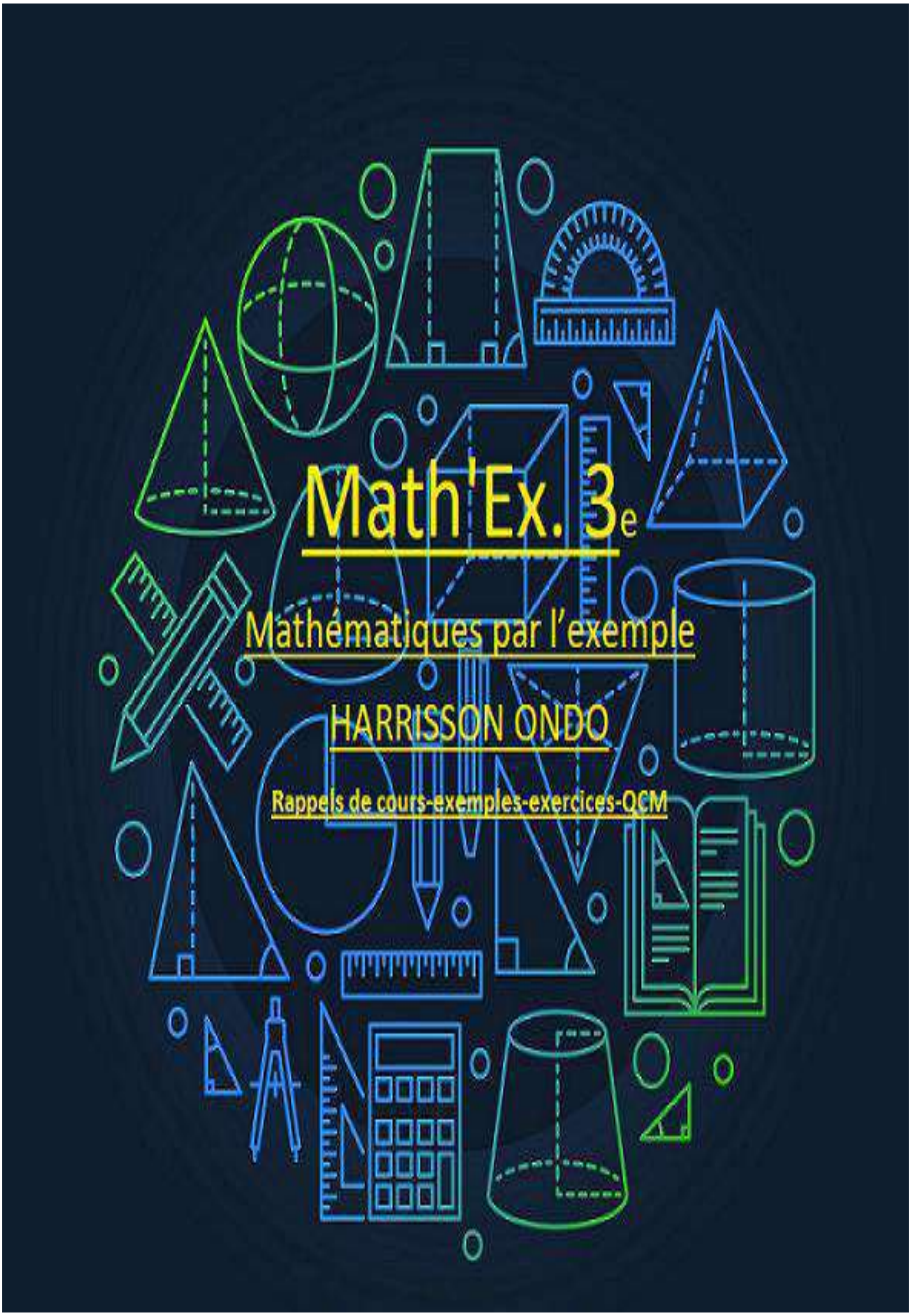


Programme du GABON

$\underline{Math'Ex.3^e}$

Mathématiques par l'exemple

HARRISSON ONDO

Rappels de cours-exemples-exercices-QCM

TABLE DES THÈMES

Thème 1 : Le PGCD 5

Thème 2 : Les identités remarquables 8

Thème 3 : La factorisation(1) 10

Thème 4 : La factorisation(2) 13

Thème 5 : Fractions 15

Thème 6 : Puissances et notation scientifique 19

Thème 7 : Probabilités 26

Thème 8 : Racines carrées (1) 36

Thème 9 : Calcul littéral 42

Thème 10 : Pythagore - racines carrées (2) 51

Thème 11 : Equations dans IR et IR x IR 59

Thème 12 : Equations dans IR et Thales 65

Thème 13 : Ordre et inéquations (1) 76

Thème 14 : Valeur absolue et inéquations (2) 87

Thème 15 : Statistiques 94

Thème 16 : Equations dans IR×IR (2) –Applications affines 107

Thème 17 : Pyramides et cônes (1) 117

Thème 18 : Les questions à choix multiples (QCM) 128

Thème 19 : Les symétries 140

Thème 20 : Probabilités (2) 151

Thème 21 : Rotation-Translation (1) 161

Thème 22 : Racines carrées-Valeur absolue (2) ____ 171

Thème 23 : Triangles semblables-Angles et cercle (1) ____ 181

Thème 24 : Equation d'une droite-Résolution graphique ____ 196

Thème 25 : Trigonométrie(1)-Cônes(2) ____ 208

Thème 26 : Arithmétique(2)-Statistiques(2) ____ 221

Thème 27 : Homothétie-Vecteurs, repérage(2) ____ 231

Thème 28 : Trigonométrie (2)-Pyramide(2) ____ 243

Thème 29 : Pythagore (2)-Thales(2) ____ 256

Thème 30 : Vecteur, repérage (3)-Equations de droites(2) ____ 267

Thème 31 : Les patrons : Pyramides et cônes ____ 273

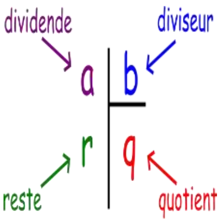
Thème 32 : Les questions à choix multiples (QCM) ____ 280

Thème 1 : Le PGCD

I.PGCD par l'algorithme d'Euclide

Méthode :

_Effectuer la division euclidienne de deux nombres entiers naturels a et b , donnant un quotient entier q et un reste entier r non nul tel que r est inférieur à b .



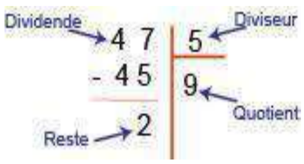
_Puis effectuer la division euclidienne de b par r

_On continue ainsi de suite jusqu'à une division euclidienne donnant un reste égal à 0.

_Le PGCD de a et b est le dernier reste non nul.

EXEMPLES :

Division euclidienne :



Algorithme d'Euclide :

PGCD de 1428 et 210 par l'algorithme d'Euclide :

$\begin{array}{r|l} 1428 & 210 \\ \hline 168 & 6 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 210 & 168 \\ \hline 42 & 1 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 168 & 42 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$

Le dernier reste non nul des divisions euclidiennes successives est 42 donc le

PGCD (1428 et 210) = 42

759	552	552	207	207	138	138	69
207	1	**138**	2	**69**	1	0	2

Le dernier reste non nul des divisions euclidiennes successives est 69 donc le

PGCD (759 et 552) = 69

Exercice 1.1 :Par l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD de :

1) 60 et 42
2) 450 et 198
3) 126 et 34
4) 25872 et 484
5) 10920 et 8316

II.PGCD par l'algorithme des différences

Propriété :

Si un nombre divise deux nombres, a et b alors il divise aussi leur différence.

Méthode :

_Effectuer les différences successives jusqu'à obtenir une différence nulle.

_On prendra soin à chaque étape de prendre les deux nombres les plus petits.

_Le PGCD est la dernière différence non nulle .

EXEMPLE :

Le PGCD de 56 et 24 par l'algorithme des différences :

$56 - 24 = 32$

$32 - 24 = 8$

$24 - 8 = 16$

$16 - 8 = 8$

$8 - 8 = 0$

La dernière différence non nulle des soustractions successives est 8 donc le

PGCD (56 et 24) = 8

Exercice : Par l'algorithme des différences déterminer le PGCD de :

1) 60 et 36
2) 295 et 177
3) 351 et 208
4) 210 et 126
5) 210 et 1428

Thème 2 : Les identités remarquables

Le carré d'une somme :

$a^2 + 2ab + b^2 \quad = a^2 + ab + ab + b^2$

$= a(a + b) + b(a + b)$, ici $(a + b)$ est le facteur commun

$= (a + b)(a + b)$

$\underline{a^2 + 2ab + b^2 \;= (a + b)^2}$

Le carré d'une différence :

$a^2 - 2ab + b^2 \quad = a^2 - ab - ab + b^2$

$= a(a - b) - b(a - b)$, ici $(a - b)$ est le facteur commun

$= (a - b)(a - b)$

$\underline{a^2 - 2ab + b^2 \;= (a - b)^2}$

La différence de deux carrés : $a^2 - b^2$

On a $\quad a^2 - b^2 = a^2 + 0 - b^2$ et $0 = -ab + ab$

D'où $\quad a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2$,

$= a(a - b) + b(a - b)$, ici $(a - b)$ est le facteur commun

$\underline{\mathrm{a}^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$

EXEMPLES :

A l'aide des identités remarquables calculer :

$$29^2 = (30 - 1)^2 = 30^2 - 2(30)(1) + 1^2$$

$$= 900 - 60 + 1$$

$$= 840 + 1$$

$$\underline{29^2 = 841}$$

$$61^2 = (60 + 1)^2 = 60^2 + 2(60)(1) + 1^2$$

$$= 3600 + 120 + 1$$

$$= 3600 + 121$$

$$\underline{\ 61^2 = 3721}$$

$$102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

$$61^2 - 60^2 = (61 + 60)(61 - 60) = 121 \times 1 = 121$$

Simplifier la fraction :

$A = \frac{63^2 - 27^2}{78^2 - 30^2}$

$A = \frac{(63+27)(63-27)}{(78+30)(78-30)}$

$A = \frac{90\times 36}{108\times 48}$

on a $A = \frac{6\times 15\times 36}{36\times 3\times 6\times 8} = \frac{6\times 15\times 36\times 1}{36\times 3\times 6\times 8} = \frac{6}{6}\times\frac{15}{3}\times\frac{36}{36}\times\frac{1}{8} = 1\times 5\times 1\times\frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

$\mathrm{A} = \frac{5}{8}$

Exercice 2.1 :

A l'aide des identités remarquables calculer :

$E = 501 \times 499$; $F = 2015^2 - 2005^2$; $G = 1002^2$; $Q = 99^2$;

$S = 17^2 + 13^2 + 26 \times 17$ on donne $(26 = 2 \times 13)$

Exercice 2.2 :

A l'aide des identités remarquables Simplifier :

$I = \frac{49^2 - 21^2}{57^2 - 15^2}$; $H = \frac{85^2 - 17^2}{85^2 + 2\times 85\times 17 + 17^2}$; $T = \frac{53^2 - 27^2}{31^2 - 25}$; $C = \frac{53^2 - 27^2}{58^2 - 22^2}$

<u>Thème 3 : La factorisation(1)</u>

Factoriser

$A = 18x - 12$

On remarque que $12 = 6 \times 2$ et $18 = 6 \times 3$ donc 6 est le facteur commun de notre différence.

$A = 18x - 12$

$A = 6(3x) - 6(2)$

$\underline{\mathrm{A} = 6(3\mathrm{x} - 2)}$

$B = 3x(a + b) + 2y(a + b)$, $(a + b)$ est le facteur commun on a :

$\underline{\mathrm{B} = (\mathrm{a} + \mathrm{b})(3\mathrm{x} + 2\mathrm{y})}$

$P = (3x + 1)(x - 2) - (2x + 5)(x - 2)$, $(x - 2)$ est le facteur commun on a

$P = (x - 2)[(3x + 1) - (2x + 5)]$

$P = (x - 2)(3x + 1 - 2x - 5)$

$P = (x - 2)(3x - 2x + 1 - 5)$

$\underline{\mathrm{P} = (\mathrm{x} - 2)(\mathrm{x} - 4)}$

$T = (2x + 7)(3x - 8) + 2x + 7$,

On a l'impression qu'il ''manque'' un facteur , il faut donc multiplier $2x + 7$ par 1, ainsi ;

$T = (2x + 7)(3x - 8) + (2x + 7) \times 1$

$T = (2x + 7)[(3x - 8) + 1]$

$T = (2x + 7)(3x - 8 + 1)$

$\underline{\mathrm{T} = (2\mathrm{x} + 7)(3\mathrm{x} - 7)}$

$Q = (7x - 2)(x - 1) - 7x + 2$

Le facteur commun est ‘’caché’’ , mais on remarque une ‘’ressemblance’’ entre $7x-2$ et $-7x+2$ on factorise $-7x+2$; en mettant (-1) en facteur puis on change les signes des termes dans les parenthèses

$-7x+2=-1\times(7x-2)$ on a :

$Q=(7x-2)(x-1)-7x+2$

$Q=(7x-2)(x-1)-1\times(7x-2)$

$Q=(7x-2)[(x-1)-1]$

$Q=(7x-2)(x-1-1)$

$\underline{Q=(7x-2)(x-2)}$

$G=4x^2-20x+25$

$G=(2x)^2-20x+5^2$,

calculons $2\times 2x\times 5=20x$, G est bien une identité remarquable ainsi,

$G=(2x)^2-20x+5^2$

$G=(2x)^2-2(2x)(5)+5^2$

$\underline{G=(2x-5)^2}$

$B=16x^2+8x+1$

$B=(4x)^2+8x+1^2$

$B=(4x)^2+2(4x)(1)+1^2$

$\underline{B=(4x+1)^2}$

$C=25x^2-9$

$C=(5x)^2-(3)^2$

$\underline{C=(5x+3)(5x-3)}$

$F=(x-4)^2-121$

$F=(x-4)^2-(11)^2$

$F=(x-4-11)(x-4+11)$

$\underline{F=(x-15)(x+7)}$

Exercice 3.1 : Factoriser

$A = (8x - 5)(8x + 5) + (8x - 5)(x + 3)$

$T = (2x + 1)(x + 5) - 2x - 1$

$G = (8 - x)(5x + 2) + (x - 8)(x + 3)$

Exercice 3.2 : Factoriser

$B = 16x^2 - 81$

$E = (x - 3)^2 - 64$

$Q = x^2 - 8x + 16$

$H = x^2 + 20x + 100$

$Z = (5x - 3)^2 - (x - 2)^2$

<u>Thème 4 : La factorisation(2)</u>

Factoriser : $A = (8x^2 - 1) - (4x + 22)(-1 - 2x) - 1$

$A = (8x^2 - 1) - (4x + 22)(-1 - 2x) - 1$

$A = (8x^2 - 1) - 1 - (4x + 22)(-1 - 2x)$

$A = 8x^2 - 1 - 1 - (4x + 22)(-1 - 2x)$

$A = 8x^2 - 2 - (4x + 22)(-1 - 2x)$

$A = 2(4x^2 - 1) - (4x + 22)(-1 - 2x)$

$A = 2(2x + 1)(2x - 1) - (4x + 22)(-2x - 1)$

$A = 2(2x + 1)(2x - 1) - (-1) \times (2x + 1)(4x + 22)$

$A = 2(2x + 1)(2x - 1) + (2x + 1)(4x + 22)$

$A = (2x + 1)[2(2x - 1) + (4x + 22)]$

$A = (2x + 1)(4x - 2 + 4x + 22)$

$A = (2x + 1)(4x + 4x - 2 + 22)$

$\underline{A = (2x + 1)(8x + 20)}$ ou $\underline{A = 4(2x + 5)(2x + 1)}$

Factoriser :

$P = 4x^2 + 12x + 5$, P n'est pas une identité remarquable on pose $12x = 2x + 10x$

$P = 4x^2 + 2x + 10x + 5$

$P = 2x(2x + 1) + 5(2x + 1)$

$\underline{P = (2x + 1)(2x + 5)}$

$Q = 3x^2 - 2x - 1$, Q n'est pas une identité remarquable on pose

$-2x = -3x + x$

$Q = 3x^2 - 3x + x - 1$

$Q = 3x(x - 1) + (x - 1) \times 1$

$\underline{Q = (x-1)(3x+1)}$

$T = x^2 + 2x - 8$,

T n'est pas une identité remarquable , on pose $-8 = +1 - 9$

$T = x^2 + 2x + 1 - 9$, on a $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

D'où $T = (x+1)^2 - 9$

$T = (x+1)^2 - (3)^2$

$T = (x+1+3)(x+1-3)$

$\underline{\mathrm{T = (x+4)(x-2)}}$

Factoriser , $A = (2x-1)(2x+1) - (1-3x) - 2x(3x-1)$

$A = (2x-1)(2x+1) - (\mathbf{1 - 3}\boldsymbol{x}) - \mathbf{2}\boldsymbol{x}(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})$

$A = (2x-1)(2x+1) - (-\mathbf{1}) \times (\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) - \mathbf{2}\boldsymbol{x}(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})$

$A = (2x-1)(2x+1) + \mathbf{1} \times (\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) - \mathbf{2}\boldsymbol{x}(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})$

$A = (2x-1)(2x+1) + (3x-1)(\mathbf{1} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})$

$A = (2x-1)(2x+1) + (-\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})\ (3x-1)$

$A = (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}) - (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})\ (3x-1)$

$\mathrm{A = (2x-1)[(2x+1) -}\ (3x-1)]$

$\mathrm{A = (2x-1)(2x+1 -}\ 3x + 1)$

$\mathrm{A = (2x-1)(2x-3x+1+1)}$

$\underline{\mathrm{A = (2x-1)(-x+2)}\ \text{ ou }\ \mathrm{A = (2x-1)(2-x)}}$

Exercice 3.3 : Factoriser

$Q = 2x^2 - 7x + 5 - x(5-2x)$

$G = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

$B = 2x^2 - 50 + (x-5)^2 + (x-5)(3x-8)$

$F = (9x^2 - 25)(4x-1) + (16x^2 - 8x + 1)(6x - 10)$

$S = (3x-5)[(5x-1)^2 - 4(3x+2)^2]$

Thème 5 : Fractions

Règles :

I. Les opérations entre parenthèses sont prioritaires sur La multiplication, la division, l'addition et la soustraction.
II. La multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.
III. Les puissances sont prioritaires sur toutes les autres opérations.
IV. Dans une suite d'opérations contenant multiplication et division, sans parenthèses, le calcul est effectué de la gauche vers la droite.

Rappels

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ avec $b \neq 0$; $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$

EXEMPLES :

$\frac{4}{7}-\frac{12}{49}=\frac{4\times\ldots}{7\times\ldots}-\frac{12}{49}=\frac{4\times7}{7\times7}-\frac{12}{49}=\frac{28}{49}-\frac{12}{49}=\frac{28-12}{49}=\frac{16}{49}$

$\frac{6}{11}+\frac{1}{11}=\frac{6+1}{11}=\frac{7}{11}$

$7-\frac{5}{3}=\frac{7\times3-5}{3}=\frac{21-5}{3}=\frac{16}{3}$ et $\frac{4}{15}-2=\frac{4-2\times15}{15}=\frac{4-30}{15}=\frac{-26}{15}$

$\frac{15}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{15\times3}{4\times2}=\frac{45}{8}$ et $6\times\frac{3}{4}=\frac{6\times3}{4}=\frac{18}{4}=\frac{18\div2}{4\div2}=\frac{9}{2}$

$\frac{2}{13}\times8=\frac{2\times8}{13}=\frac{16}{13}$

$\frac{5}{9}\div\frac{3}{2}=\frac{5}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{5\times2}{9\times3}=\frac{10}{27}$ et $12\div\frac{3}{4}=12\times\frac{4}{3}=\frac{12\times4}{3}=\frac{12}{3}\times4=4\times 4=16$

$\frac{3}{5}\div15=\frac{3}{5}\div\frac{15}{1}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{15}=\frac{3\times1}{5\times15}=\frac{3}{75}=\frac{3\div3}{75\div3}=\frac{1}{25}$

$A=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times3$;

$A = \frac{1}{4} - \frac{1 \times 3}{4}$;

$A = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$;

$A = \frac{1-3}{4}$;

$A = \frac{-2}{4}$;

$A = \frac{-2 \div 2}{4 \div 2}$

$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$

Calculer :

$E = (5 + \frac{3}{4}) \times \frac{4}{5}$

$E = (\frac{5 \times 4 + 3}{4}) \times \frac{4}{5}$

$E = (\frac{20+3}{4}) \times \frac{4}{5} = \frac{23}{4} \times \frac{4}{5}$

$E = \frac{23}{5} \times \frac{4}{4}$

$E = \frac{23}{5} \times 1$

$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{5}}$

Exercice 5.1 calculer et simplifier

$A = 8 - 4(5 - 4 \times 7)$

$B = 5 - 3 \times (-5) + 8 \div 2$

$D = 8 - 3 \times 5 - 2 \times ((-2) - 3)$

$E = (8 - 3) \times (-3) - 2 \times ((-1) - 6)$

Exercice 5.2 calculer et simplifier

$A = \frac{7}{2} - \frac{3}{5}$; $B = \frac{3}{5} + \frac{1}{4}$; $E = \frac{5}{36} \times \frac{9}{25}$; $E = \frac{6}{16} \div \frac{8}{10}$

$P = \frac{7}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{35}{27}$; $Q = \frac{8}{5} + \frac{25}{9} \div \frac{15}{18}$

Exercice 5.3 calculer et simplifier (rendre irréductible)

$T = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} \div \frac{1}{3}$

$P = 5 - 4 \times (\frac{1}{4} + \frac{1}{2})$

$S = (\frac{2}{5} - 4) \div 3$

$A = 14 \div \frac{13}{2} - \frac{2}{13}$

Calculons : $2 \times 5 \times 7$

On a : $2 \times 5 = 3 + 7$ car $2 \times 5 = 10$ et $3 + 7 = 10$

$2 \times 5 \times 7 = (3 + 7) \times 7 = 10 \times 7 = 70$

$2 \times 5 \div \frac{1}{6} = (3 + 7) \div \frac{1}{6} = 10 \times \frac{6}{1} = 10 \times 6 = 60$

Calculer

$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+\frac{3}{2-\frac{1}{3}}}$

$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+\frac{3}{\frac{2\times3-1}{3}}}$

$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+\frac{3}{\frac{6-1}{3}}}$

$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+\frac{3}{\frac{5}{3}}}$

$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+3\times\frac{3}{5}}$

$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{1+\frac{9}{5}}$

$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{\frac{1\times5+9}{5}}$

$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{\frac{5+9}{5}}$

$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{\frac{14}{5}}$

$S = \frac{1}{2} - 3 \times \frac{5}{14}$

$S = \frac{1}{2} - \frac{3\times5}{14}$

$S = \frac{1}{2} - \frac{15}{14}$

$S = \frac{1\times7}{2\times7} - \frac{15}{14}$

$S = \frac{7}{14} - \frac{15}{14}$

$S = \frac{7-15}{14}$

$S = \frac{-8}{14}$

$S = \frac{-8}{14} = \frac{-4\times2}{7\times2} = \frac{-4}{7} \times \frac{2}{2} = \frac{-4}{7} \times 1 = \frac{-4}{7}$

$\mathbf{S} = \mathbf{\frac{-4}{7}}$

Exercice 5.4 calculer et simplifier

$\mathrm{P} = \frac{(\frac{2}{3})^2-1}{\frac{2}{3}+1}$ $\qquad \mathrm{Q} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+3}}$ $\qquad \mathrm{A} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{4}}}$ $\qquad \mathrm{E} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{5}}}$

Thème 6 : Puissances et notation scientifique

La notation puissance

Si a est un nombre non nul et si n est entier naturel non nul alors , a puissance n ou encore a exposant n s'écrit : $a^n = a \times a \times a \ldots\ldots \times a$, le produit de n facteurs égaux à ''a'' ou encore '' a multiplié par lui-même n fois ''.

Par convention quel que soit le nombre a (non nul) : $a^0 = 1$

On a aussi : $a^1 = a$, la puissance 1 ne s'écrit pas .

Exemples :

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$; $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

$-3^4 = -1 \times 3^4 = -1 \times 81 = -81$

$(-3)^0 = 1$ et $(1{,}5)^2 = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$

Exercice 6.1

Ecrire sous la forme d'une puissance :

1) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$
2) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$
3) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

Exposant négatif

Si a est un nombre non nul et n un entier positif alors : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5\times5} = \frac{1}{25}$; $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2\times2\times2} = \frac{1}{8}$; $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10\times10\times10} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$.

Propriétés des puissances d'exposant positif

Si a est un nombre , avec $m > 0$, $n > 0$ alors $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Si a est un nombre non nul et $m > n > 0$ alors $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Si a est un nombre , m et n des entiers positifs $(m > 0 \; et \; n > 0)$, alors $(a^m)^n = a^{m\times n}$

Soient a et b des nombres et n un entier positif alors $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Soient a et b des nombres avec $b \neq 0$ et n un entier positif alors $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemples :

$7^6 \times 7^4 = 7^{6+4} = 7^{10}$; $a^3 \times a = a^3 \times a^1 = a^{3+1} = a^4$;

$(1{,}3)^3 \times (1{,}3)^2 = (1{,}3)^{3+2} = (1{,}3)^5$

$\frac{(-5)^6}{(-5)^2} = (-5)^{6-2} = (-5)^3$; $\frac{4^9}{4^4} = 4^{9-4} = 4^5$; $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

$(\frac{1}{3})^7 \times (\frac{1}{3})^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{7+6} = (\frac{1}{3})^{13}$

$\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2 = 49$

$(4^2)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6$

$(2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$; $(3 \times \frac{3}{5})^3 = 3^3 \times (\frac{3}{5})^3$

$25a^2 = 5^2 \times a^2 = (5a)^2$

$\frac{8^9}{5^9} = (\frac{8}{5})^9$

$2^5 \times 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

$10^{-5} \times 10^3 = 10^{-5+3} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

$(5^{-2})^3 = 5^{-2\times 3} = 5^{-6}$ et $(4^5)^{-1} = 4^{5\times(-1)} = 4^{-5}$

$(3 \times 5)^{-2} = \frac{1}{(3\times 5)^2} = \frac{1}{3^2\times 5^2}$

Soit n un entier naturel calculer $\frac{3^{n+3}}{3^{n+1}} = 3^{(n+3)-(n+1)} = 3^{n+3-n-1} = 3^{n-n+3-1} = 3^2$

Calculer $(a^3)^4 \times a^4 = a^{3\times 4} \times a^4 = a^{12} \times a^4 = a^{12+4} = a^{16}$

$\frac{(a^{11})^2}{a} = \frac{a^{11\times 2}}{a} = \frac{a^{22}}{a^1} = a^{22-1} = a^{21}$

$\frac{6^{12}\times4^{12}}{3^{12}\times8^{12}} = \frac{(6\times4)^{12}}{(3\times8)^{12}} = \frac{24^{12}}{24^{12}} = 24^{12-12} = 24^{0} = 1$

$$\left(\frac{35}{48}\right)^{3} \times (\frac{6}{7})^{3} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{2} = \left(\frac{35}{48}\times\frac{6}{7}\right)^{3} \times (\frac{8}{5})^{2} = \left(\frac{35}{7}\times\frac{6}{48}\right)^{3} \times (\frac{8}{5})^{2}$$

$= (5 \times \frac{6\div6}{48\div6})^{3} \times (\frac{8}{5})^{2}$

$(\frac{35}{48})^{3} \times (\frac{6}{7})^{3} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{2} = (5 \times \frac{6\div6}{48\div6})^{3} \times (\frac{8}{5})^{2} = (5 \times \frac{1}{8})^{3} \times (\frac{8}{5})^{2} = (\frac{5}{8})^{3} \times (\frac{8}{5})^{2} = \frac{5^{3}}{8^{3}} \times \frac{8^{2}}{5^{2}} =$ $(\frac{35}{48})^{3} \times (\frac{6}{7})^{3} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{2} =$ $\frac{5^{3}}{5^{2}} \times \frac{8^{2}}{8^{3}} = 5^{3-2} \times 8^{2-3} = 5 \times 8^{-1} = 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

$\boldsymbol{(\frac{35}{48})^{3} \times (\frac{6}{7})^{3} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{2} = \frac{5}{8}}$

Calculer

$A = \frac{2\times5^{22}-9\times5^{21}}{25^{10}}$;

$A = \frac{2\times5\times5^{21}-9\times5^{21}}{25^{10}}$;

$A = \frac{10\times5^{21}-9\times5^{21}}{(5^{2})^{10}}$;

$A = \frac{(10-9)\times5^{21}}{(5^{2})^{10}}$;

$A = \frac{(10-9)\times5^{21}}{5^{2\times10}}$

$A = \frac{1\times5^{21}}{5^{2\times10}}$;

$A = \frac{5^{21}}{5^{20}}$

$A = 5^{21-20}$;

$A = 5^{1}$;

$\boldsymbol{A = 5}$

$B = 3 - 5 \times (\frac{1}{5} - 1)^{2}$;

$B = 3 - 5 \times (\frac{1-1\times5}{5})^{2}$;

$B = 3 - 5 \times (\frac{1-4}{5})^2$

$B = 3 - 5 \times (\frac{1-4}{5})^2$;

$B = 3 - 5 \times (\frac{-3}{5})^2$;

$B = 3 - 5 \times (\frac{-3}{5}) \times (\frac{-3}{5})$

$B = 3 - 5 \times (\frac{9}{5\times5})$;

$B = 3 - \frac{5}{5} \times (\frac{9}{5})$;

$B = 3 - 1 \times (\frac{9}{5})$

$B = 3 - (\frac{9}{5})$

$B = \frac{5\times3-9}{5}$;

$B = \frac{5\times3-9}{5}$;

$B = \frac{15-9}{5}$;

$\mathbf{B = \frac{6}{5}}$

<u>Exercice 6.1 Calculer à l'aide des propriétés de puissances</u>

1) $3^5 \times 3^7$ 2) $(\frac{1}{4})^6 \times (\frac{1}{4})^8$ 3) $2^3 \times 2 \times 2^8$

4) $\frac{3^{10}}{27}$ 5) $\frac{27}{3}$ 6) $\frac{(-8)^{12}}{(-8)}$ 7) $\frac{(3,4)^8}{(3,4)^7}$

<u>Exercice 6.2 Calculer à l'aide des propriétés de puissances</u>

$A = \frac{5^3\times8^2}{8^3\times5^2}$; $E = (\frac{5^3}{6^2})^4 \times (\frac{2}{5})^5 \times (\frac{3}{5})^7$; $Q = \frac{(4\times3^{22}+7\times3^{21})\times57}{(19\times27^4)^2}$

$P = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \div (1 - \frac{1}{10})^2$; $P = \frac{24}{25} \times \frac{10^{-n+3n}}{10^{2n}}$, n est un entier naturel.

L'écriture scientifique

Rappels

Calculer

$10^3 \times 10^5$; $10^{-3} \times 10^{-2}$; $10^8 \times 10^{-3}$; $\frac{10^{-5}}{10^{-9}}$

Notation ou écriture scientifique

Ecrire un nombre en notation scientifique c'est l'écrire sous la forme de deux facteurs : $a \times 10^n$

Avec $1 \leq a < 10$ ou $-10 \leq a < -1$ et n est un entier relatif .

Exemples :

Déterminer l'écriture scientifique de :

$60000 = 60000{,}0 = 6 \times 10^4$ (car la virgule ''dépasse'' 4 chiffres vers la gauche , l'exposant de 10 sera +4 ou 4).

$856{,}12 = 8{,}5612 \times 10^2$ (car la virgule ''dépasse'' 2 chiffres vers la gauche , l'exposant de 10 sera +2 ou 2) .

$0{,}0000123 = 1{,}23 \times 10^{-5}$ (car la virgule ''dépasse'' 5 chiffres vers la droite , l'exposant de 10 sera -5) .

0,0000008= 8×10^{-7} , (car la virgule ''dépasse'' 7 chiffres vers la droite , l'exposant de 10 sera -7) .

De la notation scientifique à l'écriture décimale :

$3 \times 10^4 = 30000$ (car l'exposant de 10 est 4, on a donc 3 suivi de 4 zéros)

$8{,}7 \times 10^{-2} = 0{,}087$ (car l'exposant de 10 est -2 un nombre négatif, on a donc 0,0 suivi de 8 et 7)

$7 \times 10^{-1} = 0{,}7$ (car l'exposant de 10 est -1 un nombre négatif, on a donc 0, suivi de 7)

Exercice 6.3 Déterminer l'écriture scientifique de :

1) 5200000 2) 0,0000015 3) 0,0081 4) 29856 5) 368,25

6) 253×10^2 7) $0,68 \times 10^3$ 8) $33,5 \times 10^{-4}$

Exercice 6.4 Déterminer l'écriture décimale de :

2) $1,3 \times 10^4$ 2) $7,9 \times 10^{-5}$ 3) 4×10^4 4) 3×10^{-2}

Ecriture scientifique et opération :

$\mathrm{E} = 9,2 \times 10^{12} \times 1,8 \times 10^{-3}$

$\mathrm{E} = 9,2 \times 1,8 \times 10^{12} \times 10^{-3}$

$E = 16,56 \times 10^{12-3} = 16,56 \times 10^9$

Remarque en notation scientifique $16,56 = 1,656 \times 10^1$ on a :

$E = 16,56 \times 10^9 = 1,656 \times 10^1 \times 10^9$

$E = 1,656 \times 10^{1+9}$

$\mathbf{E = 1,656 \times 10^{10}}$

$A = \frac{7,8 \times 10^{-3}}{1,6 \times 10^{-8}}$

$A = \frac{7,8}{1,6} \times \frac{10^{-3}}{10^{-8}}$

$A = 4,875 \times 10^{-3+8}$

$\mathbf{A = 4,875 \times 10^5}$

$P = 5,6 \times 10^6 - 4,42 \times 10^6$

$P = (5,6 - 4,42) \times 10^6$ (en mettant 10^6 en facteur)

$\mathbf{P = 1,18 \times 10^6}$

$Q = 3,1 \times 10^{-4} + 7,2 \times 10^{-5}$

On fera ressortir un facteur commun à cette différence : $3,1 = 31 \times 10^{-1}$

$Q = 31 \times 10^{-1} \times 10^{-4} + 7,2 \times 10^{-5}$

$Q = 31 \times 10^{-1-4} + 7,2 \times 10^{-5}$

$Q = 31 \times 10^{-5} + 7,2 \times 10^{-5}$

On factorise avec 10^{-5}

$Q = (31 + 7{,}2) \times 10^{-5}$

$Q = 38{,}2 \times 10^{-5}$

On a $38{,}2 = 3{,}82 \times 10^{1}$ ainsi

$Q = 3{,}82 \times 10^{1-5}$

$\mathbf{Q = 3{,}82 \times 10^{-4}}$

Déterminer l'écriture décimale et scientifique de T

$T = \frac{-2{,}4 \times 10^{7} \times 8 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-3}}$

$\mathrm{T} = \frac{-2{,}4 \times 8}{3} \times \frac{10^{7} \times 10^{-9}}{10^{-3}}$

$\mathrm{T} = \frac{-19{,}2}{3} \times \frac{10^{7-9}}{10^{-3}}$

$\mathrm{T} = -6{,}4 \times \frac{10^{-2}}{10^{-3}}$

$T = -6{,}4 \times 10^{-2+3}$

$\mathbf{T = -6{,}4 \times 10^{1}}$ (écriture scientifique de T)

$\mathbf{T = -64}$ (écriture décimale de T)

Exercice 6.5 Déterminer l'écriture scientifique de :

$\mathrm{A} = 5 \times 10^{2} \times 0{,}3 \times 10^{-5}$

$B = \frac{7{,}5 \times 10^{-2}}{25 \times 10^{-4}}$

$Q = \frac{-3 \times 10^{3} \times 1{,}2 \times 10^{-5}}{15 \times 10^{2}}$

$P = \frac{6 \times 10^{3} \times 28 \times 10^{-2}}{14 \times 10^{-3}}$

$G = (4 \times 10^{-3})^{2}$

Exercice 6.6 Déterminer l'écriture décimale et scientifique de :

$S = 83 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-1}$

$A = 3 \times 10^{-5} - 2 \times 10^{-4}$

$T = \frac{8 \times (10^{2})^{3} + 15 \times 10^{5}}{10^{7}}$

Thème 7 : Probabilités

I – Vocabulaire

Une **expérience aléatoire** est un phénomène dont on ne peut prédire le résultat d'une manière certaine.

Une **issue** est le résultat possible d'une expérience aléatoire

Un regroupement d'une ou plusieurs issues est un **événement**.

Un **événement impossible** est un événement qui ne peut pas se réaliser.

Un événement qui se réalise toujours est un **événement certain**.

Deux événements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps sont dit incompatibles.

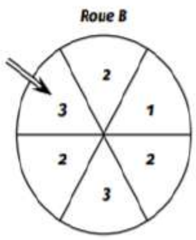
L'événement contraire d'un événement **A** est celui qui se réalise lorsque l'évènement **A** ne se réalise pas. L'événement contraire de **A** est noté $\bar{A}$.

II – Probabilité

Activité :

On réalise une expérience aléatoire en faisant tourner une roue avec une flèche ne pouvant indiquer qu'un seul chiffre du cadran.

La roue contient 6 cadrans avec les chiffres 1 , 2 et 3 .



En faisant tourner la roue on a **3 chances sur 6** que la flèche s'arrête sur le chiffre 2 , on dit que la probabilité que l'évènement ''2'' se réalise est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

En faisant tourner la roue on a **une chance sur 6** que la flèche s'arrête le chiffre 1 , on dit que la probabilité que l'évènement ''1'' se réalise est de $\frac{1}{6}$.

En faisant tourner la roue on a **2 chances sur 6** que la flèche s'arrête sur le chiffre 3 , on dit que la probabilité que l'évènement ''3'' se réalise est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriétés :

En situation d'équiprobabilité, la probabilité $p(A)$ d'un évènement A est donnée par :

$$p(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables\ \text{à}\ l'évenement\ A}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Une probabilité est comprise entre 0 et 1 ou $0 \leq p(A) \leq 1$.

La somme des probabilités des issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire de la roue on a :

P(''2'')+ P(''1'')+ P(''3'') = $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+1+2}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Propriété :

L'événement contraire de **A** est $\bar{A}$ on a p(**A**) + p($\bar{A}$) =1 ou p($\bar{A}$) =1 − p(**A**) .

Exemples :

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré constitué de six faces numérotées de 1 à 6 . Si la face obtenue est un nombre premier , le joueur gagne . Sinon , le joueur perd.

1) Expliquer pourquoi le nombre 1 n'est pas premier.
2) Soit A l'évènement : $\ll le\ joueur\ gagne \gg$
   Ecrire l'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement A , puis calculer la probabilité de l'évènement A .
3) Ecrire l'ensemble des résultats de l'évènement $\bar{A}$, évènement contraire de A , puis calculer $p(\bar{A})$ la probabilité que le joueur perde .

* * *

1) Un nombre premier est un nombre qui ne possède que deux diviseurs 1 et lui-même . Le nombre 1 ne possède qu'un seul diviseur lui-même , donc 1 n'est pas un nombre premier.

2)

Le joueur gagne si la face obtenue est un nombre premier, c'est-à-dire 2,3 et 5 on a $\mathbf{A} = \{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5}\}$

probabilité de l'évènement A ; l'ensemble des cas favorables est $\mathrm{A} = \{2; 3; 5\}$ et l'ensemble des cas possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

d'où $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

3)

L'ensemble des résultats de l'évènement $\bar{A}$ est $\overline{\mathbf{A}} = \{\mathbf{1}; \mathbf{4}; \mathbf{6}\}.$

Probabilité de $\bar{A}$, évènement contraire de A on a $P(\overline{\mathbf{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$

On a $P(\overline{\mathbf{A}}) = 1 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$; $\boldsymbol{P}(\overline{\mathbf{A}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Exemple :

Un sac vert contient trois boules numérotées 1 ;2 et 3 . un sac gris contient 4 boules numérotées 0 ;1 ;2 et 3. On tire une boule dans chaque sac et on calcule la somme des deux numéros obtenus.

1) Compléter le tableau ci-dessous.

	Sac vert			
Sac gris	Somme	1	2	3
	0			
	1			
	2			
	3			

2) Quelles sont les issues possibles ?
3) Soit A l'évènement : $\ll$ *obtenir une somme égale* à 4 $\gg$
   Ecrire l'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement A , puis calculer la probabilité de l'évènement A .
4) Soit B l'évènement : $\ll$ *obtenir une somme paire* $\gg$

Ecrire l'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement B , puis calculer la probabilité de l'évènement B .

5) Soit C l'évènement : ≪ $obtenir\ une\ somme\ égale$ à 7 ≫
Ecrire l'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement C , puis calculer la probabilité de l'évènement C .

* * *

1) Compléter le tableau ci-dessous.

	Sac vert			
Sac gris	Somme	1	2	3
	0	(0+1) **1**	(0+2) **2**	(0+3) **3**
	1	(1+1) **2**	(1+2) **3**	(1+3) **4**
	2	(2+1) **3**	(2+2) **4**	(2+3) **5**
	3	(3+1) **4**	(3+2) **5**	(3+3) **6**

2) L'ensemble des issues possibles :
$\Omega =$
$$\left\{\begin{matrix}(0+1);(0+2);(0+3);\ (1+1);(1+2);(1+3);(2+1);(2+2);\\ (2+3);(3+1);(3+2);(3+3)\end{matrix}\right\}$$

3) L'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement A
$$A = \left\{(1+3);(2+2);\ (3+1)\right\}$$
Probabilité de A l'évènement : ≪ $obtenir\ une\ somme\ égale$ à 4 ≫
On a 3 cas favorables avec l'ensemble A et 12 cas possibles avec l'ensemble Ω
d'où $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

4) L'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement

5) B : ≪ $obtenir\ une\ somme\ paire$ ≫
$$B = \left\{(0+2);\ (1+1);(1+3);(2+2);\ \ (3+1);(3+3)\right\}$$
Probabilité de l'évènement B : ≪ $obtenir\ une\ somme\ paire$ ≫

L'ensemble B donne 6 cas favorables et l'ensemble Ω donne 12 cas possibles , d' où

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}}$$

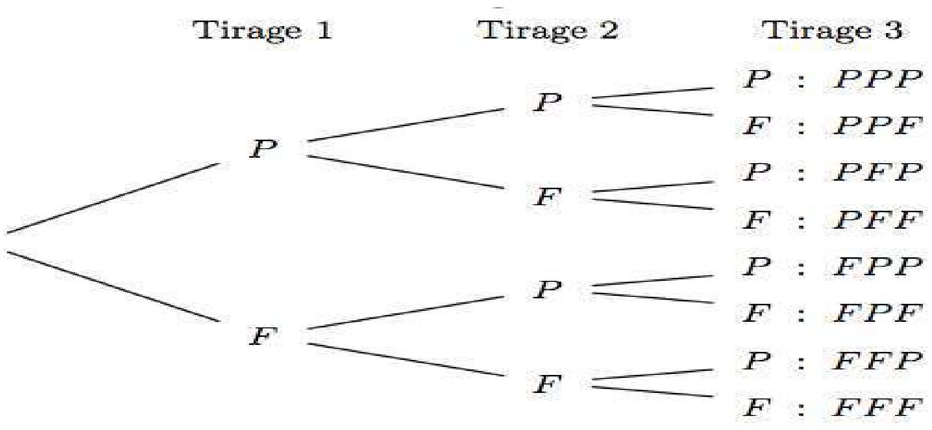
6) L'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement C : $\ll$ *obtenir une somme égale* à 7 $\gg$ c'est un évènement impossible car le tableau ne contient aucune somme égale à 7 donc l' ensemble C ne contient aucun élément.
   La probabilité de l'évènement impossible est nulle on écrit :
   $\boldsymbol{P(C) = 0}$

Exemple :

1) Dans un sac on tire trois pièces de monnaies non truquées avec un côté pile '' P '' et un côté face '' F '' à l'aide d'un arbre de probabilité déterminer les différentes issues possibles.
2) Soit A l'évènement : $\ll$ *obtenir trois tirages identiques* $\gg$
   Ecrire l'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement A , puis calculer la probabilité de l'évènement A .
3) Soit B l'évènement : $\ll$ *obtenir pile au deuxième lancé* $\gg$
   Ecrire l'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement B , puis calculer la probabilité de l'évènement B .

*   *   *

1) Arbre de probabilité



L'ensemble des issues possibles :

$$\Omega = \begin{Bmatrix}(\mathbf{PPP});\ (\mathbf{PPF});(\mathbf{PFP});\ (\mathbf{PFF});(\mathbf{FPP});(\mathbf{FPF});(\mathbf{FFP});(\mathbf{FFF})\\ \end{Bmatrix}$$

2) L'ensemble des résultats qui permettent de réaliser l'évènement

A $\ll obtenir\ trois\ tirages\ identiques \gg$ est :

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix}(\mathbf{PPP});(\mathbf{FFF})\\ \end{Bmatrix}$$

Probabilité de l'évènement A : $\ll obtenir\ trois\ tirages\ identiques \gg$

On a 2 cas favorables avec l'ensemble A et 8 cas possibles avec l'ensemble Ω

d'où $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

4) L'ensemble B des résultats $\ll obtenir\ pile\ au\ deuxième\ tirage \gg$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix}(\mathbf{PPP});\ (\mathbf{PPF});\ (\mathbf{FPP});(\mathbf{FPF})\\ \end{Bmatrix}$$

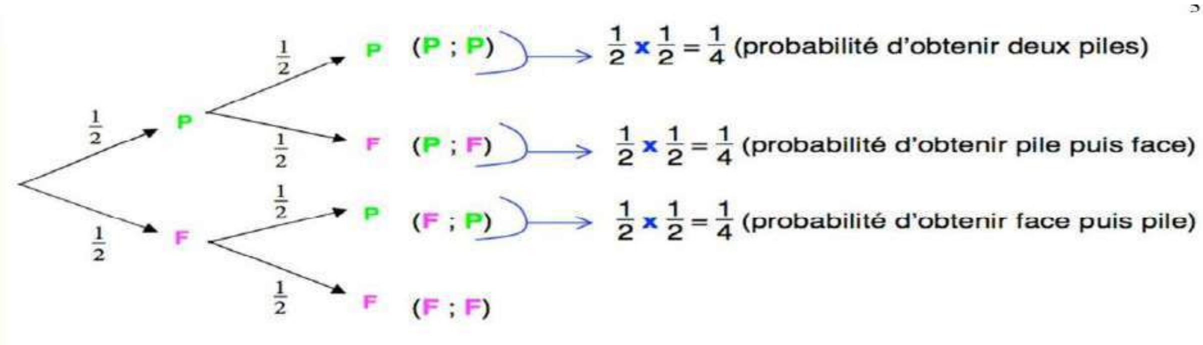
Probabilité de l'évènement B $\ll obtenir\ pile\ au\ deuxième\ tirage \gg$

On a 4 cas favorables avec l'ensemble B et 8 cas possibles avec l'ensemble Ω

d'où $\boldsymbol{P(B)} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Exemple : On lance deux fois de suite une pièce de monnaie non truqué, la probabilité d'avoir le côté pile à chaque lancé est de ½ et la probabilité d'avoir le côté face à chaque lancé est aussi ½ .

Cette situation est traduite par l'arbre de probabilité suivant qui permet aussi de déterminer les probabilités que les évènements suivants se réalisent : (P,P) (P,F) (F,P)



Sur un même chemin, on multiplie les probabilités.

Exercice 7.1

On lance une pièce de monnaie non truqué trois fois de suite. Par analogie à l'arbre de probabilité ci-dessus, déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux fois face.

Exercice 7.2

Dans un sac on mélange 6 jetons indiscernables au touché : 3 jaunes , 2 bleus et un jeton rouge .

On tire un jeton au hasard, on note sa couleur et on le remet dans le sac. On re-mélange puis on tire une seconde fois et on note sa couleur.

1) Construire un arbre de probabilité et indiquer les probabilités de chaque issue sur cet arbre.
2) Calculer la probabilité de tirer uniquement un jeton bleu.

Exercice 7.3

Un sac contient 10 boules rouges, 6 boules noires et 4 boules jaunes. Chacune de ces boules a la même probabilité d'être tirée. On tire une boule au hasard.

1. Calculer la probabilité pour que cette boule soit rouge.
2. Calculer la probabilité pour que cette boule soit noire ou jaune.
3. Calculer la somme des deux probabilités trouvées aux deux questions précédentes.
   Le résultat était-il prévisible ? Pourquoi ?
4. On ajoute dans ce sac des boules bleues. Le sac contient alors 10 boules rouges, 6 boules noires, 4 boules jaunes et les boules bleues.
   On tire une boule au hasard. Sachant que la probabilité de tirer une boule bleue est égale à $\frac{1}{5}$, calculer le nombre de boules bleues.

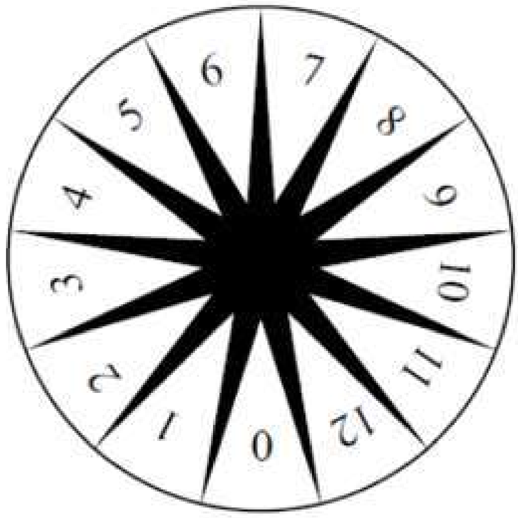
Exercice 7.4

On considère un jeu composé d'un plateau tournant et d'une boule. Représenté ci-contre, ce plateau comporte 13 cases numérotées de 0 à 12.

On lance la boule sur le plateau. La boule finit par s'arrêter au hasard sur une case numérotée.

La boule a la même probabilité de s'arrêter sur chaque case.

1. Quelle est la probabilité que la boule s'arrête sur la case numérotée 8 ?
2. Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur lequel la boule s'arrête soit un nombre impair ?
3. Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur lequel la boule s'arrête soit un nombre premier ?



Exercice 7.5

Dans une classe de collège , après la visite médicale , on dressé le tableau suivant :

	Porte des lunettes	Ne porte pas de lunettes
Fille	3	15
Garçon	7	5

Combien cette classe compte –elle d'élèves ?

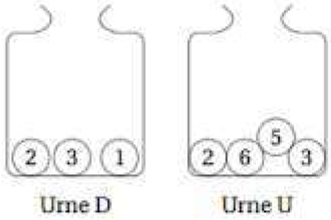
Les fiches individuelles de renseignements tombent par terre et s'éparpillent.

1. Si l'infirmière en ramasse une au hasard, quelle est la probabilité que cette fiche soit :
   a. celle d'une fille qui porte des lunettes ?
   b. celle d'un garçon ?

2. Les élèves qui portent des lunettes dans cette classe représentent 12,5% de ceux qui en portent dans tout le collège.
   Combien y a-t-il d'élèves qui portent des lunettes **dans le collège** ?

Exercice 7.6

Deux urnes contiennent des boules numérotées indiscernables au toucher. Le schéma ci-contre représente le contenu de chacune des urnes.



On forme un nombre entier à deux chiffres en tirant au hasard une boule dans chaque urne :

— le chiffre des dizaines est le numéro de la boule issue de l'urne D;

— le chiffre des unités est le numéro de la boule issue de l'urne U.

Exemple : en tirant la boule 1 de l'urne D et ensuite la boule 5 de l'urne U, on forme le nombre 15.

1. A-t-on plus de chance de former un nombre pair que de former un nombre impair?

2. **a.** Sans justifier, indiquer les nombres premiers qu'on peut former lors de cette expérience.

b. Montrer que la probabilité de former un nombre premier est égale à $\frac{1}{6}$.

3. Définir un évènement dont la probabilité de réalisation est égale à $\frac{1}{3}$.

Exercice 7.7

Une classe de 3^e est constitué de 25 élèves .Certains sont externes, les autres sont demi-pensionnaires. Le tableau ci-dessous donne la composition de la classe :

	Garçon	fille	Total
Externe		3	
Demi-pensionnaire	9	11	
Total			25

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

2. On choisit un élève au hasard dans cette classe.

a) Quelle est la probabilité pour que cet élève soit une fille ?

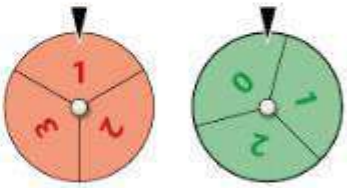
b) Quelle est la probabilité pour que cet élève soit externe ?

c) Si cet élève est demi-pensionnaire, quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

Exercice 7.8

a)

On fait tourner chacune des roues ci-dessous découpées en trois secteurs identiques et on note la somme des résultats obtenus.



c) complète le tableau ci-dessous

Somme	1	2	3
0			
1			
2			

c) complète le tableau ci-dessous

Issue(somme)	1	2	3	4	5
probabilité					

Thème 8 : Racines carrées(1)

I. Racines carrées

Soit a un nombre positif on écrit racine carrée de a le nombre noté : $\sqrt{a}$

$\sqrt{a}$ désigne le nombre positif qui élevé au carré donne a .

$(\sqrt{a})^2 = a$ ou $\sqrt{a^2} = a$

Propriétés :

$\sqrt{a} = b \ \ avec\ b \geq 0$ et $b^2 = a$

$(\sqrt{a})^2 = a \quad avec\ a \geq 0$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b > 0$

Exemples

$\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$; $\sqrt{25 \times 16} = \sqrt{25} \times \sqrt{16} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{4^2} = 5 \times 4 = 20$

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}$

$\sqrt{\frac{100}{225}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{225}} = \frac{\sqrt{10^2}}{\sqrt{15^2}} = \frac{10}{15} = \frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$

$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times (\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$

Calculer :

$\sqrt{81} + \sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{9^2} + \sqrt{(\frac{2}{3})^2} = 9 + \frac{2}{3} = \frac{9 \times 3 + 2}{3} = \frac{29}{3}$

$2\sqrt{36} - \frac{\sqrt{64}}{4} = 2\sqrt{6^2} - \frac{\sqrt{8^2}}{4} = 2 \times 6 - \frac{8}{4} = 12 - 2 = 10$

$\frac{\sqrt{450}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{450}{2}} = \sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$

Exercice 8.1

1) Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les nombres suivants :

$\sqrt{72}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{27}$

2) Calculer

$\sqrt{\frac{9}{16}} - \sqrt{36}$; $(\sqrt{3})^2 + \sqrt{169}$; $\sqrt{49 \times 64}$; $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

Quelques carrés parfaits

$0^2 = 0$
$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$
$10^2 = 100$
$11^2 = 121$
$12^2 = 144$
$13^2 = 169$

Les nombres 0 ; 1 ; 4 , 9 ; 16 ;25…. sont appelés des carrés par parfaits.
Soient a et b deux nombres positifs si $a^2 = b$ on dit que b est un carré parfait.

Réduction des sommes

Activité

$3a + 4a = 7a$, remplaçons a par $\sqrt{3}$ on a
$3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

$9a - 6a = 3a$, remplaçons a par $\sqrt{7}$ on a
$9\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$
$A = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$
$A = (5-2)\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$

$A = 3\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$
$A = (3 - 8)\sqrt{3}$
$\mathbf{A = -5\sqrt{3}}$
$B = \sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$
$B = 1\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$
$B = (1 + 5)\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$
$B = 6\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$
$B = (6 - 8)\sqrt{7}$
$\mathbf{B = -2\sqrt{7}}$

$T = 2\sqrt{12} - \sqrt{75}$
$\mathrm{T} = 2\sqrt{4 \times 3} - \sqrt{25 \times 3}$
$T = 2\sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{5^2 \times 3}$
$T = 2 \times 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$
$T = 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$
$T = (4 - 5)\sqrt{3}$
$\mathbf{T = -\sqrt{3}}$

$S = \left(\sqrt{8} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{8} + \sqrt{7}\right)$ (on a la forme $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$)
$S = (\sqrt{8})^2 - (\sqrt{7})^2$
$S = 8 - 7$
$\mathbf{S = 1}$

$Q = (\sqrt{12} + \sqrt{3})^2$ (on a la forme $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)
$Q = (\sqrt{12})^2 + 2(\sqrt{12})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2$
$Q = 12 + 2\left(\sqrt{12 \times 3}\right) + 3$
$Q = 12 + 3 + 2\left(\sqrt{36}\right)$
$Q = 15 + 2\left(\sqrt{6^2}\right)$
$Q = 15 + 2 \times 6$
$Q = 15 + 12$
$\mathbf{Q = 27}$

$\mathrm{G} = (\sqrt{2} - \sqrt{8})^2$ (On a la forme $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$)
$G = (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})(\sqrt{8}) + (\sqrt{8})^2$

$G = 2 - 2\left(\sqrt{2 \times 8}\right) + 8$

$G = 2 + 8 - 2\left(\sqrt{16}\right)$

$G = 10 - 2\left(\sqrt{4^2}\right)$

$G = 10 - 2(4)$

$G = 10 - 8$

$\boldsymbol{G = 2}$

<u>Exercice 8.2 :</u> Ecrire sous la forme $a\sqrt{\mathrm{b}}$;

$A = \sqrt{121} - 2\sqrt{112} + \sqrt{63} - \sqrt{81}$

$D = -4\sqrt{18} + 2\sqrt{128} - 3\sqrt{32}$

$E = \sqrt{12} - 4\sqrt{75} + 64\sqrt{48}$

$G = 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{15}$

$T = 7\sqrt{15} \times 2\sqrt{35} \times \sqrt{3}$

<u>Exercice 8.3 :</u> A l'aide des identités remarquables déterminer la valeur exacte.

$P = (2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)$; $D = (\sqrt{3} - 5)(\sqrt{3} + 5)$

$Q = (5 - 3\sqrt{2})^2$; $E = (3\sqrt{2} - \sqrt{5})^2$

$B = (4 + 5\sqrt{2})^2$;

$I = (\sqrt{3} + 3)^2 - 3$

$H = (7 - 4\sqrt{3})^2 - (4 + 3\sqrt{3})^2$

II.Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient

Soit a un nombre positif non nul , pour rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{a}}$ on doit multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}$.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Exemples : rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{3}\times\sqrt{3} = 1\times\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$

$$\frac{2}{5\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{5\times3} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$$

En rendant rationnel un dénominateur on le transforme en nombre entier non nul .

Exercice 8.4 :

Rendre rationnel le dénominateur de :

$\frac{-2}{\sqrt{5}}$; $\frac{7}{2\sqrt{7}}$; $\frac{4}{\sqrt{8}}$;

Produit des facteurs

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$$

Exemples :

$$A = (12-\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})$$

$$A = 12\times3 + 12(2\sqrt{7}) - 3(\sqrt{7}) - (2\sqrt{7})(\sqrt{7})$$

$$A = 36 + 24\sqrt{7} - 3(\sqrt{7}) - 2(\sqrt{7})^2$$

$$A = 36 + (24-3)\sqrt{7} - 2\times7$$

$$A = 36 + 21\sqrt{7} - 14$$

$$A = 36 - 14 + 21\sqrt{7}$$

$$\boldsymbol{A = 22 + 21\sqrt{7}}$$

$T = \left(\sqrt{99} - \sqrt{44}\right)\sqrt{11}$

$T = \left(\sqrt{9 \times 11} - \sqrt{4 \times 11}\right)\sqrt{11}$

$T = \left(3\sqrt{11} - 2\sqrt{11}\right)\sqrt{11}$

$T = \left(3\sqrt{11}\right)(\sqrt{11}) \quad - 2(\sqrt{11})(\sqrt{11})$

$T = 3(\sqrt{11})^2 - 2(\sqrt{11})^2$

$T = 3 \times 11 - 2 \times 11$

$T = 33 - 22$

$\mathbf{T = 11}$

Exercice 8.5 : Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{3}$ les expressions suivantes :

$E = \sqrt{3}\left(5 + \sqrt{3}\right) - (\sqrt{3} - 3)$

$G = (4\sqrt{6} - \sqrt{54} + \sqrt{18})\sqrt{6}$

$S = \left(9\sqrt{5} + 7\sqrt{2}\right)\left(7\sqrt{2} - 9\sqrt{5}\right) - (6\sqrt{10} - 2\sqrt{5})^2$

Exercice 8.6 : A l'aide des identités remarquables simplifier les expressions suivantes :

1) $\sqrt{104^2 - 40^2}$
2) 2) $\sqrt{61^2 - 60^2}$
3) 3) $\sqrt{23^2 + 2 \times 23 \times 67 + 67^2}$
4) $\sqrt{226^2 - 226 \times 202 + 101^2}$
5) $\sqrt{(\frac{25}{49})^2 - (\frac{24}{49})^2}$

Thème 9 : Calcul littéral

Développer

Développer une expression c'est l'écrire comme une somme.

Produit des facteurs

$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ et $(a+b)(c-d) = ac-ad+bc-bd$

Méthode pour développer

$A = -2(x+3)$

$A = -2 \times x - 2(+3)$

$\mathbf{A = -2x - 6}$

$\mathrm{B = (3 + x)(2 - x)}$

$\mathrm{B = (+3 + x)(2 - x)}$

$B = +3 \times 2 + 3(-x) + (x)(2) + x(-x)$

$B = 3 \times 2 + 3(-1)(x) + 2(x) + (-x)x$

$B = 6 - \boldsymbol{3x} + \boldsymbol{2x} - x^2$

$\mathbf{B = 6 - x - x^2}$ (Ecriture de B suivant les puissances croissantes de x)

$\mathbf{B = -x^2 - x + 6}$ (Ecriture de B suivant les puissances décroissantes de x)

$E = (2x+3)(x-5)$

$E = (+2x+3)(x-5)$

$E = +2x(x) + 2x(-5) + 3(x) + 3(-5)$

$E = +2x^2 + 2(-5)x + 3x - 15$

$E = 2x^2 - \mathbf{10x} + \mathbf{3x} - 15$

$\boldsymbol{E = 2x^2} \mathbf{- 7x - 15}$

Développer avec des identités remarquables

$F = (3x-2)(3x+2)$ (on a la forme $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)

$F = (3x)^2 - (2)^2$

$\mathbf{F = 9x^2 - 4}$

$\mathrm{P} = (4\mathrm{x} - 5)^2$ (on a la forme $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$)

$P = (4x)^2 - 2(4x)(5) + (5)^2$

$P = 4 \times 4 \times (x)^2 - 2(4)(5)(x) + (5)^2$

$\boldsymbol{P = 16x^2 - 40x + 25}$

$\mathrm{T} = (3 + \frac{\mathrm{x}}{4})^2$ (on a la forme $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)

$T = 3^2 + 2(3)\left(\frac{x}{4}\right) + (\frac{x}{4})^2$

$T = 9 + 6 \times \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4^2}$

$T = 9 + \frac{6}{4} \times x + \frac{x^2}{16}$

$T = 9 + \frac{6 \div 2}{4 \div 2} \times x + \frac{x^2}{16}$

$T = 9 + \frac{3}{2} \times x + \frac{x^2}{16}$

$T = 9 + \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{16}$

Ordonnons T suivant les puissances décroissantes de x

$\mathbf{T = \frac{x^2}{16} + \frac{3}{2}x + 9}$

Somme ou différence d'un produit de facteurs

$P = (5x - 3)(2x - 3) - (x + 6)(2x - 5)$

Développer, réduire et ordonner P suivant les puissances, décroissantes de x

$P = (+5x - 3)(2x - 3) - (+x + 6)(2x - 5)$

$P = (+5x)(2x) + 5x(-3) - 3(2x) - 3(-3) - (+x(2x) + x(-5) + 6(2x) + 6(-5))$

$P = 10x^2 \boldsymbol{- 15x - 6x} + 9 - (2x^2 \boldsymbol{- 5x + 12x} - 30)$

$P = 10x^2 \boldsymbol{- 21x} + 9 - (2x^2 + \boldsymbol{7x} - 30)$

$P = 10x^2 \boldsymbol{- 21x} + 9 - 2x^2 \boldsymbol{- 7x} + 30$

$P = 10x^2 - 2x^2 \boldsymbol{- 21x - 7x} + 9 + 30$

$\boldsymbol{P = 8x^2 - 28x + 39}$

Développer, réduire et ordonner J suivant les puissances, décroissantes de x .

$J = (x+5)^2 - (2x-1)^2$

$J = (x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2) - ((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2)$

$J = (x^2 + 10x + 25) - (4x^2 - 4x + 1)$

$J = x^2 + 10x + 25 - 4x^2 + 4x - 1$

$J = x^2 - 4x^2 + 10x + 4x + 25 - 1$

$\mathbf{J = -3x^2 + 14x + 24}$

<u>Exercice 9.1</u>

Développer, réduire et ordonner suivant les puissances, décroissantes de x .

$G = (3x+4)(1-2x) + (2x-3)(3x-1)$

$H = 2x^2(2-3x^2) - 3x^2(4+2x^2)$

$S = (3x-4)(2x+1) - (x-2)(6x+3)$

$Q = (3x^2 - 3x + 1)(5x+4) + 9(x-1)^2$

$A = \frac{-1}{3}(9x^2 - 1) + (3x+6)(x-1)$

Calcul d'une valeur numérique

Exemple :

Calcul d'une valeur numérique de A pour $x = -2$, $A = 2x^2 - 3x + 1$

Méthode : On remplace x par -2 dans A

On a $A = 2(\ )^2 - 3(\ ) + 1$, puis on placera -2 dans les parenthèses vides.

$A = 2(-2)^2 - 3(-2) + 1$

$A = 2(4) - 3(-2) + 1$

$A = 8 + 6 + 1$

$\mathbf{A = 15}$

<u>Exercice 9.2</u>

1) Calculer la valeur numérique de P pour $x = -1$, $P = 2x^2 - 7x + 5$

2) Calculer la valeur numérique de T pour $x = -\frac{1}{2}$, $T = 4x^2 - 12x + 9$

3) Calculer la valeur numérique de S pour $x = \frac{1}{4}$,
$S = -14x + (4x - 1)(3 - 2x)$

(ici , il faudra d'abord développer et réduire S avant de calculer la valeur numérique)

<u>Equations :</u>

Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité du type :

$ax + b = cx + d$, x est l'inconnue à déterminer.

Méthode :

Si a et b sont deux nombres , alors : $x + a = b$ équivaut à $x = b - a$.

Si a et b sont deux nombres avec $\neq 0$, alors $ax = b$ équivaut à $x = \frac{b}{a}$.

Exemples :

Résoudre l'équation suivante : $x + 5 = 8$

$$x + 5 = 8$$

équivaut à $x = 8 - 5$

d'où $x = 3$

L'ensemble solution S de l'équation est : $\mathbf{S} = \{\mathbf{3}\}$

<u>Vérification au brouillon</u>

Dans l'égalité $x + 5 = 8$ *on remplace* x *par* 3 *dans le membre de gauche de notre égalité on a* $3 + 5 = 8$ *, notre égalité est vérifié donc* 3 *est bien la solution de notre équation .*

Exemple : Résoudre l'équation $3x = -12$

$$3x = -12$$

Équivaut à $x = \frac{-12}{3}$

D'où $\boldsymbol{x = -4}$

Vérification au brouillon

$Dans\ l'égalité\quad 3x = -12\quad on\ remplace\ x\ par\ -4\ \ dans\ le\ membre$

$de\ gauche\ \ de\ notre\ égalité\ \ on\ a\ \ 3(-4) = -12\ \ notre\ égalité\ est\ vérifié$

$donc\ -4\ \ est\ bien\ la\ solution\ de\ notre\ équation\ .$

Remarques :

Une équation du type $0x = 2$ n'admet pas de solution on écrit S est égal l'ensemble vide : $S = \emptyset$.

Une équation du type $0x = 0$ est une équation qui admet une infinité de solution .

Méthodes

$$ax + b = cx + d$$

$$ax - cx = d - b$$

$$x\,(a - c) = d - b$$

$$\frac{(a - c)\,x}{a - c} = \frac{d - b}{a - c}$$

$$\boxed{x = \frac{d - b}{a - c}}$$

$$ax + b = c$$

$$ax = c - b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{c - b}{a}$$

$$\boxed{x = \frac{c - b}{a}}$$

$$15x + 1 = -7x - 6;$$

$$15x + 7x = -6 - 1;$$

$$22x = -7$$

$$\frac{22x}{22} = \frac{-7}{22}$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{-7}}{\mathbf{22}}$$

Résoudre l'équation :

$\frac{\mathrm{x}}{4}-\frac{\mathrm{x}}{5}=1$

$\frac{5x-4x}{4\times5}=1$

$\frac{x}{20}=1$

$\frac{x}{20}\times 20=1\times 20$

$\mathbf{x=20}$

On écrit l'ensemble solution $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{20}\}$

Résoudre l'équation : $5x-1=2a-2$

$5x-1=2a-2$

$5x=2a-2+1$

$5x=2a-1$

$x=\frac{2a-1}{5}$

L'ensemble solution : $\mathbf{S}=\left\{\frac{2a-1}{5}\right\}$

Attention, on écrit pas $\boldsymbol{S}=\{\emptyset\}$ lorsqu'une équation n'admet pas de solution.

<u>Exercice 9.3 :</u> Résolution des équations du premier degré à une inconnue :

1) $5\mathrm{x}=-35$
2) $\frac{1}{6}x=7$
3) $4\mathrm{x}-6=-\mathrm{x}-2$
4) $7(\mathrm{x}+2)-3(5\mathrm{x}+4)=0$
5) $-4(\mathrm{x}-3)+2\mathrm{x}=1-2(\mathrm{x}+1)$
6) $-(2x-3)-(10x+12)=-2(6x+4)-1$
7) $8(3\mathrm{x}-4)=4-(\mathrm{x}+6)$
8) $\frac{5x-1}{3}-\frac{4x+3}{6}=2x$
9) $3\left(2x-\frac{1}{3}\right)-2\left(x+\frac{1}{2}\right)=4x$

Mise en équation :

Il est souvent utile d'employer le calcul littéral pour déterminer la solution d'un problème : On appelle cela une mise en équation.

Exemple :

Problème 1 :

pierre et paul ont ensemble 50 billes. pierre en a 8 de plus que paul.

Combien en ont-ils de billes chacun?

Choix des inconnues :

Appelons x le nombre de billes que possède paul.

Nombre de billes de pierre ''='' au nombre de billes de paul ''+'' 8.

Pierre possède alors $(x+8)$ billes.

Ensemble ils ont 50 billes c'est-à-dire :

(nombre de billes de pierre)+(nombre de billes de paul) ''='' 50

$(x+8) \quad + \quad x \quad = \quad 50$

Résolution de l'équation : $(x+8) + x = 50$

$(x+8) + x = 50$

$x+8 + x = 50$

$2x+8 = 50$

$2x = 50-8$

$2x = 42$

$2 \times x = 42$

$x = \frac{42}{2}$

$\mathbf{x = 21}$

la solution du problème: **Paul a 21 billes et pierre en a (21+8) soit 29 billes .**

Vérification au brouillon

Paul a 21 billes et pierre a 29 billes ensembles ils ont 21+29 = 50

Problème 2 : Trouver un nombre dont le quadruple diminué de 9 est 11.

Choix des inconnues :

Appelons x le nombre cherché.

Mise en équation :

Un doublé : fois 2

Un triplé : fois 3

Un quadruplé : fois 4

Un quintuplé : fois 5

Le quadruple d'un nombre c'est le nombre fois 4 : $x \times 4$

le quadruple du nombre diminué de 9 est : $4x - 9$

le quadruple du nombre diminué de 9 donne 11

$$(4x) \qquad - \qquad 9 \quad = \quad 11$$

Résolution d l'équation : $4x - 9 = 11$

$4x - 9 = 11$

$4x = 11 + 9$

$4x = 20$

$4 \times x = 20$

$x = \frac{20}{4}$

$\mathbf{x = 5}$

Solution du problème **: le nombre cherché est 5 .**

Problème 3 : Le double d'un nombre est 34. Quel est ce nombre ?

Problème 4 : Quel est le nombre dont les deux tiers sont égaux à 16 ?

Problème 5 : On augmente un nombre de 25 et on trouve 49. Quel est ce

Ce nombre ?

Problème 6 : Partager 4800 F entre deux personnes de telle sorte que la part de la seconde soit égale au triple de la part de la première.

Problème 7 : En multipliant un nombre par 5 puis en enlevant 15, on obtient le même résultat que si on lui avait ajouté 13.

Problème 8 : Un enfant a 12 ans, alors que son père est trois fois plus âgé.

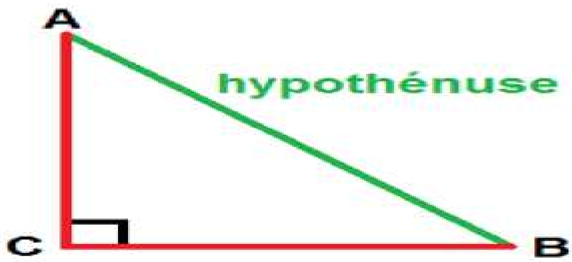
Décider s'il est possible qu'un jour ce père soit seulement deux fois plus âgé que son enfant.

Si c'est possible, trouver dans combien d'années ce sera le cas.

Thème 10 : Pythagore et racines carrées

I.Le triangle rectangle

Rappel : Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse, c'est aussi le côté le plus long du triangle rectangle.



ACB est un triangle rectangle en C . [AC] et [CB] sont les côtés de l'angle droit.

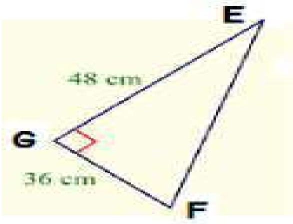
II. Propriété (théorème) de Pythagore

La propriété (théorème) de Pythagore permet de calculer la longueur d'un des côtés d'un triangle rectangle si on connaît les longueurs des deux autres côtés.

Propriété : Dans un triangle rectangle , le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des autres côtés de l'angle droit .

Exemple 2

EFG est triangle rectangle en G .Calculer la longueur EF



EGF est rectangle en G d'après la propriété de Pythagore .

$EF^2 = EG^2 + GF^2$

On a EG=48 cm et GF=36 cm

D'où $EF^2 = 48^2 + 36^2$

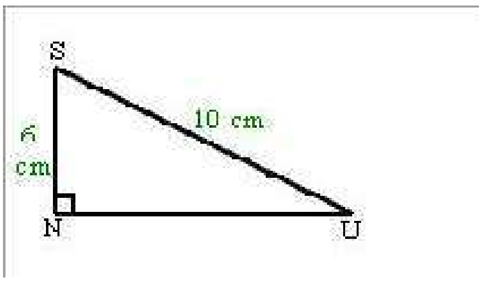
$EF^2 = 2304 + 1296$

$EF^2 = 3600$

Ainsi $EF = \sqrt{3600}$ avec la calculatrice on obtient $\boldsymbol{EF = 60}$ **cm**

Exemple 3

SNU est triangle rectangle en N .Calculer la longueur NU



SNU est rectangle en N d'après la propriété de Pythagore .

$NU^2 + NS^2 = SU^2$

On a NS=6 cm et SU=10 cm

Ainsi $NU^2 + NS^2 = SU^2$

$NU^2 + 6^2 = 10^2$

$NU^2 + 36 = 100$

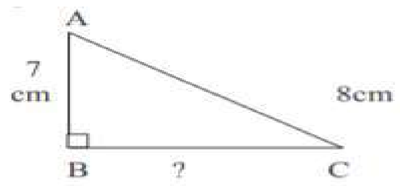
$NU^2 = 100 - 36$

$NU^2 = 64$

$NU = \sqrt{64}$; $NU = \sqrt{8^2}$; **NU=8**

Exemple 4

ABC est triangle rectangle en B .Calculer la longueur BC



ABC est triangle rectangle en B d'après la propriété de Pythagore .

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

On a AB=7 cm et AC=8 cm

Ainsi $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$7^2 + BC^2 = 8^2$

$49 + BC^2 = 64$

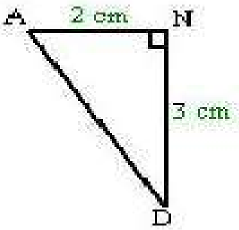
$BC^2 = 64 - 49$

$BC^2 = 15$

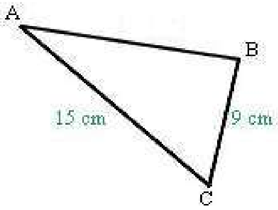
$\boldsymbol{BC = \sqrt{15}}$ (valeur exacte) ; $\boldsymbol{BC = 3,87}$**cm** (valeur approchée)

Exercice 10.1

1) Calculer AD

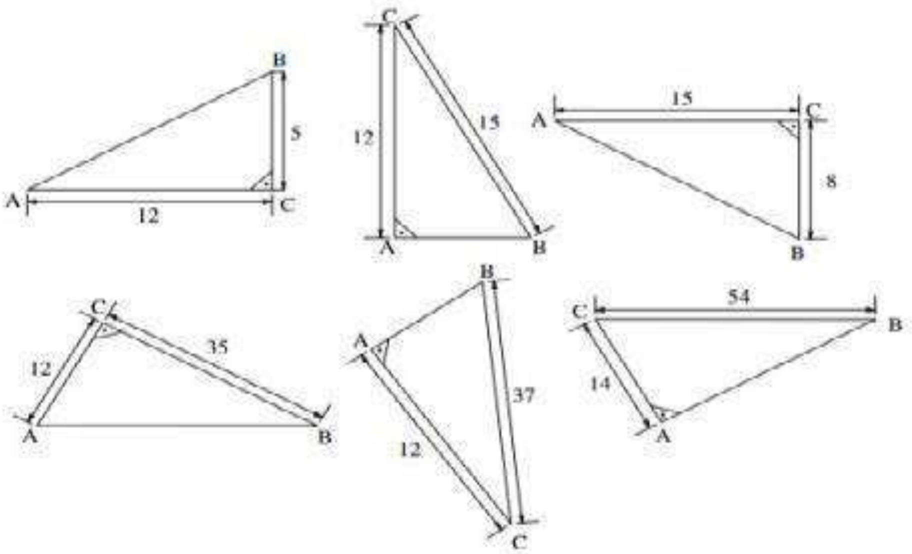


2) ABC rectangle en B , Calculer AB



Exercice 10.2

Calculer la longueur du côté [AB] de chacun des triangles rectangles suivants:



Réciproque de la propriété (théorème) de Pythagore

Activité : Voici les mesures des côtés d’un triangle : 20 cm, 25 cm et 15 cm. S’agit-il d’un triangle rectangle?

Voyons si le triangle vérifie la relation de Pythagore: a-t-on ?

$20^2 + 15^2 = 25^2$

En calculant séparément on a $20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$ et $25^2 = 625$

Puisque $20^2 + 15^2 = 25^2$

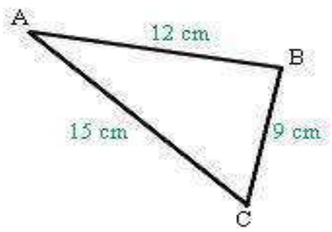
Ce triangle vérifie la relation de Pythagore. Donc, il s'agit d'un triangle rectangle.

Réciproque de la propriété de Pythagore :

Si dans un triangle le carré du plus grand coté est égal à la somme des carrés des deux petits cotés alors le triangle est rectangle.

Remarque : si la réciproque de la propriété de Pythagore n'est pas vérifiée alors le triangle n'est pas rectangle (c'est la contraposée de la propriété de Pythagore) .

Exemple réciproque de la propriété (théorème) de Pythagore



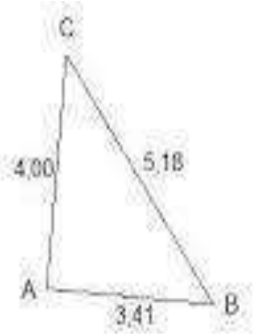
Pour démontrer que le triangle ABC est rectangle, on calcule séparément AC^2 et $AB^2 + BC^2$.

$AC^2 = 15^2 = 225$

$AB^2 + BC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$, donc

$AB^2 + BC^2 = AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Phytagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Exemple la contraposée de la propriété (théorème) de Pythagore



$BC^2 = 5,18^2 = 26.8324$

$AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3,41^2 = 16 + 11,6281 = 27,6281$

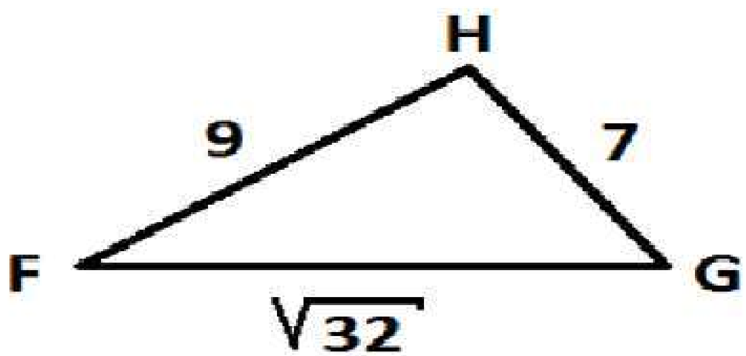
Comme $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

Attention : il n y a pas d'arrondie possible !

Exercice 10.2

1)

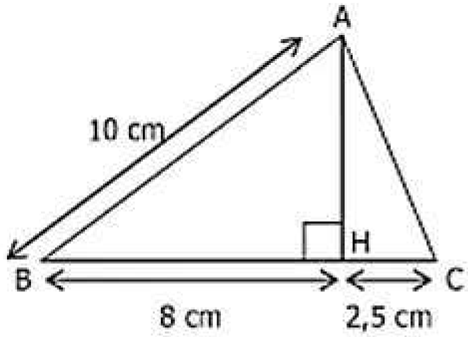
Le triangle FGH est-il un triangle rectangle ?



3) Un triangle ABC est tel que : AB=6cm , BC=4,5 cm et AC=7,5cm . Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
4) Un triangle MNP est tel que : MN= 3cm , MP= 5 cm et NP= 5,8cm . MNP est –il un triangle rectangle ?
5) Un triangle IJK est tel que : IJ=21cm , JK=34 cm et KI=28cm . IJK est –il un triangle rectangle ?

Exercice 10.3

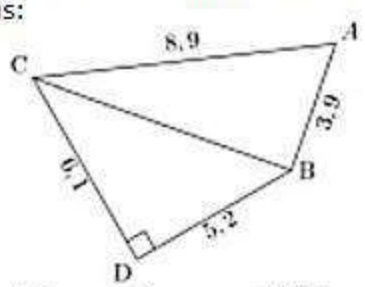
(AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A.



a. Calculer la longueur AH.
b. En déduire la longueur AC.
c. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Exercice 10.4

On considère les deux triangles ABC et BCD ci-dessous:



1) Calculer la longueur du segment $[BC]$ arrondie au dixième près.

2) Le triangle ABC est-il rectangle?

III. Les racines carrées

Rappels

A l'aide des identités remarquables développer :

$(1+\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2(\sqrt{5})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = \ 5 - 2\sqrt{5 \times 3} + 3$

$= 8 - 2\sqrt{15}$

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$

L'expression conjuguée

Règle : Le conjugué de l'expression a + b est a- b et le conjugué de l'expression a-b est a+b.

Exemple

Le conjugué de $1+\sqrt{2}$ est $1-\sqrt{2}$.

Le conjugué de $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ est $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Le conjugué de $2+3\sqrt{2}$ est $2-3\sqrt{2}$.

L'expression conjuguée permet de rendre rationnel le dénominateur d'une fraction contenant des radicaux.

En règle générale on n'écrit pas les racines carrées au dénominateur des fractions.

Lorsqu'il y a une racine carrée au dénominateur d'une fraction, on doit multiplier le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

Le conjugué de $\sqrt{2}+1$ est $\sqrt{2}-1$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{10\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{10\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{10\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{10\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = \frac{10}{2}\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$$

$$\frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = 5\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{5}+5\sqrt{3}$$

Exercice 10.3 Rendre rationnel le dénominateur de chacune des fractions suivantes

$$A=\frac{2}{2+\sqrt{3}} \ ; \ B=\frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}} \ ; \ C=\frac{6}{2-\sqrt{3}} \ ; \ E=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \ ; \ G=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Thème 11 : Equations dans IR et IR x IR

I. Equations de type Produit nul

Un produit des facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0 \quad ou \quad B = 0$

$A \times B \times C = 0$ si et seulement si $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$

Exemple :

Résoudre l'équation : $(x + 5)(8x + 2) = 0$

Ce produit de facteur est nul si et seulement si :

$$x + 5 = 0 \quad ou \quad 8x + 2 = 0$$

La résolution de cette équation se fait en ligne

$$x + 5 = 0 \quad ou \quad 8x = 0 - 2$$

$$x + 5 = 0 \quad ou \quad 8x = -2$$

$$x + 5 = 0 \quad ou \quad 8 \times x = -2$$

$$x = 0 - 5 \quad ou \quad x = \frac{-2}{8}$$

$$x = 0 - 5 \quad ou \quad x = \frac{-2 \div 2}{8 \div 2}$$

$$x = -5 \quad ou \quad x = \frac{-1}{4}$$

L'ensemble solution de cette équation est : $\boldsymbol{S = \left\{-5 \; ; \frac{-1}{4}\right\}}$

Exemple : Résoudre l'équation $(x^2 - 4x) + x - 4 = 0$

Factorisons d'abord l'équation :

$(x^2 - 4x) + (x - 4) \times 1 = 0$

$x(x - 4) + (x - 4) \times 1 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

Nous obtenons une équation de type produit nul , $(x - 4)(x + 1) = 0$

Ainsi $x - 4 = 0 \quad ou \quad x + 1 = 0$

$x = 0 + 4 \quad ou \quad x = 0 - 1$

$x = 4 \quad ou \quad x = -1$

L'ensemble solution de cette équation est : $\boldsymbol{S = \{4\ ;\ -1\}}$

Exemple : Résoudre l'équation $x^2(x-3) - 2x(x-3) = 0$

On a $(x-3)(x^2-2x) = 0$

en factorisant $x^2 - 2x = x(x-2)$ l'équation devient :

$x(x-2)(x-3) = 0$

On a $x = 0\ ;\ x - 2 = 0\ ;\ x - 3 = 0$

$x = 0\ ; \quad x = 0 + 2\ ; \quad x = 0 + 3$

$x = 0\ ; \quad x = 2\ ; \quad x = 3$

L'ensemble solution de cette équation est : $\boldsymbol{S = \{0\ ;2;\ 3\}}$

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$

On a $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$x^2 - 2x + 1 = 0$ équivaut à $(x-1)^2 = 0$

Soit $(x-1)(x-1) = 0$

On a $x - 1 = 0\ ;\ x = 1$

L'ensemble solution de cette équation est : $\boldsymbol{S = \{1\}}$

Exercice 11.1 Résoudre les équations suivantes :

1) $(2x-1)(x-5) = 0$

2) $(4x-5)(6x+5) = 0$

3) $(x+5)(x^2-4) = 0$

4) $x(x+1) + 2(x+1) = 0$

5) $8x(x-3) + 2(3-x) = 0$

II. Système d'équations du premier degré à deux inconnues

Une équation du premier degré à deux inconnues x et y est une équation de la forme $ax + by = c$.

En général cette équation possède plusieurs solutions.

Résolution d'un système d'équation à deux inconnues.

Méthode d'addition : $\begin{cases} x + y = 7 \\ -2x + 3y = 11 \end{cases}$

On a $\begin{cases} x + y = 7 & (L1) \\ -2x + 3y = 11 & (L2) \end{cases}$

Eliminons x , pour cela on s'arrange à ce que les valeurs (ou coefficients) devant x des deux lignes soient opposés.

$$2 \times L1 \ \ donne\ 2 \times x + 2 \times y = 2 \times 7$$

$$\underline{1 \times \mathrm{L2}\ \ \mathrm{donne}\ \ -2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 11}$$

$$2L1 \quad donne \quad 2x + 2y = 14$$

$$\underline{1\mathrm{L2} \quad \mathrm{donne} \quad -2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 11}$$

$$2L1 + L2 \quad donne \quad 0 + 5y = 14 + 11$$

Soit $5y = 25$

$$y = \frac{25}{5}$$

$$y = 5$$

Eliminons y , pour cela on s'arrange à ce que les valeurs (ou coefficients) devant y des deux lignes soient opposés.

$$-3 \times L1\ donne \quad -3 \times x + (-3) \times y = -3 \times 7$$

$$\underline{1 \times \mathrm{L2}\ \ \mathrm{donne} \qquad -2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 11}$$

On a $-3L1 \quad donne \quad -3x - 3y = -21$

$$\underline{1\mathrm{L2} \quad \mathrm{donne} \quad -2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 11}$$

$$-3L1 + 1L2\ \ donne \quad -5x + 0 = -21 + 11$$

Soit $-5x = -10$

$$x = \frac{\mathbf{-10}}{\mathbf{-5}}$$

$$x = 2$$

Vérifions que le couple $(x = 2\ ;\ y = 5)$ est solution de chaque équation du Système :

Première ligne : $x + y = 7$ on remplace x par 2 et y par 5 on a

2+5 =7

Deuxième ligne : $-2x + 3y = 11$ on remplace x par 2 et y par 5 on a

-2(2)+3(5) = -4+15 = 11

Le couple $(\boldsymbol{x = 2\ ;\ y = 5})$ doit vérifier chaque équation du système.

L'ensemble solution du système est : $\mathbf{S} = \{(\mathbf{x} = \mathbf{2}\ ; \mathbf{y} = \mathbf{5})\}$

Exercice 11.2 Résoudre les systèmes d'équations à deux inconnues, par méthode d'addition :

1) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ 5x + 2y = 26 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 5y = 48 \\ 7x + y = 132 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3(x + y) - 2(x - y) = 48 \\ 4(x + y) + 3(x - y) = 132 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x + 3y = -4 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \sqrt{2}\, x + \sqrt{3}\, y = -10 \\ x + \sqrt{2}\, y = 2 \end{cases}$

III. Mise en équation d'un problème :

Problème : Pierre dit à Jean : « Si tu me donnes 5 billes, j'en aurai autant que toi. » Jean lui répond : « Si c'est toi qui m'en donnes 5, j'en aurai le double de toi. » Combien ont-ils de billes chacun?

Résolution : Choix des inconnues

p : Nombre de billes de pierre

j : Nombre de billes de jean

Jean donne 5 billes à pierre il en a donc j -5 et pierre en a maintenant p+5

Après cet échange :

Nombre de billes de pierre = Nombre de billes de jean

p+5 = j -5

On a l'équation p- j = - 5-5

p-j = -10 (1)

Jean répond : « Si c'est toi qui m'en donnes 5, j'en aurai le double de toi.

Pierre donne 5 billes à jean , pierre en a P-5 et jean en a J+5

Après cela jean possède le double de pierre c'est-à-dire : J+5= 2× (P-5) ou

2× (P-5) = J+5

On obtient le système suivant : $\begin{cases} p-j=-10 \\ 2\times(p-5)=j+5 \end{cases}$

Système équivalent : $\begin{cases} p-j=-10 \\ 2p-10-j=5 \end{cases}$ on a $\begin{cases} p-j=-10 \\ 2p-j=5+10 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} p-j=-10 \\ 2p-j=15 \end{cases}$

Résolution par la méthode d'addition :

$\begin{cases} p-j=-10 \quad (l1) \\ 2p-j=15 \quad (l2) \end{cases}$

Eliminons j :

$-1\times(l1) \qquad donne \quad -p+j=10$

$\underline{1\times(\mathrm{l}2) \qquad \text{donne} \quad 2\mathrm{p}-\mathrm{j}=15}$

$-1\times(l1)$ +(l2) donne $-p+2p+0=10+15$

$p=25$

Eliminons p :

$-2\times(l1) \qquad donne \quad -2p+2j \quad =-2(-10)$

$\underline{1\times(\mathrm{l}2) \qquad \text{donne} \quad 2\mathrm{p}-\mathrm{j} \quad =15}$

$-2\times(l1)$ +(l2) donne $0+j=20+15$

$j=35$

Solution : pierre a 25 billes et jean en a 35.

Exercice 11.3

Dans mon coffre, j'ai des pièces de 25 fr et des pièces de 50 fr, soit 150 pièces en tout. Combien ai-je de pièces de chaque sorte, sachant que j'ai 5400 fr?.

Exercice 11.4

Il y a 6 ans, Jean avait 4 fois l'âge de Marie. Dans 4 ans, Jean aura 2 fois l'âge de Marie. Quel âge ont-ils maintenant?

Exercice 11.5

Un rectangle a 76 cm de périmètre. Si sa largeur était diminuée de 3 cm et sa longueur augmentée de 1 cm, son aire diminuerait de 65 cm^2 . Calculer les dimensions de ce rectangle.

Exercice 11.6

Charles a 10 ans de plus que Diane. Dans 5 ans, Diane aura les 2/3 de l'âge de Charles. Déterminer l'âge de Charles et celui de Diane.

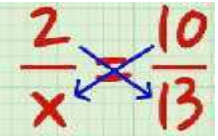
Thème 12 : Equations dans IR et Thales

I. Le produit en croix

Soient a, b, c et des nombres relatifs non nul

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$

Présentation :



on a $10 \times x = 2 \times 13$; $10 \times x = 26$; $x = \frac{26}{10}$; $x = \frac{13}{5}$

Exemples : Résoudre les équations suivantes

$\frac{7}{x} = \frac{49}{28}$ équivaut à $49 \times x = 7 \times 28$

$$49 \times x = 196$$

$$x = \frac{196}{49}$$

On a $x = 4$

L'ensemble solution est : $\mathbf{S} = \{\mathbf{4}\}$

$\frac{15}{60} = \frac{x}{11}$ équivaut à $60 \times x = 15 \times 11$

$$60 \times x = 165$$

$$x = \frac{165}{60}$$

On a $x = 2{,}75$

L'ensemble solution est : $\mathbf{S} = \{\mathbf{2{,}75}\}$

$\frac{7}{x+4} = \frac{21}{60}$ équivaut à $21 \times (x + 4) = 7 \times 60$

$$21 \times x + 21 \times 4 = 7 \times 60$$

$$21x + 84 = 420$$

$$21x = 420 - 84$$

$$21x = 336$$

$$x = \frac{336}{21}$$

On a $\quad x = 16$

L'ensemble solution est : $\mathbf{S} = \{\mathbf{16}\}$

Exercice 12.1 : Résoudre les équations suivantes

1) $\frac{x}{5} = 50$

2) $\frac{2}{3} = \frac{x}{12}$

3) $\frac{5}{4} = \frac{25}{x}$

4) $\frac{x}{6} = \frac{9}{54}$

5) $\frac{x-5}{23} = \frac{36}{92}$

6) $\frac{5x-8}{5} = \frac{18}{45}$

7) $\frac{4}{3x-11} = \frac{36}{63}$

8) $\frac{2x+5}{x-7} = 2$

9) $\frac{x+3}{2} = \frac{x+1}{4}$

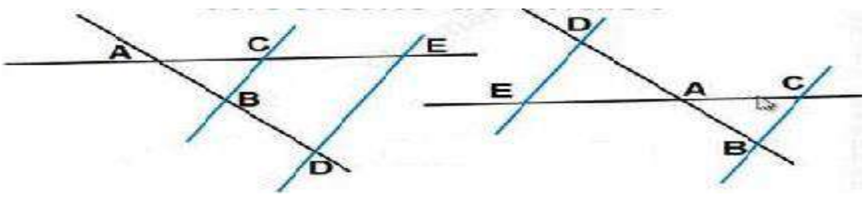
10) $\frac{3-x}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{5x}{4}$

II. Propriété (théorème) de Thales .

La propriété de Thales permet de calculer les longueurs dans certaines configurations géométriques.

<u>Propriété de Thales dans le triangle.</u>

Types de figures :



<u>Propriété de Thales .</u>

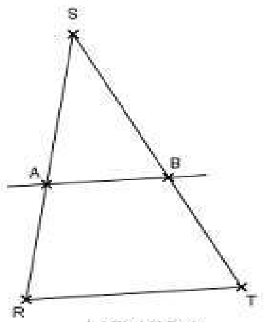
Si les points A , B , D sont alignés et si A , C et E sont alignés et si les droites (BC) et (DE) sont parallèles alors :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

1) $\frac{cotés\ du\ petit\ triangle}{cotés\ du\ grand\ triangle}$

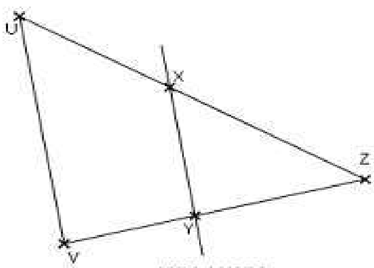
2) S’assurer de l’alignement des points.

Exercice 12.2 : Compléter les égalités ci-dessous



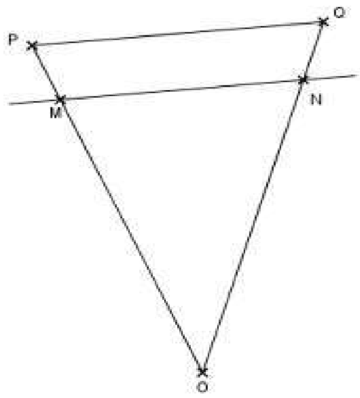
$(AB)//(RT)$

$$\frac{SA}{SR} = \frac{SB}{...} = \frac{...}{RT}$$



$(XY)//(UV)$

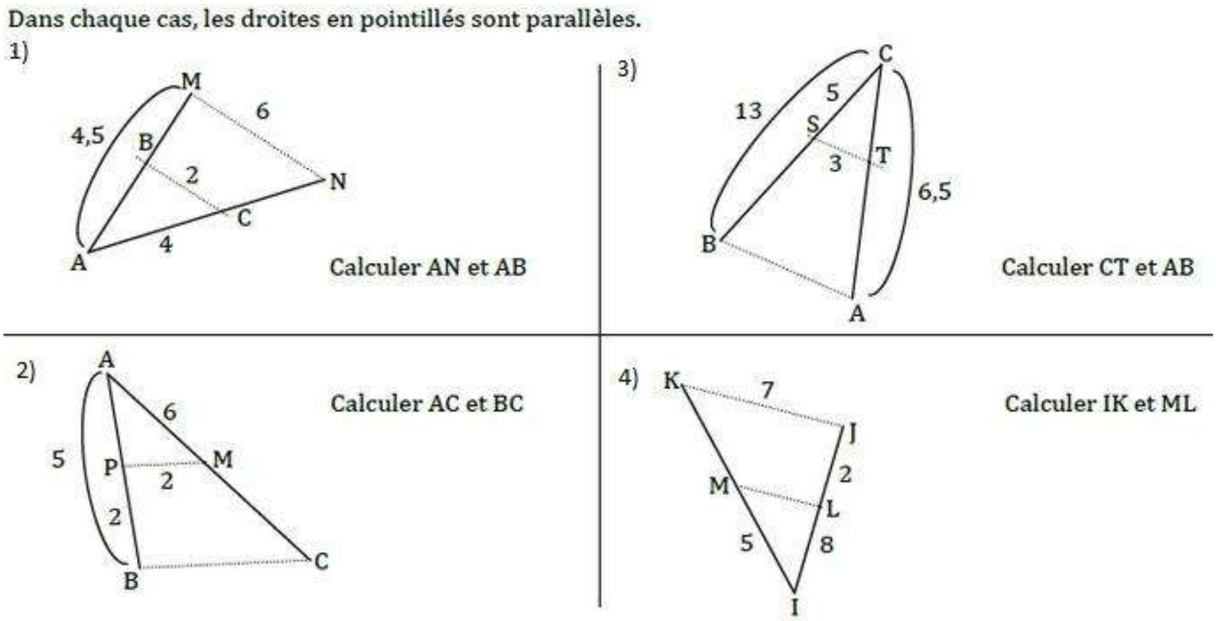
$$\frac{ZY}{ZV} = \frac{ZX}{...} = \frac{...}{UV}$$



$(MN)//(PQ)$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{ON}{...} = \frac{...}{PQ}$$

Exemples : l’unité de longueur est le centimètre



Exemples : l’unité de longueur est le centimètre

1) dans le triangle AMN on a :

$B \in (AM)$,

$C \in (AN)$

(BC) // (MN)

On a $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$ d’après la propriété de Thales relative aux triangles.

$\frac{AB}{4,5} = \frac{4}{AN} = \frac{2}{6}$ on a $\frac{AB}{4,5} = \frac{2}{6}$ et $\frac{4}{AN} = \frac{2}{6}$

$$6 \times AB = 2 \times 4,5 \quad \text{et} \quad 2 \times AN = 4 \times 6$$

$$6 \times AB = 9 \quad \text{et} \quad 2 \times AN = 24$$

$$AB = \frac{9}{6} \quad \text{et} \quad AN = \frac{24}{2}$$

$$AB = 1,5 \quad \text{et} \quad AN = 12$$

2) dans le triangle ABC on a :

$P \in (AB)$,

$M \in (AC)$

(PM) // (BC)

On a $\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{PM}{BC}$ d’après la propriété de Thales relative aux triangles.

$$\frac{AP}{5} = \frac{6}{AC} = \frac{2}{BC} \quad ; \quad \frac{5-2}{5} = \frac{6}{AC} = \frac{2}{BC} \quad ; \quad \frac{3}{5} = \frac{6}{AC} = \frac{2}{BC}$$

on a $\frac{3}{5} = \frac{6}{AC}$ et $\frac{3}{5} = \frac{2}{BC}$

$$3 \times AC = 5 \times 6 \quad \text{et} \quad 3 \times BC = 2 \times 5$$

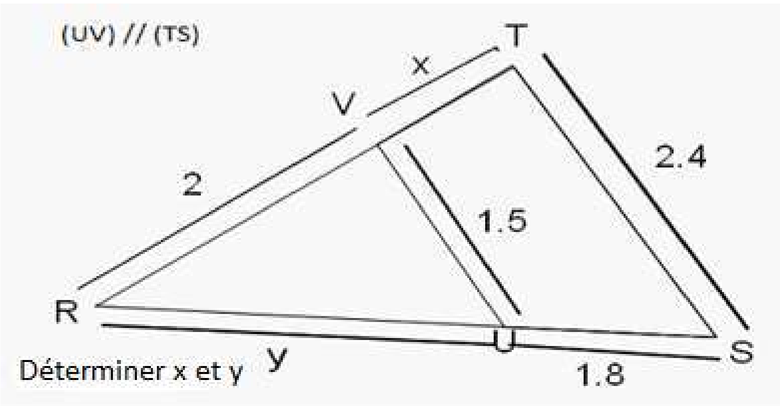
$$3 \times AC = 30 \quad \text{et} \quad 3 \times BC = 10$$

$$AC = \frac{30}{3} \qquad \text{et} \qquad BC = \frac{10}{3}$$

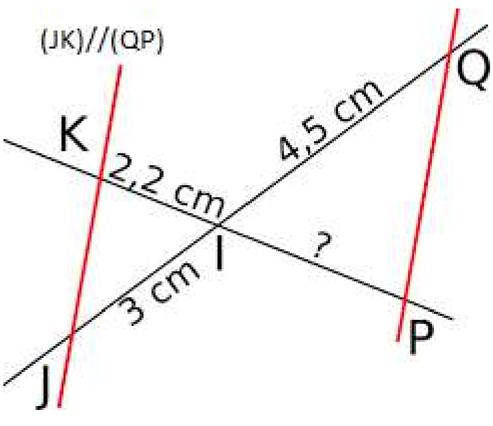
$$\boldsymbol{AC = 10 \quad \text{et} \quad BC = \frac{10}{3}}$$

Exercice 12.3 : Traiter les questions 3) et 4) .

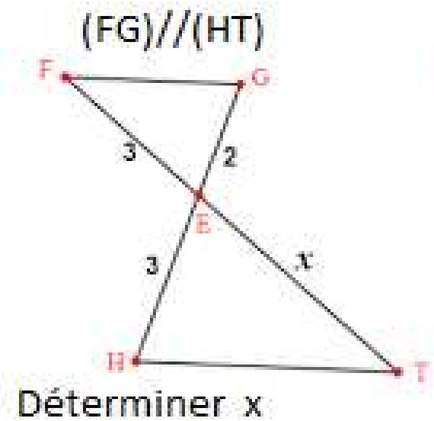
Exercice 12.4 : l'unité de longueur est le centimètre

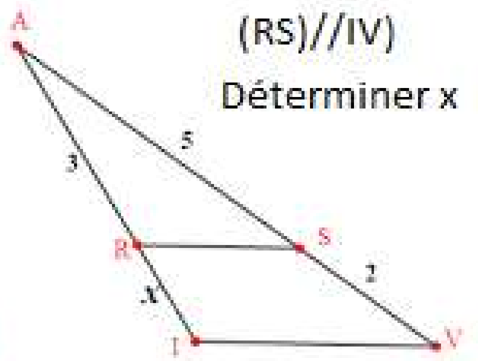


Exercice 12.5 :



Exercice 12.6 : l'unité de longueur est le centimètre





Exercice 12.7 :

Soit ABC un triangle tel que : AB= 10 cm ; AC= 7,5 cm et BC=12,5 cm.

1) Montrer que ABC est rectangle en A.

2) Soit E un point du segment [AB] tel que AE= 2 cm .

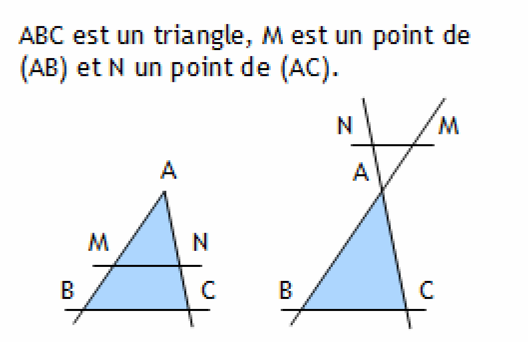
La perpendiculaire à (AB) passant par E coupe (BC) en F.

a) Montrer que (AC) et (EF) sont parallèles .

b) Calculer les distances BE, EF et BF .

III. Réciproque de la Propriété (ou théorème) de Thales dans le triangle.

Propriété :



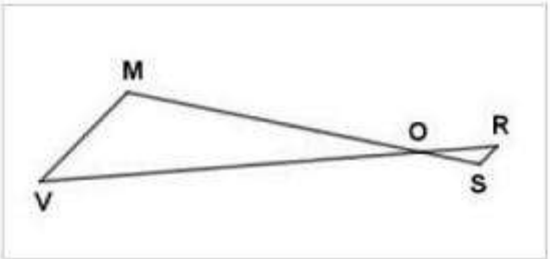
Si l'égalité suivante est vérifiée $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, M , B d'une part et les points A ; N et C sont alignés dans le même ordre, alors (MN)// (BC)

Si la réciproque de la propriété de Thales n'est pas vérifiée on dit les droites ne sont pas parallèles (c'est la contraposée de la propriété de Thales)

Pour la contraposée on prendra soin de vérifier l'égalité des quotients ou l'ordre d'alignement des points.

Exemples

Sur la figure ci-dessous,



$MO = 7.5\ cm$, $OV = 18\ cm$, $OS = 1.5\ cm$ et $OR = 3.6\ cm$, $RS = 3\ cm$.

1) Montre que les droites (MV) et (RS) sont parallèles.

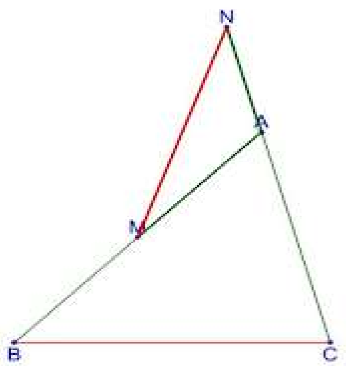
Parallélisme de (MV) et (RS)

Calculons $\frac{RO}{OV} = \frac{3{,}6}{18} = \frac{1}{5}$ et $\frac{SO}{OM} = \frac{1{,}5}{7{,}5} = \frac{1}{5}$ ainsi $\frac{RO}{OV} = \frac{SO}{OM} = \frac{1}{5}$

Les points R, O , V sont alignés dans cet ordre et les points S, O, M sont aussi dans cet ordre et comme $\frac{RO}{OV} = \frac{SO}{OM} = \frac{1}{5}$ **d'après la réciproque de la propriété de Thales les droites (MV) et (RS) sont parallèles.**

Exemple : l'unité de longueur est le centimètre

AM=6,55 , AN= 4,9 puis AB=13,1 et AC= 9,8



Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles

Calculons $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{AM}{AB}$

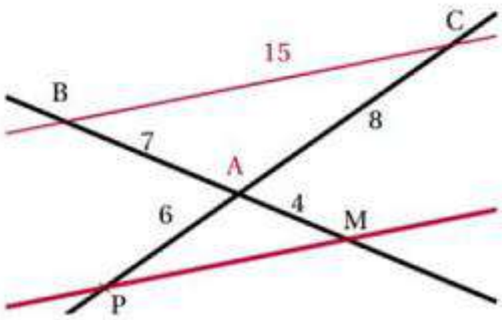
$\frac{AN}{AC} = \frac{4,9}{9,8} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{6,55}{13,1} = \frac{1}{2}$ on a $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$ les points A, M, B et les points A, N, C ne sont pas alignés dans le même ordre , d'après la contraposée de la propriété de Thales les droites (MN) et (BC) ne sont parallèles .

Exemple : l'unité de longueur est le centimètre

Les droites (BM) et (PC) sont sécantes en A .

AB=7 , AM=4 , AP=6 , AC=8

Les droites (BC) et (PM) sont-elles parallèles ?



Calculons

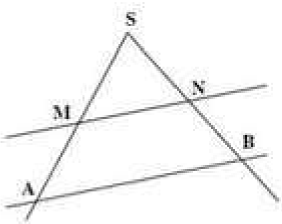
$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{7}$ et $\frac{AP}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $\frac{4}{7} \neq \frac{3}{4}$ donc $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AP}{AC}$.

Les points M,A, B sont alignés dans cet ordre , les points P, A , C sont alignés dans le même ordre et $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AP}{AC}$ d'après la contraposée de la réciproque de la propriété de Thales les droites (BC) et (PM) ne sont pas parallèles .

Exercice 12.8 : l'unité de longueur est le centimètre.

On donne SM=4, SA=12, SN=6 et SB=18

Les droites (AB) et (MN) sont –elles parallèles ?



Exercice 12.9 : l'unité de longueur est le centimètre.

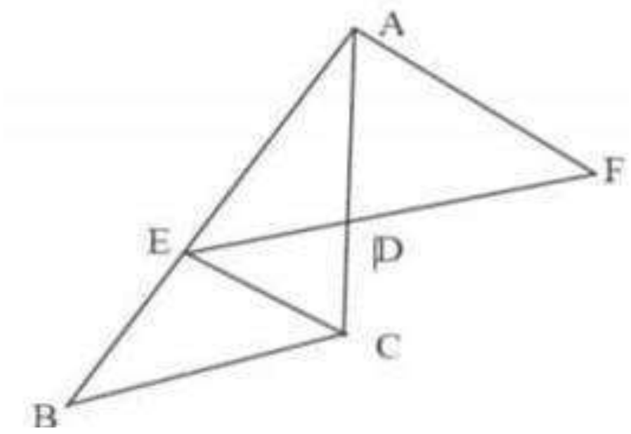
1) Soit ABC un triangle , la droite (ED) est parallèle à la droite (BC).

2) On donne AE=BC=3 et EB=AD=2.

Calculer AC, DC et ED.

3) F est un point de (DE) tel que DF= 2,7

Les droites (EC) et (AF) sont-elles parallèles ?



Exercice 12.10 : l'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-contre

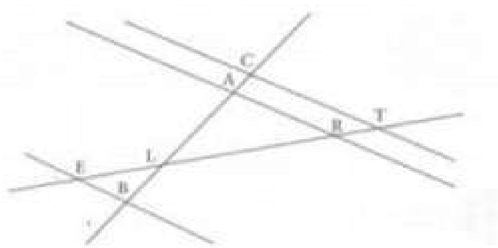
Les droites (AR) et (CT) sont parallèles.

Les points E, L, R, T et C, A, L, B sont alignés dans l'ordre respectif

On a également, LC = 6 ; LT = 9 ; LA = 4,8 ; LB = 1,5 et LE = 3

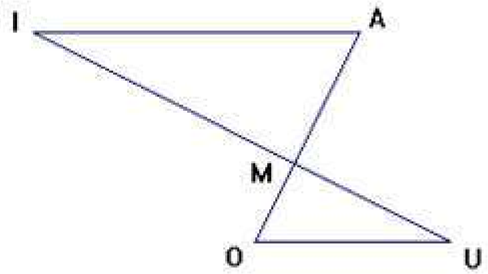
1) Calculer LR

2) Déterminer si les droites (EB) et (CT) sont parallèles



Exercice 12.11 :

Sur la figure ci-dessous :
Les segments [OA] et [UI] se coupent en M.
MO = 21, MA = 27, MU = 28, MI = 36 et AI = 45.
L'unité de longueur est le millimètre.



1° Prouver que les droites (OU) et (AI) sont parallèles.
2° Calculer la longueur OU.
3° Prouver que le triangle AMI est rectangle.

Exercice 12.12 :

1° Construire un triangle ABC tel que
AB = 6 cm AC = 7,2 cm et BC = 10 cm
Placer les points R, T et E tels que :
R $\in$ [AB] et AR = 4,5 cm
T $\in$ [AC] et (RT) // (BC)
E $\in$ [AB) et E $\notin$ [AB] et BE = 2 cm

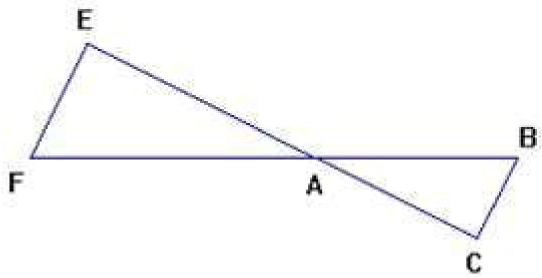
2° Calculer, en justifiant chaque réponse, les longueurs AT, TR et AE.

3° Les droites (BT) et (CE) sont elles parallèles ?
Justifier la réponse.

Exercice 12.13 :

On considère la figure ci-dessous pour laquelle :
Les points E, A et C sont alignés ;
Les points F, A et B sont alignés ;
AF = 12 cm, AC = 5 cm, AB = 7,5 cm et AE = 8 cm.

La figure n'est pas à reproduire.



1° Montrer que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
2° Calculer la longueur EF sachant que BC = 5,5 cm.
Justifier la réponse.
3° Le triangle ABC est-il rectangle en C ? Justifier la réponse.

Thème 13 : Ordre et inéquations

I. Les signes d'inégalités

$\leq$: Lire inférieur ou égal à

$\geq$: Lire supérieur ou égal à

$<$: Strictement inférieur à

$>$: strictement supérieur à

Remarque :

Le signe inférieur peut-être symbolisé par « le bras gauche coudé »

Le signe supérieur peut-être symbolisé par « le bras droit coudé »

II. Propriétés des inégalités.

1- Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ ou encore $a - c \leq b - c$

2- si $a \leq b \ \ et \ \ c > 0$ alors $a \times c \leq b \times c$

3- Si $a \leq b \ \ et \ \ c < 0$ alors $a \times c \geq b \times c$ ou encore $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Ces propriétés sont aussi valables avec les signes $'' \geq ''$, $'' > ''$ et $'' < ''$

Applications :

$-6 \leq 9$

ajoutons 4 à chaque membre on a $-6 + 4 \leq 9 + 4$

d'où $\mathbf{-2 \leq 13}$ **.**

$-6 \leq 9$

En soustrayant 2 à chaque membre on a $-6 - 2 \leq 9 - 2$

d'où $\mathbf{-8 \leq 7}$ **.**

$-6 \leq 9$

Multiplions chaque membre par 3 on a $3 \times (-6) \leq 3 \times 9$

d'où $-18 \leq 27$

$-6 \leq 9$

Multiplions chaque membre par (-1) on a $-1 \times (-6) \geq -1 \times 9$

d'où $\mathbf{6 \geq -9}$

On donne $-6 \leq 9$

Divisons chaque membre par (-3) : $\frac{-6}{-3} \geq \frac{9}{-3}$

d'où $2 \geq -3$

III. Les inéquations du premier degré dans IR

Présentation :

L'inégalité suivante $2x + 3 < x - 4$ est une inéquation .

Résolution de l'inéquation (méthode) :

$2x + 3 < x - 4$

$2x - x < -4 - 3$

$x < -7$

[/////////// ,

-7

On déduit que l'ensemble solution est l'intervalle ouvert de moins l'infini $(-\infty)$ à -7

Noté **S=]$-\infty$; -7[**

Résoudre l'inéquation $x + 4 \leq 2x - 2$

$x + 4 \leq 2x - 2$

$x - 2x \leq -2 - 4$

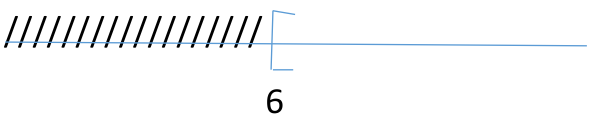
$-x \leq -6$

$-1 \times x \leq -6$

On va multiplier l'inégalité par (-1)

On a $-1 \times (-1) \times x \geq -1 \times (-6)$

$x \geq 6$



L'ensemble solution est l'intervalle fermé-ouvert de 6 à $(+\infty)$, noté :

$\mathbf{S} = [\mathbf{6}\,; +\infty[$

Exemple : Résoudre l'inéquation $2x + 2 < 2x - 4$

$2x + 2 < 2x - 4$

$2x - 2x < -4 - 2$

$0 < -6$, impossible

Donc l'inéquation n'admet pas de solution on note $\boldsymbol{S} = \emptyset$ **.**

Exemple : Résoudre l'inéquation $2x + 2 > 2x - 4$

$2x + 2 > 2x - 4$

$2x - 2x > -4 - 2$

$0 > -6$, toujours vraie

L'ensemble des nombres réels noté IR est l'ensemble solution de l'inéquation.

On écrit **S= IR .**

$IR =]-\infty\,; +\infty[$

Rappel :

Quand on doit additionner ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inéquation on ne change pas le sens de l'inégalité.

Quand on doit multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement positif on ne change pas le sens de l'inégalité.

Quand on doit multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement négatif on change le sens de l'inégalité.

Avant de donner l'ensemble solution, penser à tracer un axe gradué.

Hachurer la partie ne correspondant pas à l'ensemble solution.

L'ensemble solution est donné sous forme d'intervalle.

Exercice : 13.1 Résoudre les inéquations suivantes dans IR

1) $x + 1 \geq -4$

2) $2x \geq 6$

3) $-3x < 12$

4) $-3x + 5 < 0$

5) $2x + 3 \geq 5x + 7$

6) $2x + 5 \geq x - 1$

7) $-x + 5 > 2x - 7$

8) $\frac{x}{2} \leq 3x + 5$

9) $2(x + 1) > 8 + 3x$

III. Mise en inéquation d'un problème.

Un bureau de recherche emploie 27 informaticiens et 15 mathématiciens.

On envisage d'embaucher le même nombre x d'informaticiens et de mathématiciens.

Combien faut-il embaucher de spécialistes de chaque sorte pour que le nombre de mathématiciens soit au moins égal au deux tiers du nombre d'informaticiens.

Résolution.

Choix de l'inconnu :

Soit x le nombre de mathématiciens et d'informaticiens de chaque sorte.

Informaticien : 27

Mathématicien : 15

On embauche x informaticiens et mathématiciens, on aura donc :

Informaticien : 27+x

Mathématicien : 15 +x

Après embauche :

Nombre de mathématicien $\geq \frac{2}{3}$ du nombre d'informaticien

$$(15 + x) \geq \frac{2}{3} \times (27 + x)$$

Résolution de l'inéquation :

$(15 + x) \geq \frac{2}{3} \times (27 + x)$

Multiplions chaque membre par trois .

$3 \times (15 + x) \geq 3 \times \frac{2}{3}(27 + x)$

$45 + 3x \geq \frac{6}{3}(27 + x)$

$45 + 3x \geq 2(27 + x)$

$45 + 3x \geq 54 + 2x$

$3x - 2x \geq 54 - 45$

$x \geq 9$

Solution :

Le bureau doit embaucher au moins 9 mathématiciens et 9 informaticiens.

Exercice : 13.2 Mise en inéquation.

1) Un camion pèse à vide deux tonnes et doit passer sur pont limité à 6 tonnes.

Combien de caisses de 118kg chacune peut-il transporter ?

2) Paul a 32 ans et Jean a 5 ans. Pendant combien d'années l'âge de Paul restera-t-il plus grand que quatre fois celui de Jean ?.

3) Un père a deux enfants. Le fils a 5 ans de moins que sa sœur, qui a 20ans de moins que son père. La somme de leurs âges dépasse 70 ans. L'âge du père est plus du double de celui de sa fille.

Quel est l'âge de chacun? (Les âges sont exprimés en nombres entiers).

IV. Comparaison.

Propriété soient a et b deux nombres positifs si $a^2 \geq b^2$ alors $a \geq b$.

Exemples :

Comparer $5\sqrt{2}$ et $3\sqrt{5}$.

Calculons $(3\sqrt{5})^2$=$3^2(\sqrt{5})^2 = 9(5) = 45$

$$(5\sqrt{2})^2 = 5^2(\sqrt{2})^2 = 25(2) = 50$$

On a $50 \geq 45$ on a $(5\sqrt{2})^2 \geq (3\sqrt{5})^2$ donc $\mathbf{5\sqrt{2} \geq 3\sqrt{5}}$

<u>Encadrement d'une somme :</u>

On donne $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$

$$\begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ \underline{\quad\quad c \leq y \leq d} \end{array}$$

Addition membre à membre : $a + c \leq x + y \leq b + d$

<u>Encadrement de l'opposé :</u>

On donne $a \leq x \leq b$ encadrement $-x$

Multiplions l'inégalité par -1 .

$-1 \times a \geq -1 \times x \geq -1 \times b$ on a $-a \geq -x \geq -b$

On en déduit que $\boldsymbol{-b \leq -x \leq -a}$

Exemples :

On donne $5{,}66 \leq x \leq 5{,}67$ et $4{,}66 \leq y \leq 4{,}67$ encadrer $x + y$ et $x - y$.

$$5{,}66 \leq x \leq 5{,}67 \qquad (1)$$

$$\underline{4{,}66 \leq y \leq 4{,}67 \qquad (2)}$$

(1)+(2) : $5{,}66 + 4{,}66 \leq \mathrm{x} + \mathrm{y} \leq 5{,}67 + 4{,}67$

On a $\mathbf{10{,}32 \leq x + y \leq 10{,}34}$

Pour l'encadrement $x - y$ on doit d'abord encadrer $-y$

Mais on remarquera que $x - y = x + (-y)$.

$$4{,}66 \leq y \leq 4{,}67$$

Multiplier par -1 on a

$$-1 \times 4{,}66 \geq -1 \times y \geq -1 \times 4{,}67$$

$$-4{,}66 \geq -y \geq -4{,}67$$

Soit $-4{,}67 \leq -y \leq -4{,}66$

On a $5{,}66 \leq x \leq 5{,}67$ (1)

Et $\underline{-4{,}67 \leq -y \leq -4{,}66 \qquad (2)}$

(1) +(2) $5{,}66 - 4{,}67 \leq x + (-y) \leq 5{,}67 - 4{,}66$

$$\mathbf{0{,}99 \leq x - y \leq 1{,}01}$$

Exercice : 13.3

1) Comparer $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$ et $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$; $11\sqrt{3}$ et $7\sqrt{5}$; $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $\sqrt{7 + 2\sqrt{15}}$; $-8\sqrt{6}$ et $-3\sqrt{17}$; $2 - \sqrt{2}$ et $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

2) On donne $2 < x < 3$ et $-1 < y < 7$ **;** encadrer $x + y$ puis $x - y$ et $y - x$.

3) On donne $5 < a < 9$ et $-3 \leq b < 8$; encadrer $a + b$, $b - a$ et

$5b - a$.

Encadrement du produit et du quotient :

Soient x et y des nombres strictements positifs de meme a, b, c et d .

Encadrement du produit xy :

$$a \leq x \leq b$$
$$\underline{c \leq y \leq d}$$

Produit membre à membre : $a \times \mathrm{c} \leq \mathrm{x} \times \mathrm{y} \leq \mathrm{b} \times \mathrm{d}$

Encadrement de l'inverse $\frac{1}{x}$:

On donne $a \leq x \leq b$ on a $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{b}$ ainsi $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$

Remarque : $\frac{y}{x} = y \times \frac{1}{x}$

Exemple : $2 < x < 3{,}5$ et $2{,}5 < y < 4$, déterminer l'encadrement de xy , $\frac{1}{x}$ et $\frac{y}{x}$.

L'encadrement de xy

$$2 < x < 3{,}5$$
$$\underline{2{,}5 < y < 4}$$
$$2 \times 2{,}5 < x \times y < 3{,}5 \times 4$$

On a $\mathbf{5 < xy < 14}$

L'encadrement de $\frac{1}{x}$;

On a $2 < x < 3{,}5$ d'où $\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{3{,}5}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{10}{35}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{2}{7}$

Ansi $\mathbf{\frac{2}{7} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}}$

.

L'encadrement de $\frac{y}{x}$.

$2{,}5 < y < 4$ de $2 < x < 3{,}5$ on a $\frac{2}{7} < \frac{1}{\mathrm{x}} < \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{7} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$$

$$\underline{\qquad\qquad 2{,}5 < y < 4}$$

Produit membre à membre $2{,}5 \times \frac{2}{7} < y \times \frac{1}{x} < 4 \times \frac{1}{2}$

On a $\mathbf{\frac{5}{7} < \frac{y}{x} < 2}$

Exemple : On donne $-3{,}5 < x < -2$ de $2{,}5 < y < 4$,encadrer xy et $\frac{x}{y}$.

L'encadrement de xy

Encadrons d'abord $-x$ (car dans l'encadrement ci-dessus on constate que x est négatif)

$-3{,}5 < x < -2$ on a $-1 \times (-3{,}5) > -x > -1 \times (-2)$

$3{,}5 > -x > 2$; $2 < -x < 3{,}5$

$$2 < -x < 3{,}5$$

$$\underline{\qquad 2{,}5 < y < 4}$$

Produit membre à membre $2 \times 2{,}5 < -x \times y < 3{,}5 \times 4$

$$5 < -xy < 14$$

Multiplions par -1 on a $-14 < -1 \times (-xy) < -1 \times 5$

On obtient $\mathbf{-14 < xy < -5}$

L'encadrement de $\frac{x}{y}$.

$-3{,}5 < x < -2$ on a $2 < -x < 3{,}5$

On a $2{,}5 < y < 4$ d'où $\frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2{,}5}$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{1(2)}{(2{,}5)(2)}$; $\frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{2}{5}$

$\frac{1}{4} \quad < \frac{1}{y} < \frac{2}{5}$

$\underline{\quad\quad 2 \ < -x < 3{,}5}$

$2 \times \frac{1}{4} < -x \times \frac{1}{y} < \frac{2}{5} \times 3{,}5$

$\frac{2}{4} < \frac{-x}{y} < \frac{7}{5}$

$\frac{1}{2} < \frac{-x}{y} < \frac{7}{5}$

multiplions l'inégalité par -1 on a $\frac{-7}{5} < \frac{-1(-x)}{y} < \frac{-1}{2}$

On a $\boldsymbol{\frac{-7}{5} < \frac{x}{y} < \frac{-1}{2}}$

Exemple on donne $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, déterminons l'encadrement

$17 - 21\sqrt{3}$.

$17 - 21\sqrt{3} = 17 - 21 \times \sqrt{3}$ on commence par encadrer le produit $-21 \times \sqrt{3}$

$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ on a $-21 \times 1{,}733 < -21 \times \sqrt{3} < -21 \times 1{,}732$

$-36{,}393 < -21 \times \sqrt{3} < -36{,}372$

Ajoutons 17 à chaque membre : $17 - 36{,}393 < 17 - 21 \times \sqrt{3} < 17 - 36{,}372$

$-19{,}393 < 17 - 21 \times \sqrt{3} < -19{,}372$

Encadrement d'ordre 0 par deux nombres décimaux consécutifs de

$17 - 21 \times \sqrt{3}$

On a donc $\boldsymbol{-20 < 17 - 21 \times \sqrt{3} < -19}$

Encadrement d'ordre 1 par deux nombres décimaux consécutifs de

$17 - 21 \times \sqrt{3}$

On a $\boldsymbol{-19{,}4 < 17 - 21 \times \sqrt{3} < -19{,}3}$

Encadrement d'ordre 2 par deux nombres décimaux consécutifs de

$17 - 21 \times \sqrt{3}$

Exercice : 13.4

1) Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, déterminer un encadrement de $18\sqrt{2} - 27$, puis en déduire l'encadrement par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 .

2) Sachant que $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$, déterminer un encadrement de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puis en déduire l'encadrement par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2 .

Exercice : 13.5

Sachant que $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$ et $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

a) comparer $a \ \ et \ \ a^2 - 1$.

c) Encadrer a^2 par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

Thème 14 : Valeur absolue et inéquations(2)

14.1 Valeur absolue

Présentation.

On appelle valeur absolue d'un réel x le nombre réel noté $|x|$, tel que :

$|x| = x$ si x est positif et $|x| = -x$ si x est négatif .

Une valeur absolue est toujours positive .

Exemples :

$|5| = 5$; $|-6| = -(-6) = 6$; $|2{,}3| = 2{,}3$ et $|-7{,}2| = 7{,}2$.

- La valeur absolue d'un nombre positif est égale à ce nombre.
- La valeur absolue d'un nombre négatif est égale à son opposé.
- La valeur absolue de zéro est égale à zéro.

Activité :

$\sqrt{5^2} = 5$ et $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ on a la propriété suivante : Pour tout nombre réel x on a $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemples :

$\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$; $\sqrt{(-5{,}3)^2} = |-5{,}3| = 5{,}3$; $\sqrt{9^2} = |9| = 9$

$\sqrt{2^2} = 2$

Exercice 14.1 Simplifier

1) $\sqrt{5^2}$ 2) $\sqrt{(7,2)^2}$ 3) $\sqrt{(-8,4)^2}$ 4) $\sqrt{(\frac{-7}{5})^2}$

Application :

1) Développer et réduire , $(1+\sqrt{3})^2$ et $(1-\sqrt{3})^2$.

2) Déterminer le signe de $1 + \sqrt{3}$ et celui de $1 - \sqrt{3}$.

3) Simplifier $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ et $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

***

1) $(1+\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$

$\mathbf{(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}}$

$(1-\sqrt{3})^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$
$\mathbf{(1-\sqrt{3})^2 = 4 - 2\sqrt{3}}$

2) Signe de $1 + \sqrt{3}$ et de $1 - \sqrt{3}$.

Signe de $1 + \sqrt{3}$:

$1 > 0$ et $\sqrt{3} > 0$ donc $\mathbf{1 + \sqrt{3} > 0}$

Signe de $1 - \sqrt{3}$

Calculons $1^2 = 1$ et $(\sqrt{3})^2 = 3$ on a $1 < 3$ donc $1^2 < (\sqrt{3})^2$

ainsi $1 < \sqrt{3}$ et donc $\mathbf{1 - \sqrt{3} < 0.}$

3) Simplifions $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ et $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = |1 + \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{3}$ car $1 + \sqrt{3} > 0$

$\mathbf{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}}$

$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3})$ car $1 - \sqrt{3} < 0.$

Donc $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = -\left(1 - \sqrt{3}\right) = -\mathbf{1} + \sqrt{3}$

on a $\mathbf{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1}$

Exercice 14.2

1) Comparer $4\sqrt{2}$ et 12 .

2) Déterminer le signe $4\sqrt{2} - 12$

3) Ecrire sans valeur absolue le nombre $|4\sqrt{2} - 12|$

Exercice 14.3

1) Comparer $2\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$.

2) Déterminer le signe $2\sqrt{3} - \sqrt{7}$ et simplifier $|2\sqrt{3} - \sqrt{7}|$.

3) Développer et réduire $(2\sqrt{3} - \sqrt{7})^2$

4) Simplifier $\sqrt{\mathbf{19 - 4\sqrt{21}}}$

Exercice 14.4

1) Développer et réduire $(\sqrt{2} - 3)^2$.

2) Comparer $\sqrt{2}$ et 3 puis simplifier $|\sqrt{2} - 3|$.

3) On pose $Y = \frac{5\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, rendre rationnel le dénominateur de Y.

4) Montrer que $\sqrt{Y}$ = $3 - \sqrt{2}$

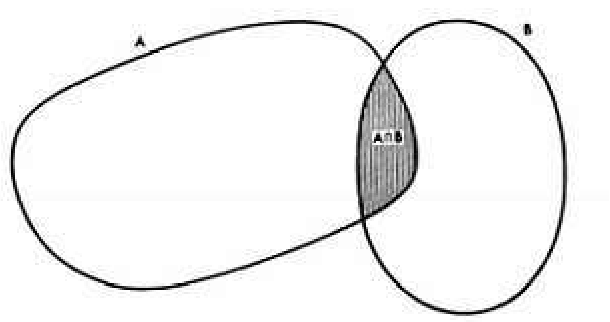
5) Montrer que résoudre l'équation $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 5\sqrt{2} + 1 = 0$ équivaut à

Résoudre l'équation $x^2 - Y = 0$, puis résoudre cette équation .

14.2 Intersection et réunion.

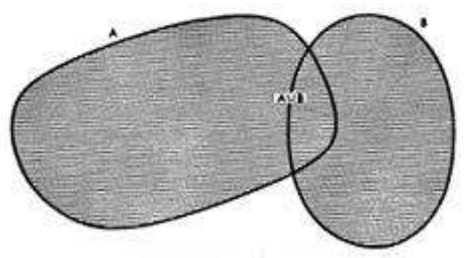
Présentation.

On peut représenter l'intersection de deux ensembles A et B par un diagramme de Venn.



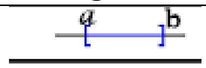
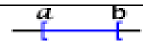
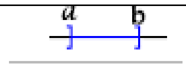
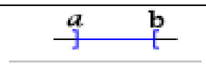
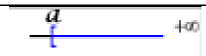
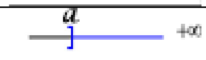
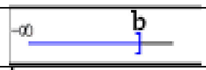
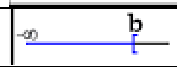
Hachuré ci-dessus l'intersection de deux ensembles A et B , cette intersection représente les éléments appartenant simultanément aux deux ensembles A et B .

A ∩ B : Lire A inter B , l'intersection des ensembles A et B .



Entièrement hachuré ci-dessus la réunion des ensembles A et B , noté A ∪ B .

A ∪ B représente tous les éléments des deux ensembles A et B .

inégalité	intervalle	Représentation sur l'axe gradué
$a \leq x \leq b$	$[a\,;b]$ Intervalle fermé	
$a \leq x < b$	$[a\,;b[$ Intervalle semi-ouvert à droite	
$a < x \leq b$	$]a;b]$ Intervalle semi-ouvert à gauche	
$a < x < b$	$]a\,;b[$ Intervalle ouvert	
$x \geq a$	$[a\,;\ +\infty[$	
$x > a$	$]a\,;\ +\infty[$	
$x \leq b$	$]-\infty\,;b]$	
$x < b$	$]-\infty\,;b[$	

Intervalle semi-ouvert à droite: intervalle fermé-ouvert.
Intervalle semi-ouvert à gauche: intervalle ouvert-fermé.
Intersection de deux intervalles :

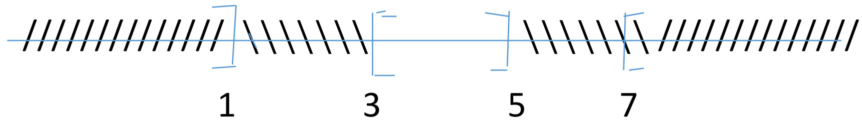
Déterminons $]1;5]\ \cap\ [3;7[$

<u>Méthode pour déterminer l'intersection de deux intervalles</u>

1) On place les nombres dans l'ordre croissant sur un axe gradué.

2) On hachure à l'extérieur des intervalles.

3) La partie non hachurée représente l'intersection des intervalles.



On en déduit que $]1;5] \cap [3;7[= [3\,;5]$

Réunion de deux intervalles :

Déterminons $[0;4] \cup [1\,;5]$

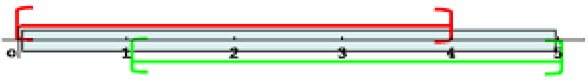
<u>Méthode pour déterminer la réunion de deux intervalles</u>

1) On place les nombres dans l'ordre croissant sur un axe gradué.

2) On colorie à l'intérieur des intervalles.

3) La partie entièrement colorée représente la réunion des intervalles.

En rouge l'intervalle $[0;4]$ et en vert l'intervalle $[1\,;5]$.



On en déduit que $[\mathbf{0};\mathbf{4}] \cup [\mathbf{1}\,;\mathbf{5}] = [\mathbf{0}\,;\mathbf{5}]$

Exercice 14.5

1) On donne $I = [3;7]$ et $J = [5\,;\,+\infty[$ **,** déterminer $I \cap J$.

2) On donne $I = [-2\,;5]$ et $J = [1\,;7]$, déterminer $I \cup \boldsymbol{J}$ **.**

3) On donne $I = [-1\,;5]$ et $J = [2\,;9]$, déterminer $I \cap J$ et $I \cup \boldsymbol{J}$ **.**

4) On donne $I =]0\,;3]$ et $J = [5;7[$, déterminer $I \cap J$ et $I \cup \boldsymbol{J}$ **.**

5) On donne $I = [1;4[$ et $J =]7\,;+\infty\,[$, déterminer $I \cap J$ et $I \cup \boldsymbol{J}$ **.**

Exercice 14.6 : Recopier et compléter le tableau suivant .

Intervalle	Encadrement	Droite graduée
$x \in]-\infty\,;0]$		
	$-2 \leq x < 2$	
		

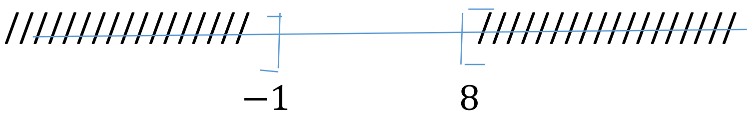
14.3 Système d'équations à une inconnue.

Activité :

Résolution des systèmes d'inéquations :

1) $\begin{cases} x < 8 \\ x > -1 \end{cases}$ et 2) $\begin{cases} 2x - 15 < 0 \\ 12 - 3x < 0 \end{cases}$

Avec le système 1) on a $x < 8$ et $x > -1$.



On déduit que l'ensemble solution est : $\boldsymbol{S} =]\boldsymbol{-1}\,;\boldsymbol{8}[$

Avec le système 2) on a $2x - 15 < 0$ et $12 - 3x < 0$

$2x - 15 < 0$ et $12 - 3x < 0$

$2x < 15$ et $-3x < 12$

$x < \frac{15}{2}$ et $x > \frac{12}{-3}$

$x < \frac{15}{2}$ et $x > -4$

On déduit que l'ensemble solution est : $\mathbf{S} = \left]\mathbf{-4} \,;\, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}\right[$

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq 3 \\ 2x + 1 \geq -2x + 5 \end{cases}$$

On a $\quad 2x - 3 \leq 3 \quad$ et $\quad 2x + 1 \geq -2x + 5$

D'où $\quad 2x \leq 3 + 3 \quad$ et $\quad 2x + 2x \geq 5 - 1$

ainsi $\quad 2x \leq 6 \quad$ et $\quad 4x \geq 4$

donc $\quad x \leq \frac{6}{2} \quad$ et $\quad x \geq \frac{4}{4}$

alors $\quad x \leq 3 \quad$ et $\quad x \geq 1$

Représentation graphique :

On en déduit donc que l'ensemble solution est : $\mathbf{S} = [\mathbf{1}\,;\mathbf{3}]$

Exercice 14.5

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

1) $\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 8 > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 4 \leq 2x + 1 \\ -2x + 5 \geq 5x - 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - \frac{1}{2} < \frac{4x-3}{3} \\ \frac{5x+4}{5} \geq \frac{6x+5}{10} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 16(2 - x) - 4x > 3 \\ -3(6x - 1) - 2x < x \end{cases}$

6) $\begin{cases} -(x - 2) - 3(x - 1) < 2x \\ 5x + 4 \geq 12 - (x - 3) \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x > 4 \\ x > 7 \\ x < 15 \end{cases}$

Exercice 14.6

La somme de trois entiers consécutifs est plus grande que 367, mais plus petite que 372. Quels sont ces trois entiers?

Thème 15 : Statistique

15.1Présentation :

Au cours d'une étude statistique, on étudie, sur une **population**, un **caractère** qui peut prendre plusieurs valeurs.

Vocabulaire :

Population : C'est l'ensemble étudié.
Individu : C'est un élément de la population.
Effectif total : C'est le nombre total d'individus de la population étudiée.
L'effectif d'une valeur : C'est le nombre de fois où cette valeur apparaît.
Caractère : C'est la propriété étudiée.
On distingue *les caractères qualitatifs* et les *caractères quantitatifs*.
Un *caractère est dit quantitatif,* quand les valeurs prises sont des nombres. Un *caractère est dit qualitatif lorsqu'il n'est pas quantitatif.*

15.2 Les séries statistiques

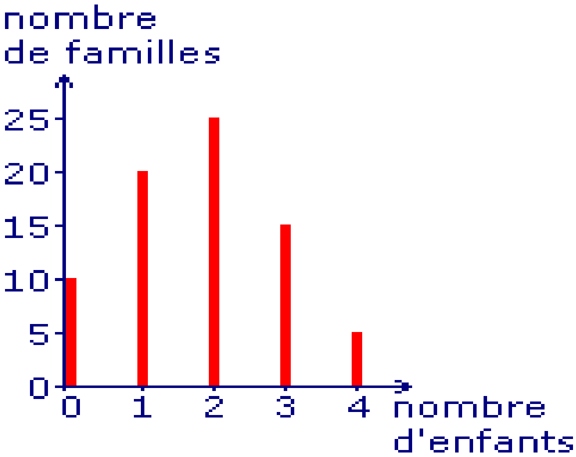
Le diagramme en bâtons

On étudie ici le nombre d'enfants par famille dans un quartier de Libreville.

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4
Nombre de familles	10	20	25	15	5

1) La population étudiée ce sont les enfants.
2) Le caractère étudié c'est le nombre d'enfants, ce caractère prends des valeurs numériques, il est donc de nature quantitatif.
3) On dénombre 10 familles n'ayant aucun enfant.
Construction du diagramme en bâtons : L'effectif est proportionnel à la hauteur

- sur l'axe horizontal on place dans l'ordre croissant les valeurs du caractère étudié (le nombre d'enfants par famille) ;
- sur l'axe vertical, on place dans l'ordre croissant les effectifs (on prend 1 cm pour 5 familles).



L'effectif le plus élevé est 25 , le caractère 2 associé à cette effectif est appelé le mode de la série.

On retiendra donc que le mode d'une série statisque est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif.

<u>Moyenne pondérée</u>

comment déterminer la moyenne m de cette série statistique.

$$m = \frac{\text{Somme des produits de chaque valeur du caractère par l'effectif correspondant}}{\text{l'effectif total de la série statistique .}}$$

$m = \frac{0\times10+1\times20+2\times25+3\times15+4\times5}{10+20+25+15+5}$, d'où $m = \frac{135}{75}$ on a $\mathbf{m = 1,8}$

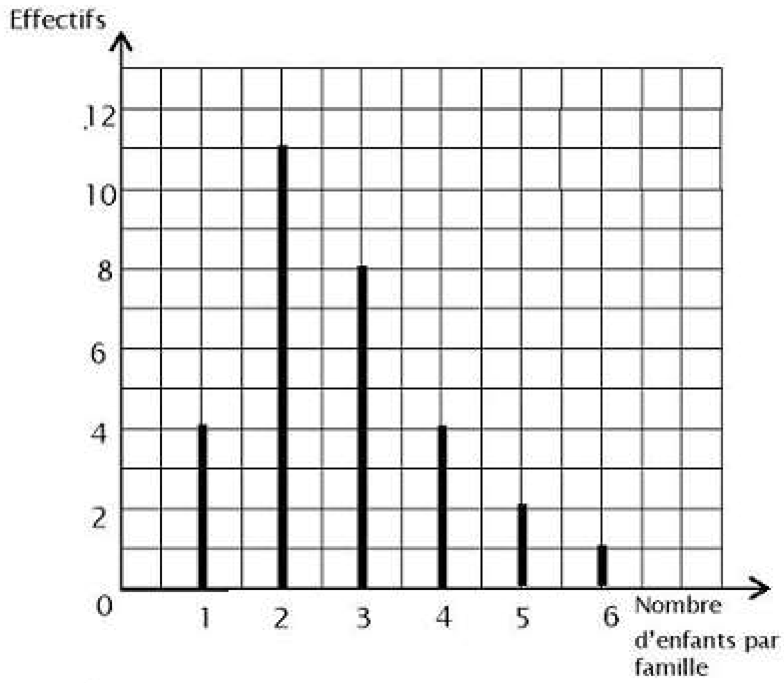
Le nombre moyen d'enfants par famille est de 1,8.

Exemple

On étudie ici un autre tableau statistique donnant le nombre d'enfants par famille dans un autre quartier de Libreville.

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6
Nombre de familles	4	11	8	4	2	1

Diagramme en bâton de la série statistique



Exemple :
On interroge 25 élèves d'une classe au sujet de leur sport préféré.
Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

sport	football	Basket-ball	handball	tennis	danse	total
effectif	8	6	2	3	6	25

La population étudiée : 25 élèves d'une classe.
Le caractère étudié : le sport préféré.
Nature du caractère : Ce caractère ne prends pas des valeurs numériques ont dit qu'il est de nature qualitatif.

Regroupement en classes et histogramme

On construit un histogramme quand les valeurs de la variable sont regroupées en classes. Une classe est l'intervalle dans lequel sont prises les valeurs pour le caractère étudié. A chaque classe de la variable, correspond la surface d'un rectangle qui a pour base l'amplitude de cette classe.

Lorsque les classes ont la même amplitude, les rectangles ont la même largeur qui est donné par l'amplitude de chaque classe. La hauteur du rectangle est alors proportionnelle à l'effectif de la classe.

L'amplitude est la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure de la classe.

Le centre d'une classe est la demi-somme des valeurs de la borne supérieure et de la borne inférieure de la classe.

Exemple d'une classe : [a;b[

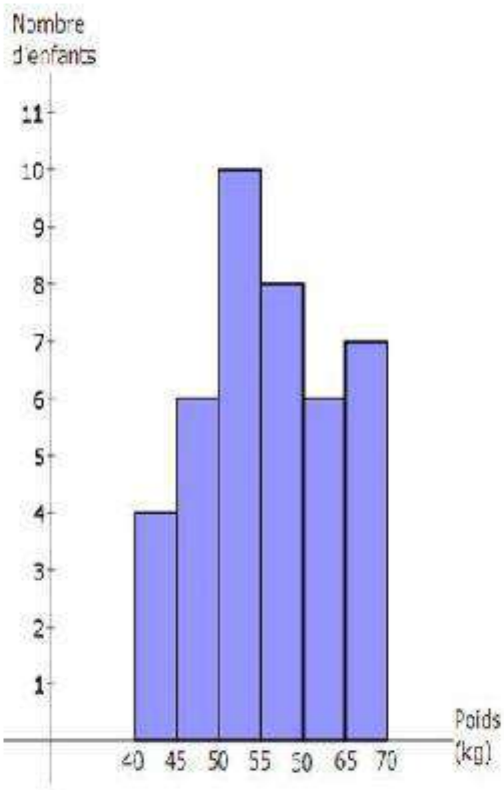
Amplitude : b-a

Centre de la classe : $\frac{a+b}{2}$

La série suivante représente le nombre d'enfants en fonction de leurs poids en kilogramme (kg).

Poids en kg (axe horizontal)	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
Nombre d'enfants (axe vertical)	4	6	10	8	6	7

Construction de l'histogramme de la série statistique.
Les différentes classes ont la même amplitude (b-a=5), on construit un rectangle dont la hauteur correspond à l'effectif de la classe et dont la largeur correspond à la classe .



Moyenne de la série statistique :

Construction du tableau complété des centres de chaque classe

Poids en kg	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
centre	$\frac{40+45}{2}$ 42,5	$\frac{45+50}{2}$ 47,5	$\frac{50+55}{2}$ 52,5	$\frac{55+60}{2}$ 57,5	$\frac{60+65}{2}$ 62,5	$\frac{65+70}{2}$ 67,5
Nombre d'enfants	4	6	10	8	6	7

Déterminons la moyenne m de ce regroupement en classe.

$$m = \frac{\text{Somme des produits de la valeur chaque centre par l'effectif correspondant}}{\text{l'effectif total de la série statistique .}}$$

$m = \frac{42{,}5\times4+47{,}5\times6+52{,}5\times10+57{,}5\times8+62{,}5\times6+67{,}5\times7}{4+6+10+8+6+7}$, d'où $m = \frac{1825}{41}$

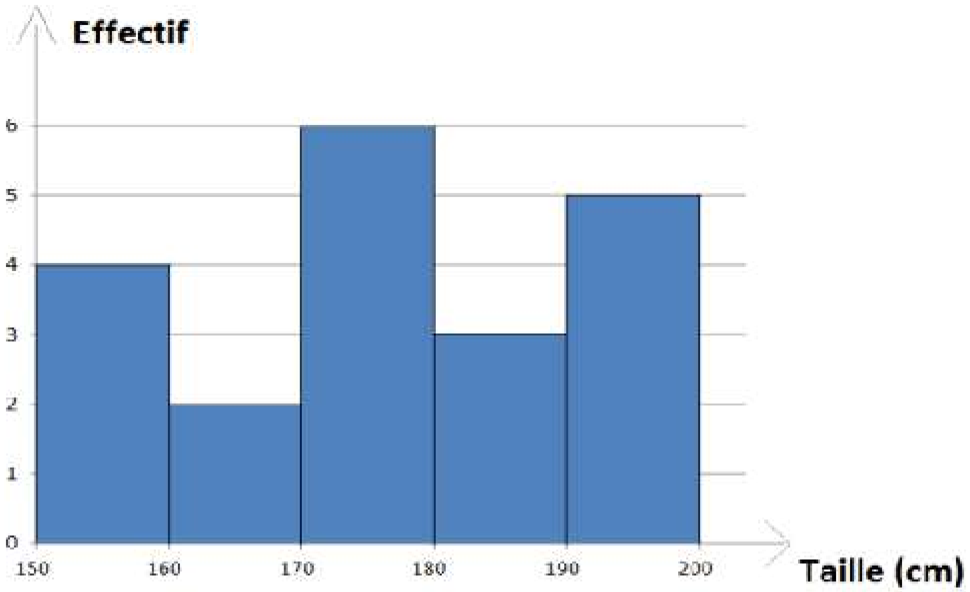
on a $\mathbf{m = 44{,}51}$

Le poids moyen par enfant est de 44,51 kg.

Exemple : La série suivante représente la taille en centimètre (cm) des hommes d'un quartier.

Taille (cm)	[150;160[	[160;170[	[170;180[	[180;190[	[190;200[
Effectif	4	2	6	3	5

Construction de l'histogramme de la série statistique.
Les différentes classes ont la même amplitude.



Exercice 15.1 On considère le regroupement en classe suivant, dont il faut construire l'histogramme :

Classe	[10;15[	[15;20[	[20;25[	[25;30[	[30;35[	[35;40[
effectif	5	10	15	20	25	30

Calculer la moyenne de cette série statistique.

Diagramme circulaire

Définition

Un diagramme circulaire est un disque partagé en secteurs .Les effectifs sont proportionnels aux angles et l'effectif total correspond à l'angle plein de 360°.

$$mes.angle \rightarrow effectif\ corresp$$

$$360 \quad \rightarrow effectif\ total$$

On a $mesure\ angle \times effectif\ total = effect.corresp\ \times 360$

D'où $mesure\ de\ l'angle = \frac{effectif\ correspondant}{effectif\ total} \times 360$

Exemple : L'enquête sur les loisirs 30 élèves d'une classe de troisième a donné les résultats consignés dans le tableau ci-dessous.

Loisir	TV	Sport	Musique	Lecture	Total
Effectif	12	9	6	3	30
Angle du secteur en degré	$\frac{12}{30} \times 360$ 144	$\frac{9}{30} \times 360$ 108	$\frac{6}{30} \times 360$ 72	$\frac{3}{30} \times 360$ 36	360

Diagramme circulaire

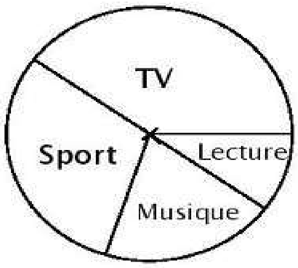


Diagramme semi-circulaire

Définition

Un diagramme semi-circulaire est un demi-disque partagé en secteurs .Les effectifs sont proportionnels aux angles et l'effectif total correspond à l'angle semi-plein de 180°.

$$mes.angle \rightarrow effectif\ corresp$$

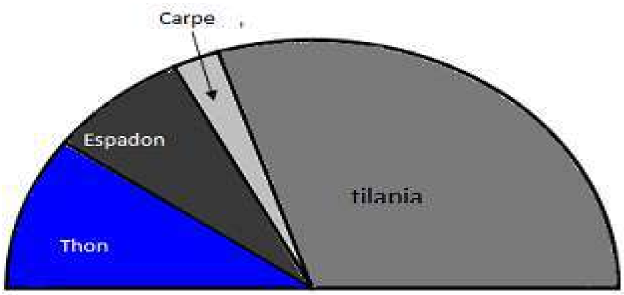
$$180 \quad \rightarrow effectif\ total$$

On a $mesure\ angle \times effectif\ total = effect.corresp \times 180$

D'où $mesure\ de\ l'angle = \frac{effectif\ correspondant}{effectif\ total} \times 180$

Exemple : On considère le tableau statistique suivant dont on doit construire le diagramme semi-circulaire.

Espèce	Thon	Espadon	carpe	tilapia	total
Prise en kg	144	108	36	432	720
Secteur angulaire en degrés	$\frac{144}{720} \times 180$ 36	$\frac{108}{720} \times 180$ 27	$\frac{36}{720} \times 180$ 9	$\frac{432}{720} \times 180$ 108	180



Etendue et médiane :

On considère la série statique suivante : 20,09 ; 20,12 ; 20,19 ; 20,25 ; 20,38 ; 20,48 ; 20,69

L'étendue est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

L'étendue, $\boldsymbol{E_t}$ = **20,69 – 20,09 = 0,6**

La médiane : Dans une série statisque la médiane est une valeur qui partage la série en deux groupes de même effectif.

Pour déterminer la médiane, on ordonne les données de la série statistiques dans l'ordre croissant.

Si l'effectif total, N de la série est impair (N= 2n + 1), la médiane est la valeur du terme de rang (n + 1) dans cette série ordonnée.

Si l'effectif total N de la série est pair (N= 2n), la médiane est la moyenne des valeurs des termes de rang n et (n + 1) dans cette série ordonnée.

Médiane de la série : 20,09 ; 20,12 ; 20,19 ; 20,25 ; 20,38 ; 20,48 ; 20,69

L'effectif total est de 7 et $7 = 2(\mathbf{3}) + 1$ la médiane, M_e sera donc le (3+1)° terme c'est-à-dire la 4^e valeur de la série rangée dans l'ordre croissant, soit $\boldsymbol{M_e} =$ **20,25.**

Médiane de la série : 7;9;9;10;11;12;13;13;13;14;14;15

L'effectif total est de 12 et $12 = 2(\mathbf{6})$ la médiane sera donc la moyenne du 6° et (6+1)° c'est-à-dire la moyenne du 6^e terme ; 12 et du 7^e terme ; 13 de la série rangée dans l'ordre croissant $\boldsymbol{M_e} = \frac{\mathbf{12+13}}{\mathbf{2}} = \mathbf{12,5}$ **.**

Exercice 15.2

1) Déterminer l'étendue et la médiane des séries statistiques suivantes :

a) On donne les notes d'un groupe de 9 élèves lors d'un devoir de mathématiques.

5-6-11-13-6-14-12-8-13

b) On donne les notes d'un groupe de 6 élèves lors d'un devoir d'anglais : 6-13-18-16-14-5

3) Déterminer la moyenne et médiane des séries statistiques suivantes :

a) 16-17-10-13-20-18-13-14-18

b) 23-24-26-26-28-29-33-31-30-34

<u>Calcul de la fréquence</u>

La fréquence d'une valeur en statistique est le quotient de l'effectif de cette valeur sur l'effectif total

On écrit : $(\text{fréquence de la valeur}) = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$

On peut ramener la fréquence en pourcentage, c'est-à-dire ramener les données à un effectif fictif de 100 individus .La fréquence d'une valeur peut aussi s'exprimer en pourcentage noté : % .

$$(\text{fréquence de la valeur en } \%) = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}} \times 100$$

Espèce	Thon	Espadon	carpe	tilapia	total
Prise en kg	144	108	36	432	720
Fréquence en %	$\frac{144}{720} \times 100$ 20	$\frac{108}{720} \times 100$ 15	$\frac{36}{720} \times 100$ 5	$\frac{432}{720} \times 100$ 60	100

<u>Les effectifs cumulés croissants (ECC)</u>

<u>Exemple :</u> Effectifs cumulés croissants d'une série statistique

effectif	13	7	4	6
Effectifs cumulés croissants	↓ 13	(13+7) 20	(20+4) 24	(24+6) 30

Exercice 15.3

Dans un collège, une enquête a été menée sur « le poids des cartables des élèves ».

Pour cela, on a pesé le cartable de 48 élèves du collège.

Les résultats de cette enquête sont inscrits dans le tableau ci-dessous :

Poids en kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	1	2	4	2	5	11	8	8	3	4

1) Quelle est la population étudiée ? Donner le caractère étudié et sa nature.

2) Calculer l'étendue de cette série statistique.

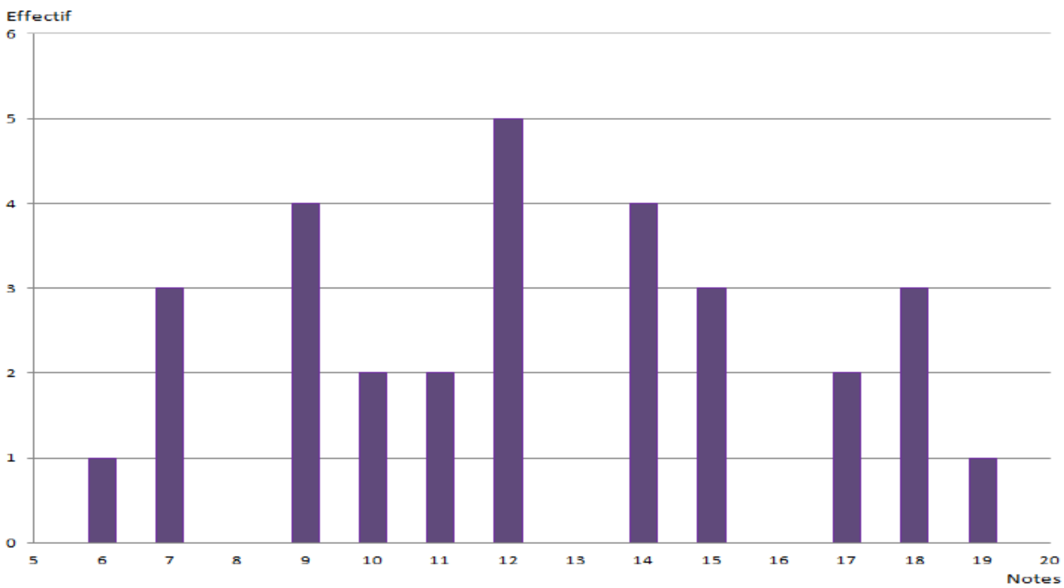
3) Déterminer la médiane de cette série statistique.

4) Déterminer, la moyenne de cette série statisque.

5) construire le diagramme en bâtons de cette série statistique

Exercice 15.4

Le diagramme en bâtons suivant représente les notes obtenues par une classe de troisième au dernier contrôle de mathématiques :



Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif																

2) Quelle est la nature du caractère étudié ?
3) Quelle est l'étendue de la série ?
4) Déterminer la note médiane.
5) Calculer la note moyenne.
6) Quelle est la fréquence en pourcentage des élèves n'ayant pas obtenu la moyenne ?

Exercice 15.5

La série suivante représente les âges de 150 employés d'une entreprise.

Ages	$20 \leq age < 24$	$24 \leq age < 28$	$28 \leq age < 32$	$32 \leq age < 36$	$36 \leq age < 40$	$40 \leq age < 44$
Centre des classes						
effectifs	12	30	45	36	21	6
Fréquence en %						

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessus .

2) Quelle est la classe modale de cette série statistique ?

3) Calculer la moyenne de cette série statistique. Que représente cette valeur ?

4) Quel est le pourcentage d'employés qui ont strictement moins de 36 ans ?

5) Construire l'histogramme de cette série statistique.

Exercice 15.6

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Sport favori	Basket-ball	Tennis	Football	Judo	Total
Effectif	6	9	6	9	30
Mesure (en degré)					360

2) Donner le caractère étudié et préciser sa nature.

3) Construire le diagramme circulaire des effectifs.

Exercice 15.7

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Elève	Céline	Patrick	Thomas	Yann	Total
Fréquences (%)	4	8	0	88	**100**
Angle (Degrés)					180

2) Construire le diagramme semi-circulaire des fréquences en pourcentage de cette série statistique.

Thème 16 : Equations dans IR×IR (2) –Applications affines

Les systèmes d'équations à deux inconnues

Exemple : Résolution d'un système d'équations à deux inconnues par la méthode de substitution.

Considérons maintenant deux équations du 1er degré à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} x + 5y = 48 \\ 7x + y = 132 \end{cases}$$

Méthode de substitution : On emploie une des équations pour exprimer une des inconnues en fonction de l'autre. Puis on substitue le résultat dans l'autre équation.

$$\begin{cases} x + 5y = 48 \quad (1) \\ 7x + y = 132 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) on a $x + 5y = 48$ on exprime x en fonction de y .

$x + 5y = 48$ on a $x = 48 - 5y$

Substituons cette expression de x dans (2) : $7x + y = 132$

$$7(48 - 5y) + y = 132$$

$$336 - 35y + y = 132$$

$$336 - 34y = 132$$

$$-34y = 132 - 336$$

$$-34y = -204$$

$$y = \frac{-204}{-34}$$

$$y = 6$$

On a $x = 48 - 5y$ et $y = 6$

Remplaçons maintenant y par 6 dans $x = 48 - 5y$ on trouve

$$x = 48 - 5(6)$$

$$x = 18$$

La solution du système est donc le couple (18 ; 6) .

Exercice 16.1 Résoudre par la méthode de substitution les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 12 \\ -9x + 9y = 54 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + 3y = -4 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2|x| - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Exercice 16.2 Résoudre par la méthode de combinaison les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2 + \sqrt{2} \\ x + \sqrt{2}y = -2 + \sqrt{2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{5}x - \sqrt{3}y = 2 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{5}y = 2\sqrt{15} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 4 \\ 2x + \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x}{2+\sqrt{2}} + \frac{y}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \frac{x}{\sqrt{2}-1} + \frac{y}{\sqrt{2}+1} = 6 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}-1} + \frac{y}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} \\ (\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}-1)y = 2 \end{cases}$

Les applications linéaires ou fonctions linéaires.

Les applications linéaires

Soit a un nombre réel non nul. La fonction f qui a tout nombre x associe le nombre $f(x)$ tel que $f(x) = a \times x$ est appelée fonction linéaire ou application linéaire, a est appelé le coefficient de l'application linéaire.

Déterminons une application linéaire :

Vocabulaire :

On pose $f(x) = y$, cela équivaut à dire que y est l'image de x ou encore que x est l'antécédent de y .

Exemple : Pour une application linéaire 3 est l'image de 1. Déterminer cette application linéaire.

On écrit $f(1) = 3$ par définition de l'application linéaire on a : $f(x) = ax$

$f(1) = a \times 1 = 3$ d' où $a \times 1 = 3$ et $a = 3$ on obtient donc la fonction linéaire

$\boldsymbol{f(x) = 3x}$ **.**

Exemple : Pour une application linéaire 1 est l'antécédent de $\frac{1}{3}$. Déterminer cette application linéaire.

On écrit $f(1) = \frac{1}{3}$, par définition de l'application linéaire on a : $f(x) = ax$

$f(1) = a \times 1 = \frac{1}{3}$ **,** d'où $a \times 1 = \frac{1}{3}$ et $a = \frac{1}{3}$ on obtient donc la fonction linéaire

$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x}$ **.**

Déterminons l'image de 6 par la fonction linéaire $f(x) = -2x$: On remplace x par 6 on a

$f(6) = -2 \times 6$ d'où $\boldsymbol{f(6) = -12}$, donc -12 est l'image de 6 par cette fonction linéaire.

Déterminons l'antécédent de 1,5 par la fonction linéaire $f(x) = 3x$:

On cherche x tel que $f(x) = 1{,}5$; on a $3x = 1{,}5$ d'où $x = \frac{1{,}5}{3}$; $x = 0{,}5$

L' antécédent de $\mathbf{1,5}$ par f est $\mathbf{0,5}$.

Exercice 16.3

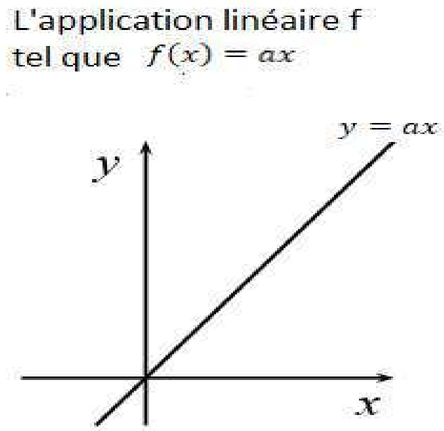
1) Déterminer l'application linéaire f tel que -5 à pour image 3.

2) Déterminer l'application linéaire f tel que 5,8 est l'antécédent de 3,4 .

3) Déterminer l'image de 6 par la fonction linéaire $f(x) = -\frac{1}{2}x$.

4) Déterminer l'antécédent de 6,3 par la fonction linéaire $f(x) = \frac{3}{2}x$

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère. C'est la droite d'équation $y = ax$.



Repérage dans le plan :

Un repère orthonormé (O,I,J) est formé par deux droites perpendiculaires (OI) et (OJ) , les droites sont appelées des axes , elles sont graduées avec la même unité, on a OI=OJ=1 .

Le point M de coordonnées x et y se note $M(x;y)$ ou $M\binom{x}{y}$.

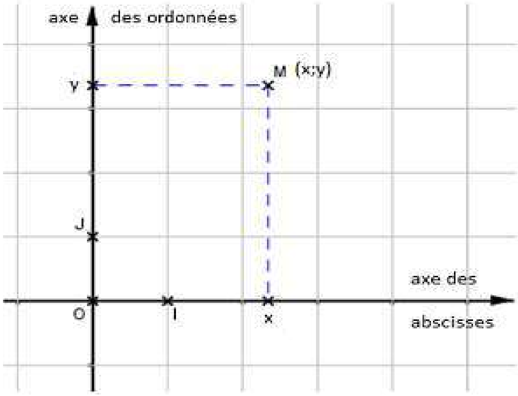
Le premier point est l'abscisse x

Le deuxième point est l'ordonnée y

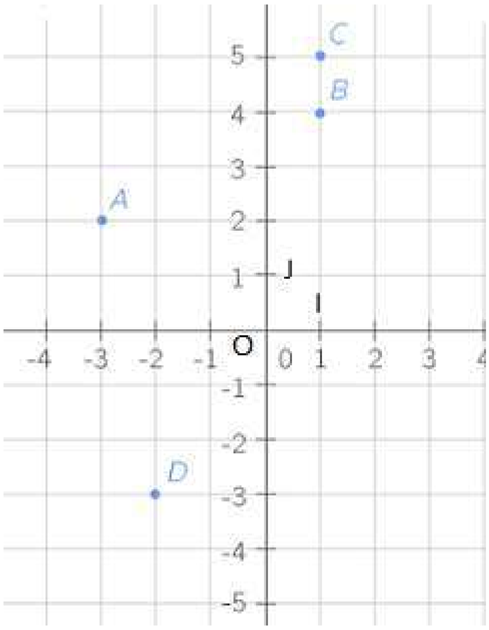
Un repère orthonormé (O,I,J) on a $O(0;0)$ $I(1;0)$ et $J(0;1)$. Le point O est l'origine du repère .

Exemple : $A(2;3)$ ou $A\binom{2}{3}$ on a $x = 2$ et $y = 3$

Repérage du point $M(x; y)$



Exemple : Représentation graphique des points $B(1; 4)$, $C(1; 5)$, $A(-3; 2)$ et $D(-2; -3)$ dans un repère orthonormé (O ;I ;J).



Exercice 16.4

Tracer un repère orthonormé (O ;I ;J) ,puis les points $A(-2; -4)$, $B(2; -3)$, $C(0; 3)$ et $D(-4; 0)$

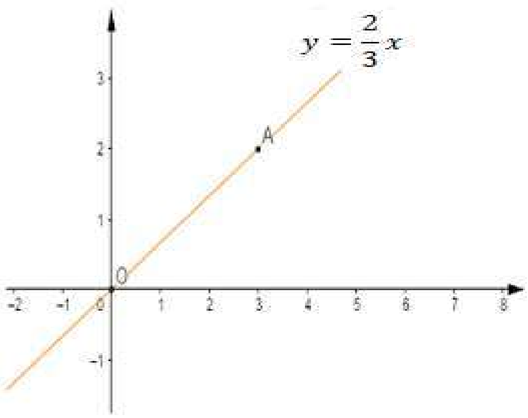
Exemple : Représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{3}x$ dans un repère orthogonal.

On doit tracer la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x$

Pour tracer cette droite on donne à x des valeurs '' subtils'' choisies par nous même

x	$y = \frac{2}{3}x$	$(x; y)$
$x = 0$	$y = \frac{2}{3}(0)\ ; y = 0$	$(0; 0)$
$x = 3$	$y = \frac{2}{3}(3)\ ; y = \frac{6}{3}; y = 2$	$(3; 2)$

La droite passe par les points O $(0; 0)$ et $A(3; 2)$



Exercice 16.5

Dans un repère orthonormé tracer les fonctions linéaires f définies par :

1) $f(x) = -\frac{1}{3}x$

2) $f(x) = 2x$

Exercice 16.6

Un capital de x francs est placé pendant une année au taux de 5 % . Enfin d'année , l'intérêt s'ajoute au capital de départ .

1) Exprimer le nouveau capital y en fonction x .

2) Définir l'application ainsi obtenue .

Exercice 16.7

Un magasin annonce une baisse de 15 % sur les friandises .

1) Calculer le montant de la réduction sur une friandise marqué x francs.

2) Exprimer le nouveau prix y en fonction x .

2) Représenter graphiquement l'application ainsi obtenue.

On prendra en abscisses et ordonnées 1 cm pour 200 unités.

3) Calculer le nouveau prix quand l'ancien est de 900 f.

4) Calculer l'ancien prix quand le nouveau prix est de 500 f.

Les applications affines.

La relation qui à tout nombre réel x associe le nombre $f(x)$ tel que

$f(x) = a \times x + b$ ou $f(x) = ax + b$ est appelée fonction affine ou application affine, a est appelé le coefficient de l'application affine.

Rôle du coefficient a

Dans une fonction affine de la forme $ax + b$

Si a est positif la fonction affine f est croissante, la droite d'équation $y = ax + b$ ''monte''.

Si a est négatif la fonction affine f est décroissante, la droite d'équation $y = ax + b$ ''descend''.

Exemple :

La fonction affine f définie par $f(x) = 3x - 2$ est croissante car le coefficient $a = 3$ est positif.

La fonction affine f définie par $f(x) = -x - 2$ est décroissante car le coefficient $a = -1$ est négatif.

Représentation graphique d'une fonction affine :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite d'équation $y = ax + b$,

Cette droite coupe l'axe des ordonnées en b et a est le coefficient directeur de la droite.

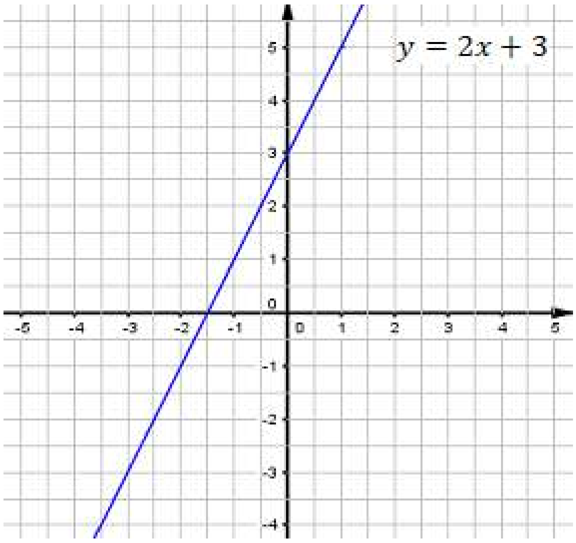
Exemple :

La fonction affine f définie par $f(x) = 2x + 3$.

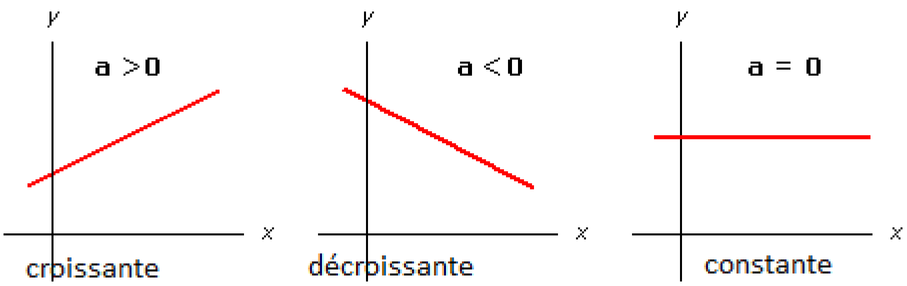
La représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction affine f définie par $f(x) = 2x + 3$ est la droite d'équation $y = 2x + 3$.

x	$y = 2x + 3$	$(x; y)$
$x = 0$	$y = 2(0) + 3$; $y = 3$	$(0; 3)$
$x = 1$	$y = 2(1) + 3$; $y = 5$;	$(1; 5)$

La droite passe par les points de coordonnées $(0; 3)$ et $(1; 5)$



Différents graphes de la fonction affine   f(x)=ax+b



Exercice 16.8

Soit la fonction affine f définie par $f(x) = -3x + 2$

1) Donner le sens de variation de la fonction affine f

2) La droite dont-elle est la représentation graphique, va-t-elle monter ou descendre ?

3) Tracer cette droite dans un repère orthonormé.

Exercice 16.8

Soit la fonction affine f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

1) Donner le sens de variation de la fonction affine f

2) La droite dont-elle est la représentation graphique, va-t-elle monter ou descendre ?

3) Tracer cette droite dans un repère orthonormé.

Détermination d'une fonction affine.

Exemple : Déterminer la fonction affine g tel que $g(1) = 3$ et $g(3) = 1$.

Par définition $g(x) = ax + b$

On a $g(1) = 3$ donc $a(1) + b = 3$ et $g(3) = 1$ donc $a(3) + b = 1$

$a + b = 3$ et $3a + b = 1$

On a le système suivant $\begin{cases} a + b = 3 & (1) \\ 3a + b = 1 & (2) \end{cases}$

Déterminons a et b par la méthode de substitution :

De (2) $3a + b = 1$ on a $b = 1 - 3a$; de $a + b = 3$, on remplace b par $1 - 3a$

$$a + (1 - 3a) = 3$$

$$a + 1 - 3a = 3$$

$$a - 3a = 3 - 1$$

$$-2a = 2$$

$$a = \frac{2}{-2}$$

$$a = -1$$

On a $b = 1 - 3a$ et $a = -1$ on remplace a par -1 dans l'expression de b

On a $b = 1 - 3(-1)$; $b = 1 + 3$; $b = 4$

Ainsi $a = -1$ et $b = 4$, par définition $g(x) = ax + b$ on remplace a par -1 et b par 4 , nous obtenons $\boldsymbol{g(x) = -x + 4}$ **.**

Exercice 16.9

1) Déterminer la fonction affine g tel $g(0) = 1$ et $g(2) = -3$.

2) Déterminer la fonction affine f tel $f(1) = 2$ et $f(-3) = -2$.

Exercice 16.10 : Déterminer l'expression de la fonction affine du graphe ci-dessous .

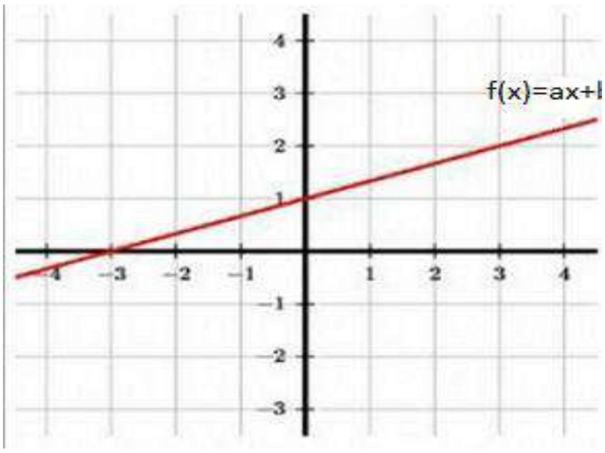


Image et antécédent.

Exemple : Soit la fonction affine f définie par $f(x) = -3x + 2$

Calculons l'image de 0 : On doit déterminer $f(0)$.

$f(0) = -3(0) + 2 = 0 + 2 = 2$, donc $\boldsymbol{f(0) = 2}$ **, 2 est l'image de 0 par la fonction f .**

Déterminons l'antécédent de 5 par la fonction f ci-dessus .

On pose $(x) = 5$, on doit donc déterminer x en posant $-3x + 2 = 5$

$$-3x + 2 = 5$$

$$-3x = 5 - 2$$

$$-3x = 3 \quad \text{on a} \quad x = \frac{3}{-3} \quad ; \; x = -1$$

Ainsi $\boldsymbol{f(-1) = 5}$ **, l'antécédent de 5 par la fonction f est** $\boldsymbol{-1}$ **.**

Exercice 16.11 :

1) Soit la fonction affine f définie par $f(x) = -x + 3$, calculer l'image de -2 .

2) Soit la fonction affine g définie par $g(x) = 3x - 1$, déterminer l'antécédent de 4 .

3) Dans un même repère orthonormé (O, I, J)

a) Tracer les représentations graphiques des fonctions affines f et g .

b) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

c) Pouvait-on déduire ce résultat par lecture graphique ?

Exercice 16.12

La fonction f est définie par : $f : x \mapsto -5x + 2$.

a. Calculer f(2) ;f(- 3) ; f(0).

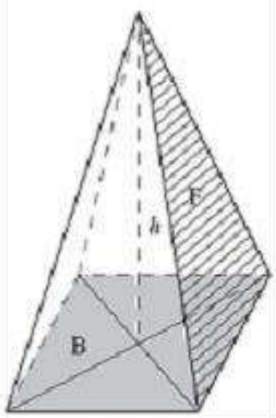
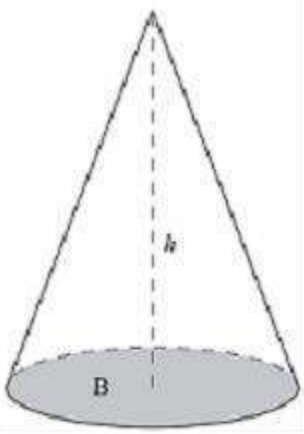
b. Calculer l'image de 4.

c. Calculer le nombre x tel que :

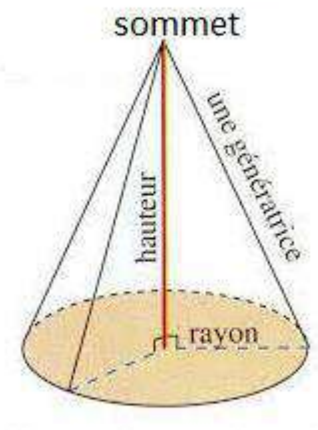
$$f(x) = \frac{5}{3}.$$

Thème 17 : Pyramides et cônes (1)

Présentation

	pyramide régulière	Cône de révolution
		
Hauteur (h)	Le centre de la base est le pied de la hauteur issue du sommet.	
Base (B)	Polygone régulier	Disque
Faces (F)	Triangles isocèles	

Cône de révolution



base (c'est un disque)

Propriétés :

La hauteur du cône est perpendiculaire au diamètre du disque de base.

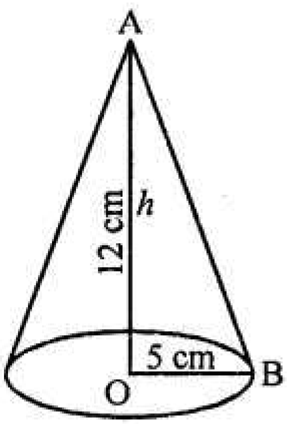
Volume du cône = $\frac{1}{3} \times surface\ de\ base\ \times hauteur\ du$ cône

Volume V d'un cône de révolution de rayon R : $V = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$

Surface latérale du cône = $\pi \times rayon\ \times génératrice$

Surface latérale L d'un cône rayon R et de génératrice g : $L = \pi \times R \times g$

Exemple :



1) Déterminer la longueur de la génératrice AB du cône.

3) Calculer le volume du cône.

4) Calculer la surface latérale du cône.

***

1) La hauteur [OA] du cône est perpendiculaire au rayon [OB] du disque de base, ainsi le triangle AOB est rectangle en O , d'après la propriété de Pythagore :

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = 12^2 + \pi$

$AB^2 = 144 + 25$

$AB^2 = 169$, $AB = \sqrt{169}$; $\boldsymbol{AB}$ =**13 cm**

2) Volume V du cône.

OA , hauteur du cône et OB , rayon du cône .

$V = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$

$V = \frac{1}{3} \times \pi OB^2 \times OA$

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 12$

$V = \frac{1 \times \pi \times 25 \times 12}{3}$

$V = \pi \times 25 \times 4$;

$\boldsymbol{V = 100\pi \ cm^3}$ (valeur exacte du volume du cône)

Pour $\pi = 3{,}14$ on détermine la valeur approchée du volume V du cône

$V = 100 \times 3{,}14$ on a $\boldsymbol{V = 314 \ cm^3}$

4) Surface latérale L du cône.

L = $\pi \times rayon \times génératrice$

Rayon=OB et génératrice =AB

$L = \pi \times OB \times AB$

$L = \pi \times 5 \times 13$

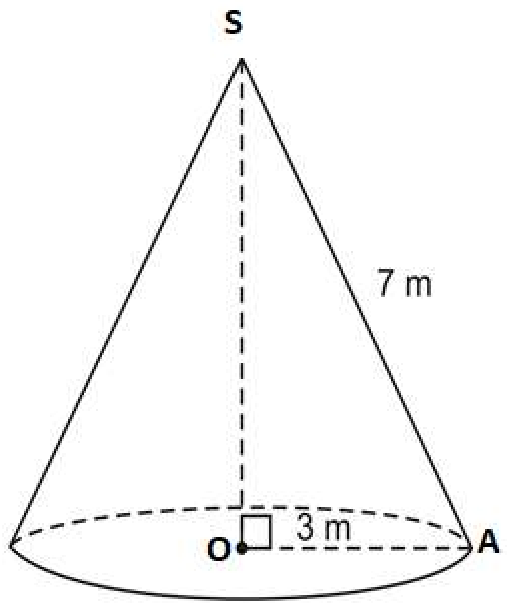
$L = \pi \times 65$;

$\boldsymbol{L = 65\pi \ cm^2}$ (valeur exacte de la surface latérale du cône)

Avec $\pi = 3{,}14$ on détermine la valeur approchée $L = 65 \times 3{,}14$

on a $\boldsymbol{L = 204{,}1 \ cm^2}$ (valeur approchée de la surface latérale du cône)

Exercice 17.1

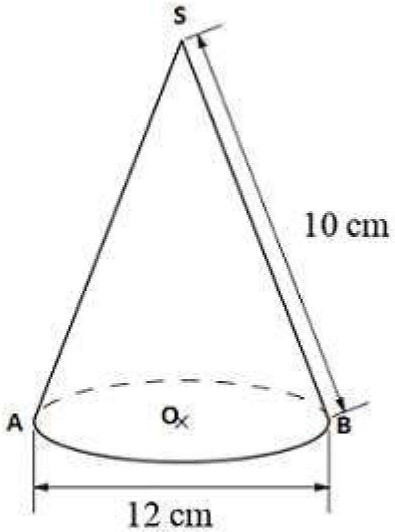


1) Déterminer la hauteur du cône de révolution ci-dessus.

2) Déterminer la surface latérale du cône (valeur exacte et approchée).

3) Déterminer le volume v du cône (valeur exacte et approchée).

Exercice 17.2



1) Calculer le rayon du disque de base du cône ci-dessus.

2) Calculer la hauteur du cône.

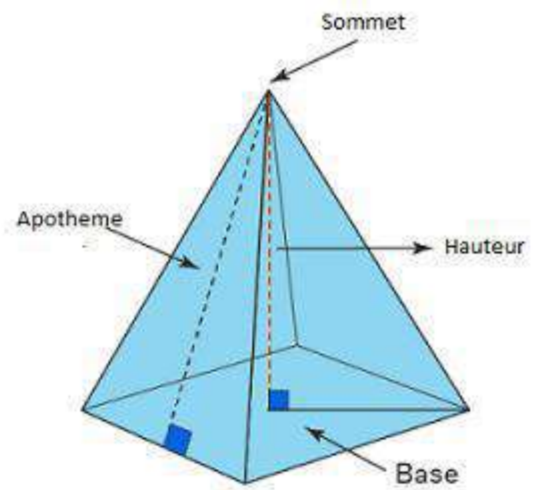
3) Calculer le volume du cône.

4) Calculer la surface latérale du cône .

Exercice 17.3

Un cône de révolution à une hauteur de 27 cm et un volume de 452,16 cm^3 . Calculer le rayon de son disque de base.

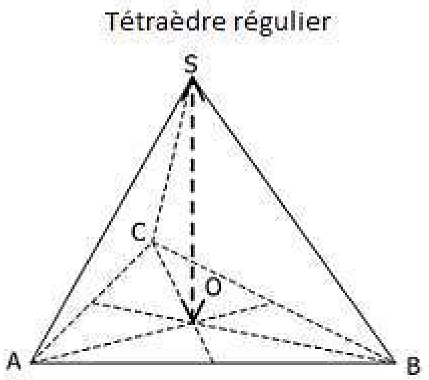
Pyramide régulière



Une pyramide est dite régulière si elle a pour base est un polygone régulier (carré ,triangle équilatéral, hexagone régulier…) et la hauteur passe par le centre de la base.

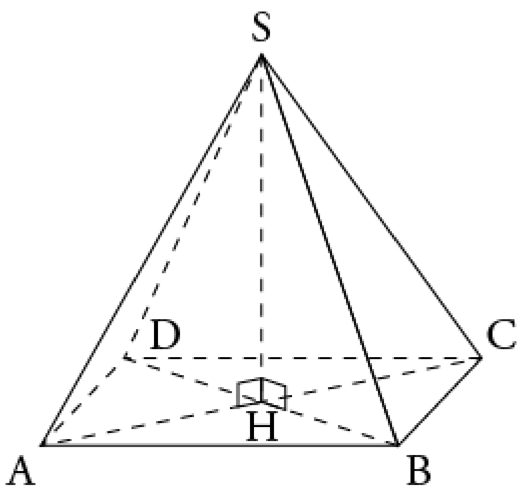
Dans une pyramide régulière les faces latérales sont des triangles isocèles superposables.

Si la base est un triangle équilatéral, la pyramide est un tétraèdre régulier, les différentes faces latérales et la base sont identiques.



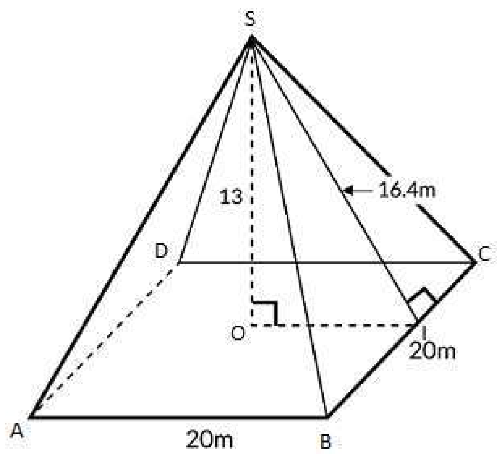
$Volume\ de\ la\ pyramide = \frac{1}{3} \times surface\ de\ base\ \times hauteur$

Exemple : Volume V de la pyramide de sommet S à base carré ABCD



$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times AB^2 \times SH$

Exemple : SABCD est une pyramide régulière de sommet S de base le carré ABCD.



1) Calculer le volume V de la pyramide SABCD.

2) Calculer la surface $\mathcal{B}$ de la face latérale SBC, en déduire la surface latérale L de la pyramide.

3) Calculer la surface totale T de la pyramide.

***

1) Volume v de la pyramide

Pyramide à base carré ABCD , $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times AB^2 \times SO$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 20^2 \times 13$

$$V_{SABCD} = \frac{1 \times 400 \times 13}{3} = \frac{5200}{3}$$

$\boldsymbol{V_{SABCD} = \frac{5200}{3}\ m^3}$ (valeur exacte du volume de la pyramide)

2) Surface $\mathcal{B}$ de la face latérale SBC

SBC est un triangle de base BC et de hauteur SI on a donc :

$$\mathcal{B} = \frac{SI \times BC}{2} = \frac{16{,}4 \times 20}{2} = 16{,}4 \times 10 = 164$$

La surface du triangle SBC est , $\boldsymbol{\mathcal{B} = 164\ m^2}$

La pyramide SABCD est une pyramide régulière donc les 4 faces latérales, SAB, SBC, SDC et SAD sont identiques. L'aire latérale de la pyramide est la somme des aires des faces latérales, d'où :

$L = 4 \times 164 = 656$; $\boldsymbol{L = 656\ m^2}$

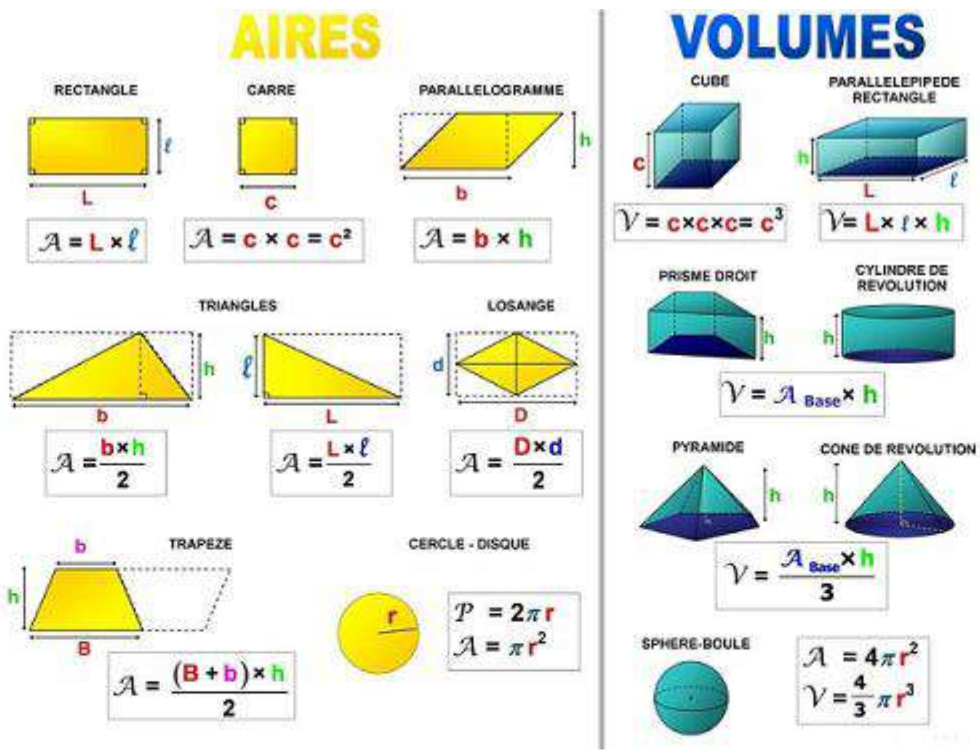
3) Surface totale T de la pyramide

La surface totale de la pyramide est la somme de la surface latérale et de la surface de base de la pyramide .

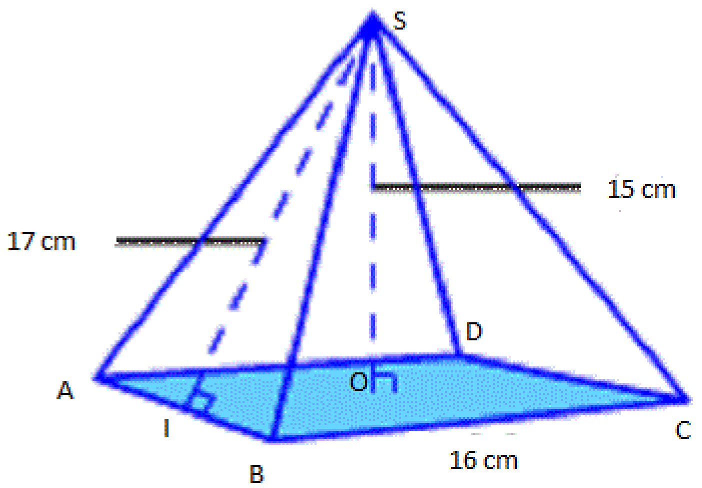
$T = L + AB^2$

$T = 656 + 20^2$; $T = 656 + 400$; $T = 1056$ on a $\boldsymbol{L = 1056\ m^2}$

Formulaire :



Exercice 17.4



1) Calculer le volume V de la pyramide SABCD.

2) Calculer la surface $\mathcal{B}$ de la face latérale SAB, en déduire la surface latérale L de la pyramide.

3) Calculer la surface totale T de la pyramide.

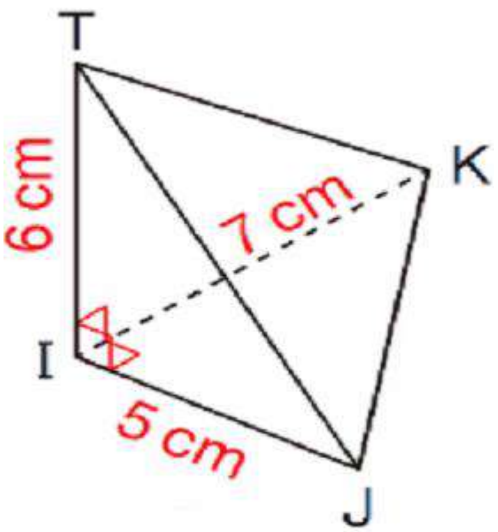
Exercice 17.5

1) Donner la nature de la base du tétraèdre ci-dessous.

2) Calculer la surface $\mathcal{A}$ du triangle IJK.

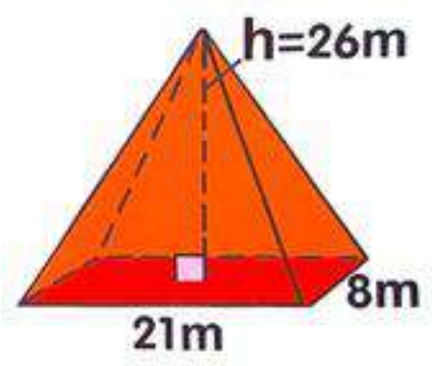
3) Nommer la hauteur du tétraèdre TIJK.

4) Calculer le volume V de la pyramide ci-dessous.

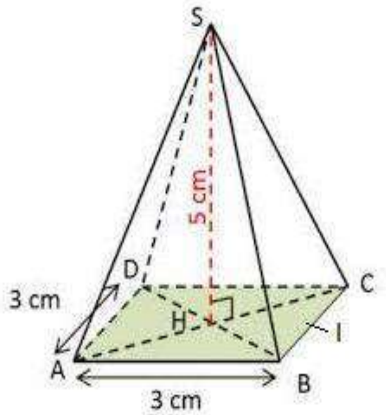


Exercice 17.6

Calculer le volume de la pyramide à base rectangulaire ci-dessous



Exercice 17.7



Sur la pyramide à base carré ci-dessus, I est le milieu de [BC].

1) Calculer HI.

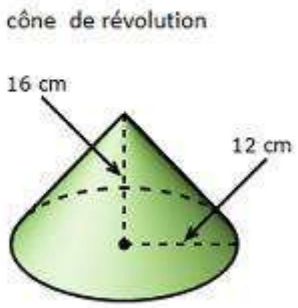
2) Calculer SI .

3) Calculer le volume de la pyramide SABCD.

4) Calculer la surface latérale L de la pyramide.

5) Calculer la surface totale T de la pyramide.

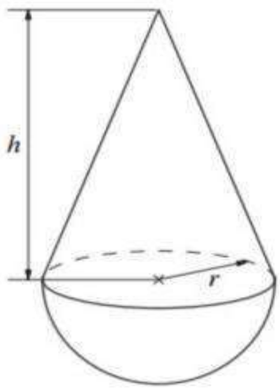
Exercice 17.8



1) Déterminer la mesure de la génératrice
2) Déterminer le volume V du cône
3) Déterminer la surface latérale L cône
4) Déterminer la surface totale T du cône

Exercice 17.9

On donne r=10 cm ; h=12 cm



1) Calculer le volume V’ de la demi-boule.

2) Calculer le volume V’’ du cône.

3) Calculer le volume V du solide constitué du cône et de la demi-boule.

Exercice 17.10

Un cône de révolution est tel que le rayon du disque de base et sa hauteur ont la même longueur , h=r=a. La génératrice du cône mesure 6 cm.

1) Faire une esquisse du cône de révolution.

2) Calculer a.

3) Calculer la surface latérale du cône.

4) Calculer la surface totale du cône.

5) Calculer le volume du cône.

Thème 18 : Les questions à choix multiples (QCM)

Pour chaque QCM ci-dessous , une seule réponse est exacte. Pour chaque question, indiquer le numéro de la bonne réponse.

Aucune justification n'est exigée .

On pourra s'aider de la calculatrice chaque fois qu'on en aura besoin.

QCM 1.

		A	B	C
1	$\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}$ est égal à ….	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	Le nombre décimal 0,246 s'écrit aussi	$2{,}46\times10^{-1}$	$2{,}46\times10^{1}$	$24{,}6\times10^{1}$
3	$6-4(x-2)$ est égal à :	$2x-4$	$14-4x$	$-2-4x$
4	Quelle est l'expression factorisée de $4x^2-12x+9$	$(2x+3)(2x-3)$	$(2x+3)^2$	$(2x-3)^2$
5	Pour $x=-2$, l'expression $5x^2+2x-3$ est égale à	13	-27	17

***

Recherche au brouillon

1) Avec la calculatrice $\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, C)

2) Avec la calculatrice $2{,}46\times10^{-1}=0{,}246$, A)

3) $6-4(x-2)=6-4x+8=6+8-4x=14-4x$, B)

4) $4x^2-12x+9=(2x)^2-2(2x)+3^2=(2x-3)^2$, C)

5) $5(-2)^2+2(-2)-3=5(4)-4-3=20-7=13$, A)

Réponses au QCM 1

1)_C ; 2)_A ; 3)_B ; 4_C) ; 5)_A

QCM 2.

		A	B	C
1	$\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{27}{24}$ est égal à ….	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$
2	$3x(5x-4)$ est égal à :	$12x-15x$	$15x^2-12x$	$5x^2$
3	On lance un dé bien équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.La probabilité de l'évènement « on obtient un nombre supérieur ou égal à 5 » est :	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6}$
4	L'image de -1 par la fonction f définie par $f(x)=3x+2$ est :	-1	2	3
5	Le système $\begin{cases}3x+2y=0\\ x+y=0\end{cases}$	Admet une infinité de solutions	N'admet pas de solution	Admet le couple (0 ;0) comme solution

***

Au brouillon :

1) Avec la calculatrice $\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{27}{24}=-\frac{1}{6}$, C)

2) $3x(5x-4)=15x^2-12x$, B)

3) L'ensemble des cas possible : Ω=$\{1;2;3;4;5;6\}$ et L'ensemble des cas favorables : $\{5;6\}$ la probabilité cherché est de : $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, B)

4) $f(x)=3x+2$, l'image de -1 , $f(-1)=3(-1)+2=-3+2=-1$, A)

5) $\begin{cases}3x+2y=0\\ x+y=0\end{cases}$ test avec (0 ;0) on a $\begin{cases}3(0)+2(0)=0\\ 0+0=0\end{cases}$, C)

Réponses au QCM 2

1)_C ; 2)_B ; 3)_B ; 4_A) ; 5)_C

QCM 3.

		A	B	C
1	82×10^{-3} est égal à ….	$0{,}820$	$0{,}082$	82000
2	$\sqrt{48}$ est égal à ….	$16\sqrt{3}$	$3\sqrt{4}$	$4\sqrt{3}$
3	$(\frac{4}{3})^2 - \frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{9}$
4	$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + 1$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{7}{6}$	0
5	L'équation $\frac{x}{2} = \frac{6}{5}$ a pour solution	3	$\frac{5}{3}$	$\frac{12}{5}$

***

Au brouillon :

1) Avec la calculatrice $82 \times 10^{-3} = 0{,}082$, B)

2) Avec la calculatrice $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, C)

3) Avec la calculatrice $(\frac{4}{3})^2 - \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$, C)

4) Avec la calculatrice , $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{6}$, A)

5) $\frac{x}{2} = \frac{6}{5}$; $5 \times x = 6 \times 2$; $5 \times x = 12$; $x = \frac{12}{5}$, C)

Réponses au QCM 3

1)_B ; 2)_C ; 3)_C ; 4_A) ; 5)_C

QCM 4.

		A	B	C
1	La forme développée de $(3x+5)^2$ est :	$3x^2+25$	$9x^2+25$	$9x^2+30x+25$
2	$\frac{\sqrt{48}}{2}$ est égal à ….	$\sqrt{24}$	3,464	$2\sqrt{3}$
3	L'expression qui est égale à 10 si on choisit la valeur $x=4$ est :	$x(x+1)$	$(x+1)(x-2)$	$(x+1)^2$
4	Le nombre solution de l'équation $2x-(8+3x)=2$ est :	10	-10	2
5	Le volume d'un cône de révolution de hauteur 4 cm et de base un disque de rayon 6 cm est :	$75{,}36 cm^3$	$150{,}72\ cm^3$	$152{,}16 cm^3$

***

Au brouillon :

1) $(3x+5)^2 = 9x^2+30x+25$, C)

2) Avec la calculatrice $\frac{\sqrt{48}}{2} = 2\sqrt{3}$, C)

3) $x(x+1) = 4(4+1) = 4(5) = 20$;

$(x+1)(x-2) = (4+1)(4-2) = 5(2) = 10$, B)

4) $2x-(8+3x) = 2$, $2x-8-3x = 2$; $-x-8 = 2$; $-x = 2+8$; $-x = 10$; $x = -10$, B)

5) Volume du cône , $\frac{3{,}14\times 6^2\times 4}{3} = 150{,}72$, B)

Réponses au QCM 4

1)_C ; 2)_C ; 3)_B ; 4_B ; 5)_B

QCM 5.

<table>
<tr><th></th><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Le nombre $\sqrt{6^2}$ est égal à</td><td>12</td><td>6</td><td>36</td></tr>
<tr><td>2</td><td>L'application linéaire f définie par : $f(x) = -5x$ est</td><td>croissante</td><td>décroissante</td><td>constante</td></tr>
<tr><td>3</td><td>L'amplitude de l'intervalle [2 ; $\sqrt{5}$] est égale à</td><td>$\sqrt{5}-2$</td><td>$2+\sqrt{5}$</td><td>$2-\sqrt{5}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>On donne le tableau des effectifs d'une série statistique:
<table>
<tr><td>Notes</td><td>[0;5[</td><td>[5;10[</td><td>[10;15[</td><td>[15;20]</td><td>Total</td></tr>
<tr><td>Effectifs</td><td>17</td><td>25</td><td>9</td><td>9</td><td>60</td></tr>
</table>
La classe modale de cette série statistique est</td><td>[15; 20]</td><td>25</td><td>[5; 10[</td></tr>
</table>

***

Au brouillon :

1) $\sqrt{6^2} = 6$. B)

2) L'application linéaire f définie par : $f(x) = -5x$ est décroissante car -5 est négatif . B)

3) L'amplitude de l'intervalle $\left[2\,;\sqrt{5}\right]$ est $\sqrt{5} - 2$ .A)

4) L'effectif le plus grand de cette série est 25 , donc la classe modale est la classe [5 ; 10[.C)

Réponses au QCM 5

1)_B ; 2)_B ; 3)_A ; 4_C

QCM 6.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
Question 1	Les diviseurs communs à 30 et 42 sont :	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 et 7.	1 ; 2 ; 3 et 6.	1 ; 2 ; 3 ; 5 et 7
Question 2	Un sac contient 10 boules blanches et 5 boules noires. On tire une boule au hasard. La probabilité de tirer une boule noire est égale à :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
Question 3	La représentation graphique des solutions de l'inéquation $7x-5<4x+1$ est :			
Question 4	$\frac{(10^{-3})^2\times 10^4}{10^{-5}}$ est égal à	10^{-7}	10^{-15}	10^3

***

Au brouillon :

1) $30 \div 1 = 30$

$30 \div 2 = 15$

$30 \div 3 = 10$

$30 \div 5 = 6$

$30 \div 6 = 5$

Div(30)={1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30}

$42 \div 1 = 42$

$42 \div 2 = 21$

$42 \div 3 = 14$

$42 \div 6 = 7$

$42 \div 7 = 6$

Div(42)={1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42}

$Div(30) \cap div(42) = \{1; 2; 3; 6\}$ .B)

2) Nombre total de billes 10+5=15, probabilité de tirer une noire $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. A)

3) $7x - 5 < 4x + 1$; $7x - 4x < 1 + 5$; $3x < 6$; $x < 2$ .A)

4) Avec la calculatrice $\frac{(10^{-3})^2 \times 10^4}{10^{-5}} = 1000 = 10^3$ .C)

Réponses au QCM 6

1)_B ; 2)_A ; 3)_A ; 4_C

QCM 7.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$D = (x-3)(x+5)$ La forme développée de D est :	$x^2 + 8x - 15$	$x^2 + 2x - 15$	$x^2 - 2x - 15$
2	$F = (x+5)(x-1) - 4(x-1)^2$ La forme factorisée de F est :	$(x-1)(3x+9)$	$(x-1)(x-9)$	$-(x-1)(3x-9)$
3	$E = -2\sqrt{63} + 8\sqrt{7}$ L'expression simplifiée de E est :	$2\sqrt{7}$	$6\sqrt{7}$	$-2\sqrt{7}$
4	Si dans un triangle MNP on l'égalité $MN^2 = MP^2 + PN^2$ alors MNP est :	Rectangle en M	Rectangle en N	Rectangle en P
5	$A = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \div \frac{1}{2}$. La forme irréductible de a est :	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-2
6	Le pgcd de 990 et 1890 est :	90	6930	20790

***

Au brouillon :

1) $D = (x-3)(x+5) = x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2 + 2x - 15$. B)

2) $F = (x+5)(x-1) - 4(x-1)^2$

$F = (x+5)(x-1) - 4(x-1)(x-1)$

$F = (x-1)[(x+5) - 4(x-1)]$

$F = (x-1)(x+5-4x+4)$

$F = (x-1)(-3x+9) \quad ou \;\; F = -(3x-9)(x-1)$. C)

3) Avec la calculatrice $E = -2\sqrt{63} + 8\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$ .A)

4) Si dans un triangle MNP on l'égalité $MN^2 = MP^2 + PN^2$ alors MNP est rectangle en P . C)

5) Avec la calculatrice $A = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{-11}{2}$ .A)

6) pgcd de 990 et 1890 : Avec l'algorithme d'Euclide, le pgcd (990 et 1890) =90 . A)

Réponses au QCM 7

1)_ B ; 2)_C ; 3)_A ; 4)_C ; 5)_A ; 6)_A

QCM 8.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le nombre $\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\times\frac{12}{5}$ est égal à :	$\frac{-5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$
2	On pose $A=12\sqrt{5}-9\sqrt{45}+\sqrt{125}$ L'écriture simplifiée de A est :	$-10\sqrt{5}$	$5\sqrt{10}$	$10\sqrt{5}$
3	La distance de 1 *à* $\sqrt{3}$ est égal à :	$1-\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	$-1+\sqrt{3}$
4	La base de la pyramide régulière SABC de sommet S est :	Un triangle équilatéral	Un triangle isocèle	Un carré
5	L'intersection des intervalles [-1 ; 5[et]-3 ; 2[est :	[-1 ; 2]	[-1 ; 2[	] ← ; -1]

***

Au brouillon :

1) Calculatrice $\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\times\frac{12}{5}=-\frac{5}{2}$. A)

2) Calculatrice $A=12\sqrt{5}-9\sqrt{45}+\sqrt{125}=-10\sqrt{5}$. A)

3) La distance de 1 à $\sqrt{3}$ est $\sqrt{3}-1$ $=-1+\sqrt{3}$. C)

4) La base d'un tétraèdre régulier est un triangle équilatéral . A)

5) ~~/ / / / /]/ / / / / /[[/// [//////////~~

-3 -1 2 5

La réponse est [-1 ; 2[. B)

Réponses au QCM 8

1)_ A ; 2)_A ; 3)_C ; 4)_A ; 5)_B ;

QCM 9.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Soit A= 0,27×0,2×10^4 La notation scientifique de A est :	$5{,}4 \times 10^2$	$5{,}4 \times 10^{-1}$	$5{,}4 \times 10^{-2}$
2	On donne $F = (x+2)^2 - (2x-1)^2$ L'expression factorisée de F est :	$(x-3)(3x+1)$	$(3-x)(3x+1)$	$(x+3)(3x+1)$
3	L'écriture sans radical au dénominateur du nombre $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ est :	$-2-\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}$	$-2+\sqrt{5}$
4	Sur la figure ci-dessous, les droites (ER) et (CT) se coupent au point A les droites (CE) et (RT) sont parallèles :  D'après la propriété de Thalès :	$\frac{RT}{EC} = \frac{AT}{TC}$	$\frac{AT}{AC} = \frac{AR}{AE}$	$\frac{AE}{AR} = \frac{AC}{TC}$
5	Si a est un réel , alors $\sqrt{a^2} =$	a	a ou -a	a^2

***

Au brouillon :

1_

$$A = 0{,}27 \times 0{,}2 \times 10^4 = 0{,}054 \times 10^4 = 0{,}054 \times 10000 = 540 = 5{,}4 \times 10^2$$

1 _A)

2_ $F = (x+2)^2 - (2x-1)^2 = [(x+2)+(2x-1)][(x+2)-(2x-1)]$

$F = (x+2+2x-1)(x+2-2x+1)$

$F = (3x+1)(-x+3) \quad ou \quad F = (3-x)(3x+1)$. B)

3_ Calculatrice $\frac{1}{2+\sqrt{5}} = -2+\sqrt{5}$. C)

4_ En appliquant la propriété de Thales on a $\frac{AE}{AR} = \frac{AC}{AT} = \frac{EC}{TR}$; $\frac{AE}{AR} = \frac{AC}{AT}$. C)

5_ $\sqrt{a^2} = |a|$; $|a| = a$, $si\ a\ est\ positif$, $|a| = -a$ $si\ a\ est\ négatif$, la réponse est a ou –a .

5_B)

Réponses au QCM 9

1)_ A ; 2)_B ; 3)_C ; 4)_C ; 5)_B ;

QCM 10.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	Quelle est la forme factorisée de $(x+1)^2-9$?	$(x-2)(x+4)$	x^2+2x-8	$(x-8)(x+10)$
2.	Que vaut $5^n \times 5^m$?	5^{nm}	5^{n+m}	25^{n+m}
3.	À quelle autre expression le nombre $\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\div\frac{5}{2}$ est-il égal?	$\frac{3}{3}\div\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}-\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$	$\frac{27}{15}$
4.	Quels sont les nombres premiers entre eux?	774 et 338	63 et 44	1 035 et 774
5.	Quel nombre est en écriture scientifique?	$17,3\times10^{-3}$	$0,97\times10^{7}$	$1,52\times10^{3}$

***

Au brouillon :

1_ Factorisation de :

$$(x+1)^2-9=(x+1)^2-3^2=(x+1+3)(x+1-3)=(x+4)(x-2)$$

1_A)

2_$5^n \times 5^m = 5^{n+m}$. B)

3) $\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\div\frac{5}{2}=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{2}{5}$. B)

4) Rappel : deux nombres a et b sont premiers entre eux si le pgcd (a et b)=1.

$\frac{774}{338}=\frac{387}{169}$; $\frac{63}{44}=\frac{63}{44}$; $\frac{1035}{774}=\frac{115}{86}$ Réponse .B car la fraction $\frac{63}{44}$ est irréductible .

4_B)

5_C

Réponses au QCM 10

1)_ A ; 2)_B ; 3)_B ; 4)_B ; 5)_C ;

Thème 19 : Les symétries

I. Le parallélogramme

Définition : Le parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux et égaux deux à deux.

Propriétés :

Un quadrilatère avec deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.

Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

Un quadrilatère dont les angles opposés sont égaux est un parallélogramme.

La famille des parallélogrammes.

Si un parallélogramme à un angle droit alors c'est un rectangle.

Si un parallélogramme a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

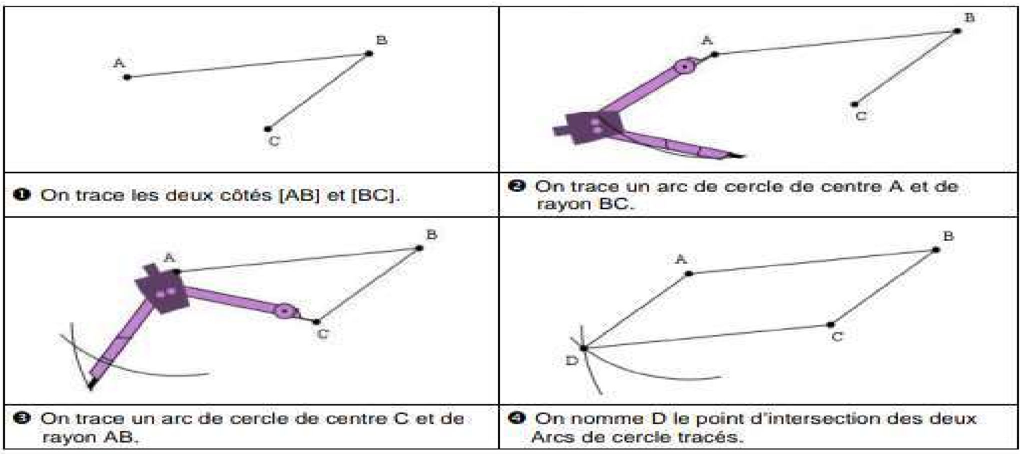
Si un parallélogramme à des cotés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.

Si un parallélogramme à des diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.

Si un parallélogramme à des cotés consécutifs perpendiculaires et de même longueur alors c'est un carré.

Si un parallélogramme à des diagonales perpendiculaires et de même longueur alors c'est un carré.

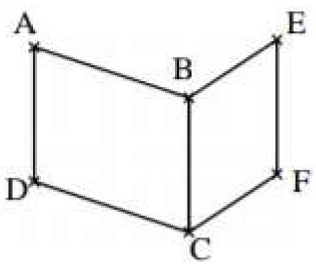
Construction du parallélogramme.



Par la construction au compas on a obtenu le parallélogramme : ABCD ou BCDA ou CBAD l'ordre est important lorsqu'on nomme un parallélogramme.

Exemple :

Dans la figure ci-dessous ; les quadrilatères ABCD et BEFC sont des parallélogrammes. Démontrons que AEFD est un parallélogramme.



1) ABCD est un parallélogramme donc (AD)// (BC) et AD=BC

2) BEFC est un parallélogramme donc (BC)// (EF) et BC=EF

De 1) et 2) on a :

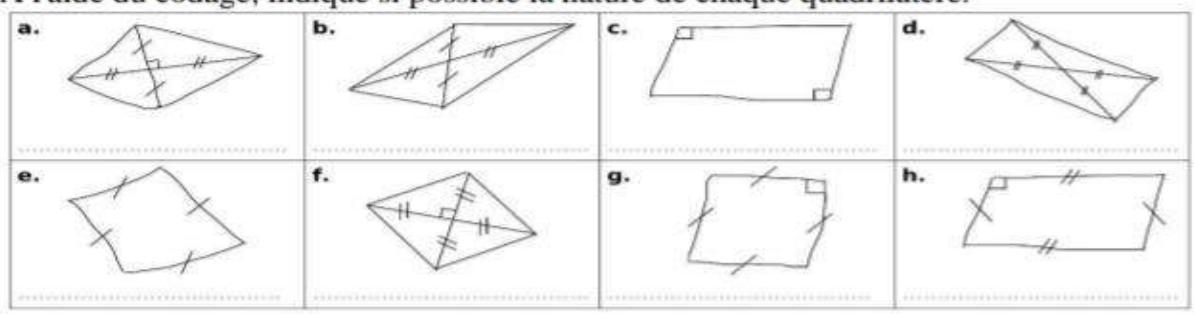
$$\left.\begin{array}{l}(AD)//(BC)\\(BC)//(EF)\end{array}\right\}\quad \text{Alors}\quad (AD)//\ (EF)$$

$$\left.\begin{array}{l}AD= BC\\BC = EF\end{array}\right\}\quad \text{Alors}\quad AD =EF$$

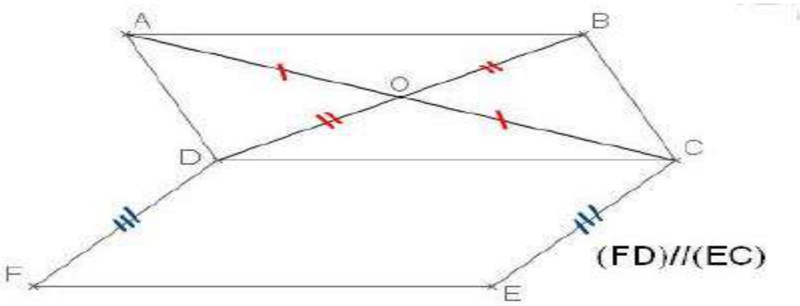
On a (AD)// (EF) et AD=EF les côtés opposés du quadrilatère AEFD sont opposés et de même longueur, alors AEFD est un parallélogramme.

Exercice 19.1 :

À l'aide du codage, indique si possible la nature de chaque quadrilatère.



Exercice 19.2:



1) Donner la nature du quadrilatère ABCD, puis Justifier votre réponse.

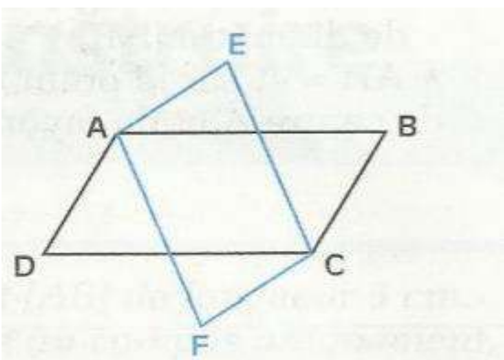
2) Donner la nature du quadrilatère FDCE, puis Justifier votre réponse.

3) Démontrer que (AB)// (FE)

4) Démontrer que AB =FE

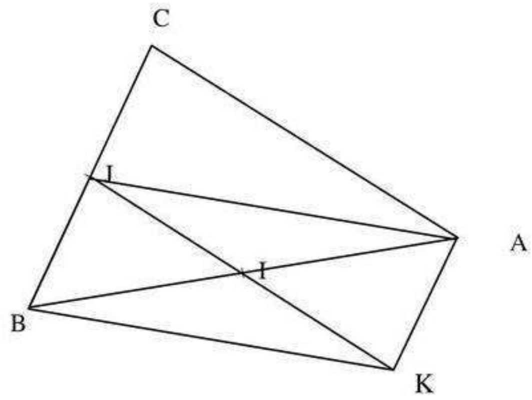
5) Justifier que le quadrilatère ABEF est un parallélogramme.

Exercice 19.3: Les quadrilatères ABCD et AECF sont des parallélogrammes.



Justifier que les segments [BD] et [EF] ont un même milieu, puis en déduire que EBFD est un parallélogramme.

Exercice 19.4: Sur la figure ci-dessous J est le milieu de [BC] et I est le milieu de [AB].AJBK est un parallélogramme.



1) Démontrer que AKJC est un parallélogramme.

2) Démontrer que (IJ)// (AC) puis que $IJ = \frac{1}{2}AC$

3) Enoncé la propriété de la droite des milieux dans le triangle ABC.

Exercice 19.5 :

1) Construire un triangle ABC et I milieu du segment [AB].tracer une droite parallèle à la droite (BC) et passant par I ,elle coupe le segment [AC] en J.

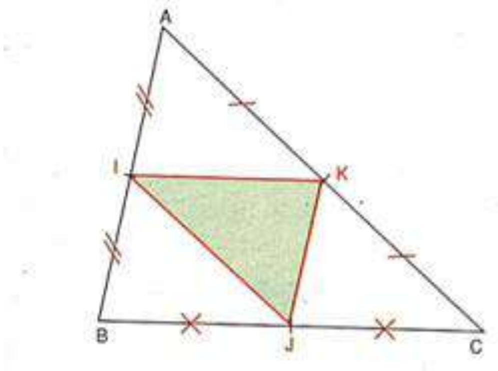
2)Tracer la parallèle à la droite (AB) passant par C ,elle coupe (IJ) en K. Tracer Le parallélogramme BIKC.

3) Démontrer que AICK est un parallélogramme.

4) Démontrer que J est le milieu de [AC]

5) Enoncer la réciproque de la propriété de la droite des milieux.

Exercice 19.6: On considère la figure suivante :



1) Des hypothèses ci-dessus quelles conséquences immédiates peut-on en déduire ?

2) Le périmètre de ABC est 11,5 cm , calculer le périmètre de IJK.

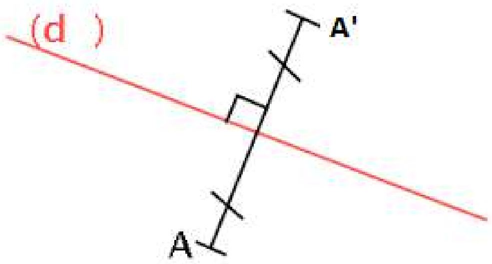
3) L'aire de ABC est $6\ cm^2$, calculer l'aire de IJK.

II. Les symétries centrale et orthogonale.

Symétrie orthogonale.

On appelle symétrie orthogonale ou symétrie axiale, la symétrie par rapport à une droite.

Définition : Deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite (d) si (d) est la médiatrice du segment [AA'].



Propriétés :

Le symétrique d'une droite par rapport à une droite est une droite.

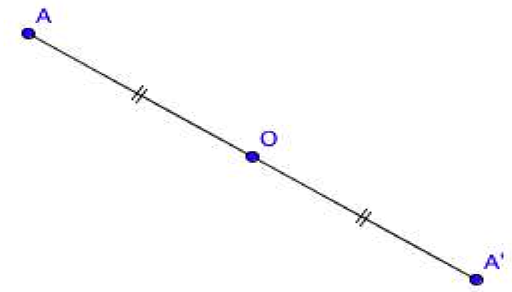
Tout point situé sur l'axe de symétrie est son propre symétrique par rapport à cet axe de symétrie.

Tout point situé sur la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités du segment.

Symétrie centrale.

On appelle symétrie centrale, la symétrie par rapport à un point.

Définition : Deux points A et A' sont symétriques par rapport à un point 0 si O est le milieu du segment [AA'].



Le point O est son propre symétrique par rapport à O

Propriété : Par une symétrie centrale, le symétrique d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

Propriétés :

Par une symétrie centrale ou orthogonale :

Le symétrique d'un segment est un segment de même longueur.

Le symétrique d'un angle est un angle de même mesure.

Le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon.

Notations :

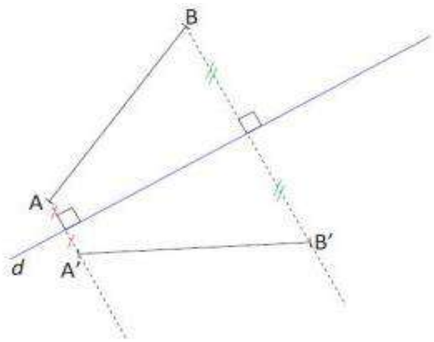
Une symétrie axiale d'axe (d) est notée : $S_{(d)}$

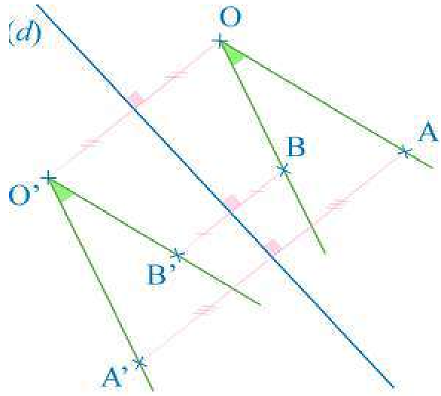
Une symétrie centrale de centre O est notée : S_O

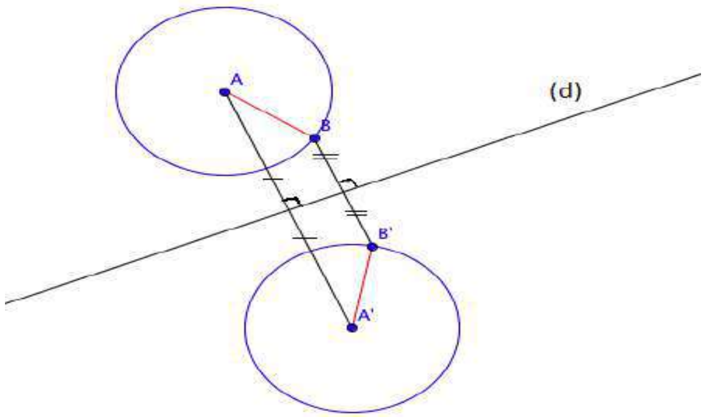
A' image de A par la symétrie d'axe (d), on note $S_{(d)}(A) = A'$

A' image de A par la symétrie centrale de centre O on note : $S_O(A) = A'$

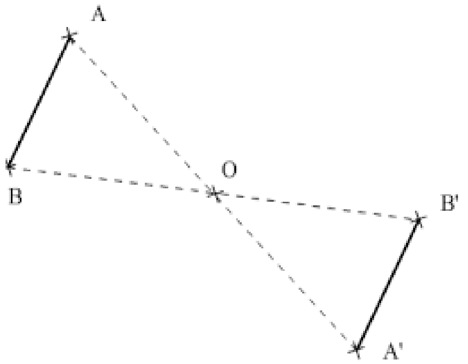
Symétrie orthogonale :

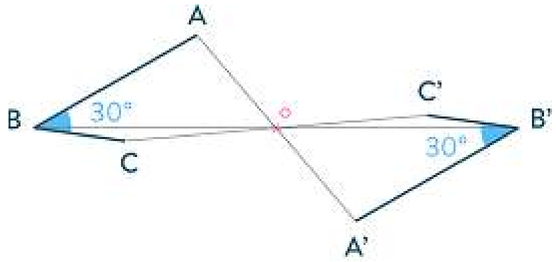


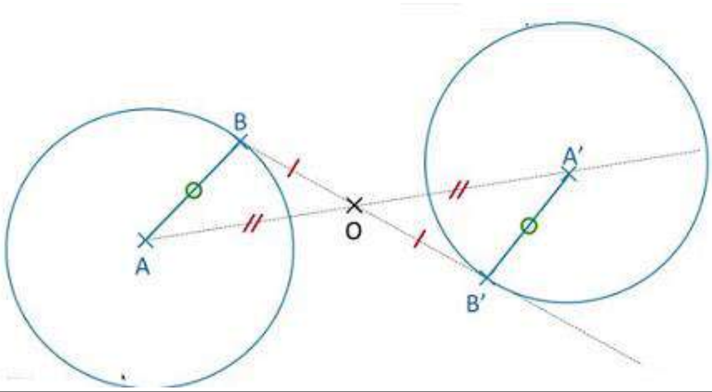




Symétrie centrale :







La symétrie orthogonale et la symétrie centrale conservent :

L'alignement des points

Les milieux des segments

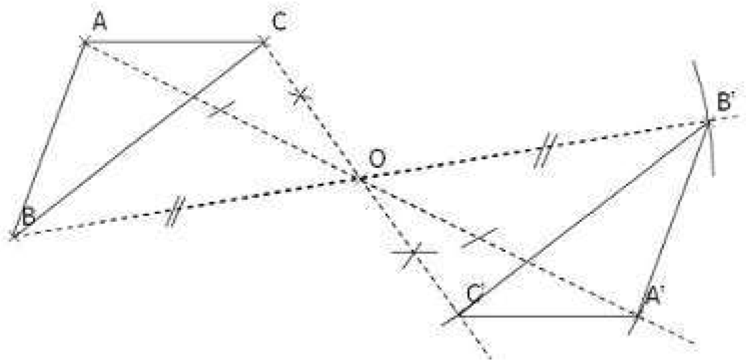
Le parallélisme

L'orthogonalité

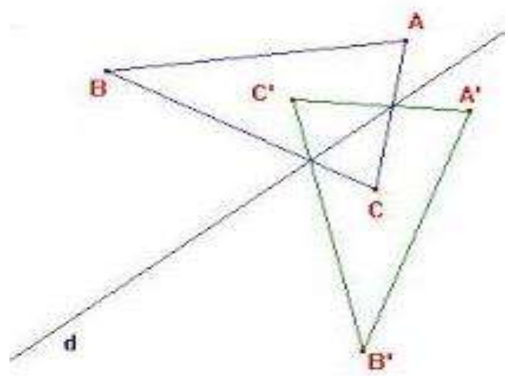
Les aires

Les périmètres

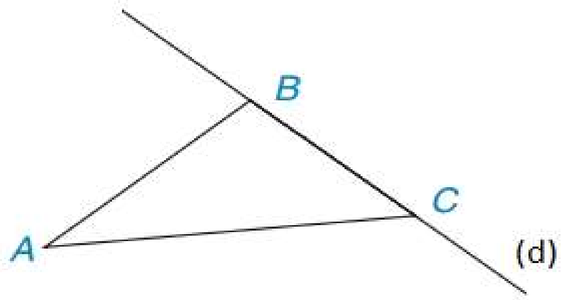
Exemple : Construction du symétrique du triangle ABC par la symétrie de centre O :



Exemple : Construction du symétrique du triangle ABC par la symétrie orthogonale d'axe la droite (d) .



Ex7 : Reproduire la figure ci-dessous et construire l'image du triangle ABC par rapport à la droite (d).



Exercice 19.8: Construire un triangle ABC rectangle en B tel que AB=3,3 cm et BC=6 cm puis construire A'B'C' image de ABC par rapport à (AC).Quelle est la nature de A'B'C' ? Justifier votre réponse.

Exercice 19.9:

1) Tracer un triangle ABD isocèle en A tel que AB=3 cm et BD=5 cm. Placer O milieu de [BD] et C tel que $S_O(A) = C$.

2) Quel est le symétrique de B par rapport à O ? justifier votre réponse.

3) En justifiant, déterminer les longueurs BC et CD.

4) En justifiant donner la nature exacte du quadrilatère ABCD.

Exercice 19.10:

ABCD un carré de coté 4 cm .

1) Construire O le centre de symétrie du carré ABCD.

2) Construire les points E,F et G symétriques des points B,C et D par rapport à A.

3) Quelle est le symétrique de ABCD par rapport à A.

4) A l'aide de la figure compléter :

$S_A(A) = \cdots \quad ; \quad S_A(CD) = \cdots \quad ; \quad S_A([AD)) = \cdots$

5) En justifiant donner la nature de AEFG et calculer son aire.

Exercice 19.11 :

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 5 cm . (d) et (d') deux droites perpendiculaires en O et support de deux diamètres du cercle (C) .

Soit A un point de (C) n'appartenant ni à (d), ni à (d') .

1) Construire le symétrique de B de A par rapport à (d), le symétrique E de B par rapport à (d') , le symétrique F de E par rapport à (d).

2) Démontrer que les points B, E et F appartiennent au cercle (C) .

3) Démontrer que les droites (AB) et (BE) sont perpendiculaires.

4) Quelle est la nature du quadrilatère ABEF ? Justifier.

Exercice 19.12 :

ABC un triangle tel que AB=AC=5 cm et BC=3,5 cm. Faire une figure.

Construire E le symétrique de C par rapport à (AB).T est le point d'intersection des droites (AB) et (BC).

1) Donner la nature de ACE, puis justifier.

Démontrer que (AB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAE}$.

3) Construire F le symétrique de A par rapport à (BC).Donner la nature du triangle ATF, puis justifier.

Démontrer que (TB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ATF}$.

4) Les droites (AC) et (TF) se coupent en G. Démontrer que (GB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AGT}$

<u>Thème 20 : Probabilités(2)</u>

<u>Rappels</u>

<u>Vocabulaire :</u>

La probabilité d'un évènement est une valeur comprise entre 0 et 1.

La probabilité d'un évènement certain est égale à 1.

La probabilité d'un événement impossible est égale à 0.

La probabilité s'exprime par un pourcentage, un nombre décimal positif inférieur à 1 ou une fraction positive inférieure à 1.

La probabilité d'un évènement A se note p(A) et son évènement contraire est noté $\bar{A}$ (lire '' A barre'') .

$p(A) + p(\bar{A}) = 1$ ou $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

La somme des probabilités des évènements élémentaires est égale à 1.

<u>Situation d'équiprobabilité :</u>

<u>Définition :</u>

Si tous les évènements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

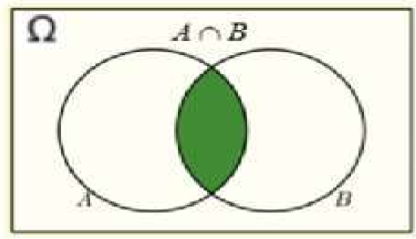
Calcul de la probabilité d'un évènement A en situation d'équiprobabilité.

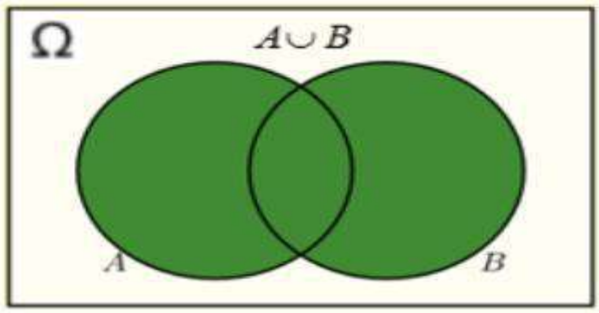
$$\mathrm{p(A)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

<u>Intersection et réunion d'évènements</u>

L'évènement A ou B est constitué des issues réalisant l'évènement A ou l'évènement B il est noté $A \cup B$ lire '' A union B''.

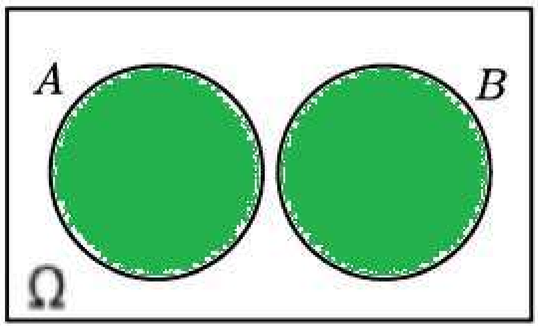
L'évènement A et B est constitué des issues réalisant simultanément l'évènement A et l'évènement B , il est noté $A \cap B$, lire '' A inter B ''<u>Diagrammes de Venn de deux évènement A et B.</u>





A et B deux évènements de l'univers des possibles oméga (Ω)

Propriété : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$



Les ensembles A et B sont incompatibles ou disjoints leur intersection est vide , $A \cap B = \emptyset$.

Propriété : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Exemple :

On lance un dé équilibré à 6 faces , numérotées de 1 à 6 . On note les évènements :

A : « le numéro obtenu est impair »

B : « le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4 »

1)Déterminer les ensembles A , B et l'intersection des ensembles A et B .

2) Calculer les probabilités des évènements A , B et $A \cap B$.

3) Calculer $p(A \cup B)$.

***

Soit Ω l'univers des possibles on a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

1) $A = \{1; 3\,; 5\}$, $B = \{1; 2; 3\,; 4\}$ et $A \cap B = \{1; 3\}$

2) Déterminons les probabilités :

card A= 3 , card B=4 et card $(A \cap B)$=2 et cardΩ=6

$p(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$; $\boldsymbol{p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$

$p(B) = \frac{cardB}{card\Omega}$; $\boldsymbol{p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$

$p(A \cap B) = \frac{card(A\cap B)}{card\Omega}$; $\mathbf{p(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$

3) Calculons $p(A \cup B)$.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

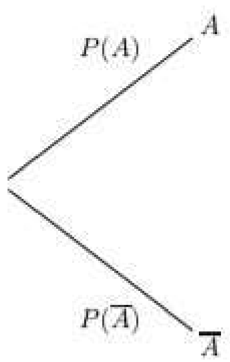
$p(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6}$;

on a $p(A \cup B) = \frac{3+4-2}{6} = \frac{5}{6}$; $\boldsymbol{p(A \cup B) = \frac{5}{6}}$

<u>Tableau de probabilité de deux évènements A et B .</u>

	B	$\overline{B}$	Total
A	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$	
$\overline{A}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	
Total			

<u>Arbre de probabilités</u>



La somme des probabilités issues d'un nœud est égale à 1.

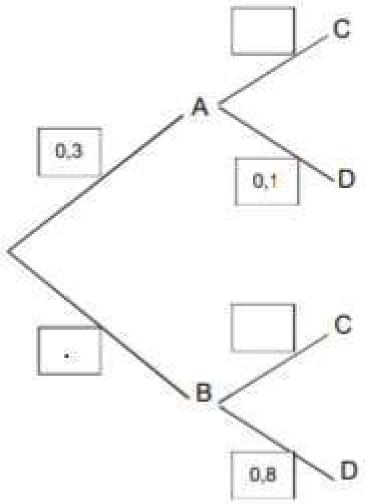
La probabilité d'un « chemin » est égale au produit des probabilités inscrite

Sur toute les branches de ce chemin.

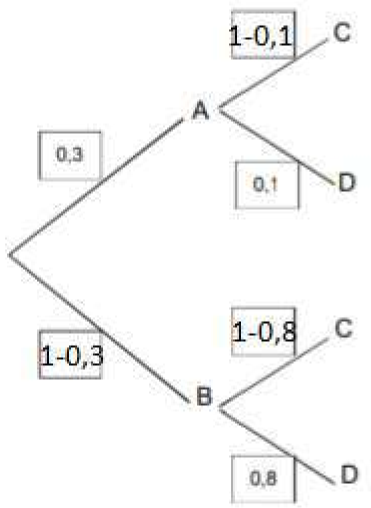
Les probabilités de deux « chemins » différents s'additionnent.

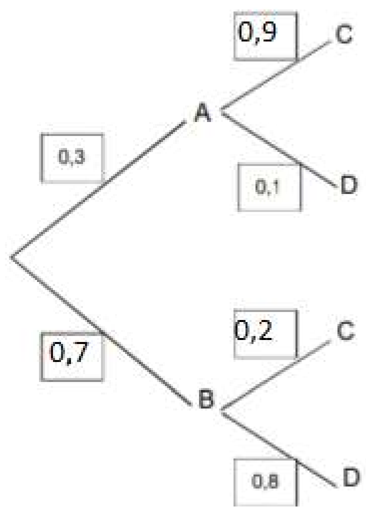
Exemple :

Compléter l'arbre de probabilité suivant :



Arbre compléter :





Exemple :

Une expérience aléatoire à deux épreuves consiste à lancer une pièce de monnaie équilibrée dont on note le côté pile (P) et le côté face (F),après le lancé de la pièce de monnaie, on tire au hasard un jeton d'un sac contenant 4 jetons noirs ; 2 jetons rouges et 3 jetons verts et on note sa couleur.

On note $\cap R$, l'évènement « la pièce est tombé sur pile et on a tiré un jeton rouge du sac ».

1) Faire un arbre de probabilité de cette expérience.

2) En déduire la probabilité l'évènement « la pièce est tombé sur pile et on a tiré un jeton rouge du sac ».

***

Nombre de boule du sac : 4+2+3 = 9

La probabilité d'obtenir pile est de $\frac{1}{2}$, celle d'obtenir face est aussi de $\frac{1}{2}$.

La probabilité de tirer un jeton noir est de $\frac{4}{9}$.

La probabilité de tirer un jeton rouge est de $\frac{2}{9}$.

La probabilité de tirer un jeton vert est de $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

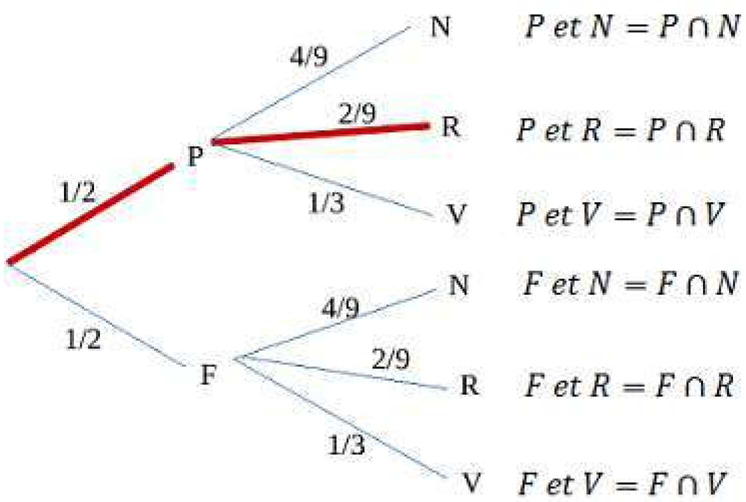
Arbre de probabilité

On note les évènements :

P : « la pièce tombe le côté pile » et F : « la pièce tombe le côté face ».

N : « le jeton tiré est noir » , R : « le jeton tiré est rouge » et V : « le jeton tiré est vert » .

1) Construction de l'arbre de probabilité :



2) Calculons $P(P \cap R)$, probabilité de l'évènement « la pièce est tombé sur pile et on a tiré un jeton rouge du sac ».

$\mathrm{P(P \cap R)} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1\times2}{2\times9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$; $\mathbf{P(P \cap R)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$

Exemple :

Une classe de 3^{e} est constituée de 25 élèves.

Certains sont externes, les autres sont en internat. Le tableau ci-dessous donne la composition de la classe.

	garçon	Fille	Total
Externes	…	3	…
En internat	9	11	…
Total	…	…	25

1.Recopier et compléter le tableau.

2.On choisit au hasard un élève de cette classe.

a. Quelle est la probabilité pour que cette élève soit une fille ?

b. Quelle est la probabilité pour que cette élève soit externe ?

c. Si cet élève est en internat ,quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

***

1.Les étapes du remplissage du tableau

(1) le total d'élève en internat

(2) le total d'élève externe

(3) total de fille

(4) nombre de garçons externes

(5)total garçon

	garçon	Fille	Total
Externes	5-3=**2**	3	25-20=**5**
En internat	9	11	9+11=**20**
Total	2+9=**11**	11+3=**14**	25

2.a

Soit Ω l'univers des possibles on a card(Ω)= 25 , car il y a 25 élèves dans la classe .

Soit F l'évènement « l'élève choisi est une fille » , il y a au total 14 filles donc card(F)=14 ,

et $p(F) = \frac{card(F)}{card(\Omega)}$; $\mathbf{p(F)} = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{25}}$

2.b

Soit E l'évènement « l'élève choisi est externe » , il y a au total 5 externes donc card(E)=5 ,

et $p(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)}$; $\mathbf{p(E)} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{25}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

2.c. L'élève choisit est en internat ,donc les élèves en internat représentent le nombre de cas possibles soit 20 cas possibles , et il y a 9 garçons en internat on a en tout 9 cas favorables.

La probabilité cherché est égale à $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}}$.

Exemple :

Parmi une promotion de 100 diplômés qui étaient à l'université il y a 10 ans :

77 sont aujourd'hui salariés ; 35 sont pères de familles et 27 sont salariés et père de famille.

1. Construire un diagramme de Venn traduisant cette situation.

2. Combien de diplômés exactement sont ou salariés ou père de famille ou les deux?

3. Combien de diplômés ne sont ni salariés ni père de famille ?

***

1.

A : « le diplômé est salarié »

B : « le diplômé est père de famille »

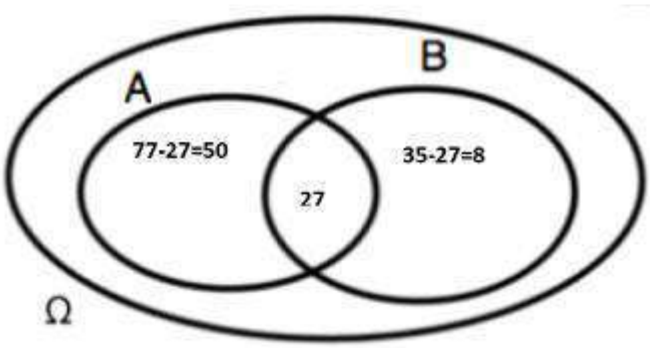
Les étapes de remplissage du diagramme de Venn.

(1) $A \cap B$, soit 27 personnes sont salariés et père de famille.

(2) nombre de diplômés uniquement salarié 77-27=50

(3) Nombre de diplômés uniquement père de famille 35-27=8

Le diagramme de Venn.



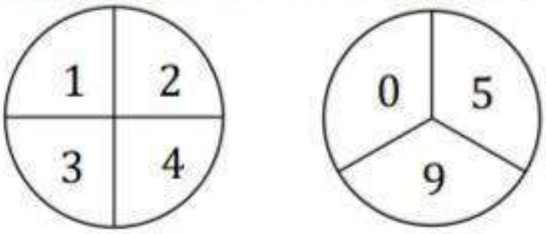
2. Nombre de diplômés qui sont ou salariés ou père de famille ou les deux: **50+27+8=85**

3. Nombre de diplômés qui ne sont ni salariés ni père de famille :**100-85=15**

Exercice 20.1

Ex1:

On fait tourner deux roues de loterie A et B comportant chacune des secteurs identiques comme sur le schéma ci-dessous :



Roue A *Roue B*

1°) Modéliser cette expérience par un tableau à double entrée

2°) On s'intéresse aux deux chiffres obtenus dans l'ordre (roue A d'abord puis roue B) afin de former un nombre : la roue A indique le chiffre des dizaines et la roue B indique le chiffre des unités.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Exercice 20.2 :

On donne les probabilités suivantes :

1) P(A)=0,45 ; p(B)=0,6 et $p(A \cup B) = 0{,}8$. Calculer $p(A \cap B)$.

2) P(A)=0,5 ; p(B)=0,66 et $p(A \cap B) = 0{,}33$ Calculer $p(A \cup B)$.

Exercice 20.3 :

Dans une boite se trouve deux boules blanches, deux boules noires et trois boules rouges.

On tire au hasard une boule dans la boite , sans remettre la première boule tirée on tire au hasard une deuxième boule de la boite.

On s’intéresse aux deux couleurs tirées dans l’ordre.

1. Représenter l’expérience par un arbre de probabilités.

2. Quelle est la probabilité de tirer doux boules blanches ?

3. Quelle est la probabilité de tirer doux boules noires ?

4. Quelle est la probabilité de tirer doux boules rouges ?

5. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de la même couleur?

6. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes?

Exercice 20.4 :

Parmi une promotion de 100 diplômés qui étaient à l’université il y a 10 ans :

77 sont aujourd’hui salariés ; 35 sont pères de familles et 27 sont salariés et père de famille.

A : « le diplômé est salarié »

B : « le diplômé est père de famille »

	A(salarié)	$\bar{A}$ (non salarié)	Total
B (père de famille)	27	…	35
$\bar{B}$ (non père de familllle)		…	…
Total	77	…	100

1.Recopier et compléter le tableau.

2.On choisit au hasard un diplômé de cette promotion.

a. Quelle est la probabilité pour que ce diplômé soit salarié?

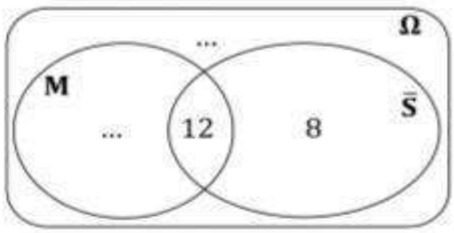
b. Quelle est la probabilité pour que ce diplômé soit père de famille ?

c. Si ce diplômé n’est pas un père de famille , quelle est la probabilité que ce soit un salarié ?

Exercice 20.5 :

Le tableau croisé et le diagramme ci-dessous modélisent la même situation.

	M	$\bar{M}$	Total
S	16	...	...
$\bar{S}$	...	...	20
Total	...	40	...



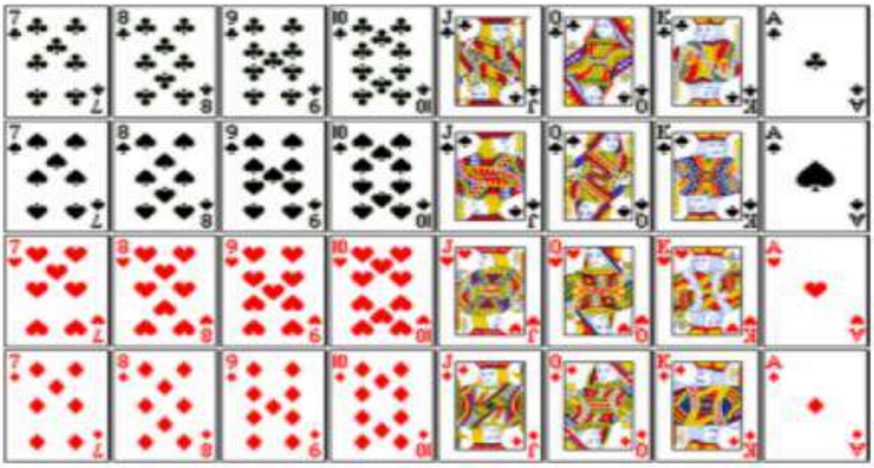
1°) Compléter les deux représentations (bien lire les ensembles représentés dans le diagramme).

2°) En déduire les probabilités suivantes :

a) $P(M)$ b) $P(\bar{M} \cap S)$ c) $P(M \cup S)$

Exercice 20.6 :

Un jeu de 32 cartes est composé des cartes suivantes : 7 ;8 ;9 ;10 ;valet ; dame ; roi et as qui sont constitués de quatre couleurs : trèfle, pique, cœur et carreau.



On tire au hasard une carte du jeu et on considère les évènements suivants :

A : « obtenir un as »

B : « obtenir un trèfle »

D : « ne pas obtenir un carreau »

R : « obtenir une carte rouge »

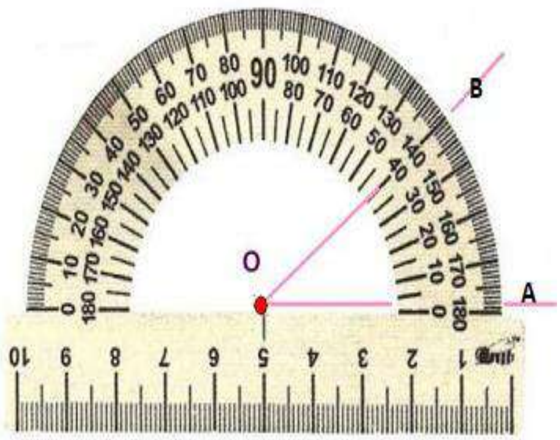
1. Calculer la probabilité de l'évènement A.
2. Calculer la probabilité de l'évènement B.
3. Calculer la probabilité de l'évènement D.
4. Calculer la probabilité de l'évènement R.

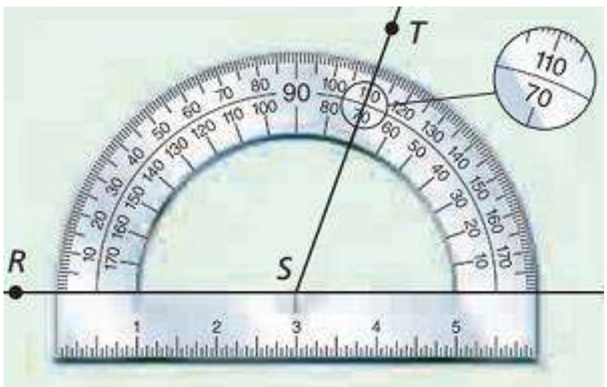
Thème 21 : Rotation-Translation (1)

Rotation :

Mesure des angles :

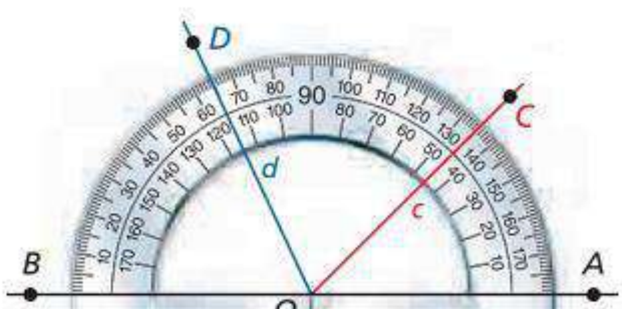
On mesure les angles à l'aide d'un rapporteur.





L'angle $\widehat{AOB}$ ou $\widehat{BOA}$ mesure $40°$ L'angle $\widehat{RST}$ mesure $110°$

Exercice 21.1 :



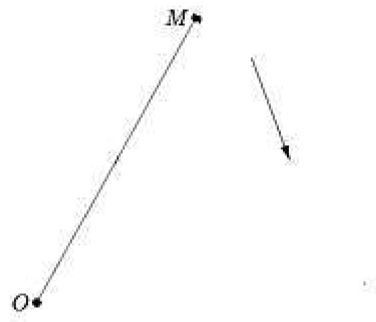
Donner les mesures des angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$.

Rotation :

Présentation :

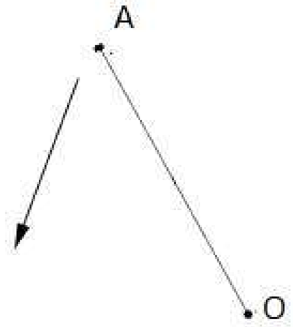
En suivant l'orientation de la flèche construire l'angle $\widehat{M0M'}$ tel que

$mes\widehat{MOM'} = 50°$ et OM=OM'



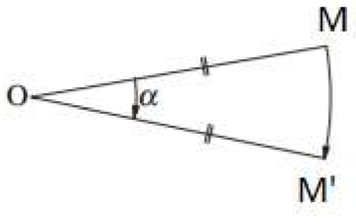
En suivant l'orientation de la flèche construire l'angle $\widehat{A0A'}$ tel que

$mes\widehat{AOA'} = 45°$ et OA=OA'

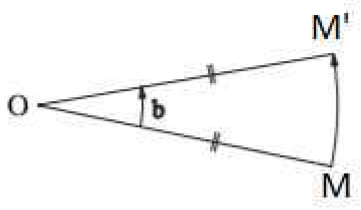


Généralisation :

Voici la **rotation** de centre O et d'angle α , dans le sens des aiguilles d'une montre (**le sens indirect**)

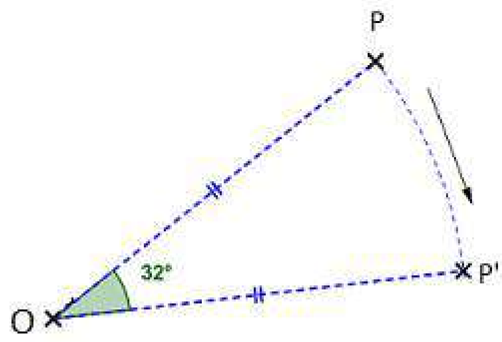


Voici la **rotation** de centre O et d'angle b , dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (**le sens direct**).



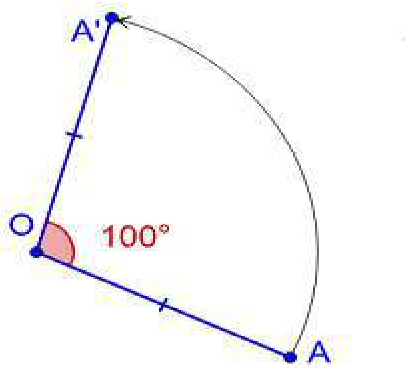
Suivant le sens choisi on appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle α ou b.

Exemple : Construction du point P' image du point P par la rotation de centre O et d'angle $32°$ dans le sens des aiguilles d'une montre (sens indirect)



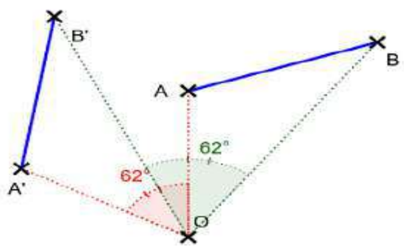
Exemple : Construction du point A' image du point A par la rotation de centre O et d'angle $100°$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre

(sens direct).



Le sens de rotation étant précisé , si M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle α alors : OM=OM' et $\widehat{MOM'} = \alpha$.

Exemple : Construction de segment [A'B'] image du segment [AB] par la rotation de centre O et d'angle $62°$ dans le direct.



Propriétés de la rotation

Par une rotation :

L'image d'un segment est segment de même mesure.

L'image d'une droite est une droite.

L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

L'image d'un angle est un angle de même mesure.

Le centre de rotation se confond avec son image, il est dit **invariant** par cette rotation.

Si l'angle de rotation est de $180°$, la rotation est une symétrie centrale.

La rotation conserve :

Les longueurs

La mesure des angles

Les périmètres

Les aires

Le parallélisme

L'orientation

On note $\boldsymbol{R}_{(\boldsymbol{O};\boldsymbol{\alpha})}$ la rotation de centre O et d'angle .

Exercice 21.2 :

A et B sont deux points du plan tel que AB= 5 cm.

1) Construire le point E image de B par la rotation de centre A et d'angle $45°$ dans le sens direct.

2) Construire le point F image de B par la rotation de centre A et d'angle $45°$ dans le sens indirect.

3) Quelle est la nature du triangle EAF ? Justifier la réponse.

Exercice 21.3 :

1) Construire un triangle ABC , puis dans le sens des aiguilles d'une montre construire B' image de B par la rotation de centre A et d'angle $90°$, puis dans le sens direct , construire C' image de C par la rotation de centre A et d'angle $90°$

1) Quelle est l'image de B' par la rotation de centre A dans le sens direct ?

2) Justifier que les segments [B'C] et [BC'] sont de même longueur.

Exercice 21.4 :

1) Construire un triangle ABC rectangle en B tel que $\widehat{BAC} = 60°, AB = 3\ cm$ et $AC = 6\ cm$.

2) Calculer BC.

3) Tracer le cercle de centre A et de rayon AB ; il coupe le segment [AC] en H.

4) Déterminer la rotation de centre A qui transforme B en H.

4) Construire l'image du triangle ABC par la rotation de centre A qui transforme B en H , sans justifier donner la nature de ce triangle.

Exercice 21.5 :

1) Construire un triangle équilatéral ABC .

2) Par la rotation de centre A et d'angle $60°$, dans le sens indirect :

a. Construire D l'image de C et E l'image de D par cette rotation.

b. Montrer que AB=CD et AE=CD

c. Donner la nature du quadrilatère ABCD ,puis justifier votre réponse.

d. Donner la nature du quadrilatère ACDE ,puis justifier votre réponse.

c. Donner la nature du quadrilatère EBCD , puis justifier votre réponse.

Translation :

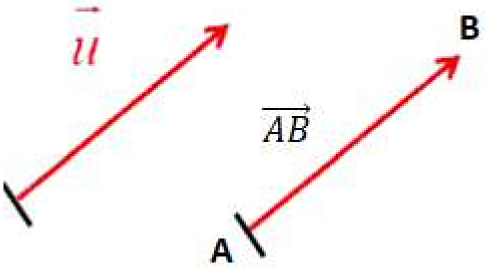
Vecteur :

Présentation :

$\vec{u}$: Le vecteur **u** ; $\overrightarrow{AB}$ **:** Le vecteur (A ; B)

$\overrightarrow{AB}$ **:** A est l'origine du vecteur et B est l'extrémité du vecteur.

Présentation :



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ possède :

-Une direction celle de la droite (AB)

-un sens de A vers B

-une longueur ou une distance AB ou une norme noté $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont :

-la même direction

-le même sens

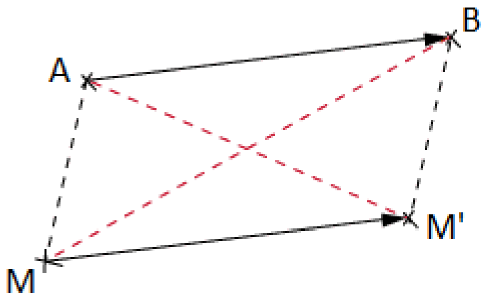
-la même norme

La translation :

Une translation est une transformation du plan définie par un vecteur.

M' est l'image de M par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ et le quadrilatère ABM'M est un parallélogramme.



Propriété :

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Construction d'une image par une translation :

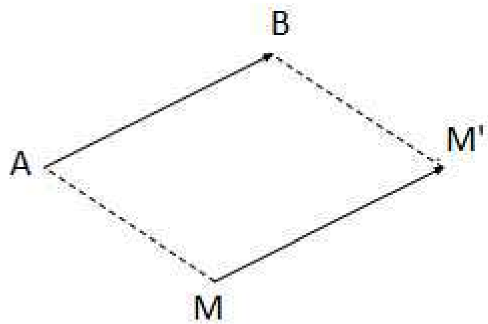
M' est l'image de M par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notation :

$$t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'$$

Construction de M' est l'image de M par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

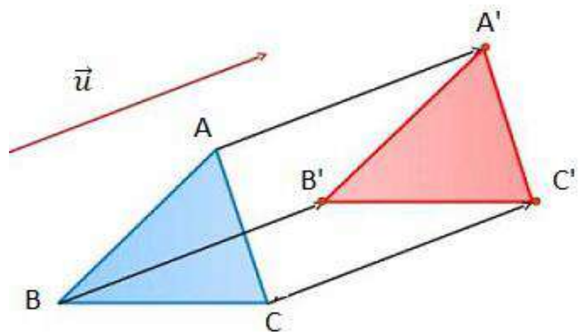
1) On place trois points non alignés A, B et M.

2) Construire M' tel que ABM'M soit un parallélogramme.

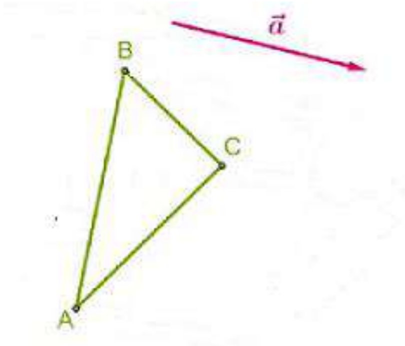


Exemple :

Construction de A'B'C' image de ABC par la translation du vecteur $\vec{u}$.



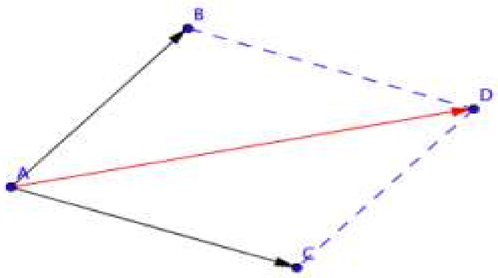
Exercice 21.6 : Construire l'image du triangle ABC par la translation du vecteur $\vec{a}$ **:**



Propriétés : La translation conserve les longueurs, les mesures, les angles, les aires , l'alignement et la nature des figures géométriques.

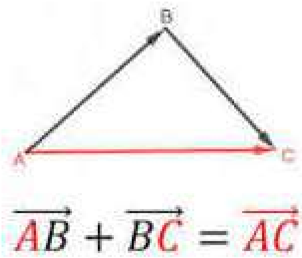
Somme de vecteurs :

Règle du parallélogramme :



ABCD un parallélogramme alors : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Relation de Chasles (lire Chale) :



Exemple : A,B,C et D des points du plan .Simplifier les sommes suivantes :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$

(on regroupe les vecteurs dont l'extrémité et l'origine sont identiques)

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$

$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$, relation de chasles

$\vec{u} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$

$\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{DC}}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{\mathbf{DC}} + \overrightarrow{\mathbf{CB}}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}$ (relation de chasles)

(on regroupe les vecteurs dont l'extrémité et l'origine sont identiques)

$\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ (relation de chasles)

$\boldsymbol{\vec{v}} = \boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$

Exercice 21.7 :

1) A,B,C , D et M des points du plan .Simplifier les sommes ci-dessous :

$\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}}$

$\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

2) H,F,S ,U et R des points du plan .Simplifier les sommes ci-dessous :

$\vec{p} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{\mathrm{RS}} + \overrightarrow{\mathrm{UH}}$

Exercice 21.8 :

1) Construire un triangle ABC tel que :
AB = 3,5 cm ; AC = 5 cm ; BC = 4 cm.

2) Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}$.

3) Construire le point E symétrique de B par rapport à C.

4) Quelle est la nature du quadrilatère ABDE ? Justifier la réponse.

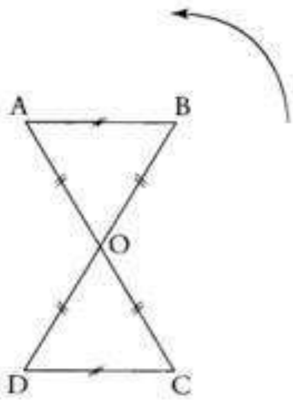
Exercice 21.9 :

1) Placer trois points A, D et C non alignés et construire le point B tel que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.
2) La parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E et (DC) en F.

Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$.
En déduire que B est le milieu de [EF].
3) On note O le point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD et O' son symétrique par rapport à B.
Démontrer que $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$.

Exercice 21.10 :

1) Reproduire ce dessin en vraie grandeur sachant que OA = 3 cm et que les points A, O et C, d'une part, et les points B, O et D, d'autre part, sont alignés.



2) Démontrer que ABCD est un rectangle.
3) Placer, sur le dessin, le point E image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
4) Placer le point F image du point C par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens de la flèche.

Thème 22 : Racines carrées-Valeur absolue (2)

Racines carrées :

Rappels :

Les identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Soit a et b deux nombres réels positifs on a les propriétés suivantes :

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{b^2 \times a} = b\sqrt{a}$ et $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Si $a \geq 0$ et $b > 0$ on a $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Attention : On ne laissera pas de racines carrées au dénominateur d'une fraction, pour cela on multipliera le numérateur et le dénominateur par la racine carrée du dénominateur ou par l'expression conjuguée du dénominateur.

Les nombres $a + \sqrt{b}$ et $a - \sqrt{b}$ sont conjugués l'un de l'autre.

Exemple : Rendre rationnel les dénominateurs de A et B .

$A = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $B = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$A = \frac{(1-\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{(\sqrt{2})\times\sqrt{2}}$; le conjugué de $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ est $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ on a

$A = \frac{\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2}$; $B = \frac{3\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\times((\sqrt{5}+\sqrt{2})}$

$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$; $\mathrm{B} = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$

$$B = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{5-2}$$

$$B = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{3} = \frac{3\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}\ ; \quad \boldsymbol{B = \sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

Exemple : développé $E = \left(2\sqrt{5}-\sqrt{27}\right)\times\sqrt{3}-2\sqrt{15}$

$E = \left(2\sqrt{5}-\sqrt{27}\right)\times\sqrt{3}-2\sqrt{15}$

$E = \left(2\sqrt{5}-\sqrt{9\times 3}\right)\times\sqrt{3}-2\sqrt{15}$

$E = \left(2\sqrt{5}-\sqrt{3^2\times 3}\right)\times\sqrt{3}-2\sqrt{15}$

$E = \left(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\times\sqrt{3}-2\sqrt{15}$

$E = \left(2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}\right)-3(\sqrt{3})\,(\sqrt{3})-2\sqrt{15}$

$E = \left(2\sqrt{5\times 3}\right)-3(\sqrt{3})^2-2\sqrt{15}$

$E = \left(2\sqrt{15}\right)-3\times 3-2\sqrt{15}$

$E = 2\sqrt{15}-2\sqrt{15}-9$ on a $E = 0-9$; $\mathbf{E = -9}$

Simplifier $F = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+\sqrt{24}$

$F = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+\sqrt{24}$

$F = (\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{4\times 6}$

$F = 3-2\sqrt{3\times 2}+2+\sqrt{2^2\times 6}$

$F = 3+2-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}$; $F = 5+0$ on a $\mathbf{F = 5}$

Exemple : Rendre rationnel le dénominateur de :

$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{7}}$; $\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ on a $\mathbf{P = \frac{2\sqrt{7}}{7}}$

$\mathrm{Q} = \frac{6}{\sqrt{15}-3}$

Le conjugué de $\sqrt{15}-3$ est $\sqrt{15}+3$

$\mathrm{Q} = \frac{6\times(\sqrt{15}+3)}{(\sqrt{15}-3)\times(\sqrt{15}+3)}$

$\mathrm{Q} = \frac{6\times\sqrt{15}+6\times 3}{(\sqrt{15}-3)\times(\sqrt{15}+3)}$

$\mathrm{Q} = \frac{6\sqrt{15}+18}{(\sqrt{15})^2-(3)^2}$;

$\mathrm{Q} = \frac{6\sqrt{15}+18}{15-9}$;

$\mathrm{Q} = \frac{6\sqrt{15}+18}{6}$,

on factorise $6\sqrt{15} + 18$ on a $6\sqrt{15} + 18 = 6(\sqrt{15} + 3)$

$\mathrm{Q} = \frac{6\times(\sqrt{15}+3)}{6}$; $\mathrm{Q} = \frac{6}{6} \times (\sqrt{15} + 3)$

$Q = 1 \times (\sqrt{15} + 3)$ on a $\boldsymbol{Q} = \sqrt{\mathbf{15}} + \mathbf{3}$

$T = \frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

$T = \frac{10\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

$T = \frac{10\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} - \sqrt{5}$

$T = \frac{10\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5}$

$T = \frac{10\times\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5}$

$T = \frac{10}{5} \times \sqrt{5} - \sqrt{5}$

$T = 2 \times \sqrt{5} - \sqrt{5}$; $T = 2\sqrt{5} - \sqrt{5}$; $\mathbf{T} = \sqrt{\mathbf{5}}$

Exemple : calculer

$J = \frac{7}{\sqrt{11}-2} + \frac{5}{4+\sqrt{11}}$

$J = \frac{7\times(4+\sqrt{11})+5\times(\sqrt{11}-2)}{(\sqrt{11}-2)\times(4+\sqrt{11})}$

$J = \frac{7\times4+7\times\sqrt{11}+5\times\sqrt{11}-2\times5}{4\times\sqrt{11}+\sqrt{11}^2-2\times4-2\times\sqrt{11}}$

$J = \frac{28+7\sqrt{11}+5\sqrt{11}-10}{4\sqrt{11}+11-8-2\sqrt{11}}$

$J = \frac{28-10+7\sqrt{11}+5\sqrt{11}}{4\sqrt{11}-2\sqrt{11}+11-8}$

$J = \frac{18+12\sqrt{11}}{2\sqrt{11}+3}$; $J = \frac{12\sqrt{11}+18}{2\sqrt{11}+3}$

On factorise $12\sqrt{11} + 18$ on a $12\sqrt{11} + 18 = 6 \times (2\sqrt{11} + 3)$

Ainsi , $J = \frac{12\sqrt{11}+18}{2\sqrt{11}+3} = \frac{6\times(2\sqrt{11}+3)}{(2\sqrt{11}+3)}$ on a $J = 6 \times \frac{(2\sqrt{11}+3)}{(2\sqrt{11}+3)}$; $J = 6 \times 1$; $\mathbf{J} = \mathbf{6}$

$S = \frac{(3-\sqrt{5})^2}{7-3\sqrt{5}}$

$S = \frac{3^2-2\times3\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{7-3\sqrt{5}}$

$S = \frac{9-6\sqrt{5}+5}{7-3\sqrt{5}}$

$S = \frac{9+5-6\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}$

$S = \frac{14-6\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}$

Le conjugué de $7 - 3\sqrt{5}$ est $7 + 3\sqrt{5}$

$S = \frac{(14-6\sqrt{5})\times(7+3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})\times(7+3\sqrt{5})}$

Au numérateur on a la forme $(a-b)(c+d)) = a \times c + a \times d - b \times c - b \times d$

Au dénominateur on a la forme $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$S = \frac{14\times7+14\times3\sqrt{5}-6\times7\times\sqrt{5}-6\times3\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{7^2-(3\sqrt{5})^2}$

$S = \frac{14\times7+14\times3\sqrt{5}-6\times7\times\sqrt{5}-6\times3\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{7^2-(3\sqrt{5})^2}$

$S = \frac{98+42\sqrt{5}-42\sqrt{5}-18\times(\sqrt{5})^2}{49-(3)^2\times\ (\sqrt{5})^2}$

$S = \frac{98+0-18\times5}{49-9\times\ 5}$ on a $S = \frac{98-90}{49-45}$ on a $S = \frac{8}{4}$; $\mathbf{S = 2}$

Autre méthode plus simple :

$S = \frac{(3-\sqrt{5})^2}{7-3\sqrt{5}}$

$S = \frac{3^2-2\times3\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{7-3\sqrt{5}}$

$S = \frac{9-6\sqrt{5}+5}{7-3\sqrt{5}}$

$S = \frac{9+5-6\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}$

$S = \frac{14-6\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}$

En factorisant $14 - 6\sqrt{5}$ on a $14 - 6\sqrt{5} = 2 \times (7 - 3\sqrt{5})$

D'où $S = \frac{2\times(7-3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})}$; $S = 2 \times \frac{(7-3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})}$; $S = 2 \times 1$ on obtient $\boldsymbol{S = 2}$

Exercice 22.1 :

1) Rendre rationnel les dénominateurs de : $\frac{7}{\sqrt{11}-2}$ et $\frac{5}{4+\sqrt{11}}$

2) En calculant, simplifier la somme : $J = \frac{7}{\sqrt{11}-2} + \frac{5}{4+\sqrt{11}}$

Exercice 22.2: Simplifier

$A = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{8} + \sqrt{32}$; $B = (5\sqrt{5} - \sqrt{45}) \times \sqrt{5}$; $D = \frac{3\sqrt{98}-\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$

Exercice 22.3: simplifier

$P = 3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a}$; $T = 7\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{4a} - 12\sqrt{\frac{a}{9}}$; $G = 4\sqrt{5b} - \frac{3}{4}\sqrt{80b} - 12\sqrt{\frac{125b}{9}}$

$E = (6 - \sqrt{2})^2 + 3\sqrt{32}$; $Q = (\sqrt{2} + \sqrt{18})^2 - 30$; $I = (2\sqrt{10} - \sqrt{2})(2\sqrt{10} + \sqrt{2}) + 32$

$\mathrm{A} = (\sqrt{17} + 2)^2 - (5 - \sqrt{17})^2 - 14\sqrt{17}$

Ex4 :A l'aide des identités remarquables simplifier

$A = \sqrt{13^2 - 12^2}$; $B = \sqrt{82^2 - 18^2}$; $T = \sqrt{117^2 - 108^2}$ $S = \sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}}$;

$C = \sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$

Exercice 22.4 : Rendre rationnel les dénominateurs de :

1) $A = \frac{\sqrt{11}-11}{\sqrt{11}}$ $B = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ $I = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}$ $Q = \frac{\sqrt{90}+\sqrt{30}}{\sqrt{45}+\sqrt{15}}$

2) $C = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2+\sqrt{3}}$ $T = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{10-4\sqrt{6}}$ $G = \frac{9-6\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})^2}$

Exercice 22.5: Calculer

$E = \frac{2}{5+\sqrt{7}} + \frac{2}{5-\sqrt{7}}$; $D = \frac{3}{2+3\sqrt{3}} + \frac{3}{2-3\sqrt{3}}$; $G = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$A = \frac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}} + \frac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$

Valeur absolue :

La valeur absolue d'un nombre réel a est noté, $|a|$.

Définition :

La valeur absolue d'un nombre réel est égal à :

-Ce nombre si il est positif.

-L'opposé de ce nombre si il est négatif.

La valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive.

Plus précisément :

$|\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{si}$ $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{0}$ **et** $|\boldsymbol{a}| = -\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{si}$ $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$ **.**

Exemple :

$|7| = 7$ car 7 est positif , $|-5| = 5$ car -5 est négatif

$|0| = 0$, $|-2{,}58| = 2{,}58$

Exemple : Résoudre dans IR l'équation :

$|x| = 5$

$si\ x \geq 0$, $|x| = x$, $|x| = 5$ on a $x = 5$.

$si\ x < 0$, $|x| = -x$, $|x| = 5$ on a $-x = 5$ donc $x = -5$.

D'où l'ensemble solution de l'équation est : $\mathbf{S} = \{-\mathbf{5}\ ;\mathbf{5}\}$

Résoudre dans IR les équations :

$$|x| = -2$$

$|x|$ est toujours positif , donc l'équation n'admet pas de solution.

L'ensemble solution est : $\mathbf{S} = \emptyset$

$$|x - 3| = 5$$

Si $x - 3 \geq 0$ on a $|x - 3| = x - 3$,

d' où $x - 3 = 5$,

on a $x = 5 + 3$

et $x = 8$

Si $x - 3 < 0$ on a $|x - 3| = -(x - 3)$

d' où $-(x - 3) = 5$

$(x - 3) = -5$; $x - 3 = -5$

on a $x = -5 + 3$

et $x = -2$

on a $x = 8$ ou $x = -2$

Vérification :

Pour $x = 8$ on a $|8 - 3| = |5| = 5$

Pour $x = -2$ on a $|-2-3| = |-5| = 5$

L'ensemble solution de l'équation est : $\mathbf{S} = \{\mathbf{8}\ ; -\mathbf{2}\}$

$$|x+2| = -3$$

$|x+2|$ est toujours positif , donc **l'équation n'admet pas de solution .**

$$|2x+3| = 0$$

$$2x+3 = 0$$

on a $2x = 0 - 3$

$$2x = -3$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

Vérification :

Pour $x = \frac{-3}{2}$ on a $\left|2(\frac{-3}{2}) + 3\right| = |-3+3| = |0| = 0$

L'ensemble solution de l'équation est : $\mathbf{S} = \left\{\frac{-3}{2}\right\}$

$$|x^2+2x-4| = 4$$

Si $x^2+2x-4 \geq 0$ on a $x^2+2x-4 = 4$

$x^2+2x = 4+4$; $x^2+2x = 8$; $x^2+2x-8 = 0$

On a $2x = -2x + 4x$, l'équation devient :

$x^2 - 2x + 4x - 8 = 0$;

$x(x-2) + 4(x-2) = 0$

En factorisant on a : $(x-2)(x+4) = 0$

$$x-2 = 0 \quad ou \quad x+4 = 0$$

$$x = 0+2 \quad ou \quad x = 0-4$$

$$x = 2 \quad ou \quad x = -4$$

Si $x^2+2x-4 < 0$ on a $x^2+2x-4 = -4$

$$x^2+2x = -4+4$$

$$x^2 + 2x = 0$$

En factorisant on a $\quad x(x+2) = 0$

$$x = 0 \qquad ou \quad x = 0 - 2$$

$$x = 0 \qquad ou \quad x = -2$$

L'ensemble solution de l'équation est : $\mathbf{S} = \{\mathbf{0}\ ; \mathbf{-2}; \mathbf{2}; \mathbf{-4}\}$

Exercice 22.6 : Simplifier

$E = -|-5^2 + 3|$

$A = |-3 - 7| + |1 - (-2)|$

$P = |3 - 5| + |3 - 7| + |4 - 1| + |5 - 8|$

$Q = |-3 - 2| + |4 - 7| - |2 - 1| - |6 - 9|$

Exercice 22.7:

a) Comparer à la main $\sqrt{2}$ et 1 ,puis simplifier $\left|\sqrt{2} - 1\right|$

b) Comparer à la main $2\sqrt{2}$ et 3 ,puis simplifier $\left|2\sqrt{2} - 3\right|$

c) Comparer à la main $\sqrt{2}$ et 2 ,puis simplifier $\left|\sqrt{2} - 2\right|$

d) Simplifier , $A = \left|2\sqrt{2} - 3\right| + \left|\sqrt{2} - 1\right| - \left|\sqrt{2} - 2\right|$

Exercice 22.8 Résoudre les équations suivantes dans IR .

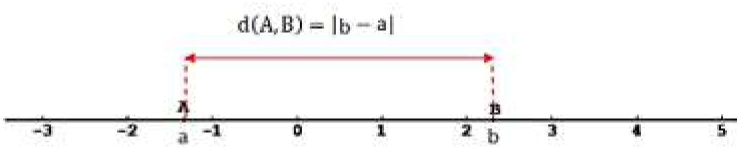
1) $|x| = 8$; 2) $|x - 2| = -2$; 3) $|x - 5| = 0$; 4) $|-x| = 3{,}8$

5) $|6 - 2x| = 8$; 6) $|5x + 1| = 4$; 7) $|3x - 5| = 7$

Distance entre deux points :

Définition :

Soit A le point d'abscisse a et B le point d'abscisse b , la distance entre les points A et B est $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = |b - a|$ ou $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = |a - b|$.



Exemple : soit A le point d'abscisse (-3) , noté A(-3) et B le point d'abscisse 6 ,noté B(6) , calculer la distance AB= $\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B})$.

On a $AB = |b - a|$

$AB = |6 - (-3)|$, $AB = |6 + 3|$; $AB = |9|$; $\boldsymbol{AB = 9}$

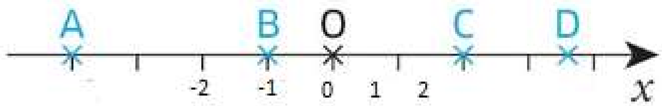
Exemple : Soit C , B , O, A et D des points de l'axe gradué, déterminé la distance DB.

D(4) et B(-3) on a $DB = |-3 - 4| = |-7|$ on a $DB = 7$

Exercice 22.9 :

De l'axe gradué ci-dessus déterminer les distances : AB, DC, OC et CB.

Exercice 22.10 :



De l'axe gradué ci-dessus , déterminer les distances AB , CB et OA

Exercice 22.11:

1) Recopier et compléter :

a) Pour tout réel x , $\sqrt{x^2}$=….

b) Pour tout réel x et pour tout réel a positif si $|x| = a$ alors …..

2) Soit m et n deux réels tel que :

$m = 4 - 3\sqrt{2}$ et $n = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

a) Montrer que le réel m est négatif

b) Montrer que $m^2 = 34 - 24\sqrt{2}$, puis calculer n^2 .

c) On donne $Z = \sqrt{34 - 24\sqrt{2}}$.

Ecrire Z sous la forme $a\sqrt{2} + b$ avec a et b deux entiers relatifs.

d) Justifier que $m^2 + 4n^2 = 68$.

Exercice 22.12

On donne les réels $m = 1 - 2\sqrt{3}$, $p = \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$ et $q = \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}$.

1) Montrer à la main que m est négatif.

2) Calculer m^2 puis déduire que m et p sont opposés.

3) Déterminer un encadrement d'ordre 2 de m sachant que

$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733.$

4) Montrer que $q \times p = 11$.

Exercice 22.13

On donne trois réels a , b et c tels que :

$a = 7 - 5\sqrt{2}$, $b = -7 - 5\sqrt{2}$ et $c = -7 + 5\sqrt{2}$.

1) Démontrer que le réel a est l'inverse du réel b .

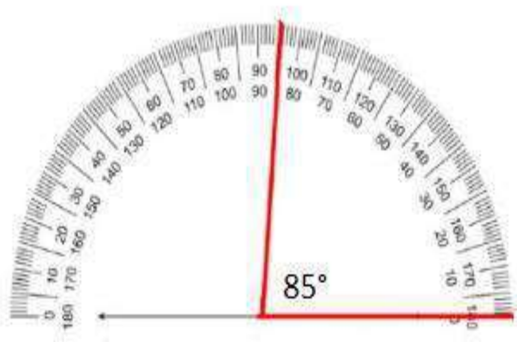
2) Justifier que a et c sont opposés.

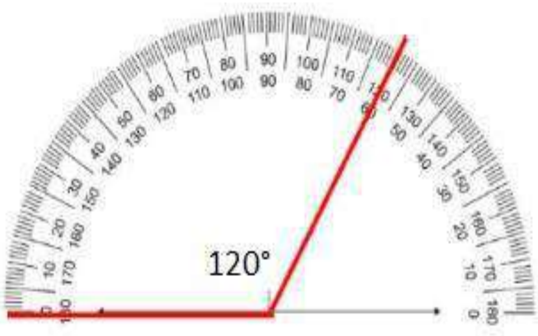
3) Démontrer que $\frac{b}{a} - \frac{c}{b} = b^2 + c^2$.

4) Calculer a^2 puis en déduire une écriture simplifiée de $w = \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$.

Thème 23 : Triangles semblables-Angles (1)

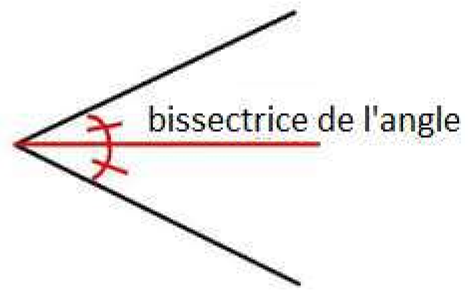
Mesure d'un angle :





La bissectrice d'un angle :

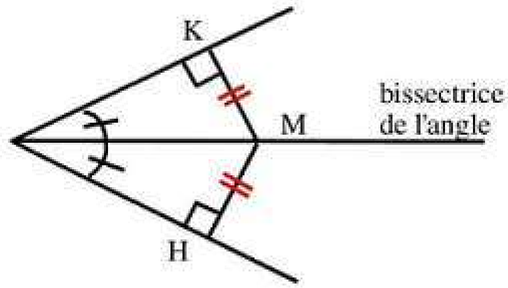
La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure.



Propriété de la bissectrice d'un angle :

Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il équidistant des côtés de l'angle.

Equidistant : situé à égale distance

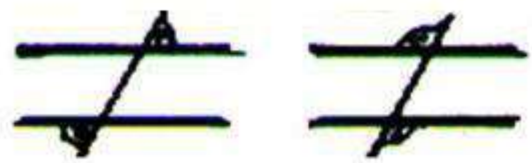


Le point M appartient à la bissectrice de l’angle, donc MH=MK.

Les angles alternes-internes

Les angles correspondants

Les angles alternes-externes



Propriété :

Si **deux droites parallèles** sont coupées par une même sécante alors :

-Les angles alternes-internes ont la même mesure.

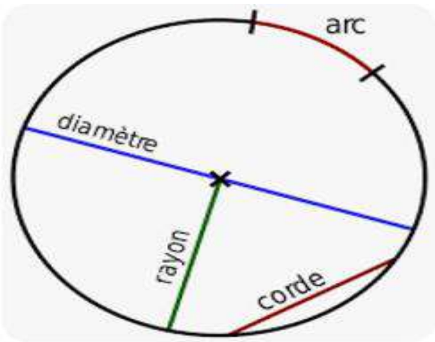
-Les angles correspondants ont la même mesure.

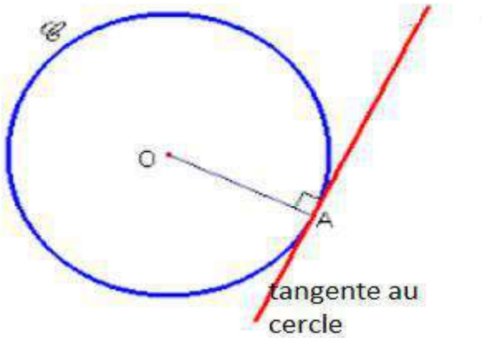
-Les angles alternes-externes ont la même mesure.

Propriété réciproque :

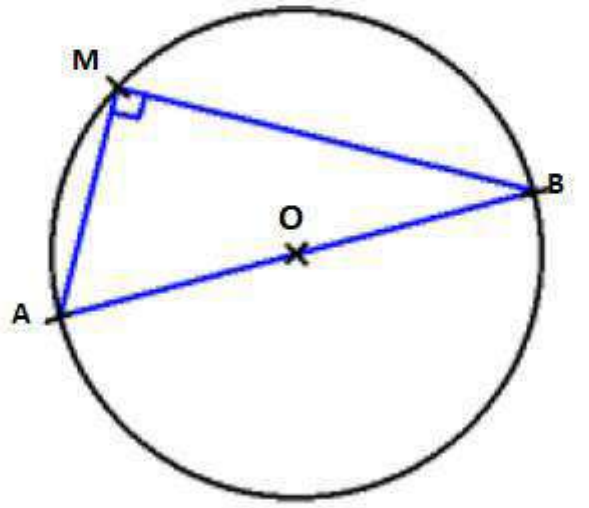
Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes (correspondants ou alternes-externes) égaux alors les deux droites sont parallèles.

Le cercle :





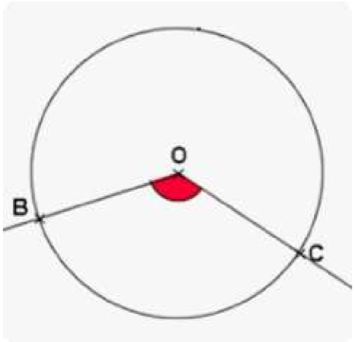
Cercle et triangle rectangle :



Propriété :

Si M est un point du cercle de diamètre le segment [AB] alors le triangle AMB est rectangle en M.

Angle au centre



O est le centre du cercle, B et C des points du cercle. L'angle $\widehat{BOC}$ est appelé angle au centre au cercle.

L'angle au centre $\widehat{BOC}$ intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{BC}$

Angle inscrit :

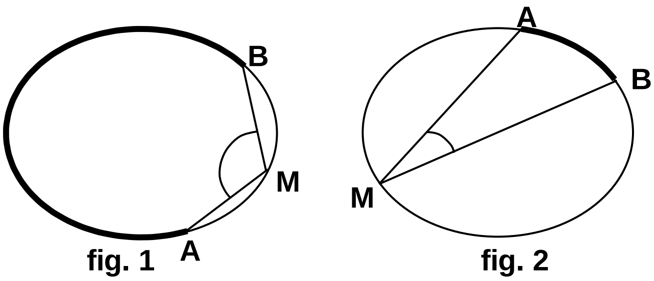


fig. 1 fig. 2

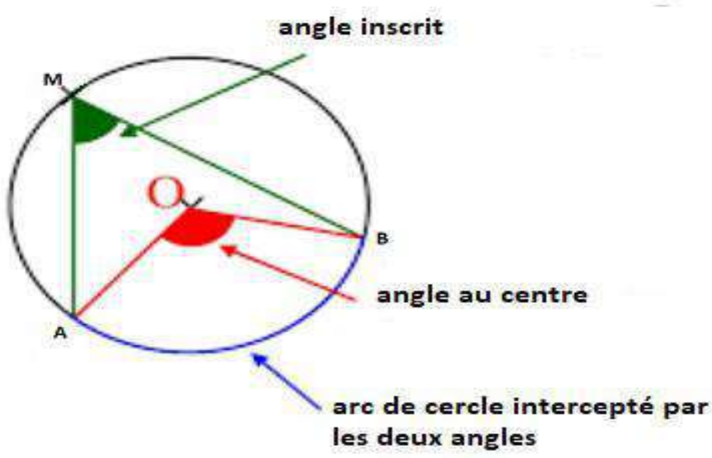
A et B sont deux points du cercle, le point M est aussi sur le cercle .

L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé angle inscrit au cercle.

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le grand arc de cercle $\breve{AB}$ (fig1).

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le petit arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ (fig2).

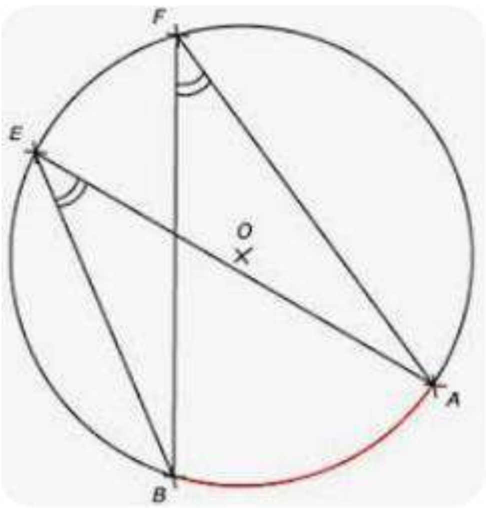
Angle au centre associé à un angle inscrit.



Propriété :

La mesure de l'angle inscrit est la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc de cercle ou la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit interceptant le même arc de cercle.

Les angles inscrits :



Les angles inscrits $\widehat{BEA}$ et $\widehat{BFA}$ interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

Propriété :

Deux angles inscrits dans un cercle interceptant le même arc de cercle ont la même mesure.

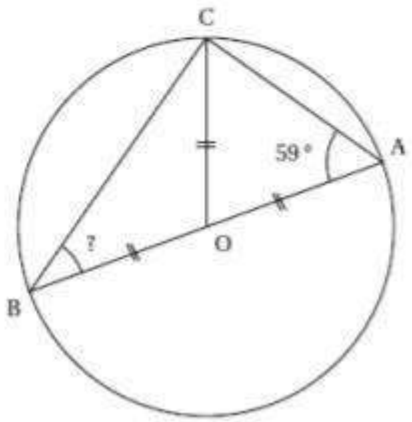
Exemple :

[AB] est le diamètre du cercle de centre O.

1) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OCA}$
Justifier votre réponse.

2) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{COA}$
Justifier votre réponse.

3) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$
Justifier votre réponse.



***

1) O est le centre du cercle, C et A sont des points du cercle donc OA et OC sont des rayons d'un même cercle ainsi AOC est isocèle en O donc :

$\mathbf{mes\widehat{OCA} = mes\widehat{OAC} = 59°}$

2) COA est isocèle en O donc $\mathrm{mes}\widehat{\mathrm{OCA}} = \mathrm{mes}\widehat{\mathrm{OAC}}$ et

$\mathrm{mes}\widehat{\mathrm{COA}} + \mathrm{mes}\widehat{\mathrm{OCA}} + \mathrm{mes}\widehat{\mathrm{OAC}} = 180$

$\mathrm{mes}\widehat{\mathrm{COA}} + 59 + 59 = 180$

$\mathrm{mes}\widehat{\mathrm{COA}} + 118 = 180$

$\mathrm{mes}\widehat{\mathrm{COA}} = 180 - 118$

$\mathbf{mes\widehat{COA} = 62°}$

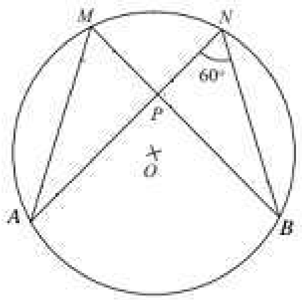
3) L'angle inscrit $\widehat{\mathrm{CBA}}$ intercepte le même arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$ que l'angle au centre $\widehat{\mathrm{COA}}$

Donc $mes\ \widehat{CBA} = \frac{1}{2} \times mes\widehat{COA}$

D'où $mes\ \widehat{CBA} = \frac{1}{2} \times 62 = 31°$; $\mathbf{mes\ \widehat{CBA} = 31°}$

Exemple :

A, M, N et B sont des points du cercle centre O.



Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$.

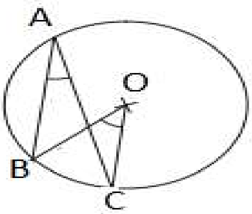
***

Les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

Donc $\mathbf{mes\widehat{AMB} = mes\widehat{ANB} = 60°.}$

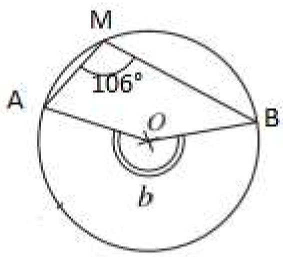
Exercice 23.1 :

Le cercle ci-dessous est un cercle de centre O . $\widehat{BOC}$ est un angle au centre tel que $mes\widehat{BOC} = 36°$.



Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 23.2: A, M et B sont des points du cercle de centre O.

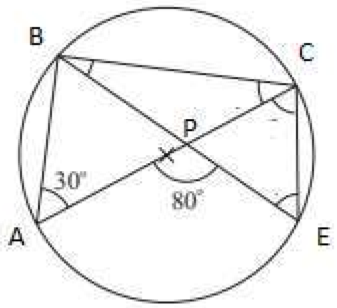


Déterminer la mesure de l'angle $\hat{b}$

Exercice 23.3 :

A , B , C et E sont des points du cercle , $mes\widehat{BAC} = 30°$ et

$mes\widehat{APE} = 80°$.



1) Déterminer la $mes\widehat{BEC}$.

2) Déterminer la $mes\widehat{BPC}$.

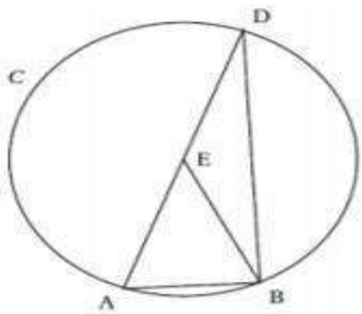
3) Déterminer la $mes\widehat{EPC}$.

4) Déterminer la $mes\widehat{ACE}$ puis en déduire $mes\widehat{ABE}$.

Exercice 23.4:

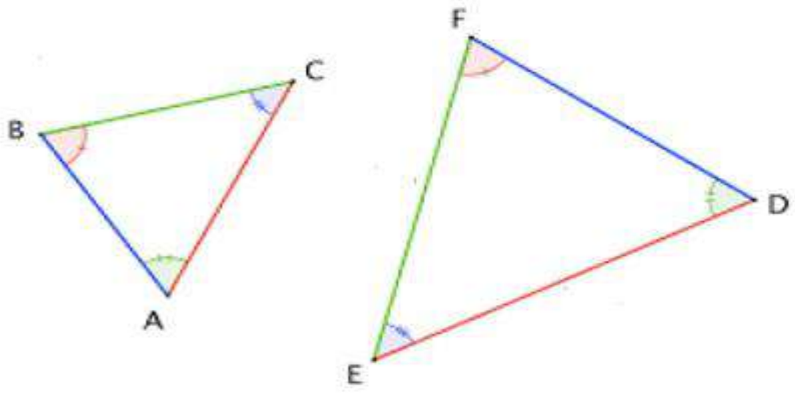
Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, nous savons que :
• (C) est un cercle de centre E dont le diamètre [AD] mesure 9 cm.
• B est un point du cercle (C) tel que : $\widehat{AEB} = 46°$.

1) Montrer que le triangle ABD est un triangle rectangle.
2) Justifier que : $\widehat{ADB} = 23°$.
3) On trace la droite parallèle à la droite (AB) passant par E.
Elle coupe le segment [BD] au point F.
Démontrer que $\widehat{BEF} = \widehat{ABE}$.



Triangles semblables (1)

Présentation :



Les triangles ABC et EDF ont la même forme on dit qu'ils sont semblables.

$\widehat{ABC} = \widehat{EFD}$ ce sont des angles correspondants.

Les sommets B et F sont des sommets correspondants ou homologues.

Les côtés [BC] et [FE] sont des côtés correspondants ou homologues.

$\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ ce sont des angles correspondants.

Les sommets A et D sont des sommets correspondants ou homologues.

Les côtés [AC] et [ED] sont des côtés correspondants ou homologues.

$\widehat{ACB} = \widehat{FED}$ ce sont des angles correspondants

Les sommets C et E sont des sommets correspondants ou homologues.

Les côtés [AB] et [FD] sont des côtés correspondants ou homologues.

<u>Définition :</u>

Deux triangles sont **semblables** si leurs angles sont égaux deux à deux.

<u>Propriété :</u>

Si deux triangles sont **semblables alors les longueurs des cotés correspondants ou homologues sont proportionnelles.**

Méthode :

1) Les angles égaux sont sur la même colonne

2) $\dfrac{Les\ cotés\ de\ ABC}{Les\ cotés\ de\ EDF}$

3) Le rapport de proportionnalité est donné en fonction des sommets principaux des angles.

Les angles de ABC	$A\hat{B}$C	$B\hat{A}$C	A$\hat{C}$B
Les angles de EDF	$E\hat{F}$D	$E\hat{D}$F	F$\hat{E}$D

On a $\frac{BA}{FD} = \frac{AC}{DE} = \frac{CB}{EF} = k$

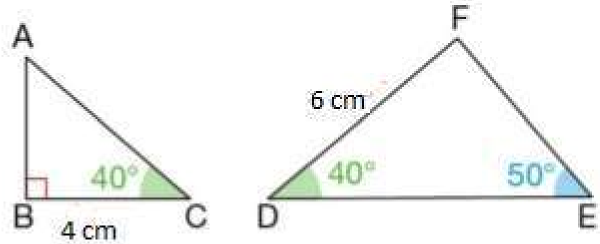
Lorsqu'il n'y a pas de confusion on écrit simplement :

Les angles de ABC   Les angles de EFD

$$\left.\begin{array}{ccc} \hat{B} & = & \hat{F} \\ \hat{A} & = & \hat{D} \\ \hat{C} & = & \hat{E} \\ \hat{B} & = & \hat{F} \end{array}\right\} \quad \text{On a } \frac{BA}{FD} = \frac{AC}{DE} = \frac{CB}{EF} = k$$

Exemple :

Justifier que les triangles ABC et EDF sont semblables , puis en déduire le coefficient de proportionnalité k.



Dans ABC rectangle en B , déterminons $mes\widehat{BAC}$.

$mes\widehat{BAC} + mes\widehat{ABC} + mes\widehat{BCA} = 180°$

$mes\widehat{BAC} + 90 + 40 = 180$

$mes\widehat{BAC} + 130 = 180$

$mes\widehat{BAC} = 180 - 130$

$mes\widehat{BAC} = 50°$

Dans ABC on a , $mes\widehat{ABC} = 90°$, $mes\widehat{BCA} = 40°$ et $mes\widehat{BAC} = 50°$

Dans EDF, déterminons $mes\widehat{EFD}$.

Dans le triangle EDF on a :

$mes\widehat{EFD} + mes\widehat{FDE} + mes\widehat{DEF} = 180°$

$mes\widehat{EFD} + 40 + 50 = 180$

$mes\widehat{EFD} + 90 = 180$

$mes\widehat{EFD} + 90 = 180$

$mes\widehat{EFD} = 180 - 90$

$mes\widehat{EFD} = 90°$

Dans EDF on a , $mes\widehat{EFD} = 90°$, $mes\widehat{FDE} = 40°$ et $mes\widehat{DEF} = 50°$

On a $mes\widehat{EFD} = mes\widehat{ABC} = 90°$, $mes\widehat{FDE} = mes\widehat{BCA} = 40°$ et

$mes\widehat{DEF} = mes\widehat{BAC} = 50°$

Les triangles ABC et DEF ont leurs angles égaux, donc ils sont semblables.

Déterminons le coefficient de proportionnalité k:

Il n'y a pas de confusion on écrit simplement :

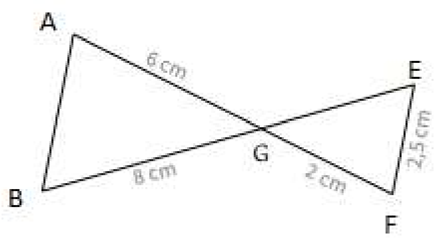
Les angles de ABC Les angles de EFD

$$\left.\begin{array}{ccc} \hat{B} & = & \hat{F} \\ \hat{C} & = & \hat{D} \\ \hat{A} & = & \hat{E} \\ \hat{B} & = & \hat{F} \end{array}\right\} \qquad \text{On a } \frac{BC}{FD} = \frac{CA}{DE} = \frac{AB}{EF} = k$$

$\frac{4}{6} = \frac{CA}{DE} = \frac{AB}{EF} = k$ on a $\boldsymbol{k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$.

Exemple : Dans la figure ci-dessous les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Les droites (AF) et (BE) sont sécantes en G et chacune d'elle est sécante aux droites (AB) et (EF) .



1) Montrer les triangles ABG et EGF sont semblables.

2) Déterminer le coefficient de proportionnalité k .

3) Calculer EG et AB.

***

1) Les angles $\widehat{AGB}$ et $\widehat{EGF}$ sont opposés par le sommet donc

$mes\widehat{AGB} = mes\widehat{EGF}$ (1)

Les droites parallèles (AB) et (EF) sont coupées par une même sécante (AF)

Donc les angles alternes-internes $\widehat{BAF}$ et $\widehat{AFE}$ sont égaux.

$mes\widehat{BAF} \ = mes\widehat{AFE}$ comme $G \in [AF]$ on a $mes\widehat{BAG} = mes\widehat{GFE}$ (2)

Par analogie au raisonnement $mes\widehat{BAF} \ = mes\widehat{AFE}$ on a l'égalité suivante :

$mes\widehat{ABE} \ = mes\widehat{BEF}$ et $mes\widehat{ABG} \ = mes\widehat{GEF}$ (3)

Des égalités (1) , (2) et (3) on déduite que les triangles ABG et EGF sont semblables.

2) Déterminons le coefficient de proportionnalité k .

Les triangles ABG et EGF sont semblables on la égalités :

Les angles de ABG		Les angles de EGF
A$\hat{G}$B	=	E$\hat{G}$F
B$\hat{A}$G	=	G$\hat{F}$E
A$\hat{B}$G	=	G$\hat{E}$F

On a $\frac{GA}{GF} = \frac{AB}{FE} = \frac{BG}{EG} = k$

On a $GA = 6cm$, $GB = 8cm$ et $F = 2cm$, $FE = 2{,}5cm$

$\frac{6}{2} = \frac{AB}{2{,}5} = \frac{8}{EG} = k$ on a $\boldsymbol{k = \frac{6}{2} = 3}$

3) Calculons EG et AB.

On a

$\frac{6}{2} = \frac{AB}{2{,}5} = \frac{8}{EG} = k$; $\frac{AB}{2{,}5} = \frac{8}{EG} = 3$; $\frac{AB}{2{,}5} = 3$ et $\frac{8}{EG} = 3$

$\frac{AB}{2{,}5} = \frac{3}{1}$ et $\frac{8}{EG} = \frac{3}{1}$

On a $1 \times AB = 3 \times 2{,}5$ et $3 \times EG = 8 \times 1$

$AB = 7{,}5$ et $3 \times EG = 8$

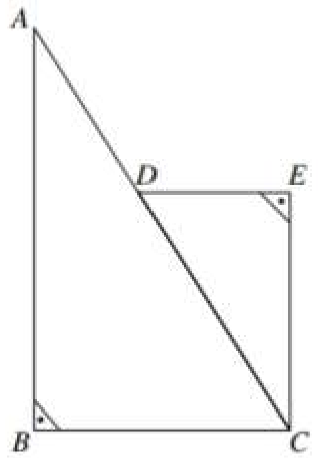
$AB = 7{,}5cm$ et $EG = \frac{8}{3}$; $\mathrm{EG} = 2{,}67\mathrm{cm}$

Ainsi on a $\mathbf{AB = 7,5cm}$ et $\mathbf{EG = 2,67cm}$

Exercice 23.5 :

Dans la figure ci-dessous les droites (AB) et (CE) sont parallèles. ABC est rectangle en B et DEF est rectangle en E.

On donne $AB = 20\ cm$; $BC = 15cm$, $AC = 25cm$ et $CE = 12\ cm$



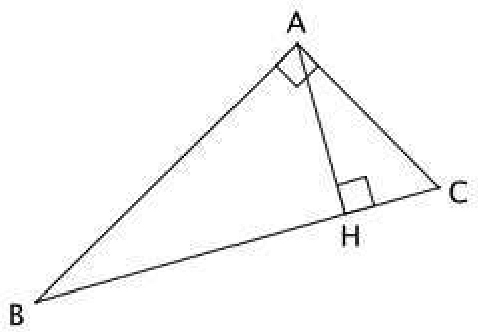
1) Démontrer que ABC et DEF sont semblables.

2) Déterminer le coefficient de proportionnalité des cotés correspondants.

3) Calculer ED et CD.

Exercice 23.6 :

1) démontrer que les triangles ABC et ABH sont semblables.



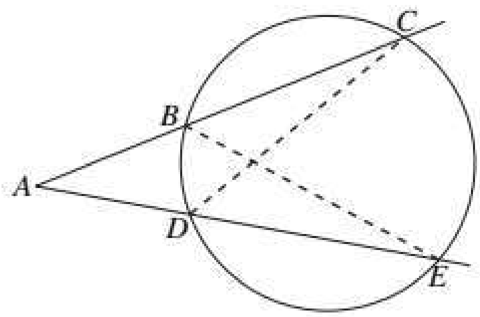
2) Les triangles ABC et AHC sont-ils semblables ? Justifier

3) Des différents triangles semblables, déduire le coefficient de proportionnalité des cotés correspondants.

4) On donne : AB = 12cm, BC = 15cm.

Calculer AC, AH, BH et CH.

Exercice 23.7:



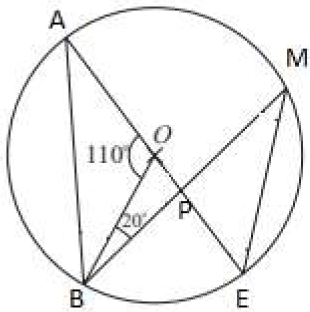
1) De la figure ci-dessus, démontrer que les triangles ABE et ADC sont semblables.

2) Déterminer le coefficient de proportionnalité des cotés correspondants ou homologues.

3) Démontrer que $AB \times AC = AD \times AE$.

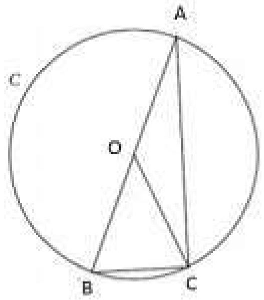
Exercice 23.8 :

Le cercle ci-dessous est un cercle de centre O. Les points A, B,E et M sont des points du cercle.



Déterminer les mesures des angles suivants : $\widehat{BAE}$, $\widehat{ABO}$, $\widehat{BME}$, $\widehat{AEM}$ et $\widehat{OPB}$.

Exercice 23.9 :(C) est le cercle de centre O. A , B et C sont des points du cercle.



1) Démontrer que $\widehat{BAC} = \widehat{OCA}$.

2) Que vaut la somme $\widehat{BAC}$+$\widehat{OCA}$ + $\widehat{AOC}$?

3) Les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOC}$ sont supplémentaires, en déduire une relation entre les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOC}$.

4) Démontrer que $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC}$.

5) Enoncer la propriété obtenue.

Thème 24 : Equation d'une droite-Résolution graphique

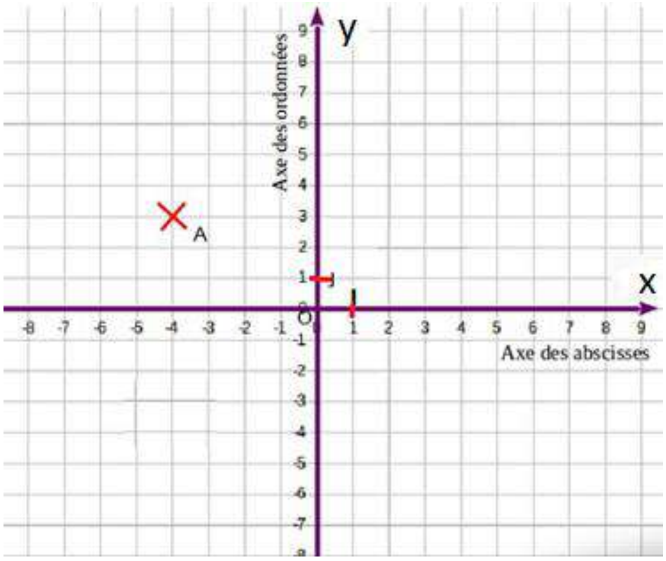
Repérage et repère orthonormé :

Le repère ci-dessous est un repère orthonormé (O,I,J) ,c'est-à-dire : OI=OJ et (OI) ⊥ (OJ).

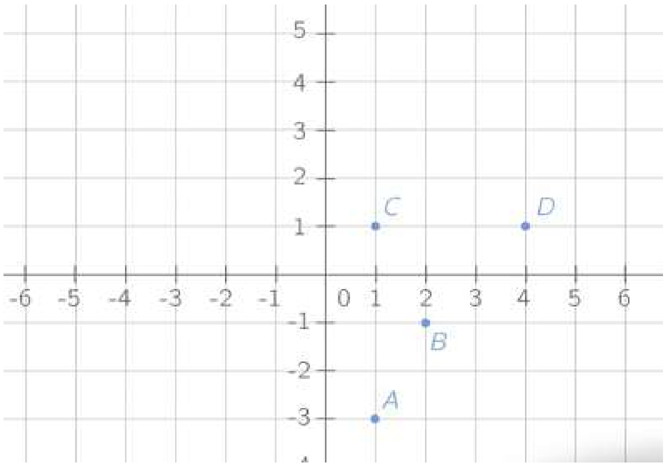
Les coordonnées du point A : En abscisse $x = -4$ et en ordonnée $y = 3$ on note $A(-4; 3)$ ou $A\binom{-4}{3}$

Les coordonnées du point I : En abscisse $x = 1$ et en ordonnée $y = 0$ on note $I(1; 0)$ ou $I\binom{1}{0}$.

Les coordonnées du point J : en abscisse $x = 0$ et en ordonnée $y = 1$ on note $J(0; 1)$ ou $J\binom{0}{1}$.



Coordonnées des différents points placés sur le repère orthonormé ci-dessous :

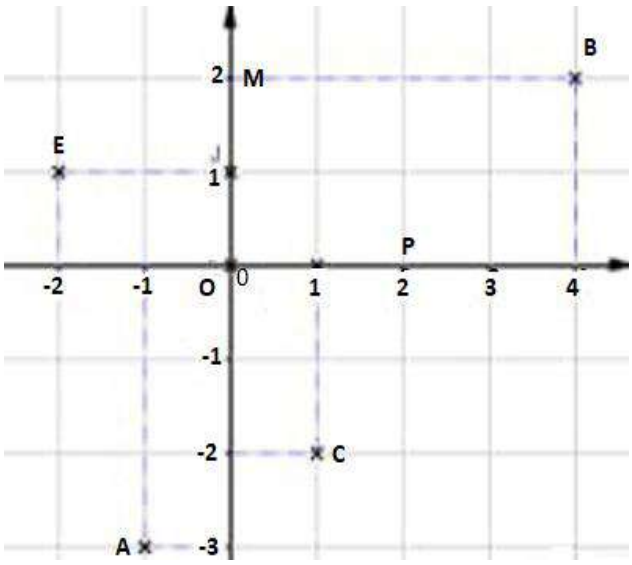


$A(x = 1; y = -3)$, $B(x = 2; y = -1)$, $C(x = 1; y = 1)$, $D(x = 4; y = 1)$

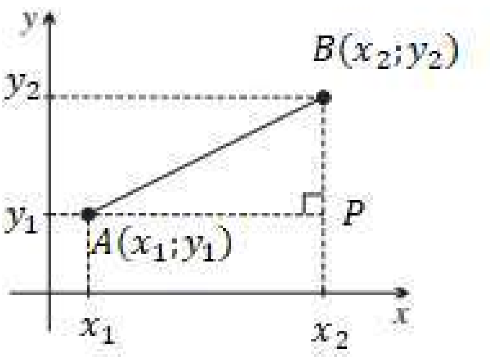
La bonne notation :

$A(1; -3)$, $B(2; -1)$, $C(1; 1)$, $D(4; 1)$

Exercice 24.1 Donner les coordonnées des points A,B,C , E , P et M du repère orthonormé ci-dessous :



Distance entre un point $A(x_1;\ y_1)$ et un point $B(x_2;\ y_2)$:



APB est triangle rectangle en P d'après la propriété de pythagore :

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Exemple-méthode :

Soit A $(1;\ -2)$, B $(2;\ -4)$ et C $(5;\ -7)$

1) Calculer les distances AB et AC.

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$; $AC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$AB^2 = (2-1)^2 + (-4-(-2))^2$; $AC^2 = (5-1)^2 + (-7-(-2))^2$

$AB^2 = (1)^2 + (-4+2)^2$; $AC^2 = (4)^2 + (-7+2)^2$

$AB^2 = (1)^2 + (-2)^2$; $AC^2 = 16 + (-5)^2$

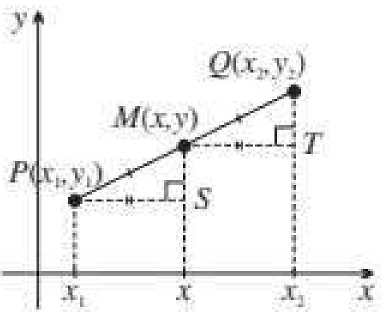
$AB^2 = 1 + 4$; $AC^2 = 16 + 25$

$AB^2 = 5$; $AC^2 = 41$

$\mathbf{AB} = \sqrt{\mathbf{5}}$ **;** $\mathbf{AC} = \sqrt{\mathbf{41}}$

Exercice 24.2 :Calculer la distance BC

Coordonnées du milieu d'un segment :



Coordonnées de M milieu du segment PQ :

$M\begin{pmatrix} x=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix}$

Exemple : $A\ (1;\ -2)$ et $B\ (2;\ -4)$ des points du plan , déterminer les coordonnées de M ,milieu du segment [AB]

$M\begin{pmatrix} x=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix}$ on a $x = \frac{1+2}{2}$ et $y = \frac{-2+(-4)}{2}$

$x = \frac{3}{2}$ et $y = \frac{-2-4}{2}$

$x = \frac{3}{2}$ et $y = \frac{-6}{2}$

On a $x = \frac{3}{2}$ et $y = -3$

Donc $\mathbf{M\ (\frac{3}{2}\ ;\ -3)}$

Calculons la distance AM.

$AM^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$A\ (1;\ -2)$ et $M\ (\frac{3}{2}\ ;\ -3)$

$AM^2 = (\frac{3}{2} - 1)^2 + (-3 - (-2))^2$

$AM^2 = (\frac{3}{2} - 1)^2 + (-3 - (-2))^2$

$AM^2 = (\frac{1}{2})^2 + (-3 + 2)^2$; $AM^2 = (\frac{1}{2})^2 + (-1)^2$

$AM^2 = \frac{1}{4} + 1$; $AM^2 = \frac{5}{4}$ on a $AM = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\mathbf{AM = \frac{\sqrt{5}}{2}}$

Exercice 24.3 Soit $B\ (2;\ -4)$ et $C\ (5;\ -7)$

1) Calculer les coordonnées de P milieu du segment [BC]

2) Calculer la distance BP.

Exercice 24.4

Soit $A\,(1;\ -2)$, $B\,(-4;\ 2)$ et $C\,(5;\ -7)$

1) Dans un repère orthonormé (O,I,J) , placer les points A , B et C .

2) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.

3) Construire le triangle ABC.

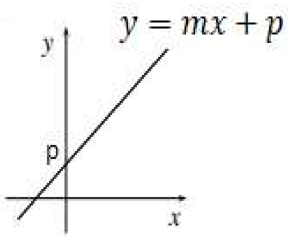
4) Calculer les coordonnées de M milieu du segment [BC], placer le point M.

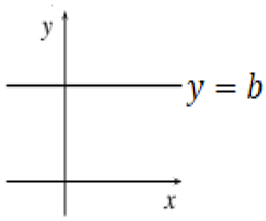
<u>Coefficient directeur d'une droite :</u>

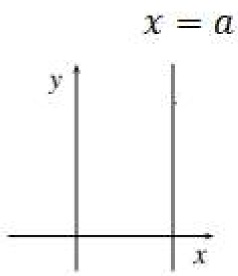
Soit a , b et c des réels ,toute droite (D) du plan à pour équation :

$ax + by + c = 0$ et d'équation réduite $y = mx + p$

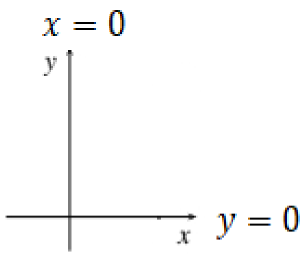
Le réel non nul m est le coefficient directeur de la droite et le réel p est l'ordonné à l'origine.



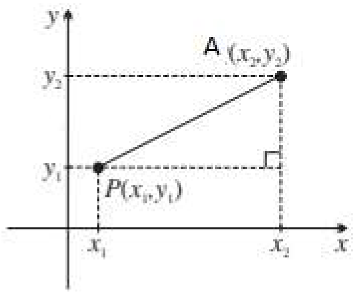




Equations des axes :



Coefficient directeur entre deux points A et P



Coefficient directeur m de deux points A et P.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ou $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, autre notation $m = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}$.

Le coefficient directeur est aussi appelé la pente.

Exemple :

Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par $\mathrm{A}\ (2;\ 5)$ et $\mathrm{B}(-3;\ -1)$.

Soit m le coefficient directeur de la droite (AB).

$m = \frac{-1-5}{-3-2}$; $m = \frac{-6}{-5}$; $\mathbf{m = \frac{6}{5}}$

Exercice 24.5

Soit $\mathrm{A}\ (2;\ 5)$, $\mathrm{B}\ (5;\ -2)$ et $\mathrm{C}\ (-3;\ 4)$

1) Calculer le coefficient directeur de la droite (AB)

2) Calculer le coefficient directeur de la droite (BC)

3) Calculer le coefficient directeur de la droite (AC)

Equation d'une droite :

Soit m le coefficient directeur de la droite (AB) tel que $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

L'équation de la droite (AB) est déterminé par l'équation :

$y - y_A = m(x - x_A)$

Exemple :

Soit $\mathrm{A}\,(1;\ 5)$, $\mathrm{B}\,(4;\ -1)$

Déterminer l'équation de la droite (AB).

Coefficient directeur de la droite m de la droite (AB) : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$m = \frac{-1-5}{4-1}$; $m = \frac{-6}{3}$; $m = -2$.

$(AB): y - y_A = m(x - x_A)$

On a $y - 5 = -2(x - 1)$

$y - 5 = -2x + 2$; $y = -2x + 2 + 5$; $y = -2x + 7$

Donc $\mathbf{(AB) : y = -2x + 7}$

Exercice 24.6

Soit $\mathrm{A}\,(6; 0)$ et $\mathrm{B}\,(0;\ 9)$

1) Déterminer le coefficient directeur de (AB).

2) déterminer l'équation de la droite (AB).

Propriété :

Soit $(d_1) :\ y = m_1 x + p$ et $(d_2): y = m_2 x + q$

Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

$(d_1) \mathbin{/\!/} (d_2)$ ssi $m_1 = m_2$.

Exemple : Soit $\mathrm{A}\,(3;\ 6)$, $\mathrm{B}\,(7; -2)$, $\mathrm{C}\,(4;\ -5)$ et $\mathrm{D}\,(-1;\ 5)$.

Démontrer que (AB) // (CD).

***

Calculons les coefficients directeurs des droites (AB) et (CD).

m_1 coefficient directeur de (AB) , $m_1 = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$

$m_1 = \frac{-2-6}{7-3}$; $m_1 = \frac{-8}{4}$; $m_1 = -2$.

m_2 coefficient directeur de (CD) ,

$m_2 = \frac{Y_D - Y_C}{X_D - X_C}$

$m_2 = \frac{5-(-5)}{-1-4}$; $m_1 = \frac{5+5}{-5}$; $m_2 = \frac{10}{-5}$ $m_2 = -2$.

On a $m_1 = m_2 = -2$, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 24.7 Soit $\mathrm{A}\,(-2;\ 5)$, $\mathrm{B}\,(1;3)$ et $\mathrm{C}\,(7;\ -1)$

Déterminer les coefficients directeurs des droites (AB) et (BC), en déduire que les points A, B et C sont alignés.

Propriété :

Soit (d_1) : $y = m_1 x + p$ et (d_2): $y = m_2 x + q$

Les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égale à -1 .

$(d_1) \perp (d_2)$ ssi $m_1 \times m_2 = -1$.

Exemple : Soit $\mathrm{A}\,(3;\ 7)$, $\mathrm{B}\,(-1;6)$, $\mathrm{C}\,(-2;\ -3)$ et $\mathrm{D}\,(11;\ 0)$.

Démontrer que (AC) ⊥ (BD).

Calculons les coefficients directeurs des droites (AC) et (BD).

m_1 coefficient directeur de (AC) , $m_1 = \frac{Y_C - Y_A}{X_C - X_A}$

$m_1 = \frac{-3-7}{-2-3}$; $m_1 = \frac{-10}{-5}$; $m_1 = 2$.

m_2 coefficient directeur de (BD) , $m_2 = \frac{Y_D - Y_B}{X_D - X_B}$

$m_2 = \frac{0-6}{11-(-1)}$; $m_1 = \frac{-6}{11+1}$; $m_2 = \frac{-6}{12}$ $m_2 = \frac{-1}{2}$.

Calculons $m_1 \times m_2 = 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-2}{2} = -1$ donc (AC) ⊥ (BD).

Exercice 24.8

1) Soit $\mathrm{A}\,(-2;5)$ et $\mathrm{B}\,(6;1)$, déterminer l'équation de la droite (AB).
2) Déterminer les coordonnées de M milieu du segment [AB].
3) Placer les points A,B et M dans un repère orthonormé (O,I,J)
4) Soit (d_2) la droite passant M et perpendiculaire à (AB).
   a) Déterminer le coefficient directeur de la droite (d_2).

b) Déterminer l'équation de la droite (d_2) passant par M.

c) Tracer la droite (d_2).

<u>Résolution graphique d'un système d'équation à deux inconnues</u>

Pour résoudre graphiquement un système d'équations à deux inconnues du type : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ a, b, c, a', b' et c' des réels.

On trace les droites d'équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$,

a) Si les deux droites sont sécantes la solution est donnée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

b) Si les deux droites sont parallèles, le système n'admet pas de solution.

c) Si les deux droites sont confondues, le système admet une infinité de couples solutions.

Exemple :Résolution graphique du système d'équations : $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$

Soit (d_1) : $x - y = 2$, équation réduite de (d_1) .

$x - y = 2$; $-y = 2 - x$; $-1(-y) = -(2 - x)$; $y = x - 2$

x	$y = x - 2$	$(x; y)$
Pour $x = 0$	On a $y = 0 - 2 = -2$	$(0; -2)$
Pour $x = 2$	On a $y = 2 - 2 = 0$	$(2 ; 0)$

La droite (d_1) passe par les points $(0; -2)$ et $(2 ; 0)$.

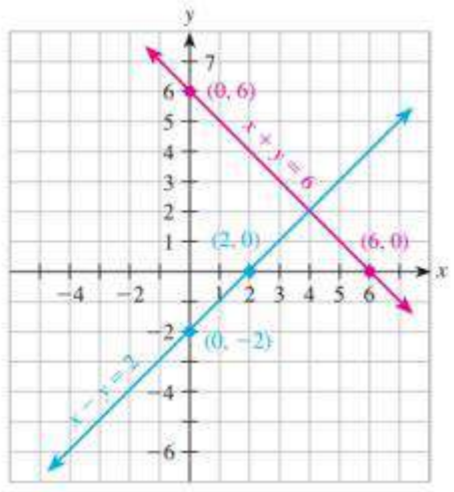
Soit (d_2) : $x + y = 6$, équation réduite de (d_2) :

$x + y = 6$; $y = 6 - x$ ou $y = -x + 6$

x	$y = -x + 6$	$(x; y)$
Pour $x = 0$	On a $y = 0 + 6 = 6$	$(0; 6)$
Pour $x = 6$	On a $y = -6 + 6 = 0$	$(6 ; 0)$

La droite (d_2) passe par les points $(0; 6)$ et $(6 ; 0)$.

Représentation graphique des droites (d_1) et (d_2).



Le point d'intersection des droites (d_1) et (d_2) est $(x = 4; y = 2)$

D'où $\mathbf{S} = \{(\mathbf{4}; \mathbf{2})\}$

Exemple :Résolution graphique du système d'équations : $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$

Soit (d_1) : $x + 2y = 2$, équation réduite de (d_1) :

$x + 2y = 2$; $2y = 2 - x$; $y = \frac{2-x}{2}$;

x	$y = \frac{2-x}{2}$	$(x; y)$
Pour $x = 0$	On a $y = \frac{2-0}{2} = 1$	$(0; 1)$
Pour $x = 2$	On a $y = \frac{2-2}{2} = 0$	$(2\,; 0)$

La droite (d_1) passe par les points $(0; 1)$ et $(2\,; 0)$.

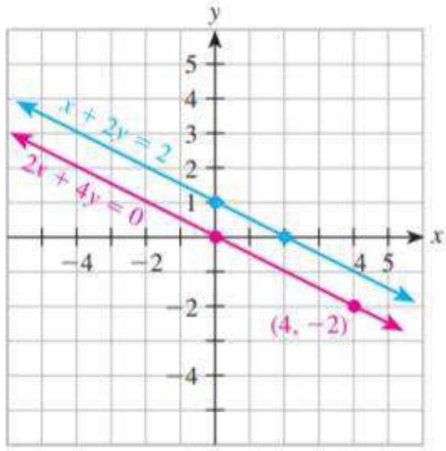
Soit (d_2) : $2x + 4y = 0$, équation réduite de (d_2) :

$2x + 4y = 0$; $4y = 0 - 2x$; $4y = -2x$; $y = \frac{-2x}{4}$; $y = \frac{-x}{2}$

x	$y = \frac{-x}{2}$	$(x; y)$
Pour $x = 0$	On a $y = \frac{0}{2} = 0$	$(0; 0)$
Pour $x = 4$	On a $y = \frac{-4}{2} = -2$	$(4\,; -2)$

La droite (d_2) passe par les points $(0; 0)$ et $(4\,; -2)$.

Représentation graphique des droites (d_1) et (d_2).



Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles , donc **le système d'admet pas de solution.**

Exemple :Résolution graphique du système d'équations : $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$

Soit (d_1) : $x - y = 5$, équation réduite de (d_1) .

$x - y = 5$; $-y = 5 - x$; $y = -(5 - x)$; $y = x - 5$

x	$y = x - 5$	$(x; y)$
Pour $x = 0$	On a $y = 0 - 5 = -5$	$(0; -5)$
Pour $x = 5$	On a $y = 5 - 5 = 0$	$(5\,;0)$

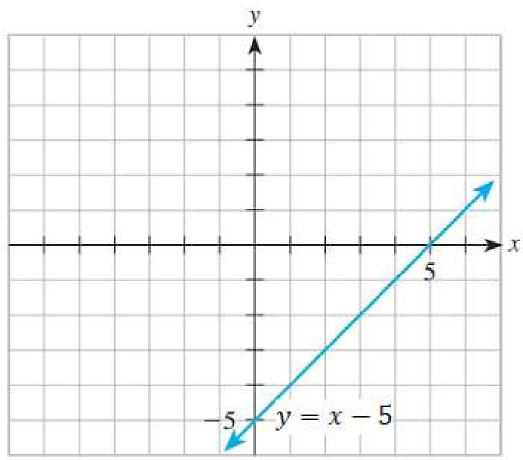
La droite (d_1) passe par les points $(0; -5)$ et $(5\,;0)$.

Soit (d_2) : $3x - 3y = 15$, équation réduite de (d_2) :

$-3y = -3x + 15$; $y = \frac{-3x+15}{-3}$ ou $y = \frac{-3x}{-3} + \frac{15}{-3}$; $y = x - 5$

La droite (d_2) passe aussi par les points $(0; -5)$ et $(5\,;0)$.

Représentation graphique des droites (d_1) et (d_2).



Les droites (d_1) et (d_2) sont confondues donc le système admet une infinité de couples solutions.

Exercice 24.9: Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants .

1) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = -4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -2x + y = 5 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$

Exercice 24.10: Soit le système (E) : $\begin{cases} \frac{2x+3y-5}{3x-2y} = -\frac{1}{2} \\ \frac{x+2y+7}{2x-y} = \frac{7}{5} \end{cases}$

1) Montrer que le système (E) est équivalent à $\begin{cases} 7x + 4y = 10 \\ 9x - 17y = 35 \end{cases}$

2) Résoudre le système ci-dessus par la méthode de combinaison.

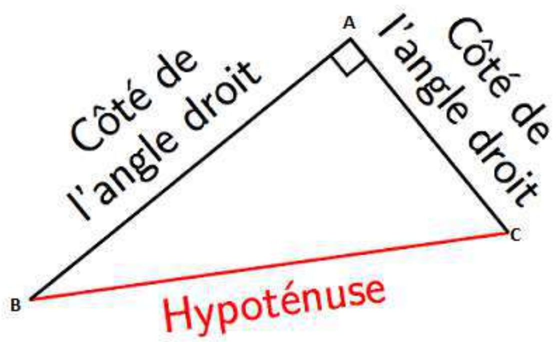
3) Vérifier que le couple déterminé ci-dessus est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{2x+3y-5}{3x-2y} = -\frac{1}{2} \\ \frac{x+2y+7}{2x-y} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

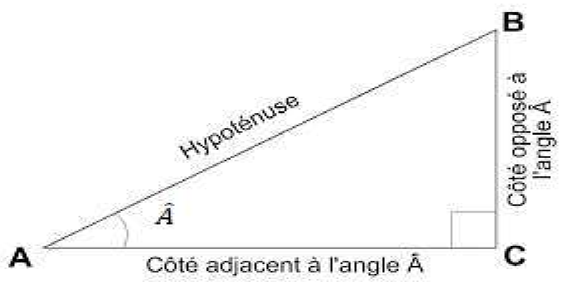
Thème 25 : Trigonométrie(1)-Cônes(2)

Le triangle rectangle.

Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.



Vocabulaire du triangle rectangle :

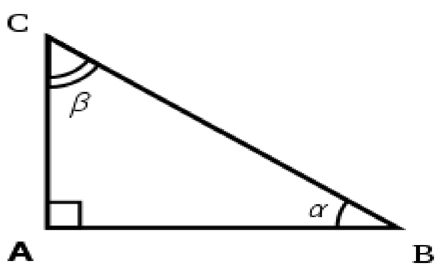


-L'hypoténuse est le côté qui se trouve en face de l'angle droit.

-Le côté opposé à un angle dans un triangle rectangle, est le coté en face de l'angle.

-Le coté adjacent à un angle dans un triangle rectangle, est le coté qui touche l'angle et aussi l'angle droit.

Propriétés :



Dans un triangle rectangle les angles aigus $\alpha \ \ et \ \beta$ sont complémentaires.

$mes\hat{\alpha} + mes\hat{\beta} = 90°$

Comme dans tout triangle, la somme des mesures des angles du triangle rectangle est égale à 180°.

α: $alpha$

β: $bêta$

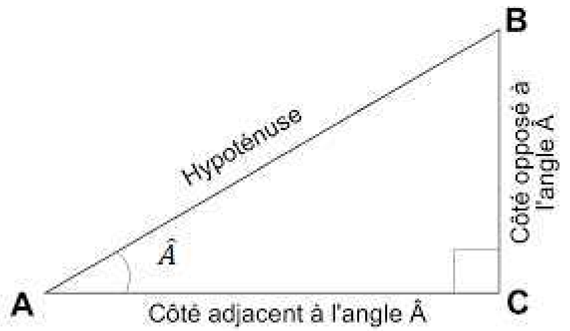
Trigonométrie.

Dans le triangle rectangle :

Le **cosinus (cos)** d'un angle est le quotient du côté adjacent à l'angle sur l'hypoténuse.

Le **sinus (sin)** d'un angle est le quotient du côté opposé à l'angle sur l'hypoténuse.

La **tangente (tan)** d'un angle est le quotient du côté opposé à l'angle sur le côté adjacent.

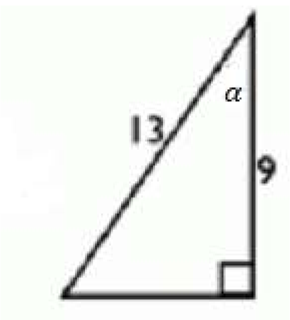


$\cos(\hat{A}) = \frac{\text{côté } adjacent \text{ à } l'angle\ \hat{A}}{hypoténuse}$; $\cos(\hat{A}) = \frac{\mathrm{AC}}{AB}$

$\sin(\hat{A}) = \frac{\text{côté } opposé \text{ à } l'angle\ \hat{A}}{hypoténuse}$; $\sin(\hat{A}) = \frac{\mathrm{BC}}{AB}$

$\tan(\hat{A}) = \frac{\text{côté } opposé \text{ à } l'angle\ \hat{A}}{\text{côté } adjacent \text{ à } l'angle\ \hat{A}}$; $\tan(\hat{A}) = \frac{\mathrm{BC}}{AC}$

Exemple :



Déterminer la mesure de l'angle $\hat{\alpha}$.

$$\begin{Bmatrix} On\ connait\ la\ longueur\ du\ \text{côté}\ adjacent\ \text{à}\ l'angle\ et\ la\ longueur\ de\ l'hypoténuse, \\ on\ va\ donc\ utiliser\ la\ formule\ du\ cosinus \end{Bmatrix}$$

$\cos(\hat{\alpha}) = \frac{\text{côté } adjacent \text{ à } l'angle\ \hat{\alpha}}{hypoténuse}$;

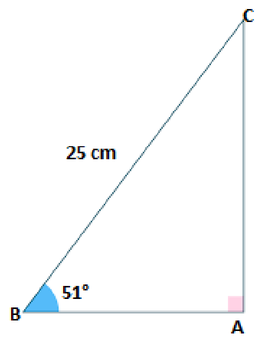
$\cos(\hat{\alpha}) = \frac{9}{13}$; $\cos(\hat{\alpha}) = 0{,}693$

$$\left\{\begin{matrix} Pour\ la\ mesure\ de\ l'angle\ \ on\ utilise\ la\ calculatrice, qui\ est\ d'abord\ reglé\ en\ mode\ degré, \\ sur\ l'ecran\ de\ la\ calculatrice\ \ on\ verra\ les\ sympboles\ D\ ou\ DEG \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} tapé\ la\ touche\ \textbf{shift}\ + \text{la}\ touche\ \ cos\ qui\ fera\ apparaitre\ \boldsymbol{cos}^{-1} + \\ la\ valeur\ du\ quotient + la\ touche\ = \ \ la\ mesure\ de\ l'angle\ est\ ainsi\ obtenue \end{matrix}\right\}$$

$$\boldsymbol{mes(\widehat{\alpha}) = cos^{-1}(0,693) = 46,1°}$$

Exemple :



ABC est un triangle rectangle en A , calculer BA.

***

$$\left\{\begin{matrix} on\ connait\ la\ mesure\ de\ l'angle, on\ connait\ la\ mesure\ de\ l'hypoténuse \\ on\ cherche\ le\ \text{côté}\ \ adjacent, donc\ on\ utilise\ la\ formule\ du\ cosinus \end{matrix}\right\}$$

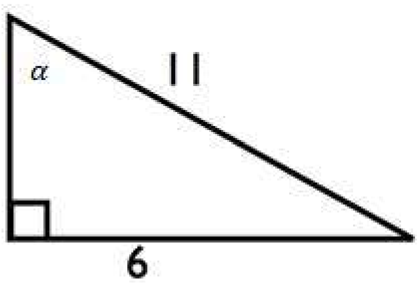
ABC rectangle en A , on a $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté}\ adjacent\ \text{à}\ l'angle\ \ \widehat{ABC}}{hypoténuse}$; $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{BA}}{BC}$

$\cos(51) = \frac{\text{BA}}{25}$; $\frac{\cos(51)}{1} = \frac{BA}{25}$ $\quad 1 \times BA = 25 \times \cos(51°)$

$$BA = 25 \times 0{,}629$$

$$\mathbf{BA = 15,7\ cm}$$

Exemple



Le triangle est rectangle déterminer $mes(\hat{\alpha})$.

$$\begin{cases} On\ connait\ la\ longueur\ du\ \text{côté}\ \ oppos\text{é}\ \ \text{à}\ l'angle\ et\ la\ longueur\ de\ l'hypot\text{é}nuse, \\ \ on\ va\ donc\ utiliser\ la\ formule\ du\ sinus \end{cases}$$

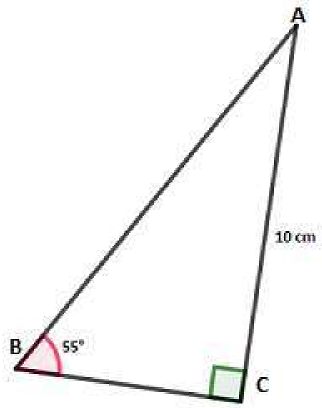
$\sin(\hat{\alpha}) = \frac{\text{côté}\ \ oppos\text{é}\ \ \text{à}\ l'angle\ \ \hat{\alpha}}{hypot\text{é}nuse}$;

$\sin(\hat{\alpha}) = \frac{6}{11}$; $\sin(\hat{\alpha}) = 0{,}545$

A l'aide de la calculatrice ,reprendre le processus ci-dessus en remplaçant cos par sin

On a $\boldsymbol{mes(\hat{\alpha}) = sin^{-1}(0,545) = 33°}$

Exemple :



ABC est un triangle rectangle en C, calculer AB.

***

$$\begin{cases} \ \ on\ connait\ la\ \boldsymbol{mesure\ de\ l'angle}, on\ connait\ la\ mesure\ du\ \text{côté}\ \ \boldsymbol{oppos}\text{é} \\ on\ cherche\ la\ mesure\ de\ l'\boldsymbol{hypot}\text{é}\boldsymbol{nuse}, donc\ on\ utilise\ la\ formule\ du\ sinus \end{cases}$$

ABC est un triangle rectangle en C , $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté}\ \ oppos\text{é}\ \ \text{à}\ l'angle\ \ \widehat{ABC}}{hypot\text{é}nuse}$.

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\text{AC}}{AB}; \quad \sin(55°) = \frac{10}{AB}$$

$$\frac{\sin(55°)}{1} = \frac{10}{AB}$$

$$AB \times \sin(55°) = 1 \times 10$$

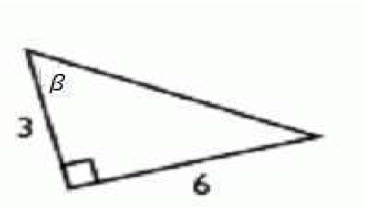
$$AB \times \sin(55°) = 10$$

$$AB = \frac{10}{\sin(55°)}$$

$$AB = \frac{10}{0{,}819}$$

$$\mathbf{AB = 12,2\ cm}$$

Exemple : Le triangle ci-dessous est rectangle, déterminer la mesure de l'angle β .



Le triangle est rectangle déterminer $mes(\hat{\beta})$.

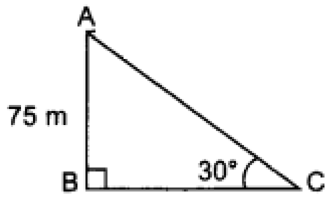
$$\begin{Bmatrix} \textit{On connait la longueur du côté } \textbf{\textit{opposé}} \textit{ à l'angle et la longueur du côté } \textbf{\textit{adjacent}}, \\ \textit{on va donc utiliser la formule de la } \textbf{\textit{tangente}}. \end{Bmatrix}$$

$\tan(\hat{\beta}) = \frac{\text{côté } opposé \text{ à } l'angle\ \hat{\beta}}{\text{côté } adjacent}$; $\tan(\hat{\beta}) = \frac{6}{3}$; $\tan(\hat{\beta}) = 2$

A l'aide de la calculatrice, reprendre le processus ci-dessus en remplaçant cos par tan

On a $\boldsymbol{mes(\hat{\beta}) = tan^{-1}(2) = 63{,}4°}$

Exemple : ABC est un triangle rectangle en B , calculer BC.



$$\begin{Bmatrix} \textit{on connait la } \textbf{\textit{mesure de l'angle}}, \textit{on connait la mesure du côté } \textbf{\textit{opposé}} \\ \textit{on cherche la mesure du côté adjacent, donc on utilise la formule de la tangente} \end{Bmatrix}$$

ABC est un triangle rectangle en B , $\tan(\widehat{ACB}) = \frac{\text{côté } opposé \text{ à } l'angle\ \widehat{ACB}}{coté\ adjacent}$.

$$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{\text{AB}}{BC}; \quad \tan(30°) = \frac{75}{BC}$$

$$\frac{\tan(30°)}{1} = \frac{75}{BC}$$

$$BC \times \tan(30°) = 1 \times 75$$

$$BC \times \tan(30°) = 75$$

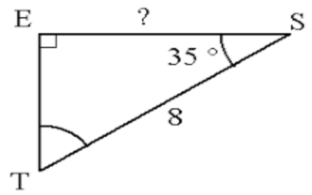
$$BC = \frac{75}{\tan(30°)}$$

$$BC = \frac{75}{0{,}577}$$

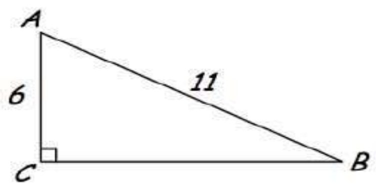
$$\mathbf{BC = 129{,}98\ m}$$

Exercice 25.1

1) Calculer ES

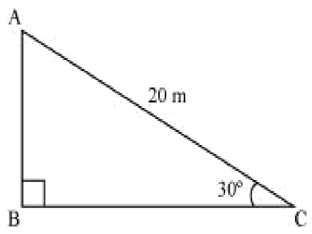


2) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$.

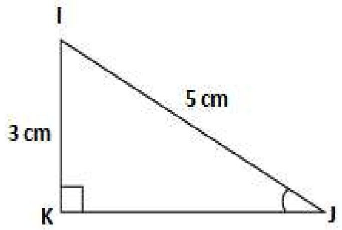


Exercice 25.2

1) Calculer AB

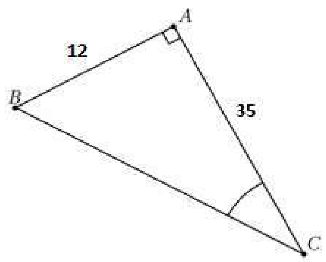


2) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{IJK}$.

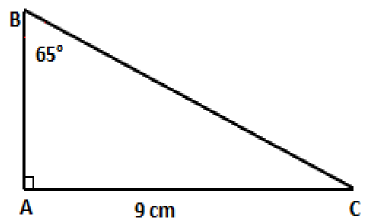


Exercice 25.3

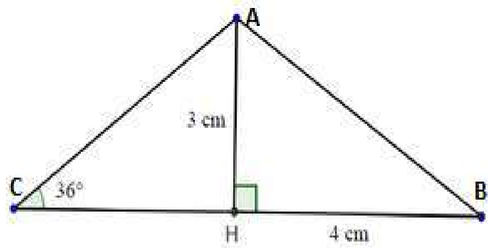
1) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.



2) Calculer AB



Exercice 25.4 : ABC un triangle on donne, AH=3cm, BH=4cm, $mes\widehat{ACB} = 36°$ et (AH) ⊥ (CB).



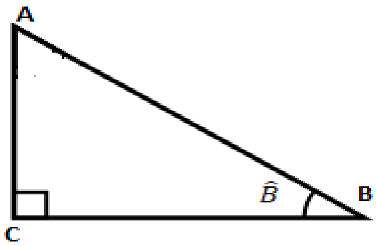
1) Calculer CH.

2) Calculer AC , sans utiliser le théorème de Pythagore.

3) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABH}$ et la mesure de l'angle $\widehat{BAH}$.

4) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Propriétés de trigonométrie :



ABC un triangle rectangle en C , quel que soit l'angle aigu $\hat{B}$ on a :

1) $0 \leq cos\hat{B} \leq 1$

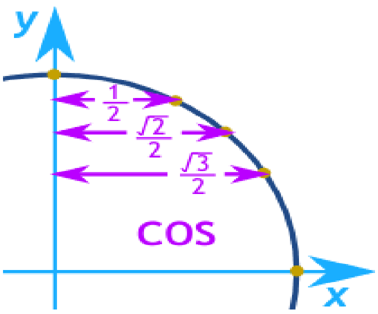
2) $0 \leq sin\hat{B} \leq 1$

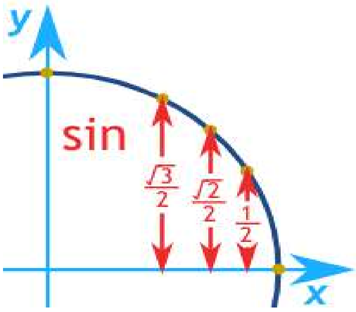
3) $cos^2\hat{B} + sin^2\hat{B} = 1$, faire attention à : $cos^2\hat{B} = (cos\hat{B})^2$ et $sin^2\hat{B} = (sin\hat{B})^2$

4) $tan\hat{B} = \frac{sin\hat{B}}{cos\hat{B}}$

Le cercle trigonométrique :

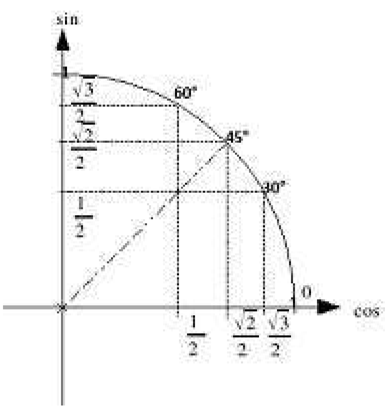
Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 unité.





Les valeurs du cosinus de l'angle sont sur l'axe horizontal.

Les valeurs du sinus de l'angle sont sur l'axe vertical.



$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(30°) = \frac{1}{2}$; $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos(60°) = \frac{1}{2}$ et $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\{Le\ quart\ de\ cercle\ ci - dessus\ est\ à\ mémoriser\}$

Exemple :

$\cos(a) = \frac{4}{5}$, déterminer $\sin(a)$ et $\tan(a)$.

On a $cos^2(a) + sin^2(a) = 1$ équivalent à $(cosa)^2 + (sina)^2 = 1$

Rappel : Soit a un réel positif si $x^2 = a$ $on\ a$ $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

On remplace cosinus par sa valeur on a $(\frac{4}{5})^2 + (sina)^2 = 1$

$$\frac{16}{25} + (sina)^2 = 1$$

$$(sina)^2 = 1 - \frac{16}{25}$$

$$(sina)^2 = \frac{25-16}{25}$$

$$(sina)^2 = \frac{9}{25}$$

On a $sina = \sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $sina = -\sqrt{\frac{9}{25}}$

D'où $sina = \frac{3}{5}$ ou $sina = -\frac{3}{5}$

On sait que $0 \leq sina \leq 1$, ainsi on a $\mathbf{sin(a)} = \mathbf{\frac{3}{5}}$

On a $\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$; $\tan(a) = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3\times5}{5\times4} = \frac{3}{4}$; $\mathbf{tan(a)} = \mathbf{\frac{3}{4}}$

Exercice 25.5 :

On donne :

1) $\sin(a) = \frac{2}{3}$, déterminer $cos(a)$ et $\tan(a)$.

2) $cos(a) = \frac{15}{17}$, déterminer $\sin(a)$ et $\tan(a)$.

3) $\sin(a) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, déterminer $cos(a)$ et $\tan(a)$.

4) $\cos(a) = \frac{\sqrt{13}}{7}$, déterminer $\sin(a)$ et $\tan(a)$.

Exercice 25.6 :

Déterminer la valeur exacte de :

1) $cos^2(30°) + sin^2(30°)$

2) $cos^2(30°) + cos^2(60°)$

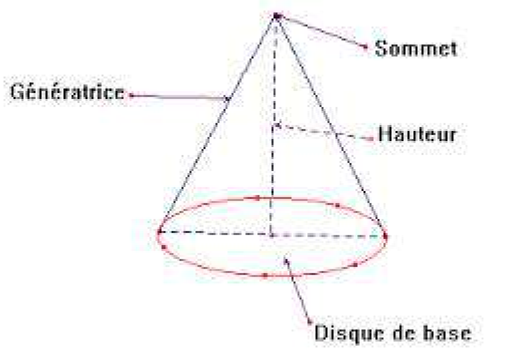
3) $\cos(30°) \times \sin(45°)$

4) $tan(45°) - \sin(60°)$

5) $\tan(45°) - \frac{\sin(45°)}{\cos(45°)}$

<u>Section d'un cône.</u>

<u>Le cône.</u>



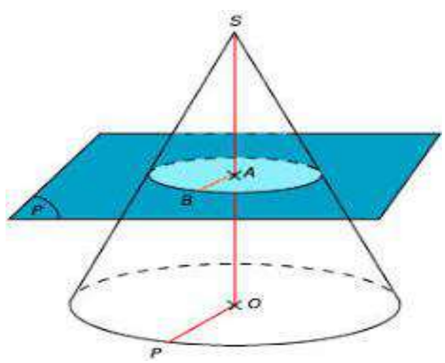
Surface du disque de base de rayon r : $\pi \times r^2$

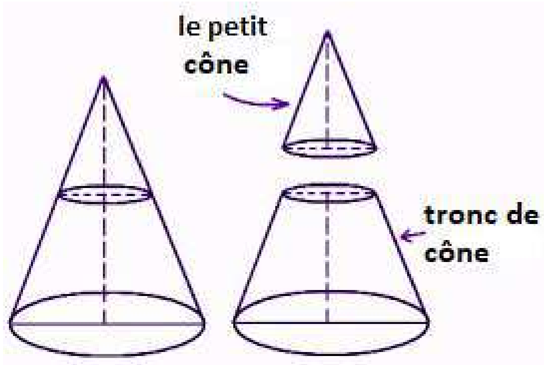
Volume V du cône de hauteur h : $V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$

Surface latérale L du cône de rayon r et de génératrice g : $L = \pi \times r \times g$.

<u>Section d'un cône .</u>

Section d'un cône par un plan parallèle au disque de base.





La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un **disque.**

Le petit cône est une réduction du grand cône.

-Le rapport des longueurs l' et l est : $\frac{l'}{l} = k$, avec $k > 0$.

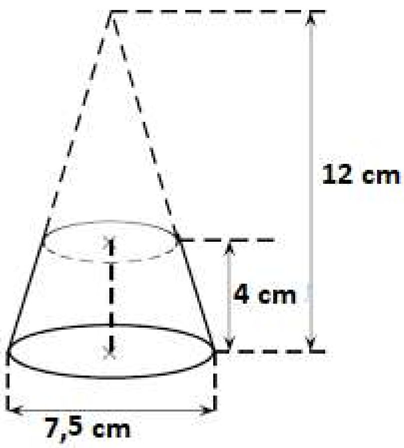
-Le rapport des aires A' et A est : $\frac{A'}{A} = k^2$

-Le rapport des volumes V' et V est : $\frac{V'}{V} = k^3$

-Le volume V'' du tronc de cône est : $V'' = V - V'$

La section est une réduction si $k < 1$ et un agrandissement si $k > 1$.

Exemple :



Le petit cône représenté en pointillé ci-dessus est obtenu après section du grand cône par un plan parallèle à la base.

1) Déterminer la hauteur h' du petit cône.

2) Déterminer le rapport des hauteurs du petit cône et du grand cône.

3) Déterminer le volume V du grand cône, puis le volume V' du petit cône.

4) Déterminer le volume V'' du tronc de cône.

***

1) Hauteur h’ du petit cône.

$h' = 12 - 4$; $\mathbf{h' = 8\ cm}$

2) Soit h la hauteur du grand cône on a : $k = \frac{h\prime}{h} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; : $\mathbf{k = \frac{2}{3}}$

3)

Volume du grand cône : $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Rayon du disque de base $r = \frac{7{,}5cm}{2} = 3{,}75cm$

Hauteur du grand cône h=12 cm.

$V = \frac{\pi(3{,}75)^2 \times 12}{3}$; $V = 56{,}25 \times \pi$, en prenant $\pi = 3{,}14$ on a $V = 56{,}25 \times 3{,}14$

$$\mathbf{V = 176,625cm^3}$$

3)

Le volume V’ du petit cône : On a $\frac{V\prime}{V} = k^3$; $V' = k^3 \times V$.

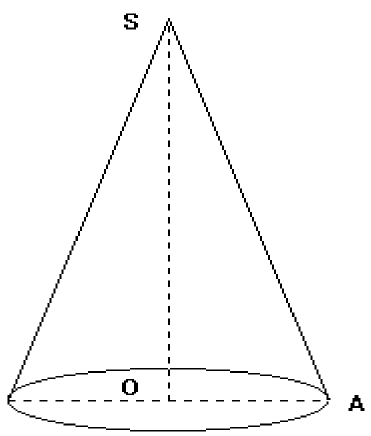
$V' = (\frac{2}{3})^3 \times 176{,}625$; $V' = \frac{2^3 \times 176{,}625}{3^3} = \frac{8 \times 176{,}625}{27}$; $\mathbf{V' = 52,333cm^3}$

4) Le volume V’’ du tronc de cône.

V’’= V-V’ ; $V'' = 176{,}625 - 52{,}333 = 124{,}292$; $\mathbf{V'' = 124,292cm^3}$

Exercice 25.7 :

Le cône de révolution ci-dessous de sommet **S** a une hauteur **SO** de **9 cm** et un rayon de base **OA** de **5 cm**.



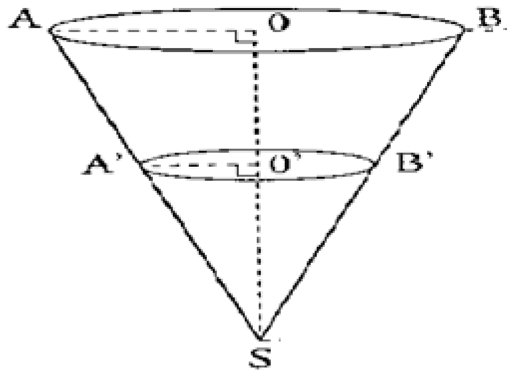
1) Calculer le volume **V** $_1$ de ce cône au **cm** ^{3} près.

2) Soit **M** le point du segment **[SO]** tel que **SM = 3 cm**.

On coupe le cône par un plan parallèle à la base passant par **M**.
Déterminer le coefficient de réduction k .
Calculer le volume **V** $_2$ du petit cône de sommet **S** ainsi obtenu au **cm** ^{3} près.

Exercice 25.8 :

Un cornet de glace en forme de cône est constitué de deux parties :



. une partie inférieure composée de gaufre et remplie de crème glacée,

. une partie supérieure constituée de glace.

On donne : SO = 16 cm ; AB = 5 cm.

On arrondira tous les résultats au dixième prés.

l. Calculer le volume du cornet de glace.

2. On appelle SA’B’ le cône constitué de gaufre dont la base de centre O' est parallèle à la base du cône SAB.

On donne SO' = 12 cm.

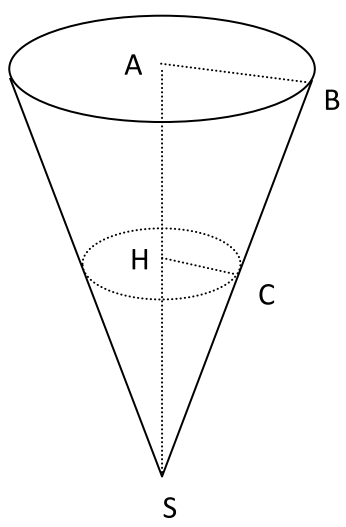
Le cône SA’B' est une réduction du cône SAB.

a) Calculer le coefficient de réduction et en déduire le volume de la partie gaufrée.

b) Calculer le volume de la partie supérieure en forme de tronc de cône constituée uniquement de glace.

Exercice 25.9 :

La partie supérieure d'un verre a la forme d'un cône de 6 cm de diamètre de base et de hauteur AS = 9cm.



1) Montrer que le volume du cône est $27\pi\ cm^3$
.

2) On verse un liquide dans ce verre (comme indiqué ci-contre), le liquide arrive à la hauteur du point H.

a) On suppose que HS = 4,5 cm. La surface du liquide est un disque. Calculer le rayon HC de ce disque (on justifiera les calculs).

b) Exprimer en fonction de π le volume correspondant du liquide en cm^3.

c) On pose maintenant HS = x (en centimètres). Montrer que le rayon HC de la surface du liquide est égal à : $\frac{x}{3}$.

Montrer alors par le calcul que le volume , V, de liquide est donné par la formule :

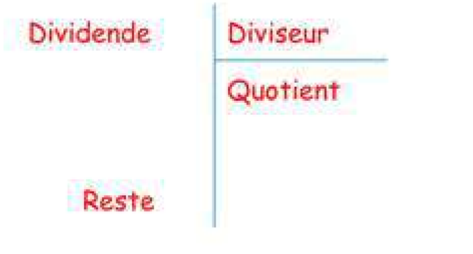
$V = \frac{\pi x^3}{27}\ cm^3$.

d) En utilisant la formule précédente, calculer le volume de liquide lorsque : HS = 3 cm puis lorsque HS = 6 cm.

Thème 26 : Arithmétique(2)-Statistiques(2)

I. Arithmétique

La division euclidienne.



Dans la division euclidienne, le dividende, le diviseur, le quotient et le reste sont des nombres entiers.

La division euclidienne :

$$\boldsymbol{Dividende = diviseur \times quotient + reste}\ , avec\ reste\ < diviseur$$

Le plus grand commun diviseur (PGCD) :

Le PGCD permet de rendre une **fraction irréductible**. Pour cela, il faut calculer le PGCD du numérateur et du dénominateur puis diviser les termes de la fraction par le PGCD obtenu.

Exemple :

On considère la fraction $\frac{5148}{1386}$

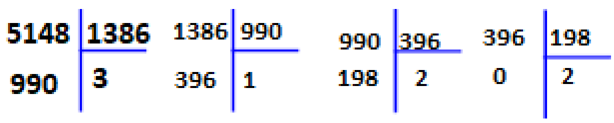
1) Déterminer, par la méthode de votre choix, le PGCD des nombres 5 148 et 1 386.

2) Simplifier la fraction $\frac{5148}{1386}$.

***

1) PGCD de 5148 et 1386 par l'algorithme d'Euclide.

L' **algorithme d'Euclide** permet de déterminer le PGCD de deux nombres par des **divisions successives** , on continue ce procédé jusqu'à ce que l'on arrive à un reste nul. Le **dernier reste non nul** est le PGCD des deux nombres de départ.



Donc le **PGCD (5148 et 1386) = 198.**

2)

Pour simplifier la fraction on divise le numérateur et le dénominateur par le PGCD des deux nombres.

$\frac{5148}{1386} = \frac{5148 \div 198}{1386 \div 198} = \frac{26}{7}$; $\frac{\mathbf{5148}}{\mathbf{1386}} = \frac{\mathbf{26}}{\mathbf{7}}$

Autre propriété du PGCD :

Le PGCD permet également de résoudre certains problèmes. Prenons par exemple le problème suivant :

Un chef d'orchestre fait répéter 372 choristes hommes et 775 choristes femmes

Pour un concert. Il veut faire des groupes de répétitions de sorte que :

-le nombre de choristes femmes est le même dans chaque groupe ;

- le nombre de choristes hommes est le même dans chaque groupe ;

-chaque choriste appartient à un groupe.

a) Quel est le nombre maximal de groupe qu'il pourra faire ?

b) Combien y aura-t-il alors de choristes hommes et de choristes femmes dans chaque groupes ?

***

a) Le chef d'orchestre doit faire un maximum de groupe identique, le nombre d'hommes sera le même pour chaque groupe, idem pour le nombre de femmes.

On doit donc déterminer le PGCD (372 et 775) qui correspond au nombre maximum de groupe.

PGCD (372 et 775) par l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{array}{r|l} 775 & \underline{372} \\ 31 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 372 & \underline{31} \\ 0 & 12 \end{array}$$

Donc le PGCD (372 et 775)=31, ainsi **le nombre maximum de groupe est 31**.

b)

Déterminons le nombre d'hommes dans chaque groupe : $\frac{372}{31} = 12$

Déterminons le nombre d'hommes dans chaque groupe : $\frac{775}{31} = 25$

Chaque groupe sera constitué de 12 hommes et 25 femmes.

Exemple :

1) Déterminer le PGCD de 182 et 78 par l'algorithme des différences.

2) Pour le 1er Mai, Julie dispose de 182 roses rouges et 78 roses blanches.

Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?

Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

***

1) PGCD de 182 et 78 par l'algorithme des différences.

182-78 = 104

104-78 = 26

78-26 = 52

52-26 = 26

26-26 = 0

Le dernier reste non nul est 26, donc **le PGCD (182 et 78)=26.**

2)

Le nombre de bouquet identiques correspond au PGCD de 182 et 78, qui est de 26.

Le nombre de bouquet identiques est 26.

Déterminons la composition de chaque bouquet :

Nombre de roses rouge par bouquet : $\frac{182}{26} = 7$

Nombre de roses rouge par bouquet : $\frac{78}{26} = 3$

Chaque bouquet est composé de 7 roses rouges et 3 roses blanches.

Exercice 26.1 :

1) Déterminer le PGCD des nombres 135 et 210 par l'algorithme des différences.
2) Dans une salle de bains, on veut recouvrir le mur situé au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible.
a. Déterminer la longueur, en cm, du côté d'un carreau, sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur.
b. Combien faudra-t-il alors de carreaux ?

Exercice 26.2 :

1) Calculer le PGCD des nombres 1053 et 325.

2) Écrire sous forme de fraction irréductible **Error!** .

3) Déterminer les nombres x tels que : $x^2 = \frac{325}{1053}$.

Exercice 26.3 :

1) Calculer le PGCD des nombres 1631 et 932.

2) Un collectionneur de timbres possède 1631 timbres français et 932 timbres d'Asie. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est à dire comportant le même nombre de timbres et la même répartition de timbres français et asiatiques.

a. Calculer le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser.

b. Combien y aura-t-il, dans ce cas, de timbres français et étrangers par lot ?

Exercice 26.4 :

Un commerçant reçoit 90 lampes de poches avec 135 ampoules et qu'il veut vendre des lots identiques sans qu'il ne lui reste d'ampoule ni de lampe. On peut se demander combien il devra mettre d'ampoules et de lampes dans chaque lot afin d'obtenir le plus de lot possible.

a. Calculer le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser.
b. Combien y aura-t-il, de lampes de poches et d'ampoules par lot dans ce cas ?

Exercice 26.5 :

1) Déterminer le PGCD (144 et 252).
2) Une association organise une compétition sportive ;144 filles et 252 garçons se sont inscrits.
L'association désire répartir les inscrits en équipes mixtes. Le nombre de filles doit être le même dans chaque équipe, Le nombre de garçons doit être le même dans chaque équipe. Tous les inscrits doivent être dans une des équipes.
a. Quel est le nombre maximum d'équipes que cette association peut former ?
b. Quelle est alors la composition de chaque équipe ?

Exercice 26.6 :

1. Un confiseur reçoit une commande de caramels d'un montant de 12040F.Pour fidéliser son client, il décide d'accorder une remise de 20%.
Calculer le montant de la facture après remise.
2. Quelques jours plus tard, le confiseur répartit 301 caramels et 172 chocolats dans les sachets identiques.
a. Calculer le nombre maximal de sachets réalisables.
b. Calculer le nombre de caramels et le nombre de chocolats contenus dans un sachet.

II. Statistiques.

La Fréquence.

Définition.

La fréquence est égale à l'effectif de la valeur sur l'effectif total.

La fréquence en pourcentage est égale à : $\frac{effectif\ de\ la\ valeur}{effectif\ total} \times 100$.

Effectif cumulée croissant

Méthode.

Le tableau statistique ci-dessous donne le nombre de livres lus par des membres d'un club de lecture.

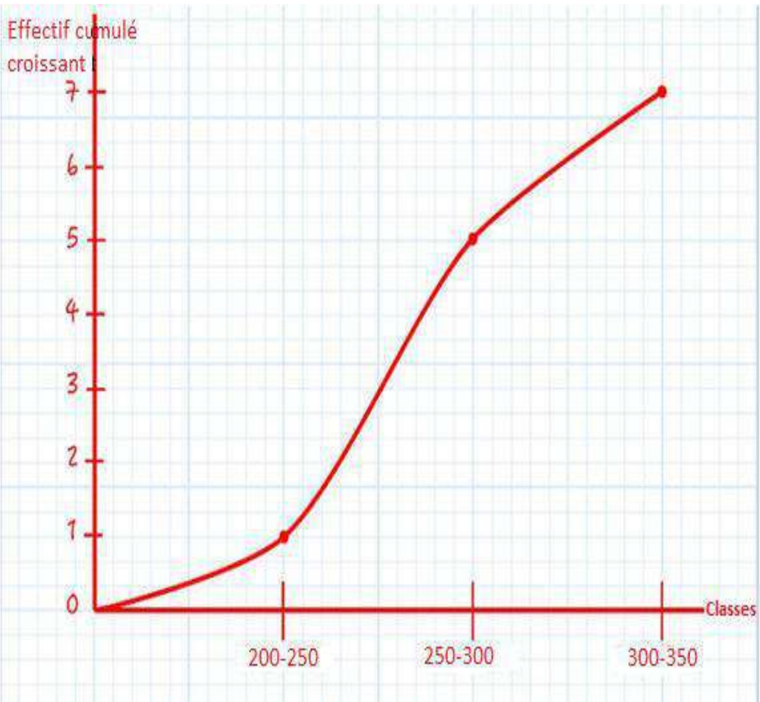
Livres lus	3	5	6	8
Effectif	2	1	3	1
Effectif cumulé croissant	2	3	6	7

Regroupement en classes d'une série statistique.

classes	[200-250[	[250-300[	[300-350[
effectif	1	4	2
Effectif cumulé croissant	1	5	7

Diagramme cumulatif.

Esquisse d'un diagramme cumulatif



L'effectif cumulé croissant va toujours en augmentant, donc le graphique va en augmentant.

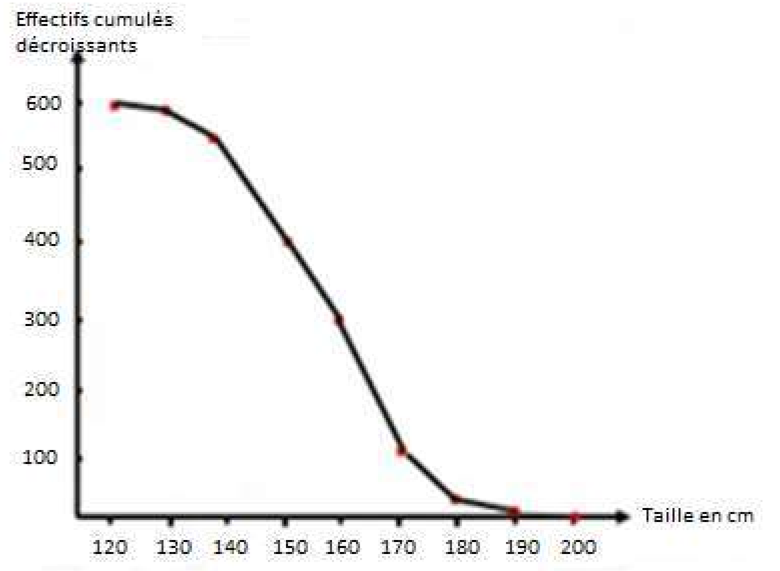
Exemple : Effectif cumulé décroissant.

ECD : Effectif cumulé décroissant

Effectif total : 600

Taille(cm)	[120 ;130[	[130 ;140[	[140 ;150[	[150 ;160[	[160 ;170[	[170 ;180[	[180 ;190[	[190 ;200[
Effectif	9	45	134	118	166	92	32	4
ECD	600	$\{600-9\}$ 591	$\{591-45\}$ 546	$\{546-134\}$ 412	$\{412-118\}$ 294	$\{294-166\}$ 128	$\{128-92\}$ 36	$\{36-32\}$ 4

Diagramme des effectifs cumulés décroissants.



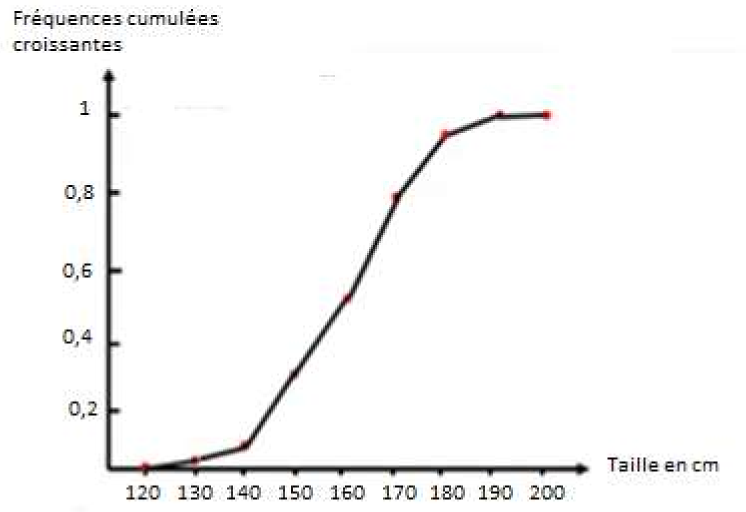
Exemple : Fréquences cumulées croissantes.

FCC : Fréquences cumulées croissantes.

Effectif total : 600

Taille(cm)	[120 ;130[	[130 ;140[	[140 ;150[	[150 ;160[	[160 ;170[	[170 ;180[	[180 ;190[	[190 ;200[
fréquence	$\frac{9}{600}=$ 0,015	$\frac{45}{600}=$ 0,075	$\frac{134}{600}=$ 0,223	$\frac{118}{600}=$ 0,197	$\frac{166}{600}=$ 0,276	$\frac{92}{600}=$ 0,153	$\frac{32}{600}=$ 0,053	$\frac{4}{600}=$ 0,007
FCC	0,015	(0,015+0,075) 0,09	(0,09+0,223) 0,313	(0,313+0,197) 0,51	(0,51+0,276) 0,786	(0,786+0,153) 0,939	(0,939+0,053) 0,992	(0,992+0,007) $0,999 \approx 1$

Diagramme des fréquences cumulées croissantes.



Exemple : Fréquences cumulées décroissantes.

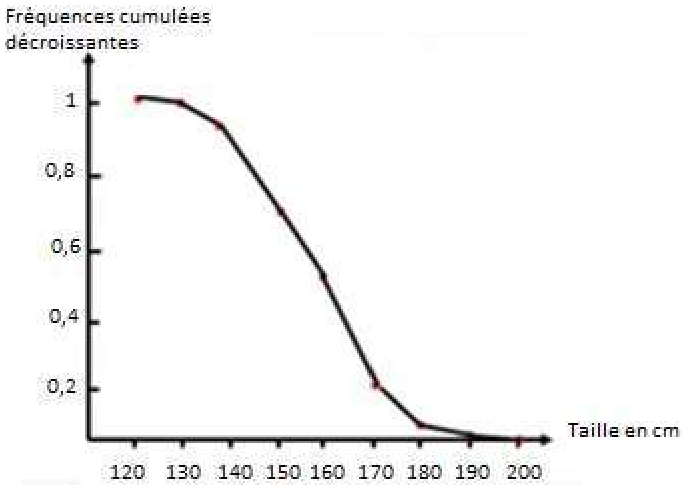
FCD : Fréquences cumulées décroissantes.

Effectif total : 600

Total des fréquences 1.

Taille(cm)	[120 ;130[	[130 ;140[	[140 ;150[	[150 ;160[	[160 ;170[	[170 ;180[	[180 ;190[	[190 ;200[
fréquence	$\frac{9}{600} =$ 0,015	$\frac{45}{600} =$ 0,075	$\frac{134}{600} =$ 0,223	$\frac{118}{600} =$ 0,197	$\frac{166}{600} =$ 0,276	$\frac{92}{600}$ 0,153	$\frac{32}{600} =$ 0,053	$\frac{4}{600} =$ 0,007
FCD	(total fréq) 1	(1-0,015) 0,985	(0,985-0,075) 0,91	(0,91-0,223) 0,687	(0,687-0,197) 0,49	(0,49-0,276) 0,214	(0,214-0,153) 0,061	(0,061-0,053) 0,008

Diagrammes des fréquences cumulées décroissantes.



Exercice 26.7 :

La série statistique ci-dessous , contient les tailles en cm des élèves d'une classe de 3e.

Recopier et compléter le tableau.

ECC : Effectif cumulé croissant.

ECD : Effectif cumulé décroissant.

Taille(cm)	145	150	155	158	160	162	165	166
effectif	1	2	3	6	4	4	3	2
ECC								
ECD								

Exercice 26.8 :

La série statistique ci-dessous, contient les regroupements en classes des tailles en cm des élèves d'un club de basket-ball.

Recopier et compléter le tableau.

f % : Fréquence en pourcentage

FCC : fréquence cumulé croissant.

FCD : Fréquence cumulé décroissant.

Taille(cm)	[140-150[	[150-160[	[160-170[	[170-180[	[180-190[	[190-200[
f en %	6	14	34	26	18	2
FCC						
FCD						

Exercice 26.9 :

Voici les tailles en cm des 16 élèves d'une classe de 3e.

165 145 150 166 165 160 158 162

158 165 154 158 160 162 162 154

1.a) Quelle est la population étudiée ?

.b) Donner le caractère étudié et sa nature.

2) Dresser le tableau des effectifs ; ECC ; ECD ;fréquences en % ; FCC en % ; FCD en %.

3.a) Combien d'élèves ont au plus 158 cm ?

.b) Combien d'élèves ont plus de 158 cm ?

4.a) Quel est le mode de cette série statisque ?

.b) Calculer la taille moyenne de cette série statistique et donner sa signification.

Exercice 26.10 :

Le tableau statisque ci-dessous donne la répartition des notes des élèves lors d'un examen.

Notes	[0 ;4[	[4 ;8[	[8 ;12[	[12 ;16[	[16 ;20[
effectifs	3	8	23	13	3
ECC					
centres					

-Calculer la moyenne des notes obtenues par les élèves.

-Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants.

Effectif : 1cm → 5 élèves.

Exercice 26.11 :

Le tableau ci-dessous représente les tailles en cm de 40 élèves d'une classe de 3e .

Taille(cm)	[140 ;150[	[150 ;160[	[160 ;170[	[170 ;180[	[180 ;190[
Effectif	x	8	5	18	y
Fréquences en %					
ECC en %					
ECD en %					

1) Recopier et compléter le tableau le tableau sachant que l'effectif de la classe [140 ; 150[est la moitié de l'effectif de la classe [180 ;190[.

2) Construire sur un même repère le diagramme des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Échelle : $\begin{cases} 1cm \to 10cm \\ 1cm \to 5 \text{ élèves} \end{cases}$

Le point d'intersection des deux diagrammes est le point médian.

En déduire graphiquement la taille médiane en tenant compte de l'échelle.

Déterminer graphiquement l'effectif médian en tenant compte de l'échelle.

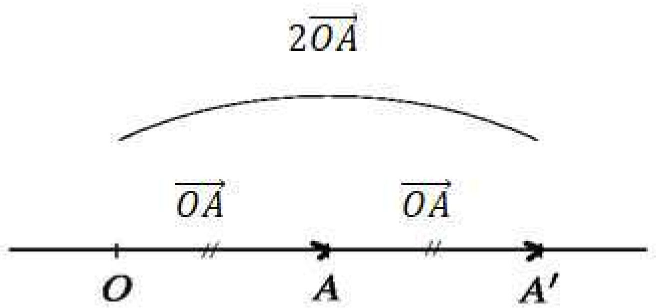
Thème 27 : Homothétie-Vecteurs, repérage(2)

Les homothéties

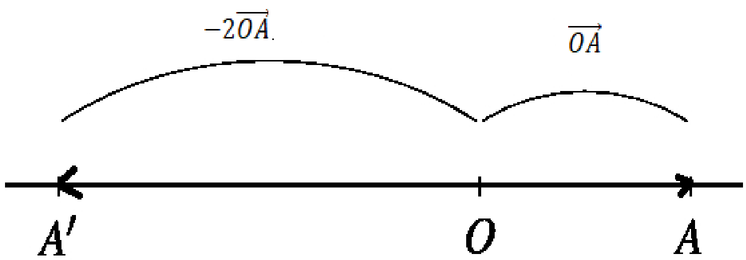
Une homothétie est une transformation du plan qui permet d'agrandir ou de réduire les figures géométriques.

Présentation :

O, A et A' des points du plan.



$\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$, les points O,A et A' sont alignés ,on dit que A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et le réel $k = 2$ est appelé le rapport de l'homothétie.



$\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$, les points O,A et A' sont alignés ,on dit que A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et le réel $k = -2$ est appelé le rapport de l'homothétie.

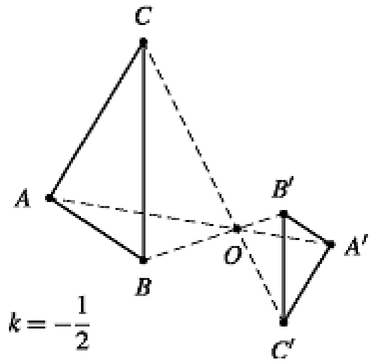
Le centre de l'homothétie est un point invariant par une homothétie de rapport différent de 1.

M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k si et seulement si : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

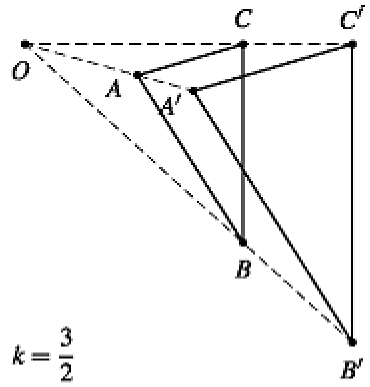
$$\begin{cases} si \quad k > 0 \;, alors \;\; M \; et \; M' sont \; du \; meme \; coté \; de \; O \\ si \;\; k < 0, alors \; M \; et \; M' \; sont \; de \; part \; et \; d'autres \; de \; O \end{cases}$$

Exemple :

Homothétie de centre O et de rapport $\frac{-1}{2}$.



Homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.



Exercice 27.1 :

1) Construire M' l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{-1}{2}$.

2) Tracer un segment [AB] et O un point tel que O, A et B ne sont pas alignés.

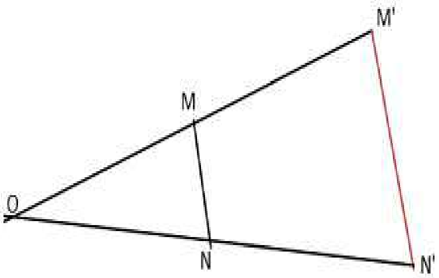
Construire le segment [A'B'] image du segment [AB] par l'homothétie de centre O et de rapport 2, puis en déduire une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$.

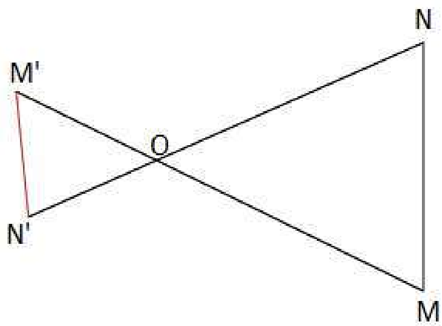
Agrandissement et réduction d'une image par une homothétie.

- Si $|k| < 1$, l'homothétie réduit l'image.
- Si $|k| > 1$, l'homothétie agrandi l'image .

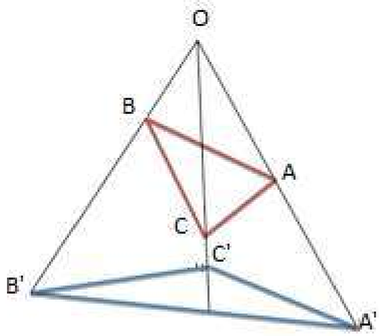
Images de figures simples

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k , M' et N' images de M et N par h :





Construction du triangle A'B'C' image du triangle ABC par une homothétie de centre O et de rapport $k > 1$.



Propriétés

Soit h une homothétie de rapport k, A', B' et I' les images respectives des points A, B et I par h :

1) L'image de la droite (AB) est la droite (A'B') et (A'B') est parallèle à (AB).

2) L'image du segment [AB] est le segment [A'B'].

3) L'image de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B').

4) L'image du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' et de rayon $|k| \times r$.

5) L'homothétie conserve l'alignement des points, le parallélisme, l'orthogonalité et les mesures des angles.

Soit h une homothétie de rapport k,

L'image d'un segment de longueur L est un segment de longueur $|k| \times$ L .

L'image d'une figure d'aire **A** est une figure d'aire k^2 $\times$**A.**

Exercice 27.2 :

ABC un triangle .Les points A' et B' sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AC].Les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point G.

1) Déterminer l'image de A' par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

2) Déterminer l'image de G par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

3) Construire le point C' , image de C par l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{-1}{2}$.

Exercice 27.3 :

ABC un triangle équilatéral de coté 3 cm. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{-4}{3}$ et par AB'C' l'image de ABC par l'homothétie h.

1) Placer le point H sur [BC] tel que (AH) est perpendiculaire à (BC).

   Calculer AH.

2) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

3) Démontrer que le triangle AB'C' est équilatéral.

4) Calculer l'aire de AB'C'

Vecteurs et repérage.

Représentation d'un vecteur.

La norme ou distance : une mesure.

Orientation : Une direction et un sens

La norme, la direction et le sens sont les éléments qui caractérisent un vecteur.

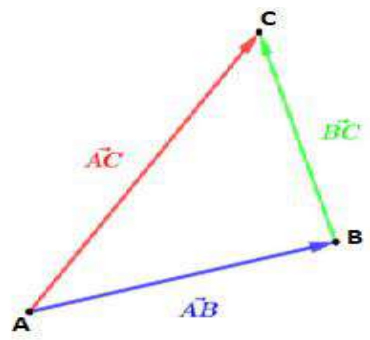
Exemple :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$
- Direction : droite (AB)
- Sens : de A vers B
- Norme : distance AB

Caractérisation du milieu d'un segment.

I est le milieu du segment [AB] alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

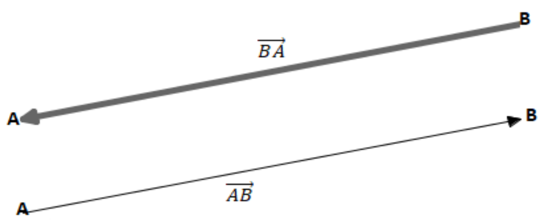
Relation de Chasles.



A,B et C trois points du plan alors $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B}C} = \overrightarrow{AC}$ $\quad$ $(relation\ de\ Chasles)$.

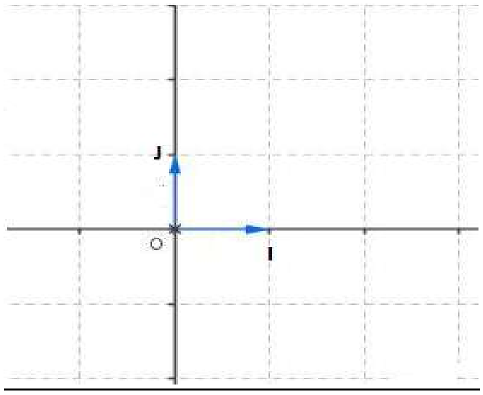
$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{MM} = \vec{0} \quad (le\ vecteur\ nul)$

Vecteurs opposés :



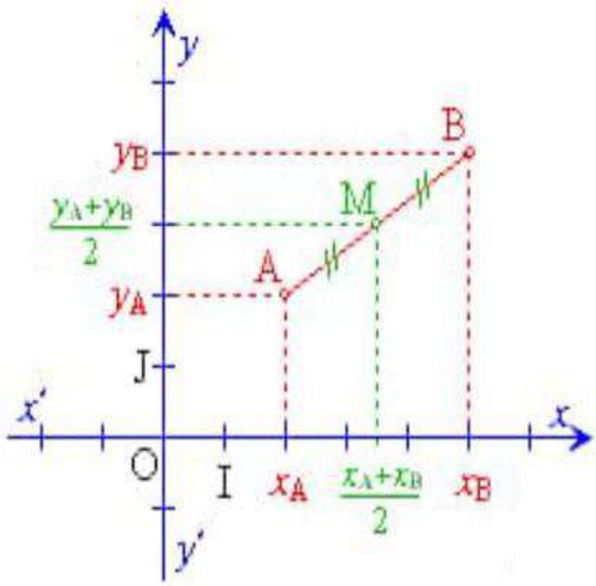
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ $\left(\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{BA}\ sont\ deux\ vecteurs\ opposés\right)$

Repérage.



Coordonnées du milieu d'un segment.

Soient $A\binom{x_A}{y_A}$ et $B\binom{x_B}{y_B}$ deux points d'un repère orthonormé (O,I,J), $M\binom{x_M}{y_M}$ tel que M est le milieu du segment [AB].



M étant le milieu du segment [AB] alors $M\begin{pmatrix} x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix}$.

Exemple : Soient $A\binom{2}{4}$ et $B\binom{1}{-3}$ des points d'un repère orthonormé (O,I,J) .Déterminées les coordonnées de M milieu du segment [AB].

M est le milieu du segment [AB] alors $M\begin{pmatrix} x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix}$; $M\begin{pmatrix} x_M=\frac{2+1}{2} \\ y_M=\frac{4+(-3)}{2} \end{pmatrix}$

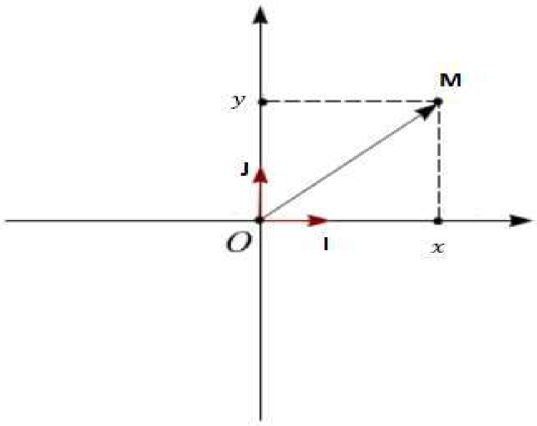
$M\begin{pmatrix} x_M=\frac{3}{2} \\ y_M=\frac{4-3}{2} \end{pmatrix}$; $M\begin{pmatrix} x_M=\frac{3}{2} \\ y_M=\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; donc $\mathbf{M}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 27.4 : Soient $A\binom{-2}{4}$ et $B\binom{3}{-3}$ des points d'un repère orthonormé (O,I,J) .Déterminées les coordonnées de M milieu du segment [AB].

Les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et de plus, OI = OJ, alors

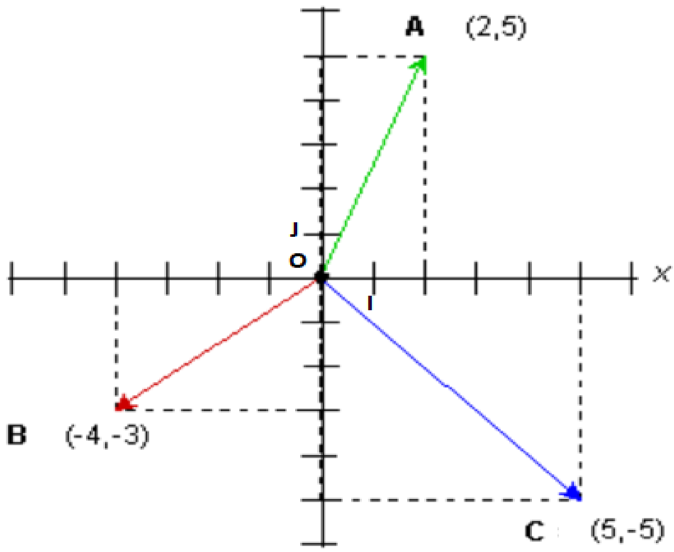
(O, I, J) est un repère est <u>orthonormé</u>.

(O, I, J) est un repère orthonormé et M est un point de coordonnées x et y.



On a $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$ équivalent à $M(x; y)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

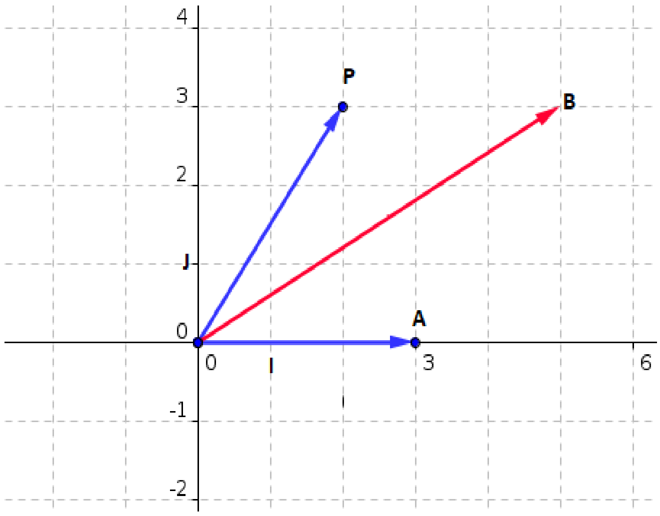
Exemple :



De la lecture graphiques et des coordonnées des point A,B et C on déduit que :

$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OI} + 5\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OB} = -4\overrightarrow{OI} - 3\overrightarrow{OJ}$ et a $\overrightarrow{OC} = 5\overrightarrow{OI} - 5\overrightarrow{OJ}$.

Ex5 : Dans le repère orthonormé (O,I,J) ci-dessous ,exprimer en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OP}$.

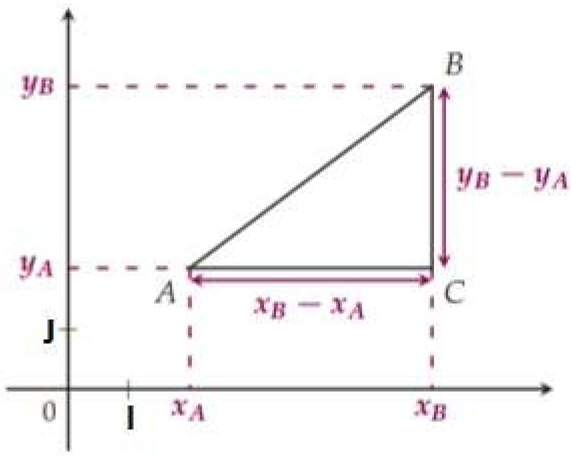


Exercice 27.6 :

1) Dans un repère orthonormé (O,I,J) placer les points A(1 ;2) , B(-4 ;-3) et C(2 ;-3).

2) Exprimer en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

Propriété : Coordonnées d'un vecteur.



Soient $A\binom{x_A}{y_A}$ et $B\binom{x_B}{y_B}$ deux points d'un repère orthonormé (O,I,J) alors $\overrightarrow{AB}$ $\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$.

Exemple :

Soient $A\binom{2}{-2}$ et $B\binom{5}{4}$ des points d'un repère orthonormé (O,I,J) .Déterminées les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$x_B - x_A = 5 - 2 = 3$ et $y_{B-}y_A = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$

Donc $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\binom{3}{6}$ ou $\overrightarrow{\mathbf{AB}}(\mathbf{3}; \mathbf{6})$

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \mathbf{3}\overrightarrow{\mathbf{OI}} + \mathbf{6}\overrightarrow{\mathbf{OJ}}$.

Propriété :

Soient $\overrightarrow{AB}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{x'}{y'}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Exemple : dans un repère orthonormé (O,I,J) ; A(2 ;1) , B(3 ;-4) et C(1 ;-2).

Déterminer les coordonnées de D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

***

Soit $D\binom{x}{y}$, ABCD un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = 3-2=1 \\ y_B - y_A = -4-1=-5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D = 1-x \\ y_C - y_D = -2-y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

équivaut à $\quad x_B - x_A = x_C - x_D$ et $y_B - y_A = y_C - y_D$

$1 = 1 - x$ et $-5 = -2 - y$

Ou $\quad 1 - x = 1$ et $-2 - y = -5$

$-x = 1 - 1$ et $-y = -5 + 2$

$-x = 0$ et $-y = -3$

$x = 0$ et $y = 3$; donc $\mathbf{D}\binom{\mathbf{0}}{\mathbf{3}}$

<u>Distance entre deux points.</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) , si $\overrightarrow{AB}(x\,;y)$ alors la distance AB est déterminée par : $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ est tel que $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Exemple :

Soient $A\binom{2}{-2}$ et $B\binom{1}{2}$ des points d'un repère orthonormé (O,I,J) .Déterminer la distance AB.

1) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = 1-2=-1 \\ y_B - y_A = 2-(-2)=2+2=4 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB}\binom{-1}{4}$$

2) Distance AB

$$AB = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} \quad ; \quad AB = \sqrt{1+16}\,;\ \mathbf{AB = \sqrt{17}\,.}$$

Exercice 27.7 :

Soient $C\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ des points d'un repère orthonormé (O,I,J)

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

2) Déterminer la distance CD .

<u>Orthogonalité.</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

On considère le tableau suivant :

Les vecteurs	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CD}$
Coordonnées des vecteurs	x y	x' y'

La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (CD) si et seulement si : $xx' + yy' = 0$

La droite (AB) est parallèle à la droite (CD) si et seulement si : $xy' - x'y = 0$

Exemple :

Dans un repère orthonormé (O,I,J) le vecteur $\overrightarrow{AB}(2;3)$ et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ $(-6;4)$
Prouver que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

On considère le tableau suivant :

Les vecteurs	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CD}$
Coordonnées des vecteurs	2 3	-6 4

La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (CD) si et seulement si : $xx' + yy' = 0$

Calculons : $xx' + yy' = 2(-6) + 3(4) = -12 + 12 = 0$, donc (AB)⊥(CD).

Exemple :

Dans un repère orthonormé (O,I,J) le vecteur $\overrightarrow{AB}(2;-1)$ et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ $(6;-3)$
Prouver que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

On considère le tableau suivant :

Les vecteurs	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CD}$
Coordonnées des vecteurs	2 -1	6 -3

La droite (AB) est parallèle à la droite (CD) si et seulement si : $xy' - x'y = 0$

Calculons : $xy' - x'y = 2(-3) - 6(-1) \; = -6 + 6 = 0$, donc (AB)//(CD).

Remarque : Les points A,B et C sont alignés si et seulement les droites (AB) et (AC) sont parallèles.

Exercice 27.8 :

Soient $A\begin{pmatrix}-7/2\\-1/2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1/2\\3/2\end{pmatrix}$ et C(5/2 ; 5/2)des points d'un repère orthonormé (O,I,J)

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) Démontrer que les points A,B et C sont alignés **.**

Exercice 27.9 :

Soient $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et C(5 ; 0)des points d'un repère orthonormé (O,I,J)

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

2) Démontrer que (AB)⊥ (BC).

3) En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 27.10 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) , placer les points A(3 ;4) , B(-5 ;2) et C(4 ;0).

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

2) Calculer les distances AB, AC et BC.

3) Donner la nature du triangle ABC en justifiant votre réponse.

4) Calculer $tan\widehat{ACB}$, en déduire la mesure de l'angle à 0,1 près de l'angle $\widehat{ACB}$.

Exercice 27.11 :

Soit (O, I, J) un repère orthonormal .

1) Placer les points A, D, E, qui ont pour coordonnées :

A(- 4 ; - 2), D(8 ; 2), E(0 ; 6).

2) Calculer les distances EA, ED et AD.

En déduire la nature du triangle AED.

3) Montrer que le point B de coordonnées (2 ; 0) est le milieu du segment [AD].

Exercice 27.12 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). L'unité est le centimètre.

1) Sur une feuille de papier placer les points : A(1 ; - 2), B(3 ; 2), C(7 ; 0).

2) Construire le point D tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

3) Déterminer graphiquement les coordonnées du point D.

5) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

6) Calculer AB et BC.

7) Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 27.13 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm on donne :
$\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{GO} = -7\overrightarrow{OI}$

1.1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C et G
1.2) Placer ces 4 points dans le repère

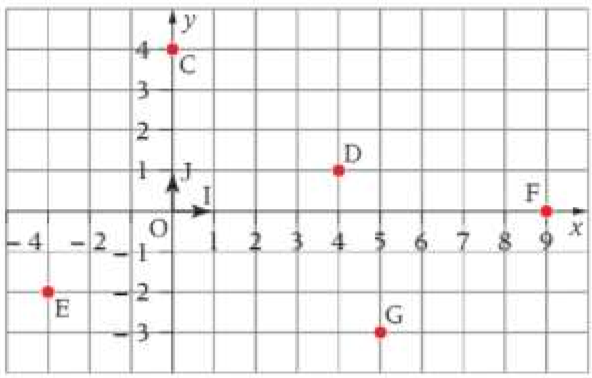
2) Soit E un point du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$
2.1) Quelle est la nature du quadrilatère ABEC ?
2.2) Donner par lecture graphique les coordonnées du point E

3) Calculer la distance AB

4) Soit F le symétrique de C par rapport à A.
4.1) Déterminer les coordonnées de F et le placer dans la figure
4.2) Démontrer que B est le milieu du segment [FG]

Exercice 27.14 :

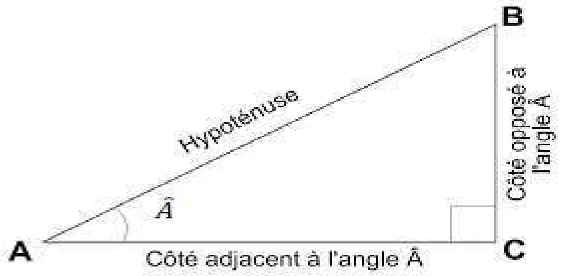
(O,I,J) un repère orthonormé du plan .



1) Donner par lecture graphique les coordonnées des points C, D, E, F et G
2) Calculer les distances CD, CG, COet OG
3) Soit S le milieu de [CG] et T le milieu de [EG].
Calculer les coordonnées des points S et T.
4) Soit M le symétrique de G par rapport à D et N le symétrique de E par rapport à O.
Déterminer les coordonnées des points M et N
5) Déterminer par le calcul les coordonnées du point P tel ECDP soit un parallélogramme.

Thème 28 : Trigonométrie (2)-Pyramide(2)

Formule de trigonométrie dans le triangle rectangle :



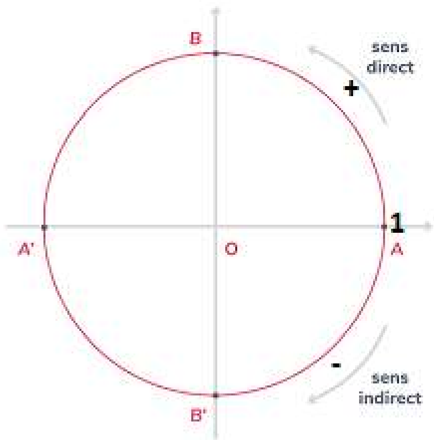
$$\cos(\hat{A}) = \frac{coté\ adjacent\ à\ \hat{A}}{hypoténuse}\ ;\ \cos(\hat{A}) = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin(\hat{A}) = \frac{coté\ opposé\ à\ \hat{A}}{hypoténuse}\ ;\quad \sin(\hat{A}) = \frac{CB}{AB}$$

$$\tan(\hat{A}) = \frac{coté\ opposé\ à\ \hat{A}}{coté\ adjacent\ à\ \hat{A}}\ ;\ \tan(\hat{A}) = \frac{CB}{AC}$$

Le cercle trigonométrique :

On appelle cercle trigonométrique, tout cercle de centre un point O et de rayon 1.

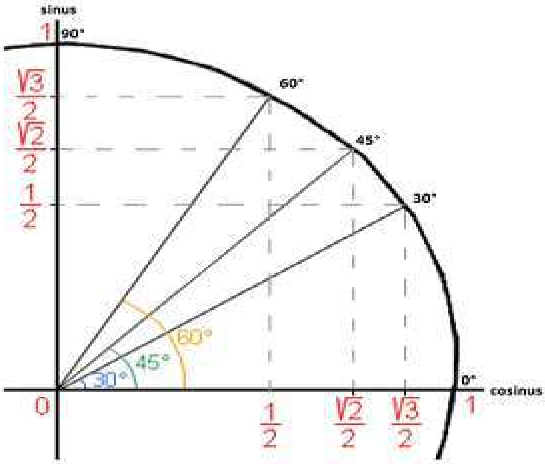


Le cercle trigonométrique est orienté dans **le sens trigonométrique, sens contraire des aiguilles d'une montre (sens positif, symbolisé par +).**

Les valeurs remarquables :

Ces valeurs remarquables sont à connaitre par « cœur ».

Angle x	0°	30°	45°	60°	90°
Cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Propriétés :

Quel que soit x élément de IR .

$0 \leq \cos(x) \leq 1$

$0 \leq \sin(x) \leq 1$

$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$, avec $cos^2(x) = (\cos x)^2$

$\tan(x) = \frac{\sin\ x}{\cos x}$

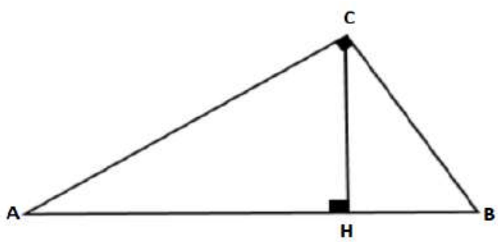
Exercice 28.1 :

ABC est un triangle rectangle en A est tel que BC= 3 cm et $\widehat{ABC} = 60°$.

Déterminer les valeurs exactes de AB et BC.

<u>Les relations métriques dans le triangle rectangle.</u>

ABC un triangle rectangle en C et H est le pied de la hauteur issue de C tel que H est un point de [AB]. [CH] est une hauteur de ABC.



1) Calculons de ABC :

On a L'aire de ABC est $\frac{AC \times CB}{2}$ ou $\frac{HC \times AB}{2}$ on a l'égalité :

$\frac{AC \times CB}{2} = \frac{HC \times AB}{2}$ on a $\mathbf{AC \times CB = HC \times AB}$ (1)

$H \in [AB]$ donc $\widehat{ABC} = \widehat{HBC}$, comme ABC et CBH sont rectangles on a :

$$cos\widehat{ABC} = cos\widehat{HBC}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{HB}{BC}$$

$$BC \times BC = HB \times AB$$

$$\mathbf{BC^2 = HB \times AB} \text{ (2)}$$

$H \in [AB]$ donc $\widehat{CAB} = \widehat{CAH}$, comme ABC et CBH sont rectangles on a :

$$cos\widehat{CAB} = cos\widehat{CAH}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

$$AC \times AC = AH \times AB$$

$$\mathbf{AC^2 = AH \times AB} \text{ (3)}$$

Le théorème de Pythagore :

ABC rectangle en C on a : $cos^2(\widehat{BAC}) + sin^2(\widehat{BAC}) = 1$

Mais aussi $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AC}{AB}$ et $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{CB}{AB}$

$$(\cos\widehat{BAC})^2 + (\sin\widehat{BAC})^2 = 1$$

$$(\frac{AC}{AB})^2 + (\frac{CB}{AB})^2 = 1$$

$$\frac{AC^2}{AB^2} + \frac{CB^2}{AB^2} = 1$$

Multiplions chaque membre par AB^2

On a $\frac{AC^2}{AB^2} \times AB^2 + \frac{CB^2}{AB^2} \times AB^2 = 1 \times AB^2$

En simplifiant le terme AB^2 à gauche on a : $\boldsymbol{AC^2 + CB^2 = AB^2}$

(c'est le théorème de Pythagore)

ACB rectangle en C , d'après la propriété de Pythagore on a :

$$\boldsymbol{AB^2 = AC^2 + CB^2} \text{ (4)}$$

Relations métriques dans le triangle rectangle.

$\mathbf{AC \times CB = HC \times AB}$

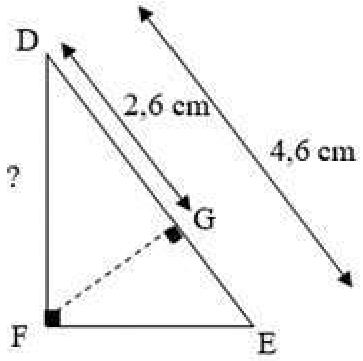
$\boldsymbol{AB^2 = AC^2 + CB^2}$

$\mathbf{AC^2 = AH \times AB}$

$\mathbf{BC^2 = HB \times AB}$

Exemple :EFD rectangle en F et G un point de [DE] tel que [FG] est une hauteur de DFE.

Calculer DF.



$G \in [DE]$ ainsi dans le triangle DEF rectangle en F on a $\widehat{FDE} = \widehat{FDG}$.

DFE et FDG deux triangles rectangles en F et G .

$$\widehat{FDE} = \widehat{FDG}$$

$$cos\widehat{FDE} = cos\widehat{FDG}$$

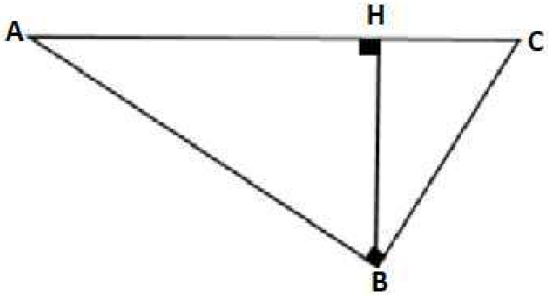
$$\frac{DF}{DE} = \frac{DG}{DF}$$

$$DF \times DF = DG \times DE$$

$$\mathrm{DF}^2 = \mathrm{DG} \times \mathrm{DE}$$

On a $\mathrm{DF}^2 = 2{,}6 \times 4{,}6$, $\mathrm{DF}^2 = 11{,}96$, $DF = \sqrt{11{,}96}$ on a $DF = 3{,}458cm$; $\mathbf{DF = 3,46cm}$

Exemple : Du triangle rectangle ci-dessous, démontrer que : $AH^2 + HC^2 + 2BH^2 = AC^2$



ABC rectangle en B ,avec la propriété de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

AHB rectangle en H , par analogie à ABC on a $AB^2 = AH^2 + HB^2$

CHB rectangle en H , par analogie à ABC on a $CB^2 = HB^2 + CH^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ ou $AB^2 + BC^2 = AC^2$

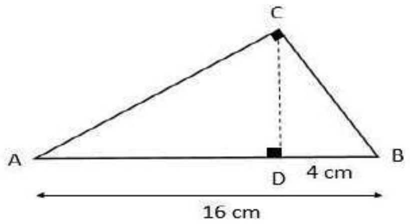
En remplaçant AB^2 et BC^2 par leurs expressions ci-dessus on a :

$AH^2 + HB^2 + HB^2 + CH^2 = AC^2$

$AH^2 + 2HB^2 + CH^2 = AC^2$

$\mathbf{AH^2 + CH^2 + 2HB^2 = AC^2}$ **ou** $\mathbf{AH^2 + HC^2 + 2BH^2 = AC^2}$

Exercice 28.2 :



1) Calculer BC

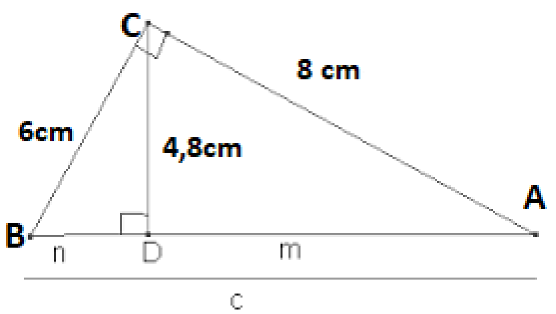
2) Calculer AD

3) A l'aide des relations métriques calculer AC.

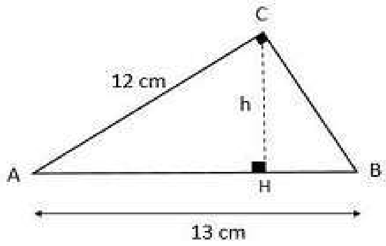
4) En exprimant l'aire de BCD de deux manières différentes, calculer CD.

Exercice 28.3 :

A l'aide des relations métriques dans le triangle rectangle, déterminer c, n et m.



Exercice 28.4 :



En suivant le codage de la figure ci-dessus :

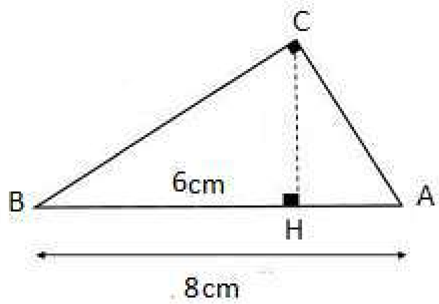
1) Calculer BC

2) Exprimer le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$ de deux manières différentes.

3) Déterminer la distance h .

Exercice 28.5 :

ABC un triangle rectangle en C et H pied de la hauteur issue de C , [CH] est une hauteur de ABC.



1) Calculer BC.

2) Calculer AC.

3) Calculer CH.

4) Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{HCA}$.

Exercice 28.6.

La formule d'Al-Kashi permet de calculer le troisième côté d'un triangle connaissant deux côtés et un angle. Pour un triangle ABC, on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC})$.

On considère pour tout l'exercice que : AB = 6 cm, AC = 12 cm et $\widehat{BAC} = 60$ °.

1. Construire un triangle ABC vérifiant les conditions précédentes.
2. Donner la valeur de $\cos(\widehat{BAC})$.
   En déduire avec la formule d'Al-Kashi que l'on a $BC^2 = AC^2 + AB^2 - AC \times AB$.
   Montrer que $BC = \sqrt{108}$ cm.
3. En déduire que le triangle ABC est rectangle en B.

Les identités trigonométriques :

$\cos^2(\mathrm{a}) + \sin^2(\mathrm{a}) = 1$; $\cos^2(\mathrm{a}) + \sin^2(\mathrm{a}) = 1$

On a $\cos^2(\mathrm{a}) = 1 - \sin^2(\mathrm{a})$; $\sin^2(\mathrm{a}) = 1 - \cos^2(\mathrm{a})$

Vérifier que $(\cos x)(\tan x) = \sin x$

On sait que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ d'où $(\cos x)(\tan x) = (\cos x) \times \frac{\sin x}{(\cos x)} = \cancel{(\cos x)}\frac{\sin x}{\cancel{(\cos x)}} = \sin x$

Donc $\boldsymbol{(\cos x)(\tan x) = \sin x}$

Vérifier que : $\frac{sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{1}{\cos x}$

$\frac{sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{sin^2 x + (\cos x)\times(\cos x)}{\cos x} = \frac{sin^2 x + (\cos x)^2}{\cos x} = \frac{sin^2 x + cos^2 x}{\cos x}$; avec $sin^2 x + cos^2 x = 1$

$\frac{sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{sin^2 x + cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$

On a $\boldsymbol{\frac{sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{1}{\cos x}}$

Vérifier que $(\sin a - \cos a)^2 = 1 - 2(\sin a)(\cos a)$

On a forme $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Développons $(\sin a - \cos a)^2$

On a $(\sin a - \cos a)^2 = (\sin a)^2 - 2(\sin a)(\cos a) + (\cos a)^2$

$(\sin a - \cos a)^2 = (\sin a)^2 + (\cos a)^2 - 2(\sin a)(\cos a)$

$(\sin a - \cos a)^2 = sin^2 a + cos^2 a - 2(\sin a)(\cos a)$, avec $sin^2 a + cos^2 a = 1$

$\boldsymbol{(\sin a - \cos a)^2 = 1 - 2(\sin a)(\cos a)}$

Vérifier que $cos^2\, a - sin^2 a = 1 - 2sin^2 a$

On a $cos^2\, a = 1 - sin^2 a$, on remplace $cos^2\, a$ par son expression

Et on a $cos^2\, a - sin^2 a = 1 - sin^2 a - sin^2 a = 1 - 2sin^2 a$

$\mathbf{cos^2\, a - sin^2 a = 1 - 2sin^2 a}$

Exercice 28.7 :

Justifier que :

1) $\tan a \times \sin a \times \cos a = sin^2 a$

2) $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2(\sin a)(\cos a)$

3) $(1 - \sin a)(1 + \sin a) = cos^2 a$

4) $cos^2 a - sin^2 a = 2cos^2 a - 1$

5) $\tan a \times \sin a + \cos a = \frac{1}{\cos a}$

6) $(\sin a + \cos a)^2 + (\sin a - \cos a)^2 = 2$

Exercice 28.8 :

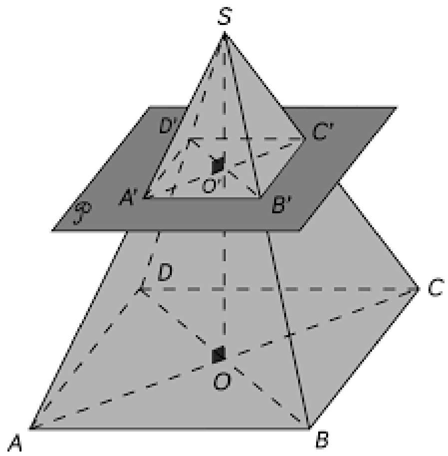
1) On donne $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{4}$, déterminer $\sin a$ et $\tan a$.

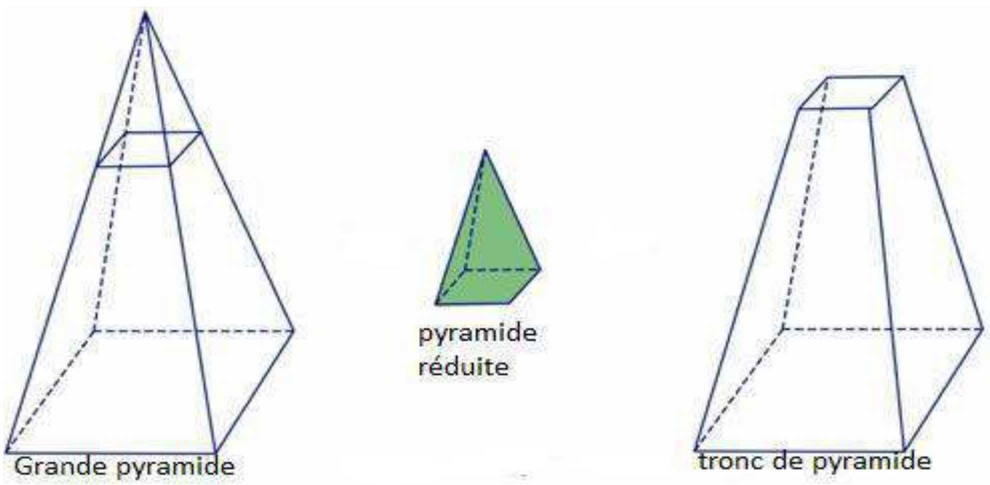
2) On donne $\sin a = \frac{1}{4}$, déterminer $\cos a$ et $\tan a$.

3) On donne $\cos a = \frac{2}{3}$, déterminer sin a et $\tan a$.

<u>Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base.</u>

Présentation :



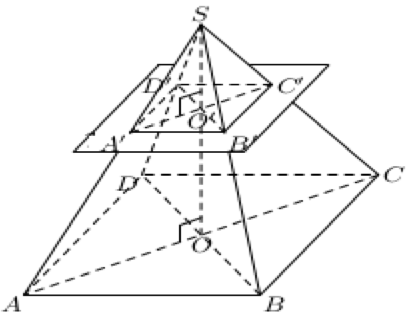


La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est une réduction de la base, la base de la petite pyramide est de même nature que la base de la grande pyramide.

Leurs longueurs sont proportionnelles.

Volume V de la pyramide : $V = \frac{(surface\ de\ la\ base) \times hauteur\ de\ la\ pyramide}{3}$

Le coefficient de réduction k



$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O'}{AO} = \ldots$$

A l'aire de la base ABCD et le volume de la grande pyramide est V .

Le plan contenant le polygone A'B'C'D' est parallèle au plan de base et orthogonal à la droite (SO).

A' est l'aire de A'B'C'D' et V' est le volume de la pyramide réduite de sommet S et de base A'B'C'D'.

On a $\frac{A'}{A} = k^2$ et $\frac{V'}{V} = k^3$

Ces résultats sont valables pour toutes les pyramides.

Exemple :

La dernière bouteille de parfum de chez Chenal a la forme d'une pyramide SABC à base triangulaire de hauteur [AS] telle que :

- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A ;
- AB = 7,5 cm et AS = 15 cm.

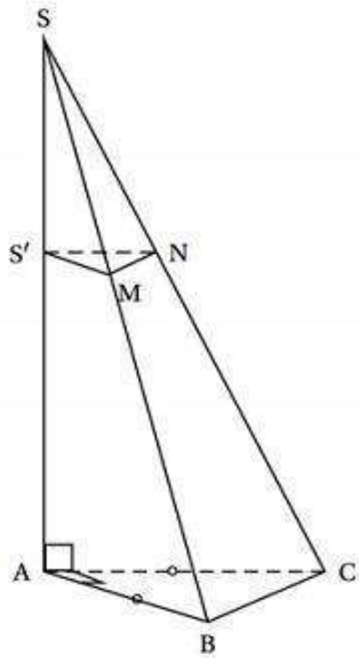
1. Calculer le volume de la pyramide SABC. (On arrondira au cm^3 près.)

2. Pour fabriquer son bouchon SS′MN, les concepteurs ont coupé cette pyramide par un plan P parallèle à sa base et passant par le point S′ tel que SS′ = 6 cm.

a. Quelle est la nature de la section plane S′MN obtenue ?

b. Calculer la longueur S′N.

3. Calculer le volume maximal de parfum que peut contenir cette bouteille en cm^3.



***

Volume V_p de la pyramide : $V_p = \frac{(surface\ de\ la\ base)\times hauteur\ de\ la\ pyramide}{3}$

1)

La base de la pyramide est un triangle rectangle isocèle en A les cotés de l'angle droits sont [AB] et [AC] . $A_1 = \frac{AB\times AC}{2}$; $A_1 = \frac{7,5\times 7,5}{2} = 28,125\ cm^2$

(SA) est simultanément perpendiculaire aux droites (AB) et (AC) du polygone de base , donc [SA] est la hauteur de la pyramide de sommet S.

$V_p = \frac{A_1\times AS}{3}$ on a $V_p = \frac{28,125\times 15}{3}$; $\mathrm{V_p} = 140,625\mathrm{cm}^3$ au cm^3 $près$,

$\mathbf{V_p = 141cm^3}$

2.a)

La base de la pyramide est un triangle rectangle isocèle en A, on coupe cette pyramide par un plan parallèle à sa base ABC, donc S'MN la base de la petite pyramide est de même nature que ABC donc **S'MN est rectangle et isocèle en S'.**

2.b)

Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base on a :

$k = \frac{SS'}{SA} = \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{S'M}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{S'N}{AC}$;

$\frac{SS'}{SA} = \frac{S'N}{AC}$; $\frac{6}{15} = \frac{S'N}{7,5}$; $15\times S'N = 6\times 7,5$; $S'N = \frac{6\times 7,5}{15}$; $\mathbf{S'N = 3\ cm}$

3)

Le liquide contenu dans bouteille occupe le volume du tronc de pyramide ABCS'MN.

V_r , le volume de la pyramide réduite, on a le rapport suivant $\frac{V_r}{V_p} = k^3$.

Avec $k = \frac{SS'}{SA}$, $k = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$\frac{V_r}{V_p} = (\frac{2}{5})^3$, $\frac{V_r}{140,625} = \frac{8}{125}$; $V_r = \frac{8\times 140,625}{125}$; $\mathrm{V_r} = 9\ \mathrm{cm}^3$

V_t , le volume du tronc de pyramide .

$V_t = V_p - V_r$; $V_t = 140,625 - 9 = 131,625$; $V_t = 131,625cm^3$

Donc le volume du liquide dans la bouteille est de $\mathbf{131,625cm^3}$ **.**

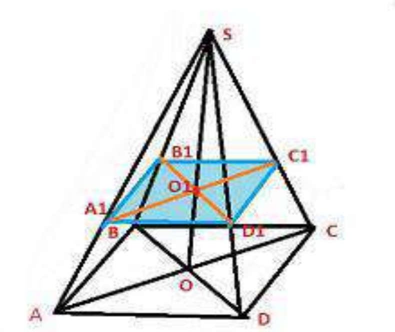
Exercice 28.9 :

Les plans (ABCD) et (A1B1C1D1) sont parallèles ,la pyramide SA1B1C1D1 est une réduction de la grande pyramide SABCD.

La hauteur de la petite pyramide est $h' = O_1S = 4cm.$

La hauteur de la grande pyramide $h = OS = 6$

L'aire de A1B1C1D1 est $A_1 = 25cm^2$ et le volume de la petite pyramide est $V_1 = 53cm^3$.



1) Déterminer le coefficient de réduction k.

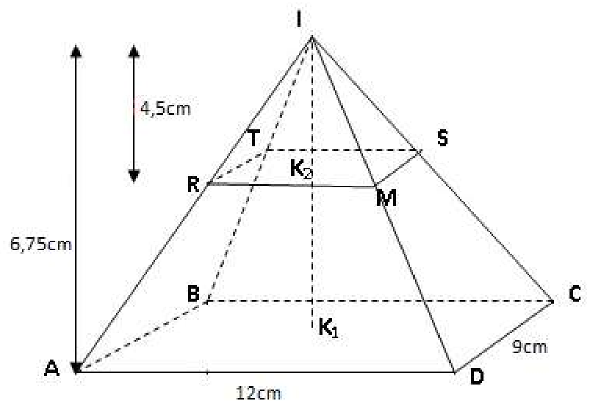
2) Déterminer la surface A de la base ABCD.

3) Déterminer le volume V de la grande pyramide.

Exercice 28.10 :

RMST est la section de la pyramide IADCB par un plan parallèle à la base et telle que la hauteur de la petite pyramide $IK_2 = 4{,}5cm$ et la hauteur de la grande pyramide

$IK_1 = 6{,}75cm$. La base ADCB est un rectangle.



1) Calculer l'aire du rectangle ADCB.

2) Calculer le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide IADCB à la pyramide IRMST.

3) Donner la nature du polygone RMST (justifier votre réponse).

4) Calculer AC et en déduire RS.

5) Calculer le volume de la pyramide IADCB, en déduire le volume de la pyramide IRMST.

6) Calculer le volume du solide RMSTADCB, le tronc de la pyramide IADCB.

Exercice 28.11 :

Un artisan fabrique des boîtes en forme

de tronc de pyramide pour un confiseur.

Pour cela, il considère une pyramide régulière SABCD

à base carrée où O est le centre du carré ABCD.

On a OA = 12 cm et SA = 20 cm.

a. Préciser la nature du triangle AOS et montrer que SO = 16 cm.

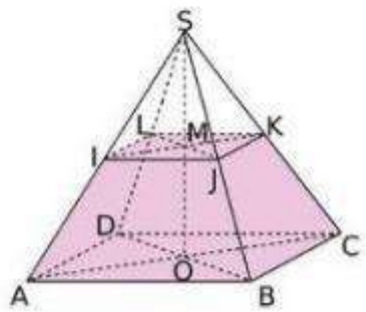
b. L'artisan coupe cette pyramide SABCD par un plan parallèle

à la base tel que SM = 2cm où M est le centre de la section IJKL ainsi obtenue.

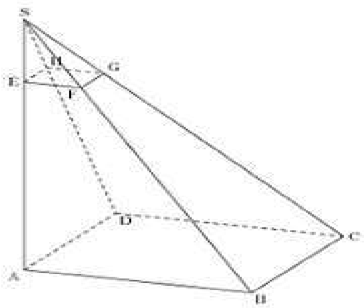
Calculer le coefficient de réduction transformant

la pyramide SABCD en la pyramide SIJKL.

c. En déduire la longueur SI puis la longueur IA.



Exercice 28.12 :



Sur la figure ci-contre, $SABCD$ est une pyramide à base carrée de hauteur $[SA]$ telle que $AB = 9$ cm et $SA = 12$ cm. Le triangle SAB est rectangle en A.

Partie A

$EFGH$ est la section de la pyramide $SABCD$ par le plan parallèle à la base et telle que $SE = 3$ cm.

1/ (a) Calculer EF.

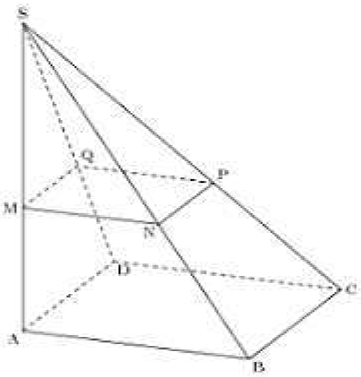
(b) Calculer SB.

2/ (a) Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

(b) Donner le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide $SABCD$ à la pyramide $SEFGH$.

(c) En déduire le volume de $SEFGH$. On donnera une valeur arrondie à l'unité.

Partie B



Soit M un point de $[SA]$ tel que $SM = x$ cm, où x est compris entre 0 et 12.

On appelle $MNPQ$ la section de la pyramide $SABCD$ par le plan parallèle à la base passant par M.

1/ Montrer que $MN = 0,75x$.

2/ Soit $\mathscr{A}(x)$ l'aire du carré $MNPQ$ en fonction de x. Montrer que $\mathscr{A}(x) = 0,562\ 5x^2$.

3/ Compléter le tableau ci-dessous.

x : longueur SM en cm	0	2	4	6	8	10	12
$\mathscr{A}(x)$: aire du carré $MNPQ$							

4/ Placer dans un repère les points d'abscisse x et d'ordonnée $\mathscr{A}(x)$ donnés par le tableau.

5/ L'aire de $MNPQ$ est-elle proportionnelle à la longueur SM ? Justifier à l'aide du graphique.

Thème 29 : Pythagore (2)-Thales(2)

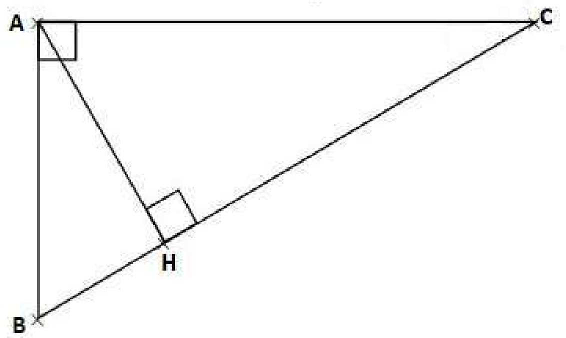
Construction d'un segment de longueur $\sqrt{p}$ avec $p \geq 2$

1) Propriété de Pythagore : Dans un triangle rectangle , le carré du plus long coté est égal à la somme des carrés des deux petits côtés.

2) Soit M un point du cercle de diamètre le segment [AB] alors le triangle AMB est rectangle en M.

Activité :

BAC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur [BC].



Démontrer que ACH et AHB sont semblables et en déduire que $AH^2 = BH \times HC$

AHB et AHC sont des triangles rectangles en H , $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90°$

$H \in [BC]$, donc $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$

ABH rectangle en H on a $\widehat{BAH} = 90 - \widehat{ABH} = 90 - \widehat{ABC}$ car $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$.

On a $\widehat{AHB} = \widehat{BAC} = \widehat{AHC} = 90°$

$\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$

$\widehat{BAH} = 90 - \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB} = 90 - \widehat{ABC}$ donc $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$.

$\widehat{AHB} = \widehat{BAC} = 90°$ (1)

$\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$ (2)

$\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ (3)

ABC et ACH.

$\widehat{BAC} = \widehat{AHC} = 90°$

$H \in [BC]$, donc $\widehat{ACH} = \widehat{ACB}$

AHC rectangle en H on a $\widehat{HAC} = 90 - \widehat{ACH} = 90 - \widehat{ACB}$ car $\widehat{ACB} = \widehat{ACH}$.

$\widehat{HAC} = 90 - \widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC} = 90 - \widehat{ACB}$ donc $\widehat{HAC} = \widehat{ABC}$

$\widehat{BAC} = \widehat{AHC} = 90°$ (4)

$\widehat{ACB} = \widehat{ACH}$ (5)

$\widehat{HAC} = \widehat{ABC}$ (6)

De (1) et (4) on a $\widehat{AHC} = \widehat{AHB}$

De (2) et (6) on a $\widehat{HAC} = \widehat{ABH}$ donc les triangles AHC et AHB sont semblables.

De (3) et (5) on a $\widehat{ACH} = \widehat{BAH}$

Propriété : si deux triangles sont semblables alors les côtés correspondants sont proportionnels.

$\widehat{AHC} = \widehat{AHB}$

$\widehat{HAC} = \widehat{ABH}$

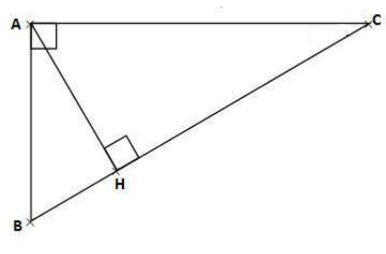
$\widehat{ACH} = \widehat{BAH}$ On a donc $\frac{HA}{HB} = \frac{AC}{BA} = \frac{CH}{AH}$ d'où $\frac{HA}{HB} = \frac{CH}{AH}$; $AH \times AH = CH \times HB$

$\widehat{AHC} = \widehat{AHB}$ Ainsi $\mathbf{AH^2 = BH \times HC}$

Propriété :

Si BAC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur [BC].

Alors $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{HC}$ et $AH = \sqrt{BH \times HC}$



On peut ainsi déduire la construction géométrique de la racine carrée d'un nombre supérieur ou égal à 2.

Méthode 1 : Construction de $\sqrt{p}$.

1) Tracer un segment [BC] de longueur 1+p .

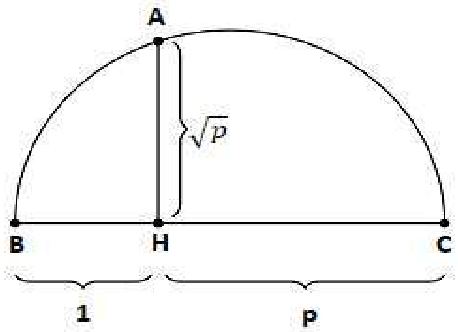
2) Placer H sur [BC] tel que BH=1

3) Tracer le demi-cercle de diamètre [BC]

4) Placer le point A sur le cercle tel que [AH] est perpendiculaire à [BC].

On aura ainsi $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{HC} = 1 \times \mathrm{p}$ on a $\mathbf{AH} = \sqrt{\mathbf{p}}$

A l'aide du compas on relève la mesure du segment $\sqrt{p}$.



Exemple :

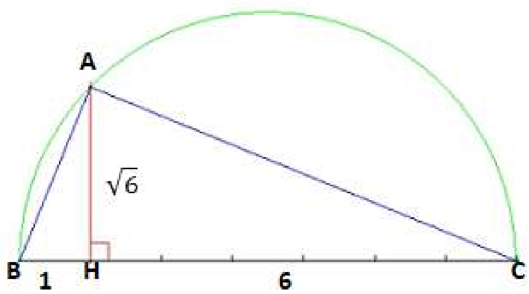
Construction d'un segment de longueur $\sqrt{6}$.

Construction de segment [BC] tel que BC= BH+HC=1+6 .

On trace le demi-cercle de rayon $\frac{BC}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$.

Placer le point A sur le cercle tel que [AH] est perpendiculaire à [BC].

On a ainsi $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{HC} = 1 \times 6$ on a $\mathbf{AH} = \sqrt{\mathbf{6}}$



Exercice 29.1 : En suivant la démarche exposée ci-dessus.

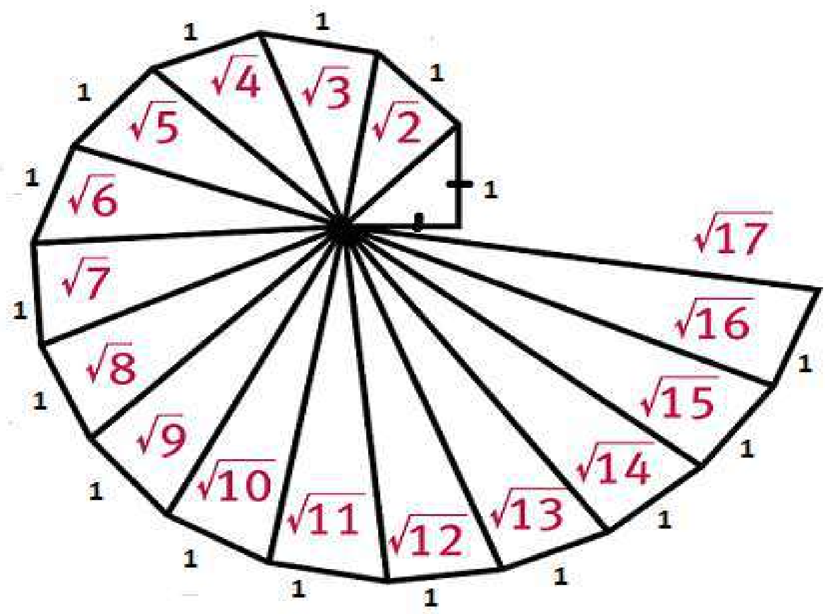
1) Construire un segment de longueur $\sqrt{2}$.

2) Construire un segment de longueur $\sqrt{3}$.

3) Construire un segment de longueur $\sqrt{7}$.

4) Construire un segment de longueur $\sqrt{5}$.

<u>L'escargot de Pythagore.</u>



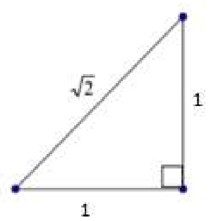
Exemple : Construction d'un segment de longueur $\sqrt{2}$.

$2 = 1 + 1$

$2 = 1^2 + 1^2$

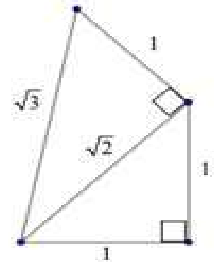
$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 1^2$

Construction d'un triangle rectangle de cotés 1 et 1, l'hypoténuse mesure donc $\sqrt{2}$.



Exemple : Construction d'un segment de longueur $\sqrt{3}$.

$3 = 2 + 1$; $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$; construction d'un triangle rectangle de petits côtés $\sqrt{2}$ et 1 , l'hypoténuse mesure donc $\sqrt{3}$.



Exemple : Construction d'un segment de longueur $\sqrt{5}$.

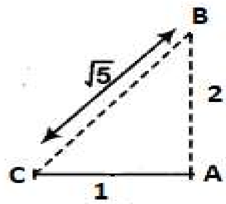
$5 = 4 + 1$ (somme de deux carrés parfaits 4 et 1)

$5 = 2^2 + 1^2$

$\{On\ utilise\ le\ théoreme\ de\ pythagore\ \ et\ la\ propriété\ \ (\sqrt{a})^2 = a\ , avec\ a\ positif\ \}$

$(\sqrt{5})^2 = 2^2 + 1^2$ avec $(\sqrt{5})^2 = 5$

Construire un triangle rectangle de cotés 2 et 1, l'hypoténuse mesure donc $\sqrt{5}$.



$BC = \sqrt{CA^2 + AB^2}$ (propriété de Pythagore)

$BC = \sqrt{2^2 + 1^2}$

$BC = \sqrt{4 + 1}$

$\mathbf{BC = \sqrt{5}}$

Exemple : Construction d'un segment de longueur $\sqrt{24}$.

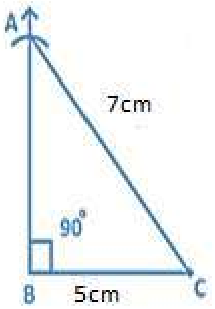
$24 = 49 - 25$ (différence de deux carrés parfaits)

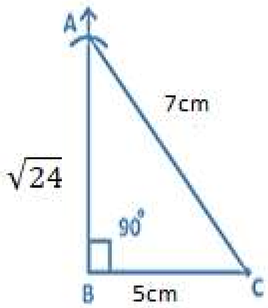
$\{On\ utilise\ le\ théoreme\ de\ pythagore\}$

$24 = 7^2 - 5^2$

$(\sqrt{24})^2 = 7^2 - 5^2$, avec $(\sqrt{24})^2 = 24$

Tracer un segment [BC] tel que BC=5cm , puis tracer la perpendiculaire à [BC] passant par B, et tracer le demi-cercle de centre C et rayon 7cm coupant la perpendiculaire à [BC] en A , le côté restant du triangle rectangle mesure $\sqrt{24}$ cm.

1) 

2) 

Exercice 29.2 : En justifiant votre démarche à l'aide de la propriété de Pythagore, construire un segment de longueur : $\sqrt{20}$ cm , $\sqrt{21}$ cm, $\sqrt{41}$ cm , $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{34}$ cm, $\sqrt{39}$ cm.

Exercice 29.3 : Construction d'un segment de longueur $\sqrt{24}$ cm.

1) On remarquera que $24 = 8 \times 3$

Tracer un segment [BC] de longueur (8+3) cm et placer H sur [BC] tel que BH=3cm.

2) Tracer le demi-cercle de diamètre [BC].(rayon du demi-cercle (8+3)$\div 2 = 5{,}5cm$)

3) Tracer la perpendiculaire à [BC] passant par H, elle coupe le demi-cercle en A.

4) Sans justifier donner la nature de BAC.

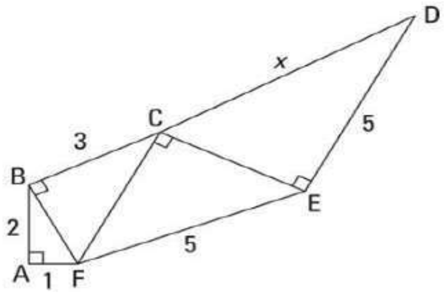
5) Calculer AH , que pouvez en déduire quant à la mesure du segment [AH].

Exercice 29.4 : Construire de même un segment de longueur $\sqrt{10}$ cm, $\sqrt{15}$ cm , $\sqrt{20}$ cm.

Exercice 29.5 :

En remarquant que $(\sqrt{5})^2 = 3^2 - 2^2$ et $\left(\sqrt{6}\right)^2 = 1^2 + (\sqrt{5})^2$, en déduire la construction d'un segment de longueur $\sqrt{6}$ cm.

Exercice 29.6 : Déterminer x.



Exercice 29.7 :

1) Construire un segment de longueur $\sqrt{3}$ cm et segment de longueur $\sqrt{6}$ cm.

2) Construire un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 2\sqrt{3}$ cm et $BC = 4\sqrt{6}$ cm.

3) Calculer AC , puis l'aire du triangle ABC.

Exercice 29.8 :

ABC un triangle rectangle en A tel que AB=8 cm et AC=4cm.

1) Faire une figure et calculer BC.

2) Construire H le projeté orthogonal de A sur [BC].

a. Montrer que $AB^2 = BH \times BC$, puis que $AC^2 = CH \times BC$.

c. Calculer BH, CH et AH.

3) Construire la parallèle à la droite (AH) passant par C, elle coupe la droite (AB) en E. Calculer AE et EC.

4) Calculer $sin\hat{E}$.

Propriété de Thales et problèmes de construction.

La propriété de Thales permet de construire à la règle et au compas un point M sur le segment [AB] tel que $AM = k \times AB$ avec $0 < k < 1$.

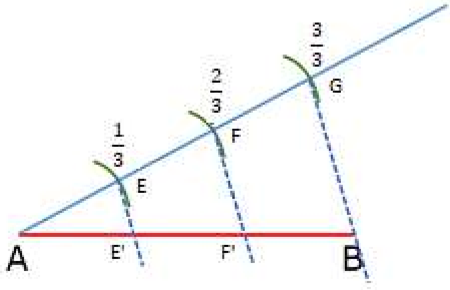
Exemple-méthode :

Exemple : Division d'un segment [AB] en trois parties égales.

1) On trace le segment [AB]

2) On trace la demi-droite [AG) puis on trace trois segments égaux sur [AG)

3) On mène les parallèles à [GB] passant par chaque demi-arc de cercle, ces parallèles coupe le segment [AB] en le partageant en trois parties égales.



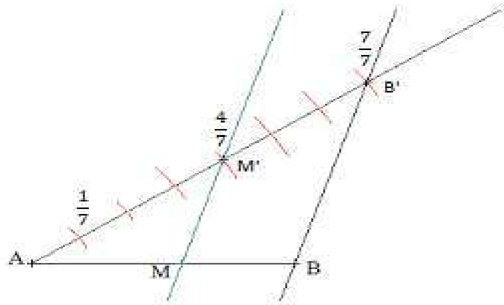
On a AE'=E'F'=F'B

Comme (EE')// (FF') , (FF')// (GB) et (EE')//(GB)

On a également les relations suivantes déduites de la propriété de Thales :

$AE' = \frac{1}{3}AB$, $AF' = \frac{2}{3}AB$.

Exemple : Construction d'un point M sur le segment [AB] tel que $AM = \frac{4}{7}AB$.



Méthode :

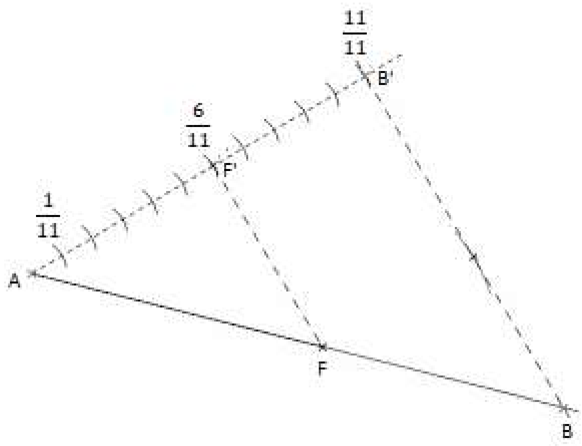
1) On trace [AB]

2) On trace la demi droite [AB') ,puis à l'aide du compas on divise [AB') en sept parties égales

3) On place le point M' en 4/7 et B' en 7/7

4) On trace la parallèle [B'B] passant par M' , elle coupe [AB] en M tel que $AM = \frac{4}{7}AB$.

Exemple : Construction d'un point F sur le segment [AB] tel que $AF = \frac{6}{11}AB$.



Méthode :

1) On trace [AB]

2) On trace la demi droite [AB') ,puis à l'aide du compas on divise [AB') en onze parties égales

3) On place le point F' en 6/11 et B' en 11/11

4) On trace la parallèle [B'B] passant par F' , elle coupe [AB] en F tel que $AF = \frac{6}{11}AB$.

Exercice 29.9 :

1) Construire un point M sur le segment [AB] tel que $M = \frac{4}{5}AB$.

2) Construire un point I sur le segment [EF] tel que $EI = \frac{2}{7}EF$.

Exercice 29.10 :

Tracer un segment [AB] de longueur 13cm , puis placer le point M sur [AB] tel que

$AM = \frac{3}{7}AB$.

Exercice 29.11 :

Tracer un segment [AB] de longueur 7,2 cm , puis placer le point C sur [AB] tel que

$AC = \frac{4}{5}AB$.

Exercice 29.12 :

1) Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB=8 cm et AC=6 cm.

2) Calculer BC et $cos\widehat{ABC}$.

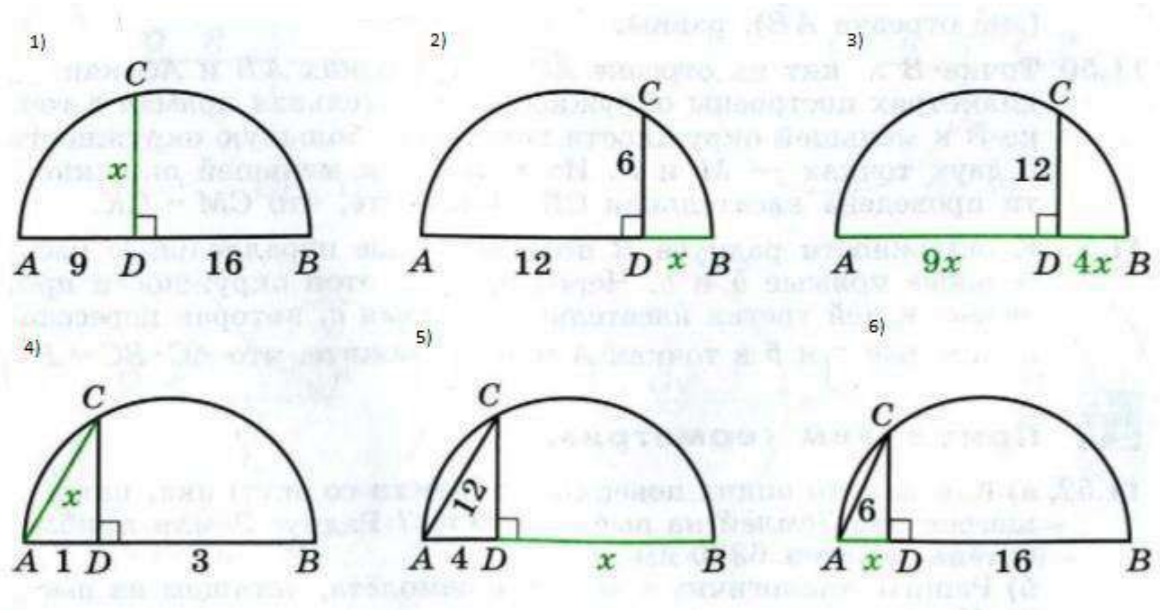
3) Placer le point M sur [AB] tel que $AM = \frac{1}{3}AB$.

4) Tracer la parallèle à la droite (BC) passant par M ,elle coupe la droite (AC) en N.

a. Comparer les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

b. En déduire que $N = \frac{1}{3}AC$.

Exercice 29.13 : Déterminer x dans chacun des cas ci-dessous



Exercice 29.14 :

On considère la figure codée ci-dessous :

1. Justifie que le triangle NRM est rectangle.

Dans toute la suite du problème on suppose que : MR = 8 cm et NR = 6 cm.

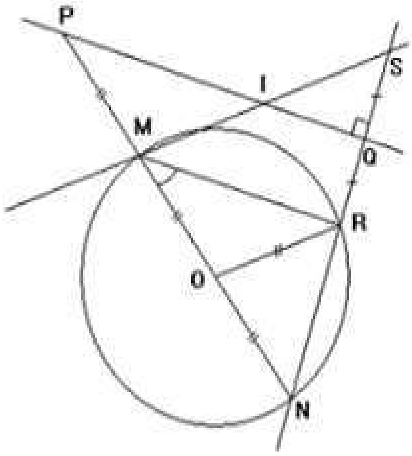
2. Calcule MN.

3. Calcule $tan\widehat{RMN}$

4. Démontre que I est le milieu de [MS].

5. Montre que NQ = 9 cm.

6. Démontre que la droite (OR) est parallèle à la droite (MS).



Thème 30 : Vecteur, repérage (3)-Equations de droites(2)

Vecteur et repérage

Un vecteur est caractérisé par une direction, une norme (longueur) et un sens.

Coordonnées de la somme de deux vecteurs :

Dans un repère orthonormé (O,I,J) on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et un vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors la somme des deux vecteurs à pour coordonnées :

$$\vec{u} + \vec{v}\ \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

La différence des deux vecteurs à pour coordonnées :

$$\vec{u} - \vec{v}\ \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$$

Produit d'un vecteur par un réel :

Soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un réel dans un repère orthonormé le produit de k

Par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le vecteur $k\vec{u}$ tel que $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Vecteur et alignement.

Les points A,B et C sont alignés si il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC}$

Exemple :

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $-3\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{pmatrix} -3\times 5 \\ -3\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-15} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}$

2) soit les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ sont :

$\begin{pmatrix} 5+3 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{CD}}\ (\mathbf{8}; \mathbf{0})$

Exemple dans un repère orthonormé (O,I,J) , on donne $\vec{u} = 3\overrightarrow{OI} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OJ}$ et

$\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$.

$\vec{u} = 3\overrightarrow{OI} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OJ}$ et avec les coordonnées $\vec{v}$ on a $\vec{v} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$.

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ on a $\vec{w} = 3\overrightarrow{OI} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OJ} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$

$\vec{w} = 3\overrightarrow{OI} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OI} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OJ}$ (on regroupe les termes semblables).

$\vec{w} = \left(3 - \frac{5}{2}\right)\overrightarrow{OI} + (-\frac{1}{4} + 1)\overrightarrow{OJ}$ (on factorise avec $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$)

$\vec{w} = \left(\frac{3\times2-5}{2}\right)\overrightarrow{OI} + (\frac{-1+1\times4}{4})\overrightarrow{OJ}$

$\vec{w} = \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OI} + (\frac{3}{4})\overrightarrow{OJ}$; $\mathbf{\vec{w}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{\overrightarrow{OI}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\mathbf{\overrightarrow{OJ}}$ **ou** $\boldsymbol{\vec{w}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$

Exemple :

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{OI} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OJ}$, sachant que

$\overrightarrow{OM} = -2\overrightarrow{CD}$, calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et en déduire les coordonnées du point M.

$\overrightarrow{OM} = -2 \times (-\overrightarrow{OI} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OJ})$

$\overrightarrow{OM} = -2 \times (-1)\overrightarrow{OI} - 2 \times (+\frac{3}{4})\overrightarrow{OJ})$ (on développe avec -2)

$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI} + \frac{-2\times3}{4}\overrightarrow{OJ}$

$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI} + \frac{-6}{4}\overrightarrow{OJ}$

$\mathbf{\overrightarrow{OM}} = \mathbf{2\overrightarrow{OI}} + \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}\mathbf{\overrightarrow{OJ}}$ et $\mathbf{M}\left(\mathbf{2}; \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}\right)$

Exercice 30.1 :

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{OI} - 3\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{OI} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OJ}$, sachant que $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et en déduire les coordonnées du point M.

2) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$.

Exercice 30.2 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) , $P(1;-1)$, $Q(-2;2)$ et $R(4;0)$.

Déterminer les coordonnées du point S tel que $\overrightarrow{RS} = 3\overrightarrow{PQ}$.

Exercice 30.3 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) , on donne les points $A(1;-3)$, $B(2;5)$ et $C(3;y)$.

Déterminer les coordonnées du point C pour que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

Exercice 30.4 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) , $A(-2;1)$, $B(1;2)$ et $C\left(\frac{11}{2};\frac{7}{2}\right)$.

Par la relation $\overrightarrow{AC} = k \times \overrightarrow{AB}$, démontrer que les points A,B et C sont alignés.

Exercice 30.5 :

On donne : $\vec{u} = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$, $\vec{v} = 3\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$.

Exprimer en fonction de $\overrightarrow{OI}$ *et* $\overrightarrow{OJ}$ les vecteurs :

1) $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

2) $\vec{l} = 3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$

3) $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} - \vec{w}$

Exercice 30.6 :

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) ,placer les points A,B et C tel que :

A (4 ;3) , $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OI} - 4\overrightarrow{OJ}$.

2) Démontrer que ABCO est un parallélogramme.

3) Calculer les coordonnées de E tel que : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB}$.

4) Déterminer un réel k tel que $\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OA}$, que peut-on dire des points O,E et A ?

5) Calculer les coordonnées de F sachant que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO}$.

6) Calculer les coordonnées de G sachant que $\overrightarrow{BG} = 5\overrightarrow{OJ} - 2\overrightarrow{CB}$.

<u>Equation d'une droite.</u>

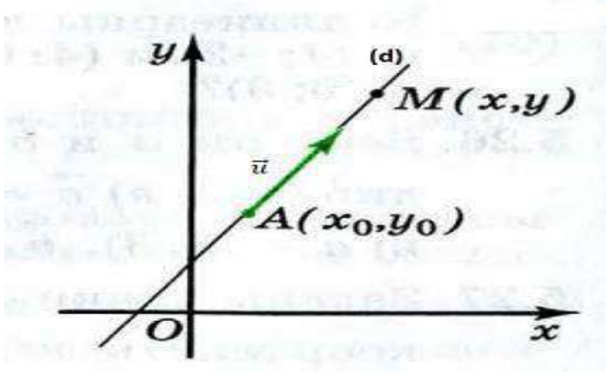
Dans un repère orthonormé (O,I,J) toute droite (d) à pour équation $ax + by + c = 0$; a, b et c sont des nombres réels donnés.

Le vecteur $\vec{\mathbf{u}}\begin{pmatrix}-\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

L'équation réduite de la droite (d) est de la forme $y = mx + p$ et vecteur $\overrightarrow{u'}\,(1\,;m)$ est vecteur directeur de l'équation réduite de (d).

$\left\{y = mx + p \text{ } équivaut \text{ à } 1y = mx + p \quad d'où \quad \overrightarrow{u'}\,(1\,;m)\right\}$

Représentation graphique d'une droite (d) de vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$.



Exemple :

Soit la droite (d) d'équation : $-2x\ + y - 7 =\ 0.$

On a $a = -2$; $b = 1$, un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b=-(1) \\ a=-2 \end{pmatrix}$; $\vec{\mathbf{u}}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$.

Equation réduite de la droite (d) et vecteur directeur.

(d) : $-2x + y - 7 = 0$; $y - 7 = -2x$

$$\mathbf{(d): y = -2x + 7}$$

On a m=-2 , le vecteur directeur de l'équation réduite est $\overrightarrow{\mathbf{u'}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$.

Equation d'une droite passant par $A(x_A;\ y_A)\ et\ B(x_B;\ y_B)$.

On note m le coefficient directeur de la droite (AB) on a $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

L'équation de la droite (AB) : $y - y_A = m \times (x - x_A)$

Exercice 30.7 :

Déterminer l'équation de la droite (AB) passant par les deux points $A(1;\ 2)\ et\ B(-1;\ 5)$.

Exercice 30.8 :

Donner un vecteur directeur de chacune des droites ci-dessous données par leurs équations :

1) (d_1): $2x + 2y - 7 = 0$.

2) (d_2): $x - 7y = 2$.

3) (d_3): $x - 9y + \frac{1}{3} = 0$

Exercice 30.9 :

Soit la droite (d) d'équation $2x - y + 3 = 0$.

1) Donner le vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d).

2) Déterminer l'équation réduite de la droite (d) en déduire le vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$

de l'équation réduite.

3) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires.

<u>Equation de la médiatrice d'un segment :</u>

Rappels :

1) soit $\vec{u}\,(x; y)$ et $\overrightarrow{u'}(x'; y')$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont perpendiculaires si et seulement si :

$xx' + yy' = 0$.

2) La médiatrice d'un segment est une droite perpendiculaire au segment en son milieu.

Exemple :

On donne A(0 ;-3) et B(2,5).

1) Déterminer les coordonnées de I milieu du segment [AB].

2) Déterminer l'équation de la médiatrice du segment [AB].

***

1) Coordonnées de I milieu de [AB].

$I\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$ on a $I\begin{pmatrix}\frac{0+2}{2}=1\\ \frac{-3+5}{2}=1\end{pmatrix}$ donc $\mathbf{I}\binom{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$.

2) Equation de la médiatrice de [AB].

Soit $M(x; y)$ tel que M appartient à la médiatrice du segment [AB] , I milieu du segment [AB] appartient aussi à la médiatrice du segment [AB] , donc (IM) ⊥(AB).

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A=2-0=2\\ y_B-y_A=5-(-3)=5+3=8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\binom{2}{8}$ et $\overrightarrow{IM}$ $\binom{x-1}{y-1}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont perpendiculaires donc $2(x-1)+8(y-1)=0$

On développe le membre de gauche : $2x-2+8y-8=0$

$2x+8y-8-2=0$

$2x+8y-10=0$ en mettant 2 en facteur on a $2(x+4y-5)=0$

Donc $x+4y-5=0$

Comme le point M $(x; y)$ appartient à la médiatrice du segment [AB] ,

On déduit donc que la médiatrice du segment [AB] à pour équation : $x+4y-5=0$.

Exercice 30.10 :

On donne A(0 ;-4) et B(-4,0).

1) Déterminer les coordonnées de I milieu du segment [AB].

2) Déterminer l'équation de la médiatrice du segment [AB].

Exercice 30.11 :

On donne A(-2 ;1) et B(4,-3).

1) Déterminer les coordonnées de I milieu du segment [AB].

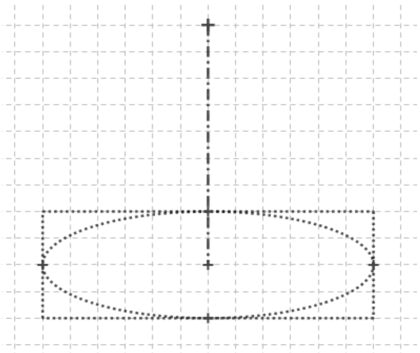
2) Déterminer l'équation de la médiatrice du segment [AB].

Thème 31 : Les patrons : Pyramides et cônes.

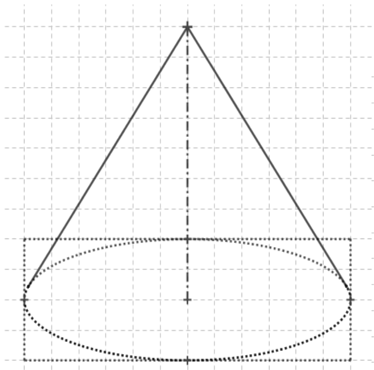
La perspective cavalière d'un cône de révolution.

Présentation

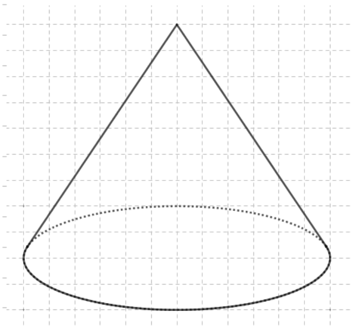
1)



2)



3)



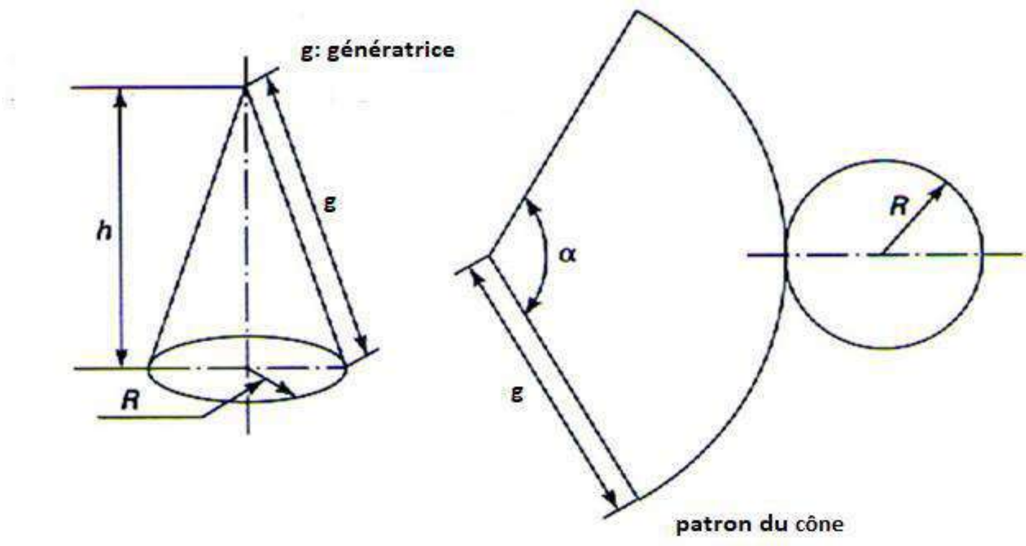
a. Le disque de base du cône est dessiné à main levée, dessin 1)

b. Les lignes cachées sont représentées en pointillés. Les lignes visibles sont représentées en traits pleins.

c. Le dessin 3) est la représentation du cône en perspective cavalière.

Le patron du cône de révolution.

Exemple : Patron d'un cône de révolution.

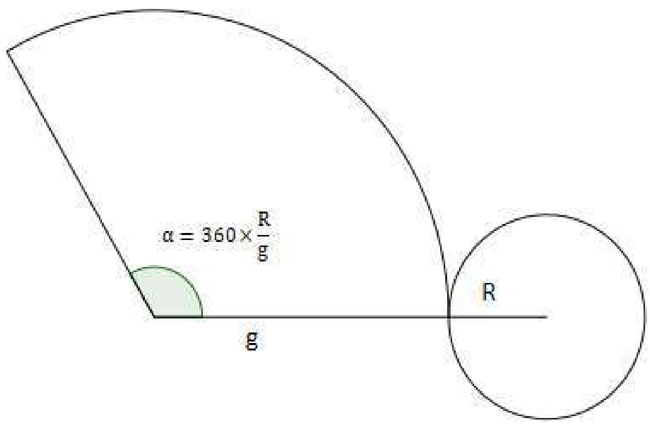


<u>Calcul de l'angle α.</u>

La règle de trois :

$$\left.\begin{array}{lcl} 360° & \longrightarrow & 2\pi g \\ \alpha & \longrightarrow & 2\pi R \end{array}\right\}$$

On a $2\pi g \times \alpha = 360 \times 2\pi R$; $\alpha = \frac{360 \times \cancel{2\pi} R}{\cancel{2\pi}\ g}$; $\boldsymbol{\alpha = 360 \times \frac{R}{g}}$

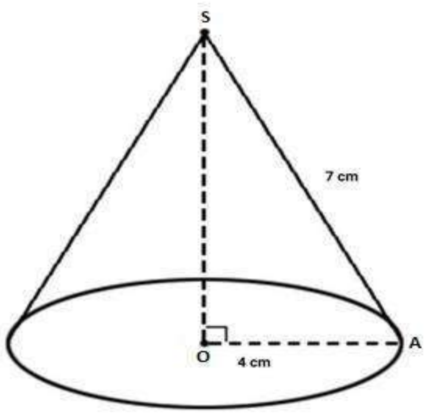


$$angle\ \ \alpha = 360\ \times \frac{rayon\ du\ petit\ cercle}{génératrice}$$

La génératrice g d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon de base R est déterminée par la propriété de Pythagore : $g^2 = h^2 + R^2$

Exemple :

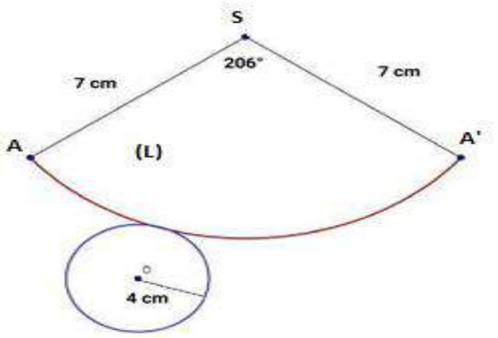
Construire le patron du cône ci-dessous.



La génératrice g mesure 7 cm

Déterminons l'angle α ; $\alpha = 360\ \times \frac{rayon\ du\ petit\ cercle}{génératrice}$; $\alpha = 360\ \times \frac{4}{7}$; $\alpha = 205{,}7° \approx 206°$

Patron du cône :



1) Construire d'abord la figure (L) , SA= 7cm , $\widehat{ASA'} = 206°$ et SA'=7 cm.

2) Construire le disque de rayon 4 cm.

Exercice 31.1 :

1) Construire la perspective cavalière d'un cône de révolution de hauteur 3 cm , disque de base de rayon 2 cm.

2) Déterminer la longueur de la génératrice du cône.

3) Construire le patron du cône .

Exercice 31.2 :

1) Déterminer la longueur de la hauteur d'un cône de révolution de génératrice 9cm ,rayon du disque de base 3cm .

2) Construire la perspective cavalière du cône de révolution.

3) Construire le patron du cône.

Exercice 31.3 :

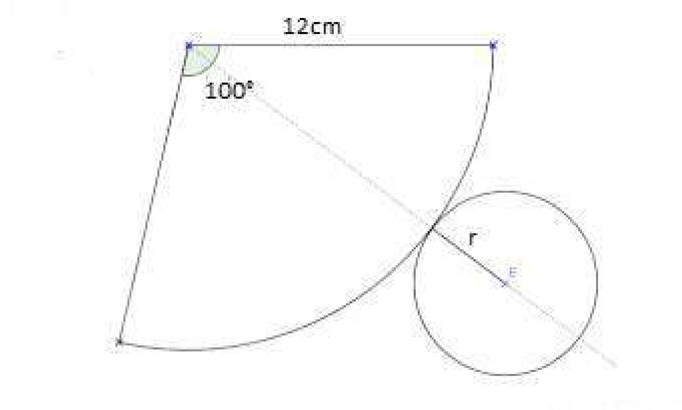
1) Déterminer la longueur de la hauteur d'un cône de révolution de génératrice 5cm, rayon du disque de base 3cm .

2) Construire la perspective cavalière du cône de révolution.

3) Construire le patron du cône.

Exercice 31.4 :

Du patron de cône de révolution ci-dessous, déterminer r le rayon du disque de base.

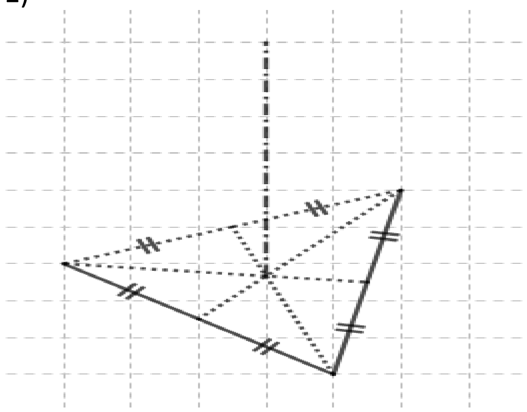


Pyramide en perspective cavalière.

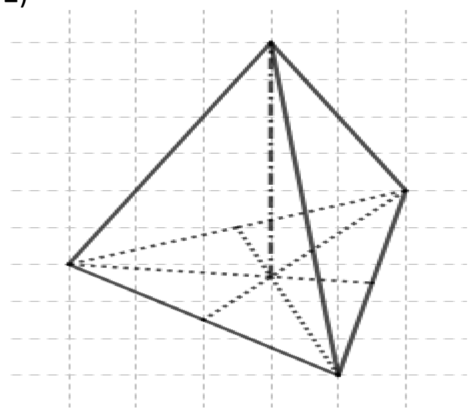
Pour représenter une pyramide en perspective cavalière, on peut d'abord tracer la base puis la hauteur et placer le sommet de la pyramide ; ensuite on trace les arêtes latérales.
Les lignes cachées sont représentées en pointillés. Les lignes visibles sont représentées en traits pleins.

Perspective cavalière du tétraèdre :
Tétra : quatre et èdre : face .

1)



2)

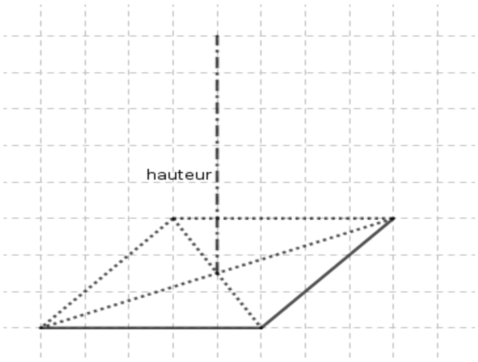


Attention :

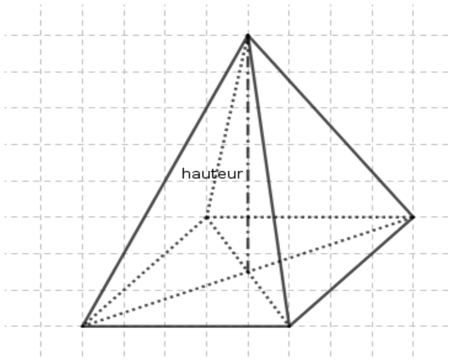
Si la base de la pyramide est un triangle rectangle ou un autre triangle particulier, représenter la base par un triangle quelconque, mais **ne pas oublier le codage de la figure**.

Perspective cavalière d'une pyramide à base carrée

1)



2)

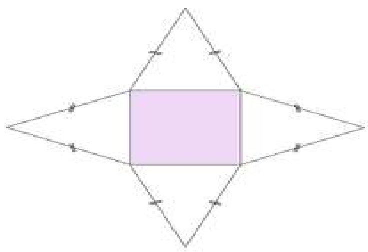


Attention :

Si la base de la pyramide est un carré ou un rectangle, représenter la base par un parallélogramme, mais **ne pas oublier le codage de la figure**.

Patron d'une pyramide à base rectangulaire

Présentation



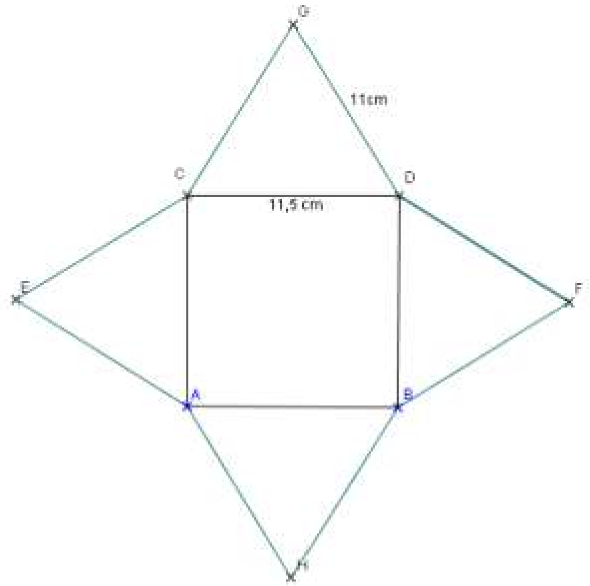
Méthode de construction du patron d'une pyramide.

1) Tracer la base.

2) Tracer les faces latérales (triangles)

3) Lors de la construction du patron d'une pyramide, les arêtes latérales consécutives ont la même longueur.

Patron d’une pyramide à base carrée.



Exercice 31.5 :

SABCD est une pyramide de sommet S de base un carré ABCD.

On donne SA=9cm et AB=4cm.

1) Construire cette pyramide en perspective cavalière.

2) Tracer le patron de cette pyramide en vraie grandeur.

Exercice 31.6 :

PILK est une pyramide de sommet P de base un triangle ILK. Les droites (IL) et (LP) sont perpendiculaires. ILK est rectangle et isocèle en L

On donne LP=8cm et IL=LK=6cm.

1) Construire cette pyramide en perspective cavalière.

2) Tracer le patron de cette pyramide en vraie grandeur.

Exercice 31.7 :

SABCD est une pyramide de sommet S de base un rectangle ABCD.

On donne SA=5,4cm et AB=5cm et BC=4cm

1) Construire cette pyramide en perspective cavalière.

2) Tracer le patron de cette pyramide en vraie grandeur.

Exercice 31.8 :

La pyramide SABC est un tétraèdre régulier de sommet S .

On donne AB=4,5cm

1) Construire cette pyramide en perspective cavalière.

2) Tracer le patron de cette pyramide en vraie grandeur.

Exercice 31.9 :

ABCDE est une pyramide de sommet A de base un carré BCDE. H est le point d'intersection des diagonales du carré.

On donne AH=4cm et BC=3cm.

1) Construire cette pyramide en perspective cavalière.

2) Que représente [AH] pour la pyramide ?

3) Faire une conjecture exacte sur la nature du triangle AHC, puis calculer CE,CH et AC.

4) Tracer le patron de cette pyramide en vraie grandeur.

5) Calculer l'aire de base et le volume de la pyramide.

6) soit I le milieu de [DE] .

   a. Que représente [AI] pour la pyramide ABCDE ?

   b. Sans calculer donner la longueur de [AD] et justifier votre résultat.

   c. Donner la nature du triangle ADE.

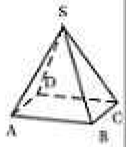
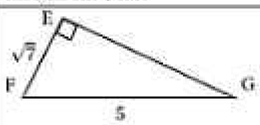
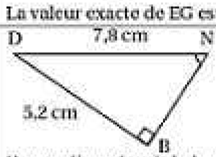
   d. Calculer l'aire latérale, puis l'aire totale de la pyramide.

Thème 32 : Les questions à choix multiples (QCM)

Les exercices ci-dessous sont des QCM, questions à choix multiples. Pour chacune des questions une seule réponse est exacte.

Pour chacune des questions on notera simplement la lettre correspondant à la bonne réponse.

QCM1

		Réponses proposées A	B	C	D
1.	a. SABCD est une pyramide à base carrée ABCD et de sommet S.  Le triangle ABC est :	Ni rectangle, ni isocèle	Rectangle et isocèle	Rectangle, non isocèle	Isocèle, non rectangle
	b. On coupe cette pyramide par un plan parallèle à sa base. La section obtenue est un :	parallélogramme non rectangle	triangle isocèle	rectangle non carré	carré
2.	Un cylindre de révolution a pour rayon 3 cm et pour hauteur 10 cm. Le volume de ce cylindre, exprimé en cm^3, est :	10π	20π	30π	90π
3.	Un rectangle A'B'C'D' d'aire 24 cm^2 est l'agrandissement à l'échelle 1,25 d'un rectangle ABCD. L'aire du rectangle ABCD, exprimée en cm^2, est :	15,36	19,2	30	37,5
4.	 La valeur exacte de EG est :	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	18
5.	 L'arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{DNB}$ est :	34°	41°	42°	48°

QCM1

1.a) Réponse. B 1.b) Réponse. D 2) Réponse. D 3) réponse. A

4) Réponse. B 5) Réponse. C

Justifications des réponses (Au brouillon) .

1.a) SABCD est une pyramide de sommet S à base carrée donc ABC est rectangle et isocèle en B.

Réponse. B

1.b) la section est faite par un plan parallèle à la base ,donc elle est de même nature que le carré ABCD.

Réponse. D

2) Volume du cylindre $V = \pi R^2 h$, $V = \pi(3^2)10$; $V = 90\pi$. Réponse. D

3) Rapports des aires $\frac{A\prime}{A} = k^2$ car on a un agrandissement , $\frac{24}{A} = (1{,}25)^2$ on a

$A = \frac{24}{(1{,}25)^2}$ =15,36 ,   réponse. A

4) FEG rectangle en E , d'après la propriété de Pythagore :$EG^2 = FG^2 - FE^2$.

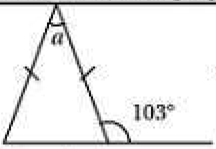
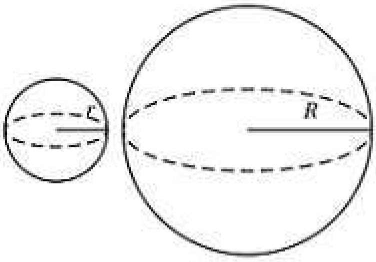
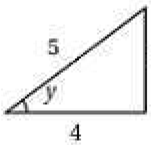
$EG^2 = 5^2 - (\sqrt{7})^2$; $EG^2 = 25 - 7$; $EG^2 = 18$; $EG = 3\sqrt{2}$.

Réponse. B

5) DNB rectangle en B on a $sin\widehat{DNB} = \frac{5{,}2}{7{,}8} = 0{,}666$; $\widehat{DNB} = 41{,}759° = 42°$

Réponse. C

QCM2 :

1.	Si $\tan x = 54$ alors la valeur approchée de x arrondie au degré près est égale à :	1°	88°	89°
2.	 La valeur de a est égale à :	77°	36°	26°
3.	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les coordonnées des points A et B sont : A(3 ; −2) et B(−1 ; −1). La distance AB est exactement égale à :	$\sqrt{17}$	4,123	$\sqrt{13}$
4.	Une petite sphère a pour rayon r. Une grande sphère a pour rayon R, tel que $R = 3r$. Soient v le volume de la petite sphère et V le volume de la grande sphère.  Quelle égalité est vraie ?	$V = 3v$	$V = 9v$	$V = 27v$
5.	 $\frac{3}{5}$ est égal à :	$\sin y$	$\cos y$	$\tan y$

QCM2 :

N°1 89° .

N°2 $a = 26\,°$

N°3 $AB = \sqrt{17}$.

N°4 $V = 27v$

N°5 $\sin y$

<u>Justifications (Au brouillon)</u>

N°1 avec la calculatrice on trouve 88 ,939° soit 89° .

N°2 triangle isocèle et chaque angle à la base vaut 180-103=77

On a donc $a + 2 \times 77 = 180$; $a = 180 - 2 \times 77$; $a = 26$ °

N°3 A(3 ;-2) et B(-1 ;-1) ; $\overrightarrow{AB}(-1-3;\ -1+2) = (-4; 1)$.

$AB = \sqrt{(-4)^2 + 1^2}$; $AB = \sqrt{17}$.

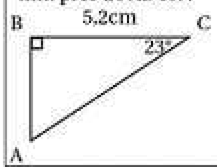
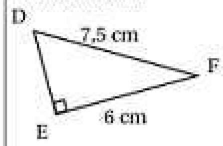
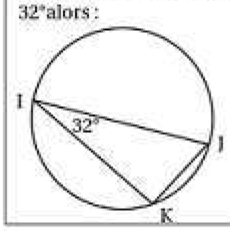
N°4 Le volume d'une boule(sphère) est : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

: $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ on a $R = 3r$ d'où $V = \frac{4}{3}\pi(3r)^3$; $V = \frac{4}{3}\pi(27)r^3$;

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \times 27$ or $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ donc $V = v \times 27$ ainsi $V = 27v$

N°5 On a un triangle rectangle donc $\sin y = \frac{3}{5}$, $\sin y$

QCM3 :

	A	B	C
1. Avec les données de cette figure, l'arrondi au mm près de AB est : 	4,8 cm	2,2 cm	2 cm
2. Avec les données de cette figure, la longueur DE en cm est : 	1,5 cm	9,6 cm	4,5 cm
3. La section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe est un :	trapèze	rectangle	cercle
4. Le point K appartient au cercle de diamètre [IJ] et $\widehat{KIJ}$ mesure 32°alors : 	$\widehat{IJK}$ mesure 32°	On ne peut pas calculer la mesure de $\widehat{IJK}$	$\widehat{IJK}$ mesure 58°

<u>QCM3 :</u>

N°1 : Réponse. B

N°2 : Réponse. C

N°3 : Réponse. B

N°4 : Réponse. C

<u>Justifications :</u>

N°1 : ABC rectangle en B. $\tan(23°) = \frac{AB}{BC}$; $\tan(23°) = \frac{AB}{5{,}2}$; $AB = 5{,}2 \times 0{,}424 = 2{,}2cm$

$AB = 2{,}2\ cm$. Réponse. B

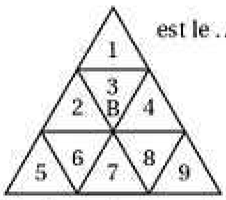
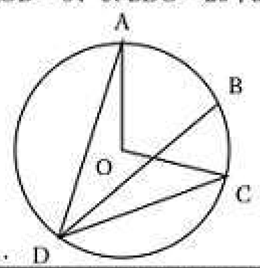
N°2 : DEF rectangle en E , avec la propriété de Pythagore :

$DE^2 = DF^2 - EF^2$; $DE^2 = 7{,}5^2 - 6^2 = 20{,}25$; $DE = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5\ cm$ Réponse. C

N°3 : La section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe est un rectangle. Réponse. B

N°4 : IKJ est rectangle en K , donc les angles aigus sont complémentaires on en déduit que $\widehat{IJK} = 90 - 32 = 58°$, Réponse. C

QCM4 :

		A	B	C
1	Dans un triangle ABC rectangle en A, on sait que AB = 3 et que $\widehat{ACB} = 30°$ alors la valeur, exacte de BC est …	$\dfrac{\tan 30°}{3}$	$3\sin 30°$	$\dfrac{3}{\sin 30°}$
2	Tous les triangles sont équilatéraux. L'image du triangle 2 par la rotation de 120°autour de B dans le sens contraire des aiguilles d'une montre  est le …	triangle 6	triangle 4	triangle 7
3	Sur le cercle de centre O, on donne les points A, B, C et D tels que $\widehat{AOB} = 64°$ et $\widehat{BDC} = 20°$, donc $\widehat{AOC}$ =  …	84°	104°	74°
4	Les droites (BE) et (AD) sont sécantes en C. Les droites (AB) et (DE) sont parallèles. Sachant que AC = 2, CD = 5 et CE = 9, pour calculer BC, on peut écrire : …	$\dfrac{2}{9} = \dfrac{BC}{5}$	$\dfrac{2}{BC} = \dfrac{9}{5}$	$\dfrac{2}{5} = \dfrac{BC}{9}$

QCM 4 :

N°1 Réponse. C

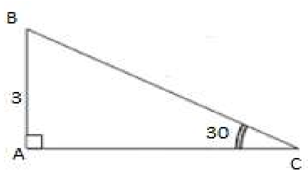
N°2 Réponse. C

N°3 Réponse. B

N°4 Réponse. C

<u>Justifications :</u>

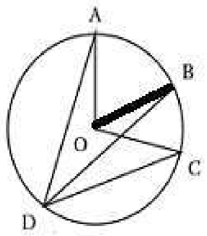
N°1 :



ABC rectangle en A , $\sin(30°) = \frac{AB}{BC}$; $BC = \frac{3}{\sin(30°)}$. Réponse.C

N°2: La rotation de centre B et d'angle 120° (2 fois 60°) s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, l'image du triangle 2 est donc le triangle 7. Réponse. C

N°3

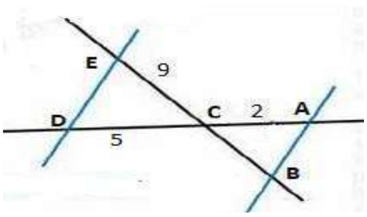


Propriété des angles inscrits , l'angle au centre $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BDC}$

$\widehat{BOC} = 2 \times 20 = 40$; les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOB}$ sont adjacent donc $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$

$\widehat{AOC} = 64 + 40 = 104°$. Réponse. B

N°4



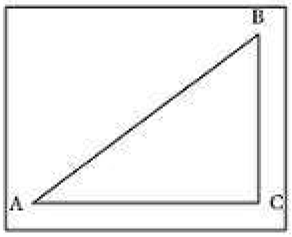
(AB)// (DE) en appliquant la propriété de Thales on a :

$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{AB}{DE}$; $\frac{2}{5} = \frac{CB}{9} = \frac{AB}{DE}$ on a $\frac{2}{5} = \frac{CB}{9}$. Réponse. C

QCM5 :

Dans les deux exercices, les figures ne sont pas en vraie grandeur. Elles ne sont pas à reproduire mais elles peuvent constituer une aide pour les démonstrations demandées.

ABC est un triangle rectangle en C tel que
- le segment [AC] mesure 8 cm ;
- le segment [BC] mesure 6 cm ;
- le milieu du segment [AC] est noté I.



1. Montrer que AB = 10 cm.
2. Préciser la position du point O centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Justifier.
3. Pour chacune des cinq questions, indiquer sur la copie la ligne de la question et recopier la réponse exacte. On ne demande pas de justification.

	Questions	Réponses proposées		
L1	Que représente la droite (OI) ?	Une médiane du triangle	Une hauteur du triangle	La médiatrice de [AC]
L2	Que vaut la longueur du segment [OI] ?	2 cm	3 cm	5 cm
L3	Quel est l'arrondi à l'unité de la mesure de l'angle $\widehat{IAO}$?	53°	36°	37°
L4	Que vaut l'aire du quadrilatère OICB ?	18 cm^2	6 cm^2	12 cm^2
L5	Quelle est la nature du triangle OBC ?	Un triangle équilatéral	Un triangle quelconque	Un triangle isocèle

QCM5 :

1) ACB rectangle en C ,d'après la propriété de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + CB^2$

$AB^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, $AB^2 = 100$; $AB = \sqrt{100}$; $\mathbf{AB = 10}$

2) ACB triangle rectangle en C donc l'hypoténuse AB est le diamètre du cercle circonscrit au triangle rectangle ACB , [AB] est le diamètre du cercle donc **le point O le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle ACB est le milieu du côté AB .**

3)

L1. La médiatrice de [AC].

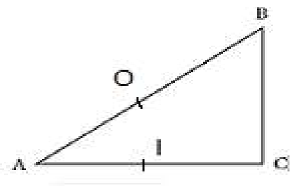
L2. 3cm

L3. 37°

L4. $18cm^2$

L5. Un triangle isocèle.

Justifications. 3)



L1. Dans ACB , O est le milieu de [AB et I est le milieu de [AC] d'après la propriété de la droite des milieux (OI) // (CB) et comme (CB) ⊥ (CA) alors (OI) ⊥ (CA).

(OI) ⊥ (CA) et I est le milieu de [AC] donc (OI) est la médiatrice du segment [AC].

L1. (OI) est la médiatrice du segment [AC].

L2. Dans ACB , O est le milieu de [AB et I est le milieu de [AC] d'après la propriété de la droite des milieux (OI) // (CB) une conséquence de la propriété est que $OI = \frac{1}{2} BC$.

$OI = \frac{1}{2}(6); OI = 3cm$

L2. 3cm

L3. $O \in [AB]$ et $I \in [AC]$ dans ABC on a $\widehat{IAO} = \widehat{CAB}$.

ACB rectangle en C on a $cos\widehat{CAB} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $\widehat{CAB} = 36{,}869°$

On en déduit que $\widehat{IAO} = 37°$

L3. 37°

L4. OICB est un trapèze rectangle l'aire de OICB est $\frac{(BC+OI)\times IC}{2}$

$IC = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4\ cm$ On a $\frac{(BC+OI)\times IC}{2} = \frac{(6+3)\times 4}{2} = \frac{9\times 4}{2} = 9 \times 2 = 18$

L4. $18cm^2$

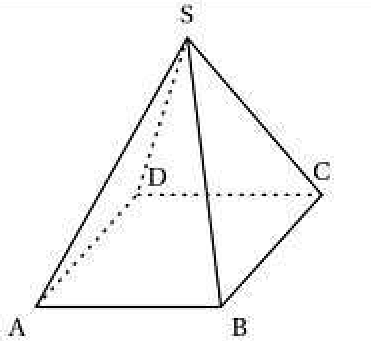
L5. Nature de OBC.

O est le milieu de l'hypoténuse [AB] , comme le triangle est rectangle en C alors la médiane [CO] est tel que $CO = \frac{AB}{2}$ et évidemment $OB = \frac{AB}{2}$.

On a $OB = OC = \frac{AB}{2}$ ainsi OBC est isocèle en O.

L5. Un triangle isocèle.

QCM6 :

N°	Situation	Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
1	ABCD est un parallélogramme. Quelle égalité vectorielle peut-on en déduire ?	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
2	On considère un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 6 cm. Quel est le volume de ce cylindre, exprime en cm^3 ?	18π	54π	36π
3	On considère dans un cercle, un angle inscrit et un angle au centre qui interceptent le même arc. L'angle au centre mesure 34°. Combien l'angle inscrit mesure-t-il ?	34°	17°	68°
4	 Le dessin ci-dessus représente en perspective une pyramide à base carrée de sommet S. Quelle est en réalité la nature du triangle ABC ?	Ni rectangle, ni isocèle	Rectangle et isocèle	Isocèle mais non rectangle.

QCM6 :

N°1. Proposition.3

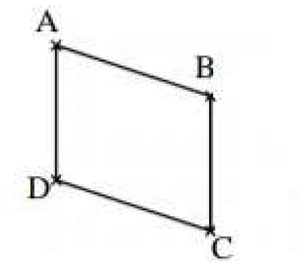
N°2. Proposition.2

N°3. Proposition.2

N°4 Proposition.2

Justifications

N°1



ABCD un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Proposition.3

N°2

Volume du cylindre $V = \pi r^2 h$; $V = \pi(3^2)(6) = \pi(9)(6) = 54\pi$. Proposition.2

N°3

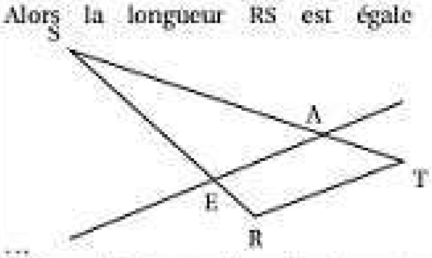
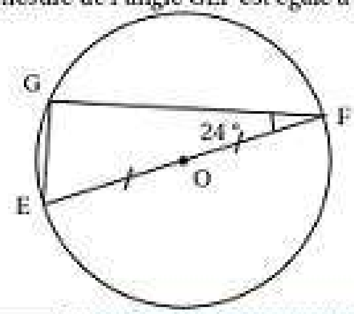
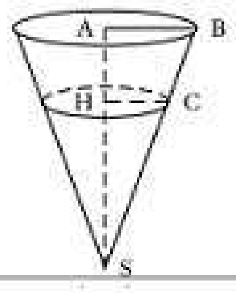
Angle inscrit vaut $34 \div 2 = 17°$. Proposition.2

N°4

Pyramide de sommet S de base un carré ABCD donc ABC est rectangle et isocèle en B.

Proposition.2

QCM7.

1. (RE) et (TA) se coupent en S. (RT) et (AE) sont parallèles. ST = 5 cm ; SA = 4 cm et SE = 3 cm. Alors la longueur RS est égale à  …	3,75 cm	2,4 cm	0,266 cm
2. Le point G est sur le cercle de centre O et de diamètre [EF]. $\widehat{EFG} = 24°$. La mesure de l'angle $\widehat{GEF}$ est égale à …  	90°	24°	66°
3 Un cône de révolution a pour rayon AB = 10 cm et pour hauteur SA = 24 cm. On coupe ce cône par un plan parallèle à sa base et qui passe par le point H de [SA] tel que SH = 18 cm. Le rayon HC de la section est  …	10 cm	7.5 cm	5 cm

QCM7 :

N°1 3,75 cm.

N°2 66°.

N°3 7,5 cm

<u>Justifications.</u>

N°1 On a une configuration de Thales donc

$$\frac{SE}{SR}=\frac{SA}{ST}=\frac{EA}{RT}\ ;\ \frac{3}{SR}=\frac{4}{5}=\frac{EA}{RT}\ \ on\ a\ \ \frac{3}{SR}=\frac{4}{5}\ \ ; 4\times SR=3\times 5\ ; 4\times SR=15\ ; SR=\frac{15}{4}\ ;\ \ SR=3{,}75cm$$

N°2

GEF est rectangle en G donc $\widehat{GEF}=90-24=66°$

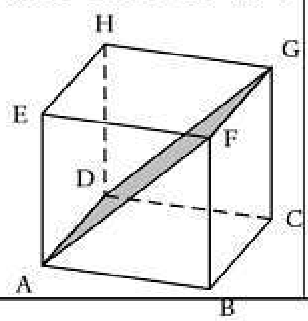
N°3 Section d'un cône par un plan parallèle à la base on a :

$$\frac{SH}{SA}=\frac{SC}{SB}=\frac{HC}{AB}\ ;\ \frac{18}{24}=\frac{SC}{SB}=\frac{HC}{10}\ \ on\ a\ \ \frac{18}{24}=\frac{HC}{10}\ \ ; 24\times HC=18\times 10\ ; 24\times HC=180\ ; HC=\frac{180}{24}$$

HC=7,5 cm

N°3 7,5 cm

QCM8

		Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1.	IJK est un triangle rectangle en I tel que : IK = 2,7 cm et KJ = 4,5 cm. Quelle est la longueur du côté [IJ] ?	12,96 cm	3,6 cm	1,8 cm	5,2 cm
2.	On rappelle la formule du volume d'une boule de rayon r : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$. Le volume exact en cm^3 d'une balle de tennis de 3,3 cm de rayon est :	$13,2\pi$	150	47π	$47,916\pi$
3.	Dans le cube ABCDEFGH, le quadrilatère ADGF est un : 	losange	carré	rectangle	parallélépipède rectangle

QCM8.

N°1 Réponse. B

N°2 Réponse. D

N°3 Réponse. C

<u>Justifications</u>

N°1 IJK rectangle en I avec la propriété de Pythagore on a

$IJ^2 = KJ^2 - IK^2$; $IJ^2 = 4,5^2 - 2,7^2 = 12,96$, $IJ = \sqrt{12,96} = 3,56 \approx 3,6\ cm.$

Réponse. B

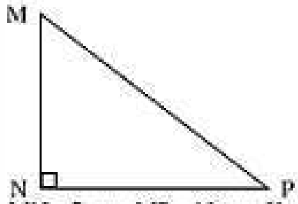
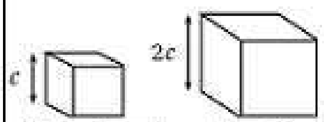
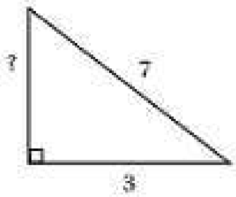
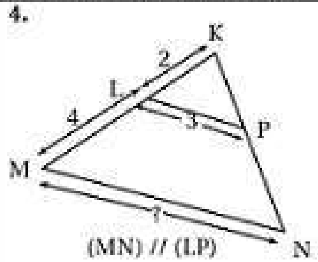
N°2 Volume d'une boule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $V = \frac{4\times\pi(3,3)^3}{3} = \frac{4\times 35,937}{3} \times \pi = 49,916\pi$

Réponse. D

N°3 (AD)//(GF) et (DG)//(AF) donc ADGF est un parallélogramme , or (AD)⊥ (AF) donc le parallélogramme ADGF est en faite un rectangle.

Réponse. C

QCM9

L'échelle des figures n'est pas respectée.			
1.  MN = 5 cm ; MP = 12 cm. L'angle $\widehat{MPN}$ vaut environ :	22,6°	65,4°	24,6°
2.  V étant le volume du petit cube et V' étant le volume du grand cube, on a :	$V' = 4V$	$V' = 8V$	$V' = 2V$
3.  La mesure manquante est :	$2\sqrt{10}$	$\sqrt{58}$	4
4.  La mesure de [MN] est :	égale à 6 cm	égale à 9 cm	environ 6 cm

QCM9

N°1 Réponse. 24,6°

N°2 Réponse. $V' = 8v$

N°3 Réponse. $2\sqrt{10}$

N°4 Réponse. égale à 9cm

<u>Justifications.</u>

N°1 $sin\widehat{MPN} = \frac{MN}{MP} = \frac{5}{12} = 0{,}416\ d'ou\ \ \widehat{MPN} = sin^{-1}(0{,}416) = 24{,}58° \approx 24{,}6°$.

N°2 Volume de cube : a^3 ; $v = c^3\ et\ V' = (2c)^3 = 2^3 \times c^3 = 8c^3 = 8 \times c^3; V' = 8v$.

N°3 On a un triangle rectangle en appliquant la propriété de Pythagore , l'autre petit côté de l'angle droit vaut : $\sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$.

N°4 On a une configuration de Thalès , avec la propriété de Thales on a :

$\frac{KL}{KM} = \frac{KP}{KN} = \frac{LP}{MN}$; $\frac{2}{4+2} = \frac{3}{MN}$; $2 \times MN = 3 \times 6$; $MN = \frac{18}{2} = 9; MN = 9cm$