CENTRE D'ENCADREMENT

« CATCH THE VISION »
*** Travail−Equilibre−Exploit ***

** Collection À moi le Bac Mathématiques 2021 vol.1**

SECTION

MATHEMATIQUES

Terminales C, D, E, F1, F3, SE & SM

100 % Corrigés
Bien détaillés

TOME I

Exercices corrigés + Exercices proposés

- *Nombres Complexes*
- *Algèbre Linéaire*

Edition de
Décembre
2020

Auteur et Concepteur : Mr VIKA Danny

Mise en page : K.T service

AVANT-PROPOS

Compte tenu de la situation éducative actuelle liée à la pandémie de Covid-19 et dans l'incertitude de ce qu'elle sera dans les mois avenir, moi jeune congolais j'ai jugé utile de mettre sur pied cet ouvrage, qui n'est pas un manuel de cours mais un document regroupant des exercices de niveau Terminale C, D, E, F1, F2, F3, F4, Sciences Expérimentales (SE) & Sciences mathématiques (SM). Ce document est conçu pour aider les élèves à se préparer à l'épreuve de mathématiques aux baccalauréats en toute sérénité et aussi afin de contribuer à consolider l'enseignement et hisser le niveau à une dimension salutaire. Il a été nécessaire d'insérer des exercices extraits bacs des autres pays d'Afrique francophone afin de permettre aux élèves curieux et amoureux des Mathématiques de découvrir et de bénéficier des exercices ayant des questions du programme susceptibles d'apparaître à l'examen que les leurs. Toutefois, loin de chercher la gloire, encore moins la célébrité, je suis simplement motivé par le goût et le devoir de donner mon savoir au profit de cette génération actuelle. Bien que tout document scolaire est parfois conçu pour le meilleur ou même le pire, celui-ci est loin d'être l'un de ces ouvrages déjà publiés dans la société. C'est pourquoi je pense que ce livre offrira à ses usagers de plus grande chance de réussite au baccalauréat, aux concours à l'échelle nationale en particulier et à l'échelle internationale en général. Vous trouverez ainsi dans ce manuel des :

- Exercices de type de 1 corrigés bien détaillés
- Exercices de type 2 proposés pour l'apprentissage des élèves.

Cependant, je conseille aux élèves de ne pas se baser directement aux solutions des exercices, mais d'essayer avant tout par eux-mêmes de traiter les exercices de ce livre par l'intermédiaire des cours étudiés en classe. L'éducation étant notre préoccupation à tous, de ce fait toute personne voulant se joindre à moi pour les éditions avenir sera la bienvenue. En fin de compte, je ne saurais terminer sans remercier Mr TATY Gervy qui a généreusement et ouvertement contribué à la réussite de ce livre, car, dit-on la reconnaissance est la monnaie d'échange de la gentillesse reçue.

Auteur : Mr VIKA Danny,
L'étudiant scientifique

Participant : Mr TATY Gervy,
L'étudiant scientifique

Tel : +242-(06-713-32-41) /

(06-999-74-08)

Page facebook

Bac 2021
J'y Crois

Sommaire

A) THEME N°1 : NOMBRES COMPLEXES

B) THEME N°2 : ALGEBRE LINEAIRE

THEME N°1 : NOMBRES COMPLEXES

Exercices de type 1

Exercice N°1.1 :

Mettre les nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique :

$$\boldsymbol{a} = i\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^2 \; ; \qquad b = \frac{1}{1+\sqrt{2}+i\sqrt{3}} \; ; \qquad c = \frac{1}{3-i} - \frac{(1-i)^2}{3+i} \; ;$$

$$d = \frac{1+i(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}-i} \; ; \qquad e = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} - 1 - i\right)^7 ; \qquad f = \left(\frac{1}{2}i - 1\right)\left(\frac{3}{2}+i\right)\left(\frac{1}{2}-3i\right)$$

Exercice N°1.2 :

Ecrire sous forme algébrique le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$$a = (1-i)^3(-i) \; ; \qquad b = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \; ; \qquad c = \frac{i(3-i)}{(-1+2i)^2}$$

Exercice N°1.3 :

1) Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$a = 1 + i(1+\sqrt{2}) \; ; \; b = (1+i\sqrt{3})^5(1-i)^3 \; ; \qquad c = (-\sqrt{3}-i)^{-4} \; ;$$

$$d = \left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 \; ; \qquad e = \sqrt{10+2\sqrt{5}} + i(1-\sqrt{5}).$$

2) Comment choisir l'entier naturel n pour que $(1+i)^n$ soit réel ? Imaginaire ?

Exercice N°1.4 :

Soit U un nombre complexe définie par : $U = \left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{2020}$

1) Ecrire le nombre complexe $a = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ sous forme trigonométrique.

2) Montrer que U est un réel.

Exercice N°1.5 :

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

1. $z = 5e^{i\frac{17\pi}{3}}$; **2.** $z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$; **3.** $z = -(1+i)^4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

4. $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; **5.** $z = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Exercice N°1.6 :

Soit z_0 le nombre complexe défini par : $z_0 = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$.

1) Ecrire z_0 sous la forme $a + ib$ où a et b sont des constantes réels.

2) Calculer ${z_0}^2$, ${z_0}^3$ et ${z_0}^{15}$.

3) Montrer que ${z_0}^{3n+2} = -2^{3n+1}(1 + i\sqrt{3})$

4) Calculer ${z_0}^{20}$.

Exercice N°1.7 :

On considère dans $\mathbb{C}$ trois complexes définis par : $z_1 = (1+i)^3$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ et $Z = z_1 \times z_2$.

1) Déterminer la forme algébrique de Z.

2) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

3) Déterminer la forme trigonométrique et exponentielle de Z.

4) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

5) Vérifier que $\cos^2\frac{17\pi}{12} + \sin^2\frac{17\pi}{12} = 1$.

6) **Calculer** $\tan\frac{17\pi}{12}$.

Exercice N°1.8 :

a) **Soit** $A=\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{n}-\left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{n}$. **Montrer que** $A=\frac{2^{n+1}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n}}i\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.

b) **Démontre que** $\frac{(1+i)^{n}-(1-i)^{n}}{i}=2^{\frac{n+2}{2}}\sin\frac{\pi}{4}$.

Exercice N°1.9 :

On considère le nombre complexe $W=\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)$.

1) **Calculer** W^{2}

2) **Déterminer la forme algébrique de** W^{2}. **Déduire le module et l'argument de** W.

3) **Montrer que** $W^{2004}=-2^{3006}$

Exercice N°1.10 :

Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z_1=\sin\theta+i\cos\theta\,,\ z_2=1+\cos\theta+i\sin\theta\ \text{ et }\ z_3=\frac{z_1}{z_2}$$

Exercice N°1.11 :

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$a=\frac{1}{1+itg\alpha}$; $b=\frac{1}{1+itg\frac{\pi}{4}}$; $c=\frac{1}{1+itg\frac{2\pi}{3}}$

$d=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(\sin x+i\cos x)}{2(1-i)(\cos x-i\sin x)}$; $e=\left(1+i\sqrt{3}\right)(1+i)(\cos\alpha+i\sin\alpha)$;

$f=\left(-1-i\sqrt{3}\right)(-1+i)(\cos\alpha-i\sin\alpha)$; $g=\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}}$

Exercice N°1.12 :

Soient deux réels a et b, et i un nombre vérifiant $i^2 = -1$. En utilisant la formule

$e^{i(a+b)} = e^{ia}.e^{ib}$, établir les relations suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

Exercice N°1.13 :

On considère le nombre $Q = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)i$

On pose $\theta \equiv \arg(Q)\ [2\pi]$.

1) Montrer que $\theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ (sans déterminer θ).

2) a) Montrer que $Q^2 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)(1 + i)$.

b) Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $r = 1 + i$.

c) En déduire $\tan\frac{\pi}{8}$.

Exercice N°1.14 :

1) Linéariser $\sin^6 x$.

2) Démontrer l'égalité : $(1 + \cos x)^4(1 - \cos x)^3 = \sin^6 x\,(1 + \cos x)^3$.

Exercice N°1.15 :

1) Trouver les racines cubiques des nombres complexes suivants : $u = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $k = 11 + 2i$

2) Trouver les racines quatrièmes des nombres complexes suivants : *

a) $u = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$; b) $v = -7 - 24i$

Exercice N°1.16 :

Déterminer tous les nombres complexes Z non nuls ; tels que Z^2 et Z^6 soient conjugués.

Exercice N°1.17 :

On considère le complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + z + 1 = 0$.

2) Démontrer les égalités suivantes : a) $j^3 = 1$; b) $j^2 = -1 - j$.

3) On considère l'équation : $a + jb + j^2c = 0$.

a) Démontrer que : $a - c = j(c - b)$.

b) Démontrer que : $a - b = j^2(b - c)$.

Exercice N°1.18 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $Z^2 - (4\sin\alpha)Z + 4 = 0$; **2)** $3Z.\overline{Z} + 2iZ = \frac{7}{4} + i$; **3)** $4Z^2 + 8|Z|^2 - 3 = 0$;

4) $Z^2 - 2\overline{Z} + 1 = 0$; **5)** $Z + 3\overline{Z} = (2 + i\sqrt{3})|Z|$; **6)** $Z^2 - 2i\overline{Z} = 0$

Exercice N°1.19 :

Trouver dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les nombres Z_1, Z_2 et Z_3 tels que :

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = -3 + i \\ i\overline{Z}_2 = 1 - 2i \\ Z_2 \times Z_3 = -1 - 2i \end{cases}$$

Exercice N°1.20 :

Sachant que : $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = 1$. Déterminer Z_1 ; Z_2 et Z_3 tels que : $\begin{cases} Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1 \\ Z_1 . Z_2 . Z_3 = 1 \end{cases}$

Exercice N°1.21 :

On donne les complexes Z et u définis par : $Z = -8\sqrt{3} + 8i$ et $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

1) Ecrire le nombre complexe Z sous la forme trigonométrique.

2) Déterminer les racines carrées de Z sous la forme trigonométrique.

3) Calculer u^2. Utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de Z sous la forme algébrique.

4) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$ puis celles de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice N°1.22 :

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme du 3ème degré suivant : $f(Z) = Z^3 + (2 - i)Z^2 + qZ - 4$

1) Déterminer le réel q tel que le polynôme $f(Z)$ soit divisible par $Z + 2$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(Z) = 0$.

Exercice N°1.23 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et K le milieu de $[AC]$.

1) Montrer que le nombre complexe $Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$. Calculer le module de Z.

2) Déterminer l'affixe z_K de K sous forme algébrique

3) En considérant la forme exponentielle, montrer que : $z_K = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{12}}$

4) Vérifier que $\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$ puis déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice N°1.24 :

1) a) Résoudre le système d'inconnue complexe : $\begin{cases} iz_1 - z_2 = -(\sqrt{3}+1)+2i \\ z_1 - iz_2 = i(\sqrt{3}-1) \end{cases}$

b) Calculer le produit $z_1.z_2$.

2) On donne $z_A = 1+i\sqrt{3}, z_B = 1-i$ et $z_c = (\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$.

a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_A,\ z_B,\ z_C$.

b) Montrer que la distance $AC = 2$.

c) Interpréter géométriquement les modules $|z-(1-i)|\ et\ |z-(1+i\sqrt{3})|$.

d) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M d'affixe z dans chaque cas ci-après :

* $|z-(1+i\sqrt{3})| = |z-(1-i)|$.

* $|z-(1-i)| = 2$.

Exercice N°1.25 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) définie par : $(E) :\ z^3 = 1$. On notera les solutions sous la forme algébrique $z = a+ib$.

2) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation (E') telle que : $(E') :\ z'^3 = i^3$.

3) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E'') :\ (2z''+i)^3 - i^3 = 0$.

4) Soit les nombres complexes $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3i}{4}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3i}{4}$.

Montrer que le nombre complexe $z_3 = z_1 + z_2$ est imaginaire pur.

Exercice N°1.26 :

θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres coplexes complexes, le polynôme f défini par :

$$f(Z) = (\sin^2 \theta)Z^2 + (\sin 2\theta)Z + 1 + \cos^2 \theta$$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(Z) = 0$. On notera les solutions Z_1 et Z_2 de l'équation en fonction de θ.

2) Vérifier que ${Z_1}^2 + {Z_2}^2 = -2$.

3) a et b sont deux nombres complexes tels que :

$$a = -\frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta + i)\ ;\ b = -\frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta - i)$$

Vérifier que $f(a) = f(b)$.

Exercice N°1.27 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations du plan dont l'écriture complexe est donnée ci-dessous :

a) $z' = -z + 2 + i$; b) $z' - 3 = z - i$; c) $z' = -\frac{3}{2}z + 5i$

d) $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)z + 2i$; e) $z' = (1 - i)z + 1$; f) $z' = iz + 3$;

g) $z' = (-\sqrt{2})z$; h) $z' = (-\sqrt{3} + i)(z - i)$ * ; i) $z' = i + e^{-i\frac{\pi}{3}}z$. *

Exercice N°1.28 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensembles des points M du plan d'affixe z tels que :

a) $|\bar{z} - 2 + i| = 4$; b) $|z + 1 - i| = |z - 6|$; c) $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

d) $\arg(z + i) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$; e) $\arg\left(\frac{z-2-i}{z-1+i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$; f) $\arg(z^2 - 3) \equiv \arg(z + 3)[2\pi]$.

Exercice N°1.29 :

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, les points A, B et C d'affixes

$z_A = 1 + i$; $z_B = 3i$ **et** $z_C = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$

Montrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Exercice N°1.30 :

$P(Z) = 2Z^4 - 6Z^3 + 9Z^2 - 6Z + 2.$

1) Déterminer les nombres a, b et c tels que l'on ait :

$$P(Z) = Z^2\left[a\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 + b\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + c\right].$$

2) Résoudre dans , l'équation : $2z^2 - 6z + 5 = 0$.

3) En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$, de l'équation $P(Z) = 0$, on posera $t = \left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Exercice N°1.31 :

Démontrer que si $A, B,$ et C désignent les mesures des angles d'un triangle, on a :

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Exercice N°1.32 :

Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$\forall Z \in \mathbb{C},\ f(Z) = Z^3 + bZ^2 + cZ + d$, **où b, c, d sont des nombres complexes.**

1) Déterminer b, c, d sachant que : $\begin{cases} f(i) = 0 \\ f(-1) = -8i + 16 \\ f(1) = 8 + 16i \end{cases}$

2) En considérant les valeurs de b, c et d trouvées dans la question 1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(Z) = 0$

Exercice N°1.33 :

Soient Z_1, Z_2 et Z_3 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 1 - i\sqrt{3}$.

Sachant que leur somme est $-3\sqrt{3}$.

1) **Déterminer alors Z_1, Z_2 et Z_3.**
2) **Calculer $(3\sqrt{3} - i)Z_1, 2\overline{Z_2} + Z_2$ et $Z_2 \times \overline{Z_2}$.**
3) **Former une équation du troisième degré ayant pour solutions Z_1, Z_2 et Z_3 .**

Exercice N°1.34 :

Donner l'écriture complexe de la transformation suivante f dans chacun des cas suivants :

1) **f est la translation de vecteur $\vec{u}(1 + 2i)$.**
2) **f est l'homothétie de centre $I(1 + i)$ et de rapport (-2).**
3) **f est la rotation de centre $K(2 - i)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.**
4) **f est la similitude plane directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport $k = 2$.**
5) **f est la similitude plane directe de centre $\Omega(2i)$, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et rapport $k = \frac{1}{2}$.**

Exercice N°1.35 :

Soit f, la transformation du plan dont l'écriture complexe est :

$$Z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z + 4\sqrt{3} - 2i.$$

1) **Déterminer le nombre complexe Z_0 tel que : $Z' - Z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_0)$.**

2) En déduire que f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre, que l'on précisera.

<u>Exercice N°1.36</u> :

Soit φ l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

1) Déterminer l'écriture complexe de φ.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ^{-1}.

<u>Exercice N°1.37</u> :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$.

1) a) Ecrire le nombre complexe z_A sous forme trigonométrique.

b) En déduire que $(1-i)^{2016} = 2^{1008}$.

2) a) Ecrire le nombre complexe $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

b) En déduire que $\frac{z_B}{z_A} = \left[1 + \sqrt{3}\,; \frac{\pi}{3}\right]$.

c) Donner alors l'écriture trigonométrique du nombre z_B.

d) En déduire que : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

e) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$.

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z non nul tel que $\frac{iz-i-1}{z}$ soit réel.

<u>Exercice N°1.38</u> :

Soit $Z = z^2 + z - \overline{z}$ où $z \in \mathbb{C}$

1) Trouver les nombres complexes z tels que $Z = 2i$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $Z \in \mathbb{R}$.

b) $Z \in i\mathbb{R}$.

<u>Exercice N°1.39</u> :

Soit S la similitude plane directe de centre I d'affixe $z_I = -3 - 2i$ et qui transforme le point A d'affixe $z_A = 1 + 2i$ en B d'affixe $z_B = 5 - 2i$.

1) Déterminer f, la transformation associé à S.

2) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

3) Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{U}(1;\ -2)$.

Déterminer l'équation de la droite (D') image de la droite (D) par S.

<u>Exercice N°1.40 :</u>

Soit $z = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

1) Montrer que z est une racine cinquième de l'unité.

2) Vérifier que $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = z + \frac{1}{Z}$.

3) Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

4) Déduire que $z + \frac{1}{z}$ est une solution d'une équation du second degré qu'il faut définir

5) Déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice N°1.41 : (extrait Bac Blanc série D session de Juin 2020 Congo et Zone I).

On considère dans $\mathbb{C}$ l’équation (E) : $2z-\overline{z}+1+6i=0$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l’équation (E). (On pourra poser : $z=x+iy$).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d’affixes respectives $z_A=-1-2i, z_B=1-4i, z_C=-1-6i$ et $z_D=1$

a)- Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point A et qui transforme B en C.

Montrer que son écriture complexe est : $z'=(1-i)z+2-i$

b)- Déterminer le rapport k et une mesure θ de l’angle de S.

c)- Montrer que pour tout point M d’affixe z, distinct de A, on a : $z'-z=-i(z-z_A)$

d)- En déduire la nature du triangle MM’A où $M'=S(A)$.

3° a)- Placer les points A, B, C et D dans le plan. *

b)- Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Exercice N°1.42 :

Soit S l’application du plan dans lui-même d’écriture complexe : $Z'=3iZ-1-7i$.

1) a) Justifier que S est une similitude plane directe et préciser ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer l’expression analytique de S.

2) Déterminer une équation de l’image par S de la droite (BC) , B et C étant les points d’affixes respectives 2 et $3-i$.

3) Déterminer une équation de (C') , image de C d’équation $(x-2)^2+y^2=1$

<u>Exercice N°1.43</u> : (extrait Bac Blanc série D session de Mai 2019 Congo et Il Zone IV)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $(1+i)^6 = -8i$.

2) On Considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.

a)- Déduire de 1) une solution de l'équation (E).

b)- L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3) Déduire également de 1) une solution de l'équation (E') : $z^3 = -8i$

4) On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a)- Déterminer l'affixe respective z_B du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe z_C du point C, image de B par r

b)- Montrer que z_B et z_C sont solutions de (E').

5) a)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$(unité graphique : 2 cm)

Représenter les points A, B et C.

b)- Quelle est la nature du triangle ABC ?

c)- Déterminer le centre de gravité du triangle ABC.

<u>Exercice N°1.44</u> : (extrait Bac Blanc série C session de Juin 2020 Congo et Il Zone I)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + (2 - 3i\sqrt{2})Z - (4 + 2i\sqrt{2}) = 0$.

2) Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit f la transformation ponctuelle du plan $(\mathcal{P})$ qui à tout point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe $Z' = i\sqrt{2}.\overline{Z} - 2 + 2i\sqrt{2}$.

a) Donner la nature de f.

b) Déterminer le rapport k de f.

c) Déterminer l'affixe Z_Ω de son centre Ω.

d) Sachant que l'axe $(\mathcal{D})$ de f est l'ensemble des points M du plan tels que

$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{k\Omega M}$, montrer que $(\mathcal{D})$ a pour équation cartésienne : $y = x + 2$.

<u>Exercice N°1.45</u> : (extrait Bac série D session normale 2012 Burkina Faso)

1) On considère le polynôme P défini pour tout Z de l'ensemble $\mathbb{C}$ par :

$$P(Z) = Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 16$$

a) Soit $Z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(Z_0) = 0$ alors $P\left(\overline{Z_0}\right) = 0$ où $\overline{Z_0}$ est le conjugué de Z_0.

b) Calculer $P\left(1 + i\sqrt{3}\right)$; puis factoriser $P(Z)$

c) Déduire les solutions de l'équation $P(Z) = 0$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$(unité graphique : $2\ cm$). Soit A, B et

C les points d'affixes respectives $a = 4$; $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \overline{b}$ où $\overline{b}$ est le conjugué b.

a) Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b) Quelle est la nature exacte du triangle ABC ?

3) Soit K le point d'affixe $z_K = -\sqrt{3} + i$, le point F image de K par la rotation de centre O

et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et G l' image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

a) Déterminer les affixes respectives F et G.

b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4) Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$.

a) Calculer l'affixe Z_H de H puis montrer que le parallélogramme $COFH$ est un carré.

b) Quelle est la nature AGH ?

On donne : $\sqrt{3} = 1,7$.

<u>Exercice N°1.46</u> :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$(Unité : $2\ cm$).

On désigne par I le point d'affixe $Z_I = 1$, par A le point d'affixe $Z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $Z_B = -2 + 2i$ et par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$. On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour : unité graphique : $2\ cm$.

1) Déterminer le centre Ω du cercle et son rayon.

2) Soit D le point d'affixe $Z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$. Ecrire Z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathcal{C})$.

3) Sur le cercle $(\mathcal{C})$; on considère le point E, d'affixe Z_E, tel qu'une mesure en radian de $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega I};\ \overrightarrow{\Omega E}}\right)$ est $\frac{\pi}{4}$.

a) Préciser le module et un argument de $Z_E + \frac{1}{2}$.

b) En déduire que : $Z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.

<u>Exercice N°1.47</u> :

Soit $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ et l'équation

$$(E) : z^2 - [1 + i(\sin\theta + \tan\theta)]z + \sin\theta\,(-\tan\theta + i) = 0.$$

1) Montrer que $b = i\sin\theta$ est une solution de (E) puis calculer l'autre solution a.

2) Soit T la transformation plane : $M(z) \longmapsto M'(z')$ telle que : $z' = az + b$ avec a et b solutions de (E).

a) Donner la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer θ pour que T soit une similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport k que l'on déterminera.

Calculer son centre Ω.

<u>Exercice N°1.48</u> : (extrait Bac série SE session principale 2017 Tunisie)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (\sqrt{5} + 2i)z + 1 + 4i\sqrt{5} = 0$.

a) Calculer $(\sqrt{5} + 2i)^2$.

b) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -3(\sqrt{5} + 2i)^2$.

c) En dédire que les solutions de (E) sont :

$$a = (\sqrt{5} + 2i)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad b = (\sqrt{5} + 2i)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan.

$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

2) Soit Q le point d'affixe $\sqrt{5} + 2i$.

a) Montrer que le point Q appartient à $(\mathcal{C})$.

b) Construire alors le point Q.

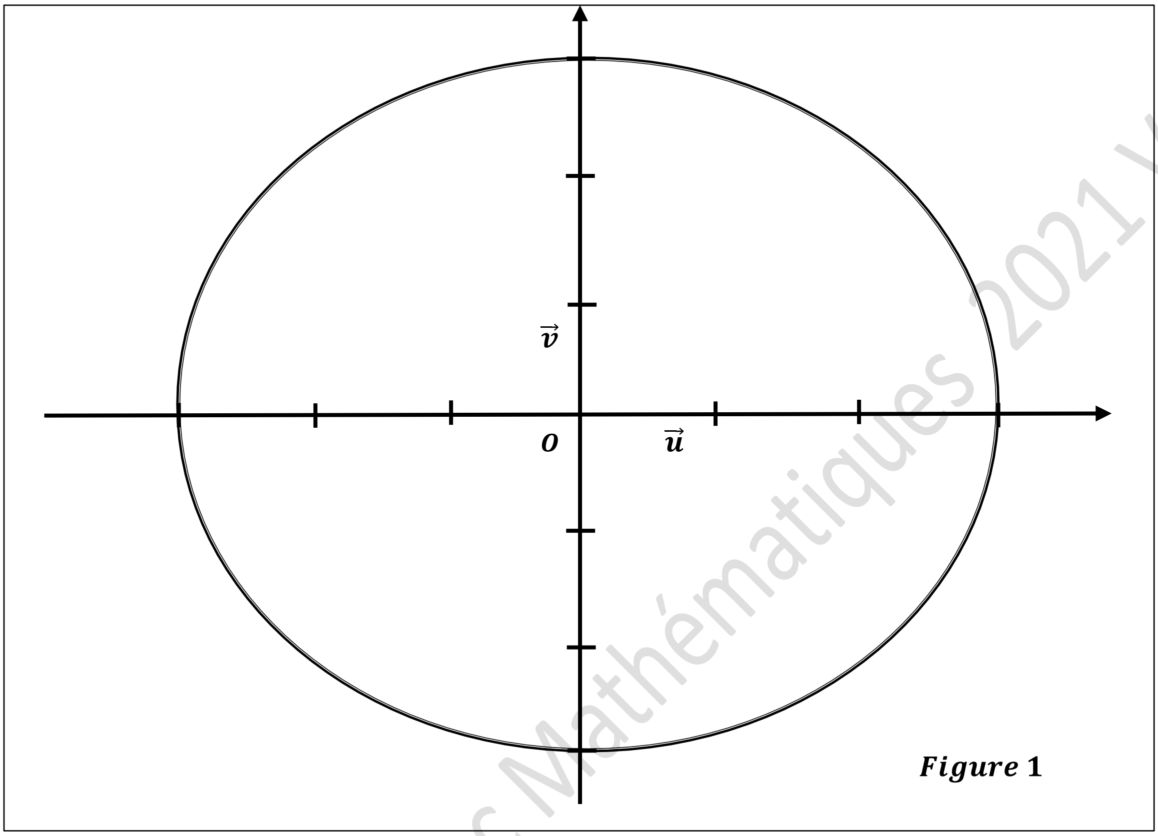
3) Soient A et B les points d'affixes respectives les nombres complexes a et b.

a) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Vérifier que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ}$.

c) En déduire que le quadrilatère $OAQB$ est un losange.

d) Construire alors les points A et B.



$Figure\ 1$

<u>Exercice N°1.49</u> : (extrait Bac série SE session d'août 2020 Guinée Conakry)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$

1) Déterminer les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

3) a) Développer, réduire et ordonner $(2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4]$

b) En déduire les solutions de (E).

4) Soit $z_0 = -\frac{1}{2}$; $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

Exprimer chacun des nombres complexes z_0 ; z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

<u>Exercice N°1.50</u> : (extrait Bac série SE session d'Octobre 2020 Mali)

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$, et pour tout nombre complexe du plan complexe z différent de z_B, on pose $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$.

1) Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

a) Z soit réel.

b) Z soit imaginaire pur (éventuellement nul).

c) Z soit de module 1.

2) Calculer $|Z - 1| \times |z - z_B|$ et en déduire que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R , les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

<u>Exercice N°1.51</u> : (extrait BAC série D session de Juin 2018 Congo)

Le plan complexe $\mathcal{C}$ étant rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixies respectives $Z_A = 1 + 2i, Z_B = -1 + 2i, Z_C = 1 - i$ et $Z_D = 1$.

1) a) Déterminer l'affixe $Z_{\overrightarrow{BC}}$ du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

b) Déterminer l'expression analytique de la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

c) Trouver l'affixe du point A' image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2) a) Prouver qu'une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})$ est $-\frac{\pi}{2}$.

b) Ecrire l'expression analytique de la rotation $\mathcal{R}$ de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$.

c) Trouver l'affixe du point C' image du point C par la rotation $\mathcal{R}$.

3) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude plane directe $\mathcal{S}$ de centre A et qui transforme B en C.

Exercice N°1.52 : (extrait Bac Blanc série F1-F2-F3-F4 session d'Avril 2018)

Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $Z^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)Z - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$.

1. a) Vérifier que $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$ et que $e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = i\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

b) Vérifier alors que $Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de l'équation (E).

c) Trouver alors l'autre solution Z_2 de l'équation (E).

d) Ecrire chacun des nombres complexes Z_1 et Z_2 sous forme cartésienne.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $Z_B = -\sqrt{3} + i$.

a) Vérifier que $Z_B = iZ_A$.

b) En déduire que le triangle OAB est rectangle isocèle.

c) Construire les points A et B.

3) Soit C le point d'affixe $Z_C = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$.

a) Montrer que $OACB$ est un carré.

b) Placer le point C.

d) Déterminer la forme exponentielle de Z_C.

Exercice N°1.53 : (extrait Bac série C-E session de Juillet 2020 Côte D'Ivoire)

Soit α un réel tel que $\alpha \in [0, \pi]$.

1) On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme $P(z) = z^3 + (-1 + 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$.

a) Déterminer les réels a et b tel que $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = -\sin\alpha + i\cos\alpha$ et $z_C = -\sin\alpha - i\cos\alpha$.

a) Ecrire z_A, z_B et z_C sous forme trigonométrique.

b) Ecrire sous forme exponentielle $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

c) En déduire la nature du triangle ABC.

d) Déterminer α pour que le triangle ABC soit équilatéral.

<u>Exercice N°1.54</u> : (extrait Bac session de Juillet 2020 Tunisie)

On considère $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (3 + 3i\sqrt{3})z - 6 + 3i\sqrt{3} = 0$.

1) a) Vérifier que $i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation (E).

b) En déduire l'autre solution de l'équation (E).

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$.

a) Calculer $(z_B - z_A)(\overline{z_C - z_A})$.

b) En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

3) Dans la figure de l'annexe ci-jointe, on a placé le point A.

a) Soit D le point d'affixe $z_D = -3$. Montrer que le point A est le milieu du segment $[DB]$.

b) Placer les points D, B et C.

c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à $12\sqrt{3}$.

Solutions des Exercices de type 1

Exercice N°1.1 :

1) Forme algébrique des nombres complexes :

- $a = i\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^2 = i\sqrt{2}\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}i-\frac{3}{9}\right) = i\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}+i\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Longrightarrow \boxed{a = -\frac{2\sqrt{6}}{3}+i\frac{2\sqrt{2}}{3}}$
- $b = \frac{1}{1+\sqrt{2}+i\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+i\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-i\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2+3} = \frac{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2+3} \Longrightarrow \boxed{b = \frac{1+\sqrt{2}}{6+2\sqrt{2}}+i\frac{-\sqrt{3}}{6+2\sqrt{2}}}$
- $c = \frac{1}{3-i}-\frac{(1-i)^2}{3+i} = \frac{3+i-(-2i)(3-i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+2+i(1+6)}{9+1} \Longrightarrow \boxed{c = \frac{1}{5}+i\frac{7}{10}}$
- $d = \frac{1+i(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}-i} = \frac{[1+i(1+\sqrt{3})][(1+\sqrt{3})+i]}{(1+\sqrt{3}-i)(1+\sqrt{3}+i)} = \frac{(1+\sqrt{3})+i+i(1+\sqrt{3})^2-(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})^2+1} = \frac{i+i(1+2\sqrt{3}+3)}{1+2\sqrt{3}+3+1}$

  $= \frac{i(5+2\sqrt{3})}{5+2\sqrt{3}} \Longrightarrow \boxed{d = i}$
- $e = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1-i\right)^7 = \left(\frac{(\sqrt{3}-i)^2+(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}-1-i\right)^7$

  $= \left(\frac{3-2i\sqrt{3}-1+3+2i\sqrt{3}-1}{3+1}-1-i\right)^7 = \left(\frac{4}{4}-1-i\right)^7 = (-i)^7 = (-i)\times(-i)^6$

  $= (-i)\times(-1) \Longrightarrow \boxed{e = i}$
- $f = \left(\frac{1}{2}i-1\right)\left(\frac{3}{2}+i\right)\left(\frac{1}{2}-3i\right) = \left(\frac{3}{4}i-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-i\right)\left(\frac{1}{2}-3i\right) = \left(-\frac{1}{4}i-2\right)\left(\frac{1}{2}-3i\right)$

  $= \left(-\frac{1}{8}i-\frac{3}{4}-1+6i\right) \Longrightarrow \boxed{f = -\frac{7}{4}+i\frac{23}{8}}$

Exercice N°1.2 :

Forme algébrique du conjugué des nombres complexes :

- $a = (1-i)^3(-i) \Rightarrow \overline{a} = (1+i)^3(i) = (1+2i-1)(1+i)(i) = (2i)(i-1)$

$$\boxed{\Rightarrow \overline{a} = -2-2i}$$

- $b = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow \overline{b} = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

$$= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + i\sqrt{4-2} + i\sqrt{4-2} - \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = 2+\sqrt{2}+2i\sqrt{2}-2+\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}$$

- $c = \frac{i(3-i)}{(-1+2i)^2} \Longrightarrow \overline{a} = \frac{-i(3+i)}{(-1-2i)^2} = \frac{1-3i}{1+4i-4} = \frac{(1-3i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-3-4i+9i-12}{(-3)^2+(4)^2} = \frac{-15+5i}{9+16}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{c} = \frac{-15+5i}{25} = -\frac{3}{5} + i\frac{1}{5}}$$

Exercice N°1.3 :

1) Calcul du module et d'argument

$$|a| = \sqrt{(1)^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+1+2\sqrt{2}+2} = \boxed{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$ et

$$arg = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} > 0 \ \ (1) \\ \sin\theta = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} > 0 \ \ (2) \end{cases}.$$ En considérant $(1) \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right) = 67,5°$

Procédons par la règle de 3 : si $180° \longrightarrow \pi$

$67,5° \longrightarrow \theta$

$$\theta = \frac{67,5° \times \pi}{180°} = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$$

Ainsi, l'argument de a est $\frac{3\pi}{8} + 2k\pi$

$$|b| = \left|1+i\sqrt{3}\right|^5 \times |1-i|^3 = \left(\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)^5 \times \left(\sqrt{(1)^2+(-1)^2}\right)^3 = 2^5 \times \sqrt{2}^3$$

$$= 64\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{|b| = 64\sqrt{2}}\ ;\ arg\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi], arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\Rightarrow argb = arg\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)^5 \times (1-i)^3\right] = \left[5arg\left(1+i\sqrt{3}\right) + 3arg(1-i)\right] + 2k\pi$$

$$= \left[5\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + 2k\pi = \left[\frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right] + 2k\pi \Rightarrow \boxed{argb = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi}$$

$c = \left(-\sqrt{3}-i\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\sqrt{3}-i\right)^4}$. Posons $z = -\sqrt{3}-i,\ |z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \boxed{2}$

$\Longrightarrow |c| = \left|\frac{1}{z^4}\right| = \boxed{\frac{1}{16}}$ et $\arg c = -4\arg z = -4\arg\left(-\sqrt{3}-i\right) = -4\times\frac{7\pi}{6} = -\frac{14\pi}{6}$

$= \boxed{-\frac{7\pi}{3}+2k\pi}$

$$d = \left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 = \left(1-\frac{\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 = \left(1-\frac{\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 = \left(1-\frac{\sqrt{3}(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^2 = \left(1-\frac{\sqrt{3}(1-2i-1)}{1^2+1^2}\right)^2$$

$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)^2 = 1+2i\sqrt{3}-3 = -2+2i\sqrt{3} \Longrightarrow |d| = \sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16}$$

$\boxed{\Longrightarrow |d| = 4}$ et $arg d = \begin{cases}\cos\theta = -\frac{1}{2} < 0\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0\end{cases} \Longrightarrow \boxed{\theta = arg d = \left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi = \frac{2\pi}{3}+2k\pi}$

$|e| = \sqrt{\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2+\left(1-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{10+1+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5} = \sqrt{16} \Longrightarrow \boxed{|e| = 4}$ et

arg$e = \begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} > 0 \ \ (1)\\ \sin\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0 \ \ (2)\end{cases}$. En considérant $(1) \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) = 18°$

Procédons par la règle de 3 : si $180° \longrightarrow \pi$

$18° \longrightarrow \theta$ / $\theta = \frac{18°\times\pi}{180°} = \frac{\pi}{10}+2k\pi$

$\boxed{\text{Ainsi l'argument de } e \text{ est } -\frac{\pi}{10}+2k\pi}$

2) Soit $|1+i| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$ et $arg(1+i) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$

Alors on a : $(1+i)^n = \left[\sqrt{2}^n ; n\times\frac{\pi}{4}\right]$

$$= \sqrt{2}^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Or $(1+i)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(1+i)^n = 0$, c'est-à-dire $\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin(0+k\pi) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, \frac{n\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, \frac{n}{4} = k \Leftrightarrow \boxed{\exists k\in\mathbb{Z}, n = 4k.}$$

Et $(1+i)^n \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(1+i)^n = 0$, c'est-à-dire $\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{4} = \pi\left(\frac{1}{2}+k\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n}{4} = \frac{1}{2}+k$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2+4k.}$$

Exercice N°4 :

1) Forme trigonométrique

$$a = -\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ |a| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2\ ;arg = \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\theta = aga = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. D'où $\boxed{a = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$.

2) Montrons que U est un réel.

$$U = \left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{2020} = a^{2020} = \left[2\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right]^{2020} = \left[2^{2020}\ ;\ 1515\pi\right]$$

$= 2^{2020}[\cos(1515\pi) + i\sin(1515\pi)] = 2^{2020} = [-1+i(0)]$. D'où $\boxed{U = -2^{2020} \in \mathbb{R}}$

Exercice N°5 :

Forme algébrique des nombres complexes

1. $z = 5e^{i\frac{17\pi}{3}} = 5e^{i\left(6\pi-\frac{\pi}{3}\right)} = 5\left[\cos\left(6\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(6\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 5\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{5}{2}-i\frac{5\sqrt{3}}{2}}$

2. $z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

3. $z = -(1+i)^4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\left[\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]^4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \left[\left(\sqrt{2}\right)^4\ ;\ \pi\right]\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

   $= 4(\cos\pi + i\sin\pi)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \boxed{-2\sqrt{3}-2i}$

4. $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{4\sqrt{3}+4}{4} + i\frac{-4\sqrt{3}+4}{4} = \boxed{(\sqrt{3}+1) + i(-\sqrt{3}+1)}$$

5. $z = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \left[\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right] \times e^{-i\frac{3\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Exercice N°1.6 :

1) Ecrivons z_0 sous la forme $a + ib$ où a et b sont réels.

$$z_0 = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}} = \frac{(5+3i\sqrt{3})(1+2i\sqrt{3})}{(1-2i\sqrt{3})(1+2i\sqrt{3})} = \frac{5+10i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-18}{1+12} = \frac{-13+13i\sqrt{3}}{13}$$

D'où $\boxed{z_0 = -1 + i\sqrt{3},\ \text{avec } a = -1,\ b = \sqrt{3}.}$

2) Calcul de ${z_0}^2$ et ${z_0}^3$ puis ${z_0}^{15}$.

Soit $|z_0| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ **et** $arg z_0 = \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} < 0 \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Alors on a :

- $z_0^2 = \left[(2)^2; 2 \times \frac{2\pi}{3}\right] = \left[4\,;\frac{4\pi}{3}\right] = 4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$$= 4\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

D'où $\boxed{z_0^2 = 2(-1 - i\sqrt{3}) = 2\overline{z_0}.}$

- ${z_0}^3 = z_0^2 \times z_0 = 2(-1 - i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3}) = 2(1 - i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 3) \Rightarrow \boxed{{z_0}^3 = 8}$
- ${z_0}^{15} = \left({z_0}^3\right)^5 = (8)^5 \Rightarrow \boxed{{z_0}^{15} = 32768.}$

3) Montrons que ${z_0}^{3n+2} = -2^{3n+2}(1 + i\sqrt{3})$.

$${z_0}^{3n+2} = {z_0}^{3n} \times z_0^2 = \left({z_0}^3\right)^n \times z_0^2 = (8)^n(-2 - 2i\sqrt{3}) = -2\left(2^3\right)^n(1 + i\sqrt{3})$$

$$= -(2)(2)^{3n}(1+i\sqrt{3})$$

Donc $\boxed{z_0{}^{3n+2} = -2^{3n+1}(1+i\sqrt{3})}$.

4) Calcul de $z_0{}^{20}$.

On a : $\boxed{z_0{}^{20} = -2^{19}(1+i\sqrt{3}) = 2^{19}(-1-i\sqrt{3}) = 2^{19}\overline{z_0}.}$

Exercice N°1.7 :

1**) Forme algébrique de Z.**

$$Z = z_1 \times z_2 \Rightarrow Z = (1+i)^3(-1+i\sqrt{3}) = (1+2i-1)(1+i)(-1+i\sqrt{3})$$

$$= (-2+2i)(-1+i\sqrt{3})$$

$$= 2 - 2i\sqrt{3} - 2i - 2\sqrt{3}$$

D'où $\boxed{Z = 2[(1-\sqrt{3}) + i(-1-\sqrt{3})]}$.

2) Déterminons le module et argument de z_1 et z_2.

$$z_1 = (1+i)^3 \Rightarrow |z_1| = \left(\sqrt{(1)^2+(1)^2}\right)^3 = \boxed{|z_1| = 2\sqrt{2}} \text{ et } argz_1 = 3 \times \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{argz_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi} \text{ et } z_2 = -1+i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \boxed{|z_2| = 2} \text{ et}$$

$$argz_2 = \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} < 0 \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{argz_2 = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi}$$

3) Déterminons la forme trigonométrique de Z.

On a : $|Z| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$ et $argZ = argz_1 + argz_2 + 2k\pi \Rightarrow$

$argZ = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi$. D'où $\boxed{Z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)}$

4) Valeurs exactes de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

En comparant les formes trigonométriques et algébriques de Z trouvées dans 1) et 3) on a :

$$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)=2\left[\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(-1-\sqrt{3}\right)\right]$$

Alors par identification on a : $\begin{cases}2\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12}=1-\sqrt{3}\\ 2\sqrt{2}\sin\frac{17\pi}{12}=-1-\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{17\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \sin\frac{17\pi}{12}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{cases}\cos\frac{17\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{17\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{cases}.}$$

5) Vérifions que $\cos^2\left(\frac{17\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{17\pi}{12}\right)=1$.

En considérant les valeurs trouvées précédemment dans 4) on a :

$$\cos^2\frac{17\pi}{12}+\sin^2\frac{17\pi}{12}=\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{16}+\frac{(-\sqrt{2}-\sqrt{6})(-\sqrt{2}-\sqrt{6})}{16}$$

$$=\frac{(2-4\sqrt{3}+6)+(2+4\sqrt{3}+6)}{16}=\frac{16}{16}=1$$

Donc $\boxed{\cos^2\frac{17\pi}{12}+\sin^2\frac{17\pi}{12}=1}$

6) Calculons $\tan\frac{17\pi}{12}$

On a : $\tan\frac{17\pi}{12}=\frac{\sin\frac{17\pi}{12}}{\cos\frac{17\pi}{12}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\times\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{(-\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}=\frac{-2-4\sqrt{3}-6}{2-6}=\frac{-8-4\sqrt{3}}{-4}=\boxed{2+\sqrt{3}}$

<u>Exercice N°1.8</u> :

a) Montrons que $A=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}i\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

Posons $\boldsymbol{u = \left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{\left[2\,;e^{i\frac{\pi}{6}}\right]}{\left[\sqrt{3}\,;e^{i0}\right]}\right)^n = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,;\frac{\pi}{6}\right]^n}$

$$\boldsymbol{u = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)}$$

$$\boldsymbol{v = \left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = \left(\overline{1+\frac{i}{\sqrt{3}}}\right)^n = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,;-\frac{\pi}{6}\right]^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow A = u - v = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\left(2i.\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right) = \frac{2^n\times 2}{\left(\sqrt{3}\right)^n}.\,i.\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$$

Donc $\boxed{\boldsymbol{A = \frac{2^{n+1}}{\left(\sqrt{3}\right)^n}.\,i.\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)}}$

b) Démontrons que $\boldsymbol{\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}$

$$\boldsymbol{(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^n = \left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4}\right]^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{ni\frac{\pi}{4}}}$$

$$\boldsymbol{(1-i)^n = \left(\overline{1+i}\right)^n = \left[\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{-ni\frac{\pi}{4}}},$$

Donc $\boldsymbol{\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{i} = \frac{2^{\frac{n}{2}}e^{ni\frac{\pi}{4}}-2^{\frac{n}{2}}e^{-ni\frac{\pi}{4}}}{i} = -i\times\left(2^{\frac{n}{2}}\left(e^{ni\frac{\pi}{4}} - e^{-ni\frac{\pi}{4}}\right)\right)}$

$$\boldsymbol{= -i\times 2^{\frac{n}{2}}\left[\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) - \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right]}$$

$$\boldsymbol{= -i\times 2^{\frac{n}{2}}\left(2i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = 2\times 2^{\frac{n}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

Alors $\boxed{\boldsymbol{\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}}$

<u>Exercice N°1.9</u> :

1) Calcul de $\boldsymbol{W^2}$.

$$\boldsymbol{W = \sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right) \Rightarrow W^2 = \left[\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^2}$$

$$= [\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)][\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)] = (\sqrt{3}+1)^2 + 2i(\sqrt{9}-1) - (\sqrt{3}-1)^2$$

$$= 3+2\sqrt{3}+1+4i-3+2\sqrt{3}-1$$

$$\boxed{\Rightarrow W^2 = 4\sqrt{3}+4i = 4(\sqrt{3}+i)}$$

3) Forme trigonométrique de W^2.

On cherche d'abord le module et un argument de W^2 tels que :

$$|W^2| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2+(4)^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ et } argW^2 = \begin{cases}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0\\ \cos\theta = \frac{1}{2} > 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = argW^2 = \frac{\pi}{6}[2\pi]. \text{ D'où } \boxed{Z = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

Déduisons le module et un argument de W.

On sait que $|W^2| = 8 \Leftrightarrow |W|^2 = 8 \Leftrightarrow \boxed{|W| = 2\sqrt{2}}$ **et** $argW^2 = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$$\Leftrightarrow 2arg(W) = \frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow \boxed{argW = \frac{\pi}{12}[2\pi]} .$$

4) Démonstration

$$[\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)]^{2004} = \left[\left(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)\right)^3\right]^{668}$$

$$= \left[\left(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)\right)^2\left(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)\right)\right]^{668}$$

$$= \left[4(\sqrt{3}+i)\left(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)\right)\right]^{668} = [8(2+2i)]^{668}$$

$$= \left[(8(2+2i))^2\right]^{334} = [64(2+2i)(2+2i)]^{334}$$

$$= [(512i)]^{334} = [(2i)^9]^{334} = (2i)^{9\times 334} = (2i)^{3006} = i^{3006}2^{3006}, \text{ or } i^{3006} = ((i^2))^{1503} = -1$$

Donc : $\boxed{W^{2004} = -2^{3006} \in \mathbb{R}}$

Exercice N°1.10 :

-

Forme exponentielle des nombres complexes

* **On a :** $z_1 = \sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta - i\sin\theta) = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\theta} = \boxed{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}$

* **Soit** $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow -\pi < \theta < \pi$, **alors** $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$. **Donc** $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

Alors $z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = \boxed{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$

* **On** $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\times e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{\theta}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \boxed{\frac{e^{i\left(\frac{\pi-3\theta}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$

Exercice N°1.11 :

Module et argument des nombres complexes :

- $a = \frac{1}{1+itg\alpha} = \frac{1}{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1}{\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+i\sin\alpha} = \cos\alpha\,(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \cos\alpha\, e^{-i\alpha}$

  Si $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ **alors** $a = |\cos\alpha|e^{-i\alpha}$, **d'où** $\boxed{|a| = \cos\alpha \text{ et } arga = -\alpha + 2k\pi.}$

  Si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ **alors** $a = |\cos\alpha|e^{i(\pi-\alpha)}$, **d'où** $\boxed{|a| = \cos\alpha \text{ et } arga = \pi - \alpha + 2k\pi}$

- $b = \frac{1}{1+itg\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1+i\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\frac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

  Comme $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ **alors** $b = \left|\cos\frac{\pi}{4}\right| e^{-i\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow \boxed{|b| = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } argb = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$

- $c = \frac{1}{1+itg\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{1+i\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}}} = \frac{1}{\frac{\cos\frac{2\pi}{2}+i\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}}} = \cos\frac{2\pi}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

  Comme $\frac{2\pi}{3} \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ **alors** $c = \left|\cos\frac{2\pi}{3}\right| e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, **alors** $\boxed{\begin{cases} |c| = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ argc = \pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}}$

- $d = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sin x + i\cos x)}{2(1-i)(\cos x - i\sin x)} = \frac{a\times b}{2c\times d} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \\ b = sinx + i\cos x = i(\cos x - i\sin x) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \end{cases}$

  et $\begin{cases} c = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ d = \cos x - i\sin x = e^{-ix} \end{cases} \Rightarrow d = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\times e^{-ix}} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)} \times e^{i\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

  $= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-x+\frac{\pi}{4}+x\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{13\pi}{12}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |d| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ argd = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}}$

- $e = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(1 + i)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\alpha} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$

  $= 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+\alpha\right)}$, d’où $\boxed{\begin{cases} |e| = 2\sqrt{2} \\ arge = \frac{7\pi}{12} + \alpha + 2k\pi \end{cases}}$

- $f = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)(-1 + i)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \times e^{-i\alpha} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)} =$

  $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{25\pi}{12}-\alpha\right)} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |f| = 2\sqrt{2} \\ argf = \frac{25\pi}{12} - \alpha + 2k\pi \end{cases}}$

- $g = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}} = \frac{1}{2}\frac{e^{i\frac{\pi}{9}}}{e^{i\frac{4\pi}{9}}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{9}} \times e^{-i\frac{4\pi}{9}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{9}-\frac{4\pi}{9}\right)} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |g| = \frac{1}{2} \\ argg = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}}$

Exercice N°1.12 :

Par définition, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}, i^2 = -1$**, on a :** $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Alors pour $a, b \in \mathbb{R}$**, on a :**

$$e^{i(a+b)} = \cos(a + b) + i\sin(a + b).$$

On sait que : $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$, **avec :**

$$e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a), \text{ et } \quad e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b),$$

On a alors : $\cos(a + b) + i\sin(a + b) = [\cos(a) + i\sin(a)] \times [\cos(b) + i\sin(b)]$

$$\cos(a + b) + i\sin(a + b) = \cos(a)\cos(b) + i\cos(a)\sin(b) + i\sin(a)\cos(b)$$
$$+i^2\sin(a)\sin(b)$$

Donc $\cos(a + b) + i\sin(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \ + 1 - 1$

$$+i(\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)).$$

Par identification des parties réelles et parties imaginaires, on a :

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$$

$$\boxed{\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}$$

Exercice N°1.14 :

1) Montrons que $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

On sait que :

$$\cos\theta=\frac{Re(Q)}{|Q|}=\frac{1}{|Q|}\ \text{ et }\ \sin\theta=\frac{Im(Q)}{|Q|}=\frac{\sqrt{2}-1}{|Q|}$$

Alors $\cos\theta>0$ **et** $\sin\theta>0$ **d'où :** $\boxed{\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[}$

2) a) Montrons que $Q^2=2(\sqrt{2}-1)(1+i)$

On a : $Q^2=\left[1+(\sqrt{2}-1)i\right]^2=(1+(\sqrt{2}-1)i)(1+(\sqrt{2}-1)i)$

$$=1-(\sqrt{2}-1)^2+2i(\sqrt{2}-1)=1-(2-2\sqrt{2}+1)+2i(\sqrt{2}-1)$$

$$=-2+2\sqrt{2}+2i(\sqrt{2}-1)=2(\sqrt{2}-1)+2i(\sqrt{2}-1)$$

$$=2\left[(\sqrt{2}-1)+i(\sqrt{2}-1)\right]$$

Donc $\boxed{Q^2=2(\sqrt{2}-1)(1+i)}$

b) Forme trigonométrique

On a : $r=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[\sqrt{2}\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$

D'où $\boxed{r=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

c) Déduction de $\tan\frac{\pi}{8}$

Soit $|Q^2| = |2(\sqrt{2}-1)r| = |2(\sqrt{2}-1)| \times |r|$

$$= 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

$\Leftrightarrow |Q^2| = 4-2\sqrt{2}$, c'est-à-dire $|Q|^2 = 4-2\sqrt{2} \Leftrightarrow |Q| = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

Et $argQ^2 = arg[2(\sqrt{2}-1)r] = arg(2\sqrt{2}-2) + argr,$ avec $arg(2\sqrt{2}-2) = 0 + 2k\pi$

Car $2\sqrt{2}-2 > 0 \Rightarrow argQ^2 = \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire $2argQ = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow arQ = \frac{\pi}{8}$

D'où on a : $Q = \left[\sqrt{4-2\sqrt{2}}\,;\,\frac{\pi}{8}\right] = \sqrt{4-2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

Or : $Q = 1 + i(\sqrt{2}-1) = \sqrt{4-\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{2}}} + \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}i\right)$

Donc par analogie : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$

$$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right) \times \left(\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{1}\right)$$

$$\boxed{\text{Alors } \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1}$$

Exercice N°1.14 :

1) **Linéarisons $\sin^6 x$.**

$$\sin^6 x = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^6}{(2i)^6} = \frac{(e^{6ix}-6e^{5ix}\times e^{-ix}+15e^{4ix}\times e^{-2ix}-20e^{3ix}\times e^{-3ix}+15e^{2ix}\times e^{-4ix}-6e^{ix}\times e^{-5ix}+e^{-6ix})}{-64}$$

$$= \frac{(e^{6ix}+e^{-6ix})-6(e^{4ix}+e^{-4ix})+15(e^{2ix}+e^{-2ix})-20}{-64} = \frac{2\cos(6x)-6\times 2\cos(4x)+15\times 2\cos(2x)-20}{-64}$$

$$= \frac{-2\cos(6x)+12\cos(4x)-30\cos(2x)+20}{64} = -\frac{2\cos(6x)}{64} + \frac{12\cos(4x)}{64} - \frac{30\cos(2x)}{64} + \frac{20}{64}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sin^6 x = -\frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(4x) - \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}.}$$

2) **Démontrons que l'égalité : $(1+\cos x)^4(1-\cos x)^3 = \sin^6 x\,(1+\cos x)^3$.**

$$(1+\cos x)^4(1-\cos x)^3 = (1-\cos x)^3(1+\cos x)^3(1+\cos x)$$

$$= [(1-\cos x)(1+\cos x)]^3(1+\cos x) = \left(1-\cos^2 x\right)^3(1+\cos x) = \left(\sin^2 x\right)^3(1+\cos x)$$

Donc $\boxed{(1+\cos x)^4(1-\cos x)^3 = \sin^6 x\,(1+\cos x)}$

Exercice N°1.15 :

1) Trouvons les racines cubiques du nombre complexe suivant :

a) Soit $u = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $|a| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + (0)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ **et** $arga = \begin{cases}\cos\theta = -1 < 0\\ \sin\theta = 0\end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + 2k\pi.$

On a : $Z^3 = [\rho\,;\,\alpha]^3$. **Posons** $Z^3 = u \Rightarrow [\rho^3\,;3\alpha\,] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4};\,\pi\right] \Rightarrow \begin{cases}\rho^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\\ 3\alpha = \pi + 2k\pi\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\rho = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{4}}\\ \alpha = \frac{\pi+2k\pi}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right)^{1/3}\\ \alpha = \frac{\pi+2k\pi}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \alpha = \frac{\pi+2k\pi}{3}\end{cases}$$

D'où $Z_k = \rho e^{i\alpha}$ **avec** $k \in \{0\,;1;2\}$

Ainsi, les racines cubiques de $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ **sont :** $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}};\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi};\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$

Exercice N°1.16 :

Soit $Z = re^{i\theta}$ **ce nombre complexe tel que :** $Z^2 = \overline{Z^6} \Rightarrow r^2e^{i2\theta} = r^6e^{-i6\theta} \Rightarrow$

$$\begin{cases}r^2 = r^6\\ 2\theta = -6\theta + 2k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r = 1\\ 2\theta + 6\theta = 2k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r = 1\\ 8\theta = 2k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r = 1\\ \theta = \frac{k\pi}{4}\end{cases}$$

D'où $\boxed{Z_k = e^{i\frac{k\pi}{4}} \text{ avec } k \in Z.}$

Exercice.1.17 :

1) Résolution dans $\mathbb{C}$

$z^2+z+1=0$, $\Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3 \Longrightarrow \Delta=\left(i\sqrt{3}\right)^2$

D'où les racines de (E) sont : $z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors $\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{z_1\,;\,z_2\}}$

2) Démonstration des égalités

a) $j^3=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left[1\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]^3=\left[1\,;3\times\frac{2\pi}{3}\right]=[1\,;2\pi]=e^{2\pi}=e^0=1 \Longrightarrow \boxed{j^3=1}$

b) 1^{er} Méthode : Soit $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est solution de $(E) \Leftrightarrow j^2+j+1=0 \Leftrightarrow \boxed{j^2=-1-j}$

2^{ème} Méthode : $j^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=-1-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{j^2=-1-j}$$

3) Soit l'équation : $a+jb+j^2c=0$

$$\Longrightarrow a+jb+(-1-j)c=0$$

$$\Longrightarrow a+jb-c-jc=0$$

$$\Longrightarrow a-c=jc-jb$$

D'où : $\boxed{a-c=j(c-b)}$

a) On a : $a+jb+j^2c=0$

$$\Longrightarrow a+(-1-j^2)b+j^2c=0$$

$$\Longrightarrow a-b-j^2b+j^2c=0$$

$$\Longrightarrow a-b=j^2b-j^2c$$

D'où $\boxed{a-b=j^2(b-c)}$

Exercice N°1.18 :

1) Résolution dans $\mathbb{C}$

$\forall\, \alpha \in [-\pi, \pi]$ **On a :** (E) : $Z^2 - 4\sin\alpha\, Z + 4 = 0$, **avec** $b = -4\sin\alpha$, **donc la résolution de cette équation marche avec le discriminant réduit. Alors on a :**

$\Delta' = (-2\sin\alpha)^2 - 1 \times 4 = -4(1 - \sin^2\alpha) = -4\cos^2\alpha \Rightarrow \Delta' < 0$. **Alors l'équation** (E) **admet deux solutions complexes conjuguées définies par :**

$$\begin{cases} z_1 = 2\sin\alpha - i\sqrt{|-4\cos^2\alpha|} \\ z_2 = 2\sin\alpha + i\sqrt{|-4\cos^2\alpha|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -2i(\cos\alpha + i\sin\alpha) = -2ie^{i\alpha} \text{ ou } z_1 = 2e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \\ z_2 = 2i(\cos\alpha - i\sin\alpha) = 2ie^{-i\alpha} \text{ ou } z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \end{cases}$$

D'où $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{z_1\,; z_2\}}$

2) Soit l'équation, $3Z.\overline{Z} + 2iZ = \frac{7}{4} + i\ *$.

Notons $Z = x + iy$ **et** $\overline{Z} = \overline{x - iy} = x - iy$ **et** $Z.\overline{Z} = |Z|^2 = x^2 + y^2$.

Alors on a $3(x^2 + y^2) + 2i(x + iy) = \frac{7}{4} + i \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 2y + i(2x) = \frac{7}{4} + i \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2y = \frac{7}{4}\ (1) \\ 2x = 1\ (2) \end{cases}$. **D'après** (2), **on a :** $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ (3)$.

- **En remplaçant** (3) **dans** (1), **on a :** $\frac{3}{4} + 3y^2 - 2y = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 3y^2 - 2y + \frac{3}{4} - \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$3y^2 - 2y - 1 = 0$, **avec** $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3(-1) = 16 > 0$, **alors les racines de cette équation du second degré sont :** $y_1 = \frac{2-\sqrt{16}}{6} = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$ **et** $y_2 = \frac{2+\sqrt{16}}{6} = \frac{2+4}{6} = 1$.

D'où les racines ou solutions de l'équation * dans $\mathbb{C}$ sont : $\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i;\ \frac{1}{2} + i\right\}$

3) Soit l'équation suivante : $4Z^2 + 8|Z|^2 - 3 = 0$ ***.**

Posons $Z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$ **et** $|Z|^2 = x^2 + y^2$

On alors :

$$4(x^2-y^2+2ixy)+8(x^2+y^2)=3 \iff 4x^2-4y^2+8ixy+8x^2+8y^2=3 \iff$$

$$12x^2+4y^2-i(8xy)=3 \iff \begin{cases}12x^2+4y^2+8xy=3\\ 8xy=0\end{cases} \iff \begin{cases}12x^2+4y^2+8xy=3 \ (1)\\ xy=0 \quad (2)\end{cases}$$

D'après (2), on a : $xy=0 \iff \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

- Pour $x=0$ dans (1), on a : $4y^2=3 \iff y^2=\frac{3}{4}$ c'est-à-dire : $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Pour $y=0$ dans (1), on a : $12x^2=3 \iff x^2=\frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{1}{2}$

D'où les solutions de cette équation * dans $\mathbb{C}$ sont : $\left\{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

4) Soit l'équation suivante : $Z^2-2\overline{Z}+1=0$

Notons : $Z^2=(x+iy)(x+iy)=x^2-y^2+i2xy$ et $\overline{Z}=\overline{x+iy}=x-iy$

On a alors : $x^2-y^2+2ixy-2(x-iy)+1=0 \iff x^2-y^2+2ixy-2x+2iy=-1$

$$\iff x^2-y^2-2x+iy(2x+2)=-1 \iff \begin{cases}x^2-y^2-2x=-1 \ (1)\\ y(2x+2)=0 \quad (2)\end{cases}$$

D'après (2) , On a : $y(2x+2)=0 \iff \begin{cases}2x+2=0\\ y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}$

- Pour $x=-1$ dans (1), on a : $1-y^2+2=-1 \iff -y^2=-4 \iff y^2=4$

  C'est-à-dire : $y=2$ ou $y=-2$
- Pour $y=0$ dans (1), on a : $x^2-2x=-1 \iff x^2-2x+1=0$, soit une équation de second degré, alors $\Delta=(-2)^2-4\times1\times1=4-4=0$, d'où cette équation de second degré, admet une solution double $x_1=x_2=-\frac{-2}{2}=1$.

D'où les solutions de l'équation * dans $\mathbb{C}$ sont : $\{1;\ -1+2i;\ -1-2i\}$

5) Résolution de l'équation $Z+3\overline{Z}=(2+i\sqrt{3})|Z|$

Notons $Z=|Z|e^{i\theta}$ et $\overline{Z}=|Z|e^{-i\theta}$

On a alors : $|Z|e^{i\theta}+3|Z|e^{-i\theta}=(2+i\sqrt{3})|Z| \Leftrightarrow |Z|(e^{i\theta}+3e^{-i\theta})=(2+i\sqrt{3})|Z| \Leftrightarrow$

$e^{i\theta}+3e^{-i\theta}=2+i\sqrt{3} \Leftrightarrow (\cos\theta+i\sin\theta)+3(\cos\theta-i\sin\theta)=2+i\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$4\cos\theta-2i\sin\theta=2+i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos\theta=2 \\ -2i\sin\theta=i\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta=\frac{1}{2} \\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Et par conséquent $Z=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **. D'où** $\boxed{S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$

6) Soit l'équation : $Z^2-2i\overline{Z}=0$ ***.**

Notons : $Z^2=(x+iy)(x+iy)=x^2-y^2+2ixy$ **et** $\overline{Z}=\overline{x+iy}=x-iy$.

On a alors : $x^2-y^2+2ixy-2i(x-iy)=0 \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy-2ix-2y=0 \Leftrightarrow$

$x^2-y^2-2y+i2x(y-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-2y=0 & (1) \\ 2x(y-1)=0 & (2) \end{cases}$

D'après (2)**, on a :** $2x(y-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

- **Pour** $x=0$ **dans** (1)**, on a :** $-y^2-2y=0 \Leftrightarrow y(-y-2)=0 \Leftrightarrow y=0$ **ou** $y=-2$
- **Pour** $y=1$ **dans** (1)**, on a :** $x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ **ou** $x=-\sqrt{3}$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation * dans ℂ est :

$$\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{0;-2i;\sqrt{3}+i;\ -\sqrt{3}+i\}}$$

Exercice N°1.19 :

Trouvons dans l'ensemble ℂ des nombres complexes les nombres Z_1, Z_2 **et** Z_3 **.**

Soit le système d'équation suivant : $\begin{cases} Z_1+Z_2=-3+i & (1) \\ i\overline{Z_2}=1-2i & (2) \\ Z_2\times Z_3=-1-2i & (3) \end{cases}$

D'après (2)**, on a :** $i\overline{Z_2}=1-2i \Leftrightarrow i\overline{Z_2}=i(-2-i) \Leftrightarrow \overline{Z_2}=-2-i \Leftrightarrow$

$Z_2 = \overline{-2-i} = -2+i$ (4) . En remplaçant (4) dans (1) et (3), on obtient

$$\begin{cases} Z_1 - 2 + i = -3 + i \\ (-2+i)Z_3 = -1-2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = -3+2 \\ i(1+2i)Z_3 = -(1+2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = -1 \\ iZ_3 = i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = -1 \\ Z_3 = i \end{cases}$$

D'où $\boxed{\begin{cases} Z_1 = -1 \\ Z_2 = -2+i \\ Z_3 = i \end{cases} \text{ dans } \mathbb{C}}$

Exercice N°1.20 :

Soit le système d'équations suivant $\begin{cases} Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1 = S \ (1) \\ Z_1.Z_2.Z_3 = 1 = P \quad (2) \end{cases}$. D'après la formule de Viète,

on a : $\begin{cases} Z^3 - SZ^2 + DZ - P = 0 \\ avec\ D = Z_1(Z_2+Z_3) + Z_2.Z_3 \end{cases}$. De (1) et (2) On a : $\begin{cases} Z_2 + Z_3 = S - Z_1 = 1 - Z_1 \\ Z_2.Z_3 = \frac{P}{Z_1} = \frac{1}{Z_1} \end{cases} \Rightarrow$

$D = Z_1(1 - Z_1) + \frac{1}{Z_1}$. Or on sait que $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = 1$, on peut donc supposé que $Z_1 = 1$.

D'où $D = 1(1-1) + \frac{1}{1} = 1$. Ainsi on a l'équation de degré 3 suivante : $Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0$

- Cherchons sa racine évidente exacte

  Essayons avec $Z = 1 \Rightarrow (1)^3 - (1)^2 + (1) - 1 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

  Donc 1 est la racine évidente exacte de cette équation.

  Posons $Z^3 - Z^2 + Z - 1 = (Z-1)(aZ^2 + bZ + c)$

- Utilisons la méthode de Horner pour déterminer les réels a, b, c

	1	−1	1	−1
1		1	0	1
	1	0	1	0

D'où $a = 1$; $b = 0$, et $c = 1 \Rightarrow Z^3 - Z^2 + Z - 1 = (Z-1)(Z^2+1)$

Comme $Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0$ alors $(Z-1)(Z^2+1) = 0 \Leftrightarrow Z - 1 = 0$ ou $Z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$Z = 1$ ou $Z^2 = -1 \Leftrightarrow Z = 1$ ou $Z^2 = i^2$ c'est-à-dire $Z = 1$ ou $Z = i$ ou encore $Z = -i$

$\boxed{\text{D'où les solutions de l'équation } Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0 \text{ dans } \mathbb{C} \text{ sont : } \{1; i; -i\}}$

telles que : $\boxed{Z_1 = 1\ ;\ Z_2 = i \text{ et } Z_3 = -i\,.}$

Exercice N°1.21 :

1) Ecrivons Z sous forme trigonométrique

Soit $Z = -8\sqrt{3} + 8i$, $|Z| = \sqrt{\left(-8\sqrt{3}\right)^2 + (8)^2} = \sqrt{\left(64\sqrt{9}\right) + (64)} = \sqrt{256} = 16$ et

$$arg(Z) = \begin{cases} \cos\theta = -\frac{8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \\ \sin\theta = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)[2\pi] = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

D'où $\boxed{Z = 16\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

2) Racines carrées de Z sous forme trigonométrique

Soit $Z = -8\sqrt{3} + 8i$. Posons $[\rho\,;\alpha]^2 = [|Z|; arg(Z)]$

Alors $[\rho;\ \alpha]^2 = \left[16\,;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 16 \\ 2\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 4 \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Par conséquent $Z_k = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $k \in \{0\,;1\}$.

D'où les racines carrées de Z sont telles que :

- Pour $k = 0 \Rightarrow \boxed{Z_0 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).}$
- Pour $k = 1 \Rightarrow \boxed{Z_1 = 4\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)}.$

3) * Calculons u^2

$$u^2 = \left[\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 + 2i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2$$

$$= \left(6 - 4\sqrt{3} + 2\right) + 2i(6 - 2) - \left(6 + 4\sqrt{3} + 2\right)$$

D'où $\boxed{u^2 = -8\sqrt{3} + 8i\,,\ \text{soit}\ \ u^2 = Z\,.}$

- **Forme algébrique des racines carrées de Z**

Comme $u^2 = Z \Longrightarrow \sqrt{Z} = \pm u \Longrightarrow \boxed{\sqrt{Z} = \pm\left((\sqrt{6}-\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right)}$

4) Valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ **et** $\sin\frac{5\pi}{12}$

Comme $\frac{5\pi}{12} \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12} > 0\\ \sin\frac{5\pi}{12} > 0\end{cases}$

D'après 2) et 3) on obtient par comparaison : $\begin{cases}4\cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{6}-\sqrt{2}\\ 4\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{6}+\sqrt{2}\end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}}$

- **Déduisons celles de** $\cos\frac{7\pi}{12}$ **et** $\sin\frac{7\pi}{12}$

On a : $\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right)\\ \sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right)\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\pi\,.\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\pi\,.\sin\frac{5\pi}{12}\\ \sin\frac{7\pi}{12} = \sin\pi\,.\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\pi\,.\sin\frac{5\pi}{12}\end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12} = -\cos\frac{5\pi}{12}\\ \sin\frac{7\pi}{12} = \sin\frac{5\pi}{12}\end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}}$

<u>Exercice N°1.22</u> :

Soit le polynôme $f(Z) = Z^3 + (2-i)Z^2 + qZ - 4$

1) Déterminons le réel q **tel que le polynôme** $f(Z)$ **soit divisible par** $Z+2$.

On a :

$$\begin{array}{l|l}
Z^3+(2-i)Z^2+qZ\ -4 & Z+2 \\ \cline{2-2}
- & Z^2-iZ-2 \\
\underline{Z^3-2Z^2} & \\
\quad -iZ^2+\ qZ & \\
\quad - & \\
\underline{\quad -iZ^2-2iZ} & \\
\qquad (q+2i)Z-4 & \\
\quad - \quad -2Z-4 & \\ \cline{1-1}
(q+2+2i)Z \quad \Rightarrow q+2+2i=0 \Rightarrow \boxed{q=-2-2i} &
\end{array}$$

2) **Résolution dans $\mathbb{C}$**

On a $f(Z)=0 \Leftrightarrow (Z+2)(Z^2-iZ-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z=-2 \ \ (1) \\ Z^2-iZ-2=0 \ \ (2) \end{cases}$

D'après (2), $\Delta=(-i)^2-4\times1\times(-2)=7 \Rightarrow \Delta>0$, alors l'équation (2), admet deux solutions distinctes Z_1 et Z_2 définies par :

$$Z_1=\frac{i-\sqrt{7}}{2}=-\frac{\sqrt{7}}{2}+i\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad Z_2=\frac{i+\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}+i\frac{1}{2}$$

D'où l'ensemble des solutions du polynôme $f(Z)=0$ est : $\boxed{S_{\mathbb{C}}=\left\{-2\,;-\frac{\sqrt{7}}{2}+i\frac{1}{2};\frac{\sqrt{7}}{2}+i\frac{1}{2}\right\}}$

Exercice N°1.23 :

1) Montrons que le nombre complexe $Z=\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=-e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

$$Z=\frac{1-e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{12}}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-1\right)}{e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\times e^{-i\frac{\pi}{12}}-1\right)}=\frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-1\right)}{\left(e^{i\frac{\pi}{12}}-1\right)}=\frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-1\right)}{-e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-1\right)}=\frac{1}{-e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

Alors $\boxed{Z=-e^{-i\frac{\pi}{12}}}$

Calculons le module de Z.

$$|Z|=\left|-e^{-i\frac{\pi}{12}}\right|=\left|-1\times e^{-i\frac{\pi}{12}}\right|=|-1|\times\left|e^{-i\frac{\pi}{12}}\right|=e^{-i\frac{\pi}{12}}\Leftrightarrow\boxed{|Z|=1.}$$

2) Forme algébrique de l’affixe Z_K de K

$$Z_K=\frac{Z_A+Z_C}{2}=\frac{1+e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}=\frac{1+\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2}=\frac{1+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)}{2}$$

D’où $\boxed{Z_K=\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i=\frac{1}{4}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)+i\right]}$.

3) Montrons que : $Z_K=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$.

$$Z_K=\frac{1+e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\times e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{12}}\left(2e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)}=\frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right)}{2}\times e^{i\frac{\pi}{12}}=\frac{\left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right]}{2}\times$$

$$e^{i\frac{\pi}{12}}=\frac{\left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{2}\times e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Alors $\boxed{Z_K=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}}$.

4) Vérifions que $\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

On a : $\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}\Rightarrow\left(\sqrt{8+4\sqrt{3}}\right)^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$

$$\Rightarrow 8+4\sqrt{3}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\ \Rightarrow\ 8+4\sqrt{3}=\sqrt{4}+2\sqrt{12}+\sqrt{36}$$

$$\Rightarrow 8+4\sqrt{3}=8+4\sqrt{3}$$

Par conséquent $\boxed{\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

<u>Exercice N°1.24</u> :

1° a) Résolution du système d'inconnue complexe :

$$\begin{cases} iz_1 - z_2 = -\left(\sqrt{3}+1\right)+2i \\ z_1 - iz_2 = i\left(\sqrt{3}-1\right) \end{cases} \underset{\times(i)}{\Longrightarrow} \begin{cases} iz_1 - z_2 = -\left(\sqrt{3}+1\right)+2i \\ z_1 - iz_2 = i\left(\sqrt{3}-1\right) \end{cases} \Rightarrow 2iz_1 = -2\sqrt{3}+2i \Rightarrow$$

$\boxed{z_1 = 1+i\sqrt{3}}$ (3). **En remplaçant (3) dans (2) : on a :** $1+i\sqrt{3}-iz_2 = i\left(\sqrt{3}-1\right) \Rightarrow$

$$i\left[-i+\sqrt{3}-z_2\right] = i\left(\sqrt{3}-1\right) \Rightarrow -z_2 = \sqrt{3}-\sqrt{3}-1+i \Rightarrow \boxed{z_2 = 1-i}$$

D'où les solutions de ce système dans $\mathbb{C}$ sont : $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1-i$

b) Calcul du produit $z_1.z_2$

$$z_1 \times z_2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i) = \left(1-i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}\right) = \boxed{\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)}$$

2° a) Module et un argument de z_A, z_B et z_C

- **Pour z_A :** $|z_A| = \sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = \boxed{2}$ et $argz_A / \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\boxed{argz_A = \theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]}$

Pour z_B : $|z_B| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$ et $argz_B = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{argz_B = \theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]}$

- **Pour z_C :** $z_C = z_A \times z_B \Rightarrow |z_c| = |z_A \times z_C| = |z_A| \times |z_B| = \boxed{2\sqrt{2}}$ et

$$argz_C = argz_A + argz_B = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi] \Rightarrow \boxed{argc = \frac{\pi}{12}[2\pi]}$$

b) Montrons que la distance $AC = 2$

$$AC = |z_C - z_A| = \left|\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right| = \left|\sqrt{3}-i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} = \boxed{2}$$

c) Interprétation géométriquement :

$|z-(1-i)| = |z-z_B|$ **Représente la distance BM**

$\left|z-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right| = |z-z_A|$ **Représente la distance AM**

d) Détermination de l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M d'affixe z dans chaque cas ci-après :

$\left|z-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right| = |z-(1-i)| \Leftrightarrow AM = BM$ **Alors l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M est la médiatrice du segment $[AB]$**

$|z-(1-i)| = 2 \Leftrightarrow BM = 2.$ **Alors l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M est le cercle de centre $B(1\,;-1)$ et de rayon $R = 2$.**

Exercice N°1.25 :

1) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

$$z = [\rho;\ \alpha] \quad ; \quad z^3 = 1 \Leftrightarrow \left[\rho^3; 3\alpha\right] = [1; 0] \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\alpha = 0[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

tel que on a : $k \in \{0; 1; 2\}$ et $z_k = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

D'où les solutions de (E) sont telles que :

Pour la valeur $k = 0 \Longrightarrow z_0 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = \boxed{1}$

Pour $k = 1 \Longrightarrow z_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Pour $k = 2 \Longrightarrow z_2 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$

2) Déduisons les solutions de (E')

Soit z une solution de l'équation (E). Alors $z^3 = 1$.

On en déduit que d'après $z'^3 = i^3$ on a : $\left(\frac{z\prime}{i}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 = 1$ telle que : $\frac{z\prime}{i} = z$

D'où les solutions de l'équation (E') sont donc le produit de la valeur i fois les solutions de l'équation (E).

C'est-à-dire : $z'_0 = iz_0 = i$; $z'_1 = iz_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; $z'_2 = iz_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

3) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E'')

Soit z' une solution de l'équation (E). Alors $z'^3 = 1$.

On en déduit que d'après l'équation $(2z'' + i)^3 - i^3 = 0$ on a : $z'^3 = i^3 \Leftrightarrow z'^3 = 1$ telle que :

$2z'' + i = z'$. D'où les solutions de l'équation (E'') forment un rapport dont le numérateur est la différence entre les solutions de l'équation (E') et la valeur de i et le dénominateur vaut 2.

C'est-à-dire : $z_0'' = \frac{z_0' - i}{2} = 0$; $z_1'' = \frac{z_1' - i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{3}{4}$; $z_2'' = \frac{z_2' - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{3}{4}$

4) Montrons que $z_3 = z_1 + z_2$ est imaginaire pur

On a : $$z_3 = z_1 + z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{3}{4} = \frac{-3i - 3i}{4} \Longrightarrow \boxed{z_3 = -\frac{3}{2}i \in i\mathbb{R}}$$

<u>Exercice N°1.26</u> :

1) Résolution dans $\mathbb{C}$ de $f(Z) = 0$

$$\Delta = (\sin 2\theta)^2 - 4(\sin^2\theta)(1 + \cos^2\theta) = 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^2\theta(1 + \cos^2\theta)$$

$$= 4\sin^2\theta\left[\cos^2\theta - 1 - \cos^2\theta\right] = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{-\sin 2\theta - 2i\sin\theta}{2\sin^2\theta} \\ Z_2 = \frac{-\sin 2\theta + 2i\sin\theta}{2\sin^2\theta} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Z_1 = \frac{-2\sin\theta\cos\theta - 2i\sin\theta}{2\sin^2\theta} \\ Z_2 = \frac{-2\sin\theta\cos\theta + 2i\sin\theta}{2\sin^2\theta} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} Z_1 = -\frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta + i) \\ Z_2 = -\frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta - i) \end{cases} \text{ dans } \mathbb{C}}$$

2) Vérifions que $Z_1^2 + Z_2^2 = -2$

$$Z_1^2 + Z_2^2 = \left[-\frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta + i)\right]^2 + \left[-\frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta - i)\right]^2$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\cos^2\theta - 1 - 2i\cos\theta + \cos^2\theta - 1 + 2i\cos\theta\right] = -\frac{2}{\sin^2\theta}\left[1 - \cos^2\theta\right]$$

Or $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta \Longrightarrow Z_1^2 + Z_2^2 = -\frac{2}{\sin^2\theta}(\sin^2\theta)$

D'où $\boxed{Z_1^2 + Z_2^2 = -2}$

3) On sait que a et b sont les racines de $f(Z) \Leftrightarrow f(a) = 0$ et $f(b) = 0$

D'où $f(a) = f(b)$

Exercice N°1.27 :

Nature et éléments caractéristiques des transformations

a) $z' = -z + 2 + i$, **comme** $a = -1$ **c'est une symétrie centrale de centre** $z_\Omega = \frac{2+i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$

b) $z' = z + 3 - i$, **comme** $a = 1$, **c'est donc une translation de vecteur** $\vec{u}\binom{3}{-1}$

c) $z' = -\frac{3}{2}z + 5i$, **comme** $a \neq 1$, **c'est une homothétie de centre Ω tel que** $Z_\Omega = \frac{5i}{1+\frac{3}{2}} = 2i$ **et**

de rapport $-\frac{3}{2}$

d) $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)z + 2i$, **comme** $|a| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{|1+i\sqrt{3}|}{|4|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq 1$ **, c'est donc une similitude**

plane directe de centre Ω tel que $Z_\Omega = \frac{2i}{1-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{8i}{3-i\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$ **; de rapport** $\frac{1}{2}$ **et d'angle** $\frac{\pi}{3}$

e) $z' = (1-i)z + 1$, **comme** $|a| = |1-i| = \sqrt{2} \neq 1$, **c'est donc une similitude plane directe de**

centre Ω tel que $Z_\Omega = \frac{1}{1-1+i} = -i$ **; de rapport** $\sqrt{2}$ **et d'angle** $-\frac{\pi}{4}$

f) $z' = iz + 3$, **comme** $|a| = |i| = 1$, **c'est donc une rotation de centre Ω tel que**

$Z_\Omega = \frac{3}{1-i} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ **et d'angle** $\frac{\pi}{2}$

g) $z' = (-\sqrt{2})z$, **comme** $a \neq 1$, **alors c'est une homothétie de centre O et de rapport** $-\sqrt{2}$

Exercice N°1.28 :

Déterminons l'ensemble des points M d'affixe Z.

a) $|\overline{Z} - 2 + i| = 4$, $|\overline{Z} - 2 + i| = |Z - 2 - i|$

Posons $A(2+i)$; $|Z - Z_A| = 4 \Leftrightarrow AM = 4$.

D'où l'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 4.

b) $|Z+1-i|=|Z-6|$. **Posons** $A(-1+i)\,;B(6)$, $|Z-Z_A|=|Z-Z_B| \Leftrightarrow AM=BM$.

D'où l'ensemble cherché est la médiatrice de $[AB]$.

c) $\arg Z \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow mes\,(\vec{u};\overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{4}[2]$.

D'où l'ensemble cherché est la demi-droite ouverte d'origine O et passant par le point d'affixe

$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$.

d) $\arg(z+i) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z-(-i)) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Notons $A(-i) \Leftrightarrow \arg(z-z_B) \equiv mes\,(\vec{u};\overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

En outre : $z_A+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=-i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

D'où l'ensemble des points recherchés est la demi-droite ouverte de $]AB)$ où A et B désignent

les points d'affixes respectives $z_A=-i$ **et** $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

e) $\arg\left(\frac{Z-2-i}{Z-1+i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z-(2+i)}{Z-(1-i)}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Posons $A(1-i), B(2+i)$, $\arg\left(\frac{Z-Z_B}{Z-Z_A}\right) \equiv mes\,(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

D'où l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $]AB[$ (diamètre privé des points A et B)

f) $\arg(Z^2-3) \equiv \arg(Z+3)[2\pi] \Leftrightarrow \arg(Z-3) \equiv 0[2\pi]$.

Notons $A(3)$, l'ensemble cherché est la demi-droite de repère $(A,\overrightarrow{e_1})$, ensemble des points

$M\binom{x}{y}$ **tels que :** $y=0$ **et** $x>3$.

<u>Exercice N°1.29</u> :

Montrons que le triangle ABC est un triangle équilatéral.

- $AC = |z_C - z_A| = \left|\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$
- $AB = |z_B - z_A| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$
- $BC = |z_C - z_B| = \left|\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$

On constate que les distances $AB = BC = AC \Longrightarrow ABC$ est bien un triangle équilatéral.

Exercice N°1.30 :

1) Déterminons les nombres a, b et c tels que l’on ait : $P(Z) = \left[a\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 + b\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + c\right]$.

$$P(Z) = 2Z^4 - 6Z^3 + 9Z^2 - 6Z + 2$$

$$= Z^2\left[2Z^2 - 6Z + 9 - \frac{6}{Z} + \frac{2}{Z^2}\right]$$

$$= Z^2\left[2\left(Z^2 + \frac{1}{Z^2}\right) - 6\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + 9\right]$$

$$= Z^2\left[2\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - 6\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + 9\right]$$

$$= Z^2\left[2\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - 4 - 6\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + 9\right]$$

$$= Z^2\left[2\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - 6\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + 5\right]$$

En tenant compte de la condition posée, on en déduit par comparaison que : $\boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = 5 \end{cases}.}$

2) Résolution dans $\mathbb{C}$

Soit l’équation suivante : $2Z^2 - 6Z + 5 = 0$. $\Delta' = (-3)^2 - 2 \times 5 = -1 \Longrightarrow \Delta' < 0$, alors cette équation admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions conjuguées définies par :

$$Z_1 = \frac{3 - i\sqrt{|-1|}}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{3 + i\sqrt{|-1|}}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{1}{2}$$

D'où $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{z_1\,;z_2\}.}$

3) Résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$

On pose $t = \left(z + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow\ 2t^2 - 6t + 5 = 0,$

- **Si** $t = \frac{1}{2}(3 - i) \Rightarrow \frac{Z^2+1}{Z} = \frac{3-i}{2} \Rightarrow 2Z^2 - (3 - i)Z + 2 = 0,$ **∃ d'une nouvelle équation de second degré, alors on a :** $\Delta = (-3 + i)^2 - 4 \times 2 \times (2) = -8 - 6i = (1 - 3i)^2$

  D'où cette équation admet deux solutions définies par :

  $Z' = \frac{3-i-(1-3i)}{4} = \frac{1}{2}(1 + i)$ **et** $Z'' = \frac{3-i+(1-3i)}{4} = 1 - i$

- **Si** $t = \frac{1}{2}(3 + i), \Rightarrow \frac{Z^2+1}{Z} = \frac{3+i}{2} \Rightarrow 2Z^2 - (3 - i) + 2 = 0,$ **or on remarque que cette deuxième nouvelle équation n'est que l'équation conjuguée de la première, de ce fait, on peut déduire que ces solutions dans $\mathbb{C}$ sont donc conjuguées à celles de la première équation,**

  D'où on a : $Z_1{}' = \overline{Z'} = \frac{1}{2}\overline{(1 + i)} = \frac{1}{2}(1 - i)$ **et** $Z_2{}' = \overline{Z} = \overline{(1 + i)} = 1 - i$

  Alors l'ensemble des solutions de l'équation $P(Z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ est défini par :

  D'où $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{1}{2}(1 - i);\ (1 - i);\ \frac{1}{2}(1 + i);\ (1 + i)\right\}.}$

Exercice N°1.31 :

a) Posons $S = \sin A + \sin B + \sin C$

On sait que $A + B + C = \pi$; **donc** $C = \pi - (A + B)$ **ou** $A + B = \pi - C$

Donc $S = \sin A + \sin B + \sin[\pi - (A + B)],$ **or** $\sin(\pi - x) = sinx \Rightarrow$

$$S = \sin A + \sin B + \sin(A + B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right] = 2\sin\left(\frac{\pi-C}{2}\right)\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right] = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right]$$

Avec $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,\Rightarrow$ $\boxed{S=2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right]=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

b) Posons $S'=\cos A+\cos B+\cos C$

$$S'=\cos A+\cos B+\cos[\pi-(A+B)],\ \text{or}\ \cos(\pi-x)=-\cos x\Rightarrow$$

$$S'=\cos A+\cos B-\cos(A+B)=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\left[2\cos^2\frac{A+B}{2}-1\right]$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1=1+2\cos\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$=1+2\cos\left(\frac{\pi-C}{2}\right)\left[2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right]=1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\left[2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right]$$

Avec $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,\Rightarrow$ $\boxed{S'=1+2\sin\frac{C}{2}\left[2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

Exercice N°1.32 :

1) Déterminons $b,\ c,\ d$

1^er^ Méthode :

$$f(i)=0\iff(i)^3+b(i)^2+c(i)+d=0\iff d-b=i(1-c)\ \ (1)$$

$$f(-1)=-8i+16\iff(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)+d=-8i+16\iff b+d=c+17-8i\ \ (2)$$

$$f(1)=8+16i\iff(1)^3+b(1)^2+c(1)+d=8+16i\iff b+d=7+16i-c\ \ (3)$$

En remplaçant (3) dans $(2)\Rightarrow 7+16i-c=c+17-8i$

$$\Rightarrow 2c=-10+24i$$

$$\Rightarrow c=-5+12i\ \ (4)$$

D'où (3) dévient $b+d=12+4i$

$$\Rightarrow\ b=12+4i-d\ (5)$$

En remplaçant (4) et (5) dans $(1)\Rightarrow d-(12+4i-d)=i\big(1-(-5+12i)\big)$

$$\Rightarrow d - 12 - 4i + d = i(1 + 5 - 12i)$$

$$\Rightarrow 2d = i(6 - 12i) + 12 + 4i$$

$$\Rightarrow 2d = 6i + 12 + 12 + 4i$$

$$\Rightarrow d = 12 + 5i \ \ (6)$$

D'après $(5) \Rightarrow b = 12 + 4i - (12 + 5i) \Rightarrow b = 12 + 4i - 12 - 5i \Rightarrow b = -i$

Par conséquent $\boxed{\begin{cases} b = -i \\ c = -5 + 12i \\ d = 12 + 5i \end{cases}}$

2ème Méthode :

D'après (3) **on a :** $f(1) = 8 + 16i \Leftrightarrow b + c + d = 7 + 16i$

D'après (2) **on a :** $f(-1) = -8i + 16 \Leftrightarrow b - c + d = 17 - 8i$

D'après (1) **on a :** $f(i) = 0 \Leftrightarrow -i - b + ic + d = 0$

D'où le système suivant : $\begin{cases} b + c + d = 7 + 16i \\ b - c + d = 17 - 8i \\ -b + ic + d = i \end{cases}$

Soit le déterminant principal du système est :

$$det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & i & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ i & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & i \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1 - i) - 1(1 + 1) + 1(i - 1) = -4$$

$$det(S) = -4$$

Soit $det(b) = \begin{vmatrix} 7 + 16i & 1 & 1 \\ 17 - 8i & -1 & 1 \\ i & i & 1 \end{vmatrix}$

$$= (7 + 16i) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ i & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 17 - 8i & 1 \\ i & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 17 - 8i & -1 \\ i & i \end{vmatrix}$$

$$= (7+16i)(-1-i) - 1(17-8i-i) + 1(17i+8+i)$$

$$= -7-7i-16i+16-17+9i+18i+8$$

$$det(b) = 4i \Rightarrow b = \frac{det(b)}{det(S)} = \frac{4i}{-4} = -i$$

$$det(c) = \begin{vmatrix} 1 & 7+16i & 1 \\ 1 & 17-8i & 1 \\ -1 & i & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 17-8i & 1 \\ i & 1 \end{vmatrix} - (7+16i) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 17-8i \\ -1 & i \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (17-8i-i) - (7+16i)(1+1) + 1 \times (i+17-8i)$$

$$= 17-9i-7i-14-32i+i+17-8i$$

$$det(c) = 20-48i \Rightarrow c = \frac{det(C)}{det(S)} = \frac{20-48i}{-4} = -5+12i$$

$$det(d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7+16i \\ 1 & -1 & 17-8i \\ -1 & i & i \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 17-8i \\ i & i \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 17-8i \\ -1 & i \end{vmatrix} + (7+16i) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & i \end{vmatrix}$$

$$= 1(-i-17i-8) - 1(i+17-8i) + (7+16i)(i-1)$$

$$= -18i-8+7i-17+7i-7-16-16i$$

$$det(d) = -48-20i \Rightarrow d = \frac{det(d)}{det(S)} = \frac{-48-20i}{-4} = 12+5i$$

D'où : $\boxed{\begin{cases} b = -i \\ c = -5+12i \\ d = 12+5i \end{cases}}$

2) Résolution dans $\mathbb{C}$

On suppose que :

$$f(Z) = Z^3 - iZ^2 + (-5+12i)Z + 12 + 5i = (Z-i)\left(Z^2 + bZ + c\right)$$

$$= Z^3 + bZ^2 + cZ - iZ^2 - ibZ - ic$$

$$= Z^3 + (b - i)Z^2 + (c - ib)Z - ic$$

Par identification on a : $\begin{cases} Z^3 = Z^3 \\ (b-i)Z^2 = -iZ^2 \\ (c-ib)Z = (-5+12i)Z \\ -ic = 12+5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - i = -i \\ c - ib = -5 + 12i \\ -ic = -i(12i - 5) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -5 + 12i \end{cases} \Leftrightarrow Z^3 - iZ^2 + (-5+12i)Z + 12 + 5i = (Z - i)\left(Z^2 - 5 + 12i\right)$$

Posons $f(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z - i)\left(Z^2 - 5 + 12i\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z - i = 0 \\ Z^2 - 5 + 12i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = i \quad (1) \\ Z^2 = 5 - 12i \quad (2) \end{cases}$

D'après $(2) \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |5 - 12i| \\ x^2 - y^2 = Re(5-12i) = 5 \\ 2xy = Im(5 - 12i) = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \quad (*) \\ x^2 - y^2 = 5 \quad (*') \\ 2xy = -12 \quad (*'') \end{cases}$

En faisant $(*) + (*')$, on obtient : $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

En faisant $(*) - (*')$, on obtient : $2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = -2$

D'après $(*'')$, on a : $2xy = -12 \Leftrightarrow xy = -6 < 0$

Donc x et y ont le signe contraire, alors les racines carrées de Z sont :

$Z_2 = 3 - 2i$ et $Z_3 = -3 + 2i$

D'où les solutions de l'équation $f(Z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont : $Z_1 = i$, $Z_2 = 3 - 2i$, $Z_3 = -3 + 2i$

Exercice N°1.33 :

Soient Z_1, Z_2 et Z_3 trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 1 - i\sqrt{3}$ et dont leur somme est $-3\sqrt{3}$.

De plus, on sait que la suite géométrique obéit à la relation suivante : $Z_{n+1} = qZ_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

D'où le système d'équations : $\begin{cases} Z_1 + Z_2 + Z_3 = -3\sqrt{3} \\ Z_2 = qZ_1 \\ Z_3 = qZ_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 + Z_2 + Z_3 = -3\sqrt{3} & (1) \\ Z_2 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)Z_1 & (2) \\ Z_3 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)Z_2 & (3) \end{cases}$

En remplaçant (2) dans (3), on obtient : $Z_3 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 Z_1 \Leftrightarrow Z_3 = \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)Z_1 \;\; (4)$.

En remplaçant (2) et (4) dans (1), on a :

$$Z_1 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)Z_1 + \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)Z_1 = -3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \; Z_1\left[1 + \left(1 - i\sqrt{3}\right) + \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)\right] = -3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad Z_1\left(1 + 1 - i\sqrt{3} - 2 - 2i\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow Z_1\left(-3i\sqrt{3}\right) = 3i^2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow Z_1 = -i \;\; (5)$$

En remplaçant (5) dans (2) et (4), on obtient : $\begin{cases} Z_2 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)(-i) \\ Z_3 = \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)(-i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_2 = -\sqrt{3} - i \\ Z_3 = -2\sqrt{3} + 2i \end{cases}$

D'où : $\boxed{\begin{cases} Z_1 = -i \\ Z_2 = -\sqrt{3} - i \\ Z_3 = -2\sqrt{3} + 2i \end{cases}}$

2) Calculons $\left(3\sqrt{3} - i\right)Z_1$, $2\overline{Z_2} + Z_2$ **et** $Z_2 \times \overline{Z_2}$

* $\left(3\sqrt{3} - i\right)Z_1 = \left(3\sqrt{3} - i\right)(-i) = -3i\sqrt{3} + i^2 \Longrightarrow \boxed{\left(3\sqrt{3} - i\right)Z_1 = -1 - 3i\sqrt{3}}$

* $2\overline{Z_2} + Z_2 = 2\overline{\left(-\sqrt{3} - i\right)} + \left(-\sqrt{3} - i\right) = 2\left(-\sqrt{3} + i\right) + \left(-\sqrt{3} - i\right) = \boxed{-3\sqrt{3} + i}$

* $Z_2 \times \overline{Z_2} = \left(-\sqrt{3} - i\right)\overline{\left(-\sqrt{3} - i\right)} = \left(-\sqrt{3} - i\right)\left(-\sqrt{3} + i\right) = 3 - i\sqrt{3} + i\sqrt{3} - i^2 = \boxed{4}$

3) Formons une équation de degré 3 dont Z_1, Z_2 et Z_3 sont solutions

On peut prendre le polynôme de degré 3 le polynôme : $(Z - Z_1)(Z - Z_2)(Z - Z_3)$.

On peut remarquer que : $Z_3 = -2\sqrt{3} + 2i = 2\left(-\sqrt{3} + i\right) = 2\overline{Z_2}$,

On a alors :

$$(Z - Z_1)(Z - Z_2)(Z - Z_3) = (Z - Z_1)(Z - Z_2)\left(Z - 2\overline{Z_2}\right)$$

$$= (Z - Z_1)\left[Z^2 - \left(2\overline{Z_2} + Z_2\right)Z + 2Z_2\overline{Z_2}\right]$$

$$= (Z - Z_1)\left[Z^2 + \left(3\sqrt{3} - i\right)Z + 8\right]$$

$$= Z^3 + \left(3\sqrt{3} - i\right)Z^2 + 8Z - Z_1Z^2 - \left(3\sqrt{3} - i\right)Z_1Z - 8Z_1$$

$$= Z^3 + 3\sqrt{3}Z^2 - iZ^2 + 8Z + iZ^2 - \left(-1 - 3i\sqrt{3}\right)Z + 8i$$

$$\boxed{\Rightarrow (Z - Z_1)(Z - Z_2)(Z - Z_3) = Z^3 + 3\sqrt{3}Z^2 + \left(9 + 3i\sqrt{3}\right)Z + 8i}$$

Exercice N°1.34 :

Ecriture complexe de la transformation f

1) f est la translation de vecteur $\vec{u}(1 + 2i)$.

*** Or par définition on a :** $Z' = Z + Z_{\vec{U}} \Rightarrow \boxed{Z' = Z + 1 + 2i}$.

2) f est l'homothétie de centre $I(1 + i)$ et de rapport -2.

*** Or par définition on a :** $Z' - I = k(Z - I) \Rightarrow Z' - 1 - i = -2(Z - 1 - i) \Rightarrow$

$Z' = -2Z + 2 + 2i + 1 + i \Rightarrow \boxed{Z' = -2Z + 3 + 3i}$

3) f est la rotation de centre $K(2 - i)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

*** Or par définition on a :** $Z' - K = e^{i\theta}(Z - K) \Rightarrow Z' - 2 + i = e^{i\frac{\pi}{4}}(Z - 2 + i) \Rightarrow$

$Z' = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)Z - \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(2 - i) + 2 - i \Rightarrow$

$Z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)Z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2 - i) + 2 - i \Rightarrow \boxed{Z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)Z - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)}$

4) f est la similitude plane directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport $k = 2$.

*** Or par définition on a :** $Z' - O = ke^{i\theta}(Z - O) \Rightarrow Z' - 0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}(Z - 0) \Rightarrow$

$Z' = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)Z \Rightarrow Z' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)Z \Rightarrow \boxed{Z' = \left(\sqrt{3} + i\right)Z}$

5) f **est la similitude plane directe de centre** $\Omega(2i)$**, d'angle** $\frac{2\pi}{3}$ **et de rapport** $k = \frac{1}{2}$

*** Or par définition on a :** $Z' - Z_\Omega = \mathrm{k}e^{\mathrm{i}\theta}(Z - Z_\Omega) \Rightarrow Z' - 2i = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}(Z - 2i) \Rightarrow$

$$Z' = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)Z - \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)i + 2i \Rightarrow$$

$$Z' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i + 2i \Rightarrow \boxed{Z' = \left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)Z + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{5}{2}}$$

Exercice N°1.35 :

1) Déterminons le réel Z_0

$$Z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z + 4\sqrt{3} - 2i \Leftrightarrow Z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z + 4\sqrt{3} - 4i + 2i \Leftrightarrow Z' - 2i = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 4i\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow Z' - 2i = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 4i\left[2\,;\,\frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow Z' - 2i = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 4i\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \Leftrightarrow Z' - 2i = 4e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - 2i)$$

En tenant compte de la condition posée dans l'exercice, on en déduit que par analogie :

$$\boxed{Z_0 = 2i}$$

2) Démontrons que f **est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre**

1er Méthode :

Connaissant que $Z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z + 4\sqrt{3} - 2i$

On a donc : $Z' = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)Z + 4\sqrt{3} - 2i$

$$= 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + 4\sqrt{3} - 2i$$

$\Rightarrow Z' = \left(2 + 2i\sqrt{3}\right)Z + 4\sqrt{3} - 2i$ **est de la forme** $Z' = aZ + b$

Alors par comparaison, on a : $a = 2 + 2i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow k = \left|2 + 2i\sqrt{3}\right| = 2\left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 \times 2 \Rightarrow k = |a| = 4 \neq 1.$$

D'où f est une similitude plane directe et de plus $Z' - Z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_0)$ où $Z_0 = 2i$

Vérifie la relation $Z' - Z_0 = ke^{i\theta}(Z - Z_0)$ d'après la question 1)

Par conséquent f est bien la composée d'une homothétie de rapport 4 et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de même centre $Z_0 = 2i$.

$2^{\text{ème}}$ Méthode :

On a : $Z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z + 4\sqrt{3} - 2i$

$\Leftrightarrow Z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z + 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3i + i$

$\Leftrightarrow Z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 3i(1 + i\sqrt{3}) + \sqrt{3} + i$

$\Leftrightarrow Z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 3i\left[2\,;\,\frac{\pi}{3}\right] + \sqrt{3} + i$

$\Leftrightarrow Z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 3i\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + \sqrt{3} + i$

$\Leftrightarrow Z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 6ie^{i\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3} + i$

$\Leftrightarrow Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(4Z - 6i) + \sqrt{3} + i$

Posons $Z_1 = h(Z) = 4Z - 6i \Rightarrow \quad Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z_1 + \sqrt{3} + i$

$\Leftrightarrow f = \mathcal{R}[h] = \mathcal{R}oh.$

Par Conséquent f est bien la composée d'une homothétie de rapport 4 et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- **Centre de l'homothétie h :**

  On a : $Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-6i}{1-4} = \frac{-6i}{-3} = 2i \Rightarrow \Omega(0; 2)$

- **Centre de la rotation :**

On a : $Z_{\Omega'} = \frac{(\sqrt{3}+i)}{1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(\sqrt{3}+i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2i}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2i \Longrightarrow \Omega'(0;2)$

Alors l'homothétie et la rotation ont le même centre $2i$.

Exercice N°1.36 :

1) Déterminons l'écriture complexe de φ

On a : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x' + iy' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + i(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3})$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + ix\sqrt{3} + iy - i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = (x + iy) + i\sqrt{3}(x + iy) + 2\sqrt{2} - i\sqrt{3}$$

Notons $Z' = x' + iy'$ et $Z = x + iy$

$\Longrightarrow \boxed{Z' = Z + i\sqrt{3}Z + 2\sqrt{2} - i\sqrt{3} = (1 + i\sqrt{3})Z + 2\sqrt{2} - i\sqrt{3}}$

2) Nature de φ

Soit $a = 1 + i\sqrt{3} \Longrightarrow |a| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \neq 1$.

Alors φ est une similitude plane directe

Eléments caractéristiques de φ

- Le rapport : $k = |a| = \boxed{2}$
- L'angle : $\theta = arg(1 + i\sqrt{3}) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} > 0 \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\theta = arga = \frac{\pi}{3}[2\pi]}$
- Le centre : $Z_{\Omega} = \frac{b}{1-a} = \frac{2\sqrt{2}-i\sqrt{3}}{1-1-i\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{2}-i\sqrt{3})(i\sqrt{3})}{(-i\sqrt{3})(i\sqrt{3})} = \frac{2i\sqrt{6}+3}{(\sqrt{3})^2} = \frac{3+2i\sqrt{6}}{3} = \boxed{1 + i\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

3) Nature de φ^{-1}

φ^{-1} étant la réciproque de $\varphi \Longrightarrow \varphi^{-1}$ est aussi une similitude plane directe

Eléments caractéristiques de φ^{-1} :

- **Le rapport :** $k' = \frac{1}{k} \Longrightarrow \boxed{k' = \frac{1}{2}}$
- **L'angle :** $\theta' = -\theta = -arga \Longrightarrow \boxed{\theta' = -\frac{\pi}{3}[2\pi]}$
- **Le centre ou point invariant :** $\boxed{Z_\Omega = 1 + i\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

Ecriture complexe de φ^{-1} :

$$Z' - Z_\Omega = k'e^{i\theta'}(Z - Z_\Omega) \Longrightarrow Z' - 1 - i\frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(Z - 1 - i\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \Longrightarrow$$

$$Z' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(Z - 1 - i\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + 1 + i\frac{2\sqrt{6}}{3} = \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)Z + \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(-1 - i\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + 1 + i\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\Longrightarrow Z' = \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)Z - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{6}}{6} + 1 + i\frac{2\sqrt{6}}{3} = \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)Z + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

D'où $\boxed{Z' = \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)Z + \frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{2}) + i\frac{1}{4}(\sqrt{3} + 2\sqrt{6})}$

<u>Exercice N°1.37</u> :

1) a) Forme trigonométrique de z_A

$$z_A = 1 - i,\ |z_A| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\ \ et\ \ argz_A = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \end{cases} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Par conséquent $\boxed{z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).}$

b) Déduction

$$(1-i)^{2016} = \left[\sqrt{2}\,; -\frac{\pi}{4}\right]^{2016} = \left[\sqrt{2}^{2016}\,; -2016 \times \frac{\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}^{2016}\,; -504\pi\right]$$

$$= \sqrt{2}^{2016}[\cos(504\pi) - i\sin(504\pi)] = \left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^{1008}[\cos(504\pi) - i\sin(504\pi)]$$

$$= 2^{1008}[1 - i(0)] \Longrightarrow \boxed{(1-i)^{2016} = 2^{1008} \in \mathbb{R}}$$

2) a) Forme algébrique

$$\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+\sqrt{3}+3i+i\sqrt{3}-1}{1^2-(i)^2}=\frac{1+\sqrt{3}+3i+i\sqrt{3}}{2}$$

$$=\boxed{\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}}$$

b) Déduisons que : $\frac{Z_B}{Z_A}=\left[1+\sqrt{3}\,;\frac{\pi}{3}\right]$.

Soit $\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, $\left|\frac{Z_B}{Z_A}\right|=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(3+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Or $4+2\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow\left|\frac{Z_B}{Z_A}\right|=1+\sqrt{3}$ et $mes(\overrightarrow{OA};\,\overrightarrow{OB})=\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}>0\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}>0\end{cases}\Rightarrow$

$\theta=mes(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$. $\boxed{\text{Alors}\quad\frac{Z_B}{Z_A}=\left[1+\sqrt{3}\,;\frac{\pi}{3}\right]}$

c) Ecriture trigonométrique de z_B

On sait que : $\frac{Z_B}{Z_A}=\left[1+\sqrt{3}\,;\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow z_B=\left[1+\sqrt{3}\,;\frac{\pi}{3}\right]\times z_A=\left[1+\sqrt{3}\,;\frac{\pi}{3}\right]\times\left[\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]$

$$=\left[(1+\sqrt{3})(\sqrt{2})\,;\,\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right]$$

D'où : $\boxed{z_B=\left[\sqrt{6}+\sqrt{2}\,;\,\frac{\pi}{12}\right]\quad\text{ou}\quad z_B=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$

d) Valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

En comparant la forme algébrique de $z_B=2+\sqrt{3}+i$ et celle trouvée trigonométriquement

d'après c), on obtient : $\begin{cases}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}\\ (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin\frac{\pi}{12}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\\ \sin\frac{\pi}{13}=\frac{(1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}}$$

e) Résolution dans $[-\pi;\pi]$

Soit l'équation $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x=2$, **avec** $\begin{cases} a=\sqrt{6}+\sqrt{2} \\ b=\sqrt{6}-\sqrt{2} \\ c=2 \end{cases}$

En posant : $Z=a+ib=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \Rightarrow \begin{cases} |Z|=4 \\ \theta=argZ=\frac{\pi}{12}+2k\pi \end{cases}$

D'où l'équation : $\cos(x-\theta)=\frac{c}{|Z|} \Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **c'est-à-dire :**

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \\ x=\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}+2k\pi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$$

D'où $\boxed{S=\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi\,;\,-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\}}$

3) Déterminons l'ensemble des points M **d'affixe** z **non nul tel que :** $\frac{iz-i-1}{z}$ **soit réel**

On a : $\frac{iz-i-1}{z}=\frac{i(x+iy)-i-1}{x+iy}=\frac{-y-1+i(x-1)}{x+iy}=\frac{[-y-1+i(x-1)](x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{(-y-1)(x-iy)+i(x-1)(x-iy)}{x^2+y^2}$

$=\frac{-xy+iy^2-x+iy+ix^2+xy-ix-y}{x^2+y^2}=\frac{-x-y+i(x^2-x+y^2+y)}{x^2+y^2}$

D'où $\frac{iz-i-1}{z}=\frac{-x-y}{x^2+y^2}+i\frac{x^2-x+y^2+y}{x^2+y^2}$. **Avec** $Re\left(\frac{iz-i-1}{z}\right)=\frac{-x-y}{x^2+y^2}$ **et** $Im\left(\frac{iz-i-1}{z}\right)=\frac{x^2-x+y^2+y}{x^2+y^2}$

Or $\frac{iz-i-1}{z}$ **est réel** $\Leftrightarrow Im\left(\frac{iz-i-1}{z}\right)=0$, **c'est-à-dire** $x^2-x+y^2+y=0 \Leftrightarrow$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc l'ensemble des points cherchés est le cercle de centre $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ **et de rayon** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>ExerciceN°1.38</u> :

Soit $Z=z^2+z-\bar{z}$ **où** $z\in\mathbb{C}$

1) Trouvons les nombres complexes z **tels que :** $Z=2i$.

On a : $Z=(x+iy)^2+(x+iy)-\overline{(x+iy)}=x^2+2ixy-y^2+x+iy-x+iy$

$$= x^2 - y^2 + i(2xy + 2y) = x^2 - y^2 + 2iy(x+1)$$

Avec $Z = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2y(x+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \ ou\ x = -y \\ y(x+1) = 1 \end{cases}$

- 1^{er} cas : $\begin{cases} x = y \\ y(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x & (1) \\ x(x+1) = 1 & (2) \end{cases}$

  En considérant (2) , on a : $x^2 + x - 1 = 0$; $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$

  $\Rightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

  D'où $z = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}(1+i)$ ou $z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}(1+i)$

- $2^{ème}$ cas : $\begin{cases} x = -y \\ y(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x & (1) \\ -x(x+1) = 1 & (2) \end{cases}$

  En considérant (2) , on a : $x^2 + x + 1 = 0$; $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ impossible, car $x \in \mathbb{R}$

Conclusion : Les complexes z sont donc : $-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(1+i)$ ou $\frac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i)$

2) On rappelle que $Z = z^2 + z - \overline{z}$

a) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0$, c'est-à-dire $2y(x+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -1$.

D'où l'ensemble (E_1) est la réunion des deux droites $D_1 : y = 0$ et $D_2 : x = -1$;

$\boxed{E_1 = D_1 \cup D_2}$

b) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}\text{é}(Z) = 0$, c'est-à-dire $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

Soit $\Delta_1 : x - y = 0$ et $\Delta_2 : x + y = 0$. D'où l'ensemble $\boxed{E_2 = \Delta_1 \cup \Delta_2}$

<u>Exercice N°1.39</u> :

1) Détermination de la transformation f associé à S.

Soit S la similitude plane directe de centre $I(-3;-2)$ et qui transforme le point $A(1;2)$ en $B(5;-2)$.

$\forall z \in \mathbb{C};\ f(z) = az + b$

On a donc : $\begin{cases} \frac{b}{1-a} = z_I \\ z_B = az_A + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{1-a} = -3-2i \\ 5-2i = a(1+2i)+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1-i \\ b = 2-3i \end{cases}$

$\boxed{\text{D'où } f(z) = (1-i)z + 2 - 3i}$

2) Eléments caractéristiques de S

On a : $k = |1-i| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Et $arg(1-i) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc S est une similitude plane directe de centre $I(-3;-2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'argument $-\frac{\pi}{4}$

3) Equation de la droite (D')

Soit la droite (D') image de la droite (D) par S

Connaissant que la droite (D) passe par le point A et a pour vecteur directeur $\vec{U}(1;-2)$

$\Rightarrow$ la droite (D') passe donc par le point $B(5;\ -2)$, puisque $S(A) = B$ et a pour coefficient directeur le vecteur $\vec{V}(-1;-3)$.

Ainsi, on a donc : $M(x,y) \in (D') \Leftrightarrow det(\overrightarrow{BM};\vec{v}) = 0$

C'est-à-dire : $\begin{vmatrix} x - x_B & x_{\vec{V}} \\ y - y_B & y_{\vec{V}} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & -1 \\ y+2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow -3(x-5) + (y+2) = 0$

$\Leftrightarrow -3x + 15 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow -3x + y + 17 = 0$

D'où $\boxed{(D') :\ -3x + y + 17 = 0\ ou\ 3x - y - 17 = 0.}$

<u>Exercice N°1.40</u> :

Soit $z = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

1) Montrons que z est une racine cinquième de l'unité.

On a : $z^5 = \left[1;\ \frac{2\pi}{5}\right]^5 = \left[1; 5 \times \left(\frac{2\pi}{5}\right)\right] = [1; 2\pi] = (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 1$

Donc z est bien une racine cinquième de l'unité.

2) Vérifions que $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = z + \frac{1}{z}$

D'après la formule d'Euler on a : $\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} = \cos\alpha \Rightarrow z + \frac{1}{z} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}} \Rightarrow$

$$\boxed{z + \frac{1}{z} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),}\quad \text{car } \begin{cases} e^{i\frac{2\pi}{5}} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{cases}$$

3) Soit $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{Z^5-1}{Z-1}$ et comme $z^5 = 1$ d'après la question 1)

$$\boxed{\Rightarrow z^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0\,.}$$

4) Déduisons que $z + \frac{1}{Z}$ est une solution d'une équation du second degré qu'il faut déterminer

1^er^ Méthode :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ z\left(\frac{1}{Z} + 1 + z + z^2 + z^3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{Z} + 1 + z + z^2 + \frac{Z^3}{Z^5} = 0\,,\ \text{car } \begin{cases} z \neq 0 \\ z^5 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \left(z + \frac{1}{Z}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{Z^2}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(z + \frac{1}{Z}\right) + \left(z + \frac{1}{Z}\right)^2 - 2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{Z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{Z}\right) - 1 = 0$$

En posant $z+\frac{1}{z}=t$, on obtient l'équation ci-contre : $t^2+t-1=0$.

Par conséquent $z+\frac{1}{z}$ est une solution de l'équation du second degré $t^2+t-1=0$.

2$^{\text{ème}}$ Méthode :

$$1+z+z^2+z^3+z^4=0$$

$$\Leftrightarrow 1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0$$

$$\Leftrightarrow 1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}=0$$

$$\Leftrightarrow 1+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)+\left(e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\left[2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{Z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{Z}\right)-1=0\ ,\quad \text{car } z+\frac{1}{Z}=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

En posant $z+\frac{1}{z}=t$, on obtient l'équation ci-contre : $t^2+t-1=0$

Par conséquent, $z+\frac{1}{Z}$ est une solution de l'équation du second degré : $t^2+t-1=0$

5) Déduisons $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Soit $\left(z+\frac{1}{Z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{Z}\right)-1=0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=0\ *$$

On a dans ce cas, $\Delta'=(1)^2-(4)(-1)=1+4=5>0$

$\Longrightarrow$ **les racines de l'équation * sont :** $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ **et** $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Et comme $\frac{2\pi}{5} \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ **alors** $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$. **D'où** $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Exercice N°1.41 :

1) Résolution dans $\mathbb{C}$

$$2z - \overline{z} + 1 + 6i = 0 \Longrightarrow 2(x+iy) - \left(\overline{x+iy}\right) + 1 + 6i = 0 \Longrightarrow 2x + 2iy - (x - iy) = -1 - 6i$$

$$\Longrightarrow x + 3iy = -1 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 3iy = -6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ iy = -2i \end{cases} \Leftrightarrow x + iy = -1 - 2i \Leftrightarrow \ z = -1 - 2i \ \text{ ou}$$

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-1 - 2i\}}$$

2) a) Montrons que l'écriture complexe de $\mathcal{S}$ **est :** $z' = (1 - i)z + 2 - i$

Par définition $z' = az + b$ **: Recherchons** a **et** b **:**

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = C \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases} \underset{\times(-1)}{\Longrightarrow} \begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases} \Longrightarrow a = \frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B} = \frac{(-1-2i) - (-1-6i)}{(-1-2i) - (1-4i)}$$

$$\Longrightarrow$$

$a = 1 - i\ (3)$, **En remplaçant** (3) **dans** (2), **on obtient** $b = 2 - i$

$\boxed{\text{D'où l'écriture complexe de } \mathcal{S} \text{ est } z' = (1 - i)z + 2 - i}$

b) Déterminons le rapport k **et l'angle de mesure** θ **de** $\mathcal{S}$

* **rapport** k **:** $k = |a| \Longrightarrow k = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{2}}$

* **angle de mesure :** $arga = \theta / \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]}$

c) Montrons que pour tout $M, z' - z = -i(z - z_A)$

On sait que : $z' = (1 - i)z + 2 - i \Longrightarrow z' = z - iz + 2 - i \Longrightarrow z' - z = -iz + 2 - i$ **Or**

$2 = -2i^2 \Rightarrow z' - z = -iz - 2i^2 - i \Rightarrow z' - z = -i(z + 2i + 1) \Rightarrow$

$z' - z = -i[z - (-1 - 2i)] \Leftrightarrow \boxed{z' - z = -i(z - z_A)}$

d) Déduisons la nature du triangle $MM'A$

On sait que : $z' - z = -i(z - z_A) \Leftrightarrow \frac{z'-z}{z-z_A} = \frac{\overrightarrow{MM\prime}}{\overrightarrow{AM}} - i \Rightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'}}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Alors le triangle $MM'A$ est rectangle isocèle en M

3° a) Plaçons les points A, B, C, D dans le plan complexe * (facile à faire).

b) Montrons que les droites (AD) et (BC) sont parallèles

$(AD) \,//\, (BC) \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 0.$

$\overrightarrow{AD} = z_D - z_A = 1 - (-1 - 2i) = 2 + 2i$ et $\overrightarrow{BC} = z_C - z_B = -1 - 6i - (1 - 4i) = -2 - 2i$

$\Rightarrow det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-4) = 0$

Donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Exercice N°1.42 :

1) a) Justification

Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $Z' = 3iZ - 1 - 7i$

Obéit à la relation $Z' = aZ + b$. **Donc** $a = 3i \Rightarrow |a| = |3i| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} = 3 \neq 1$.

Alors S est une similitude plane directe

Eléments caractéristiques

- **Le rapport :** $k = |a| = \boxed{3}$
- **L'angle :** $\theta = arga = \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta = arga = \frac{\pi}{2}[2\pi]}$

- Le centre : $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-7i}{1-3i} = \frac{(-1-7i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-1-10i+21}{1+9} = \frac{20-10i}{10} = \boxed{2-i}$

b) Expression analytique de S

$Z' = 3iZ - 1 - 7i$. Notons $Z' = x' + iy'$ et $Z = x + iy$.

$$\Longrightarrow \quad x' + iy' = 3i(x+iy) - 1 - 7i$$

$$= 3ix - 3y - 1 - 7i$$

$$= -3y - 1 + i(3x - 7)$$

Par identification, on obtient le résultat ci-contre : $\boxed{\begin{cases} x' = -3y - 1 \\ y' = 3x - 7 \end{cases}}$

2) Equation de l'image par S de la droite (BC)

Pour déterminer cette équation, il suffit de trouver en premier les points B et C tels que :

- $Z_{B'} = 3iZ_B - 1 - 7i = 3i(2) - 1 - 7i = 6i - 1 - 7i = -1 - i$
- $Z_{C'} = 3iZ_C - 1 - 7i = 3i(3 - i) - 1 - 7i = 9i + 3 - 1 - 7i = 2 + 2i$

Alors $(B'C')$ a pour équation : $\frac{x - x_{B'}}{x_{C'} - x_{B'}} = \frac{y - y_{B'}}{y_{C'} - y_{B'}} \Longrightarrow \frac{x+1}{2+1} = \frac{y+1}{2+1} \Longrightarrow x + 1 = y + 1$

D'où $\boxed{y = x}$

3) Equation du cercle (C') image de (C)

Soit le cercle (C) d'équation : $(x-2)^2 + y^2 = 1$ a pour centre $B(2\,;0)$ et de rayon $R = 1$

Alors (C') a pour centre $B'(-1;\,-1)$ et de rayon $R' = k \times R = 3 \times 1$

D'où son équation est : $\boxed{(x+1)^2 + (y+1)^2 = 3^2}$

Exercice N°1.43 :

1) Montrons que $(1+i)^6 = -8i$

$$(1+i)^6 = \left[(1+i)^2\right]^3 = [(1+i)(1+i)]^3 = (1+2i-1)^3 = (2i)^3$$

$$= (2i)(2i)(2i)$$

D'où : $\boxed{(1+i)^6 = -8i}$

2) Soit l'équation $(E) : z^2 = -8i$.

a) Déduisons de 1) une équation de (E)

Posons : $z_1{}^2 = -8i$, **avec** $-8i = (1+i)^6$ **d'après 1)** $\Rightarrow z_1{}^2 = (1+i)^6 \Rightarrow z_1{}^2 = \left[(1+i)^2\right]^3$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{[(1+i)^2]^3} \Rightarrow z_1 = \left[\left[(1+i)^3\right]^2\right]^{1/2} \Rightarrow z_1 = \left[(1+i)^3\right]^{2\times 1/2} \Rightarrow z_1 = (1+i)^3 \Rightarrow$

$z_1 = (1+i)^2(1+i) \Rightarrow z_1 = 2i(1+i) \Rightarrow \boxed{z_1 = -2+2i}$

b) Ecrivons l'autre solution de (E) **sous forme algébrique**

L'équation $(E) : z^2 = -8i$ **admet l'autre solution** $z_2 \Leftrightarrow z_1 \times z_2 = 8i$

$\Rightarrow (-2+2i)z_2 = 8i \Rightarrow z_2 = \frac{4i}{(-1+i)} = \frac{4i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{4-4i}{1+1} = \frac{2}{2}(2-2i)$

D'où l'autre solution de l'équation (E) **est :** $\boxed{z_2 = 2-2i}$.

3) Déduisons de 1) une solution de l'équation $(E') : z^3 = -8i$.

Posons $z_1{}^3 = -8i$. **Avec** $-8i = (1+i)^6$ **d'après 1)** $\Rightarrow z_1{}^3 = (1+i)^6 \Rightarrow z_1{}^3 = \left[(1+i)^2\right]^3$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{[(1+i)^2]^3} \Leftrightarrow z_1 = \left[(1+i)^2\right]^{3\times 1/3} \Rightarrow z_1 = (1+i)^2 \Rightarrow \boxed{z_1 = 2i}$.

4) On considère le point A **d'affixe** $2i$ **et la rotation de centre** O **et d'angle** $\frac{2\pi}{3}$

a) Soit $r(A) = B$; $r(B) = C$ **et** $r\left\{O\,;\,\theta = \frac{2\pi}{3}\right\}$

On a donc : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

- $\Rightarrow z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A \Rightarrow z_B = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) z_A = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2i) = \boxed{-\sqrt{3} - i}$
- $\Rightarrow z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B \Rightarrow z_C = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) z_B = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} - i)$

$$\Rightarrow z_C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\sqrt{3} - i}$$

b) Montrons que z_B et z_C sont solutions de (E')

z_B et z_C sont solutions de $(E) \Leftrightarrow {z_B}^3 = -8i$ et ${z_C}^3 = -8i$.

On a donc :

- ${z_B}^3 = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3 = (-\sqrt{3} - i)^2(-\sqrt{3} - i) = \left[3 + 2i\sqrt{3} - 1\right]\left(-\sqrt{3} - i\right)$

$$= 2\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3} - i\right) = 2\left(-\sqrt{3} - i - 3i + \sqrt{3}\right)$$

D'où $\boxed{{z_B}^3 = -8i \Rightarrow \ B \text{ est une solution de } (E')\,.}$

- ${z_C}^3 = \left(\sqrt{3} - i\right)^3 = (\sqrt{3} - i)^2(\sqrt{3} - i) = \left[3 - 2i\sqrt{3} - 1\right]\left(\sqrt{3} - i\right)$

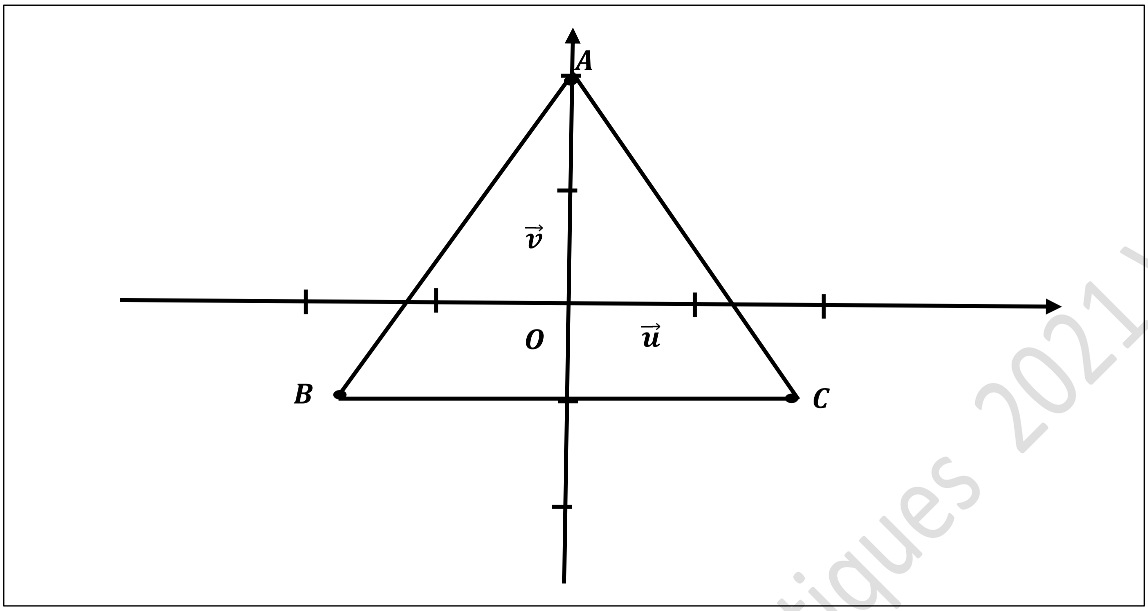
$$= 2\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - i\right) = 2\left(\sqrt{3} - i - 3i - \sqrt{3}\right)$$

D'où $\boxed{{z_C}^3 = -8i \Rightarrow C \text{ est une solution de } (E')}$

5)

a) représentation des points

Soients $A(0\,;2)$; $B\left(-\sqrt{3}\,;\,-1\right)$ **et** $C\left(\sqrt{3};-1\right)$



b) **Nature du triangle**

$$AB = |z_B - z_A| = |-\sqrt{3} - i - 2i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |\sqrt{3} - i - 2i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-\sqrt{3} - i - \sqrt{3} + i| = |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

On constate que $AB = AC = BC \Longrightarrow ABC$ est un triangle équilatéral.

c) Centre de gravité du triangle ABC

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (z_A - z_O) + (z_B - z_O) + (z_C - z_O)$$

$$= (\sqrt{3} - \sqrt{3}) + i(2 - 2)$$

$\Longrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. D'où O est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice N°1.44 :

1) Résolution dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation $Z^2 + (2 - 3i\sqrt{2})Z - (4 + 2i\sqrt{2}) = 0$

On a : $\Delta = \left(2-3i\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)\left(-4-2i\sqrt{2}\right) = 4-12i\sqrt{2}-18+16+8i\sqrt{2} = 2-4i\sqrt{2}$

$\Rightarrow |\Delta| = \left|2-4i\sqrt{2}\right| = \sqrt{(2)^2+\left(-4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+32} = \sqrt{36} = 6$

Alors $\sqrt{\Delta} = \pm = \left(\sqrt{\frac{6+2}{2}} - i\sqrt{\frac{6-2}{2}}\right) = \pm\left(2-i\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \Delta = \pm\left(2-i\sqrt{2}\right)^2$

Par conséquent les solutions de cette équation sont définies par :

$Z_1 = \frac{-(2-3i\sqrt{2})-(2-i\sqrt{2})}{2} = -2+2i\sqrt{2}$ et $Z_2 = \frac{-(2-3i\sqrt{2})-(-2+i\sqrt{2})}{2} = i\sqrt{2}$ D'où $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{Z_1;\ Z_2\}}$

2) Soit le point $M(x,y)$ associé au point $M'(x,y)$ tel que : $Z' = i\sqrt{2}.\overline{Z} - 2 + 2i\sqrt{2}$.

a) f étant de la forme $Z' = a\overline{Z} + b$, avec $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = \left|i\sqrt{2}\right| = \sqrt{(0)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{Alors } f \text{ est une similitude plane indirecte, puisque } |a| \neq 1.}$

b) Rapport k de f : on a $k = |a| \Rightarrow k = \boxed{\sqrt{2}}$

c) L'affixe Z_Ω de son centre Ω : on a $Z_\Omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-k^2} = \frac{i\sqrt{2}(-2-2i\sqrt{2})-2+2i\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{-2i\sqrt{2}+4-2+2i\sqrt{2}}{1-2} = \boxed{-2}$

d) Montrer que $(\mathcal{D})$ a pour équation cartésienne : $y = x+2$

Soit $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Rightarrow Z' - Z_\Omega = k(Z - Z_0)$

$\Rightarrow i\sqrt{2}.\overline{Z} - 2 + 2i\sqrt{2} + 2 = \sqrt{2}(Z+2) \Rightarrow i\sqrt{2}(x-iy) + 2i\sqrt{2} = \sqrt{2}(x+iy) + 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow i\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2i\sqrt{2} = \sqrt{2}x + i\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}y + i\left(\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + i\left(\sqrt{2}y\right)$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} y = x+2 \\ x+2 = y \end{cases} \Rightarrow y = x+2$.

D'où la droite $\mathcal{D}$ a pour équation : $\boxed{y = x+2}$.

Exercice N°1.45 :

1) Soit le polynôme $P(Z) = Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 16$

a) Montrons que si $P(Z_0) = 0$ **alors** $P(\overline{Z_0}) = 0$ **où** $\overline{Z_0}$ **est le conjugué de** Z_0

On a : $P(\overline{Z_0}) = \overline{Z_0}^3 - 6\overline{Z_0}^2 + 12\overline{Z_0} - 16$

$$= \overline{Z_0^3} - \overline{6Z_0^2} + \overline{12Z_0} - \overline{16}$$

$$= \overline{Z_0^3 - 6Z_0^2 + 12Z_0 - 16}$$

$P(\overline{Z_0}) = \overline{P(Z_0)}$. $\boxed{\text{Par conséquent : si } P(Z_0) = 0 \text{ alors } P(\overline{Z_0}) = \overline{0} = 0}$

b) Calculons $P(1 + i\sqrt{3})$

- $P(1 + i\sqrt{3}) = (1 + i\sqrt{3})^3 - 6(1 + i\sqrt{3})^2 + 12(1 + i\sqrt{3}) - 6$

$$= (1 + 2i\sqrt{3} - 3)(1 + i\sqrt{3}) - 6(1 + 2i\sqrt{3} - 3) + 12 + 12i\sqrt{3} - 6$$

$$= 18 - 18 + i(12\sqrt{3} - 12\sqrt{3})$$

$$\boxed{\Rightarrow P(1 + i\sqrt{3}) = 0}$$

- **Factorisons** $P(Z)$

Connaissant que $Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ **est une racine de** $P(Z), \Rightarrow$ $\overline{Z_0} = 1 - i\sqrt{3}$ **est aussi une racine de** $P(Z)$ **:**

Alors $P(Z) = (Z - 1 - i\sqrt{3})(Z - 1 + i\sqrt{3})(aZ + b)$

$$= (Z^2 + 2Z + 4)(aZ + b)$$

$$P(Z) = aZ^3 + (b - 2a)Z^2 + (4a - 2b)Z + 4b$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} aZ^3 = 6Z^3 \\ (b-2a)Z^2 = -6Z^2 \\ (4a-2b)Z = 12Z \\ 4b = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b-2a = -6 \\ 4a-2b = 12 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = 1 \text{ et } b = -4}$$

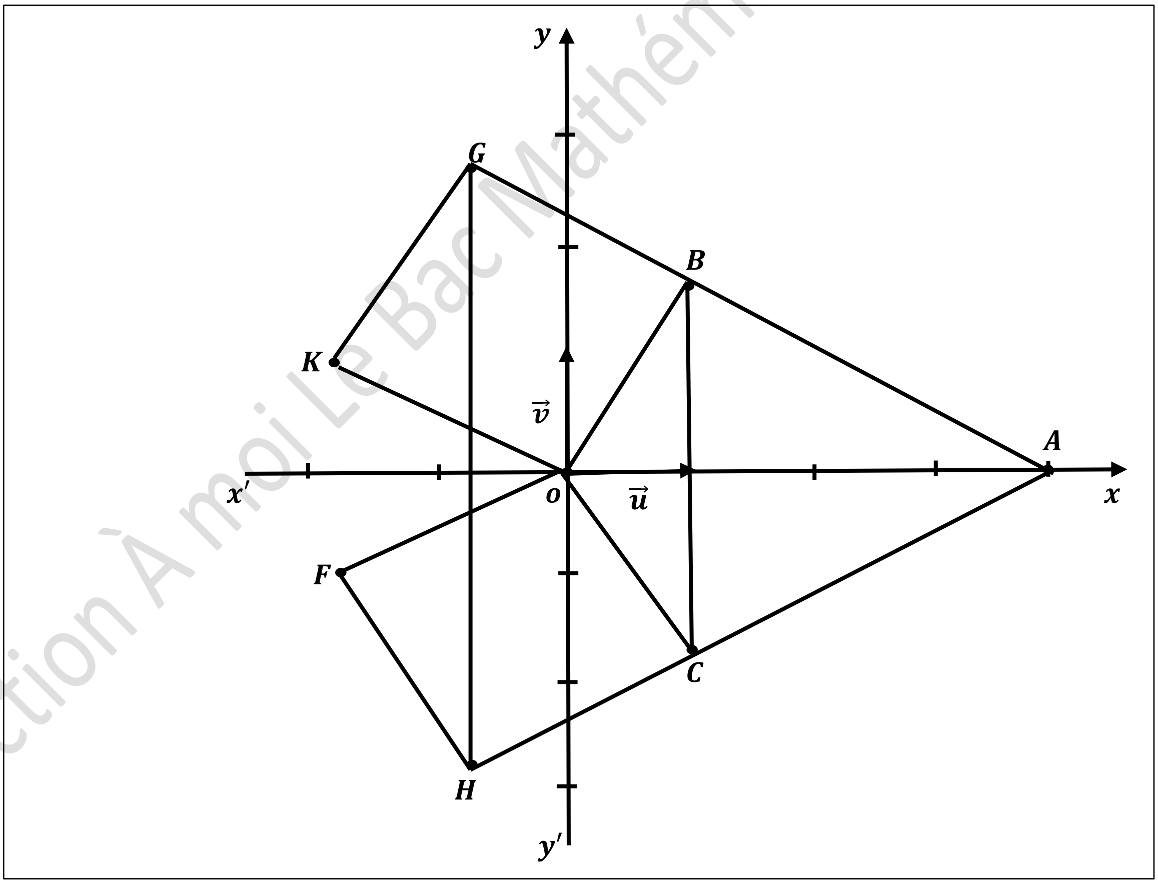
On a donc : $P(Z) = \left(Z - 1 - i\sqrt{3}\right)\left(Z - 1 + i\sqrt{3}\right)(Z - 4)$

c) $P(Z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = 1 + i\sqrt{3} \\ Z = 1 - i\sqrt{3} \\ ou \\ Z = 4 \end{cases}$. D'où l'ensemble des solutions de $P(Z) = 0$

est défini par : $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{4\,;1 + i\sqrt{3}\,;\ 1 - i\sqrt{3}\right\}}$

2) $a = 4 \Rightarrow A(4;0)$; $b = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow B\left(1\,;\ \sqrt{3}\right)$ et $c = \overline{b} = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow C\left(1;\ -\sqrt{3}\right)$

a) Plaçons les points A, B et C



b) Nature du triangle ABC

- Soit $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1-i\sqrt{3}-4}{1+i\sqrt{3}-4} = \frac{(-3-i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}{(-3+i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})} = \frac{9+6i\sqrt{3}-3}{9+3} = \frac{6+6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

  Ainsi $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ et $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} > 0 \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

  C'est-à-dire : $\begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$. Alors ABC est un triangle équilatéral

3) On donne : $Z_K = -\sqrt{3} + i$

a) Déterminons les affixes respectives de F et G.

- Soit F l'image du point K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ telle que : $\mathcal{R}(K) = F$

$$\Rightarrow Z_F = e^{i\frac{\pi}{3}}Z_K = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} + i) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \boxed{-\sqrt{3} - i}$$

- Soit G l'image du point K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ telle que : $T(K) = G$

  $\Rightarrow Z_G = Z_K + Z_{\overrightarrow{OB}} = -\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3} = \boxed{(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}$

b) Montrons que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires

- 1er Méthode : On a : $\frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OF}} = \frac{Z_C}{Z_F} = \frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i} = \frac{(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3}-i)(-\sqrt{3}+i)} = \frac{-\sqrt{3}+4i+\sqrt{3}}{3+1} = \frac{4i}{4} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

  Comme $\frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OF}} \in i\mathbb{R}$, parconséquent les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

- 2ème Méthode : On a : $det(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OF}) = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0$

  Donc les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

Exercice N°1.46 :

1) Déterminons le centre Ω du cercle $(\mathcal{C})$ et son rayon

* Le centre du cercle $(\mathcal{C})$ est défini par : $Z_\Omega = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{1-2i+(-2+2i)}{2} = \frac{1-2i-2+2i}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

* Connaissant que le cercle $(\mathcal{C})$ a pour diamètre $[AB]$, alors son rayon est défini par :

$$\boxed{R = \frac{1}{2}[AB] = \frac{1}{2}|Z_B - Z_A| = \frac{1}{2}|-2 + 2i - 1 + 2i| = \frac{1}{2}|-3 + 4i| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \frac{5}{2}}$$

2) Ecrivons Z_D sous forme algébrique

On a : $Z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{12-6i+36i+18}{(4)^2+(2)^2} = \frac{30+30i}{20} = \boxed{\frac{3}{2} + i\frac{3}{2}.}$

* Pour démontrer que Z_D est un point du cercle $(\mathcal{C})$, il suffit de vérifier si $\Omega D = R = \frac{5}{2}$

On a alors : $\Omega D = |Z_D - Z_\Omega| = \left|\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right| = \left|2 + \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$

$\boxed{\text{Donc } D \text{ est un point du cercle } (\mathcal{C}).}$

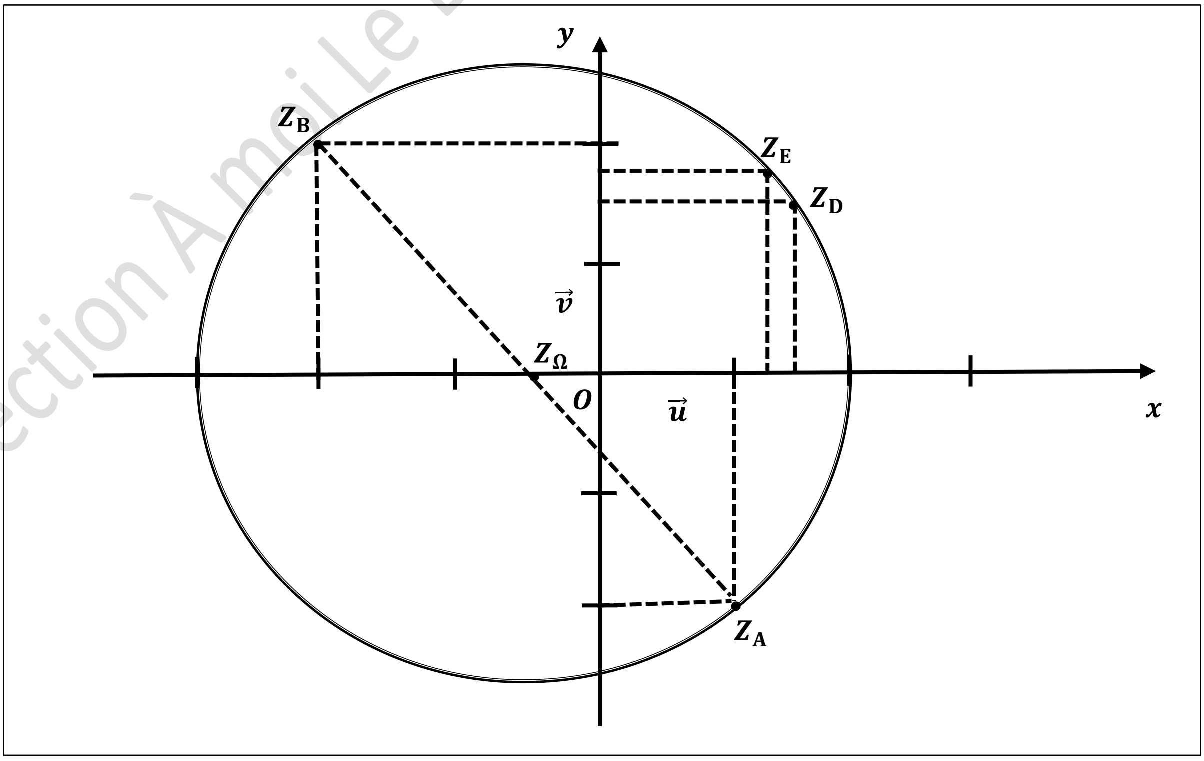
3) a) Préciser le module et un argument de $Z_E + \frac{1}{2}$.

* $\boxed{\left|Z_E + \frac{1}{2}\right| = |Z_E - Z_\Omega| = \frac{5}{2}, \text{ car } E \in (\mathcal{C}).}$

* $arg\left(Z_E + \frac{1}{2}\right) = arg(Z_E - Z_\Omega) = mes\left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{\Omega E}}\right) = mes\left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{\Omega I}}\right) + mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega E}}\right) = \boxed{0 + \frac{\pi}{4}}$

b) On a : $Z_E + \frac{1}{2} = Re^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow Z_E = \left(\frac{5\sqrt{2}}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{1}{2}$

Soit en fin : $\boxed{Z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4}}$



Exercice N°1.47 :

1) * $b = i\sin\theta$ est une solution de (E)

$$\Leftrightarrow b^2 - [1 + i(\sin\theta + \tan\theta)]b + \sin\theta\,(-\tan\theta + i) = 0$$

On alors :

$$(i\sin\theta)^2 - [1 + i(\sin\theta + \tan\theta)](i\sin\theta) + \sin\theta\,(-\tan\theta + i)$$

$$= -\sin^2\theta - \left[i\sin\theta - \sin^2\theta - \sin\theta\tan\theta\right] - \sin\theta\tan\theta + i\sin\theta$$

$$= \sin^2\theta - \sin^2\theta + \sin\theta\tan\theta - \sin\theta\tan\theta + i(\sin\theta - \sin\theta)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b = i\sin\theta \text{ est une solution de l'équation } (E)}$$

* **Calculons l'autre solution** a

On a : (E): $(z - i\sin\theta)(z - a) = 0 \Leftrightarrow z^2 - az - i(\sin\theta)z + ia\sin\theta = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 + (-a - i\sin\theta)z + ia\sin\theta = 0$$

Par identification on a : $\begin{cases} z^2 = z^2 \\ (-a - i\sin\theta)z = -[1 + i(\sin\theta + \tan\theta)]z \\ ia\sin\theta = \sin\theta\,(-\tan\theta + i) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$-a - i\sin\theta = -1 - i(\sin\theta + \tan\theta) \Leftrightarrow -a = -1 - i\sin\theta - i\tan\theta + i\sin\theta$$

$\Leftrightarrow a = 1 + i\tan\theta.$ $\boxed{\text{D'où l'autre solution de } (E) \text{ est } a = 1 + i\tan\theta\,.}$

2) Soit T la transformation : $M(z) \longmapsto M'(z')$ telle que : $z' = az + b$ avec a et b solutions de (E)

a) * **Nature de** T

On a : $z' = (1 + i\tan\theta)z + i\sin\theta$. $|a| = |1 + i\tan\theta| = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2} = \frac{1}{\cos\theta}$

$$\boxed{\text{Comme } |a| \neq 1 \Rightarrow T \text{ est une similitude plane directe.}}$$

* **Eléments caractéristiques de** T

Son rapport : $k = |a| \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{\cos\theta}}$

Son angle : $\theta = arg(a) \Rightarrow arg(a) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta}} = \cos\theta \\ \sin\theta = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{arg(\theta) = \theta[2\pi]}$

Son centre : $Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{i\sin\theta}{1-1-i\tan\theta} = -\frac{\sin\theta}{\tan\theta} = -\frac{\sin\theta}{\sin\theta} \times \cos\theta = -\cos\theta \Rightarrow Z_\Omega = -\cos\theta$

b) T est une similitude d’angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $k \Leftrightarrow a = ke^{i\frac{\pi}{4}}$

C’est-à-dire $1 + i\tan\theta = ke^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = ke^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta} = ke^{i\frac{\pi}{4}}$

Par identification on a : $\begin{cases} k = \frac{1}{\cos\theta} \\ e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} k = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}}$

- D’où l’affixe du centre est $Z_\Omega = -\cos\frac{\pi}{4} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Exercice N°1.48 :

1) a) $(\sqrt{5} + 2i)^2 = (\sqrt{5} + 2i)(\sqrt{5} + 2i) = 5 + 2 \times 2i \times \sqrt{5} - 4 = 1 + 4i\sqrt{5}$.

b) $\Delta = [-(\sqrt{5} + 2i)]^2 - 4 \times 1 \times (1 + 4i\sqrt{5}) = (\sqrt{5} + 2i)^2 - 4(\sqrt{5} + 2i)^2 = -3(\sqrt{5} + 2i)^2$.

c) $\Delta = -3(\sqrt{5} + 2i)^2 = [i\sqrt{3}(\sqrt{5} + 2i)]^2$, donc $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}(\sqrt{5} + 2i)$ par suite :

$$a = \frac{\sqrt{5}+2i+i\sqrt{3}(\sqrt{5}+2i)}{2} = \frac{(\sqrt{5}+2i)(1+i\sqrt{3})}{2} = (\sqrt{5} + 2i)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et $b = \frac{\sqrt{5}+2i-i\sqrt{3}(\sqrt{5}+2i)}{2} = \frac{(\sqrt{5}+2i)(1-i\sqrt{3})}{2} = (\sqrt{5} + 2i)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Donc les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont a et b.

2) a) Q appartient à $(\mathcal{C}) \Leftrightarrow OQ = 3$

Avec $OQ = |Z_Q - Z_O| = |\sqrt{5} + 2i| = \sqrt{\sqrt{5}^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$, $\boxed{\text{donc } Q \in (\mathcal{C})}$

b) Construction du point Q (Voit figure 1)

3) a) A **et** B **appartiennent à** $(\mathcal{C}) \Leftrightarrow 0A = 3$ **et** $OB = 3$

Avec $OA = |Z_A - Z_O| = \left|(\sqrt{5} + 2i)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}|(\sqrt{5} + 2i)| \times |1 + i\sqrt{3}| = \frac{1}{2}OQ \times \sqrt{4} = 3.$

$$OB = |Z_B - Z_O| = \left|(\sqrt{5} + 2i)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}|\sqrt{5} + 2i| \times |1 - i\sqrt{3}| = \frac{1}{2}OQ \times \sqrt{4} = 3.$$

Donc les points A **et** B **appartiennent au cercle** $(\mathcal{C})$.

b) $Z_{\overrightarrow{OA}} + Z_{\overrightarrow{OB}} = a + b = (\sqrt{5} + 2i)\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right] = \sqrt{5} + 2i = Z_{\vec{Q}} = Z_{\overrightarrow{OA}}$.

Ainsi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ}$.

c) On a : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ}$ **donc le quadrilatère** $OAQB$ **est un parallélogramme,**

de plus $OA = OB$ **ainsi** $OAQB$ **est un losange.**

d) On construit le point I **d'abord milieu du segment** $[QB]$**. La perpendiculaire à** (QB) **passant**

par I **coupe le cercle** $(\mathcal{C})$ **en** A **et** B **tel que :** $Im(Z_A) > 0$, **car** $a = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2} + i\frac{2+\sqrt{15}}{2}$ **et**

$b = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{15}}{2}$.

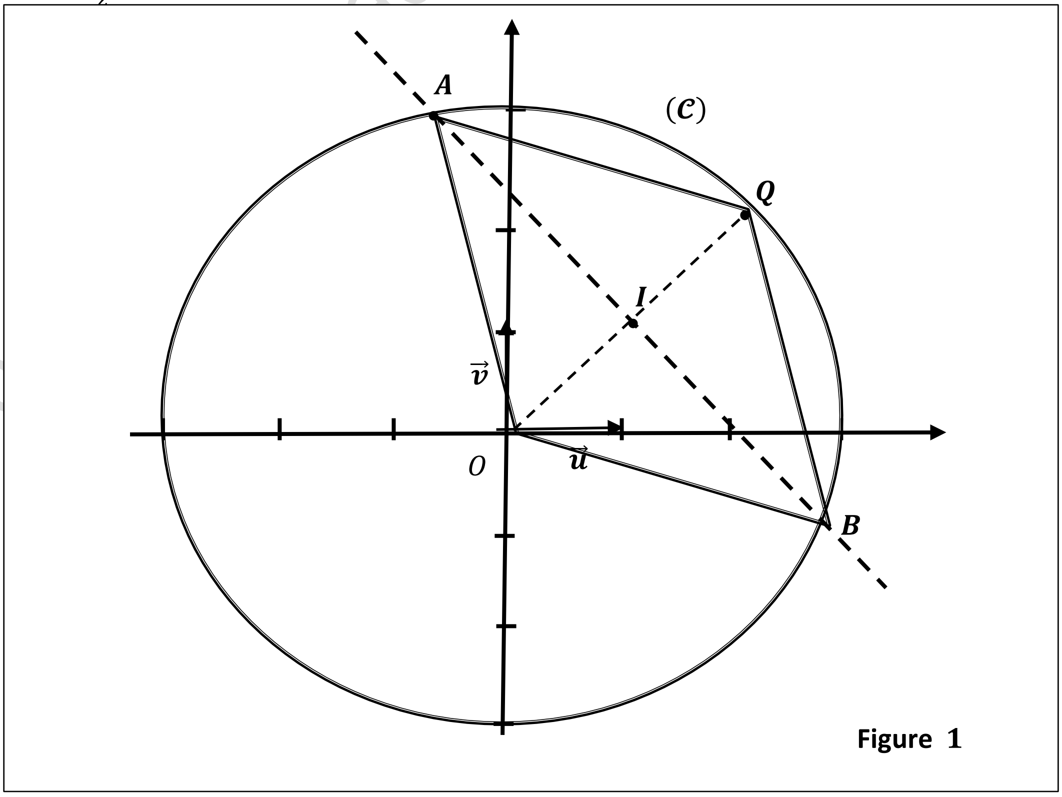


Figure 1

Exercice N°1.49 :

1) Déterminons les racines carrées de $6+6i\sqrt{3}$

Posons $Z=x+iy \ et \ \ u=6+6i\sqrt{3}, \ |u|=\sqrt{(6)^2+(6\sqrt{3})^2}=12$

$$\begin{cases} x^2+y^2=|u|=12 \quad (1) \\ x^2-y^2=Re(u)=6 \quad (2) \\ 2xy=Im(u)=6\sqrt{3} \quad (3) \end{cases}$$

En faisant la somme des équations $(1)+(2)$ **, on obtient** $2x^2=18 \Leftrightarrow \ x=3$ **ou** $\ x=-3$ **En faisant la différence des équations** $(1)-(2)$**, on obtient** $2y^2=6 \Leftrightarrow \ y=\sqrt{3}$ **ou** $\ y=-\sqrt{3}$

D'après l'équation (3)**, on a :** $2xy=6\sqrt{3} \Leftrightarrow xy=3\sqrt{3}>0$

Donc x **et** y **sont de même signe, d'où les racines carrées de** $6+6i\sqrt{3}$ **sont :**

$$\boxed{3+\sqrt{3}i \ \ et \ \ -3-\sqrt{3}i}$$

2) Résolution dans $\mathbb{C}$

$$2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4=0, \ \Delta=\left[-(1+3i\sqrt{3})\right]^2-4\times2\times(-4)=6+6i\sqrt{3}=(3+\sqrt{3}i)^2$$

$$z_1=\frac{1+3i\sqrt{3}-(3+\sqrt{3}i)}{2\times2}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=\boxed{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad z_2=\frac{1+3i\sqrt{3}+(3+\sqrt{3}i)}{2\times2}=\frac{4+4\sqrt{3}i}{4}=\boxed{1+i\sqrt{3}}$$

3) a) $(2z+1)\left[2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4\right]=4z^3-2(1+3i\sqrt{3})z^2-8z+2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4$

$$=4z^3+\left[2-2(1+3i\sqrt{3})\right]z^2+\left[-8-(1+3i\sqrt{3})\right]z-4$$

$$=4z^3+\left[2-2-6i\sqrt{3}\right]z^2+\left[-8-1-3i\sqrt{3}\right]z-4$$

D'où $\boxed{(2z+1)\left[2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4\right]=4z^3-6i\sqrt{3}z^2-3(3+i\sqrt{3})z-4}$

b) D'après le résultat trouvé précédemment, on en déduit que si l'équation $(E)=0$**, alors**

$$(2z+1)\left[2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2z+1=0 \\ 2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} z = -\frac{1}{2} \quad (1) \\ 2z^2 - \left(1 + 3i\sqrt{3}\right)z - 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$. **Avec l'équation** (2)**, ces solutions sont déjà trouvées dans la question 2.**

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) **est :** $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; 1 + i\sqrt{3}\right\}}$

4) Forme trigonométrique

$$z_0 = -\frac{1}{2},\ |z_0| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (0)^2} = \frac{1}{2}\ et\ arg(z_0) = \begin{cases} \cos\theta = -1 < 0 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \theta = \pi[2\pi]$$

D'où $\boxed{z_0 = \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)}$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1\ et\ arg(z_1) = \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} < 0 \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \\ \theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

D'où $\boxed{z_1 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3},\ |z_2| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\ et\ arg(z_0) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} > 0 \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où $\boxed{z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

<u>Exercice N°1.50</u> :

Les points A **et** B **sont d'affixes respectives** $z_A = 2 - i$ **et** $z_B = -2i$**, et on pose** $Z = \frac{z - z_B}{z - z_A}$

1) Déterminons dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ **tel que :**

a) Z **est un réel** $\Leftrightarrow Im(Z) = 0$**. Posons** $z = x + iy$**, où** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Alors on a : $Z = \frac{x+iy-2+i}{x+iy+2i} = \frac{x-2+i(y+1)}{x+i(y+2)} = \frac{[x-2+i(y+1)][x-i(y+2)]}{[x+i(y+2)][x-i(y+2)]}$

$$= \frac{x^2 - ix[y+2-y-1] - 2x + 2i(y+2) + (y+1)(y+2)}{x^2 + (y+2)^2} = \frac{x^2 - ix - 2x + 2iy + 4i + y^2 + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2} = \frac{x^2 - 2x + y^2 + 3y + 2 + i(-x + 2y + 4)}{x^2 + (y+2)^2}$$

Donc $Re(Z) = \frac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$ et $Im(Z) = \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$

Ainsi $Im(Z) = 0 \Leftrightarrow -x+2y+4=0 \Leftrightarrow x-2y-4=0$. D'où l'ensemble cherché est la droite d'équation : $x-2y-4=0$, privée du point B.

b) **Z est imaginaire pur (éventuellement nul) $\Leftrightarrow Re(Z) = 0$.**

Ainsi on a : $x^2-2x+y^2+3y+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D'où l'ensemble cherché est le cercle de centre le point $I\left(1;\ -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, privée du point B.**

c) **Z est de module $1 \Leftrightarrow |Z| = 1$.**

C'est-à-dire $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow MA = MB$.

D'où l'ensemble des points cherchés est la médiatrice du segment $[AB]$.

2) **Calculons $|Z-1|\times|z-z_B|$**

On a : $|Z-1|\times|z-z_B| = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}-1\right|\times|z-z_B| = \left|\frac{-z_A+z_B}{z-z_B}\right|\times|z-z_B| = |-(z_A-z_B)|$

$$= |z_A-z_B| = |2-i+2i| = |2+i| = \sqrt{(2)^2+(1)^2} = \sqrt{5}$$

Alors $|Z-1|\times|z-z_B| = \sqrt{5}$

- **Déduisons que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R, les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon :**

  Soit $M(z) \in \mathcal{C}(B\,;R) \Leftrightarrow MB = R \Leftrightarrow |z-z_B| = R$, **alors** $|Z-1|\times|z-z_B| = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$$|Z-1|\times R=\sqrt{5}\Leftrightarrow |Z-1|=\frac{\sqrt{5}}{R}\ .$$

Donc les points d'affixes Z sont tous situés sur le même cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{R}$.

<u>Exercice N°1.51</u> :

1) a) Déterminons l'affixe $Z_{\overrightarrow{BC}}$ du vecteur BC

$$Z_{\overrightarrow{BC}}=Z_C-Z_B=1-i-(-1+2i)=1-i+1-2i\ \Rightarrow \boxed{Z_{\overrightarrow{BC}}=2-3i}$$

b) Expression analytique de la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$

Soit $Z'=Z+b$ représente l'écriture complexe d'une translation. Avec $b=Z_{\overrightarrow{BC}}$

$$\Rightarrow Z'=Z+2-3i$$

Posons $Z'=x'+iy'$ et $Z=x+iy$.

$$\Leftrightarrow x'+iy'=(x+iy)+2-3i$$

$$\Leftrightarrow x'+iy'=x+2+i(y-3)$$

D'où par identification, on obtient le résultat ci-contre : $\boxed{\begin{cases}x'=x+2\\ y'=y-3\end{cases}}$

c) Trouvons l'affixe du point A'

Soit le point A' image de A par la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est défini par :

$$T(A)=A'\Leftrightarrow\ Z_{A'}=Z_A+Z_{\overrightarrow{BC}}$$

$$\Leftrightarrow\ Z_{A'}=1+2i+(2-3i)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Z_{A'}=3-i}$$

2) a) On a : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right)=arg\left(\frac{Z_B-Z_A}{Z_D-Z_A}\right)=arg\left(\frac{-1+2i-1-2i}{1-1-2i}\right)=arg\left(\frac{-2}{-2i}\right)=arg\left(\frac{(-1)(i)}{(i)(-i)}\right)$

$$= arg(-i) = \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Ainsi, la mesure en radian de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right)$ est $-\frac{\pi}{2}$

b) Expression analytique de la rotation de centre A et d'angle $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)$

Soit $Z' - Z_A = e^{i\theta}(Z - Z_A)$ représente l'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right) = \theta$.

$$\Rightarrow Z' - (1 + 2i) = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(Z - (1 + 2i)\right)$$

$$\Rightarrow Z' = \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)Z - \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)(1 + 2i) + 1 + 2i$$

$$\Rightarrow Z' = -iZ - (-i)(1 + 2i) + 1 + 2i$$

$$\Rightarrow Z' = -iZ - 1 + 3i$$

En posant $Z' = x' + iy'$ et $Z = x + iy$

$$\Rightarrow x' + iy' = -i(x + iy) - 1 + 2i$$

$$\Rightarrow x' + iy' = -ix + y - 1 + 2i$$

$$\Rightarrow x' + iy' = y - 1 + i(3 - x)$$

D'où par identification, on obtient le résultat ci-contre : $\boxed{\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = 3 - x \end{cases}}$

c) Trouvons l'affixe du point C'

Soit le point C' image de C par la rotation $\mathcal{R}$ est défini par : $\mathcal{R}(C) = C'$. Avec $Z_C = 1 - i$

$$\Rightarrow Z_{C'} = -iZ_C - 1 + 3i = -i(1 - i) - 1 + 3i = -i - 1 - 1 + 3i$$

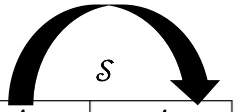
$$\Rightarrow \boxed{Z_{C'} = -2 + 2i}$$

3) Déterminons le rapport et l'angle de la similitude directe $\mathcal{S}$ de centre A et qui transforme B en C.

Soit A le centre de la similitude directe $\mathcal{S}$ n'est que le point invariant défini par : $\mathcal{S}(A) = A$

Et la transformation du point B en C par $\mathcal{S}$ est définie par : $\mathcal{S}(B) = C$

On a alors le schéma de la transformation dite similitude directe $\mathcal{S}$ ci-contre :



A	A
B	C
$[AB]$	$[AC]$

- **Rapport k :** $k = \frac{[AC]}{[AB]} = \left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{1-i-(1+2i)}{-1+2i-(1+2i)}\right| = \left|\frac{-3i}{-2}\right| \Longrightarrow \boxed{k = \frac{3}{2}}$
- **Angle de mesure** $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$: $\Longrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\theta = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

<u>Exercice N°1.52</u> :

1. a) $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{i\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi+3\pi}{12}\right)} - e^{i\left(\frac{5\pi-3\pi}{12}\right)} = e^{i\frac{8\pi}{12}} - e^{i\frac{2\pi}{12}}$

$$\Longleftrightarrow \boxed{e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}} \qquad ;$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}} = \left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}-1}{e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}} = \left(\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1\right)e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$= \left[\left(\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]e^{i\frac{5\pi}{12}} = \left[(i-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$= \left[\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right)\right]e^{i\frac{5\pi}{12}} \Longrightarrow \boxed{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = i\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}}$$

b) $Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ **est une solution de l'équation** $(E) \Leftrightarrow {Z_1}^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)Z_1 - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$

$${Z_1}^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)Z_1 - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) - 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= 4e^{i\frac{2\pi}{3}} - 4i\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)} - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} - 4i\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} - 4\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right) - 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= 4e^{i\frac{2\pi}{3}} - 4e^{i\frac{2\pi}{3}} + 4e^{i\frac{\pi}{6}} - 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

D'où $\boxed{Z_1{}^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)Z_1 - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 0 \Rightarrow Z_1 \text{ est donc une solution de l'équation } (E)}$

c) L'autre solution Z_2 de l'équation (E)

$$(E) = \left(Z - 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(Z - Z_2) = Z^2 - Z \times Z_2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}Z + 2e^{i\frac{\pi}{3}}Z_2$$

$$= Z^2 + \left(-Z_2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)Z + 2e^{i\frac{\pi}{3}}Z_2$$

Par identification on a : $\begin{cases} Z^2 = Z^2 \quad (1) \\ \left(-Z_2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)Z = \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)Z \quad (2) \\ 2e^{i\frac{\pi}{3}}Z_2 = -4e^{i\frac{\pi}{6}} \quad (3) \end{cases}$

Considérons (3), $2e^{i\frac{\pi}{3}}Z_2 = -4e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow Z_2 = -\frac{2\times 2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = -2e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}$

D'où l'autre solution de l'équation (E) **est** $\boxed{Z_2 = -2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

d) Z_1 et Z_2 sous forme cartésienne

$$Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{1 + i\sqrt{3}}$$

$$Z_2 = -2e^{-i\frac{\pi}{6}} = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) = \boxed{-\sqrt{3} + i}$$

2. a) Vérification

$$Z_B = -\sqrt{3} + i = -(\sqrt{3} - i) = (-1) \times (\sqrt{3} - i) = (i)^2(\sqrt{3} - i) = i(i\sqrt{3} - i^2)$$

$$= i(-(-1) + i\sqrt{3}) = i(1 + i\sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{Z_B = iZ_A}$$

b) Nature du triangle OAB

*** 1^{ER} Méthode**

$\frac{aff(\overrightarrow{OB})}{aff(\overrightarrow{OA})} = \frac{Z_B}{Z_A} = \frac{iZ_A}{Z_A} = i$, car $Z_B = iZ_A$ d'après 2. a).

Donc $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Longrightarrow \boxed{OAB \text{ est rectangle en } O}$

$\left|\frac{Z_B}{Z_A}\right| = \frac{|Z_B|}{|Z_B|} = |i| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1 \iff |Z_A| = |Z_B|$.

D'où $OA = OB$ et par suite $\boxed{OAB \text{ est isocèle en } O}$

* $2^{\text{ÈME}}$ Méthode :

- $OA = |Z_A - Z_O| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$
- $OB = |Z_B - Z_O| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$
- $AB = |Z_B - Z_A| == |-1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})| = \sqrt{(-1 - \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$

On constate que $= OB$, par conséquent OAB est un triangle isocèle au point O

Et de plus $AB^2 = OA^2 + OB^2$ vérifie la réciproque du théorème de Pythagore

$\boxed{\text{D'où } OAB \text{ est un triangle rectangle isocèle en } O.}$

c) construction des points A et B. (facile à faire) ;

3. a) Nature de $OACB$

$\overrightarrow{BC} = Z_C - Z_B = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} - i = 1 + i\sqrt{3} = Z_A \Longrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

D'où $OACB$ est un parallélogramme ; et comme le triangle OAB est isocèle et rectangle en O , donc $OACB$ est un carré.

b) Placement du point C. (facile à faire).

c) Forme exponentielle de Z_C

* 1^{ER} Méthode :

$$Z_C = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) \Longrightarrow |Z_C| = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2} ;$$

$arg(Z_C) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & (1) \\ \sin\theta = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & (2) \end{cases}$. **En considérant** $(1) \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = 105° = \frac{7\pi}{12}$

D'où $\boxed{Z_C = \left[2\sqrt{2}\ ;\ \frac{7\pi}{12}\right] = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$

*** 2**

*** $2^{\text{ÈME}}$ Méthode :**

On sait que : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$ **d'après 3. a)** $\Rightarrow Z_C - Z_B = Z_A$

$$\Rightarrow Z_C = Z_A + Z_B$$

$\Rightarrow Z_C = Z_A + iZ_A$ **, car** $Z_B = iZ_A$ **d'après 2) a).**

$$\Rightarrow Z_C = (1+i)Z_A$$

$$\Rightarrow Z_C = (1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow Z_C = \left[\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right] \times \left[2\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\Rightarrow Z_C = \left[\ 2\sqrt{2}\ \ ;\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right]$$

Soit enfin $\boxed{Z_C = \left[2\sqrt{2}\ ;\ \frac{7\pi}{12}\right] = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$

<u>Exercice N°1.53</u> :

1) Soit le polynôme $P(z) = z^3 + (-1 + 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$

a) Déterminons les réels a **et** b **tels que :** $p(z) = (z-1)\left(z^2 + az + b\right)$

D'après la méthode de Horner, on a :

	1	$-1+2\sin\alpha$	$1-2\sin\alpha$	-1
1		1	$2\sin\alpha$	1
	1	$2\sin\alpha$	1	0

D'où : $\boxed{a = 2\sin\alpha\ \ , b = 1\ \text{ et }\ p(z) = (z-1)\left(z^2 + (2\sin\alpha)z + 1\right)}$

b) Résolution dans $\mathbb{C}$

Posons $p(z) = 0 \Leftrightarrow (z_1 - 1)\left(z^2 + (2\sin\alpha)z + 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - 1 = 0 \\ z^2 + (2\sin\alpha)z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \ (1) \\ z^2 + (2\sin\alpha)z + 1 = 0 \ (2) \end{cases}$$

En considérant (2), $\Delta = (2\sin\alpha)^2 - 4(1)(1) = 4\left(\sin^2\alpha - 1\right) = -4\cos^2\alpha = (2i\cos\alpha)^2$

Par conséquent, les racines de l'équation (2) **sont :**

$z_2 = \frac{-2\sin\alpha - 2i\cos\alpha}{2} = -\sin\alpha - i\cos\alpha$ **et** $z_3 = \frac{-2\sin\alpha + 2i\cos\alpha}{2} = -\sin\alpha + i\cos\alpha$

Alors les solutions de l'équation $p(z) = 0$ **dans** $\mathbb{C}$ **sont :** $\boxed{S = \{z_1\,;\ z_2;\ z_3\}}$

2) a) Ecrivons z_A, z_B, z_C **sous forme trigonométrique**

$z_A = 1 = \boxed{[1\,;0] = (\cos 0 + i\sin 0)}$

$z_B = -\sin\alpha + i\cos\alpha = i(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \boxed{\left[1\,;\ \alpha + \frac{\pi}{2}\right] = \left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)}$

$$z_C = -\sin\alpha - i\cos\alpha = -i(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \boxed{\begin{aligned} &\left[1\,;\ -\alpha - \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \left(\cos\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}}$$

b) Forme exponentielle du rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Posons $U = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-\sin\alpha - i\cos\alpha - 1}{-\sin\alpha + i\cos\alpha - 1} = \frac{(-1-\sin\alpha - i\cos\alpha)(-1-\sin\alpha - i\cos\alpha)}{(-1-\sin\alpha + i\cos\alpha)(-1-\sin\alpha - i\cos\alpha)}$

$$= \frac{(-1-\sin\alpha)^2 - i\cos\alpha(-1-\sin\alpha) - i\cos\alpha(-1-\sin\alpha) - \cos^2\alpha}{(-1-\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2}$$

$$= \frac{1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha - 2i\cos\alpha(-1-\sin\alpha) - \cos^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + 2\sin\alpha + 1 + 2i\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{2 + 2\sin\alpha}$$

$$= \frac{-1 + 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha + 1 + 2i\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{2 + 2\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha(1+\sin\alpha) + 2i\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{2(1+\sin\alpha)}$$

$$= \sin\alpha + i\cos\alpha = i(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \left[1;\ \frac{\pi}{2} - \alpha\right], \forall\alpha \in [0;\pi]$$

D'où : $\boxed{U = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}}$

c) Nature du triangle ABC

1er Méthode : Comme $\left\{\begin{array}{c} |U| = \left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow AB = AC \\ et \\ arg(u) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)[2\pi] \end{array}\right. \Longrightarrow$

ABC est un triangle isocèle en A

2ème Méthode : Il suffit de calculer les distances AB, AC et BC

On a donc : $AB = |z_B - z_A| = |-\sin\alpha + i\cos\alpha - 1| = \sqrt{(-1-\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2}$

$= \sqrt{2(1+\sin\alpha)}$

$AC = |z_C - z_A| = |-\sin\alpha - i\cos\alpha - 1| = \sqrt{(-1-\sin\alpha)^2 + (-\cos\alpha)^2} = \sqrt{2(1+\sin\alpha)}$

$BC = |z_C - z_B| = |-\sin\alpha - i\cos\alpha + \sin\alpha - i\cos\alpha| = |-2i\cos\alpha| = 2\cos\alpha$

On constate que $AB = AC \neq BC \Longrightarrow ABC$ est un triangle isocèle en A.

d) Déterminons α pour que le triangle ABC soit équilatéral

ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

On a donc : $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{2} - \alpha = -\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \\ -\alpha = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} \end{array}\right.$

- **Ainsi, si ABC est un triangle équilatéral et de sens direct** $\Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$,
- **Et si ABC est un triangle équilatéral et de sens indirect** $\Longrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$

Exercice N°1.54 :

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \left(3 + 3i\sqrt{3}\right)z - 6 + 3i\sqrt{3} = 0$

a) Vérifions que $i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation (3)

On a : $\left(i\sqrt{3}\right)^2-\left(3+3i\sqrt{3}\right)\left(i\sqrt{3}\right)-6+3i\sqrt{3}=-3-\left(-9+3i\sqrt{3}\right)-6+3i\sqrt{3}$

$$=(9-9)+i\left(3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)=0$$

Donc $i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation (E) .

b) Déduisons l'autre solution de (E)

2) Soit $z_A=i\sqrt{3},\ z_B=3+2i\sqrt{3}$ et $z_C=3-2i\sqrt{3}$

a) Calculons $(z_B-z_A)(\overline{z_C-z_A})$

$$\begin{aligned}(z_B-z_A)(\overline{z_C-z_A})&=(z_B-z_A)(\overline{z_C}-\overline{z_A})\\&=(z_B-z_A)(z_B+z_A)\\&={z_B}^2-{z_A}^2\\&=\left(3+2i\sqrt{3}\right)^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2\\&=9+12i\sqrt{3}-12+3\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow\ (z_B-z_A)(\overline{z_C-z_A})=12i\sqrt{3}}$$

b) Comme $(z_B-z_A)(\overline{z_C-z_A})=12i\sqrt{3}\in i\mathbb{R}$, alors $AB\perp AC$.

Ainsi le triangle ABC est rectangle en A.

3) a) Soit D le point d'affixe $z_D=-3$. Montrons que le point A est le milieu du segment $[DB]$

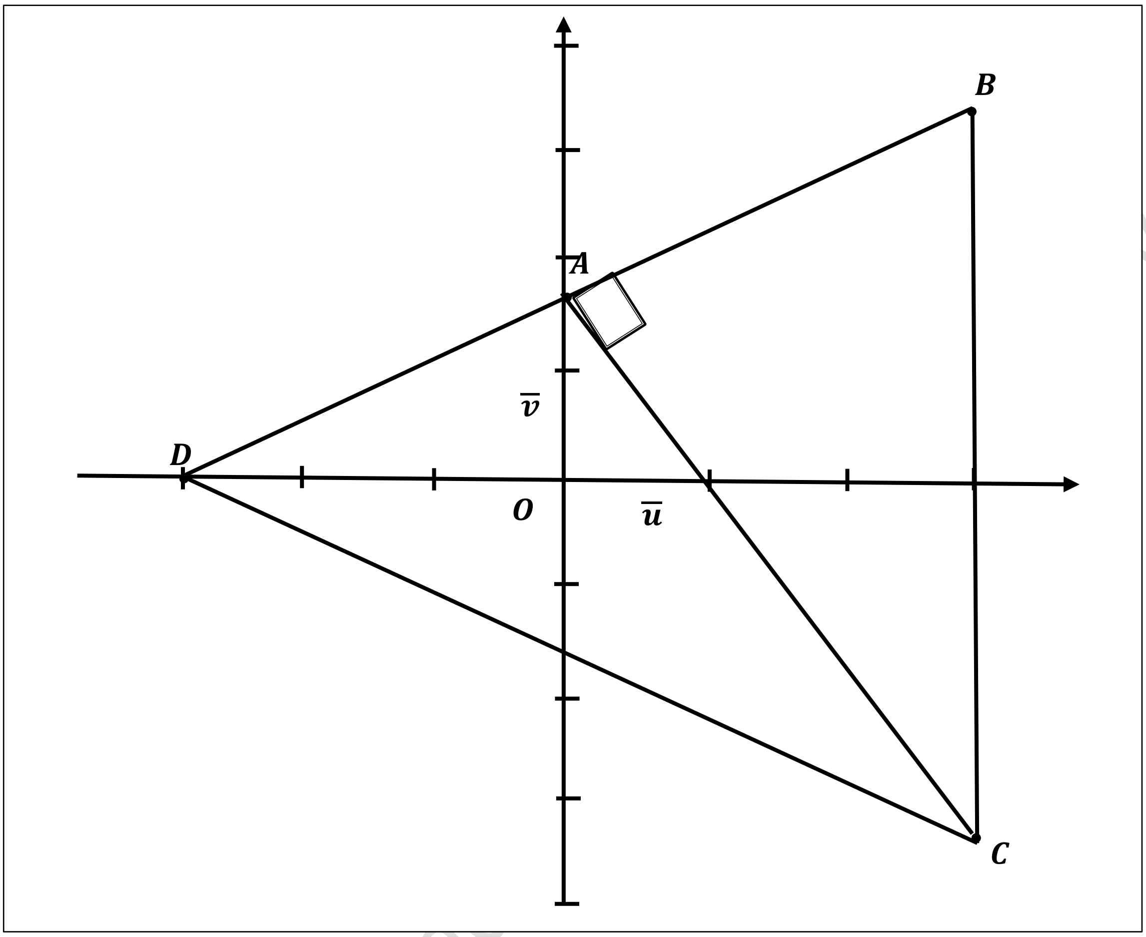
Il suffit de vérifier que $z_B+z_D=2z_A$

On a alors : $z_B+z_D=3+2i\sqrt{3}-3=2i\sqrt{3}\Leftrightarrow z_B+z_D=2z_A$ **tel que :** $\frac{z_B+z_D}{2}=z_A$.

D'où A est le milieu du segment $[DB]$

b) Plaçons les points D, B et C

On a : $D(-3\,;0)\,;B(3;2\sqrt{3})$ et $C(3;\ -2\sqrt{3})$



c) **Montrons que l'aire du triangle BCD est égale à $12\sqrt{3}$**

$$aire(BCD) = \frac{DB\times AC}{2} = \frac{2AB\times AC}{2} = AB\times AC = |z_B - z_A|\times|z_C - z_A|$$

$$= |z_B - z_A|\times|\overline{z_B}+\overline{z_A}| = \left|(z_B - z_A)\times(\overline{z_B + z_A})\right| = \left|(3+i\sqrt{3})\times\left(\overline{3+3i\sqrt{3}}\right)\right|$$

$$= \left|(3+i\sqrt{3})(3-3i\sqrt{3})\right| = \left|18-6i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(18)^2+\left(-6\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{432}$$

$$= \sqrt{3\times 144}$$

D'où $\boxed{aire(BCD) = 12\sqrt{3}\ u.a}$.

Exercices de type 2 : (Proposés)*

Exercice N°1.1* :

On donne le nombre complexe $z = \frac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}$

1) **Mettre** z **sous forme algébrique.**

2) **Calculer le module et un argument de** z.

3) **Calculer** z^8 **et** z^{1989}.

Exercice N°1.2* :

Soit Z **un nombre complexe tel que :** $Z + \frac{1}{Z} = 2\cos\theta$ **et** $Z - \frac{1}{Z} = 2i\sin\theta$.

Démontrer que pour tout entier naturel n **; on a :** $Z^n + \frac{1}{Z^n} = 2\cos(n\theta)$ **et** $Z^n - \frac{1}{Z^n} = 2i\sin(n\theta)$.

Exercice N°1.3* :

Donner la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a) $Z' = Z + 1 - 2i$; **b)** $Z' = e^{i\frac{\pi}{6}}Z - 1$; **c)** $Z' = 3Z - 1 + i$; **d)** $Z' = 2i(Z - i + 3)$

Exercice N°1.4* :

Soit θ **un réel de** $]0; 2\pi[$ **et soit l'équation** (E) : $Z^2 + i(e^{i\theta} - 2)Z + e^{i\theta} - 1 = 0$.

1) **Trouver les racines carrées du nombre complexe** $-e^{i2\theta}$.

2) **Résoudre alors l'équation** (E).

Exercice N 1.5* :

Trouver le module et un argument de

$Z = \frac{1+(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2}$, où φ est dans l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{3}\right[$.

Exercice N°1.6*:

Les racines Z_1 et_Z_2 d'une équation complexe de degré 2 vérifient les conditions :

$$\begin{cases} Z_1Z_2 + Z_1 + Z_2 = 4 \\ \frac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2} = 1 \end{cases}$$

1) **Former l'équation du second degré.**

2) **Déterminer z_1 et z_2 puis écrire sous forme exponentielle, trigonométrique et algébrique le nombre complexe $Z = \left(\frac{1}{Z_2}\right)^4$, sachant que $Im(z_2) < 0$.**

Exercice N°1.7* :

1) **Donner les solutions de $Z^4 = 1$.**

2) **Résoudre $Z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$**

3) **Résoudre $Z^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$**

Exercice N°1.8* :

Soit f la transformation du plan dont l'écriture complexe est : $Z' = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}Z + \frac{1}{3}i$

1) **Déterminer le nombre complexe Z_0 tel que : $Z' - Z_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(Z - Z_0)$.**

2) **Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre que l'on précisera.**

Exercice N°1.9* :

Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

1) Déterminer l'écriture complexe de f.

2) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f :

3) Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1}.

<u>Exercice N°1.10*</u> :

Trois nombres complexes Z_1, Z_2 et Z_3 ont pour produit $3\sqrt{3}i$.

Leurs arguments respectifs θ_1, θ_2 et θ_3 sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et leurs modules respectifs r_1, r_2 et r_3 les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.

Sachant que $\theta_1 \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, déterminer Z_1, Z_2 et Z_3 et construire leurs images dans le plan complexe.

<u>Exercice N°1.11*</u> :

Dans le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les 3 points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 4 - 5i, z_B = 3 + 3i, z_C = -2 + i$

1) Placer les points A, B, C.

2) Déterminer l'affixe du point D symétrique du point B par rapport à C.

3) Déterminer l'affixe du point E vérifiant la relation : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

4) Quelle est la nature du quadruplet (A, B, C, D) ?

<u>Exercice N°1.12*</u> :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (Unité : $2\ cm$).

Soit θ un nombre réel avec $\theta \in [-\pi;\pi]$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(E) : Z^2 - 4\sin(\theta)Z + 4 = 0$.

2) Calculer le module et un argument de chacune des solutions de l'équation (E), puis du nombre complexe $U = \frac{2-Z_1}{2-Z_2}$.

3) Exprimer en fonction de θ, $S = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ et $S' = {Z_1}^4 + {Z_2}^4$.

4) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $S' = 0$?

On écrira z_1 et z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.

<u>Exercice N°1.13*</u> :

On considère le nombre complexe Z défini par : $Z = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$.

1) Calculer Z^2 et Z^4; puis en déduire le module et un argument de Z^4.

En déduire le module et un argument de Z.

2) Démontrer que : $\cos\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2}\right)\cos x + \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2}\right)\sin x = -\sqrt{\sqrt{2}}$.

<u>Exercice N°1.14*</u> :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe ; la nature et les éléments caractéristiques des transformations S_1oS_2 et S_2oS_1 :

a) $S_1 :\ Z' = 2iZ + 1 - 2i$ et $S_2 :\ Z' = \frac{1}{2}iZ + 1 - \frac{1}{2}i$

b) $S_1 :\ Z' = (1+i)Z + 1 + i$ et $S_2 :\ Z' = -2Z$

Exercice N°1.15* :

1) Soit α un nombre réel. Exprimer en fonction de $\cos(\alpha)$, l'expression :

$$A(\alpha) = 4\sin^2(\alpha) + 4\cos(\alpha) - 5.$$

2) On suppose que $\alpha \in \,]0; 2\pi[$. Déterminer suivant les valeurs de α, les nombres complexes

z_1 et z_2 vérifiant : $\begin{cases} z_1 \neq z_2 \\ z_1 + z_2 = 2\sin(\alpha) + 1 \\ z_1 \times z_2 = 1 - \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \end{cases}$

Exercice N°1.16* :

On considère l'équation (E) : $Z^3 - \frac{1}{64} = 0$.

1) **Qu'appelle-t-on conjugué d'un nombre complexe ?**

2) Montrer que $Z = \frac{1}{4}$ est une solution de l'équation (E).

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

4) Dans le plan complexe K rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C d'affixes respectives

$Z_A = \frac{1}{4}$, $Z_B = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$ **et** $Z_C = -\frac{1}{8} - i\frac{\sqrt{3}}{8}$.

a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe K.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

5) Soit S une similitude plane directe qui laisse invariant le point A telle que $S(B) = C$.

a) Déterminer l'écriture complexe de S.

b) Déterminer ses éléments caractéristiques.

c) Donner son expression analytique.

Exercice N°1.17* **: (extrait Bac SE Session 2013 Mali)**

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

a) $Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0.$

b) $Z + \frac{1}{Z} = 1$; $Z + \frac{1}{Z} = \sqrt{2}$

2) Soit P le polynôme de la variable complexe Z tel que :

$$P(Z) = Z^4 - (1+\sqrt{2})Z^3 + (2+\sqrt{2})Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + 1.$$

a) Vérifier que pour tout Z non nul on a :

$$\frac{P(Z)}{Z^2} = \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - (1+\sqrt{2})\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + \sqrt{2}$$

b) En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(Z) = 0$.

Exercice N°1.18* **: (extrait Bac Blanc série D session de Mai 2019 Congo et Il Zone II)**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$(E) : z^2 - (2\alpha + i)z + \alpha^2 + i\alpha + 2 = 0$, où α est un nombre complexe.

1. a) Vérifier que $\alpha + 2i$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

c) Déterminer α pour que le triangle OJK soit isocèle rectangle en O.

2. On donne $Z_J = \frac{3}{2}(1-i)$ et $Z_K = \frac{3}{2}(1+i)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle OJK.

b) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme J en K et K en O.

c) Préciser les éléments caractéristiques de S.

Exercice N°1.19* :

1) Exprimer $\sin^5 x$ en fonction de $\sin x$.

2) Linéariser $\cos^3 x \sin^2 x$.

Exercice N°1.20 : *

On donne les points $A(1), B(2i), C(-4), D(i)$ et $E(-i)$.

1) Déterminer l'écriture complexe de la similitude S telle que : $S(A) = B$ et $S(B) = C$ puis caractériser S.

2) Déterminer l'écriture complexe de la similitude F qui laisse invariant D et transforme A en E. Donner la nature et les éléments caractéristiques de F.

Exercice N°1.21* :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $i\sqrt{2}, -2 + 2i$ et $2i$

1° $\mathcal{S}: P \to P$

$M(Z) \to M_1(Z_1)$ tel que : $Z_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + 1 + i$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}$.

2) Soit f la similitude direct qui transforme A en B et O en C.

a) Déterminer l'écriture complexe de f

b) En déduire les éléments caractéristiques de f.

c) Montrer que fof est une homothétie que l'on caractérisera.

3) a) Déterminer l'affixe du point $S(C)$.

b) Montrer que Sof est une rotation que l'on caractérisera.

Exercice N°1.22* :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, on considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z' défini par :

$Z' = t^3Z + t(t+1)$, où t désigne un nombre complexe.

1) Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une translation.

Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

2) Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

3) Caractériser F lorsque $t = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice N°1.23* : (extrait Bac série C-E session d'Août 2020 Niger)

On rapporte le plan P à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et on considère l'application f de P dans P qui, au point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 2y+2 \\ y' = 2x-1 \end{cases}$

1) Montrer que l'application f admet un unique point invariant Ω dont on précisera les coordonnées.

2) Montrer que f est une similitude dont on précisera le rapport.

3) Soit H l'homothétie de centre Ω et de rapport 2 et M_1 l'image de M par l'homothétie H.

Montrer que le milieu de $[M_1M']$ appartient à une droite fixe Δ passant par Ω et dont on donnera une équation cartésienne.

4) Caractériser alors l'application f.

Exercice N°1.24* : **(extrait Bac série D session d'Août 2020 Niger)**

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + 2z + 10 = 0$.

2) Déterminer les nombres complexes u et v tels que : $\begin{cases} -2u + v = 1 + 13i \\ -u + v = 4 + 8i \end{cases}$

3) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -1 + 3i$,

$z_B = -1 - 3i$, $z_C = 3 - 5i$ et $z_D = 7 + 3i$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal

$(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$(unité 1 cm).

b) Démontrer que le triangle (BAD) est rectangle en A, et le triangle (BCD) est rectangle en C.

c) En déduire que les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle (Γ) dont on précisera le centre I et le rayon. Tracer (Γ) sur la figure.

4) Démontrer que les points C' et D', images respectives des nombres conjugués de z_C et z_D, sont sur le cercle (Γ).

Exercice N°1.25* : **(extrait Bac série D session d'Août 2020 Tchad)**

$\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes p plan affine euclidien tel que $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto z = x + iy$.

Soit le polynôme à coefficients complexe P tel que : $P(z) = az^3 + bz^2 + iz + 2(1 + i)$.

1) Calculer les nombres complexes a et b tels que : $P(i) = 0$ et $P(1 + i) = 0$.

2) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

3) Soient les points M_1 ; M_2, M_3 d'affixes respectives $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$ et z_3.

Calculer le nombre complexe z_3 pour que le triangle $M_1M_2M_3$ soit équilatéral de sens direct.

4) On note I le symétrique de M_3 par rapport à la droite (M_1M_2).

Construire l'image du triangle $M_1M_2M_3$ par la similitude directe S de centre I, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2, écrire l'expression complexe de la similitude.

<u>Exercice N°1.26*</u> : (extrait Bac série D session de Juillet 2020 Côte d'ivoire)

1) On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.

a) Justifier que $2i$ est une solution de (E).

b) Justifier que : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = (z-2i)\left(z^2 + (1+3i)z - 4\right)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') : $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$.

d) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E).

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i$; $1-i$, $2i$ et $-2-2i$.

a) Placer les points A, B, C et D sur votre feuille de copie.

b) Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.

3) Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.

a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$.

b) Démontre que $S(B) = C$.

c) Déterminer l'image du triangle BAD par la similitude S.

THEME N°2 : ALGEBRE LINEAIRE

Exercice N°2.1 :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un sous ensemble de E défini

par : $F = \{(x, y, z) \in E \,/\, x - 2y + 3z = 0\}$

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.

2) Déterminer la base et la dimension de F.

3) Soit $\vec{u}(0\,;1;2)$, $\vec{v}(1;2;1)$, et $\vec{v}(2;1;m)$ trois vecteurs de E.

Déterminer le réel m pour que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit liée.

Exercice N°2.2 :

Dans l’espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les vecteurs

$\overrightarrow{e_1}(2\,;-1\,;\,0)$, $\overrightarrow{e_2}(-3;2;1)$ et $\overrightarrow{e_3}(5;0;-2)$.

1) Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}\,(5;8;-14)$ dans $\mathcal{B}'$.

Exercice N°2.3 :

1) On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois sous-espaces vectoriels F, G, H définis respectivement par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 0 \; et \; y = z\right\};$$

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 0\right\} \text{ et } H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = 0\right\}.$$

Donner leur dimension.

2) Déterminer les sous-espaces $F \cap G, F \cap H, G \cap H, F + G, F + H$, et donner leur dimension.

Exercice N°2.4 :

On donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

Calculer A^{-1}, B^{-1}, $A \times B$, $B \times A$, $2A - 3B$

Exercice N°2.5 :

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} a & a \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1) Calculer $det(P)$. Pour quelles valeurs de a, la matrice P n'est pas inversible.

2) On suppose que $a = 1$.

a) Calculer P^2.

b) Déterminer P^{-1}, la matrice inverse de P.

Exercice N°2.6 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs

$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -a^2 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Montrer que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une famille libre.

2. Déterminer les valeurs de a pour que le vecteur $\overrightarrow{v_3}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

Exercice N°2.7 : (extrait Bac Blanc série C session de Mai 2009 Congo et Il Zone IV)

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques réelles, définies sur $\mathbb{R}$.

On considère l'application φ de E dans E définie par :

$\varphi(f) = mf'' + 2mf' + (m-1)f,\ m \in \mathbb{R}^*$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme.

2) Déterminer le noyau de φ. En donner la dimension et une base.

Exercice N°2.8 :

Soit l'application p définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $p(x,y) = (x+y, x-y)$.

1) Montrer que p est linéaire.

2) Déterminer $Kerp$, et Imp et donner leurs dimensions, p est-elle bijective ?

3) Déterminer pop.

Exercice N°2.9 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ t & -2 \end{pmatrix}$

1) Déterminer le nombre réel t pour que $AB = 3I_2$.

2) Soit le système (S_1) : $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$

a) Donner l'écriture matricielle du système (S_2)

b) Résoudre le système (S_1)

3) On considère le système (S_2) : $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -x + 2y - z = 3 \\ 4x - 5y + z = -4 \end{cases}$

a) Montrer que le système (S_2) est équivalent au système au système (S_3): $\begin{cases} z = x + y - 2 \\ -2x + y = 1 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$.

b) En déduire la résolution du système (S_2).

Exercice N°2.10 :

Donner l'écriture matricielle de chacun des systèmes linéaires suivants puis les résoudre

$$(S) : \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \text{ et } (S') : \begin{cases} 3x+y-2z+3t=0 \\ -x+2y-4z+6t=2 \\ 2x-y+2z-3t=0 \end{cases}$$

Exercice N°2.11 :

$\mathcal{P}$ est un plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},)$. f est l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ dont la matrice A dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est définie par : $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},\ \mathcal{P}_\lambda = \{\vec{u} \in \mathcal{P} \ /\ f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$.

1) Démontrer que $\mathcal{P}_\lambda$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

2) Démontrer que $\mathcal{P}_\lambda \neq \{\vec{0}\}$ si et seulement si $\lambda \in \{2,3\}$.

3) Déterminer une base de $\mathcal{P}_2$ et une base de $\mathcal{P}_3$.

4) Démontrer que $\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}$ et en déduire une nouvelle base de $\mathcal{P}$. Quelle est alors la matrice dans cette nouvelle base ?

Exercice N°2.12 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel rapporté à sa base canonique $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On donne les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, on considère l'endomorphisme f de $\mathcal{P}$ tel que : $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = \vec{0}$.

1) Vérifier que $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathcal{P}$.

2) Ecrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

3) Soit $\overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ image de $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par l'endomorphisme f, $f(\vec{u}) = \overrightarrow{u'}$

a) Montrer que $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

b) Exprimer les coordonnées de x' et y' de $\overrightarrow{u'}$ en fonction de x et y de $\vec{u}$.

c) Calculer $fof(\vec{u})$.

d) En déduire la nature de f.

e) Déterminer les éléments caractéristiques de f.

<u>Exercice N°2.13</u> : (extrait BAC série D session de Juin 2019 Congo)

L'espace vectoriel E est rapporté à sa base canonique $B(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par son expression analytique : quelque-soit le vecteur $\vec{u}(x,y)$ de E, l'image de $\vec{u}$ par f est le vecteur $\overrightarrow{u'}(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$

1) Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$.

2) En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

3) Soit $\vec{V}(3\,;-4)$ un vecteur de E, donner son image $\overrightarrow{V'}$ par l'endomorphisme f.

4) Montrer que f est un endomorphisme bijectif.

5. a) Calculer $fof(\vec{\imath})$ et $fof(\vec{\jmath})$.

b) En déduire la nature de f.

c) Déterminer alors la base et la direction de f.

<u>Exercice N°2.14</u> :

Soit φ l'endomorphisme du plan vectoriel $\mathcal{P}$ défini analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = (\sin\theta)x - (\cos\theta)y \\ y' = (\cos\theta)x + (\sin\theta)y \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

1) Donner la matrice de φ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathcal{P}$.

3) Déduire le noyau et l'image de φ.

4) Déterminer suivant les valeurs de θ l'ensemble E des vecteurs invariants par φ.

<u>Exercice N°2.15</u> : (extrait Bac Blanc série D session Mai 2019 Congo et Il Zone II)

I) On considère l'ensemble (H) tel que : $(H) = \{\overrightarrow{u}(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y - 2z = 0\}$

1) Montrer que (H) est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

2) a) Déterminer une base de (H).

b) Préciser la dimension de (H).

II) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui, au vecteur $\vec{u}(x: y; z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}(x'; y'; z')$

tel que : $f = \begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = y \\ z' = 2y - z \end{cases}$

1) Soit les ensembles (E_1) et (E_2) tels que :

$$(E_1) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(\vec{u}) = \vec{u}\} \quad \text{et} \quad (E_2) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$$

a) Montrer qu'une équation de (E_1) est $y - z = 0$. Préciser une base de (E_1).

b) Montrer qu'une équation de (E_2) est : $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Préciser une base de (E_2).

2) Déterminer fof.

3) En déduire la nature de f, puis préciser les éléments caractéristiques de f.

<u>Exercice N°2.16</u> : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini tel que :

$$f(\vec{\imath}) = 2\vec{\jmath} + \vec{k}\ ;\ 2f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{k} \ \text{ et } \ f(2\vec{\jmath} - 3\vec{k}) = 4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 7\vec{k}.$$

1) Déterminer $f(\vec{k})$.

2) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

3) Ecrire l'expression analytique de f.

4) Montrer que f est une projection vectorielle. Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice N°2.17 :

On considère les vecteurs $\overrightarrow{U_1}(1,1,0,0)$, $\overrightarrow{U_2}(0,1,1,0)$ et $\overrightarrow{U_3}(0,0,1,1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

1) Montrer que la famille $F = \left(\overrightarrow{U_1},\overrightarrow{U_2},\overrightarrow{U_3}\right)$ des trois vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est libre.

2) Soit le vecteur $\vec{U}(1,2,3,2)$ de l'espace $\mathbb{R}^4$, déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait :

$\vec{U}(1,2,3,2) = a\overrightarrow{U_1} + b\overrightarrow{U_2} + c\overrightarrow{U_3}$, c'est-à-dire que $\vec{U}$ soit une combinaison linéaire des

vecteurs de la famille F.

3) Soit le vecteur $\vec{V}(x,y,z,t)$ du sous espace E de $\mathbb{R}^4$, trouver une relation entre

les coordonnées x, y, z, et t du vecteur $\vec{V}$ de E sachant que l'on a : $\vec{V} = \alpha\overrightarrow{U_1} + \beta\overrightarrow{U_2} + \gamma\overrightarrow{U_3}$,

où α, β et γ sont des réels.

4) Vérifier que le vecteur $\vec{W}(20,20,-15,-15)$ appartient à E.

Exercice N°2.18 :

Soit E, un plan vectoriel muni d'une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère l'endomorphisme f de E défini dans

la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que : $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = \frac{7}{6}\vec{\imath} - \frac{1}{6}\vec{\jmath} \\ 6f(\vec{\jmath}) = 7\vec{\imath} + a\vec{\jmath} \end{cases}$ où a désigne un réel.

1) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2) Déterminer l'expression analytique de f.

3) Déterminer le réel a pour que f soit une projection vectorielle.

4) On pose $a = -1$, déterminer :

a) Le noyau de f ainsi qu'un vecteur directeur $\overrightarrow{e_1}$.

b) L'image de f ainsi qu'un vecteur directeur $\overrightarrow{e_2}$.

c) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E.

d) Donner la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Exercice N°2.19 :

Soient V et W deux sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On définit un ensemble

$$V + W = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n : \ \exists\, \vec{v} \in V\ ;\ \vec{w} \in W\ /\ \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}\}$$

1) Montrer que $V + W$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ une famille génératrice de V et $(\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_q})$ une famille génératrice de W.

Montrer qu'alors $(\overrightarrow{v_1}, \dots \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_q})$ est une famille génératrice de $V + W$.

Exercice N°2.20 :

Dans l'espace E est muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'endomorphisme f de E tel que :

$f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}\ \ et\ \ fof(\vec{\imath}) = f(\vec{\imath})$.

1) a) Qu'appelle-t-on dimension d'un espace

b) Donner la dimension de l'espace E notée $dimE$.

2) a) Exprimer le vecteur $f(\vec{\jmath})$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

b) Déterminer $fof(\vec{\jmath})$.

c) En déduire la nature de l'endomorphisme f.

3) a) Montrer que le sous ensemble $\mathcal{H}$ de E défini tel que :

$\mathcal{H} = (x, y) \in E$, tel que : $5x + 2y = 0$ est la base de l'endomorphisme f.

b) Montrer que le sous ensemble $\mathcal{G}$ de E défini tel que :

$\mathcal{G} = (x, y) \in E$, tel que : $5x + y = 0$ est la direction de l'endomorphisme f.

4) On considère les vecteurs suivants : $\vec{u} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$.

a) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de E.

b) Exprimer les vecteurs $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

<u>Exercice N°2.21 :</u>

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui, à tout vecteur $\vec{u}\,(x, y, z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'} = \varphi(\vec{u})$ dont les composantes (x', y', z') dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont définis par :

$$\begin{cases} x' = 5x + 6y + mz \\ y' = x + mz \\ z' = -x - 2y + z \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{R})$$

1) Ecrire l'application φ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

2) Pour quelle valeur de m φ est-elle bijective ?

3) Dans la suite, on pose $m = 3$.

a) Déterminer l'ensemble E des vecteurs invariants par φ.

b) Déterminer le noyau $Ker\varphi$ de φ et en donner une base $(\overrightarrow{e_1})$.

c) Déterminer l'image $Im\varphi$ de φ et en donner une base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

d) Montrer que $Ker\varphi$ et $Im\varphi$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice N°2.22 :

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}$ de dimension 3 rapporté à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, considère l'endomorphisme f de $\mathcal{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est définie par :

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & -1 & -4 \\ c & -1 & -1 \end{pmatrix}\ avec\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$$

1) Déterminer a, b et c de manière que f soit un projecteur.

2) Dans la suite, on pose : $a=4$; $b=-6$ et $c=-3$.

Vérifier que le vecteur $\vec{Q}\ (1;-2;-1)$ appartient au noyau $Kerf$ de f, puis montrer que $(\vec{Q})$ est une base de $kerf$.

Exercice N°2.23 :

Soit E_2 un plan muni d'une base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, on considère l'endomorphisme $\varphi(a,b)$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est :

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a+2b \end{pmatrix}$$

1) Démontrer que $\varphi(a,b)$ est bijectif si et seulement si $(a-b)(a+3b)\neq 0$.

2) Soit $\vec{u}$ un vecteur de E_2 . Donner, dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ les coordonnées de $\varphi_{(a,b)}(\vec{u})$ en fonction de celles de $\vec{u}$.

Discuter, suivant les valeurs de a et b, la nature du noyau $Ker\varphi_{(a,b)}$ et de l'image $Im\varphi_{(a,b)}$.

Donner dans chaque cas, une base de $Ker\varphi_{(a,b)}$ et une base de l'image $Im\varphi_{(a,b)}$.

3) Déterminer l'ensemble des couples (a,b) tels que $\varphi_{(a,b)}$ soit homothétie vectorielle de E_2.

Exercice N°2.24 :

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par : $f(\vec{\jmath}) = 10\vec{\imath} - 9\vec{\jmath}$ et $fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$

1) Calculer $f(\vec{\imath})$ et $fof(\vec{\imath})$.

2) En déduire la nature de l'application f.

3) a) Qu'est-ce qu'un automorphisme ?

b) Prouver que f est un automorphisme involutif.

c) Caractériser l'application f.

4) Soit les vecteurs $\vec{u} = 9\vec{\imath} - 8\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice N°2.25 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni d'une base $\mathcal{B} = (1, i)$ où le nombre complexe tel que $i^2 = -1$, on définit l'application p qui à tout complexe Z de $\mathbb{C}$ associe le complexe $p(Z)$ de $\mathbb{C}$ définit par : $p(Z) = \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2}i\right)Z^2 + i\overline{Z} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$

1) Déterminer la matrice de p relativement à la base $\mathcal{B} = (1, i)$.

2) Calculer $pop(1)$ et $pop(i)$.

4) En déduire la nature de p et les éléments caractéristiques.

Exercice N°2.26 :

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et les vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$; $\overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$ et $g(\vec{u}) = \overrightarrow{u'}$

tels que : $x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}=(y-z)\vec{\imath}+(ax+z)\vec{\jmath}+(x-y+2z)\vec{k}$ où $a\in\mathbb{R}$.

1) Déterminer l’expression analytique de g.

2) Donner la matrice de l’endomorphisme g.

3) Déterminer le réel a pour lequel g n’est pas bijectif.

4) Dans la suite, on pose : $a=1$, et on suppose que g est un projecteur.

a) Déterminer la base G de g puis en donner une base $\mathcal{B}_1=\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$.

b) Déterminer la direction H de g puis en donner une base $\mathcal{B}_2=\{\overrightarrow{e_3}\}$.

5) Soit les vecteurs $\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{k}$; $\vec{v}=-\vec{\jmath}-\vec{k}$ et $\vec{w}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k}$.

a) Montrer que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice de g dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice N°2.27 : (extrait Bac série E session 2007 Congo)

On rappelle que $\mathbb{C}$, l’ensemble des nombres complexes est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel dont une base est $\mathcal{B}=(1,i)$.

Soit $U=\frac{x}{3}+i\frac{y}{2}$ $(x\in\mathbb{R} : y\in\mathbb{R})$ un nombre complexe donné.

On considère l’application :

$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$

$Z\longrightarrow f(Z)=Z'=U.\overline{Z}$ où $\overline{Z}$ est le conjugué de Z.

1) Montrer que f est un endomorphisme.

2) Déterminer en fonction de x et y, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}=(1,i)$.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

(E) est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que f est une symétrie vectorielle.

a) Déterminer une équation cartésienne de (E).

b) Tracer (E).

<u>Exercice N°2.28</u> :

E est un plan vectoriel, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de E et f l'endomorphisme de E définie par :

$$\begin{cases} f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} \\ f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k} \\ f(\vec{k}) = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \end{cases}$$

1) Déterminer la matrice M de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

2) Pour tout réel α, on note E_α l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tel que : $f(\vec{u}) = \alpha\vec{u}$.

a) Montrer que si α est différent de 1 et -1, E_α est réduit au vecteur nul.

b) Déterminer les ensembles E_1 et E_{-1} et en donner une base pour chacune, nommée respectivement $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

3) a) Montrer que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.

b) Peut-on connaître $f(\vec{e_1})$, $f(\vec{e_2})$ et $f(\vec{e_3})$ sans calcul ? Justifier.

c) Si oui donner la matrice A de f dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

4) a) Montrer que f est involutif, c'est-à-dire : $\begin{cases} fof(\vec{\imath}) = \vec{\imath} \\ fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath} \\ fof(\vec{k}) = \vec{k} \end{cases}$ **ou** $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) En déduire la nature de f et donner les éléments caractéristiques.

Solutions des Exercices

Exercice N°2.1 :

1) Pour montrer que F est un sous espace vectoriel de E, il suffit de vérifier si F est stable par l'ensemble non vide, et stable par combinaison linéaire de deux vecteurs.

Alors on a :

- $\vec{0}(0,0,0) \in E \ / \ 0 - 2(0) + 3(0) = 0$, **alors** $\vec{0} \in F$. **D'où** $F \neq \emptyset$.
- **Soit** $F = \{(x,y,z) \in E / \ x - 2y + 3z = 0\}\,;\, x - 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 3z$

On a donc : $\vec{u}(x,y,z) \in F \Leftrightarrow (x,y,z) = (2y - 3z, y, z) = (2y, y, 0) + (-3z, 0, z)$

$= y(2,1,0) + z(-3,0,1)$. **Donc tout vecteur de F est une combinaison linéaire des vecteurs $(2,1,0)$ *et* $(-3,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ et** $\boxed{\text{par conséquent } F \text{ est un sous espace vectoriel de } E.}$

2) Déterminons la base et la dimension de F

$[(2,1,0)\,;\,(-3,0,1)]$ **est générateur de F d'après ce qui précède.**

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \ /\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Donc le système $[(2,1,0);\ (-3,0,1)]$ est une libre . $\boxed{\text{Ce système est par conséquent une base de } F. \text{ D'où}}$ $\boxed{dimF = 2.}$

3) Déterminons le réel m pour que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit liée.

$$\text{Soit } (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + m\gamma = 0 \end{cases}$$

Alors on a : $det(S) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 0(2m-1) - 1(m-2) + 2(1-4)$$

$$= 0 - m + 2 + 2 - 8$$

$$= -m - 4$$

Or ce système est lié, si et seulement si, son déterminant est nul : c'est-à-dire :

$$-m - 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = -4}$$

Exercice N°2.2 :

1) Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ / $\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3} = 0 \Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\alpha - 3\beta + 5\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est un système libre et par conséquent une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Coordonnées de $\vec{u}(5; 8; -14)$ dans la base $\mathcal{B}'$

Soit

$$\vec{u} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b + 5c = 5 & (1) \\ -a + 2b = 8 & (2) \\ b - 2c = -14 & (3) \end{cases}$$

D' après (2), on obtient : $-a = 8 - 2b \Leftrightarrow a = 2b - 8$ (4).

En remplaçant (4) dans (1) , on obtient : $4b - 16 - 3b + 5c = 5 \Leftrightarrow b + 5c = 21 \Leftrightarrow$

$$b = 21 - 5c \ (5).$$

En remplaçant (5) dans (3), on obtient : $21 - 7c = -14 \Leftrightarrow -7c = -35 \Leftrightarrow c = 5$ (6)

En remplaçant ensuite (6) dans (3), on obtient : $b - 10 = -14 \Leftrightarrow b = -4$ (7)

En remplaçant enfin (7) dans (2), on a alors : $a = -8 - 8 \Leftrightarrow a = -16$.

D'où $\begin{cases} a = -16 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}$. **Alors on a :** $\boxed{\vec{u}\,(-16; -4; 5) \text{ dans } \mathcal{B}'.}$

<u>Exercice N°2.3</u> :

1) * Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = 0 \ et \ y = z\} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, y, y) = y(0, 1, 1)$

D'où F **est engendré par le vecteur** $(0, 1, 1) \Rightarrow \boxed{dim(F) = 1.}$

*** Soit** $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ y = 0\} \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$.

D'où G **est engendré par les vecteurs** $(1, 0, 0)$ **et** $(0, 0, 1) \Rightarrow \boxed{dim(G) = 2\,.}$

*** Soit** $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / z = 0\} \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$.

D'où H **est engendré par les vecteurs** $(1, 0, 0)$ **et** $(0, 1, 0) \Rightarrow \boxed{dim(H) = 2}$

2) * Soit $\vec{u}(x, y, z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ et \ y = z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$. **Donc** $F \cap G = \{\vec{0}\} \Rightarrow$

$dim(F \cap G) = 0$ **. De même** $F \cap H = 0 \Rightarrow dim(F \cap H) = 0$.

*** Soit** $\vec{u}(x, y, z) \in G \cap H \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. **Donc** $G \cap H = \{(x, 0, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, 0, 0)$

$= x(1, 0, 0)$. **D'où** $G \cap H$ **est engendré par le vecteur** $(1, 0, 0) \Rightarrow dim(G \cap H) = 1$

*** Soit** $\vec{u}(x, y, z) \in F + G \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, y, y) + (x, 0, z) = (0 + x, y + 0, y + z)$

$= (x, y, y + z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1) + z(0, 0, 1)$.

D'où $F + G$ **représente la somme du vecteur de** F **et du vecteur de** G**. Alors** $dim(F + G) = 3$.

*** Soit** $\vec{u}(x, y, z) \in F + H \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, z, z) + (x, y, 0) = (0 + x, y + z, z + 0)$

$= (x, y + z, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 1, 1) =$

De même le sous-espace $F + H$ **représente la somme du vecteur de** F **et du vecteur de** H.

Par conséquent $dim(F+H)=3$.

Exercice N°2.4 :

On donne : $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

- Soit $\Delta = detA=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}=7-6=1\neq 0 \Rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}$
- Soit $\Delta' = detB=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=8-9=-1\neq 0 \Rightarrow \boxed{B^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}}$
- $A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2 & 2+3\\ 3+3 & 7-4\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{A+B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 6 & 3\end{pmatrix}}$
- $A\times B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+6 & 3-8\\ -6+21 & 9-28\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{A\times B=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 15 & -19\end{pmatrix}}$
- $B\times A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+9 & -4+21\\ 3-12 & 6-28\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{B\times A=\begin{pmatrix}7 & 17\\ -9 & -22\end{pmatrix}}$
- $2A-3B=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -9\\ -9 & +12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+6 & 4-9\\ 6-9 & 14+12\end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \boxed{2A-3B=\begin{pmatrix}8 & -5\\ -3 & 26\end{pmatrix}}$

Exercice N°2.5 :

1) Calculons $det(P)$

* On a : $det(P)=\begin{vmatrix}a & a\\ 2a & 1\end{vmatrix}=a-2a^2$

* P n'est pas inversible $\Leftrightarrow det(P)=0$, c'est-à-dire $a-2a^2=0$

On a alors $a(1-2a)=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $a=\frac{1}{2}$. D'où $\boxed{a\in\left\{0;\frac{1}{2}\right\}}$.

2) On suppose que $a=1 \Rightarrow P$ devient $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

a) On a : $P^2=P\times P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 1+1\\ 2+2 & 2+1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{P^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}.}$

b) Soit $det(P)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \Rightarrow \boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}}$

Exercice N°2.6 :

1) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ / $\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} = 0 \Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha + \beta = 0\\ \beta = 0\\ \alpha = 0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

Donc $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une famille libre.

2) Déterminons les valeurs de a pour que le vecteur $\overrightarrow{v_3}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ / $\vec{w} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\2\\-a^2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a = \alpha + \beta \ (1)\\ 2 = \beta \quad (2)\\ -a^2 = \alpha \quad (3)\end{cases}$

En multipliant (1) fois moins 1, on obtient une équation du second degré suivant :

$-a^2 - a + 2 = 0$, **avec** $\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow$

Les solutions de cette équation sont définies par : $a_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{-2} = 1$ **et** $a_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{-2} = -2$.

D'où les valeurs de a sont : $\boxed{\begin{cases}a_1 = 1\\ a_2 = -2\end{cases}.}$

Exercice N°2.7 :

1) Pour montrer que φ est un endomorphisme, il suffit de vérifier si φ est une application linéaire, c'est-à-dire :

$\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\,; \forall(f_1; f_2) \in E$, **on a :** $\varphi(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\varphi(f_1) + \beta\varphi(f_2)$

On a alors :

$$\varphi(\alpha f_1 + \beta f_2) = m(\alpha f_1'' + \beta f_2'') + 2m(\alpha f_1' + \beta f_2') + (m-1)(\alpha f_1 + \beta f_2)$$

$$= \alpha m f_1'' + 2\alpha m f_1' + \alpha(m-1)f_1 + \beta m f_2'' + 2\beta m f_2' + \beta(m-1)f_2$$

$$= \alpha[m f_1'' + 2m f_1' + (m-1)f_1] + \beta[m f_2'' + 2m f_2' + (m-1)f_2]$$

$$= \alpha\varphi(f_1) + \beta\varphi(f_2)$$

D'où φ est linéaire, et de plus φ est définie de E dans E, par conséquent φ est un endomorphisme.

2) Déterminons le noyau de φ. Donnons sa dimension et sa base.

Soit $Ker\varphi : \varphi(f) = 0 \Leftrightarrow mf'' + 2mf' + (m-1)f = 0$, ∃ d'une équation différentielle

Notons $f'' = r^2$; $f' = r$ et $f = 1$.

Alors son équation caractéristique est : $mr^2 + 2mr + m - 1 = 0$,

Avec $\Delta' = (m)^2 - m(m-1) = m > 0$, alors cette équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 définies par :

$$r_1 = \frac{-m-\sqrt{m}}{m} = -1 - \frac{\sqrt{m}}{m} = -1 - \frac{1}{\sqrt{m}} \text{ et } r_2 = \frac{-m+\sqrt{m}}{m} = -1 + \frac{\sqrt{m}}{m} = -1 + \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

D'où $\boxed{Ker\varphi = \left\{Ae^{\left(-1-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)x} + Be^{\left(-1+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)x};\ A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\right\}}$

$\left\{e^{\left(-1-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)x};\ e^{\left(-1+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)x}\right\}$ **est une famille génératrice de $Ker\varphi$, et de plus ces fonctions exponentielles ne sont pas proportionnelles, elles forment donc une famille libre de $Ker\varphi$ et par conséquent une base de $Ker\varphi$. Alors** $\boxed{dim(Ker\varphi) = 2.}$

<u>Exercice N°2.8</u> :

1) Pour montrer que p est linéaire, il suffit de vérifier si et seulement si

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, (x,y),\ (x',y') \in \mathbb{R}^2;\ p\big(\alpha(x,y) + \beta(x',y')\big) = \alpha p(x,y) + \beta p(x',y')$$

On a alors :

$$p\big(\alpha(x,y) + \beta(x',y')\big) = p(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$

$$= (\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y')$$

$$= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y) + (\beta x' + \beta y', \beta x' - \beta y')$$

$$= \alpha(x + y, x - y) + \beta(x' + y', x' - y')$$

$$= \alpha p(x, y) + \beta p(x', y')$$

D'où p est linéaire.

2) Déterminons $Kerp$, et Imp et donnons leurs dimensions, en suite vérifions si p est bijective

*** Soit** $Kerp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, p((x, y)) = (0, 0)\} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$

D'où $kerp = \{\vec{0}\}$, **alors** $dim(kerp) = 0.$

*** Soit** $Imp = \{(x + y, x - y) \,/(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 1) + y(1, -1)/\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$

D'où Imp est engendré par deux vecteurs qui sont libre, alors $dim(Imp) = 2$.

*** Sachant que la dimension de l'ensemble de départ est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivé, et de plus p est bijective si elle est soit injective ou bien surjective. Or p est injective, car $Kerp = \{\vec{0}\}$ (vecteur nul) et aussi surjective, car $dim(\mathbb{R}^2) = dim(Imp) = 2$, c'est-à-dire $Imp = \mathbb{R}^2$. Par conséquent p est bien bijective.**

3) Déterminons pop

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, **On a alors :** $pop(x, y) = p[p(x, y)] = p(x + y, x - y)$

$$= ((x + y) + (x - y), (x + y) - (x - y))$$

$$= (2x, 2y) = 2(x, y)$$

D'où $\boxed{pop = 2Id_{\mathbb{R}^2}}$

<u>Exercice N°2.9</u> :

1) Déterminons le réel t pour que $AB = 3I_2$

On donne : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ t & -2 \end{pmatrix}$

On a alors : $AB = 3I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ t & -2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8+t & 2-2 \\ -20-4t & -5+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8+t & 0 \\ -20-4t & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Par identification on a : $\begin{cases} 8+t=3 \\ -20-4t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-5 \\ -20-4t=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t=-5.}$

2) Soit le système (S_1) : $\begin{cases} -2x+y=1 \\ 5x-4y=-2 \end{cases}$

a) Ecriture matricielle de (S_1)

On a : $\boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \Leftrightarrow A.X = C,$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Résolution du système (S_1)

1^{ER} Méthode : D'après 2) a) on a : $A.X = C \Leftrightarrow X = A^{-1} \times C$

Avec $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}B,$ car $det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 8-5 = 3 \neq 0.$

On a alors : $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4+2 \\ -5+4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où $\boxed{S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)\right\}}$

$2^{\text{Ème}}$ Méthode :

Soit le système : $\begin{cases} -2x+y=1 & (1) \\ 5x-4y=-2 & (2) \end{cases}$

En multipliant (1) fois 4, on obtient : $-8x + 5x = 4 - 2 \Leftrightarrow -3x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ (3).

En remplaçant (3) dans (2), on a : $-\frac{10}{3} - 4y = -2 \Leftrightarrow -4y = -2 + \frac{10}{3} \Leftrightarrow -4y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}$

D'où $\boxed{S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)\right\}}$

3) On considère le système (S_2) suivant : $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -x + 2y - z = 3 \\ 4x - 5y + z = -4 \end{cases}$

a) Montrons que le système (S_2) est équivalent au système (S_3): $\begin{cases} z = x + y - 2 \\ -2x + y = 1 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$

On a (S_2) : $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -x + 2y - z = 3 \\ 4x - 5y + z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + y - 2 \\ -x + 2y - (x + y - 2) = 3 \\ 4x - 5y + x + y - 2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + y - 2 \\ -2x + y + 2 = 3 \\ 5x - 4y - 2 = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x + y - 2 \\ -2x + y = 1 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$. Donc le système (S_2) est équivalent au système (S_3).

b) Résolution du système (S_2)

Soit le système (S_2) : $\begin{cases} z = x + y - 2 & (1) \\ -2x + y = 1 & (2) \\ 5x - 4y = -2 & (3) \end{cases}$

Avec le système : $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$ c'est-à-dire (S_1), ces solutions sont $x = -\frac{2}{3}$ et $y = -\frac{1}{3}$

d'après 2) b).

On a alors : $z = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 2 = -3$. D'où $\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -3\right)\right\}}$

Exercice N°2.10 :

Soient (S) : $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ et (S'): $\begin{cases} 3x + y - 2z - 3t = 0 \\ -x + 2y - 4z + 6t = 2 \\ 2x - y + 2z - 3t = 0 \end{cases}$

- **Ecriture Matricielle de (S) et celle de (S')**

$$\boxed{(S):\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}\ ;\ \boxed{(S'):\begin{pmatrix}3&1&-2&3\\-1&2&-4&6\\2&-1&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}}$$

- **Résolution des systèmes linéaires ci-dessus :**

Soit $det(S)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&1\\1&2\end{matrix}=(1+1+4)-(2+2+1)=1\neq 0, rgS=n=p=3$

((S) est donc un système de cramer). On a alors :

$$x=\frac{det(A)}{det(S)}=\frac{\begin{vmatrix}3&1&1\\2&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}}{1}=\frac{3(1-2)-2(2-1)+(4-1)}{1}=-1.$$

$$y=\frac{det(B)}{det(S)}=\frac{\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}}{1}=\frac{(2-1)-3(2-1)+(2-2)}{1}=-2.$$

$$z=\frac{det(C)}{det(S)}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&3\\2&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}}{1}=\frac{(1-4)-(2-2)+3(4-1)}{1}=6.$$

D'où $\boxed{S=\{-1;-2\,;6\}}$

- **D'après la forme matricielle de (S'), on en déduit que le $rgS'\geq 3$.**

On prend alors $M=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow det(M)=\begin{vmatrix}3&1\\-1&2\end{vmatrix}=6+1=7\neq 0.$

On considère alors le système suivant : $\begin{cases}3x+y=2z-3t & (1)\\-x+2y=2+4z-6t & (2)\end{cases}$

En multipliant (1) fois moins 2, on obtient $-7x=2\Leftrightarrow x=-2/7$.

D'après le système (S') , on a la troisième équation : $y=2z-3t-2x$.

Si on remplace maintenant la valeur de x trouvée dans la troisième équation de (S'),

on aura $2x-y+2z-3t=2(-2/7)-2z+3t+2(-2/7)+2z-3t=-10/7\neq 0$

Donc le système (S') n'admet aucune solution.

Exercice N°2.11 :

1) Pour démontre que $\mathcal{P}_\lambda$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{P}$, il suffit de vérifier que si $\mathcal{P}_\lambda$ est non vide et stable par combinaison linéaire :

On a alors :

- **Soit $\vec{0}(0,0) \in \mathcal{P} \,/\, f(\vec{0}_{\mathcal{P}}) = \lambda\vec{0}_{\mathcal{P}}$. Donc $\vec{0} \in \mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}_\lambda \neq \emptyset$**
- **Soient $(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{P}_\lambda$; $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \lambda(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha(\lambda\vec{u})+\beta(\lambda\vec{v})$**

  $\Longrightarrow f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v})$. Donc $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \in E_\lambda$

Par conséquent $\mathcal{P}_\lambda$ est bien un sous espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

2) Démontrons que $\mathcal{P}_\lambda \neq \{\vec{0}\}$ si et seulement $\lambda \in \{2,3\}$

Soit $\vec{u}\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ et $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}\binom{x}{y} = \binom{\lambda x}{\lambda y} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{3}x - \frac{2}{3}y = \lambda x \\ -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 8x - 2y = 3\lambda x \\ -x + 7y = 3\lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8-3\lambda)x - 2y = 0 \\ -x + (7-3\lambda)y = 0 \end{cases}$, or ce système admet des solutions différentes de $(0,0)$ si et seulement si son déterminant est nul, c'est-à-dire : $detS = \begin{vmatrix} 8-3\lambda & -2 \\ -1 & 7-3\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (8-3\lambda)(7-3\lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 45\lambda + 54 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 3$.

Donc $\mathcal{P}_\lambda \neq \{\vec{0}\}$ si et seulement si $\lambda \in \{2\,;3\}$

3) Déterminons une base de $\mathcal{P}_2$ et une base de $\mathcal{P}_3$

Soit $\mathcal{P}_2 = \{\vec{u}\,(x,y) \in \mathcal{P} \,/\, f(\vec{u}) = 2\vec{u}\,\} \Leftrightarrow \begin{cases} (8-3\times 2)x - 2y = 0 \\ -x + (7-3\times 2)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2(x-y) = 0 \\ -(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$. Donc on a : $\binom{x}{y} = \binom{x}{x} = x\binom{1}{1} \Longrightarrow \vec{u} = x\overrightarrow{e_1}$

D'où $\overrightarrow{e_1}$ est une base de $\mathcal{P}_2$ avec $\overrightarrow{e_1}\binom{1}{1}$ ou $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

Soit $\mathcal{P}_3 = \{\vec{u}\,(x,y) \in \mathcal{P} \ / \ f(\vec{u}) = 3\vec{u}\,\} \Leftrightarrow \begin{cases}(8-3\times 3)x-2y=0\\ -x+(7-3\times 3)y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x-2y=0\\ -x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}-(x+2y)=0\\ \quad -(x+2y)\end{cases} \Leftrightarrow x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y.$ **Donc on a :** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\vec{u}=y\overrightarrow{e_2}.$ **D'où** $\overrightarrow{e_2}$ **est une base de** $\mathcal{P}_3$ **avec** $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ **ou** $\overrightarrow{e_2}=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$

4) **Soit** $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow x+2(x)=0 \Leftrightarrow 3x=0 \Leftrightarrow x=y=0.$

Donc $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{\vec{0}\}$. **De plus, soit** $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, **cherchons** α **et** $\beta \in \mathbb{R}$ **tels que :**

$\vec{u}=\alpha\overrightarrow{e_1}+\beta\overrightarrow{e_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha-2\beta \ (1)\\ y=\alpha+\beta \quad (2)\end{cases}$

En multipliant (2) **fois** 2, **on obtient :** $3\alpha = x+2y \Leftrightarrow \alpha=\frac{x+2y}{3}$

En multipliant (1) **fois moins** 1, **on obtient :** $3\beta=-x+y \Leftrightarrow \beta=\frac{-x+y}{3}$

$\Rightarrow \vec{u}=\frac{x+2y}{3}\overrightarrow{e_1}+\frac{-x+y}{3}\overrightarrow{e_2}$ **avec** $\frac{x+2y}{3}\overrightarrow{e_1}\in\mathcal{P}_2$ **et** $\frac{-x+y}{3}\overrightarrow{e_2}\in\mathcal{P}_3$

Alors on a : $\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}$

- $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ **est alors une nouvelle base de** $\mathcal{P}$

D'après 3) $\overrightarrow{e_1}\in\mathcal{P}_2 \Rightarrow f(\overrightarrow{e_1})=2\overrightarrow{e_1}=2\overrightarrow{e_1}+0\overrightarrow{e_2}$ **et** $\overrightarrow{e_2}\in\mathcal{P}_3 \Rightarrow f(\overrightarrow{e_2})=3\overrightarrow{e_2}$

$=0\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}$. **D'où cette nouvelle matrice est :** $A\big(f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})\big)=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$

<u>Exercice N°2.12</u> :

1) $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ **est une base de** $\mathcal{P} \Leftrightarrow det(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) \neq 0$

$det(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})=\begin{vmatrix}3&3\\-1&-2\end{vmatrix}=-6+3=-3\neq 0 \Rightarrow$ $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ **est donc une base de** $\mathcal{P}$

2) **Matrice de** f **dans la base** $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$

Avec $\begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} \\ f(\vec{v}) = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} + 0\vec{v} \\ f(\vec{v}) = 0\vec{u} + 0\vec{v} \end{cases}$ D'où $\boxed{M_{f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3° a) Montrons que $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} \\ f(\vec{v}) = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(3\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ f(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} \;\; (1) \\ 3f(\vec{\imath}) - 2f(\vec{\jmath}) = 0 \;\; (2) \end{cases} \overset{\times -2}{\Rightarrow} \begin{cases} 3f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ 3f(\vec{\imath}) - 2f(\vec{\jmath}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -3f(\vec{\imath}) = -6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \Leftrightarrow f(\vec{\imath}) = \frac{6}{3}\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath} = 2\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath} \;\; (3)$$

En remplaçant (3) dans (2), on a : $3\left(2\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath}\right) - 2f(\vec{\jmath}) = 0 \Leftrightarrow -2f(\vec{\jmath}) = -6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \Leftrightarrow$

$f(\vec{\jmath}) = \frac{6}{2}\vec{\imath} - \frac{2}{2}\vec{\jmath} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$. D'où $\boxed{\begin{cases} f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases}}$

b) Coordonnées x' et y' en fonction de x et y

$$\overrightarrow{u'} = f(\vec{u}) \Rightarrow (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) = f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \Rightarrow x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = xf(\vec{\imath}) + yf(\vec{\jmath}) \Leftrightarrow$$

$$x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = x\left(2\vec{\imath} - \frac{2}{3}\vec{\jmath}\right) + y(3\vec{\imath} - \vec{\jmath}) \Leftrightarrow x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = (2x + 3y)\vec{\imath} + \left(-\frac{2}{3}x - y\right)\vec{\jmath}$$

Par identification on obtient le résultat ci-contre : $\boxed{\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -\frac{2}{3}x - y \end{cases}}$

c) Calculons $fof(\vec{u})$

Soit $f = \begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -\frac{2}{3}x - y \end{cases} \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \overrightarrow{u'}$

On a donc : $fof(\vec{u}) = f[f(\vec{u})]$

$= f(\vec{u}')$

$= f\left((2x + 3y)\vec{\imath} + \left(-\frac{2}{3}x - y\right)\vec{\jmath}\right)$

$$= (2x + 3y)f(\vec{i}) + \left(-\frac{2}{3}x - y\right)f(\vec{j})$$

$$= (2x + 3y)\left(2\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}\right) + \left(-\frac{2}{3}x - y\right)(3\vec{i} - \vec{j})$$

$$= (4x - 2x + 6y - 3y)\vec{i} + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x - 2y + y\right)\vec{j}$$

$$= (2x + 3y)\vec{i} + \left(-\frac{2}{3}x - y\right)\vec{j}$$

D'où $\boxed{fof(\vec{u}) = f(\vec{u})}$

d) Nature de f

Comme $fof(\vec{u}) = f(\vec{u}) \Longrightarrow f$ est une projection vectorielle

e) Eléments caractéristiques de f

*** Base de f : Soit** $\vec{u}(x, y) \in \mathcal{P}$ / $f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 3y \\ y = -\frac{2}{3}x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ \frac{2}{3}x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ \frac{2}{3}(x + 3y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ **le système se réduit en une seule équation** $x + 3y = 0$.

D'où la base de f est la droite vectorielle d'équation $x + 3y = 0$ engendrée par le vecteur

$\vec{e_1}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*** Direction de f : Soit** $Kerf \longmapsto \vec{u}(x, y) \in \mathcal{P}$ /

$f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -\frac{2}{3}x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -\frac{1}{3}(2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ **le système se réduit en une seule équation** $2x + 3y = 0$.

D'où la direction de f est la droite vectorielle d'équation $2x + 3y = 0$ engendrée par le vecteur

$\vec{e_2}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice N°2.13 :

1) **Déterminons $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$**

On a : $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = (2x + 3y)\vec{\imath} + (-x - 2y)\vec{\jmath}$

$$\Leftrightarrow x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = 2x\vec{\imath} + 3y\vec{\imath} - x\vec{\jmath} - 2y\vec{\jmath}$$

$$\Leftrightarrow x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = (2\vec{\imath} - \vec{\jmath})x + (3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})y$$

Par définition on : $x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = xf(\vec{\imath}) + yf(\vec{\jmath})$

Par conséquent on a : $\boxed{\begin{cases} f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} \end{cases}}$

2) Matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$\boxed{M_{f(\vec{\imath},\vec{\jmath})} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

3) Donnons l'image de $\vec{V}$ par f

Posons $\vec{V'} = f(\vec{V}) \Leftrightarrow \vec{V}\,' : \begin{cases} x' = 2 \times 3 + 3 \times (-4) \\ y' = -(3) - 2 \times (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 6 - 12 \\ y' = -3 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -6 \\ y' = 5 \end{cases}$

D'où $\boxed{\vec{V'}(-6\,;5)}$

4) Montrons que f est bijectif

$$detM_{f(\vec{\imath},\vec{\jmath})} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times (-1) = -4 + 3 \Rightarrow detM_f = -1 \neq 0$$

$\boxed{\text{Alors } f \text{ est bijectif}}$

5) a) On a : $fof(\vec{\imath}) = f[f(\vec{\imath})] = f(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = 2f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath})$

$$= 2(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}) - (3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$$

$$\Rightarrow \boxed{fof(\vec{\imath}) = \vec{\imath}}$$

Et $fof(\vec{\jmath}) = f[f(\vec{\jmath})] = f(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}) = 3f(\vec{\imath}) - 2f(\vec{\jmath})$

$$= 3(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}) - 2(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$$

$$\Rightarrow \boxed{fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}}$$

b) Nature de f

Comme $\begin{cases} fof(\vec{\imath}) = \vec{\imath} \\ fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath} \end{cases}$ c'est-à-dire : $fof = Id_E$, alors f est une symétrie vectorielle.

c) Déduisons alors la base et la direction de f

* Base de f : $f\big((x,y)\big) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 3y \\ y = -x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3y = 0 \Leftrightarrow$

$x = -3y$. On a donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = y\overrightarrow{e_1}$ avec $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où la base de f est une droite vectorielle d'équation $x = -3y$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1}$.

* Direction de f : $f\big((x,y)\big) = (-x,-y) \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2x + 3y \\ -y = -x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$

$\Leftrightarrow y = -x$. On donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x\overrightarrow{e_2}$ avec $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'où la direction de f est une droite vectorielle d'équation $x + y = 0$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_2}$.

Exercice N°2.14 :

Soit φ l'endomorphisme du plan vectoriel $\mathcal{P}$ défini analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = (\sin\theta)x - (\cos\theta)y \\ y' = (\cos\theta)x + (\sin\theta)y \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

1) Matrice de φ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On a : $\begin{cases} x' = (\sin\theta)x - (\cos\theta)y \\ y' = (\cos\theta)x + (\sin\theta)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Or par définition, on a : $\overrightarrow{u'} = M\varphi \times \vec{u}$ avec $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$.

Alors, par comparaison, on obtient : $\boxed{M(\varphi(\vec{\imath},\vec{\jmath}))=\begin{pmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}}$

2) Pour montrer que φ est un automorphisme de $\mathcal{P}$, il suffit de vérifier si φ est un endomorphisme bijectif.

On a alors : $detM(\varphi(\vec{\imath},\vec{\jmath}))=\begin{vmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\neq 0$

Donc φ est un endomorphisme bijectif, c'est-à-dire un automorphisme de $\mathcal{P}$.

3) Noyau et l'image de φ

Comme φ est bijectif d'après 2) Alors le noyau $Ker\varphi=\{\vec{0}\}$ et l'image $Im\varphi=\mathcal{P}$.

4) Déterminons suivant les valeurs de θ l'ensemble E des vecteurs invariants par φ.

Soit $E=\left\{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}\ /\ f((x,y))=(x,y)\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(\sin\theta)x-(\cos\theta)y\\ y=(\cos\theta)x+(\sin\theta)y\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(1-\sin\theta)x+(\cos\theta)y=0\\ (\cos\theta)x+(\sin\theta-1)y=0\end{cases}.$$

Soit le déterminant de ce système ci-dessus :

$$det(S)=\begin{vmatrix}1-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta-1\end{vmatrix}=(1-\sin\theta)(\sin\theta-1)-\cos^2\theta$$

$$=-1+2\sin\theta-\sin^2\theta-\cos^2\theta$$

$$=-2+2\sin\theta$$

1er cas : le système admet des solutions nulles, si et seulement si son déterminant est différent de zéro, alors on a :

$$-2+2\sin\theta\neq 0\Leftrightarrow\sin\theta\neq 1\Leftrightarrow\theta\neq\frac{\pi}{2}$$

Donc pour $\theta\neq\frac{\pi}{2}$, L'ensemble E est réduit au vecteur nul, c'est-à-dire $E=\{\vec{0}\}$.

$2^{ème}$ cas : le système admet des solutions différentes de $(0,0)$ si et seulement si son déterminant est nul, alors aura : $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$

$$\text{Donc } E \text{ devient : } \begin{cases} \left(1-\sin\frac{\pi}{2}\right)x + \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)y = 0 \\ \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)x + \left(\sin\frac{\pi}{2} - 1\right)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-1)x + (0)x = 0 \\ (0)x + (1-1)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 = 0$$

$$\boxed{\text{D'où pour } \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ l'ensemble } E = \mathcal{P}.}$$

<u>Exercice N°2.15</u> :

I) On donne : $(H) = \{\vec{u}\,(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / \, x + y - 2z = 0\}$

1) Soit $\vec{0}(0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \;/\; H = 0 + 2 - 2(0) = 0$, alors $\vec{0} \in H$. D'où $H \neq \emptyset$.

*** Soit $(H) = \{\vec{u}(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + y - 2z = 0\}$; $x + y - 2z = 0 \Leftrightarrow x = y - 2z$;**

$(x;y;z) \in (H) \Leftrightarrow (x;y;z) = (y - 2z;y;z) = (y\,;y\,;0y) + (-2z\,;0z\,;z)$

$= y(1;1;0) + z(-2;0;1)$. Donc tout vecteur de H est une combinaison linéaire des vecteurs $(1,1,0)$ et $(-2,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ et par conséquent H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) a) $[(1,1,0)\,;(-2,0,1)]$ est générateur de H d'après 1),

*** Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha - 2\beta == 0\\ \alpha = 0 \\ \beta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. D'où le système $[(1,1,0)\,;\,(-2,0,1)]$ est libre, et par conséquent une base de H.**

b) Comme H a pour base le système $[(1,1,0);\,(-2,0,1)] \Rightarrow dim(H) = 2$.

II) Soit $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ associe le vecteur $\vec{u}(x'\,;y'\,;z')$ tel que $f = \begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = y \\ z' = 2y - z\end{cases}$

1) a) On a : $(E_1) = \{\overrightarrow{u \in} \mathbb{R}^3 \;/\; f(\vec{u}) = \vec{u}\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x + 2y - 2z \\ y = y \\ z = 2y - z\end{cases} \Leftrightarrow 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$

D'où (E_1) est le plan vectoriel d'équation $y - z = 0$.

Et a pour base $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ définie telle que : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0x \\ 0x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0y \\ y \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \vec{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ avec $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{e_2} = \vec{\jmath} + \vec{k}$

b) On a : $(E_1) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(\vec{u}) = -\vec{u}\} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x + 2y - 2z \\ -y = y \\ -z = 2y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

D'où (E_2) est une droite vectorielle d'équation : $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Et a pour base $(\overrightarrow{e_3})$ définie telle que : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = x\overrightarrow{e_3}$ avec $\overrightarrow{e_3} = \vec{\imath} + \vec{k}$

2) Calculons fof

Soit $f = \begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = y \\ z' = 2y - z \end{cases} \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \overrightarrow{u'}$

On a donc : $fof(\vec{u}) = f[f(\vec{u})]$

$$= f\left(\overrightarrow{u'}\right)$$

$$= f\left(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}\right)$$

$$= f\left[(x + 2y - 2z)\vec{\imath} + (y)\vec{\jmath} + (2y - z)\vec{k}\right]$$

$$= (x + 2y - 2z)f(\vec{\imath}) + yf(\vec{\jmath}) + (2y - z)f\left(\vec{k}\right)$$

$$= (x + 2y - 2z)\vec{\imath} + (y)\left(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}\right) + (2y - z)\left(-2\vec{\imath} - \vec{k}\right)$$

$$= (x + 2y + 2y - 4y - 2z + 2z)\vec{\imath} + (y)\vec{\jmath} + (2y - 2y + z)\vec{k}$$

$$= (x)\vec{\imath} + (y)\vec{\jmath} + (z)\vec{k}$$

D'où : $\boxed{fof(\vec{u}) = \vec{u}}$

- **Eléments caractéristiques de f**

Base de f : c'est le plan vectoriel E_1 engendré par $\vec{e_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ d'après 1) a).

Direction de f: c'est la droite vectorielle engendrée par $\vec{e_3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ d'après 1) b).

<u>Exercice N°2.16</u> :

1) Déterminons $f(\vec{k})$

$$f(2\vec{\imath} - 3\vec{k}) = 4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 7\vec{k} \Leftrightarrow 2f(\vec{\jmath}) - 3f(\vec{k}) = 4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 7\vec{k} \Leftrightarrow$$

$$3f(\vec{k}) = -4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 7\vec{k} + 2f(\vec{\jmath}) \text{ avec } 2f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{k} \Leftrightarrow 3f(\vec{k}) = -3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

soit en fin $\boxed{f(\vec{k}) = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}}$

2) Matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

On a : $$\begin{cases} f(\vec{\imath}) = 2\vec{\jmath} + \vec{k} \\ f(\vec{\jmath}) = \frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{k} \\ f(\vec{k}) = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(f(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}}$$

3) Expression analytique de f

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; $\vec{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ **et** $f(\vec{u}) = \vec{u'} \Leftrightarrow \vec{u'} = M_f \times \vec{u} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f = \begin{cases} x' = \frac{1}{2}y - z \\ y' = 2x + 2z \\ z' = x - \frac{1}{2}y + 2z \end{cases}}$$

4) Montrons que f est une projection vectorielle

Soit $f = \begin{cases} x' = \frac{1}{2}y - z \\ y' = 2x + 2z \\ z' = x - \frac{1}{2}y + 2z \end{cases} \Rightarrow fof = \begin{cases} x'' = \frac{1}{2}y' - z' \\ y'' = 2x' + 2z' \\ z'' = x' - \frac{1}{2}y' + 2z' \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}(2x+2z) - \left(x - \frac{1}{2}y + 2z\right) \\ y'' = 2\left(\frac{1}{2}y - z\right) + 2\left(x - \frac{1}{2}y + 2z\right) \\ z'' = \left(\frac{1}{2}y - z\right) - \frac{1}{2}(2x+2z) + 2\left(x - \frac{1}{2}y + 2z\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{2}y - z \\ y'' = 2x + 2z \\ z'' = x - \frac{1}{2}y + 2z \end{cases}$$

Soit enfin : $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases}$ c'est-à-dire $fof = f$. Donc f est une projection vectorielle

* Eléments caractéristiques de f :

Soit la Base $= \left\{ \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ f((x,y,z)) = (x,y,z) \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - z \\ y = 2x + 2z \Leftrightarrow 2x - y + 2z = 0 \\ z = x - \frac{1}{2}y + 2z \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = 2x + 2z$. On a donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x\overrightarrow{e_1} + z\overrightarrow{e_2}$

D'où la base de f est le plan vectoriel d'équation $2x - y + 2z = 0$ engendré par $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit la direction de f notée par : $Kerf = \left\{ \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ f((x,y,z)) = (0,0,0) \right\} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}y - z \\ 0 = 2x + 2z \\ 0 = x - \frac{1}{2}y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}y = z \\ x = -z \\ -z - \frac{1}{2}y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 2z \end{cases}$. On a donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$

$= z\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = z\overrightarrow{e_3}$ avec $\overrightarrow{e_3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où la direction de f notée $Kerf$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_3}$

Exercice N°2.17 :

1) Montrons que la famille $F = \left(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\right)$ est libre.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha\overrightarrow{U_1} + \beta\overrightarrow{U_2} + \gamma\overrightarrow{U_3} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\alpha = 0\\ \alpha+\beta = 0\\ \beta+\gamma = 0\\ \gamma = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 0.\\ \gamma = 0\end{cases}$ **Alors la famille F est libre, puisque $\alpha = \beta = \gamma = 0$.**

2) Déterminons les réels a, b et c

Soit $\vec{U} = a\overrightarrow{U_1} + b\overrightarrow{U_2} + c\overrightarrow{U_3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 1\\ a+b = 2\\ b+c = 3\\ c = 2\end{cases}$

D'où $\boxed{\begin{cases}a = 1\\ b = 1 \text{ et } \vec{U} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} + 2\overrightarrow{U_3}\\ c = 2\end{cases}}$

3) Relation entre x, y, z et t

Soit $\vec{V} = \alpha\overrightarrow{U_1} + \beta\overrightarrow{U_2} + \gamma\overrightarrow{U_3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \alpha & (1)\\ y = \alpha+\beta & (2)\\ z = \beta+\gamma & (3)\\ t = \gamma & (4)\end{cases}$

En multipliant (2) fois moins 1 et (4) fois moins 1, on obtient $\boxed{x - y + z - t = 0}$.

4) Soit $\overrightarrow{W}(20, 20, -15, -15)$. $\overrightarrow{W} \in E \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{W}} - y_{\overrightarrow{W}} + z_{\overrightarrow{W}} - t_{\overrightarrow{W}} = 0$

On a alors : $20 - 20 - 15 - (15) = 0$. **Donc $\overrightarrow{W} \in E$.**

Exercice N°2.18 :

1) Matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

On a : $\begin{cases} f(\vec{i}) = \frac{1}{6}(7\vec{i} - \vec{j}) \\ f(\vec{j}) = \frac{1}{6}(7\vec{i} + a\vec{j}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(f(\vec{i},\vec{j})) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -1 & a \end{pmatrix}}$

2) L’expression analytique de f

Soit $\vec{u}\binom{x}{y} \longmapsto \vec{u'}\binom{x'}{y'}$ tel que : $f(\vec{u}) = \vec{u'}$ avec $\begin{cases} \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \end{cases} \Rightarrow f(x\vec{i} + y\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Rightarrow$

$x f(\vec{i}) + y f(\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Rightarrow x\left(\frac{7}{6}\vec{i} - \frac{1}{6}\vec{j}\right) + y\left(\frac{7}{6}\vec{i} + \frac{a}{6}\vec{j}\right) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Rightarrow$

$\left(\frac{7}{6}x + \frac{7}{6}y\right)\vec{i} + \left(\frac{a}{6}y - \frac{1}{6}x\right)\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Par identification, on obtient $\boxed{f = \begin{cases} x' = \frac{7}{6}x + \frac{7}{6}y \\ y' = \frac{a}{6}y - \frac{1}{6}x \end{cases}}$

3) Déterminons le réel a pour que f soit une projection vectorielle

Soit $f = \begin{cases} x' = \frac{7}{6}x + \frac{7}{6}y \\ y' = \frac{a}{6}y - \frac{1}{6}x \end{cases} \Rightarrow fof = \begin{cases} x'' = \frac{7}{6}x' + \frac{7}{6}y' \\ y'' = \frac{a}{6}y' - \frac{1}{6}x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{7}{6}\left(\frac{7}{6}x + \frac{7}{6}y\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{a}{6}y - \frac{1}{6}x\right) \\ y'' = \frac{a}{6}\left(\frac{a}{6}y - \frac{1}{6}x\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{7}{6}x + \frac{7}{6}y\right) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x'' = \frac{7}{6}x + \left(\frac{7+a}{36}\right)7y \\ y'' = \left(\frac{-7-a}{36}\right)x + \left(\frac{a^2-7}{36}\right)y \end{cases}$: Or f est une projection vectorielle $\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \end{cases}$ c’est-à-dire

$fof = f$ tel que : $\begin{cases} \frac{7}{6}x + \left(\frac{7+a}{36}\right)7y = \frac{7}{6}x + \frac{7}{6}y \\ \left(\frac{-7-a}{36}\right)x + \left(\frac{a^2-7}{36}\right)y = \frac{a}{6}y - \frac{1}{6}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{7+a}{36}\right)7y = \frac{7}{6}y \quad (1) \\ \left(\frac{-7-a}{36}\right)x = -\frac{1}{6}x \quad (2) \\ \left(\frac{a^2-7}{36}\right)y = \frac{a}{6}y \quad (3) \end{cases}$

En considérant (2) , on obtient : $\left(\frac{-7-a}{36}\right) = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow -7 - a = -6$ soit en fin $\boxed{a = -1}$.

4) Dans la suite, on pose $a = -1 \Rightarrow f$ devient $\begin{cases} x' = \frac{7}{6}x + \frac{7}{6}y \\ y' = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y \end{cases}$

a)- Le noyau de f ainsi qu’un vecteur directeur $\vec{e_1}$

Soit $Kerf = \{\vec{u}(x,y) \in E \ / \ f((x,y)) = (0,0)\} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{7}{6}x + \frac{7}{6}y \\ 0 = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{6}(x+y) = 0 \\ -\frac{1}{6}(x+y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x + y = 0$, soit $y = -x$. On a donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = x\overrightarrow{e_1}$ avec $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D’où $Kerf$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

b)- L’image de f ainsi qu’un vecteur directeur $\overrightarrow{e_2}$

Soit $Imf = \{\vec{u}(x, y) \in E \ / \ f((x, y)) = (x', y')\} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{7}{6}x + \frac{7}{6}y \\ y' = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y \end{cases} \Leftrightarrow x' + 7y' = 0.$

Soit $x' = -7y$. On a donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = y\overrightarrow{e_2}$ avec $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$..

D’où Imf est droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{e_2} = -7\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

c) Montrons que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E

Soit $det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 7 = -6 \neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \text{ est une base de } E.}$

d)- Pour déterminer la Matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, il suffit de calculer les images de $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$ tels que :

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = f(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) \\ f(\overrightarrow{e_2}) = f(-7\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath}) \\ f(\overrightarrow{e_2}) = -7f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = \left(\frac{7}{6}\vec{\imath} - \frac{1}{6}\vec{\jmath}\right) - \left(\frac{7}{6}\vec{\imath} - \frac{1}{6}\vec{\jmath}\right) \\ f = -7\left(\frac{7}{6}\vec{\imath} - \frac{1}{6}\vec{\jmath}\right) + \left(\frac{7}{6}\vec{\imath} - \frac{1}{6}\vec{\jmath}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = \vec{0} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = 0\overrightarrow{e_1} + 0\overrightarrow{e_2} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = 0\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \end{cases}. \text{ D'où } \boxed{M'_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice N°2.19 :

1) Comme $\vec{0} \in V$ et $\vec{0} \in W$, on a : $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in V + W$. Supposons $\vec{u} \in V + W$ et $\overrightarrow{u'} \in V + W$

Il existe des vecteurs $\vec{v} \in V$, $\overrightarrow{v'} \in V$, $\vec{w} \in W$ et $\overrightarrow{w'} \in W$ tels que : $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ et $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{w'}$

Donc,

$$\vec{u} + \overrightarrow{u'} = (\vec{v} + \vec{w}) + \left(\overrightarrow{v'} + \overrightarrow{w'}\right) = \left(\vec{u} + \overrightarrow{u'}\right) + \left(\vec{v} + \overrightarrow{v'}\right)$$

Comme V et W sont des sous$-$ espaces de $\mathbb{R}^n$, on a $\vec{v}+\vec{v'}\in V$ et $\vec{w}+\vec{w'}\in W$.

Ainsi, $\vec{u}+\vec{u'}\in V+W$. Enfin, si $\vec{u}\in V+W$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, il existe des vecteurs $\vec{v}\in V$ et $\vec{w}\in W$ tels que : $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$. Donc

$$\alpha\vec{u}=\alpha(\vec{v}+\vec{w})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{w}$$

Or, comme V et W sont des sous$-$espaces de $\mathbb{R}^n$, on a $\alpha\vec{v}\in V$ et $\alpha\vec{w}\in W$. Ainsi, $\alpha\vec{u}\in V+W$. Par conséquent $V+W$ est bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ une famille génératrice de V et $(\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_q})$ une famille génératrice de W

Comme $\overrightarrow{v_\imath}=\overrightarrow{v_\imath}+\vec{0}\in V+W$ et $\overrightarrow{w_\jmath}=\vec{0}+\overrightarrow{w_\jmath}\in V+W$, nous devons vérifier que tout vecteur de $V+W$ est combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p},\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_q})$. Or, si $\vec{u}\in V+W$, il existe des vecteurs $\vec{v}\in V$ et $\vec{w}\in W$ tels que $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$. De plus, il existe des scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ et $\beta_1,\dots,\beta_q$ tels que :

$$\vec{v}=\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\dots+\alpha_p\overrightarrow{v_p}\quad\text{et}\quad\vec{w}=\beta_1\overrightarrow{w_1}+\dots+\beta_q\overrightarrow{w_q}$$

et ainsi,

$$\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}=\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\dots+\alpha_p\overrightarrow{v_p}+\beta_1\overrightarrow{w_1}+\dots.+\beta_q\overrightarrow{w_q}$$

est bien une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p},\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_q})$.

Exercice N°2.20 :

1. a) On appelle par dimension d'un espace vectoriel, le nombre de vecteur de base de cet espace vectoriel.

b) Comme l'espace vectoriel E est muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \Longrightarrow \boxed{dim(E) = 2.}$

2) Exprimons le vecteur $f(\vec{\jmath})$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

On a : $fof(\vec{\jmath}) = f[f(\vec{\jmath})] = f[2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}] = 2f(\vec{\imath}) - 5f(\vec{\jmath})$

$$\Leftrightarrow 2f(\vec{\jmath}) - 5f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} \Leftrightarrow 5f(\vec{\jmath}) = 2f(\vec{\imath}) - 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$$

$$\Leftrightarrow 5f(\vec{\jmath}) = 2(2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}) - 2 + 5\vec{\jmath} \Leftrightarrow 5f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} \Leftrightarrow \boxed{f(\vec{\jmath}) = \frac{2}{5}\vec{\imath} - \vec{\jmath}}$$

b) Déterminons $fof(\vec{\jmath})$

On a : $fof(\vec{\jmath}) = f[f(\vec{\jmath})]$

$$= f\left(\frac{2}{5}\vec{\imath} - \vec{\jmath}\right)$$

$$= \frac{2}{5}f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath})$$

$$= \frac{2}{5}(2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}) - \left(\frac{2}{5}\vec{\imath} - \vec{\jmath}\right)$$

D'où : $\boxed{fof(\vec{\jmath}) = f(\vec{\jmath})}$

c) $\boxed{\text{Comme} \begin{cases} fof(\vec{\imath}) = f(\vec{\imath}) \\ fof(\vec{\jmath}) = f(\vec{\jmath}) \end{cases} \text{c'est-à-dire } fof = f\text{, alors } f \text{ est une projection vectorielle.}}$

3) a) Soit $\mathcal{H} = (x, y) \in E$ tel que : $5x + 2y = 0$, $5x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}y$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}y\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{5}y\vec{e_1} \text{ avec } \vec{e_1}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ est la base de } \mathcal{H}.$$

On a : $\vec{u}' = M_f \times \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{5} \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow f = \begin{cases} x' = 2x + \frac{2}{5}y \\ y' = -5x - y \end{cases}$

$\mathcal{H}$ est la base de $f \Leftrightarrow f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$

On a donc : $f(\vec{e_1}) = \begin{cases} x' = -2 \times 2 + \frac{2}{5} \times (5) \\ y' = -5 \times (-2) - (5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 5 \end{cases} \Leftrightarrow f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$

Donc le sous ensemble $\mathcal{H}$ d'équation $5x + 2y = 0$ représente la base de f.

b) Soit $\mathcal{G} = (x, y) \in E$ tel que : $5x + y = 0$, $5x + y = 0 \Leftrightarrow y = -5x$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -5x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = x\overrightarrow{e_2} \text{ avec } \overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ est la base de } \mathcal{G}$$

$\mathcal{G}$ est la direction de $f \Leftrightarrow f(\overrightarrow{e_2}) = \vec{0}$

On a donc : $$f(\overrightarrow{e_2}) = \begin{cases} x' = 2 \times 1 + \frac{2}{5}(-5) \\ y' = -5 \times 1 - (-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(\overrightarrow{e_2}) = 0$$

Donc le sous ensemble $\mathcal{G}$ d'équation $5x + y = 0$ est la direction de f.

4) On donne $\vec{u} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$

a) Montrons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de E

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 2(-5) = 5 \neq 0$$

Comme le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$, est non nul, par conséquent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de E .

b) Exprimons les vecteurs $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = f(\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}) \\ f(\vec{v}) = f(2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\vec{u}) = f(\vec{\imath}) - 5f(\vec{\jmath}) \\ f(\vec{v}) = 2f(\vec{\imath}) - 5f(\vec{\jmath}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\vec{u}) = (2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}) - 5\left(\frac{2}{5}\vec{\imath} - \vec{\jmath}\right) \\ f(\vec{v}) = 2(2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}) - 5\left(\frac{2}{5}\vec{\imath} - \vec{\jmath}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{0} \\ f(\vec{v}) = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} f(\vec{u}) = 0\vec{u} + 0\vec{v} \\ f(\vec{v}) = 0\vec{u} + \vec{v} \end{cases}}$$

c) Matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

$$\boxed{M_{f(\vec{u}, \vec{v})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

<u>Exercice N°2.21</u> :

1) Matrice de l'application φ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit $\varphi = \begin{cases} x' = 5x + 6y + mz \\ y' = x + mz \\ z' = -x - 2y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x & 6y & mz \\ x & 0y & mz \\ -x & -2y & z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & m \\ 1 & 0 & m \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Or par définition, on a : $\overrightarrow{u'} = M_\varphi \times \vec{u}$, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors par comparaison, on obtient : $\boxed{M\left(\varphi(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\right) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & m \\ 1 & 0 & m \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$

2) Valeur de m pour laquelle φ est bijective

On a : $det(M\varphi) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 6 & m & 5 & 6 \\ 1 & 0 & m & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right.$

$$= \big(5 \times 0 \times 1 + 6 \times m \times (-1) + 1 \times m \times (-2)\big) - \big(6 \times 1 \times 1 + m \times 5 \times (-2) + m \times 0 \times (-1)\big)$$

$$= (-6m - 2m) - (6 - 10m) = 2m - 6$$

$\boxed{\text{D'où } \varphi \text{ est bijective} \Leftrightarrow 2m - 6 \neq 0, \text{ c'est-à-dire } m \neq 3.}$

3) Dans la suite, on pose $m = 3 \Longrightarrow \varphi$ devient $\begin{cases} x' = 5x + 6y + 3z \\ y' = x + 3z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$

a) Déterminons l'ensemble des points invariants par φ

Soit $\{\vec{u}\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \varphi\big((x,y,z)\big) = (x,y,z)\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5x + 6y + 3z \\ y = x + 3z \\ z = -x - 2y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y + 3z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x = -2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(-2y) + 6y + 3z = 0 \\ -2y - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y + 3z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow -2y + 3y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

$\boxed{\text{Donc } x = y = z = 0, \text{ et par conséquent } E = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}.}$

b) Le noyau $Ker\varphi$ de φ et sa base $(\overrightarrow{e_1})$

Soit $Ker\varphi = \{\vec{u}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \varphi((x,y,z)) = (0,0,0)\} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 5x + 6y + 3z \ (1) \\ 0 = x + 3z \quad (2) \\ 0 = -x - 2y + z \ (3) \end{cases}$

D'après (2), on a : $x + 3z = 0 \Leftrightarrow x = -3z$. Alors en remplaçant (4) dans (2) et (3), on aura

: $\begin{cases} -15z + 6y + 3z = 0 \\ 3z - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 12z = 0 \\ 4z - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2z$. Donc on a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{u} = z\vec{e_1}$ avec $\vec{e_1}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\vec{e_1} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

D'où $Ker\varphi$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur de base $(\vec{e_1})$.

c) L'image $Im\varphi$ de φ et sa base $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$

Soit $Im\varphi = \{\vec{u}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \varphi((x,y,z)) = (x',y',z')\} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5x + 6y + 3z \ (1) \\ y' = x + 3z \quad (2) \\ z' = -x - 2y + z \ (3) \end{cases} \Leftrightarrow$

En faisant la somme entre l'équation (1) et trois multiplié fois l'équation (3), on obtient

$x' + 3z' = 2x + 6z = 2(x + 3z) \Leftrightarrow x' + 3z' = 2y'$ (car $y' = x + 3z$ D'après (2)).

Alors $x' - 2y' + 3z' = 0$, soit $x' = 2y' - 3z'$. On a donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3z \\ 0z \\ z \end{pmatrix}$

$= y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ avec $\vec{e_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\vec{e_2} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e_3}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\vec{e_3} = -3\vec{i} + \vec{k}$

D'où $Im\varphi$ est le plan vectoriel d'équation $x - 2y + 3z = 0$ engendrée par les vecteurs de base $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$.

d) Montrons que $Ker\varphi$ et $Im\varphi$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

* On a : $dim(ker\varphi) = 1$, $dim(Im\varphi) = 2$ et $dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$$\Rightarrow dim(Ker\varphi) + dim(Im\varphi) = dim(\mathbb{R}^3)$$

* Soit $\vec{u}(x,y,z) \in Ker\varphi \cap Im\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \; et \; y = 2z \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-3z) - 2(2z) + 3z = 0 \Leftrightarrow$

$-3z - 4z + 3z = 0 \Leftrightarrow -4z = 0 \Leftrightarrow z = 0$. D'où $x = y = z = 0$. Donc $Ker\varphi \cap Im\varphi = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$

* Avec $det(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= -3(1-0) - 2(2-0) - 3(0-1) = -3 - 4 + 3 = -4 \neq 0.$

D'où la famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et de plus $Ker\varphi \cap Im\varphi = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$

Par conséquent $Ker\varphi$ et $Im\varphi$ sont bien deux sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

Exercice N°2.22 :

1) **Déterminons a, b et c de manière que f soit un projecteur.**

Soit $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & -1 & -4 \\ c & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $avec \; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

On a f comme étant un projecteur $\Leftrightarrow M \times M = M$

Alors on a : $\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & -1 & -4 \\ c & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & -1 & -4 \\ c & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & -1 & -4 \\ c & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b + 2c & a - 1 - 2 & 2a - 4 - 2 \\ ab - b - 4c & b + 1 + 4 & 2b + 4 + 4 \\ ac - b - c & c + 1 + 1 & 2c + 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & -1 & -4 \\ c & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b + 2c & a - 3 & 2a - 6 \\ ab - b - 4c & b + 5 & 2b + 8 \\ ac - b - c & c + 2 & 2c + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & -1 & -4 \\ c & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Par identification $\begin{cases} a^2+b+2c=a \\ a-3=1 \\ 2a-6=2 \\ ab-b-4c=b \\ b+5=-1 \\ 2b+8=-4 \\ ac-b-c=c \\ c+2=-1 \\ 2c+5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=4 \\ b=-6 \\ c=-3 \end{cases}}$

2) **Pour** $a=4, b=-6$ **et** $c=-3 \Longrightarrow f=\begin{cases} x'=4x+y+2z \\ y'=-6x-y-4z \\ z'=-3x-y-z \end{cases}$

*** On a la vecteur** $Q(1,-2,-1) \in$ **au noyau** $Kerf \Leftrightarrow f\big((1,-2,-1)\big)=(0,0,0)$

Alors on a : $\begin{cases} x'=4\times 1+(-2)+2(-1) \\ y'=-6\times 1-(-2)-4(-1) \\ z'=-3\times 1-(-2)-(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=0 \\ y'=0 \\ z'=0 \end{cases}$. $\boxed{\textbf{Donc le vecteur } \vec{Q} \in \textbf{ au noyau } Kerf.}$

*** Montrons que le vecteur** $Q(1,-2,-1)$ **est une base de** $Kerf$

Soit $Kerf=\left\{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \ / \ f\big((x,y,z)\big)=(0,0,0)\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=4x+y+2z \quad (1) \\ 0=-6x-y-4z \quad (2) \\ 0=-3x-y-z \quad (3) \end{cases}$

D'après (1), **on a :** $4x+y+2z=0 \Leftrightarrow y=-4x-2z \ (4)$

En remplaçant (4) **dans** (2) **et** (3), **on obtient :** $\begin{cases} -2x-2z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x+z)=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow z=-x \ (5)$. **En remplaçant maintenant** (5) **dans** (4), **on obtient :** $y=-2x$.

On a donc : $\begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{u}=x\vec{Q}$ **avec** $\vec{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, **alors** $\vec{Q}$ **est générateur de** $Kerf$

Et de plus, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, **on a :** $\alpha\vec{Q}=0 \Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ -2\alpha=0 \\ -\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=0$, **dans ce cas, ce système est libre, et par conséquent le vecteur** $\vec{Q}$ **est bien une base de** $Kerf$.

<u>Exercice N°2.23</u> :

1) E_2 étant de dimension fini (un plan vectoriel) ,

$\varphi_{(a,b)}$ est bijectif $\Leftrightarrow detM \neq 0$.

On a alors : $detM = \begin{vmatrix} a & b \\ 3b & a+2b \end{vmatrix} = a^2 + 2ab - 3b^2 = a^2 + 3ab - ab - 3b^2$

$$= a(a+3b) - b(a+3b)$$

$$= (a+3b)(a-b)$$

$$\boxed{\text{Donc : } \varphi_{(a,b)} \text{ est bijectif si et seulement si } (a-b)(a+3b) \neq 0}$$

2) Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \in E_2$. Donnons dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées (X, Y) de $\varphi_{(a,b)}(\vec{u})$

$$\varphi_{(a,b)}(\vec{u}) = \varphi_{(a,b)}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$$

$$= x\varphi_{(a,b)}(\vec{\imath}) + y\varphi_{(a,b)}(\vec{\jmath})$$

$$= x(a\vec{\imath} + 3b\vec{\jmath}) + y(b\vec{\imath} + (a+2b)\vec{\jmath}) \ \left(\text{car : } \begin{cases} \varphi_{(a,b)}(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + 3b\vec{\jmath} \\ \varphi_{(a,b)}(\vec{\jmath}) = 3b\vec{\imath} + (a+2b)\vec{\jmath} \end{cases}\right)$$

$$= (ax + by)\vec{\imath} + (3bx + (a+2b)y)\vec{\jmath}$$

D'où on a ; $\varphi_{(a,b)}(\vec{u}) = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$

Alors par identification, les coordonnées de $\varphi_{(a,b)}(\vec{u})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont définis par :

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = 3bx + (a+2b)y \end{cases}$$

Détermination de $Ker\varphi_{(a,b)}$ et $Im\varphi_{(a,b)}$

- Si $detM \neq 0$ c'est-à-dire $(a-b)(a+3b) \neq 0$

$$\boxed{\text{Alors } \varphi_{(a,b)} \text{ est bijectif. D'où } Ker\varphi_{(a,b)} = \{\vec{0}\} \text{ et } Im\varphi_{(a,b)} = E_2}$$

- Si $detM = 0$ c'est-à-dire $a = b$ ou $a = -3b$

Alors pour $a=b$, on a : $\varphi_{(a,b)}(\vec{u})=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=0 \\ 3bx+(a+2b)y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x+y)=0 \\ 3a(x+y)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x+y=0$ et $a\neq 0$. D'où $Ker\varphi_{(a,b)}$ est la droite vectorielle de vecteur directeur

$\vec{e_1}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ (pour $a\neq 0$)

Pour $a=0$ alors $b=0 \Longrightarrow \varphi_{(a,b)}=0$ (endomorphisme nul) et dans ce cas

On a donc $\boxed{Ker\varphi_{(a,b)}=E_2 \text{ et } Im\varphi_{(a,b)}=\{\vec{0}\}}$

Et $Im\varphi_{(a,b)}$ est définie par : $\varphi_{(a,b)}(\vec{u})=\vec{U} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=X \\ 3bx+(a+2b)y=Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x+y)=X \\ 3a(x+y)=Y \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3X=Y$ c'est –à-dire $3X-Y=0$.

D'où $Im\varphi_{(a,b)}$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{e_2}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$.

Pour $a=-3b$, on a :

$\varphi_{(a,b)}(\vec{u})=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -3bx+by=0 \\ 3bx-by=0 \end{cases} \Leftrightarrow b(3x-y)=0 \Leftrightarrow 3x-y=0$ et $b\neq 0$

Donc $Ker\varphi_{(a,b)}$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{e_1}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$ (si $b\neq 0$).

Si $b=0$, on retrouve l'endomorphisme nul vu précédemment.

Et pour $Im\varphi_{(a,b)}$, on a :

$\varphi_{(a,b)}(\vec{u})=\vec{U} \Leftrightarrow \begin{cases} -3bx+by=X \\ 3bx-by=Y \end{cases} \Leftrightarrow Y=-X$ c'est-à-dire $X+Y=0$

D'où $Im\varphi_{(a,b)}$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{e_2}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}$

3) $\varphi_{(a,b)}$ est une homothétie vectorielle

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=a+2b \\ 3b=b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a\in\mathbb{R}^* \end{cases}$. D'où l'ensemble cherché est $\mathbb{R}^*\times\{0\}$.

Exercice N°2.24 :

1) Calculons $f(\vec{i})$ et $fof(\vec{i})$

$$fof(\vec{j}) = f[f(\vec{j})] = f(10\vec{i} - 9\vec{j}) = 10f(\vec{i}) - 9f(\vec{j}) \Leftrightarrow \vec{j} = 10f(\vec{i}) - 9f(\vec{j})$$

$$\Leftrightarrow 10f(\vec{i}) = \vec{j} + 9f(\vec{j}) = \vec{j} + 9(10 - 9\vec{i}) = 90\vec{i} - 80\vec{j} \Leftrightarrow$$

$$f(\vec{i}) = \frac{90}{10}\vec{i} - \frac{80}{10}\vec{j} \Rightarrow \boxed{f(\vec{i}) = 9\vec{i} - 8\vec{j}}$$

$$fof(\vec{i}) = f[f(\vec{i})] = f(9\vec{i} - 8\vec{j}) = 9f(\vec{i}) - 8f(\vec{j}) = 9(9\vec{i} - 8\vec{j}) - 8(10\vec{i} - 9\vec{j})$$

$$= 81\vec{i} - 72\vec{j} - 80\vec{i} + 72\vec{j} = \vec{i}$$

D'où $\boxed{fof(\vec{i}) = \vec{i}}$

2) Comme $\begin{cases} fof(\vec{i}) = \vec{i} \\ fof(\vec{j}) = \vec{j} \end{cases}$ c'est-à-dire $fof = Id_{\mathbb{R}^2}$, alors f est une symétrie vectorielle.

3) a) Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

b) On a $\begin{cases} fof(\vec{i}) = \vec{i} \\ fof(\vec{j}) = \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f[f(\vec{i})] = \vec{i} \\ f[f(\vec{j})] = \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(\vec{i}) = f(\vec{i}) \\ f^{-1}(\vec{j}) = f(\vec{j}) \end{cases} \Leftrightarrow f^{-1} = f$ et par conséquent f est bijectif. D'où f est un automorphisme involutif.

c) Déterminons d'abord l'expression analytique de f

Soit $M = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $M'(x', y')$ son image par f. Alors $f(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M'} \Leftrightarrow$

$$f(x\vec{i} + y\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Leftrightarrow xf(x) + yf(y) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Leftrightarrow x(9\vec{i} - 8\vec{j}) + y(10\vec{i} - 9\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

$\Leftrightarrow (9x + 10y) + (-8x - 9y) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Rightarrow$ l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = 9x + 10y \\ y' = -8x - 9y \end{cases}$

Déterminons alors la base de et la direction de f

* Base de f : Soit $\overrightarrow{M}(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9x + 10y \\ y = -8x - 9y \end{cases} \Leftrightarrow 8x + 10y = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 5y = 0$. D'où la base de f est la droite vectorielle d'équation $4x + 5y = 0$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

* **Direction de f : Soit** $\overrightarrow{M}(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(\overrightarrow{M}) = -\overrightarrow{M} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 9x + 10y \\ -y = -8x - 9y \end{cases} \Leftrightarrow 10x + 10y = 0$

$\Leftrightarrow x + y = 0$. **D'où la direction de f est la droite vectorielle d'équation $x + y = 0$, engendrée par le vecteur** $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) a) $det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 40 = -4 \neq 0$ **Alors la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$**

b) Matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$

Soit le système d'équations : $\begin{cases} 9\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} = \vec{u} \quad (1) \\ -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} = \vec{v} \quad (2) \end{cases}$. **En multipliant (2) fois 2, on obtient**

$-\vec{\imath} = \vec{u} + 2\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\imath} = -\vec{u} - 2\vec{v}$

D'où $f(\vec{u}) = f(9\vec{\imath} - 8\vec{\jmath}) = 9f(\vec{\imath}) - 8f(\vec{\jmath}) = 9(9\vec{\imath} - 8\vec{\jmath}) - 8(10\vec{\imath} - 9\vec{\jmath})$

$= (81 - 80)\vec{\imath} + (72 - 72)\vec{\jmath}$

$= \vec{\imath}$

$\Rightarrow f(\vec{u}) = -\vec{u} - 2\vec{v}$.

D'autre part, le calcul direct de $(\vec{v})$, donne :

$f(\vec{v}) = f(-5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) = -5f(\vec{\imath}) + 4f(\vec{\jmath}) = -5(9\vec{\imath} - 8\vec{\jmath}) + 4(10\vec{\imath} - 9\vec{\jmath})$

$= (40 - 45)\vec{\imath} + (40 - 36)\vec{\jmath}$

$= -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

$\Rightarrow f(\vec{v}) = 0\vec{u} + \vec{v}$.

Ainsi la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $M_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice N°2.25 :

1) Matrice de p relative à la base $\mathcal{B} = (1, i)$

$$p(1) = \left(\frac{5}{2}+\frac{7}{2}i\right)1^2 + i\bar{1} + \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i = \frac{5+1}{2} + i\frac{7+3}{2} + i = 3+6i$$

$$p(i) = \left(\frac{5}{2}+\frac{7}{2}i\right)i^2 + i\times\bar{i} + \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i = \left(\frac{5}{2}+\frac{7}{2}i\right)(-1) + i(-i) + \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$

$$= \frac{-5+1}{2} + 1 + i\frac{-7+3}{2} = -1-2i$$

Donc la matrice de p est : $\boxed{M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}}$

2) Calculons $pop(Z)$

$$pop(1) = p[p(1)] = p(3+6i) = 3p(1) + 6p(i) = 3(3+6i) + 6(-1-2i)$$

$$= (9-6) + i(18-12) = 3+6i$$

$$\boxed{pop(1) = p(1)}$$

$$pop(i) = p[p(i)] = p(-1-2i) = -p(1) - 2p(i) = -(3+6i) - 2(-1-2i)$$

$$= (-3+2) + i(-6+4) = -1-2i$$

$$\boxed{pop(i) = p(i)}$$

3) * $\boxed{\textbf{Comme} \begin{cases} pop(1) = p(1)\\ pop(i) = p(i)\end{cases} \Rightarrow p \textbf{ est une projection vectorielle.}}$

* **Eléments caractéristiques de p :**

Trouvons d'abord l'expression analytique de p :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{C}$; $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in \mathbb{C}$, **on a :**

$$\overrightarrow{u'} = M_{\mathcal{B}} \times \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x - y\\ y' = 6x - 2y\end{cases}$$

On a alors :

La base de $p = \{\vec{u}(x,y) \in \mathbb{C} \ / \ p((x,y)) = (x,y)\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x - y\\ y = 6x - 2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0\\ 6x - 3y = 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$2x-y=0$. C'est-à-dire $y=2x$. On a donc : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=x\overrightarrow{e_1}$ avec $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

D'où la base de p est une droite vectorielle d'équation $2x-y=0$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1}$

La direction de $p=\{\vec{u}(x,y)\in\mathbb{C}\ /\ p\big((x,y)\big)=(0,0)\}\Leftrightarrow\begin{cases}0=3x-y\\0=6x-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=0\\2(3x-y)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 3x-y=0$. C'est-à-dire $y=3x$. On a donc : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\3x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=x\overrightarrow{e_2}$ avec $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

D'où la direction de p est une droite vectorielle d'équation $y=3x$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_2}$

Exercice N°2.26 :

1) Expression analytique de g

On a : $\boxed{g=\begin{cases}x'=y-z\\y'=ax+z\\z'=x-y+2z\end{cases}}$

2) Matrice de l'endomorphisme g

D'après 1) on a : $\begin{cases}x'=y-z\\y'=ax+z\\z'=x-y+2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y-z\\ax+z\\x-y+2z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\a&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Or par définition on a : $\overrightarrow{u'}=M_g\times\vec{u}$. Alors par comparaison, on obtient :

$$\boxed{M\Big(g\big(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\big)\Big)=\begin{pmatrix}0&1&-1\\a&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}}$$

3) Déterminons le réel a pour que g ne soit pas bijectif

On a : $detM\Big(g\big(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\big)\Big)=\begin{vmatrix}0&1&-1\\a&0&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=0\times\begin{vmatrix}0&1\\-1&2\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}a&1\\1&2\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}a&0\\1&-1\end{vmatrix}$

$=0(0+1)-1(2a-1)-1(-a-0)=-2a+1+a=1-a$

Or g n'est pas bijectif $\Leftrightarrow detM\Big(g\big(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\big)\Big)=0$, c'est-à-dire $1-a=0$

D'où on a : $-a = -1 \Leftrightarrow a = 1$

4) On pose $a = 1 \Rightarrow g$ devient : $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$ et on suppose que g est un projecteur.

a) Déterminons la base G de g et sa base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

Soit $G = \{\vec{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ g((x, y, z)) = (x, y, z)\}$

On a alors : $\begin{cases} x = y - z \\ y = x + z \\ z = x - y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z \end{cases}$. Alors le système se réduit en une seule

équation : $x - y + z = 0 \Leftrightarrow z = y - x$.

D'où la base G de g est le plan vectoriel engendré par les vecteurs de base $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ tel

que : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0y \\ y \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) Déterminons la direction H de g et sa base $\overrightarrow{e_3}$

Soit $H = \{\vec{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ g((x, y, z)) = \vec{0}\}$

On a alors : $\begin{cases} 0 = y - z \\ 0 = x + z \\ 0 = x - y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = -z \end{cases}$. Et donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = z\overrightarrow{e_3}$

avec $\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où la direction H est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_3}$ de base $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{e_3}\}$.

5) Soit les vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{k}$; $\vec{v} = -\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$

a) Montrons que la famille $(\vec{u},\vec{u},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a : $det(\vec{u},\vec{u},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 1(1-1) - 0(0-1) + 1(0-1) = -1 \neq 0$$

Donc la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Matrice de g dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

Pour déterminer la matrice de g dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, il suffit de calculer les images de $g(\vec{u}), g(\vec{v})$ et $g(\vec{w})$.

- **Trouvons d'abord $g(\vec{\imath}), g(\vec{\jmath})$ et $g(\vec{k})$:**

D'après 1) on a : $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + z \\ z' = x - y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'\vec{\imath} \\ y'\vec{\jmath} \\ z'\vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x\vec{\imath} \\ x\vec{\jmath} \\ x\vec{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y\vec{\imath} \\ 0y\vec{\jmath} \\ -y\vec{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z\vec{\imath} \\ z\vec{\jmath} \\ 2z\vec{k} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} x'\vec{\imath} \\ y'\vec{\jmath} \\ z'\vec{k} \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \vec{\imath} \\ 0 \\ -\vec{k} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -\vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ 2\vec{k} \end{pmatrix}$**. Or par définition on a :** $\overrightarrow{u'} = xg(\vec{\imath}) + yg(\vec{\jmath}) + zg(\vec{k})$,

Ainsi, par comparaison, on obtient : $g(\vec{\imath}) = \vec{\jmath} + \vec{k}$, $g(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{k}$ **et** $g(\vec{k}) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$

On a alors :

- $g(\vec{u}) = g(\vec{\imath} - \vec{k}) = g(\vec{\imath}) - g(\vec{k}) = (\vec{\jmath} + \vec{k}) - (-\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}) = \vec{\imath} - \vec{k} \Rightarrow g(\vec{u}) = \vec{u}$
- $g(\vec{v}) = g(-\vec{\jmath} - \vec{k}) = -g(\vec{\jmath}) - g(\vec{k}) = -(\vec{\imath} - \vec{k}) - (-\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}) = -\vec{\jmath} - \vec{k} \Rightarrow g(\vec{v}) = \vec{v}$
- $g(\vec{w}) = g(\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}) = g(\vec{\imath}) - g(\vec{\jmath}) - g(\vec{k}) = (\vec{\jmath} + \vec{k}) - (\vec{\imath} - \vec{k}) - (-\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k})$

$$= 0 \Rightarrow g(\vec{w}) = \vec{0}$$

Par conséquent la matrice de g dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est : $\boxed{M(g(\vec{u},\vec{v},\vec{w})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Exercice N°2.27 :

1) Pour montrer que f est un endomorphisme, il suffit de vérifier si f est une application linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\,;\quad \forall(Z_1,Z_2)\in\mathbb{C}^2,\ f(\alpha Z_1+\beta Z_2)=\alpha f(Z_1)+\beta f(Z_2).$$

On a alors : $f(\alpha Z_1+\beta Z_2)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}yi\right)\left(\overline{\alpha Z_1+\beta Z_2}\right)$

$$=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}yi\right)\left(\overline{\alpha Z_1}+\overline{\beta Z_2}\right)$$

$$=\alpha\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}yi\right)\overline{Z_1}+\beta\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}yi\right)\overline{Z_2}$$

$$\Longrightarrow f(\alpha Z_1+\beta Z_2)=\alpha f(Z_1)+\beta f(Z_2)$$

Donc f est une application linéaire , et de plus f est définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, par conséquent f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.

2) Matrice de f dans la base $\mathcal{B}=(1,i)$

$$f(1)=\left(\frac{1}{3}x+i\frac{y}{2}\right)\left(\overline{1}\right)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}yi$$

$f(i)=\left(\frac{1}{3}x+i\frac{y}{2}\right)\left(\overline{i}\right)=\left(\frac{1}{3}x+i\frac{y}{2}\right)(-i)=\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}xi.$ **D'où** $\boxed{M_{f(1,\ i)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}x & \frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{3}x\end{pmatrix}}$

3) a) Equation cartésienne de (E)

f **est une symétrie vectorielle** $\Leftrightarrow M_f\times M_f=Id_{\mathbb{C}}$

On a donc : $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}x & \frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{3}x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}x & \frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{3}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} & \frac{xy}{6}-\frac{xy}{6}\\ \frac{xy}{6}-\frac{xy}{6} & \frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

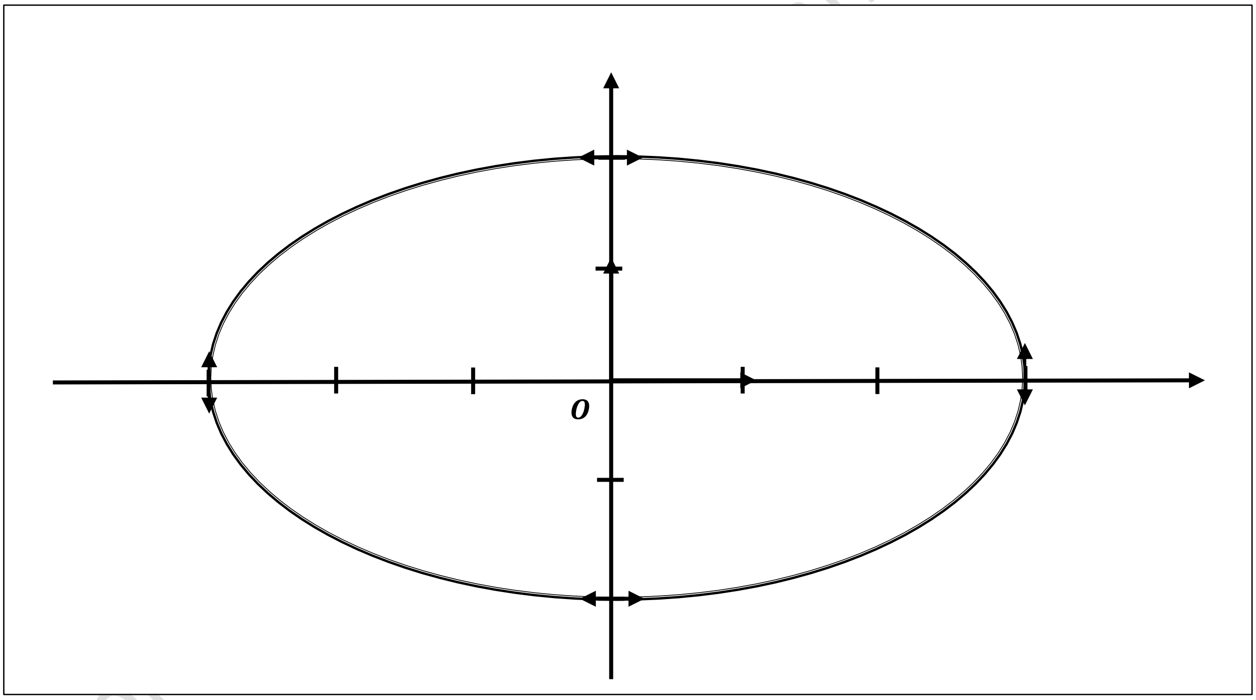
$$\Leftrightarrow \boxed{(E) : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1}$$

b) Traçons (E)

Selon l'équation cartésienne (E) trouvée dans 2. a)

On a : $(E) : \frac{x^2}{(3)^2}+\frac{y^2}{(2)^2} = 1$, donc (E) est une ellipse de centre $O(0; 0)$ et de sommets :

$A(3; 0)$; $A'(-3 ; 0)$; $B(0; 2)$; $B'(0; -2)$



Exercice N°2.28 :

1) Matrice M de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a : $\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ f(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \\ f(\vec{k}) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(f(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}}$

2° a) Montrons que si α est différent de 1 et $-1, E_\alpha$ est réduit au vecteur nul.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E$. **On a :** $f(\vec{u}) = \alpha\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\\ \alpha z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha x = x+2y-2z\\ \alpha y = 2x+y-2z\\ \alpha z = 2x+2y-3z\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-\alpha)x+2y-2z=0\\ 2x+(1-\alpha)y-2z=0\\ 2x+2y+(-3-\alpha)z=0\end{cases}$. **Ce système admet pour solutions $(0,0,0)$ si et seulement si son déterminant est différent de zéro :**

On a alors : $det(S) = \begin{vmatrix}1-\alpha & 2 & -2\\ 2 & 1-\alpha & -2\\ 2 & 2 & -3-\alpha\end{vmatrix}$

$$= (1-\alpha)\times\begin{vmatrix}1-\alpha & -2\\ 2 & -3-\alpha\end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & -3-\alpha\end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix}2 & 1-\alpha\\ 2 & 2\end{vmatrix}$$

$$= (1-\alpha)[(1-\alpha)(-3-\alpha)+4] - 2[2(-3-\alpha)+4] - 2[4-2(1-\alpha)]$$

$$= (1-\alpha)[\alpha^2+2\alpha+1] - 2(-2-2\alpha) - 2(2+2\alpha)$$

$$= (1-\alpha)[\alpha^2+2\alpha+1]$$

$$= (1-\alpha)(\alpha+1)^2$$

Or $det(S) \neq 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)(\alpha+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow 1-\alpha \neq 0$ **ou** $\alpha+1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha \neq 1\\ ou\\ \alpha \neq -1\end{cases}$

Donc pour $\alpha \neq \pm 1$, le vecteur E_α est réduit au vecteur nul, c'est-à-dire $E_\alpha = \{\vec{0}\}$

b)- Déterminons les ensembles E_1 et E_{-1} en donnant une base pour chacune, nommée $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

* **Soit** $E_1 = \left\{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E \,/\, f(\vec{u}) = \vec{u}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-1)x+2y-2z=0\\ 2x+(1-1)y-2z=0\\ 2x+2y+(-3-1)z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y-2z=0\\ 2x-2z=0\\ 2x+2y-4z=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=z\\ x=z\\ 2(z)+2y-4z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\ y=z\end{cases}$. **Donc on a :** $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = z\overrightarrow{e_1}$ **avec** $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

D'où E_1 est une droite vectorielle $x = y = z$ engendré par $\overrightarrow{e_1}$ et de base $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{e_1}\}$.

*** Soit**

$$E_{-1} = \left\{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E \,/\, f(\vec{u}) = -\vec{u}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+1)x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + (1+1)y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + (-3+1)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + y.$$ **On a donc :** $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ 0x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0y \\ y \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x\overrightarrow{e_2} + y\overrightarrow{e_3} \text{ avec } \overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{e_3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où E_{-1} est le plan vectoriel d'équation $x + y - z = 0$ engendré par $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ de base

$\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$

3) a)- Montrons que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.

$$det(B_1 \cup B_2) = det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0-1) - 1(1-1) + 0(1-0) = -1 \neq 0$$

Donc $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, c'est-à-dire la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de E.

b)- Oui, on peut connaître $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2})$ et $f(\overrightarrow{e_3})$ sans passer par les calculs.

Justification : car $\overrightarrow{e_1} \in E_1$ tel que $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$ et $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \in E_{-1}$ tel que $\begin{cases} f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_2} \\ f(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_3} \end{cases}$

c)- Matrice A de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

On a : $$A\left(f(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4) a)- Montrons que f est involutif.

On a : $M_f \times M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+4-4 & 2+2-4 & -2-4+6 \\ 2+2-4 & 4+1-4 & -4-2+6 \\ 2+4-6 & 4+2-6 & -4-4+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $M_f \times M_f = Id_E,$ **et par conséquent** f **est bien involutif.**

b) Nature de f.

Comme f **est involutif** $\Longrightarrow f$ **est donc une symétrie vectorielle.**

Eléments caractéristiques de f.

* **Base de** f **: C'est la droite vectorielle** E_1 **engendrée par** $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d'après 2) b).**

* **Direction de** f **: C'est le plan vectoriel** E_{-1} **engendré par** $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{e_3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d'après 2) b).**