$v_n = \frac{2}{3}(y_n - x_n)$.

Exprimons d'abord y_n et x_n en fonction de n :

Rappelons que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \\ v_n = \ell n\, u_n \\ x_n = v_{n+1} - v_n \\ y_n = v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n \end{cases}$

* (x_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

Ce qui permet d'avoir :

$x_n = x_0 q^{n-0} = (v_1 - v_0)q^{n-0}$

$x_n = (\ell n\, u_1 - \ell n\, u_0)q^n$

$x_n = (\ell n\, 2 - \ell n\, 1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$x_n = (\ell n\, 2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

* (y_n) est une suite constante.

Ce qui permet d'avoir :

$y_n = y_0 = v_1 + \frac{1}{2}v_0 = \ell n\, u_1 + \frac{1}{2}\ell n\, u_0 = \ell n\, 2 + \frac{1}{2}\ell n\, 1$

$y_n = \ell n\, 2$.

$\begin{cases} x_n = (\ell n\, 2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ y_n = \ell n\, 2 \end{cases}$, ce qui permet d'avoir :

$v_n = \frac{2}{3}(y_n - x_n)$

$v_n = \frac{2}{3}\left(\ell n\, 2 - (\ell n\, 2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$v_n = \frac{2}{3}\ell n\, 2\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

4).a). Montrons que $u_n = \left[e^{\frac{2}{3}\ell n 2} \right]^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ **:**

$v_n = \ell n\, u_n \Leftrightarrow u_n = e^{v_n}$.

Or $v_n = \frac{2}{3}\ell n\, 2\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Ce qui permet d'avoir :

$u_n = e^{\frac{2}{3}\ell n\, 2\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}$

$u_n = \left[e^{\frac{2}{3}\ell n\, 2} \right]^{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

b). Déduisons-en que (u_n) converge et calculons sa limite :

■ Montrons que (u_n) converge :

$u_n = \left[e^{\frac{2}{3}\ell n\, 2} \right]^{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

On sait que $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, donc la suite de terme général $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ admet une limite en $+\infty$. D'où la suite (u_n) converge .

■ Calculons la limite de la suite (u_n) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, ce qui permet d'avoir :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[e^{\frac{2}{3}\ell n\, 2} \right]^{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[e^{\frac{2}{3}\ell n\, 2} \right]^{1-0} = e^{\frac{2}{3}\ell n\, 2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{2}{3}\ell n\, 2}$.

PROBLÈME

Partie A

g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + \ell n(x)$.

1). Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation :

■ Limites de g aux bornes de $]0;+\infty[$:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x^2 + \ell n(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} 2x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ell n(x) = -\infty \end{cases} ;$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} 2x^2 + \ell n(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ell n(x) = +\infty \end{cases} .$$

■ Dérivabilité de g :

g est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$:
La fonction monôme $x \longmapsto 2x^2$ et la fonction logarithme $x \longmapsto \ell n(x)$, d'où g est dérivable sur $]0;+\infty[$.

■ Dérivée de g :

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \left(2x^2 + \ell n(x)\right)'$

D'où $g'(x) = 4x + \frac{1}{x}$.

■ Sens de variation :

$\forall x \in]0;+\infty[$, $\begin{cases} 4x > 0 \\ \frac{1}{x} > 0 \end{cases}$, donc $g'(x) > 0$.

D'où g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

■ Tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	
g	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2).a). Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

D'après son tableau de variation, g est continue et strictement monotone (croissante) sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

De plus $0 \in \,]-\infty\,;\,+\infty\,[$, donc d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b). Montrons que $0,548 < \alpha < 0{,}549$:

$$\begin{cases} g(0{,}548) = 2(0{,}548)^2 + \ell n(0{,}548) = -0{,}0008 \\ g(0{,}549) = 2(0{,}549)^2 + \ell n(0{,}549) = 0{,}003 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} g(0{,}548) < 0 \\ g(0{,}549) > 0 \end{cases}$.

D'où $g(0{,}548) \times g(0{,}549) < 0$.

Par conséquent $0{,}548 < \alpha < 0{,}549$.

3). Précisons le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x :

g est strictement croissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et $g(\alpha) = 0$.

Ce qui permet d'avoir :

- Si $0 < x \leq \alpha$, alors $g(x) \leq g(\alpha)$, d'où $g(x) \leq 0$;
- Si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha)$, d'où $g(x) > 0$.

■ Tableau de signe de $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie B

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - x + \frac{1+\ell n(x)}{2x}.$$

1).a). Déterminons la limite de f en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1 - x + \frac{1+\ell n(x)}{2x}\right) = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(1-x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(1 + \ell n(x)) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0^+ \end{cases}$.

■ **Interprétons graphiquement le résultat obtenu :**

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, d'où la courbe (C) admet comme **asymptote verticale** la droite d'équation $x = 0$.

b). Déterminons la limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - x + \frac{1+\ell n(x)}{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - x + \frac{1}{2x} + \frac{\ell n(x)}{x}\right).$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ell n(x)}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\ell n(x)}{x}\right) = \frac{1}{2}\times 0 = 0 \end{cases},$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

c). Montrons que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à (C) :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, d'où une possibilité d'asymptote oblique en $+\infty$.

Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (1-x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (1-x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[1 - x + \frac{1+\ell n(x)}{2x} - (1-x)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (1-x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\ell n(x)}{2x}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(1-x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2x}+\frac{\ell n(x)}{2x}\right] = 0$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ell n(x)}{2x}\right) = 0 \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(1-x)] = 0$, d'où la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

■ **Etudions la position de (C) par rapport à l'asymptote (D) :**

$f(x) = 1 - x + \frac{1+\ell n(x)}{2x} \Leftrightarrow f(x) - (1-x) = \frac{1+\ell n(x)}{2x}$.

• Résolvons dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $\frac{1+\ell n(x)}{2x} = 0$:

$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \frac{1+\ell n(x)}{2x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ell n(x) = 0 \Leftrightarrow \ell n(x) = -1$

$\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Ce qui permet d'avoir :

• Si $x \in \left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, $\frac{1+\ell n(x)}{2x} < 0$;

• Si $x = \frac{1}{e}$, $\frac{1+\ell n(x)}{2x} = 0$;

• Si $x \in \left]\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$, $\frac{1+\ell n(x)}{2x} > 0$.

■ **Résumons cette étude dans un tableau :**

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$\frac{1+\ell n(x)}{2x}$	‖ $-$	0	$+$
Position de (C) par rapport à (D)	(C) est en dessous de (D)	(C) coupe (D)	(C) est au dessus de (D)

2).a). Calculons $f'(x)$ et montrons que $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$:

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(1 - x + \frac{1+\ell n(x)}{2x}\right)' = (1-x)' + \left(\frac{1+\ell n(x)}{2x}\right)'$$

$$f'(x) = (1-x)' + \frac{(1+\ell n(x))'(2x) - (2x)'(1+\ell n(x))}{(2x)^2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(2x) - 2(1+\ell n(x))}{(2x)^2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2 - 2(1+\ell n(x))}{(2x)^2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2(1-(1+\ell n(x))}{4x^2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{(1-1-\ell n(x))}{2x^2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{(-\ell n(x))}{2x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - \ell n(x)}{2x^2} = \frac{-(2x^2+\ell n(x))}{2x^2}.$$

Or $g(x) = 2x^2 + \ell n(x)$.

D'où $\forall\, x \in]0\,;+\infty[\,,\ f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$.

b). Dressons le tableau de variation de f :

$\forall\, x \in]0\,;+\infty[\quad f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$.

$\forall\, x \in]0\,;+\infty[\,,\ 2x^2 > 0$, d'où $f'(x)$ a le même signe que $-g(x)$, ou simplement $f'(x)$ est du signe contraire de $g(x)$.

• Rappelons le signe de $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

- Déduisons-en le **signe de** $f'(x)$: signe contraire de $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ce qui permet de dresser le **tableau de variation de** f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3).a). Montrons que $\boldsymbol{f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}}$:

$f(x) = 1 - x + \frac{1+\ell n(x)}{2x} \Longrightarrow f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1+\ell n(\alpha)}{2\alpha}$.

Or $g(\alpha) = 0$.

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + \ell n(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ell n(\alpha) = -2\alpha^2$.

Ce qui permet d'avoir :

$f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1+\ell n(\alpha)}{2\alpha} = 1 - \alpha + \frac{1-2\alpha^2}{2\alpha}$

$f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{2\alpha} - \frac{2\alpha^2}{2\alpha}$

$f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{2\alpha} - \alpha = 1 - \alpha - \alpha + \frac{1}{2\alpha}$

$f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$.

b). Donnons alors un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près :

Rappelons que $0{,}548 < \alpha < 0{,}549$.

Ce qui permet d'avoir :

$2 \times 0{,}548 < 2\alpha < 2 \times 0{,}549$

$1{,}096 < 2\alpha < 1{,}098$

$-1{,}098 < -2\alpha < -1{,}096$

$1 - 1{,}098 < 1 - 2\alpha < 1 - 1{,}096$

$-0{,}098 < 1 - 2\alpha < -0{,}096$.

De plus $1{,}096 < 2\alpha < 1{,}098$ permet d'avoir :

$\frac{1}{1{,}098} < \frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{1{,}096}$

$0{,}910 < \frac{1}{2\alpha} < 0{,}912$.

$\begin{cases} 0{,}910 < \frac{1}{2\alpha} < 0{,}912 \\ -0{,}098 < 1 - 2\alpha < -0{,}096 \end{cases}$ permet d'avoir :

$0{,}910 - 0{,}098 < 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha} < 0{,}912 - 0{,}096$

$0{,}812 < f(\alpha) < 0{,}816$.

Conclusion : $0{,}81 < f(\alpha) < 0{,}82$.

4).a). Calculons les coordonnées du point de (C) où la tangente est parallèle à (D). Donnons une équation de cette tangente T :

Deux droites sont **parallèles** lorsqu'elles ont le même **coefficient directeur.**

Rappelons que $(D) : y = 1 - x$ ou $(D) : y = -x + 1$.

Donc on doit résoudre l'équation $f'(x) = -1$.

$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - \ell n(x)}{2x^2} = -1 \Leftrightarrow -2x^2 - \ell n(x) = -2x^2$

$\Leftrightarrow -\ell n(x) = 0 \Leftrightarrow \ell n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

De plus $f(1) = 1 - 1 + \frac{1 + \ell n(1)}{2(1)} = 0 + \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$.

$\begin{cases} x = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$, d'où le point de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

■ **Equation de la tangente T :**

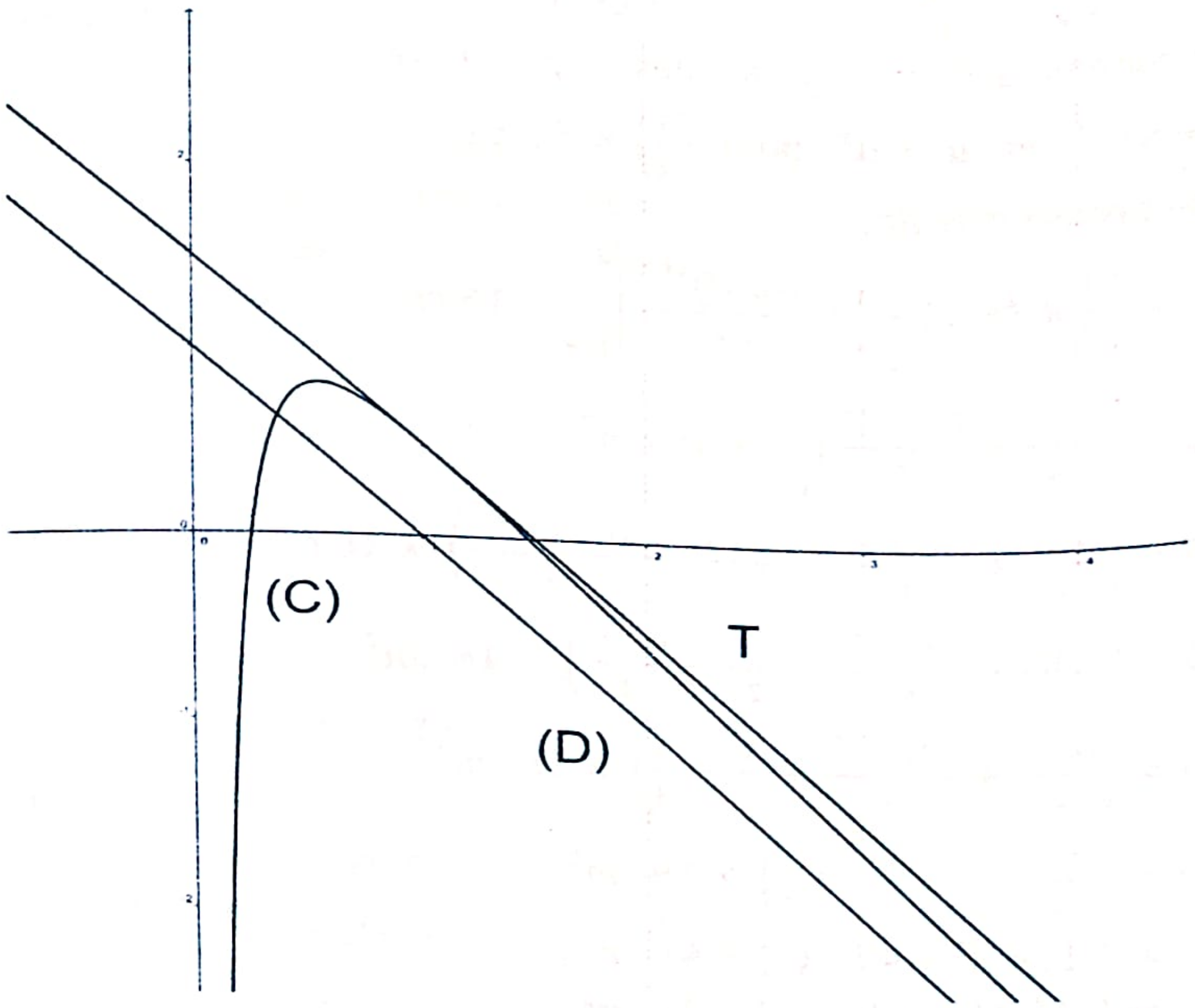
$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$T : y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{-2(1)^2 - \ell n(1)}{2(1)^2}(x-1) + \frac{1}{2}$

$T : y = \frac{-2-0}{2}(x-1) + \frac{1}{2} = -1(x-1) + \frac{1}{2} = -x + 1 + \frac{1}{2}$

$T : y = -x + \frac{3}{2}$.

b). Traçons (C), (D) et T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:



c). Déterminons l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (D) et les droite d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = \lambda$:

Si $x > \frac{1}{e}$, (C) est au dessus de (D) (voir position relative).

Ce qui permet d'avoir :

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{1/e}^{\lambda} \big(f(x) - (1-x)\big)dx \times (unité\ d'aire)$

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{1/e}^{\lambda} \left(1 - x + \frac{1+\ell n(x)}{2x} - (1-x)\right) dx \times (4\ cm \times 4\ cm)$

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{1/e}^{\lambda} \left(\frac{1+\ell n(x)}{2x}\right) dx \times 16\ cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{1/e}^{\lambda} \left(\frac{1}{2x} + \frac{\ell n(x)}{2x}\right) dx \times 16\ cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{1/e}^{\lambda} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{x}\right) \times \ell n(x)\right) dx \times 16\ cm^2.$

On reconnait facilement les formes de primitive :

$\frac{u'}{u}$ pour $\frac{1}{x}$ et $u' \times u^n$ pour $\left(\frac{1}{x}\right) \times \ell n(x)$.

Ce qui permet d'avoir :

$\mathcal{A}(\lambda) = \left[\frac{1}{2} \times \ell n(x) + \frac{1}{2} \times \frac{(\ell n(x))^{1+1}}{1+1}\right]_{1/e}^{\lambda} \times 16\ cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left[\frac{\ell n(x)}{2} + \frac{(\ell n(x))^2}{4}\right]_{1/e}^{\lambda} \times 16\ cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{\ell n(\lambda)}{2} + \frac{(\ell n(\lambda))^2}{4} - \frac{\ell n(1/e)}{2} - \frac{(\ell n(1/e))^2}{4}\right) \times 16\ cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{\ell n(\lambda)}{2} + \frac{(\ell n(\lambda))^2}{4} - \frac{(-1)}{2} - \frac{(-1)^2}{4}\right) \times 16\ cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{\ell n(\lambda)}{2} + \frac{(\ell n(\lambda))^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \times 16\ cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{\ell n(\lambda)}{2} + \frac{(\ell n(\lambda))^2}{4} + \frac{1}{4}\right) \times 16\ cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = (\ 8\ell n(\lambda) + 4\ell n^2(\lambda) + 4)\ cm^2.$

$\mathcal{A}(\lambda) = (\ 4\ell n^2(\lambda) + 8\ell n(\lambda) + 4)\ cm^2.$

d). Calculons la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$:

$\mathcal{A}(\lambda) = (\ 4\ell n^2(\lambda) + 8\ell n(\lambda) + 4)\ cm^2.$

$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{X \to +\infty} (\ 4X^2 + 8X + 4) = \lim_{X \to +\infty} 4X^2 = +\infty$

(En posant $X = \ell n(\lambda)$).

CORRIGÉ DU BAC 2018

EXERCICE 1

1). (E) : $y' + 2y = 0.$

a). Résolvons l'équation (E) :

L'équation caractéristique de (E) est $r + 2 = 0.$

$r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2.$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions f définies et dérivables sur IR par $f(x) = ke^{-2x}$ avec k une constante réelle.

b). Déterminons la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$:

$f(x) = ke^{-2x} \Longrightarrow f(0) = ke^{-2(0)} = ke^0 = k \times 1 = k.$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1.$

Ce qui permet d'avoir :

$f(x) = ke^{-2x} = 1 \times e^{-2x}$

$f(x) = e^{-2x}.$

2). Calculons la valeur moyenne de f sur $[0 ; 1]$:

Définition :

On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a ; b]$, le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Désignons par m la valeur moyenne de f sur $[0 ; 1]$.

Ce qui permet d'avoir :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1-0}\int_0^1 e^{-2x}dx = \int_0^1 e^{-2x}dx$$

$$m = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2}e^{-2(1)}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-2(0)}\right)$$

$$m = \left(-\frac{1}{2}e^{-2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$$

Conclusion :

La valeur moyenne de f sur $[0 ; 1]$ est $m = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$.

3). Déterminons en fonction de n la valeur moyenne de f sur $[n\,;\,n+1]$:

Désignons par m_n la valeur moyenne de f sur $[n\,;\,n+1]$.
Ce qui permet d'avoir :

$$m_n = \frac{1}{(n+1)-n}\int_n^{n+1} e^{-2x}dx = \frac{1}{1}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_n^{n+1}$$

$$m_n = \left(-\frac{1}{2}e^{-2}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$

$$m_n = \left(-\frac{1}{2}e^{-2(n+1)}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-2n}\right)$$

$$m_n = -\frac{1}{2}e^{-2n-2} + \frac{1}{2}e^{-2n}$$

$$m_n = -\frac{1}{2}e^{-2n} \times e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-2n}$$

$$m_n = \frac{1}{2}e^{-2n}(-e^{-2}+1)$$

$$m_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}.$$

4). (u_n) : $u_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$.

a). Calculons la valeur exacte de u_0, u_1 et u_2 :

- $u_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n} \Rightarrow u_0 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2(0)}$

$\Rightarrow u_0 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{0} = \frac{1}{2}(1-e^{-2}) \times 1$

$\Rightarrow \boldsymbol{u_0 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})}$;

- $u_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2(1)}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2}$

$\Rightarrow \boldsymbol{u_1 = \frac{1}{2}(e^{-2}-e^{-4})}$;

- $u_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2(2)}$

$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-4}$

$\Rightarrow \boldsymbol{u_2 = \frac{1}{2}(e^{-4}-e^{-6})}$.

b). Démontrons que la suite (u_n) est une suite géométrique, précisons le premier terme et la raison :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2(n+1)}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n-2}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n} \times e^{-2}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}\right) \times e^{-2}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = e^{-2} \times \left(\frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}\right)$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = e^{-2} \times u_n$.

Conclusion :

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$

et de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$.

c). Déterminons la valeur exacte de la somme

$\boldsymbol{u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9}$ **:**

- **Somme S_n des $(n+1)$ termes de la suite (u_n) :**

(u_n) étant une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$

et de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$, donc on peut écrire :

$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{(1-q)} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) \times \frac{1 - (e^{-2})^{n+1}}{(1 - e^{-2})}$

$S_n = \frac{1}{2}(1 - (e^{-2})^{n+1})$

$S_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2n-2})$.

Ce qui permet d'avoir :

$S_9 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2(9)-2}\right)$

$S_9 = \frac{1}{2}(1 - e^{-20})$.

Conclusion : La valeur exacte de la somme

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9$

est $S_9 = \frac{1}{2}(1 - e^{-20})$.

EXERCICE 2

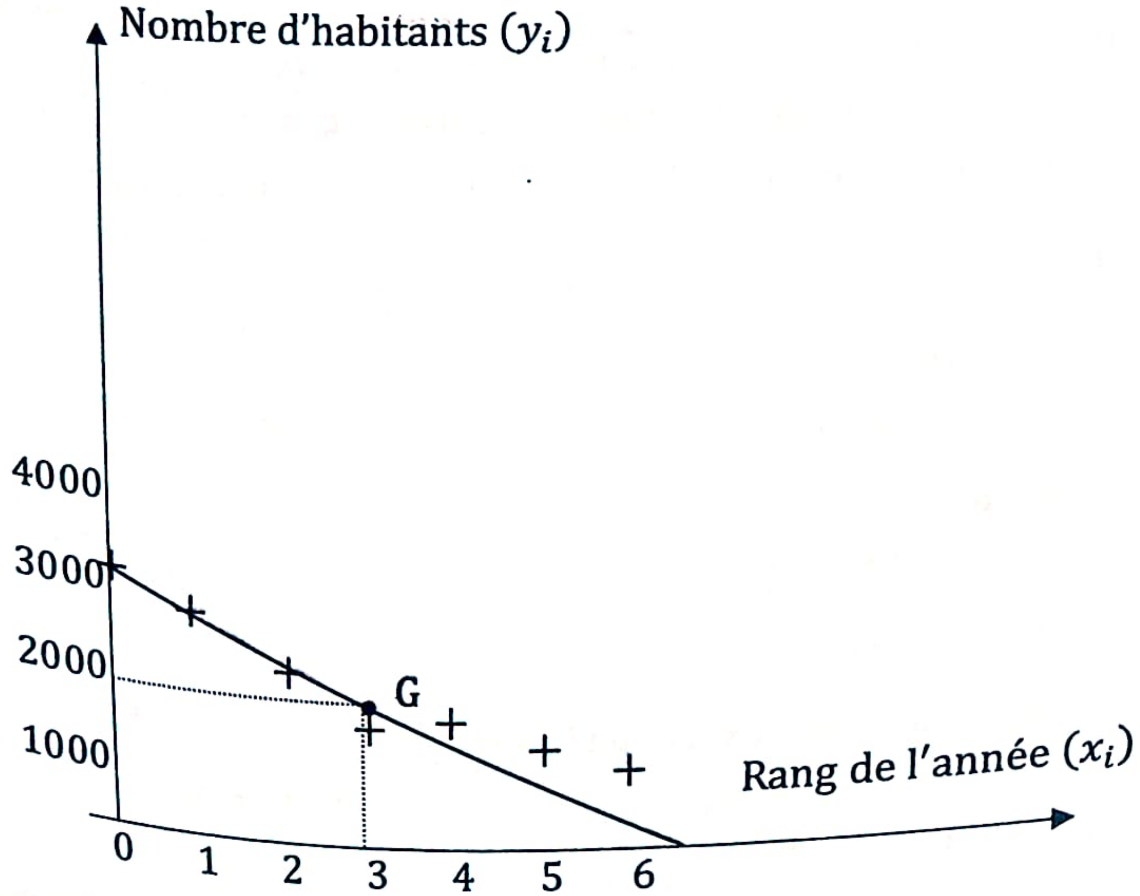
Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'habitants y_i	3000	2545	2165	1840	1566	1332	1135

1). Dessinons le nuage des points $\mathbf{M}_i(x_i\ ;\ y_i)$ ainsi que la droite des moindres carrés :

- Coordonnées du point moyen **G** :

$x_G = \frac{0+1+2+3+4+5+6}{7} = \frac{21}{7} = 3\ ;$

$y_G = \frac{3000+2545+2165+1840+1566+1332+1135}{7} = \frac{13583}{7} = 1940{,}42.$



2). Constat par rapport à la question du maire :

La droite des moindres carrés précédemment tracée ne permet pas d'estimer la population du village en 2005 car on risque de se retrouver avec une population négative (ce qui n'a pas de sens).

Donc un **ajustement affine** entre x et y **n'est pas possible.**

Dans ce cas, il est difficile de répondre à la question du maire.

On peut alors penser à faire un **changement de variable** afin de permettre un ajustement affine.

3). Ajustement par une **courbe :**

$y = ab^x$ avec $0 < b < 1$ et $a > 0$.

$\ell ny = x\ell nb + \ell na$, $z_i = \ell ny$.

a). Complétons le tableau donné :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
z_i	8,01	$\ell n(2545)$	$\ell n(2165)$	$\ell n(1840)$	$\ell n(1566)$	$\ell n(1332)$	$\ell n(1135)$

Ou simplement :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ell n(y)$	8,01	7,85	7,68	7,52	7,36	7,20	7,04

b). Donnons une équation des moindres carrés pour la série $(x_i\,;\,z_i)$:

On appelle droite des moindres carrés, la **droite de régression** de z en x **ou** de x en z.

• **Ecrivons une équation de la droite de régression de z en x :**

Cette équation est de la forme $z = Ax + B$

avec $A = \dfrac{\text{cov}\,(x\,,z)}{\text{V}(x)}$ et $B = \overline{z} - A\overline{x}$.

* **Déterminons** $\bar{x}$, $\bar{z}$, $\sum x_i^2$, $\sum x_i z_i$:

$\bar{x} = \frac{1}{7}(0+1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{7}(21) = 3$;

$\bar{z} = \frac{1}{7}(8{,}01 + 7{,}85 + 7{,}68 + 7{,}52 + 7{,}36 + 7{,}20 + 7{,}04) = 7{,}53$;

$\sum x_i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$;

$\sum x_i z_i = 0 + (1 \times 7{,}85) + (2 \times 7{,}68) + (3 \times 7{,}52) + (4 \times 7{,}36) + (5 \times 7{,}20) + (6 \times 7{,}04)$

$\sum x_i z_i = 153{,}45.$

En résumé on a $\begin{cases} \bar{x} = 3 \\ \bar{z} = 7{,}53 \\ \sum x_i^2 = 91 \\ \sum x_i z_i = 153{,}45 \end{cases}$.

On en déduit que :

$\text{cov}(x, z) = \frac{1}{N}\sum x_i z_i - \bar{x}\,\bar{z} = \frac{1}{7}(153{,}45) - 3 \times 7{,}53 = -0{,}67$;

$V(x) = \frac{1}{N}\sum x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{7}(91) - 3^2 = 13 - 9 = 4$.

Ce qui permet d'avoir :

$A = \frac{\text{cov}(x, z)}{V(x)} = -\frac{0{,}67}{4} = -0{,}16$;

$B = \bar{z} - A\bar{x} = 7{,}53 - (-0{,}16)(3) = 8{,}01.$

Conclusion :

Une équation des moindres carrés pour la série $(x_i \,;\, z_i)$ est :

$z = Ax + B$

$z = -016x + 8{,}01.$

c). Déduisons-en a et b tels que $y = ab^x$:

$y = ab^x$ signifie que $z = \ell ny = x\ell nb + \ell na$ (voir énoncé).

On a ainsi $\begin{cases} z = -0{,}16x + 8{,}01 \\ z = (\ell nb)x + \ell na \end{cases}$.

Par identification on aura : $\begin{cases} \ell nb = -0{,}16 \\ \ell na = 8{,}01 \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir : $\begin{cases} a = e^{8{,}01} \approx 3011 \\ b = e^{-0{,}16} = 0{,}85 \end{cases}$.

Conclusion :

$\begin{cases} a = 3011 \\ b = 0{,}85 \end{cases}$ et $y = 3011.(0{,}85)^x$.

d). Estimons la population du village en 2005 :

En posant $1995 + x = 2005$, on trouve $x = 2005 - 1995 = 10$.

Ce qui permet d'avoir :

$y = 3011.(0{,}85)^{10}$

$y = 592{,}7888315$

$y \approx 593.$

Conclusion :

En 2005, on peut estimer la population du village à **593 habitants.**

PROBLÈME

1). $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ et $D_f =]-1\,;\,0[$

a). Etudions les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1\,;\,0[$:

- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(\frac{1}{x^2 + x}\right) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{1}{x(x+1)} = -\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} x = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (x+1) = 0^+ \end{cases}$, on aura ainsi « $\frac{1}{0^-}$ »$= -\infty$;

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x^2 + x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^-} = \frac{1}{x(x+1)} = -\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0^- \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x+1) = 1 \end{cases}$, on aura ainsi « $\frac{1}{0^-}$ »$= -\infty$.

Conclusion : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$

b). ■ **Calculons la dérivée f' de f et étudions son signe :**

• **Dérivabilité de f :**

f est le quotient de deux fonctions : $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto x^2 + x$.

$x \longmapsto 1$ est une fonction constante, elle est donc dérivable sur $]-1\,;0[$;

$x \longmapsto x^2 + x$ est une fonction polynôme, elle est aussi dérivable sur $]-1\,;0[$.

On conclut que f est dérivable sur $]-1\,;0[$.

• **Dérivé f' de f :**

$\forall\, x \in\ ]-1\,;0[,\quad f'(x) = \left(\frac{1}{x^2 + x}\right)' = \frac{-(x^2+x)'}{(x^2+x)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x)^2}$

Conclusion :

$f'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+x)^2} \quad \forall\, x \in\ ]-1\,;0[$.

• **Signe de $f'(x)$:** $f'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+x)^2}$ $\forall x \in \left]-1\,;0\right[$.

$\forall x \in \left]-1\,;0\right[$, $(x^2 + x)^2 > 0$,

d'où $f'(x)$ est du signe de $(-2x - 1)$.

$-2x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que :

$\forall x \in \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) > 0$;

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}\,;0\right[$, $f'(x) \leq 0$.

Tableau de signe :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0
$-2x-1$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖

■ **Déduisons-en le sens de variation de f :**

$\forall x \in \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) > 0$, d'où f est strictement croissante sur $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$;

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}\,;0\right[$, $f'(x) \leq 0$, d'où f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}\,;0\right[$.

c). Dressons le tableau de variation de f sur l'intervalle $\left]-1\,;\,0\right[$:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
f	‖ $-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖

Indication : $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4.$

d). Montrons que la fonction f admet un maximum sur $]-1\,;\,0[$, et déduisons-en le signe de $f(x)$ sur cet intervalle :

f admet un maximum en $x_0 = a$ sur $]-1\,;\,0[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } x \in]-1\,;\,a[\\ f'(a) = 0 & \\ f'(x) < 0 & \text{si } x \in]a\,;0[\end{cases}.$$

Or, d'après ce qui précède :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ si } & x \in \left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right[\\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 & \\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\,0\right[\end{cases}.$$

Conclusion :

f admet un maximum en $x_0 = -\frac{1}{2}$ sur $]-1\,;\,0[$.

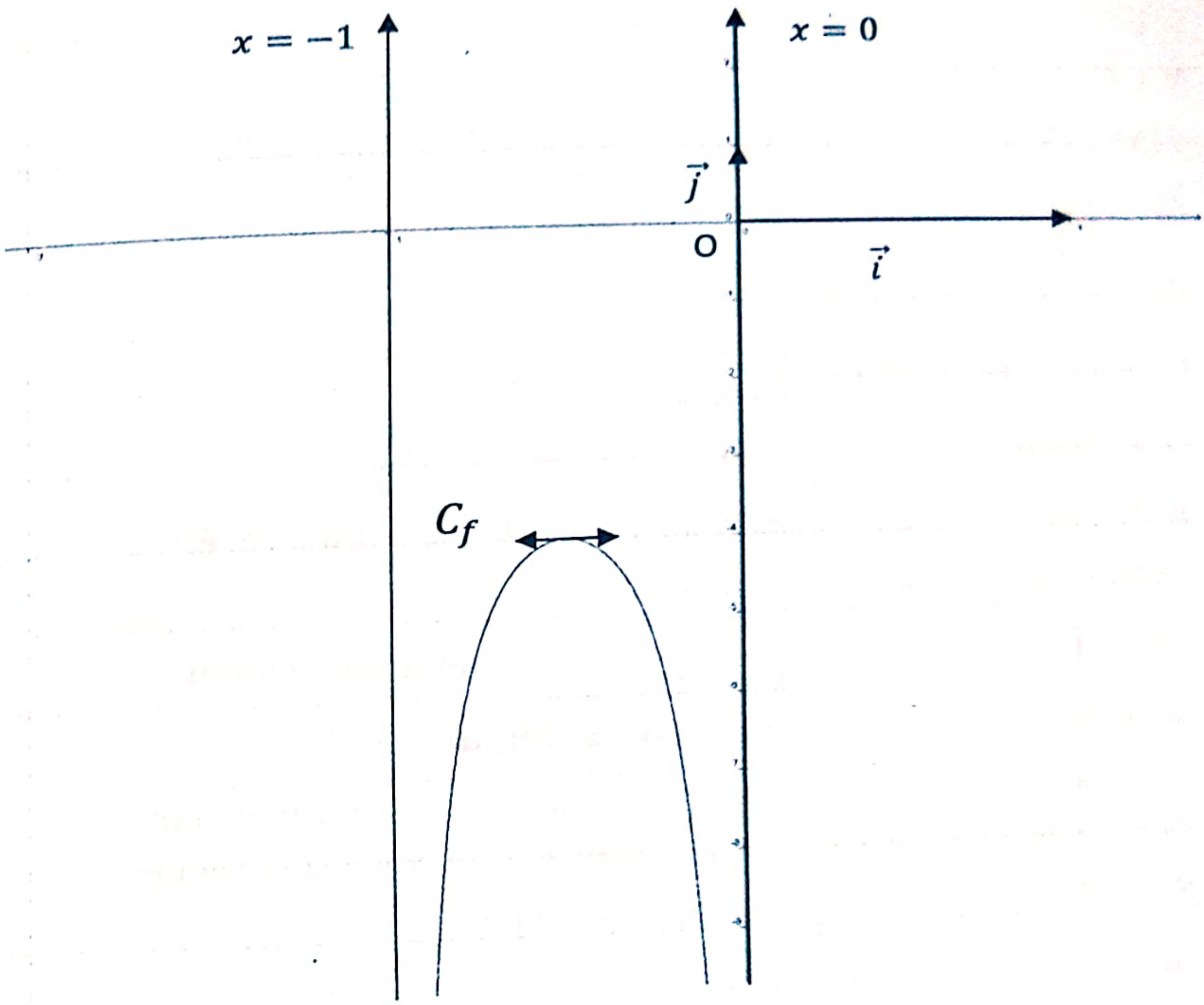
■ **Déduisons-en le signe de $f(x)$ sur $]-1\,;\,0[$:**

f admet un maximum en $x_0 = -\frac{1}{2}$ sur $]-1\,;\,0[$

signifie que la plus grande valeur prise par $f(x)$ est $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Or $-\frac{1}{2} < 0$, donc $f(x) < 0 \quad \forall\, x \in \,]-1\,;0[$.

Figure :



2). Déterminons deux nombres réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \ :$$

$\forall\, x \in \ ]-1\,;0\,[$,

$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{ax+a+bx}{x^2+x} = \frac{(a+b)x+a}{x^2+x}$.

Or $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$.

Par identification on aura : $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$.

Ce qui permet d'avoir : $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$.

Conclusion : $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ et $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

■ **Déduisons-en, sur l'intervalle $]-1\,;\,0\,[$, la primitive F, s'annulant pour $x = -\frac{1}{2}$, de la fonction f :**

Dans l'écriture $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, on reconnait facilement la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ qui a pour primitive $\ell\mathrm{n}|\,u(x)\,|$.

Donc les primitives de f sont les fonctions F définies par :

$F(x) = \ell\mathrm{n}|x| - \ell\mathrm{n}|x+1| + k$ avec k une constante réelle.

$F\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ell\mathrm{n}\left|-\frac{1}{2}\right| - \ell\mathrm{n}\left|-\frac{1}{2}+1\right| + k \ =0$

$\Leftrightarrow \ell\mathrm{n}\left(\frac{1}{2}\right) - \ell\mathrm{n}\left(\frac{1}{2}\right) + k \ =0$

$\Leftrightarrow k = 0$.

Remarque : $\forall\, x \in \ ]-1\,;0\,[$, $\begin{cases} x<0 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x+1>0 \end{cases}$.

Conclusion :

La primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,0\,[$ s'annulant pour $x = -\frac{1}{2}$ est définie par :

$F(x) = \ell\mathrm{n}(-x) - \ell\mathrm{n}(x+1)$

$F(x) = \ell\mathrm{n}\left(\frac{-x}{x+1}\right)$.

3). $g(x) = \ell n\left(\frac{-x}{x+1}\right)$ et $D_g =]-1\,;0[$.

a). Etudions les limites de g aux bornes de l'intervalle $]-1\,;\,0[$:

• $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \ell n\left(\frac{-x}{x+1}\right) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} -x = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \left(\frac{-x}{x+1}\right) = +\infty \end{cases}$;

• $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \ell n\left(\frac{-x}{x+1}\right) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^-} (x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{-x}{x+1}\right) = 0^+ \end{cases}$.

Conclusion : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty \end{cases}$.

b). Vérifions que $\forall\, x \in\,]-1\,;\,0[$, on a $g'(x) = f(x)$:

On sait que $\forall\, x \in\,]-1\,;\,0[$ $\begin{cases} F(x) = \ell n\left(\frac{-x}{x+1}\right) \\ g(x) = \ell n\left(\frac{-x}{x+1}\right) \end{cases}$.

Donc $\forall\, x \in\,]-1\,;\,0[$ $g(x) = F(x)$.
Ce qui permet d'avoir $\forall\, x \in\,]-1\,;\,0[$:
$g'(x) = F'(x)$.
Or $F'(x) = f(x)$.
Donc $g'(x) = f(x)$.
On **conclut** que $\forall\, x \in\,]-1\,;\,0[$, on a $g'(x) = f(x)$.

■ **Déduisons-en les variations de g sur $]-1\,;\,0[$:**

$\forall x \in\ ]-1\,;\,0[$, on a $g'(x) = f(x)$, donc $g'(x)$ a le même signe que $f(x)$.

Or $f(x) < 0 \quad \forall x \in\ ]-1\,;0[$ (voir 1).d).).

Donc $g'(x) < 0 \quad \forall x \in\ ]-1\,;0[$.

On en déduit :

- **Sens de variation de g sur $]-1\,;\,0[$:**

g est strictement décroissante sur $]-1\,;\,0[$.

- **Tableau de variation de g sur $]-1\,;\,0[$:**

x	-1		0
$g'(x)$	||	$-$	||
g	|| $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ||

CONSEILS

&

MÉTHODES DE TRAVAIL

1. Les règles du Bac :

• Chaque année, des candidats sont admis au Bac :
je peux réussir comme les autres.

• Je dois connaitre :
– les coefficients dans chaque matière,
– le programme des épreuves du Bac,
– la manière dont se déroule chaque épreuve,
– les critères de réussite,
– les défauts à éviter.

• Je dois demander à mes professeurs les règles du Bac.

• Je dois savoir que **mes notes de Terminale** :
– figureront sur les **dossiers d'orientation,**
– comptent pour les **dossiers d'inscription** d'après Bac.

• Il me faut **la moyenne dans toutes les matières** pour que mon dossier de candidature à une école soit retenu.
Un point faible risque de m'éliminer.

2. Le Bac se prépare dès le début de l'année :

■ Je me fixe des objectifs.

• Je dois penser dès maintenant à l'après-Bac.

• Je me fixe **par écrit** des engagements et des objectifs à atteindre et je les **déclare à mes proches.**

■ Je me donne les moyens de réaliser mes objectifs.

• Pour faire face à la **quantité de travail** à la fin de l'année :
– je dois travailler **régulièrement,**
– je dois **préparer mes révisions dès le début** de l'année.

• Mes **prises de notes** de cours doivent être lisibles, structurées, claires et prêtes pour mes révisions.

• En classe, j'**interviens régulièrement à l'oral** dans toutes les matières pour que mes professeurs puissent me corriger.

• Je constitue, pour chaque matière, des répertoires de vocabulaire. Je note les **nouveaux termes** au fur et à mesure des cours.

• Je revois mes cours **le soir même** et je n'attends surtout pas les évaluations pours apprendre.

• Je repère mes **points faibles** pour y remédier.

3. Je pense toujours au Bac et à mon orientation:

▪ Je compte sur moi-même

• **Mon devenir repose sur mes épaules.**
Je suis architecte et maçon de mon avenir.

• Le succès entraîne pour moi du plaisir de réussir.

• De toute façon, je n'obtiendrai rien sans travailler.

▪ Tout passe par le Bac.

• Sans le Bac je ne suis rien aux yeux des autres.

• Je n'arrive pas en retard et je ne sèche jamais les cours.

• Je ne sèche jamais un devoir même si ce devoir risque de faire baisser ma moyenne.

▪ Je m'entraine comme un sportif.

• Je n'ai qu'un objectif : le Bac.

• Je mets tout en œuvre pour atteindre cet objectif.

• J'imagine ma réussite à chaque évaluation.

4. J'organise mon lieu de travail :

■ Je m'organise en début d'année.

• Je travaille dans ma chambre ou dans un lieu calme.

• J'aménage mon lieu de travail près de la fenêtre, bien éclairée le jour. Le soir j'utilise une lampe orientale placée à gauche pour faciliter la lecture de ce que j'écris.

• Je dois être **très ordonné** pour retrouver très vite mes affaires :

– Je ne garde sur mon bureau que ce qui concerne la matière que j'étudie.

– Je range le reste des affaires sur des étagères si possible.

– Mon bureau ne doit pas être encombré.

– J'aère mon bureau tous les jours.

■ Je m'organise chaque fin de semaine.

Chaque fin de semaine :

– Je mets de l'ordre dans mon bureau.

– Je ne garde sur mon bureau que ce qui me sert.

– Je vérifie mes outils et je complète mes fournitures.

5. J'organise mon travail :

■ Je gagne beaucoup de temps.

• Le **temps** reste et demeure mon bien le plus précieux.

• Je rationalise mon emploi de temps et je simplifie mon travail.

• Je me fixe des **limites précises de temps** pour chaque travail pour avancer plus vite.

■ Je reste efficace.

• Je **termine toujours** ce qui est commencé grâce à mon plan de travail.

• J'agis positivement et je contrôle mon action et j'évite surtout de rester rêver.

• Mon plan de travail m'indique le chemin à suivre.
Je prends l'habitude de m'organiser pour **structurer mon esprit.**

6. Je présente clairement mes cours :

Mon cours est plus facile à apprendre si je vois ce qui est le plus important du premier coup d'œil :

- Je commence chaque chapitre sur une nouvelle feuille.
- Je sépare les titres et les sous-titres des développements.
- Je souligne les titres et les mots clés en rouge.
- Je repère, Je constitue des paragraphes pour séparer les groupes d'idées différentes.
- Mes schémas doivent être clairs et colorés.
- J esoigne mon écriture pour que je puisse me relire facilement.

7. Exemples d'emploi de temps.

- Je dois travailler chaque nuit pendant 2 heures 30mn ou 3 heures.

- Je dois revoir au moins deux matières chaque soir.

Emploi 1

21 h30 – 22h 15	Matière 1
22 h15 – 22h 30	**Pause**
22 h30 – 23h 30	Matière 2

Emploi 2

21 h – 21h 45	Matière 1
21 h45 – 22h	**Pause**
22 h – 22h 45	Matière 2
22 h45 – 23h	**Pause**
23 h – 00h	Matière 3

8. J'évite la fatigue inutile :

- Je programme mon travail sur plusieurs jours.

- Je travaille en fonction des meilleurs moments de la journée.

- Lorsque je ne suis pas en forme :

– je ne travaille pas trop longtemps.
– je n'effectue que des travaux faciles.

- **Pour éviter la monotonie et la baisse de rendement :**

– j'alterne les matières qui me plaisent et celles qui ne me plaisent pas.
– j'alterne les travaux difficiles et les travaux faciles.

– j'alterne le travail et les loisirs.

- **Pour éviter les tensions du corps et permettre la compréhension et la mémorisation :**

– j'effectue des **pauses de 10 mn** toutes les 45 minutes de travail.

– j'évite de travailler tard la nuit.

9. Je travaille en groupe :

Le travail en groupe m'évite de stresser seul dans mon coin.

■ Conditions du travail en groupe :

- Je **limite le nombre** de participants à **deux (2) personnes** pour éviter de se disperser.
- Je choisis un **partenaire motivé, actif** et avec qui je m'entends.
- Je choisis un **partenaire meilleur que moi** là où j'ai des difficultés.
- Nous nous réunissons pour travailler seulement quand cela est nécessaire.
- Nous déterminons un horaire précis et limité et nous nous fixons un objectif à atteindre.
- Avant de se réunir chacun prépare le travail nécessaire.

■ Déroulement du travail en groupe :

- Je me place dans la peau du professeur et j'explique les notions à mon partenaire.
- Je laisse mon partenaire s'expliquer et je l'écoute.

10. L'épreuve de Mathématiques :

■ Contenu de l'épreuve de maths :

• L'épreuve de maths **se compose :**
– des **exercices** concernant des domaines différents.
Ces exercices sont plus brefs que les problèmes.

– d'un **problème** comportant deux ou trois parties avec leurs questions.

• L'épreuve de maths ne comporte pas de questions de cours.

• Je ne démontre pas les théorèmes.

■ Le raisonnement :

• On attend de moi un **raisonnement clair** pour obtenir une réponse à une question posée et non pas uniquement la réponse.

• Le raisonnement suppose **un point de départ et un point d'arrivée.**

• Entre un point de départ et un point d'arrivée **j'explique et je justifie chaque étape.**

• La conclusion d'une question est souvent le début de la question suivante.

11. Je m'entraine pour l'épreuve de Mathématiques :

Les maths s'apprennent mais **surtout se pratiquent.**
On réussit en maths si l'on **s'entraine régulièrement** sur des exercices et des problèmes.

■ Je m'entraine avec des exercices :

• Effectuer des exercices est la meilleure façon de préparer l'épreuve de maths.
Je passe le temps nécessaire pour m'entrainer.

• Je dois **reprendre les exercices déjà traités en classe.**

• **Après avoir traité les exercices donnés en classe**
je m'entraine avec un recueil d'exercices corrigés ou avec des annales conformes au programme.

• Je peux m'entrainer avec un camarade :

– Nous travaillons en temps limité et avec un programme de travail pour chaque séance.

– Chacun apprend et cherche chez soi, puis nous nous rencontrons pour confronter nos résultats.

12. Pendant l'épreuve de Mathématiques :

• **Je garde un moral de vainqueur :**

– Je ne pense qu'au sujet et à rien d'autre.

– Je ne me laisse pas désarçonner par un type de sujet que je n'ai jamais rencontré auparavant : je cherche.

• **Je gère bien mon temps :**

– Je prends mon temps pour effectuer correctement mon travail et ne pas me tromper dans mes calculs, particulièrement en début d'exercice.

– Je travaille **montre en main** en me fixant des limites de temps pour chaque partie proportionnellement au nombre de points : **je gère mon temps en fonction du barème.**

– Je réserve un temps pour relire mon travail.

• **J'avance méthodiquement :**

– Je commence par l'exercice le plus facile.
Je le résous si possible entièrement, sans avoir besoin d'y revenir.

– Ensuite sur ce qui reste, je m'attaque aux questions les plus difficiles.

– **Si je suis bloqué** sur une question **je passe à la question suivante** si possible. J'y reviendrais plus tard s'il me reste du temps.

– Je travaille chaque question au **brouillon**.
Je vérifie mon raisonnement.

– Je **recopie immédiatement** les questions terminées.

– Je barre systématiquement les questions traitées.

– En cas de panique j'arrête, je respire profondément, je relis l'énoncé, je note au brouillon ce dont je me souviens du cours.

– Les figures géométriques sont assez grandes, l'échelle est adaptée pour que les points significatifs soient apparents.

– Chaque question doit se terminer par un **résultat souligné**.

13. Comment présenter ma copie ?

• Toutes mes **feuilles sont numérotées** : exemple 1/4.

• Mes **exercices sont nettement séparés**, de préférence en réservant une **copie entière par exercice.**

• Les questions sont bien séparées visuellement et numérotées.

• Les questions sont traitées dans l'ordre où elles sont posées.

• Quand je ne sais pas répondre je laisse un blanc que je compléterai.

• Les figures géométriques sont assez grandes, l'échelle est adaptée pour que les points significatifs soient apparents.

• Chaque question se termine par un résultat souligné.

• Ma démonstration doit être rigoureuse :

— Je dois **tout expliquer au correcteur**
—Je dois **convaincre le correcteur**
—Je dois me montrer **logique, cohérent, clairvoyant et réaliste.**

14. Comment préparer mes révisions à Jour J−20 ?

■ **Mon plan de révision :**

1). Je ne manque pas les dernières heures de cours :

– J'assiste aux points importants qui n'ont pas été traités,

– J'assiste aux révisons des principales difficultés,

– J'assiste aux derniers conseils utiles avant les épreuves.

2). Je révise à partir de mes cours et de mes fiches de révision :

– Je reprends les formules, définitions, les théorèmes et résultats de chaque chapitre.

– Je reprends les exercices ou problèmes significatifs.

–Je reprends tous mes devoirs, je repère ce qui a posé problème.

3). Je me confronte aux problèmes des annales :

–pour me mettre en situation d'examen,

–pour balayer un maximum de thèmes.

4). Dans un exercice ou un problème, j'analyse la manière dont les théorèmes sont utilisés, comment ils se suivent dans la démonstration.

15. Jour J–1

(La veille du Bac)

▪ Le matin :

1). Je ne me lève pas trop tard afin d'être suffisamment fatigué le soir.

2). Pour ne pas tout mélanger et me détendre je ne révise pas la veille de l'examen : Je me repose.

3). Je prépare toutes mes affaires et je vérifie leur bon état :
– Je prépare ma convocation.
– Je prépare ma pièce d'identité.
– Je prépare ma calculatrice, piles de rechange.
– Je prépare mes formulaires officiels et matériel autorisés, bref mon ensemble géométrique.
– Je prépare ma montre et mes mouchoirs en papier.

4). Je prépare aussi mes recharges d'énergie (barre de céréale, pomme, sucre....).

5). Je prévois des vêtements dans lesquels je serai à l'aise.

6). Je prends mes dispositions pour être à l'heure au lieu des épreuves : pratiquement aucun retard n'est toléré.
Je garde une marge de 15 minutes sans plus pour ne pas trop attendre.

▪ L'après midi :

1). J'évite de faire la sieste, pour m'endormir normalement le soir.

2). Pour ne pas accentuer mon anxiété, j'évite tout contact avec d'autres candidats ou des personnes stressantes.

▪ Je contrôle mon alimentation :

1). Mon alimentation est riche en sucres lents, par exemples des pattes pour avoir suffisamment d'énergie le jour J.

2). Au dîner, pour bien dormir :
– j'évite les plats indigestes (plats lourds),
– J'évite la viande,
– J'évite le riz,

3). J'évite aussi les fortes doses de café et de tabacs.

▪ Le soir :

1). J'évite de m'endormir trop tôt.

2). Je ne prends pas de médicaments sans les avoir testé, sinon je risque d'être défaillant le lendemain.

3). **J'utilise deux réveils** ou je me fais réveiller par quelqu'un.

16. Le Jour J :

▪ Avant l'épreuve :

1). Je prends une douche rapide.

2). Je soigne mon petit déjeuner :
— Je commence par une orange ou un jus de fruits.
— Je prends ensuite des céréales sucrées avec du lait ou un autre liquide pour bien me déshydrater.
— Je complète par un peu de pain, une bonne confiture ou du beurre éventuellement un œuf préparé comme je l'aime.

3). En partant, j'emporte tout ce que j'ai préparé la veille :
je n'oublie rien surtout pas ma montre ni des piles pour ma calculatrice.

4). J'ai confiance en moi, je suis dans la peau d'un vainqueur.

5). J'arrive sur place 15 minutes avant l'épreuve.

6). En attendant les épreuves, je contrôle mon anxiété.

▪ Pendant l'épreuve :

1). Je ne me laisse pas dérouter par le sujet, je prends mon temps pour approfondir la lecture : je ne pense à rien d'autres.

2). Je me demande à quelle partie du programme se rattache le sujet.

3). Je travaille montre en main.

4). Je réponds au moins à l'essentiel, quitte à passer sur les détails.

5). Je ne quitte pas la salle avant l'heure.

▪ Après l'épreuve :

1). Je fuis tout ce qui peut me déstabiliser.

2). Entre les épreuves écrites je reprends quelques fiches de révision pour éclaircir certains points qui me tracassent.