EXERCICES DE MATHEMATIQUES TERMINALE D

I-NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1

Soit le polynôme $\varphi(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x - 240$

1)a)Vérifier que $\varphi(x) = (x^2 - 4x)^2 + 8(x^2 - 4x) - 240$

b) En posant $X = x^2 - 4x$, déduire les solutions de l'équation (E): $x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = 0$

2) Soit l'équation (E'): $z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 8iz^3 - 24z^2 + 32iz - 240 = 0$

a) Montrer que (E') admet deux solutions imaginaires pures que l'on déterminera

b) Déterminer les nombres complexe α $et \beta$ pour que :

$$z^4 - 8iz^3 - 24z^2 + 32iz - 240 = (z + 2i)(z - 6i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

c) En déduire les solutions de l'équation (E')

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on considère les points A, B, C et D d'affixe respectives $4 + 2i$; $-4 + 2i$; $-2i$ et $6i$

a) Placer les points A, B, C et D

b) Calculer $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ et $\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}$ puis donner la nature des triangles ABC et ABD

c) Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques puis déterminer le centre et le rayon du cercle passant par les quatre points

4) Soit T une transformation du plan dans lui-même qui transforme A en C et D en E où E est le symétrique de C par rapport à l'origine du repère O.

a) Déterminer l'écriture complexe associée à T

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T

EXERCICICE 2

Soit le nombre complexe $Z = \frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

1-a-Montrer que $Z = e^{2i\alpha}$

b- En déduire le module et un argument de Z

2-a-Montrer que $Z = \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} + i\frac{2\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$

b- En déduire $\cos(2\alpha)$, $\sin(2\alpha)$ et $\tan(2\alpha)$ en fonction de $\tan(\alpha)$

c-Calculer alors la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3-Soit l'équation (E): $z \in \mathbb{C}$, $\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = \frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$

a-En posant $\mathrm{W} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$, résoudre l'équation (E)

b-Montrer que pour tout nombre réel θ, $On\ a$: $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

c-En déduire que les solutions de (E) sont des nombres réels que l'on précisera

<u>EXERCICE</u> 3

On considère l'équation (E): $z \in \mathbb{C}, z^3 + (i-6)z^2 + (13-6i)z + 13i = 0$

1a) Vérifier que $-i$ est solution de (E)

b) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$\forall\ z \in \mathbb{C}, z^3 + (i-6)z^2 + (13-6i)z + 13i = (z+i)(az^2 + bz + c)$

c) En déduire les solutions de (E)

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les Points d'affixes $z_A = -i$, $z_B = 3 + 2i$ et $z_C = 3 - 2i$

a)**Soit r $la\ rotation\ de\ centre\ B\ et\ d'angle$ $\frac{\pi}{4}$**

Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A' image de A par r

b) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}}$. En déduire qu'il existe une homothétie h de centre B qui transforme A' en C et préciser son rapport.

3) On considère la transformation plane S définie par : $S = hor$

a) Quelle est l'image de A par S.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S.

<u>EXERCICE</u> 4

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^4 + (3-2i)z^3 + (2-3i)z^2 + (3-2i)z + 1 - 3i = 0$

1)a) Vérifier que $i\ et -i$ sont solutions de (E)

b) Déterminer les nombres complexes $\beta\ et\ \gamma$ tels que :
$\forall\ z \in \mathbb{C}$, $z^4 + (3-2i)z^3 + (2-3i)z^2 + (3-2i)z + 1 - 3i = (z^2+1)(z^2 + \beta z + \gamma)$

c) En déduire les solutions de (E)

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormée $(0,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B, C et D les points d'affixes $z_A = -i$, $z_B = i$, $z_C = -1 + i$ et $z_D = -2 + i$

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(0,\vec{u},\vec{v})$

b) Calculer $\frac{Z_B - Z_A}{Z_B - Z_D}$ et $\frac{Z_B - Z_D}{Z_B - Z_C}$. En déduire qu'il existe une rotation r et une homothétie h transformant respectivement D en A et C en D

3) On considère la transformation plane S définie par : $S = roh$

a) Quelle est l'image de C par S

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S

EXERCICE 5

Soit $P(z) = z^4 - (2-i)z^3 - 3iz^2 + (4-i)z + 1 + 3i$

1)a) Calculer $P(-1)$ et $P(-i)$

b) Déterminer les nombres complexes α et β pour qu'on ait : $P(z) = (z+1)(z+i)[z^2 + \alpha z + \beta]$

c) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

Soit les points M_1, M_2 , M_3 et M_4 d'affixes respectives $z_1 = -1, z_2 = -i$, $z_3 = 2+i$ et $z_4 = 1-i$

a) Placer ces quatre points dans le repère complexe $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

b) Montrer que ces quatre points sont cocycliques

c) Déterminer la mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M_3}}\right)$

d) En déduire l'affixe z_0 du centre du cercle passant par les points M_1, M_2, M_3 et M_4

EXERCICE 6

Soit l'équation (E): $z^3 - (9+4i)z^2 + (19+20i)z - 11 - 16i = 0$

1)a) Montrer que (E) admet une solution réelle

b) Déterminer les nombres complexes β et γ tels que :
$z^3 - (9+4i)z^2 + (19+20i)z - 11 - 16i = (z-1)(z^2 + \beta z + \gamma)$

c) Résoudre alors (E)

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $3+2i$; $4+3i$; $5+2i$ et 1

a) Placer les points A , B , C et D

b) Soit E le milieu du segment $[AC]$. Calculer l'affixe du point E

c) Montrer que A est l'image de C par la rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

d) Montrer que les points A, B , C et D sont alignés

e) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h de centre B qui transforme A en D

3) Soit $S = h\mathrm{o}r$

a) Quelle est l'image de C par S

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S

c) Déterminer l'écriture complexe puis l'expression analytique de S

d) Déterminer l'image par S de la droite (Δ) d'équation $-x + 2y = 4$

EXERCICE 7

PARTIE A

Soit l'équation $(E): Z \in \mathbb{C}, 8Z^3 - (17 + 5i\sqrt{3})Z^2 + (9 + 8i\sqrt{3})Z - 3i\sqrt{3} = 0$

1-Montrer que (E) admet une solution réelle Z_0 que l'on déterminera

2-En déduire les solutions de l'équation (E)

3-Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ $d'unit$é $8cm$, on considère les points A, B et C d'affixe respectives $Z_A = 1, Z_B = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $Z_C = \frac{3}{8} + i\frac{3\sqrt{3}}{8}$

a- Donner la forme exponentielle des nombres complexes Z_B et Z_C

b-Placer les points A, B et C

4-Soit T la transformation du plan qui transforme A en B et B et en C

a-Déterminer l'écriture complexe associé à T

b-Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T

PARTIE B

Pour tout entier naturel n, on définit la suite de points M_n d'affixe Z_n par : $\begin{cases} M_0 = A \\ M_{n+1} = T(M_n) \end{cases}$

1-a-Calculer les affixes des points M_0 jusqu'à M_6 puis les placer dans le repère précédent

b- Donner la forme exponentielle des affixes des points M_0 jusqu'à M_6

2-On pose pour tout entier naturel n, $d_n = |Z_{n+1} - Z_n|$

a-Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b-Exprimer d_n en fonction de n

c-Calculer $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$ en fonction de n

3-Pour tout entier naturel n, on pose :$a_n = arg(Z_n)[2\pi]$

a-Etablir une relation entre a_n et a_{n+1}

b- En déduire a_n en fonction de n

c-Pour quelles valeurs de n, les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés.

EXERCICE 8

Soit l'équation $(E): z^5 = 1$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et représenter les images des solutions

2)a) Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle

b) En déduire que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$

3)a) Démontrer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation (E'): $X \in \mathbb{R}, 4X^2 + 2X - 1 = 0$

b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ $et \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

EXERCICE 9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - (4-2i)z^2 + (4-6i)z - 4 + 8i$

a) Montrer que P admet une racine complexe imaginaire pure que l'on déterminera

b) Déterminer les réels α et β tels que $P(z) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$

c) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$

2) Soit A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$

a) Placer les points A, B et C

b) Calculer l'affixe du point $G = bary\{(O,3),(A,-4),(B,1),(C,2)\}$

c) Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points M du plan, d'affixe z telle que : $\frac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur.

3) Pour tout point M du plan, on pose : $\psi(M) = 3MO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ et on note (Γ_k) l'ensemble des points M du plan tels que $\psi(M) = k$ où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de (Γ_k)

b) Déterminer et construire (Γ_{48}) et (Γ_{14})

c) En déduire une construction de (Γ') des points M du plan tels que : $14 \leq \psi(M) \leq 48$

EXERCICE 10

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) : $z^4 = 1$

2) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexe l'équation (E'): $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ puis donner les solutions sous la forme trigonométrique

3)a) Vérifier que $z_0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ est une solution de l'équation (E')

b) En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation (E')

4) En déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Partie B

Soit α un réel de l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 - (2^{\alpha+1}\cos\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$ puis donner les solutions sous la forme trigonométrique

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soit A et B les points images des solutions de l'équation (E). Déterminer α pour que le triangle OAB soit équilatéral

PROBLEME 11

Partie A

Soit l'équation : (E): $z \in \mathbb{C}, 16z^4 + 48z^3 + 72z^2 + 60z + 25 = 0$

1) Démontrer que résoudre l'équation (E), revient à résoudre l'équation (E'): $z \in \mathbb{C}^*, \left(az + \frac{b}{z}\right)^2 + 12\left(az + \frac{b}{z}\right) + 32 = 0$ où a et b sont des réels à déterminer

2)a) Résoudre alors l'équation (E')

b) En déduire les solutions de l'équation (E)

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (unité: $2cm$).
On considère les points A, B, C et D d'affixe respectives $z_A = -1 - \frac{1}{2}i$, $z_B = -1 + \frac{1}{2}i$

$z_C = -\frac{1}{2} + i$ et $z_D = -\frac{1}{2} - i$

1) Placer les points A , B, C et D dans le repère

2)a) Démontrer que (AB) et (DC) sont parallèle et que $AD = BC$.
b) En déduire la nature du quadrilatère ABCD

3) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$ puis déduire que les points A, B, C et D sont cocycliques

Partie C

Soit M un point du plan d'affixe z$\neq z_C$ et I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC], [AD]$ et $[IJ]$.
On pose : $\varphi(z) = \frac{2z+2+i}{2z+1-2i}$, $f(M) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA}$ et $g(M) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}$

1) Démontrer que : $f(M) = MI^2 - MJ^2$ et $g(M) = MI^2 + MJ^2 - \frac{BC^2}{2}$

2) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels $f(M) = 0$ et (H) l'ensemble des points M du plan tels que $g(M) = 0$. Déterminer puis construire (Γ) et (H)

3) Démontrer que : $|\varphi(z)| = \frac{MA}{MC}$ et $\left|\overline{\varphi(\overline{z})}\right| = \frac{MB}{MD}$

4)a) Montrer que : $|\varphi(z)| = \left|\overline{\varphi(\overline{z})}\right| <=> f(M).g(M) = 0$

b) En déduire des questions précédentes l'ensemble des points M du plan tels que $|\varphi(z)| = \left|\overline{\varphi(\overline{z})}\right|$

EXERCICE 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.Unité graphique 2cm

1-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $8z^3 - 8(1+i)z^2 + 6iz + 1 - i = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

2-Soit A, B et C trois points du plan d'affixe respective $Z_A = \frac{1}{2}$; $Z_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $Z_C = \frac{1}{2}i$

a-Placer les points A, B et C

b-Déterminer l'écriture complexe de la transformation g de centre $\Omega(i)$ qui transforme $C\ en\ B$

3-Soit T la transformation du plan d'expression analytique :$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}$

a-Déterminer l'écriture complexe de T

b-Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T

c-Déterminer l'équation de $(\mathcal{C}')$ l'image du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(0;1)$ et de rayon

$r = \sqrt{2}$ par la transformation T

4-Soit $T^n = ToTo \dots oT \quad (n\ fois)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

a- Donner la nature et les éléments caractéristiques de T^n

b-Déterminer l'écriture complexe de $T^2 = ToT$ puis une équation cartésienne de l'image de la droite (BC) par T^2

c-Déterminer le plus petit entier n pour que T^n soit une homothétie

5-On définie les nombres complexes Z_n de la manière suivante :

$$\begin{cases} Z_0 = -1 \\ Z_{n+1} = (1+i)Z_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a- On pose $\lambda_n = Z_n - i$. Calculer $Z_1, Z_2\ et\ Z_3\ puis\ \lambda_1, \lambda_2\ et\ \lambda_3$

b-Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = -(1+i)^{n+1}$

c-En déduire le module et un argument de λ_n

EXERCICE 13

Soit l'équation (E): $4z^3 - (2+12i)z^2 + (-9+5i)z + 2 + 2i = 0$

1)a) Montrer que (E) admet deux solutions imaginaires pures

b) Déterminer les nombres complexes $\beta\ et\ \gamma$ tels que :
$4z^3 - (2+12i)z^2 + (-9+5i)z + 2 + 2i = (z-2i)(2z^2 + \beta z + \gamma)$

c) Résoudre alors (E)

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$; $2i$ et $\frac{1}{2}i$

a-Placer les points A,B et C

b-Soit M un point d'affixe z différent de A. On pose $W=\frac{z-2i}{2z-1-i}$

b_1) Déterminer analytiquement et géométriquement l'ensemble (E) des points M tels W soit un soit un nombre réel

b_2) Déterminer analytiquement et géométriquement l'ensemble (F) des points M tels W soit un soit imaginaire pure

c) Construire (E) et (F)

3) Calculer $\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}$ puis déduire la nature du triangle ABC

EXERCICE 14

1)a) Résoudre l'équation $(E): z\in\mathbb{C}, z^7=1$

b) Montrer que la somme des solutions de (E) est nulle

c) En déduire que : $1+2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)=0$

d) Exprimer $\cos(2x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ puis déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est solution de l'équation (E') : $8x^3+4x^2-4x-1=0$

2) Soit la fonction $f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$

a) Etudier les variations de f puis montrer que l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 appartenant respectivement à $\left[\frac{1}{2};1\right]$, $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$

b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

EXERCICE 15

Soit l'équation $(E): Z\in\mathbb{C}, 8Z^3-(17+5i\sqrt{3})Z^2+(9+8i\sqrt{3})Z-3i\sqrt{3}=0$

1-Montrer que (E) admet une solution réelle Z_0 que l'on déterminera

2-En déduire les solutions de l'équation (E)

3-Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ $d'unit$é $8cm$, on considère les points A, B et C d'affixe respectives $Z_A=1, Z_B=\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $Z_C=\frac{3}{8}+i\frac{3\sqrt{3}}{8}$

a- Donner la forme exponentielle des nombres complexes Z_B et Z_C

b-Placer les points A, B et C

4-Soit T la transformation du plan qui transforme A en B et B et en C

a-Déterminer l'écriture complexe associé à T

b-Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T

5-Pour tout entier naturel n, on définit la suite de points M_n d'affixe Z_n par : $\begin{cases} M_0 = A \\ M_{n+1} = T(M_n) \end{cases}$

a-Calculer les affixes des points M_0 jusqu'à M_6 puis les placer dans le repère précédent

b- Donner la forme exponentielle des affixes des points M_0 jusqu'à M_6

6-On pose pour tout entier naturel n, $d_n = |Z_{n+1} - Z_n|$

a-Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b-Exprimer d_n en fonction de n

c-Calculer $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$ en fonction de n

7-Pour tout entier naturel n, on pose :$a_n = arg(Z_n)[2\pi]$

a-Etablir une relation entre a_n et a_{n+1}

b- En déduire a_n en fonction de n

c-Pour quelles valeurs de n, les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés.

II-ETUDE DE FONCTIONS

PROBLEME 1

PARTIE A

Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - (x^4 + x^2 + 2)e^{-\frac{x^2}{2}}$

1)a) Calculer les limites de g en $-\infty$ et $en + \infty$

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ puis étudier son signe

2)a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha \in]-3; -2[$ et $\beta \in]2; 3[$

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

PARTIE B

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x^2} - 1 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \; et \; f'(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
Unité graphique : 2cm

1)a) Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction f

b) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition

2) Etudier la continuité de f en 0

3)a) Montrer que : $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b) En déduire le tableau de variation de f

4) Construire la courbe (C)

<u>PARTIE</u> C

Soit λ un strictement supérieur à 1

On pose : $I(\lambda) = \int_1^\lambda e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ et $K(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} dx$

1) A l'aide d'intégration par partie portant sur $K(\lambda)$, montrer que : $I(\lambda) + K(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{e}}$

2)a) En déduire l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1 \; et \; x = \lambda$

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \mathcal{A}(\lambda)$. Donner une interprétation du résultat obtenu

<u>PROBLEME</u> 2

<u>PARTIE</u> A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 2 - 2lnx$

1) Etudier les variations de g

2)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

b) Vérifier que $1,2 < \alpha < 1,3$

c) En déduire suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$

<u>PARTIE</u> B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 - x + \frac{2ln(x)}{x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 2cm

1)a) Calculer la limite de f en zéro puis donner une interprétation graphique

b) Calculer la limite de f en $+\infty$

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$

d) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ)

2)a) Montrer que pour tout $x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

3)a) Montrer que $f(\alpha) = 2 - 2\alpha + \frac{2}{\alpha}$

b) Montrer que $f(\alpha)$ est positif

c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions positives

4)a) Calculer les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (Δ)

b) Donner une équation de cette tangente (T)

5) Tracer (Δ) , (T) et (C)

6) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les droite d'équation $x = \alpha$ et $x = e.$

a) $Calculer$ $\mathcal{A}(\alpha)$

b) En déduire que $\mathcal{A}(\alpha) = \left(-\alpha^4 + 4\alpha^2\right)cm^2$

PARTIE C

Soit φ la restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

1)a) Montrer que φ définie une bijection de $[\alpha; +\infty[$ sur un intervalle à préciser

b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1}

c) Donner le sens de variation de φ^{-1} puis dresser son tableau de variation

2) Tracer la courbe (C') de φ^{-1} dans le même repère que (C)

PROBLEME 3

PARTIE A

Soit la fonction g_k définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $g_k(x) = -kln(-x) - kx - 2k$ où k est un paramètre réel différent de zéro

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de g_k

b) Déterminer suivant les valeurs de k les limites de g_k aux bornes de son ensemble de définition

2)a) Calculer la dérivée g'_k de la fonction g_k . Discuter suivant les valeurs de k le signe de g'_k

b) Dresser le tableau de variation de g_k suivant les valeurs de k

3) a)Démontrer que $\forall$ $k \neq 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet deux solutions uniques α et β $(\alpha < \beta)$

b) Discuter suivant les valeurs de k le signe de $g_k(x)$

PARTIE B

Soit les fonctions f_k définies de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = \frac{-kxln(-x)+k}{x+1}$ et (C_k) leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 1cm

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f_k

b) Déterminer suivant les valeurs de k les limites de f_k aux bornes de son ensemble de définition

c) Montrer que : $f_k(\alpha) = k(\alpha + 1)$ et $f_k(\beta) = k(\beta + 1)$

2)a) Montrer que $\forall x \in D_{f_k}$,$f'_k(x) = \frac{g_k(x)}{(x+1)^2}$

b) En déduire le tableau de variation de f_k suivant les valeurs de k

c) Montrer que les courbes (C_k) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe (OI)

3) On pose $k = 1$

a) Vérifier que $-3,2 < \alpha < -3,1$ $et\ que$ $-1 < \beta < 0$

b) Dresser le tableau de variation de f_{1}, puis construire la courbe (C_1) dans un repère orthonormé

PARTIE C

Soit la suite U_n définie par : $U_n = \int_{\alpha}^{-e} \frac{x\ln(-x)}{(x+1)^n} dx$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{A}(\alpha) = \int_{\alpha}^{-e} f_1(x)dx$

1) Exprimer $(n-2)U_n - nU_{n+1}$ en fonction de α et n

2) En déduire les valeurs de U_0 , $U_1 + U_2$, U_3 et U_4 en fonction de α

3)a) Vérifier que : $\mathcal{A}(\alpha) = -U_1 + \ln\left|\frac{1-e}{1+\alpha}\right|$

b) En déduire que : $\mathcal{A}(\alpha) = U_2 - \frac{\alpha^3+3\alpha^2-1}{\alpha+1}$

4)a) Démontrer que : $\frac{(\alpha^2+2\alpha)(\alpha+e)}{(1-e)^2} - \frac{\alpha^3+3\alpha^2-1}{\alpha+1} \leq \mathcal{A}(\alpha) \leq \frac{e(\alpha+e)}{(\alpha+1)^2} - \frac{\alpha^3+3\alpha^2-1}{\alpha+1}$

b) En déduire un encadrement de l'aire du domaine délimité par la courbe(C_1) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = -e$

PROBLEME 4

Partie A

On considère la fonction g_k de la variable réelle x définie par : $g_k(x) = kx^2 - 2k\ln(x)$, k étant un paramètre réel non nul.

1) Déterminer l'ensemble de définition E_k de g_k

2) Calculer les limites de g_k aux bornes de E_k pour $k > 0$ $et\ pour$ $k < 0$

3) Calculer la dérivée g'_k de g_k

4)a) Etablir le tableau de variation de g_k pour chaque cas

b) En déduire le signe de $g_k(x)$pour $k > 0$ $et\ pour$ $k < 0$

Partie B

Soit la fonction numérique f_k de variable réelle x définie par : $f_k(x) = kx + \frac{2k}{x} + \frac{2k\ln(x)}{x}$, k étant un paramètre réel non nul. On désigne par (C_k) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repéré orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_k de la fonction f_k

2) Calculer les limites de f_k aux bornes de D_k

3)a) Montrer que la droite (Δ_k) d'équation $y = kx$ est asymptote à la courbe (C_k) en $+\infty$

b) Etudier la position relative de (C_k) par rapport à (Δ_k) pour k > 0 $et\ pour$ $k < 0$

4)a) Montrer que $f'_k(x) = \frac{g_k(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f_k pour $k > 0$ *et pour* $k < 0$

5)a) On pose $k = 1$. Dresser le tableau de variation de f_1

b) Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,3\,;0,4[$

6) Construire la courbe (C_1) et la droite (Δ_1)

Partie C

1) Justifier que f *admet une bijection réciproque* f^{-1}

2) Soit λ un réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$. On désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la portion du plan délimitée par la courbe (C_1), *la courbe* $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = \lambda$

a) Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$

b) En déduire la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ *tend vers* $+\infty$

PROBLEME 5

Pour tout nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = \frac{kxln|x|-1}{x}$ et on désigne par (C_k) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique $2cm$

Partie A

1)a) Déterminer l'ensemble de définition E de la fonction f_k

b) Etudier suivant le signe de k les limites de f_k aux borne de E

c) Quelle est la nature de la courbe (C_0) ?

2) Démontrer que toutes les courbes (C_k) passent par deux points fixes dont on donnera les coordonnées

3)a) Montrer que les courbes (C_k) *et* (C_{-k}) sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine du repère

b) Etudier suivant le signe de k , la position relative de (C_k) *et* (C_{-k})

4) On suppose que k est non nul.

a) Etudier le sens de variation de f_k puis dresser son tableau de variation suivant les valeurs de k

b) Etudier le signe de : $k(1 - ln|k|)$ puis déduire suivant les valeurs de k le nombre de solutions de l'équation $f_k(x) = 0$

c)Montrer que si α est solution de l'équation $f_k(x) = 0$ alors celle de l'équation$f_{-k}(x) = 0$ est$-\alpha$

Partie B

On pose $k = e$ *et* $k = -e$. Ainsi $f_e(x) = \frac{exln|x|-1}{x}$ *et* $f_{-e}(x) = -\frac{exln|x|+1}{x}$

1) Dresser le tableau de variation de f_e *et de* f_{-e}

2) Vérifier que l'équation $f_e(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$

3)a) Etudier les branches infinies des courbes (C_e) et (C_{-e})

b) Tracer (C_{-e}) , (C_0) et (C_e) dans le même repère

Partie C

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $I_n = \frac{1}{n-1}\int_e^{e^n} f_e(t)dt$ et $J_n = \frac{1}{n-1}\int_{-e}^{-e^n} f_{-e}(t)dt$

1) Montrer que $I_n = J_n$

2)a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer I_n

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}_1$ de la portion du plan délimité par la courbe (C_e), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$ et l'aire $\mathcal{A}_2$ de la portion du plan délimite par la courbe (C_{-e}), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -e$ et $x = -e^2$

3) On pose $t_n = I_n + 1$ pour tout entier naturel $n \geq 2$

a) Montrer que (t_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Calculer $S = t_2 + t_3 + t_4 + \cdots\cdots + t_n$ et $S' = I_2 + I_3 + I_4 + \cdots\cdots + I_n$ en fonction de n

PROBLEME 6

PARTIE A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = 2 - (x-1)^2 e^{-x}$

1) Calculer les limites de φ en -∞ et en +∞

2)a) Calculer la dérivée $\varphi'(x)$ puis étudier son signe

b) Dresser son tableau de variation

3)a) Montrer l'équation $\varphi(x)$=0 admet une unique solution α

b) Vérifier que $-0,3 < \alpha < -0,2$

PARTIE B

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+1)e^{-x} + 2x - 2$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .Unité graphique : 2cm

1) Déterminer les limites de f en -∞ et $en + \infty$

2)a) Démontrer que f est une primitive de φ sur $\mathbb{R}$

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à (C) en +∞

3) Démontrer que (C) admet en -∞ une branche parabolique dont on précisera la direction

4)a) Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{4\alpha}{(\alpha-1)^2}$

b) Montrer que $f(\alpha)$ est négatif

c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\beta_1 \in]-0,8; -0,7[$ et $\beta_2 \in]0,6; 0,7[$

6) Construire (C) et (D)

7) Soit λ un réel strictement positif et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimité par (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$

a) A l'aide d'une intégration par partie , calculer $\mathcal{A}(\lambda)$

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

1) Démontrer que h est une bijection sur un intervalle J à préciser

2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de h^{-1}, puis dresser son tableau de variation

b) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C)

PROBLEME 7

PARTIE A

On considère la fonction g_k de variable réelle x définie par : $g_k(x) = \frac{1}{x} + k + \frac{ln(kx)}{x}$ où k est un paramètre réel non nul.

1) Déterminer, suivant les valeurs de k, l'ensemble de définition E_k de g_k

2) Calculer les limites de g_k aux bornes de E_k pour $k > 0$ et pour $k < 0$

3) Calculer la dérivée g'_k de g_k

4) Etablir le tableau de variation de g_k pour $k > 0$ et pour $k < 0$

5)a) Démontrer que pour $k > 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet une unique solution α_k dans l'intervalle $\left]0; \frac{1}{k}\right[$

b) Démontrer que pour $k < 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet une unique solution β_k *dans l'intervalle* $\left]\frac{1}{k}; 0\right[$

c) En déduire le signe de $g_k(x)$ pour $k > 0$ et pour $k < 0$

PARTIE B

Soit la fonction numérique f_k de la variable réelle x, définie par :
$f_k(x) = \frac{1}{2}[ln(kx)]^2 + ln(kx) + kx - 1$ où k est un paramètre réel non nul. On désigne par (C_k) la représentation graphique de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 2cm

1) Déterminer, suivant les valeurs de k, l'ensemble de définition D_k de la fonction f_k

2) Calculer les limites de f_k aux bornes de D_k pour $k > 0$ et pour $k < 0$

3)a) Démontrer que : $\forall x \in D_k$, $f'_k(x) = g_k(x)$

b) En déduire le sens de variation de f_k $et\ dresser\ son\ tableau\ de\ variation$ dans chaque cas

4) Démontrer que les courbes (C_k) et (C_{-k}) sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées

5) Justifier que pour $k > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_k(x)}{x} = 0$ et pour $k < 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_k(x)}{x} = 0$. Donner un Interprétation des résultats obtenue

6)a) On pose $k = 1$, dresser le tableau de variation de f_1

b) Construire les courbes (C_1) et (C_{-1}) dans le même repère

PARTIE C

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\lambda_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{e}{n}} f_n(x)dx$

1)a) En intégrant par partie, calculer λ_n

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine délimité par (C_1) et les droites d'équation $x = 1\ et\ x = e$

et l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine délimité par (C_{-1}) et les droites d'équations $x = -1\ et\ x = -e$

2) $Pour\ tout$ entier naturel n non nul, on pose : $\beta_n = \frac{1}{\lambda_n}$

a) Démontrer que β_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Calculer en fonction de n : $S_n = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{\lambda_n}$

PROBLEME 8

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$

1) Calculer les limites de g en $-\infty\ et + \infty$

2)a) Calculer la dérivée $g'(x)$ de g puis étudier son signe

b) Dresser le tableau de variation de g

3)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha_1\ et\ \alpha_2$

b) Vérifier que $-1,6 < \alpha_1 < -1,5$ et $3,3 < \beta_2 < 3,4$

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

PARTIE B

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + (x + 4)e^{-\frac{x}{2}}$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 1cm

1) Calculer les limites de f en $-\infty\ et\ en + \infty$

2)a) Montrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f

3)a) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

b) Etudier la position relative de (C) par rapport à $(\mathcal{D})$

c) Montrer que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction

4)a) Montrer que $f(\alpha_1) = \frac{1}{2}\alpha_1 + 2 + \frac{2}{\alpha_1+2}$

b) En déduire un encadrement de $f(\alpha_1)$ et $f(\alpha_2)$ à 10^{-2} prés

5) Construire la courbe (C) *et la droite* $(\mathcal{D})$

PARTIE C

Soit λ un réel de l'intervalle $]-4;+\infty[$ et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimité par la courbe (C) , la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = -4$ *et* $x = \lambda$

1) A l'aide d'intégration par partie, calculer $\mathcal{A}(\lambda)$

2) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

PROBLEME 9

Partie A

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1): $2y' + y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

2) On considère l'équation différentielle (E_2): $4y' + 2y = 1 - 2e^{-\frac{x}{2}}$

a) Déterminer deux réels m *et* p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = m + pxe^{-\frac{x}{2}}$ soit une solution de (E_2)

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

b_1) Montrer que g est solution de (E_2) si et seulement si $g - f$ est solution de (E_1)

b_2) Déduire les solutions de l'équation (E_2)

3) Déterminer la solution g_0 de (E_2) dont la courbe représentative dans plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ admet au point d'abscisse $x_0 = 0$, une tangente parallèle à l'axe des abscisses

Partie B

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -\frac{1}{2}(x+2)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique : $1cm$.

1)a) Déterminer les limites de h en $-\infty$ *et en* $+\infty$

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote horizontale (Δ) dont on donnera l'équation

c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ)

2) Calculer la fonction dérivée $h'(x)$ de la fonction h

3)a) Etudier le sens de variation de la fonction h puis dresser son tableau de variation

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions $\beta_1 \in]-2; -1[$ et $\beta_2 \in]3; 4[$

4) Montrer que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction

5) Construire la courbe (C) et (Δ)

6) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $H: x \longmapsto (ax + b)e^{-\frac{x}{2}}$ soit une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}(x+2)e^{-\frac{x}{2}}$

7) Soit $\alpha \in]-2; +\infty[$ et $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la portion délimité par la courbe (C), $l'axe$ des abscisses, l'asymptote horizontale (Δ) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = \alpha$

a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$

Partie C

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $U_n = \int_{n+2}^{n+3} h(t)dt$

1) Calculer U_2 et U_3

2)a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2, U_{n-2} = \int_{n+2}^{n+3} h(t-2)dt$

b) En déduire que $\forall n \geq 2, U_{n-2} - eU_n = 2\left(e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n+1}{2}}\right) + \frac{1}{2}(1-e) \quad (1)$

c) En déduire les valeurs de U_0 et U_1

3)a) Calculer $U_{n+1} + U_{n+2}$ en fonction de n

b) En utilisant l'égalité(1), calculer $S = U_2 + U_3 + U_4 + \cdots\cdots + U_n$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} S$

4)a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2, h(n+2) \leq U_n \leq h(n+3)$

b) En déduire le sens de variation de U_n

c) La suite (U_n) est-elle convergente ?

d) Si une suite est convergente, peut-on conclure sur la convergence de la somme de ses termes ?

PROBLEME 10

PARTIE A

Soit la fonction g_k de la variable réelle x définie par : $g_k(x) = (kx-1)e^{kx} - k$

Où k est un paramètre réel non nul.

1) Calculer les limites de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$ pour $k > 0$ et pour $k < 0$

2) Calculer la dérivée g'_k de g_k

3) Etablir le tableau de variation de g_k pour $k > 0$ et pour $k < 0$

4)a) Montrer que pour $k \leq -1$, $g_k(x) \geq 0$

b) Montrer que pour $-1 < k < 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions de signe contraire α_k et β_k. $(\alpha_k < \beta_k)$

c) Montrer que pour $k > 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution unique positive λ_k

d) En déduire de tout ce qui précède, le signe de $g_k(x)$ suivant les valeurs de k

PARTIE B

Soit la fonction numérique f_k de la variable réelle x définie par : $f_k(x) = 1 - kx + \left(x - \frac{2}{k}\right)e^{kx}$

Où k est un paramètre réel non nul. On désigne par (C_k) la représentation graphique de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 1cm

1) Calculer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$ pour $k > 0$ et pour $k < 0$

2)a) Montrer que la droite $(\mathcal{D}_k)$ d'équation $y = -kx + 1$ est asymptote à (C_k) en $-\infty$ pour $k > 0$ et en $+\infty$ pour $k < 0$

b) Etudier la position relative de (C_k) par rapport à $(\mathcal{D}_k)$

c) Montrer que la courbe (C_k) admet une branche parabolique en $-\infty$ pour $k < 0$ et en $+\infty$ pour $k > 0$ dont on précisera la direction

3)a) Montrer que f_k est une primitive de g_k sur $\mathbb{R}$

b) En déduire suivant les valeurs de k, le tableau de variation de f_k

4) On pose $k = 1$ ainsi $g_1(x) = (x-1)e^x - 1$ et $f_1(x) = 1 - x + (x-2)e^x$

a) Dresser le tableau de variation de f_1

b) Vérifier que $1,2 < \lambda_1 < 1,3$

c) Montrer que $f_1(\lambda_1) = 2 - \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1 - 1}$

d) En déduire que $f_1(\lambda_1)$ est négatif

e) Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\gamma_1 \in]-0,6; -0,5[$ et $\gamma_2 \in]2,1; 2,2[$

5) Construire $(\mathcal{D}_1)$ et (C_1)

6) Soit λ un réel de l'intervalle $]-\infty; 2[$ et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimité par (C_1), la droite $(\mathcal{D}_1)$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 2$

a) A l'aide d'intégration par partie, calculer $\mathcal{A}(\lambda)$

b) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$

PARTIE C

Soit h la restriction de f_1 à l'intervalle $]-\infty; \lambda_1]$

1) Démontrer que h est une bijection sur intervalle K à préciser

2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de h^{-1}, puis donner son sens de variation

b) Construire la courbe (C) de h^{-1} dans le même repère que (C_1)

PROBLEME 11

PARTIE A

On considère la fonction φ_k définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi_k(x) = -1 + k^2x^2 - 2lnx$ où k est un paramètre réel non nul.

1) Calculer les limites de φ_k en zéro et en $+\infty$

2)a) Calculer la dérivée φ'_k de φ_k, puis étudier son signe pour $k < 0$ et $pour$ $k > 0$
b) Etablir le tableau de variation de φ_k pour chaque cas

3)a) Montrer que $pour$ $k \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, $\varphi_k(x) \geq 0$

b) Montrer que pour $-1 < k < 0$, l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 . $(\alpha_1 < \alpha_2)$

c) Montrer que pour $0 < k < 1$, l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions β_1 et β_2 . $(\beta_1 < \beta_2)$

4) En déduire de tout ce qui précède le signe de $\varphi_k(x)$

PARTIE B

Soit la fonction numérique f_k de la variable réelle x définie par : $f_k(x) = -1 + kx + \frac{3+2lnx}{kx}$ où k est un paramètre réel non nul.

On désigne par (C_k) la représentation graphique de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 1cm

1) Déterminer l'ensemble de définition D_k de la fonction f_k

2) Calculer aux bornes de D_k les limites de f_k pour $k < 0$ et $pour$ $k > 0$

3)a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{kx^2}$

b) En déduire le signe de f'_k suivant les valeurs de k

c) Dresser le tableau de variation f_k pour chaque cas

4)a) Montrer que la droite $(\mathcal{D}_k)$ d'équation $y = kx - 1$ est asymptote à (C_k) en $+\infty$

b) Etudier la position relative de (C_k) par rapport à $(\mathcal{D}_k)$ pour $k < 0$ $et\ pour$ $k > 0$

5) On pose $k = \frac{1}{2}$

a) Donner les expressions de $\varphi_{\frac{1}{2}}(x)$ et $f_{\frac{1}{2}}(x)$

b) Dresser le tableau de variation de $f_{\frac{1}{2}}$

c) Vérifier que $0,6 < \beta_1 < 0,7$ et $3,8 < \beta_2 < 3,9$

6) Construire la courbe $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$ et ses asymptotes

7) Soit $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimité par la courbe $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$, la droite $\left(\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}\right)$ et les droites d'équations $x = \beta_1$ et $x = \beta_2$

a) Calculer $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2)$

b) En déduire que $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{32}(\beta_2^2 - \beta_1^2)(\beta_2^2 + \beta_1^2 + 16)cm^2$

PARTIE C

Soit h la restriction de $f_{\frac{1}{2}}$ à l'intervalle $[\beta_2; +\infty[$

1) Montrer que h est une bijection de $[\beta_2; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser

2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} puis dresser son tableau de variation

b) Construire la construire la courbe (C) de h^{-1} dans le même repère que $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$

PROBLEME 12

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$

On désigne par (C_n) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 2cm

PARTIE A

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions f_0 et f_1 correspondant respectivement à $n = 0 = et\ n = 1$

On considère d'abord la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

1)a) Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition

b) En déduire les asymptotes de (C_0)

2) Montrer que le point $K\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_0)

3) Dresser le tableau de variation de f_0

4)a) Justifier que, pour étudier la position relative de la tangente (T) par rapport à la courbe (C_0), il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de la fonction $g\ définie\ par$: $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$

b) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ puis déduire les signes de $g'(x)$, $g''(x)$ et $g(x)$

c) En déduire la position relative de la tangente (T) par rapport à la courbe (C_0)

5) Tracer $(C_0)\ et\ (T)$

6)a) Démontrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à la droite d'équation$y = \frac{1}{2}$

b) Tracer la courbe (C_1) dans le même repère que (C_0)

<u>PARTIE</u> B

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2

1)a) Calculer la limite de f_n en $-\infty\ et\ en + \infty$

b) Donner une interprétation graphique des résultats

2)a) Montrer que pour tout nombre réel x , $f_n'(x) = \frac{1-n-ne^x}{e^{(n-1)x}(1+e^x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f_n

3) Etudier la position relative des courbes $(C_n)\ et\ (C_{n+1})$

4) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées

5) Tracer (C_2) dans le même repère que (C_1)

<u>PROBLEME</u> 13

<u>PARTIE</u> A

On considère la fonction f_k définie par : $\begin{cases} f_k(x) = 1 + x + kxln(|x|)\ si\ \ x \neq 0 \\ f_k(0) = 1 \end{cases}$ où k est un paramètre réel.

On désigne par (C_k) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition E_k de la fonction f_k

2) Quelle est la nature de (C_0) ?

3) Etudier la continuité de f_k en 0

4) Etudier la dérivabilité de f_k en 0, puis donner une interprétation graphique du résultat

5) Montrer que le point $A(0;1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_k)

<u>PARTIE</u> B

Dans cette partie, on suppose que k est non nul.

1) Calculer les limites de f_k aux bornes de E_k pour $k > 0$ *et pour* $k < 0$

2)a) Montrer que pour tout $x \neq 0, f'_k(x) = 1 + k + kln(|x|)$

b) En déduire le sens de variation de f_k pour $k > 0$ *et pour* $k < 0$

c) Dresser le tableau de variation de f_k pour chaque cas

3) Etudier les branches infinies de la courbe (C_k) suivant les valeurs de k

4) Montrer que toutes les courbes (C_k) passent par trois points fixes dont on donnera les coordonnées

5) On pose $k = -1$, ainsi $f_{-1}(x) = 1 + x - xln(|x|)$

a) Dresser le tableau de variation de f_{-1}

b) Montrer que l'équation $f_{-1}(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[3;4]$

c) Construire la courbe (C_{-1})

6) Soit la fonction φ définie sur $I = [3;4]$ par : $\varphi(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

a) Etudier le sens de variation de φ sur $[3;4]$

b) En déduire que, pour tout $x \in I, \varphi(x) \in I$

c) Montrer que $\forall x \in I, |\varphi'(x)| \leq \frac{4}{9}$

7) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ est équivalente à l'équation $f_{-1}(x) = 0$

<u>PARTIE</u> C

Pour tout entier naturel n, on définit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n \in [3;4]$

2)a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|U_n - \alpha|$

b) En déduire que pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

c) Déterminer la valeur n_0 *de* n pour laquelle U_{n_0} est une valeur approchée de α à 4.10^{-2} près

d) Déterminer cette valeur approchée de α

PROBLEME 14

Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $[0;+\infty[$ la fonction numérique f_n par :

$\begin{cases} f_n(x) = x(lnx)^n \ \ si\ x > 0 \\ f_n(0) = O \end{cases}$ **et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(unité\ graphique: 1cm)$

PARTIE A

1)a) Calculer la limite de f_n en $+\infty$

b) Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{f_n(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique

2) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes dont on donnera les coordonnées

3)a) Montrer que $\forall\ x > 0$, $f'_n(x) = (lnx)^{n-1}(lnx + n)$

b) Donner le signe de $f'_n(x)$ puis le sens de variation de f_n suivant la parité de n

c) En déduire le tableau de variation de f_n suivant la parité de n

4) Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $[0\ ;+\infty[$ la fonction g_n par :

$g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$

a) Etudier le signe de $g_n(x)$ et en déduire la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1})

b) Tracer les courbes (C_1) et (C_2) dans un même repère

PARTIE B

On pose : $\mathcal{A}(n) = \int_1^e f_n(x)dx$ et $U_n = \int_1^e f_n(x)dx - \frac{1}{2}e^2$

1) Donner une interprétation de $\mathcal{A}(n), \mathcal{A}(1)\ et\ \mathcal{A}(2)$

2)a) Calculer U_0

b) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, U_n = -\frac{n}{2}U_{n-1}$

C) En déduire les valeurs de U_1, U_2, U_3 et U_4

3)a)Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = n!\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

b) En déduire l'expression de $\mathcal{A}(n)$ et les valeurs de $\mathcal{A}(1)\ et\ \mathcal{A}(2)$

PROBLEME 15

On considère la fonction f définie par : $f(x) = ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) + x - 1$

PARTIE A

Soit la fonction $g\ définie$ sur $]1;+\infty[$ par : $g(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + 1$

1) Etudier les variations de g
$(Dg, les\ limites\ aux\ bornes\ de\ Dg, \text{dérivée}, sens\ de\ variation\ et\ tableau\ de\ variation)$

2) Calculer $g(\sqrt{2})$puis en déduire le signe de $g(x)$ sur $]1;+\infty[$ suivant les valeurs de x

PARTIE B

1)$a)Montrer\ que\ Df = [1;+\infty[\ puis\ calculer\ f(1)$

b) Calculer la limite de $f\ en\ +\infty\ \left(On\ \ pourra\ poser\ \ X = x - \sqrt{x^2-1}\ \right)$

2)a) Etudier la dérivabilité de $f\ en\ 1$

b) Donner une interprétation analytique et géométrique du résultat obtenu

3)a) Démontrer que : $\forall x \in]1;+\infty[\ , f'(x) = g(x)$

b) En déduire de tout ce qui précède le tableau de variation de f

c) $Montrer\ que\ l'\text{é}quation\ f(x) = 0\ admet\ une\ unique\ solution\ \beta\ \in \left[\frac{13}{5};\frac{27}{10}\right]$

4) Etudier la branche infinie de $f\ en + \infty$

5) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) $d'\text{é}quation\ y = x$

6) Soit la fonction φ définie sur $I = \left[\frac{13}{5};\frac{27}{10}\right]$ par : $\varphi(x) = \dfrac{e^{(x-1)}+e^{-(x-1)}}{2}$

a) Etudier les variations de φ sur I

b) En déduire que pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \in I$

c) Démontrer que pour $tout\ x \in I$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{27}{10}$

d) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$

PARTIE C

Pour tout entier naturel n , on définit la suite (W_n) par : $\begin{cases} W_0 = \frac{13}{5} \\ W_{n+1} = \varphi(W_n) \end{cases}$

1)a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \in \left[\frac{13}{5};\frac{27}{10}\right]$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |W_{n+1} - \beta| \leq \frac{27}{10}|W_n - \beta|$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |W_n - \beta| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{27}{10}\right)^n$

2)a) Déterminer la valeur n_0 de n pour laquelle W_{n_0} est une valeur approchée de β à 3.10^{-1} près

b) Calculer W_{n_0}

PROBLEME 16

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ par $g(x) = -4x + \sqrt{1-4x^2}$ et h la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $h(x) = 4x + \sqrt{4x^2-1}$

1)a) Résoudre l'équation : $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[, g(x) = 0$

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$

2) Justifier que : $\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[, h(x) > 0$

PARTIE B

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}\sqrt{|1-4x^2|}$

On désigne par (Γ) $sa\ courbe$ représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de D de la fonction f

b) Etudier la parité de f puis déduire un ensemble d'étude E de la fonction f

2) On pose $E = [0;+\infty[$

a) Exprimer $f(x)$ sans symbole de valeur absolue sur l'intervalle E

b) Déterminer les limites de f aux bornes de E

c) Etudier la dérivabilité de f en $\frac{1}{2}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat

3)a) Démontrer que : $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{2\sqrt{1-4x^2}} & si\ x \in \left[0;\frac{1}{2}\right[\\ \dfrac{h(x)}{2\sqrt{4x^2-1}} & si\ x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\end{cases}$

b) En déduire le sens de variation de f sur E

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

4)a) Démontrer que la droite (Δ_1) d'équation $y = \frac{3}{2}x$ est asymptote abdique à (Γ) en $+\infty$

b) En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ_2) à (Γ) en $-\infty$

5) Construire la courbe (Γ) et ses asymptotes

PARTIE C

Soit φ la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

1) Montrer que φ est une bijection de $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ sur un intervalle K à préciser

2) Déterminer l'expression explicite de sa bijection réciproque φ^{-1}

3)a) Donner les caractéristiques de φ^{-1} puis dresser son tableau de variation

b) Construire la courbe (Γ') de φ^{-1} dans le même repère que (Γ)

PROBLEME 17

PARTIE A

Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ par : $g(x) = x + 2 + ln(-x)$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g

b) Déterminer les limites$g$ aux bornes de son ensemble de définition

2)a) Calculer la dérivée de g puis étudier son signe

b) Dresser le tableau de variation de g

3)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha\ et\ \beta(\alpha < \ \beta)$

b) Vérifier que : $-3,2 < \alpha < -3,1\ et - 0,2 < \beta < -0,1$

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

PARTIE B

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{xln(-x)}{x+1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

b) Calculer les limite de f aux bornes de son ensemble de définition

c) Montrer que : $f(\alpha) = -1 - \alpha\ et\ f(\beta) = -1 - \beta$

2)a) Démonter que : $\forall x \in Df,\ f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) En déduire le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe $(0I)$

3) Tracer la courbe (C)

PROBLEME 18

PARTIE A

On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2 - 2ln|x|$

1) Etudier les variations de g

2)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha\ et\ \beta(\beta < \alpha)$

b) Vérifier que $1,2 < \alpha < 1,3$ et que $\beta = -\alpha$

c) En déduire suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$

PARTIE B

Soit f la fonction définie $de\ \mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - x + \frac{2ln|x|}{x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 2cm

1)a) Calculer la limite de f en zéro puis donner une interprétation graphique

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en -∞

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C)

d) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ)

2) Etudier la dérivabilité de f en 0

3)a) Montrer que pour tout $x \neq 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

4)a) Montrer que $f(\alpha) = 2 - 2\alpha + \frac{2}{\alpha}$ et $f(\beta) = -f(\alpha) + 4$

b) Montrer que $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont positifs

c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions positives

5)a) Calculer les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (Δ)

b) Donner une équation de cette tangente (T)

6) Tracer (Δ) , (T) et (C)

7) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les droite d'équation $x = \alpha$ et $x = e$.

a) $Calculer\ \ \mathcal{A}(\alpha)$

b) En déduire que $\mathcal{A}(\alpha) = \left(-\alpha^4 + 4\alpha^2\right)cm^2$

PARTIE C

Soit φ la restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

1)a) Montrer que φ définie une bijection de $[\alpha; +\infty[$ sur un intervalle à préciser

b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1}

c) Donner le sens de variation de φ^{-1} puis dresser son tableau de variation

2) Tracer la courbe (C') de φ^{-1} dans le même repère que (C)

PROBLEME 19

PARTIE A

Soient g et h deux fonctions à variable réelle x définie par :
$g(x) = 2x + \sqrt{4x^2 - 1}$ et $h(x) = -2x + \sqrt{1 - 4x^2}$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $g(x) \leq 0$

b) $h(x) \geq 0$

2) En déduire le signe de $g(x)$ *et le signe de* $h(x)$ sur leur ensemble de définition respectif

PARTIE B

Soit la fonction f à variable réelle x définie par : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{|4x^2 - 1|}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis exprimer $f(x)$ sans symbole de valeur absolue

2) Etudier la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{2}$. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu

3)a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition

b) En déduire que (Cf) admet une asymptote horizontale en -∞ dont on précisera l'équation

c) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D) en +∞ dont on donnera l'équation

4)a) Montrer que : $f'(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\sqrt{4x^2-1}} \quad si\ x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ \frac{h(x)}{\sqrt{1-4x^2}} \quad si\ x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[\end{cases}$

b) En déduire de la partie A-2) le tableau de variation de f

5) Tracer la courbe (C_f) et ses asymptotes dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE C

Soit λ un réel de l'intervalle $\left[\frac{5}{8}; +\infty\right[$

On pose : $K = \int_{\frac{5}{8}}^{\lambda} \sqrt{4x^2 - 1}\, dx \ et\ I = \int_{\frac{5}{8}}^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$

1) Montrer que fonction Ψ définie sur $\left[\frac{5}{8}; +\infty\right[$ par : $\Psi(x) = \frac{1}{2}ln\left(2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right)$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$

2) En déduire les valeurs exactes de $I\ et\ K$

3)a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = \frac{5}{8}\ et\ x = \lambda$

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

PROBLEME 20

PARTIE A

On considère la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = -1 + \frac{1}{4}x^2 - 2lnx$

1) Calculer les limites de φ en zéro et en $+\infty$

2)a) Calculer la dérivée φ' de φ, puis étudier son signe
b) Etablir le tableau de variation de φ_k pour chaque cas

3)a) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\beta_1\ et\ \beta_2(\beta_1 < \beta_2)$

b) Vérifier que $0,6 < \beta_1 < 0,7\ \ et\ \ 3,8 < \beta_2 < 3,9$

c) En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x

PARTIE B

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = -1 + \frac{x}{2} + \frac{6+4lnx}{x}$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 1cm

1) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f

2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

3)a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2\frac{\varphi(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation f

4)a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D)

6) Construire la courbe (C) et ses asymptotes

7) Soit $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = \beta_1\ et\ x = \beta_2$

a) Calculer $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2)$

b) En déduire que $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{32}(\beta_2^2 - \beta_1^2)(\beta_2^2 + \beta_1^2 + 16)cm^2$

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\beta_2; +\infty[$

1) Montrer que h est une bijection de $[\beta_2; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser

2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} puis dresser son tableau de variation

b) Construire la construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C)

PROBLEME 21

PARTIE A

On considère la fonction g définie par : $g(x) = -1 + x^2 - 2ln|x|$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition $D\ de\ la\ fonction\ g$

2)a) Calculer la dérivée g' de g puis étudier son signe

b) Etablir le tableau de variation de g

c) En déduire le signe de $g(x)$

<u>PARTIE</u> B

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = -1 + x + \frac{3+2ln|x|}{x}$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 1cm

1) Déterminer l'ensemble de définition E de la fonction f

2) Calculer les limites de f aux bornes de E

3)a) Montrer que pour tout $x \neq 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha\ et\ \beta(\alpha < \beta)$

d) Vérifier que $-0,2 < \alpha < -0,1\ et\ 0,2 < \beta < 0,3$

4)a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C)

b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D)

5) Construire la courbe (C) et ses asymptotes

<u>PARTIE</u> C

Soit h la restriction de f à $l'intervalle$ $]-\infty; 0[$

1) Montrer que h est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $\mathbb{R}$

2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} puis dresser son tableau de variation

b) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C)

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la portion du plan délimitée par la courbe (C'), l'axe des abscisse , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -5$

Démontrer que $\mathcal{A} = \left(\frac{1}{4}\alpha^4 - \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha^2 - \alpha + \frac{5}{4}\right) cm^2$

<u>PROBLEME</u> 22

<u>PARTIE</u> A

On considère la fonction g de variable réelle x définie par : $g(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{ln(-x)}{x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D de g

2) Calculer les limites de g aux bornes de D

3) Calculer la dérivée g' de g

4) Etablir le tableau de variation de g

5)a) b) Démontrer que , l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha\ dans$ $]-0,3; -0,2[$

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

PARTIE

Soit la fonction f $définie\ par :$ $f(x) = \frac{1}{2}[ln(-x)]^2 + ln(-x) - x - 1$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 2cm

1) Déterminer l'ensemble de définition E de la fonction f

2) Calculer les limites de f aux bornes de E

3)a) Démontrer que : $\forall x \in E,\ f'(x) = g(x)$
b)En déduire le sens de variation de f $et\ dresser\ son\ tableau\ de\ variation$

4) $Calculer$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donner une Interprétation du résultat obtenu

5)a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - 3)(\alpha + 1)$

b) Donner un encadrement de $f(\alpha)$

c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\beta_1\ et\ \beta_2$ $(\beta_1 < \beta_2)$

d) Vérifier que $\beta_1 = -1\ et\ \beta_2 \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[$

6) Construire la courbe (C)

PARTIE C

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\beta_n = -2\int_{-e^n}^{-1} f(x)dx$

1) A l'aide d'une intégration par partie, calculer β_n

2) On pose : $\lambda_n = \beta_n - n^2e^n$

a) Calculer λ_1 , $\lambda_2\ et\ \lambda_3$

b) La suite (λ_n) est –est arithmétique ?géométrique ?

3) On pose : $S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n$

a) Exprimer S en fonction de n

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S$

PROBLEME 23

PARTIE A

On considère la fonction g_n d'une variable réelle x, définie par : $g_n(x) = \frac{nln|x|-1}{x}$, où n est un entier naturel supérieur ou égale à 2.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_n de la fonction g_n

2) Calculer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition

3)a) Calculer la fonction dérivée g'_n de la fonction g_n

b) Donner le sens de variation de g_n puis dresser son tableau de variation

4)a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet exactement deux $solutions\ \alpha\ et\ \beta(\beta < \alpha)$

b) Vérifier que $\alpha \in \left]1; e^{1+\frac{1}{n}}\right[$ et que $\beta = -\alpha$

c) En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x

PARTIE B

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit la fonction f_n d'une variable réelle x par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n ln|x| - \frac{2}{n}x^n \ si\ x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_n) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer l'ensemble de définition E_n de la fonction f_n

2) Calculer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition

3)a) Etudier la continuité de f_n en zéro

b) Etudier la dérivabilité de f_n en zéro

4)a) Montrer que $\forall x \in E_n$, $f'_n(x) = x^n g_n(x)$

b) En déduire le tableau de variation de f_n pour n paire et pour n impaire

5) On pose : $n = 2$

a) Dresser le tableau de variation de f_2

b) Etudier les branches infinies de f_2

c) Construire la courbe (C_2)

PARTIE C

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit la suite (β_n) par : $\beta_n = \int_{-e^{\frac{1}{n+1}}}^{e^{\frac{1}{n+1}}} f_n(x)dx$

1) Sans aucun calcul, justifier que si n est impaire, alors $\beta_n = 0$

2)a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\beta_n = -\frac{2e}{n(n+1)}[1 + (-1)^n]$

b) Calculer β_2 , β_3 , $\beta_4\ et\ \beta_5$

3) On pose : $\lambda_n = \beta_{2n}$ et $P_n = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times ... \times \lambda_n$

a) Calculer λ_1 , $\lambda_2, \lambda_3\ et\ \lambda_4$

b) Exprimer P_n en fonction de n

c) Calculer la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$

PROBLEME 24

PARTIE A

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_1): y' + y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

2) On considère l'équation différentielle $(E_2): y' + y = e^{x-1}$

a) Déterminer un nombre réel m tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = me^{x-1}$ soit une solution de (E_2)

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

b_1) Montrer que g est solution de (E_2) si et seulement si $g - f$ est solution de (E_1)

b_2) Déduire les solutions de l'équation (E_2)

3) Déterminer la solution g_0 de (E_2) dont la courbe représentative dans plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet au point d'abscisse $x_0 = 1$, une tangente parallèle à l'axe des abscisses

PARTIE B

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{e^{(x-1)}+e^{-(x-1)}}{2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : $2cm$.

1)a) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $en + \infty$

b) Etudier les branches infinies de la fonction h en $-\infty$ et $en + \infty$

2) Calculer la fonction dérivée $h'(x)$ de la fonction h

3) Etudier le sens de variation de la fonction h puis dresser son tableau de variation

4) Construire la courbe (C)

PARTIE C

Soit φ la restriction de h à l'intervalle $[1; +\infty[$

1)a) Montrer que φ définie une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle à préciser

b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1}

c) Donner le sens de variation de φ^{-1} puis dresser son tableau de variation

2) Tracer la courbe (C') de φ^{-1} dans le même repère que (C)

3) Calculer en cm^2, $l'aire\ \mathcal{A}$ de la portion du plan délimitée par la courbe (C'), l'axe des abscisse et les droites d'équations $x = \frac{e^4+e^{-4}}{2}$ et $x = 1$

4) Déterminer l'expression explicite de φ^{-1}

5) Soit l'intégrale $K = \int_1^{\frac{e^4+e^{-4}}{2}} ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) dx$

a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer K

b) Retrouver la valeur de l'aire $\mathcal{A}$ de la question 3)

PROBLEME 25

PARTIE A

Soit la fonction $\varphi(x) = 1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ

b) Déterminer les limites de φ aux bornes de son ensemble de définition

2)a) Calculer la dérivée φ'de la fonction φ

b) Dresser le tableau de variation de φ

3)a) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,7; 0,8[$

b) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

4)a) Déterminer une fonction Ψ telle que pour tout $x \neq 0, \varphi(-x) + \Psi(x) = 2$

b) Vérifier que pour tout $x \neq 0$, $\Psi'(x) = \varphi(-x)$ puis dresser le tableau de variation de Ψ

c) En déduire le signe de $\Psi(x)$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$

PARTIE B

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 + |x|e^{\frac{1}{|x|}}$

1)a)Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

b) Exprimer f sans symbole de valeur absolue

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son l'ensemble de définition

3)a) Montrer que $f'(x) = \begin{cases} \varphi(x) \; si \; x \in]0; +\infty[\\ \Psi(x) \; si \; x \in]-\infty; 0[\end{cases}$

b) En déduire le tableau de variation de f

4)a) Montrer que la droite (Δ) :$y = 2x$ est une branche parabolique à la courbe $\left(C_f\right)$ en $+\infty$

b) Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on donnera la direction

5) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ et (Δ)

PROBLEME 26

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}} \; si \; x > 0 \\ xln(-x) \;\; si \; x < 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

2)a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

b) Donner une interprétation de des résultats obtenus

3)a) Calculer la dérivée f' de la fonction f puis étudier son signe

b) Dresser le tableau de variation de f

4)a) Montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique en $-\infty$ et en $+\infty$ dont on précisera les directions

b) Construire la courbe (C_f)

PROBLEME 27

PARTIE A

Soit la fonction g définie par : $g(x) = x + 1 + ln(|x|)$

1) Etudier les variations de g puis dresser le tableau de variation de g

2)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

b) Vérifier que $0,2 < \alpha < 0,3$

c) En déduire le signe de $g(x)$

3) Soit h la fonction définie par : $h(x) = xln(|x|) + \frac{1-x^2}{2}$

a) Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition

b) Montrer que $\forall x \in Dh, h'(x) = g(-x)$ puis dresser le tableau de variation de h

c) En déduire le signe de $h(x)$

PARTIE B

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{xln(|x|)}{x+1} \; si \; x \neq 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative.

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

2)a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et $en + \infty$

b) Calculer la limite de f en -1(On $pourra$ $poser$ $X = -x - 1$)

3) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$

4)a) Montrer que pour x diffèrent de $0\ et - 1$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

PARTIE C

Pour tout x different de 0 et -1, on pose : $\varphi(x) = f(x) - ln(|x|)$

1)a) Etudier le signe de $\varphi(x)$ puis calculer la limite de φ en $-\infty\ et\ en + \infty$

b) On note (Γ) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto ln(|x|)$. Donner une interprétation graphique des résultats obtenus à la question 1)a)

2) a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$

b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (T) $(On\ utilisera\ la\ question\ A3c)$)

3) Construire $(\Gamma), (T)\ et\ (C)$

PROBLEME 28

PARTIE A

On considère l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos(x)$

1-a-Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y'' + 2y' + y = 0$

b-Déterminer la constante réel k telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\varphi(x) = ke^{-x}\cos(x)$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E)

2-Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

a-Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de (E_0)

b- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E)

3-Déterminer la solution f_0 de l'équation (E) tels que $f'(0) = 0\ et\ f(0) = 1.$

PARTIE B

Soit les fonctions $f\ et\ \psi$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x + 2 - \cos x)e^{-x}\ et\ \psi(x) = \cos(x) + \sin(x) - x - 1$

1- a-Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, -x - 3 \leq \psi(x) \leq -x + 1$

b- En déduire les limites de ψ en $-\infty\ et\ en + \infty$

2-a-Etudier les variations de ψ puis dresser son tableau de variation

b- Montrer que l'équation $\psi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-3; -2[$

c-En déduire le signe de $\psi(x)$ suivant les valeurs de x

3-a- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)e^{-x} \leq f(x) \leq (x + 3)e^{-x}$

b- En déduire les limites de f en $-\infty\ et\ en + \infty$

4-a-Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \psi(x)e^{-x}$

b- En déduire le tableau de variation de f

5-Construire la courbe (C_f)

6-Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\pi$ et $x = 0$

PROBLEME 29

PARTIE A

Soit l'équation différentielle (E): $\frac{1}{4}y'' - \frac{1}{n}y' + \frac{1}{n^2}y = \frac{x}{n^2}$ où n est un entier relatif non nul.

1-Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation (E)

2-Résoudre l'équation (E_0): $\frac{1}{4}y'' - \frac{1}{n}y' + \frac{1}{n^2}y = 0$ où n est un entier relatif non nul.

3-Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (E_0)

4-En déduire toutes les solutions de l'équation (E)

5-Déterminer la solution φ_0 de (E) tels que $\varphi(0) = n$ et $\varphi'(0) = 0$

PARTIE B

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x + n - xe^{\frac{2x}{n}}$ où n est un entier relatif non nul.

On note (C_n) la courbe représentant f_n dans un repère orthogonal du plan.

1-a-Déterminer l'ensemble de définition D_n de la fonction f_n

b-Déterminer les limites de f_n en $-\infty$ et $+\infty$ pour $n < 0$ et $pour$ $n > 0$

2-a-Calculer la fonction dérivée f'_n

b- Etudier les variations de f'_n pour $n < 0$ et $pour$ $n > 0$

c-Calculer $f'_n(0)$ puis déduire le signe de $f'_n(x)$ pour $n < 0$ et $pour$ $n > 0$

3-Dresser le tableau de variation de f_n pour $n < 0$ et $pour$ $n > 0$

4- a-Pour tout entier relatif non nul n, calculé $f_n(-x) + f_{-n}(x)$

b- Que peut-on déduire des courbes (C_n) et (C_{-n})?

5-Soit la fonction h définie sur $[-2;-1]$ par : $h(x) = -x + 4\frac{e^x}{e^{2x}-1}$

a-Etudier les variations de la fonction h

b- En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-2;-1]$

c-Montrer que l'équation $h(x) = 0$ est équivalente à l'équation $f_2(x) = f_{-2}(x)$

d- En déduire les abscisses des points d'intersections de (C_2) et (C_{-2})

6-a-Etudier les branches infinies des courbes (C_2) et (C_{-2})

b-Tracer les courbes (C_2) et (C_{-2}) dans un même repère b-Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la portion délimitée par les courbes(C_2), (C_{-2}) et les droites d'équations $x = \alpha\ et\ x = -\alpha$

PROBLEME 30

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et on considère la famille des fonctions f_n définies sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x^n ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On note (C_n) la courbe représentant f_n dans un repère orthogonal du plan. Unité graphique 2cm.

PARTIE A

On pose $n = 1$

1-a-Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1 en 0 puis interpréter le résultat

b-Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ puis interpréter le résultat

2-a-Justifier que f_1 est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer $f'_1(x)$

b-Calculer $f''_1(x)$ puis étudier les variations de f'_1

c-En déduire le signe de f'_1 puis dresser le tableau de variation de f_1

3-Tracer la courbe (C_1), son asymptote et la tangente au point d'abscisse 0

PARTIE B

Dans cette partie n est un entier naturel supérieur ou égale à $2 (n \geq 2)$

1-a-Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis interpréter le résultat

b- Calculer la limite de f_n en $+\infty$

2-Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où $g_n(x) = nln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

3-a-Etudier les variations de g_n sur $]0; +\infty[$ puis déduire le signe de $g_n(x)$

b-Dresser le tableau de variation de f_n

4-Etudier la position relative de $(C_n)\ et\ (C_{n+1})$ pour $n \geq 2$

5-a-Démontrer que réel x positif, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

b- En déduire l'encadrement de $x^2 ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

c-Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left[x^2 ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$ puis interpréter le résultat

d-Etudier la position relative de (C_2) par rapport à la droite (D): $y = x - \frac{1}{2}$

6-a-Démontrer que réel x positif, on a : $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leq ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

b- En déduire l'encadrement de $x^3 ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

c-Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left[x^3 ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)\right]$ puis interpréter le résultat

d-Etudier la position relative de (C_3) par rapport à la parable (P): $y = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

7-Constuire dans le même repère les courbes (C_2) et (C_3)ainsi que la parabole (P) et la droite (D)

<u>PARTIE</u> C

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite $U_n = \int_n^{n+1} f_2(x)dx$

1-a-A l'aide d'une intégration par partie, calculé U_1

b- En déduire l'aire de la portion délimité par la courbe (C_2), l'axe des abscisses et les droite d'équations $x = 1$ et $x = 2$

3-a-Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $f_2(n) \leq U_n \leq f_2(n+1)$

b- En déduire le sens de variation de la suite U_n

c-La suite U_n est-elle convergente ?

<u>PROBLEME</u> 31

Soit la fonction f_m définie par : $f_m(x) = ln(x^2 + m)$ où m est un paramètre réel.

On note (C_m) la courbe représentant f_m dans un repère orthogonal du plan

<u>PARTIE</u> A

1-a-Déterminer suivant les valeurs de m, l'ensemble de définition E_m de la fonction f_m

b-Etudier la parité de la fonction f_m

2-Calculer la dérivée f'_m de la fonction f_m puis étudier son signe suivant les valeurs de m

3-Dresser le tableau de variation de f_m suivant les valeurs de m

4-a-Montrer que pour tout x positif, $f_m(x) = 2ln(x) + ln\left(1 + \frac{m}{x^2}\right)$

b- En déduire que la fonction $g(x) = 2ln(x)$ est une courbe asymptote à la courbe $\left(C_{f_m}\right)$

5-a-Dresser le tableau de variation des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1

b-Construire les courbes $\left(C_g\right), (C_{-1})$, (C_0) et (C_1)

<u>PARTIE</u> B

On prend $m = \frac{3}{4}$

Soit la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = x - f_{\frac{3}{4}}(x)$

1-a-Etudier les variations de g

b-Calculer $g(0)$ et $g\left(\frac{3}{2}\right)$ puis déduire le signe de $g(x)$ et la position de la courbe $\left(C_{\frac{3}{4}}\right)$ par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$

2-a-Démontrer que $f_{\frac{3}{4}}$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b-Déterminer l'expression de sa bijection réciproque

3-Tracer sur le même graphique la courbe $\left(C_{\frac{3}{4}}\right)$ et celle de sa réciproque sur $[0;+\infty[$

PROBLEME 32

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=-1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

1-Etudier les variations de g puis déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

2- Résoudre l'inéquation : $x\in\mathbb{R},\ x+\sqrt{x^2-1}\leq 0$

PARTIE B

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=x+\sqrt{|x^2-1|}\ si\ x<0 \\ f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}-x+1\ si\ x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1-a-Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

b- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

2-a-Exprimer f sans symbole de valeur absolue

b- Etudier la dérivabilité de f en $-1\ et\ en\ 0$ puis interpréter les résultats

3-Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f puis déduire le sens de variation de f

4-Dresser le tableau de variation de f puis construire la courbe (C_f)

PARTIE C

Soit la fonction φ définie sur $]0;+\infty[$ par : $\varphi(x)=f(x)-x$

1-a- Montrer que : $-1<f'(x)<0\ et\ que-2<\varphi'(x)<-1$

b-Dresser le tableau de variation de φ

2-Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $I=\left[\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right]$

3-On définit pour tout entier naturel n, la suite U_n par : $U_0=\frac{1}{2}\ et\ U_{n+1}=f(U_n)$

a-Montrer que : $\forall\ x\in I, f(x)\in I$

b- En déduire que pour tout entier naturel $n, U_n\in I$

4-a-Montrer que : $\forall\ x\ \in I, |f'(x)|\leq\frac{3}{5}$ (On utilisera les variations de g)

b- Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, |U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{3}{5}|U_n-\alpha|$

c-Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, |U_n-\alpha|\leq\frac{1}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

d- En déduire la limite de la suite U_n

e-Déterminer une valeur approchée de cette limite à 10^{-2} près

PROBLEME 33

PARTIE A

Soit $P(z) = 4z^4 + (5+20i)z^3 + (-54+33i)z^2 - (28+164)z + 96i + 48$

1)a) Calculer $P(-4)$ et $P(-4i)$

b) Déterminer les nombres complexes β et γ tels que $P(z) = (z+4)(z+4i)\left(4z^2 + \beta z + \gamma\right)$

2) En déduire les solutions de l'équation (E): $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0$

PARTIE B

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixe respective -1 , $2i$, $-2-2i$ et $-\frac{1}{2}$.

1) Placer les points A , B , C et D

2) Soit T la transformation du plan d'écriture complexe $z' = -iz$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T

b) Déterminer les affixes des points A', B', C' et D' images respectives de A , B , C et D par T

3) Pour tout nombre réel λ, on pose : $G_\lambda = bary\left\{\left(A, -\lambda^2\right), \left(B, \lambda^2\right), (C, 2\lambda), (D, -4)\right\}$

a) Déterminer l'ensemble E_λ des valeurs de λ pour lesquelles G_λ existe

b) On suppose que $\lambda \in E_\lambda$. Montrer que : $x_{G_\lambda} = \frac{\lambda^2 - 4\lambda + 2}{2\lambda - 4}$ et $y_{G_\lambda} = \lambda$

c) Déterminer les coordonnées du point G'_λ l'image de G_λ par T

d) En déduire que lorsque λ $décrit$ E_λ , les $points$ G_λ et G'_λ $décrivent$ $respectivement$ les courbes (Γ) et (Γ') d'équations respectives : $y^2 - 4y - 2xy + 4x + 2 = 0$ et $y = \frac{-x^2 + 4x - 2}{2x - 4}$

PARTIE C

Soit les fonctions f , h et ψ définies par : $f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 + 2}$, $h(x) = \frac{-x^2 + 4x - 2}{2x - 4}$

$\psi(x) = x + \sqrt{x^2 + 2}$

1)a) Etudier les variations de h puis dressé son tableau de variation

b) Montrer que $(\mathcal{D})$:$y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (Γ') de la fonction h

c) Tracer la courbe (Γ') et ses asymptotes puis la courbe (Γ) en utilisant la transformation T

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\psi(x) = 0$ puis déduire le signe $\psi(x)$ sur $\mathbb{R}$

3)a) Calculer les limites de $f$en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f

c) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser

d) Montrer que la courbe (C_f) admet en $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) dont on donnera l'équation

4)a) Déterminer une fonction g telle que pour tout réel x , $g(x)+f(-x)=4$

b) Montrer que la courbe $(C_f \cup C_g)$ est la courbe (Γ) d'équation: $y^2-4y-2xy+4x+2=0$

c) Montrer que le point $\Omega(0;2)$ est centre de symétrie de la courbe $(C_f \cup C_g)$

5) Construire dans un nouveau repère, les courbes (Γ) et $(C_{f^{-1}})$ puis la courbe (Γ') de la fonction h en utilisant la transformation T

III-INTEGRALES

EXERCICE 1

A l'aide d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1)$I=\int_0^{\pi} t^2\sin(t)\,dt$ $J=\int_0^{\pi} t^2\cos(t)\,dt$

2) Calculer les intégrales : $I=\int_0^{\pi} t\sin^2(t)\,dt$ $J=\int_0^{\pi} t\cos^2(t)\,dt\,et\ \lambda_n=\int_0^1 t^2(1-t)^n dt\ \forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que :$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sqrt{\sin^8(x)+\cos^8(x)}}dx=0$

EXERCICE 2

Calculer les intégrales suivantes :

a)$I=\int_1^x \frac{1}{t^4}e^{\frac{1}{t^3}}dt$ b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos(2x)}e^{\tan(x)}dx$ C) $I=\int_2^3\frac{ln(x^2)}{x}dx$

d) $I=\int_{ln2}^{ln3}\left(1-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$ e) $I=\int_0^1\frac{1}{t^2+2t+1}dt$ $f)$ $I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

g) $I=\int_0^1\frac{3}{t^2+2t+1}dt$ h) $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{xlnx}$ i) $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\times ln(1+\cos(x))dx$

j) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(x)\sin(2x)\,dx$ k) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^5(x)-3\cos(x)\sin(x)\right)dx$

l) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^3(x)+\tan(x))dx$ m) $I=\int_0^1\left(\sqrt{2t+1}+\frac{1}{\sqrt{t+5}}\right)dt$ n) $I=\int_1^3\frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx$

EXERCICE 3

Calculer les intégrales suivantes en faisant un changement de variable :

a)$I=\int_1^2 t^2\sqrt{t+a}\,dt\ (avec\ a>0)$ b) $I=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$

c) $I=\int_1^4 t\sqrt{1+t^2}dt$ d) $I=\int_{-1}^0\frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx$

EXERCICE 4

A l'aide d'une ou des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

a)$I=\int_0^{\pi} x^2\cos(x)\,dx$ b) $I=\int_1^{x}\frac{lnt}{t^2}dx$ c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{t}{\cos^2(t)}dt$ d) $I=\int_0^{2}(x^2-x+1)e^{2x}dx$

e) $I=\int_1^{x} ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)dt$ f)$I=\int_0^{\pi} 2t\cos^2(t)\sin(t)dt$ g)$I=\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin(x)\,dx$

EXERCICE 5

1-En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt$,$J=\int_0^{\pi} e^{x}\cos(x)\,dx$ et $K=\int_0^{\pi} e^{x}\sin(x)dx$

2-En utilisant les primitives usuelles, calculer les intégrale suivantes :

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(3x)\,dx$,$J=\int_0^{1}(2x+3)^4dx$ et $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$

$L=\int_{-4}^{5}|x^2-9|dx$ $M=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(x)\,dx$ $N=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((\sin 2x+\cos x))d$

EXERCICE 6

1-Soit $f:[a;b]\longmapsto\mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x\in[a;b]$, on a : $f(a+b-x)=f(x)$

a-Montrer que : $\int_a^{b} xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^{b} f(x)dx$

b-En déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$

2-Soit l'intégrale $K=\int_1^{\frac{5}{2}}\sqrt{-x^2+2x+8}\,dx$

A l'aide d'une double changement de variable, calculer la valeur exacte de K

III-PROGRAMMATION LINEAIRE

EXERCICE 1

Un artisan fabrique des objets A et des objets B.

La réalisation d'un objet A demande 30 euro de matière première et 125 euro de main-d'œuvre

La réalisation d'un objet B demande 70 euro de matière première et 75 euro de main-d'œuvre

Les profits réalisés sont de 54 euro par objet A et de 45 euro par objet B.

On note x le nombre d'objets A fabriqués et y le nombre d'objets B fabriqués en une journée.

La dépense journalière en matière première ne doit pas dépasser 560 euro

La dépense journalière en main-d'œuvre ne doit pas dépasser 1250 euro

1) Montrer que le système des contraintes traduisant cette situation est : $(S):\begin{cases} x\geq 0\\ y\geq 0\\ 3x+7y\leq 56\\ 5x+3y\leq 50\end{cases}$

2) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système (S)

3) Exprimer le bénéfice journalière en fonction de x et y

4) Tracer la droite correspondant à un bénéfice de 540 euro

5) Tracer la droite correspond au bénéfice maximum

6)a) Déterminer la production d'objets A et B qui assurerait ce bénéfice maximum. On précisera cette production

b) En déduire le montant du bénéfice

EXERCICE 2

Pour pouvoir partir en voyage scolaire, une organise la vente de gâteau pendant les récréations

En une semaine, les élèves ne peuvent en fabriquer au maximum que 60 $(de\ gros\ et\ de\ petit)$

Chaque gros gâteau nécessite 2 œufs ; chaque petit gâteau 1 œuf

On dispose en tout de 100 œufs

Les gros gâteaux sont plus rapidement fabriqués que les petits. Hors cuisson, il faut 9min de préparation pour un gros gâteau et 27 min pour un petit gâteau

Les élèves ne peuvent consacrer que 18 heures au maximum à la préparation de ces gâteaux

On appelle x le nombre de gros gateaux et y le nombre de petits gâteaux fabriqués

1) Vérifier que les couples $(x; y)$ sont solutions du système (S): $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 60 \\ 2x + y \leq 100 \\ x + 3y \leq 120 \end{cases}$

2) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système (S)

3) Chaque gros gâteau rapporte un bénéfice de 3 euro et chaque petit gâteau un bénéfice de 2 euro. On note b le bénéfice total.

a) Exprimer b en fonction de $x\ et\ y$

b) Déterminer le couple $(x_0; y_0)$ pour lequel le bénéfice est maximal

c) En déduire le montant de ce bénéfice.

EXERCICE 3

Pour sa production, une entreprise agro-alimentaire fabriquant deux produits $(A\ et\ B)$ se fournit auprès de deux cultivateurs : M.Paul et M.Jean. On note x le nombre de tonnes achetées à M.Paul, et y le nombre de tonnes achetées à M.Jean

Avec une tonne de M.Paul achetée 200 euro, on fabrique 400 produits A

Avec une tonne de M.Jean achetée 500 euro, on fabrique 300 produits B

On souhaite produire au total plus de 1200 produits, pour un coût de matière première inférieur ou égal à 4900 euro.

Par ailleurs, la production de M.Jean ne peut excéder celle de M.Paul de plus de 7 tonnes, et M.Paul ne peut pas produire plus de 10 tonnes.

1) Montrer que les contraintes de production correspondent au système suivant :

$$(S):\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ y \geq 0 \\ 4x+3y \geq 12 \\ -x+y \leq 7 \\ 2x+5y \leq 49 \end{cases}$$

2) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de ce système

3) Le bénéfice b réalisé est de 0,15 euro sur chaque produit A et de 0,80 euro sur chaque produit B

a) Exprimer le bénéfice réalisé sur les produits A pour un achat de x tonne à M.paul

b) Exprimer le bénéfice réalisé sur les produits B pour un achat de y tonne à M.Jean

c) En déduire que $b = 60x + 240y$

4) Déterminer le couple $(x_0; y_0)$ pour lequel le bénéfice est maximal. Quel est alors ce bénéfice ?

EXERCICE 4

Pour préparer la rentrée scolaire 2022-2023, Amina une élève de la classe de terminale D prépare et vend pendant les vacances la bouillie et les gâteaux chaque jour.

La préparation d'un kilogramme de bouillie nécessite 0,5kg de maïs, 0,2kg de sucre, 5kg de bois et 3l d'eau.

La préparation d'un kilogramme de gâteaux nécessite 0,3kg de maïs, 0,3kg de sucre, 2kg de bois, 2l d'eau et 0,5l d'huile.

Elle ne dispose par jour que 3kg de sucre, 5kg de maïs, 30kg de bois et 20l d'eau.

Par ailleurs il faut au moins 3,5l d'huile pour la préparation journalière des gâteaux.

Soit x la quantité en kg de la bouillie et y la quantité en kg des gâteaux qu'elle prépare par jour.

1-Montrer que les contraintes de préparation correspondent au système suivant :

$$(S):\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 7 \\ 2x+3y \leq 30 \\ 5x+2y \leq 30 \\ 3x+2y \leq 20 \end{cases}$$

2-Représenter dans un repère orthonormé les solutions de ce système

3-Le bénéfice b réalisé est de $300F$ par kilogramme de bouillie et de 200F par kilogramme de gâteaux par jour.

a-Exprimer le bénéfice journalier b réalisé par Amina en fonction de x et y.

b-Peut-elle réaliser un bénéfice journalier de 1000F ? 2000 F?

4-a-Déterminer la quantité de bouillie et la quantité de gâteaux qu'elle doit préparer par jour avoir un bénéfice maximum. Quelle est alors ce bénéfice journalier d'Amina ?

b-Quel serait le bénéfice maximum d'Amina après 60 jours de vente ?

bawaabass50@gmail.com