ESSEBIL
Au Bac

MATHS

TERMINALE D

Tome 1
1er trimestre

Horma Ould Hamoud
Inspecteur de Mathématiques

Dans les ouvrages de la collection ESSEBIL AU BAC- Mathématiques vous trouverez :

- ✓ ***Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules ;***
- ✓ ***Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme ;***
- ✓ ***Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances ;***
- ✓ ***Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac ;***
- ✓ ***Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.***

Dépôt légal : 2176/2020

Bibliothèque nationale - Nouakchott

AVANT PROPOS

Chers élèves de la 7ème AS,

Nous sommes heureux de mettre à votre disposition cette nouvelle collection, "ES-SEBIL pour réussir au bac", qui constituer

a, nous l'espérons, un réel cheminement au succès.

A travers cette collection, le Département cherche, à court terme, à améliorer l'enseignement/apprentissage afin d'avoir, de manière concrète, un impact positif sur le niveau des apprenants.

Cette collection touche le programme en vigueur dans toutes ses dimensions aussi bien théoriques que pratiques: rappels de cours, exercices corrigés et exercices d'entrainement. Elle couvre toutes les disciplines de bases, toutes séries confondues: sciences de la nature (SN), mathématiques (M) et lettres (LM et LO).

Permettez-nous, ici, d'exprimer nos sincères remerciements à nos frères inspecteurs pour leurs efforts vivement louables et sincèrement reconnus.

Nous vous souhaitons, chers candidats au bac, plein succès et réussite et prions qu'Allah, le Tout-Puissant, vous aide à en tirer profit.

وعلى الله قصد السبيل

L'Inspecteur Général

Sommaire

CHAPITRE 1 NOMBRES COMPLEXES

I. RESUME DE COURS

Le nombre i

Il existe dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ un élément n'appartenant pas à $\mathbb{R}$, noté i tel que $i^2 = -1$.

Le nombre i est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

On a alors : $\boxed{i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad \frac{1}{i} = -i}$.

Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient a , b , a' et b' des réels. $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$.

1) $(a + ib = a' + ib') \Leftrightarrow (a = a' ; b = b')$	4) $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
2) $z + z' = a + a' + i(b + b')$	5) $(a-ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$
3) $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$	6) $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$
7) $a + ib \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$	

Définitions et vocabulaire

Soient a et b des réels et $z = a + ib$.

Forme algébrique de z	**L'écriture** $z = a + ib$
Partie réelle de z	$\mathrm{Re}(z) = a$
Partie imaginaire de z	$\mathrm{Im}(z) = b$
Le conjugué de z	$\bar{z} = a - ib$
Le module de z	$\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument de z où $z \neq 0$. On note $\arg z$	$\arg z = \theta \Rightarrow \left(\cos\theta = \frac{a}{\lvert z\rvert}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\lvert z\rvert}\right)$
Forme trigonométrique de z avec $(z \neq 0 ; \arg z = \theta)$	$z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$
Forme exponentielle de z avec $(z \neq 0 ; \arg z = \theta)$	$z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$

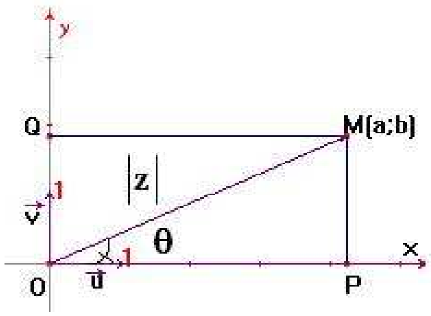
Représentation géométrique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient a et b des réels.

A tout nombre complexe $z=a+ib$, on peut associer le point $M(a;b)$ du plan.

Le plan est appelé le plan complexe.

Le point image du nombre complexe $z=a+ib$	$M(a;b)$
Le vecteur image du nombre complexe $z=a+ib$	$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
L'affixe du point $M(a;b)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	Le nombre complexe $z=a+ib$
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$	Le nombre z_B-z_A
L'affixe du milieu du segment $[AB]$	Le nombre $\dfrac{z_A+z_B}{2}$
La distance AB	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$



Conjugué d'un nombre complexe

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et z , z_1 , z_2 des nombres complexes.

1) $z=a+ib\Rightarrow\overline{z}=a-ib$ 2) $z=a+ib\Rightarrow z\overline{z}=a^2+b^2$ 3) z est réel $\Leftrightarrow\overline{z}=z$ 4) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow\overline{z}=-z$ 5) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ 6) $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$	7) $\overline{\overline{z}}=z$ 8) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ 9) $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$ 10) $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$, $n\in\mathbb{Z}$ 11) $\overline{\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z_1}}$, $z_1\neq 0$ 12) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2\neq 0$

Module d'un nombre complexe

Soient $a,b \in \mathbb{R}$ et z , z_1 , z_2 des nombres complexes.

1) $\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}}$	7) $\left\lvert \frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$, $z \neq 0$
2) $z = a + ib \Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	8) $\left\lvert \frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$, $z_2 \neq 0$
3) $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	9) $\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
4) $\lvert \bar{z}\rvert = \lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	**(L'inégalité triangulaire)**
5) $\lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \lvert z_2\rvert$	10) $AB = \lvert z_B - z_A\rvert$
6) $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$, $n \in Z$	

Argument d'un nombre complexe

Soient z , z_1 , z_2 des nombres complexes non nuls.

1) $\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{z} = -\arg z$	5) **z est réel** $\Leftrightarrow \arg z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
2) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$	6) **z est imaginaire pur** $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
3) $\arg z^n = n \arg z, \quad n \in Z$	**Soient** A,B,C,D **des points tels que** $AB \neq 0, CD \neq 0$.
4) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$	7) $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$
	8) $\arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \quad [2\pi]$

Notation exponentielle e^{ix}

Soient x et y des réels.

1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$	7) $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$
2) $\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$	8) $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$
3) $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$	9) $\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}, \quad n \in Z$
4) $e^{i\pi} = -1$	10) $\lvert e^{ix}\rvert = 1$
5) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	11) **Si** $z = \lambda e^{ix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, **alors**
6) $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$	$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \arg z = x \\ \lambda < 0 \Rightarrow \arg z = \pi + x \end{cases}$

Formules d'Euler – Formule de Moivre

Formules d'Euler	**Soit** $x \in IR$ $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
Formule de Moivre	**Soit** $x \in IR$ **et** $n \in Z$ **;** $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

Les formules d'Euler permettent dans certains cas de transformer un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$ en une somme de cosinus et de sinus des multiples de x (linéarisation).

La formule de Moivre permet d'exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sous forme d'un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Cas particulier : équation à coefficients réels

$az^2 + bz + c = 0$ **où** $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$.

❖ **Le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$	**deux solutions réelles distinctes**	$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	**une solution réelle double**	$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	**deux solutions complexes conjuguées :**	$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ **et** $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$

2. Equation à coefficients complexes $a, b, c \in \mathbb{C}$; $a \neq 0$.

❖ **Le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

❖ **Les racines carrées du discriminant sont les nombres complexes** $\delta = x + iy$ **et** $-\delta = -x - iy$ **tel que** $\delta^2 = \Delta$ **avec** $x ; y \in IR$ **:**

$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \lvert\Delta\rvert \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases}$	**Les solutions de l'équation** $az^2 + bz + c = 0$ **:** $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ **et** $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$

3. Somme et produit des solutions:

Somme : $s = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$; **Produit:** $p = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Applications géométriques des nombres complexes

1) Nature d'un triangle

Soit ABC un triangle. On pose $Z=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

Nature du triangle ABC	Relation caractéristique
Equilatéral	$Z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Rectangle en A	Z est un imaginaire pur
Rectangle isocèle en A	$Z=i$ ou $Z=-i$
Isocèle en A	$\lvert Z\rvert=1$

2) Alignement et orthogonalité

Soient A,B,C,D des points du plan.

Relation complexe	Interprétation géométrique
$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est réel	A,B,C sont alignés($A\neq B, A\neq C$)
$\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ est réel	Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, $(A\neq B; C\neq D)$(
$\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=\pm i$	$AB=CD$ et $(AB)\perp(CD)$ où ($A\neq B, C\neq D$)
$\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ est imaginaire pur	$(AB)\perp(CD)$ où ($A\neq B, C\neq D$)
$\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=\lambda e^{i\theta};\lambda\in\mathbb{R}_+^*$	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\theta\ [2\pi]$ et $CD=\lambda AB$
$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\times\dfrac{z_B-z_D}{z_C-z_D}$ est réel	A,B,C,D sont alignés ou cocycliques

3) Lieux géométriques simples

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Considérons un point variable M d'affixe z. Le point M' d'affixe z'. Les points A,B,Ω sont fixes et d'affixes respectives a,b,ω.

Relation complexe	Ensemble des points M
$\lvert z-\omega\rvert = r \;,\; r>0$	**Cercle de centre Ω et de rayon r**
$\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$	**Médiatrice de $[AB]$**
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$	**Cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B**
Le nombre $\frac{z-a}{z-b}$ est imaginaire pur	**Cercle de diamètre $[AB]$ privé de B**
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$	**Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B**
$\arg\frac{z-a}{z-b}=0\quad[\pi]$	**Droite (AB) privée de A et B**
Le nombre $\frac{z-a}{z-b}$ est réel	**Droite (AB) privée de B**
$\left\lvert\frac{z-a}{z-b}\right\rvert = k \;,\; k>0;k\neq 1$	**Cercle centré sur (AB) de diamètre [IJ] tel que** $I=\text{bar}\{(A,1);(B,k)\};J=\text{bar}\{(A,1);(B,-k)\}$
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\alpha\quad[\pi]\;,\;\alpha\neq 0\quad[\pi]$	**Cercle passant par A et B privé de A et B**
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\alpha\quad[2\pi]\;,\alpha\neq 0\quad[\pi]$	**Arc capable d'extrémités A et B exclues**

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses A	B	C	D
1	**Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors**	$\bar{z}=\frac{1}{z}$	$\bar{z}=-z$	$z\bar{z}=i$	$\bar{z}=z$
2	**Si $z=-1+2e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors la forme exponentielle de z est :**	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$i\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\left(-1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$
3	**Si $z+\lvert z\rvert=2+4i$, alors**	$z=-3+4i$	$z=-3-4i$	$z=4i$	$z=-4+3i$
4	**Si $z=(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors**	$\arg z=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	$\arg z=\pi+\frac{\pi}{6}$	$\arg z=\frac{\pi}{6}$	$\arg z=-\frac{\pi}{12}$
5	**Si $z=4+(1-5i)i$, alors la partie réelle de z est**	**9**	**8**	**4**	**-1**
6	**Si $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2=-2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$, alors le rapport $\frac{z_2}{z_1}$ est égal à**	$\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$	$-1-i$	$1-i$

QCM 2

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

	Questions	Réponses A	B	C	D
1	**La forme algébrique de $\frac{2+5i}{3-2i}$ est**	$2+5i$	$\frac{-4}{13}+\frac{19}{13}i$	$\frac{16}{13}+\frac{19}{13}i$	$\frac{6}{5}+2i$
2	**Le module de $\frac{\left(2-2i\sqrt{3}\right)^2}{(1+i)(2i)^3}$ est**	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{2}$
3	**Si $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z, alors le nombre $z^3e^{i\frac{\pi}{4}}$ est**	**réel positif**	**imaginaire pur**	**réel négatif**	**d'argument $\frac{\pi}{4}$**
4	**Si $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors le triangle *ABC* est :**	**isocèle et non rectangle**	**équilatéral**	**rectangle et isocèle**	**rectangle et non isocèle**
5	**L'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que $\left\vert\frac{z-1+2i}{2+3i}\right\vert=\sqrt{13}$ est :**	**un cercle**	**la médiatrice d'un segment**	**une droite privée d'un point**	**un cercle privé de deux points**
6	**Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}^*$. La forme algébrique de $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est :**	$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	$n\cos\theta+in\sin\theta$	$e^{in\theta}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres :

$z_1 = (3+2i)(2-3i), \quad z_2 = \dfrac{1+5i}{5-i},$

$z_3 = 2-3i+\dfrac{2i+4}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$

$z_5 = \dfrac{3-5i}{5+i}+\dfrac{4-3i}{3+i}, \quad z_6 = \dfrac{2+5i}{4-i}+\dfrac{4+i}{2-5i},$

$z_7 = (1-2i)^3, \quad z_8 = \dfrac{2+3i}{3i}+\dfrac{5i}{3-2i}$

Exercice 2

On pose $f(z) = (3-2i)z^2+(5-i)z+2+5i$

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres : $f(i), \quad f(3+2i), \quad f(1+i), \quad f(5-i)$

Exercice 3

On pose $f(z) = (5+i)z+(1+2i)\bar{z}+4-3i$ **où** $\bar{z}$ **désigne le conjugué de z**

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres : $f(5-i), \quad f(1+2i), \quad f(3+4i), \quad f(5+3i)$

Exercice 4

Soit $f(z) = \dfrac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}$ **où z est un nombre complexe.**

1) Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :

$f(5+i), \quad f(2i), \quad f(3+2i), \quad f(1-i)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations

$f(z) = 1, \qquad f(z) = \dfrac{3}{2}.$

Ecrire les solutions sous forme algébrique.

Exercice 5

Soit

$Z_1 = (1+5i)^{2020} + (1-5i)^{2020}$

$Z_2 = (1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}$

Montrer que Z_1 est réel et Z_2 imaginaire pur.

Exercice 6

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivant:

$z_1 = 4-3i, \quad z_2 = (3+i)(2+5i),$

$z_3 = \dfrac{2+4i}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$

$z_5 = \dfrac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4}$

Exercice 7

Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants:

$z_1 = 4+4i, \quad z_2 = 3+i\sqrt{3}, \quad z_3 = \dfrac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$

$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \dfrac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$

Exercice 8

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, écrire chacun des nombres suivants sous forme trigonométrique et exponentielle.

$z_1 = 4+4i, \quad z_2 = 3+i\sqrt{3}, \quad z_3 = \dfrac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$

$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \dfrac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$

Exercice 9

Soit $z_1 = 4+4i,\ z_2 = 3+i\sqrt{3}$ **,** $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2},\ z_4 = z_1 z_2$

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

2.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de z_3 .

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$**.**

3.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de z_4 **.**

b) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$**.**

Exercice 10 (Bac)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$**.**

1.a)Résoudre dans $\mathbb{C}$ **l'équation** $E_1 : z^2+2z+10=0$

On note z_1 **et** z_2 **ses solutions avec** $\operatorname{Im} z_2 \le 0$ **.**

b)Résoudre dans $\mathbb{C}$ **l'équation** $E_2 :\ z^2-4z+20=0$

On note z_3 **et** z_4 **ses solutions avec** $\operatorname{Im} z_4 \le 0$ **.**

2) On considère les points A, B, K **, L et E d'affixes respectives** $z_A = z_1$ **,** $z_B = z_2$ **,** $z_K = z_3$**,** $z_L = z_4$ **et** $z_E = z_3 - 2i$**.**

a) Placer les points A , B, K, L **, et** E **dans le repère** $(O;\vec{u},\vec{v})$**.**

b) Ecrire $z_E = z_3 - 2i$ **sous forme algébrique et trigonométrique.**

c) Déterminer la nature du quadrilatère $ABLE$ **et du triangle** AKE**.**

3) Pour tout nombre complexe z **tel que** $z \ne -1+3i$ **on pose :** $f(z) = \dfrac{z-2-4i}{z+1-3i}$**.**

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M **du plan d'affixe** z **dans chacun des cas suivants :**

Γ_1 **tel que** $|f(z)| = 1$**.**

Γ_2 **tel que** $|f(z)-1| = \sqrt{10}$ **.**

Exercice 11

1. On pose $P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$ **où** z **est un nombre complexe.**

a) Calculer $P(1)$**.**

b) Déterminer a **et** b **tels que pour tout** z **de** $\mathbb{C}$ **on a:** $P(z) = (z-1)(z^2+az+b)$**.**

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$**, l'équation :** $P(z) = 0$**.**

2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1 = 1$, $z_2 = 2+2i$ et $z_3 = 2-2i$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3.a) Ecrire le nombre $\dfrac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OBC.

b) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\dfrac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1$.

Exercice 12 (Bac)

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$.

a) Calculer $P(3)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3+2i$, $z_B = -1+i$, $z_C = -1-i$ et $z_D = 3$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Comparer l'affixe du milieu de $[AC]$ à celle du milieu de $[BD]$.

c) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-3| = |z+1-i|$.

Exercice 13

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, chacune des équations suivantes : $z^2-4z+13=0$ (E_1) $z^2-6z+13=0$ (E_2)

2. Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq 3-2i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-2-3i}{z-3+2i}$

Calculer $\alpha=f(7+4i)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.

3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2+3i$, $z_B=3-2i$ et $z_C=5+i$.

a) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C.

b) Calculer $f(z_C)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique. En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$.

d) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine réelle :
$z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$

Exercice 15 (Bac)

Dans $\mathbb{C}$ on donne : $a=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$

1) Calculer a^2. Donner le module et un argument de a^2.

2) En déduire le module et un argument de a.

3) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$.

4) Donner les entiers naturels n tels que a^n soit réel.

Exercice 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.) On pose :

$P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

1) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$.

2) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

Exercice 17

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(1+2\cos\theta)z^2+(1+2\cos\theta)z-1$ où $\theta\in[0;2\pi[$.

Calculer $P(1)$ puis déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z)=0$ sachant que z_0 est réel, et $\operatorname{Im} z_1\geq 0$ si $\sin\theta\geq 0$.

Exercice 18

Dans le plan orienté, on considère deux triangles ABC et DEF équilatéraux directs. Les points G et H tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes. Soient a,b,c,d,e,f,g et h les affixes respectives des points A,B,C,D,E,F,G et H.

1) Exprimer $c-a$ en fonction de $b-a$, puis $f-d$ en fonction de $e-d$.

2) Exprimer g en fonction de b,d et e ; puis h en fonction de c,d et f.

3) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

$$\begin{aligned} z_1 &= (3+2i)(2-3i) \\ &= 6-9i+4i+6i^2 \\ &= 6-9i+4i-6 \\ &= 12-5i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1+5i}{5-i} \\ &= \frac{(1+5i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} \end{aligned}$$

$$z_2 = \frac{5+i+25i-5}{25+1} = \frac{26i}{26} = i.$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 2-3i+\frac{2i+4}{2+3i} = \frac{(2-3i)(2+3i)+2i+4}{2+3i} \\ &= \frac{4+9+2i+4}{2+3i} = \frac{17+2i}{2+3i} \\ &= \frac{(17+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{34-51i+4i+6}{4+9} \end{aligned}$$

$$z_3 = \frac{40}{13}-\frac{47}{13}i.$$

$$\begin{aligned} z_4 &= (1+2i)(3-5i)(1-2i) = (1+2i)(1-2i)(3-5i) \\ &= 5(3-5i) \end{aligned}$$

$$z_4 = 15-25i.$$

$$\begin{aligned} z_5 &= \frac{3-5i}{5+i}+\frac{4-3i}{3+i} = \frac{(3-5i)(3+i)+(5+i)(4-3i)}{(5+i)(3+i)} \\ &= \frac{9+3i-15i+5+20-15i+4i+3}{15+5i+3i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_5 &= \frac{37-23i}{14+8i} = \frac{(37-23i)(14-8i)}{(14+8i)(14-8i)} \\ &= \frac{334-618i}{196+64} \end{aligned}$$

$$z_5 = \frac{334}{260}-\frac{618}{260}i.$$

$$z_6 = \frac{2+5i}{4-i} + \frac{4+i}{2-5i} = \frac{(2+5i)(2-5i)+(4-i)(4+i)}{(4-i)(2-5i)}$$

$$= \frac{4+25+16+1}{8-20i-2i-5} = \frac{46}{3-22i} \times \frac{3+22i}{3+22i}$$

$$z_6 = \frac{138+1012i}{9+484} = \frac{138}{493} + \frac{1012}{493}i.$$

$$z_7 = (1-2i)^3 = (1-2i)(1-2i)^2 = (1-2i)(1-4i-4)$$

$$= (1-2i)(-3-4i) = -3-4i+6i-8$$

$$z_7 = -11+2i.$$

$$z_8 = \frac{2+3i}{3i} + \frac{5i}{3-2i} = \frac{(2+3i)(3-2i)+(3i)(5i)}{3i(3-2i)}$$

$$= \frac{6-4i+9i+6-15}{9i+6} = \frac{-3+5i}{6+9i} \times \frac{6-9i}{6-9i}$$

$$= \frac{-18+27i+30i+45}{36+81}$$

$$= \frac{27+57i}{117}$$

$$z_8 = \frac{27}{117} + \frac{57}{117}i.$$

Enfin $z_8 = \frac{3}{13} + \frac{19}{39}i$

Corrigé 2

On a : $f(z) = (3-2i)z^2 + (5-i)z + 2 + 5i$

$$f(i) = (3-2i)(i)^2 + (5-i)i + 2 + 5i$$
$$= -3+2i+5i+1+2+5i$$
$$= 12i.$$

$$f(3+2i) = (3-2i)(3+2i)^2 + (5-i)(3+2i) + 2 + 5i$$
$$= (9+4)(3+2i) + 15 + 10i - 3i + 2 + 2 + 5i$$
$$= 13(3+2i) + 19 + 12i$$
$$= 39 + 26i + 19 + 12i$$
$$= 58 + 38i.$$

$$
\begin{aligned}
f(1+i) &= (3-2i)(1+i)^2+(5-i)(1+i)+2+5i \\
&= (3-2i)(2i)+5+5i-i+1+2+5i \\
&= 6i+4+8+9i \\
&= 12+15i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(5-i) &= (3-2i)(5-i)^2+(5-i)^2+2+5i \\
&= (3-2i)(25-10i-1)+(25-10i-1)+2+5i \\
&= (3-2i)(24-10i)+26-5i \\
&= 72-30i-48i-20+26-5i \\
&= 78-83i.
\end{aligned}
$$

Corrigé 3

On a $f(z)=(5+i)z+(1+2i)\bar{z}+4-3i$

On remplace z par sa valeur dans chaque cas :

$$
\begin{aligned}
f(5-i) &= (5+i)(5-i)+(1+2i)\overline{(5-i)}+4-3i \\
&= 25+1+(1+2i)(5+i)+4-3i \\
&= 30+5+i+10i-2-3i \\
&= 33+8i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(1+2i) &= (5+i)(1+2i)+(1+2i)\overline{(1+2i)}+4-3i \\
&= 5+10i+i-2+1+4+4-3i \\
&= 12+8i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(3+4i) &= (5+i)(3+4i)+(1+2i)\overline{(3+4i)}+4-3i \\
&= 15+20i+3i-4+(1+2i)(3-4i)+4-3i \\
&= 15+20i+3-4i+6i+8 \\
&= 26+22i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(5+3i) &= (5+i)(5+3i)+(1+2i)\overline{(5+3i)}+4-3i \\
&= 25+15i+5i-3+(1+2i)(5-3i)+4-3i \\
&= 26+17i+5-3i+10i+6 \\
&= 37+24i.
\end{aligned}
$$

Corrigé 4

On a

$$
\begin{aligned}
f(5+i) &= \frac{(1-2i)(5+i)+2+3i}{(3-2i)(5+i)-2-5i} \\
&= \frac{5+i-10i+2+2+3i}{15+3i-10i+2-2-5i}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{9-6i}{15-12i}=\frac{9-6i}{15-12i}\times\frac{15+12i}{15+12i}$$
$$=\frac{135+108i-90i+72}{225+144}$$
$$=\frac{207+18i}{369} \quad =\frac{207}{369}+\frac{18}{369}i$$
$$f(5+i)=\frac{23}{41}+\frac{2}{41}i$$
$$f(2i)=\frac{(1-2i)(2i)+2+3i}{(3-2i)(2i)-2-5i}=\frac{2i+4+2+3i}{6i+4-2-5i}$$
$$=\frac{6+5i}{2+i}=\frac{6+5i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}$$
$$=\frac{12-6i+10i+5}{4+1}$$
$$=\frac{17+4i}{5} \quad =\frac{17}{5}+\frac{4}{5}i.$$
$$f(3+2i)=\frac{(1-2i)(3+2i)+2+3i}{(3-2i)(3+2i)-2-5i}$$
$$=\frac{3+2i-6i+4+2+3i}{9+4-2-5i}$$
$$=\frac{9-i}{11-5i}\times\frac{11+5i}{11+5i}=\frac{99+45i-11i+5}{121+25}$$
$$=\frac{104+34i}{146}=\frac{104}{146}+\frac{34}{146}i$$
$$=\frac{52}{73}+\frac{17}{73}i.$$
$$f(1-i)=\frac{(1-2i)(1-i)+2+3i}{(3-2i)(1-i)-2-5i}$$
$$=\frac{1-i-2i-2+2+3i}{3-3i-2i-2-2-5i}$$
$$=\frac{1}{-1-10i}\times\frac{-1+10i}{-1+10i}=\frac{-1+10i}{1+100}$$
$$=\frac{-1+10i}{101}$$
$$=\frac{-1}{101}+\frac{10}{101}i.$$

$$f(z)=1 \Rightarrow \frac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}=1$$
$$\Rightarrow (1-2i)z+2+3i=(3-2i)z-2-5i$$
$$\Rightarrow [(1-2i)-(3-2i)]z=-2-5i-2-3i$$
$$\Rightarrow -2z=-4-8i$$
$$\Rightarrow z=2+4i.$$

$$f(z)=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}=\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow 2\big((1-2i)z+2+3i\big)=3\big((3-2i)z-2-5i\big)$$
$$\Rightarrow (2-4i)z+4+6i=(9-6i)z-6-15i$$
$$\Rightarrow [(2-4i)-(9-6i)]z=-6-15i-4-6i$$
$$\Rightarrow (-7+2i)z=-10-21i$$
$$\Rightarrow z=\frac{-10-21i}{-7+2i}$$
$$\Rightarrow z=\frac{-10-21i}{-7+2i}\times\frac{-7-2i}{-7-2i}$$
$$\Rightarrow z=\frac{70+20i+147i-42}{49+4}$$
$$\Rightarrow z=\frac{28+167i}{53}$$
$$\Rightarrow z=\frac{28}{53}+\frac{167i}{53}.$$

Corrigé 5

Pour montrer que Z_1 est réel, il suffit de montrer que $\overline{Z_1}=Z_1$.

On a

$$\overline{Z_1}=\overline{(1+5i)^{2020}+(1-5i)^{2020}}$$
$$=\overline{(1+5i)^{2020}}+\overline{(1-5i)^{2020}}$$
$$=(\overline{1+5i})^{2020}+(\overline{1-5i})^{2020}$$
$$=(1-5i)^{2020}+(1+5i)^{2020}$$
$$=(1+5i)^{2020}+(1-5i)^{2020}$$
$$=Z_1$$

Alors Z_1 est réel.

Pour montrer que Z_2 est imaginaire pur, il suffit de montrer que $\overline{Z_2}=-Z_2$.

$$\begin{aligned}\overline{Z_2} &= \overline{(1+5i)^{2020}-(1-5i)^{2020}}\\ &= \overline{(1+5i)^{2020}}-\overline{(1-5i)^{2020}}\\ &= (\overline{1+5i})^{2020}-(\overline{1-5i})^{2020}\\ &= (1-5i)^{2020}-(1+5i)^{2020}\\ &= -\left((1+5i)^{2020}-(1-5i)^{2020}\right)\\ &= -Z_2\end{aligned}$$

Alors Z_2 **est imaginaire pur.**

Corrigé 6

On utilise les propriétés des modules :

$|z_1| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5,$

$|z_2| = |3+i||2+5i| = \sqrt{9+1}\times\sqrt{4+25} = \sqrt{290},$

$|z_3| = \left|\dfrac{2+4i}{2+3i}\right| = \dfrac{|2+4i|}{|2+3i|} = \dfrac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+9}} = \sqrt{\dfrac{20}{13}},$

$|z_4| = |(1+2i)(3-5i)(1-2i)| = |1+2i||3-5i||1-2i|$

$= \sqrt{1+4}\times\sqrt{9+25}\times\sqrt{1+4} = 5\sqrt{34},$

$|z_5| = \left|\dfrac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4}\right| = \dfrac{|(3-5i)|\left|(5+2i)^3\right|}{\left|(2+5i)^4\right|}$

$= \dfrac{\sqrt{9+25}\times(\sqrt{25+4})^3}{(\sqrt{4+25})^4} = \sqrt{\dfrac{34}{29}}.$

Corrigé 7

1) On a

$z_1 = 4+4i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

On note $\arg z_1 = \theta_1$ **. Alors :**

$$\begin{cases}\cos\theta_1 = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta_1 = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$$

2) On a $z_2 = 3+i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On note $\arg z_2 = \theta_2$ **. Alors :**

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

3) On constate que $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ **.**

Alors $\quad |z_3| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

et $\quad \arg z_3 = \arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$

4) On constate que $z_4 = z_1 z_2$ **.**

Alors $\quad |z_4| = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 4\sqrt{2}\times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$ **,**

$\arg z_4 = \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$

5) On constate que $z_5 = \dfrac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4}$ **. Alors**

$|z_5| = \left|\dfrac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4}\right| = \dfrac{|\overline{z_2}||z_1^3|}{|z_2^4|} = \dfrac{|z_2||z_1|^3}{|z_2|^4} = \dfrac{2\sqrt{3}(4\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{3})^4}$ $\quad |z_5| = \dfrac{16}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} \arg z_5 &= \arg\frac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4} = \arg \overline{z_2}\, z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= \arg\overline{z_2} + \arg z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= -\arg z_2 + 3\arg z_1 - 4\arg z_2 \end{aligned}$$

$\arg z_5 = 3\arg z_1 - 5\arg z_2 = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{5\pi}{6}$.. **Alors** $\quad \arg z_5 = \dfrac{-\pi}{12}$.

Corrigé 8

D'après l'exercice précédent :

1) $|z_1| = 4\sqrt{2}$ **et** $\quad \arg z_1 = \dfrac{\pi}{4}$

Forme trigonométrique : $z_1 = 4\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$

ou $\quad z_1 = 4\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

Forme exponentielle : $z_1 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) $|z_2| = 2\sqrt{3}$ **et** $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

Ou $z_2 = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$.

Forme exponentielle : $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3) $|z_3| = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ **et** $\arg z_3 = \frac{\pi}{12}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

4) $|z_4| = 8\sqrt{6}$ **et** $\arg z_4 = \frac{5\pi}{12}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_4 = 8\sqrt{6}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_4 = 8\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

5) $|z_5| = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ **et** $\arg z_5 = \frac{-\pi}{12}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Corrigé 9

1) Forme trigonométrique de z_1 et z_2 :

D'après l'exercice précédent on a :

$z_1 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ **, et** $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

2.a) Forme trigonométrique de z_3 :

D’après l’exercice précédent on a : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ (*)

Pour écrire z_3 **sous la forme algébrique, on multiplie par le conjugué du dénominateur :** $z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}} \times \frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$

On obtient : $z_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}i$ (**)

b) Par comparaison des écritures (*) **et** (**) **du nombre** z_3 **on obtient :**

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3.a) D’après l’exercice précédent on a :

$z_4 = 8\sqrt{6}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$ (*)

Pour la forme algébrique de z_4**, on développe :**

$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3})$

$z_4 = 12 - 4\sqrt{3} + (12+4\sqrt{3})i$ (**)

b) Par comparaison des écritures (*) **et** (**) **du nombre** z_4 **on obtient :**

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{12-4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{12+4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Corrigé 10

1) Résolutions d’équations:

a) E_1 $z^2 + 2z + 10 = 0$

Le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4\times1\times10 = -36 = (6i)^2$

Les solutions z_1 **et** z_2 **avec** $\mathrm{Im}\, z_2 \le 0$**:**

$$z_1=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i \textbf{ et } z_2=\frac{-2-6i}{2}=-1-3i$$

Ensemble de solution : $\boxed{S_1=\{-1+3i,-1-3i\}}$

b) E_2 **:** $z^2-4z+20=0$

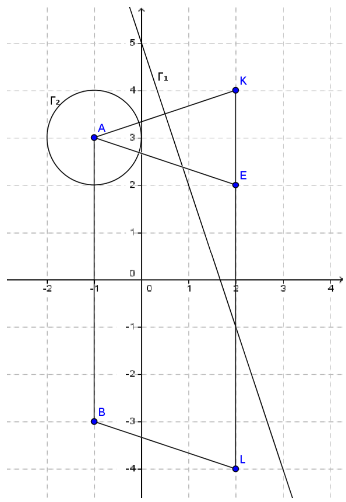
$$\Delta=4^2-4\times1\times20=16-80=-64=(8i)^2$$

Les solutions z_3 et z_4 avec $\operatorname{Im} z_4\le 0$**:**

$$z_3=\frac{4+8i}{2}=2+4i \textbf{ et } z_4=\frac{4-8i}{2}=2-4i$$

Ensemble de solution : $\boxed{S_2=\{2+4i,2-4i\}}$

2.a) Représentation des points :



$z_A=z_1=-1+3i\Rightarrow A(-1,3)$ **,** $z_B=z_2=-1-3i\Rightarrow B(-1,-3)$

$z_K=z_3=2+4i\Rightarrow K(2,4)$ **,** $z_L=z_4=2-4i\Rightarrow L(2,-4)$

$z_E=z_3-2i=2+4i-2i=2+2i\Rightarrow E(2,2)$

b) Forme algébrique de z_E **:**

$$z_E=z_3-2i=2+4i-2i\Rightarrow \boxed{z_E=2+2i}$$

Forme trigonométrique :

$$z_E=2+2i\Rightarrow |z_E|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$z_E=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow \boxed{z_E=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

c) Nature du quadrilatère ABLE **:**

D'après la figure, il semble que ABLE est un parallélogramme. Pour la démonstration on a :

$$z_{\overline{AB}}=z_B-z_A=-1-3i+1-3i=-6i$$

$$z_{\overline{EL}}=z_L-z_E=2-4i-2-2i=-6i$$

$$z_{\overline{AB}}=z_{\overline{EL}}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EL}$$

Alors ABLE est un parallélogramme.

Nature du triangle AKE **:**

D'après la figure, il semble que AKE est isocèle en A. Pour la démonstration on a :

$AK=|z_K-z_A|=|2+4i+1-3i|=|3+i|=\sqrt{10}$

$AE=|z_E-z_A|=|2+2i+1-3i|=|3-i|=\sqrt{10}$

AK=AE. Alors le triangle AKE est isocèle en A.

3.a) L'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$:

On a $f(z)=\dfrac{z-2-4i}{z+1-3i}$**. On constate que** $f(z)=\dfrac{z-z_K}{z-z_A}$ **.**

Alors : $|f(z)|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-z_K}{z-z_A}\right|=1 \Leftrightarrow |z-z_K|=|z-z_A| \Leftrightarrow MK=MA$

D'où l'ensemble Γ_1 est la médiatrice du segment $[AK]$.

Pour la construction, voir la figure.

b)L'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$:

On a $|f(z)-1|=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-2-4i}{z+1-3i}-1\right|=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{z-2-4i-z-1+3i}{z+1-3i}\right|=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{-3-i}{z+1-3i}\right|=\sqrt{10} \Leftrightarrow \dfrac{|-3-i|}{|z+1-3i|}=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{10}}{|z-z_A|}=\sqrt{10} \qquad \Leftrightarrow |z-z_A|=1 \qquad \Leftrightarrow AM=1$

Alors Γ_2 est le cercle de centre A et de rayon 1.

Pour la construction, voir la figure.

Corrigé 11

On a pour tout nombre complexe z : $\mathbf{P(z)=z^3-5z^2+12z-8}$

1. a) En remplaçant z par 1 on obtient :

$\mathbf{P(1)=(1)^3-5(1)+12(1)-8=-4+4=0}$

b) <u>1ère méthode : identification</u>

Pour déterminer a et b tels que : $\mathbf{P(z)=(z-1)(z^2+az+b)}$**, on utilise une identification (Développer, réduire, ordonner le second membre et identifier) :**

$(z-1)(z^2+az+b) = z^3+az^2+bz\ -z^2-az-b$

$= z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$

Par identification :

$z^3-5z^2+12z-8 = z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$, **pour tout** $z\in\mathbb{C}$; **on obtient le**

système : $\begin{cases} a-1=-5 \\ b-a=12 \\ -b=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=8 \end{cases}$

Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$; $P(z) = (z-1)(z^2-4z+8)$

2^{ème} méthode : Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} z^3-5z^2+12z-8 & z-1 \\ \cline{2-2} z^3-z^2\qquad\qquad & z^2-4z+8 \\ -4z^2+12z-8 & \\ -4z^2+4z\qquad & \\ 8z-8 & \\ 8z-8 & \\ 0 & \end{array}$$

On en déduit que, pour tout $z\in\mathbb{C}$; $P(z) = (z-1)(z^2-4z+8)$

soit $a=-4$ **et** $b=8$.

3^{ème} méthode : Tableau d'Horner

L'utilisation du tableau d'Horner permet à la fois de calculer $P(1)$ **et factoriser** $P(z)$ **, (si** $P(1)=0$ **) :**

	1	-5	12	-8
1		1	-4	8
	1	-4	8	0

D'où : $a=-4$, $b=8$, $P(1)=0$ **et** $P(z) = (z-1)(z^2-4z+8)$

c) L'équation $P(z)=0$ **équivaut** $z-1=0$ **ou** $z^2-4z+8=0$.

*** Si** $z-1=0$ **on obtient la solution** $z_1=1$

***Si** $z^2-4z+8=0$, **on a** $\Delta=16-32=-16=(4i)^2$

Les solutions de cette équation sont : $z_2 = \dfrac{4+4i}{2} = 2+2i$; $z_3 = \dfrac{4-4i}{2} = 2-2i$

(Ces solutions sont conjuguées car les coefficients sont réels et le discriminant est négatif).

L'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est : $S=\{1;2+2i;2-2i\}$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Les points A, B et C sont d'affixes : $z_A = 1$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$.

a) Calcul de modules arguments :

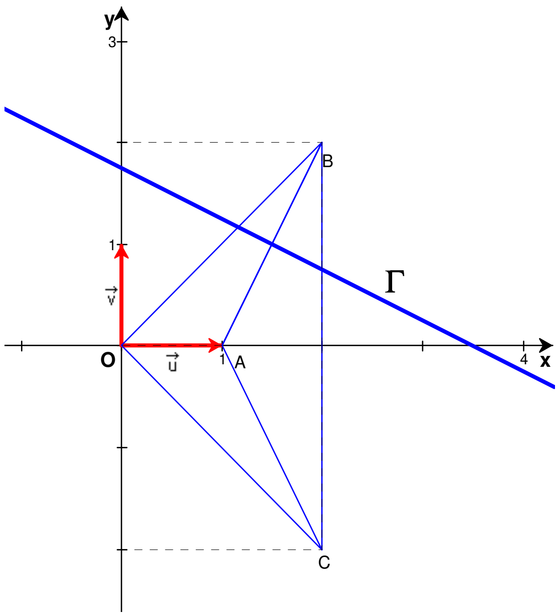
$|z_1| = |1| = 1$, $\arg z_1 = 0 \ [2\pi]$

$|z_2| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$, $\arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} \ [2\pi]$

$|z_3| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$, $\arg z_3 = \dfrac{-\pi}{4} \ [2\pi]$

b) Représentation des points :

Les points A,B et C ont pour affixes Les points $z_A = 1$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$. Alors $A(1;0)$, $B(2;2)$ et $C(2;-2)$.



3.a) On a :

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{2+2i}{2-2i}$$
$$= \frac{1+i}{1-i}$$
$$= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2i}{2}$$
$$= i$$

On remarque que $\dfrac{z_2}{z_3}=\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}$. Alors $\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=i$, d'où le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

b) Pour déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\dfrac{z-1}{z-2-2i}\right|=1$, on constate que cette égalité peut s'écrire : $\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1$

Alors $M\in\Gamma \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow AM=BM$

D'où l'ensemble Γ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Méthode 2 : Equation de Γ

On pose $z=x+iy$;

$$M\in\Gamma \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow |z-1|=|z-2-2i|$$

$$\Leftrightarrow |x-1+iy|=|x-2+(y-2)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(x-2)^2+(y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2-4x+4+y^2-4y+4$$

$$\Leftrightarrow 2x+4y-7=0$$

D'où l'ensemble Γ est la droite d'équation $2x+4y-7=0$.

Remarque :

L'équation $2x+4y-7=0$ représente la médiatrice du segment $[AB]$.

Corrigé 12

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-z^2-4z-6$.

a) Pour calculer $P(3)$ on remplace dans l'expression de $P(z)$:

$$P(3)=3^3-3^2-4\bullet 3-6=27-9-12-6=0$$

b) Pour déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$, on peut utiliser une identification ou une division euclidienne :

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 - z^2 - 4z - 6 & z - 3 \\ \cline{2-2}
z^3 - 3z^2 & z^2 + 2z + 2 \\
\quad 2z^2 - 4z - 6 & \\
\quad 2z^2 - 6z & \\
\qquad 2z - 6 & \\
\qquad 2z - 6 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

On en déduit que $P(z) = (z-3)(z^2+2z+2)$, soit $a = 2$ et $b = 2$.

<u>Remarque :</u>

L'utilisation du tableau d'Horner permet à la fois de calculer $P(3)$ et factoriser $P(z)$, (si $P(3) = 0$) :

	1	-1	-4	-6
3		3	6	6
	1	2	2	0

D'où : $a = 2$, $b = 2$, $P(3) = 0$ et $P(z) = (z-3)(z^2+2z+2)$

c) Pour résoudre l'équation $P(z) = 0$:

soit $z - 3 = 0$, d'où $z_0 = 3$.

soit $z^2 + 2z + 2 = 0$, d'où $\Delta = -4 = (2i)^2$, et les solutions sont : $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = -1 + i$.

Alors l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est :

$S = \{3, -1+i, -1-i\}$

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$,

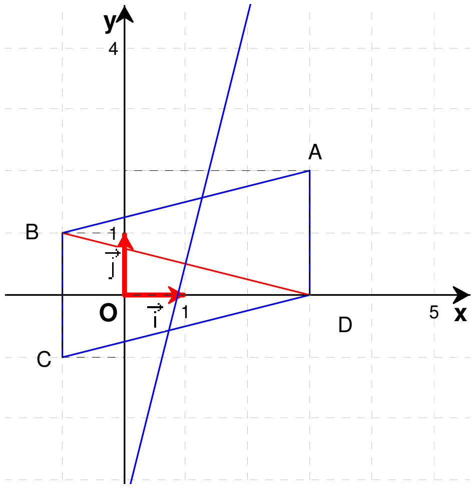
a) Pour placer les points A , B , C et D on a :

$z_A = 3+2i \Rightarrow A(3,2)$

$z_B = -1+i \Rightarrow B(-1,1)$

$z_C = -1-i \Rightarrow C(-1,-1)$

$z_D = 3 \Rightarrow D(3,0)$



b) L'affixe du milieu de $[AC]$ est égale à :

$$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{3+2i-1-i}{2} = \frac{2+i}{2} = 1+\frac{1}{2}i$$

L'affixe du milieu de $[BD]$ est égale à :

$$\frac{z_B+z_D}{2} = \frac{3-1+i}{2} = \frac{2+i}{2} = 1+\frac{1}{2}i$$

On constate que les milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$ ont la même affixe.

c) D'après le résultat précédent on déduit que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

d) Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-3| = |z+1-i|$.

Alors $M \in \Gamma \Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_B|$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow MD = MB$. Alors Γ est la médiatrice du segment $[BD]$.

<u>Remarque :</u>

En utilisant la forme algébrique $z = x+iy$ on trouve que Γ est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que: $|x-3+iy| = |x+1+(y-1)i|$

Après le calcul des modules et la simplification on obtient une équation cartésienne de Γ : $8x - 2y - 7 = 0$. C'est l'équation d'une droite qu'on peut représenter facilement. On peut vérifier que c'est la médiatrice du segment $[BD]$.

Corrigé 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résolutions d'équations:

$$z^2 - 4z + 13 = 0 \qquad (E1)$$

Le discriminant: $\Delta = 4^2 - 4 \bullet 1 \bullet 13 = -36 = (6i)^2$

Les solutions: $z_1 = \dfrac{4+6i}{2} = 2+3i$ **et** $z_2 = \dfrac{4-6i}{2} = 2-3i$

$$z^2 - 6z + 13 = 0 \qquad (E2)$$

Le discriminant: $\Delta = 6^2 - 4 \bullet 1 \bullet 13 = -16 = (4i)^2$

Les solutions: $z_1 = \dfrac{6+4i}{2} = 3+2i$ **et** $z_2 = \dfrac{6-4i}{2} = 3-2i$

2. On a : $f(z) = \dfrac{z-2-3i}{z-3+2i}$

$\alpha = f(7+4i)$

$\alpha = \dfrac{7+4i-2-3i}{7+4i-3+2i}$

$\alpha = \dfrac{5+i}{4+6i}$

Pour l'écriture algébrique, on multiplie par le conjugué du numérateur :

$$\alpha = \frac{5+i}{4+6i} \times \frac{4-6i}{4-6i} = \frac{20-30i+4i+6}{4^2+6^2} = \frac{26-26i}{52}$$

$$\alpha = \frac{26(1-i)}{26 \bullet 2} = \frac{1-i}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Pour la forme trigonométrique, on a:

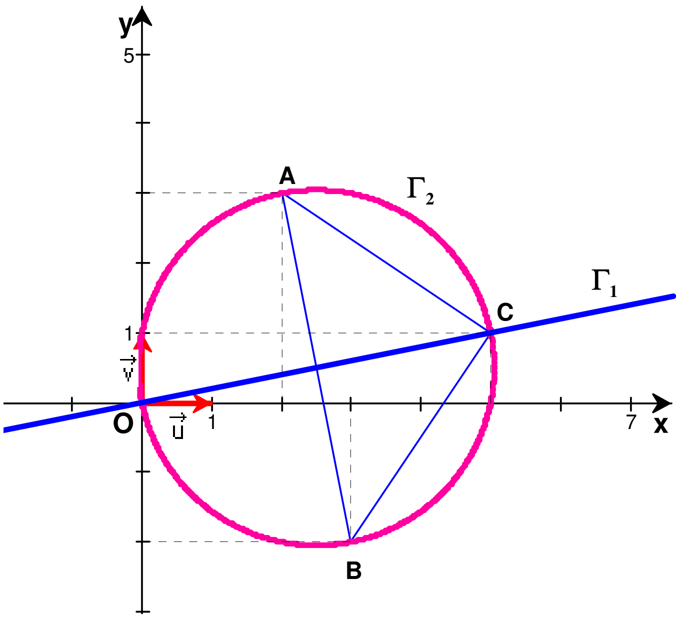
$$|\alpha| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

3. On a : $z_A = 2+3i$, $z_B = 3-2i$ et $z_C = 5+i$.

a) Représentation des points A , B et C .



b) Calcul de $f(z_C)$:

$$f(z_C)=\frac{5+i-2-3i}{5+i-3+2i}=\frac{3-2i}{2+3i}=\frac{-3i^2-2i}{2+3i}=\frac{-i(3i+2)}{2+3i}=-i$$

Forme algébrique : $f(z_C)=-i$

Forme trigonométrique: $f(z_C)=1(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2})$

Pour la ature du triangle ABC, on constate que : $f(z_C)=\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$

Alors $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$. D'où le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

c) L'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$:

On constate que $f(z)=\frac{z-z_A}{z-z_B}$.

Alors : $|f(z)|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1 \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow MA=MB$

D'où l'ensemble Γ_1 est la médiatrice du segment $[AB]$.

Pour la construction, voir la figure.

d) L'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur :

On a : $f(z)$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ est imaginaire pur

Alors Γ_2 est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B.

Pour la construction, voir la figure.

Corrigé 14

- Soit $z_0 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ la solution réelle de l'équation

E : $z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i) = 0$

Alors : $\alpha^3 - (6+3i)\alpha^2 + (21+19i)\alpha - 26(1+i) = 0$

$\alpha^3 - 6\alpha^2 - 3i\alpha^2 + 21\alpha + 19i\alpha - 26 - 26i = 0$

$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 + (-3\alpha^2 + 19\alpha - 26)i = 0$

- On résout le système :

$$\begin{cases} \alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 = 0 & (1) \\ -3\alpha^2 + 19\alpha - 26 = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après (2) On trouve : $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \dfrac{13}{3}$.

En remplaçant dans (1) on trouve que $\alpha_1 = 2$ vérifie (1) et $\alpha_2 = \dfrac{13}{3}$ ne vérifie pas (1) Alors $z_0 = 2$

- On pose $P(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i)$

On factorise par $(z-2)$,

	1	-6-3i	21+19i	-26-26i
2		2	-8-6i	26+26i
	1	-4-3i	13+13i	0

Alors : $P(z) = (z-2)(z^2 + (-4-3i)z + 13 + 13i)$

- Résolvons l'équation : $z^2 - (4+3i)z + 13 + 13i = 0$

$\Delta = (4+3i)^2 - 52 - 52i = -45 - 28i$.

Par le calcul on obtient une racine carrée $\delta = 2 - 7i$.

Les racines de l'équation du second degré :

$$z_1 = \frac{4+3i+2-7i}{2} = 3 - 2i; \quad z_2 = \frac{4+3i-2+7i}{2} = 1 + 5i$$

- Ensemble de solution : $S = \{2, 3-2i, 1+5i\}$

Corrigé 15

1) On a : $a^2=\left(\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2$

$a^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ $a^2=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\dfrac{1}{4}}\Rightarrow a^2=-\sqrt{3}+i$

- **Module :** $|a^2|=|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{3+1}\Rightarrow |a^2|=2$
- **Argument : Soit** θ **un réel tel que** $\arg a^2=\theta$

Alors : $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \arg a^2=\dfrac{5\pi}{6}$.

2.a) Module et argument de a **:**

- **Module :** $|a^2|=2\Rightarrow |a|=\sqrt{2}$
- **Argument :** $\arg a^2=\dfrac{5\pi}{6}\Rightarrow 2\arg a=\dfrac{5\pi}{6}$

$\arg a=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\quad k\in\{0,1\}$

Soit $k=0\Rightarrow \arg a=\dfrac{5\pi}{12}$

Soit $k=1\Rightarrow \arg a=\dfrac{5\pi}{12}+\pi=\dfrac{17\pi}{12}$.

Comme $\mathrm{Re}(a)>0$ **et** $\mathrm{Im}(a)>0$, $\arg a\neq\dfrac{17\pi}{12}$. **Enfin ,** $\arg a=\dfrac{5\pi}{12}$.

3) D'après ce qui précède, on déduit que :

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}}\Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}}\Rightarrow \sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

4) Le nombre a^n **est réel si et seulement si** $\arg a^n=k\pi$ **où** $k\in\mathbb{Z}$ **:**

$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow \dfrac{5n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow 5n = 12k \Leftrightarrow n = \dfrac{12k}{5}$

n est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5, donc k est divisible par 5. On prend $k = 5k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow n = 12 \times \dfrac{k}{5} \Leftrightarrow n = 12k'$

Alors, l'ensemble des valeurs de n tels que a^n soit réel c'est les multiples de 12.

Corrigé 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

a)Pour calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que:

$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$, on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le <u>tableau d'Horner :</u>

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3		3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

Alors, $P(3) = 0$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z-3)(z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i)$.

Donc $a = -8-6i$ et $b = 4+20i$.

b) L'équation $P(z) = 0$ équivaut à $z - 3 = 0$ ou $z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i = 0$

On a $z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = 3$.

Le discriminant de l'équation du second degré est

$\Delta = (-8-6i)^2 - 4(4+20i) = 64 - 36 + 96i - 16 - 80i$

$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2$. **Donc** $\delta = 4 + 2i$.

Les solutions sont : $z_1 = \dfrac{8+6i+4+2i}{2} = 6+4i$ **et** $z_2 = \dfrac{8+6i-4-2i}{2} = 2+2i$.

<u>Conclusion :</u> L'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $S = \{3,\ 6+4i,\ 2+2i\}$.

Corrigé 17

Pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=z^3-(1+2\cos\theta)z^2+(1+2\cos\theta)z-1$ **où** $\theta\in[0;2\pi[$ **.**

1.a) Calcul de $P(1)$ **:**

$$P(1)=1-(1+2\cos\theta)\times 1^2+(1+2\cos\theta)\times 1-1=0$$

- **Pour résoudre, dans** $\mathbb{C}$, **l'équation** $P(z)=0$, **on factorise** $P(z)$ **et pour cela on peut utiliser la division euclidienne , une identification ,ou bien le tableau d'Horner : 1 est une racine du polynôme P**

	1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1		1	$-2\cos\theta$	1
	1	$-2\cos\theta$	1	0

Alors Pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-1)(z^2-2\cos\theta z+1)$

$P(z)=0\Leftrightarrow(z-1)(z^2-2\cos\theta z+1)=0$

soit $z-1=0\ \Rightarrow z_0=1\in\mathbb{R}$

ou $z^2-2\cos\theta z+1=0$

Résolvons l'équation : $z^2-2\cos\theta z+1=0$

$$\begin{aligned}\Delta' &= (-\cos)^2-1\times 1\\ &= \cos^2\theta-1\\ &= -(1-\cos^2\theta)\\ &= (i\sin\theta)^2\end{aligned}$$

Donc

$$z'=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{1}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$z''=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{1}=\cos\theta-i\sin\theta$$

Si $\sin\theta\geq 0$, $\mathrm{Im}(z_1)\geq 0\Rightarrow z_1=z'=\cos\theta+i\sin\theta$ **et** $z_2=\cos\theta-i\sin\theta$ **.**

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ **dans** $\mathbb{C}$ **est :** $S=\{1;\cos\theta+i\sin\theta;\cos\theta-i\sin\theta\}$**.**

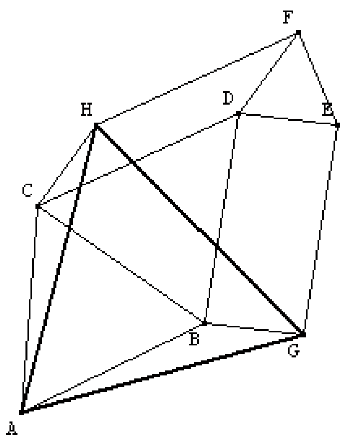
Corrigé 18

1) ABC est équilatéral direct :

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (c-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

DEF est équilatéral direct :

$$\Rightarrow \frac{f-d}{e-d} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (f-d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$



2) EDBG est un Parallélogramme

$$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE} \Rightarrow g-b = e-d \Rightarrow g = b+e-d$$

DCHF est un parallélogramme $\Rightarrow h-c = f-d \Rightarrow h = c+f-d$

3) On calcule $\dfrac{h-a}{g-a}$

$$g-a = b-a+e-d, \quad h-a = c-a+f-d$$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a+e-d) \Rightarrow h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$$

$$\frac{h-a}{g-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$ $\Rightarrow$ **AGH est équilatéral direct.**

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(2-4i)z-4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z on a: $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z)=0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-1-i$, $z_B=2i$ et $z_C=-1+i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z+1-i|=3$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq 1+2i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-3-i}{z-1-2i}$.

1) Calculer le nombre $\alpha=f(1+3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) On considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A=1+2i$ et $z_B=3+i$.

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)|=1$; **b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. ;**

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel ; **d) Γ_4 tel que $|f(z)-1|=\sqrt{5}$.**

3.a) Déterminer et représenter dans le repère précédent un point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en C (deux solutions possibles).

b) Vérifier que C est commun entre Γ_1 et Γ_2 .

Exercice 3

Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_3 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$.

1) Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.

2) Ecrire z_3 sous forme algébrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

4) Justifier les affirmations suivantes :

Le nombre $(z_1)^{2019}$ est réel.

Le nombre $(z_2)^{2019}$ est imaginaire pur.

Exercice 4

1) Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - (4 - i)z^2 + 7z - 4 + 7i$.

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-12 - 16i$.

b) Calculer $P(-i)$.

c) Déterminer les réels a et b tels que, $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $P(z) = (z + i)(z^2 + az + b)$.

d) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -i$ et $z_C = 3 - 2i$.

a) Placer les points A, B et C .

b) Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Justifier que $z_D = 4 + i$

c) Ecrire sous forme algébrique $\dfrac{z_D - z_C}{z_D - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ACD .

3) Pour tout nombre complexe $z \neq 1 + 2i$; on pose : $f(z) = \dfrac{z - 3 + 2i}{z - 1 - 2i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{20}$.

Exercice 5

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2-2z-2-4i=0$

2) On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z)=z^3-(2+2i)z^2-2z-8+4i$.

a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux réels a et b tels que $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=(1+i)^2$, $z_B=\dfrac{5+5i}{2+i}$ et $z_C=\dfrac{1-5i}{2+3i}$.

a) Donner la forme algébrique de z_A, z_B et z_C

b) Placer les points A, B et C

c) Déterminer et construire l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

4) Soit f l'application définie pour tout complexe $z\neq 3+i$ par $f(z)=\dfrac{(1-i)z+2}{z-3-i}$

Montrer que pour tout $z\neq 3+i$, on a : $f(z)=(1-i)\dfrac{z+1+i}{z-3-i}$

5) Déterminer et construire les ensembles de points M dans chacun des cas suivants :

a. Γ_1 tel que $|f(z)|=\sqrt{2}$.

b. Γ_2 tel que $\arg(f(z))=\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

c. Γ_3 tel que $\arg(f(z))=\dfrac{3\pi}{4}\ [\pi]$

d. Γ_4 tel que $|f(z)-1+i|=2\sqrt{10}$.

Exercice 6

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-10z^2+33z-34$.

a) Calculer $P(2)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z)=0$. On note z_0 ; z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que $\text{Im}(z_2)<\text{Im}(z_0)<\text{Im}(z_1)$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=z_1+3i$, $z_B=z_2+i$ et $z_C=6+2i$.

a) Vérifier que $z_A=4+4i$ et $z_B=4$.

b) Ecrire les nombres z_A et z_B sous forme trigonométrique.

c) Placer les points A, B et C dans le repère.

3) Pour tout nombre $z\neq 4+4i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-4}{z-4-4i}$.

a) Vérifier que $f(z_C)=i$ et interpréter graphiquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n=(z_A)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n.

a) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n>2015$.

Exercice 7

1) Pour tout complexe z on pose : $P(z)=z^3-10z^2+36z-40$

a) Calculer $P(2)$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=4-2i$, $z_B=2$ et $z_C=4+2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z \neq 4+2i$; on pose : $f(z)=\dfrac{z-4+2i}{z-4-2i}$.

a) Vérifier que $f(z_D)=i$ et interpréter graphiquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{2}$

4) On pose $z_0=f(2i)$. Pour tout entier naturel n on note $z_n={z_0}^n$.

a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $|z_n|\geq 2017$.

c) Vérifier que le point d'affixe z_{2018} appartient à l'axe des imaginaires purs.

Exercice 8

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(3+3i)z-4i$.

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$

b) Calculer $P(i)$

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-i)(z^2+az+b)$.

d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$.

2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 1-i$ et $z_C = 2+2i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan d'affixe z tel que $\left|\frac{z-2-2i}{z-1+i}\right| = 1$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = (z_C)^n$ et $v_n = |z_n|$.

a) Vérifier que $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis en déduire l'écriture trigonométrique de z_n.

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

c) Calculer la limite de (v_n) et exprimer en fonction de n la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

Exercice 9 (Bac)

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-3+4i$

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 + (3-6i)z - 6 - 10i = 0$.

2)Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2+2i$; $z_B = i$ et $z_C = -1+4i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

3)Pour tout nombre complexe $z \neq i$; on pose : $f(z) = \frac{z+1-4i}{z-i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1| = \sqrt{2}$.

4) On pose, pour tout entier $n \geq 1$; $z_n = \left(z_A\right)^n$.

a) Ecrire z_n sous forme trigonométrique.

b) Déterminer la longueur du segment OM_{2019}, où M_{2019} est le point d'affixe z_{2019}.

Exercice 10

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose:

$P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-16+20i)z + 24 + 8i$.

1.a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les complexes α et β tels que pour tout complexe z on a:

$P(z) = (z-2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 11

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$z^2 + 6z + 25 = 0 \qquad (E)$

1) Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de (E) tels que $\mathrm{Im}(z_1) > 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = z_1 - 6i$, $z_B = z_2 + 4$ et $z_C = -1 + 2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z \neq 3$, on pose : $f(z) = \dfrac{z+3+2i}{z-3}$.

a) Calculer le nombre $\alpha = f(5-6i)$ puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique.

b) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$.

Exercice 12

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z)=z^3-(2+6i)z^2-11z-8+6i$

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $Z=32i$.

b) Calculer $P(2i)$.

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$

d) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): P(z)=0$.

2) Soient A , B et C les points d'affixes respectives : $z_A=-1$; $z_B=2i$ et $z_C=3+4i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\dfrac{z-2-2i}{z-2i}$ soit imaginaire pur.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n=(z_D)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n .

a) Ecrire z_n sous forme exponentielle. Montrer que le nombre z_{2020} est réel.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n \geq 2020$.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $U_n=|z_{n+1}-z_n|$.

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.

b) On pose $S_n=M_0M_1+M_1M_2+...+M_nM_{n+1}$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 13

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(2-4i)z-4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z on a: $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z)=0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-1-i$, $z_B=2i$ et $z_C=-1+i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z+1-i|=3$.

Exercice 14 (Bac)

1. a) Calculer $(4-2i)^2$.

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2+(2-4i)z-6=0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1+i$, $z_B=-3+3i$ et $z_C=\dfrac{(z_B)^3}{(z_A)^5}$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres z_A, z_B puis en déduire celle de z_C.

b) Placer les points A et B dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

c) Ecrire sous forme algébrique le nombre $\dfrac{z_B}{z_A}$ puis interpréter géométriquement.

3) Pour tout nombre complexe $z\neq 1+i$; on pose : $f(z)=\dfrac{z+3-3i}{z-1-i}$.

a) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z)=i$. Interpréter géométriquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur ou nul.

d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{5}$.

Exercice 15 (Traduit)

Soit z un nombre complexe ; $z \neq 3i$. **On pose : $f(z)=\frac{-z-2-i}{z-3i}$.** **1) Déterminer $z_1=f(i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.** **2) Déterminer $z_2=f(1)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.** **3.a) Déterminer le nombre $z_3=f(1-i)$ puis l'écrire sous forme algébrique.** **b) On pose $\theta=\arg z_3$.** **Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$. En déduire une écriture trigonométrique du nombre $z_3=f(1-i)$.** **4) Déterminer puis construire dans le plan complexe l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z telle que $\|f(z)\|=1$.** **5) Déterminer puis construire dans le plan complexe l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z telle que $\|f(z)+1\|=2\sqrt{5}$.**	**ليكن z عددا عقديا ، $z \neq 3i$ ؛** **نضع: $f(z)=\frac{-z-2-i}{z-3i}$.** **1) عين العدد $z_1=f(i)$ واكتبه على الشكلين الجبري والمثلثي.** **2) عين العدد $z_2=f(1)$ واكتبه على الشكلين الجبري والمثلثي.** **a.3)عين العدد $z_3=f(1-i)$ واكتبه على الشكل الجبري.** **b) نضع $\theta=\arg z_3$.** **احسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ واستنتج كتابة مثلثية للعدد $z_3=f(1-i)$,** **4) عين ثم مثل في المستوي العقدي Γ_1 مجموعة النقط M ذات اللاحق z بحيث $\|f(z)\|=1$.** **5) عين ثم مثل في المستوي العقدي Γ_2 مجموعة النقط M ذات اللاحق z بحيث $\|f(z)+1\|=2\sqrt{5}$.**

Exercice 16 (Traduit)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $(E_1)\ : z^2-4z+16=0$	1) حـل فـي مجموعـة الأعـداد العقديـة المعادلة $(E_1): z^2-4z+16=0$
2) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.	2) اكتب الحلين على الشكل المثلثي.
3) Soit le nombre complexe $u=2-2i\sqrt{3}$.	3) ليكن العدد العقدي $u=2-2i\sqrt{3}$.
a) En utilisant la forme trigonométrique du nombre u ; déduire tous les nombres complexes z vérifiant $Z^4=u$.	a) باسـتخدام الشـكل المثلثـي للعدد u ؛ اسـتنتج كـل الأعـداد العقديـة Z التـي تحقق $Z^4=u$.
b) Déterminer algébriquement tous les nombres complexes x vérifiant $X^2=u$, puis en déduire de nouveau les nombres complexes z vérifiant $Z^4=u$.	b) عين جبريا كل الأعداد العقديـة X التـي تحقـق $X^2=u$ ثـم استنتج مـن جديـد الأعـداد العقديـة Z التـي تحقـق $Z^4=u$.
c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.	c) اســـتنتج قـــيم $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Exercice 17 (Traduit)

Dans l'ensemble des nombres complexes on pose $P(z)=\frac{z-1+6i}{z+4-i}$	في مجموعة الأعداد العقدية نضع: $P(z)=\frac{z-1+6i}{z+4-i}$
1) Calculer puis écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants : $P(-1)$, $P(3+6i)$ et $P(-4+3i)$	1)احسب ثم اكتب على الشكل الجبري كلا من الأعداد التالية : $P(-1)$ ، $P(3+6i)$ ؛ $P(-4+3i)$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=1-i$ et écrire la solution sous forme algébrique.	2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=1-i$ ثم اكتب حلها على الشكل الجبري.
3) On muni le plan complexe d'un repère	3) ننسب المستوي العقدي إلى معلم قائم

orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :	ومنتظم $(O;\vec{u},\vec{v})$. عين ثم مثل في المستوي مجموعة النقط M ذات اللاحق z في كل من الحالتين التاليتين:
a) $\lvert P(z)\rvert = 1$.	$\lvert P(z)\rvert = 1$ (a
b) Le nombre $P(z)$ est réel.	b) العدد $P(z)$ حقيقي.
4) On pose $Z = P(3+6i)$. Soit M_1 ; M_n les points d'affixes respectives Z et Z^n ; $n \in IN^*$.	4) نضع $Z = P(3+6i)$. ولتكن النقطتان M_1 و M_n صورتا العددين Z و Z^n حيث $n \in IN^*$.
a) Montrer que $Z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.	a) بين أن $Z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
b) Ecrire Z^n sous forme trigonométrique.	b) اكتب Z^n على الشكل المثلثي.
c) Déterminer et représenter dans le plan les points M_1 ; M_2 ; M_3.	c) حدد ثم مثل في المستوي النقط M_1، M_2 ، M_3.
d) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle isocèle en M_1.	d) بين أن المثلث OM_1M_2 قائم ومتساوي الساقين في M_1 .
5.a) Pour quelles valeurs de n ; le point M_n est situé sur l'axe (Ox)?	5.a) من أجل أي قيمة للعدد n تقع M_n على محور الفواصل؟
b) Montrer que les points O ; M_4 ; M_{2008} sont alignés.	b) بين أن النقط O، M_4 ، M_{2008} مستقيمية.
6.a) On pose $U_n = \lvert z_{n+1} - z_n\rvert$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.	6.a) نضع $U_n = \lvert z_{n+1} - z_n\rvert$ ؛ بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
b) On pose $S_n = M_1M_2 + M_2M_3 + ... + M_nM_{n+1}$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.	b) نضع $S_n = M_1M_2 + M_2M_3 + ... + M_nM_{n+1}$ احسب S_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

CHAPITRE 2 SUITES NUMERIQUES

I. RESUME DE COURS

Généralités

Définition

On appelle suite numérique, toute application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

Propriétés

Propriété	Condition
On dit que la suite (U_n) est…	Si …
croissante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n \geq 0$
strictement croissante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n > 0$
décroissante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n \leq 0$
constante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n = 0$
monotone	La suite est croissante ou décroissante
majorée	il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_n \leq M$
minorée	il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_n \geq m$
Bornée	elle est à la fois majorée et minorée
Positive	pour tout entier naturel n ; $U_n \geq 0$
périodique de période $T > 0$	pour tout entier naturel n ; $U_{n+T} = U_n$
Convergente	Elle possède une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$
convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \lvert U_n - \ell \rvert = 0$
Divergente	Elle n'est pas convergente : n'a pas de limite ou possède une limite infinie.

Remarque

Soit (U_n) une suite de termes strictement positifs. $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1, \forall n \Rightarrow (U_n)$ est croissante $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1, \forall n \Rightarrow (U_n)$ est décroissante

Suites arithmétiques

Propriété caractéristique	Il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_{n+1} - U_n = r$ Le réel r est appelé <u>raison</u> de la suite
Terme général	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_1 + (n-1)r$ $u_n = u_p + (n-p)r$
Raison	$r = \frac{u_p - u_q}{p-q}$, $p \neq q$
Monotonie	$r > 0 \Rightarrow (U_n)$ est strictement croissante $r < 0 \Rightarrow (U_n)$ est strictement décroissante $r = 0 \Rightarrow (U_n)$ est constante
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique: $S = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$	$S = \frac{\text{nombre de termes}}{2}(\text{premier terme} + \text{dernier terme})$ $S = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$
En particulier, la somme des entiers naturels de 1 à n:	$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors le terme b est appelé moyenne arithmétique de a et c	$b = \frac{a+c}{2}$, $U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$, $U_{n-p} + U_{n+p} = 2U_n$, $n \geq p$
moyenne arithmétique d'une série de n nombres : $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$	$a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

<u>**Remarque**</u>

Toute suite (U_n) définie par $U_n = an + b$, (où $a, b \in \mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b.

Suites géométriques

Propriété caractéristique	il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_{n+1} = qU_n$ le réel q est appelé <u>raison</u> de la suite
Terme général	$u_n = u_0 q^n = u_1 q^{n-1} = u_p q^{n-p}$
Raison	$q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$
La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q: $S = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$	$q \neq 1 \Rightarrow$ $S = \text{premier terme} \times \frac{1 - (\text{raison})^{\left(\text{nombre de termes}\right)}}{1 - \text{raison}}$ $q \neq 1 \Rightarrow S = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
	$q = 1 \Rightarrow S = (n - p + 1)u_p$
La somme des puissances consécutives d'un nombre :	$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$
Convergence (Premier terme non nul)	$\lvert q \rvert < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ $\lvert q \rvert > 1 \Rightarrow (U_n)$ est divergente $q = -1 \Rightarrow (U_n)$ est divergente : alternée $q = 1 \Rightarrow (U_n)$ est convergente : constante
Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique , alors le terme b est appelé moyenne géométrique de a et c	$b^2 = ac$ $U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1}$ $U_{n-p} \times U_{n+p} = U_n^2, \quad n \geq p$ $U_n = \sqrt{U_{n-1} \times U_{n+1}} = \sqrt{U_{n-p} \times U_{n+p}}, \quad n \geq p$ si (U_n) est une suite positive.
moyenne géométrique d'une série de n nombres : $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$	$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}}$

Remarques :

- Toute suite (U_n) définie par $U_n = aq^n$, (où $a, q \in \mathbb{R}$) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.
- Si le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est constant, alors la suite est géométrique de raison $q = \frac{U_{n+1}}{U_n}$.

Convergence

Propriétés

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
- Toute suite monotone et bornée converge.
- Si, à partir d'un certain rang, $|U_n - \ell| \leq \alpha_n$, et si $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.
- Si, à partir d'un certain rang, $U_n \leq V_n \leq W_n$, et si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \ell$. (Théorème des gendarmes)

Suites adjacentes

Deux suites sont dites adjacentes si, et seulement si, l'une est croissante, l'autre est décroissante et elles convergent vers la même limite.

- Si deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, (U_n) est croissante, (V_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \ell$, alors pour tout entier naturel n :

$$\boxed{U_0 \leq U_1 \leq \ldots \leq U_n \leq \ell \leq V_n \leq V_{n-1} \leq \ldots \leq V_1 \leq V_0}$$

- Si deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, alors :

$$\boxed{\begin{array}{l}(U_n),\ (V_n) \\ \text{ont même limite}\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0} \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1}$$

Raisonnement par récurrence

Principe

On considère une propriété $P(n)$ qui dépend d'un entier naturel n. Soit n_0 un entier naturel. Si $P(n_0)$ est vraie, et si pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Etapes de démonstration par récurrence

1) **L'initialisation : On montre que $P(n_0)$ est vraie,**
2) **L'hérédité : On montre que $P(n)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vraie .**
3) **Conclusion : Pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie .**

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans cet exercice, (U_n) est une suite numérique telle que $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3U_{n+1} - 2U_n = 0$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses A	B	C	D
1	Le terme général de la suite (U_n) est	$U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$	$U_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$	$U_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$
2	(U_n) est une suite	croissante	décroissante	divergente	non monotone
3	La somme $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ est égale à	$\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{3}$	$3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$	$3\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right)$	$\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{3}$
4	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$	0	$+\infty$	$-\infty$	1
5	(U_n) est une suite	minorée par 1	majorée par 1	convergente vers 1	Divergente
6	La suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est	géométrique	Arithmétique	constante	Positive

QCM 2

Dans cet exercice (u_n) est une suite à termes strictement positifs, on définit la suite (v_n) de terme général: $v_n = \frac{2}{u_n}$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	Si (u_n) est majorée par 2, alors (v_n) est:	majorée par 2	minorée par 2	minorée par 1	bornée
2	Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors :	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 2$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sqrt{2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n < \lim\limits_{n\to\infty} v_n$
3	Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est:	croissante	décroissante	constante	non monotone
4	Si (u_n) est géométrique de raison 3 , alors (v_n) est:	géométrique de raison $\frac{2}{3}$	géométrique de raison $\frac{1}{3}$	arithmétique	Divergente
5	Si (u_n) est arithmétique de raison 5 , alors (v_n):	converge vers $\frac{2}{5}$	converge vers 0	diverge	est arithmétique
6	Si (u_n) est périodique de période 4 , alors (v_n) est:	non monotone	périodique de période 2	convergente	constante

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+2U_n}, \quad \forall n \in IN \end{cases}$$

On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n}, \quad \forall n \in IN$

1.a) Calculer U_1, U_2, V_0, V_1 et V_2.

b) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique et déterminer sa raison.

2) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) Etudier la convergence de (U_n) et (V_n).

Exercice 2

Pour tout entier naturel n on pose : $U_n = \dfrac{2^n - 4n + 3}{2}$, $V_n = \dfrac{2^n + 4n - 3}{2}$

1) Déterminer la nature de chacune des suites (a_n) et (b_n) tels que:

$a_n = U_n + V_n$; $b_n = U_n - V_n$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$

2) En déduire : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$; $S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n on pose :

$$S_n = \frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{3\times 5} + \frac{2}{5\times 7} + \cdots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

1) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{a}{2k+1}+\frac{b}{2k+3}$$, **pour tout** $k \in \mathbb{N}$

2) En déduire une expression simple de S_n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

4) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 5 (Bac D)

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

1.a) Calculer U_1 , U_2 et U_3.

b) Justifier que la suite (U_n) :

- **N'est pas arithmétique ;**
- **N'est pas géométrique ;**
- **Est convergente.**

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $$V_n = \frac{n^2-1}{n}.$$

a) Montrer que : $U_n = V_{n+1} - V_n$

b) En déduire l'expression de la somme :

$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ **en fonction de** n.

3) Pour tout entier $n \geq 2$, **on pose :** $W_n = \ln V_n$ **et** $S'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$.

Démontrer que : $S'_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)!}{2n}\right)$.

Exercice 6

Soit a_n et b_n les suites définies pour tout n entier naturel par :

$$\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1) Calculer a_1 et b_1 , a_2 et b_2 .

2) Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = a_n + b_n$. Montrer que u_n est constante et calculer u_n.

3) Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = a_n - b_n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de v_n en fonction de n. Justifier que (v_n) est négative.

4) Exprimer a_n et b_n en fonction de u_n et v_n puis en fonction de n.) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

5) Montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

6) Que peut-on dire des suites (a_n) et (b_n) ?

Exercice 7

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1) **Calculer** u_1, u_2 **et** v_1 , v_2.

2) **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$, **on pose** $w_n = v_n - u_n$

a) **Montrer que** w_n **est une suite géométrique de raison** $\frac{1}{4}$.

b) **Exprimer** w_n **en fonction de n et préciser sa limite.**

3) **Etudier les sens de variations de deux suites** u_n **et** v_n, **puis démontrer que** u_n **et** v_n **sont adjacentes**

4.a) **Démontrer que la suite** t_n **définie par :** $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ **est une suite constante.**

b) **En déduire la limite commune de** u_n **et** v_n.

Exercice 8

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, **on a :** $n! \geq 2^{n-1}$.

Exercice 9

1) **Montrer que pour tout réel *x* positif ou nul et pour tout entier *n* positif ou nul, on a** $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

2) **Soit la suite définie par :** $u_n = \frac{n!}{n^n}$. **Calculer** u_1, u_2 **et** u_3.

3.a) **Montrer que pour tout** $n > 0$, **on a** $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$.

b) **En déduire le sens de variation de** (u_n).

4.a) **Monter que** $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) **Calculer** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 10

Démontrer par récurrence que :

$3+4+5\cdots+n=\frac{(n-2)(n+3)}{2}$; **pour tout** $n \geq 3$.

Exercice 11

Démontrer par récurrence que :

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; **pour tout** $n \geq 1$

Exercice 12 (D'après Bac)

On considère la suite numérique de terme général $U_n=\frac{n}{e^n}$ **, pour tout entier naturel** $n \geq 1$.

1. a) Calculer U_1 **et** U_2.

b) Prouver que la suite (U_n) **est positive et décroissante. Conclure.**

c)Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1}=\frac{1}{e}U_n+\frac{1}{e^{n+1}}$ **(*). En déduire que** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=0$.

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ **on pose :** $S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$.

a) En utilisant l'égalité (*) prouver que : $S_n=\frac{-1}{e-1}U_n+\frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})$.

b) Déduire de ce qui précède: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1.a) On a :

$$U_1 = \frac{U_0}{1 + 2U_0} = \frac{1}{3}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{1 + 2U_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$$

$$V_1 = \frac{1}{U_1} = 3$$

$$V_2 = \frac{1}{U_2} = 5$$

b) Pour montrer que la suite (V_n) est arithmétique, il suffit de montrer que la différence $V_{n+1} - V_n$ est constante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a : $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{U_n} = \dfrac{1 + 2U_n}{U_n} - \dfrac{1}{U_n}$

Alors $V_{n+1} - V_n = 2$ et la suite (V_n) est arithmétique de raison $r = 2$.

2) On sait que $V_n = V_0 + nr$. Alors $V_n = 1 + 2n$.

Or $U_n = \dfrac{1}{V_n}$, $\quad \forall n \in IN$, on a $U_n = \dfrac{1}{1 + 2n}$, $\quad \forall n \in IN$.

3) On a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1 + 2n) = +\infty$. Alors la suite (V_n) est divergente.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1 + 2n} = 0$. Alors la suite (U_n) est convergente vers 0.

Corrigé 2

1) On a

$$a_n = U_n + V_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} + \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$
$$= \frac{2^n + 2^n}{2} = 2^n$$

Donc $a_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2a_n$

Alors (a_n) **est une suite géométrique de raison** $q = 2$.

On a aussi

$$b_n = U_n - V_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} - \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$
$$= \frac{-8n + 6}{2} = -4n + 3$$

$b_{n+1} = -4(n + 1) + 3 = -4n - 4 + 3 = b_n - 4$.

Alors $b_{n+1} - b_n = 4, \forall n \in \mathbb{N}$ **et la suite** (b_n) **est arithmétique de raison** $r = -4$.

2) Pour calculer les sommes on a :

$$S_n + S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n + V_0 + V_1 + \cdots + V_n$$
$$= (U_0 + V_0) + (U_1 + V_1) + \cdots + (U_n + V_n)$$

$$S_n + S'_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
$$= a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$S_n + S'_n = 2^{n+1} - 1$$

D'autre part ;

$$S_n - S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n - V_0 - V_1 - \cdots - V_n$$
$$= (U_0 - V_0) + (U_1 - V_1) + \cdots + (U_n - V_n)$$

$$S_n - S'_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$
$$= \frac{(n + 1)(b_0 + b_n)}{2}$$

$$S_n - S'_n = \frac{(n+1)(3-4n+3)}{2}$$
$$= (n+1)(-2n+3)$$

$$S_n - S'_n = (n+1)(-2n+3)$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} S_n + S'_n = 2^{n+1} - 1 & (1) \\ S_n - S'_n = (n+1)(-2n+3) & (2) \end{cases}$$

Par addition $2S_n = 2^{n+1} - 1 + (n+1)(-2n+3)$

Donc $S_n = \frac{1}{2}[2^{n+1} - 1 + (n+1)(-2n+3)]$..

Par soustraction : $2S'_n = 2^{n+1} - 1 - (n+1)(-2n+3)$

Donc $S'_n = \frac{1}{2}[2^{n+1} - 1 - (n+1)(-2n+3)]$.

Corrigé 3

1) On utilise une identification :

(Plusieurs étapes : réduction au même dénominateur ; développement, réduction, ordre puis identification)

$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3} = \frac{a(2k+3) + b(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3} = \frac{2ak + 3a + 2bk + b}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3} = \frac{(2a+2b)k + 3a + b}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2a+2b)k + 3a + b}{(2k+1)(2k+3)}$$

Par identification :

$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 3a + b = 2 \end{cases}$$

Alors $a = 1, b = -1$.

Donc $\dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+3}$; $\forall k \in IN$

2) Pour trouver une forme simple de S_n on écrit l'identité précédente pour $k = 0,1,2,\dots,n$

$$k = 0 \Rightarrow \frac{2}{1\times 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{2}{3\times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$k = 2 \Rightarrow \frac{2}{5\times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$k = n \Rightarrow \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$$

On additionne membre à membre et on simplifie on obtient :

$S_n = 1 - \dfrac{1}{2n+3} = \dfrac{2n+2}{2n+3}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Corrigé 4

1) On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

$u_1 = u_0 + 2\times 0 + 3 \Rightarrow u_1 = 1 + 3 \Rightarrow u_1 = 4$

$u_2 = u_1 + 2\times 1 + 3 \Rightarrow u_2 = 4 + 2 + 3 \Rightarrow u_2 = 9$

$u_3 = u_2 + 2\times 2 + 3 \Rightarrow u_2 = 9 + 4 + 3 \Rightarrow u_3 = 16$

2) On a , pour tout entier naturel $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc (u_n) est strictement croissante.

3. a) Démonstration par récurrence :

- **On a :** $u_0 = 1 > 0^2$**, la propriété est vraie au rang 0.**
- **On suppose que** $u_n > n^2$ **et on démontre que** $u_{n+1} > (n+1)^2$**.**

D'après l'hypothèse, en ajoutant $2n+3$**, on obtient** $u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$

Donc $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$**. Or** $n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$**, alors** $u_{n+1} > n^2 + 2n + 1$**. Enfin** $u_{n+1} > (n+1)^2$**.**

- **Conclusion : Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** $u_n > n^2$**.**

b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$**,** $u_n > n^2$**, et que** n^2 **tend vers +∞ lorsque *n* tend vers +∞,** u_n **tend clairement vers +∞.**

4) D'après 1) on a: $u_0 = 1, u_1 = 4, u_2 = 9, u_3 = 16$**. On voit apparaître la suite des carrés des entiers consécutifs 1, 2, 3 et 4. La comparaison de la valeur de** u_n **avec le carré de l'indice n permet de conjecturer que** $u_n = (n+1)^2$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**.**

Utilisons une démonstration par récurrence pour montrer cette conjecture.

Pour $n = 0$**, on a que** $u_0 = 1 = (0+1)^2$**. L'égalité est vérifiée.**

- **On suppose que** $u_n = (n+1)^2$ **et on démontre que** $u_{n+1} = (n+2)^2$**.**

D'après l'hypothèse, en ajoutant $2n+3$**, on obtient** $u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3$

Donc $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

$u_{n+1} = n^2 + 4n + 4$**, alors** $u_{n+1} = (n+2)^2$**.**

- **Conclusion : Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** $u_n = (n+1)^2$**.**

Corrigé 5

La suite numérique (U_n) **est définie pour tout entier** $n \geq 1$ **par :**

$$U_n = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}.$$

1.a) Calcul de termes :

$$U_1 = \frac{1^2 + 1 + 1}{1(1+1)} = \frac{3}{2}$$

$$U_2 = \frac{2^2+2+1}{2(2+1)} = \frac{7}{6} \;; \qquad U_3 = \frac{3^2+3+1}{3(3+1)} = \frac{13}{12}$$

b) On a : $U_2 - U_1 = \frac{7}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}$ **et** $U_3 - U_2 = \frac{13}{12} - \frac{7}{6} = -\frac{1}{12}$

Comme $U_2 - U_1 \neq U_3 - U_2$**, la suite** (U_n) **n'est pas arithmétique.**

- $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{9}$ **et** $\frac{U_3}{U_2} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{7}{6}} = \frac{13}{14}$.

Comme $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}$**, la suite** (U_n) **n'est pas géométrique .**

- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$.

La suite (U_n) **admet une limite finie, donc** (U_n) **est convergente.**

2. Pour $n \geq 1$, $V_n = \frac{n^2-1}{n}$.

a) On a : $V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)^2-1}{n+1} - \frac{n^2-1}{n} = \frac{n^2+2n+1-1}{n+1} - \frac{n^2-1}{n}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{n^2+2n}{n+1} - \frac{n^2-1}{n}$$

$$= \frac{n(n^2+2n)-(n+1)(n^2-1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2-(n^3-n+n^2-1)}{n(n+1)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{n^3+2n^2-n^3+n-n^2+1}{n(n+1)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

Alors : $U_n = V_{n+1} - V_n$

b) On utilise le résultat précédent pour simplifier la somme $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$. On obtient :

$$\begin{cases} U_1 = V_2 - V_1 \\ U_2 = V_3 - V_2 \\ . \\ . \\ . \\ U_{n-1} = V_n - V_{n-1} \\ U_n = V_{n+1} - V_n \end{cases}$$

En faisant la somme on trouve $S_n = V_{n+1} - V_1$.

On sait que $V_{n+1} = \dfrac{n^2 + 2n}{n+1}$ et $V_1 = 0$. Alors $S_n = \dfrac{n^2 + 2n}{n+1}$.

3. Pour tout entier $n \geq 2$:

$W_n = \ln V_n$ **et** $S'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$.

On a : $S'_n = \ln V_2 + \ln V_3 + \cdots + \ln V_n = \ln(V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n)$

D'autre part, on peut écrire : $V_n = \dfrac{n^2 - 1}{n} = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n}$.

Donc : $V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \dfrac{1 \times \cancel{3}}{2} \times \dfrac{2 \times \cancel{4}}{\cancel{3}} \times \dfrac{3 \times \cancel{5}}{\cancel{4}} \times \dfrac{4 \times \cancel{6}}{\cancel{5}} \cdots \times \dfrac{(n-1)(n+1)}{\cancel{n}}$ **Après simplification, on peut écrire :**

$$V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1)}{2} \times (n+1)$$

On peut aussi écrire :

$$V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n \times (n+1)}{2n}$$

D'où : $V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \dfrac{(n+1)!}{2n}$ **. Enfin** $S'_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)!}{2n}\right)$.

Corrigé 6

1) On a pour n = 0 :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{5}(3a_0 + 2b_0) = \frac{1}{5}(3\times2+2\times3) = \frac{12}{5} \\ b_1 = \frac{1}{5}(2a_0 + 3b_0) = \frac{1}{5}(2\times2+3\times3) = \frac{13}{5} \end{cases}$$

Pour n = 1 :

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{5}(3a_1 + 2b_1) = \frac{1}{5}(3\times\frac{12}{5}+2\times\frac{13}{5}) = \frac{62}{25} \\ b_2 = \frac{1}{5}(2a_1 + 3b_1) = \frac{1}{5}(2\times\frac{12}{5}+3\times\frac{13}{5}) = \frac{63}{25} \end{cases}$$

2) Pour montrer que (u_n) est une suite constante, il suffit de montrer que $u_{n+1} = u_n$ pour tout n.

$$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{5}\left(3a_n + 2b_n \right) + \frac{1}{5}\left(2a_n + 3b_n \right) = \frac{1}{5}\left(5a_n + 5b_n \right) = a_n + b_n = u_n .$$

(u_n) est donc constante de terme général $u_n = u_0 = a_0 + b_0 = 5$.

3) Montrons que (v_n) est géométrique :

$$v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{5}\left(3a_n + 2b_n \right) - \frac{1}{5}\left(2a_n + 3b_n \right) = \frac{1}{5}\left(a_n - b_n \right) = \frac{1}{5} v_n .$$

(v_n) est donc, une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - b_0 = -1$. On a donc $v_n = v_0 q^n = -1\times\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{-1}{5^n}$.

Il est clair que pour tout n, $\frac{-1}{5^n} < 0$. Donc $v_n < 0$. Alors (v_n) est négative.

4) On a :

$$\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = a_n - b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 2a_n \\ u_n - v_n = 2b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ b_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}\left(5 - \dfrac{1}{5^n} \right) \\ b_n = \dfrac{1}{2}\left(5 + \dfrac{1}{5^n} \right) \end{cases}.$$

Comme $\frac{1}{5^n}$ tend vers 0 à l'infini, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{2}$.

5) On a pour tout n :

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) - a_n = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n - 5a_n) = \frac{1}{5}(-2a_n + 2b_n) = \frac{2}{5}(-a_n + b_n) = \frac{-2}{5} v_n \\ b_{n+1} - b_n = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) - b_n = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n - 5b_n) = \frac{1}{5}(2a_n - 2b_n) = \frac{2}{5}(a_n - b_n) = \frac{2}{5} v_n \end{cases}$$

Alors $\begin{cases} a_{n+1} - a_n > 0 \\ b_{n+1} - b_n < 0 \end{cases}$ **car (v_n) est négative.**

Donc (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

6) Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes car (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante, et elles convergent vers la même limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{2}$ **.**

Corrigé 7

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calcul de u_1, u_2 et v_1 , v_2 :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \to \boxed{u_1 = \frac{7}{2}} \quad ; v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{2} = \frac{15}{4} \to \boxed{v_1 = \frac{15}{4}}$$

De la même manière on calcule u_2 et v_2 :

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{29}{4}}{2} = \frac{29}{8} \to \boxed{u_2 = \frac{29}{8}} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{59}{8}}{2} = \frac{59}{16}$$

$$\to \boxed{v_2 = \frac{59}{16}}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $w_n = v_n - u_n$

a) On montre que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$:

Nous avons $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} - \dfrac{u_n + v_n}{2}$ **(on remplace u_{n+1} et v_{n+1} par leurs valeurs dans les formules de récurrences)**

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2}$$
$$= \frac{u_{n+1}+\cancel{v_n}-u_n-\cancel{v_n}}{2}$$
$$= \frac{u_{n+1}-u_n}{2}$$
$$w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n+v_n}{2}-u_n\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n+v_n-2u_n}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(v_n-u_n\right)$$
$$= \frac{1}{4}w_n$$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

b) Expression de w_n en fonction de n :

(w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 4-3=1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $w_n = w_0.q^n = 1.\left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow \boxed{w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

*** Calcul de la limite de w_n :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. La raison de la suite w_n vérifie $|q| = \frac{1}{4} < 1$ donc

$\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$

3) Sens de variations de u_n et v_n :

Nous avons :

$$\mathbf{u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n}$$
$$\mathbf{= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}}$$
$$\mathbf{= \frac{v_n - u_n}{2}}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{2}(v_n - u_n)}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{2}.w_n}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0}$$

Donc u_n est une suite strictement croissante.

De la même façon on a :

$$\mathbf{v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n}$$
$$\mathbf{= \frac{u_{n+1} + v_n - 2v_n}{2}}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{2}.(u_{n+1} - v_n)}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{2}.\left[\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) - v_n\right]}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{2}.\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{4}(u_n - v_n)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{4}(v_n - u_n) = -\frac{1}{4}w_n < 0}$$

Donc (v_n) est strictement décroissante.

*** On montre que u_n et v_n sont adjacentes :**

La suite u_n est une suite strictement croissante, la suite v_n est strictement décroissante. De plus, d'après la question 2) $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$. On en déduit que u_n et v_n sont adjacentes

4) (t_n) **est la suite définie par :** $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$

a) On démontrer que la suite t_n **est constante :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$**, on a** $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3}$$

$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + 2.\frac{u_{n+1} + v_n}{2}}{3}$$

$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n}{3}$$

$$t_{n+1} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{3}$$

$$= \frac{2\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) + v_n}{3}$$

$$= \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$= t_n$$

Donc pour tout entier naturel n, on a $t_{n+1} = t_n$ **la suite** (t_n) **est donc constante.**

b) Calcul de la limite de u_n **et** v_n **:**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$**,** $t_{n+1} = t_n = t_0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0 = \dfrac{u_0 + 2v_0}{3} = \dfrac{3 + 2\times 4}{3} = \dfrac{11}{3}$

D'autre part, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = \dfrac{11}{3}$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$ **on en déduit que** $\dfrac{l + 2l}{3} = \dfrac{11}{3}$ **soit** $\boxed{l = \dfrac{11}{3}}$**.**

Corrigé 8

Initialisation: Pour $n=1$ la propriété est $1! \geq 2^{1-1}$ ce qui est vrai car $1 \geq 1$.

Hérédité :

Supposons que $n! \geq 2^{n-1}$; et montrons que $(n+1)! \geq 2^{n+1-1}$ c'est-à-dire $n!(n+1) \geq 2^n$.

On sait que pour tout entier *n* strictement positif, on a $n+1 \geq 2$ et par hypothèse $n! \geq 2^{n-1}$. Donc en multipliant les deux inégalités, on obtient $n!(n+1) \geq 2^{n-1} \times 2 = 2^n$.

Conclusion : Pour tout entier *n* strictement positif, on a $n! \geq 2^{n-1}$.

Corrigé 9

1) Démontrons par récurrence :

Initialisation: pour $n = 0$, on a :

$(1+x)^0 \geq 1 + 0x \Leftrightarrow 1 \geq 1$; la propriété est vraie.

Hérédité :

On suppose que $(1+x)^n \geq 1+nx$ et on montre que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

D'après l'hypothèse en multipliant par $1+x$:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

Conclusion : Pour tout entier *n* positif ou nul, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2.a) Calcul de termes :

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

Donc $u_1 = \frac{1!}{1^1} = 1$, $u_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2}$ **et** $u_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

3.a) On a

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n!}{n^n}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n+1)\times n!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

On applique l'inégalité du 1. avec $x = \frac{1}{n}$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n} = 2$.

b) Or tous les termes de la suite sont positifs, on a donc

$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} < 1$, **la suite est bien décroissante.**

4.a) Démontrons par récurrence que $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ **pour tout entier** $n \geq 1$.

On a $u_1 = 1 \leq \frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{1} = 1$ **; la propriété est vraie pour** $n = 1$.

On suppose que $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ **et on démontre que** $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$.

D'après l'hypothèse, en multipliant par $\frac{1}{2}$: $0 \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$.

D'autre part, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$. **Alors** $u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$.

La suite (u_n) **est positive, donc** $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$.

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, **et que** $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, **on a** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **(théorème des gendarmes).**

Corrigé 10

- **Observons que pour n = 3 :**

Le premier membre est égal à 3

Le second membre est égal à $\frac{(3-2)(3+3)}{2}=\frac{6}{2}=3$.

La propriété est donc <u>initialisée</u>, elle est vraie au rang n = 3.

- **<u>Supposons</u> que, pour un certain entier $n \geq 3$, fixé, on ait la propriété** $3+4+5\cdots+n=\frac{(n-2)(n+3)}{2}$.

- **<u>Montrons</u> qu'alors, on a la propriété** $3+4+5\cdots+(n+1)=\frac{(n-1)(n+4)}{2}$.

On a $3+4+5\cdots+(n+1)=(3+4+5\cdots+n)+(n+1)$

Donc d'après l'hypothèse, en ajoutant (n+1) aux deux membres, on obtient

$$\begin{aligned}3+4+5\cdots+n+(n+1)&=\frac{(n-2)(n+3)}{2}+(n+1)\\&=\frac{(n-2)(n+3)+2(n+1)}{2}\\&=\frac{(n^2-2n+3n-6)+2n+2}{2}\end{aligned}$$

Donc $3+4+5\cdots+n+(n+1)=\frac{n^2+3n-4}{2}$

Enfin $3+4+5\cdots+(n+1)=\frac{(n-1)(n+4)}{2}$.

La propriété est donc <u>héréditaire</u> à partir du rang n = 3.

<u>Conclusion :</u>La propriété $3+4+5\cdots+n=\frac{(n-2)(n+3)}{2}$; **est vraie pour tout entier** $n \geq 3$.

Corrigé 11

- **Observons que pour n = 1 :**

Le premier membre est égal à $1^2=1$

Le second membre est égal à $\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=\frac{6}{6}=1$.

La propriété est donc <u>initialisée</u>, elle est vraie au rang n = 1.

- **<u>Supposons</u> que, pour un certain entier $n \geq 1$, fixé, on ait la propriété** $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- **<u>Montrons</u> qu'alors, on a la propriété** $1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

soit $1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

D'après l'hypothèse, $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **en ajoutant** $(n+1)^2$ **aux deux membres, on obtient**

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n)(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

En factorisant par (n + 1), on obtient

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6}$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

On factorise $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$ **, on obtient**

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

La propriété est donc <u>héréditaire</u> à partir du rang n = 1.

<u>Conclusion :</u>La propriété $1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ **est vraie pour tout entier** $n \geq 1$.

Corrigé 12

1) La suite (U_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par son terme général $U_n = \frac{n}{e^n}$.

a) Calcul de termes :

$$U_1 = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$U_2 = \frac{2}{e^2} = 2e^{-2}$$

b) Nous constatons que $U_n = \frac{n}{e^n}$ est le quotient de deux nombres positifs. Alors pour tout $n \geq 1$, on a : $U_n > 0$.

On a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n}$$
$$= \frac{n+1}{en}$$
$$= \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ et $1 + \frac{1}{n} \leq 2$, on a $\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$. Donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ et la suite (U_n) est décroissante.

Comme la suite (U_n) est décroissante et positive, donc minorée, on conclut qu'elle est convergente.

c) Pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} = \frac{1}{e} U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$ (*)

on a : $U_{n+1} = \frac{n+1}{e^{n+1}}$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e} \times \frac{n+1}{e^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}\left(\frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n}\right)$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}(U_n + \frac{1}{e^n})$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$$

On sait que (U_n) est convergente. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$. Comme $U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$ et par passage à la limite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}\right) = \frac{1}{e}\lim\limits_{n\to+\infty} U_n + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{n+1}}$ **. Donc** $\ell = \frac{1}{e}\ell + 0$ **d'où** $\ell = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

2) Pour tout entier $n \geq 1$; $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

a) D'après l'égalité $(*)$ on a :

$$\begin{cases} U_2 = \frac{1}{e}U_1 + \frac{1}{e^2} \\ U_3 = \frac{1}{e}U_2 + \frac{1}{e^3} \\ U_4 = \frac{1}{e}U_3 + \frac{1}{e^4} \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ U_n = \frac{1}{e}U_{n-1} + \frac{1}{e^n} \end{cases}$$

En sommant membre à membre ces égalités :

$$U_2 + U_3 + \ldots + U_n = \frac{1}{e}\left(U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}\right) + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$$

soit $\quad S_n - U_1 = \frac{1}{e}(S_n - U_n) + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$

Comme la partie $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ représente la somme de $(n-1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{e^2}$ et de raison $\frac{1}{e}$, donc:

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\cdots+\frac{1}{e^n}=\frac{1}{e^2}\times\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

Or $U_1=\frac{1}{e}$, donc $\quad S_n-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(S_n-U_n)+\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$

$$(1-\frac{1}{e})S_n=\frac{1}{e}-\frac{1}{e}U_n+\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n=\frac{e-1}{e^2-e}-\frac{1}{e}U_n+\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n=-\frac{1}{e}U_n+\frac{e-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n=-\frac{1}{e}U_n+\frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}$$

$$S_n=-\frac{e}{e-1}\bullet\frac{1}{e}U_n+\frac{e}{e-1}\bullet\frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}$$

$$S_n=\frac{-1}{e-1}U_n+\frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})$$

b) On sait que $\left|\frac{1}{e}\right|<1$.

Cela entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{e^n})=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})=\frac{e}{(e-1)^2}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{e}{(e-1)^2}$.

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout $n > 0$ par:
$U_1 = 1;\quad U_{n+1} = \dfrac{U_n}{5U_n + 1}$.

1) Calculer U_2 , U_3.

2) Pour tout $n > 0$ on pose $V_n = \dfrac{1}{U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique. Ecrire V_n puis U_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

c) Calculer en fonction de n : $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier $n \geq 0$ on a
$u_{n+1} = \dfrac{n}{2n+2}u_n - \dfrac{1}{n+1}$

1. a) Calculer u_1, u_2 et u_3

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?

d) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$.

c) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n + 2$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

3) On définit la suite (w_n) par $w_n = nu_n$ et soit $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$.

a) Donner l'expression de w_n à l'aide de v_n.

b) Calculer la somme $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ puis en déduire la valeur de S_n.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = \frac{3n}{n+1} u_n + \frac{4}{n+1}$$

1.a) Vérifier que $u_2 = \frac{7}{2}$ et $u_3 = \frac{25}{3}$.

b) Justifier que la suite (u_n) n'est in arithmétique, ni géométrique.

c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$

d) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $v_n = nu_n + 2$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = \frac{3^n - 2}{n}$.

3) Soit $S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n$.

A l'aide de v_n, exprimer la somme S_n en fonction de n.

Exercice 4

Soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)U_n$

1.a) Calculer u_1 et u_2

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2n+5}{2n+3} \leq \frac{5}{3}$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{6} U_n$

c) Prouver alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \leq 3\left(\frac{5}{6}\right)^n$ et calculer la limite de la suite (u_n).

2) Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = \frac{u_n}{2n+3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b) Calculer v_0 et exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 5

On définit la suite u_n par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs *a* = 2 et *b* = –3 de u_0 tels que la suite u_n soit constante

2. Soit $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$; après avoir étudiée *f* sur $\mathbb{R}$, tracer sa courbe représentative ainsi que la droite *y = x* sur l'intervalle [0 ; 5] et représenter les premiers termes de u_n (on prendra $u_0 = 0$).

Conjecturer le comportement de u_n (sens de variation, limite).

3. Montrer que si u_0 est différent de *a* et *b*, il en est de même de u_n (faire une démonstration par récurrence).

4. Calculer $\frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}$ en fonction de $\frac{u_n-a}{u_n-b}$. En déduire la nature de la suite $v_n=\frac{u_n-a}{u_n-b}$. Donner l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n .

Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$U_0=3,\quad U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\ ;\forall n\in \mathbb{N}\ ;$$

1) Calculer U_1, U_2.

2) Soit (V_n) la suite numérique définie par $V_n=U_n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique, exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$.

Exercice 7

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$\begin{cases} U_1=1 \\ U_{n+1}=3-\dfrac{2n}{3(n+1)}(3-U_n),\ \forall n\in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Vérifier que $U_2=\frac{7}{3}$ puis calculer U_3 ; U_4.

2) On admet que la suite (U_n) est majorée par 3 (a démontrer facilement par récurrence).

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1}-U_n=\frac{n+3}{3(n+1)}(3-U_n)$.

b) Déduire le sens de variation de la suite (U_n). Puis que la suite (U_n) est convergente.

3) On pose pour tout n de IN^* : $V_n = n(3-U_n)$.

a) Calculer $V_1 ; V_2$ et montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.

b) exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Montrer que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite. En déduire la limite de (U_n).

d) Calculer par une deuxième méthode la limite de (U_n).

4) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \cdots + nU_n$.

Exercice 8

La suite $\left(U_n\right)$ est définie par et pour tout entier naturel n, par

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1$$

1.a) Calculer les termes U_1, U_2 et U_3.

b) Justifier que la suite $\left(U_n\right)$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2.a) Démontrer que pour tout $n \geq 3$, on a $U_n \geq 0$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 4$, on a $U_n \geq n-2$.

c) En déduire la limite de la suite $\left(U_n\right)$.

3) On définit la suite $\left(V_n\right)$ par $V_n = 4U_n - 8n + 24$.

a) Démontrer que $\left(V_n\right)$ est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

b) Démontrer que , pour tout entier naturel n, $U_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

c) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_n = x_n + y_n$ où $\left(x_n\right)$ est une suite géométrique et $\left(y_n\right)$ une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

d) En déduire l'expression de la somme $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ en fonction de n.

Exercice 9

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = i$ et, pour tout entier n, $z_{n+1} = \frac{1-i}{2} z_n$. Pour n entier naturel, on appelle M_n le point d'affixe z_n.

1)Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 .

2) Montrer que pour tout n entier naturel, $z_n = \frac{e^{-i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

3) En déduire que la suite $V_n = |z_n|$ est une suite géométrique. Donner son terme général et sa limite.

Exercice 10

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$U_0 = 0, \quad U_{n+1} = \sqrt{6+U_n}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer U_1 , U_2 , U_3.

2) Démontrer par récurrence que la $U_n \leq 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que (U_n) est croissante ; conclure.

4) Montrer que $3 - U_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3 - U_n)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ . .

5) Démontrer par récurrence que : $3 - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 11 (Bac)

On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 3U_n + 10n - 13$.

1.a) Calculer U_1, U_2 et vérifier que $U_3 = 43$.

b) Justifier que la suite numérique (U_n) n'est ni géométrique ni arithmétique.

2) On définit la suite numérique (V_n) par : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n + 5n - 4$.

a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. Exprimer V_n en fonction de n.

b) A partir de quel terme a-t-on $V_n \geq 2013$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\times(3^n) - 5n + 4$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 12 (Traduit)

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}, \quad \forall n \in IN \end{cases}$	نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}, \quad \forall n \in IN \end{cases}$
1) Calculer $U_1;U_2$.	1) احسب $U_1;U_2$.
2.a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.	2.a) أثبت بالتراجع أن لكل n من IN : $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.
b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.	b) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.
c) En déduire que (U_n) est divergente puis calculer sa limite ℓ.	c) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها ℓ.
3) Soit (V_n) la suite numérique définie par $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}, \quad \forall n \in IN$	3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بما يلي: $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}, \quad \forall n \in IN$.
a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.	a) بين أن (V_n) متتالية حسابية أساسها 1.
b) Donner l'expression de V_n en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n.	b) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج تعبير U_n بدلالة n .
c) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.	c) أوجد من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 13 (Traduit)

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $U_n = \frac{n^2}{e^n}$.	نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة لكل عدد طبيعي $n \geq 2$ بما يلي: $U_n = \frac{n^2}{e^n}$.
1) Calculer U_2, U_3 et donner une valeur décimale à 10^{-2} près.	1) احسب U_2 ، U_3 وأعط القيمة العشرية بدقة 10^{-2}.
2) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e}$.	2) أثبت أن لكل $n \geq 2$ فإن: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e}$.
3) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e} \leq \frac{9}{4e}$. En déduire que (U_n) est décroissante.	3) أثبت أن لكل $n \geq 2$ فإن: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e} \leq \frac{9}{4e}$ واستنتج أن (U_n) متناقصة.
4) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{9}{4e} U_n$. En déduire que $0 \leq U_n \leq \left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2} \times \frac{4}{e^2}$.	4) أثبت أن لكل $n \geq 2$ فإن: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{9}{4e} U_n$ ؛ واستنتج أن : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2} \times \frac{4}{e^2}$.
5) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.	5) استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

Exercice 14 (Traduit)

On considère la suite numérique (U_n) définie par: $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{2n+2}{3n} U_n, \quad \forall n \in IN^* \end{cases}$; On pose pour tout n de IN^* : $V_n = \frac{1}{n} U_n$. 1) Calculer U_2 , U_3. 2) Calculer $V_2 ; V_3$. 3) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison. 4) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. 5) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \cdots + \frac{U_n}{n}$.	نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{2n+2}{3n} U_n, \quad \forall n \in IN^* \end{cases}$ ونضع : $V_n = \frac{1}{n} U_n$ لكل n من IN^*. 1) احسب U_2 ، U_3، 2) احسب V_2، V_3. 3) بين أن (V_n) متتالية هندسية وحدد أساسها 4) أعط عبارة V_n ثم U_n بدلالة n . 5) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \cdots + \frac{U_n}{n}$.

CHAPITRE 3 GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

I. RESUME DE COURS

Continuité

1) Définitions

$\boxed{\text{f est continue en } x_0} \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)}$

On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point de I.

2) Propriétés

- **Les fonctions polynômes, la fonction sinus, la fonction cosinus sont continues sur IR.**
- **La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur [0 ; + ∞[.**
- **Une fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.**
- **La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.**

  Autrement dit :

  - **Si u et v sont continues sur I, alors :**
    - **Les fonctions ku, u + v, u × v et u^n (k réel et n entier naturel non nul) sont continues sur I.**
    - **Les fonctions $\frac{1}{u}$, $\frac{u}{v}$, $\sqrt{u}$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies.**
  - **Si la fonction f est continue en a et si la fonction g est continue en f(a) alors la fonction gof est continue en a.**

3) Prolongement par continuité

$\left|\begin{array}{l} \bullet\ a \notin D_f \\ \bullet \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell ; \quad \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{f admet un prolongement} \\ \text{par continuité g au point a}\end{array}}$

Le prolongement de f est la fonction g définie par:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si} \quad x \in D_f \\ g(a) = \ell \end{cases}$$

4) Fonctions continues sur un intervalle

Par une fonction continue :
L'image d'un intervalle est un intervalle.
L'image d'un segment est un segment.

5) Théorème des valeurs intermédiaires

$\left.\begin{array}{|l} \bullet\ \text{f est continue sur I} \\ \bullet\ f(I)=J \\ \bullet\ m \in J \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{l'équation} f(x) = m \\ \text{admet au moins une} \\ \text{solution dans I} \end{array}}$

$\left.\begin{array}{|l} \bullet\ \text{f est continue sur } [a,b] \\ \bullet\ \text{m est compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{l'équation } f(x) = m \\ \text{admet au moins une} \\ \text{solution dans } [a,b] \end{array}}$

$\left.\begin{array}{|l} \bullet\ \text{f est continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f(a)\times f(b) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{l'équation } f(x) = 0 \\ \text{admet au moins une} \\ \text{solution dans } [a,b] \end{array}}$

6) Théorème de la bijection réciproque

$\left.\begin{array}{|l} \bullet\ \text{f est continue sur I,} \\ \bullet\ \text{f est strictement} \\ \text{monotone sur I,} \\ \bullet\ f(I) = J. \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f : I \to J \text{ est bijective.} \\ \bullet\ f^{-1} \text{ est continue sur J.} \\ \bullet\ f^{-1} \text{ est de même sens de variation de f.} \\ \bullet\ f^{-1} \text{ est bijective de J sur I.} \\ \bullet\ \text{les courbes de f et } f^{-1} \text{ sont symétriques par} \\ \text{rapport à la droite } y = x. \end{array}}$

Remarques

Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$. Le théorème de la bijection réciproque en assure l'unicité.

Dérivation

1) Nombre dérivé – dérivabilité

$$\boxed{\text{f est dérivable au point } x_0} \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ est un nombre réel}}$$

Nombre dérivé : $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point x_0 de I.

- **Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I (La réciproque est fausse).**

2) Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivation
k réel (Constante)	0	$]-\infty,+\infty[$
ax+b	a	$]-\infty,+\infty[$
x^n, $n>0$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivation
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

3) Opérations sur les dérivées

Fonction	Dérivée
au	au'
$u+v$	$u'+v'$
$u \bullet v$	$u' \bullet v + u \bullet v'$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \bullet v - u \bullet v'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(u)^n$	$nu'(u)^{n-1}$
$u \circ v$	$v'.(u' \circ v)$

4) Dérivée de la réciproque

$$\left|\begin{array}{l} \bullet\ f : I \to J \text{ est bijective,} \\ \bullet\ f \text{ est dérivable sur } I, \\ \bullet\ f'(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in I. \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f^{-1} \text{ est dérivable sur } J, \\ \bullet\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} \end{array}}$$

$$\left|\begin{array}{l} \bullet\ f(a) = b \\ \bullet\ f'(a) = c \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f^{-1}(b) = a \\ \bullet\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{c} \end{array}}$$

5) Inégalités des accroissements finis

$$\left|\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est dérivable sur } I, \\ \bullet\ a, b \in I,\ a < b, \\ \bullet \text{ il existe } m,\ M \in \mathbb{R} \text{ tels que :} \\ m \leq f'(x) \leq M \text{ sur } I. \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$$

$$\left|\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est dérivable sur } I, \\ \bullet \text{ il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \quad |f'(x)| \leq M \text{ sur } I. \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|}$$

Courbes : symétries – asymptotes – tangentes

Soit f une fonction numérique et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Eléments de symétrie

Si, pour tout $x \in D_f$, on a $2a - x \in D_f$ et …	alors, C admet …
$f(2a-x) = f(x)$	la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie.
$f(2a-x) = 2b - f(x)$	le point $M(a,b)$ comme centre de symétrie.
$f(-x) = f(x)$	l'axe (Oy) comme axe de symétrie et f est paire.
$f(-x) = -f(x)$	l'origine O comme centre de symétrie et f est impaire.

2) Asymptotes parallèles aux axes

Si…	alors la courbe C_f possède une asymptote …
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$	<u>verticale</u> d'équation $x = x_0$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$	<u>horizontale</u> d'équation $y = y_0$

<u>3) Asymptote oblique et branches paraboliques</u>

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, on calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Trois cas se présentent :

Si…	alors…
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$	C admet une <u>branche parabolique</u> de direction (Oy) en $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	C admet une <u>branche parabolique</u> de direction (Ox) en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$; $a \in \mathbb{R}^*$	on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$:

- **Soit $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\infty$, alors C admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$**
- **Soit $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$,avec $b\in\mathbb{R}$, alors C admet une asymptote oblique, c'est la droite d'équation $y=ax+b$.**

Cela est équivalent à chacune des situations suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$	$\begin{cases} f(x)=ax+b+\varphi(x), & a\neq 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0 \end{cases}$

Le signe de $d(x)=f(x)-(ax+b)$ détermine les positions relatives de C et son asymptote oblique.

N.B : les définitions ci-dessus sont analogues lorsque x tend vers $-\infty$.

4) Tangentes

Si..	alors…
f est dérivable en x_0	**C admet une tangente en $M_0(x_0,y_0)$**
D est la tangente à C en $M_0(x_0,y_0)$ **D n'est pas verticale.**	**L'équation de D :** $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
la tangente D// la droite d'équation $y=\mu x+\delta$	$f'(x_0)=\mu$
la tangente D $\perp$ la droite d'équation $y=\mu x+\delta$	$\mu f'(x_0)=-1$
la tangente D est horizontale	$f'(x_0)=0$
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$	**C admet une tangente (ou demi tangente) verticale d'équation $x=x_0$.**

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

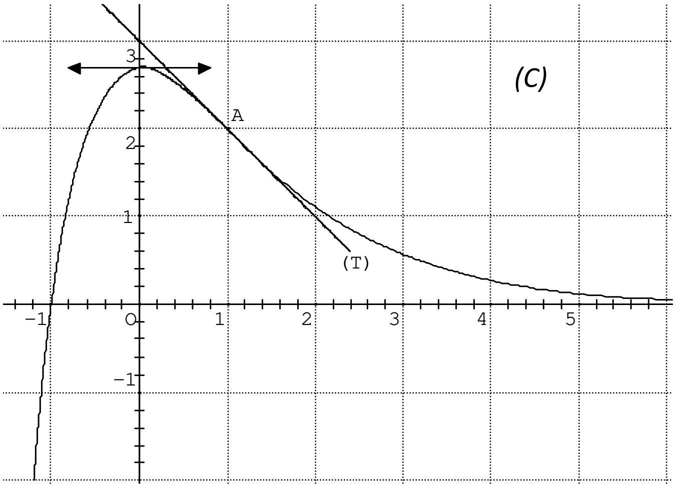
On considère une fonction numérique f dérivable sur son domaine de définition D_f, de dérivée f'. Son tableau de variation est donné ci-dessous. On nomme (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Pour chaque question, parmi les réponses proposées, une seule réponse est exacte. Préciser la bonne réponse.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	L'ensemble de définition de f est :	$\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$\mathbb{R}$
2	L'équation $f(x)=0$ admet dans D_f exactement :	3 solutions	2 solutions	1 solution	aucune solution
3	La courbe (C) admet une asymptote d'équation :	$x=3$	$x=2$	$y=2$	$y=3$
4	La fonction f est une fonction :	paire	impaire	ni paire ni impaire	monotone
5	L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0=3$ est :	$x=1$	$y=2$	$y=3x+2$	$y=2x+3$
6	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ est égale à :	0	-3	$-\infty$	$+\infty$

QCM 2



Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse 1. La droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Préciser la bonne réponse.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	On a	$f(0)=0$	$f'(0)=e$	$f'(0)=0$	$f(0)=-1$
2	Le coefficient directeur de la droite (T) est égal à :	0	1	-1	3
3	On a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=6$
4	L'équation $f(x)=2$	n'a pas de solution	a une unique solution	a deux solutions	a trois solutions
5	On a	$f(1)=0$	$f(1)=1$	$f(1)=2$	$f(1)=3$
6	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=...$	0	$+\infty$	$-\infty$	1

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Calculer les limites suivantes (Expliquer la méthode de levée d'indétermination):

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^{10}-3^{10}}{x-3}$$

$$\lim_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x})$$

Exercice 2

Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$**. Calculer** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **par trois méthodes**

Exercice 3

Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **dans chacun des cas suivants :**

1) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-x$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=-x^4+2x^2+x$ **et soit** (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A(–1, 0).

2) Montrer que cette droite est aussi tangente à (C) en un autre point que l'on précisera.

3) Montrer que la courbe (C) admet des tangentes horizontales en trois points d'abscisses α,β **et** γ **vérifiant :** $-0,9<\alpha<-0,8$, $-0,3<\beta<-0,2$ **et** $1,1<\gamma<1,2$.

Exercice 5

Déterminer les réels *a*, *b*, *c* pour que la courbe de la fonction $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$:

- **passe par le point A(2 ; 4),**
- **admette au point A(2 ; 4), une tangente horizontale, et**
- **aie au point d'abscisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$**

2) Vérifier que le point $\Omega\left(1;\frac{4}{3}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

Exercice 6

Soit $g(x)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$.

1) Dresser le tableau de variations de *g* .

2) Montrer que la courbe (*C*) de *g* admet deux asymptotes dont l'une (*D*) est oblique et préciser la position de (*D*) par rapport à (*C*).

3) Déterminer la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3. Déterminer la position de (T) par rapport à (C).

4) Tracer soigneusement (T), (D) et (C) dans un repère orthonormé.

5) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $4x^2-(3m+7)x+3m+7=0$. Retrouver les résultats algébriquement.

Exercice 7

1) Soit $P(x) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$.

Déterminer une racine évidente de *P* , factoriser *P* et déterminer son signe.

2) Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$, soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que f est dérivable sur D_f. Calculer sa dérivée et vérifier que $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2+3)^2}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

3.a) Trouver *a*, *b*, *c* tels que pour tout x de D_f : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2+3}$.

b) Montrer que C a une asymptote D et étudier la position de C par rapport à D.

c) Tracez D et C.

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Représenter (C) et (C') la courbe de f^{-1}, dans un nouveau repère.

c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Exercice 8

1) On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) Calculer P(1) et factoriser P(x).

b) Etudier le signe de *P*(*x*).

2) On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :

$$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x-2}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnée 1 cm pour 2 unités).

a) Déterminer les limites de *f* en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2. Préciser les asymptotes verticales et horizontales éventuelles.

b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$.

c) Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variation.

3) Pour quelle abscisse *a* la tangente au point d'abscisse *a* est-elle horizontale ? Justifier.

4)Trouver *a*, *b*, *c* et *d* tels que pour tout x de D_f :

$$f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}.$$

5) On appelle *g* la fonction définie par $g(x)=x^2+2x+1$ et *P* sa courbe représentative.

a) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de f(x) – g(x). Que peut-on en déduire sur les courbes C et P ?

b) Etudier la position relative de C et P.

c) Tracer C, T et P dans le même repère.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}$ **:**

En remplaçant chaque x par 2 on reconnaît une forme d'indétermination du type « $\dfrac{0}{0}$ »

Pour lever l'indétermination ici, on factorise et on simplifie par le terme qui s'annule pour x= 2 ; (l'origine de l'indétermination).

Pour factoriser on peut utiliser une identification, une division euclidienne ou le tableau d'Horner.

On obtient

$$\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}=\frac{(x-2)(3x^2-x-1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2-x-1}{x+2},\ x\neq 2.$$

On remplace après la modification d'écriture :

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-1}{x+2}=\frac{3\cdot 2^2-2-1}{2+2}=\frac{9}{4}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^{10}-3^{10}}{x-3}$ **:**

Pour lever l'indétermination ici, on peut appliquer un taux d'accroissement :

On pose $u(x)=x^{10}$**, donc** $u'(x)=10x^9$ **et** $\dfrac{x^{10}-3^{10}}{x-3}=\dfrac{u(x)-u(3)}{x-3}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^{10}-3^{10}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{u(x)-u(3)}{x-3}=u'(3)=10\times 3^9.$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})$ **:**

Pour lever l'indétermination ici, on factorise par le terme prépondérant :

Pour $x>0$, $x-\sqrt{x}=x(1-\frac{\sqrt{x}}{x})=x(1-\frac{1}{\sqrt{x}})$ car pour $x>0$, $x=(\sqrt{x})^2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\frac{1}{\sqrt{x}})=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Corrigé 2

$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. **Calculons** $\lim\limits_{x\to1}f(x)$:

Méthode 1

Pour faire apparaître le facteur $x-1$ au numérateur, multiplions et divisons f(x) par la quantité conjuguée du numérateur.

Pour $x>0$ **et** $x\neq1$, $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Or $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$ **donc** $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\frac{1}{2}$.

Méthode 2

Appliquer un taux d'accroissement :

On pose $u(x)=\sqrt{x}$, **donc** $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **et** $f(x)=\frac{u(x)-u(1)}{x-1}$.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{u(x)-u(1)}{x-1}=u'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}.$$

Méthode 3

Factoriser et simplifier par $\sqrt{x}-1$ (origine de l'indétermination): Pour $x>0$ et $x\neq1$ on a : $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$,

Donc $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

Corrigé 3

1) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-x$

Pour lever l'indétermination ici, on procède à un changement d'écriture :

Pour $x>0$,

$$\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{4x^2(1+\frac{1}{4x^2})}=\sqrt{4x^2}\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}=|2x|\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}=2x\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\ .$$

Donc pour $x>0$, $f(x)=2x\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-x=x\ (2\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-1)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-1)=1$ **donc** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

Une factorisation identique à celle de l'exercice précédent ne nous permet pas de conclure. En effet: pour $x>0$, $f(x)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$ **et l'application des théorèmes nous ramène à une autre forme indéterminée «** $\infty\times 0$ **».**

Voici une technique très utilisée pour modifier l'écriture d'une fonction irrationnelle.

Multiplions et divisons f(x) par son expression conjuguée $\sqrt{x^2+1}+x$

(on fait ainsi apparaître au numérateur l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ **) :**

pour $x>0$, $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=+\infty$ **donc** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Corrigé 4

1) L'équation de la tangente est du type $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

On a $f(x)=-x^4+2x^2+x$ **donc** $f'(x)=-4x^3+4x+1$ **d'où** $f'(-1)=1$ **et** $f(-1)=-1+2-1=0$.

L'équation de la tangente T est donc $y = 1(x+1)+0 \Leftrightarrow y = x+1$.

2) Cherchons les points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur celui de T, c'est-à-dire 1 :

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x + 1 = 1 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow 4x\left(-x^2+1\right) = 0$$

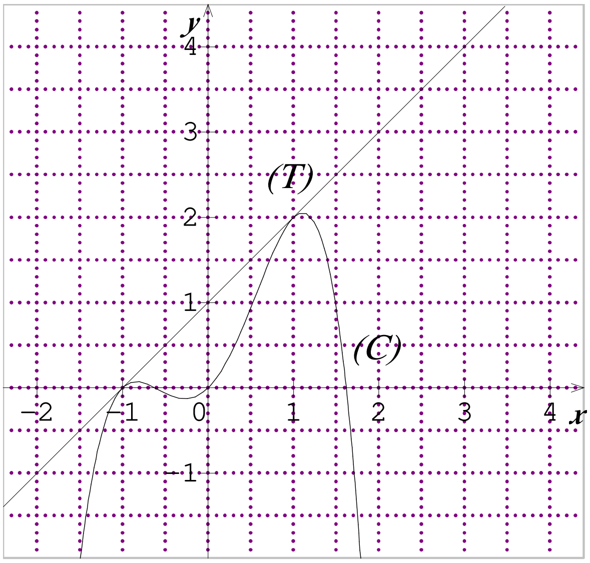
Cette équation a trois solutions : $0, 1$ et -1.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$, équation différente de celle de T.

On vérifie par le calcul que : $f'(1) = -4+4+1 = 1$ et $f(1) = 2$ d'où la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = 1(x-1)+2 \Leftrightarrow y = x+1$. C'est bien la même équation de T. Alors T est tangente à (C) en deux points A(–1, 0) et B(1, 2).

3) Il suffit de montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet trois solutions α, β et γ vérifiant : $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$, $-0{,}3 < \beta < -0{,}2$ et $1{,}1 < \gamma < 1{,}2$.
On a : $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$. f' est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.
Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires :
f' est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.
$f'(-0{,}9) \simeq 0{,}316$ et $f'(-0{,}8) \simeq -0{,}152 \Rightarrow f'(-0{,}9) \times f'(-0{,}8) < 0$. Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α telle que $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$.
$f'(-0{,}3) \simeq 0{,}092$ et $f'(-0{,}2) \simeq -0{,}232 \Rightarrow f'(-0{,}3) \times f'(-0{,}2) < 0$. Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution β telle que $-0{,}3 < \beta < -0{,}2$.
$f'(1{,}1) \simeq 0{,}076$ et $f'(1{,}2) \simeq -1{,}112 \Rightarrow f'(1{,}1) \times f'(1{,}2) < 0$. Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution γ telle que $1{,}1 < \gamma < 1{,}2$.

<u>Conclusion :</u>
La courbe (C) admet des tangentes horizontales en trois points d'abscisses α, β et γ vérifiant : $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$, $-0{,}3 < \beta < -0{,}2$ et $1{,}1 < \gamma < 1{,}2$.
(Voir la figure)



Corrigé 5

1) La courbe de la fonction $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ passe par $A(2\ ;\ 4)$ si $f(2)=4$.

Donc $2a+b+c=4$;

On a $f'(x)=a-\dfrac{c}{(x-1)^2}$. Si (C) a une tangente horizontale au point $A(2\ ;\ 4)$,

alors $f'(2)=0$. Donc $a-\dfrac{c}{(2-1)^2}=0 \Rightarrow a=c$

Si (C) a au point d'abscisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x+4$, alors $f'(3)=1$, (le coefficient directeur de la droite). On a donc

$a-\dfrac{c}{4}=1$. Alors $a-\dfrac{a}{4}=1 \Rightarrow a=\dfrac{4}{3}$.

Donc on a :

$$\begin{cases} 2a+b+c=4 \\ a=c \\ a=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Enfin on obtient $a=\dfrac{4}{3}, b=0$ et $c=\dfrac{4}{3}$, soit $f(x)=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3(x-1)}$.

2) Il suffit de montrer que $\forall x \in D_f, 2-x \in D_f$ et $f(2-x)+f(x)=\frac{8}{3}$.

On a $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow 2-x \neq 1 \Leftrightarrow 2-x \in D_f$

On a

$$\begin{aligned} f(2-x)+f(x) &= \frac{4}{3}(2-x)+\frac{4}{3(2-x-1)}+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3(x-1)} \\ &= \frac{8}{3}-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3(x-1)} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Alors le point $\Omega\left(1;\frac{4}{3}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

Corrigé 6

Soit $g(x)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$.

1) La fonction g est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Donc f est continue et dérivable sur son domaine de définition.

$$g'(x)=\frac{4}{3}-\frac{4}{3(x-1)^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}\right)=\frac{4}{3}\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow (x=0 \quad \text{ou} \quad x=2)$.

$g(0)=-\frac{7}{3}$ et $g(2)=3$.

Le signe de $g'(x)$ est celui de $x(x-2)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}x-1\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{3}x-1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}(3x-3)=0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-}g(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to1^+}\left(3x-3\right)=0^+ \Rightarrow \lim_{x\to1^+}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to1^+} g(x)=+\infty$$

<u>Tableau de variation :</u>

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		+	0	−	||	−	0	+	
g	$-\infty$	↗	$-7/3$	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

2) On a $\lim_{x\to1^-} g(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to1^+} g(x)=+\infty$. Alors la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à (C).

D'autre part, on a $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ et

$\lim_{x\to\infty}\left(g(x)-\left(\frac{4}{3}x-1\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{3x-3}=0$. Alors la droite D d'équation $y=\frac{4}{3}x-1$ est une asymptote oblique à (C).

Pour étudier la position de (*D*) par rapport à (*C*), on étudie le signe de $d(x)=g(x)-\left(\frac{4}{3}x-1\right)$. Le signe de d(x) est celui de $3x-3$ car $d(x)=\frac{4}{3x-3}$.

Lorsque *x* > 1, $\frac{4}{3x-3}$ est positif, (C) est au dessus de D, lorsque *x* < 1, $\frac{4}{3x-3}$ est négatif,(C) est en dessous de D.

3) L'équation de (T) : $y=g'(3)(x-3)+g(3)$

$$y=1(x-3)+\frac{11}{3}$$

$$y=x+\frac{2}{3}.$$

Pour déterminer la position de (T) par rapport à (C) on a :

$$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3(x-1)}-x-\frac{2}{3}$$

$$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}+\frac{4}{3(x-1)}$$

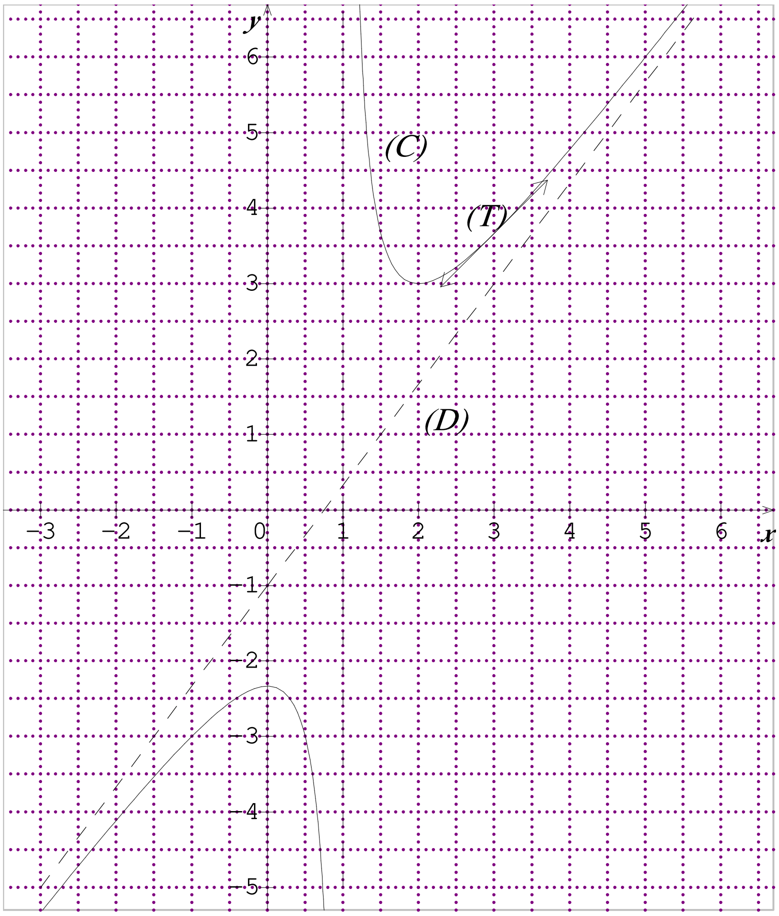
$$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{x^2-6x+9}{3(x-1)}$$

$$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{(x-3)^2}{3(x-1)}.$$

Le signe est celui du numérateur :

Lorsque $x > 1$, $\frac{(x-3)^2}{3(x-1)}$ est positif, (C) est au dessus de T, lorsque $x < 1$, $\frac{(x-3)^2}{3(x-1)}$ est négatif, (C) est en dessous de T.

4) Représentation graphique



5) L'équation $4x^2-(3m+7)x+3m+7=0$ équivaut à

$4x^2-3mx-7x+3m+7=0 \Leftrightarrow 4x^2-7x+7=3m(x-1)$

$$\Leftrightarrow m=\frac{4x^2-7x+7}{3(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$$

$$\Leftrightarrow m=g(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=m \\ y=g(x) \end{cases}$$

Le nombre de solutions de cette équation est le nombre de points d'intersections de la courbe (C) de g avec la droite (horizontale) Δ_m d'équation $y=m$.

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de (C) et Δ_m

D'après la représentation graphique de g, on déduit le tableau suivant :

valeurs du paramètre m	nombre d'intersection de (C) et Δ_m	nombre de solutions
$m<-\frac{7}{3}$	2	2
$m=-\frac{7}{3}$	1 (tangente)	1
$-\frac{7}{3}<m<3$	0	0
$m=3$	1 (tangente)	1
$m>3$	2	2

Pour retrouver ces résultats algébriquement, on étudie le signe du discriminant de l'équation $4x^2-(3m+7)x+3m+7=0$.

$\Delta=(3m+7)^2-16(3m+7)=(3m+7)(3m-9)$. Le discriminant s'annule pour deux valeurs : $m=-\dfrac{7}{3}$ et $m=3$.

valeurs du paramètre m	Signe du $\Delta=(3m+7)(3m-9)$	nombre de solutions
$m<-\dfrac{7}{3}$	$\Delta>0$	2
$m=-\dfrac{7}{3}$	$\Delta=0$	1
$-\dfrac{7}{3}<m<3$	$\Delta<0$	0
$m=3$	$\Delta=0$	1
$m>3$	$\Delta>0$	2

Corrigé 7

1) Soit $P(x)=x^4+6x^2-16x+9$.

On remarque que $P(1)=1+6-16+9=0$. Donc 1 est une racine évidente de P. On peut alors factoriser P(x) par (x – 1) :

On peut utiliser le tableau d'Horner :

	1	0	6	-16	9
1		1	1	7	-9
	1	1	7	-9	0

Donc $P(x)=(x-1)(x^3+x^2+7x-9)$

On remarque que 1 est une racine évidente de x^3+x^2+7x-9, On peut utiliser de nouveau le tableau d'Horner :

	1	1	7	-9
1		1	2	9
	1	2	9	0

Ce qui donne $x^3+x^2+7x-9=(x-1)(x^2+2x+9)$.

Enfin on obtient : $P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+9)$.

Le discriminant du trinôme x^2+2x+9 est négatif : $\Delta=4-36=-32$, donc le trinôme est du signe de (+1), positif.

Conclusion : $P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+9)$ est toujours positif.

2.a) La fonction $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}$ est de domaine de définition $D_f=\mathbb{R}$ puisque $x^2+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) La fonction f est rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition.

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x+3)(x^2+3)-(x^3-x^2+3x+5)(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^4+6x^2-16x+9}{(x^2+3)^2} \text{ d'où } f'(x)=\frac{P(x)}{(x^2+3)^2}$$

c) D'après 1) on a $\forall x\in D_f, P(x)\geq 0$. Alors $\forall x\in D_f, f'(x)\geq 0$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3.a) On utilise une identification pour déterminer les réels a,b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + 3}.$$

$$ax + b + \frac{c}{x^2 + 3} = \frac{ax^3 + bx^2 + 3ax + 3b + c}{x^2 + 3}$$

$$\frac{ax^3 + bx^2 + 3ax + 3b + c}{x^2 + 3} = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3},$$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ 3a = 3 \\ 3b + c = 5 \end{cases}$

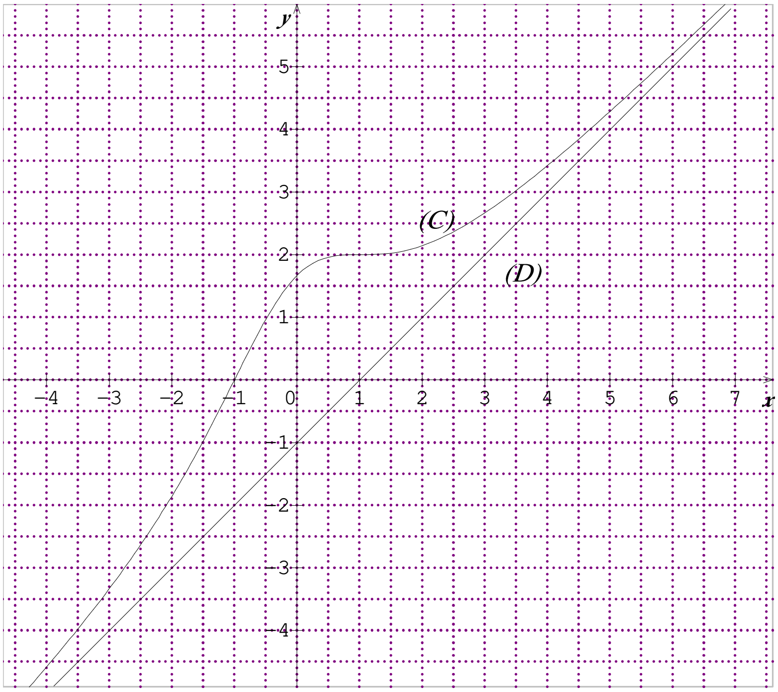
On obtient donc : *a* = 1, *b* = –1, *c* = 8.

Alors $\forall x \in D_f$**, on a :** $f(x) = x - 1 + \dfrac{8}{x^2 + 3}$.

b) Or $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (x - 1) \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{8}{x^2 + 3} = 0$**, on en déduit que la droite D d'équation** $y = x - 1$ **est une asymptote à (C).**

Comme $f(x) - (x - 1) = \dfrac{8}{x^2 + 3} > 0$, $\forall x \in D_f$**, la courbe (C) est au-dessus de D toujours.**

c) Représentation graphique :



4.a) D'après l'étude de f et son tableau de variations on a :

- **f est continue sur $]-\infty;+\infty[$;**
- **f est strictement croissante (monotone) sur $]-\infty;+\infty[$;**
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

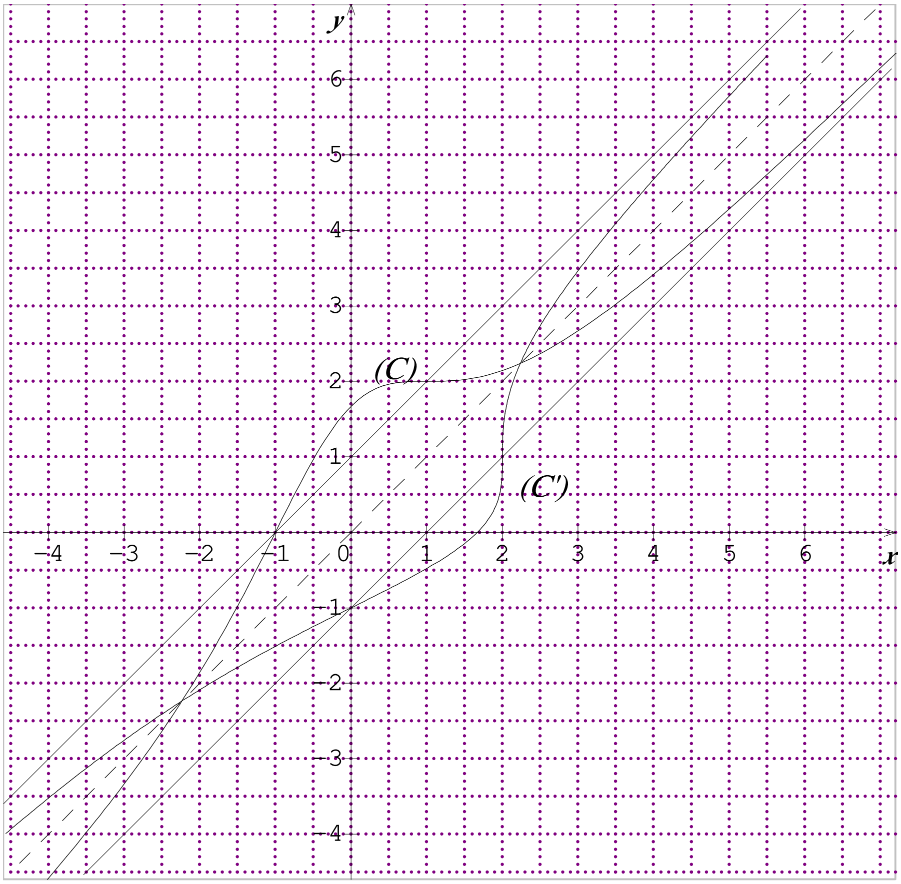
Donc $f :]-\infty;+\infty[\longrightarrow J=]-\infty;+\infty[$ réalise une bijection.

b) Construction :

Les courbes (C) et (C') sont symétriques l'une à l'autre par rapport à la droite d'équation $y=x$:

La courbe (C)	**La courbe (C')**
Admet une asymptote oblique d'équation $y=x-1$	**Admet une asymptote oblique d'équation $x=y-1$ soit $y=x+1$**
Coupe (Oy) en $(0;\frac{5}{3})$	**Coupe (Ox) $(\frac{5}{3};0)$**

Coupe (Ox) en (-1,0)	Coupe (Oy) en (0,-1)



c) On a $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}$.

$f^{-1}(0)=-1$ car $f(-1)=0$, et $f'(x)=\dfrac{x^4+6x^2-16x+9}{(x^2+3)^2}\Rightarrow f'(-1)=2$.

Donc $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{2}$.

Corrigé 8

1.a) On a $P(x)=x^3-3x^2+2\Rightarrow P(1)=1-3+2=0$.

En utilisant la division euclidienne (ou le tableau d'Horner ou l'identification) on obtient : $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$.

b) Pour le trinôme (x^2-2x-2), on a $\Delta=12=(2\sqrt{3})^2$ d'où les racines $x_1=1-\sqrt{3}, x_2=1+\sqrt{3}$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
x-1	-	-	+	+	
x^2-2x-2	+	-	-	+	
$P(x)$	-	+	-	+	

2) $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$

a) Calcul de limites :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$. **Il n y a pas d'asymptote horizontale.**

$\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x+2)=4>0$. **Alors :**

$\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$.

Alors la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.

b) Calcul de la dérivée :

On a $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$. Alors :

$$f'(x)=\frac{(3x^2-3)(x-2)-(x^3-3x+2)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3-3x-6x^2+6-x^3+3x-2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-6x^2+4}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2P(x)}{(x-2)^2}$$

c) Le sens de variation de *f* dépend uniquement du signe de *P*. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		−	0	+	0	−	‖	−	0	+	
f	$+\infty$	↘	y_1	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	y_2	↗	$+\infty$

$$y_1 = f(1-\sqrt{3}) \simeq -1{,}4 \text{ et } y_2 = f(1+\sqrt{3}) \simeq 19{,}3.$$

3) La tangente est horizontale lorsque la dérivée s'annule, soit pour $1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

4) Si pour tout x de D_f **:**

$$ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}=\frac{ax^3-2ax^2+bx^2-2bx+cx-2c+d}{x-2} \text{ alors}$$

$$ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c+d}{x-2}$$

$$f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x^3-3x+2}{x-2}=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c+d}{x-2}$$

par identification des coefficients : $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ c-2b=-3 \\ d-2c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2a=2 \\ c=2b-3=1 \\ d=2c+2=4 \end{cases}$

Alors $f(x)=x^2+2x+1+\dfrac{4}{x-2}, \forall x \in D_f$.

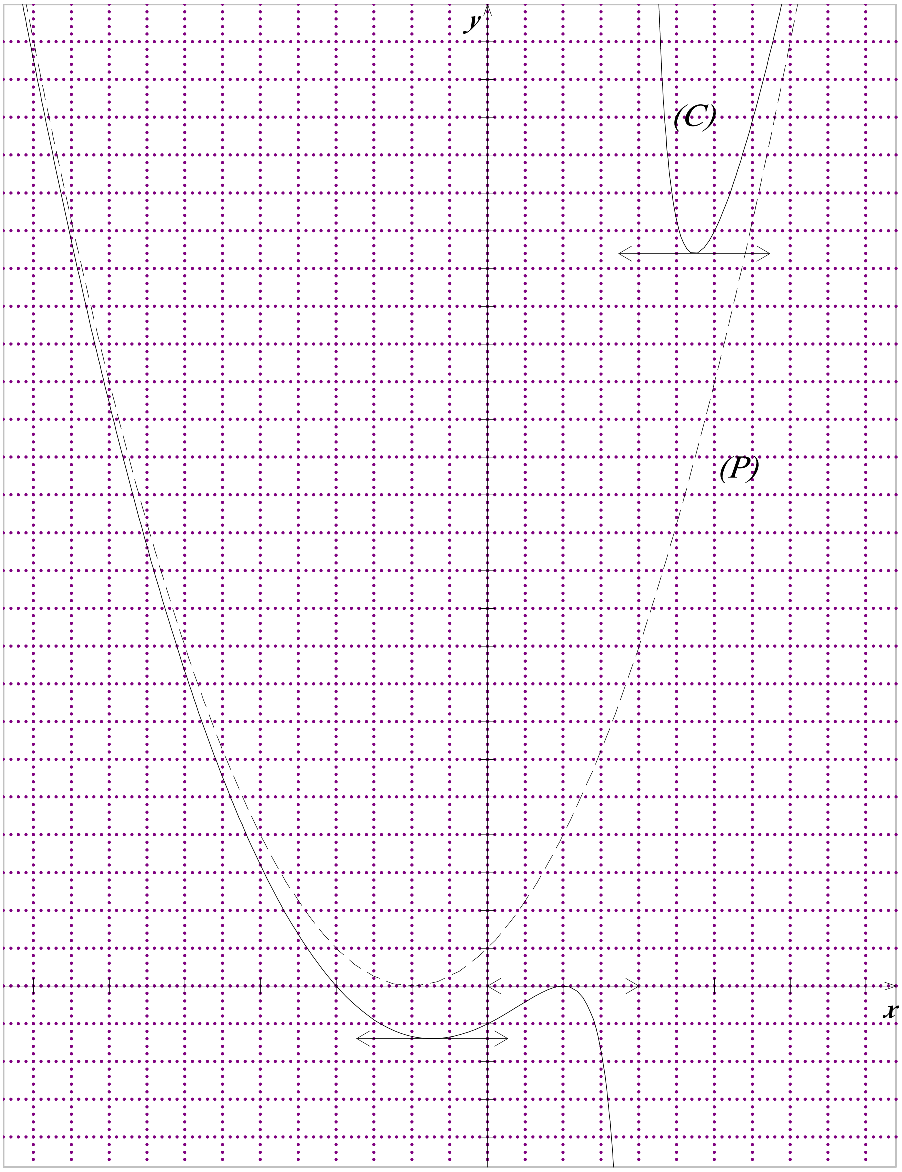
5. a) On a : $f(x)-g(x)=\dfrac{4}{x-2}$.

Alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$. **Donc les deux courbes sont asymptotes.**

b) Pour la position relative, il est clair que le signe de $f(x)-g(x)$ est celui de $\frac{4}{x-2}$:

$x<2 \Rightarrow f(x)-g(x)<0$ **et C est en dessous de P**

$x>2 \Rightarrow f(x)-g(x)>0$ **et C est au-dessus de P.**



V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{x^2+3x+3}{2x+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1.a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de ce domaine.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

2.a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+2}$

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique Δ, dont on donnera l'équation.

c) Etudier la position relative entre (C) et Δ

3. a) Construire la courbe (C) et ses asymptotes.

b) Montrer que (C) admet un centre de symétrie que l'on précisera.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$

a) Montrer que g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle Jque l'on déterminera.

b) Déterminer $g^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{7}{4}\right)$.

c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α que l'on déterminera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

d) Tracer, dans le même repère, la courbe (C') de la fonction g^{-1} .

5) On considère l'intervalle $K=[2;3]$

a) Montrer que, $x\in K$ implique que $\forall x\in K$, $f(x)\in K$

b) Montrer que $\forall x\in K$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

6) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=g(u_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

d) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 2

Partie A

Soit la fonction numérique définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Dresser le tableau de variation de g .

2) Montrer que l'équation g(x)= 0 admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $2 < \alpha < 3$.

3) Donner le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1.a) Calculer $\lim_{x \to -1^-} f(x)$, $\lim_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2.a) Montrer que $\forall x \in D_f$, $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}$

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ à préciser puis étudier la position relative de (C) et Δ .

c) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Montrer que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur D_f (On pourra utiliser A.3).

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Déterminer les points de (C) où la tangente est parallèle la droite d'équation $y = x + 2$.

6) Donner une équation de la tangente de (C) en $x_0 = -2$

7) Construire la courbe (C)

8) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty;-1[$

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $\left(h^{-1}\right)'(0)$.

Exercice 3

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Déterminer les réels a ;b et c tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$, $\forall x \in D_f$

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Montrer que C admet deux asymptotes D et D' dont l'une D est oblique.

Etudier les positions relatives de D et (C)

4.a) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b) Existe-t-il des points de (C) où la tangente est perpendiculaire à l'asymptote oblique D ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.

5) Vérifier que pour tout x de D_f on a $f(4-x)+f(x)=2$ et interpréter graphiquement.

6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle I =]0;2[.

a) Montrer que $g : I \to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c) Calculer $(g^{-1})'(-4)$. Donner, par deux méthodes différentes l'équation de la droite T' tangente à (C') courbe de g^{-1} au point d'abscisse $x_0 = -4$.

7.a) Tracer les courbes (C) et (C') .

b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x^2-(3+m)x+6+2m=0$. Retrouver ces résultats algébriquement.

Exercice 4

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$ et sa courbe (C) dans un repère orthonormé.

1) Trouver *a*, *b* et *c* tels que $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$.

2) Déterminer l'ensemble de définition de f. Etudier la parité et les variations de f.

3) Calculer les limites de f aux bornes de D_f . Préciser les asymptotes à (C).

4) Etudier la position de (C) par rapport à la droite D d'équation ($y = x$).

5) Tracer D et C.

6) Résoudre l'équation f(x) = 0.

Exercice 5

Soit la fonction *f*, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et *C* sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 2 cm)

<u>Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.</u>

Soit *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction *g*.

2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $2\le\alpha\le3$ puis déterminer une valeur approchée de α à 5.10^{-1} près.

3) Etudier le signe de *g(x)* sur $\mathbb{R}$.

<u>Partie B : Etude de la fonction *f*.</u>

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Montrer que pour tout *x* de $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

3) Montrer que pour tout *x* de $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$. En déduire que *C* admet une asymptote oblique *D* à l'infini. Etudier la position de *C* par rapport à *D*.

4) Déterminer les abscisses des points de *C* où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$

5) Tracer la droite *D*, les tangentes du 4. ainsi que la courbe *C* .

6) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [3, +\infty[$.

a) Montrer que $h : I \to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variations de h^{-1}.

c) Calculer $(h^{-1})'(\dfrac{45}{8})$.

Exercice 6

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x+1}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les réels a ;b et c tel que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ pour tout $x \in D_f$.

2) Dresser le tableau de variations de f . Justifier que la courbe C n'admet pas de tangentes horizontales.

3) Montrer que C admet deux asymptotes et que leur point d'intersection est un centre de symétrie de C.

4) Etudier les positions relatives de C et son asymptote oblique.

5) Préciser les points d'intersections de C avec les axes.

6) On considère la droite D d'équation $2x - y - 1 = 0$.

Existe-t-il des points de C où la tangente est parallèle à D ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.

7) Tracer la courbe C.

8) Soit k la restriction de f sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

a) Montrer que k réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire dans un nouveau repère orthonormé, les courbes représentatives de k et de sa réciproque .

c) Calculer $k^{-1}(0), \quad (k^{-1})'(0)$.

d) Donner l'équation de la tangente T' à la courbe C' de k^{-1} au point d'abscisse 0.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé

1) Montrer que pour tout x : $f(-x)=2-f(x)$; Interpréter graphiquement.

2) Montrer que le point de coordonnées $(0;1)$ est un point d'inflexion.

3) Etudier les variations de f.

4)Tracer la courbe de f.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}

b) Donner l'expression de f^{-1}

c) Dresser le tableau de variation de f^{-1} Tracer sa courbe.

Exercice 8

On considère la fonction numérique $f(x)=\sqrt{|x^2+3x-10|}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Ecrire f sans valeur absolue

2) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe (C)

3) Dresser le tableau de variation

4) Montrer que la partie de (C) sur $[-5,2]$ est un demi cercle à préciser.

5) Tracer (C).

Exercice 9 (Traduit)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f. Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall x\in D_f;\quad f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}.$$

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que la courbe C possède deux asymptotes D et D' dont l'une est oblique D. Préciser les position relatives de C et D.

4) Donner une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse $x_0=-2$.

5.a) Existe-t-il des points de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $3x+y+1=0$.

b) Existe-t-il des points de C où la tangente est perpendiculaire à l'asymptote oblique D.

6.a) Montrer que la courbe (C) admet le point $\Omega(1,3)$ comme centre de symétrie.

b) Tracer la courbe (C) après avoir placé ses éléments géométriques associés dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

7.a) Discuter algébriquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x^2+(1-m)x+2+m=0$.

b) Retrouver les résultats précédents graphiquement.

لتكن الدالة العددية $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$

وليكن (C) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد ميدان التعريف D_f وعين الأعداد الحقيقية a,b,c بحيث يكون:

$$.\forall x\in D_f;\quad f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

2) ارسم جدول تغيرات f .

3) بين أن (C) يقبل مقاربين D و 'D أحدهما مائل D ، ثم حدد الوضع النسبي للمنحني (C) ومقاربه D.

4)أوجد معادلة المماس T للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=-2$.

5.a) هل توجد نقط من (C) يكون المماس فيها موازيا للمستقيم ذي المعادلة $3x+y+1=0$؟

b) هل توجد نقط من (C) يكون المماس فيها عموديا على المقارب المائل D ؟

6.a) بين أن المنحنى (C) يملك مركز تناظر هو النقطة $\Omega(1,3)$.

b) مثل المنحنى (C) بعد وضع العناصر الهندسية المساعدة في المرجع $(O;\vec{i},\vec{j})$.

7.a) ناقش جبريا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$x^2+(1-m)x+2+m=0$$

b) أوجد النتائج السابقة بيانيا.

Dépôt légal N° 2176/2020

Bibliothèque nationale

Nouakchott

ESSEBIL Au Bac

Mathématiques

-

Dans les ouvrages de la collection ESSEBIL AU BAC-Mathématiques vous trouverez chaque trimestre:

- ✓ **Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules**
- ✓ **Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme**
- ✓ **Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances**
- ✓ **Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac**
- ✓ **Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.**