

# ETUDE DE FONCTION

**Voici quelques questions rencontrées lors d'une étude de fonction**

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $D_f$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; I; J)$ .

Questions	Méthodes
<b>Etudier la continuité de <math>f</math> en <math>x_0</math></b>	<p>Il suffit de vérifier que <math>x_0 \in D_f</math>, puis calculer <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)</math>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Si <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)</math> alors <math>f</math> est continue en <math>x_0</math>.</li> <li>✓ Si <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)</math> alors <math>f</math> n'est pas continue en <math>x_0</math>.</li> </ul>
<b>Montrer que <math>f</math> admet un prolongement par continuité en <math>x_0</math></b>	<p>Il suffit de vérifier que <math>x_0 \notin D_f</math>, puis calculer <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)</math>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Si <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty</math> alors <math>f</math> n'est pas prolongeable par continuité en <math>x_0</math>.</li> <li>✓ Si <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b</math> (<math>b \in \mathbb{R}</math>) alors <math>f</math> est prolongeable par continuité en <math>x_0</math>.</li> </ul> <p><b>La fonction <math>g</math> définie par :</b>  <math>\begin{cases} g(x) = f(x); &amp; \text{si } x \in D_f \\ g(x_0) = b \end{cases}</math> <b>est le prolongement par continuité en <math>x_0</math>.</b></p>
<b>Etudier la dérivabilité de <math>f</math> en <math>x_0</math></b>	<p>Il suffit de calculer : <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Si <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b</math> (<math>b \in \mathbb{R}</math>) alors <math>f</math> est dérivable en <math>x_0</math> et on a : <math>f'(x_0) = b</math></li> <li>✓ Si <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty</math> alors <math>f</math> n'est pas dérivable en <math>x_0</math>.</li> </ul> <p><b>Interprétation graphique :</b> (<math>C_f</math>) admet une demi-tangente verticale au point <math>M(x_0; f(x_0))</math>.</p>

Questions	Méthodes						
<b>Montrer que la fonction <math>f</math> est paire</b>	<p>Il suffit de montrer que :</p> <p><math>x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f</math> et <math>f(-x) = f(x)</math></p> <p>L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de (<math>C_f</math>).</p>						
<b>Montrer que la fonction <math>f</math> est impaire</b>	<p>Il suffit de montrer que :</p> <p><math>x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f</math> et <math>f(-x) = -f(x)</math></p> <p>L'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe (<math>C_f</math>).</p>						
<b>Montrer que le point <math>A(a, b)</math> est un centre de symétrie de la courbe (<math>C_f</math>)</b>	<p>Il suffit de montrer que :</p> <p>(1): <math>\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}</math>  <b>Ou</b>                  (2): <math>\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (a - x) \in D_f; (a + x) \in D_f \\ f(a - x) + f(a + x) = 2b \end{cases}</math></p>						
<b>Montrer que la droite (<math>D</math>) d'équation <math>y = a</math> est un axe de symétrie de la courbe (<math>C_f</math>)</b>	<p>Il suffit de montrer que :</p> <p>(1): <math>\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}</math>  <b>Ou</b>                  (2): <math>\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow (a - x) \in D_f; (a + x) \in D_f \\ f(a - x) = f(a + x) \end{cases}</math></p>						
<b>Etudier les variations de <math>f</math></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ On calcule <math>f'(x)</math></li> <li>✓ On étudie le signe de <math>f'(x)</math> :                         <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Si <math>\forall x \in I, f'(x) &lt; 0</math> alors <math>f</math> est strictement décroissante sur <math>I</math></li> <li>○ Si <math>\forall x \in I, f'(x) &gt; 0</math> alors <math>f</math> est strictement croissante sur <math>I</math></li> </ul> </li> </ul>						
<b>Dresser le tableau de variation de la fonction <math>f</math>.</b>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 30%;">Valeurs de <math>x</math></td> <td style="text-align: center;"><math>D_f</math></td> </tr> <tr> <td>Signe de <math>f'(x)</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Variations de <math>f</math></td> <td></td> </tr> </table>	Valeurs de $x$	$D_f$	Signe de $f'(x)$		Variations de $f$	
Valeurs de $x$	$D_f$						
Signe de $f'(x)$							
Variations de $f$							
<b>Démontrer que <math>f</math> réalise une bijection de <math>]a; b[</math> sur un intervalle <math>K</math> à préciser</b>	<p>Il suffit de dire que :</p> <p><math>f</math> est continue et strictement monotone sur <math>]a; b[</math> ;                  De plus <math>f(]a; b[) = J</math> (<b>à déterminer</b>).                  Donc <math>f</math> réalise une bijection de <math>]a; b[</math> sur <math>K = J</math></p>						

Questions	Méthodes
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]a ; b[$	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Montrer que <math>f</math> réalise une bijection de <math>]a ; b[</math> sur <math>f(]a ; b[)</math></li> <li>✓ Vérifier que <math>0 \in f(]a ; b[)</math></li> </ul> <p><b>Comme <math>0 \in f(]a ; b[)</math> alors l'équation <math>f(x) = 0</math> admet une solution unique <math>\alpha</math> dans <math>]a ; b[</math>.</b></p>
Donner une équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0$	$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Etudier la position relative de la courbe ( $C_f$ ) par rapport à la droite (D) d'équation : $y = ax + b$	<p>On étudie le signe de <math>[f(x) - (ax + b)]</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Si : <math>\forall x \in I, f(x) - (ax + b) &gt; 0</math> alors la courbe (<math>C_f</math>) est au-dessus de (D) sur <math>I</math>.</li> <li>✓ Si : <math>\forall x \in J, f(x) - (ax + b) &lt; 0</math> alors la courbe (<math>C_f</math>) est en dessous de (D) sur <math>J</math>.</li> <li>✓ Si <math>f(x) - (ax + b) = 0</math> pour <math>x = x_0</math> alors (<math>C_f</math>) et (D) se coupent au(x) point(s) <math>A(x_0; f(x_0))</math></li> </ul>
Déterminer les coordonnées du point (ou des points) d'intersection de la courbe ( $C_f$ ) avec l'axe des abscisses.	<p>Soit <math>A(x_A; y_A)</math> le(s) point(s) recherché(s) :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ <math>y_A = 0</math>.</li> <li>✓ Pour trouver <math>x_A</math>, on résout l'équation <math>f(x) = 0</math>.</li> </ul> <p><b>(Le nombre de solution de cette équation est égal au nombre de points où la courbe (<math>C_f</math>) coupe l'axe des abscisses).</b></p>
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe ( $C_f$ ) avec l'axe des ordonnées.	<p>Soit <math>A(x_A; y_A)</math> le point recherché ;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ <math>x_A = 0</math></li> <li>✓ <math>y_A = f(x_A) = f(0)</math></li> </ul>
Déterminer les coordonnées du point de la courbe ( $C_f$ ) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D) d'équation $y = ax + b$	<p>Si la tangente (T) et la droite (D) sont parallèles alors elles ont le même coefficient directeur.</p> <p>Or <math>\begin{cases} (T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ (D): y = ax + b \end{cases}</math></p> <p>On a donc <math>f'(x_0) = a</math>.</p> <p>On résout l'équation <math>f'(x) = a</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ La solution <math>x_K</math> de cette équation est l'abscisse.</li> <li>✓ L'ordonnée est <math>y_K = f(x_K)</math></li> </ul>

Questions	Méthodes
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe ( $C_f$ ) et de la droite (D) d'équation $y = ax + b$	<p>On résout l'équation (E) : <math>f(x) = ax + b</math></p> <p>Le nombre de solutions est égale au nombre de points d'intersection de (<math>C_f</math>) et de (D).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Si <math>x_0</math> est solution de l'équation (E) alors <math>y_0 = f(x_0)</math> ou <math>y_0 = ax_0 + b</math></li> <li>✓ <math>A(x_0; y_0)</math> est le point d'intersection de ...</li> </ul>
Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \int_a^b f(x) dx$ ( $a < b$ )	<p><b>1<sup>er</sup> cas</b> : <math>f(x) &gt; 0</math> sur <math>[a ; b]</math></p> <p><math>I</math> est l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (<math>C_f</math>), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives <math>x = a</math> et <math>x = b</math>.</p> <p><b>2<sup>ème</sup> cas</b> : <math>f(x) &lt; 0</math> sur <math>[a ; b]</math></p> <p><math>I</math> est l'opposé de l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (<math>C_f</math>), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives <math>x = a</math> et <math>x = b</math>.</p>
Si $OI \times OJ = m \text{ cm}^2$ Interpréter graphiquement l'intégrale $I = m \int_a^b f(x) dx$ ( $a < b$ )	<p><b>1<sup>er</sup> cas</b> : <math>f(x) &gt; 0</math> sur <math>[a ; b]</math></p> <p><math>I</math> est l'aire exprimée en <math>\text{cm}^2</math> de la partie du plan délimitée par la courbe (<math>C_f</math>), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives <math>x = a</math> et <math>x = b</math>.</p>
Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \int_a^b [f(x) - (ax + c)] dx$ ( $a < b$ )	<p><b>1<sup>er</sup> cas</b> : <math>f(x) - (ax + c) &gt; 0</math> sur <math>[a ; b]</math></p> <p><math>I</math> est l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (<math>C_f</math>), la droite (D) : <math>y = ax + c</math> les droites d'équations respectives <math>x = a</math> et <math>x = b</math>.</p>
Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe ( $C_f$ ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$	<p><b>1<sup>er</sup> Cas</b> : <math>f(x) &gt; 0</math> sur <math>[a ; b]</math></p> <p><math>A = \int_a^b f(x) dx \times U. a</math></p> <p>avec <math>U. a = OI \times OJ</math></p> <p><b>2<sup>ème</sup> Cas</b> : <math>f(x) &lt; 0</math> sur <math>[a ; b]</math></p> <p><math>A = - \int_a^b f(x) dx \times U. a</math></p> <p>avec <math>U. a = OI \times OJ</math></p>

Questions	Méthodes	
Soit $(D) : y = ax + b$ Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_f)$ , la droite $(D)$ d'équations respectives $x = a$ et $x = b$	<b>1<sup>er</sup> Cas :</b> $f(x) - (ax + b) > 0$ sur $[a ; b]$ $A = \int_a^b [f(x) - (ax + b)] dx \times U.a$ <b>2<sup>ème</sup> Cas :</b> $f(x) - (ax + b) < 0$ sur $[a ; b]$ $A = \int_a^b [(ax + b) - f(x)] dx \times U.a$	
Montrer que les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ des fonctions $f$ et $g$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (C'est-à-dire la droite $(OI)$ )	Il suffit de montrer que : $f(x) = -g(x)$	
Montrer que les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ des fonctions $f$ et $g$ sont symétriques par rapport au point $O$ (l'origine du repère)	Il suffit de montrer que : $f(-x) = -g(x)$	
<b>Asymptotes et branches paraboliques</b>		
NOTIONS	RESULTATS DES CALCULS	INTERPRETATION GRAPHIQUES
Asymptote verticale	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$	La droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à $(C_f)$
Asymptote horizontale	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$	La droite d'équation $y = b$ est une asymptote (horizontale) à $(C_f)$ en $\infty$
Asymptote oblique	$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote (oblique) à $(C_f)$ en $\infty$
Branches paraboliques	$\checkmark \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\checkmark \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$	$\checkmark (C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(OI)$ en $\infty$ $\checkmark (C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(OJ)$ en $\infty$

**COMMENT JUSTIFIER LE SIGNE D'UNE FONCTION A L'AIDE DU TABLEAU DE VARIATION**

Tableau de variation	Méthodes								
$f(\alpha) = 0$	$f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $f(\alpha) = 0$ . Donc : $\forall x < \alpha$ , on a : $f(x) < f(\alpha)$ ; $f(x) < 0$ $\forall x > \alpha$ , on a : $f(x) > f(\alpha)$ ; $f(x) > 0$								
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td></td><td>+</td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> </table>		$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		+	$f(x)$	$-\infty$
$x$	$-\infty$	$+\infty$							
$f'(x)$		+							
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$							
$f(\alpha) = 0$	$f$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $f(\alpha) = 0$ . Donc : $\forall x < \alpha$ , on a : $f(x) > f(\alpha)$ ; $f(x) > 0$ $\forall x > \alpha$ , on a : $f(x) < f(\alpha)$ ; $f(x) < 0$								
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td></td><td>-</td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td><math>+\infty</math></td><td><math>-\infty</math></td></tr> </table>		$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		-	$f(x)$	$+\infty$
$x$	$-\infty$	$+\infty$							
$f'(x)$		-							
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$							
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	$f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a : $f(x) < 0$ .								
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td></td><td>+</td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td></td><td>0</td></tr> </table>		$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		+	$f(x)$	
$x$	$-\infty$	$+\infty$							
$f'(x)$		+							
$f(x)$		0							
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a : $f(x) < 0$								
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td></td><td>-</td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td>0</td><td></td></tr> </table>		$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		-	$f(x)$	0
$x$	$-\infty$	$+\infty$							
$f'(x)$		-							
$f(x)$	0								
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a : $f(x) > 0$								
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td></td><td>+</td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td>0</td><td></td></tr> </table>		$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		+	$f(x)$	0
$x$	$-\infty$	$+\infty$							
$f'(x)$		+							
$f(x)$	0								
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	$f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a : $f(x) > 0$ .								
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td></td><td>-</td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td></td><td>0</td></tr> </table>		$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		-	$f(x)$	
$x$	$-\infty$	$+\infty$							
$f'(x)$		-							
$f(x)$		0							

**Tableau de variation**

*f* admet un minimum positif sur I

x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)			

**Remarque :**

Les limites, ici, n'étaient pas nécessaires.

*f* admet un maximum négatif sur I

x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)			

**Déterminer ou donner le signe de f(x)**

x	$-\infty$	$\alpha_1$	m	$\alpha_2$	$+\infty$
f'(x)	-	0	0	+	
f(x)					

$f(\alpha_1) = 0$  et  $f(\alpha_2) = 0$   
(L'équation  $f(x) = 0$  admet 2 solutions)  
ICI, on a toujours :  $f(m) < 0$

**Déterminer le signe de f(x)**

x	$-\infty$	$\alpha_1$	m	$\alpha_2$	$+\infty$
f'(x)	+	0	0	-	
f(x)					

ICI, on a toujours :  $f(m) > 0$

**Méthodes**

**1<sup>ère</sup> méthode :**  
 $f(\alpha)$  est le minimum de  $f$  sur I ; Donc :  
 $\forall x \in I$ , on a :  $f(x) \geq f(\alpha)$ .  
De plus  $f(\alpha) > 0$   
Donc :  $\forall x \in I$ , on a :  $f(x) > 0$

**2<sup>ème</sup> méthode :**  
 $f$  admet sur I, un minimum (absolu) qui est strictement positif.  
Donc :  $\forall x \in I$ , on a :  $f(x) > 0$

$f$  admet sur I, un maximum (absolu) qui est strictement négatif.  
Donc :  $\forall x \in I$ , on a :  $f(x) < 0$

Il faut étudier le signe de  $f$  sur chacun des intervalles  $]-\infty ; m[$  et  $]m ; +\infty[$ .

✓ **Sur  $]-\infty ; m[$ ,  $f$  est continue et strictement décroissante et  $f(\alpha_1) = 0$ .**  
Donc :  
Si  $x < \alpha_1$  alors  $f(x) > f(\alpha_1)$  donc  $f(x) > 0$ .  
Si  $\alpha_1 < x < m$ , alors  $f(\alpha_1) > f(x)$   
Donc  $f(x) < 0$ .

✓ **Sur  $]m ; +\infty[$ ,  $f$  est continue et strictement croissante et  $f(\alpha_2) = 0$ .**  
Donc :  
Si  $m < x < \alpha_2$ , alors  $f(x) < f(\alpha_2)$   
Donc  $f(x) < 0$ .  
Si  $x > \alpha_2$ , alors  $f(x) > f(\alpha_2)$   
donc  $f(x) > 0$ .

x	$-\infty$	$\alpha_1$	m	$\alpha_2$	$+\infty$
f'(x)	+	0	0	-	
f(x)					
Signe de f(x)	-	+		-	

**Conclusion :**

- $\forall x \in ]-\infty ; \alpha_1[ \cup ]\alpha_2 ; +\infty[$ ,  $f(x) < 0$  ;
- $\forall x \in ]\alpha_1 ; \alpha_2[$ ,  $f(x) > 0$

**Tableau de variation**

**Déterminer le signe de f(x)**  
 $f(e) = 0$  et  $f(e^{-2}) \approx -2,2$

x	0	$e^{-2}$	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	+
f(x)				

**Déterminer le signe de f(x)**

x	0	1	e	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	
f(x)				

**Démontrer le signe de f(x)**  
 $f(e) = 0$  et  $f(e^{-2}) \approx -2,2$

x	0	$e^{-2}$	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	+
f(x)				

**Démontrer le signe de f(x)**

x	0	1	e	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	
f(x)				

**Méthodes**

x	0	$e^{-2}$	1	e	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)					
Signe de f(x)	-	-	0	-	+

**Conclusion :**  
 $\forall x \in ]0 ; e[$ ,  $f(x) < 0$ .  
 $\forall x \in ]e ; +\infty[$ ,  $f(x) > 0$

**Déterminer le signe de f(x)**

x	0	1	e	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	
f(x)				
Signe de f(x)	-	+		

✓ Sur  $]0 ; 1[$ ,  $f$  admet un maximum strictement négatif ;  
**Donc :  $x \in ]0 ; 1[$ ,  $f(x) < 0$ .**

✓ Sur  $]1 ; +\infty[$ ,  $f$  est continue et strictement croissante avec  $f(e) = 0$ .  
 $x \in ]1 ; e[ \Leftrightarrow 1 < x < e$ ,  
**Donc  $f(x) < 0$  sur  $]1 ; e[$ .**  
 $x \in ]e ; +\infty[ \Leftrightarrow x > e$ ,  
**donc  $f(x) > 0$  sur  $]e ; +\infty[$ .**

**Conclusion :**  
 $\forall x \in ]0 ; e[$ ,  $f(x) < 0$ .  
 $\forall x \in ]e ; +\infty[$ ,  $f(x) > 0$

✓ On a  $f(]0 ; 1[) = ]-\infty ; -e[$  ;  
**Donc :  $\forall x \in ]0 ; 1[$ , on a  $f(x) < 0$ .**

✓  $e$  est le minimum de  $f$  Sur  $]1 ; +\infty[$  ;  
**Donc  $\forall x \in ]1 ; +\infty[$ , on a  $f(x) \geq e > 0$ .**

**Conclusion :**  
 $\forall x \in ]0 ; 1[$ ,  $f(x) < 0$ .  
 $\forall x \in ]1 ; +\infty[$ ,  $f(x) > 0$

## Fonctions logarithme et exponentielle népérienne

	Fonction logarithme $\ln x$	Fonction exponentielle $e^x$
Domaine de définition	$D_f = ]0; +\infty[$ Si on a : $f(x) = \ln u$ , on a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / u > 0\}$ et on résout l'inéquation $u > 0$	$D_f = ]-\infty; +\infty[$ Si on a : $f(x) = e^u$ a : $D_f = D_u$
Limites	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
Dérivée	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(e^x)' = e^x$

Dérivées : Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies  $I$  et  $J$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (e^u)' = u' e^u$$

Les limites usuelles

Logarithme	exponentielle
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad n \in \mathbb{R}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad n \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad n \in \mathbb{R}$

## Image d'un intervalle par une fonction continue

Intervalle	$f$ est croissante sur $I$	$f$ est décroissante sur $I$
$I = [a; b]$	$f(I) = [f(a); f(b)]$	$f(I) = [f(b); f(a)]$
$I = ]a; b[$	$f(I) = ]\lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$ > <	$f(I) = ]\lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$ < >
$I = ]-\infty; a]$	$f(I) = ]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a)]$	$f(I) = ]f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$I = ]b; +\infty[$	$f(I) = ]\lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$ <	$f(I) = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$ <

## Branches paraboliques

Diagramme de synthèse



