



## Mathématiques : Tronc Commun

Séance 1 (Les ensembles de nombres  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{R}$ )

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

---

### Sommaire

#### I- Les ensembles $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{D}$ , $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

1-1/ L'ensemble  $\mathbb{N}$  (nombres entiers naturels)

1-2/ L'ensemble  $\mathbb{Z}$  (nombres entiers relatifs)

1-3/ L'ensemble  $\mathbb{D}$  (nombres décimaux)

1-4/ L'ensemble  $\mathbb{Q}$  (nombres rationnels)

1-5/ L'ensemble  $\mathbb{R}$  (nombres réels)

#### II- Règles de calculs

2-1/ Les fractions

2-2/ Les racines carrées

2-3/ Les identités remarquables

2-4/ Les puissances de 10

2-5/ L'écriture scientifique

#### III- Exercices

3-1/ Exercice 1

3-2/ Exercice 2

3-3/ Exercice 3

3-4/ Exercice 4

3-5/ Exercice 5

3-6/ Exercice 6

---

#### I- Les ensembles $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{D}$ , $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

1-1/ L'ensemble  $\mathbb{N}$  (nombres entiers naturels)

Les nombres entiers naturels forment un ensemble appelé ensemble des nombres entiers naturels. On le note  $\mathbb{N}$ .

On écrit :  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , on dit que  $\mathbb{N}$  est écrit en extension .

L'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots\}$  est noté  $\mathbb{N}^*$ , on a  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ .

---

#### I- Les ensembles $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{D}$ , $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

## 1-2/ L'ensemble $\mathbb{Z}$ (nombres entiers relatifs)

Les nombres entiers relatifs forment un ensemble appelé ensemble des nombres entiers relatifs, on le note  $\mathbb{Z}$ .

On écrit :  $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , on dit que  $\mathbb{Z}$  est écrit en extension.

L'ensemble  $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$  est noté  $\mathbb{Z}^*$ , on a  $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$ .

L'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  est l'ensemble des entiers positifs, on note  $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ , on a  $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$  (ou encore  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ).

L'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots\}$  est l'ensemble des entiers strictement positifs, on le note  $\mathbb{Z}^{+*} = \mathbb{N}^*$ .

L'ensemble  $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$  est l'ensemble des entiers négatifs, on le note  $\mathbb{Z}^-$ .

L'ensemble  $\{-1, -2, -3, \dots\}$  est l'ensemble des entiers strictement négatifs, on le note  $\mathbb{Z}^{-*}$ .

---

## I- Les ensembles $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{D}$ , $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

### 1-3/ L'ensemble $\mathbb{D}$ (nombres décimaux)

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire par un nombre fini de chiffres après la virgule, par exemple  $-15,237$  et  $0,21$  et  $\frac{3}{4} = 0,75$  sont des nombres décimaux ; mais  $0,666666\dots$  n'est pas un nombre décimal.

Pour comprendre la définition mathématique exacte de l'ensemble des nombres décimaux, on remarque que :  $-15,237 = -\frac{15237}{1000} = -\frac{15237}{10^3}$  et  $0,21 = \frac{21}{100} = \frac{21}{10^2}$ .

D'où : Les nombres décimaux forment un ensemble appelé ensemble des nombres décimaux.

On le note  $\mathbb{D}$ . Avec :  $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^p} / a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$

---

## I- Les ensembles $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{D}$ , $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

### 1-4/ L'ensemble $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels)

On a :  $\frac{2}{3} = 0,666666\dots \notin \mathbb{D}$

$\frac{2}{3}$  est un nombre rationnel (du latin ratio= fraction).

Chaque nombre rationnel peut s'écrire sous la forme  $\frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  sont des entiers (avec  $b \neq 0$  on préfère  $b > 0$ ).

On note l'ensemble des nombres rationnels par  $\mathbb{Q}$ .

---

## I- Les ensembles $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{D}$ , $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

### 1-5/ L'ensemble $\mathbb{R}$ (nombres réels)

$\sqrt{2} = 1,4121356\dots$  et  $\pi = 3,141592653589\dots$  sont des nombres irrationnels .

Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment un ensemble appelé ensemble des nombres réels, on note cet ensemble par :  $\mathbb{R}$ .

On a :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^*$  est l'ensemble des nombres réels non nuls.

$\mathbb{R}^+$  est l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}^{+*}$  est l'ensemble des nombres réels positifs non nuls.

$\mathbb{R}^-$  est l'ensemble des nombres réels négatifs.

$\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$

---

## II- Règles de calculs

### 2-1/ Les fractions

Soient  $a$  et  $b$  et  $c$  et  $d$  des nombres réels avec  $b \neq 0$  et  $d \neq 0$ .

On a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \\ \frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{ad-bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}\end{aligned}$$

---

## II- Règles de calculs

### 2-2/ Les racines carrées

La racine carrée d'un nombre positif  $x$  est le nombre positif  $a$  tel que  $a^2 = x$ .

Le nombre  $a$  est noté  $a = \sqrt{x}$ .

---

## II- Règles de calculs

### 2-3/ Les identités remarquables

$a$  et  $b$  sont des nombres réels.

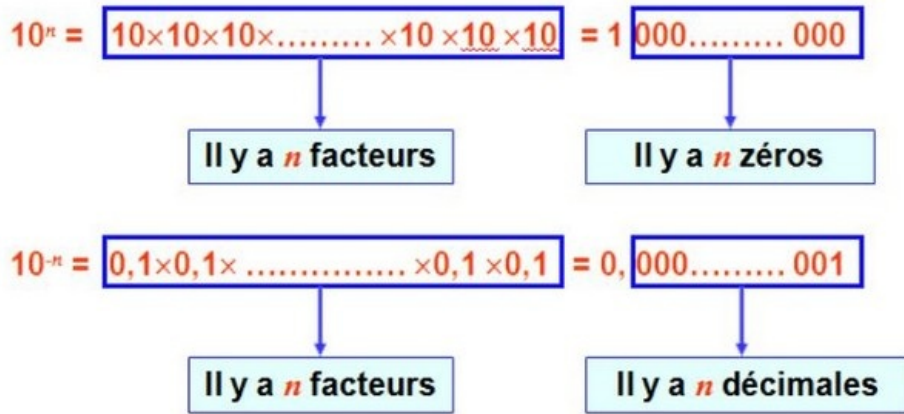
On a :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)\end{aligned}$$

---

## II- Règles de calculs

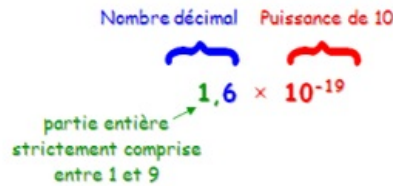
### 2-4/ Les puissances de 10



## II- Règles de calculs

### 2-5/ L'écriture scientifique

Écrire un nombre en écriture scientifique c'est de l'écrire sous la forme :



### Exemples

## III- Exercices

### 3-1/ Exercice 1

1. Montrer que :

$$A = \frac{(9^{n+1} + 9^n)^2}{(3^{2n+1} - 3^{2n})^2} \in \mathbb{N}$$

$$B = \sqrt{2\sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}} + 5\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}} \in \mathbb{N}$$

Soit  $x$  un nombre réel strictement positif ( $x > 3$ ), tel que  $x^2 - 3x - 4 = 0$

2. Montrer que  $2\left(\sqrt{\frac{x-3}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x-3}}\right) \in \mathbb{Z}$

## III- Exercices

### 3-2/ Exercice 2

1. Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = (2x - 1)^2 + (x + 2)^3$$

$$B = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$C = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$D = (2x - 1)^3 - (x + 4)^2$$

2. Factoriser les expressions :

$$E = x^2 - 4 + (x + 3)(x - 2) - 3(x - 2)^2$$

$$F = x^3 - 27 + 2(x^2 - 9) - 3x + 9$$

$$G = 4x^2 - 36x$$

$$H = x^3 - 1 + 3(x^2 - 1) - x + 1$$

---

### III- Exercices

#### 3-3/ Exercice 3

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{(x^2y)^{-3} \times z^2}{xy^2 \times z^{-3}}$$

$$B = \frac{(x^2y)^{-3} \times x^3z^{-2}}{x(zy)^2 \times y^{-1}}$$

On considère le nombre suivant :  $E = \frac{6^{12} \times 25^{-2}}{15^8 \times 18^2}$

2. Déterminer les nombres entiers relatifs  $m$  et  $n$  tels que  $E = 2^n \times 5^m$
- 

### III- Exercices

#### 3-4/ Exercice 4

On considère les nombres suivants :  $a = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$  et  $b = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

1. Calculer  $a \times b$

On pose  $u = a + b$  et  $v = a - b$

2. Calculer  $u^2$  et  $v^2$  puis déduire  $u$  et  $v$
3. Déduire une écriture simplifiée de  $a$  et  $b$

On pose  $X = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$  et  $Y = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$

4. Montrer que  $XY = 1$
  5. Calculer  $(X + Y)^2$  et  $(X - Y)^2$
- 

### III- Exercices

#### 3-5/ Exercice 5

1. Factoriser :

$$A = (x + 2)^2 + x^2 - 4$$

$$B = (2x - 1)^2 - (3x + 2)^2$$

$$C = 27x^3 - 8$$

$$D = x^3 + 125 - 5x(x + 5)$$

On pose :  $a + b = 1$  et  $a^2 + b^2 = 2$

2. Calculer  $a^6 + b^6$  et  $a^4 + b^4$ .

Soit  $c \in \mathbb{R}^*$ . On pose :  $x = c + \frac{1}{c}$

3. Calculer  $c^2 + \frac{1}{c^2}$  et  $c^3 + \frac{1}{c^3}$  en fonction de  $x$ .
- 

### III- Exercices

#### 3-6/ Exercice 6

Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels tel que  $x \neq y$  et  $2(x^2 + y^2) = 5xy$ .

1. Calculer  $\frac{x+y}{x-y}$ .

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois nombres de  $\mathbb{R}^*$  tel que  $ab + bc + ca = 0$ .

2. Calculer  $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$ .
-