Corrigé PROBABILITES CONDITIONNELLES ET VARIABLES ALEATOIRES

Activités

Activité 1.1Définition d'une probabilité conditionnelle

Erratum 35 élèves sont des garçons et 07 garçons ont 17 ans.

	Garçons	Filles	Total
Avoir 17 ans	07	15	22
Ne pas avoir 17 ans	28	02	30
Total	35	17	52

Soit : A : « l'élève a 17 ans», B : « l'élève est un garçon» .

1) A partir du tableau, on déduitque $(A) = \frac{22}{52}$, $P(B) = \frac{35}{52}$.
2) L'évènement A ∩ B : « L'élève est un garçon et a 17 ans » et on a$P(A \cap B) = \frac{7}{52}$.
3) On sait que l'élève est un garçon, et la probabilité qu'il ait 17 ans est $P' = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$
4) On a :$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{17/52}{35/52} = \frac{1}{5} = P'$.

Activité 1.2Evènements indépendants

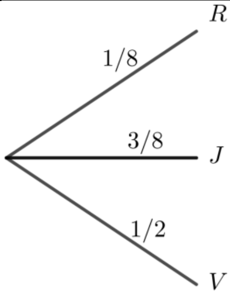
On considère un jeu de 32 cartes. On tire au hasard une carte et on note la figure obtenue.
Soient les évènements : A : « la carte tirée est une Dame » et B : « la carte tirée est un cœur ».
Soit Ωl'univers associé à cette expérience aléatoire et P la probabilité sur Ω.

1) On a :$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
2) Calcule $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/32}{1/4} = \frac{1}{8}$et $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/32}{1/8} = \frac{1}{4}$.
3) On a :$P(A) = P_B(A) = \frac{1}{8}$et $P(B) = P_A(B) = \frac{1}{4}$.
4) On a : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$.
5) On a : $P(\overline{A}) = \frac{7}{8} = P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{7}{8}$et $P(\overline{B}) = \frac{3}{4} = P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$.
6) On a : $P(\overline{A}) = P_{\overline{B}}(\overline{A})$.

Activité 1.3 Arbre de probabilité ou arbre pondéré

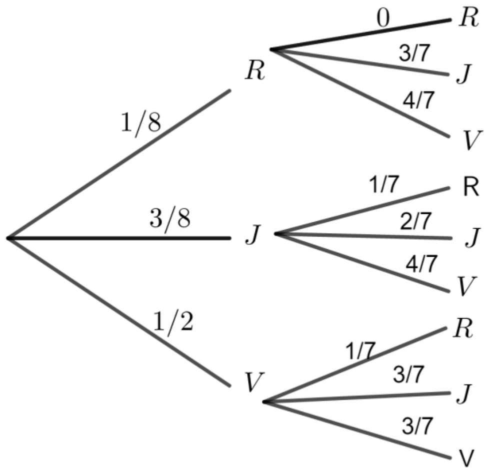
On considère une urne contenant 8 boules indiscernables au toucher : une rouge, trois jaunes et quatre vertes. On tire une boule au hasard. Considérons les évènements :
R : « obtenir une boule rouge » ; J : « obtenir une boule jaune » et V : « obtenir une boule verte ».

1) $P(R) = \frac{1}{8}$; $P(J) = \frac{3}{8}$et $P(V) = \frac{1}{2}$.
2) Fais un arbre de choix et écris les probabilités obtenues



$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=1$$

3) On tire encore une boule au hasard sans remise de la première boule tirée dans l'urne.
   a) $P_R(R)=0$; $P_R(J)=\frac{3}{7}$ et $P_R(V)=\frac{4}{7}$.
   $P_J(R)=\frac{1}{7}$; $P_J(J)=\frac{2}{7}$ et $P_J(V)=\frac{4}{7}$ / $P_V(R)=\frac{1}{7}$; $P_V(J)=\frac{3}{7}$ et $P_V(V)=\frac{3}{7}$.
   b) Complète l'arbre de choix puis les probabilités obtenues à la question 3-a) sur les branches de l'arbre.

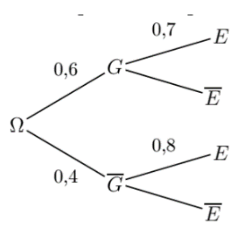


4) Fais la somme des probabilités des trois branches issues de R ; issue de J ; issue de V.

$$P_R=0+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1 \quad ; \quad P_J=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=1 \quad ; \quad P_V=\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=1$$

Activité 1.4 Formules des probabilités totales

L'arbre de probabilité ci-contre représente une situation de probabilité dans un univers Ω.



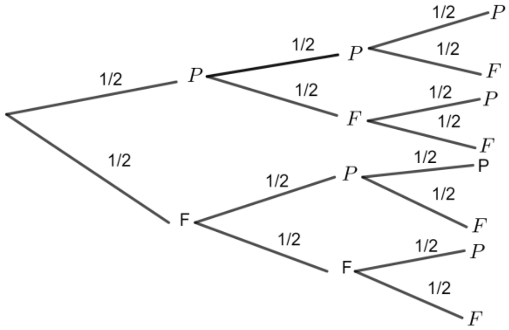
1) $P(G\cap E)=P_G(E)\times P(G)=0{,}7\times 0{,}6=0{,}42$;
   $P(\overline{G}\cap E)=P_{\overline{G}}(E)\times P(\overline{G})=0{,}8\times 0{,}4=0{,}32$.
2) Puisque G et $\overline{G}$ forment une partition de Ω, alors $E=(G\cap E)\cup(\overline{G}\cap E)$,

$$P(E)=P(G\cap E)+P(\overline{G}\cap E)=0{,}42+0{,}32=0{,}74$$

Activité 2.1 Variable aléatoire et loi de probabilité

Un joueur lance trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
Pour chaque lancer, le joueur gagne 100 F s'il obtient « pile » et on perd 50 F s'il obtient « face ».
Alidou, après avoir pris connaissance des règles, joue à une partie de trois lancers.

1) Arbre de choix



$$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP\ ; FFF\}$$

$$card\ (\Omega) = 2^3 = 8$$

2) Les gains possibles d'Alidou.

$\boldsymbol{\omega}$	PPP	PPF	PFP	FPP	PFF	FPF	FFP	FFF
gains	300	150	150	150	0	0	0	-150

$$X(\Omega) = \{-150; 0; 150; 300\}$$

3) Pour chaque éventualité ω de Ω, on note $X(\omega)$le gain algébrique d'Alidou associé à ω.

a) Détermine les éventualité ω pour lesquelles, $X(\omega) = 150$.

L'ensemble de ces éventualités est noté : $(X = 150)$.

$$(X = 150) = \{PPF; PFP; FPP\}$$

b) Calcule $P(X = 150)$.

$$P(X = 150) = \frac{card(X = 150)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

c) Détermine pour chaque valeur k prise par X, la probabilité $P(X = k)$.

$$P(X = -150) = \frac{card(X = -150)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{8}\ ;\ P(X = 0) = \frac{card(X = 0)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{8};$$

$$P(X = 300) = \frac{card(X = 150)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{8}$$

x_i	-150	0	150	300	$Total$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Activité 2.2Fonction de répartition

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,10	0,2	0,20

1) Ecris les évènements suivants comme la réunion de plusieurs évènements

$$(X \leq 0) = (X = -1) \cup (X = 0);\quad (X \leq 1) = (X = -1) \cup (X = 0) \cup (X = 1);$$

$$(X \leq 2) = (X = -1) \cup (X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2);$$

$$(X \leq 3) = (X = -1) \cup (X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3)$$

2) Calcule la probabilité des évènements ci-dessus.

$$P(X \leq 0) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5;$$

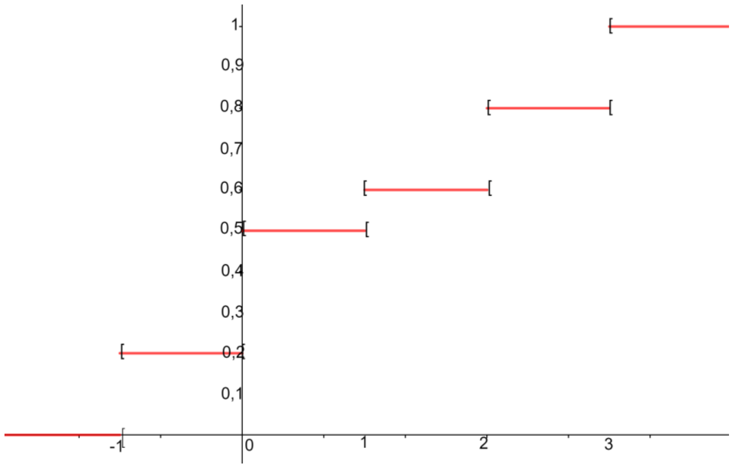
$$P(X \leq 1) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}6$$

$$P(X \leq 2) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}8$$

$$P(X \leq 3) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

3) Représente dans un repère orthonormé (O ; I ; J) ; la courbe de la fonction de la fonction

$$F: x \mapsto P(X \leq x).$$



Activité 2.3 Espérance d'un variable aléatoire

Un casino propose le jeu suivant : le joueur mise 16 euros, lance un dé bien équilibré et la banque lui rembourse le carré du nombre obtenu. On veut savoir si ce jeu est-il avantageux pour le joueur.

Désignons par X le gain, en Francs, du joueur pour une partie.

1) On a : Ω={1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6} et $X(\Omega) = \{-15; -11; -7; 0; 9; 20\}$.
2) La loi de probabilité de X.

x_i	-15	-11	-7	0	9	20
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3) Le gain moyen par partie du joueur est

$$\frac{-15 - 11 - 7 + 0 + 9 + 20}{6} = -0{,}66$$

Le joueur peut-il espérer perdre -0,66€ par partie.

4) On a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = -15 \times \frac{1}{6} - 11 \times \frac{1}{6} - 7 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{1}{6} = -0{,}66;$$

On constate que le nombre $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ est le gain moyen par partie du joueur.

Activité 2.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	0	2	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

1) Complète le tableau ci-dessus.
2) Calcule l'espérance mathématique E(X).

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = -2 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

3) La Variance$V(X) = (-2-1)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2 + (4-1)^2 = 9 + 1 + 1 + 9 = 20$.

4) L'écart-type$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{20} = 4{,}47$.

Activité 3.1 Epreuve et Schéma de Bernoulli

1) On lance une fois une pièce de monnaie équilibrée. On a 2 résultats possibles : Pile (P) ou Face (F)
2) On lance 5 fois de suite cette même pièce de monnaie.
   a) On a $2^5 = 32$ résultats possibles.
   b) On peut dire qu'on 5 fois la première expérience, qui est aléatoire et indépendante pour obtenir cette expérience.

Activité 3.2 Loi binomiale

Soit une suite finie de n expériences aléatoires identiques 1,2,...,n, indépendantes deux à deux ayant chacune deux issues possibles : un évènement A se réalise (succès) ou ne se réalise pas (échec).
Notons p la probabilité de l'évènement A.

1) Quelle est la probabilité de l'évènement $\overline{A}$.

$$P(\overline{A}) = 1 - p$$

2) A_k l'événement "A se réalise exactement k fois durant les n expériences".
   a) Justifie qu'il y a C_n^k façons de placer les k évènements A parmi les n expériences aléatoires.

L'évènement A_k peut se réaliser de plusieurs manières chacune deux à deux incompatibles, par exemple A peut se réaliser durant les k premières expériences aléatoires et ne pas se réaliser durant les n - k dernières expériences aléatoires.
Il y a donc C_n^k façons de " placer " les k évènements A parmi les n expériences aléatoires.

   b) Puisque les expériences sont indépendantes, quelle est la probabilité de l'une de ses façons ?

La probabilité de l'une de ses façons est : $P(A)^k P(\overline{A})^{n-k} = p^k(1-p)^n - k$

   c) Justifie que la probabilité de $A_k$est $P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Puisqu'il y a C_n^k façons de " placer " les k évènements A parmi les n expériences aléatoires, on a :

$$P(A_k) = P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

   d) Sachant que $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, démontre que $E(X) = np$.

$$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k} \quad , k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$$

On a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{i=0}^{n-1} C_i^{k-1} \times p^i \times (1-p)^{n-(i+1)} \; (on\ a\ posé\ i = n-1)$$

$$= np \sum_{i=0}^{n-1} C_i^{k-1} \times p^i \times (1-p)^{n-(i+1)} == np \sum_{i=0}^{n-1} C_i^{k-1} \times p^i \times (1-p)^{(n-1)-i}$$

$$E(X) = np$$

$$= np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i q^{(n-1)-i} = np \times 1 = np$$

L'espérance E(X) de X vaut : $E(X) \; = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0 = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p.$

La variance V(X) de X vaut : $V(X) \; = P(X = 1) \times \left(1 - E(X)\right)^2 + P(X = 0) \times \left(0 - E(X)\right)^2$

$$= p \times (1 - p)^2 + (1 - p) \times (0 - p)^2$$
$$= p(1 - p)2 + p2(1 - p)$$
$$= p(1 - p)(1 - p + p)$$
$$= p(1 - p).$$

Exercices de fixation

1.1.1 ok

1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux

1.1.2ok

Soient les évènements V : « avoir un véhicule au panneau stop » et H : « être un homme »

$$P_V(H) = \frac{\mathrm{P(H \cap V)}}{\mathrm{P(V)}} = \frac{1}{27} : \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

1.1.3 ok

Soit E et F deux évènements d'un univers Ω de probabilités non nulles.

1) Calcule la probabilité conditionnelle $P_E\left(\overline{E}\right)$de E sachant $\overline{E}$.

$$P_E\left(\overline{E}\right) = \frac{P\left(E \cap \overline{E}\right)}{P(E)} = 0 \; car \; card\left(E \cap \overline{E}\right) = \emptyset$$

2) Supposons que $E \subset F$.

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{card(E \cap F)}{card(\Omega)}}{P(E)} = \frac{\frac{card(E)}{card(\Omega)}}{P(E)} = \frac{P(E)}{P(E)} = 1$$

1.2.1 ok

Ω = {(F, F),(F, G),(G, F),(G, G)} (équiprobabilité)

A = {(F, G),(G, F)} ⇒ $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; B = {(F, G),(G, F),(G, G)} ⇒ $P(B) = \frac{3}{4}$;

A ∩ B = A ⇒ P(A ∩ B) =$\frac{1}{2}$ ≠ P(A)P(B) ⇒ A et B ne sont pas indépendants

1.2.2 Ok

On a alors $A \cap B$: « obtenir un valet de carreau ou une dame de carreau ou un roi de carreau ».

On a $(A \cap B) \; = \frac{3}{32}$.

De même $P(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ et $(B) = \frac{1}{4}$.

On a $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$, les évènements sont donc indépendants.

1.2.3 Ok

On a : $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3} \; et \; P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

On voit que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

1.2.4 Ok

$$P(A) = \frac{5}{36}\ ;\ P(B) = \frac{18}{36}\ \ et\ \ P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$
$$P(A) \times P(B) = \frac{5}{36} \times \frac{18}{36} = \frac{5}{72}$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

1.2.5 ok

1) Les évènements R et I sont-ils indépendants?

On est dans une situation d'équiprobabilité

$$P(I) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\ \ et\ \ P_R(I) = \frac{2}{3}$$

$P(I) = P_R(I)$donc I et R sont indépendants.

2) Les évènements B et I sont-ils indépendants?

$$P(I) = \frac{2}{3}\ \ et\ \ P_B(I) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(I) \neq P_B(I)$donc I et B ne sont pas indépendants.

1.2.6 Ok

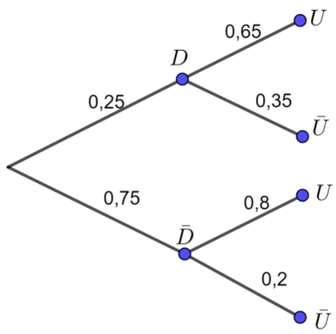
On a le tableau suivant :

	J	$\bar{J}$	Total
T	4	28	32
$\overline{T}$	8	56	64
Total	12	84	96

1) $P(J \cap T) = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$ et $P(J) \times P(T) = \frac{12}{96} \times \frac{32}{96} = \frac{1}{24}$ donc J et T sont des évènements indépendants.
2) $P(J \cap \overline{T}) = \frac{8}{96} = \frac{1}{12}$ et $P(J) \times P(\overline{T}) = \frac{12}{96} \times \frac{64}{96} = \frac{1}{12}$ donc J et $\overline{T}$ sont des évènements indépendants.

1.3.1ok

On a l'arbre suivant :

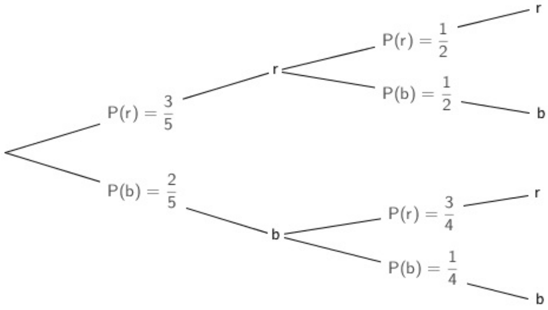


1.3.2ok

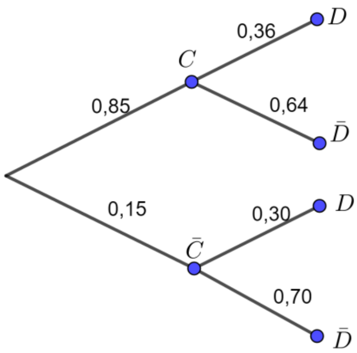
1) Donne : $P(R_1) = \frac{3}{5}$; $P(R_2/V_1) = \frac{3}{5}$;$P(R_2/R_1) = \frac{3}{5}$; $P(V_2/R_1) = \frac{2}{5}$
2) $P(R_1 \cap V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$; $P(V_1 \cap V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

1.3.3ok

Représentons cette expérience dans un arbre pondéré.



1.3.4ok



1.4.1ok

1) B ; 2) C ; 3) A ; 4) B ; 5) A ; 6) C.

1.4.2ok

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$
$$P(B) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}18$$

1.4.3ok

Soient les évènements A : « Avoir un accident » et J : « être un jeune conducteur ».

D'après la formule des probabilités totale,

$$P(A) = P(J) \times P_J(A) + P(\bar{J}) \times P_{\bar{J}}(A)$$
$$P(A) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}26$$

1.4.4ok

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 10 boules; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 6 blanches. On tire au hasard une boule.

Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche?

Soient les événements B : « on obtient une boule blanche » et U_i : « on tire la boule dans l'urne U_i ».

$\{U_1,U_2,U_3\}$ est un système complet d'événements, et :

$$P(B) = P(U_1) \times P_{U_1}(B) + P(U_2) \times P_{U_2}(B) + P(U_3) \times P_{U_3}(B)$$
$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$$

2.1.1ok

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω.

1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux ; 4) Vrai ; 5) Faux ;6) Faux

2.1.2ok

1) Donne l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

$$X(\Omega) = \{19; 23; 25; 28; 33\}$$

2) Etablis la loi de probabilité de X.

x_i	19	23	25	28	33
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{19}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{1}{19}$

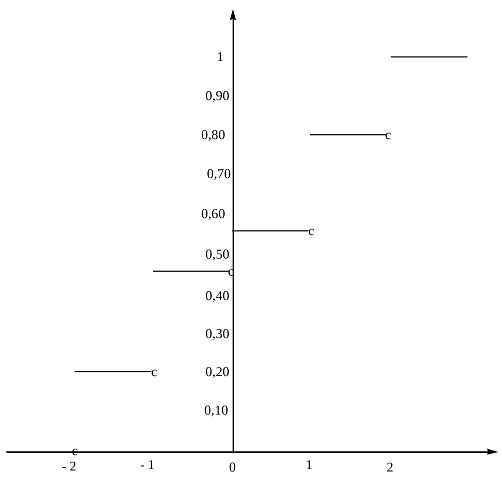
2.1.3Ok

y_i	-100	0	100	200	300
$P(Y = y_i)$	0,30	0,15	0,25	0,20	0,10

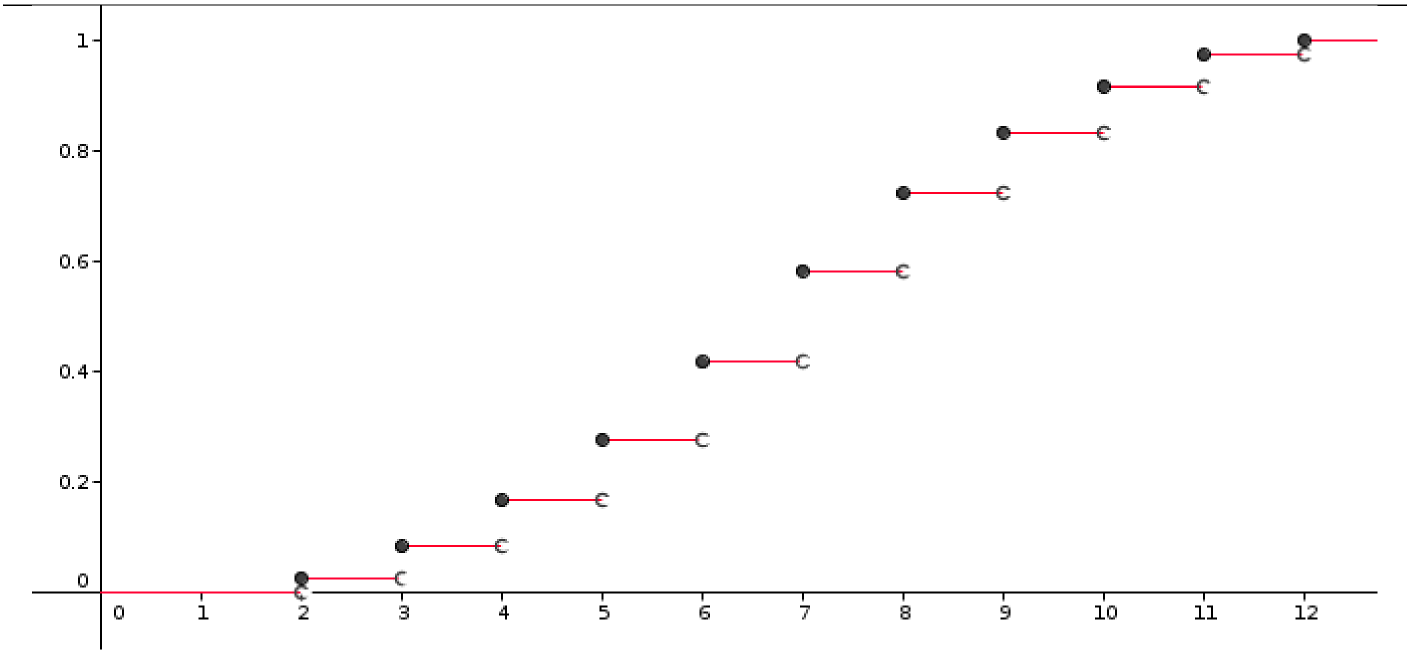
2.2.1 Ok

4) Définis la fonction de répartition F.
- Pour $x < -2, F(x) = 0$;
- Pour $-2 \leq x < -1, F(x) = 0{,}20$;
- Pour $-1 \leq x < 0, F(x) = 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}45$;
- Pour$0 \leq x < 1, F(x) = 0{,}45 + 0{,}10 = 0{,}55$;
- Pour$1 \leq x < 2, F(x) = 0{,}55 + 0{,}25 = 0{,}80$;
- Pour$2 \leq x, F(x) = 0{,}80 + 0{,}20 = 1$.

5) Représentation graphique



2.2.2 ok



1) La fonction de répartition F de Z.
   - Pour $x < 2, F(x) = 0$;
   - Pour $2 \leq x < 3, F(x) = 0,$;
   - Pour $3 \leq x < 4, F(x) = 0,$;
   - Pour$4 \leq x < 5, F(x) = 0,$;
   - Pour$5 \leq x < 6, F(x) = 0,$;
   - Pour$6 \leq x < 7, F(x) = 0,.$
   - Pour $7 \leq x < 8, F(x) = 0,$;
   - Pour $8 \leq x < 9, F(x) = 0,$;
   - Pour $9 \leq x < 10, F(x) = 0,$;
   - Pour$10 \leq x < 11, F(x) = 0,$;
   - Pour$11 \leq x < 12, F(x) = 0,$;
   - Pour$12 \leq x, F(x) = 1.$

2) Détermine la loi de probabilité de Z.

2.3.1ok

1) Complétons le tableau.

x_i	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,10	0,2	0,20
$x_i P(X = x_i)$	-0,2	0	0,10	0,4	0,6

2) Calculons l'espérance mathématique E(X).

$$E(X) = -0{,}2 + 0 + 0{,}10 + 0{,}4 + 0{,}6 = 0{,}9$$

2.3.2 Ok

Calculons l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{16} + 7 \times \frac{5}{16} = \frac{3}{8}$$

2.3.3Ok

Calculons E(Y).

$$E(Y) = -500 \times 0{,}25 + (-300) \times 0{,}51 + 200 \times 0{,}1 + 800 \times 0{,}14 = -146$$

1. Interpréter ce résultat.

$E(Y) = -146 < 0$donc le jeu est désavantageux pour le joueur.

2.4.1ok

Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire.

x_i	-3	0	2	3	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

Calcule la variance et l'écart-type de X.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i = \left(x_1 - E(X)\right)^2 p_1 + \left(x_2 - E(X)\right)^2 p_2 + \ \dots + \ \left(x_n - E(X)\right)^2 p_n$$

Autrement $V(X) = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ \dots + p_nx_1^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$.

2.4.2 L'espérance d'une variable aléatoire Y est 24 et celle de Y^2 est 595.

La variance

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 595 - 24^2 = 19.$$

Ecart type $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{19} = 4{,}36$

3.1.1ok

Pour chacune des épreuves suivantes, indique s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli :

1) On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.

- **On vérifie que la carte est un as** ;Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte est un as. »
- **On vérifie que la carte est une figure (roi, dame ou valet)** ; Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte est une figure. »
- **On regarde la couleur de la carte (pique, cœur, carreau ou trèfle)** ; Quatre issues sont possibles. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.
- **On regarde si la carte n'est pas un pique** ; Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte n'est pas un pique. »
- **On vérifie que la carte est un pique** ; Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La carte est un pique. ».
- **On regarde la valeur de la carte (as, 2, 3, etc.) :** Treize issues sont possibles. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.

2) Dans un parking, on regarde au hasard une des voitures stationnées :

- **On regarde si le véhicule est électrique ;**Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « La voiture est électrique. »
- **On regarde la couleur du véhicule ;**plusieurs issues sont possibles. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.
  - **On vérifie si l'immatriculation se termine par un Z** ;Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « L'immatriculation se termine par un Z. »

- **On regarde la longueur du véhicule en centimètre** : plusieurs issues sont possibles. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.
- **On regarde si la longueur du véhicule est inférieure ou égale à 450 centimètres** : Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de succès « la longueur du véhicule est inférieure ou égale à 450 centimètres. »

3.1.2 ok
Epreuves de Bernoulli : « obtenir 2 » ; « obtenir 4 » ;
Pas épreuves de Bernoulli : « obtenir un chiffre différent de 3 » ; « obtenir un chiffre plus petit que 5 »

3.1.3 ok
Pour chacun des événements ci-dessous, préciser si un schéma de Bernoulli peut modéliser l'expérience. On effectue dix tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant trois boules rouges, quatre boules noires et une boule verte, toutes indiscernables au toucher. On regarde la couleur des boules tirées.

- La première boule tirée est verte : schéma de Bernoulli
- On a obtenu exactement trois boules noires : schéma de Bernoulli
- La cinquième boule tirée est rouge : schéma de Bernoulli
- C'est au cinquième tirage qu'on a tiré une boule noire pour la première fois : pas schéma de Bernoulli
- On a obtenu au plus cinq boules rouges : pas schéma de Bernoulli.

3.1.4 ok
Pour chaque cas ci-dessous, justifie que cette expérience aléatoire correspond bien à une épreuve de Bernoulli en précisant le succès et la probabilité de celui-ci.
Cas 1 : Au début d'un jeu de mémoire, seize cartes sont placées face cachée sur une table.
Jennifer retourne une carte qui montre un palmier. Elle sait qu'une autre carte (et seulement une) représente un palmier. Elle doit donc, au hasard, retourner une seconde carte pour espérer retrouver un palmier.

L'épreuve consistant à retourner une autre carte et regarder si l'évènement A : « la carte montre un palmier » est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) avec une probabilité $P(A) = \frac{1}{15}$ et "A n'est pas réalisé" (Echec).

Cas 2 : Dans un jeu télévisé, un candidat doit piocher au hasard une boule dans une urne contenant 20 boules indiscernables au toucher dont une seule est noire. Le candidat perd s'il pioche la boule noire.

L'épreuve consistant à piocher au hasard une boule dans l'urne et regarder si l'évènement A : « la boule est noire » est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) avec une probabilité $P(A) = \frac{1}{20}$et "A n'est pas réalisé" (Echec).

Cas 3 : Gérard possède cinq cartes de fidélité de magasins différents dans sa poche. Ces cinq cartes ont toutes le même format et sont indiscernables au toucher.
Au moment du passage en caisse dans un de ces magasins, il choisit au hasard une carte de fidélité.

L'épreuve consistant à choisir au hasard une carte de fidélité de sa poche et regarder si l'évènement A : « la carte est gagnante» est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) avec une probabilité $P(A) = \frac{1}{5}$et "A n'est pas réalisé" (Echec).

3.2.1 ok

- **Exp 1** : On jette un dé équilibré 10 fois de suites et on considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de réalisations de l'évènement A : "Obtenir 5 ou 6".

L'épreuve consistant à tirer le dé et regarder si l'évènement A est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) et "A n'est pas réalisé" (Echec).
- On répète cette épreuve à l'identique et de manière indépendante.
- X compte le nombre de succès, c'est à dire le nombre de réalisations de l'évènement A.
Par ailleurs,
- Comme le dé est équilibré, P(A)=1/6+1/6=1/3. On en déduit que p=1/3.
- On répète l'épreuve 10 fois donc n=10.
Par conséquent, X suit la loi binomiale de paramètres p=1/3 et n=10.

- **Exp 2** : Un QCM est composé de 5 questions et chacune d'elle comporte 3 réponses au choix A, B ou C dont une seule est correcte. Poka décide de répondre au hasard à toutes les questions. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de bonnes réponses de Poka.

L'épreuve consistant à répondreau hasard à toutes les questions si l'évènement A : « La réponse est exacte » est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) et "A n'est pas réalisé" (Echec).
- On répète cette épreuve à l'identique et de manière indépendante.
- X compte le nombre de succès, c'est à dire le nombre de réalisations de l'évènement A.
Par ailleurs,
- Comme les réponses sont données au hasard, P(A)=1/3.
- On répète l'épreuve 5 fois donc n=5.
Par conséquent, X suit la loi binomiale de paramètres p=1/3 et n=5.

- **Exp 3** : Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires en argent. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre et l'épaisseur sont conformes. On suppose que la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme est égale à 0,9. Soit X la variable aléatoire, qui à tout échantillon de 10 pièces associe le nombre de pièces conformes.

L'épreuve consistant à répondre au hasard à toutes les questions si l'évènement A : « La pièce est conforme » est réalisé ou non comporte 2 issues : "A est réalisé" (Succès) et "A n'est pas réalisé" (Echec).
- On répète cette épreuve à l'identique et de manière indépendante.
- X compte le nombre de succès, c'est à dire le nombre de réalisations de l'évènement A.
Par ailleurs,
- Comme les pièces sont prélevées au hasard, on a : P(A)=0,9.
- On répète l'épreuve 10 fois donc n=10.
Par conséquent, X suit la loi binomiale de paramètres p=0,9 et n=10.

3.2.2 ok

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n=4 et p=0,32.

1) Les valeurs prises par X sont 1 ;2 ; 3 et 4.
2) Calculons P(X=0) et P(X=2).

$$P(X=0) = C_4^0 \times (0{,}32)^0 \times (0{,}68)^4 = 0{,}214$$

$$P(X=2) = C_4^2 \times (0{,}32)^2 \times (0{,}68)^{4-2} = 0{,}284$$

3) Calculons l'espérance E(X), la variance V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable X.

Espérance $E(X) = 4 \times 0{,}32 = 1{,}28$

Variance $V(X) = 4 \times 0{,}32 \times 0{,}68 = 0{,}8704$

Ecart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}8704} = 0{,}933$

3.2.3ok

« Lancer le dé » possède 2 issues : succès (obtenir le chiffre 1) et échec (ne pas obtenir le chiffre 1)

Soit à déterminer la probabilité du succès :

La probabilité p du succès est la probabilité d'obtenir le chiffre 1, donc $p = \frac{1}{6}$.

La probabilité q de l'échec est la probabilité de ne pas obtenir le chiffre 1, donc $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

On répète 10fois cette expérience, de manière indépendante.

X= nombre de fois on obtient le chiffre 1.

$$P(X=4) = C_{10}^4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10-4} = 0{,}054$$

3.2.4ok

$$P(X=16) = C_{100}^{16} \times (0{,}15)^{16} \times (0{,}85)^{100-16} = 0{,}104$$

Exercices de renforcement

Ex 1 ok

On choisit un élève au hasard et on note On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 150 élèves. Ainsi *Card*(Ω)=32 .

Il y a équiprobabilité dans le choix des élèves. Ainsi pour tout événement A, $P(A) = \frac{Card\ A}{Card\Omega}$.

	Basket(B)	Foot(F)	Ten(T)	Total
Angl (A)	18	27	45	90
Allem (D)	9	18	33	60
Total	27	45	78	150

1) On a :

$$P(D \cap T) = P(T) \times P_T(D) = \frac{78}{150} \times \frac{33}{78} = \frac{11}{50}$$

$$P(T) \times P(D) = \frac{78}{150} \times \frac{60}{150} = \frac{26}{125}$$

On voit que $P(D \cap T) \neq P(T) \times P(D)$ et donc les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » ne sont pas indépendants

2) On a :

$$P(A \cap F) = P(F) \times P_F(A) = \frac{45}{150} \times \frac{27}{45} = \frac{9}{50}$$

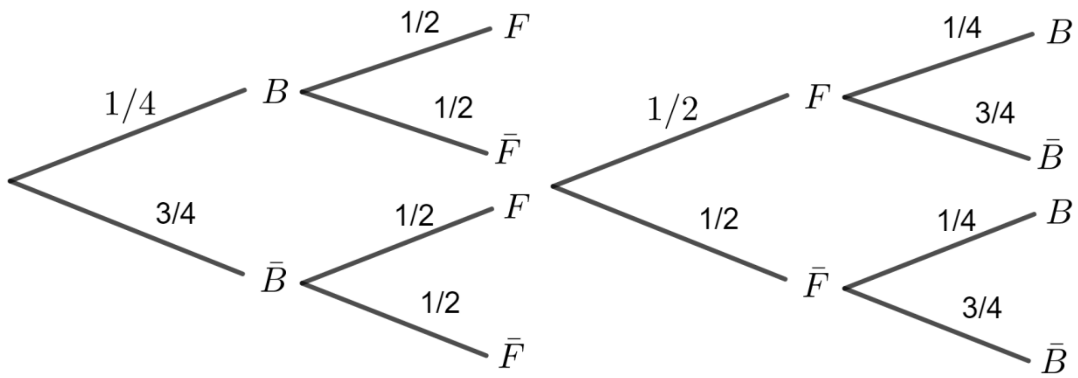
$$P(A) \times P(F) = \frac{90}{150} \times \frac{45}{150} = \frac{9}{50}$$

On voit que $P(A \cap F) = P(A) \times P(F)$ donc les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la football » sont indépendants.

Ex 2 ok

1) a/ $P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$et $P(C \cap R) = \frac{1}{32}$.
   b/ $P(C \cap R) = P(C) \times P(R) = \frac{1}{32}$ donc les évènements C et R sont indépendants.
2) a/ F est composé de 4 dames (cœur, carreau, pique, trefle) et des 7 autres cartes pique (sauf la dame) donc F a 11 éléments.
   b/ $P(F) \times P(C) = \frac{11}{32} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{128}$ et $P(F \cap C) = \frac{1}{32}$ donc F et C ne sont pas indépendants.

Ex 3ok



Ex 4ok

L'arbre nous renseigne sur le fait que « 35 % des élèves du lycée sont en seconde, et parmi ces élèves de seconde, 80 % sont demi-pensionnaires, etc… ».
1) La somme des poids figurant sur les arêtes au départ de chaque « nœud » doit être égale à 1 (coefficients multiplicateurs traduisant des pourcentages).
2) a) Les élèves de seconde externes représentent une fraction de l'effectif total égale à $0{,}35 \times 0{,}2 = 0{,}07$ soit 7 %.
Les externes représentent donc une fraction égale à$0{,}35 \times 0{,}2 + 0{,}25 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}35$, soit 35 %.
b) Sur 1000 élèves, 350 sont donc externes. Les élèves de terminale externes représentent $1000 \times 0{,}3 \times 0{,}5 = 150$élèves, soit une part égale à $\frac{150}{350} \times 100 = 43\%$

Ex 5ok

1) On a $P(chien) = 0{,}36$donc $P(chien \cap chat) = P_{chien}(chat) \times P(chien) = 0{,}22 \times 0{,}36 = 0{,}079$.
2)On a : $P(chat) = 0{,}30, P_{chat}(chien) = \frac{P(chien \cap chat)}{P(chat)} = \frac{0{,}079}{0{,}30} = 0{,}2633$.

Ex 6ok

1) Le tableau des effectifs représentant la situation.

	Chêne	Pas chêne	Total
Effectifs	70	30	100

2) Les probabilités de M et de C.

$$P(M) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad et\ P(C) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

3) Un chêne est choisie et la probabilité qu'il ne soit pas maladeest $P_C(\overline{M})$.

$$P_C(\overline{M}) = 1 - P_C(M) = 1 - \frac{P(C \cap M)}{P(C)}$$

$$P(\overline{C} \cap M) = P_{\overline{C}}(M) \times P(\overline{C}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$P(M) = P(C \cap M) + P(\overline{C} \cap M)$donc$P(C \cap M) = \frac{1}{10}$

Par conséquent$P_C(\overline{M}) = 1 - \frac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{6}{7}$

4) On choisit un arbre sain et la probabilité qu'il soit un chêne est $P_{\overline{M}}(C)$.

$$P_{\overline{M}}(C) = \frac{P(C \cap \overline{M})}{P(\overline{M})}$$

$P(C) = P(C \cap M) + P(C \cap \overline{M})$donc$P(C \cap \overline{M}) = \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$

Par conséquent

$$P_{\overline{M}}(C) = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

Ex 7ok

Le joueur commet une double faute s'il ne réussit pas sa première balle et sa deuxième balle de service ; la probabilité de commettre une double faute est : $0{,}25 \times 0{,}10 = 0{,}025$ soit dans 2,5% des services.

Ex 8ok

Soit A : « On trouve une pièce d'argent » ; C_1 : « on a ouvert un tiroir du coffre C1 »

1) $P(A) = P_{C_1}(A) \times P(C_1) + P_{C_2}(A) \times P(C_2) + P_{C_3}(A) \times P(C_3) = 0 + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

$$P_A(C_2) = \frac{P(A \cap C_2)}{P(A)} = \frac{P_{C_2}(A) \times P(C_2)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

2) Puisqu'on a déjà pris une pièce d'argent, il faut retomber sur C2. Comme les deux expériences sont indépendantes, on a : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Ex 9ok

Soit les évènements A : « le photocopieur A fonctionne » et B : « le photocopieur B fonctionne »

On a : $P(\overline{A}) = 0{,}04$; $P(\overline{B}) = 0{,}08$et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}25$.

1) Déterminons la probabilité que A et B tombent en panne un jour donné c'est-à-dire $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) \times P(\overline{A}) = 0{,}25 \times 0{,}04 = 0{,}01.$$

2) Déterminons la probabilité que A et B fonctionnent en même temps c'est-à-dire $P(A \cap B)$.

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$donc$P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B)$

On a : $P(\overline{A} \cap B) = P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A}) = 0{,}75 \times 0{,}04 = 0{,}03$.

Ainsi $P(A \cap B) = 0{,}92 - 0{,}03 = 0{,}89$

Ex 10ok

1) Soit les évènements H : « la personne est un homme» et F : « la personne est occupée à fumer »

$P(F) = P(H \cap F) + P(\overline{H} \cap F) = P(H) \times P_H(F) + P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(F) = \frac{12}{20} \times \frac{20}{100} + \frac{8}{12} \times \frac{40}{100} = 0{,}28$.

2) Calculons $P_F(\overline{H})$

$$P_F(\overline{H}) = \frac{0{,}6 \times 0{,}2}{0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}4} = 0{,}43$$

Ex 11ok

Soit les évènements C : « le salarié est un cadre » ; E : « le salarié est un employé » et M : « le salarié est marié »

1) a/ La probabilité pour que ce salarié soit un cadre célibataire $P(C \cap \overline{M})$

$$P(C \cap \overline{M}) = P(C) \times P_C(\overline{M}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12.$$

La probabilité pour que ce salarié soit un employé célibataire $P(E \cap \overline{M})$

$$P(E \cap \overline{M}) = P(E) \times P_E(\overline{M}) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14.$$

b/ Déduisons la probabilité pour que ce salarié soit un célibataire.

$$P(\overline{M}) = P(C \cap \overline{M}) + P(E \cap \overline{M}) = 0{,}26$$

2) La probabilité pour qu'un célibataire soit un cadre :

$$P_{\overline{M}}(C) = \frac{P(C \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{6}{13}$$

La probabilité pour qu'un salarié marié soit un employé :

$$P_M(E) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{28}{37}$$

Ex 12ok

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de réponses exactes.

Soit A l'évènement : « le candidat a répondu au hasard et est reçu ».

$$P(A) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_{10}^{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^1 + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$P(A) = \frac{67}{19683}$$

Ex 13ok

1) Pour la 1ère question, il y a 2 choix. Pour la 2ème question, il y a 2 choix. Pour la 3ème question, il y a 2 choix et pour la 4ème question, il y a 2 choix. Ce qui fait un total de $2^4 = 16$choix.

2) a/ Il n'y a qu'une seule possibilité pour avoir tout juste donc $P(A) = \frac{1}{16}$;

b/ Il n'y a aussi qu'une possibilité pour avoir tout faux donc $P(B) = \frac{1}{16}$;

c/ Il y a 4 possibilités d'avoir exactement une réponse juste : soit elle est pour la 1ère question, soit la 2ème, soit la 3ème et soit la 4ème… D'où $P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$;

d/ Soit $\overline{D}$ l'événement : « ne pas avoir de réponses correctes », autrement dit d'où et donc

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(B) = \frac{15}{16}$$

3) a/ Si 4 réponses sont justes, on a 20 points ;

Si 3 réponses sont justes et une fausse, on a $3 \times 5 - 3 = 12$ points ;

Si deux réponses sont justes et deux fausses, on a $2 \times 5 - 2 \times 3 = 4$ points ;

Si une réponse est juste et trois réponses fausses, on a $5 - 3 \times 3 = -4$ donc 0 points.

Si on a quatre réponses fausses, on a également 0.

Ainsi on a : $X \in \{0; 4; 12; 20\}$

b/ Loi de probabilité de X :

$$P(X=20)=P(A)=\frac{1}{16} \quad ; \quad P(X=12)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$P(X=4)=\frac{C_4^2}{16}=\frac{3}{8}$car les deux réponses justes sont choisies parmi les quatre possibles d'où C_4^2possibilités.

$P(X=0)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$car ce cas regroupe les deux événements B et C.

Ainsi, on a :

X	0	4	12	20
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

c/ Espérance de X

$$E(X)=0\times\frac{5}{16}+4\times\frac{3}{8}+12\times\frac{1}{4}+20\times\frac{1}{16}=5{,}75$$

Ex 14ok

1) a) Dans cett situation d'équiprobabilité, on a : $P(B)=\frac{card(B)}{card\Omega}=\frac{2}{3}$

   b) Si l'événement B est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » vaut $\frac{1}{2}$ et donc $P_B(P)=\frac{1}{2}$.

2) Calculons $P(P\cap B)$

$$P(P\cap B)=P(B)\times P_B(P)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

Calculons $P(P\cap\overline{B})$

On a $P(\overline{B})=\frac{1}{3}$. Si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » est nulle, puisque la pièce truquée possède «deux « faces ». Ainsi $P_{\overline{B}}(P)=0$et $P(P\cap\overline{B})=0$.

Déduisons P(P)

D'après la formule des probabilités totales, $P(P)=P(P\cap\overline{B})+P(P\cap B)=\frac{1}{3}$.

3) Calculons$P(F_n\cap B)$.

Si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers suit une loi binomiale de paramètres n et ½ donc

$$P_B(F_n)=C_n^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi, on a : $P(F_n\cap B)=P(B)\times P_B(F_n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Calculons $P(F_n\cap\overline{B})$

Si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » vaut 1 à chaque lancer, donc la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers vaut 1, c'est-à-dire $P_{\overline{B}}(F_n)=1$ et ainsi $P(F_n\cap\overline{B})=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$.

4) Déduis-en la probabilité de l'évènementF_n.

En utilisant la formule des probabilités totales, on a :

$$P(F_n)=P(F_n\cap B)+P(F_n\cap\overline{B})=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}$$

Ex 15 ok

$$Card(\Omega) = 6 \times 4 = 24$$

1) Déterminons la loi de probabilité de X.

$$X(\Omega) = \{10; 15; 20; 25; 30; 35\}$$

$$P(X = 10) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{24} = \frac{1}{4} \;\; ; \;\; P(X = 15) = \frac{C_2^1 \times 1}{24} = \frac{1}{12} \;\; ; \;\; P(X = 20) = \frac{1 \times C_3^1}{24} = \frac{1}{8} \;\; ;$$

$$P(X = 25) = \frac{1 \times 1}{24} = \frac{1}{24} \;\; ; \;\; P(X = 30) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{24} = \frac{3}{8} \;\; ; \;\; P(X = 35) = \frac{C_3^1 \times 1}{24} = \frac{1}{8} \;\; ;$$

Ainsi, on a :

x_i	10	15	20	25	30	35
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) Représentons graphiquement la fonction de répartition F de X.

Si $x < 10$, alors $F(x) = 0$

Si $10 \leq x < 15$, alors $F(x) = \frac{1}{4}$

Si $15 \leq x < 20$, alors $F(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

Si $20 \leq x < 25$, alors $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$

Si $25 \leq x < 30$, alors $F(x) = \frac{11}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2}$

Si $30 \leq x < 35$, alors $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

Si $35 \leq x$, alors $F(x) = 1$

3) Justifier que l'espérance mathématique E(X) de X est égale à $\frac{275}{12}$.

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{4} + 15 \times \frac{1}{12} + 20 \times \frac{1}{8} + 25 \times \frac{1}{24} + 30 \times \frac{3}{8} + 35 \times \frac{1}{8} = \frac{275}{12}$$

Ex 16ok

La somme des probabilités est égale à 1 donc $0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}15 + a + b = 1$.

Ainsi $a + b = 0{,}3$.

L'espérance est nulle donc $-2 \times 0{,}25 - 1 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}15 + 2a + 3b = 0$.

Ainsi$2a + 3b = 0{,}65$

On obtient donc le système :$\begin{cases} a + b = 0{,}3 \\ 2a + 3b = 0{,}65 \end{cases}$.

Par conséquent $a = 0{,}25$et $b = 0{,}05$.

Ex 17ok

1) $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$;

a) $P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_2^2}{C_5^3} = 0{,}3$; $P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{C_5^3} = 0{,}6$; $P(X = 3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = 0{,}1$.

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,3	0,6	0,1

b) $E(X) = 1{,}8$; $V(X) = \frac{9}{25}$; $\sigma(X) = \frac{3}{5}$.

2) On note B : « Tirer une boule blanche » ; U1 : « Choisir l'urne U1 ».

$$P(U_1 \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} \text{ et } P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{14}{30}$$

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{9}{14}$$

3) $P(3) = \frac{2}{6}$et $P(2) = \frac{4}{6}$.

$$P(A) = P(3 \cap A) + P(2 \cap A) = \frac{2}{6} \times P(X = 1) + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times 2 = \frac{41}{90}$$

$$P(\overline{B}) = \frac{2}{6} \times P(X = 3) + \frac{4}{6} \times \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{7}{90}$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{83}{90}$$

Ex 18ok

1) Fonction de répartition

Si $x < 0$, alors $F(x) = 0$

Si $0 \leq x < 1$, alors $F(x) = 0{,}25$

Si $1 \leq x < 2$, alors $F(x) = 0{,}25 + 0{,}37 = 0{,}62$

Si $2 \leq x < 3$, alors $F(x) = 0{,}62 + 0{,}22 = 0{,}84$

Si $3 \leq x < 4$, alors $F(x) = 0{,}84 + 0{,}10 = 0{,}94$

Si $4 \leq x$, alors $F(x) = 0{,}94 + 0{,}06 = 1$

2) a/ Espérance du vendeur $E(X) = \frac{0\times25+1\times37+2\times22+3\times10+4\times6}{100} = 1{,}35$

b/ Variance et écart type

$$V(X) = \quad et\ \sigma(X) = 1{,}13$$

3) La probabilité que X appartienne à l'intervalle $[E(X) - \sigma; E(X) + \sigma]$ est $P(0{,}22 \leq X \leq 2{,}48)$

$$P(0{,}22 \leq X \leq 2{,}48) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}59$$

Ex 19ok

Soit X la variable aléatoire associant, à chaque partie, le gain algébrique du joueur.

1) a) Détermine la loi de probabilité de X.

$$X(\Omega) = \{-1000; 500; 1000\}$$

$$P(X = -1000) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{23}{49} \quad ; \quad P(X = 1000) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{20}{49} \quad ; P(X = 500) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{49}$$

x_i	-1000	500	1000
$P(X = x_i)$	$\frac{23}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{20}{49}$

b) Vérifie que la probabilité pour que le joueur soit perdant est égale à $\frac{23}{49}$.

Le joueur est perdant si son gain est algébrique est égal à -1000 or $P(X = -1000) = \frac{23}{49}$.

2) Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnantes

Y suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{26}{49}$ (lorsque X=500 et X=1000).

$$P(Y = 2) = C_3^2 \times \left(\frac{26}{49}\right)^2 \times \frac{23}{49} = 0{,}396$$

Ex 20ok

1) Détermine la loi de probabilité de X.

Si la carte tirée est :

- un as, le joueur récupère sa mise est gagne 18€donc $X = m + 18$.
- un roi, le joueur gagne 2 fois sa mise (et perd sa mise) donc $X = 2m$
- une dame, le joueur récupère sa mise donc $X = m - m = 0$
- un valet, le joueur récupère sa misedonc $X = 0$

Dans les autres cas, le joueur perd sa mise donc $X = -m$

Ainsi $X = \{m + 18; 2m; 0; -m\}$

x_i	$m + 18$	$2m$	0	m
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{9}{13}$

2) Calcule E(X) en fonction de m.

$$E(X) = \frac{1}{13}(m + 18) + \frac{1}{13}(2m) + \frac{2}{13}(0) + \frac{9}{13}(-m) = \frac{18 - 6m}{13}$$

3) Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles le jeu est équitable ? Si oui, détermine les.

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow 18 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 3$$

Pour que le jeu soit équitable, le joueur doit miser 3€

Ex 21 ok

1) a/ soit l'évènement A : « aucun client n'est intéressé » : $P(A) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0{,}512$.

b/ soit l'évènement B : « au moins un client est intéressé » :

On a $B = \overline{A}$donc $P(B) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0{,}488$.

c/ Soit l'évènement C : « Au plus un client est intéressé ». C signifie que soit aucun client n'est intéressé soit exactement un client est intéressé.

$$P(C) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 + C_3^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0{,}896$$

2) $P = C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right) = 0{,}096$

Ex 22Annulé

Un parking pour voitures comporte 10 places numérotées de 1 à 10 délimitées pour le stationnement des véhicules.

La probabilité d'occupation d'une place quelconque est égale à 70%. On admet de plus que chaque place a la même probabilité d'être occupée. Un conducteur veut garer au hasard son véhicule sur ce parking.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 places libres quand il se présente à l'entrée du parking ?
2) Quelle est la probabilité pour que les places numérotées 3, 6 et 9 soient libres quand le conducteur se présente à l'entrée du parking ?
3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places libres dont le numéro est multiple de 3.
   a) Donne la loi de probabilité de X.
   b) Détermine l'espérance mathématique de X.
   c) Représente la fonction de répartition de X.

Ex 23ok

A chaque tir la probabilité pour qu'un tireur touche la cible est 0,7.

On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli:
On appelle succès S " le tireur atteint la cible" avec la probabilité p=0,7.
On appelle échec E " le tireur râte la cible" avec la probabilité q=0,3.
On répète trois fois de suite cette expérience de façon indépendante et donc X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,7.

1) La probabilité qu'il atteigne la cible exactement 6 fois est : $P(X=6)=C_{10}^{6}\times 0{,}7^{6}\times 0{,}3^{4}=0{,}2001$
2) La probabilité qu'il atteigne la cible au plus 3 fois est : $P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}0106$
3) La probabilité qu'il atteigne la cible plus de 5 fois est : $P(X>5)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0{,}8973$

Ex 24ok

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de Kpalou.

1) a) Détermine les valeurs prises par X ; puis la loi de probabilité de X.

$$X(\Omega)=\{-200\,;\,-100\,;500\}$$

$$P(X=-200)=\frac{1}{2}\quad ;\quad P(X=-100)=\frac{1}{3}\quad ;\quad P(X=500)=\frac{1}{6}$$

b)Le gain moyen de Kpalou est :

$$E(X)=-200\times\frac{1}{2}+(-100)\times\frac{1}{3}+500\times\frac{1}{6}=-50$$

Le jeu n'est pas équitable, il est désavantageux pour le joueur.

2) Kpalou gagne la partie avec la probabilité $P(X=500)=\frac{1}{6}$

3) a) les gains possibles de Kpalou.

	-200	-100	500
-200	-400	-300	300
-100	-300	-200	400
500	300	400	1000

Les gains possibles sont : -400 ;-300 ;-200 ;300 ;400 ;1000.

a) E : « Kpalou perd les deux parties » ;

$$P(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{6}$$

F : « Kpalou gagne au moins 300 F ».

$$P(F)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$$

4) $P(X\geq 1)\geq 0{,}5\Rightarrow 1-P(X=0)\geq 0{,}5\Rightarrow C_{n}^{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-0}\leq 0{,}5$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\leq 0{,}5$$

$$n\ln\left(\frac{5}{6}\right)\leq -\ln 2$$

$$n\geq 3{,}80$$

Donc il faut 4 parties

Ex 25 ok

Il y a C_{8}^{3} =56 façons de tirer les 3 cubes.

1) a) Obtenir des cubes de couleur différente revient à obtenir exactement 1 rouge 1 vert et 1 jaune, c'est-à-dire obtenir un rouge parmi les 4, et 1 vert parmi les 3 et le jaune :

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times 1}{C_8^3} = \frac{3}{14}$$

b) Obtenir au plus un petit cube c'est n'en obtenir aucun OU en obtenir un seul.

$$P(B) = \frac{C_3^3 + C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{2}{7}$$

2) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

a) Loi de probabilité de X

S'il n'y a aucun petit cube rouge, alors $P(X = 0) = \frac{C_3^0 \times C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$;

S'il y a un seul petit cube rouge, alors $P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_8^3} = \frac{15}{28}$;

S'il y a deux petits cubes rouge, alors $P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$;

S'il y a trois petits cubes rouges, alors $P(X = 3) = \frac{C_3^3 \times C_5^0}{C_8^3} = \frac{1}{56}$.

Ainsi on a :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

b) Calculons l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = \frac{9}{8}$$

3) Les événements sont indépendants. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli dont le Succès : "Obtenir au plus un petit cube" de probabilité p= $\frac{2}{7}$ (Voir question 1.)

Il y a 5 épreuves et on obtient k succès lors des n épreuves.

a) On veut obtenir au moins un succès lors des 5 épreuves. Soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors des 5 épreuves. Il s'agit de calculer P(Y ≥ 1) ou encore 1 – P(Y = 0) :

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - C_5^0 \times \left(\frac{2}{7}\right)^0 \times \left(\frac{5}{7}\right)^5 = 0{,}814$$

b) $P(Y = 3) = C_5^3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 0{,}119$

Exercices d'approfondissement

Ex 26 ok

1) Il y a 4 valeurs possibles pour 1 et autant pour 2, cela donne donc 16 équations possibles. Elles sont équiprobables car elles sont toutes différentes et les dés sont équilibrés.
2) Calculons le discriminant Δ

a/b	1	2	3	4
1	-3	0	5	12
2	-7	-4	1	8
3	-11	-8	-3	4
4	-15	-12	-7	0

Les valeurs possibles pour X sont 0; 1 et 2.
Lorsque $\Delta < 0$, X=0
Lorsque $\Delta = 0$, X=1
Lorsque $\Delta > 0$, X=2 . On a donc

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$

Ex 27ok

$$Card(\Omega) = 6 \times 6 = 36$$

1) Détermine toutes les valeurs prises par X.

Si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ alors $\sin(\alpha + \beta) = 0$; Si $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$ alors $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
Si $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ alors $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = 0$ alors $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$ alors $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ alors $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
Si $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ et $\beta = 0$ alors $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; Si $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$ alors $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$; Si $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$alors $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

$$X(\Omega) = \left\{-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\}$$

2) Etablis la loi de probabilité de X.

$$P(X = -1) = \frac{2 \times 2}{36} = \frac{4}{36} ; P\left(X = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 \times 2}{36} = \frac{4}{36}; P\left(X = -\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times 2}{36} = \frac{4}{36}; P(X = 0) = \frac{4}{36};$$

$$P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times 2 + 2 \times 2}{36} = \frac{8}{36} \quad ; \quad P\left(X = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 \times 2}{36} = \frac{4}{36} \quad ; \quad P(X = 1) = \frac{2 \times 2 + 2 \times 2}{36} = \frac{8}{36}$$

x_i	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$

Ex 28 ok

4) On a $C = \overline{A \cup B}$. Comme A et B sont indépendants on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}02 \times 0{,}1$.
Ainsi on a : $P(C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 0{,}882$.
5) Il y a $0{,}02 - 0{,}002 = 0{,}018$ chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut a ;
De même il y a $0{,}1 - 0{,}002 = 0{,}098$ chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut b ; on a donc$P(D) = 0{,}018 + 0{,}098 = 0{,}116$
6) X suit une loi binomiale B(5 ; 0,882) ;

$$P(E) = P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = C_5^4(0{,}882)^4(0{,}118)^1 + C_5^5(0{,}882)^5(0{,}118)^0 \approx 0{,}891$$

Ex 29ok

PARTIE A

$Card(\Omega) = C_{10}^2$.

1) X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

a) Donnons la loi de probabilité de X.

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$P(X=0) = C_2^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \; ; \; P(X=1) = C_2^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{12}{25} \; ; \; P(X=2) = C_2^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{4}{25}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

b) Calculons l'Esperance mathématique de X.

$$E(X) = 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{4}{5}$$

2) La probabilité pour que les 2 boules tirées soit de même couleur est :

$$\frac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{18}$$

PARTIE B Soit un entier n tel que $2 \leq n \leq 8$.

1) Démontrons que $P(n) = \frac{2n^2-20n+90}{90}$

$$P(n) = \frac{C_n^2 + C_{10-n}^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(10-n)!}{2!(8-n)!}}{45} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(10-n)(9-n)}{2}}{45} = \frac{2n^2 - 20n + 90}{90}$$

2) Déterminons le nombre n de boules blanches pour que P(n) soit minimum

$P(n) = \frac{2n^2-20n+90}{90}$ donc $P'(n) = \frac{1}{90}(4n-20)$

$$P'(n) = 0 \Rightarrow n = 5$$

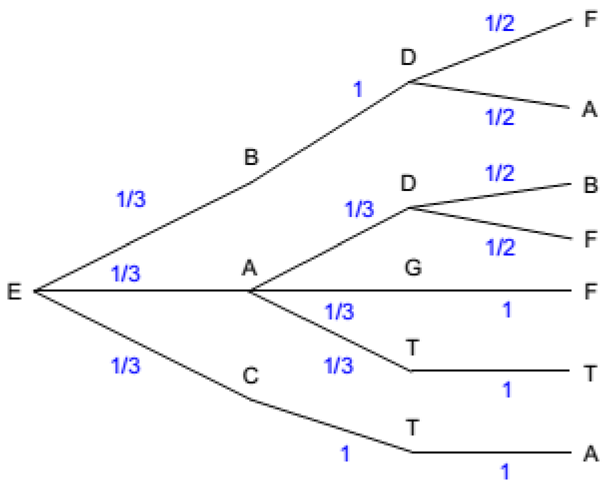
Il faut qu'il y ait 5 boules blanches pour que le minimum soit atteint

Ce minimum est : $P(5) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$.

Ex 30ok

1) On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses.

a) Construisons l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.



b) Montrons que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$.

$$P(EBDF) = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

c) Déterminons la probabilité P1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».

$$P_1 = P(EBDF) + P(EADF) + P(EAGF) = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

d) Déterminons la probabilité P2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».

$$P_1 = P(ECTA) + P(EATC) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

2) L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

a) Calculons la probabilité de l'évènement (X = 1)

$$P(X = 1) = C_{10}^1 \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^9 \approx 0{,}022$$

b) Calculons la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T.

L'évènement $\overline{(X \geq 2)}$ est la réunion des évènements $(X = 0)$et $(X = 1)$.

$$P(X = 0) = C_{10}^0 \times \left(\frac{5}{9}\right)^{10} \approx 0{,}003$$

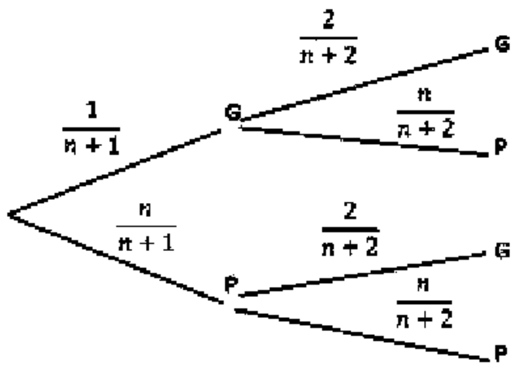
Ainsi, $P(X \geq 2) = 1 - P\overline{(X \geq 2)} = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0{,}975$

c) La probabilité du succès, sous ces conditions est : $P_2 = \frac{1}{9} < \frac{4}{9}$ donc il a tort.

Ex 31 ok

1) Construisons un arbre pondéré décrivant la situation.

Soient les évènements P : « Billet perdant » et G : « Billet gagnant ».



2) Déterminons n de façon que la probabilité pour un joueur de gagner les deux fois soit égale à ⅓.

Si le joueur les deux fois avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n^2 + 3n + 2 = 6$$
$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 4 = 0$$
$$\Delta = 25 = 5^2$$
$$n_1 = -4 \;\; et \; n_2 = 1$$

Il faut donc que n soit égal à 1. Ainsi, le billet de la première loterie a une chance sur deux d'être gagnant et celui de la seconde loterie a deux chances sur trois de l'être.

Ex 32 ok

PARTIE A (Dans cette partie p=0,1)

1) Un avions à 2 moteurs s'écrase lorsque ses 2 moteurs sont en panne donc $p \times p = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$.
2) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne est donc $p \times p \times p \times p = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}0001$.

3) L'état de fonctionnement d'un moteur conduit à deux éventualités : soit il est en panne soit il ne l'est pas. Avoir un moteur en panne est donc une épreuve de Bernoulli. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de moteurs en panne pour un avions à 4 moteurs.
X suit donc une loi binomiale de paramètres n=4 et p=0,1.
$$P(X=3)=C_4^3\times 0{,}1^3\times 0{,}9^1=0{,}0036$$
4) Un avion à 4 moteurs s'écrase s'il a 3 ou 4 moteurs en panne donc la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écraseest $0{,}0001+0{,}0036=0{,}0037$.

PARTIE B (On revient au cas général)

1) Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
Un avions à 2 moteurs s'écrase lorsque ses 2 moteurs sont en panne donc $f(p)=p\times p=p^2$
2) Soit $g(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.
Un avion à 4 moteurs s'écrase s'il a 3 ou 4 moteurs en panne.

La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne est donc $p\times p\times p\times p=p^4$.
La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne est $P(X=3)=C_4^3\times p^3\times(1-p)^1=4(p^3-p^4)$
Ainsi, $g(p)=p^4-4(p^3-p^4)=p^2(-3p^2+4p)$.

3) On pose $h(p)=f(p)-g(p)$.
a) Etude du signe de $h(p)$ en fonction de p.
$$h(p)=f(p)-g(p)=p^2-p^2(-3p^2+4p)=p^2(3p^2-4p+1)$$
$p^2>0$ donc le signe de $h(p)$ dépend de celui de $3p^2-4p+1$.
$$3p^2-4p+1=3(p-1)\left(p-\frac{1}{3}\right)$$
$$\forall p\in]0;\frac{1}{3}[, h(p)>0\ ;$$
$$\forall p\in]\frac{1}{3};1[, h(p)<0\ ;$$
$$\forall p\in\{0;\frac{1}{3}\}, h(p)=0$$

b) D'après la question précédente,
Si $p\in]0;\frac{1}{3}[$, alors $h(p)>0$et donc $f(p)>g(p)$ et par conséquent il vaut mieux monter dans un avions à 4 moteurs ;
Si $p\in]\frac{1}{3};1[$, alors $h(p)<0$ et donc $f(p)<g(p)$ et par conséquent il vaut mieux monter dans un avions à 2 moteurs ;
Si $p\in\left\{0;\frac{1}{3}\right\}$,alors $h(p)=0$ et donc $f(p)=g(p)$ et par conséquent le risque encouru est le même dans les deux avions

Ex 33 ok
Soit Xla variable aléatoire qui associe le nombre de points à un lancer.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
On sait que la formule de l'aire d'un disque de rayon r : πr^2.
L'aire du disque jaune est π, car r=1.
L'aire du disque rouge est $\pi\times 2^2=4\pi$ donc, l'aire de la zone rouge est $4\pi-\pi=3\pi$.
L'aire du disque bleu est $\pi\times 3^2=9\pi$ donc, l'aire de la zone bleue est $9\pi-3\pi-\pi=5\pi$.

L'aire du disque noir est $\pi \times 4^2 = 16\pi$ donc, l'aire de la zone bleue est $16\pi - 5\pi - 3\pi - \pi = 7\pi$.
Ainsi :
La zone jaune représente, en proportion du total de la cible,
$$\frac{\pi}{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi} = \frac{1}{16}$$
La zone rouge représente, en proportion du total de la cible,
$$\frac{3\pi}{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi} = \frac{3}{16}$$
La zone bleue représente, en proportion du total de la cible,
$$\frac{5\pi}{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi} = \frac{5}{16}$$
La zone noire représente, en proportion du total de la cible,
$$\frac{7\pi}{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi} = \frac{7}{16}$$
Mais ces proportions ne sont pas égales aux probabilités cherchées puisque la fléchette peut partir dans le décor une fois sur cinq. En d'autres termes, la probabilité de rater la cible est de 0,2 et celle de l'atteindre est donc de 0,8. Par conséquent, les proportions de chaque zone de la cible doivent être multipliées par 0,8.

Ainsi pour la Zone jaune : $\left(\frac{1}{16}\right) \times 0{,}8 = 0{,}05$; pour la Zone rouge : $\left(\frac{3}{16}\right) \times 0{,}8 = 0{,}15$; pour la Zone bleue : $\left(\frac{5}{16}\right) \times 0{,}8 = 0{,}25$ et pour la Zone noire : $\left(\frac{7}{16}\right) \times 0{,}8 = 0{,}35$. D'où la loi de probabilité suivante :

x_i	0	2	5	9	16
$P(X = x_i)$	0,20	0,05	0,15	0,25	0,35

2) Calculons son espérance et interprète le résultat.
L'espérance est : $E(X) = (0 \times 0{,}2) + (2 \times 0{,}05) + (5 \times 0{,}15) + (9 \times 0{,}25) + (16 \times 0{,}35) = 8{,}7$
On peut espérer obtenir 8,7 points en moyenne par lancer.

3) Calculons son écart-type.
$\sigma = 6{,}17$.

Ex 34 ok

1) Calcul de p_1, p_2 et p_3.

Comme p1, p2 et p3 dans cet ordre, forment des termes d'une progression géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, on a : $p_2 = q \times p_1$ et $p_3 = q \times p_2 = q^2 \times p_1$; c'est-à-dire $p_2 = \frac{1}{2}p_1$ et $p_3 = \frac{1}{4}p_1$.
On a alors $p_1 + p_2 + p_3 = p_1 + \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{4}p_1 = 1$d'où $p_1 = \frac{4}{7}$. Ainsi $p_2 = \frac{2}{7}$et $p_3 = \frac{1}{7}$.

2) a) Les gains possibles de Gnadré sont -500 ; 0 ; 500.
$$X(\Omega) = \{-500; 0; 500\}$$
b) Détermine en fonction de n, la loi de probabilité de X.
$$P(X = -500) = \frac{C_2^1 \times C_n^1}{C_{n+2}^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} = \frac{28n + 8}{7(n+2)(n+1)}$$
$$P(X = 0) = \frac{C_n^2}{C_{n+2}^2} + \frac{2}{7} \times \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} = \frac{7n^2 - 7n + 4}{7(n+2)(n+1)}$$
$$P(X = 500) = \frac{1}{7} \times \frac{C_2^2}{C_{n+2}^2} = \frac{2}{7(n+2)(n+1)}$$

x_i	-500	0	500

$P(X = x_i)$	$\frac{28n+8}{7(n+2)(n+1)}$	$\frac{7n^2-7n+4}{7(n+2)(n+1)}$	$\frac{2}{7(n+2)(n+1)}$

3) n=5 ;

a) Calcul de E(X).

Pour n=5 :

x_i	-500	0	500
$P(X = x_i)$	$\frac{148}{294}$	$\frac{144}{294}$	$\frac{2}{294}$

$$E(X) = -500 \times \frac{198}{294} + 0 \times \frac{144}{294} + 500 \times \frac{2}{294} = -248{,}3$$

b) Détermine et construis la fonction de répartition F de X.

Si $x < -500$, alors $F(X) = 0$;

Si $-500 \leq x < 0$, alors $F(X) = \frac{148}{294}$;

Si $0 \leq x < 500$, alors $F(X) = \frac{148}{294} + \frac{144}{294} = \frac{292}{294}$;

Si $500 \leq x$, alors $F(X) = 1$;

Situations d'évaluation / complexe

Ex 35 ok

Erratum

- Si la 1ère boule tirée est bleue, on gagne 1000F.
- Si la 2ème boule tirée est verte, on gagne 500F *(cette somme peut éventuellement se cumuler avec la première).*
- Dans les autres cas, on ne gagne rien.

  Avant chaque partie, Aïman doit s'acquitter d'un montant de 800F.

Aiman gagne 1000F si le tirage est (B ;B) donc le gain algébrique est 200F ;

Aiman gagne 500F si le tirage est (V ;V) donc le gain algébrique est -300F ;

Aiman gagne 1500F si le tirage est (B ;V) donc le gain algébrique est 700F

Aiman gagne 0F si le tirage est (V ;B) donc le gain algébrique est -800F

Soit X la variable aléatoire associé au gain algébrique d'Aiman

$$X \in \{-800; -300; 200; 700\}$$

$$P(X = -800) = \frac{7 \times 3}{90} = \frac{21}{90} \quad ; \quad P(X = -300) = \frac{7 \times 6}{90} = \frac{42}{90};$$

$$P(X = 200) = \frac{3 \times 2}{90} = \frac{6}{90} \quad ; \quad P(X = 700) = \frac{3 \times 7}{90} = \frac{21}{90}$$

L'espérance d'Aïman est

$$E(X) = -800 \times \frac{21}{90} - 300 \times \frac{42}{90} + 200 \times \frac{6}{90} + 700 \times \frac{21}{90} = -150$$

$E(X) < 0$donc le jeu ne lui sera pas profitable.

Ex 36 ok

Soient les évènements A : « la personne est atteinte » et B : « le test est positif ».

On a $P(A) = 0{,}005$; $P_A(B) = 0{,}95$ *et* $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}01$.

Ainsi $P_B(A) = \frac{0{,}95x0{,}005}{0{,}95x0{,}005+0{,}01x0{,}995} = 0{,}32$

Ex 37 ok

Soient les évènements S : « faire le stage » et A : « traiter le thème A ».

On a : $P_{\overline{S}}(\overline{A}) = 0{,}3$; $P_S(A) = \frac{5}{6}$ et $P(S) = 0{,}2$.

On a : $P_{\overline{A}}(S) = \frac{P(S\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}$

$$P(S \cap \overline{A}) = 0{,}2 \times \frac{1}{6} \quad et \quad P(\overline{A}) = 0{,}2 \times \frac{1}{6} + 0{,}8 \times 0{,}3$$

Donc $P_{\overline{A}}(S) = \frac{0{,}2\times\frac{1}{6}}{0{,}2\times\frac{1}{6}+0{,}8\times0{,}3} = 0{,}122$