Exercice 5 du devoir libre n 1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

1) Calculer : $f'(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

puis déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$

2) Donner une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1

3) Montrer que : f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

4) Déterminer $f^{-1}([-7; 0])$

5) Comparer : $f^{-1}(\sqrt{3})$ et $f^{-1}(\sqrt[5]{10})$

6) Vérifier que : $f(x) = (x-2)^3 + 1\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

7) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Solution de l'exercice 5 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

1) *Calculer : $f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$*

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car f est un polynôme)

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \geq 0$

Et f' ne s'annule qu'au point 2

D'où : la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) *Donner une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1*

- On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

donc f est dérivable au point 0

$$f'(0) = 0 - 0 + 12 = 12$$

$f'(0) = 12$ donc la courbe (C_f) admet une tangente (Δ_1) au point $A(0; f(0))$ d'équation

$[\ y = f'(0)(x-0) + f(0)\ ]$

c.à.d $[\ y = 12(x-0) - 7\ ]$

D'où $[\ (\Delta_1) : y = 12x - 7\ ]$

- On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

donc f est dérivable au point 1

$$f'(0) = 3 - 12 + 12 = 3$$

$f'(1) = 3$ donc la courbe (C_f) admet une tangente (Δ_2) au point $B(1; f(1))$ d'équation

$[\ y = f'(1)(x-1) + f(1)\ ]$

c.à.d $[\ y = 3(x-1) - 0\ ]$

D'où $[\ (\Delta_2) : y = 3x - 3\ ]$

3) Montrer que : *f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur J que l'on déterminera*

f est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est un polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc :

f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J avec $J = f(\mathbb{R})$

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[\ )$$
$$= \left]\lim_{x\to-\infty} f(x) ; \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$
$$=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$$

Car : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 6x^2 + 12x - 7$
$= \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 6x^2 + 12x - 7$
$= \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Donc : $J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

4) Déterminer $f^{-1}([-7 ; 0])$

D'après la question 2)

$f(1) = 0$ et $f(0) = -7$

On sait que : $\forall x \in J$ et $\forall y \in I$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

Donc $f^{-1}(0) = 1$ et $f^{-1}(-7) = 0$

- *On sait que la monotonie de la foncion f^{-1} sur l'intervalle $J = \mathbb{R}$ est la même monotonie de la fonction f sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$*

Et comme f est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}$

Alors

la fonction f^{-1} est continue et strictement croissante sur $J = \mathbb{R}$

et en particulier sur $[-7 ; 0]$

Donc:

$$f^{-1}([-7 ; 0]\ ) = [f^{-1}(-7) ; f^{-1}(0)]$$

D'où

$$f^{-1}([-7 ; 0]\ ) = [\,0 ; 1\,]$$

5) Comparer : $f^{-1}(\sqrt{3})$ et $f^{-1}(\sqrt[5]{10})$

On a : $\sqrt{3} = \sqrt[2\times 5]{3^5} = \sqrt[10]{243}$

Et $\sqrt[5]{10} = \sqrt[5\times 2]{10^2} = \sqrt[10]{100}$

Donc $\sqrt[5]{10} < \sqrt{3}$

la fonction f^{-1} est strictement croissante sur $J = \mathbb{R}$

alors $f^{-1}(\sqrt[5]{10}) < f^{-1}(\sqrt{3})$

6) Vérifier que :

$f(x) = (x-2)^3 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x-2)^3 + 1 &= x^3 - 3x^2 \times 2 + 3x \times 2^2 - 2^3 + 1\\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1\\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 7\\ &= f(x)\end{aligned}$$

7) Déterminer :

$f^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$.

Rappel : soit $a \in \mathbb{R}$

Si $a \geq 0$ $\quad x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}$

Si $a < 0$ $\quad x^3 = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|a|}$

Soit $x \in J = \mathbb{R}$ *et* $y \in I = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x\\ &\Leftrightarrow (y-2)^3 + 1 = x\\ &\Leftrightarrow (y-2)^3 = x - 1\end{aligned}$$

On a $x \in J = \mathbb{R}$

- *Si* $x \geq 1$ *alors* $x - 1 \geq 0$

Donc

$$\begin{aligned}f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow (y-2)^3 = x - 1\\ &\Leftrightarrow y - 2 = \sqrt[3]{x-1}\\ &\Leftrightarrow y = 2 + \sqrt[3]{x-1}\end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$

- *Si* $x < 1$ *alors* $x - 1 < 0$

Donc

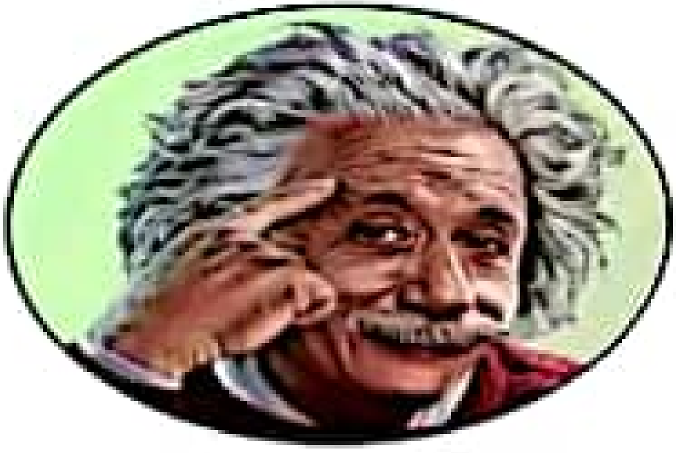
$$\begin{aligned}f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow (y-2)^3 = x - 1\\ &\Leftrightarrow y - 2 = -\sqrt[3]{|x-1|}\\ &\Leftrightarrow y = 2 - \sqrt[3]{1-x}\end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt[3]{1-x}$

Conclusion :

f^{-1} est definie sur $\mathbb{R}$

- *si* $x \geq 1$ $\quad f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$
- *si* $x < 1$ $\quad f^{-1}(x) = 2 - \sqrt[3]{1-x}$



DEVOIR LIBRE N°1

2BAC Sciences Expérimentales

Exercice 1 :

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2} & x \neq 2 \\ f(3) = \dfrac{2}{3} & \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 2

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 - x + a}{x^2+1} & ; x \leq 1 \\ g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-\sqrt{x}} & ; x > 1 \end{cases}$$

Déterminer a pour que g soit continue en 1

Exercice 2 :

1) Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{10^5}\times\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2}\times\sqrt[3]{2^4}} \quad et \quad B = \frac{\sqrt[4]{16}\times\sqrt{\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{8}\times\sqrt[4]{2}}$$

2) Classer dans l'ordre croissant les nombres :

$$\sqrt{3} \ ; \ \sqrt[3]{5} \ ; \ \sqrt[3]{7} \ ; \ \sqrt[4]{10}$$

3) Résoudre dans IR les équations suivantes :

$(E_1) : x^4 = 9$; $(E_2) : x^5 = 2$

$(E_3) : (x-1)^3 = -8$; $(E_4) : (x-2)^3 = 27$

$(E_5) : x^8 + 3x^4 - 4 = 0$

$(E_6) : \sqrt[3]{(x-1)^2} - 3\sqrt[3]{x-1} + 2 = 0$

$(E_7) : \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 12$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{-\infty} \frac{4x^3+3x^2+x}{2x^3+x^2+1}$ 2) $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}}$

3) $\displaystyle\lim_{+\infty} \sqrt[3]{x^3-2x} - 5x$ 4) $\displaystyle\lim_{+\infty} \sqrt[3]{x+1} - x$

5) $\displaystyle\lim_{1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{x+3}-3}{x-1}$

6) $\displaystyle\lim_{+\infty} \sqrt[3]{8x^3+5x} - 2x$

7) $\displaystyle\lim_{-\infty} \sqrt[3]{1-8x^3} + 3x$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 4$$

1) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1 ; +\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$

3) Montrer que α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$

4) Donner un encadrement de la solution α d'amplitude 0.5

5) Vérifier que : $\alpha = \dfrac{4}{\alpha^2 - 3}$

6) Soit g la restriction de f sur $[1 ; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b) Montrer que : g^{-1} est dérivable en 0 et que $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{3(\alpha^2-1)}$

Exercice 5 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

1) Calculer : $f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ puis déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$

2) Donner une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

4) Déterminer $f^{-1}([-7; 0])$

5) Comparer : $f^{-1}(\sqrt{3})$ et $f^{-1}(\sqrt[3]{10})$

6) Vérifier que : $f(x) = (x-2)^3 + 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

7) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Solution de l'exercice 1 :

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2} & x \neq 2 \\ f(2) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 2

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{4x+1})^2-3^2}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4x+1-9}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4}{(\sqrt{4x+1}+3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

D'où f est continue en 2

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2-x+a}{x^2+1} & ; x \leq 1 \\ g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-\sqrt{x}} & ; x > 1 \end{cases}$$

Déterminer a pour que g soit continue en 1

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-x+a}{x^2+1}$

$$= \frac{1^2-1+a}{1^2+1} = \frac{a}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \dfrac{a}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})\times(x+\sqrt{x})\times(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2+3-4)(x+\sqrt{x})}{(x^2-x)\times(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2-1)(x+\sqrt{x})}{(x^2-x)\times(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)\times(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

Donc

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x+\sqrt{x})}{x\times(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

g est continue en 1

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow a = 1$$

D'où

g est continue en $1 \Leftrightarrow a = 1$

Solution de l'exercice 2 :

1) Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{10^5}\times\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2}\times\sqrt[3]{2^4}} \quad \textit{et} \quad B = \frac{\sqrt[3]{16}\times\sqrt{\sqrt[4]{2}}}{\sqrt[4]{8}\times\sqrt[3]{2}}$$

- $A = \dfrac{\sqrt[3]{10^5}\times\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2}\times\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[3]{\dfrac{10^5\times 6^2}{15^2\times 2^4}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{(2\times5)^5\times2^2\times3^2}{(3\times5)^2\times2^4}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2^7\times5^5\times3^2}{3^2\times5^2\times2^4}} = \sqrt[3]{2^3\times5^3} = 2\times5$$

Donc $c = 10$

- $B = \dfrac{\sqrt[3]{16}\times\sqrt{\sqrt[4]{2}}}{\sqrt[4]{8}\times\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^4}\times\sqrt[8]{2}}{\sqrt[4]{2^3}\times\sqrt[3]{2}}$

$$= \frac{2^{\frac{4}{3}}\times2^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{3}{4}}\times2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{8}-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= 2^{\left(\frac{32+3-18-8}{24}\right)} = 2^{\frac{9}{24}}$$

Donc $d = 2^{\frac{9}{24}}$

2) Classer dans l'ordre croissant les nombres :

$\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{7}$; $\sqrt[6]{10}$

Le plus petit multiple commun des nombres 2 ; 3 ; 4 ; 6 est 12

$$\sqrt{3} = \sqrt[2\times6]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\times4]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$

$$\sqrt[4]{7} = \sqrt[4\times3]{7^3} = \sqrt[12]{147}$$

et $\sqrt[6]{10} = \sqrt[6\times2]{10^2} = \sqrt[12]{100}$

donc $\sqrt[6]{10} < \sqrt[4]{7} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

3) Résoudre dans IR les équations suivantes :

$(E_1) : x^4 = 9$; $(E_2) : x^5 = 2$

$(E_3) : (x-1)^3 = -8$; $(E_4) : (x-2)^3 = 27$

$(E_5) : x^8 + 3x^4 - 4 = 0$

$(E_6) : \sqrt[3]{(x-1)^2} - 3\sqrt[3]{x-1} + 2 = 0$

$(E_7) : \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 12$

Résolution dans R de l'équation $x^n = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

	Si n est pair	Si n est impair
Si $a = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Si $a > 0$	$x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$	$x = \sqrt[n]{a}$
Si $a < 0$	Pas de solution dans R	$x = -\sqrt[n]{\lvert a \rvert}$

1) L'équation $(E_1) : x^4 = 9$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) dans IR

$(E_1) \Leftrightarrow x^4 = 9$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{9}$ ou $x = -\sqrt[4]{9}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[2\times2]{3^2}$ ou $x = -\sqrt[2\times2]{3^2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[2]{3}$ ou $x = -\sqrt[2]{3}$

Donc $S_1 = \{\sqrt{3} \ ; -\sqrt{3}\}$

2) L'équation $(E_2) : x^5 = 2$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) dans IR

$(E_2) \Leftrightarrow x^5 = 2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2}$

Donc $S_2 = \{\sqrt[5]{2}\}$

3) L'équation $(E_3) : (x-1)^3 = -8$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) dans IR

$(E_3) \Leftrightarrow (x-1)^3 = -8$

$\Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt[3]{8}$

$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{2^3} = 1 - 2$

$\Leftrightarrow x = -1$

Donc $S_3 = \{-1\}$

4) L'équation $(E_4) : (x-2)^5 = -32$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) dans IR

$(E_4) \Leftrightarrow (x-2)^3 = 27$

$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt[3]{27}$

$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt[3]{3^3} = 2 + 3$

$\Leftrightarrow x = 5$

Donc $S_4 = \{5\}$

5) L'équation $(E_5) : x^8 + 3x^4 - 4 = 0$

Soit S_5 l'ensemble des solutions de *l'équation (E_5) dans IR*

$(E_5) \Leftrightarrow x^8 + 3x^4 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^4)^2 + 3x^4 - 4 = 0$

On pose $x^4 = X$

L'équation devient $X^2 + 3X - 4 = 0$ $(*)$

On a : $\Delta = (3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0$

Donc l'équation $(*)$ admet deux solutiosns

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{-3-5}{2} = -4 \\ X_2 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{-3+5}{2} = 1 \end{cases}$$

Et comme $x^4 = X \geq 0$ *alors*

$(E_5) \Leftrightarrow x^4 = 1$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{1} = 1$ ou $x = -\sqrt[4]{1} = -1$

Donc $S_5 = \{1 \ ; -1\}$

6) L'équation :

$(E_6) : \sqrt[3]{(x-1)^2} - 3\sqrt[3]{x-1} + 2 = 0$

Soit D_6 le domaine de définitiuon de l'équation (E_6) et S_6 l'ensemble des solutions de cette équation dans IR

L'équation (E_6) est définit ssi $x - 1 \geq 0$

$x \in D_6 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$

Donc $D_6 = [1; +\infty[$

$(E_6) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1})^2 - 3\sqrt[3]{x-1} + 2 = 0$

On pose : $X = \sqrt[3]{x-1}$

L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$ (*)

On a $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$

Donc l'équation (*) admet deux solutiosns

$$\begin{cases} X_1 = \frac{3-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{3-1}{2} = 1 \\ X_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$(E_6) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = 1 \quad ou \quad \sqrt[3]{x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 1^3 \quad ou \quad x - 1 = 2^3$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 1 = 2 \quad ou \quad x = 8 + 1 = 9$$

Les deux solutions sont dans $D_6 = [1; +\infty[$

Donc $S_6 = \{2 \,;\, 9\}$

7) L'équation $(E_7) : \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 12$

Soit D_7 le domaine de définituon de l'équation (E_7)

et S_7 l'ensemble des solutions de cette équation dans IR

L'équation (E_7) est définit ssi $x \geq 0$

Donc $D_7 = [0; +\infty[$

$$(E_7) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3\times 2]{x^2} + \sqrt[2\times 3]{x^3} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x^3} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{x}\right)^2 + \left(\sqrt[6]{x}\right)^3 - 12 = 0$$

On pose $\sqrt[6]{x} = X$

L'équation devient $X^2 + X^3 - 12 = 0$ (*)

$$X^2 + X^3 - 12 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 4 + X^3 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 2^2 + X^3 - 2^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-2)(X+2) + (X-2)(X^2 + X + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-2)(X + 2 + X^2 + X + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-2)(X^2 + 2X + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-2)(X+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X - 2 = 0 \ ou \ X + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 2 \ ou \ X = -2$$

Et comme $\sqrt[6]{x} = X \geq 0$ *alors*

$$(E_7) \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$$

Donc $S_7 = \{64\}$

Solution de l'exercice 3 :

1) Calculer $\lim\limits_{-\infty} \frac{4x^5+3x^2+x}{2x^3+x^2+1}$

$$\lim_{-\infty} \frac{4x^5+3x^2+x}{2x^3+x^2+1} = \lim_{-\infty} \frac{4x^5}{2x^3} = \lim_{-\infty} 2x^2 = +\infty$$

2) Calculer $\lim\limits_{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2-x+3}}$

$$\lim_{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2-x+3}} \text{ est une F.I } \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

• $$\lim_{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2-x+3}} = \lim_{+\infty} \frac{\sqrt[3\times 4]{(x^3+x^2+1)^3}}{\sqrt[3\times 4]{(2x^2-x+3)^4}}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\sqrt[12]{(x^3+x^2+1)^3}}{\sqrt[12]{(2x^2-x+3)^4}}$$

$$= \lim_{+\infty} \sqrt[12]{\frac{(x^3+x^2+1)^3}{(2x^2-x+3)^4}}$$

Et $$\lim_{+\infty} \frac{(x^3+x^2+1)^3}{(2x^2-x+3)^4} = \lim_{+\infty} \frac{(x^3)^3}{(2x^2)^4}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x^9}{16x^8} = \lim_{+\infty} \frac{1}{16}x = +\infty$$

Donc $$\lim_{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2-x+3}} = +\infty$$

3) Calculer $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{x^3-2x} - 5x$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3-2x} = +\infty$

Donc il s'agit d'une forme indéterminée du type $[(+\infty) - (+\infty)]$ avec $\sqrt[3]{1} - 3 \neq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3-2x} - 5x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right)} - 5x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \times \sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}} - 5x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}} - 5\right) = -\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}} - 5 = 1-5 = -4$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3-2x} - 5x = -\infty$$

4) Calculer $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{x+1} - x$

$\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{x-1} - x$ s'agit d'une F.I $[(+\infty)-(+\infty)]$

$$\lim_{+\infty} \sqrt[3]{x-1} - x = \lim_{+\infty} \sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} - x$$

$$= \lim_{+\infty} x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} - x$$

$$= \lim_{+\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} - 1\right)$$

$\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} - x = -1$

Alors $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{x-1} - x = -\infty$

5) Calculer $\lim\limits_{1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{x+3}-3}{x-1}$

$\lim\limits_{1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{x+3}-3}{x-1}$ est une F.I $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{x+3}-3}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1+\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1} + \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \quad (1)$$

- $$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt[3]{2x-1}-1)\left[(\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{2x-1}+1\right]}{(x-1)\left[(\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{2x-1}+1\right]}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt[3]{2x-1})^3-1^3}{(x-1)\left[(\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{2x-1}+1\right]}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(2x-1-1)}{(x-1)\left[(\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{2x-1}+1\right]}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{2(x-1)}{(x-1)\left[(\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{2x-1}+1\right]}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{2}{\left[(\sqrt[3]{2x-1})^2+\sqrt[3]{2x-1}+1\right]} = \frac{2}{3}$$

- $$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

- $$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x+3-4)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{4}$$

D'apres (1) *on a :*

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt{x+3}-3}{x-1} = \frac{2}{3}+\frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

6) Calculer $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{8x^3+5x} - 2x$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $[(+\infty)-(+\infty)]$ avec $\sqrt[3]{8}-2=0$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8x^3} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8x^3+5x} - 2x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt[3]{8x^3+5x})^3-(2x)^3}{\left[(\sqrt[3]{8x^3+5x})^2+2x\sqrt[3]{8x^3+5x}+(2x)^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^3+3x-8x^3}{\left[x^2\left(\sqrt[3]{8+\frac{5}{x^2}}\right)^2+2\sqrt[3]{8+\frac{5}{x^2}}+4\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\left[x^2\left(\sqrt[3]{8+\frac{5}{x^2}}\right)^2+2\sqrt[3]{8+\frac{5}{x^2}}+4\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\left[x\left(\sqrt[3]{8+\frac{5}{x^2}}\right)^2+2\sqrt[3]{8+\frac{5}{x^2}}+4\right]} = 0$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty} \left[x\left(\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^3}}\right)^2+2\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^2}}+4\right] = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8x^3+3x} - 2x = 0$$

7) Calculer $\lim\limits_{-\infty} \sqrt[3]{1-8x^3} + 3x$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $[(+\infty)+(-\infty)]$

car : $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-8x^3} = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-8x^3}+3x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{(-x)^3\left(-\frac{1}{x^3}+8\right)}+3x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -x\times\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{x^3}+8\right)}+3x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -x\left(\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{x^3}+8\right)}-3\right)$$

et on a : $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$

Et $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{x^3}+8\right)}-3 = -1$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-8x^3}+3x = -\infty$$

Solution de l'exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3-3x-4$$

1) Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

(car f est un polynôme)

Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2-3$

Déterminons le signe de $f'(x)$

On a $3x^2-3=0 \Leftrightarrow 3(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow x^2-1=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-2	↘	−6	↗	$+\infty$

Avec

- $f(1) = 1-3-4 = -6$
- $f(-1) = -1+3-4 = -2$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3-3x-4$
  $= \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3-3x-4$
  $= \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$ et que $2<\alpha<3$

f est une fonction continue sur $[1;+\infty[$

(car f est un polynôme)

et f strictement croissante sur $[3;+\infty[$

Avec $f([1;+\infty[) = \left[f(1); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$= [-6;+\infty[$

Donc $0\in f([1;+\infty[)$

Alors : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$

De plus

- $f(2) = 8-6-4 = -2$
- $f(3) = 27-9-4 = 14$

donc $f(2)\times f(3)<0$

D'ou d'après le T.V.I $2<\alpha<3$

3) Montrer que α est la seule solution de l'équation $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}$

la fonction f croissante sur $]-\infty;-1]$ et décroissante sur $[-1;1]$

donc : $f(-1)=-2$ est la valeur maximal de sur $]-\infty;-1]$

alors : $\forall x\in\,]-\infty;1]$: $f(x)\leq -2$

d'ou : l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty;1]$

__Ainsi__

α est la seule solution de l'équation $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}$

4) Donner un encadrement de la solution α d'amplitude 0.5

l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α avec $2<\alpha<3$

On a le centre de l'intervalle $]2;3[$

est $c = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$

et on a :

$$f(c) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3\times\frac{5}{2} - 4 = \frac{33}{8}$$

avec $f(2)=-2$

donc $f(2)\times f\left(\frac{5}{2}\right)<0$

D'ou $2<\alpha<\frac{5}{2}$

et on a l'amplitude de l' encadrement est :

$$l = \frac{5}{2}-2 = 0,5$$

D'où la précision souhaitée est obtenue

5) Vérifier que : $\alpha = \frac{4}{\alpha^2 - 3}$

α est solution de l'équation $f(x) = 0$

Donc $f(\alpha) = 0$

c.à.d $\alpha^3 - 3\alpha - 4 = 0$

c.à.d $\alpha(\alpha^2 - 3) = 4$

avec $2 < \alpha < \frac{5}{2}$ donc $\alpha^2 - 3 \neq 0$

d'où $\alpha = \frac{4}{\alpha^2 - 3}$

6) Soit g la restriction de f sur $[1;+\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

g est continue et strictement croissante sur $I = [1;+\infty[$ Donc :

g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J avec $J = g(I)$

$$g(I) = g([1;+\infty[) = \left[g(1) ; \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[$$
$$= [-6;+\infty[$$

Donc : $J = g(I) = [-6;+\infty[$

b) Montrer que : g^{-1} est dérivable en 0 et que $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$

on a $g(\alpha) = f(\alpha) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = f'(x) = 3x^2 - 3$

donc g est dérivable au point α

et $g'(\alpha) = 3\alpha^2 - 3 = 3(\alpha^2 - 1)$

avec $2 < \alpha < \frac{5}{2}$ donc $\alpha^2 - 1 \neq 0$

D'où

g^{-1} est dérivable au point 0

et $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\alpha)} = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$

Solution de l'exercice 5 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

1) Calculer : $f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car f est un polynôme)

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \geq 0$

Et f' ne s'annule qu'au point 2

D'où : la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Donner une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1

- On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$
  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

donc f est dérivable au point 0

$f'(0) = 0 - 0 + 12 = 12$

$f'(0) = 12$ donc la courbe (C_f) admet une tangente (Δ_1) au point $A(0; f(0))$ d'équation

$[\ y = f'(0)(x-0) + f(0)\ ]$

c.à.d $[\ y = 12(x-0) - 7\ ]$

D'où $[\ (\Delta_1) : y = 12x - 7\ ]$

- On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$
  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

donc f est dérivable au point 1

$f'(0) = 3 - 12 + 12 = 3$

$f'(1) = 3$ donc la courbe (C_f) admet une tangente (Δ_2) au point $B(1; f(1))$ d'équation

$[\ y = f'(1)(x-1) + f(1)\ ]$

c.à.d $[\ y = 3(x-1) - 0\ ]$

D'où $[\ (\Delta_2) : y = 3x - 3\ ]$

3) Montrer que : f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur J que l'on déterminera

f est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est un polynôme) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc :

f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J avec $J = f(\mathbb{R})$

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[\ )$$
$$= \left]\lim_{x\to-\infty} f(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$
$$=]-\infty\ ;+\infty[= \mathbb{R}$$

Car : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 6x^2 + 12x - 7$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 6x^2 + 12x - 7$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

Donc : $J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

4) Déterminer $f^{-1}([-7\ ;\ 0])$

D'après la question 2)

$f(1) = 0$ *et* $f(0) = -7$

On sait que : $\forall x \in J$ *et* $\forall y \in I$
$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

Donc $f^{-1}(0) = 1$ *et* $f^{-1}(-7) = 0$

- *On sait que la monotonie de la fonction* f^{-1} *sur l'intervalle* $J = \mathbb{R}$ *est la même monotonie de la fonction* f *sur l'intervalle* $I = \mathbb{R}$

Et comme f *est continue et strictement croissante sur* $I = \mathbb{R}$

Alors

la fonction f^{-1} *est continue et strictement croissante sur* $J = \mathbb{R}$

et en particulier sur $[-7\ ;\ 0]$

Donc:
$$f^{-1}([-7\ ;\ 0]\ ) = [f^{-1}(-7)\ ;\ f^{-1}(0)]$$

D'où $\boxed{f^{-1}([-7\ ;\ 0]\ ) = [\,0\ ;\ 1\,]}$

5) Comparer : $f^{-1}(\sqrt{3})$ et $f^{-1}(\sqrt[5]{10})$

On a : $\sqrt{3} = \sqrt[2\times5]{3^5} = \sqrt[10]{243}$

Et $\sqrt[5]{10} = \sqrt[5\times2]{10^2} = \sqrt[10]{100}$

Donc $\sqrt[5]{10} < \sqrt{3}$

la fonction f^{-1} *est strictement croissante sur* $J = \mathbb{R}$

alors $\boxed{f^{-1}(\sqrt[5]{10}) < f^{-1}(\sqrt{3})}$

6) Vérifier que : $f(x) = (x-2)^3 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$(x-2)^3 + 1$
$$= x^3 - 3x^2 \times 2 + 3x \times 2^2 - 2^3 + 1$$
$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1$$
$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$
$$= f(x)$$

7) Déterminer : $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$.

Rappel : soit $a \in \mathbb{R}$

Si $a \geq 0$ $\quad x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}$

Si $a < 0$ $\quad x^3 = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|a|}$

Soit $x \in J = \mathbb{R}$ *et* $y \in I = \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$
$$\Leftrightarrow (y-2)^3 + 1 = x$$
$$\Leftrightarrow (y-2)^3 = x - 1$$

On a $x \in J = \mathbb{R}$

- *Si* $x \geq 1$ *alors* $x - 1 \geq 0$

Donc
$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow (y-2)^3 = x - 1$$
$$\Leftrightarrow y - 2 = \sqrt[3]{x-1}$$
$$\Leftrightarrow y = 2 + \sqrt[3]{x-1}$$

D'où $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$

- *Si* $x < 1$ *alors* $x - 1 < 0$

Donc $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow (y-2)^3 = x - 1$
$$\Leftrightarrow y - 2 = -\sqrt[3]{|x-1|}$$
$$\Leftrightarrow y = 2 - \sqrt[3]{1-x}$$

D'où $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt[3]{1-x}$

Conclusion :

f^{-1} *est definie sur* $\mathbb{R}$

- *si* $x \geq 1$ $\quad f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$
- *si* $x < 1$ $\quad f^{-1}(x) = 2 - \sqrt[3]{1-x}$

Maths Hajioui