C. LEBOSSÉ
C. HEMERY

ALGÈBRE

2ᵉ C

FERNAND
NATHAN

ALGÈBRE

COLLECTION LEBOSSÉ ET HÉMERY

6e	Arithmétique et Travaux Pratiques
5e	Arithmétique et Géométrie
4e	Arithmétique, Algèbre et Géométrie
3e	Algèbre, Arithmétique et Géométrie
2e A	Algèbre et Géométrie
2e C	Algèbre
2e C	Géométrie
1re A	Algèbre et notions d'Analyse
1re C et D	Algèbre et notions d'Analyse
1re C	Géométrie et Géométrie analytique
Mathématiques	Géométrie
Mathématiques	Algèbre

Enseignement technique

LEBOSSÉ-HÉMERY-FAURE

Nouveaux programmes

2e Techn. industrielle	Algèbre
2e Techn. industrielle	Géométrie
1re Techn. industrielle	Algèbre et Géométrie

C. LEBOSSÉ
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Claude-Bernard

C. HÉMERY
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Lavoisier

ALGÈBRE

Classe de Seconde C

PROGRAMME 1965

LIBRAIRIE FERNAND NATHAN

PROGRAMME DU 20 AOUT 1965

des Classes de Seconde C

(ancien programme 1960 de Seconde A′, C, M, M′)

Note préliminaire.

Les nécessités de la rédaction ont conduit à choisir, pour le libellé du programme, un certain ordre d'énumération. Mais, il est bien entendu que le professeur est libre d'adopter l'ordre de présentation qu'il désire, et, en particulier, de lier les enseignements relatifs à des théories qui sont mentionnées sous des rubriques différentes.

Le professeur s'attachera, tant en Algèbre qu'en Géométrie, à l'aide des nombreux exemples que fournissent les divers chapitres, à préciser quelques notions déjà rencontrées dans les classes précédentes : proposition réciproque, condition nécessaire, condition suffisante, propriété caractéristique. L'étude systématique de problèmes spéculatifs, c'est-à-dire de problèmes proposant la recherche d'éléments dont l'existense doit être mise en cause (tels que les problèmes de « lieu géométrique », les problèmes de « construction », les problèmes de « résolution » d'équations et d'inéquations...), permettra de dégager un certain nombre d'idées générales concernant la conduite logique d'un raisonnement : analyse, synthèse, emploi de conditions à la fois nécessaires et suffisantes, transformation d'un problème en un problème équivalent.

ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

I. Les nombres et le calcul algébrique.

Rappel et mise en ordre (comportant éventuellement quelques compléments) des éléments d'arithmétique et d'algèbre acquis dans les classes précédentes : nombres; opérations; comparaison; propriétés fondamentales. Rapports et proportions. Exposants entiers positifs, nuls, négatifs; opérations sur les puissances entières. Racine carrée arithmétique.

Monômes, polynômes, fractions rationnelles d'une ou plusieurs variables; opérations. Identités usuelles relatives aux polynômes $(x + y)^2$, $(x - y)^2$, $(x + y)^3$, $(x - y)^3$, $x^2 - y^2$, $x^3 + y^3$, $x^3 - y^3$.

Technique du calcul algébrique; exercices raisonnés de transformation de polynômes, de fractions rationnelles, et d'expressions irrationnelles simples.

Pratique du calcul numérique; calcul de valeurs approchées par encadrement.

II. Les fonctions.

1° Notion de fonction conçue comme correspondance; exemples.

Fonction d'une variable; notation $y = f(x)$. Notion d'accroissement. Fonction croissante, fonction décroissante, fonction constante sur un intervalle.

2° Transformation du binôme $ax + b$ conduisant à la forme $a(x - p)$.

Equation et inéquation du premier degré à une inconnue, à coefficients numériques ou littéraux.

Fonction $y = ax$, $y = ax + b$, de la variable x; existence, sens de variation; étude lorsque x tend vers l'infini; signe.

Système de deux équations du premier degré à deux inconnues, à coefficients numériques ou littéraux; étude théorique de sa résolution; définition du déterminant du système. Méthodes pratiques de résolution.

3° Transformation du polynôme $ax^2 + bx + c$ conduisant à la forme $a(x - h)^2 + k$, et éventuellement à la forme $a(x - p)(x - q)$.

Equation et inéquation du second degré à une inconnue, à coefficients numériques ou littéraux. Somme et produit des racines d'une équation (ou d'un polynôme) du second degré.

Fonction $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$, de la variable x; existence, sens de variation, maximum ou minimum; étude lorsque x tend vers l'infini, signe.

4° Fonction $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{a}{x}$, de la variable x; existence, sens de variation; étude lorsque x tend vers zéro ou vers l'infini.

5° Etude de problèmes, pouvant faire appel à l'ensemble des connaissances des élèves, dont la résolution conduit à des équations ou des inéquations du premier degré.

GÉOMÉTRIE

I. Les premiers éléments. Compléments de géométrie plane.

1° Rappel et mise en ordre des premiers éléments, figurant dans le programme de géométrie de la classe de cinquième, et dans les paragraphes II, III, IV du programme de géométrie plane de la classe de quatrième. Le professeur s'attachera à construire un répertoire de définitions et de propriétés; il pourra éventuellement donner une certaine ampleur au caractère déductif de telle ou telle partie de son exposé, sans perdre de vue qu'il ne convient pas, à ce niveau, de s'attarder longuement sur ces notions, qui ont déjà été présentées, et qui constituent un point de départ.

2° Ensemble des points équidistants de deux points donnés. Ensemble des points équidistants de deux droites données, sécantes ou parallèles. Médiatrices, hauteurs, bissectrices d'un triangle.

3° Cercle. Positions d'un point par rapport à un cercle. Cordes et arcs. Tangente en un point. Proportionnalité des angles au centre et des arcs interceptés.

Comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre interceptant le même arc. Ensemble des points d'où l'on voit un segment donné sous un angle saillant donné. Angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, propriété réciproque.

Positions relatives d'une droite et d'un cercle. Tangentes à un cercle parallèles à une droite donnée, ou passant par un point donné.

Comparaison des segments joignant un point aux différents points d'un cercle. Positions relatives de deux cercles.

Cercle passant par deux points; cercle circonscrit à un triangle. Cercles tangents à deux droites. Cercles tangents à trois droites.

II. Géométrie dans l'espace.

1° Plan et droite. Leurs déterminations. Leurs positions relatives; parallélisme de droites et de plans; notions de direction de droite, de direction de plan.

2° Angles de deux droites; orthogonalité.

Plans perpendiculaires à une droite; droites perpendiculaires à un plan.
Angles dièdres; plans perpendiculaires.
Comparaison des segments joignant un point aux différents point d'un plan; distance d'un point à un plan.
Définition d'un angle trièdre, d'un angle polyèdre.
3° Projection sur un plan parallèlement à une direction de droite; projection d'un point, d'une droite, d'un segment; projections de deux droites parallèles.
Projection orthogonale sur un plan. Projection orthogonale d'un angle droit.
4° Plan médiateur d'un segment. Ensemble des points équidistants de deux points donnés, de trois points donnés.
Plans bissecteurs des dièdres formés par deux plans sécants. Ensemble des points équidistants de deux plans sécants ou parallèles.
Symétrie par rapport à une droite, par rapport à un point, par rapport à un plan. Définition. Symétriques d'une droite, d'un segment, d'un angle, d'un plan.
Définitions d'un axe, d'un centre, d'un plan de symétrie d'un ensemble géométrique; exemples simples.
(Les produits de symétries ne sont pas au programme).

III. Éléments orientés. Vecteurs.

1° *Éléments orientés sur une droite*. Segment orienté. Droite orientée ou axe. Mesure algébrique d'un segment orienté sur son support orienté. Formule de Chasles. Abscisse d'un point sur un axe; changement d'origine. Segment défini par les abscisses des points qui le limitent : mesure algébrique (segment orienté), longueur, abscisse du milieu.
Division harmonique de points alignés : relations caractéristiques.
2° *Vecteur*. Equipollence. Addition; associativité et commutativité. Vecteur nul; vecteurs opposés. Soustraction.
Projection d'un vecteur : sur un plan, parallèlement à une direction de droite; sur une droite, parallèlement à une direction de droite (géométrie plane), ou parallèlement à une direction de plan. Projection orthogonale d'un vecteur. Projection d'une somme ou d'une différence de vecteurs (sur un plan, sur une droite).
Projection sur une droite orientée; mesure algébrique de la projection d'un vecteur, d'une somme ou d'une différence de vecteurs.
3° Multiplication d'un vecteur par un nombre relatif; rapport de deux vecteurs parallèles.
Thèorème de Thalès en géométrie plane; problème réciproque. Théorème de Thalès dans l'espace; réciproque. Projection (sur une droite, sur un plan) du vecteur produit d'un vecteur par un nombre. Projection sur une droite orientée : mesure algébrique de la projection du vecteur produit d'un vecteur par un nombre.
4° Translation; homothétie. Définition. Transformés d'une droite, d'un plan d'un segment, d'un angle, d'un cercle.
Double propriété de distributivité, par rapport à l'addition, de la multiplication d'un vecteur par un nombre.
Triangles homothétiques dans un plan; application aux médianes d'un triangle.
Homothéties transformant l'un en l'autre deux cercles d'un plan; tangentes communes à deux cercles d'un plan.
(Les produits de translations et d'homothéties ne sont pas au programme.)

IV. Triangles semblables; applications.

1° Triangles semblables. Cas de similitude. Relations métriques dans le triangle rectangle; problèmes réciproques.
2° Définition des rapports trigonométriques d'un angle saillant; (cosinus, sinus, tangente, cotangente); relations simples entre les rapports relatifs à un même angle, à deux angles supplémentaires, à deux angles aigus complémentaires. Cosinus de l'angle saillant de deux vecteurs ou de deux axes.
Relations trigonométriques dans un triangle tectangle. Valeurs numériques des rapports trigonométriques des angles de 30°, 45°, 60°.

Relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ dans un triangle quelconque.
Exercices de calcul comportant l'usage des tables de rapports trigonométriques.

V. Coordonnées (géométrie plane). Représentations graphiques.

1° Système de coordonnées cartésiennes dans le plan; axes obliques, axes rectangulaires; choix des unités sur les axes. Système (ou repère) orthonormé. Composantes scalaires (coordonnées) d'un vecteur; coordonnées d'un point.

Changement de coordonnées par la translation des axes.

2° Représentation graphique de la fonction $y = ax + b$. Ordonnée à l'origine; coefficient directeur (repère quelconque), pente (repère orthonormé).

3° Equation d'une droite relativement à un repère cartésien donné; interprétation géométrique du signe d'un polynôme du premier degré à deux variables.

Détermination de l'équation d'une droite définie par deux points, ou par un point et sa direction. Intersection de deux droites définies par leurs équations. Application aux équations et inéquations du premier degré à deux inconnues.

4° Représentation graphique des fonctions :
$y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{a}{x}$, dans un système de coordonnées rectangulaires (pas nécessairement normé). Symétries des courbes représentatives de ces fonctions.

NOTE DES AUTEURS

Le présent ouvrage comporte le développement du programme d'Algèbre et notions d'analyse ci-dessus de la classe de Seconde C.

Conformément à la tradition et utilisant la liberté donnée dans la note préliminaire, nous avons également incorporé le paragraphe V du programme de Géométrie (coordonnées et représentations graphiques), les paragraphes I, II, III, IV de Géométrie faisant l'objet d'un ouvrage séparé.

LIVRE I

CALCUL ALGÉBRIQUE

Première Leçon

NOTIONS SUR LES ENSEMBLES

1. Définition. — ***On désigne sous le nom d'ensemble toute collection d'éléments rassemblés par une propriété commune.***

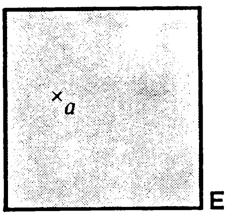
On peut envisager l'ensemble des élèves de la classe, l'ensemble des pages d'un livre, l'ensemble des points d'un segment ou d'une portion de plan (fig. 1), etc...

Appartenance. — Si a désigne un élément de l'ensemble E, on écrit :

$$\boxed{a \in E}$$

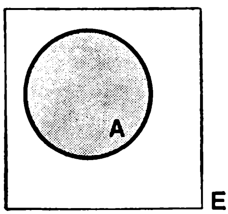
lire « *a élément de* E » ou « *a appartient* à E ».

Lorsque a et b désignent un même élément de l'ensemble E on dit que « *a coïncide avec b* » et on écrit : $a = b$.



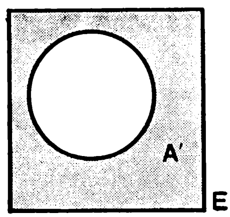
$a \in E$

Fig. 1.



$A \subset E$

Fig. 2.



$A' = \complement_E A$

Fig. 3.

Deux ensembles **E** et **F** composés des mêmes éléments sont dits égaux ou *identiques*. On écrit : **E = F.**

2. Inclusion. Sous-ensembles. — Tout ensemble A (fig. 2) composé d'éléments appartenant à l'ensemble E est contenu ou *inclus* dans l'ensemble E et constitue un *sous-ensemble* de E. On écrit :

$$\boxed{A \subset E}$$

lire « A *contenu* dans E » ou « A *inclus* dans E ».

L'ensemble A′ composé des éléments de E qui n'appartiennent pas à A constitue l'ensemble complémentaire de A ou le *complément de* A *dans* E (fig. 3). On écrit : $A' = \complement_E A$.

3. Ensemble des entiers naturels. — Le dénombrement des objets d'une collection conduit à la *suite naturelle* des nombres entiers. Cette suite illimitée constitue l'*ensemble* N *des entiers naturels.*

N : 0 1 2 3 4 5 6 7 8...

On écrit : $a < b$ ou $a > b$ suivant que a précède ou suit b dans la suite naturelle N.

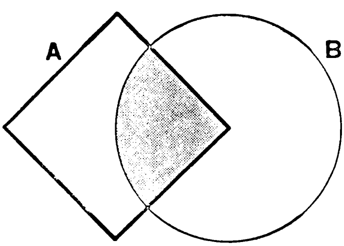
Notons que les inégalités simultanées : $a < b$ et $b < c$ entraînent : $a < c$. L'ensemble N est dit *ordonné*.

Dans l'ensemble N on peut envisager différents sous-ensembles : L'ensemble des entiers compris entre 0 et 20, ou entre 100 et 1 000, l'ensemble des entiers terminés par 0 ou 5. Les nombres pairs (0 compris) et les nombres impairs constituent deux ensembles complémentaires dans N.

4. Intersection et réunion de deux ensembles.

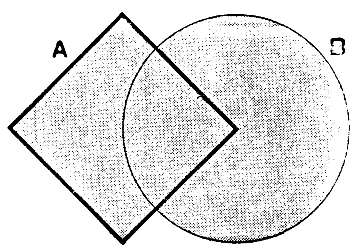
L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble I composé des éléments communs à A et à B (fig. 4). On écrit :

$I = A \cap B$ lire : « A *inter* B »



A∩B

Fig. 4.



A∪B

Fig. 5.

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble R composé des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles A et B (fig. 5). On écrit :

$R = A \cup B$ lire : « A *union* B »

Désignons par A l'ensemble des entiers a tels que $0 < a < 20$
et par B l'ensemble des entiers b tels que $10 < b < 50$

On obtient $A \cap B$ ensemble des entiers x tels que $10 < x < 20$
$A \cup B$ ensemble des entiers y tels que $0 < y < 50$.

5. Implication et équivalence logique. — Lorsqu'une propriété $\mathcal{A}$ (hypothèse) admet pour conséquence la propriété $\mathcal{B}$ (conclusion) on dit que la propriété $\mathcal{A}$ entraîne ou *implique* la propriété $\mathcal{B}$. On écrit :

$\boxed{\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}}$ lire « *$\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$* ».

Si, réciproquement, la propriété $\mathcal{B}$ entraîne la propriété $\mathcal{A}$, les deux propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont dites *équivalentes*. On écrit :

$\boxed{\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}}$ lire « *$\mathcal{A}$ équivaut à $\mathcal{B}$* ».

EXEMPLES : 1° $a \in A$ et $A \subset E \Longrightarrow a \in E$
2° $a \in A$ et $a \in B \Longleftrightarrow a \in A \cap B$.

6. Loi de composition interne. — ***On définit une loi de composition interne sur un ensemble* E *si, à tout couple ordonné* (a, b) *d'éléments de* E *distincts ou non, on fait correspondre d'une façon unique un élément* c *de* E.**

Le résultat c de l'opération est le *composé* de a et b, pris dans cet ordre, et on écrit : $a \star b = c$.

Exemples. — 1° **L'addition** est une loi de composition interne définie sur l'ensemble N des entiers naturels qui, à deux entiers a et b fait correspondre leur *somme* $a + b$. Cette loi est dite :

commutative car : $a + b = b + a$
associative car : $(a + b) + c = a + (b + c)$.

2° **La multiplication** associe de même à deux entiers a et b leur *produit* $a \times b$ ou $a.b$. Cette loi est également commutative et associative :

$$a \times b = b \times a \qquad \text{et} \qquad (a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

Le produit de m entiers égaux à a s'écrit a^m et s'énonce « a puissance m ». Rappelons les formules :

$$(abc)^m = a^m b^m c^m; \qquad a^m.a^p = a^{m+p} \qquad \text{et } (a^m)^p = a^{mp}.$$

7. Élément neutre — Éléments symétriques. — ***Une loi de composition interne* L *admet un élément neutre* e *si quel que soit l'élément* a *de* E, *on a :***

$$a \star e = e \star a = a.$$

Ainsi 0 est un élément neutre pour l'addition des entiers naturels et de même 1 est un élément neutre pour leur multiplication :

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad \text{et} \qquad a \times 1 = 1 \times a = a.$$

Deux éléments** a **et** a' **sont dits symétriques pour la loi de composition interne** L **si :

$$a \star a' = a' \star a = e.$$

Si la loi L est une addition, il faut : $a + a' = 0$ et a' est appelé l'*opposé* de a. Si la loi L est une multiplication il faut : $a \times a' = 1$ et a' est l'*inverse de a.*

8. Notion de groupe. — Un ensemble E admet une structure de groupe pour une loi de composition interne L si :

1° *Cette loi est associative* $\quad (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

2° *Cette loi admet un élément neutre e* tel que pour tout élément a de E on ait :

$$a \star e = e \star a = a.$$

3° *Chaque élément a admei un élément symétrique a'*, tel que :

$$a \star a' = a' \star a = e.$$

Lorsqu'en plus *la loi* L est *commutative :* $a \star b = b \star a$, on dit que l'ensemble E a une structure de *groupe commutatif* (ou de groupe abélien).

L'ensemble N des entiers naturels n'a une structure de groupe ni pour l'addition ni pour la multiplication car si a est un entier naturel on ne peut trouver dans N un élément a' tel que $a + a' = 0$ ou $a \times a' = 1$.

Nous verrons des exemples de groupes après la définition des nombres rationnels (n° 12) ou des nombres relatifs (n° 24). Nous rencontrerons ensuite des ensembles admettant une structure plus compliquée tels que *anneaux* (n° 126) ou *corps* (n° 36).

NOMBRES ARITHMÉTIQUES *(Révision)*

9. Nombres rationnels. — La mesure des grandeurs continues : longueurs, angles, etc... conduit à la notion de fraction.

Si A et B sont respectivement les produits d'une même grandeur U par les nombres entiers a et b, le rapport des grandeurs A et B est la fraction : $\frac{a}{b}$

et on a : $$A = \frac{a}{b}\,B.$$

a est le numérateur et b le dénominateur de la fraction $\frac{a}{b}$.

Deux fractions sont égales, si, avec la même unité, elles mesurent deux grandeurs égales. Une fraction est supérieure à une autre si, avec la même unité, la première mesure une grandeur supérieure à celle que mesure la seconde.

Il résulte de la définition que : $\frac{a}{1} = a$. L'ensemble N des nombres entiers est identique à l'ensemble des fractions de dénominateur 1.

L'ensemble des nombres entiers ou fractionnaires constitue l'ensemble Q des nombres arithmétiques rationnels.

Donc (n° 2) : $$N \subset Q$$

10. Propriété fondamentale. — ***On ne modifie pas la valeur d'une fraction en multipliant ses deux termes par un même nombre entier :***

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a:n}{b:n}. \qquad \text{Ainsi :} \quad \frac{3}{4}\text{ d'heure} = \frac{45}{60}\text{ d'heure.}$$

Il en résulte qu'on peut simplifier une fraction :

$$\frac{48}{108} = \frac{4 \times 12}{9 \times 12} = \frac{4}{9}$$

ou réduire deux fractions au même dénominateur :

Les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont égales à : $\frac{ab'}{bb'}$ et $\frac{a'b}{bb'}$,

On en déduit que :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff ab' = a'b.$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} \iff ab' < a'b.$$

11. Opérations sur les fractions. — Rappelons que :

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \ (\textit{somme}) \qquad \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - a'b}{bb'} \ (\textit{différence})$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'} \ (\textit{produit}) \qquad \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{a'b} \ (\textit{quotient exact}).$$

Comme pour les entiers naturels la soustraction de deux fractions

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}, \quad \text{exige que l'on ait : } \frac{a}{b} \geqslant \frac{a'}{b'}.$$

Par contre la division par $\frac{a'}{b'}$ est toujours possible sur l'ensemble Q des nombres rationnels, si toutefois $a' \neq 0$. En particulier :

1° $a : b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1} = \frac{a \times 1}{1 \times b} = \frac{a}{b}.$

Toute fraction $\frac{a}{b}$ *est le quotient exact de a par b.*

2° $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1.$ Donc : $\frac{b}{a} = 1 : \frac{a}{b}.$

Toute fraction non nulle $\frac{a}{b}$ *admet pour inverse* $\frac{b}{a}.$

3° $\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'}.$

Le quotient de deux nombres rationnels est égal au produit du premier par l'inverse du second.

12. Groupe multiplicatif des nombres rationnels. — La multiplication est une loi de composition interne définie sur l'ensemble Q des nombres rationnels.

1° *Cette loi est associative.*

2° *Elle admet un élément neutre* 1.

3° *Tout élément non nul* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ *admet un élément inverse* $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}.$

Comme d'autre part *cette loi est commutative* on voit (n° 8) que :

L'ensemble des nombres arithmétiques rationnels non nuls forme un groupe commutatif par rapport à la multiplication.

Un tel groupe est dit : *groupe multiplicatif abélien.*

13. Nombres décimaux. — Toute fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 est appelée *fraction décimale.*

Une telle fraction peut s'écrire sous forme de *nombre décimal* en séparant par une virgule, autant de chiffres à la droite de son numérateur, qu'il y a de zéros à son dénominateur, ainsi :

$$\frac{2\,731}{1\,000} = 2{,}731.$$

14. Quotient entier. — ***Le quotient entier des deux nombres entiers** a **et** b**, est le nombre entier** q **défini par la double inégalité :***

$$\boxed{bq \leqslant a < b\,(q+1)}\,. \qquad (1)$$

On en déduit que : $q \leqslant \frac{a}{b} < q + 1.$

Le quotient entier de deux nombres entiers a et b est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à la fraction $\frac{a}{b}$.

Le nombre entier q est donc la partie entière de la fraction $\frac{a}{b}$

La différence $r = a - bq$ est le *reste* de la division de a par b. De (1) il résulte que q est déterminé par :

$$\boxed{a = bq + r \quad \text{avec} \quad r < b} \qquad (2)$$

Si $r = 0$, on obtient : $a = bq$. On dit que a est un *multiple* de b ou que b est un *diviseur* de a.

Un nombre entier donné a admet une infinité de multiples mais n'admet qu'un nombre limité de diviseurs. Ainsi les seuls diviseurs de 15 sont : 1, 3, 5 et 15.

15. Nombres premiers. — ***Un nombre premier est un nombre entier qui n'est divisible que par lui-même et par l'unité.***

La liste des nombres premiers est illimitée :

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

Le plus petit diviseur, autre que l'unité, d'un nombre non premier est un nombre premier. Pour savoir si un nombre est premier on le divise par les nombres premiers successifs jusqu'à obtenir un quotient inférieur au diviseur premier utilisé. Si aucune division ne se fait exactement le nombre donné est premier.

Ainsi 107, qui n'est pas divisible par l'un des nombres 2, 3, 5, 7 et 11, est un nombre premier.

16. Factorisation d'un nombre entier. — ***Tout nombre entier peut se décomposer d'une seule façon en un produit de facteurs premiers.***

EXEMPLE : $84 = 2^2 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7.$

1° Soit : $A = 2^5 \times 3^2 \times 5$ et $B = 2^2 \times 3^4 \times 7.$

On obtient : $AB = 2^{5+2} \times 3^{2+4} \times 5 \times 7.$

2° Soit : $A = 2^5 \times 3^4 \times 7$ et $B = 2^3 \times 3^2 \times 7.$

On a : $A = B \times 2^2 \times 3^2 \Longleftrightarrow \frac{A}{B} = 2^{5-3} \times 3^{4-2} \times 7^{1-1}$

Règle. — *Pour qu'un entier A soit divisible par un entier B (ou soit un multiple de B) il faut et il suffit que tous les facteurs premiers de B figurent dans A avec des exposants au moins égaux à ceux de B.*

17. Plus grand commun diviseur (P.G.C.D.). — D'après la règle précédente (n° 16) tout diviseur d commun aux entiers A, B, C ne contient que des facteurs premiers communs à ces nombres, chacun d'eux étant affecté d'un exposant au plus égal à ceux de A, B et C. En particulier :

Le P.G.C.D. de deux ou plusieurs entiers s'obtient en faisant le produit de leurs facteurs premiers communs, chacun d'eux étant affecté de son plus petit exposant.

Ainsi : $336 = 2^4 \times 3 \times 7$ et $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$
ont pour P.G.C.D. : $2^2 \times 3 \times 7 = 84.$

Tout autre diviseur commun tel que 2×7 ou $2^2 \times 3$ est un diviseur de 84.
Les diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres entiers sont les diviseurs de leur P.G.C.D.

18. Nombres premiers entre eux. — Deux nombres entiers sont dits premiers entre eux lorsque leur P.G.C.D. est égal à 1.

Lorsqu'on divise deux nombres entiers par leur P.G.C.D. ***les quotients obtenus sont premiers entre eux.***

Ainsi les quotients de 336 et 924 par leur P.G.C.D. : 84 sont 2^2 et 11 qui n'ont pas de facteur commun et sont premiers entre eux.

19. Simplification d'une fraction. — Toute fraction dont les deux termes sont premiers entre eux est *irréductible.* On obtient la fraction irréductible égale à une fraction donnée en divisant ses termes par leur P.G.C.D.

Ainsi : $\dfrac{336}{924} = \dfrac{336 : 84}{924 : 84} = \dfrac{4}{11}$ et toute fraction égale à $\dfrac{336}{924}$ s'écrit : $\dfrac{4 \times n}{11 \times n} = \dfrac{4n}{11n}.$

20. Plus petit commun multiple (P.P.C.M.). — D'après la règle du n° 16 tout multiple m commun aux entiers A, B, C contient tous leurs facteurs premiers avec des exposants au moins égaux.

Le P.P.C.M. de deux ou plusieurs entiers s'obtient en faisant le produit de tous leurs facteurs premiers chacun d'eux étant affecté de son plus grand exposant.

Ainsi : $168 = 2^3 \times 3 \times 7$; $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ et $80 = 2^4 \times 5$
ont pour P.P.C.M. : $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 5\,040.$

Leurs multiples communs sont $5\,040$; $5\,040 \times 2$; $5\,040 \times 3$... c'est-à-dire les multiples de leur P.P.C.M.

21. Réduction de fractions à leur plus petit dénominateur commun. Si les fractions sont irréductibles, il suffit de prendre pour dénominateur commun le P.P.C.M. des dénominateurs de ces fractions.

EXEMPLE. — Les fractions $\frac{10}{336}$; $\frac{33}{756}$ et $\frac{585}{1200}$ se réduisent à $\frac{5}{168}$; $\frac{11}{252}$ et $\frac{39}{80}$

Le P.P.C.M. des dénominateurs (n° 20) est 5 040. On obtient ainsi :

$$\frac{5 \times 30}{168 \times 30} = \frac{150}{5\ 040} \quad ; \quad \frac{11 \times 20}{252 \times 20} = \frac{220}{5\ 040} \quad \text{et} \quad \frac{39 \times 63}{80 \times 63} = \frac{2\ 457}{5\ 040}.$$

22. Racine carrée entière d'un nombre rationnel. — ***La racine carrée entière du nombre rationnel*** A ***est le plus grand nombre entier*** x ***dont le carré est inférieur ou égal à*** A.

$$\boxed{x^2 \leqslant A < (x+1)^2}. \qquad (1)$$

Le nombre $r = A - x^2$ est le reste. De l'inégalité (1) on déduit :

$A - x^2 < (x+1)^2 - x^2$ soit $r < 2x + 1$ et x est déterminé par :

$$\boxed{A = x^2 + r \quad \text{avec} \quad r < 2x + 1} \qquad (2)$$

Nous supposons connue la règle de l'extraction de la racine carrée entière d'un nombre entier. Ainsi la racine de 64 857 est 254 et le reste 341. On vérifie que :

6 48 57	254
2 48	
23 57	45 × 5
3 41	504 × 4

$$64\ 857 = (254)^2 + 341 \quad \text{et} \quad (254)^2 < 64\ 857 < (255)^2.$$

Pour obtenir la racine carrée entière d'un nombre rationnel il suffit de calculer celle de sa partie entière.

23. Racine carrée exacte. — La racine carrée exacte du nombre rationnel A est un nombre a (dont nous admettons l'existence) tel que $a^2 = A$.

On écrit : $a = \sqrt{A} \iff a^2 = A.$

Ainsi : $\sqrt{169} = 13$ et $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

Lorsque A n'est pas le carré d'un nombre rationnel, le symbole $\sqrt{A}$ définit un *nombre irrationnel* dont on peut calculer des valeurs décimales approchées (n° 102).

Ainsi : $\sqrt{2} = 1{,}44...$ $\quad \sqrt{3} = 1{,}732...$

Deux nombres arithmétiques, rationnels ou non, sont dans le même ordre de grandeur que leurs carrés ou leurs racines carrées exactes. De la double inégalité (1) du n° 22, on déduit donc :

$$x \leqslant \sqrt{A} < x + 1.$$

La racine carrée entière d'un nombre rationnel est la partie entière de sa racine carrée exacte.

EXERCICES

1. La médiatrice xy d'un segment AB partage le plan en deux demi-plans P_A et P_B. Si M désigne un point quelconque du plan, caractériser par une relation entre MA et MB, l'ensemble des points de xy, l'ensemble des points de P_A et l'ensemble des points de P_B.

2. On désigne par M un point quelconque du plan d'un cercle de centre O et de rayon R. Caractériser l'ensemble A des points intérieurs au cercle, l'ensemble B des points extérieurs et l'ensemble C des points du cercle.

3. On considère deux cercles sécants O (R) et O (R'). On désigne par E l'ensemble des points du plan, par A l'ensemble des points intérieurs au premier cercle et par B l'ensemble des points intérieurs au second. Étudier les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$. Quel est le complément dans E de $A \cup B$, le complément dans A de $A \cap B$?

4. Soit dans l'ensemble N des entiers naturels, l'ensemble A des multiples de 5, l'ensemble B des multiples de 7. Caractériser l'ensemble $C = A \cap B$. Déterminer ses quatre premiers éléments.

5. Déterminer l'ensemble A des diviseurs de 72, l'ensemble B des diviseurs de 120, puis les éléments de $C = A \cup B$ et ceux de $D = A \cap B$. Caractériser ces derniers d'une manière simple.

6. A deux entiers a et b on associe leur P.G.C.D. que l'on note $a \star b$. Montrer que cette loi de composition interne est définie sur l'ensemble N des entiers. Montrer qu'elle est commutative et associative.

7. Le symbole $a \star b$ désigne le P.P.C.M. des entiers a et b. Montrer que la loi de composition interne ainsi définie sur l'ensemble N des entiers est commutative, associative et qu'elle admet un élément neutre égal à 1.

8. Aux deux entiers naturels a et b on fait correspondre l'entier $a \star b = ab + a + b$. Montrer que la loi de composition ainsi définie est commutative, associative et qu'elle admet pour élément neutre 0.

9. Aux deux nombres arithmétiques rationnels a et b on fait correspondre le nombre rationnel $\frac{ab}{a+b}$. Montrer que la loi de composition ainsi définie est commutative et associative.

10. On fait correspondre à deux nombres arithmétiques a et b rationnels ou non, le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$. Montrer que la loi de composition correspondante est commutative, associative et qu'elle admet 0 pour élément neutre.

— Déterminer les nombres entiers x et y tels que :

11. $101 = 15x + y$. **12.** $94 = 13x + y$. **13.** $203 = 25x + y$

14. $113 = 19x + y$. **15.** $475 = 118x + y$. **16.** $2\,753 = 714x + y$.

— Déterminer le P.G.C.D. des nombres suivants et la liste de leurs diviseurs communs :

17. 840 et 1 800. **18.** 3 696 et 5 082.

19. 630; 1 638 et 1 848. **20.** 2 520; 3 360 et 4 032.

— Déterminer le P.P.C.M. des nombres suivants :

21. 180 et 152. **22.** 2 916 et 3 402.

23. 15; 18 et 25. **24.** 132; 198 et 297.

25. Déterminer deux nombres entiers x et y connaissant leur somme $x + y = s$ ainsi que le quotient entier q et le reste r de la division de x par y. Discuter.

26. Même problème lorsqu'on connaît $x - y = d$, q et r.

27. 1° Démontrer que tout entier z qui divise deux nombres entiers x et y divise aussi leur somme, leur différence et le reste de la division de x par y.

2° En déduire que le P.G.C.D. de x et y est le même que celui de y et du reste de la division de x par y.

3° Appliquer cette méthode à la recherche du P.G.C.D. de 4 788 et 1 764.

28. Trouver les fractions $\frac{a}{b}$ égales à $\frac{72}{90}$ et telles que :

1° la somme des termes : $a + b = 108$;
2° la différence des termes : $b - a = 13$;
3° $3\,a + 5\,b = 74$.

29. En divisant 2 780; 3 470 et 4 860 par un même entier x on trouve comme restes 8; 5 et 9. Trouver la plus grande valeur possible pour x.

30. Trouver le plus petit nombre entier x qui divisé par 84; 126 et 168 donne comme restes 83; 125 et 167 (on cherchera $x + 1$).

— Effectuer les opérations suivantes :

31. $\frac{162}{243} + \frac{47}{141} - \frac{63}{126}.$

32. $\frac{95}{133} - \frac{51}{153} + \frac{72}{90}.$

33. $\frac{35}{420} + \frac{19}{12} - 1.$

34. $\frac{40}{65} - \frac{51}{221} + \frac{32}{56}.$

35. $\frac{14}{42} \times \frac{63}{84} \times \frac{55}{66}.$

36. $\left(\frac{56}{16} + \frac{172}{215} - 1\right) \times \frac{5}{7}.$

37. $\left(\frac{36}{144} - \frac{29}{145} + \frac{85}{153}\right) : \frac{5}{7}.$

38. $\left(\frac{55}{209} - \frac{4}{152} + \frac{1}{2}\right) : \frac{19}{27}.$

— Calculer la racine carrée entière des nombres suivants :

39. 2 753; 87 642; 312 694.

40. 31 415,92; 31 830,98; 2 718 281,828.

41. $\frac{740}{3}$; $\frac{21\,831}{7}$; $\frac{357\,963}{13}$.

42. Soit x la racine carrée entière d'un nombre entier a.

1° Quelle est, en fonction de x, la plus grande valeur possible pour a? quelle est la plus petite? quel est le nombre de solutions possibles?

2° Application : trouver les nombres a sachant que $x = 17$.

43. 1° Soit a un nombre entier supérieur à 1. Montrer que la racine carrée entière de $(a^2 - 1)$ est $(a - 1)$. Quel est le reste?

2° Application : Racine carrée entière de : 131×133.

NOMBRES RELATIFS *(Révision)*

24. Définition. — La considération de grandeurs susceptibles d'être évaluées dans deux sens différents conduit aux définitions suivantes :

Un nombre positif ou négatif s'obtient en faisant précéder un nombre arithmétique différent de zéro du signe + ou —.

$$\left(+\frac{3}{4}\right) \text{ est positif;} \qquad (-0{,}43) \text{ est négatif.}$$

La réunion de l'ensemble des nombres positifs, de l'ensemble des nombres négatifs et du nombre 0 (qui n'a pas de signe déterminé) constitue l'ensemble des *nombres relatifs* (ou algébriques). Le nombre 0 est le *nombre nul.*

La valeur absolue d'un nombre relatif x *est le nombre arithmétique obtenu en supprimant son signe et s'écrit* | x |.

$$\text{Si} \quad x = -12 : \qquad |x| = 12.$$

Deux nombres relatifs sont *égaux* s'ils ont même valeur absolue et même signe : $(-0{,}25) = -\frac{1}{4}$. Sinon, ils sont *inégaux :* $(-7) \neq (+7)$.

Deux nombres relatifs sont *opposés* s'ils ont même valeur absolue et des signes contraires : $(+7)$ et (-7) sont opposés.

ADDITION DES NOMBRES RELATIFS

25. Définitions. — 1° ***La somme de deux nombres relatifs de même signe a pour valeur absolue la somme des valeurs absolues et pour signe le signe commun.***

2° ***La somme de deux nombres relatifs de signes contraires a pour valeur absolue la différence des valeurs absolues et le signe de celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue.***

Ainsi : $(+7) + (+13) = 20$ et $(+7) + (-13) = -6$.

3° *La somme de plusieurs nombres rangés dans un certain ordre s'obtient en faisant la somme du premier et du second, du nombre obtenu et du troisième et ainsi de suite :*

Chacun des nombres a, b, c, d est un *terme* de la somme :

$$a + b + c + d.$$

26. Propriétés. — L'addition est une *loi de composition interne* pour l'ensemble des nombres relatifs. Cette opération :

1° Est *commutative :* $a + b = b + a$. Plus généralement :

$$a + b + c + d = b + d + a + c.$$

2° Est *associative :* on peut remplacer plusieurs termes par leur somme effectuée : $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Plus généralement : $a + b + c + d = a + (b + c + d)$.

3° *Admet* 0 *pour élément neutre :*

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

4° *Est telle que tout élément* a *admet un symétrique* a', *opposé de* a : car la somme de deux nombres opposés est nulle : $(+ 7) + (- 7) = 0$. Donc (n° 8) :

L'ensemble des nombres relatifs a une structure de groupe abélien pour l'addition.

27. Convention. — Afin de simplifier l'écriture on convient :

1° *De supprimer le signe + devant un nombre positif isolé.*

2° *De supprimer les signes d'addition dans une somme de plusieurs termes numériques et d'écrire ceux-ci à la suite l'un de l'autre accompagnés de leur signe propre.*

$(+ 13) + (- 9) + (+ 7) = (+ 11)$ s'écrit : $13 - 9 + 7 = 11$.

28. Règle. — ***Pour calculer une somme numérique, on peut faire la somme des termes précédés du signe +, puis celle des termes précédés du signe —, et ajouter les deux nombres relatifs obtenus.***

$$- 17 + 4 - 5 + 3 + 9 = (4 + 3 + 9) - (17 + 5) = 16 - 22 = - 6.$$

SOUSTRACTION

29. Théorème. — ***Étant donnés deux nombres relatifs*** a ***et*** b***, il existe un nombre relatif*** x ***et un seul tel que :*** $a = b + x$***. Ce nombre se nomme différence des nombres*** a ***et*** b***.***

Soit b' le symétrique de b :

$$a = b + x \Longrightarrow b' + a = b' + b + x = 0 + x = x.$$

Soit : $x = b' + a = a + b'$. On peut vérifier que :

$$b + x = b + b' + a = 0 + a = a.$$

30. Règle. — Convenons d'écrire $b' = -b$:

$$x = a + b' = a + (-b) = a - b. \text{ Ainsi :}$$

$$\boxed{a = b + x \Longleftrightarrow a - b = x} \quad \text{et}$$

Pour retrancher un nombre relatif, on ajoute son symétrique :

$$(-17) - (-4) = (-17) + (+4) = -13.$$

SOMMES ALGÉBRIQUES

31. Définition. — ***Une somme algébrique est une suite de nombres séparés par les signes + ou —.***

Exemple : $s = a - b + c - d.$

Pour calculer cette somme, on fait la différence $a - b$, puis on ajoute c et on retranche d. D'après la règle n° 30 le résultat est égal à la somme

$$s = a + (-b) + c + (-d).$$

Les propriétés des sommes (commutativité et associativité) s'étendent ainsi aux sommes algébriques et il est clair que si on change les signes de tous les termes d'une somme algébrique, le résultat change également de signe. On en déduit :

32. Règle. — ***Pour ajouter une somme algébrique, on peut supprimer les parenthèses précédées du signe + sans changer aucun signe.***

Pour retrancher une somme algébrique on peut supprimer les parenthèses précédées du signe moins, à condition de changer les signes qui précèdent les nombres contenus dans ces parenthèses.

$$a + (b - c + d) - (e - f) = a + b - c + d - e + f.$$

$$-12 + (-7 + 4 - 2) - (-3 + 5) = -12 - 7 + 4 - 2 + 3 - 5.$$

Inversement : *On peut placer entre des parenthèses plusieurs termes d'une somme algébrique, en conservant les signes si les parenthèses sont précédées du signe +, et en changeant les signes si les parenthèses sont précédées du signe —.*

Remarque. — La règle précédente de suppression des parenthèses s'étend sans difficulté aux crochets et aux accolades.

$$a - \{ b + [c - (d - e) + f] \} = a - \{ b + [c - d + e + f] \}$$
$$= a - \{ b + c - d + e + f \} = a - b - c + d - e - f.$$

MULTIPLICATION

33. Définitions. — 1° ***Le produit de deux nombres relatifs a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des deux facteurs et le signe + ou — selon que ces facteurs sont de même signe ou de signes contraires.***

2° Le *produit de plusieurs facteurs rangés dans un certain ordre s'obtient en faisant le produit des deux premiers, puis celui du nombre obtenu par le troisième, et ainsi de suite.*

Ainsi :

$$(-7)(-4) = +28; \quad (+7)(-4) = -28; \quad (+7)(-4)(-1) = +28.$$

Il en résulte que la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues de ses facteurs et que son signe est + si le nombre des facteurs négatifs est pair ou nul, — si ce nombre est impair.

34. Propriétés des produits. — La multiplication est une *loi de composition interne* pour l'ensemble des nombres relatifs et possède les propriétés suivantes :

1° *Commutativité :* $ab = ba$; $abcde = cbeda$, car les deux membres ont même valeur absolue et même signe.

2° *Associativité :* $abc = a(bc)$; $abcde = (abc)(de)$. On peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué ou :

Pour multiplier deux produits on forme un produit contenant tous les facteurs.

3° Le nombre 1 est l'*élément neutre* de la multiplication :

$$a \times 1 = 1 \times a = a.$$

4° Tout nombre relatif a différent de zéro admet un *inverse* a' tel que $aa' = 1$:

$$(-5) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = 1; \qquad \left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{3}{2}\right) = 1.$$

Donc (n° 8) :

L'ensemble des nombres relatifs non nuls a une structure de groupe abélien pour la multiplication.

5° *Le produit est distributif par rapport à la somme :* on vérifie que :

$$(a + b)\,m = m\,(a + b) = am + bm;$$
$$(a - b + c)\,m = am - bm + cm;$$
$$(a - b + c)(m - n) = am - bm + cm - an + bn - cn.$$

35. Théorème. — ***Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit nul.***

Si l'un des facteurs est nul, le produit a une valeur absolue nulle, donc est nul. Réciproquement, si le produit est nul l'un au moins des facteurs est nul, car si aucun des facteurs n'est nul, le produit ne peut l'être.

36. Corps des nombres relatifs. — Par définition on dit qu'un ensemble E a une *structure de corps* lorsque :

1° E a une structure de groupe abélien pour l'addition;

2° les éléments de E autres que le zéro de l'addition ont une structure de groupe pour la multiplication;

3° la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

L'ensemble des nombres relatifs a donc une structure de corps.

DIVISION

37. Théorème. — ***Si*** b ***est différent de zéro, il existe un nombre*** x ***et un seul dont le produit par*** b ***est égal à*** a***. Ce nombre se nomme quotient exact de*** a ***par*** b***.***

Soit β l'inverse de b, donc tel que : $b\beta = 1$:

$$a = bx \Longrightarrow \beta a = \beta b x \quad \text{soit} \quad \beta a = 1 \times x = x.$$

Donc : $x = \beta a = a\beta$. On peut vérifier que : $bx = ba\beta = b\beta a = a$.

Le quotient exact de a par b s'écrit $a : b$ ou $\frac{a}{b}$. Le symbole $\frac{a}{b}$ est appelé *rapport* des nombres a et b.

Si $b \neq 0$: $$\boxed{\frac{a}{b} = x \iff a = bx}$$

38. Règle. — Il en résulte que β inverse de b s'écrit : $\frac{1}{b}$ et l'égalité : $\frac{a}{b} = a\beta$ (n° 37) devient :

$$\boxed{\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$$

Pour diviser a ***par*** b***, on multiplie*** a ***par l'inverse de*** b***.***

$$\frac{(-5)}{(+7)} = (-5) \times \frac{1}{7}; \qquad \frac{+\frac{2}{3}}{\left(-\frac{4}{5}\right)} = \left(+\frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{4}\right)\right.$$

39. Corollaires. — Deux nombres inverses étant de même signe, il en résulte que la règle des signes de la division est la même que celle de la multiplication et que :

$$\frac{a+b-c}{n} = (a+b-c) \times \frac{1}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n}$$

$$\frac{abc}{n} = abc \times \frac{1}{n} = \left(a \times \frac{1}{n}\right) bc = \frac{a}{n} bc$$

Remarques. — 1° *La division d'un nombre par zéro est impossible.* Le symbole $\frac{a}{0}$ n'a aucun sens, car il n'existe pas de nombre dont le produit par 0 soit égal au nombre (non nul) a.

2° *Pour qu'un rapport soit nul il faut et il suffit que son numérateur soit nul, sans que son dénominateur le soit.*

Si $a = 0$, on a $\frac{a}{b} = 0$ et dans ce cas seulement.

PROPRIÉTÉS DES RAPPORTS

40. Théorème. — ***On ne change pas la valeur d'un rapport en multipliant (ou divisant) ses deux termes par un même nombre non nul.***

$$\frac{a}{b} = x \Longrightarrow a = bx \Longrightarrow an = (bx)\,n = (bn)\,x$$

Donc (n° 37) : $\frac{an}{bn} = x.$ De même : $\frac{a:n}{b:n} = x.$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a:n}{b:n}}$$

Les rapports peuvent donc être simplifiés : $\frac{35\,ab}{15\,ac} = \frac{7\,b}{3\,c}$; ils peuvent être réduits au même dénominateur :

$$\frac{a}{b} = \frac{adf}{bdf}; \qquad \frac{c}{d} = \frac{bcf}{bdf} \qquad \text{et} \qquad \frac{e}{f} = \frac{bde}{bdf}$$

41. Somme algébrique de plusieurs rapports. — ***On commence par réduire les rapports au même dénominateur, puis on effectue la somme algébrique des numérateurs obtenus et on la divise par le dénominateur commun.***

Il résulte du n° 39 que : $\boxed{\frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a-b+c}{n}}$

42. Produit de plusieurs rapports. — ***On effectue le produit des numérateurs et on le divise par le produit des dénominateurs.***

Posons : $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f}$.

On a : $a = bx \quad c = dy, \quad e = fz$ et par suite :

$$ace = bx.dy.fz = bdf.xyz \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 34)$$

D'où : $$xyz = \frac{ace}{bdf}$$ ce qui montre que :

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}.}$$

L'inverse du rapport $\frac{a}{b}$ est le rapport $\frac{b}{a}$.

En effet : $$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

43. Quotient de deux rapports. — ***On multiplie le rapport dividende par l'inverse du rapport diviseur.***

En effet (nº 38) : $$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$$

44. Applications.

1º $$\frac{a}{b} \times n = \frac{a}{b} \times \frac{n}{1} = \frac{an}{b} = \frac{a}{b : n}$$

2º $$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} \times \frac{1}{n} = \frac{a}{bn} = \frac{a : n}{b}$$

3º $$\frac{\frac{5a}{7b}}{\frac{5c}{7d}} = \frac{5a \times 7d}{5c \times 7b} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Dans un quotient de deux rapports on peut simplifier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

EXERCICES

44. Caractériser par un nombre relatif l'augmentation de température entre les températures suivantes :

+ 7º et + 23º;	+ 32º et + 13º;	— 23º et — 7º.
— 19º et — 32º;	— 17º et + 11º;	+ 9º et — 23º.

45. En prenant minuit pour origine et la minute pour unité, caractériser par un nombre relatif les heures suivantes :

Jour suivant	:	2 h 10;	9 h 45;	16 h 28.
Jour précédent	:	23 h 17;	18 h 52;	9 h 30.

46. Exprimer en années, mois et jours le temps écoulé entre les deux dates suivantes : 23 juin 63 av. J.-C. et 13 mars 14 apr. J.-C. de midi à midi. (L'an 10 apr. J.-C. signifie la 10e année après la naissance de J.-C. Il n'y a donc pas d'année 0).

47. Calculer les sommes algébriques suivantes :

$$\left(-\frac{7}{11}\right)+\left(+\frac{3}{22}\right)-\left(+\frac{7}{6}\right)-\left(-\frac{19}{33}\right)$$

$$\left(2-\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{5}-3\right)+\left(5-\frac{1}{15}\right).$$

— Réduire les expressions suivantes :

48. $[(a-b)-(7-b)]+[13-a+(a-9)]$.

49. $[(a+b-c)+(b+c-a)]-[(a+b+c)-(c+a-b)]$.

50. $\{a-[b-(c+2)]\}-\{a+[c-(a-1)]\}+b-1$.

51. Effectuer les produits suivants :

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{9}{7}\right); \qquad (-1{,}2)\left(-\frac{5}{3}\right); \qquad \left(+\frac{1}{3}\right)(-1{,}5)\left(-\frac{4}{5}\right).$$

52. Calculer les quotients suivants :

$$\left(+\frac{7}{4}\right):\left(-\frac{21}{8}\right); \qquad \left(-\frac{85}{3}\right):\left(-\frac{17}{5}\right); \qquad \left(-\frac{18}{5}\right):\left(+\frac{16}{25}\right).$$

— Simplifier les expressions suivantes :

53. $3(a+b-c)-2(a-b+c)+5(a-b-c)$.

54. $(x+y)(a+b)+(x-y)(a-b)-(ax+by)$.

55. $5[-x+3(y-2)]-2[x+5(y-3)]$.

56. $[7(x+3)-5][2-5(y-1)]-84(x+y)$.

— Effectuer les opérations suivantes :

57. $\dfrac{-39+65-26}{-13}$

58. $\dfrac{105-630+84}{+21}$

59. $\dfrac{9-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{-5+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}$

60. $\dfrac{8-\frac{1}{5}-\frac{7}{10}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}}$

61. $\dfrac{-5+7-9}{2+11-1}\times\dfrac{-5-3}{3-10}$

62. $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\times\dfrac{\frac{7}{6}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}-1}\times\dfrac{-18}{10}$

63. $\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}:\dfrac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$

64. $\dfrac{1-\frac{1}{4}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{4}-\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

I. PUISSANCES

45. Définition. — ***On appelle puissance d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre.***

Ainsi $a^5 = a.a.a.a.a.$

a^5 se lit « a puissance 5 » ou simplement « a cinq ». Le nombre entier arithmétique 5 *est l'exposant de la puissance.*

Rappelons que : $a^1 = a$

a^2 est le *carré* de a

a^3 est le *cube* de a.

46. Signe d'une puissance — Il résulte du n° 33 que :

1° ***Toute puissance d'exposant pair est positive.***

2° ***Toute puissance d'exposant impair est du signe du nombre.***

Ainsi le carré d'un nombre non nul est positif. Le cube d'un nombre positif est positif et le cube d'un nombre négatif est négatif. D'autre part

$$(-a)^n = a^n \text{ si } n \text{ est pair}$$
$$(-a)^n = -a^n \text{ si } n \text{ est impair.}$$

47. Puissance d'un produit. — ***Pour élever un produit à une puissance, on peut élever chaque facteur à cette puissance.***

Ainsi, $(abc)^3 = abc.abc.abc. = aaa.bbb.ccc. = a^3.b^3.c^3.$

En général :

$$\boxed{(abc)^n = a^n.b^n.c^n}$$

48. Puissance d'un rapport. — ***Pour élever un rapport à une puissance, on peut élever chacun des termes à cette puissance.***

Ainsi : $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}. = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}.$

En général : $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.}$

49. Produit de plusieurs puissances d'un même nombre. — ***Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre est la puissance de ce nombre dont l'exposant est égal à la somme des exposants de chacun des facteurs.***

Ainsi : $a^3.a^2 = (a.a.a).(a.a) = a.a.a.a.a. = a^5.$

D'où : $a^3a^2. = a^{3+2}.$

D'une façon générale : $\boxed{a^m . a^n . a^p = a^{m+n+p}}$

50. Puissance d'une puissance. — ***La puissance d'une puissance d'un nombre est la puissance de ce nombre dont l'exposant est le produit des deux exposants.***

Ainsi : $(a^7)^3 = a^7 \times a^7 \times a^7 = a^{7+7+7} = a^{21}.$

D'où : $(a^7)^3 = a^{7 \times 3}.$

En général : $\boxed{(a^m)^p = a^{mp}.}$

On en déduit :

1° $(a^m)^p = (a^p)^m.$

2° $a^{12} = (a^3)^4 = [(a^3)^2]^2.$

51. Quotient de deux puissances d'un même nombre.

De l'égalité : $a^8 = a^5 \times a^3$ on déduit (nº 38) :

$$\frac{a^8}{a^5} = a^3 = a^{8-5}$$

Et, en prenant les inverses (nº 42) :

$$\frac{a^5}{a^8} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{8-5}}$$

D'une façon générale :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p} & \text{si } m > p. \\ \dfrac{a^m}{a^p} = \dfrac{1}{a^{p-m}} & \text{si } m < p. \end{array}}$$

52. Exposant nul. Exposant négatif.

1° $\dfrac{a^m}{a^m} = 1.$ Or l'application de la règle précédente donne :

$\dfrac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$ On convient que $a^0 = 1$ quel que soit a.

2° Convenons de même que : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Nous pourrons écrire :

$$\frac{a^5}{a^8} = \frac{1}{a^3} = a^{-3} = a^{5-8}.$$

Ces conventions étant admises :

Le quotient de deux puissances d'un même nombre est égal à la puissance de ce nombre dont l'exposant (positif, nul ou négatif) est égal à la différence des exposants du dividende et du diviseur.

II. RACINES D'UN NOMBRE ARITHMÉTIQUE

53. Définitions. — ***On appelle racine carrée du nombre arithmétique A le nombre arithmétique x dont le carré est égal à A.***

On écrit : $x = \sqrt{A} \Longleftrightarrow x^2 = A.$

$\sqrt{A}$ se lit « racine carrée de A ». Le signe $\sqrt{\ }$ se nomme *radical* et le nombre A est le *radicande.*

Ainsi : $9 = \sqrt{81}$ car $9^2 = 81$; $\dfrac{3}{5} = \sqrt{\dfrac{9}{25}}$ car $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$.

Si le radicande A n'est pas le carré d'un entier ou d'une fraction, le symbole $\sqrt{A}$ définit un *nombre irrationnel* que l'on peut calculer à une approximation donnée. Ainsi :

$$\sqrt{2} = 1{,}414... \qquad \sqrt{3} = 1{,}732...$$

On appelle racine cubique du nombre arithmétique A, le nombre arithmétique x dont le cube est égal à A.

Si $x^3 = A$ on écrit : $x = \sqrt[3]{A}$ (lire : « racine cubique de A »).

D'une façon générale :

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre arithmétique A, le nombre arithmétique x tel que $x^n = A$.

On écrit : $x = \sqrt[n]{A}$ (lire : « racine $n^{\text{ième}}$ de A »), et :

$$x = \sqrt[n]{A} \Longleftrightarrow x^n = A$$

L'entier n est *l'indice* de la racine. Nous admettrons que tout nombre arithmétique A a une racine $n^{\text{ième}}$ et une seule.

Il résulte de la définition que :

$$\boxed{(\sqrt[n]{A})^n = A} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sqrt[n]{a^n} = a.}$$

54. Racine d'un produit. — ***La racine d'un produit de facteurs est égale au produit des racines de chaque facteur.***

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}.}$$

Posons $x = \sqrt{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$ et calculons x^n.

$$x^n = (\sqrt[n]{a}.\ \sqrt[n]{b}.\ \sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n.\ (\sqrt[n]{b})^n.\ (\sqrt[n]{c^n}) = a \cdot b \cdot c.$$

D'où : $$x = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c}.$$

Exemple :

$$\sqrt{19\,600} = \sqrt{4 \times 49 \times 100} = \sqrt{4}.\ \sqrt{49}.\ \sqrt{100} = 2 \times 7 \times 10 = 140.$$

55. Racine d'un rapport. — ***La racine d'un rapport est égale au rapport des racines de chacun des termes.***

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Posons $x = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. On a : $x^n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \dfrac{a}{b}$.

Soit $$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Exemples :

$$\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}} \qquad \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

56. Racine d'une puissance. Puissance d'une racine. — ***On peut indifféremment extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de a^p ou élever $\sqrt[n]{a}$ à la puissance p.***

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p}$$

Ainsi $$\sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a \cdot a \cdot a} = \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a} = (\sqrt[5]{a})^3.$$

Exemples : $(\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3}$ $\qquad (\sqrt[3]{a^2})^4 = \sqrt[3]{a^8}$

57. Racine d'une racine. — ***La racine d'une racine d'un nombre est la racine de ce nombre ayant pour indice le produit des indices.***

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[mp]{a}.}$$

Soit par exemple : $x = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$. On a : $x^4 = (\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}})^4 = \sqrt[3]{a}$.

Puis $\quad x^{12} = (x^4)^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a.\quad$ Donc $x = \sqrt[12]{a} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$.

— Ainsi pour calculer $\sqrt[4]{a}$ on pourra calculer $\sqrt{\sqrt{a}}$.

58. Simplification de la racine d'une puissance. — ***On peut multiplier ou diviser par un même nombre entier l'indice et l'exposant de la racine d'une puissance.***

$$\boxed{\sqrt[km]{a^{kp}} = \sqrt[m]{a^p}}$$

Ainsi $\sqrt[10]{a^{15}} = \sqrt[2\times 5]{a^{3\times 5}} = \sqrt[2]{\sqrt[5]{(a^3)^5}}$. Or $\sqrt[5]{(a^3)^5} = a^3$.

Donc : $\quad \sqrt[10]{a^{15}} = \sqrt[2]{a^3}$.

APPLICATIONS. — 1° $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a} \qquad \sqrt[5]{a^{15}} = a^3$.

2° $\sqrt[10]{a^{35}} = \sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 \cdot a} = \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a} = a^3 \sqrt{a}$.

3° $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[15]{a^4} = \sqrt[15]{a^6} \cdot \sqrt[15]{a^4} = \sqrt[15]{a^6 \cdot a^4} = \sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}$.

On peut ainsi toujours simplifier un produit de racines de différentes puissances d'un même nombre.

III. RACINES D'UN NOMBRE RELATIF

59. Racine carrée. — ***On appelle racine carrée d'un nombre relatif* A *tout nombre relatif* x *dont le carré est égal à* A.**

x doit donc vérifier l'égalité $x^2 = \text{A}$.

60. Théorème. — 1° ***Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.***

2° ***Zéro a pour racine unique : zéro.***

3° ***Un nombre positif a deux racines carrées qui sont deux nombres opposés.***

Un carré étant toujours positif ou nul, l'égalité $x^2 = \text{A}$ ne peut être vérifiée si A est négatif. Seul $x = 0$ vérifie l'égalité $x^2 = 0$. Soit à chercher les racines de $+ 49$. La valeur absolue de x élevée au carré doit donner 49. Elle est donc égale à 7. Son signe est $+$ ou $-$ et on obtient pour x deux valeurs : $+ 7$ et $- 7$.

61. Convention. — ***Le symbole $\sqrt{A}$ désigne la racine carrée positive du nombre positif A.***

Les deux racines carrées de A sont donc : $+ \sqrt{A}$ et $- \sqrt{A}$.

REMARQUE. — Il en résulte que : $\begin{cases} \sqrt{a^2} = a & \text{si } a \text{ est positif.} \\ \sqrt{a^2} = -a & \text{si } a \text{ est négatif.} \end{cases}$

Ainsi : $\sqrt{7^2} = + 7$ et $\sqrt{(-5)^2} = + 5$.

62. Racine cubique. — ***On appelle racine cubique du nombre relatif A, tout nombre relatif x dont le cube est égal à A.***

x doit vérifier l'égalité $x^3 = A$.

63. Théorème. — ***Tout nombre relatif a une racine cubique et une seule de même signe que lui.***

Soit à chercher x tel que $x^3 = - 125$. La valeur absolue de x élevée au cube doit donner 125, elle est donc égale à $\sqrt[3]{125} = 5$. D'autre part (n° 45) le signe de x est $-$ car le signe de x^3 est celui de x. On a donc $x = - 5$.

Le symbole $\sqrt[3]{A}$ désigne sans ambiguïté la racine cubique de A.

$$\text{Si } x^3 = A \quad \text{on écrit} \quad x = \sqrt[3]{A}.$$

Notons l'égalité : $\sqrt[3]{-A} = - \sqrt[3]{A}$.

64. Généralisation. — ***On appelle racine $n^{ième}$ du nombre relatif A tout nombre relatif x tel que $x^n = A$.***

1° **Si n est pair.** On montre comme pour $n = 2$ que les nombres positifs ont deux racines opposées, les nombres négatifs n'en ont pas.

$\sqrt[n]{A}$ désigne la racine positive de A et $- \sqrt[n]{A}$ la racine négative de A.

2° **Si n est impair.** Tout nombre relatif A possède une racine $n^{ième}$ de même signe que lui désignée par le symbole $\sqrt[n]{A}$.

EXEMPLE : $+ 625$ a deux racines $4^{ièmes}$: $+ 5$ et $- 5$.
$- 625$ n'a pas de racine $4^{ième}$.

$$\sqrt[5]{32} = + 2 \quad \text{et} \quad \sqrt[5]{-32} = - 2.$$

EXERCICES

— Calculer les expressions suivantes :

65. $(-3)^2 \cdot (+4)^2 \cdot (-5)^2$.

66. $(+2)^3 \cdot (-5)^3 \cdot (+7)^3$

67. $\left(-\frac{8}{7}\right)^2 \cdot \left(+\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{7}{10}\right)^2$.

68. $\left(-\frac{7}{25}\right) \cdot \left(+\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^2$.

69. $\dfrac{(-2)^5 \cdot (+5)^9 \cdot (-9)^3}{(-10)^6 \cdot (+15)^4}$.

70. $\dfrac{(-18)^7 \cdot (+2)^4 \cdot (-50)^3}{(-25)^6 \cdot (-4)^5\ (-27)^2}$.

71. $\dfrac{\left(+\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 - 5\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right)}{\left(-\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{6}}$.

72. $\dfrac{\left(\frac{3^2}{2^2 \times 5}\right)^3 + (3^2 + 2^4)\left(\frac{2^2}{5^2}\right)\left(\frac{3^3}{2^4 \times 5}\right)}{1 + \left(\frac{2^2}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2^2}\right)^2}$.

— Calculer les racines suivantes :

73. $\sqrt[3]{216}$.

74. $\sqrt[4]{625}$.

75. $\sqrt[5]{7776}$.

76. $\sqrt{\dfrac{256}{729}}$.

77. $\sqrt[3]{\dfrac{125}{512}}$.

78. $\sqrt[4]{\dfrac{5^8}{3^{12} \times 7^4}}$.

79. $\sqrt{100 \times 25 \times 36}$.

80. $\sqrt[3]{27 \times 343 \times 729}$.

81. $\sqrt[5]{32 \times 243 \times 3125}$.

82. $\sqrt{(-12)^4}$.

83. $\sqrt[4]{(\sqrt{3} - 2)^4}$.

84. $\sqrt[3]{-125 \times 1331}$.

— Simplifier les expressions :

85. $\sqrt[6]{a}.\ \sqrt[10]{a^7}.\ \sqrt[15]{a^2}$.

86. $\sqrt[12]{a^7}.\ \sqrt[20]{a^3}.\ \sqrt[15]{a^4}$.

87. $\sqrt[15]{a}.\ \sqrt[21]{a^2}.\ \sqrt[35]{a^6}$.

88. $\sqrt[20]{a^3}.\ \sqrt[28]{a^5}.\ \sqrt[35]{a^6}$.

89. Calculer x tel que : $x^2 = (-2)^9 \times \left(-\frac{8}{81}\right)^2 \times \left(+\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(-\frac{9}{10}\right)^5$.

90. Calculer x tel que : $x^3 = (-3)^6 \times \left(-\frac{125}{7}\right) \times \left(+\frac{8}{25}\right)^2 \times \left(+\frac{5}{49}\right)$.

91. Calculer x tel que : $x^5 = \left(+\frac{5}{4}\right)^5 \times \left(-\frac{16}{27}\right)^2 \times \left(-\frac{12}{10^5}\right)$.

92. Les nombres a et b étant positifs, démontrer la relation :

$$\sqrt{a^3 + \sqrt[3]{a^6 b^3}} + \sqrt{b^3 + \sqrt[3]{a^3 b^6}} = \sqrt{(a + b)^3}.$$

Vérifier cette relation pour $a = 5$ et $b = 4$.

93. Calculer les expressions :

$$A = \frac{(3\sqrt{5})^3 + 3\sqrt{5^3}}{\sqrt{30 \times 24} - \sqrt[4]{25 \times 16}} \qquad B = \frac{\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^3 \cdot (+5)^3}}{\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{5}{24}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^4}}$$

ÉGALITÉS

65. Définition. — L'égalité de deux nombres relatifs a et b s'écrit :

$$a = b.$$

a est le premier membre et b le second membre de l'égalité.

Quand on considère l'égalité de deux sommes algébriques :

$$a - b + c = d - f$$

chacun des nombres a, $-b$, c, etc... constitue un *terme* de l'égalité.

66. Théorème I. — ***On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une égalité.***

En effet, si a et b sont égaux il en est de même de $a + c$ et $b + c$ d'une part et de $a - c$ et $b - c$ d'autre part, ainsi :

$$\boxed{a = b} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{a + c = b + c}$$

67. Applications. — 1° ***Dans une égalité, on peut supprimer un terme commun aux deux membres.***

De l'égalité $a + c = b + c$ on déduit $a = b$ en retranchant c aux deux membres.

2° **Transposition d'un terme.** — De l'égalité $a = b + c$, on déduit en retranchant c aux deux membres:

$$a - c = b.$$

La nouvelle égalité ne diffère de la première que par la place du terme c qui a changé de membre et en même temps de signe.

Dans une égalité, on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer le signe qui le précède.

Ou plus simplement :

Tout terme qui change de membre change de signe.

3° ***On peut ajouter (ou retrancher) membre à membre deux ou plusieurs égalités.***

Cela revient à ajouter (ou à retrancher) des nombres égaux aux deux membres de la première. Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \\ f = g \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a + c + f = b + d + g \\ a - c = b - d \\ a - c + f = b - d + g \end{array}\right.$$

68. Théorème II. — ***On peut multiplier (ou diviser) les deux membres d'une égalité par un même nombre non nul.***

Si a et b sont égaux, il en est de même de ac et bc d'une part et de $a : c$ et $b : c$ d'autre part :

$$\text{Pour } c \neq 0 : \quad \boxed{a = b} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} ac = bc \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c} \end{array}}$$

69. Applications. — 1° ***On peut changer les signes des deux membres d'une égalité.***

Cela revient à multiplier les deux membres par -1.

2° ***On peut multiplier (ou diviser) membre à membre deux égalités.***

Cela revient à multiplier (ou diviser) les deux membres de la première par deux nombres égaux.

Des égalités $\quad a = b \quad$ et $\quad c = d$

on déduit $\quad ac = bd \quad$ et $\quad \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}.$

70. Théorème III. — ***On peut élever à une même puissance les deux membres d'une égalité.***

Si a et b sont égaux, il en est de même de a^n et b^n

$$\boxed{a = b} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a^n = b^n}$$

71. Remarque. — Il importe de remarquer que l'égalité $a^n = b^n$ n'entraîne pas toujours $a = b$.

1° **Si n est impair.** Les nombres relatifs a et b ont même valeur absolue, et aussi le même signe, celui de a^n et b^n. Ils sont donc égaux.

Ainsi $\quad a^3 = b^3 \quad \Longrightarrow \quad a = b.$

2° **Si n est pair.** On a encore $|a| = |b|$ mais a et b peuvent être de même signe ou de signes différents et par suite être égaux ou opposés.

Ainsi $\quad a^2 = b^2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b. \end{cases}$

RAPPORTS ÉGAUX. PROPORTIONS

72. Théorème. — ***Dans une suite de rapports égaux, on forme un rapport égal à chacun d'eux en divisant la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs.***

Soit
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = k.$$

On a (n° 38) : $\quad a = bk; \quad a' = b'k; \quad a'' = b''k.$

D'où : $\quad a + a' + a'' = bk + b'k + b''k = (b + b' + b'')k.$

Ce qui montre que k est égal au quotient de $a + a' + a''$ par $b + b' + b''$.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a + a' + a''}{b + b' + b''}}$$

73. Corollaire. — On démontrerait de même que :
$$ma + na' + pa'' = (mb + nb' + bp'')k.$$

D'où :
$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{ma + na' + pa''}{mb + nb' + pb''}}$$

74. Nombres proportionnels. — ***On dit que les nombres*** a, a', a''... ***sont proportionnels aux nombres*** b, b', b''... ***quand :***
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots$$

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'il y ait un rapport constant k entre un nombre de la première suite et le nombre correspondant de la seconde. Le nombre k se nomme *coefficient de proportionnalité*.

75. Proportion. — ***On appelle proportion l'égalité de deux rapports :***

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

a et *d* sont les termes *extrêmes*, *b* et *c* sont les *moyens*.

76. Théorème fondamental. — ***Pour que quatre nombres forment une proportion il faut et il suffit que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens.***

On peut en effet écrire les équivalences suivantes :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \quad \Longleftrightarrow \quad ad = bc$$

Les égalités : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ et $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ équivalentes à $ad = bc$ sont équivalentes entre elles.

77. Corollaire. — ***Dans une proportion on peut intervertir les moyens, intervertir les extrêmes ou remplacer chaque rapport par son inverse.***

(Pratiquement au lieu de lire verticalement $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lire de gauche à droite : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ etc...).

78. Transformations d'une proportion. — D'après le n° 72 on peut écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}.$$

Ce qui permet, en considérant deux des rapports égaux, d'écrire de nouvelles proportions. On obtient ainsi :

$$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} \qquad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \qquad \text{etc... et} \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

79. Quatrième proportionnelle. — ***On appelle quatrième proportionnelle aux trois nombres** a, b **et** c **le nombre** x **tel que :***

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad ax = bc.$$

D'où : $\quad x = \frac{bc}{a}.$

80. Moyenne proportionnelle (ou géométrique). — ***On dit que le nombre** x **est moyen proportionnel entre** a **et** b **si :***

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x^2 = ab}$$

Si a et b sont de même signe, on peut prendre (n° 60) :

$$x = \sqrt{ab} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{ab}.$$

Ainsi -3 et -12 admettent deux moyennes proportionnelles :

$$+6 \text{ et } -6 \quad \text{car} \quad 6^2 = (-6)^2 = (-12)(-3).$$

INÉGALITÉS

81. Définition. — ***On dit qu'un nombre** a **est supérieur à un nombre** b **si la différence** $a - b$ **est positive.***

On écrit $\quad a > b \quad$ ou $\quad b < a$

car inversement b est inférieur à a si la différence $b - a$ est négative. Il en résulte que :

1° ***Tout nombre positif est supérieur à zéro, tout nombre négatif est inférieur à zéro et réciproquement.***

$$a > 0 \Longleftrightarrow a \text{ positif}$$
$$a < 0 \Longleftrightarrow a \text{ négatif.}$$

Par suite $\quad a > b \Longleftrightarrow a - b > 0 \Longleftrightarrow b - a < 0.$

2° ***Tout nombre positif est supérieur à tout nombre négatif.***

3° ***Si deux nombres sont positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue. Si deux nombres sont négatifs le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue.***

Ainsi : $-15 < -7 < 0 < +3 < +12$.

82. Théorème I. — ***On peut ajouter (ou retrancher) un même nombre aux deux membres d'une inégalité.***

$$\boxed{a > b} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} a + c > b + c \\ a - c > b - c \end{array}}$$

En effet $(a + c) - (b + c)$ et $(a - c) - (b - c)$ sont égaux à $a - b$

Il en résulte que dans une inégalité on peut :

1° ***Supprimer un terme commun aux deux membres.***

2° ***Transposer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer le signe qui le précède.***

Autrement dit : $a > b + c \iff$ à $a - b > c$.

83. Théorème II. — ***On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.***

Soient les inégalités de même sens

$$a > b \qquad c > d \qquad e > f$$

Les différences $a - b$, $c - d$, $e - f$ étant positives, il en résulte que :

$$(a - b) + (c - d) + (e - f) > 0 \quad \text{ou} \quad (a + c + e) - (b + d + f) > 0$$

d'où :

$$a + c + e > b + d + f$$

REMARQUE. — Le théorème subsiste si l'une des inégalités est remplacée par une égalité.

84. Théorème III. — ***On peut multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inégalité par un même nombre non nul à condition de :***

Conserver le sens si le nombre est positif.

Changer le sens si le nombre est négatif.

$$\boxed{a > b} \iff \boxed{\begin{array}{lll} ma > mb & \text{si} & m > 0 \\ ma < mb & \text{si} & m < 0 \end{array}}$$

En effet, $a - b$ et le produit $m(a - b)$ ou $ma - mb$ sont de même signe ou non selon que m est positif ou négatif.

Ainsi :

$$\frac{a}{d} < \frac{b}{d} \iff \frac{a}{d}d^2 < \frac{b}{d}d^2 \iff ad < bd.$$

— ***Si on change les signes des deux membres d'une inégalité il faut aussi en changer le sens.***

Car cela revient à multiplier les deux membres par -1.

$$a > b \iff -b > -a \iff -a < -b$$

85. Théorème IV. — ***On peut élever au carré les deux membres d'une inégalité dont les deux membres sont de même signe à condition de :***

Conserver le sens si les deux membres sont positifs.

Changer le sens si les deux membres sont négatifs.

Si $a > b > 0$, il résulte du théorème III que :
$a^2 > ab$ et $ab > b^2$. Donc que $a^2 > b^2$.
Si $0 > a > b$, il résulte de même que :
$a^2 < ab$ et $ab < b^2$. Donc que $a^2 < b^2$.
Si $a > 0 > b$. On ne peut rien conclure *a priori* pour a^2 et b^2.

86. Réciproque. — *Deux nombres positifs sont dans le même ordre de grandeur que leurs carrés.*

Soient a et b deux nombres positifs et supposons $a^2 < b^2$.

On ne peut avoir $a \geqslant b$ car cela entraînerait $a^2 \geqslant b^2$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $a < b$.

Ainsi $4\sqrt{3} < 7$ car $(4\sqrt{3})^2 = 48$ est inférieur à $7^2 = 49$.

87. Remarque importante. — L'analogie avec les égalités conduit souvent aux erreurs suivantes qu'il importe d'éviter :

1° *Retrancher membre à membre deux inégalités.*

2° *Multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif sans changer le sens.*

En particulier :

Changer les signes des termes d'une inégalité en conservant le sens.

3° *Supprimer un dénominateur commun littéral dont le signe n'est pas connu.*

4° *Elever au carré les deux membres d'une inégalité sans tenir compte du signe de chacun des deux membres.*

EXERCICES

94. Trouver deux nombres x et y, sachant que $x + y = a$ et $x - y = b$. Application : $a = -127$, $b = +53$.

95. Trouver trois nombres x, y et z sachant que :

$$y + z = a \qquad z + x = b \qquad x + y = c.$$

Commencer par déterminer la somme $x + y + z$.
Application : $a = 37$; $b = 59$; $c = 12$.

96. Déterminer trois nombres x, y et z proportionnels à a, b et c sachant que

$$4x - y + 2z = m.$$

Application : $a = 2$; $b = -3$; $c = 5$ et $m = 693$.

97. Montrer que si $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = k > 0$, on a aussi $k = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

En déduire 3 nombres proportionnels à 1, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sachant que la somme de leurs carrés est égale à 189.

98. Démontrer que si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k^2$, on a aussi :

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a + b + c)(a' + b' + c')}.$$

— De la proportion $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ déduire les suivantes et étudier la réciproque.

99. $\dfrac{2a + 3b}{5a - 7b} = \dfrac{2c + 3d}{5c - 7d}$. **100.** $\dfrac{ma + nb}{m'a + n'b} = \dfrac{mc + nd}{m'c + n'd}$.

101. $\dfrac{a^2d - bc^2}{ab - cd} = \dfrac{abcd}{ad^2 + b^2c}$ **102.** $\dfrac{a^2 + b^2}{ac + bd} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}$.

103. $\dfrac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \dfrac{ab}{cd}$ **104.** $\dfrac{5a - 10b - 2c + 4d}{20a + 35b - 8c - 14d} = \dfrac{3a - 6b + c - 2d}{12a + 21b + 4c + 7d}$.

— Démontrer les égalités suivantes :

105. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ **106.** $\sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

107. $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2}$ **108.** $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = 2$

109. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ **110.** $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 6$.

— Comparer les nombres suivants :

111. 26 et $15\sqrt{3}$ **112.** 97 et $56\sqrt{3}$ **113.** $4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ et 3

114. $7 - 4\sqrt{3}$ et $5\sqrt{2} - 7$ **115.** $2 + \sqrt{3}$ et $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ **116.** $7(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ et 22.

117. Montrer que si a et b ne sont pas égaux on a toujours : $a^2 + b^2 > 2ab$.

118. Démontrer la relation : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqq (a + b)(c + d)$.

119. Montrer que pour des nombres distincts, on a toujours :

$$\frac{a + b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad ; \quad \frac{a + b + c}{3} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}, \quad \text{etc...}$$

120. On suppose $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} < \dfrac{e}{f}$. Montrer que l'on a : $\dfrac{a}{b} < \dfrac{ab + cd + ef}{b^2 + d^2 + f^2} < \dfrac{e}{f}$.

121. On considère 2 nombres positifs x et y. On pose :

$$A = \frac{1}{2}(x + y) \qquad G = \sqrt{xy} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{H} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

(A, G et H sont les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de x et y).

Démontrer les relations : $G^2 = AH$ et $H < G < A$.

VECTEURS

88. Définition. — ***On appelle vecteur un segment de droite orienté.***

Ainsi (fig. 6) le segment AB orienté de A vers B définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (lire « vecteur AB »).

A *est l'origine du vecteur et* B *son extrémité.*

La droite indéfinie AB se nomme le *support du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ et définit sa *direction.* La distance AB est la *longueur* ou le *module* du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

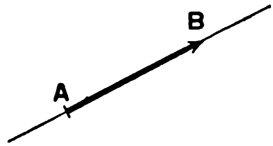
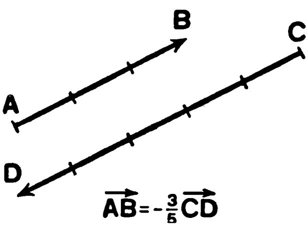


Fig. 6.

89. Rapport de deux vecteurs parallèles. — ***C'est le nombre relatif qui a pour valeur absolue le rapport des longueurs des deux vecteurs et pour signe + ou — suivant que les deux vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.***

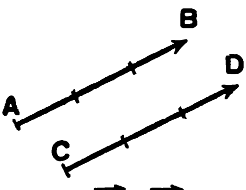
Ainsi (fig. 7) les vecteurs parallèles et de sens contraires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour rapport $-\frac{3}{5}$. On écrit :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$$



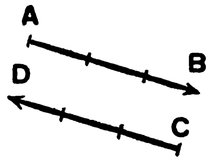
$\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$

Fig. 7.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Fig. 8.



$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

Fig. 9.

Deux vecteurs parallèles sont égaux s'ils ont même longueur et même sens. Ils sont opposés s'ils sont de même longueur et de sens contraires.

Leur rapport est égal à + 1 s'ils sont égaux et — 1 s'ils sont opposés. On a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ (fig. 8)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \text{ (fig. 9)}.$$

Remarque. — Les définitions précédentes s'étendent au cas où les vecteurs sont portés par le même support.

90. Axe. — ***On appelle axe une droite orientée.*** — Ainsi la droite $x'x$ orientée de x' vers x constitue l'axe $x'x$ (fig. 10).

Le sens ainsi défini se nomme *le sens de l'axe* $x'x$ ou *sens positif de l'axe.* Le sens opposé est *le sens négatif.*

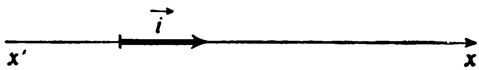


Fig. 10.

Tout vecteur $\vec{i}$ de module 1, porté par l'axe $x'x$ et de même sens que lui constitue un *vecteur unitaire* de l'axe $x'x$.

91. Mesure algébrique d'un vecteur. — ***On appelle mesure algébrique d'un vecteur sur un axe parallèle (ou de même support) le rapport de ce vecteur et du vecteur unitaire de l'axe.***

Il en résulte que la mesure algébrique $\overline{AB}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe $x'x$ a pour valeur absolue la longueur AB et pour signe + ou — suivant que $\overrightarrow{AB}$ a le même sens que l'axe $x'x$ ou non.

Ainsi (fig. 11) : $\overline{AB} = +3$; $\overline{CD} = -5$; $\overline{BA} = -3$.

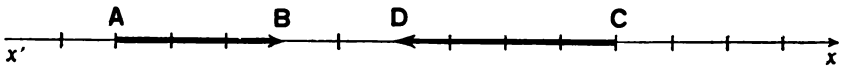


Fig. 11.

On voit que $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ *sont deux nombres opposés.* $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Remarquons qu'il faut éviter de confondre les notations :

AB : segment AB ou longueur AB.

$\overrightarrow{AB}$: vecteur d'origine A et d'extrémité B.

$\overline{AB}$: mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

92. Repérage d'un point sur une droite. — Soit un axe X'X (fig. 12). Choisissons sur cet axe un point fixe O, appelé *origine des abscisses.*

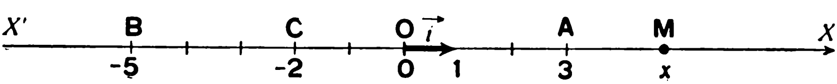


Fig. 12.

On appelle abscisse du point M ***la mesure algébrique du vecteur*** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

$$\overline{\mathrm{OA}} = +3 \qquad \text{l'abscisse de A est } +3.$$
$$\overline{\mathrm{OB}} = -5 \qquad \text{l'abscisse de B est } -5.$$

Réciproquement à tout nombre relatif correspond un point de l'axe X'X et un seul admettant ce nombre pour abscisse. Ainsi au nombre -2 correspond le point C tel que $\overline{\mathrm{OC}} = -2$. On obtient C en portant à partir de O, dans le sens négatif, un segment OC = 2. Autrement dit :

La position d'un point sur un axe est déterminée par son abscisse.

93. Application aux nombres relatifs. — Lorsqu'un point M parcourt l'axe X'X dans le sens positif, son abscisse x prend toutes les valeurs algébriques possibles dans l'ordre croissant (fig. 13).

En effet de X' à O, $x = \overline{\mathrm{OM}}$ est négatif et sa valeur absolue diminue, donc (n° 81) x croît. De O à X, x est positif et sa valeur absolue augmente, donc x croît également.

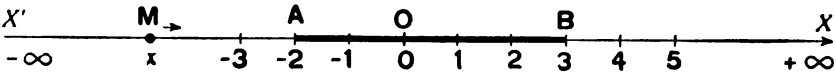


Fig. 13.

On en déduit la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M d'abscisse x appartienne à l'une des portions de l'axe X'X limitées par les points A(-2) et B($+3$) :

1° Demi-droite AX' : $x < -2$

2° Demi-droite BX : $x > +3$

3° Segment de droite AB : $-2 \leqslant x \leqslant +3$.

Lorsque M s'éloigne indéfiniment sur l'axe, la valeur absolue de son abscisse x finit par dépasser toute valeur fixée à l'avance. On dit que x devient infini et on écrit :

$x \longrightarrow +\infty$ si M s'éloigne dans le sens positif.

$x \longrightarrow -\infty$ si M s'éloigne dans le sens négatif.

94. Somme de deux vecteurs. — Considérons deux vecteurs consécutifs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, c'est-à-dire tels que l'extrémité du premier soit l'origine du second (fig. 14). Par définition le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est la somme géométrique (ou le vecteur résultant) des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

La somme géométrique de deux vecteurs consécutifs est le vecteur qui a pour origine celle du premier et pour extrémité celle du second.

On écrit : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

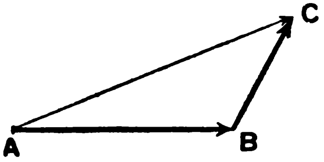


Fig. 14.

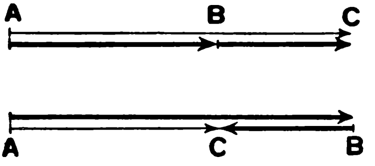


Fig. 15.

Cette définition s'applique à deux vecteurs consécutifs de même support (fig. 15).

Pour construire la somme de deux vecteurs non consécutifs, il suffit de construire deux vecteurs consécutifs qui leur sont respectivement égaux. On démontre (voir *Cours de Géométrie*) que cette somme est indépendante de l'origine adoptée pour le premier vecteur. En particulier, la somme de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ s'obtient en terminant le parallélogramme AOBC (fig. 16). On a :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \qquad \text{et puisque} \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

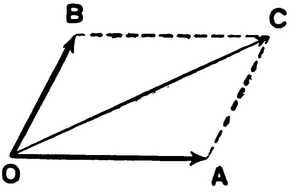


Fig. 16.

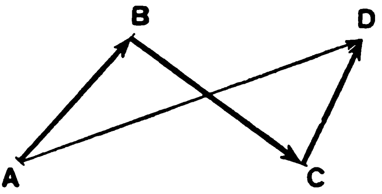


Fig. 17.

On peut aussi définir la somme de plusieurs vecteurs. Ainsi (fig. 17), on a par définition :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

Il importe de remarquer que la longueur de la somme de deux ou plusieurs vecteurs n'est pas en général égale à la somme des longueurs de ces vecteurs.

RELATION DE CHASLES

95. Théorème I. — ***La mesure algébrique de la somme de deux vecteurs consécutifs portés par un même axe est égale à la somme des mesures algébriques de ces vecteurs.***

Il s'agit de montrer que l'*égalité vectorielle* : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

entraîne l'*égalité algébrique* : $\boxed{\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}}$

connue sous le nom de relation de Chasles (mathématicien français 1793-1880). Observons qu'il existe six cas de figure possibles (fig. 18).

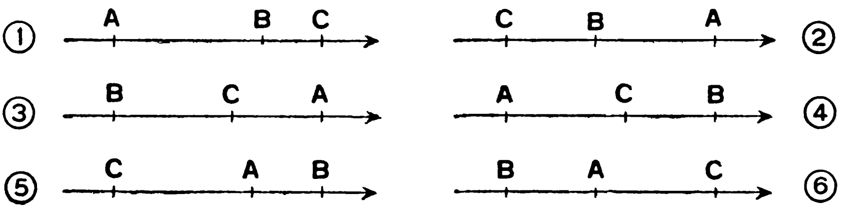


Fig. 18.

On a, par exemple, visiblement pour le 5ᵉ cas :

$$\overline{CB} = \overline{CA} + \overline{AB} \quad \text{ou} \quad -\overline{BC} = -\overline{AC} + \overline{AB}.$$

D'où en transposant : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$

96. Remarque. — Il faut trois égalités arithmétiques pour traduire, selon les cas, la position relative de trois points A, B et C en ligne droite :

$$AC = AB + BC \qquad AC = AB - BC \qquad \text{ou} \qquad AC = BC - AB.$$

Au contraire : ***La relation de Chasles est générale et est indépendante du sens de l'axe.***

Si M, N et P sont alignés, on a toujours : $\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP}$ (intercaler la lettre N entre M et P qui figurent au premier membre) quel que soit le sens suivant lequel la droite MP est orientée.

97. Généralisation. — La relation de Chasles se généralise pour un nombre quelconque de vecteurs consécutifs. Si A, B, C et D sont alignés (fig. 19)

on a : $$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD}.$$

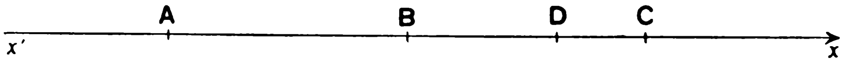


Fig. 19.

D'où : $$\boxed{\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}.}$$

98. Théorème II. — ***La mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à l'abscisse de son extrémité, diminuée de l'abscisse de son origine.***

Appliquons la formule de Chasles aux trois points O, A et B (fig. 20 et 21)

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}.$$

D'où : $$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Désignons par a et b les abscisses de A et de B. Nous obtenons

$$\boxed{\overline{AB} = b - a.}$$

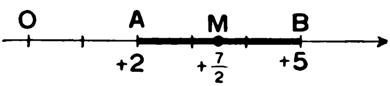


Fig. 20.

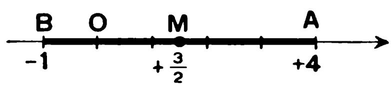


Fig. 21.

Ainsi (fig. 20) : $a = +2$; $b = +5$; $\overline{AB} = +3 = (+5) - (+2)$
et (fig. 21) : $a = +4$; $b = -1$; $\overline{AB} = -5 = (-1) - (+4)$.

99. Abscisse du milieu d'un segment. — ***Le milieu d'un segment a pour abscisse la demi-somme des abscisses des extrémités de ce segment.***

Soit M le milieu du segment AB (fig. 20 et 21). Les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont égaux :

$$\overline{AM} = \overline{MB} \quad \text{soit} \quad \overline{OM} - \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{OM}.$$

D'où : $$2\,\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} \qquad \text{et} \qquad \overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}.$$

Désignons par a, b et m les abscisses de A, B et M. Nous obtenons :

$$\boxed{m = \frac{a+b}{2}}$$

Ainsi (fig. 20) : $\overline{OM} = \frac{+2+5}{2} = \frac{7}{2}$ et (fig. 21) : $\overline{OM} = \frac{+4-1}{2} = \frac{3}{2}$.

EXERCICES

122. Démontrer que le rapport de deux vecteurs AB et CD portés par un même axe est égal au rapport de leurs mesures algébriques. Autrement dit :

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD} \quad \text{équivaut à} \quad \overline{AB} = k\,\overline{CD}.$$

123. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ et I le milieu de AB. Démontrer que

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

124. On considère un triangle ABC dont le centre de gravité est G et un point M quelconque.

1° Démontrer l'égalité : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0.$

2° En déduire la relation : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$

125. 1° Vérifier la relation de Chasles $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, sachant que $\overline{OA} = +7$ $\overline{OB} = -5$ et $\overline{OC} = +13$.

2° Vérifier les relations : $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ et $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$.

3° Calculer les abscisses de M, N et P milieux de BC, CA et AB.

126. Soient sur un axe deux points A (a) et B (b). Déterminer les abscisses des points M et N qui partagent AB en 3 parties égales.
Application : $a = +15$, $b = -9$.

127. Reprendre l'exercice précédent pour les points qui partagent AB en 4 puis en 6, et en 8 parties égales.

128. On prend sur un axe deux points A et B d'abscisses a et b. Déterminer l'abscisse x du point M tel que $\overline{MA} = k\,\overline{MB}$ (k nombre donné).
Application : $a = -4$ $\quad b = +10$ $\quad$ et $\quad k = -2{,}5$.

129. Étant donnés 4 points A, B, C et D d'un axe dont les abscisses sont a, b, c et d

1° Montrer qu'il existe en général un point M tel que $\overline{MA}\cdot\overline{MB} = \overline{MC}\cdot\overline{MD}$.

2° Qu'arrive-t-il si AB et CD ont même milieu?
Application : $a = +8$, $b = -3$, $c = +11$ et $d = +1$.

130. Soient sur un axe 4 points A, B, C et D, tels que $\overline{AC}\cdot\overline{BD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} = 0$.

1° Montrer que les abscisses a, b, c et d de ces 4 points vérifient la relation

$$(a+b)(c+d) = 2(ab+cd).$$

2° I et J désignant les milieux de AB et CD en déduire les relations suivantes

a) $\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OC} \cdot \overline{OD} = 2\,\overline{OI} \cdot \overline{OJ}$ *b*) $\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$.

c) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$ *d*) $\dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}} + \dfrac{1}{\overline{BC}} + \dfrac{1}{\overline{BD}} = 0.$

131. On considère sur un axe d'origine O, les points A (a), B (b) et C (c). Démontrer les relations :

1° $\overline{OA} \cdot \overline{BC} + \overline{OB} \cdot \overline{CA} + \overline{OC} \cdot \overline{AB} = 0.$

2° $\overline{OA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{OB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{OC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0.$

132. Soient O le milieu du segment AB et M un point quelconque de la droite AB. Démontrer que :

1° $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\,\overline{MO}$ 2° $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2$.

3° $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\,(\overline{OM}^2 + \overline{OA}^2)$. 4° $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\,\overline{OM} \,.\, \overline{AB}$.

133. Étant donnés deux points A (a) et B (b) d'un axe d'origine O :

1° Calculer l'abscisse x du point I tel que : $m\,\overline{IA} + n\,\overline{IB} = 0.$

2° Démontrer la double relation :

$$m\,\overline{OA}^2 + n\,\overline{OB}^2 - (m + n)\,\overline{OI}^2 = m\,\overline{IA}^2 + n\,\overline{IB}^2 = \frac{mn}{m+n}\,\overline{AB}^2.$$

134. Soient 3 points A, B et C d'abscisses a, b, c sur un axe d'origine O. Montrer qu'il existe un point I tel que $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = 0$. Calculer son abscisse et démontrer les relations :

1° $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - 3\,\overline{OI} = 0.$

2° $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 3\,\overline{OI}^2 = \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2.$

3° $\overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC} \cdot \overline{OA} + \overline{OA} \cdot \overline{OB} - 3\,\overline{OI}^2 = \overline{IB} \cdot \overline{IC} + \overline{IC} \cdot \overline{IA} + \overline{IA} \cdot \overline{IB}.$

4° $3\,(\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2) = -6\,(\overline{IB} \cdot \overline{IC} + \overline{IC} \cdot \overline{IA} + \overline{IA} \cdot \overline{IB}) = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2.$

CALCUL NUMÉRIQUE

100. Opérations. — Nous supposons connues les définitions et les règles relatives aux opérations sur les nombres entiers, décimaux et fractionnaires arithmétiques ou relatifs. Rappelons-les toutefois en ce qui concerne le quotient et la racine carrée à une approximation décimale donnée.

101. Quotient approché. — ***On appelle quotient approché de deux nombres arithmétiques à une unité,*** $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$, $\frac{1}{10^n}$ ***près par défaut le plus grand multiple de 1,*** $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$, $\frac{1}{10^n}$ ***inférieur ou égal au quotient exact des nombres donnés.***

Si $\frac{x}{10^n}$ (x entier) est le quotient approché de a par b à $\frac{x}{10^n}$ près par défaut on a, d'après la définition :

$$\frac{x}{10^n} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{x+1}{10^n}.$$

En multipliant par $10^n\, b$:

$$bx \leqslant 10^n a < b\,(x+1)$$

ce qui prouve que x est le quotient entier de $10^n a$ par b :

Pour calculer le quotient approché de deux nombres arithmétiques à $\frac{1}{10^n}$ *près par défaut on multiplie le dividende par* 10^n; *on cherche le quotient entier du nombre obtenu par le diviseur et on divise ce quotient par* 10^n.

Exemple. — Le quotient a $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut de 52 par 31,7 s'obtient en cherchant le quotient entier de 52 000 par 31,7 (ou de 520 000 par 317) et en séparant 3 chiffres décimaux à la droite du quotient obtenu.

On sait qu'on peut aussi diviser 520 par 317, mettre une virgule à la droite du quotient 1 et continuer la division jusqu'à obtenir 3 chiffres décimaux au quotient.

$$\begin{array}{r|l} 520 & 317 \\ \cline{2-2} 2030 & 1{,}640 \\ 1280 & \\ 0120 & \end{array}$$

102. Racine carrée approchée. — ***On appelle racine carrée d'un nombre arithmétique à une unité $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$, $\frac{1}{10^n}$ près par défaut le plus grand multiple de 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$, $\frac{1}{10^n}$ inférieur ou égal à la racine exacte du nombre donné.***

Si $\frac{x}{10^n}$ (x entier) est la racine carrée approchée de N à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut on a, d'après la définition :

$$\frac{x}{10^n} \leqslant \sqrt{N} < \frac{x+1}{10^n}.$$

En élevant au carré; puis en multipliant par 10^{2n} :

$$x^2 \leqslant 10^{2n}\,N < (x+1)^2.$$

Ce qui prouve que x est la racine carrée entière de 10^{2n} N :

Pour calculer la racine carrée approchée d'un nombre à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut, on on multiplie ce nombre par 10^{2n}, on cherche la racine entière du produit obtenu et on divise cette racine par 10^n.

Exemple. — La racine carrée de 5 à $\frac{1}{1\,000}$ près s'obtient en cherchant la racine entière 5 000 000 et en séparant 3 chiffres décimaux à la droite du nombre obtenu.

On peut aussi chercher la racine entière de 5, puis continuer l'opération en abaissant des tranches composées de deux zéros jusqu'à obtenir 3 chiffres décimaux après la virgule.

$$\begin{array}{r|lll}
5{,}00\,00\,00 & 2{,}236 & & \\
\hline
10.0 & 42 & 443 & 4466 \\
84 & \underline{2} & \underline{3} & \underline{6} \\
\hline
160.0 & 84 & 1329 & 26796 \\
1329 & & & \\
\hline
0271\,0.0 & & & \\
26796 & & & \\
\hline
00304 & & &
\end{array}$$

103. Racine cubique approchée par encadrement. — Il n'existe pas de règle simple, analogue à l'extraction d'une racine carrée, pour calculer les valeurs approchées successives d'une racine d'indice n d'un nombre donné A. On peut alors procéder comme ci-après en cherchant à encadrer le nombre $x = \sqrt[n]{A}$ entre deux valeurs approchées dont la différence est une centaine, une dizaine, une unité, puis un dixième, un centième, etc...

Exemple. — *Calculer les différentes valeurs approchées de la racine cubique exacte* x *du nombre* A = 3 141,592.

On voit d'abord que : $1\,000 < A < 8\,000$ donc : $10 < x < 20$.

1° On essaye alors : $(15)^3 = 3\,375 > A$, puis $(14)^3 = 2\,744 < A$.

Donc : $14 < x < 15$. Le nombre 14 est la racine cubique entière du nombre A.

2° Comme A est légèrement plus près de 3375 que de 2744, il est à prévoir que x est plus près de 15 que de 14. On essaye :

$$(14{,}6)^3 = 3\,112{,}136 < A \quad \text{puis} \quad (14{,}7)^3 = 3\,176{,}523 > A.$$

Donc : $14{,}6 < x < 14{,}7$.

Le nombre 14,6 est la valeur approchée à 0,1 près par défaut de x.

3° Comme A est sensiblement plus près de $(14{,}6)^3$ que de $(14{,}7)^3$ on essaye $(14{,}64)^3 = 3\,127{,}785... < A$ et $(14{,}65)^3 = 3\,144{,}219... > A$.

Le nombre 14,64 est la valeur approchée à 0,01 près par défaut de x.

— On peut prolonger ainsi le calcul mais pratiquement on est rapidement arrêté par la longueur des opérations.

104. Généralisation. — Plus généralement, proposons-nous de calculer une valeur approchée d'un nombre x pour lequel l'expression algébrique $E(x)$ soit égale à une valeur donnée A.

On commence par écrire la relation $E(x) = A$ sous la forme $f(x) = 0$, la plus simple possible :

Ainsi la relation $\dfrac{x+2}{x^2+1} = \dfrac{1}{4}$ équivaut à : $x^2 - 4x - 7 = 0$.

De même la relation $\sqrt[3]{x^3 + 5x} = 2$ équivaut à $x^3 + 5x - 8 = 0$.

On est alors ramené à chercher une valeur de x pour laquelle l'expression $f(x)$ s'annule (*racine* ou *zéro* de cette expression). Nous admettrons la propriété suivante que la représentation graphique de la fonction $y = f(x)$ rend d'ailleurs intuitive :

Si l'expression algébrique $f(x)$ est définie dans l'intervalle $[a, b]$ et prend des valeurs numériques $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, elle admet au moins une racine comprise entre a et b.

Ainsi $f(x) = 3x + \sqrt{4 - x^2}$ est définie pour $-2 \leqslant x \leqslant +2$.

Or : $f(-2) = -6$ et $f(0) = +2$, l'expression $f(x)$ admet une racine comprise entre -2 et 0.

Ceci étant admis, soit c une valeur comprise entre a et b. Si, par exemple, $f(c)$ est du signe opposé à $f(a)$ la racine x est comprise entre a et c. On recommence l'opération avec d entre a et c et ainsi de suite.

Pratiquement on encadre d'abord la valeur x cherchée à une dizaine ou une unité près, puis à un dixième près, un centième près, etc...

105. Exemple. — *Montrer qu'il existe une valeur positive de x pour laquelle on a :* $\dfrac{x+2}{x^2+1} = \dfrac{1}{4}$ *et calculer cette valeur à* 0,01 *près par défaut.*

La relation $\dfrac{x+2}{x^2+1} = \dfrac{1}{4}$ équivaut à $f(x) \equiv x^2 - 4x - 7 = 0$. Comme $f(0) = -7$ et $f(10) = 53$, il existe une racine du polynôme $f(x)$ telle que : $0 < x < 10$.

1° $f(5) = -2$ et $f(6) = +5$ donc : $5 < x < 6$.

2° Zéro étant plus près de -2 que de $+5$, essayons 5,3 :

$$\left.\begin{array}{l} f(5,3) = 28,09 - 28,2 = -0,11 \\ f(5,4) = 29,16 - 28,6 = 0,56 \end{array}\right\} \text{donc } 5,3 < x < 5,4.$$

3° De même, zéro étant nettement plus près de $-0,11$ que de $0,56$:

$$\left.\begin{array}{l} f(5,32) = 28,3024 - 28,28 = 0,0224 \\ f(5,31) = 28,1961 - 28,24 = -0,0439 \end{array}\right\} \text{donc } 5,31 < x < 5,32.$$

La valeur de x demandée est 5,31 à 0,01 près par défaut. On pourra vérifier que la valeur exacte de x est $2 + \sqrt{11} = 5,317...$

EXERCICES

— Effectuer les opérations suivantes :

135. $57,2752 + 0,0257 + 1\,212\,517,759$.

136. $712,7597 - 27,00275$. **137.** $459 - 72,819$.

138. $412,07 - 507,725 + 1\,709,775 - 47,07$.

139. $89,725 \times 0,37$. **140.** $783,037 \times 5,2157$.

141. $9,81 \times 3,1416$. **142.** $0,3183^3 \times 5$.

143. $1,7321 \times 2,6458$. **144.** $3,6065 \times 4,1231$.

— Calculer le quotient entier de :

145. 2 751 par 37. 709,25 par 13. $\dfrac{108}{11}$ par 7.

146. 312,7 par 4.75. 78,5 par $\dfrac{3}{4}$. $\dfrac{214}{3}$ par $\dfrac{4}{5}$.

— Calculer le quotient à $\dfrac{1}{10}$, $\dfrac{1}{100}$, $\dfrac{1}{1\,000}$ près par défaut de :

147. 45 par 13. 1 par 7. 19 par 23.

148. 409,7 par 705. 3,109 par 13,05. 0,047 par 4,719.

149. 0,37 par $\dfrac{2}{3}$. $\dfrac{5}{7}$ par $\dfrac{11}{9}$. $\dfrac{13}{17}$ par 0,75.

150. Les nombres 1,4142 et 1,7320 sont les racines approchées à $\dfrac{1}{10\,000}$ près par défaut de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

1° Entre quelles limites est compris $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Quel est le nombre de chiffres décimaux exacts obtenus?

2° Même question pour $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

151. Le quotient d'un nombre x par 37,7 à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut est 0,712. Entre quelles limites peut être compris ce nombre x et sur combien de chiffres exacts peut-on compter?

152. Sachant que π est compris entre 3,1415 et 3,1416 trouver deux valeurs de $\frac{1}{\pi}$ approchées l'une par défaut, l'autre par excès. Sur combien de chiffres décimaux exacts peut-on compter?

153. Dans le calcul du quotient de deux nombres à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut on a trouvé 0,723 mais on a interverti le rôle du dividende et du diviseur.

1° Quelles sont les valeurs possibles pour le quotient réel?

2° Sur combien de chiffres exacts peut-on compter?

— Calculer la racine carrée entière de :

154. 717. **155.** 8 751. **156.** 93 809.

157. 712 825. **158.** 3 812 712. **159.** 25 712 402.

— Calculer la racine carrée approchée à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut de :

160. 512 **161.** 821 **162.** 41 816

163. 16,39 **164.** 4 78153 **165.** 0,078437

166. $\frac{20}{3}$ **167.** $\frac{17}{9}$ **168.** $\frac{4\,133}{17}$.

— Calculer à 0,01 près par défaut la racine cubique de :

169. 79,43 **170.** 127,5 **171.** 318,7

172. 483,246 **173.** 1 249,32 **174.** 2 603,89

175. 891,375 **176.** 3 312,048 **177.** 6 742,425

178. 2 105,324 **179.** 5 428,249 **180.** 8 963,732

— Calculer à 0,001 près par défaut la racine cubique de :

181. 29,5 **182.** 37,2 **183.** 85,36

184. 164,7 **185.** 325,8 **186.** 753,571

187. 287,496 **188.** 704,969 **189.** 0,438 976

— Calculer avec deux décimales exactes les nombres :

190. $\sqrt[3]{2}$ **191.** $\sqrt[4]{7{,}2}$ **192.** $\sqrt[6]{3{,}12}$

193. $\sqrt[3]{3}$ **194.** $\sqrt[6]{3{,}14}$ **195.** $\sqrt[3]{2{,}718}$.

— Montrer qu'il existe une valeur de x vérifiant chacune des relations suivantes et calculer sa valeur approchée à 0,01 près.

196. $x^3 + 3x = 20.$ **197.** $x^3 - 4x - 5 = 0.$

198. $x^3 - 4x^2 = 9.$ **199.** $\sqrt{x^2 + 9} = 5 - x.$

200. $\sqrt[3]{3x - 7} = x - 1.$ **201.** $\sqrt[4]{4x - x^2} = x - 1.$

202. $\sqrt[3]{x^2 + 4x} = 2(x - 3).$ **203.** $\sqrt[4]{5x^2 - x^3} = 3 - x.$

204. $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = x - 2.$ **205.** $\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}} = x - 5.$

EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

106. Définitions. — 1° ***On appelle variable toute quantité qui peut prendre diverses valeurs.***

La température t de l'atmosphère au cours d'une journée, la distance d qui sépare un point fixe d'un point mobile, la valeur x d'un nombre relatif compris entre deux nombres donnés sont des variables. Il est commode de représenter une variable par une lettre.

2° ***On appelle expression algébrique un ensemble de nombres relatifs et de variables sur lesquels sont indiquées des opérations à effectuer.***

EXEMPLES : $3\,ax^2 - 2\,by$; $\quad \dfrac{x^2+4}{x-2}$; $\quad 2x + \sqrt{x^2 - y^2}$.

Une expression algébrique est *rationnelle* quand elle ne renferme pas de lettres sous un radical. Sinon elle est *irrationnelle.*

Une expression rationnelle est *entière* si elle ne renferme pas de dénominateur littéral. Dans le cas contraire elle est *fractionnaire.*

$\dfrac{3}{4}x^2 - y\sqrt{2}$ *est une expression algébrique entière.*

$\dfrac{2x+3}{x-4}$ *est une fraction rationnelle.*

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *est une expression algébrique irrationnelle.*

107. Valeurs numériques d'une expression algébrique. — La valeur numérique d'une expression algébrique, pour un ensemble de valeurs attribuées aux lettres qui y figurent, s'obtient en remplaçant chaque lettre par sa valeur et en effectuant les opérations indiquées.

Pour $a = +4$; $b = 5$; $c = -6$ l'expression $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ a pour valeur numérique :

$$\frac{-5+\sqrt{25+4\times4\times6}}{8} = \frac{-5+\sqrt{121}}{8} = \frac{-5+11}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Parfois il est impossible de calculer, pour certaines valeurs attribuées aux lettres, la valeur numérique d'une expression. Ainsi pour $x = +1$ les expressions $\frac{x+1}{x-1}$ et $\sqrt{x-2}$ n'ont pas de valeur numérique. Dans la suite, nous supposerons toujours que l'on n'attribue aux lettres que des valeurs pour lesquelles le calcul est possible.

Deux expressions algébriques sont équivalentes lorsqu'elles prennent la même valeur numérique pour tous les systèmes de valeurs attribuées aux lettres.

$(a - b)x$ et $ax - bx$ sont équivalentes.

On écrit : $$(a - b)\,x = ax - bx.$$

108. Calcul algébrique. — Le calcul algébrique a pour but la transformation des expressions algébriques en expressions équivalentes.

Simplifier ou réduire une expression, c'est l'écrire sous une forme équivalente plus simple et par conséquent plus facile à calculer numériquement.

Les opérations sur les expressions algébriques seront définies de façon qu'elles se traduisent pour les valeurs numériques de ces expressions, par les règles de calcul connues sur les nombres relatifs.

MONOMES

109. Définition. — ***Un monôme est une expression algébrique où les seules opérations à effectuer sur les lettres sont des multiplications et des élévations à une puissance.***

Soit le monôme : $\left(-\frac{1}{3}\right) \times a \times x^2 \times \left(2 + \frac{1}{4}\right) \times a^2 \times b^5.$

Il est équivalent aux monômes :

$\left(-\frac{1}{3}\right) ax^2 \left(\frac{9}{4}\right) a^2b^5,$ puis : $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{4}\right) aa^2b^5x^2,$ enfin : $-\frac{3}{4}\,a^3b^5x^2.$

On dit que le monôme est *réduit*; $-\frac{3}{4}$ est son coefficient et $a^3b^5x^2$ est sa partie *littérale*.

Les monômes $a^3x^2y^2$ et $-a^2b^2x^7$ ont respectivement pour coefficients $+1$ et -1.

110. Degré d'un monôme. — ***On appelle degré d'un monôme par rapport à une lettre, l'exposant de cette lettre dans le monôme réduit.***

$\frac{8}{3} ab^4x^2$ est du premier degré en a, du quatrième degré en b et du second degré en x.

On appelle degré d'un monôme par rapport à plusieurs lettres la somme des degrés par rapport à chacune de ces lettres.

$\frac{8}{3} ab^4x^2$ est du cinquième degré en a et b, du troisième degré en a et x et du septième degré en a, b et x.

REMARQUE. — Lorsqu'une lettre ne figure pas dans un monôme, on peut dire que son exposant dans le monôme est zéro ou que le monôme est de degré 0 par rapport à cette lettre.

$3\,a^2x^5$ ou $3\,a^2x^5y^0$ est de degré 0 en y.

111. Monômes semblables. — ***Deux ou plusieurs monômes sont semblables lorsqu'ils ont même partie littérale.***

Ainsi : $-\,3\,a^2b^5x$; $7\,a^2b^5x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}\,a^2b^5x$ sont des monômes semblables.

112. Somme de monômes semblables. — Considérons la somme algébrique de monômes semblables :

$$4\,a^2x^3y - \frac{5}{2}\,a^2x^3y + \frac{3}{4}\,a^2x^3y$$

Cette expression algébrique est (n° 34, 3°) équivalente au monôme :

$$\left(4 - \frac{5}{2} + \frac{3}{4}\right) a^2x^3y = \frac{9}{4}\,a^2x^3y.$$

La somme algébrique de plusieurs monômes semblables est un monôme semblable à ces monômes dont le coefficient numérique est la somme algébrique des coefficients des monômes considérés.

La réduction d'une somme de monômes semblables se ramène donc à celle des coefficients.

113. Produits de monômes — Considérons le produit :

$$\left(\frac{3}{5}\,ax^3y^2\right) \times (-\,2\,a^4x^5)$$

Cette expression algébrique est équivalente au produit contenant tous les facteurs de chaque monôme (n° 34, 2°), soit à :

$$\frac{3}{5}\, ax^3y^2\, (-\, 2)\; a^4x^5 = \left(\frac{3}{5}\right)(-\; 2)\;\; a^{1+4}x^{3+5}y^2.$$

Elle donc équivalente au monôme réduit : $-\,\dfrac{6}{5}\; a^5x^8y^2$.

Le produit de deux monômes est un monôme dont :

1° ***le coefficient est le produit des coefficients de chacun des facteurs.***

2° ***la partie littérale est formée des lettres contenues dans les deux monômes, chacune d'elles ayant pour exposant la somme de ses exposants dans les deux facteurs.***

Cette règle s'étend au produit de plusieurs monômes et permet de calculer le carré ou le cube d'un monôme.

Exemples :

1° $\left(\dfrac{3}{4}\, a^2x^3y\right)\left(-\,\dfrac{2}{5}\; ay^4\right)(2\,x^5y^2) = -\,\dfrac{3}{5}\; a^3x^8y^7.$

2° $\left(-\,\dfrac{2}{3}\; ax^4y^2\right)^2 = \left(-\,\dfrac{2}{3}\; ax^4y^2\right)\left(-\,\dfrac{2}{3}\; ax^4y^2\right) = \dfrac{4}{9}\; a^2x^8y^4.$

3° $(5\; a^2x^3)^3 = (5\; a^2x^3)\;(5\; a^2x^3)\;(5\; a^2x^3) = 125\; a^6\; x^9.$

POLYNOMES

114. Définition. — ***Un polynôme est une somme algébrique de monômes.***

Chacun de ces monômes est un *terme* du polynôme :

$$3\,a^2b - ab^3 - \frac{2}{5}\,a^3 + 4\,b^5 \quad \text{est un polynôme à deux variables.}$$

$$2\,x - x^3 + 5 - \frac{4}{3}\,x^2 \quad \text{est un polymône à une variable.}$$

Lorsqu'un polynôme ne contient que deux termes, on l'appelle **binôme.** S'il en contient trois, c'est un **trinôme.**

$2\,x^3 - 5\,x$ *est un binôme*; $4\,x^2 - 3\,x + 5$ *est un trinôme.*

115. Réduction des termes semblables. — Lorsqu'un polynôme contient plusieurs monômes semblables, il est équivalent au polynôme obtenu en remplaçant la somme de ces monômes par le monôme équivalent :

Ainsi le polynôme : $7x^3 + 8x - 3 + 4x - 2x^3 - 5x + 2.$

s'écrit : $(7x^3 - 2x^3) + (8x + 4x - 5x) + (-3 + 2).$

Soit : $5x^3 + 7x - 1.$

Le polynôme obtenu est équivalent au polynôme proposé. On dit que ce polynôme a été réduit ou que l'on a fait la réduction des termes semblables.

Deux polynômes sont *égaux* ou *identiques* si, après réduction, ils sont constitués des mêmes termes. Ainsi :

$$7x^3 + 8x - 3 + 4x - 2x^3 - 5x + 2 = 5x^3 + 7x - 1.$$

116. Degré d'un polynôme. — ***Le degré d'un polynôme réduit par rapport à une lettre (ou par rapport à plusieurs lettres) est le degré du monôme de plus haut degré par rapport à cette lettre (ou à ces lettres).***

Ainsi le polynôme $4\ x^6y^2 - 3x^4y^5 + 2\,xy^4$

est de degré 6 en x, de degré 5 en y et de degré 9 en x et y.

On voit que le degré d'un polynôme par rapport à deux ou plusieurs lettres n'est pas, en général, égal à la somme des degrés par rapport à chacune de ces lettres.

Un polynôme est homogène par rapport à plusieurs lettres lorsque tous les termes de ce polynôme sont du même degré par rapport à ces lettres.

$$2x^3 - 4xy^2 + 3x^2y$$

est un trinôme homogène du troisième degré en x et y.

117. Polynômes ordonnés. — 1° Considérons un polynôme *à une seule variable :* $3x^2 - 2x + 4 - 5x^3$.

Il est naturel d'écrire les termes de ce polynôme de façon que leurs degrés aillent soit en augmentant soit en diminuant.

$$4 - 2x + 3x^2 - 5x^3 \quad \text{ou} \quad -5x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

Dans le premier cas le *polynôme est ordonné par rapport aux puissances croissantes de x* et dans le second cas *il est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x.*

2° On ordonne par rapport à une des lettres *les polynômes à plusieurs variables* surtout lorsque cette lettre joue un rôle particulier.

Ainsi le polynôme $ax^2 + 3x + c - 2x^2 + 2bx - 5$

s'écrit : $ax^2 - 2x^2 + 2bx + 3x + c - 5$

ou $(a - 2)x^2 + (2b + 3)x + c - 5.$

Lorsque a, b et c sont considérés comme des constantes, ce polynôme est un *trinôme du second degré* en x ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x. Le coefficient de x^2 est $(a - 2)$, celui de x est $(2b + 3)$ et le terme indépendant de x est $(c - 5)$.

3° Le polynôme $2x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - y^3$ est un polynôme homogène du troisième degré en x et y ordonné simultanément par rapport aux puissances décroissantes de x et par rapport aux puissances croissantes de y.

118. Polynôme identique à zéro. — ***Un polynôme est identique à zéro lorsque les coefficients de tous ses termes sont nuls.***

La valeur numérique d'un tel polynôme est nulle quelles que soient les valeurs numériques des variables. Nous admettrons que, réciproquement, si la valeur numérique d'un polynôme est nulle quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, ce polynôme est identique à zéro.

Notons qu'une polynôme identique à zéro n'a pas de degré déterminé. On le désigne par 0.

119. Somme de plusieurs polynômes. — ***La somme de plusieurs polynômes est équivalente au polynôme formé par tous les termes de ces polynômes.***

En effet l'expression algébrique :

$$(a^2 + 5a - 7b) + (6a^2 + 3b - 2) + (-4a^2 + 5b - 3)$$

est (n° 32) équivalente à :

$$a^2 + 5a - 7b + 6a^2 + 3b - 2 - 4a^2 + 5b - 3.$$

Nous pouvons ensuite réduire les termes semblables, ce qui donne :

$$3a^2 + 5a + b - 5.$$

120. Propriétés des sommes de polynômes. — L'addition est une *loi de composition interne* pour l'ensemble des polynômes A, B, C ... et :

1° L'addition est *commutative :* $A + B = B + A$.

2° L'addition est *associative :* $A + B + C = A + (B + C)$.

3° Tout polynôme identique à zéro est l'*élément neutre* de l'addition :

$$(x^2 + 3x - 7) + (0x^2 + 0x + 0) = x^2 + 3x - 7.$$

4° Tout polynôme A a un *symétrique* A′ tel que A + A′ soit identique à zéro; il s'obtient en changeant de signe tous les termes de A :

$$(3a^2 + 6a - 7b) + (-3a^2 - 6a + 7b) = 0.$$

Il en résulte (n° 8) que l'ensemble des polynômes a une structure de *groupe commutatif* par rapport à l'addition.

121. Différence de deux polynômes. — *Etant donnés deux polynômes A et B il existe un seul polynôme C, tel que : $B + C = A$. Ce polynôme se nomme différence des polynômes A et B et s'écrit $A - B = C$.*

En effet, soit B′ le symétrique du polynôme B :

$$B + C = A \Longrightarrow B' + B + C = B' + A$$

soit : $(B' + B) + C = A + B'$ ou $C = A + B'$.

Vérification : $C + B = A + B' + B = A + (B' + B) = A$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}(3\,a^2 + 6\,a - 7\,b) - (2\,a^2 - 4\,a + 3\,b) &\\ &= (3\,a^2 + 6\,a - 7\,b) + (-2\,a^2 + 4\,a - 3\,b)\\ &= a^2 + 10\,a - 10\,b\end{aligned}$$

Notons que :

$$\boxed{A - B = C \Longleftrightarrow A = B + C}$$

122. Somme algébrique de polynômes à une seule variable.

Il est bon dans ce cas, d'ordonner ces polynômes, en les complétant par des points mis à la place des termes dont les degrés sont manquants. On peut alors les disposer, l'un au-dessous de l'autre, en faisant correspondre verticalement les termes semblables.

Exemple. — Soient les polynômes :

$A = 2 - 5\,x + 4\,x^3 \quad B = 6 - 8\,x + 4\,x^2 \quad C = x^2 - 2\,x^3 + 3 + 2\,x.$

Pour calculer la somme algébrique $S = A - B + C$, on écrit :

$$\begin{array}{rcrrrr} A & = & 4\,x^3 & \bullet & -5\,x & +2\\ -B & = & \bullet & -4\,x^2 & +8\,x & -6\\ C & = & -2\,x^3 & +x^2 & +2\,x & +3\\ \hline S & = & 2\,x^3 & -3\,x^2 & +5\,x & -1\end{array}$$

La réduction des termes semblables est immédiate et on obtient un résultat ordonné.

123. Produit de polynômes. — 1° *Le produit de deux polynômes est équivalent au polynôme obtenu en multipliant chaque monôme de l'un par chaque monôme de l'autre et en faisant la somme des monômes obtenus.*

2° *Le produit de plusieurs polynômes s'obtient en effectuant le produit des deux premiers, puis celui du polynôme obtenu par le troisième et ainsi de suite.*

Exemples :

1° $(a^2x^3 - 5\,x + 3\,a)(-2\,a^3x) = -2\,a^5x^4 + 10\,a^3x^2 - 6\,a^4x.$

2° $(3x^2 - 2x + y)(4x - 5y) = 12x^3 - 8x^2 + 4xy - 15x^2y + 10xy - 5y^2$
$= 12x^3 - 15x^2y - 8x^2 + 14xy - 5y^2.$

3° $(2x + y)(x + 3y)(x - y) = (2x^2 + 7xy + 3y^2)(x - y)$

soit : $2x^3 + 7x^2y + 3xy^2 - 2x^2y - 7xy^2 - 3y^3$

ou : $2x^3 + 5x^2y - 4xy^2 - 3y^3.$

4° Dans le cas de polynômes à une variable, il est commode d'opérer comme ci-dessous :

$$
\begin{array}{rcrrrrrr}
A & = & 3x^3 & \bullet & +\ 5x & -\ 2 & & \\
B & = & & 2x^2 & -\ 4x & +\ 3 & & \\
\hline
A \times 2x^2 & = & 6x^5 & \bullet & +\ 10x^3 & -\ 4x^2 & & \\
A \times (-4x) & = & & -\ 12x^4 & \bullet & -\ 20x^2 & +\ 8x & \\
A \times 3 & = & & & +\ 9x^3 & \bullet & +\ 15x & -\ 6 \\
\hline
A.B & = & 6x^5 & -\ 12x^4 & +\ 19x^3 & -\ 24x^2 & +\ 23x & -\ 6
\end{array}
$$

On obtient directement le résultat réduit et ordonné.

124. Remarque. — Le terme de plus haut degré du produit est le produit des termes de plus haut degré de chaque facteur. Le terme de plus faible degré est de même, le produit des termes de plus faible degré. Ces deux termes n'ayant pas de terme semblable subsistent après la réduction, ce qui permet d'affirmer que :

1° *Le produit de deux ou plusieurs polynômes est un polynôme.*

2° *Le degré du produit est la somme des degrés de chacun des facteurs.*

3° Si l'un des facteurs d'un produit est identique à zéro, il en est de même du produit. Réciproquement, si un produit de polynômes est identique à zéro, l'un des polynômes est identique à zéro, sinon le produit ne serait pas identique à zéro :

Pour qu'un produit de polynômes soit identique à zéro, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit identique à zéro.

125. Propriétés des produits de polynômes. — La multiplication est une loi de composition interne pour l'ensemble des polynômes. On peut vérifier que :

1° la multiplication est *commutative* : AB = BA;

2° *elle est associative* : ABC = A (BC);

3° le nombre 1 est l'*élément neutre* de la multiplication : A × 1 = A;

4° *la multiplication est distributive par rapport à l'addition :*

$$A\ (B + C) = (B + C) = AB + AC.$$

Remarque. — L'ensemble des polynômes n'a pas une structure de groupe par rapport à la multiplication car étant donné un polynôme A, il n'existe pas de polynôme A′ tel que AA′ = 1.

126. Anneau des polynômes. — On dit qu'un ensemble E a une structure d'anneau lorsque :

1° *Cet ensemble a une structure de groupe commutatif par rapport à l'addition.*

2° *La multiplication est une loi la composition interne et associative pour cet ensemble.*

3° *La multiplication est distributive par rapport à l'addition.*

Ces conditions sont remplies pour l'ensemble des polynômes qui constituent donc un anneau.

EXERCICES

— Calculer les valeurs numériques :

206. $3a^2x^3 - 12ax - 8$ pour $a = +4$ et $x = -\frac{1}{2}$.

207. $\frac{x^2}{8} - \frac{8y^3}{27} + xy\left(\frac{2y}{3} - \frac{x}{2}\right)$ pour $x = +5$ et $y = +\frac{3}{4}$.

208. $\dfrac{\left(\frac{5a}{2}\right)^2 - \left(\frac{4b}{3}\right)^2}{\left(\frac{5}{2}a - \frac{4b}{3}\right)^2 + 10ab}$ pour $a = -\frac{2}{3}$ et $b = -2$.

209. $\dfrac{-b + \sqrt{b^3 - 4ac}}{2a}$ pour $a = 3$, $b = -53$ et $c = 34$.

210. $\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ pour $a = 39$, $b = 40$, $c = 25$ et $p = 52$.

211. Réduire le monôme : $4x^3(-3)y^2\left(-\frac{5}{6}\right)a^2x^3y^3$.

Calculer sa valeur pour $a = \frac{1}{2}$, $x = -4$ et $y = -\frac{3}{2}$.

212. Soit le monôme : $3a^2(-4)x^3\left(\frac{1}{2}\right)ax^3y$.

1° Réduire ce monôme et donner son dégré par rapport à a, b, x et y, puis son degré par rapport à l'ensemble des lettres.

2° Calculer sa valeur numérique pour : $a = -3$, $x = \frac{2}{3}$ et $y = -8$.

— Effectuer les produits suivants :

213. $\left(\frac{3}{5}a^2b^2x\right)\left(\frac{2}{3}a^3b^5y^2\right)$

214. $\left(\frac{3}{5}a^3x^5\right)\left(-\frac{4}{3}ax^3y\right)\left(\frac{5}{2}ax^2y\right)$

215. $\left(-\frac{7}{2}a^2b^3x\right)^2$

216. $\left(-\frac{2}{3}x^4y^2z^3\right)^3$

217. $(4ab^2x^7y^5)^3$

218. $(-a^3b^2c)^3$.

— Réduire et ordonner les polynômes suivants :

219. $\frac{3x^2}{2} - \frac{5}{4}x + 2x^3 - 5 + \frac{x}{4} - \frac{4x^2}{8} - x^3$.

220. $4x^2 - \frac{7}{2} + \frac{2}{5}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - 3 + \frac{3}{2}x^3 + 5 - 3x.$

221. $\frac{2}{5}ab^2 + 3b^2 - 4a^2b + \frac{5}{2}ab^2 + \frac{3}{2}a^3 - a^3 + 2a^2b,$

222. $2x^2 - x^3 + cx + 4 + ax^3 - 3x + bx^2.$

223. Soient les polynômes :

$$A = x^2 + 2x + 3 \quad B = 2x^2 + 3x - 1 \quad C = 3x^2 - 5x + 4.$$

Former les polynômes :

$$A + B + C, \quad B + C - A, \quad C + A - B \quad \text{et} \quad A + B - C.$$

224. Soient les polynômes :

$$A = 4a^2 - 5ab + 3b^2 \quad B = 3a^2 + 2ab + b^2 \quad C = -a^2 + 3ab + 2b^2.$$

Former les polynômes : $A - B - C$, $B - C - A$ et $C - A - B$.

225. On considère les polynômes :

$P = x^4 + 2x^2 + 1$ $\qquad Q = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1.$

$R = 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2$ $\qquad S = -4x^3 + 4x.$

Former les polynômes :

$$(P + Q) - (R + S), \quad (P - Q) + (R - S) \quad \text{et} \quad (P - Q) - (R - S).$$

— Effectuer les produits suivants :

226. $5x^2(4x - 1)$

227. $\left(\frac{3}{2}a^2b^4 - \frac{5}{4}ab^3 + 3a^2\right)\left(-\frac{4}{3}a^2b^3\right).$

228. $7x^3(2x + 5).$

229. $(4a^2x^4 - 15ax^2 + 10a^3)(3a^2x^3).$

230. $(5x + 6y - 4)(5x - 6y)$

231. $(2a^4b - 3a^2b^2 + 4b^3)(2a^3 + 3b).$

— Effectuer les produits suivants, et ordonner les résultats.

232. $(6x^2 + 4x^3 + 9x)(2x - 3).$

233. $(x^2 + 9)(2x + 6)(3 - x).$

234. $(x^3 + 1 - 3x - 3x^2)(x + 1).$

235. $(12x + 3)(2x - 1)^2.$

236. $(5 - x^3 + 3x^2 - 2x)^2.$

237. $(4x^2 + 1)(3 - 6x)(2x + 1).$

238. $(4x^2 - 3x + 2)^3.$

239. $(2x^3 - 1 + 3x)(x^2 - 5 + 2x).$

240. Déterminer m pour le polynôme en x :

$$(m - 1)x^2 + (m^2 - 1)x + m^2 - 3m + 2$$

soit identique à zéro.

241. Déterminer a et b pour que le polynôme en x :

$$(a - 2)x^2 + (b + 3)x + 3a + 2b$$

soit identique à zéro.

242. 1° On suppose que le polynôme : $f(x) = ax + b$ est nul pour tout x. En faisant $x = 0$ puis $x = 1$, montrer qu'il est identique à zéro.

2° On admet que si un polynôme en x de degré $n - 1$ est nul pour tout x, il est identique à zéro. Montrer qu'il en est de même pour le polynôme de degré n :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

A cet effet on formera l'expression : $f(2x) - 2^n f(x)$.

3° En déduire que si un polynôme en x est nul pour tout x, il est identique à zéro.

IDENTITÉS REMARQUABLES

127. Définition. — ***Une identité est l'égalité de deux expressions algébriques équivalentes.***

Une identité est donc vérifiée quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres qui y figurent. Ces lettres pourront d'ailleurs représenter indifféremment des nombres ou des expressions algébriques.

128. Carré de la somme ou de la différence de deux termes. — Soit à calculer $(a + b)^2$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2.$$

Donc :

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad (1)$$

En changeant b en $-b$ on obtient :

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad (2)$$

Applications : 1° $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$.

2° $\left(3x^2 - \frac{2}{5}y^3\right)^2 = 9x^4 - \frac{12}{5}x^2y^3 + \frac{4}{25}y^6$.

129. Produit de la somme de deux termes par leur différence.

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ba - b^2.$$

Donc :

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2} \qquad (3)$$

EXEMPLES. — 1° $(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$.

2° $\left(\frac{2}{3}x^2 - 4y\right)\left(\frac{2}{3}x^2 + 4y\right) = \frac{4}{9}x^4 - 16y^2$.

3° $(a + b - c)(a - b + c) = a^2 - (b - c)^2$.

130. Carré d'une somme de plusieurs termes. — Soit à calculer $(a + b + c)^2$.

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c)$$
$$= (a^2 + ab + ac) + (ba + b^2 + bc) + (ca + cb + c^2).$$

Soit :

$$\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc} \qquad (4)$$

Cette formule se généralise pour quatre termes ou plus.

Le carré d'une somme comprend :

1° *la somme des carrés de chaque terme;*

2° *la somme des double produits des termes pris deux à deux.*

On écrit symboliquement :

$$\boxed{(a + b + c + d)^2 = \Sigma a^2 + \Sigma 2ab} \qquad (5)$$

Σa^2 se lit « sigma de a^2 » et représente la somme de tous les carrés tels que a^2.

$\Sigma 2ab$ représente de même la somme de tous les doubles produits analogues à $2ab$. Afin de ne pas en oublier on associe chaque terme de la somme à chacun des termes suivants.

Exemples :

1° $(2x - 3y + 5z)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 20xz - 30yz$.

2° $(a - b + c - d)^2 =$
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$.

131. Cube d'une somme ou d'une différence de deux termes.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3.$$

D'où :

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \qquad (6)$$

En changeant b en $-b$ on obtient :

$$\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \qquad (7)$$

EXEMPLES : 1° $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

2° $(2x + 5y)^3 = 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$.

132. Somme et différence de deux cubes. — La formule (3) peut s'écrire :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Elle se généralise de la façon suivante. Nous avons :

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = \left|\begin{array}{l} a^3 + a^2b + ab^2 \\ \quad - a^2b - ab^2 - b^3 \end{array}\right| = a^3 - b^3$$

D'où :

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)} \qquad (8)$$

et en changeant b en $-b$:

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)} \qquad (9)$$

133. Généralisation. — On démontrerait de même que :

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

et d'une façon générale quel que soit l'entier n :

$$\boxed{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})} \qquad (10)$$

134. Autres identités. — Les identités précédentes sont d'un emploi courant en calcul algébrique. Il importe donc de pouvoir les utiliser sans hésitation. Les suivantes, moins importantes, pourront être vérifiées à titre d'exercice.

1° $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

2° $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

3° $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

4° $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

5° $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

6° $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$

7° $(a + b + c)^3 = \Sigma a^3 + \Sigma 3a^2b + 6abc$

8° $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(b + c)(c + a)(a + b)$

9° $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$.

QUOTIENTS EXACTS

135. Définition. — ***Si trois polynômes ou monômes* A, B, C *sont tels que* A = BC *on dit que* C *est le quotient exact de* A *par* B.**

On écrit : $\frac{A}{B} = C \Longleftrightarrow A = BC.$

On dit aussi que le polynôme (ou monôme) A est divisible par le polynôme (ou monôme) B.

136. Quotient exact d'un monôme par un monôme.

L'égalité : $3\,a^4x^3y = (2\,a^3xy)\left(\frac{3}{2}\,ax^2\right)$ montre que :

$$\frac{3\,a^4x^3y}{2\,a^3xy} = \frac{3}{2}\,ax^2 = \frac{3}{2}\,a^{4-3}x^{3-1}y^{1-1}$$

De la règle de la multiplication des monômes il résulte que :

Pour qu'un monôme* A *soit divisible par un monôme* B, *il faut et il suffit que le monôme* A *contienne toutes les lettres de* B *avec des exposants au moins égaux.

Dans ces conditions, le monôme quotient a pour coefficient le quotient des coefficients du dividende et du diviseur et l'exposant d'une lettre dans le quotient est la différence de ses exposants dans le dividende et dans le diviseur.

137. Quotient exact d'un polynôme par un monôme.

L'égalité : $6\,a^3x^2y - 5\,a^3x^4 + 2\,a^4x^2y = 2\,a^3x^2\left(3\,y - \frac{5}{2}\,x^2 + ay\right)$

montre que :

$$\frac{6\,a^3x^2y - 5\,a^3x^4 + 2\,a^4x^2y}{2\,a^3x^2} = 3y - \frac{5}{2}\,x^2 + ay.$$

Le quotient est un polynôme qui s'obtient en divisant chaque terme du dividende par le monôme diviseur. On en déduit que :

Pour qu'un polynôme soit divisible par un monôme, il faut et il suffit que tous ses termes soient divisibles par ce monôme.

Remarque. — L'égalité :

$$6\,x^3 + 3\,x^2 + 8\,x + 4 = (2\,x + 1)\,(3\,x^2 + 4)$$

montre que

$$\frac{6x^3 + 3x^2 + 8x + 4}{2x + 1} = 3x^2 + 4.$$

Nous voyons que le quotient exact de deux polynômes est parfois un polynôme ou un monôme.

FACTORISATION DES POLYNÔMES

138. Définition. — ***Factoriser un polynôme, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs (monômes et polynômes).***

Comme le degré du polynôme est la somme des degrés de chacun des facteurs le nombre de ceux-ci est toujours limité.

139. Mise en facteur d'un monôme dans un polynôme. — Soit le polynôme

$$a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{2}{3}a^4x^2y.$$

Tous les termes sont divisibles par le monôme a^2x. Nous pouvons donc écrire :

$$a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{2}{3}a^4x^2y = a^2x\left(axy - \frac{5}{2}ax^3 + \frac{2}{3}a^2xy\right).$$

On dit que *le monôme a^2x a été mis en facteur commun* dans le polynôme. Tout monôme mis en facteur commun doit être un diviseur de chacun des termes du polynôme; il en résulte que :

Le monôme de plus haut degré pouvant être mis en facteur dans un polynôme est formé des lettres communes à tous les termes du polynôme, chacune d'elles étant affectée de son plus petit exposant.

Le coefficient de ce monôme est arbitraire. On peut, par exemple, s'arranger pour faire disparaître les dénominateurs à l'intérieur des parenthèses. Ainsi dans le polynôme précédent, nous pouvons mettre en facteur $\frac{1}{6}a^3x^2$. Nous obtenons :

$$a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{2}{3}a^4x^2y = \frac{1}{6}a^3x^2(6y - 15x^2 + 4ay).$$

140. Autres procédés de décomposition. — Après avoir, dans un polynôme, mis en facteur le monôme de plus haut degré possible, on pourra essayer l'un des procédés suivants de décomposition.

141. Groupement des termes deux à deux. — Ce procédé s'applique aux polynômes de quatre ou six termes que l'on essaye de ramener à un produit d'un binôme par un binôme ou un trinôme

1° $ax + by + ay + bx = ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$
$= (a + b)(x + y)$.

2° $x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a)$
$= (x - a)(x - b)$.

3° $ax + by + a - bx - ay - b = x(a - b) + y(b - a) + a - b =$
$= (a - b)(x - y + 1)$.

142. Carré ou cube d'un binôme. — On voit immédiatement que :

1° $x^2 - 14x + 49 = x^2 - 2.7.x + 7^2 = (x - 7)^2$.

2° $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3.2.x^2 + 3.2^2.x + 2^3 = (x + 2)^3$.

143. Différence de deux carrés. — L'un des procédés les plus féconds consiste à ramener l'expression à décomposer à la forme $A^2 - B^2$ qui est égale au produit $(A + B)(A - B)$. Ainsi :

1° $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$.

2° $9a^2x^4 - 4b^2 = (3ax^2)^2 - (2b)^2 = (3ax^2 + 2b)(3ax^2 - 2b)$.

3° $x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1^2$
$= (x - 3 + 1)(x - 3 - 1) = (x - 2)(x - 4)$.

4° $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$.

5° $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$
$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

144. Généralisation. — On peut utiliser également les identités :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

et d'une façon générale

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}).$$

EXEMPLES : 1° $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.
2° $x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.
3° $x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$.

145. Application. — Soit à décomposer le polynôme

$$P = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

Ce polynôme prend pour $x = 2$ la valeur zéro. On vérifie que :

$$0 = 2^3 + 2.2^2 - 5.2 - 6.$$

Retranchons terme à terme les deux égalités précédentes, nous obtenons :

$$P = (x^3 - 2^3) + 2(x^2 - 2^2) - 5(x - 2).$$

Sous cette forme, on voit que P est égal à une somme de termes tous divisibles par $x - 2$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} P &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 2(x - 2)(x + 2) - 5(x - 2) \\ &= (x - 2)[x^2 + 2x + 4 + 2(x + 2) - 5]. \end{aligned}$$

Soit : $$P = (x - 2)(x^2 + 4x + 3).$$

Autrement dit, le polynôme P qui s'annule pour $x = 2$ est divisible par $x - 2$. Plus généralement :

Si un polynôme s'annule pour $x = a$, ***il est divisible par*** $x - a$.

— On peut utiliser à nouveau cette propriété en remarquant que P s'annule pour $x = -1$. Comme $x - 2$ n'est pas nul pour cette valeur de x, c'est $x^2 + 4x + 3$ qui est égal à 0 (n° 35). On obtient de même :

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3).$$

D'où finalement : $$P = (x - 2)(x + 1)(x + 3).$$

EXERCICES

— Vérifier les identités suivantes :

243. $(a + b)^3 + 2(a^3 + b^3) = 3(a + b)(a^2 + b^2)$.

244. $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(b - c)(c - a)(a - b)$.

245. $(a + b + c)(bc + ca + ab) = (b + c)(c + a)(a + b) + abc$.

246. $(ax + mby)^2 - m(ay + bx)^2 = (a^2 - mb^2)(x^2 - my^2)$.

247. $(a^2 + mb^2)^2 - 4ma^2b^2 = (a^2 - mb^2)^2$.

248. $(a^3 + 3mab^2)^2 - m(3a^2b + mb^3)^2 = (a^2 - mb^2)^3$.

249. $(ax + by + cz)^2 + (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$.

250. $(ab + bc + ca)^2 + (a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

251. $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc$.

252. $(a + b + c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 + (a + b - c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

253. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) + (b - c)(c - a)(a - b) = 0$.

254. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) + (a + b + c)(b - c)(c - a)(a - b) = 0$.

255. *Triangle de Pascal.* — On calcule les puissances successives de $(a + b)$ et on établit le tableau des coefficients des résultats ordonnés :

	Coefficients :
$(a + b)^1 = a + b$	1 1
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
....	....

Montrer que chaque coefficient du tableau triangulaire obtenu est égal à la somme de celui qui est placé au-dessus de lui et de celui qui est placé à la gauche de ce dernier. En déduire les lignes suivantes du tableau et établir les identités donnant $(a + b)^5$; $(a + b)^6$ ..

— Calculer les expressions suivantes :

256. $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 - 2(6xy)$.

257. $(x + y)(x + 1)(y + 1) - x(y + 1)^2 - y(x + 1)^2$.

258. $(3x - 2y + 1)(6xy - 3x + 2y) - (3x - 2y)(3x + 1)(2y - 1)$.

259. $(x + 2y + 3z)(2y + 3z - x)(3z + x - 2y)(x + 2y - 3z) + (4y^2 + 9z^2 - x^2)^2$.

260. $(2x + 3y + z)^2 + (3y + z - 2x)^2 + (z + 2x - 3y)^2 + (2x + 3y - z)^2$.

261. $(5x - 3y + 2z)^3 + 3(5x - 3y)(5x + 2z)(3y - 2z)$.

262. $(7a + 5b + 4c)^2 + (4b - 5c)^2 + (7c - 4a)^2 + (5a - 7b)^2$.

263. $(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)$.

264. $(a - b + c)^3 + (a + b - c)^3 + 4a(a^2 + 3bc)$.

265. $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2)$.

266. $(2x + 4y - z)^2 - (x - y + 4z)^2 - 2(x + y + z)(x + 7y - 7z)$.

267. Former le carré du polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Peut-on déterminer a, b, c et d de façon à obtenir :

$$9x^6 - 24x^5 + 46x^4 - 52x^3 + 41x^2 - 20x + 4.$$

268. Soit $P = a + b + c + d$, $Q = a + b - c - d$, $R = a - b + c - d$ et $S = a - b - c + d$.

Calculer l'expression : $PQ(P^2 + Q^2) - RS(R^2 + S^2)$.

269. On pose $a + b = S$ et $ab = P$.

1° Calculer en fonction de S et de P les expressions $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ et $a^4 + b^4$.

2° Calculer pour $S = 1$ l'expression $6(a^2 + b^2)^2 - 3(a^4 + b^4) - 2(a^3 + b^3)^2$.

270. On suppose $A = (x - y)^2$, $B = 4xy$, $D = -(x + y)^2$.

Vérifier les identités : 1° $A + B + C = 0$.

2° $A^2 - BC = B^2 - CA = C^2 - AB$ 3° $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$.

Montrer que la première d'entre elles entraîne les suivantes.

271. On prend sur un axe d'origine O, les points A, B, C et M d'abscisses a, b, c et x.

1° Démontrer la relation $\overline{OA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{OB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{OC}^2 \cdot \overline{AB} = -\overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}$.

2° En déduire une relation analogue en remplaçant O par M et la valeur en fonction de a, b, et c de l'expression :

$$(x - a)^2(b - c) + (x - b)^2(c - a) + (x - c)^2(a - b).$$

272. Les données étant les mêmes qu'à l'exercice précédent :

1° Démontrer la relation :

$$\overline{OA}^3 \cdot \overline{BC} + \overline{OB}^3 \cdot \overline{CA} + \overline{OC}^3 \cdot \overline{AB} = -\overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

2° Utiliser la relation analogue en remplaçant O par M pour calculer l'expression :

$$(x - a)^3(b - c) + (x - b)^3(c - a) + (x - c)^3(a - b).$$

273. On désigne par p la demi-somme des trois nombres a, b et c. Démontrer que :

1° $p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

2° $16p(p - a)(p - b)(p - c) = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

274. Soient : $x = 7a + 3b + 6c$, $y = 6a + 2b + 6c$ et $z = 3a + 3b + 2c$.

1° Calculer l'expression $y^2 + z^2 - x^2$.

2° Montrer que si a, b, c sont les côtés d'un triangle rectangle (d'hypoténuse a) il en est de même de x, y et z.

275. Reprendre l'exercice précédent pour :

$x = 9a + 4b + 8c, \quad y = 4a + b + 4c, \quad z = 8a + 4b + 7c.$

276. Montrer que lorsque a, b et c satisfont aux relations suivantes, le triangle de côtés a, b et c est rectangle :

1° $a = x^2 + y^2 \quad b = x^2 - y^2 \quad c = 2xy.$
2° $a = 5(2x^2 + 2xy + y^2) \quad b = 8x^2 + 2xy - 3y^2 \quad c = 6x^2 + 14xy + 4y^2.$

277. 1° Démontrer les relations

a) $(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)^2 + (\mathrm{A}y - \mathrm{B}x)^2 = (\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)(x^2 + y^2).$
b) $(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)^2 - (\mathrm{A}y + \mathrm{B}x)^2 = (\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2)(x^2 - y^2).$

2° En déduire les identités suivantes :

a) $[(a^2 - b^2)x + 2aby]^2 + [(a^2 - b^2)y - 2abx]^2 = (a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2).$
b) $[(a^2 + b^2)x + 2aby]^2 - [(a^2 + b^2)y + 2abx]^2 = (a^2 - b^2)^2(x^2 - y^2).$
c) $[(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y]^2 - [(a^2 + b^2)y + (a^2 - b^2)x]^2 = 4a^2b^2(x^2 - y^2).$

— Calculer les quotients de :

278. $\frac{3}{5}a^5x^7y^3$ par $\frac{4}{5}a^3x^2y$

279. $-\frac{12}{25}a^4b^3x^5$ par $\frac{4}{5}a^4bx^2.$

280. $\frac{10}{7}a^3b^5x^4y^2$ par $-\frac{2}{21}a^3x^2y$

281. $-\frac{9}{20}a^7b^3x^6y^4$ par $-\frac{3}{5}a^3bx^4y^3.$

282. $15x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 3x^2$ par $3x^2.$

283. $\frac{15}{2}a^2b^3x^4 - \frac{10}{3}a^3b^2x^3 + 5a^2bx^2$ par $\frac{5}{6}a^2bx^2.$

284. $\frac{3}{5}x^3y^4z^2 - \frac{21}{4}x^2y^5z + \frac{9}{10}x^4y^2z^3$ par $\frac{3}{20}x^2y^2z.$

— Mettre en facteur le monôme de plus haut degré possible dans les polynômes :

285. $15a^4x^3y^2 - 12a^2x^5y^3 + 21a^3x^3y^5 - 9a^2x^3y^5.$

286. $5a^2b^4x^4 + 15ab^2x^5 - 10a^3b^2x^3 + 25a^5b^3x^3.$

287. $\frac{6}{5}a^2b^6x^3y^5 - \frac{7}{10}a^3b^5x^4y^4 + \frac{4}{15}a^4b^4y^7 - \frac{5}{6}a^5b^3x^2y^3.$

— Décomposer en produit de deux facteurs :

288. $ax - by + ay - bx.$

289. $x^2 - (a + b)xy + aby^2.$

290. $a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1).$

291. $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2).$

292. $(xy + ab)^2 + (ay - bx)^2.$

293. $(ax - mby)^2 + m(ay + bx)^2.$

294. $64x^4 - 49y^2.$

295. $25a^4x^2 - 16b^2y^4.$

296. $x^2 - 14x + 33.$

297. $x^4 - 3x^2 + 1.$

298. $125x^3 - 27y^3.$

299. $(3x + 7)^2 - (2x + 9)^2.$

300. $64a^3x^9 + b^3y^6.$

301. $(2x + 3y)^2 - 4(2x + 3y).$

— Décomposer en produit de trois ou quatre facteurs :

302. $x^4 - 1.$

303. $a^2(x^2 + b^4) - b^2(x^2 + a^4).$

304. $16x^4 - 81y^4.$

305. $(xy - 1)^2 - (x - y)^2.$

306. $x^4 - 5x^2 + 4$.

307. $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$.

308. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

309. $(a^2x^2 + b^2y^2) - (b^2x^2 + a^2y^2)$.

310. $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 4(ab + 2)^2$.

311. $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2$

312. Mettre $x^4 + 4$ sous forme d'un produit de deux facteurs de second degré. Ajouter et retrancher $4x^2$.

Application : Mettre $x^8 - 16$ sous forme d'un produit de quatre facteurs du second degré.

313. 1° Calculez les expressions

$$A = 90(a^2 + b^2 + c^2) - (7a + 5b - 4c)^2 - (4b + 5c)^2 - (4a + 7c)^2.$$

$$B = (5a + 3b - 8c)^2 - 80(a^2 - b^2 + c^2) - (8b - 3c)^2 + (8a + 5c)^2.$$

2° Montrer que A et B sont les carrés de deux binômes.

3° Calculer la différence A — B et la mettre sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

314. On considère l'expression :

$$A = (x + y + z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3 - (x + y - z)^3.$$

1° Montrer que A est nulle pour $x = 0$, quels que soient y et z et de même pour $y = 0$ et pour $z = 0$. En déduire que $A = mxyz$, dans laquelle m est un facteur numérique que l'on calculera en faisant $x = y = z = 1$.

2° Vérifier le résultat obtenu en appliquant la formule :

$$(a + b + c)^3 = \Sigma a^3 + \Sigma\, 3a^2b + 6abc.$$

315. Calculer pour $x = 5$ la valeur numérique du polynôme

$$2x^2 - 7x - 15$$

et le décomposer en un produit de facteurs du 1er degré.

— Reprendre l'exercice précédent pour :

316. $3x^2 - 13x + 4$ pour $x = 4$.

317. $2x^3 + 7x^2 + 3x$ pour $x = -3$.

318. $4x^3 - 28x^2 - 25x + 175$ pour $x = 7$.

319. Soit le polynôme $A = 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18$.

1° Calculer sa valeur pour $x = 2$ et pour $x = 3$.

2° En déduire que $A = (ax + b)(x - 2)(x - 3)$, a et b étant des coefficients que l'on calculera.

320. Montrer que l'on peut mettre $b - c$ en facteur dans l'expression

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$$

et achever la décomposition en un produit de 3 facteurs du 1er degré.

321. Montrer que l'expression : $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ s'annule pour $a = b$, $b = c$, $c = a$ et $a = -(b + c)$. En déduire qu'elle peut s'écrire sous la forme $m(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$ dans laquelle m est un coefficient que l'on déterminera en faisant $a = 2$, $b = 1$ et $c = 0$.

FRACTIONS RATIONNELLES

146. Définition. — ***Une fraction rationnelle est une expression algébrique de la forme $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ où* A *et* B *sont des monômes ou des polynômes.***

Exemples : $\frac{2a}{bx^2}$; $\frac{3ax}{2x+b}$; $\frac{2x+5}{3x^2-5x}$

La valeur numérique d'une fraction rationnelle est le quotient exact des valeurs numériques de ses deux termes. Elle n'existe que si le dénominateur n'a pas une valeur numérique nulle. Ainsi $\frac{2x}{x-5}$ n'a pas de sens pour $x = 5$.

Dans ce qui suit, nous supposerons que les valeurs des variables sont choisies de telle sorte que les fractions rationnelles soient définies. Deux fractions rationnelles sont équivalentes si leurs valeurs numériques sont égales, quelles que soient les valeurs des variables. Dans ces conditions, toutes les propriétés des rapports de nombres relatifs s'appliquent aux fractions rationnelles. En particulier :

$$\frac{A}{1} = A, \qquad \frac{A}{B} = \frac{C}{B} \iff A = C \qquad \text{et} \qquad \frac{0}{A} = 0.$$

147. Propriété fondamentale. — ***Lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise les deux termes d'une fraction rationnelle par un même polynôme on obtient une fraction équivalente à la première.***

Les fractions $\frac{A}{B}$ et $\frac{AC}{BC}$ sont en effet équivalentes. Ainsi :

1° $\frac{2x}{x-2} = \frac{2x(x-3)}{(x-2)(x-3)}$ $\qquad (x \neq 2 \text{ et } x \neq 3)$.

2° $\frac{x^3}{x^2-5x} = \frac{x^3}{x(x-5)} = \frac{x^2}{x-5}$ $\qquad (x \neq 0 \text{ et } x \neq 5)$.

Il en résulte que :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff \frac{AD}{BD} = \frac{BC}{BD} \iff AD = BC.$$

148. Simplification d'une fraction rationnelle. — Pour simplifier une fraction ordinaire on divise ses deux termes par un diviseur commun. On opère de même pour une fraction rationnelle. Afin d'apercevoir les facteurs communs aux deux termes, il faut donc commencer par décomposer ces termes en facteurs.

EXEMPLES :

1° $\dfrac{144}{252} = \dfrac{2^4.3^2}{2^2.3^2.7} = \dfrac{2^2 \times 2^2.3^2}{7 \times 2^2.3^2} = \dfrac{2^2}{7} = \dfrac{4}{7}.$

2° $\dfrac{2a^3xy^2}{3x^3y^2} = \dfrac{2a^3 \times xy^2}{3x^2 \times xy^2} = \dfrac{2a^3}{3x^2}.$

3° $\dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \dfrac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{3x}{x+2}.$

4° $\dfrac{x^3 - 1}{3x - 3} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(x-1)} = \dfrac{x^2+x+1}{3} = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}.$

On voit, d'après le dernier exemple, qu'une fraction rationnelle peut se réduire à un polynôme.

149. Réduction au même dénominateur. — Lorsqu'il s'agit de fractions ordinaires, ou de fractions à dénominateurs numériques, il suffit de prendre pour dénominateur un multiple commun à tous les dénominateurs. On prend de préférence leur plus petit commun multiple (P.P.C.M.). On procède d'une façon analogue pour les fractions rationnelles.

EXEMPLES :

1° $\dfrac{5}{56}$, $\dfrac{4x}{21}$ et $\dfrac{3x-1}{12}$.

Soit : $\dfrac{5}{2^3.7}$, $\dfrac{4x}{3.7}$ et $\dfrac{3x-1}{2^2.3}$.

Le P. P. C. M. des dénominateurs est : $2^3.3.7 = 168$.

On obtient : $\dfrac{15}{168}$ $\dfrac{32x}{168}$ et $\dfrac{14(3x-1)}{168}$

2° $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$, $\dfrac{3x+3}{x^3+2x^2+x}$ et $\dfrac{2x}{x^3}$.

Simplifions d'abord ces fractions :

$$\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}, \qquad \frac{3(x+1)}{x(x+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{2x}{x^3}.$$

Soit
$$\frac{x}{x+1}, \qquad \frac{3}{x(x+1)} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{x^2}.$$

Nous pouvons prendre pour dénominateur commun le produit $x^2(x+1)$.

Nous obtenons :

$$\frac{x^3}{x^2(x+1)}, \qquad \frac{3x}{x^2(x+1)} \qquad \text{et} \qquad \frac{2(x+1)}{x^2(x+1)}.$$

Il y a avantage à obtenir ainsi le dénominateur de plus faible degré possible.

150. Somme algébrique de fractions rationnelles. — Comme pour les fractions ordinaires :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \qquad \text{et} \qquad \frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - BC}{BD}.$$

Pour calculer une somme algébrique de fractions rationnelles, il faut :

1° Décomposer en facteurs les termes des fractions.

2° Simplifier si possible ces fractions.

3° Les réduire au même dénominateur.

4° Faire la somme algébrique des numérateurs en conservant le dénomi nateur commun.

5° Simplifier si possible le résultat.

EXEMPLE. — *Soit à effectuer :*

$$\frac{2x^3 - x^2}{x^4 + x^3} - \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} + \frac{x-1}{x^2-1}.$$

On obtient successivement :

$$\frac{x^2(2x-1)}{x^3(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} + \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x-1}{x(x+1)} - \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} =$$

$$\frac{2x-1}{x(x+1)} - \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{2x - 1 - (x^2-1) + x}{x(x+1)} =$$

$$\frac{2x - 1 - x^2 + 1 + x}{x(x+1)} = \frac{3x - x^2}{x(x+1)} = \frac{x(3-x)}{x(x+1)} = \frac{3-x}{x+1}.$$

On peut vérifier que l'ensemble des fractions rationnelles a une structure de groupe commutatif par rapport à l'addition.

151. Multiplication et division des fractions rationnelles. — Comme pour les fractions ordinaires :

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} \quad \text{et} \quad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}.$$

En particulier : $\frac{A}{B} = A \times \frac{1}{B}$ et $\frac{A}{B} \times \frac{B}{A} = 1.$

EXEMPLES :

1° $$\frac{a}{2} \times \frac{a+1}{6} \times \frac{4a}{a^2-1} = \frac{a(a+1) \times 4a}{2 \times 6(a^2-1)} = \frac{a^2}{3(a-1)}.$$

2° $$\frac{x}{x^2-1} \times \frac{x^2-x}{x^3} \times \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{x(x^2-x)(2x+1)}{(x^2-1)\,x^3(x^2+1)} =$$
$$= \frac{x^2(x-1)(2x+1)}{x^3(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)(x^2+1)}$$

3° $$\frac{a^2}{a^2-1} : \frac{a+2}{a-1} = \frac{a^2}{a^2-1} \times \frac{a-1}{a+2} = \frac{a^2(a-1)}{(a^2-1)(a+2)} =$$
$$= \frac{a^2(a-1)}{(a+1)(a-1)(a+2)} = \frac{a^2}{(a+1)(a+2)}$$

4° $$\frac{\dfrac{x+y}{y} - \dfrac{2x}{x+y}}{\dfrac{x+y}{y} + \dfrac{2y}{x-y}} = \frac{\dfrac{(x+y)^2 - 2xy}{y(x+y)}}{\dfrac{(x^2-y^2)+2y^2}{y(x-y)}} = \frac{\dfrac{x^2+y^2}{x+y}}{\dfrac{x^2+y^2}{x-y}} =$$
$$= \frac{x^2+y^2}{x+y} \times \frac{x-y}{x^2+y^2} = \frac{x-y}{x+y}.$$

152. Corps des fractions rationnelles. — On peut vérifier que l'ensemble des fractions rationnelles non nulles a une structure de groupe commutatif par rapport à la multiplication et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Il en résulte que l'ensemble des fractions rationnelles a une structure de corps (n° 36).

EXPRESSIONS IRRATIONNELLES

153. Définition. — ***On appelle expression irrationnelle toute expression numérique ou littérale contenant un ou plusieurs radicaux.***

EXEMPLES : $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $\quad a\sqrt{5} - b\sqrt{7}, \quad 2x - \sqrt{x^2+1}$.

Rappelons toutefois que le terme : *expression algébrique irrationnelle* ne s'applique qu'aux expressions contenant des lettres sous des radicaux (n° 106).

Dans ce qui suit, nous nous bornerons, à moins d'indication contraire, aux radicaux portant sur des nombres arithmétiques.

154. Simplification d'un radical. — Rappelons les formules (n^{os} 54 et 55) :

$$\sqrt{a\cdot b\cdot c} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

On les utilise de façon à simplifier les expressions placées sous des radicaux.

EXEMPLES :

1° $\sqrt{45} = \sqrt{9\times 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\cdot\sqrt{5}$.

2° $\sqrt{\dfrac{12}{25}} = \dfrac{\sqrt{4\times 3}}{\sqrt{25}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

3° $\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

4° $\sqrt{a^6b^4c^3} = \sqrt{a^6}\cdot\sqrt{b^4}\cdot\sqrt{c^2}\cdot\sqrt{c} = a^3b^2c\sqrt{c}$.

Lorsqu'on écrit par exemple $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$ ou $\sqrt{\dfrac{a}{4}} = \dfrac{\sqrt{a}}{2}$, on dit que l'on fait sortir 4 du radical. Donc :

Lorsqu'on fait sortir un nombre d'un radical il faut prendre sa racine.

Inversement lorsqu'on écrit $2\sqrt{a} = \sqrt{4a}$, on fait entrer 2 sous le radical, il faut l'élever au carré.

REMARQUE. — Quand on opère sur des nombres relatifs il faut prendre quelques précautions. En effet (n° 61) : $\sqrt{a^2} = |a|$, donc si a est *négatif* $\sqrt{a^2} = -a$.

Ainsi : $\sqrt{(-3)^2\cdot 5} = 3\cdot\sqrt{5}$ et $-2\cdot\sqrt{3} = -\sqrt{(-2)^2\cdot 3}$

$$\sqrt{5x^2} = \begin{cases} x\sqrt{5} & \text{lorsque } x \text{ est positif.} \\ -x\sqrt{5} & \text{lorsque } x \text{ est négatif.} \end{cases}$$

155. Opérations sur les expressions irrationnelles. — Les règles de calcul algébrique étudiées précédemment s'appliquent aux expressions irrationnelles. Il suffit de considérer chaque radical comme un nombre ou une lettre.

EXEMPLES :

1° $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (5 - 2 + 3)\sqrt{3}$
$= 6\sqrt{3}.$

2° $\sqrt{12} \times \sqrt{6} = \sqrt{12 \times 6} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$

3° $(a + \sqrt{2})(b - \sqrt{2}) = ab - a\sqrt{2} + b\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2$
$= ab - (a - b)\sqrt{2} - 2.$

4° $(a + \sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b.$

5° $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$

6° $a\sqrt{a} - b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3$
$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})[(\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b^2})]$
$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b).$

156. Fractions irrationnelles. — Il y a avantage dans les calculs, à avoir des dénominateurs rationnels.

EXEMPLES :

1° $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$

2° $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$

3° $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}.$

Les expressions irrationnelles telles que $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$ ou $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sont dites conjuguées. D'où la règle :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'une fraction il suffit de multiplier ses deux termes par l'expression conjuguée du dénominateur.

EXERCICES

— Simplifier les fractions :

322. $\frac{648}{1\,512}$ **323.** $\frac{2\,646}{6\,615}$ **324.** $\frac{2\,261}{4\,199}$

325. $\frac{10\,a^5b^2x^3}{25\,a^3b^4x}$ **326.** $\frac{-26\,a^2b^3x}{91\,ab^4y^2}$ **327.** $\frac{51\,a^2bx^3y^7}{68\,ab^2x^5y^3}$

328. $\frac{a^2 - ax}{a^2 - x^2}$ **329.** $\frac{2x^2 - 3ax}{4x^2 - 9a^2}$ **330.** $\frac{2x^2 - x}{8x^3 - 1}$

331. $\dfrac{x^2 + a^2 - 2ax}{x^2 + ab - (a + b)x}$ **332.** $\dfrac{x^3 + 27}{x^2 + 3x}$ **333.** $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2 + ax - ay}$

334. $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$ **335.** $\dfrac{(2a + 3)^2 - a^2}{a^2 - 1}$ **336.** $\dfrac{(3a + 2)^2 - (a + 2)^2}{a^3 - a}$

337. $\dfrac{27x^3 - 12xy^2}{27x^3 - 8y^3}$ **338.** $\dfrac{(x^2 + 1)^2 - x^2}{x^6 - 1}$ **339.** $\dfrac{x^9 + 27}{(x^3 + 3)^2 - 9x^3}$

340. $\dfrac{(ax + by) - (ay + bx)}{(ax - by) + (ay - bx)}$ **341.** $\dfrac{a(x^2 + 1) + x(a^2 + 1)}{a^2x^2 - 1}$

342. $\dfrac{(xy - 1)^2 - (x - y)^2}{(y^2 + 1)^2 - 2(y^2 + 1)}$ **343.** $\dfrac{(a - b)^2 (x + y)^2}{(ax + by)^2 - (ay + bx)^2}$

344. $\dfrac{ab(x^2 - y^2) - xy(a^2 - b^2)}{(ax - by)^2 + 4abxy}$ **345.** $\dfrac{(ax + mby)^2 - m(ay + bx)^2}{(a^2 + mb^2)^2 - 4ma^2b^2}$.

— Effectuer les sommes algébriques suivantes :

346. $\dfrac{123}{270} - \dfrac{45}{175} + \dfrac{77}{882}$ **347.** $\dfrac{100}{275} - \dfrac{45}{189} + \dfrac{60}{198}$

348. $\dfrac{a}{b(a + b)} - \dfrac{b}{a(a + b)} + \dfrac{2}{a}$ **349.** $\dfrac{a}{b(a - b)} + \dfrac{b}{a(a - b)} - \dfrac{2}{a - b}$

350. $\dfrac{x^2}{x + 1} - \dfrac{2x}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x - 1}$ **351.** $\dfrac{x^2}{x^2 + x} - \dfrac{2x}{x - 1} + \dfrac{x + 3}{x^2 - 1}$

352. $\dfrac{x^2}{x - y} + \dfrac{y^2}{x + y} - \dfrac{2xy^2}{x^2 - y^2}$ **353.** $\dfrac{2x}{x^2 + 2xy} - \dfrac{y}{xy - 2y^2} + \dfrac{4y}{x^2 - 4y^2}$,

354. Simplifier l'expression :

$$\frac{4x^2 - (x - 3)^2}{9(x^2 - 1)} - \frac{(x^2 - 9)}{(2x + 3)^2 - x^2} + \frac{(2x - 3)^2 - x^2}{4x^2 - (x + 3)^2},$$

355. Simplifier l'expression :

$$\frac{4(x + 3)^2}{(3x + 5)^2 - 4x^2} - \frac{x^2 - 25}{9x^2 - (2x + 5)^2} - \frac{(2x + 3)^2 - x^2}{(4x + 15)^2 - x^2}.$$

— Utiliser les identités des exercices nos 244, 253 et 254 pour calculer les expressions :

356. $\dfrac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^2}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c^2}{(c - a)(c - b)}$

357. $\dfrac{a^3}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^3}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c^3}{(c - a)(c - b)}$

358. $\dfrac{(b - c)^2}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{(c - a)^2}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{(a - b)^2}{(c - a)(c - b)}$

359. $\dfrac{(x - a)^3}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{(x - b)^3}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{(x - c)^3}{(c - a)(c - b)}$.

360. On pose : $A = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}$; $B = \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}$; $C = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

Calculer l'expression : $A^2 + B^2 + C^2 - ABC$.

361. Démontrer les relations :

$$1^\circ \ A^2 - B^2 = \left[\frac{(a^2 + b^2)A + (a^2 - b^2)B}{2ab}\right]^2 - \left[\frac{(a^2 - b^2)A + (a^2 + b^2)B}{2ab}\right]^2$$

$$2^\circ \ A^2 + B^2 = \left[\frac{(a^2 - b^2)A - 2abB}{a^2 + b^2}\right]^2 + \left[\frac{2abA + (a^2 - b^2)B}{a^2 + b^2}\right]^2$$

En déduire que si une expression peut se mettre sous la forme d'une somme (ou d'une différence) de deux carrés, elle peut s'écrire sous une forme analogue d'une infinité de manières.

— Simplifier les expressions :

362. $$\frac{\dfrac{1 + ab}{a - b} - b}{1 + b\dfrac{1 + ab}{a - b}}$$

363. $$\frac{\dfrac{a + b}{1 - ab} + \dfrac{a - b}{1 + ab}}{1 - \dfrac{a^2 - b^2}{1 - a^2b^2}}$$

364. $$\frac{\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} - x}{1 + \dfrac{3x^2 - x^4}{1 - 3x^2}}$$

365. $$\frac{\dfrac{2}{x^2 - 1} + \dfrac{x^2 - 3}{3x^2 - 1}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)(3x^2 - 1)}}$$

366. $$\frac{\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{y + 1}{y - 1}}{\dfrac{y + 1}{x - 1} - \dfrac{x + 1}{y - 1}}$$

367. $$\frac{\dfrac{x + a}{ax + 1} - \dfrac{x + b}{bx + 1}}{1 - \dfrac{(x + a)(x + b)}{(ax + 1)(bx + 1)}}$$

368. $$\frac{1}{(a^2 - 4b^2)} + \frac{1}{(a - b)(a - 2b)} - \frac{2}{(a + b)(a - 2b)} - \frac{b}{a^3 - 2a^2b - ab^2 + 2b^3}$$

369. $$\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \times \frac{1 + \dfrac{a}{b + c}}{1 - \dfrac{a}{b + c}} \times \frac{b^2 + c^2 - (b - c)^2}{a + b + c},$$

— Calculer les expressions suivantes en utilisant l'identité :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$$

370. $$\frac{x^2 - yz}{1 + \dfrac{y + z}{x}} + \frac{y^2 - zx}{1 + \dfrac{z + x}{y}} + \frac{z^2 - xy}{1 + \dfrac{x + y}{z}}$$

371. $$\frac{\dfrac{a(a + b)}{a - b} + \dfrac{a(a + c)}{a - c}}{1 + \dfrac{(b - c)^2}{(a - b)(a - c)}} + \frac{\dfrac{b(b + c)}{b - c} + \dfrac{b(b + a)}{b - a}}{1 + \dfrac{(c - a)^2}{(b - c)(b - a)}} + \frac{\dfrac{c(c + a)}{c - a} + \dfrac{c(c + b)}{c - b}}{1 + \dfrac{(a - b)^2}{(c - a)(c - b)}}$$

372.

$$\frac{b + c - 2a}{\dfrac{(b - c)^3}{b^3 - c^3} + \dfrac{(a - b)(a - c)}{b^2 + bc + c^2}} + \frac{c + a - 2b}{\dfrac{(c - a)^3}{c^3 - a^3} + \dfrac{(b - c)(b - a)}{c^2 + ca + a^2}} + \frac{a + b - 2c}{\dfrac{(a - b)^3}{a^3 - b^3} + \dfrac{(c - a)(c - b)}{a^2 + ab + b}}$$

— Simplifier les radicaux :

373. $\sqrt{4\,096}$ **374.** $\sqrt{169\,a^6b^4c^2}$ **375.** $\sqrt{49\,a^2(x^2 + y^2)}$.

376. $\sqrt{\dfrac{432}{289}}$ **377.** $\sqrt{\dfrac{64\,a^6b^5}{25\,c^2}}$ **378.** $\sqrt{\dfrac{9\,a^6\,(a^2+b^2)^2}{(a+b)^4}}$.

— Comparer les nombres suivants :

379. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}+1$ **380.** $3\,(3-\sqrt{7})$ et $2\,(\sqrt{3}-1)$.

381. $\sqrt{15}+\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{13}$ **382.** $\sqrt{23}-\sqrt{21}$ et $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

383. Les nombres a, m et p étant positifs et tels que $a > m > p$, démontrer que l'on a :

$$\frac{m}{\sqrt{a+m}-\sqrt{a-m}} < \frac{p}{\sqrt{a+p}-\sqrt{a-p}}.$$

384. Démontrer l'identité :

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2}(A+\sqrt{A^2-B})} + \sqrt{\frac{1}{2}(A-\sqrt{A^2-B})}.$$

En déduire les relations :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}};\quad \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

385. Calculer pour $a = -5$, $b = 7$ et $x = -3$ l'expression

$$\sqrt{a^2\,(b+x)^2} - 3\sqrt{2\,(a+b)\,x^2} + \sqrt{x^2+2\,ax+a^2}.$$

— Rendre rationnels les dénominateurs des fractions :

386. $\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}$ **387.** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}$ **388.** $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

389. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **390.** $\dfrac{5\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ **391.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

— Simplifier les expressions :

392. $\sqrt{200}-\sqrt{32}+\sqrt{72}$ **393.** $\sqrt{175}-\sqrt{112}+\sqrt{63}$

394. $(4+\sqrt{5})^2-(\sqrt{5}+1)^2$ **395.** $(5+\sqrt{3})^2-(3+2\sqrt{3})^2$

396. $\dfrac{A\sqrt{A}-B\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$ **397.** $\dfrac{A^2\sqrt{B}-B^2\sqrt{A}}{A\sqrt{B}-B\sqrt{A}}$

398. $\dfrac{\sqrt{5}-2}{5+2\sqrt{5}}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **399.** $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}$

400. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{5}}-2}{\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}}$ **401.** $\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\ (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$.

LIVRE II

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

10e Leçon

ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

I. DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS

157. Définitions. — ***On appelle équation une égalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs des lettres qui y figurent.***

Ces lettres sont les inconnues de l'équation.

1er Exemple. — L'égalité $x^2 - 10 = 3x$
est une *équation à une inconnue.* Les deux membres deviennent égaux si on attribue à l'inconnue x la valeur $+5$. Cette valeur s'appelle *solution ou racine de l'équation proposée.*

2e Exemple. — L'égalité $3x - 2y = 8$

est une *équation à deux inconnues.* Ses deux membres deviennent égaux si on attribue à x la valeur $+2$ et à y la valeur -1.

Le système de valeurs $\begin{cases} x = +2 \\ y = -1 \end{cases}$ est une *solution de l'équation.*

On appelle solution d'une équation tout système de valeurs attribuées aux inconnues pour lequel les deux membres de l'équation ont même valeur numérique.

158. Résolution d'une équation. — ***Résoudre une équation c'est en trouver toutes les racines ou toutes les solutions.***

Les théorèmes sur les égalités (nos 65 à 69) permettent de transformer une équation en une autre équation admettant les mêmes solutions. Étant donnée une équation on peut :

1° *Réduire séparément les deux membres de l'équation.*

2° *Ajouter ou retrancher une même expression aux deux membres de l'équation* et par suite supprimer les termes communs aux deux membres, ou transposer un terme d'un membre dans l'autre, à condition de changer son signe.

3° *Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre non nul*, et par suite simplifier une équation en divisant tous ses termes par un même nombre ou chasser les dénominateurs numériques en multipliant tous les termes par un multiple commun des dénominateurs.

— On dirige les calculs de façon à obtenir les solutions et par suite à résoudre l'équation.

159. Remarques. — 1° Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une équation par une expression qui contient l'inconnue, l'équation obtenue peut admettre des racines qui ne vérifient pas l'équation primitive.

Soit l'équation : $$3x - 2 = 0. \qquad (1)$$

Multiplions les deux membres par $x - 1$

$$(3x - 2)(x - 1) = 0. \qquad (2)$$

On vérifie que $x = 1$ est racine de l'équation (2) mais pas de l'équation (1). On dit que *cette racine est étrangère à l'équation initiale.*

2° Lorsqu'on divise les deux membres d'une équation par une expression qui contient l'inconnue, l'équation primitive peut admettre des racines qui ne vérifient pas la nouvelle équation.

Soit l'équation : $$x^3 - 2x = 3x. \qquad (1)$$

Divisons les deux membres par x :

$$x^2 - 2 = 3. \qquad (2)$$

On vérifie que $x = 0$ est racine de l'équation (1) et non de l'équation (2).

160. Équations entières. — ***On appelle équation entière une équation dont les deux membres sont des polynômes.***

En faisant passer tous les termes dans le premier membre, l'autre se réduit à zéro. Le degré, par rapport à l'ensemble des inconnues, du polynôme réduit obtenu dans le premier membre est **le degré de l'équation.**

EXEMPLE :

$3x - 5 = 0$ est du premier degré.
$2x - 3y + 4 = 0$ est du premier degré.
$3x^2 - 5x + 2 = 0$ est du second degré.
$xy - 3x + 2y - 1 = 0$ est du second degré.

II. ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

161. Equation numérique du premier degré. — Rappelons la marche à suivre pour résoudre une telle équation :

EXEMPLE : $$\frac{5x - 7}{4} - \frac{9x - 4}{5} = 2 - \frac{3x + 11}{8}. \qquad (1)$$

Chassons les dénominateurs. Leur P. P. C. M. est 40. Multiplions tous les termes par 40

$$\frac{40\,(5x-7)}{4}-\frac{40\,(9x-4)}{5}=40\times 2-\frac{40\,(3x+11)}{8}.$$

Soit :

$$10\,(5x-7)-8\,(9x-4)=80-5\,(3x+11).$$

Développons :

$$50x-70-72x+32=80-15x-55.$$

Faisons passer tous les termes en x dans le premier membre et les termes connus dans l'autre.

$$50x-72x+15x=70-32+80-55.$$

Réduisons les termes semblables :

$$-7x=63. \qquad (2)$$

Toute racine de l'équation (1) est racine de l'équation (2). La seule racine possible est donc :

$$x=\frac{63}{-7}=-9.$$

Vérification. — Réciproquement, la racine $x=-9$ de l'équation (2) est racine de l'équation (1) car les valeurs numériques de celle-ci pour $x=-9$ sont :

1er membre : $$\frac{-45-7}{4}-\frac{-81-4}{5}=-13+17=4.$$

2e membre : $$2-\frac{-27+11}{8}=2+2=4.$$

162. Cas général. — Toute équation entière du premier degré à une inconnue x se ramène après suppression des dénominateurs et transposition de tous ses termes dans le premier membre à la forme : $ax+b=0$ (1) où a et b sont des coefficients connus. Il résulte des théorèmes sur les égalités (nº 65) que l'équation proposée et l'équation (1) ont mêmes racines. Elles sont dites équivalentes.

1º Si $a\neq 0$: $ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)=a\,(x-p)$ en posant $p=-\frac{b}{a}$ et :

$$ax+b=0 \Longleftrightarrow a\,(x-p)=0 \Longleftrightarrow x=p \text{ (nº 68)}.$$

L'équation proposée admet une seul racine : $x=p=-\frac{b}{a}$.

2º Si $a=0$, l'équation (1) devient : $0\cdot x+b=0$.

Si $b \neq 0$: Aucune valeur de x ne peut vérifier l'équation. On dit que l'**équation est impossible.**

Si $b = 0$ l'équation se réduit à $0\,x = 0$. Elle est vérifiée quel que soit x. On dit que l'**équation est indéterminée** (elle se réduit à une identité).

En général, l'équation du premier degré à une inconnue admet une solution et une seule.

Exceptionnellement, elle est impossible ou indéterminée.

Par suite si une équation du premier degré admet deux solutions, elle est indéterminée et elle est vérifiée pour toute valeur de x.

163. Exemple d'équation impossible :

Soit l'équation : $5\,(x - 1) - 3\,x = 2\,x + 3.$

D'où : $5\,x - 5 - 3\,x = 2\,x + 3$

$5\,x - 3\,x - 2\,x = 5 + 3.$

Soit : $0\,x = 8$ donc *impossibilité.*

L'équation s'écrit d'ailleurs $2\,x - 5 = 2\,x + 3$ manifestement impossible.

164. Exemple d'équation indéterminée :

$$\frac{x+1}{3} - \frac{2x+1}{5} + \frac{x+4}{6} = \frac{x+8}{10}.$$

Chassons les dénominateurs, en multipliant tous les termes par 30.

$$10\,(x + 1) - 6\,(2\,x + 1) + 5\,(x + 4) = 3\,(x + 8)$$
$$10\,x + 10 - 12\,x - 6 + 5\,x + 20 = 3\,x + 24.$$

Transposons : $10\,x - 12\,x + 5\,x - 3\,x = -10 + 6 - 20 + 24.$

Soit : $0\,x = 0$ *équation indéterminée.*

On vérifie que $x = 2$, $x = 5$ par exemple, sont solutions de l'équation proposée.

165. Equations paramétriques. — On désigne ainsi des équations où figurent, outre les inconnues, des lettres appelées *paramètres* dont la valeur est supposée connue.

Une équation paramétrique à une inconnue se résout de la même façon qu'une équation numérique. Toutefois, il est bon d'étudier pour quelles valeurs des paramètres l'équation est impossible ou indéterminée. C'est ce qu'on appelle *discuter l'équation.*

166. Exemple I. — *Résoudre et discuter l'équation :*

$$2\,(m - 1)\,x - m\,(x - 1) = 2\,m + 3.$$

Développons :

$$2\,mx - 2\,x - mx + m = 2\,m + 3$$
$$mx - 2\,x = m + 3.$$

Soit: $$(m - 2)\,x = m + 3.$$

Le coefficient de x est nul si $m - 2 = 0$ ou si $m = 2$.

1° Si $m \neq 2$ on a $m - 2 \neq 0$ d'où : $x = \dfrac{m+3}{m-2}$.

2° Si $m = 2$ l'équation se réduit à : $0 \cdot x = 5$. Elle est impossible.

167. Exemple II. — *Résoudre et discuter l'équation :*

$$m^2(x - 1) + 3\,mx = (m^2 + 3)\,x - 1.$$

Développons : $$m^2x - m^2 + 3\,mx = m^2x + 3\,x - 1.$$

Transposons : $$m^2x + 3\,mx - m^2x - 3\,x = m^2 - 1.$$

Soit : $$3\,(m - 1)\,x = m^2 - 1.$$

Le coefficient de x s'annule pour $m = 1$.

1° Si $m \neq 1$. Il vient $x = \dfrac{m^2 - 1}{3\,(m-1)} = \dfrac{m+1}{3}$.

2° Si $m = 1$. On obtient $0 \cdot x = 0$. L'équation est indéterminée.

168. Exemple III. — *Résoudre et discuter l'équation :*

$$\frac{4x + 2}{3} - \frac{x + b}{a} = \frac{5\,(x - 1)}{6}.$$

Il faut supposer $a \neq 0$ pour que l'équation ait un sens. Multiplions les deux membres par $6\,a$.

$$2\,a\,(4\,x + 2) - 6\,(x + b) = 5\,a\,(x - 1)$$
$$8\,ax + 4\,a - 6\,x - 6\,b = 5\,ax - 5\,a$$
$$(8\,a - 6 - 5\,a)\,x = -\,4\,a + 6\,b - 5\,a.$$

Soit $$(3\,a - 6)\,x = 6\,b - 9\,a.$$

Simplifions par 3 : $$(a - 2)\,x = 2\,b - 3\,a.$$

Le coefficient de x s'annule pour $a = 2$.

1° $a \neq 2$. Il vient : $x = \dfrac{2b - 3a}{a - 2}$.

2° $a = 2$. L'équation se réduit à : $0\,x = 2\,b - 6$.

Le second membre est nul si $2b - 6 = 0$ ou $b = 3$.

Si $b \neq 3$, $2b - 6 \neq 0$ l'équation est impossible.

Si $b = 3$, $2b - 6 = 0$ l'équation est indéterminée.

III. ÉQUATIONS SE RAMENANT AU PREMIER DEGRÉ

169. Equations de la forme $A \cdot B \cdot C = 0$.

On sait que pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul (nº 35). Par suite :

Les racines de l'équation $A \cdot B \cdot C = 0$ ***sont les racines des équations :*** $A = 0$, $B = 0$ ***et*** $C = 0$.

170. Exemple I. — *Résoudre l'équation :*

$$(x - 2)(3x + 2)(2x - 7) = 0.$$

Cette équation se décompose en trois autres :

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 3x + 2 = 0 \\ 2x - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{D'où les 3 racines :} \quad \begin{cases} x = +2 \\ x = -\dfrac{2}{3} \\ x = +\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

171. Exemple II. — *Résoudre l'équation :*

$$x^3 - 4x = 0.$$

Ramenons à la forme précédente en décomposant le premier membre en facteurs :

$$x(x^2 - 4) = 0$$

ou

$$x(x + 2)(x - 2) = 0.$$

Cette équation se décompose en trois autres :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{D'où les trois racines :} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = +2. \end{cases}$$

172. Exemple III. — *Résoudre l'équation :*

$$(3x - 5)^2 - (x - 3)^2 = 0.$$

Le premier membre est de la forme $A^2 - B^2$. On peut donc l'écrire sous la forme du produit $(A + B)(A - B)$. Soit :

$$(3x - 5 + x - 3)(3x - 5 - x + 3) = 0$$

ou

$$(4x - 8)(2x - 2) = 0.$$

L'équation se décompose en deux autres :

$$\begin{cases} 4x - 8 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{D'où les deux racines :} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 1. \end{cases}$$

173. Equations renfermant l'inconnue en dénominateur.

Exemple I. — *Résoudre l'équation :* $\dfrac{x^2 - 9}{x + 2} = 0.$

La fraction qui constitue le premier membre n'est définie que si son dénominateur $x + 2$ est différent de zéro, donc si $x \neq -2$. Supposons cette condition réalisée. Pour que la fraction soit nulle, il faut et il suffit que son numérateur soit nul. D'où :

$$x^2 - 9 = 0. \quad \text{Soit} \quad (x + 3)(x - 3) = 0.$$

Cette équation a pour racines $x = 3$ et $x = -3$. Ces deux valeurs étant différentes de -2 sont racines de l'équation proposée.

— En général :

Les racines de l'équation $\dfrac{A}{B} = 0$ ***sont celles de l'équation*** $A = 0$ ***qui n'annulent pas*** **B.**

174. Exemple II. — *Résoudre l'équation :*

$$\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x - 2)}.$$

L'équation n'a de sens que si les dénominateurs sont différents de zéro, c'est-à-dire si $x \neq 0$ et $x \neq +2$. Supposons ces conditions réalisées, nous pouvons chasser les dénominateurs en multipliant tous les termes par $x(x - 2)$.

$$x(x + 2) - (x - 2) = 2$$

$$x^2 + 2x - x + 2 = 2.$$

Soit : $\qquad x^2 + x = 0 \quad \text{ou} \quad x(x + 1) = 0.$

D'où les deux valeurs $x = 0$ et $x = -1$.

La valeur $x = 0$ est une des valeurs exclues. Seule $x = -1$ est racine de l'équation proposée.

— La méthode générale qui en découle est donc la suivante :

On chasse les dénominateurs et on résout l'équation entière obtenue. On écarte parmi les racines trouvées, celles qui annulent un des dénominateurs de l'équation initiale.

EXERCICES

— Résoudre les équations :

402. $\frac{7x+9}{4} + x = \frac{5x}{2} + 3$

403. $\frac{x+13}{3} - \frac{3x}{7} = \frac{2x}{5} - 13.$

404. $\frac{2x-3}{9} - \frac{x}{6} = \frac{31-2x}{2}$

405. $\frac{8x-1}{13} - \frac{3x}{2} = \frac{7-5x}{4}$

406. $\frac{x+3}{4} - \frac{x-5}{6} = \frac{x-2}{3}$

407. $\frac{3x-13}{2} + \frac{x-1}{3} = 3x - 1$

408. $\frac{4x+3}{5} - \frac{2x-3}{3} = \frac{x-1}{6}$

409. $\frac{5x+3}{4} - \frac{x-19}{6} = \frac{7x+5}{9}$

410. $\frac{2x+1}{3} - \frac{5x-2}{7} = x - 13$

411. $\frac{x+9}{8} + \frac{x+5}{6} = \frac{2x+7}{9}$

412. $\frac{x+7}{4} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+2}{3}$

413. $\frac{x+11}{6} + \frac{x+15}{8} = \frac{2x+19}{9}$

414. $\frac{5x-14}{3} + \frac{7x-12}{9} = \frac{3x-146}{4}$

415. $\frac{13x+23}{15} + \frac{x-31}{35} = \frac{271-x}{21}$

416. $\frac{3x+3}{18} + \frac{2x-1}{45} = \frac{3x-19}{10}$

417. $\frac{9x+4}{77} - \frac{12x+5}{14} = \frac{28x+11}{22}$

418. $\frac{x+52}{35} + \frac{3x+64}{65} = \frac{x+74}{91}$

419. $\frac{x+11}{15} - \frac{3(x+21)}{85} = \frac{5x+139}{51}$

420. $\frac{2x+1}{77} - \frac{x+6}{88} = \frac{x-4}{56}$

421. $\frac{7x-132}{95} - \frac{5x-22}{209} = \frac{3(30-x)}{55}$

422. $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(x+3)^2}{6} = \frac{(x-2)(x+1)}{2}$

423. $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{3x+1}{5} = \frac{(x-5)(3x+10)}{6}$

424. $\frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(x+1)^2}{21} = \frac{(x-4)(x-6)}{28}$

425. $\frac{(x+1)^3-(x-2)^3}{9} = \frac{(2x-3)^2+35}{4}$

— Résoudre les équations :

426. $12(x+2) - 49 - 17{,}5(x-1) = 30{,}9 + 2{,}5x - 60{,}8.$

427. $13{,}7(x+3) - 73{,}25 + 25{,}8(x-2) = 60{,}5 - 17{,}1(x-0{,}5) + 19{,}83.$

428. $14{,}23x - 36{,}95 - 15(x-5) = 16{,}32 + 3{,}73(x+5) - 35{,}08.$

429. $\frac{25x-655}{95} - \frac{5(x-12)}{209} = \frac{89 - 3x - \frac{2(x-18)}{5}}{11}$

430. $\frac{8(x+22)}{45} - \frac{7x + 149 + \frac{6(x+12)}{5}}{9} = \frac{x + 35 + \frac{2(x+50)}{9}}{5}$

431. $\dfrac{x + \dfrac{2(3-x)}{5}}{14} - \dfrac{5x - 4(x-1)}{24} = \dfrac{7x + 2 + \dfrac{9-3x}{5}}{12} + \dfrac{2}{3}$

432. $\dfrac{(x+3)(x-2)}{10} - \dfrac{(x+2)(x-1)}{14} = \dfrac{(x-3)(x+2)+4}{35}$

433. $\dfrac{(3x+4)(x+4)}{7} - \dfrac{(2x+5)(2x-1)}{11} = \dfrac{(5x+13)(x+20)}{77}$

434. $\dfrac{(x-3)^2}{6} - \dfrac{(x-6)^2}{15} = \dfrac{(x+9)^2}{10} - \dfrac{13x-1}{3}$

435. $\dfrac{3(2x-3)^2}{4} + \dfrac{2(3x-2)^2}{9} + \dfrac{(6x-5)^2}{36} = \dfrac{(2x-3)(3x-2)(6x-5)}{2}.$

— Résoudre et discuter les équations :

436. $3(m+1)x + 4 = 2x + 5(m+1).$

437. $m^2(x+1) = x + m.$

438. $3(m-2)x + m(4x-7) = 3(m-1).$

439. $(m^2-1)x = m(m+1)(m+2).$

440. $mx + 2(x-m) = (m+1)^2 + 3.$

441. $(m+2)x + 4(2m+1) = m^2 + 4(x-1).$

442. $a(ax + 2b^2) - a^3 = b^2(x+a).$

443. $(a+b)^2x + 2a^2 = 2a(a+b) + (a^2+b^2)x.$

444. $\dfrac{mx+3}{6} + \dfrac{m^2-1}{2} = \dfrac{x+5}{10} + \dfrac{2}{5}(x + m^2 + 1).$

445. $\dfrac{(x-m)^2}{3} + \dfrac{(x-2m)(x+3)}{2} = \dfrac{(5x-1)(x-4)}{6} - \dfrac{2}{3}(2m-1)(m-1).$

446. $\dfrac{m^2(x+2)^2}{8} - 2(2x+m+1) = (m+1)^2 + \dfrac{m^2(x-2)^2}{8} + 1.$

447. $\dfrac{a^6-b^6}{a^3-b^3} + \dfrac{a^3-b^3}{a-b}[2x - (a+b)] = 2\dfrac{a^4-b^4}{a^2-b^2}x.$

448. 1° Résoudre l'équation :

$$(x-2)^3 + (x-4)^3 + (x-7)^3 - 3(x-2)(x-4)(x-7) = 0.$$

2° Démontrer l'identité :

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = \frac{1}{2}(A+B+C)[(B-C)^2 + (C-A)^2 + (A-B)^2].$$

3° Utiliser l'identité précédente pour résoudre l'équation :

$$(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 - 3(x-a)(x-b)(x-c) = 0.$$

Retrouver pour $a = 2$, $b = 4$ et $c = 7$ le résultat du 1°.

— Résoudre les équations :

449. $x(x-1)(x+3) = 0.$

450. $(x+4)(2x+7)(3x+5) = 0.$

451. $3x(x-4)(x+5) = 0.$

452. $(7-x)(4x-3)(5-2x) = 0.$

453. $(2x+3)(x^2-49) = 0.$

454. $(5-3x)(9x^2-25) = 0.$

455. $(x-2)(81x - 4x^3) = 0.$

456. $27x^2(x+3) - 12(x^2+3x) = 0.$

457. $(9-x^2)(8x^2-50) = 0.$

458. $(2x+3)(4x-1) = 9 - 4x^2.$

459. $(x + 2)^2 - x^2 + 4 = 0.$

460. $(5 - 2x)(2x + 7) = 4x^2 - 25.$

461. $x^3 - 1 + (x - 1)(1 - x^2) = 0.$

462. $x^3 + 27 + (x + 3)(x - 9) = 0.$

463. $(x + 5)^2 - (2x - 3)^2 = 0.$

464. $(2x + 7)^2 - 9(x + 2)^2 = 0.$

465. $4(2x + 7)^2 - 9(x + 3)^2 = 0.$

466. $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0.$

467. $(5x^2 + 3x - 2)^2 = (4x^2 - 3x - 2)^2.$

468. $(3x + 2)(x^2 - 1) = (9x^2 - 4)(x + 1).$

469. Former un polynôme du 3e degré s'annulant pour $x = 1$, $x = -2$ et $x = 3$ et prenant pour $x = 2$ la valeur numérique 10.

470. 1° Démontrer l'identité :

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(b - c)(c - a)(a - b).$$

2° Utiliser cette identité pour résoudre l'équation :

$$[3(x + 1) - 2(x + 3)]^3 + [2(x + 3) - x + 5]^3 + [x - 5 - 3(x + 1)]^3 = 0.$$

471. Décomposer en un produit de 4 facteurs l'expression :

$$(ax + mb)^2 - (am + bx)^2.$$

1° On suppose que a et b ont des valeurs absolues distinctes. Quelles valeurs faut-il donner à x pour que l'expression soit nulle?

2° Que se passe-t-il lorsque a et b ont même valeur absolue?

— Résoudre les équations :

472. $\dfrac{2x + 5}{x + 3} + \dfrac{3x - 2}{x} = 5.$

473. $\dfrac{3x + 4}{5} + \dfrac{2x - 3}{4x - 5} = \dfrac{9x - 8}{15}.$

474. $\dfrac{7}{x - 3} - \dfrac{4}{x - 5} = \dfrac{3}{x + 1}.$

475. $\dfrac{12}{x - 7} - \dfrac{5}{x - 1} = \dfrac{7}{x - 10}.$

476. $\dfrac{2}{x - 4} + \dfrac{1}{2x - 3} = \dfrac{5}{7x - 6}.$

477. $\dfrac{1}{5x + 8} + \dfrac{1}{x + 4} = \dfrac{9}{8(x + 3)}.$

478. $\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{x^2}{x + 1} = \dfrac{2x}{x^2 - 1}.$

479. $\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{x - 1}{x + 1} = 3x\left(1 - \dfrac{x - 1}{x + 1}\right).$

480. $\dfrac{x - 1}{x} - \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{2x - 1}{x^2 + x}.$

481. $\dfrac{6x^2 + 7x + 8}{2x + 1} = \dfrac{3x^2 - 2x - 16}{x - 2}.$

482. $\dfrac{2x^2 + 4x - 9}{4x + 9} = \dfrac{4x + 9}{2x^2 + 4x - 9}.$

483. $\dfrac{10x^2 + 33x + 42}{15x^2 + 39x + 36} = \dfrac{6x^2 + 19x + 28}{9x^2 + 23x + 24}.$

484. $$\frac{\dfrac{x + 2a}{2x + a} + b}{2x + a + \dfrac{3a^2}{2x + a}} = \frac{\dfrac{2x + a}{x + 2a} + b}{2\left(x + 2a - \dfrac{3a^2}{x + 2a}\right)}.$$

485. $$\frac{\dfrac{2x - 5a}{4a} + \dfrac{2x + 4a}{3x}}{\dfrac{3x - 8a}{4a} + \dfrac{3x + 5a}{3x}} = \frac{\dfrac{2x - 5a}{3a} - \dfrac{2x + 4a}{2x}}{\dfrac{3x - 8a}{3a} - \dfrac{3x + 5a}{2x}}.$$

INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

I. DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS

175. Définition. — ***On appelle inéquation une inégalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs des lettres qui y figurent.***

Ces lettres sont les inconnues de l'inéquation.

L'inégalité $$6x - 5 > 7.$$ est une *inéquation à une inconnue*.

Les nombres $x = 3$, $x = 4$, $x = \frac{9}{2}$ ··· vérifient cette inégalité. *Ce sont des solutions* de l'inéquation envisagée.

Les nombres $x = \frac{3}{2}$, $x = 0$, $x = -2$ ... ne sont pas solutions. En général :

On appelle solution d'une inéquation à une inconnue, toute valeur de cette inconnue pour laquelle l'inéquation devient une inégalité numérique.

176. Résolution d'une inéquation. — ***Résoudre une inéquation c'est en trouver toutes les solutions.***

Les théorèmes sur les inégalités (nos 81 à 87) permettent de transformer une inéquation en une autre inéquation admettant les mêmes solutions. Étant donnée une inéquation, on peut :

1° *Réduire séparément les deux membres de l'inéquation.*

2° *Ajouter ou retrancher une même expression aux deux membres de l'inéquation* et par suite supprimer les termes communs aux deux membres ou transposer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer son signe :

Si on fait passer tous les termes dans le premier membre, l'inéquation prend la forme $A > 0$ ou $A < 0$. Lorsque A est un polynôme du 1er degré on dit que l'inéquation est du premier degré, etc...

3° *Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre positif en conservant le sens de l'inéquation ou par un même nombre négatif à condition de changer le sens de l'inéquation.*

Par suite on peut simplifier une inéquation en divisant tous ses termes par un même nombre positif, chasser les dénominateurs en multipliant tous les termes par un multiple commun positif des dénominateurs et changer les signes de deux membres à condition de changer en même temps le sens de l'inéquation.

— On dirige les calculs de façon à obtenir les solutions et par conséquent à résoudre l'inéquation.

177. Remarque. — Il importe de bien se rappeler les opérations qu'il n'est pas légitime, en général, d'effectuer sur une inéquation.

1° Il ne faut pas multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par une même expression littérale à moins que son signe soit bien déterminé.

Ainsi : $(m^2 + 1)(3x - 7) > 0 \Longleftrightarrow 3x - 7 > 0.$

car $m^2 + 1$ étant supérieur à 1, est positif quel que soit m.

Mais de : $(m^2 - 1)(3x - 7) > 0$ on ne peut déduire $3x - 7 > 0$ cas $m^2 - 1$ n'est pas toujours positif. Pour $m = 0$ par exemple, on a, au contraire, $3x - 7 < 0$.

2° En particulier :

Il ne faut pas chasser des dénominateurs contenant l'inconnue.

3° Il ne faut pas élever au carré les deux membres d'une inéquation ou en extraire la racine carrée.

Nous verrons quelles sont les précautions à prendre, lorsque nous serons amenés à utiliser l'une de ces opérations.

II. INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

178. Inéquation numérique. — La marche à suivre est la même que pour une équation numérique du premier degré. Ne pas oublier de changer le sens de l'inéquation lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise les deux membres par un nombre négatif ou lorsqu'on change les signes des deux membres.

EXEMPLE. — *Résoudre l'inéquation :*

$$\frac{4x + 1}{4} - \frac{5x + 2}{6} < \frac{x + 1}{3}.$$

Chassons les dénominateurs en multipliant tous les termes par 12.

$$3(4x + 1) - 2(5x + 2) < 4(x + 1)$$

ou $$12x + 3 - 10x - 4 < 4x + 4.$$

Transposons : $12 - 10x - 4x < -3 + 4 + 4.$

Soit : $-2x < 5.$

Divisons les deux membres par — 2. Il faut changer le sens

$$x > -\frac{5}{2}.$$

Il est facile de vérifier que toute valeur de x supérieure à $-\frac{5}{2}$ est solution de l'inéquation proposée.

179. Interprétation graphique. — Alors que les solutions d'une équation sont en général en nombre limité, il n'est est pas ainsi pour une inéquation.

Marquons sur un axe $x'x$ le point A d'abscisse $-\frac{5}{2}$ (fig. 22). Les points dont les abscisses sont solutions de l'inéquation précédente sont les points de la demi-droite Ax. Afin de les distinguer des points de la demi-droite Ax', on met des hachures sur cette dernière.

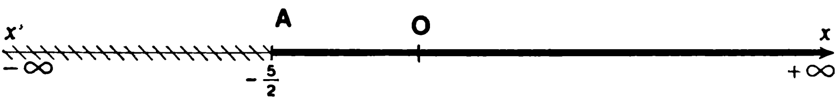


Fig. 22.

Remarque. — On appelle *intervalle* $]a, b[$ l'ensemble des nombres algébriques compris entre les nombres a et b. Si $a < b$ tout nombre x de l'intervalle $]a, b[$ vérifie la double condition

$$a < x < b.$$

On écrit : $x \in \,]\, a, b\, [.$

Dans l'exemple envisagé, x est solution de l'inéquation si $-\frac{5}{2} < x < +\infty$.

C'est pourquoi on dit que *les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'intervalle* $\left]-\frac{5}{2}, +\infty\right[$.

180. Cas général. — Toute inéquation du premier degré à une inconnue se ramène après suppression du dénominateur commun et transposition de tous ses termes dans un même membre à l'une des formes :

$$ax + b > 0 \quad (1) \qquad \text{ou} \qquad ax + b < 0 \quad (2)$$

La seconde forme se ramène à la première en multipliant les deux membres par — 1. Discutons l'inéquation (1) :

1° Si $a \neq 0$: $ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a(x - p)$ en posant $-\frac{b}{a} = p$.

α) *a positif* : $a(x - p) > 0 \iff x - p > 0$ soit $x > p$.

β) *a négatif* : $a(x - p) > 0 \iff x - p < 0$ soit $x < p$.

2° Si $a = 0$ l'inéquation se réduit à : $b > 0$.

Si $b > 0$, elle est vérifiée quel que soit x.

Si $b < 0$, elle n'admet aucune solution.

181. Inéquation littérale. — *Soit à résoudre l'inéquation paramétrique*

$$\frac{m(x-2)}{6} + \frac{x-m}{3} > \frac{x+1}{2}.$$

Chassons les dénominateurs.

$$m(x-2) + 2(x-m) > 3(x+1).$$
$$mx - 2m + 2x - 2m > 3x + 3.$$

Transposons : $$mx + 2x - 3x > 2m + 2m + 3.$$

Soit : $$(m-1)x > 4m + 3.$$

Trois cas sont à envisager suivant que le coefficient $m - 1$ est positif, négatif ou nul.

1° $m - 1 > 0$ ou $m > 1$. Il vient : $x > \dfrac{4m+3}{m-1}$.

2° $m - 1 < 0$ ou $m < 1$. Il vient : $x < \dfrac{4m+3}{m-1}$.

3° $m - 1 = 0$ ou $m = 1$. Il reste : $0 \cdot x > 7$.

l'inéquation est impossible.

182. Inéquations simultanées. — On appelle inéquations simultanées, deux ou plusieurs inéquations qui doivent être vérifiées, à la fois, par les mêmes valeurs des inconnues.

Il suffit de résoudre séparément chacune des inéquations et de conserver les solutions communes à toutes ces inéquations.

Exemple. — *Résoudre les inéquations simultanées :*

$$\begin{cases} 5x - 7 < 3x. \\ 2x + 5 > 1. \end{cases}$$

La première inéquation donne :

$$5x - 3x < 7.$$

D'où : $$2x < 7 \quad \text{et} \quad x < \frac{7}{2}.$$

La seconde inéquation donne :

$$2x > -5 + 1.$$

D'où : $2x > -4$ et $x > -2$.

On voit immédiatement que les valeurs de x qui vérifient les deux inéquations sont les valeurs de l'intervalle $\left]-2, \frac{7}{2}\right[$. Donc :

$$-2 < x < \frac{7}{2}.$$

Graphiquement, il suffit de hachurer sur un axe (fig. 23) les intervalles pour lesquels x ne satisfait pas à l'une des inéquations. Les intervalles non hachurés, s'il en reste, correspondent aux solutions communes aux inéquations.

Fig. 23.

Dans l'exemple précédent, il faut hachurer Ax, pour supprimer les valeurs ne vérifiant pas la première inéquation, puis Bx' pour supprimer celles qui ne satisfont pas à la seconde. Il reste le segment BA correspondant à l'intervalle $\left]-2, \frac{7}{2}\right[$.

EXERCICES

— Résoudre les inéquations :

486. $\frac{x}{30} + \frac{1}{6} - \frac{x}{5} > \frac{2x}{45} + 16.$

487. $\frac{5x}{12} - \frac{1}{2} - \frac{7x}{24} > \frac{x}{6} - 1.$

488. $\frac{3x}{7} - \frac{x}{3} + \frac{19}{5} < \frac{2x}{15} - 3.$

489. $\frac{5x}{2} - \frac{18}{5} - \frac{3x}{4} < \frac{8x}{5} + \frac{9}{4}.$

490. $\frac{5x}{6} + \frac{1}{4} - \frac{7x}{12} > \frac{x}{3} + \frac{3}{16}.$

491. $\frac{3x}{7} - \frac{x}{3} + \frac{19}{25} < \frac{2x}{15} + \frac{3}{5}.$

492. $\frac{x-5}{4} - \frac{x+8}{3} < \frac{x+11}{6}.$

493. $\frac{x+7}{10} - \frac{x-5}{5} > \frac{x-9}{3}.$

494. $\frac{8x+5}{9} - \frac{2x+23}{6} < \frac{x+4}{4} - \frac{x}{12}.$

495. $\frac{7x-3}{8} + \frac{x+31}{4} > \frac{2x+7}{3}.$

496. $\frac{5x+7}{4} + \frac{3x+5}{8} > \frac{9x+4}{5}.$

497. $\frac{13x-3}{15} + \frac{x+4}{35} > 15 - \frac{x}{21}.$

498. $\dfrac{7x+2}{15} - \dfrac{2x+15}{24} > \dfrac{292-3x}{40}$. **499.** $\dfrac{28x+5}{8} - \dfrac{40x+3}{15} < \dfrac{3(5x-2)}{40}$.

500. $\dfrac{5x-17}{14} + \dfrac{x-3}{26} > \dfrac{29-9x}{91}$. **501.** $\dfrac{13x+47}{24} + \dfrac{7x+26}{21} > \dfrac{3x-5}{56}$.

— Résoudre les inéquations paramétriques :

502. $mx + 1 > x + m^2$. **503.** $x + 2m < 1 + 2mx$.

504. $x + 9m^2 > 3mx + 1$. **505.** $x(1-m)^2 > 1 - 2mx$.

506. $5(m+1)x + 2 < 3m + 4x$. **507.** $2(x-m) - (m+1)^2 < 3 - mx$.

508. $\dfrac{mx+5}{4} - \dfrac{x-3m}{6} < \dfrac{2}{3}$. **509.** $\dfrac{x+m}{10} + \dfrac{6x+m}{15} > \dfrac{mx+2}{6}$.

510. $\dfrac{12mx-7}{5} + \dfrac{9x+11m}{2} > m - 4$.

511. $\dfrac{mx+(m-2)^2}{8} + \dfrac{x+m^2}{12} > \dfrac{(m-1)(x+1)}{3}$.

— Résoudre les systèmes d'inéquations simultanées :

512. $\begin{cases} 2x + 5 > 5x - 4 \\ x - 7 < 2x - 3 \end{cases}$ **513.** $\begin{cases} 9x - 15 > 4x + 13 \\ 19 - 5x < 7 + 3x \end{cases}$

514. $\begin{cases} \dfrac{x+5}{6} + \dfrac{x+9}{8} > \dfrac{2x+7}{9}. \\ \dfrac{x+5}{4} - \dfrac{x-3}{6} > \dfrac{x}{3}. \end{cases}$ **515.** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} + \dfrac{4(2x-3)}{9} < \dfrac{5x+1}{8}. \\ \dfrac{5x+9}{3} + \dfrac{7x+5}{9} > \dfrac{3x+21}{4}. \end{cases}$

516. $\begin{cases} \dfrac{5x+7}{4} + \dfrac{3x+5}{8} > \dfrac{9x+4}{5}. \\ \dfrac{3x-2}{18} + \dfrac{2x-9}{45} > \dfrac{3+x}{10}. \end{cases}$ **517.** $\begin{cases} \dfrac{13x-16}{15} + \dfrac{x-32}{35} < \dfrac{x-6}{21}. \\ \dfrac{5x+12}{14} + \dfrac{11x+28}{2} > \dfrac{4x+9}{77}. \end{cases}$

SIGNE DU BINÔME DU PREMIER DEGRÉ

183. Définitions. — ***Un binôme du premier degré en*** x ***est une expression algébrique de la forme*** $ax + b$ ***dont les coefficients*** a ***et*** b ***sont des nombres connus.***

Le coefficient a ***est toujours supposé différent de zéro.***

EXEMPLES : $-2x - 5, \quad -3x + 7, \quad -4x.$

On appelle racine d'un binôme la valeur x' ***de*** x ***pour laquelle ce binôme est nul.***

Ainsi pour $2x - 5$, on a : $2x' - 5 = 0$ d'où : $x' = \frac{5}{2}$.

En général, la racine du binôme $ax + b$ est : $p = -\frac{b}{a}$.

184. Signe d'un binôme. — Le binôme $2x - 5$ prend, pour $x = 4$, la valeur numérique $+3$. On dit que ce binôme est positif pour $x = 4$.

Il prend, pour $x = 2$, la valeur numérique -1. Le binôme est négatif pour $x = 2$. Les valeurs de x pour lesquelles $2x - 5$ est positif sont les solutions de l'inéquation :

$$2x - 5 > 0 \qquad \text{ou} \qquad x > \frac{5}{2}.$$

Le binôme $2x - 5$ est donc positif pour : $x > \frac{5}{2}$.

On voit de même qu'il est négatif pour : $x < \frac{5}{2}$.

On résume ceci par le tableau

x	$-\infty$	$5/2$	$+\infty$
$2x - 5$	$-$	0	$+$

185. Cas général. — ***Le binôme*** $ax + b$ ***est du signe du coefficient*** a ***pour les valeurs de*** x ***supérieures à sa racine et du signe opposé pour les valeurs de*** x ***inférieures à sa racine.***

En effet, le binôme s'écrit en appelant $p = -\frac{b}{a}$ sa racine :

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a\,(x - p).$$

Le produit $a\,(x - p)$ est :

du signe de a lorsque $x - p$ est positif, donc pour $x > p$;

du signe opposé à celui de a si $x - p$ est négatif, donc pour $x < p$.

En résumé :

x	$-\infty$	p	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

186. Signe d'un produit de facteurs du premier degré. — On étudie, suivant les valeurs de x, le signe de chaque facteur et on en déduit le signe du produit.

EXEMPLE. — *Signe du produit :* $\text{P} = (x - 3)\,(2x + 1)\,(1 - x)$

$x - 3$ est nul pour $x = 3$, positif pour $x > 3$, négatif pour $x < 3$.

$2x + 1$ est nul pour $x = -\frac{1}{2}$, pos. pour $x > -\frac{1}{2}$, nég. pour $x < -\frac{1}{2}$.

$1 - x$ est nul pour $x = 1$, positif pour $x < 1$, négatif pour $x > 1$.

Le produit P est nul pour $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ et $x = 3$.

Dans l'intervalle $]+1, +3[$ par exemple, le premier facteur est négatif, le second positif et le troisième négatif. Le produit P est donc positif.

Pratiquement, on construit le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		3	$+\infty$
$x - 3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x + 1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$1 - x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
P	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

On inscrit sur la première ligne les valeurs remarquables de x, racines des différents facteurs, rangées par ordre croissant. Sur les lignes suivantes on inscrit les résultats relatifs à chacun des facteurs pris isolément. On en déduit les résultats relatifs au produit que l'on inscrit sur la dernière ligne.

187. Remarque. — Le signe du produit change pour chacune des valeurs *remarquables*. Ce signe est donc alternativement $+$ et $-$ dans chacun des intervalles considérés. Il en sera en général ainsi, sauf si deux facteurs ont même racine.

Ainsi le produit $P' = (x - 2)(2x - 1)(4 - 2x)$

admet pour valeurs remarquables $+2$, $+\frac{1}{2}$ et $+2$. On obtient :

x	$-\infty$		$1/2$		2		$+\infty$
P'		$+$	0	$-$	0	$-$	

Le premier et le dernier facteur changent tous deux de signe pour $x = 2$, le signe du produit ne change pas. On peut le voir directement car

$$4 - 2x = -2(x - 2)$$

et on peut écrire : $\quad P' = -2(2x - 1)(x - 2)^2.$

Sauf pour $x = 2$, le carré $(x - 2)^2$ est positif et n'intervient pas dans le signe du produit qui est celui de $-2(2x - 1)$.

188. Signe d'une fraction rationnelle. — Le signe d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ est celui du produit $A \cdot B$. Lorsque A et B sont décomposés en facteurs du premier degré, on est ramené à étudier le signe d'un produit de facteurs du premier degré.

Exemple. — *Signe de* : $F = \dfrac{6x^2 - 10x}{x + 1}$.

Cette fraction rationnelle s'écrit : $F = \dfrac{2x(3x - 5)}{x + 1}$.

Étudions le signe de chacun des binômes $2x$, $3x - 5$, et $x + 1$, dont les racines sont 0, $\frac{5}{3}$ et -1. On obtient :

x	$-\infty$		-1		0		$5/3$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x - 5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
F		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit, sur la dernière ligne, le signe de la fraction suivant les différentes valeurs de x. (Le double trait vertical correspondant à la valeur $x = -1$ indique que pour cette valeur la fraction n'est pas définie.)

APPLICATIONS AUX INÉQUATIONS

189. Inéquations de la forme $A \cdot B \cdot C > 0$ (A, B et C étant du premier degré). On étudie le signe du premier membre et on voit immédiatement les valeurs de x pour lesquelles l'inéquation est vérifiée.

EXEMPLE. — *Résoudre l'inéquation*

$$(x - 3)(2x + 1)(1 - x) < 0.$$

Étudions le signe du premier membre, on trouve (cf. nº 186) :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		3		$+\infty$
$(x-3)(2x+1)(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On voit que l'inéquation est vérifiée pour $-\frac{1}{2} < x < 1$ ou $x > 3$.

Soit graphiquement (fig. 24) :

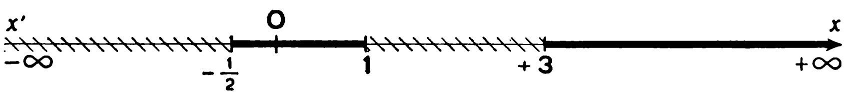


Fig. 24.

— Lorsque le premier membre est un polynôme quelconque, il faut d'abord le décomposer en facteurs du premier degré. On pourra, à titre d'exercice, résoudre les exemples des nºs 170 à 172, en remplaçant le signe $=$ par l'un des signes $>$ ou $<$.

190. Inéquations renfermant l'inconnue en dénominateur.

EXEMPLE. I. — *Résoudre l'inéquation :* $\dfrac{2x(3x-5)}{x+1} < 0.$

Étudions le signe du premier membre. On obtient (nº 188) :

x	$-\infty$		-1		0		$5/3$		$+\infty$
$\dfrac{2x(3x-5)}{x+1}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On voit que l'inéquation est vérifiée pour : $x < -1$ ou $0 < x < \frac{5}{3}$.

EXEMPLE II. — *Résoudre l'inéquation :*

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x} > 2.$$

Ramenons à la forme précédente. Nous obtenons :

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x} - 2 > 0.$$

D'où :

$$\frac{x^2}{x(x-2)} + \frac{x^2-4}{x(x-2)} - \frac{2x(x-2)}{x(x-2)} > 0$$

$$\frac{x^2 + x^2 - 4 - 2x^2 + 4x}{x(x-2)} > 0.$$

Soit : $\frac{4(x-1)}{x(x-2)} > 0$ ou $\frac{x-1}{x(x-2)} > 0.$

Étudions le signe du premier membre. Les valeurs remarquables de x sont 0, 1 et 2. Nous obtenons :

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$\frac{x-1}{x(x-2)}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

L'inéquation est donc vérifiée pour $0 < x < 1$ ou $x > 2$.

191. Règle. — *Lorqu'une inéquation renferme l'inconnue en dénominateur, il faut :*

1° Faire passer tous les termes dans un membre.

2° Réduire l'expression fractionnaire ainsi obtenue.

3° Étudier le signe de cette expression.

4° En déduire les solutions de l'inéquation.

— Remarquons que le signe de la fraction $\frac{A}{B}$ obtenue est le même que celui de $A \cdot B$, soit de $\frac{A}{B} \times B^2$. *Pour chasser, dans une inéquation, un dénominateur contenant l'inconnue, il faut donc multiplier les deux membres par le carré de ce dénominateur.*

EXERCICES

— Étudier, selon les valeurs de x, le signe des expressions :

518. $(2x - 3)(4x + 3)$. **519.** $(3x - 7)(5 - x)$. **520.** $3x(2x + 7)(9 - 3x)$.

521. $4x^2 - 25$. **522.** $3x^3 - 12x$. **523.** $4x^2 - (x + 1)^2$.

524. $(x^2 - 1)(9 - 4x^2)$. **525.** $x^4 - 10x^2 + 9$. **526.** $9x^3 - 9x^2 - 4x + 4$.

527. $\dfrac{2x + 5}{3x - 1}$. **528.** $\dfrac{x(3x + 4)}{4 - 5x}$. **529.** $\dfrac{x^2 - 4x}{(2x + 3)^2 - x^2}$,

— Résoudre les inéquations :

530. $2x(3x - 5) > 0$.

531. $(2x - 3)(3x - 4)(5x + 2) > 0$.

532. $(3x + 2)(16 - 9x^2) < 0$.

533. $(3x + 5)(4x - 1)(9x^2 - 3) < 0$.

534. $(2x + 4)^2 > (x - 1)^2$.

535. $25 - 16x^2 > 8x^2 - 10x$.

536. $x^3 - 8 + 2(x - 2)^2 > 0$.

537. $(4x + 5)^2 - (2x + 8)^2 < 8x^3 - 27$.

538. $\dfrac{4x(3x + 2)}{2x + 5} > 0$.

539. $\dfrac{(4x + 3)(2x - 7)}{5 - x} < 0$.

540. $\dfrac{2x - 5}{3x + 2} < \dfrac{3x + 2}{2x - 5}$.

541. $\dfrac{3x + 2}{(x - 1)(x - 2)} < 1$.

542. $\dfrac{3}{x - 3} + \dfrac{4}{x - 5} > \dfrac{7}{x - 4}$.

543. $\dfrac{5}{2(3x + 1)} - \dfrac{1}{2x + 3} > \dfrac{1}{3x + 8}$.

544. $\dfrac{5x + 4}{2x + 1} - \dfrac{9x + 2}{6x + 6} < \dfrac{x + 5}{x + 1}$,

545. $\dfrac{2x - 7}{2(x - 1)} - 1 > \dfrac{1}{4 - x}$,

— Résoudre les systèmes d'inéquations simultanées :

546. $\begin{cases} (2x + 1)^2 - (x + 2)^2 > 0. \\ \dfrac{1}{x + 5} > \dfrac{1}{x - 5}, \\ \dfrac{(x - 3)^3}{3} < (x - 1)^3 - 8. \end{cases}$

547. $\begin{cases} (3x + 8)^2 - (x + 4)^2 > 0. \\ \dfrac{4}{x - 4} - \dfrac{3}{x - 3} > \dfrac{1}{x}. \\ \dfrac{x^3 - 5}{x^2 - 1} < 5. \end{cases}$

548. $\begin{cases} \dfrac{5x - \sqrt{2}}{x\sqrt{2} - 3} > 0. \\ x^2 - 1 < 0. \end{cases}$

549. $\begin{cases} \dfrac{2m\sqrt{3} - 1}{m\sqrt{3} + 1} < 0. \\ 12m^2 - 1 > 0. \end{cases}$

550. $\begin{cases} x^3 - 5x > 0. \\ x^3 - 3x < 0. \end{cases}$

551. $\begin{cases} (m - 1)^2 < 28. \\ (m - 1)^2 (m - 1 + \sqrt{7}) > 0. \end{cases}$

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES

192. Équation à deux inconnues. — Considérons l'équation du premier degré à deux inconnues

$$2x - 3y = 1 \qquad (1)$$

Fixons-nous la valeur d'une inconnue, par exemple $y = 3$. L'équation proposée devient :

$$2x - 9 = 1.$$

C'est une équation du 1er degré à une inconnue qui donne $x = 5$.

On vérifie que pour le système de valeurs $x = 5$ et $y = 3$ l'équation proposée se transforme en égalité numérique :

$$(2 \times 5) - (3 \times 3) = 1,$$

$x = 5, y = 3$ constitue une solution de l'équation (1) (no 157).

Il est clair qu'en se fixant arbitrairement y on trouvera, par ce procédé, une valeur correspondante de x, donc une solution de l'équation (1). On vérifiera ainsi que :

$$\begin{array}{ll} x = 0{,}5 \ ; & y = 0 \\ x = -1 \ ; & y = -1 \\ x = +2 \ ; & y = +1 \quad \text{etc...} \end{array}$$

sont des solutions de l'équation (1). En général :

Une équation à plusieurs inconnues admet une infinité de solutions.

193. Système de deux équations à deux inconnues. — Considérons les deux équations du premier degré à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 5y = -27. \end{cases}$$

Leur association forme un **système de deux équations à deux inconnues.**

Résoudre ce système, c'est trouver les solutions communes aux deux équations qui le composent.

A cet effet, on forme, à partir du système donné, une équation contenant *une seule inconnue*. Il faut donc faire disparaître ou *éliminer* l'autre. Nous utiliserons pour cela deux méthodes.

I. ÉLIMINATION PAR SUBSTITUTION

194. Exemple. — Considérons le système

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & (1) \\ 3x + 5y = -27. & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1) calculons y, comme si x était un nombre connu :

$$2x - 1 = 3y$$

et :

$$y = \frac{2x-1}{3}. \qquad (3)$$

Dans l'équation (2), remplaçons y par la valeur ainsi trouvée :

$$3x + 5\left(\frac{2x-1}{3}\right) = -27. \qquad (4)$$

L'équation (4) contient la seule inconnue x. Nous avons réussi à éliminer y entre les équations (1) et (2). D'autre part, si x et y vérifient le système proposé, l'équation (3) vérifiée en même temps que l'équation (1) montre que y et $\frac{2x-1}{3}$ ont même valeur numérique; l'équation (2) étant vérifiée, il en est de même de l'équation (4). Résolvons cette équation :

$$3x + \frac{10x-5}{3} = -27$$

$$9x + (10x - 5) = -81$$

$$19x = -76$$

et

$$x = -4.$$

Portons $x = -4$ dans l'équation (3); nous obtenons :

$$y = \frac{-8-1}{3} = -3.$$

Donc, si le système proposé admet une solution, c'est :

$$x = -4, \qquad y = -3.$$

Vérifions qu'il en est bien ainsi :

$$2 \times (-4) - 3 \times (-3) = +1$$
$$3 \times (-4) + 5 \times (-3) = -27.$$

En général :

195. Règle. — ***La méthode de substitution consiste à calculer l'une des inconnues dans l'une des équations puis, dans l'autre équation, à substituer à cette inconnue la valeur ainsi trouvée.***

On peut ainsi résoudre le système proposé de quatre façons différentes. On a en effet le choix entre les deux inconnues dans chacune des deux équations. Pratiquement on choisit l'inconnue qui a le plus faible coefficient ou celle qui donne visiblement les calculs les plus simples.

II. ÉLIMINATION PAR ADDITION

196. Exemple. — *Soit à résoudre le système :*

$$\begin{cases} 9x + 2y = 17 & (1) \\ 6x + 5y = -7. & (2) \end{cases}$$

Les coefficients de y sont $+2$ et $+5$. Nous pouvons les rendre symétriques en multipliant les deux membres de la première équation par $+5$ et ceux de la seconde par -2. Nous obtenons :

$$\begin{cases} 45x + 10y = 85 & (3) \\ -12x - 10y = 14. & (4) \end{cases}$$

Si nous additionnons membre à membre les deux équations, l'inconnue y s'élimine et nous obtenons une équation en x, vérifiée en même temps que les équations (1) et (2) :

$$33x = 99$$

et

$$x = 3.$$

Portons $x = 3$ dans l'équation (1)

$$27 + 2y = 17$$
$$2y = 17 - 27 = -10.$$

D'où :

$$y = -5.$$

La solution du système est : $x = +3$; $y = -5$ ce qu'il est facile de vérifier :

$$\begin{cases} 27 - 10 = 17 \\ 18 - 25 = -7. \end{cases}$$

— Remarquons que la valeur de y peut aussi se calculer par addition. Les coefficients de x étant 9 et 6 les multiplicateurs 6 et — 9 peuvent être simplifiés par 3 et ramenés à 2 et — 3. On obtient :

$$\begin{array}{r} 18x + 4y = 34 \\ -18x - 15y = 21 \\ \hline -11y = 55 \end{array} \qquad \text{D'où : } y = -5.$$

En résumé :

197. Règle. — ***La méthode d'addition consiste à multiplier les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de telle sorte que les coefficients d'une inconnue deviennent des nombres symétriques. Cette inconnue s'élimine alors par addition.***

Lorsqu'on a obtenu une première inconnue, on peut indifféremment :

1° Appliquer à nouveau la méthode d'addition pour calculer la seconde.

2° Porter la valeur trouvée dans l'une ou l'autre équation du système proposé.

— Lorsque les coefficients d'une des inconnues sont égaux, cette inconnue s'élimine immédiatement en retranchant membre à membre les deux équations.

Ainsi pour : $\begin{cases} 7x + 5y = 19 \\ 3x + 5y = 31 \end{cases}$

On obtient : $4x = -12$ D'où : $x = -3$

et en portant dans la première : $-21 + 5y = 19$ D'où : $y = 8$.

III. SYSTÈME LITTÉRAL

198. Système général du premier degré à deux inconnues. — Toute équation du premier degré à deux inconnues peut, après réduction au dénominateur commun, suppression de ce dénominateur et transposition des termes inconnus dans un membre, des termes connus dans l'autre s'écrire :

$$ax + by = c.$$

La forme générale d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y est donc :

$$\text{(I)} \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

En posant : $E = ax + by - c$ et $E' = a'x + b'y - c'$
il devient :

$$\text{(II)} \begin{cases} E = 0 & (3) \\ E' = 0 & (4) \end{cases}$$

199. Résolution et discussion du système.

Formons le système (III) :

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} b'\mathrm{E} - b\mathrm{E}' = 0 & (5) \\ -a'\mathrm{E} + a\mathrm{E}' = 0 & (6) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x\,(ab' - a'b) - (cb' - c'b) = 0 & (5) \\ y\,(ab' - a'b) + (ca' - c'a) = 0 & (6) \end{cases}$$

Toute solution du système (II), annulant E et E′, est une solution du système III.

I. Cas général. — Si $ab' - a'b \neq 0$, les équations à une inconnue (5) et (6) ont pour solution unique (n° 162) :

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

seule solution possible pour le système (I).

Vérifions qu'il en est bien ainsi :

$$\begin{cases} a\,\dfrac{(cb' - c'b)}{ab' - a'b} + \dfrac{b\,(ac' - a'c)}{ab' - a'b} = \dfrac{acb' - ba'c}{ab' - a'b} = c \\[2ex] a'\,\dfrac{cb' - c'b}{ab' - ab'} + \dfrac{b'\,(ac' - a'c)}{ab' - a'b} = \dfrac{-a'c'b + b'ac'}{ab' - a'b} = c' \end{cases}$$

II. 1$^{\text{er}}$ cas particulier : Supposons : $ab' - a'b = 0$ sans que les quatre coefficients a, b, a', b' soient nuls tous les quatre.

Soit par exemple $a \neq 0$:

$$ab' - a'b = 0 \Longrightarrow b' = \frac{a'b}{a}. \qquad \text{Le système devient :}$$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + \dfrac{ba'}{a}\,y = c' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'\,(ax + by) = ac' & (7) \end{cases}$$

Tenant compte de l'équation (1), l'équation (7) nécessite :

$$a'c = ac' \quad \text{ou} \quad a'c - ac' = 0$$

1° Si $a'c \neq ac'$, c'est à dire si : $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} \neq \dfrac{c'}{c}$, le système est *impossible.*

2° Si $a'c = ac'$, c'est à dire si : $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$, toute solution de (1) est solution de (7). A chaque valeur de y correspond une valeur de x :

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

On dit qu'il y a *indétermination* pour une inconnue.

III. **2e cas particulier :** Supposons $a = b = a' = b' = 0$.

Le système (I) devient :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} 0x + 0y = c & (1) \\ 0x + 0y = c' & (2) \end{cases}$$

1° Si c ou c' sont différents de zéro, le système est *impossible.*

2° Si $c = c' = 0$ le système est vérifié pour toute valeur de x et toute valeur de y. Il y a *indétermination* pour les deux inconnues.

200. Résumé. — Posons :

$$\boxed{\mathrm{D} = ab' - a'b}\,.$$

Les résultats de la discussion sont alors rassemblés dans le tableau suivant :

I. $\mathrm{D} \neq 0$: *Solution unique*	$\begin{cases} x = \dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \\ y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \end{cases}$
II. $\mathrm{D} = 0$; a; b; a' ou $b' \neq 0$	$\begin{cases} \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} \neq \dfrac{c'}{c} : \textit{impossibilité} \\ \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c} : \textit{indétermination} \end{cases}$
III. $\mathrm{D} = 0$; $a = a' = b = b' = 0$	$\begin{cases} c \text{ ou } c' \neq 0 : \textit{impossibilité} \\ c = c' = 0 : \textit{indétermination.} \end{cases}$

201. Déterminant du système. — Le nombre $\mathrm{D} = ab' - a'b$ se nomme *déterminant* du système. Si $\mathrm{D} \neq 0$ le système admet une solution unique. Réciproquement, s'il admet une solution unique on a : $\mathrm{D} \neq 0$ car si l'on avait $\mathrm{D} = 0$ le système serait impossible ou indéterminé. Ainsi :

Pour que le système général de deux équations du premier degré à deux inconnues ait une solution unique, il faut et il suffit que le déterminant de ce système soit différent de zéro.

Le déterminant $\mathrm{D} = ab' - a'b$ s'écrit : $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

Il se calcule en faisant le produit $a \cdot b'$ des éléments situés sur la diagonale descendante et en retranchant le produit $a' \cdot b$ des éléments situés sur la diagonale ascendante :

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a\,b' - a'b.$$

De même : $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ et $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$

On peut ainsi écrire, pour $D \neq 0$, la solution du systéme I (nº 198) :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

202. Exemple de système impossible.

Soit : $\begin{cases} 6x + 9y = 7 \\ 4x + 6y = 5. \end{cases}$

Éliminons y en additionnant membre à membre après avoir multiplié la première équation par -2 et la seconde par 3. Nous obtenons :

$$0x = 1.$$

Cette équation est impossible. Il en est de même du système proposé, ce qu'on pouvait prévoir car :

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \neq \frac{5}{7}.$$

203. Exemple de système indéterminé.

Soit : $\begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ 15x - 5y = 10. \end{cases}$

Après simplification, les deux équations se réduisent à l'équation unique :

$$3x - y = 2.$$

Le système est donc indéterminé.

204. Exemples de discussion d'un système littéral. — Lorsque les coefficients des équations d'un système dépendent de lettres supposées connues, et appelées *paramètres*, il est bon de déterminer les valeurs de ces paramètres pour lesquelles le système est possible, impossible ou indéterminé. On peut utiliser les résultats du tableau de discussion du nº 200 ou opérer directement ce qui est souvent plus simple.

205. Exemple I. — *Résoudre et discuter le système en x et* y :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & (1) \\ (m+1)x + y = 2 & (2) \end{cases}$$

Éliminons y entre les deux équations par la méthode d'addition :

$$\begin{array}{r} -2x - 3y = -5 \\ (3m+3)x + 3y = 6 \\ \hline (3m+1)x \qquad = 1 \end{array} \tag{3}$$

1° Si $3m + 1 \neq 0$, soit $m \neq -\frac{1}{3}$ on a : $\quad x = \dfrac{1}{3m+1}$

en portant dans la première équation on a : $\quad y = \dfrac{5m+1}{3m+1}$.

2° Si $m = -\frac{1}{3}$ l'équation (3) donne : $0x = 1$. Le système est impossible.

L'équation (2) qui s'écrit alors : $2x + 3y = 6$ est manifestement incompatible avec l'équation (1).

206. Exemple II. — *Résoudre et discuter le système :*

$$\begin{cases} x - my = m^2 & (1) \\ x - py = p^2. & (2) \end{cases}$$

Retranchons membre à membre les deux équations, x s'élimine et nous obtenons :

$$y(p - m) = m^2 - p^2. \tag{3}$$

1° Si $p - m \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq p$, on a :

$$y = \frac{m^2 - p^2}{p - m} = \frac{(m+p)(m-p)}{p-m} = -(m+p)$$

et d'après (1) : $x = -m(m+p) + m^2 = -mp$.

2° Si $m = p$, l'équation (3) devient : $0y = 0$, donc indétermination.

On peut vérifier qu'on a alors : $\dfrac{1}{1} = \dfrac{-m}{-p} = \dfrac{m^2}{p^2}$.

Les deux équations sont identiques et toute solution de l'une est solution du système.

207. Problème. — *Pour quelles valeurs de* m *le système :*

$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ mx + my = m - 1 \end{cases}$$

est-il possible, impossible ou *indéterminé ?*

La condition de possibilité du n° 200 s'écrit ici :

$$m^2 - 2m \neq 0 \quad \text{ou} \quad m(m-2) \neq 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

1° Si $m \neq 0$ et $m \neq 2$, le système est possible.

2° Si $m = 0$ le système devient $\begin{cases} 2y = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$ donc impossibilité.

3° Si $m = 2$ le système devient $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$

Il se réduit à une seule équation, donc indétermination.

EXERCICES

— Résoudre les systèmes suivants :

552. $\begin{cases} 3x - 7y = -55. \\ 5x + 4y = 18. \end{cases}$ **553.** $\begin{cases} 12x - 5y = 63. \\ 8x - 15y = 77. \end{cases}$ **554.** $\begin{cases} 9x + 10y = 75. \\ 12x + 25y = 135. \end{cases}$

555. $\begin{cases} 12x + 7y = 71. \\ 18x + 13y = 89. \end{cases}$ **556.** $\begin{cases} 9x - 8y = 85. \\ 13x - 12y = 117. \end{cases}$ **557.** $\begin{cases} 5x + 21y = 77. \\ 9x - 14y = 35. \end{cases}$

558. $\begin{cases} 31x - 4y = 495. \\ 18x - 17y = 170. \end{cases}$ **559.** $\begin{cases} 43x + 37y = 263 \\ 23x + 7y = 243 \end{cases}$ **560.** $\begin{cases} 61x - 25y = 640. \\ 49x - 19y = 526. \end{cases}$

561. $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{7y}{3} = 41. \\ \dfrac{5x}{2} - \dfrac{3y}{5} = 11. \end{cases}$ **562.** $\begin{cases} \dfrac{5x}{3} - \dfrac{2y}{5} = 19 \\ 4x + \dfrac{3y}{2} = 21 \end{cases}$ **563.** $\begin{cases} \dfrac{9x}{7} - \dfrac{2y}{3} = -28. \\ \dfrac{3x}{2} + \dfrac{12y}{5} = 15. \end{cases}$

564. $\begin{cases} x + y = \dfrac{4x - 3.}{5} \\ x + 3y = \dfrac{15 - 9y}{14}. \end{cases}$ **565.** $\begin{cases} \dfrac{2x - 5y - 1}{11} + \dfrac{x - 2y}{3} = 16. \\ \dfrac{7x + y}{5} + \dfrac{2(x - 1)}{3} = 31. \end{cases}$

566. $\begin{cases} \dfrac{3x + 2y}{4} + \dfrac{6x + 5y}{13} = -9. \\ \dfrac{4x - 5y + 16}{17} = \dfrac{6x + y}{15}. \end{cases}$ **567.** $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{3} + \dfrac{x - y}{4} = 26. \\ \dfrac{4x + 2y + 1}{7} - \dfrac{x - 2}{13} = 22. \end{cases}$

568. $\begin{cases} \dfrac{x - y}{7} + \dfrac{2x + y}{17} = 7. \\ \dfrac{4x + y}{5} + \dfrac{y - 7}{19} = 15. \end{cases}$ **596.** $\begin{cases} \dfrac{x + y - 5}{7} = \dfrac{x - y}{3} + 3. \\ \dfrac{3x + 5y}{11} - \dfrac{3x - y}{13} = \dfrac{x + y}{4}. \end{cases}$

570. $\begin{cases} \dfrac{x + 3}{9} + \dfrac{2x - y}{12} = 4. \\ \dfrac{2x - 5y}{3} - \dfrac{3x - 7y}{11} = -55. \end{cases}$ **571.** $\begin{cases} \dfrac{5x + 9y + 30}{5} - \dfrac{x + y}{3} = 80. \\ \dfrac{4x - 5(y - 1)}{7} + \dfrac{6x + y}{4} = 80. \end{cases}$

572. $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{5} - \dfrac{y}{2} = 4. \\ \dfrac{x+1}{y+2} - 2 = \dfrac{2(x-1)}{y+2}. \end{cases}$

573. $\begin{cases} 2(x+1) - \dfrac{y}{4} = 10. \\ \dfrac{2x+3}{3-4x} = \dfrac{x-y+5}{6-2x+2y}. \end{cases}$

574. $\begin{cases} \dfrac{(x+3)^2 + (y-8)^2}{x^2+y^2+39} = 1. \\ \dfrac{2x+3y+8}{5x+4y-1} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

575. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{y-3} - \dfrac{x+5}{y+1} = \dfrac{3}{(y+1)(y-3)}. \\ \dfrac{2x+y}{15-8x-4y} = \dfrac{4x-y}{5-16x+4y}. \end{cases}$

576. $\begin{cases} 3x\sqrt{2} + 2y = 8. \\ x\sqrt{2} - y = 1. \end{cases}$

577. $\begin{cases} 5x\sqrt{5} - 7y\sqrt{3} = 29. \\ \dfrac{x}{\sqrt{5}} - \dfrac{y}{\sqrt{3}} = 1. \end{cases}$

— Résoudre et discuter les systèmes suivants :

578. $\begin{cases} 2mx + 3y = 5. \\ (m+1)x + y = 2. \end{cases}$

579. $\begin{cases} x - my = 0. \\ mx - y = m+1. \end{cases}$

580. $\begin{cases} 5x + 2y = 3. \\ 2mx + (m-1)y = m+1. \end{cases}$

581. $\begin{cases} 4x + 3y = 7. \\ (m-2)x + my = m-1. \end{cases}$

582. $\begin{cases} x + my = 3m. \\ mx - y = m^2 - 2. \end{cases}$

583. $\begin{cases} x - my = 1 + m^2. \\ mx + y = 1 + m^2. \end{cases}$

584. $\begin{cases} 3x - 2y = m. \\ (m-3)x - y = 1 - m. \end{cases}$

585. $\begin{cases} x + y = m - 2. \\ (m+2)x - 4y = m^2 - 4. \end{cases}$

586. $\begin{cases} 2x - y = 3 + 2m. \\ mx + y = (m+1)^2. \end{cases}$

587. $\begin{cases} mx - y = 2m + 1, \\ (2m+1)x - 4y = 4m + 3. \end{cases}$

588. $\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2. \\ bx + ay = 2ab. \end{cases}$

589. $\begin{cases} ax - y = a^2. \\ bx - y = b^2. \end{cases}$

590. $\begin{cases} mx - py = m^2 - p^2. \\ px + my = 2mp \end{cases}$

591. $\begin{cases} px + my = p - m. \\ mx - py = p + m. \end{cases}$

592. $\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 2a. \\ (a^2+b^2)x + (a^2-b^2)y = 2a^2. \end{cases}$

593. $\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 2. \\ (a^3+b^3)x + (a^3-b^3)y = 2(a^2+b^2). \end{cases}$

594. $\begin{cases} \dfrac{x}{x-a} - \dfrac{y}{y-b} = 0. \\ ax - by = a - b. \end{cases}$

595. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2. \\ x + y = 2a. \end{cases}$

596. $\begin{cases} mx + py = 2mp. \\ \dfrac{x}{x-m} + \dfrac{y}{y-p} = 2. \end{cases}$

597. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = a + b. \\ x - y = a^2 + b^2. \end{cases}$

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS A PLUSIEURS INCONNUES

208. Système de trois équations à trois inconnues. — Les méthodes de substitution et d'addition s'étendent à la résolution de systèmes de trois équations du premier degré à trois inconnues.

EXEMPLE. — *Résoudre le système :*

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x + 5y - 3z = 34 & (1) \\ 4x - 7y + z = 3 & (2) \\ 2x + 3y - 2z = 22 & (3) \end{array}\right.$$

1° **Par substitution.** — Calculons z dans l'équation (2) et portons sa valeur dans les équations (1) et (3); nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} z = 3 - 4x + 7y \\ 3x + 5y - 3(3 - 4x + 7y) = 34 \\ 2x + 3y - 2(3 - 4x + 7y) = 22 \end{array}\right.$$

Soit, après réduction :

$$\left\{\begin{array}{ll} z = 3 - 4x + 7y & (4) \\ 15x - 16y = 43 & (5) \\ 10x - 11y = 28 & (6) \end{array}\right.$$

Les équations (5) et (6) forment un système de deux équations à deux inconnues. Résolvons-le :

$$\begin{array}{r} 30x - 32y = 86 \\ -30x + 33y = -84 \\ \hline y = 2 \end{array} \quad \text{et d'après (5)} \quad x = 5.$$

En portant les valeurs $y = 2$ et $x = 5$ dans l'équation (4) nous trouvons $z = -3$.

Le système admet pour solution $x = 5, y = 2, z = -3$, ce qu'il est facile de vérifier. La méthode de substitution a permis de ramener la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues à celle d'un système de deux équations à deux inconnues. Ceci est général :

En calculant une des inconnues dans une des équations et en portant la valeur ainsi trouvée dans les autres équations, la résolution d'un système de n *équations du premier degré à* n *inconnues se ramène à la résolution d'un système de* n — 1 *équations à* n — 1 *inconnues.*

Ainsi la résolution d'un système de quatre équations à quatre inconnues se ramène à celle d'un système de trois équations à trois inconnues, etc...

2° **Par addition.** — Éliminons z entre les équations (1) et (2), puis entre les équations (2) et (3).

$$\begin{array}{rll} 3x + 5y - 3z = 34 & (1) \\ 12x - 21y + 3z = 9 & (2) \\ \hline 15x - 16y = 43 & (5) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 8x - 14y + 2z = 6 & (2) \\ 2x + 3y - 2z = 22 & (3) \\ \hline 10x - 11y = 28 & (6) \end{array}$$

Nous sommes conduits, comme précédemment, à résoudre le système formé par les équations (5) et (6). On trouve : $x = 5$ et $y = 2$ et en portant ces valeurs dans (2) $z = -3$.

209. Remarques. — 1° Il faut de préférence utiliser les simplifications qui peuvent se présenter. Ainsi si une équation ne contient pas x, l'élimination de x entre les deux autres donnera un système de deux équations en y et z.

Si une équation ne contient pas x et si une autre ne contient pas y, on pourra calculer y dans la première, et x dans la seconde en fonction de z. En portant ces valeurs dans la troisième on aura tout de suite la valeur de z.

2° On peut aussi combiner par addition les équations d'un système, de façon à les simplifier. En particulier lorsque les équations d'un système présentent une certaine symétrie, on obtient, en les additionnant membre à membre, une équation qui en facilite souvent la résolution.

EXEMPLE. — *Résoudre le système :* $\begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ x + 2y + z = 20 \\ x + y + 2z = 17. \end{cases}$

Additionnons membre à membre :

$$4x + 4y + 4z = 60$$

D'où en simplifiant : $x + y + z = 15.$

Retranchons membre à membre cette équation des différentes équations du système proposé. Nous obtenons immédiatement :

$$x = 8, \qquad y = 5 \qquad \text{et} \qquad z = 2$$

ce qui constitue la solution du système proposé, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

SYSTÈMES PARTICULIERS

210. Les inconnues sont proportionnelles à des nombres donnés.

EXEMPLE. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7} & (1)\,(2) \\ 5x - 3y + z = 6. & (3) \end{cases}$$

Les deux premières équations se ramènent facilement à :

$$5x - 2y = 0 \qquad \text{et} \qquad 7x - 2z = 0$$

et on pourrait appliquer la méthode du n° 208. Il est plus élégant d'opérer d'une façon plus symétrique. Désignons par t la valeur commune des rapports $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{5}$, et $\frac{z}{7}$. On obtient :

$$x = 2t, \qquad y = 5t \qquad \text{et} \qquad z = 7t. \qquad (4)$$

Portons ces valeurs dans l'équation (3) :

$$10t - 15t + 7t = 6.$$

Donc : $\quad 2t = 6 \quad$ et $\quad t = 3.$

Ce qui donne en portant cette valeur dans les relations (4) :

$$x = 6, \qquad y = 15 \qquad \text{et} \qquad z = 21.$$

211. Remarque. — On peut également utiliser les propriétés des rapports égaux (n° 73) et écrire :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{5x - 3y + z}{5 \times 2 - 3 \times 5 + 7} = \frac{5x - 3y + 7}{10 - 15 + 7} = \frac{6}{2} = 3.$$

On obtient ainsi immédiatement la valeur des rapports $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{5}$, et $\frac{z}{7}$, et on en déduit :

$$x = 3 \times 2 = 6 \qquad y = 3 \times 5 = 15 \qquad \text{et} \qquad z = 3 \times 7 = 21.$$

212. Applications. — **1°** ***Trouver deux nombres connaissant leur rapport et leur somme ou leur différence.***

Si deux nombres x et y ont pour rapport $\frac{5}{7}$ et pour somme 72 ils vérifient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{7} \\ x + y = 72 \end{cases}$$

on en déduit : $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{5+7} = \frac{72}{12} = 6.$

D'où $x = 6 \times 5 = 30$ et $y = 6 \times 7 = 42.$

— De même si on a : $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$ et $x - y = 21.$

On en déduit : $\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{x-y}{8-5} = \frac{21}{3} = 7.$

Donc $x = 7 \times 8 = 56$ et $y = 7 \times 5 = 35.$

2° ***Partager un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés.*** — Soit à partager 110 en 3 nombres x, y et z proportionnels à 2, 3 et 5.

Nous avons : $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \\ x + y + z = 110. \end{cases}$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{110}{10} = 11.$$

Donc : $x = 11 \times 2 = 22$; $y = 11 \times 3 = 33$; $z = 11 \times 5 = 55.$

213. Changement d'inconnues. — Lorsqu'un système n'est pas du premier degré, on peut parfois l'y ramener par un changement d'inconnues.

EXEMPLE. — *Résoudre le système :*

$$\mathrm{I} \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 13 & (1) \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = -31 & (2) \end{cases}$$

Posons : $\frac{1}{x} = \mathrm{X}$ et $\frac{1}{y} = \mathrm{Y}$. Le système devient :

$$\mathrm{II} \begin{cases} 4\mathrm{X} + 3\mathrm{Y} = 13 \\ 5\mathrm{X} - 3\mathrm{Y} = -31. \end{cases}$$

Ce système est du premier degré en X et Y. On obtient facilement par addition :

$$9\,\mathrm{X} = -18 \qquad \text{donc } \mathrm{X} = -2$$

et

$$-8 + 3\mathrm{Y} = 13 \qquad \text{donc } \mathrm{Y} = 7.$$

On a donc : $\frac{1}{x} = -2$ et $x = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{y} = 7$ et $y = \frac{1}{7}$.

214. Cas où il y a plus d'inconnues que d'équations.

Considérons le système $\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x + y - 3z = 5. \end{cases}$

En donnant à z une valeur quelconque -5, $+2$, $+7$ etc... on obtient un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre.

Une des inconnues est donc arbitraire et le système admet une infinité de solutions.

215. Cas où il y a plus d'équations que d'inconnues.

Considérons le système $\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \\ 3x + 5y = 13 & (3) \end{cases}$

Le système formé par les équations (1) et (2) admet pour solution :

$$x = 6 \quad \text{et} \quad y = 4.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (3) : le premier membre devient 38. L'équation (3) ne peut donc être vérifiée en même temps que les deux premières : **Le système est impossible.**

Si l'équation (3) était $3x + 5y = 38$, le système admettrait la solution précédente. Dans ce cas les équations (1), (2) et (3) sont dites **compatibles.**

EXERCICES

— Résoudre les systèmes :

598. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 24 \\ 4x - 2y + 3z = 6 \\ 6x - y + 2z = 22. \end{cases}$

599. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 8 \\ x + 3y + 9z = 27. \end{cases}$

600. $\begin{cases} 3x + y + z = 30 \\ x + 3y + z = 34 \\ x + y + 3z = 36. \end{cases}$

601. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 4x - 5y + z = 14 \\ 9x - y - 6z = 19. \end{cases}$

602. $\begin{cases} \frac{4x}{3} - \frac{3y}{2} - 2z = 0 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} = 3 \\ \frac{2x}{3} - \frac{7y}{4} + z = 0. \end{cases}$

603. $\begin{cases} \frac{x + 3y}{5} + \frac{y + z}{6} = z \\ \frac{2x + 5}{7} + \frac{4z + 5}{3} = z + 1 \\ \frac{3y + 7}{8} + \frac{2z + 1}{3} = y - 1. \end{cases}$

604. $\begin{cases} \dfrac{5x}{4} - \dfrac{3y}{5} + \dfrac{z}{2} = 15 \\ \dfrac{x}{3} + 2y - \dfrac{7z}{6} = 7 \\ x - \dfrac{7y}{5} - \dfrac{5z}{6} = 0. \end{cases}$ **605.** $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{4} + \dfrac{x - 3z}{3} = 6 \\ \dfrac{4x + y}{3} - \dfrac{x - z}{5} = 10 \\ \dfrac{5x + z}{4} + \dfrac{4x + z}{5} = 13. \end{cases}$

606. $\begin{cases} x + y + z = 23 \\ y + z + t = 31 \\ z + t + x = 27 \\ t + x + y = 33. \end{cases}$ **607.** $\begin{cases} y + z - x = 4 \\ z + t - y = 14 \\ t + x - z = 20 \\ x + y - t = 7. \end{cases}$

— Résoudre les systèmes :

608. $\begin{cases} \dfrac{x}{13} = \dfrac{y}{8} \\ x + y = 126. \end{cases}$ **609.** $\begin{cases} \dfrac{x}{11} + \dfrac{y}{7} = 0 \\ 3x + 2y = 57. \end{cases}$ **610.** $\begin{cases} \dfrac{x - 5}{7} = \dfrac{y - 4}{5} \\ 2x + 3y = 109 \end{cases}$

611. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z}{2} \\ x + y + z = 85. \end{cases}$ **612.** $\begin{cases} \dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{-15} = \dfrac{z}{20} \\ x + y + z = 119 \end{cases}$ **613.** $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{2} \\ x + y + z = 84. \end{cases}$

614. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{13} \\ x + 2y + 3z = 174. \end{cases}$ **615.** $\begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{-y}{17} = \dfrac{z}{9} \\ 7x + 3y + 2z = 25. \end{cases}$

616. $\begin{cases} \dfrac{x - 3}{5} = \dfrac{y + 9}{13} = \dfrac{z}{-2} \\ 2x + y - 3z = 142. \end{cases}$ **617.** $\begin{cases} \dfrac{2x - 7}{3} = \dfrac{3y + 1}{2} = \dfrac{6z - 1}{7} \\ 3x + 2y - z = 61. \end{cases}$

— Résoudre les systèmes :

618. $\begin{cases} \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{y} = 3 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 7. \end{cases}$ **619.** $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{y} = 4 \\ \dfrac{14}{x} - \dfrac{3}{y} = 2. \end{cases}$ **620.** $\begin{cases} \dfrac{3}{2x} + \dfrac{2}{5y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{2x} - \dfrac{7}{3y} = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

621. $\begin{cases} \dfrac{12}{x - 3} - \dfrac{5}{y + 2} = 63 \\ \dfrac{8}{x - 3} + \dfrac{15}{y + 2} = -13. \end{cases}$ **622.** $\begin{cases} \dfrac{4}{2x - 1} + \dfrac{3}{2(3y + 2)} = 21 \\ \dfrac{5}{6x - 3} - \dfrac{2}{15y + 10} = 19. \end{cases}$

623. $\begin{cases} -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = -6 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 10 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = 0. \end{cases}$ **624.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{y - 2} + \dfrac{1}{z - 3} = 1 \\ \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{y - 2} + \dfrac{4}{z - 3} = 8 \\ \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{3}{y - 2} + \dfrac{9}{z - 3} = 27. \end{cases}$

625. Déterminer a et b pour que le système en x et y suivant :

$$(2a - 1)x + by = 7$$
$$(a - 2)x + (b - 1)y = 2$$

admette pour solution : $x = 1$; $y = -1$.

626. Déterminer m pour que le système en x et y suivant soit possible :

$$\begin{cases} x + y = m \\ 11x + 40y = 4m + 37 \\ 21x + 120y = 12m + 171. \end{cases}$$

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

216. Définition. — ***Une équation du second degré en x est une équation entière qui se ramène à la forme générale :***

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Les coefficients a, b, c sont des nombres connus. b et c peuvent être nuls mais nous devons supposer $a \neq 0$ sinon l'équation serait du 1er degré :

EXEMPLE : $2x^2 - 5x + 3 = 0$; $4x^2 - 7x = 0$; $2x^2 - 9 = 0$.

On résout une équation du second degré en la ramenant, si possible, à l'équation : $A \cdot B = 0$, où A et B sont deux binômes du premier degré (no 169). Ainsi l'équation : $(2x + 3)^2 - (x - 6)^2 = 0$ s'écrit :

$$(2x + 3 + x - 6)(2x + 3 - x + 6) = 0$$

Soit :
$$(3x - 3)(x + 9) = 0.$$

Elle admet les deux racines : $x' = 1$ et $x'' = -9$.

217. Résolution de l'équation : $ax^2 + bx = 0$.

EXEMPLES. — 1° $3x^2 - 15x = 0$ s'écrit : $3x(x - 5) = 0$. Elle a pour racines : $x' = 0$ et $x'' = 5$.

2° $2x^2 + 7x = 0$ s'écrit : $2x\left(x + \frac{7}{2}\right) = 0$. Racines : $x' = 0$; $x'' = -\frac{7}{2}$.

Plus généralement l'équation $ax^2 + bx = 0$ s'écrit : $x(ax + b) = 0$ et admet pour racines :

$$\boxed{x' = 0 \quad \text{et} \quad x'' = -\frac{b}{a}}$$

218. Résolution de l'équation : $ax^2 + c = 0$.

EXEMPLES. — 1° $2x^2 + 5 = 0$ ou $x^2 = -\frac{5}{2}$. Cette équation est impossible car $x^2 \geqslant 0$ ne peut être égal au nombre négatif $-5/2$.

2° $4x^2 - 9 = 0$ ou $(2x - 3)(2x + 3) = 0$ a deux racines : $x = \pm \frac{3}{2}$.

3° $x^2 - 12 = 0$ ou $(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3}) = 0$ a deux racines :

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

Plus généralement, l'équation $ax^2 + c = 0$ s'écrit : $x^2 + \frac{c}{a} = 0$.

1° *Si* a *et* c *sont de même signe*, le premier membre, somme du carré x^2 positif ou nul et du nombre positif $\frac{c}{a}$ ne peut être nul. *L'équation est impossible.*

2° *Si* a *et* c *sont de signes contraires*, l'équation s'écrit :

$$x^2 - \left(-\frac{c}{a}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0$$

et admet pour racines : $\boxed{x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}}$

219. Résolution d'une équation complète.

1er EXEMPLE : $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Essayons de décomposer le premier membre en remarquant que $x^2 - 10x$ est le début du développement de $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$.

Donc : $x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25$.

L'équation s'écrit : $(x - 5)^2 - 25 + 21 = 0$.

Soit : $(x - 5)^2 - 4 = 0$ ou $(x - 5)^2 - 2^2 = 0$.

Le premier membre se décompose et on obtient :

$(x - 5 - 2)(x - 5 + 2) = 0$. Soit : $(x - 7)(x - 3) = 0$.

L'équation admet deux racines : $x' = 7$ et $x'' = 3$.

2e EXEMPLE : $3x^2 - 7x - 20 = 0$.

L'équation s'écrit : $x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{20}{3} = 0$. Or : $x^2 - \frac{7}{3}x = \left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2$.

Par conséquent l'équation devient : $\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} - \frac{20}{3} = 0$.

Soit : $\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{289}{36} = 0$ ou $\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = 0$.

Le premier membre se décompose : $\left(x - \frac{7}{6} - \frac{17}{6}\right)\left(x - \frac{7}{6} + \frac{17}{6}\right) = 0$.

Soit : $\left(x - \frac{24}{6}\right)\left(x + \frac{10}{6}\right) = 0$ ou $(x - 4)\left(x + \frac{5}{3}\right) = 0.$

D'où les deux racines : $x' = 4$ et $x'' = -\frac{5}{3}.$

3e EXEMPLE : $x^2 + 10\,x + 25 = 0.$

L'équation s'écrit $(x + 5)^2 = 0$ ou $(x + 5)(x + 5) = 0.$

Chaque facteur du premier membre s'annule pour : $x = -5$. On dit que l'équation admet la *racine double :* $x = -5.$

4e EXEMPLE : $x^2 + 2\,x + 7 = 0.$

L'équation s'écrit : $(x + 1)^2 + 6 = 0$ ou $(x + 1)^2 = -6.$

Le carré $(x + 1)^2$ ne pouvant être négatif l'équation est *impossible.*

220. Résolution de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

Puisque $a \neq 0$, elle s'écrit : $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ (2)

Or x^2 et $\frac{b}{a}x$ sont les deux premiers termes du carré d'une somme dont le premier terme est x. Le double produit est $\frac{b}{a}x$, le second terme est donc $\frac{b}{2a}$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \quad \text{d'où :} \quad x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

L'équation (2) s'écrit : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$

Soit :
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4\,ac - b^2}{4\,a^2} = 0. \qquad (3)$$

1er cas : $b^2 - 4\,ac < 0$. — Le nombre $\frac{4\,ac - b^2}{4\,a^2}$ est positif. Le premier membre de l'équation (3) est donc la somme d'un carré positif ou nul et d'un nombre positif. Il est donc positif, quel que soit x, et ne peut être nul. *L'équation est impossible.*

2e cas : $b^2 - 4\,ac = 0$. — L'équation (3) s'écrit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0.$$

Les deux facteurs du premier membre s'annulent tous deux pour $x = -\frac{b}{2a}.$

On dit que *l'équation admet deux racines confondues ou une racine double :*

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

3e cas : $b^2 - 4\,ac > 0$. — L'équation (3) peut alors s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,ac}{4\,a^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

Le premier membre est une différence de deux carrés et s'écrit :

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a}}{2a}\right) = 0.$$

Soit :

$$\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}\right) = 0. \qquad (4)$$

Pour que ce produit soit nul, il faut et il suffit que :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$$

Soit en abrégé :

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

On peut vérifier que chacune de ces deux valeurs de x annule le premier membre de l'équation (1).

221. Résumé. — Le nombre des racines de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de l'expression $\Delta = b^2 - 4\,ac$, appelée *discriminant de l'équation.*

$$\Delta = b^2 - 4\,ac$$

$\Delta < 0$...... *Pas de racine.*

$\Delta = 0$...... *Une racine double :* $x = -\dfrac{b}{2a}$

$\Delta > 0$...... *Deux racines distinctes :* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

222. Remarque. — ***Lorsque a et c sont de signes contraires l'équation admet deux racines distinctes.***

En effet, dans ce cas le produit ac est négatif et $-4\,ac$ est positif. Comme b^2 est positif ou nul, la somme $b^2 - 4\,ac$ est obligatoirement positive, et l'équation admet deux racines distinctes.

223. Simplification de la formule de résolution. — Si b est un nombre pair, on peut poser $b = 2\,b'$. On obtient :

$$\Delta = b^2 - 4\,ac = 4\,b'^2 - 4\,ac = 4\,(b'^2 - ac).$$

Les racines s'écrivent :

$$x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}, \qquad \text{soit :} \qquad \boxed{x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}}$$

L'expression $\Delta' = b'^2 - ac$ est du signe de Δ car $\Delta = 4\,\Delta'$ et se nomme *discriminant réduit.*

224. Exemples. — 1° *Résoudre l'équation :* $x^2 - 5\,x + 3 = 0$.

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 3 \quad \text{et} \quad \Delta = 25 - 12 = 13.$$

L'équation a pour racines : $x' = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2}$ et $x'' = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{2}$.

2° *Résoudre l'équation :* $5\,x^2 + 14\,x - 24 = 0$.

$a = 5$, $b' = 7$ et $c = -24$. L'équation a deux racines car a et c sont de signes contraires. $\Delta' = 49 + 120 = 169 = 13^2$.

Donc : $x = \dfrac{-7 \pm 13}{5}$ soit : $x' = \dfrac{6}{5}$ et $x'' = -4$.

3° *Résoudre l'équation :* $9\,x^2 - 30\,x + 25 = 0$.

$\Delta' = 15^2 - 9 \times 25 = 0$. L'équation a une racine double : $x = \dfrac{15}{9} = \dfrac{5}{3}$.

4° *Résoudre l'équation :* $3\,x^2 + 7\,x + 5 = 0$.

$\Delta = 7^2 - 4 \times 3 \times 5 = 49 - 60 = -11$. L'équation n'a pas de racines.

EXERCICES

— Résoudre les équations suivantes :

628. $3\,x^2 - 7\,x = 0$.

629. $33\,x^2 + 55\,x = 0$.

630. $(x + 3)^2 - 4\,(x + 3) = 0$.

631. $x^2 - 4 + 3\,(x + 2) = 0$.

632. $x^2 - 81 = 0$.

633. $49\,x^2 - 121 = 0$.

634. $(x - 7)^2 - 25 = 0$.

635. $(2\,x + 3)^2 - 64 = 0$.

636. $(3\,x - 2)^2 - 48 = 0$.

637. $(2\,x - 5)^2 - 80 = 0$.

638. $(4\,x - 3)^2 - (2\,x + 5)^2 = 0$.

639. $(3\,x - 5)^2 - (4\,x - 1)^2 = 0$.

640. $(2\,x + 1)^2 - 9\,(x - 2)^2 = 0$.

641. $4\,x^2 - 9 + 5\,(2\,x + 3) = 0$.

642. $x^2 - 16x + 39 = 0.$

643. $x^2 - 13x - 48 = 0.$

644. $3x^2 + 8x + 4 = 0.$

645. $2x^2 - 11x + 12 = 0.$

646. $5x^2 - 29x + 20 = 0.$

647. $3x^2 + 23x + 14 = 0.$

648. $7x^2 - 33x - 10 = 0.$

649. $4x^2 + 21x - 18 = 0.$

650. $10x^2 - 49x + 51 = 0.$

651. $6x^2 - 17x - 45 = 0.$

652. $(x - 2)(2x - 1) + 2(x - 3) = 4(x - 2)^2.$

653. $(2x + 3)(x - 4) - (x - 5)(x - 2) = (3x - 5)(x - 4).$

654. $(4x - 7)(x - 5) + (x - 3)^2 = (x + 2)^2.$

655. $(8x - 3)(3x + 2) - (4x + 7)(x + 4) = (2x + 1)(5x - 1).$

656. $(9x - 1)(x + 3) - (4x + 1)(x + 1) = (5x - 4)(3x - 2).$

657. $\dfrac{(3x + 1)(x - 1)}{2} - \dfrac{(x - 3)(x + 5)}{3} = \dfrac{(4x - 1)(x + 3)}{6}.$

658. $\dfrac{(2x - 3)(x - 2)}{7} + \dfrac{(x + 1)^2}{4} = \dfrac{(x + 7)(x - 3)}{2}.$

659. $\dfrac{(x + 1)(x + 2)}{4} - \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{3} = \dfrac{x^2 - 9}{5}.$

660. $\dfrac{(x - 1)(x + 2)}{3} - \dfrac{x^2 + 3}{7} = \dfrac{(3x + 1)(2x - 3)}{21}.$

661. $\dfrac{x^2 + 1}{3} - \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{2} = \dfrac{(x + 5)(x - 4)}{6}.$

— Résoudre les équations suivantes :

662. $\dfrac{4}{x - 1} - \dfrac{3}{x - 2} = -1.$

663. $\dfrac{7}{x - 4} - \dfrac{6}{x - 2} = 2.$

664. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 4} = \dfrac{1}{x}.$

665. $\dfrac{1}{x - 8} + \dfrac{1}{x - 18} = \dfrac{1}{x}.$

666. $\dfrac{x - 4}{x - 2} + \dfrac{x - 2}{x - 3} = \dfrac{11}{6}.$

667. $\dfrac{2x + 1}{x - 1} - \dfrac{3(x - 1)}{x + 1} = 2.$

668. $\dfrac{x + 4}{2x - 3} + \dfrac{2x - 3}{x + 4} = 2.$

669. $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x - 9} = \dfrac{1}{x}.$

670. $\dfrac{2x + 5}{2x} - \dfrac{x}{x + 5} = 1.$

671. $\dfrac{x - 3}{5} + \dfrac{5}{x - 3} = \dfrac{89}{40}.$

672. $\dfrac{5}{x + 8} - \dfrac{2}{2x + 1} = \dfrac{7}{9x}.$

673. $\dfrac{12}{2x - 5} = \dfrac{x - 3}{5} = \dfrac{1}{3(x + 1)}.$

— Résoudre les équations en x suivantes :

674. $x^2 - (m + 1)x + m = 0.$

675. $x^2 - (2m + 1)x + 2m = 0.$

676. $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$

677. $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0.$

678. $x^2 + (3a - 2b)x - 6ab = 0.$

679. $3x^2 - 2(3a - 1)x - 4a = 0.$

680. $\dfrac{2x + m}{x} - \dfrac{2x}{x + m} = 2.$

681. $\dfrac{x}{x - m} + \dfrac{x - m}{4x} = 1.$

682. $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x}$. **683.** $\frac{3}{x+2a} + \frac{1}{a} = \frac{4}{x+a}$.

684. Quelle valeur faut-il donner à m pour que l'équation :

$$(m+3)\,x^2 + 2\,(3\,m+1)\,x + (m+3) = 0$$

ait une racine double? Calculer la valeur de cette racine double.

685. Même exercice pour : $x^2 - (2\,m+3)\,x + m^2 = 0$.

686. Même exercice pour : $(m+2)\,x^2 - 2\,(m-1)\,x + 4 = 0$.

687. Soit l'équation : $2\,x^2 - (m+4)\,x + m = 0$.

1° Calculer m pour que l'une des racines soit égale à 3.

2° Calculer alors l'autre racine.

688. Quelles valeurs faut-il donner à m pour que l'équation :

$$(4\,m+1)\,x^2 - 4\,mx + m - 3 = 0$$

ait des racines.

689. Même exercice pour : $(m-3)\,x^2 - 2\,(3\,m+1)\,x + 9\,m - 2 = 0$.

690. Même exercice pour : $(3\,m-7)\,x^2 + (6\,m-1)\,x - (5-3\,m) = 0$.

SOMME ET PRODUIT DES RACINES

225. Théorème. — ***Lorsque l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines distinctes ou confondues, leur somme est égale à $-\frac{b}{a}$ et leur produit à $\frac{c}{a}$.***

Lorsqu'elles existent, ces racines sont données par les formules (n° 221) :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On a donc :

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Soit :

$$\boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}} \qquad (1)$$

Et :

$$x'x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}$$

Le numérateur est le produit de la somme des nombres $-b$ et $\sqrt{b^2 - 4ac}$ par leur différence. Il est donc égal à la différence de leurs carrés :

$$x'x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Soit :

$$\boxed{x'x'' = \frac{c}{a}} \qquad (2)$$

Le calcul est valable si $\Delta = b^2 - 4\,ac = 0$. On vérifie d'ailleurs que pour

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a} \qquad \text{on a :} \qquad x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

et $$x'x'' = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4\,a^2} = \frac{4\,ac}{4\,a^2} = \frac{c}{a} \qquad \text{car } b^2 = 4\,ac.$$

226. Réciproque. — ***Si deux nombres x' et x'' ont pour somme $-\frac{b}{a}$ et pour produit $\frac{c}{a}$, ces nombres sont les racines de l'équation :*** $ax^2 + bx + c = 0$.

En effet les nombres 5 et 7 par exemple sont visiblement racines de l'équation du second degré $(x - 5)(x - 7) = 0$. De même x' et x'' sont racines de l'équation du second degré en x.

$$(x - x')(x - x'') = 0.$$

Soit : $$x^2 - xx' - xx'' + x'x'' = 0$$

ou $$x^2 - (x' + x'')\,x + x'x'' = 0.$$

Par hypothèse $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ et $x'x'' = \frac{c}{a}$.

L'équation devient : $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ou $$ax^2 + bx + c = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème final :

227. Résumé. — ***Pour que les deux nombres x' et x'' soient les racines de l'équation :*** $ax^2 + bx + c = 0$, ***il faut et il suffit que l'on ait :***

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Pratiquement, pour vérifier que deux nombres donnés sont les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, il suffit de vérifier que leur somme S est égale à $-\frac{b}{a}$ et que leur produit P est égal à $\frac{c}{a}$. Si on connaît déjà une des racines x', la seconde x'' sera donnée par l'une des relations :

$$x'' = -\frac{b}{a} - x' \qquad \text{ou} \qquad x'' = \frac{c}{ax'}.$$

Exemples. — 1° $x^2 - 8\,x + 15 = 0$.

La somme des racines est 8 et leur produit 15. On voit facilement que les nombres 3 et 5 satisfont à ces conditions. Donc : $x' = 3$ et $x'' = 5$.

2° $3x^2 - 14x + 11 = 0$.

On voit que $a + b + c = 0$. L'équation est vérifiée pour $x = 1$. On a donc :

$$x' = 1 \qquad \text{et} \qquad x'' = \frac{c}{a} = \frac{11}{3}.$$

3° $21x^2 + 17x - 4 = 0$.

On voit que $a - b + c = 0$. L'équation est vérifiée pour $x = -1$. On a donc :

$$x' = -1 \qquad \text{et} \qquad x'' = -\frac{c}{a} = \frac{4}{21}.$$

APPLICATIONS

228. Recherche de deux nombres dont on connaît la somme et le produit.

Posons $-\frac{b}{a} = \mathrm{S}$ et $\frac{c}{a} = \mathrm{P}$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'écrit :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Soit : $$x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P} = 0.$$

D'après ce qui précède, si cette équation a des racines, leur somme est S et leur produit P. Et réciproquement :

Lorsque deux nombres x et y ont pour somme S et pour produit P, ces nombres sont les racines de l'équation en X :

$$\boxed{\mathrm{X}^2 - \mathrm{SX} + \mathrm{P} = 0.}$$

Si S et P, sont donnés à priori x et y n'existent que si $\Delta \geqslant 0$ soit :

$$\boxed{\mathrm{S}^2 - 4\mathrm{P} \geqslant 0.}$$

1° $\mathrm{S}^2 - 4\mathrm{P} > 0$: x et y ont pour valeurs : $\dfrac{\mathrm{S} \pm \sqrt{\mathrm{S}^2 - 4\mathrm{P}}}{2}$.

2° $\mathrm{S}^2 - 4\mathrm{P} = 0$: x et y sont égaux à $\dfrac{\mathrm{S}}{2}$.

3° $S^2 - 4P < 0$. Le problème est impossible.

EXEMPLES. — 1° $S = +3$ et $P = -70$.

L'équation $X^2 - 3X - 70 = 0$ a pour racines 10 et — 7.

On peut prendre $x = 10$ et $y = -7$ ou $x = -7$ et $y = 10$.

2° $S = 12$ et $P = 36$.

$S^2 - 4P = 144 - 144 = 0$. On a donc $x = y = \frac{S}{2} = 6$.

229. Signe des racines — Il est toujours possible de déterminer le signe des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sans calculer ces racines.

1er cas : $\frac{c}{a} < 0$. Lorsque a et c sont de signes contraires, l'équation a deux racines (n° 222) dont le produit P est négatif. Ces racines sont donc de signes contraires. L'une est positive et l'autre est négative.

2e cas : $c = 0$. Une des racines est nulle (n° 217). L'autre est égale à la somme $S = -\frac{b}{a}$ dont on a immédiatement le signe.

3e cas : $\frac{c}{a} > 0$. Les racines existent si $\Delta \geqslant 0$. Leur produit P est alors positif et elles sont de même signe. Ce signe commun est celui de leur somme $S = -\frac{b}{a}$.

1° $\frac{c}{a} < 0$		$x' < 0 < x''$
2° $c = 0$		$x' = 0$ et $x'' = -\frac{b}{a}$
3° $\frac{c}{a} > 0$ et $\Delta \geqslant 0$.	$-\frac{b}{a} > 0$	$0 < x' \leqslant x''$
	$-\frac{b}{a} < 0$	$x' \leqslant x'' < 0$.

La remarque du n° 222 peut ainsi être complétée :

Lorsque a et c sont de signes contraires, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines de signes contraires.

EXEMPLES. — 1° $3x^2 - 4x - 7 = 0$.

a et c étant de signes différents, l'équation a deux racines dont le produit P est négatif. L'une des racines est positive et l'autre négative :

$$x' < 0 < x''.$$

2° $x^2 - 7x + 11 = 0$.

$\Delta = 49 - 44 = +5$ et $P = +11$. L'équation a deux racines de même signe. Leur somme $S = +7$ étant positive, elles sont toutes deux positives :

$$0 < x' < x''.$$

3° $x^2 + 5x + 4 = 0$.

$\Delta = 25 - 16 = +9$ et $P = +4$. L'équation a deux racines de même signe. Leur somme $S = -5$ étant négative, elles sont toutes deux négatives :

$$x' < x'' < 0.$$

230. Fonctions symétriques des racines. — ***On appelle fonction symétrique des racines*** x' ***et*** x'' ***de l'équation*** $ax^2 + bx + c = 0$ ***toute expression formée au moyen de*** x' ***et de*** x'' ***qui ne change pas quand on permute ces deux lettres.***

EXEMPLES : $x'^2 + x''^2$; $x'^3 + x''^3$; $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$; $(x' - 1)(x'' - 1)$, etc...

On démontre qu'une telle expression peut toujours s'exprimer en fonction de $S = x' + x''$ et $P = x'x''$. Ainsi :

1° $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = S^2 - 2P$.

2° $x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = S^2 - 3PS$.

3° $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = \dfrac{x' + x''}{x'x''} = \dfrac{S}{P}$.

Pour calculer une telle expression, il suffit donc, après l'avoir exprimée en fonction de P et de S, de remplacer P et S par leurs valeurs. On évite ainsi des calculs sur des expressions irrationnelles.

231. Application. — *Déterminer* m *de façon que l'équation :*

$$x^2 + mx + m + 7 = 0 \qquad (1)$$

ait deux racines vérifiant la relation : $x'^2 + x''^2 = 10$. (2)

La relation est symétrique et s'écrit : $(x' + x'')^2 - 2x'x'' = 10$. Soit :

$$m^2 - 2(m + 7) = 10 \quad \text{ou} \quad m^2 - 2m - 24 = 0.$$

Ce qui donne pour m les valeurs -4 et $+6$.

Pour $m = -4$ l'équation (1) devient $x^2 - 4x + 3 = 0$ dont les racines $x' = 1$ et $x'' = 3$ vérifient la relation (2).

Pour $m = 6$ l'équation (1) devient $x^2 + 6x + 13 = 0$ qui n'a pas de racines. Seule la valeur $m = -4$ est solution du problème.

EXERCICES

— Résoudre mentalement les équations :

691. $x^2 - 5x + 6 = 0.$

692. $x^2 - 13x + 42 = 0.$

693. $x^2 + 8x + 15 = 0.$

694. $x^2 + 18x + 77 = 0.$

695. $x^2 - 8x - 33 = 0.$

696. $x^2 + 5x - 24 = 0.$

697. $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$

698. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$

— Trouver *a priori*, une racine des équations suivantes et calculer l'autre :

699. $3x^2 - 11x + 8 = 0.$

700. $5x^2 + 24x + 19 = 0.$

701. $5x^2 + 61x - 66 = 0.$

702. $7x^2 - 43x - 50 = 0.$

703. $(b - c)x^2 + (c - a)x + a - b = 0.$

704. $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0.$

705. $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b).$

706. $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0.$

707. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{b}{x} = \dfrac{m}{a} + \dfrac{b}{m}.$

708. $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x - b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}.$

— Calculer la seconde racine des équations suivantes :

709. $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x' = 4.$

710. $7x^2 + 23x + 6 = 0$ — $x' = -3.$

711. $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ — $x' = -2.$

712. $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ — $x' = m.$

— Calculer deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P :

713. S = 126 ; P = 3 569.

714. S = — 30 ; P = 221.

715. S = 169 ; P = 6 328.

716. S = 38 ; P = — 1 239.

717. S = — 117; P = — 2 430.

718. S = 57 ; P = — 994.

719. S = — 68 ; P = — 3 744.

720. S = — 152; P = 5 695.

— Déterminer *a priori* les signes des racines des équations :

721. $3x^2 - 11x + 10 = 0.$

722. $2x^2 + 7x - 15 = 0.$

723. $2x^2 + 13x + 21 = 0.$

724. $6x^2 + 29x + 35 = 0.$

725. $5x^2 - 6x - 8 = 0.$

726. $2x^2 - 9x - 26 = 0.$

727. $10x^2 - 13x + 4 = 0.$

728. $10x^2 - 37x + 33 = 0.$

729. $4x^2 - 15x + 9 = 0.$

730. $15x^2 + 31x + 14 = 0.$

— Former l'équation du second degré admettant pour racines :

731. 9 et 13.

732. — 11 et 17.

733. $m + 3$ et $\dfrac{2m - 5}{2}.$

734. $\dfrac{m + 1}{m}$ et $\dfrac{m - 2}{m}.$

735. $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}.$

736. $m + \sqrt{m^2 - 3}$ et $m - \sqrt{m^2 - 3}.$

— Calculer en fonction des coefficients a, b et c de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ les expressions suivantes :

737. $\dfrac{1}{x'^2} + \dfrac{1}{x''^2}$.

738. $\dfrac{1}{x'^3} + \dfrac{1}{x''^3}$.

739. $(x' - 3)^2 + (x'' - 3)^2$.

740. $(2x' - 3x'')(2x'' - 3x')$.

741. $\dfrac{1}{x'^2 - 2} + \dfrac{1}{x''^2 - 2}$.

742. $\dfrac{x' + 3}{x'' + 1} + \dfrac{x'' + 3}{x' + 1}$.

743. On considère l'équation : $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$.

1° Pour quelles valeurs de m a-t-elle des racines?

2° Déterminer m pour que l'on ait $x' = 3$ et calculer x'';

3° Pour quelles valeurs de m a-t-on : $4(x' + x'') = 7x'x''$?

744. Déterminer m de façon que l'équation :

$$mx^2 + (m - 4)x + 2m = 0$$

ait deux racines satisfaisant à la relation : $2(x'^2 + x''^2) = 5x'x''$.

— Reprendre le même exercice pour :

745. $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0$ et $(3x' - 5)(3x'' - 5) = 4$.

746. $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ et $\dfrac{1}{x'^2} + \dfrac{1}{x''^2} = \dfrac{5}{4}$.

747. 1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence des racines de l'équation :

$$(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0.$$

2° Déterminer m pour que l'on ait : $(4x' + 1)(4x'' + 1) = 18$.

3° Calculer l'expression $(x' + 2)(x'' + 2)$. En déduire que les racines vérifient lorsqu'elles existent, une relation indépendante de m. Peut-on utiliser cette relation pour déterminer x'' lorsque $x' = 4$?

ÉQUATIONS ET SYSTÈMES SE RAMENANT AU SECOND DEGRÉ

232. Équations de la forme $A \cdot B \cdot C = 0.$

Les racines de cette équation sont (n° 169) celles des équations :

$$A = 0, \quad B = 0 \quad \text{et} \quad C = 0.$$

EXEMPLE : $(2x^2 - 5x + 1)^2 - (x^2 - 5x + 6)^2 = 0.$

Cette équation s'écrit :

$$(2x^2 - 5x + 1 + x^2 - 5x + 6)(2x^2 - 5x + 1 - x^2 + 5x - 6) = 0.$$

soit :
$$(3x^2 - 10x + 7)(x^2 - 5) = 0.$$

Le premier facteur donne les racines 1 et $\frac{7}{3}$ et le second $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

233. Équations bicarrées : $ax^4 + bx^2 + c = 0.$ (1)

Pour résoudre une telle équation, on pose $x^2 = y$, on obtient *l'équation résolvante :*

$$ay^2 + by + c = 0. \qquad (2)$$

EXEMPLE : $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0.$

On obtient :
$$3y^2 - 22y - 45 = 0$$

qui a pour racines $y = 9$ et $y = -\frac{5}{3}$. Il faut donc prendre :

1° $x^2 = 9$. Soit $x = -3$ ou $x = +3$.

2° $x^2 = -\frac{3}{5}$ ce qui est impossible.

— En définitive, *on voit qu'à toute racine positive de l'équation résolvante* (2) *correspondent deux racines opposées de l'équation bicarrée* (1).

234. Équations irrationnelles. — ***Une équation irrationnelle est une équation où l'inconnue figure sous un ou plusieurs radicaux.***

EXEMPLES : $x - \sqrt{2x+7} = 4$; $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$.

Pour résoudre une telle équation, on fait disparaître les radicaux par des élévations au carré. Notons que :

Lorsqu'on élève au carré les deux membres d'une équation on peut introduire des solutions étrangères à cette équation.

Soit l'équation $A = B$ et considérons l'équation : $A^2 = B^2$.

Cette dernière s'écrit : $A^2 - B^2 = 0$ ou $(A - B)(A + B) = 0$.

Elle admet (n° 169) les solutions des deux équations :

1° $A - B = 0$ ou $A = B$ qui est l'équation initiale.

2° $A + B = 0$ ou $A = -B$ dont les racines sont étrangères à l'équation initiale.

235. Équation renfermant un seul radical. — *Soit à résoudre l'équation :*

$$x - \sqrt{2x+7} = 4. \tag{1}$$

Isolons le radical : $$x - 4 = \sqrt{2x+7}. \tag{2}$$

Élevons au carré : $$(x-4)^2 = 2x + 7. \tag{3}$$

Cette équation s'écrit : $x^2 - 8x + 16 = 2x + 7$

ou $x^2 - 10x + 9 = 0$.

Elle admet pour racines 1 et 9. Vérifions l'équation (1) :

1° Pour $x = 1$: $1 - \sqrt{9} \neq 4$. Cette racine $x = 1$ est à écarter.

2° Pour $x = 9$: $9 - \sqrt{25} = 4$. La racine $x = 9$ convient.

236. Remarque. — Toute racine de l'équation (3) donne la même valeur absolue aux deux membres de l'équation (2). Comme le second membre de (2) est positif (ou nul), seule convient la racine $x = 9$ pour laquelle le premier membre est également positif.

— En général, si A et B sont deux polynômes :

Les racines de l'équation $A = \sqrt{B}$ ***sont les racines de l'équation*** $A^2 = B$ ***pour lesquelles*** $A \geqslant 0$.

Il est inutile de vérifier que, pour les racines ainsi trouvées, l'expression B sous le radical est positive (ou nulle) car sa valeur est égale à celle de A^2 qui ne peut être négative.

237. Équations renfermant plusieurs radicaux. — On réduit le nombre de radicaux en élevant les deux membres au carré, de façon à obtenir finalement une équation entière. Il faut alors vérifier si les racines de l'équation finale obtenue, satisfont ou non, à l'équation proposée.

EXEMPLE. — *Soit à résoudre l'équation :*

$$\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}.$$

Élevons au carré les deux membres. Nous obtenons :

$$2x + 1 = 4 + 4\sqrt{x-3} + x - 3.$$

ou $$x = 4\sqrt{x-3}.$$

soit $x^2 = 16(x-3)$ ou $x^2 - 16x + 48 = 0.$

Cette équation admet pour racines $x = 4$ et $x = 12$, qui vérifient toutes deux l'équation proposée :

$$\sqrt{9} = 2 + \sqrt{1} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{25} = 2 + \sqrt{9}.$$

238. Systèmes se ramenant à une équation du second degré.

EXEMPLE. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x - y = 3 & (1) \\ x^2 - 3y^2 = 13. & (2) \end{cases}$$

Éliminons une des inconnues. L'équation (1) donne :

$$y = x - 3. \tag{3}$$

Portons cette valeur dans l'équation (2) :

$$x^2 - 3(x-3)^2 = 13$$

soit : $-2x^2 + 18x - 40 = 0$ ou $x^2 - 9x + 20 = 0.$

Cette équation a pour racines : $x' = 4$ et $x'' = 5$. D'après la relation (3) :

Pour $x' = 4$ on obtient $y' = 1$ et pour $x'' = 5, y'' = 2.$

On vérifie facilement que le système admet les deux solutions :

$$1^{\circ}\ x = 4;\ y = 1 \qquad\qquad 2^{\circ}\ x = 5;\ y = 2.$$

239. Problème. — *Déterminer* m *de façon que l'équation :*

$$x^2 - (m+5)x - m + 6 = 0 \tag{1}$$

ait deux racines vérifiant la relation : $2x' + 3x'' = 13.$ (2)

Le problème est analogue à celui du n° 231, mais ici la relation imposée aux racines n'est pas symétrique. Il serait maladroit de calculer x' et x'' et de porter les valeurs trouvées dans la relation (2) car cela conduirait à une équation irrationnelle. Il est préférable d'adjoindre à la relation (2), les deux relations donnant x' et x''. On obtient ainsi le système de trois équations à trois inconnues, x', x'' et m.

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x' + 3x'' = 13 & (2) \\ x' + x'' = m + 5 & (3) \\ x'x'' = -m + 6. & (4) \end{array}\right.$$

Les deux premières sont du 1er degré en x' et x'' et donnent :

$$x' = 3m + 2 \quad \text{et} \quad x'' = 3 - 2m. \qquad (5)$$

Portons ces valeurs dans la troisième :

$$(3m + 2)(3 - 2m) = -m + 6$$

soit :
$$-6m^2 + 6m = 0$$

ou
$$-6m(m - 1) = 0.$$

Cette équation admet deux racines : $m = 0$ et $m = 1$.

D'après les relations (5) on obtient :

1° Pour $m = 0$: $x' = 2$ et $x'' = 3$.

2° Pour $m = 1$: $x' = 5$ et $x'' = 1$.

On vérifie que ces valeurs satisfont à l'équation (1) et à la relation (2).

240. Systèmes symétriques. — Lorsque les équations d'un système sont symétriques par rapport à deux inconnues x et y, il est préférable, même si on peut opérer autrement de commencer par calculer la somme et le produit de ces deux inconnues.

EXEMPLE I. — *Résoudre le système :*

$$\left\{\begin{array}{ll} x + y = 13 & (1) \\ x^2 + y^2 = 89. & (2) \end{array}\right.$$

L'équation (2) s'écrit : $(x + y)^2 - 2xy = 89$

et compte tenu de (1) : $169 - 2xy = 89.$

Donc : $xy = 40.$

Par suite (n° 228) x et y qui ont pour somme 13 et pour produit 40, sont les racines de l'équation en X :

$$X^2 - 13X + 40 = 0.$$

Cette équation a pour racines 5 et 8. On obtient les deux solutions :

1° $x = 5$; $y = 8$ 2° $x = 8$; $y = 5$.

EXEMPLE II. — *Résoudre le système :*

$$\text{I}\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 65 \\ (x - 1)(y - 1) = 18. \end{array}\right.$$

L'élimination de y par exemple conduit à une équation du quatrième degré en x. Posons : $S = x + y$ et $P = xy$. Le système (I) devient :

$$\text{II} \begin{cases} S^2 - 2P = 65 \\ P - S = 17. \end{cases}$$

Éliminons P. On obtient : $S^2 - 2S - 99 = 0$
ce qui donne pour S les deux valeurs 11 et -9.

1° Pour $S = 11$, on obtient : $P = S + 17 = 28$.

x et y sont les racines de l'équation : $X^2 - 11X + 28 = 0$
ces racines sont $+7$ et $+4$. D'où les deux solutions :

$$x = 7;\ y = 4 \quad \text{et} \quad x = 4;\ y = 7.$$

2° Pour $S = -9$ on obtient : $P = S + 17 = 8$.

L'équation : $X^2 + 9X + 8 = 0$
a pour racines -1 et -8, ce qui donne deux nouvelles solutions :

$$x = -1;\ y = -8 \quad \text{et} \quad x = -8;\ y = -1.$$

D'où finalement les quatre solutions :

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -8 \\ y = -1. \end{cases}$$

EXERCICES

— Résoudre les équations :

748. $(3x + 2)(4x^2 - 5)(9x^2 - 12) = 0.$

749. $(x^2 - 5x + 4)(2x^2 - 7x + 3) = 0.$

750. $(3x^2 + 2x + 4)^2 - x^2(x + 8)^2 = 0.$

751. $(x^3 + 3x^2 - 1)^2 - (x^3 - 2x + 1)^2 = 0.$

752. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

753. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$

754. $25x^4 - 29x^2 + 4 = 0.$

755. $16x^4 + 7x^2 - 9 = 0.$

756. $x^4 - (m^2 + 4)x^2 + 4m^2 = 0.$

757. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0.$

758. $\sqrt{x^2 + 25} - 13 = 0.$

759. $\sqrt{2x + 7} - \sqrt{x} = 2.$

760. $x - \sqrt{4x - 3} = 0.$

761. $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x - 3} = 3.$

762. $x - \sqrt{x + 1} = 1.$

763. $\sqrt{10x - 1} - \sqrt{5x - 1} = 5.$

— Résoudre les systèmes suivants :

764. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x^2 - xy = 24. \end{cases}$

765. $\begin{cases} 4x - 3y = 15 \\ (x - 4)(y - 3) = 20. \end{cases}$

766. $\begin{cases} 4x + 3y = 84 \\ (x - y)^2 = 49. \end{cases}$

767. $\begin{cases} 5x - 4y = 45 \\ (x + y)^2 = 324. \end{cases}$

768. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 58. \end{cases}$

769. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 61. \end{cases}$

770. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases}$

771. $\begin{cases} xy = 45 \\ x^2 + y^2 = 106. \end{cases}$

772. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ xy - (x + y) = 47. \end{cases}$

773. $\begin{cases} xy = 30 \\ x^2 + y^2 - 2(x + y) = 83. \end{cases}$

774. $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x + y - z = -1 \\ xy + 5z = 4. \end{cases}$

775. $\begin{cases} x + 4y = 7 \\ x + 3y - 4z = 1 \\ xy + 4z^2 = 2. \end{cases}$

— Déterminer m de façon que les équations suivantes aient des racines satisfaisant à la relation correspondante :

776. $x^2 - 5x + m = 0$ Relation donnée : $3x' - 2x'' = 0$.

777. $x^2 - 3mx + m + 1 = 0$ $x' - 2x'' = 0$.

778. $mx^2 - 2(m - 1)x + m = 0$ $x' + 2x'' = 3$.

779. $(m - 1)x^2 - 2mx - 3m + 1 = 0$ $2x' + 3x'' = 5$.

780. $x^2 - 2mx + 5m - 3 = 0$ $x' - 2x'' = 3$.

781. $mx^2 - (2m + 1)x + m + 1 = 0$ $5x' - 3x'' = 1$.

782. Soit l'équation : $x^2 - 2(m^2 + 1)x + (3m - 1)^2 = 0$.

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles cette équation admet une racine double et calculer les valeurs de x correspondantes.

783. Soit l'équation : $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0$.

1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence des racines.

2° Déterminer m pour que l'une des racines soit le triple de l'autre. Montrer que les racines vérifient alors la relation : $3(x' + x'')^2 = 16x'x''$. La réciproque est-elle exacte?

784. 1° Étudier l'existence des racines de l'équation :

$$mx^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0.$$

2° Déterminer m de façon que l'on ait : $x' + 4x'' = 3$.

3° Calculer l'expression $(x' + 2)(x'' + 2)$. En déduire une relation entre x' et x'' indépendante de m. Comment peut-on utiliser cette relation pour retrouver les valeurs de x' et de x'' puis celles de m déterminées au 2°?

TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

241. Définitions. — ***On appelle trinôme du second degré en x tout polynôme $f(x)$ de la forme :***

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Les coefficients b et c peuvent être nuls, mais le coefficient a doit être différent de zéro sinon le polynôme serait du premier degré :

EXEMPLES : $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$; $f(x) = 3x^2 - 4$; $f(x) = 5x^2 + 3x$.

La valeur numérique d'un trinôme est fonction de la valeur de la variable x et peut être positive, nulle ou négative :

On appelle racine d'un trinôme toute valeur de x pour laquelle ce trinôme est nul.

Cette valeur est donc racine de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.

De même l'expression $\Delta = b^2 - 4ac$ se nomme le **discriminant du trinôme.**

— Nous avons vu (12^e leçon) comment on détermine *a priori* le signe d'un binôme du premier degré $f(x) = ax + b$ connaissant sa racine et le signe de a. Nous allons établir une règle analogue pour un trinôme du second degré.

242. Formes remarquables du trinôme. — Considérons le trinôme

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

1° Cas général. Nous pouvons écrire comme au n° 220 :

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

Soit :

$$\boxed{y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]} \qquad (1)$$

formule valable dans tous les cas.

2° Cas où $\Delta = 0$. La formule précédente se simplifie et devient puisque $b^2 - 4ac = 0$:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Le trinôme admet alors une racine double $x' = -\dfrac{b}{2a}$ et on a :

$$\boxed{y = a\,(x - x')^2} \qquad (2)$$

3° Cas où $\Delta > 0$. On peut alors écrire puisque $b^2 - 4ac > 0$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

Soit : $$y = a\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Le trinôme admet dans ce cas deux racines distinctes :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et nous obtenons :

$$\boxed{y = a\,(x - x')\,(x - x'')} \qquad (3)$$

243. Décomposition d'un trinôme. — Les formules (2) et (3) permettent de décomposer en un produit de facteurs du premier degré (distincts ou non), tout trinôme qui admet des racines distinctes ou confondues. Inversement, lorsqu'un trinôme est décomposé en produit de deux facteurs du premier degré, il admet pour racines celles de chacun de ces facteurs. Nous en concluons :

Pour qu'un trinôme du second degré puisse se décomposer en un produit de facteurs du premier degré, il faut et il suffit qu'il ait des racines distinctes ou confondues.

(On pourra d'autre part remarquer que les formules (2) et (3) sont des conséquences du n° 145)

Application. — *Simplifier la fraction :* $A = \dfrac{3x^2 - 7x + 4}{2x^2 + 3x - 5}$.

Les deux termes de la fraction admettent tous deux la racine $x = 1$. On obtient facilement :

$$A = \frac{(3x - 4)(x - 1)}{(2x + 5)(x - 1)} \quad \text{soit :} \quad A = \frac{3x - 4}{2x + 5}.$$

244. Signe d'un trinôme du second degré.

1er Exemple. $y = x^2 - 2x + 6.$

$\Delta' = 1 - 6 = -5$. Le trinôme n'a pas de racines. On peut écrire (formule 1) :

$$y = (x - 1)^2 + 5.$$

L'expression $(x - 1)^2$ est positive ou nulle. Si on lui ajoute 5, le résultat est positif. Donc y est positif quel que soit x.

2e Exemple. $y = -4x^2 + 12x - 9.$

$\Delta' = 36 - 36 = 0$. Le trinôme a une racine double $x = \frac{3}{2}\cdot$ On obtient

$$y = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

y est nul pour $x = \frac{3}{2}\cdot$ Pour $x \neq \frac{3}{2}$ l'expression $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ est positive et par suite y est négatif.

3e Exemple. $y = 2x^2 - 4x - 30$ ou $y = 2(x^2 - 2x - 15).$

Ce trinôme a deux racines $x' = -3$ et $x'' = 5$. On obtient :

$$y = 2(x + 3)(x - 5).$$

Nous sommes amenés à étudier le signe d'un produit de facteurs du premier degré (no 186) :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x + 3$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$x - 5$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$y = 2(x + 3)(x - 5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le trinôme est nul pour $x = -3$ et $x = 5$, il est négatif pour $-3 < x < 5$ et il est positif pour $x < -3$ et pour $x > 5$.

245. Théorème. — **1o** ***Si le discriminant du trinôme du second degré $y = ax^2 + bx + c$ est négatif, ce trinôme est du signe de a quel que soit x.***

2o ***Si le discriminant est nul, le trinôme est du signe de a sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$, valeur pour laquelle il s'annule.***

3o ***Si le discriminant est positif, le trinôme est du signe de a pour toute valeur de x extérieure aux racines et il est du signe opposé à celui de a pour toute valeur de x comprise entre les racines.***

1er cas $\Delta < 0$. Prenons le trinôme sous la forme (1) (no 242) :

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Puisque $b^2 - 4ac < 0$, l'expression entre crochets est la somme d'un carré $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ positif ou nul et de la quantité $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ qui est positive; cette expression est positive et par suite y est du signe de a, quel que soit x.

2e cas $\Delta = 0$. On a : $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

L'expression $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est nulle pour $x = -\frac{b}{2a}$. Elle est positive pour toutes les autres valeurs de x et par suite y est du signe de a.

3e cas $\Delta > 0$. Le trinôme a deux racines distinctes x' et x'' et on a :

$$y = a(x - x')(x - x'').$$

En supposant $x' < x''$ on obtient :

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$x - x'$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x''$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x')(x - x'')$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a.	

On voit que y est du signe de a pour $x < x'$ ou pour $x > x''$ et qu'il est du signe opposé à celui de a pour $x' < x < x''$.

Résumé. — *Le trinôme du second degré* $y = ax^2 + bx + c$ *est toujours du signe de a sauf pour les valeurs de x égales aux racines ou comprises entre les racines lorsque celles-ci existent.*

246. Applications.

1o $y = -x^2 + 3x - 5$.

$a = -1$ et $\Delta = 9 - 20 = -11$. Le trinôme n'a pas de racines. Il est du signe de -1, donc négatif quel que soit x.

2o $y = x^2 - 10x + 25$.

$a = 1$ et $\Delta = 0$. Le trinôme a une racine double $x = 5$. Il est du signe de $+1$, donc positif pour $x \neq 5$.

3o $y = -2x^2 + 8x - 6$.

$a = -2$ et $a + b + c = 0$. Le trinôme a deux racines $x' = 1$ et $x'' = 3$. Il est négatif pour $x < 1$ et pour $x > 3$ et positif pour $1 < x < 3$.

Soit en résumé :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-2x^2+8x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

247. Signe d'un produit ou d'un quotient de deux binômes du premier degré.

1er Exemple. — *Étudier le signe de* $y = (2x+3)(4-x)$.

Il est clair que y est un trinôme du second degré en x qui a pour racines $x' = -\frac{3}{2}$ et $x'' = 4$. On voit d'autre part que le coefficient de x^2 est -2.

Donc :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$(2x+3)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2e Exemple. — *Étudier suivant les valeurs de m le signe de l'expression :*

$$\frac{2m+5}{m-3}.$$

Le signe d'un quotient est le même que celui du produit des deux termes : donc du produit $(2m+5)(m-3)$. Ce produit est un trinôme en m commençant par $2m^2$ et dont les racines sont $-\frac{5}{2}$ et $+3$. Donc :

m	$-\infty$		$-5/2$		3		$+\infty$
$\frac{2m+5}{m-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Le double trait vertical indique que pour $m = 3$, racine du dénominateur, la fraction n'est pas définie.

EXERCICES

— Étudier suivant les valeurs de x le signe des trinômes suivants :

785. $y = 3x^2 - 2x + 1$.

786. $y = -x^2 + 6x - 9$.

787. $y = x^2 - 8x + 15$.

788. $y = 5x^2 - 12x + 7$.

789. $y = (5x-2)(3-x)$.

790. $y = (3x-1)(x+4)$.

791. $y = (x+1)^2 - 4(x+3)^2$.

792. $y = (2x+1)(x-2) - (4x^2+2x)$.

— Simplifier les fractions :

793. $\dfrac{x^2 - 9x + 8}{x^2 - 3x + 2}$. **794.** $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 6}$. **795.** $\dfrac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 5x - 3}$.

796. $\dfrac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 + x - 2}$. **797.** $\dfrac{x^4 - (5x - 6)^2}{(x^2 - 2)^2 - x^2}$. **798.** $\dfrac{x^2(x - 7)^2 - (3x - 5)^2}{(x^2 - 8x)^2 - (x + 10)^2}$.

— Simplifier les expressions suivantes :

799. $\dfrac{x - 1}{x^2 - x - 2} - \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

800. $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} - \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3} + \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

801. $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{1}{x^2 - 7x + 12}$.

802. $\dfrac{x + 7}{x^2 + 4x + 3} + \dfrac{x + 10}{x^2 - x - 2} + \dfrac{x - 7}{x^2 + x - 6}$.

803. $\dfrac{x + 2}{2x^2 - 7x + 3} - \dfrac{2x + 1}{4x^2 - 8x + 3}$.

804. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x - 5} - \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 6x + 5} + \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 8x + 15}$.

— Étudier suivant les valeurs de m l'existence des racines des équations :

805. $x^2 - 2(m - 1)x - 3m + 7 = 0$.

806. $(m + 1)x^2 - (m + 3)x + 3 - m = 0$.

807. $mx^2 + 2(3m - 2)x + 4m - 3 = 0$.

808. $mx^2 - 2(3m - 4)x + 2m - 1 = 0$.

809. $x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 6 = 0$.

810. $x^2 + 2(m + 2)x + 2m^2 + 15m - 8 = 0$.

811. Montrer que l'expression : $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ est un trinôme du second degré en a qui s'annule pour $a = b$ et $a = c$.

Utiliser ce résultat pour décomposer cette expression en un produit de trois facteurs.

812. Démontrer que l'expression : $841a^2 - 870ab + 225b^2$ est le carré d'un binôme.

En déduire la décomposition de l'expression : $196a^4 - 841a^2b^2 + 870ab^3 - 225b^4$ en un produit de quatre facteurs.

813. On considère le trinôme : $f(x) = (m - 3)x^2 + (m + 3)x - (m + 1)$.

1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence des racines de l'équation $f(x) = 0$.

2° Décomposer pour $m = -7$ le trinôme en un produit de facteurs du premier degré.

3° Déterminer m de façon que les racines x' et x'' vérifient la relation :

$$7(x' + x'') - 4(x'^2 + x''^2) = 1.$$

814. Soit l'équation : $x^2 - 2(2m + 1)x + 6m^2 - 5m + 1 = 0$.

1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence des racines de cette équation.

2° Calculer m pour que l'une des racines soit égale à 11 et déterminer l'autre racine.

3° Déterminer m de façon que les racines vérifient la relation : $3x' - x'' = 2$.

815. On considère l'équation : $(m + 1)\,x^2 - 2\,(m - 1)\,x + 2\,m - 5 = 0$.

1° Étudier suivant les valeurs de m, l'existence des racines.

2° Déterminer m de façon que les racines x' et x'' vérifient la relation : $3\,x' + 2\,x'' = 0$.

816. On donne l'équation : $(m - 1)\,x^2 - 2\,(m - 2)\,x + 3\,(m - 3) = 0$.

1° Étudier l'existence des racines suivant les valeurs de m.

2° Calculer l'expression $(x' - 3)\,(x'' - 3)$. En déduire une relation indépendante de m entre ces racines.

3° Utiliser cette relation pour déterminer x', x'' et m pour que l'on ait $x' - 2\,x'' = 1$.

INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

248. Définition. — ***On appelle inéquation du second degré toute inéquation qui peut se mettre sous l'une des deux formes :***

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad (1) \qquad \text{ou} \qquad ax^2 + bx + c > 0 \quad (2)$$

Remarquons que la seconde forme se ramène à la première en multipliant les deux membres par — 1 (n° 176).

Pour résoudre une telle inéquation, il suffit d'étudier le signe du trinôme $y = ax^2 + bx + c$ placé au premier membre et de conserver les valeurs de x qui satisfont à cette inéquation.

249. Exemples. — 1° *Résoudre l'inéquation :* $x^2 - 8x + 7 < 0$.

Le trinôme $x^2 - 8x + 7$ a pour racines $x' = 1$ et $x'' = 7$. Il est positif pour les valeurs de x extérieures aux racines et négatif pour les valeurs de x comprises entre les racines. Les valeurs de x qui conviennent sont donc comprises entre 1 et 7 :

$$1 < x < 7.$$

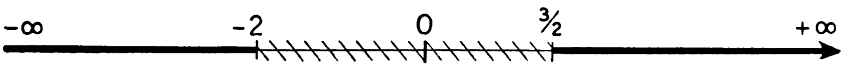
Soit graphiquement :

2° *Résoudre l'inéquation :* $(x + 2)(3 - 2x) < 0$.

Le trinôme $(x + 2)(3 - 2x)$ a pour racines -2 et $\frac{3}{2}\cdot$ Le coefficient de x^2 est -2. Il est donc négatif pour les valeurs de x extérieures aux racines et positif pour les valeurs de x comprises entre les racines. Les valeurs de x qui conviennent sont donc telles que :

$$x < -2 \qquad \text{ou} \qquad x > \frac{3}{2}\cdot$$

Soit graphiquement :



3° *Résoudre l'inéquation :* $3\,x^2 - x + 1 > 0$.

Le trinôme $3\,x^2 - x + 1$ n'a pas de racines. Il est positif quel que soit x. L'inéquation est donc vérifiée pour toute valeur de x.

4° *Résoudre l'inéquation :* $x^2 - 2\,x + 1 < 0$.

Le trinôme $x^2 - 2\,x + 1$ a une racine double $x = 1$. Il est nul pour cette valeur et il est positif pour les autres valeurs de x. Il ne peut être négatif et par suite l'inéquation est impossible.

250. Cas général. — Considérons l'inéquation :

$$ax^2 + bx + c > 0$$

et étudions les différentes hypothèses qui peuvent se présenter :

1° a **positif.** Le trinôme $ax^2 + bx + c$ doit être du signe de a. Ceci a lieu pour toutes les valeurs de x, sauf celles qui sont égales aux racines ou comprises entre les racines lorsqu'elles existent (n° 245). On en conclut :

Si $\Delta < 0$ *l'inéquation est toujours vérifiée.*

Si $\Delta = 0$ *l'inéquation est vérifiée, sauf pour* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$. Le trinôme a deux racines x' et x''. *L'inéquation est vérifiée pour les valeurs de x extérieures aux racines :* Soit pour $x < x' < x''$ et pour $x' < x'' < x$.

2° a **négatif.** Le trinôme $ax^2 + bx + c$ doit être du signe opposé à celui de a. Ceci ne peut se produire que lorsque le trinôme a des racines distinctes, et pour les valeurs de x comprises entre les racines. Donc :

Si $\Delta \leqslant 0$. *L'inéquation est impossible.*

Si $\Delta > 0$. *L'inéquation est vérifiée pour* $x' < x < x''$.

Soit en résumé :

Inéquation : $ax^2 + bx + c > 0$.

$a > 0$	$\Delta < 0$	Toujours vérifiée
	$\Delta = 0$	$x \neq -\dfrac{b}{2a}$
	$\Delta < 0$	$x < x' < x''$; $x' < x'' < x$
$a < 0$	$\Delta \leqslant 0$	Jamais vérifiée
	$\Delta > 0$	$x' < x < x''$

On étudierait de même l'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$. Le tableau que l'on obtient se déduit d'ailleurs du précédent en intervertissant $a > 0$ et $a < 0$.

APPLICATIONS

251. Inéquations se ramenant au second degré. — On peut comme aux nos 189 et 190 résoudre les inéquations de la forme $AB > 0$ ou $\frac{A}{B} > 0$ dans lesquelles A et B sont des produits de facteurs du premier ou du second degré.

Exemple. — *Résoudre l'inéquation :* $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 4} < \dfrac{1}{x^2 - 7x + 10}$.

Cette inéquation s'écrit :

$$\frac{(x^2 - 7x + 10) - (x^2 - 5x + 4)}{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 7x + 10)} < 0$$

soit :

$$\frac{-2x + 6}{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 7x + 10)} < 0.$$

Étudions, suivant les valeurs de x le signe du premier membre. Le numérateur $-2x + 6$ s'annule pour $x = 3$, le premier facteur du dénominateur pour $x = 1$ et $x = 4$ et le second pour $x = 2$ et $x = 5$. On obtient :

x	$-\infty$		1		2		3		4		5		$+\infty$
$-2x + 6$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 7x + 10$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
1er membre		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	

L'inéquation est donc vérifiée pour :

$$1 < x < 2; \quad 3 < x < 4 \quad \text{ou} \quad x > 5.$$

252. Problème. — *Déterminer* m *de façon que l'équation*

$$mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$$

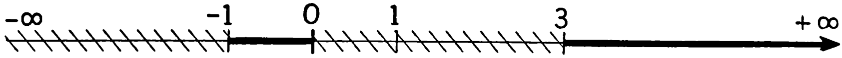
ait deux racines positives.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le discriminant, le produit et la somme des racines soient tous trois positifs. On obtient un système de trois inéquations simultanées (no 182).

$$(m - 1)^2 - m(m - 3) > 0; \qquad \frac{m - 3}{m} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{2(m - 1)}{m} > 0.$$

La première donne $m + 1 > 0$ soit $m > -1$.

La seconde donne $m > 3$ ou $m < 0$ et la troisième $m > 1$ ou $m < 0$.



Les valeurs de m qui conviennent sont telles que :

$$-1 < m < 0 \quad \text{ou} \quad m > 3.$$

253. Réciproques du théorème relatif au signe d'un trinôme. — Considérons le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ et désignons par $f(\alpha)$ la valeur numérique de $f(x)$ pour $x = \alpha$.

$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

est le résultat de la substitution de α à x dans $f(x)$. Si $f(\alpha) = 0$, le nombre α est racine du trinôme. Ce cas mis à part étudions le signe de $af(\alpha)$.

1°	$\Delta < 0$	Quel que soit α.................	$af(\alpha) > 0$
2°	$\Delta = 0$ et $\alpha \neq -\frac{b}{2a}$	....	$af(\alpha) > 0$
3°	$\Delta > 0$	α extérieur aux racines..............	$af(\alpha) > 0$
		α compris entre les racines...........	$af(\alpha) < 0$

La conclusion $af(\alpha) < 0$ exige $\Delta > 0$ et α compris entre les racines. De même si $af(\alpha) > 0$ lorsque $\Delta > 0$, α est extérieur aux racines. Donc :

1° ***Si*** $af(\alpha)$ ***est négatif, le trinôme*** $f(x)$ ***a des racines distinctes et*** α ***est compris entre ces racines.***

2° ***Si*** $af(\alpha)$ ***est positif et si le trinôme*** $f(x)$ ***a des racines,*** α ***est extérieur aux racines.***

3° Si $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont de signes contraires, l'une des expressions $af(\alpha)$ et $af(\beta)$ est positive et l'autre négative. Donc :

Si $f(\alpha)$ ***et*** $f(\beta)$ ***sont de signes contraires, le trinôme*** $f(x)$ ***a des racines distinctes.***

On peut ajouter que l'un des deux nombres α ou β est compris entre les racines.

254. Application. — ***Montrer sans calculer le discriminant qu'une équation du second degré a deux racines distinctes.***

Le problème est déjà résolu lorsque les coefficients a et c de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont de signes contraires (n° 222). Les réciproques précédentes permettent de le résoudre dans d'autres cas.

EXEMPLE I. $15x^2 - 37x + 20 = 0.$

Faisons $f(1)$ dans le premier membre. On obtient $f(1) = -2$. D'après la première réciproque, on en déduit que l'équation a deux racines x' et x'' telles que $x' < 1 < x''$.

EXEMPLE II. $m(x^2 - 4) + x(x - 5) = 0.$

L'expression $m(x^2 - 4)$ s'annule quel que soit m pour $x = +2$ et $x = -2$. On obtient $f(2) = -6$ et $f(-2) = +14$. Par suite d'après la troisième réciproque l'équation a deux racines x' et x'' et l'on peut ajouter qu'une des racines et une seule est comprise entre -2 et $+2$.

EXERCICES

— Résoudre les inéquations suivantes :

817. $2x^2 - 11x + 12 < 0.$

818. $3x^2 + 14x + 15 < 0.$

819. $25x^2 - 70x + 49 > 0.$

820. $-5x^2 + 19x + 4 > 0.$

821. $5x^2 + 2x - 3 < 0.$

822. $6x^2 + 5x - 56 > 0.$

823. $(5 - x)(2x - 15) > 0.$

824. $(2x + 1)(3x - 12) < 0.$

825. $\dfrac{2x - 7}{x + 4} - 1 < 0.$

826. $\dfrac{5x - 12}{6 - x} + 3 < 0.$

— Résoudre les inéquations :

827. $(x^2 - 4)(x^2 - 4x + 3) > 0.$

828. $(8x^2 - 22x + 15)^2 < 121(2x - 3)^2$

829. $\dfrac{18x - 6}{9(x - 3)} + \dfrac{x + 1}{2x - 1} < 0.$

830. $\dfrac{7x - 17}{5x - 17} > \dfrac{25(x + 2)}{10x^2 - 49x + 51}.$

831. $\dfrac{x + 5}{2x - 1} + \dfrac{2x - 1}{x + 5} > 2.$

832. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 8} > \dfrac{1}{x + 1}.$

833. $\dfrac{2x + 7}{2(x + 1)} - \dfrac{x + 1}{x + 6} > 1.$

834. $\dfrac{5}{x + 9} - \dfrac{2}{2x + 3} > \dfrac{7}{9(x + 1)}.$

— Résoudre les systèmes d'inéquations simultanées suivantes :

835. $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 18 > 0 \\ 3x^2 - 20x - 7 < 0. \end{cases}$

836. $\begin{cases} 5x^2 - 24x - 77 > 0 \\ -2x^2 + 5x + 3 > 0. \end{cases}$

837. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ 7x^2 - 31x - 20 < 0. \end{cases}$

838. $\begin{cases} x^2 - 14x + 1 > 0 \\ x^2 - 18x + 1 < 0. \end{cases}$

839. $\begin{cases} (5x - 6)^2 < x^4 \\ (x + 1)^2(x - 10)^2 > (2x - 34)^2. \end{cases}$

840. $\begin{cases} (x^2 - 8x)^2 < (x + 10)^2 \\ (x^2 - 16x + 21)^2 > 36x^2. \end{cases}$

— Déterminer m de façon que les inégalités suivantes soient vérifiées quelle que soit la valeur donnée à x.

841. $(5m - 6)x^2 - 2mx + 1 > 0.$

842. $x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 5m - 2 > 0.$

843. $mx^2 - 4(m+1)x + m - 5 < 0.$

844. $mx^2 + (4m+1)x + 5m + 2 < 0.$

845. $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) > 0.$

846. $(m-2)x^2 - 2mx + 3m - 4 > 0.$

847. Quelles valeurs faut-il donner à m de façon que l'équation :

$$(2m-1)x^2 - 2(m+2)x + m + 8 = 0$$

ait deux racines de signes contraires.

848. Quelles valeurs faut-il donner à m pour que l'équation :

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$$

ait deux racines positives.

— Montrer sans calculer le discriminant que les équations suivantes ont toujours deux racines distinctes :

849. $(x-1)(x-3) + (x-2)(x-4) = 0.$

850. $(2x-1)(x+3) + x^2 - 4 = 0.$

851. $(x+2)(x-5) + mx(x+3) = 0.$

852. $m(x^2-9) + x(x-5) = 0.$

853. $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0.$

854. $m^2(x-a) + 3(x-a)(x-b) + 2p^2(x-b) = 0.$

LIVRE III

FONCTIONS

20e Leçon

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

255. Définition. — ***Un nombre y est fonction d'un nombre variable x quand à chaque valeur de x correspond une valeur déterminée de y.***

Le nombre x est appelé *variable indépendante*. Les deux variables x et y peuvent être les mesures de deux grandeurs correspondantes ou des nombres abstraits. Ainsi :

1° La longueur y d'une tige métallique est fonction de sa température x.

2° La longueur y d'une corde d'un cercle est fonction de la mesure x de l'arc sous-tendu par cette corde.

3° Le prix y d'un coupon d'une pièce d'étoffe est fonction de la longueur x de ce coupon.

Lorsque y est la valeur numérique d'une expression algébrique de la variable x, on dit que *y est une fonction algébrique de x*. Ainsi :

$$y = 2x + 3; \qquad y = \frac{1}{x+2}; \qquad y = \sqrt{x-1}$$

sont des fonctions algébriques de x. La valeur de y se calcule facilement à partir de celle de x.

D'une façon générale si y est fonction de x, on écrit

$$y = f(x) \quad (\text{lire « } f \text{ de } x \text{ »})$$

et la valeur de $f(x)$ pour $x = \alpha$ se désigne par $f(\alpha)$.

256. Fonction définie dans un intervalle. — Quelle que soit la valeur numérique de x on peut calculer celle de $2x + 3$. On dit que *la fonction $y = 2x + 3$ est définie pour toute valeur de x.*

Par contre, l'expression $\sqrt{x-1}$ ne peut se calculer que si le radicande $x - 1$ est positif ou nul, donc pour $x - 1 \geqslant 0$ ou $x \geqslant 1$.

On dit que *la fonction $y = \sqrt{x-1}$ n'est définie que dans l'intervalle* $[+1, +\infty]$.

257. Accroissement d'une variable. — Si la variable x, initialement égale à $+ 4$, prend la valeur $+ 11$, sa valeur s'accroît de $+ 11 - 4 = + 7$. On dit que x a subi un accroissement $+ 7$. Si partant de $+ 4$, la variable x prend la valeur $- 5$, elle subit un accroissement $- 5 - 4 = - 9$. En général :

Lorsque la variable x passe de la valeur initiale x_1 à la valeur finale x_2, elle subit un accroissement égal à $x_2 - x_1$.

On écrit : $\Delta x = x_2 - x_1$ (Δx se lit « delta x »).

Il est clair qu'un accroissement positif correspond à une augmentation de la valeur de la variable et un accroissement négatif à une diminution.

Si $y = f(x)$, l'accroissement de la fonction y, quand x passe de x_1 à x_2 est de même :

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1).$$

258. Croissance d'une fonction. — La longueur d'une tige métallique augmente lorsque sa température augmente et par suite diminue si la température diminue. On dit que sa longueur est fonction croissante de sa température.

Au contraire la longueur d'une corde d'un cercle diminue lorsque sa distance au centre augmente et inversement. On dit que la longueur de la corde est fonction décroissante de sa distance au centre.

Une fonction est croissante quand elle varie dans le même sens que la variable. Elle est décroissante quand elle varie en sens contraire de la variable.

Étudier la variation d'une fonction $f(x)$, c'est chercher les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est croissante, et les valeurs pour lesquelles elle est décroissante. Il peut arriver que la valeur de la fonction soit indépendante de celle de x; on dit que la fonction est **constante.**

Ainsi la fonction $y = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ est constante et égale à $+ 1$ lorsque x est positif. Elle est constante et égale à $- 1$ lorsque x est négatif.

259. Étude de la variation d'une fonction. — Considérons une fonction $y = f(x)$ définie dans un intervalle $]a, b[$ et deux valeurs x_1 et x_2 quelconques de cet intervalle.

1° Si l'inégalité $x_1 < x_2$ entraîne toujours $f(x_1) < f(x_2)$, on voit que x et $y = f(x)$ varient dans le même sens. La fonction $y = f(x)$ est croissante dans l'intervalle $]a, b[$.

Si l'inégalité $x_1 < x_2$ entraîne toujours $f(x_1) > f(x_2)$, on voit que x et $y = f(x)$ varient en sens contraires. La fonction $y = f(x)$ est décroissante dans l'intervalle $]a, b[$.

2° Formons le rapport :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Si ce rapport est positif, quelles que soient les valeurs x_1 et x_2 de l'intervalle $]a, b[$, on en conclut que les accroissements correspondants $x_2 - x_1$ et $y_2 - y_1$ sont de même signe, donc que la fonction $y = f(x)$ est croissante dans l'intervalle $]a, b[$.

Si au contraire le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est négatif, les accroissements $x_2 - x_1$ et $y_2 - y_1$ sont de signes contraires et la fonction $y = f(x)$ est décroissante dans l'intervalle $]a, b[$.

Exemple. — *Étudier la variation de la fonction :* $y = x^2$.

On a : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2.$

La somme $x_1 + x_2$ est positive lorsque x_1 et x_2 sont tous deux positifs. La fonction $y = x^2$ est croissante pour x positif.

De même $x_1 + x_2$ est négatif si x_1 et x_2 sont tous deux négatifs. La fonction $y = x^2$ est donc décroissante pour x négatif.

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

260. Coordonnées cartésiennes quelconques. — Considérons dans le plan deux axes concourants $x'x$ et $y'y$ ayant pour origine commune leur point d'intersection O (fig. 25). Soit $\vec{i}$ le vecteur unitaire de l'axe Ox, $\vec{j}$ le vecteur unitaire de l'axe Oy, ces deux vecteurs n'ayant pas nécessairement le même module.

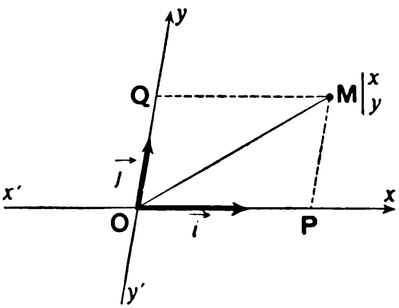


Fig. 25.

Menons par un point donné M du plan, la parallèle à Oy qui coupe Ox en P et la parallèle à Ox qui coupe Oy en Q. La position du point M dans le plan est déterminée par celles de P et Q et par conséquent par les mesures algébriques $x = \overline{OP}$ et $y = \overline{OQ}$:

Le nombre x est **l'abscisse** du point M et y **son ordonnée.**

L'ensemble des deux nombres $x = \overline{\mathrm{OP}}$ et $y = \overline{\mathrm{OQ}}$ constitue les coordonnées du point M relatives au repère cartésien $x\mathrm{O}y$,

Le point O est *l'origine* des coordonnées et les axes $x'x$ et $y'y$ sont les *axes de coordonnées*. Observons que :

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ sont les projections du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sur les axes Ox et Oy, la projection sur chaque axe étant effectuée parallèlement à l'autre. D'autre part l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ entraîne :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j}} \qquad (1)$$

Inversement, pour déterminer un point M de coordonnées données x et y il suffit de construire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ défini par l'égalité vectorielle (1) : on détermine le point P de Ox tel que $\overline{\mathrm{OP}} = x$, le point Q de O$y$ tel que $\overline{\mathrm{OQ}} = y$ et on achève le parallélogramme POQM.

Le point M ainsi obtenu est le point *représentatif* ou *image* du couple (x, y), soit en abrégé :

$$\mathrm{M}(x, y) \text{ ou } \mathrm{M}\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$$

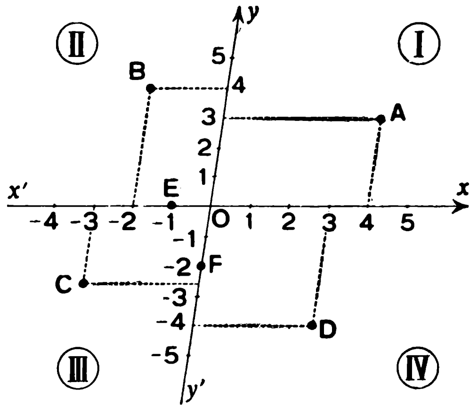


Fig. 26.

On obtient ainsi (fig. 26) les points A (+ 4, + 3); B (— 2, + 4); C (— 3, — 2,5); D (+ 3, — 4); E (— 1, 0) et F (0, — 2).

261. Remarques. — 1° L'origine O a pour coordonnées $x = 0$ et $y = 0$. Les points de l'*axe des abscisses $x'x$* sont caractérisés par une ordonnée $y = 0$ et ceux de l'*axe des ordonnées $y'y$* par une abscisse $x = 0$.

2° Les axes de coordonnées divisent le plan en quatre régions (ou quadrants) : $x\mathrm{O}y$, $y\mathrm{O}x'$, $x'\mathrm{O}y'$ et $y'\mathrm{O}x$ que l'on numérote dans cet ordre (fig. 26). On voit que dans ces quatre régions :

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right. \qquad (\mathrm{II})\left\{\begin{matrix} x < 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right. \qquad (\mathrm{III})\left\{\begin{matrix} x < 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right. \qquad (\mathrm{IV})\left\{\begin{matrix} x > 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right..$$

3° Notons que les points d'une parallèle à Ox ont tous même ordonnée y, tandis que les points d'une parallèle à Oy ont tous même abscisse x.

262. Repère rectangulaire. Repère orthonormé. — Lorsque les axes de coordonnées $x'x$ et $y'y$ sont perpendiculaires le repère cartésien $x\mathrm{O}y$ est rectangulaire et les *coordonnées sont dites rectangulaires*. Dans le cas contraire elles sont *obliques*.

Un repère cartésien est dit orthonormé lorsque les vecteurs unitaires des axes $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires et de même module.

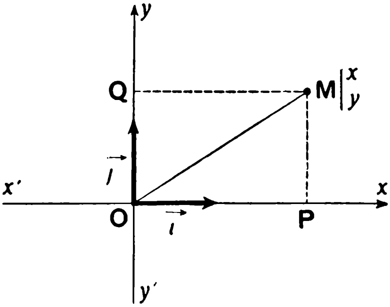


Fig. 27.

Dans ce cas (fig. 27) on peut prendre ce module commun pour unité de longueur et dans le rectangle POQM la relation :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 \qquad \text{donne}$$

$$\boxed{\overline{OM}^2 = x^2 + y^2}$$

Notons que cette formule n'est valable qu'en coordonnées orthonormées.

263. Composantes scalaires d'un vecteur. — Le plan étant rapporté à un repère cartésien quelconque (fig. 28) considérons le vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine A (x_1, y_1) et d'extrémité B (x_2, y_2).

Construisons le vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et soient X et Y les coordonnées du point M. La relation : $OM = X\vec{i} + Y\vec{j}$ entraîne :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j}}$$

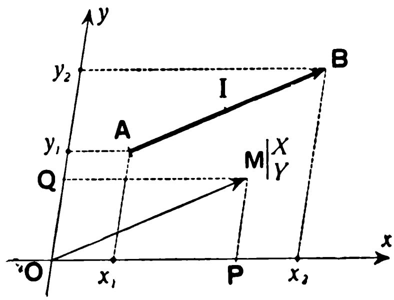


Fig. 28.

Les nombres X et Y sont appelés les *composantes scalaires du vecteur* $\overrightarrow{AB}$. Comme ces nombres X et Y déterminent la position du point M, elles caractérisent tout vecteur $\vec{V}$ égal à $\overrightarrow{OM}$ donc égal à $\overrightarrow{AB}$. On écrit : $\vec{V}$ (X, Y) ou $\overrightarrow{AB}$ (X, Y).

Remarquons que $X = \overline{OP}$, $Y = \overline{OQ}$ sont les mesures algébriques des projections du vecteur $\overrightarrow{OM}$, donc de celles du vecteur égal $\overrightarrow{AB}$, sur les axes Ox et Oy, la projection sur un axe étant effectuée parallèlement à l'autre axe :

Les composantes scalaires d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les mesures algébriques de ses projections sur les axes et caractérisent tout vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$.

L'égalité vectorielle : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ donne en projection sur les axes :

$$\boxed{X = x_2 - x_1 \quad \Big| \quad Y = y_2 - y_1}.$$

Chacune des composantes scalaires d'un vecteur est égale à la coordonnée de même nom de son extrémité diminuée de celle de son origine.

264. 1° Milieu d'un segment. — Le milieu I (x, y) du segment AB (fig. 28) est défini par l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$, soit :

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI} = 0 \quad \text{ou} \quad 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

donc :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

En projetant cette relation sur les axes de coordonnées on obtient :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \Big| \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)}$$

2° Distance de deux points *(repère orthonormé)*. — Le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$ de composantes scalaires : $X = x_2 - x_1$ et $Y = y_2 - y_1$ (fig. 28) est celui du vecteur égal $\overrightarrow{OM}$ (X, Y). Or (n° 262) : $\overline{OM}^2 = X^2 + Y^2$ donc :

$$\boxed{\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En coordonnées orthonormées le carré du module d'un vecteur est la somme des carrés de ses composantes scalaires.

265. Vecteurs parallèles. — Considérons, dans le plan rapporté à un repère quelconque (fig. 29), deux vecteurs :

$$\vec{V}(X, Y) = \overrightarrow{OM}$$

et

$$\vec{V}'(X', Y') = \overrightarrow{OM}'.$$

Pour que ces deux vecteurs soient parallèles il faut et il suffit que l'on ait : $\vec{V}' = k\vec{V}$ ou $\overrightarrow{OM}' = k\overrightarrow{OM}$, ce qui entraîne :

$$X' = kX \quad \text{et} \quad Y' = kX$$

donc

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}.$$

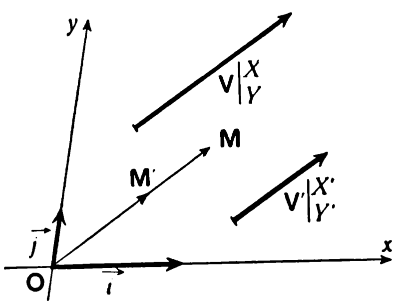


Fig. 29.

Réciproquement si ces deux rapports sont égaux, ils ont la même valeur k et on a : $X' = kX$, $Y' = kY$ donc :

$$\overrightarrow{OM'} = kX\vec{i} + kY\vec{j} = k(X\vec{i} + Y\vec{j}) = k\overrightarrow{OM}.$$

Soit : $\vec{V'} = k\vec{V}$. Les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont parallèles :

$$\boxed{\vec{V} \parallel \vec{V'}} \iff \boxed{\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}}$$

et $$\boxed{\vec{V'} = k\vec{V}} \iff \boxed{X' = kX;\ Y' = kY}$$

Deux vecteurs sont parallèles si leurs composantes scalaires sont proportionnelles et leur rapport est égal au rapport de leurs composantes de même nom.

En particulier deux vecteurs sont égaux si leurs composantes scalaires sont respectivement égales :

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V'}} \iff \boxed{X = X';\ Y = Y'}$$

266. Vecteurs perpendiculaires (repère orthonormé). — Pour que les vecteurs $\vec{V}(X, Y) = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{V'}(X', Y') = \overrightarrow{OM'}$ soient perpendiculaires (fig. 30), il faut et il suffit que le triangle OMM′ soit rectangle en O, donc que :

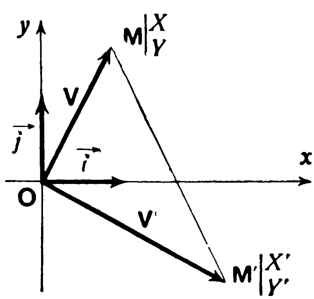


Fig. 30.

$$\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = \overline{MM'}^2$$

soit (n° 264) :

$$(X^2 + Y^2) + (X'^2 + Y'^2) = (X' - X)^2 + (Y' - Y)^2$$

soit après réduction :

$$\boxed{XX' + YY' = 0}$$

L'expression $XX' + YY'$, somme des produits des composantes scalaires de même nom des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ est appelée leur *produit scalaire* :

Pour que deux vecteurs $V(X, Y)$ ***et*** $V'(X', Y')$ ***soient perpendiculaires il faut et il suffit que leur produit scalaire*** $XX' + YY'$ ***soit nul.***

Donc en coordonnées orthonormées :

$$\boxed{\vec{V} \perp \vec{V'}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{XX' + YY' = 0}$$

267. Translation des axes de coordonnées. — Le plan étant rapporté au repère quelconque xOy (fig. 31), menons par le point ω (x_0, y_0) l'axe X'X parallèle à $x'x$ et de même vecteur unitaire $\vec{i}$ et l'axe Y'Y parallèle à $y'y$ et de même vecteur unitaire $\vec{j}$. Nous obtenons ainsi un nouveau repère $X\omega Y$ qui se déduit du repère xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$.

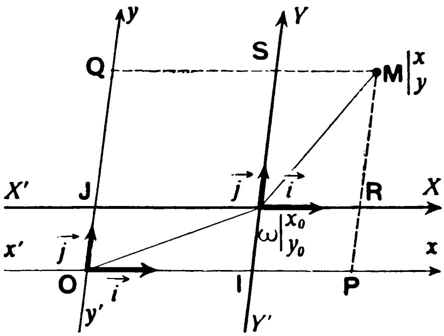


Fig. 31.

Soit M (x, y) un point quelconque du plan et X, Y ses coordonnées par rapport aux nouveaux axes ωX et ωY. La relation $\overrightarrow{\omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ montre (nº 263) que X et Y sont les composantes scalaires du vecteur $\overrightarrow{\omega M}$ par rapport aux anciens axes Ox et Oy. D'où :

$$X = x - x_0 \quad \text{et} \quad Y = y - y_0$$

ou : $\boxed{x = x_0 + X}$ et $\boxed{y = y_0 + Y}$

L'ancienne abscisse est égale à l'abscisse de la nouvelle origine augmentée de la nouvelle abscisse.

Pour les ordonnées, on obtient la règle analogue.

268. Représentation graphique d'une fonction. — Considérons une fonction $y = f(x)$ définie dans l'intervalle $[a, d]$. Pour toute valeur de x de cet intervalle nous pouvons, dans le plan rapporté à un repère cartésien xOy (fig. 32), construire le point M d'abscisse x et d'ordonnée $y = f(x)$. Lorsque x varie dans l'intervalle $[a, d]$ le point M décrit un arc de courbe AD appelé *courbe représentative* de la fonction $y = f(x)$.

Les arcs AB et CD correspondent à des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ où la fonction est *croissante*, tandis que l'arc BC correspond à un intervalle $[b, c]$ où la fonction est *décroissante*. Cette fonction passe par un *maximum* pour $x = b$ et par un *minimum* pour $x = c$.

Le graphique d'une fonction $y = f(x)$ permet de traduire les variations de cette fonction et même de retrouver, pour chaque valeur de x, la valeur de y correspondante. Les graphiques ont l'avantage de pouvoir être parfois décrits automatiquement par des appareils enregistreurs (baromètres, manomètres, indicateurs de vitesse, etc...), d'où leur grande utilité pratique.

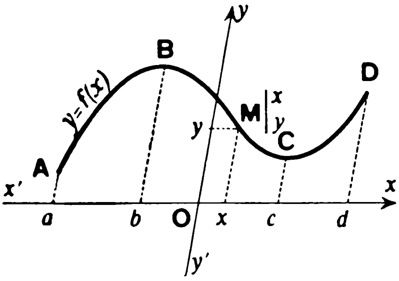


Fig. 32.

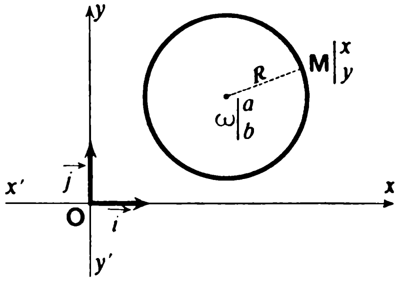


Fig. 33.

Sauf indication contraire, on utilise de préférence des coordonnées rectangulaires dans les représentations graphiques.

269. Équation d'une courbe. — Le lieu géométrique des points M (x, y) dont les coordonnées vérifient une relation donnée $F(x, y) = 0$ est en général une courbe (C), appelée *courbe représentative* de cette relation.

Inversement :

La relation $F(x, y) = 0$ ***qui correspond à une courbe*** (C) ***est l'équation de la courbe*** (C).

Ainsi (fig. 33) le plan étant rapporté à un repère orthonormé xOy, l'équation du cercle de centre ω (a, b) et de rayon R s'obtient en écrivant que $\overline{\omega M}^2 = R^2$ ou $\overline{\omega M}^2 - R^2 = 0$, ce qui donne (nº 264) :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0.$$

Si le centre de ce cercle est l'origine O des coordonnées, on obtient :

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

EXERCICES

— Pour quelles valeurs de x les fonctions suivantes sont-elles définies?

855. $y = 2x^2 + 3$; $y = \dfrac{1}{x - 5}$; $y = \sqrt{25 - x^2}$.

856. $y = \dfrac{1}{x(x - 3)}$; $y = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$; $y = \dfrac{3x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

857. On a suspendu à un ressort différents poids et on a obtenu les allongements suivants :

Poids :	1 kg	2 kg	3 kg	4 kg	5 kg	6 kg
Allongements :	5 cm	10 cm	14 cm	17 cm	19 cm	20 cm

Construire le graphique représentant l'allongement du ressort en fonction du poids suspendu.

858. On fait bouillir de l'eau initialement à 10° et on note minute par minute les températures successives suivantes :

10°, 25°, 40°, 54°, 65°, 74°, 83°, 90°, 96°, 100°.

Construire le graphique représentant la température de l'eau en fonction du temps écoulé.

859. La pression atmosphérique en centimètres de mercure est fonction de l'altitude en kilomètres :

Altitude :	0	1	2	3	4	6	8	10	12 km
Pression :	76	67	59	52	46	36	28	22	17 cm

1° Construire la courbe représentant la pression y en fonction de l'altitude x.

2° Déterminer d'après le graphique la pression à une altitude de 6,8 km, et l'altitude correspondant à une pression de 42 cm.

860. Un rectangle ABCD a une aire donnée de 12 cm². Le côté AB mesure x cm. Calculer la mesure y du côté BC. Représenter la variation de y lorsque x prend toutes les valeurs comprises entre 1 cm et 6 cm.

861. Un trapèze ABCD a une aire de 9 m². La base AB mesure 3 m. On désigne par x la longueur de la base CD. Calculer la hauteur y du trapèze et représenter graphiquement la variation de y lorsque x varie de 0 à 10 m.

862. 1° Dans un cercle de 10 cm de diamètre, calculer la distance au centre y d'une corde de longueur x.

2° Déterminer y quand x prend des valeurs entières de 0 à 10 et construire la courbe représentative.

— Représenter graphiquement les fonctions :

863. $y = 6x - x^2$ lorsque x varie de -1 à $+7$.

864. $y = x^2 - 6x + 5$ lorsque x varie de 0 à $+6$.

865. $y = \dfrac{3x}{x+2}$ lorsque x varie de -1 à $+8$.

866. $y = \dfrac{6x^2 - x^3}{4}$ lorsque x varie de -2 à $+6$.

867. $y = \sqrt{10x - x^2}$ lorsque x varie de 0 à $+10$.

868. Soient en coordonnées orthonormées, les points A $(+8, +6)$ et B $(-3, +4)$.

1° Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont perpendiculaires.

2° Calculer les longueurs OA, OB et AB et vérifier que le triangle OAB est rectangle en O.

869. On considère en coordonnées orthonormées les points A $(-1, +3)$, B $(+8, +6)$ C $(+3, +11)$ et D $(-6, +8)$.

1° Montrer que les deux segments AC et BD ont même milieu I et déterminer ses coordonnées. Nature du quadrilatère ABCD?

2° Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

3° Déterminer la nature du triangle OBD.

870. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé xOy, on construit les points A $(0, +6)$, B $(+7, -1)$, C $(+9, +3)$ et D $(+4, +8)$.

1° Montrer que les segments AD et BC sont égaux et que les segments AB et CD sont parallèles. Nature du quadrilatère ABCD?

2° Calculer les distances du point $\omega\ (+4, +3)$ au point O et aux quatre sommets du quadrilatère ABCD.

3° Établir l'équation du cercle de centre ω et de rayon ωO.

ÉTUDE DE LA FONCTION $y = ax$

270. Fonction : $y = ax$. — Les fonctions $y = 3x$, $y = -2x$... sont de la forme $y = ax$. Une telle fonction est définie quel que soit x, car on peut toujours calculer la valeur du produit ax. Donnons à x différentes valeurs rangées par ordre croissant et calculons les valeurs correspondantes de $y = 3x$ et de $y = -2x$. On obtient :

x	-4	-2	0	1	3	5
$y = 3x$	-12	-6	0	3	9	15
$y = -2x$	$+8$	$+4$	0	-2	-6	-10

Nous constatons que les valeurs de $y = 3x$ vont en croissant tandis que les valeurs de $y = -2x$ vont en décroissant.

271. Théorème. — ***La fonction $y = ax$ est croissante lorsque a est positif, décroissante lorsque a est négatif.***

Soient x_1 et x_2 deux valeurs particulières de x, y_1 et y_2 les valeurs correspondantes de y. On a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Le rapport des accroissements correspondants de y et de x est donc du signe de a. La fonction est croissante si a est positif, décroissante si a est négatif (nº 259).

272. Valeurs infinies. — Lorsque $|x|$ devient infini il en est de même de $|y|$. Pour obtenir $|y| > 10^6$ par exemple, il suffit de prendre $|x| > \frac{10^6}{|a|}$.

Comme y est du signe de x si a est positif, du signe opposé si a est négatif, on en déduit que :

Lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction $y = ax$:
1º Croît de $-\infty$ à $+\infty$ si a est positif.
2º Décroît de $+\infty$ à $-\infty$ si a est négatif.

273. Tableau de variation. — On résume les résultats précédents sous la forme d'un tableau :

1° $\boxed{a \text{ positif}}$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2° $\boxed{a \text{ négatif}}$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

274. Représentation graphique. — *Soit à représenter graphiquement la fonction :* $y = +\frac{3}{2}x$.

Donnons à x différentes valeurs et calculons y :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	$-1{,}5$	0	1,5	3	4,5	6

Le plan étant rapporté à un repère cartésien quelconque xOy (fig. 34), construisons les points A (1; 1,5); B (2; 3); C (3; 4,5) etc... Nous constatons que tous ces points sont disposés suivant une droite passant par d'origine O. Montrons que ce résultat est général.

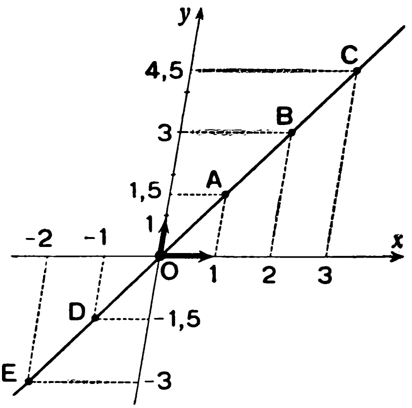


Fig. 34.

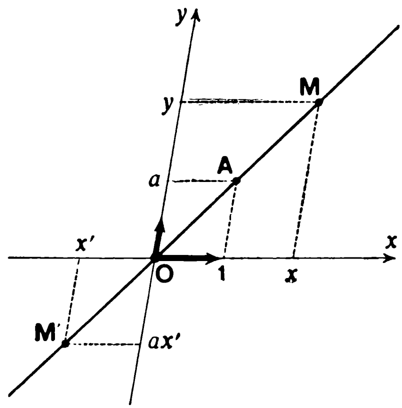


Fig. 35.

275. Théorème. — ***La courbe représentative de la fonction $y = ax$ est une droite passant par l'origine des coordonnées.***

Pour $x = 1$, nous avons $y = a$. Le plan étant rapporté à un repère cartésien quelconque xOy (fig. 35), construisons le point A d'abscisse $\overline{OB} = 1$ et d'ordonnée $\overline{OC} = a$, puis traçons la droite OA.

1° *Les coordonnées* $x = \overline{OP}$ *et* $y = \overline{OQ}$ *de tout point* M *de la droite* OA *vérifient la relation* $y = ax$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ $(1, a)$ et $\overrightarrow{OM}$ (x, y) ont même direction et (n° 265) leurs composantes sont proportionnelles. Donc :

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{y} \qquad \text{soit} \qquad y = ax.$$

2° *Tout point* M′ *d'abscisse* x' *et d'ordonnée* $y' = ax'$ *est situé sur* OA.

En effet, d'après ce qui précède, le point de la droite OA qui a pour abscisse $\overline{OP'} = x'$, a pour ordonnée $y' = ax'$. C'est donc le point M′.

La droite OA est la courbe représentative de la fonction $y = ax$.

C'est pourquoi la fonction $y = ax$ *est appelée* **fonction linéaire.**

276. Coefficient directeur de la droite $y = ax$.

La droite d'équation : $y = ax$ est définie par le point O et le point A $(1, a)$.

Sa position (fig. 36) est donc déterminée par la valeur du coefficient a appelé *coefficient directeur de la droite* $y = ax$.

1° Si *a est positif*, la fonction $y = ax$, est croissante et la droite correspondante se place dans les régions (I) et (III).

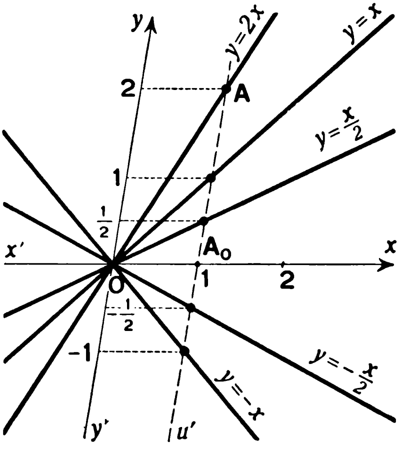


Fig. 36.

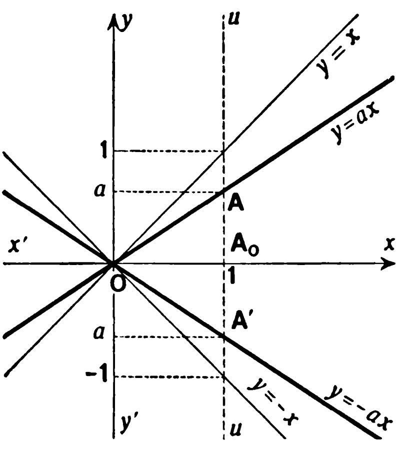


Fig. 37.

Si *a est négatif*, la fonction $y = ax$ est décroissante et la droite correspondante se place dans les régions (II) et (IV).

2° Lorsque la valeur absolue de a croît de 0 à l'infini, le point A s'éloigne sur la droite $u'u$ parallèle à $y'y$. La droite $y = ax$, tourne autour de O, en s'écartant de $x'x$ et tend à venir se confondre avec $y'y$.

En définitive la position de la droite $y = ax$ est fonction de la valeur a de son coefficient directeur.

277. Pente de la droite $y = ax$ en coordonnées orthonormées — Si le repère xOy est orthonormé, le triangle OA_0A est rectangle (fig. 37) et l'unité de longueur étant la même sur les deux axes, on obtient :

$$\operatorname{tg} \widehat{xOA} = \frac{A_0A}{OA_0} = \frac{|a|}{1} = |a|.$$

La tangente trigonométrique de l'angle aigu xOA est égale à $|a|$.

Le coefficient directeur a est appelé pente de la droite : $y = ax$.

Dans ce cas les droites $y = ax$ et $y = -ax$ sont symétriques par rapport à Ox (ou à Oy). D'autre part les droites $y = x$ et $y = -x$ sont les bissectrices des angles xOy et xOy'.

ÉTUDE DE LA FONCTION $y = ax + b$.

278. Fonction $y = ax + b$. — Les fonctions $y = 2x + 5$; $y = -3x + 4$ sont de la forme $y = ax + b$. Une telle fonction est définie quel que soit x, car on peut toujours calculer le produit ax et lui ajouter le nombre b.

La fonction $y = ax + b$ est définie pour toute valeur de x.

279 Théorème. — ***La fonction $y = ax + b$ est croissante lorsque a est positif, décroissante lorsque a est négatif.***

Soient x_1 et x_2 deux valeurs particulières de x, y_1 et y_2 les deux valeurs correspondantes de y. On a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Le rapport des accroissements correspondants de y et de x est égal à a. La fonction $y = ax + b$ est donc (n° 259) croissante si a est positif, décroissante si a est négatif.

D'autre part, lorsque x devient infini en valeur absolue il en est de même de ax et par suite de $ax + b$.

280. Tableau de variation. — On obtient :

1° *a positif*

x	$-\infty$		$+\infty$
$y = ax + b$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2° *a négatif*

x	$-\infty$		$+\infty$
$y = ax + b$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Remarques. — 1° Ces tableaux sont identiques à ceux du n° 273 relatifs à la fonction $y = ax$:

L'addition d'une constante ne change pas le sens de variation d'une fonction.

2° Si $a = 0$, la fonction $y = ax + b$ se réduit à $y = b$. La valeur de y est constante et indépendante de celle de x.

281. Représentation graphique. — *Soit à représenter graphiquement la fonction* $y = -2x + 3$.

Le plan étant rapporté à un repère cartésien quelconque, donnons à x différentes valeurs : $-1, 0, 1, 2, 3$... Nous obtenons pour y les valeurs : $5; 3; 1; -1; -3$... Construisons les points correspondants ($x = -1, y = 5$); ($x = 0, y = 3$) etc... Nous constatons (fig. 38) que ces points sont disposés suivant une droite. Ceci est général.

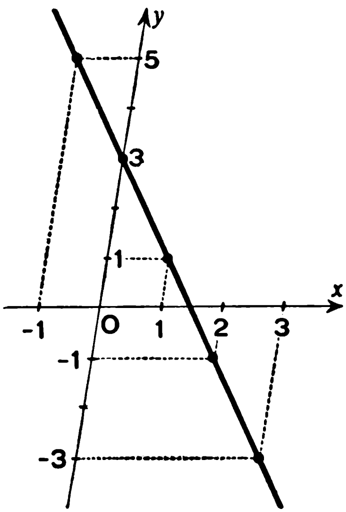


Fig. 38.

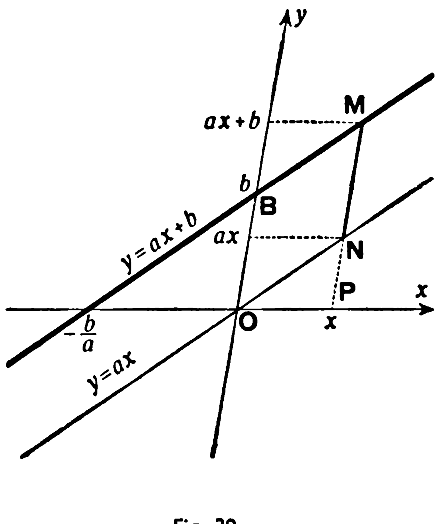


Fig. 39.

282. Théorème. — ***La fonction*** $y = ax + b$ ***est représentée graphiquement par une droite parallèle à la droite*** $y = ax$ ***et coupant l'axe*** Oy ***au point d'ordonnée*** b.

Dans le plan, rapporté à un repère cartésien quelconque, supposons tracée la droite $y = ax$ (fig. 39). Soit M un point quelconque d'abscisse $\overline{OP} = x$ mesurée sur l'axe Ox et d'ordonnée $\overline{PM} = ax + b$ mesurée sur l'axe Oy. Désignons par N le point où la droite PM coupe la droite $y = ax$. On a : $\overline{PN} = ax$ et par suite :

$$\overline{NM} = \overline{PM} - \overline{PN} = (ax + b) - ax = b.$$

Soit B le point de l'axe $y'y$ tel $\overline{OB} = b$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{NM}$ ayant même mesure sur Oy sont égaux et le quadrilatère OBMN est un parallélogramme.

Lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point N décrit la droite $y = ax$ et le point M décrit la parallèle à cette droite menée par le point B.

283. Définitions. — 1° Le coefficient a qui détermine la direction de la droite $y = ax + b$ est le **coefficient directeur de la droite.**

2° Le nombre b qui est l'ordonnée du point d'abscisse $x = 0$ de la droite est l'**ordonnée à l'origine.**

En coordonnées orthonormées le coefficient directeur a est aussi appelé **pente de la droite** $y = ax + b$. Si on désigne par α l'angle aigu formé par la droite Ox et la droite $y = ax + b$ on a comme au n° 277 : $\operatorname{tg}\alpha = |a|$.

Le coefficient directeur x ***de la droite*** $y = ax + b$ ***est le rapport des accroissements*** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ***quand on passe du point*** $M_1(x_1, y_1)$ ***au point*** $M_2(x_2, y_2)$ ***de cette droite.***

En effet les deux relations $y_2 = ax_2 + b$ et $y_1 = ax_1 + b$ donnent :

$$y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1) \qquad \text{soit :} \qquad \boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

284. Réciproque. — ***A toute droite du plan, non parallèle à*** Oy ***correspond une relation de la forme*** $y = ax + b$ ***appelée équation de cette droite.***

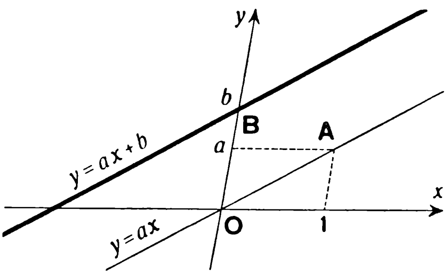


Fig. 40.

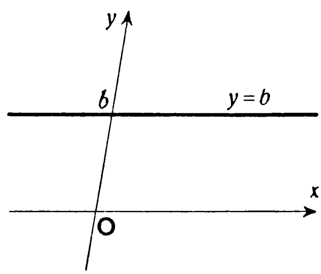


Fig. 41.

Toute droite D non parallèle à Oy coupe Oy en un point B. Désignons par b son ordonnée (fig. 40). Traçons la parallèle D′ issue de O à cette droite et soit A le point de D′ qui a pour abscisse $+ 1$. Désignons par a son ordonnée.

La droite $y = ax$ est la droite D′ et la droite parallèle $y = ax + b$ se confond avec la droite donnée D.

285. Construction de la droite $y = ax + b$.

Il suffit de déterminer deux points de cette droite pour pouvoir la tracer. Si $b \neq 0$, on peut choisir les intersections avec les axes :

$$(x = 0,\ y = b) \qquad \text{et} \qquad \left(x = -\frac{b}{a},\ y = 0\right).$$

Cependant si les deux points obtenus sont trop rapprochés, il est bon de construire au moins un autre point de la droite en prenant pour abscisse la plus grande valeur x compatible avec les limites de la figure.

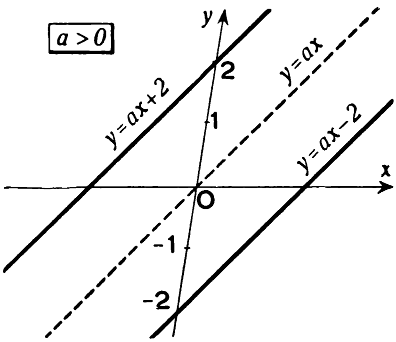


Fig. 42.

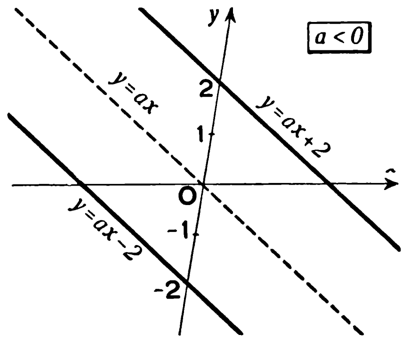


Fig. 43.

Si $a = 0$, la droite est parallèle à Ox (fig. 41). Les figures 42 et 43 montrent différents exemples suivant que a est positif ou négatif.

286. Droites parallèles. — *Pour que deux droites soient parallèles il faut et il suffit qu'elles aient même coefficient directeur.*

Pour que les droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ soient parallèles, il faut et il suffit que les droites $y = ax$ et $y = a'x$ soient confondues, donc que $a = a'$.

Les droites $y = 2x + 3$ et $y = 2x - 5$ sont parallèles.

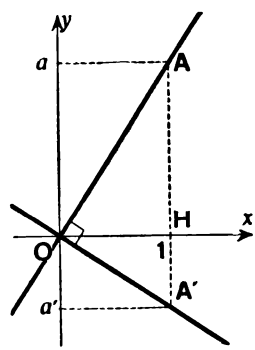


Fig. 44.

287. Droites perpendiculaires en coordonnées orthonormées.

Pour que les droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ soient perpendiculaires il faut et il suffit que $aa' = -1$.

En effet pour que les droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ soient perpendiculaires, il faut et il suffit que leurs parallèles $y = ax$ et $y = a'x$ le soient.

Ces deux droites issues de O (fig. 44) sont définies par les points A (1, a) et A′ (1, a'). Pour que le triangle OAA′ soit rectangle en O il faut et il suffit que l'on ait : $\overline{OA}^2 + \overline{OA'}^2 = \overline{AA'}^2$ soit (nº 264) :

$$(1 + a^2) + (1 + a'^2) = (a' - a)^2$$

soit après réduction : $\boxed{aa' = -1}$

Les droites $y = 2x + 3$ et $y = -\frac{1}{2}x + 5$ sont perpendiculaires.

EXERCICES

— Représenter graphiquement les fonctions :

871. $y = 3x.$ **872.** $y = \frac{3}{4}x.$ **873.** $y = \frac{5}{2}x.$

874. $y = -2x.$ **875.** $y = -\frac{x}{3}.$ **876.** $y = -\frac{3}{2}x.$

877. On considère en coordonnées orthonormées les points A $(a, -1)$, B $(-a, +1)$ et un point quelconque M (x, y) du plan.

1º Calculer $\overline{AM}^2$ et $\overline{BM}^2$. En déduire l'équation de la médiatrice de AB.

2º Donner une interprétation géométrique de la droite $y = ax$.

878. Quelle est l'équation de la droite passant par l'origine et le point A de coordonnées : $(x = 4, y = 6)$?

879. Même exercice que le précédent avec le point A $(x = 4{,}5, y = -3)$?

880. Représenter graphiquement le prix d'une longueur d'étoffe sachant que 3 m de cette étoffe coûtent 12 F. Déterminer graphiquement :

1º Le prix de 4,20 m d'étoffe;

2º La longueur d'étoffe obtenue pour 7,50 F.

881. Même problème que le précédent en supposant que 2,50 m coûtent 15 F.

882. Représenter graphiquement la distance parcourue par un cycliste qui a effectué 56 km en 2 h 20 mn. Déterminer graphiquement :

1º La distance parcourue en 1 h 40 mn.

2º Le temps mis pour parcourir 35 km.

883. Même problème que le précédent pour un automobiliste qui a parcouru 60 km en 48 mn.

884. Représenter sur un même graphique les distances parcourues par un motocycliste et un cycliste partis en même temps sur la même route sachant que le premier a parcouru 60 km en 1 h 15 et le second 32 km en 1 h 20. Déterminer graphiquement :

1° L'avance en kilomètres du motocycliste au bout de 2 h 10.
2° L'intervalle de temps séparant les passages au kilomètre 40.

— Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

885. $y = 2x - 3$. **886.** $y = -x + 4$. **887.** $y = -2x - 1$.

888. $y = \frac{x}{2} + 1$. **889.** $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{2}$. **890.** $y = \frac{2x}{3} - 1$.

891. $y = \frac{4x}{3} + 2$. **892.** $y = \frac{5}{2}x - 3$. **893.** $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

894. Construire sur un même graphique, en coordonnées orthonormées, les droites $y = 2x + 3$ et $y = 2x - 3$. Préciser leur particularité géométrique.

— Même exercice que le précédent pour les droites :

895. $y = 3x + 2$ et $y = -3x + 2$. **896.** $y = -3x + 5$ et $y = -3x - 1$.

897. $y = 2x - 1$ et $y = -2x + 1$. **898.** $y = \frac{x}{3} + 1$ et $y = -3x - 3$.

899. Soit un triangle équilatéral ABC dont le côté mesure 3 cm. On mène la parallèle à BC qui coupe AB en M et AC en N. On pose d'autre part AM $= x$. Calculer et représenter graphiquement le périmètre du trapèze BMNC. Limiter le graphique.

900. Un triangle a deux côtés mesurant 3 cm et 5 cm. Soit x la longueur du troisième côté. Calculer et représenter graphiquement le périmètre y du triangle. Limiter le graphique.

901. Un rectangle a pour dimensions 5 cm et 7 cm. On diminue chacune des dimensions d'une même longueur x. Calculer et représenter graphiquement le périmètre du rectangle.

902. Un vase pèse à vide 300 g. Calculer son poids total y lorsqu'il contient un nombre x de centimètres cubes d'une huile dont la densité est 0,9.
Représenter graphiquement la variation de y en fonction de x.

903. Un flacon contenant 600 cm³ de mercure pèse 8,960 kg. Calculer et représenter graphiquement le poids y du flacon lorsqu'on enlève un nombre x de centimètres cubes de mercure (densité du mercure : 13,6).

904. Une personne possède un capital de 12 000 F. Elle en place une partie à 4 % et le reste à 6 %. Calculer et représenter graphiquement son revenu annuel y en fonction de la somme x placée à 4 %.

905. Un mélange de 40 kg de café comprend du café à 7,20 F le kilogramme et du café à 9,60 F le kilogramme. Calculer et représenter graphiquement le prix y du kilogramme du mélange en fonction du poids x du premier café.
Déterminer graphiquement la composition du mélange qui revient à 8,70 F le kg.

906. Le thermomètre Fahrenheit marque 32° lorsque le thermomètre centigrade marque 0°. Sachant que 9° Fahrenheit correspondent à 5° centigrades, calculer et représenter graphiquement la température Fahrenheit y correspondant à une température centigrade x.
Déterminer y lorsque x vaut — 15°, 10°, 60° et 100°.

907. Un capital de 8 000 F est placé à 5 % à intérêts simples. Calculer la somme y capitalisée au bout de x années. Représenter graphiquement cette somme et déterminer x pour qu'elle soit égale à 10 800 F.

908. Un vase plein d'une huile de densité 0,90 pèse 3,280 kg. Plein d'alcool de densité 0,83 il pèse 3,042 kg. Calculer et représenter graphiquement le poids de ce vase en fonction de la densité du liquide contenu.

909. Un réservoir contient 360 l d'eau. Il est alimenté par un robinet qui débite 12 l à la minute. Calculer la quantité d'eau contenue dans le réservoir à un instant donné. En déduire :

1° Dans combien de temps le réservoir contiendra 600 l.

2° La quantité d'eau contenue au bout de 16 mn.

APPLICATIONS DE LA FONCTION $y = ax + b$

288. Représentation graphique de l'équation : $ax + by = c$. — Soit à déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient l'équation : $2x + 3y = 12$.

Cette équation s'écrit :

$$y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

Les points cherchés sont donc ceux de la droite :

$$y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

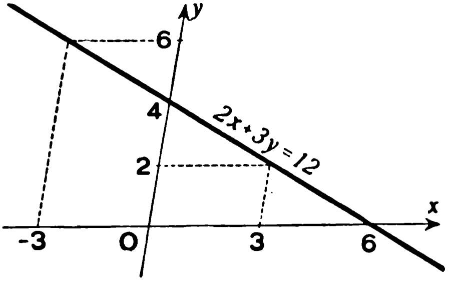


Fig. 45.

Pour la construire (fig. 45) on peut en déterminer deux points, par exemple

$$(x = 3,\ y = 2) \quad \text{et} \quad (x = -3,\ y = 6).$$

Il est souvent commode de choisir ses intersections avec les axes :

Avec Ox : $y = 0$ et $x = 6$. Avec Oy : $x = 0$ et $y = 4$.

289. Théorème. — ***L'équation du premier degré $ax + by = c$ est représentée graphiquement par une droite.***

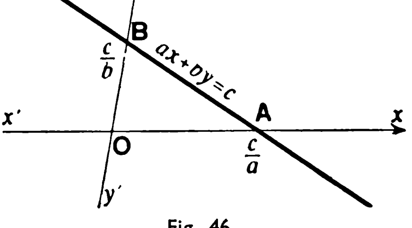


Fig. 46.

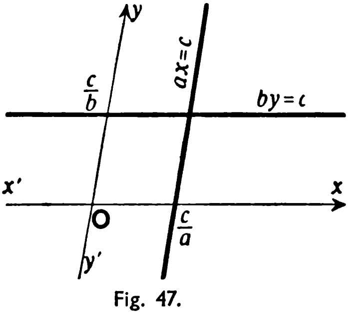


Fig. 47.

1° Si $b \neq 0$, l'équation s'écrit : $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

C'est donc l'équation d'une droite de coefficient directeur $-\frac{a}{b}$, coupant les axes aux points A $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ et B $\left(0, \frac{c}{b}\right)$ (fig. 46).

2° Si $a = 0$, l'équation se réduit à $by = c$ ou $y = \frac{c}{b}$. On obtient une parallèle à Ox (fig. 47).

3° Si $b = 0$, l'équation se réduit à $ax = c$ ou $x = \frac{c}{a}$. On obtient une parallèle à Oy (fig. 47).

290. Détermination de l'équation d'une droite.

1° Équation de la droite de coefficient directeur donné m, issue du point $M_1\,(x_1, y_1)$.

Si M (x, y) désigne un point quelconque de cette droite, il suffit d'écrire qu'entre M_1 et M on a (n° 283) : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$.

Soit : $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$ ou $\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$

Exemple. — L'équation de la droite de coefficient directeur -2, issue du point $M_1\,(+1; +3)$, a pour équation (fig. 48) :

$$\frac{y-3}{x-1} = -2 \quad \text{soit} \quad y - 3 = -2\,(x - 1) \quad \text{ou} \quad 2x + y = 5.$$

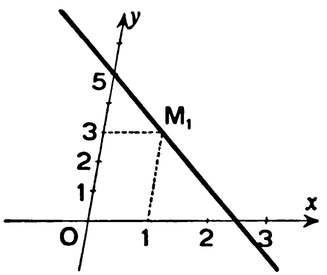


Fig. 48.

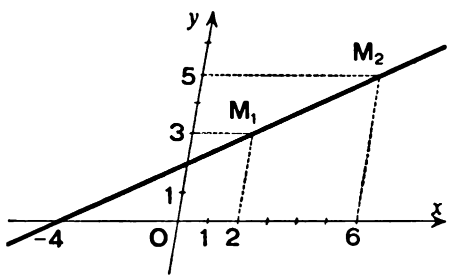


Fig. 49.

2° Équation de la droite définie par $M_1\,(x_1, y_1)$ ***et*** $M_2\,(x_2, y_2)$.

On se ramène au cas précédent car le coefficient directeur m de cette droite est (n° 283) :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Exemple. — La droite définie par les points $M_1(+2, +3)$ et $M_2(+6, +5)$ a pour coefficient directeur

$$m = \frac{5-3}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Comme elle passe par M_1 son équation s'écrit : $y - 3 = \frac{1}{2}(x-2)$ soit :

$$x - 2 - 2(y-3) = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2y + 4 = 0.$$

Remarque. — L'équation de la droite M_1M_2 s'écrit dans le cas général :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Si $M(x, y)$ est un point quelconque de M_1M_2, on obtient directement cette dernière équation en écrivant que les vecteurs de même direction $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ ont leurs composantes scalaires proportionnelles.

291. Intersection de deux droites. — Considérons deux droites concourantes D et D′ tracées sur un même graphique :

$$\begin{cases} ax + by = c & \text{(D)} \\ a'x + b'y = c' & \text{(D')} \end{cases}$$

Les coordonnées x et y de leur point d'intersection M vérifient chacune de ces équations et constituent la solution du système formé par ces deux équations. D'où la règle :

Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de deux droites, il suffit de résoudre le système formé par les équations de ces deux droites.

Exemple. — *Calculer les coordonnées du point d'intersection des deux droites* $3x + 2y = 15$ et $5x - 4y = -8$ *tracées sur un même graphique.*

Résolvons le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 15 \\ 5x - 4y = -8 \end{cases} \left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right.$$

En éliminant y on obtient :

$$11x = 22 \quad \text{soit} \quad x = 2 \quad \text{et} \quad y = \frac{9}{2}.$$

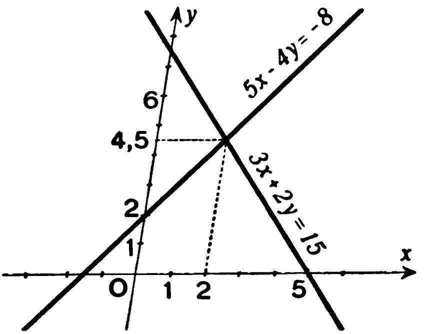


Fig. 50.

Le point d'intersection M a pour coordonnées $x = 2$ et $y = 4{,}5$, ce qui se vérifie sur le graphique (fig. 50).

292. Résolution graphique d'un système de deux équations. — Inversement, étant donné un système de deux équations à deux inconnues on peut construire sur un même graphique les deux droites représentatives de ces deux équations. La lecture, sur le graphique des coordonnées du point commun M, fournit (tout au moins d'une façon approchée) la solution du système.

Discussion. — Les deux droites D et D′ définies par les équations du système

$$\text{(I)} \left\{ \begin{array}{ll} ax + by = c & \text{(D)} \\ a'x + b'y = c' & \text{(D}'\text{)} \end{array} \right.$$

peuvent être concourantes, parallèles ou confondues.

1° D *et* D′ *sont concourantes.* Leurs coefficients directeurs sont différents :

$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'} \quad \text{soit} \quad ab' \neq a'b.$$

Les deux droites D et D′ ont un point commun unique M et le *système* I *admet une solution unique.*

2° D *et* D′ *sont parallèles.* Elles ont même coefficient directeur mais leurs ordonnées à l'origine sont différentes. Donc :

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \quad \text{et} \quad \frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'} \quad \text{soit} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}.$$

Les droites D et D′ n'ont pas de point commun et le *système* I *est impossible.*

3° D *et* D′ *sont confondues.* Elles ont même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine soit :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Toute solution de l'une des équations est solution de l'autre. Le *système* I *est indéterminé.*

Ces résultats sont en accord avec ceux du n° 200.

293. Mouvement uniforme. — ***On dit qu'un mobile se déplace d'un mouvement uniforme lorsque la distance parcourue par ce mobile est proportionnelle au temps mis à la parcourir.***

La *vitesse* du mobile est la distance parcourue pendant l'unité de temps.

Exemple I. — *Un cycliste part à 8 heures et roule à une vitesse horaire de 24 km/h. Déterminer la distance y parcourue à une heure x quelconque.*

A 10 h 30, par exemple, le cycliste a roulé pendant 2 h 30, soit 2,5 heures. Il a donc parcouru 24 km × 2,5 = 60 km.

De même, à l'heure x, il aura roulé pendant $(x - 8)$ heures et parcouru une distance y égale à 24 km $\times$ $(x - 8)$. D'où :

$$y = 24x - 192.$$

Exemple II. — *Un train se dirige vers Paris à la vitesse de 75 km à l'heure. Sachant qu'à 3 heures il est à 380 km de Paris, déterminer sa distance à l'heure x.*

Entre 3 heures et x heures, il s'est écoulé $(x - 3)$ heures et le train a parcouru 75 km $\times$ $(x - 3)$. Par suite sa distance à Paris est alors

$$y = 380 - 75(x - 3) = 380 - 75x + 225.$$

Soit : $$y = 605 - 75x.$$

Exemple III. — Considérons sur un axe d'origine O, un point mobile M, d'abscisse x, animé d'un mouvement uniforme (fig. 51) et soit M_0, d'abscisse x_0 la position du point M, à l'instant initial. Désignons par v la vitesse à la seconde du point M, comptée positivement si M se déplace dans le sens de l'axe et négativement dans le cas contraire. Autrement dit v est la mesure algébrique du vecteur parcouru par le point M en une seconde. Le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ parcouru en t secondes a, par suite, pour mesure algébrique : $\overline{M_0M} = vt$.

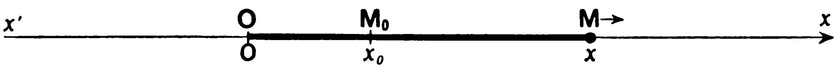


Fig. 51.

Or d'après la formule de Chasles : $\overline{OM} = \overline{OM_0} + \overline{M_0M}$.

Soit : $$x = x_0 + vt.$$

294. Équation horaire d'un mouvement uniforme. — En définitive :

Le nombre qui détermine la position d'un mobile animé d'un mouvement uniforme est une fonction du temps du premier degré.

Cette relation constitue l'*équation horaire du mouvement.*

Un tel mouvement est donc représenté graphiquement par une droite limitée évidemment au segment correspondant à l'intervalle de temps écoulé entre le départ du mobile et son arrivée.

Les graphiques sont souvent utilisés pour étudier la marche de plusieurs mobiles parcourant le même chemin. En particulier l'horaire des trains sur une ligne de chemin de fer donnée est établi à l'aide d'un graphique.

295. Signe de l'expression du premier degré : $ax + by + c$. — La valeur numérique de l'expression $ax + by + c$ dépend des valeurs attribuées à x et y et par conséquent de la position dans le plan (fig. 52) du point M (x, y).

Cette valeur est nulle si le point M (x, y) appartient à la droite (D) d'équation : $ax + by + c = 0$.

Supposons le point M (x, y) en dehors de cette droite. Désignons par P le point de la droite (D) qui a même abscisse x que le point M et soit y_0 son ordonnée. On a donc : $ax + by_0 + c = 0$.

Et on peut écrire :

$$ax + by + c = (ax + by + c) - (ax + by_0 + c) = by - by_0.$$

Soit finalement :

$$ax + by + c = b(y - y_0) = b.\overline{\mathrm{PM}}.$$

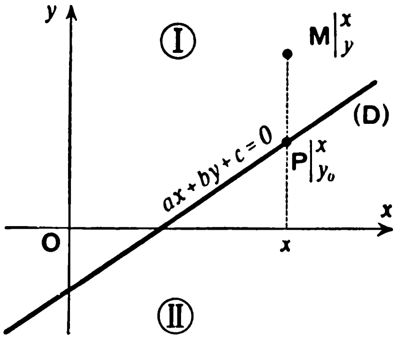


Fig. 52.

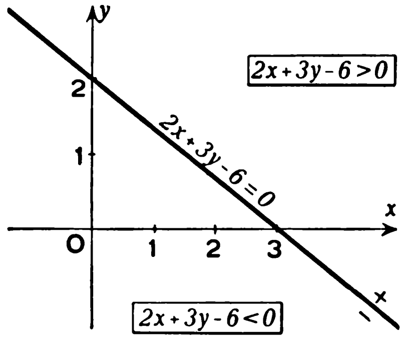


Fig. 53.

On en déduit que l'expression $ax + by + c$ est du signe de b si $\overline{\mathrm{PM}}$ est positif, c'est-à-dire si M appartient à la région du plan (I) située au-dessus de la droite D. Elle est du signe opposé si $\overline{\mathrm{PM}}$ est négatif, c'est-à-dire si M appartient à la région (II) située au-dessous de la droite D.

L'expression $ax + by + c$ est positive en tout point de l'un des demi-plans limités par la droite $ax + by + c = 0$, négative en tout point de l'autre demi-plan.

Pour distinguer ces deux demi-plans il suffit de chercher le signe qui correspond à un point particulier de l'un d'eux. Si $c \neq 0$, on prendra l'origine où $x = 0$ et $y = 0$. On voit que *l'expression $ax + by + c$ est du signe de c dans la région qui contient l'origine des coordonnées.*

Ainsi l'expression $2x + 3y - 6$ est négative dans la région limitée par la droite $2x + 3y - 6 = 0$ qui contient l'origine O (fig. 53). Elle est positive dans l'autre (placer un signe + et un signe — de part et d'autre de la droite.)

296. Résolution graphique de l'inéquation $ax + by + c > 0$. — Il s'agit de trouver l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient l'inégalité : $ax + by + c > 0$. On trace la droite $ax + by + c = 0$

et on détermine le signe de l'expression $ax + by + c$ dans chacun des demi-plans obtenus. On couvre de hachures la région qui ne convient pas.

Ainsi pour obtenir les points du plan (fig. 53) dont les coordonnées vérifient l'inéquation $2x + 3y - 6 > 0$ il faudra couvrir de hachures la région négative qui contient l'origine des coordonnées et conserver la région positive située au-dessus de la droite $2x + 3y - 6 = 0$.

297. Applications. — On peut ainsi résoudre un système d'inéquations simultanées du premier degré à deux inconnues ou une inéquation dont le premier membre est un produit de facteurs du premier degré.

EXEMPLE I. — *Résoudre le système d'inéquations simultanées :*

$$x + y - 1 < 0 \quad (1); \quad x - y + 1 > 0 \quad (2); \quad y + 1 < 0 \, (3).$$

On construit (fig. 54) les droites d'équations respectives :

$$x + y - 1 = 0; \quad x - y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad y + 1 = 0.$$

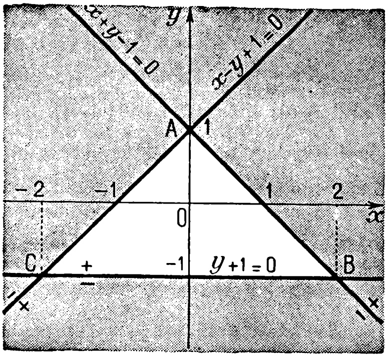


Fig. 54.

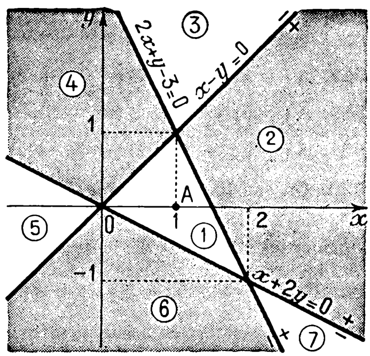


Fig. 55.

On peut alors éliminer, pour chacune de ces droites, le demi-plan dont les points ont des coordonnées qui ne satisfont pas à l'inéquation correspondante. Finalement on voit que le point M (x, y) doit se trouver à l'intérieur du triangle ABC limité par les trois droites.

EXEMPLE II. — *Résoudre l'inéquation :*

$$(x - y)(x + 2y)(2x + y - 3) < 0.$$

On construit (fig. 55) les droites :

$$x - y = 0; \quad x + 2y = 0; \quad 2x + y - 3 = 0.$$

Ces trois droites partagent le plan en 7 régions. Dans chacune d'elles, le produit des facteurs placé au premier membre de l'inéquation conserve un signe constant. On détermine ce signe et on élimine les régions où ce produit est positif. On voit que l'inéquation est satisfaite par les coordonnées des points des régions (1), (3), (5) et (7).

EXERCICES

— Représenter graphiquement les équations suivantes :

910. $4x + 3y = -6$.

911. $5x - 3y = 15$.

912. $6x - 2y = 18$.

913. $4x + 6y = 21$.

914. $7x + 4y = 14$.

915. $8x - 5y = 20$.

916. Former l'équation de la droite de coefficient angulaire $a = 5$ et passant par le point A ($x = 2$, $y = 6$).

— Déterminer l'équation des droites définies par les points :

917. A $(+1; -1)$ et B $(+7; +2)$.

918. A $(+1; +4;)$ et B $(+4; -2)$.

919. A $(+3; +1)$ et B $(0; -5)$.

920. A $(0; +1)$ et B $(+8; -1)$.

921. A $(+3; -2)$ et B $(+3; -5)$.

922. A $(+5; -2)$ et B $(-1; -2)$.

923. On considère trois points M, N, P de coordonnées respectives :

$$(-2, +1); \quad (+1, +4) \quad \text{et} \quad (+4, +2).$$

Former les équations des côtés du triangle MNP. On mène par chacun des sommets la parallèle au côté opposé. Former les équations des côtés du nouveau triangle ainsi obtenu.

924. On considère en orthonormées le point A de l'axe $x'x$ et d'abscisse a et les points B et C de l'axe $y'y$ d'ordonnées b et c.

1° Établir les équations des côtés AB et AC du triangle ABC, puis celles des hauteurs du triangle.

2° Montrer que les hauteurs se coupent en un point H de $x'x$ dont on demande l'abscisse en fonction de a, b et c.

Application : $a = 8$; $b = 6$ et $c = -4$.

— Résoudre graphiquement les systèmes suivants et vérifier les résultats par le calcul.

925. $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 5x - y = 11. \end{cases}$

926. $\begin{cases} 2x + 4y = -12 \\ 9x + 6y = 18. \end{cases}$

927. $\begin{cases} 5x + 4y = 19 \\ 2x - 3y = 26. \end{cases}$

928. $\begin{cases} 7x + 4y = 14 \\ 3x - 2y = 19. \end{cases}$

929. $\begin{cases} 12x + 9y = 78 \\ 20x - 15y = 10. \end{cases}$

930. $\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ 8x - 3y = 6. \end{cases}$

931. Calculer les coordonnées des trois sommets d'un triangle ABC, sachant que les équations des côtés AB, BC et CA sont respectivement :

$$y = x + 5; \qquad 2x + y = 8 \qquad \text{et} \qquad x + 3y + 1 = 0.$$

932. Soient les trois points A $(+3, +3)$, B $(-1, +1)$ et C $(+1, -1)$. Déterminer les équations des côtés du parallélogramme ABCD. Calculer les coordonnées du sommet D.

933. Montrer que les trois droites d'équations :

$$x - 2y = -4; \qquad x + y = 5 \qquad \text{et} \qquad 3x - y = 3$$

sont concourantes.

934. Même exercice pour les droites :

$$y = x + 1; \qquad y = 3x - 1 \qquad \text{et} \qquad y = -2x + 4.$$

935. Montrer que quel que soit m la droite $(2x - y + 3) + m(x + 2y - 1) = 0$ passe par le point d'intersection des droites $2x - y + 3 = 0$ et $x + 2y - 1 = 0$. Calculer m pour que cette droite ait pour coefficient directeur 3.

936. Soit l'équation $(m + 1)x - y + m - 1 = 0$. Construire les droites correspondantes pour $m = -2$, 0 et $+3$. Montrer que ces droites sont concourantes. Quelle valeur faut-il donner à m pour que la droite correspondante passe par le point $x = 7$, $y = 2$?

937. Un cycliste part d'une ville A à 8 h du matin et roule à la vitesse de 24 km à l'heure pendant 1 h 20 mn. Il s'arrête 10 mn et repart ensuite à 20 km à l'heure.

1° Représenter graphiquement la marche du cycliste.

2° A quelle heure arrivera-t-il à la ville B située à 57 km de A?

938. Le Sud-Express part de Paris à 11 h 30, passe à Orléans (123 km) à 12 h 43 et arrive à Tours (235 km) à 13 h 41.

1° Représenter graphiquement la marche du train entre Paris et Tours.

2° Calculer la vitesse réalisée entre Paris et Orléans, puis entre Orléans et Tours.

939. Deux villes A et B sont distantes de 120 km. Un cycliste part de A vers B à 8 h à la vitesse de 30 km à l'heure. Il est suivi par un camion qui part à 9 h et qui marche à 45 km à l'heure et par une automobile qui part à 9 h 20 et qui roule à 90 km à l'heure.

1° Représenter graphiquement la marche des trois mobiles.

2° Quelles sont les heures d'arrivée en B et à quelle heure et à quelle distance de A le cycliste est-il doublé par l'un des deux autres mobiles?

940. Un automobiliste part à 13 h pour effectuer une distance de 230 km. Il roule d'abord à 90 km à l'heure puis ensuite à 60 km à l'heure. Il arrive à destination à 16 h. Trouver la distance parcourue à 90 km à l'heure. Solution graphique.

941. Un cycliste part en promenade à 8 h 20 et veut être de retour à midi. A l'aller sa vitesse est de 36 km à l'heure et au retour elle est de 30 km à l'heure. A quelle distance de son point de départ devra-t-il faire demi-tour? Solution graphique.

942. Un rameur parcourt, en canot, 12 km à l'heure en eau calme. Il part à 14 h pour remonter une rivière dont le courant a une vitesse de 3 km à l'heure. Quelle distance peut-il parcourir avant de faire demi-tour s'il veut être revenu au point de départ à 16 h?

943. Deux localités A et B sont distantes de 100 km. A 9 h une automobile part de A et arrive en B à 10 h 15, s'y arrête 30 mn et revient à la même vitesse qu'à l'aller. A 9 h 20 un cycliste part de B pour A à la vitesse de 30 km à l'heure. Étudier graphiquement les rencontres de l'automobile et du cycliste.

944. A 8 h 30 un cycliste part d'une ville A pour une ville B distante de 60 km et roule à la vitesse de 30 km à l'heure. Il s'arrête 20 mn après avoir parcouru 35 km et repart à la même vitesse. Une automobile qui fait 90 km à l'heure part de B à 9 h 10, arrive en A et repart aussitôt pour B. Étudier graphiquement les rencontres de l'automobile et du cycliste.

— Interpréter graphiquement les systèmes d'inéquations simultanées :

945. $\begin{cases} 2x - 5y - 1 > 0 \\ 2x + y + 5 > 0 \\ x - 2 < 0. \end{cases}$

946. $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y + 3 < 0 \\ x + y - 5 > 0. \end{cases}$

947. $\begin{cases} 3x - 2y - 4 < 0 \\ 4x + y + 5 > 0 \\ x - 2y + 6 > 0. \end{cases}$

948. $\begin{cases} 3x + 2y - 6 < 0 \\ x^2 - 4 < 0 \\ y^2 - 9 < 0. \end{cases}$

— Résoudre les inéquations :

949. $x(x - y)(x + y - 2) < 0.$

950. $(x - 3)(y + 2)(x - 2y) > 0.$

951. $(x^2 - 25)(4y^2 - 9) > 0.$

952. $(4x^2 - 49)(9y^2 - 16) < 0.$

953. $(x^2 + y^2 - 1)^2 - 4x^2y^2 < 0.$

954. $(x^2 + y^2 - 5)^2 - 4(xy + 2)^2 > 0.$

ÉTUDE DE LA FONCTION : $y = x^2$

298. Étude de la fonction : $y = x^2$. — On peut calculer y pour toutes les valeurs de x. *La fonction* $y = x^2$ est donc définie quel que soit x c'est-à-dire pour $-\infty < x < +\infty$. On obtient par exemple :

x	-10	-5	-2	-1	0	1	2	5	10
$y = x^2$	100	25	4	1	0	1	4	25	100

1° On voit que : $y = x^2$ est positif pour $x \neq 0$, nul pour $x = 0$. D'autre part à deux valeurs opposées $x = \pm \alpha$ correspond la même valeur de $y = \alpha^2$.

2° Si x devient infiniment grand en valeur absolue il en est de même de y. Pour obtenir $y > 10^6$ par exemple, il suffit de prendre $|x| > 10^3$. Donc lorsque $x \to \pm \infty$, $y \to +\infty$.

299. Sens de variation. — ***La fonction $y = x^2$ est croissante lorsque x est positif, décroissante lorsque x est négatif.***

Ce résultat a déjà été établi (n° 259). On peut aussi faire le raisonnement suivant :

1° Si x_1 et x_2 sont positifs, l'inégalité $x_1 < x_2$ entraîne $x_1^2 < x_1x_2$ et $x_1x_2 < x_2^2$ donc : $x_1^2 < x_2^2$ soit $y_1 < y_2$.

2° Si x_1 et x_2 sont négatifs, l'inégalité $x_1 < x_2$ entraîne $x_1^2 > x_1x_2$ et $x_1x_2 > x_2^2$ donc : $x_1^2 > x_2^2$ soit $y_1 > y_2$.

On en déduit que :

Un nombre positif et son carré varient dans le même sens.

Un nombre négatif et son carré varient en sens contraire.

On peut donc établir le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y = x^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Lorsque x croît de $-\infty$ *à* 0, *y décroît de* $+\infty$ *à* 0 *et lorsque x croît de* 0 *à* $+\infty$, *y croît de* 0 *à* $+\infty$.

La fonction $y = x^2$ admet pour $x = 0$, un *minimum* égal à 0.

300. Représentation graphique de la fonction $y = x^2$. — Le plan étant rapporté à un repère cartésien rectangulaire xOy (fig. 56), construisons les points :

$$O\,(0;\,0),\quad A\,(1;\,1),\quad A'\,(-1;\,1),\quad B\,(2;\,4),\quad B'\,(-2;\,4)\quad \text{etc.}$$

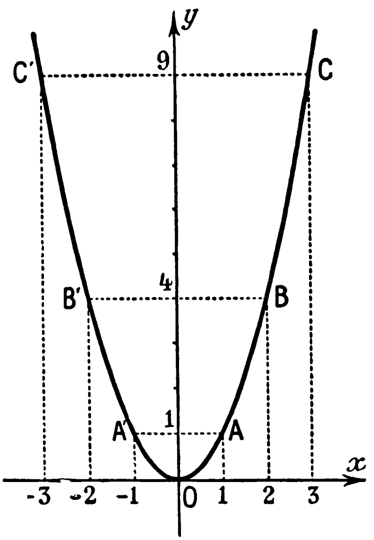


Fig. 56.

Joignons tous ces points par une courbe continue, nous obtenons la représentation graphique de la fonction $y = x^2$. La courbe obtenue se nomme *parabole.*

Axe de symétrie. — Les points M et M′ (fig. 57) d'abscisses α et $-\alpha$ ont même ordonnée $y = \alpha^2$. Ils sont symétriques par rapport à Oy. Il en est ainsi (fig. 56) de A et A′, B et B′ etc... La droite Oy est donc un *axe de symétrie* de la parabole. Le point O situé sur l'axe de symétrie est le *sommet* de la parabole.

Tangente au sommet. — Considérons (fig. 57) la sécante OM joignant le point O à un point variable M de coordonnées $x = \alpha$, $y = \alpha^2$. Le coefficient directeur de OM est : $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$ et la droite OM a pour équation : $y = \alpha x$.

Lorsque le point M vient se confondre avec le point O, son abscisse α tend vers zéro et l'équation de la droite OM devient $y = 0$. Autrement dit, la position limite de la sécante OM est la droite $x'x$ qui constitue la *tangente* en O à la parabole.

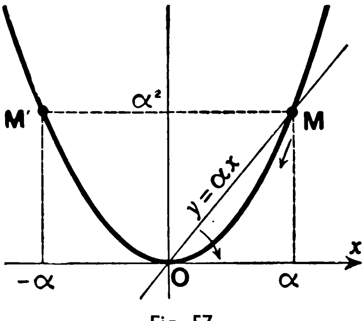


Fig. 57.

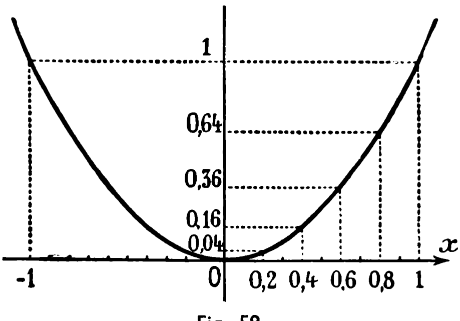


Fig. 58.

301. Résumé. — ***La courbe*** $y = x^2$ ***est une parabole de sommet*** O, ***admettant*** $y'y$ ***pour axe de symétrie et*** $x'x$ ***pour tangente au sommet.***

En construisant la courbe à une plus grande échelle (fig. 58) on met en évidence la forme arrondie de la courbe au voisinage de son sommet.

Notons que la courbe reste semblable à elle-même lorsqu'on fait varier le module des vecteurs unitaires du repère cartésien rectangulaire xOy, en particulier si on adopte des unités différentes sur les deux axes.

FONCTION : $y = ax^2$

302. Exemple I. — *Étude de la fonction :* $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Cette fonction est définie pour $-\infty < x < \infty$, car on peut toujours calculer x^2 puis $\dfrac{x^2}{4}$.

Posons $u = x^2$. Le nombre u varie dans le même sens que x ou en un sens contraire selon que x est positif ou négatif (n° 299). Or : $y = \dfrac{1}{4} u$ est une fonction linéaire de u à coefficient positif 1/4, donc y varie dans le même sens que u (n° 273). On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u = x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y = \frac{1}{4}u$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

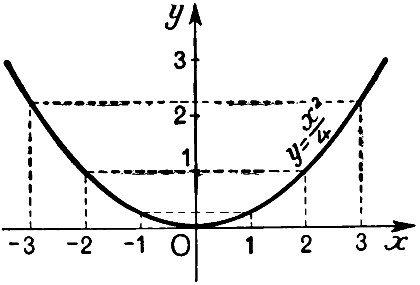


Fig. 59.

Graphique. — Le plan étant rapporté à un repère cartésien rectangulaire construisons les points $\left(-3; \frac{9}{4}\right)$; $(-2; 1)$; $(0; 0)$; $\left(3; \frac{9}{4}\right)$ etc. (fig. 59). Nous obtenons une parabole de même allure que la parabole $y = x^2$ mais plus évasée. Elle admet l'origine O pour sommet, $y'y$ pour axe de symétrie et tourne sa concavité vers les y positifs. On peut l'obtenir en divisant par 4, pour chaque valeur de x, l'ordonnée du point correspondant de la parabole $y = x^2$.

303. Exemple II. — *Étude de la fonction :* $y = -2x^2$.

Posons $u = x^2$. Les nombres u et x varient dans le même sens ou en sens contraire selon que x est positif ou négatif (n° 299). Or : $y = -2u$ est une fonction linéaire de u à coefficient négatif -2, donc y varie en sens contraire de u (n° 273). On obtient le tableau de variation suivant :

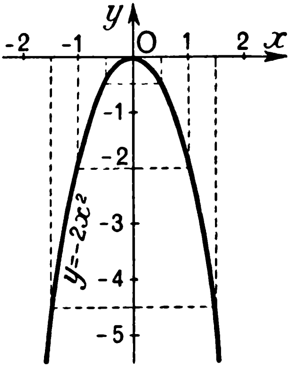


Fig. 60.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u = x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y = -2u$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Graphique. — Par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires (fig. 60), construisons les points $(0, 0)$; $(1; -2)$; $(-1; -2)$; $\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$ etc...

Nous obtenons une parabole de même allure que la parabole $y = x^2$, mais moins évasée et tournant sa concavité vers les y négatifs. On peut aussi l'obtenir en multipliant par -2, pour chaque valeur de x, l'ordonnée du point correspondant de la parabole $y = x^2$.

304. Cas général. — La fonction $y = ax^2$ est définie pour $-\infty < x < +\infty$ car quel que soit x on peut calculer x^2 puis le produit ax^2.

Posons $x^2 = u$. Le nombre u varie dans le même sens que x ou en sens contraire suivant que x est positif ou négatif (n° 299). Or $y = au$ est une fonction linéaire de u qui varie dans le même sens que u si a est positif, en sens contraire de u si a est négatif (n° 273). On obtient :

1° $\boxed{a \text{ positif}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u = x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y = au$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2° $\boxed{a \text{ négatif}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u = x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y = au$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

La fonction** $y = ax^2$ **admet pour** $x = 0$, **un minimum égal à** 0 **si** a **est positif, un maximum égal à** 0 **si** a **est négatif.

On remarque que pour $x \neq 0$, y est du signe de a et qu'à deux valeurs de x opposées $+\alpha$ et $-\alpha$ correspond la même valeur de $y = a\alpha^2$.

305. Représentation graphique. — Les figures 61 et 62 montrent pour différentes valeurs de a la disposition de la courbe $y = ax^2$.

Notons que cette courbe peut s'obtenir en multipliant par a, pour chaque valeur de x, l'ordonnée du point correspondant de la parabole $y = x^2$. On obtient une courbe semblable à cette parabole ayant la disposition de la figure 61 pour a positif, celle de la figure 62 pour a négatif.

La courbe $y = ax^2$ est une parabole de sommet O et d'axe $y'y$. Elle tourne sa concavité du côté des y positifs si a est positif, du côté des y négatifs si a est négatif.

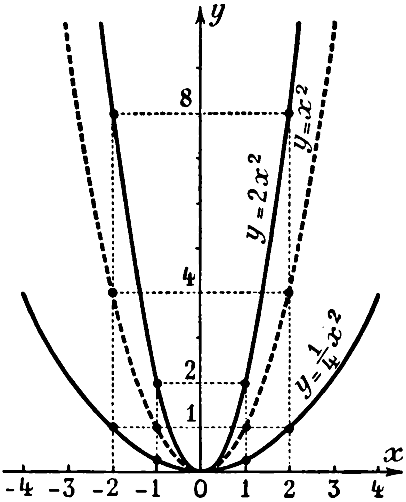


Fig. 61.

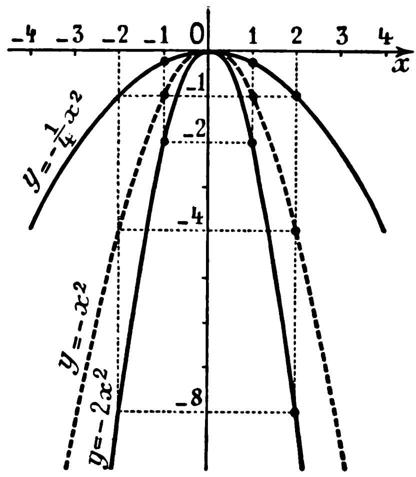


Fig. 62.

Les paraboles $y = ax^2$ et $y = -ax^2$ tracées sur un même graphique sont symétriques par rapport à Ox. Il en est ainsi des paraboles $y = x^2$ et $y = -x^2$ ou $y = 2x^2$ et $y = -2x^2$.

306. Intersection de deux courbes. — Supposons tracées sur un même graphique les deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$. Les coordonnées x et y de tout point commun A vérifient les deux équations et constituent une solution du système formé par ces deux équations. Réciproquement à toute solution de ce système correspond un point commun aux deux courbes.

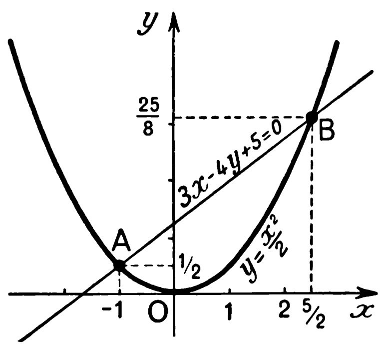


Fig. 63.

EXEMPLE. — *Déterminer les points d'intersection de la droite* $3x - 4y + 5 = 0$ *et de la parabole* $y = \frac{x^2}{2}$ (fig. 63).

En éliminant y entre les deux équations, on obtient :

$$3x - 2x^2 + 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2 - 3x - 5 = 0.$$

Cette équation en x est l'équation aux abscisses des points d'intersection. Elle admet deux racines -1 et $5/2$ qui correspondent respectivement à

$$y = \frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{25}{8}.$$

D'où les deux points d'intersection :

$$A\left(-1; +\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad B\left(+\frac{5}{2}; +\frac{25}{8}\right).$$

307. Résolution graphique d'une équation du second degré. — L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est l'équation aux abscisses des points d'intersection de la parabole $y = x^2$ et de la droite d'équation : $ay + bx + c = 0$.

La courbe $y = x^2$ étant construite à grande échelle sur du papier millimétrique, il suffira de tracer la droite $ay + bx + c = 0$ pour pouvoir lire sur le graphique les abscisses des points d'intersection, c'est-à-dire les racines de l'équation proposée : $ax^2 + bx + c = 0$.

EXERCICES

— Représenter graphiquement, en coordonnées rectangulaires, les fonctions :

955. $y = \frac{x^2}{2}$. **956.** $y = -\frac{x^2}{3}$. **957.** $y = \frac{4x^2}{3}$.

958. $y = \frac{2}{3}x^2$. **959.** $y = -\frac{5}{2}x^2$. **960.** $y = -\frac{4}{5}x^2$.

961. Déterminer le coefficient a de façon que la parabole $y = ax^2$ passe par le point A $(x = +3, y = +4{,}5)$.

— Reprendre le problème précédent pour les points :

962. A $\left(x = -2, y = +\frac{5}{2}\right)$. **963.** A $\left(x = +\frac{1}{2}, y = -\frac{7}{2}\right)$.

964. A $\left(x = +\frac{3}{2}, y = +\frac{3}{2}\right)$. **965.** A $(x = -5, y = -10)$.

— Déterminer graphiquement et ensuite par le calcul les coordonnées des points communs aux courbes suivantes :

966. $y = x^2$ et $y = 3x + 4$.

967. $y = x^2$ et $y = 4x - 3$.

968. $y = 3x^2$ et $y = 2x + 1$.

969. $y = 2x^2$ et $y = -3x - 1$.

970. $y = x^2$ et $y = 3x - \frac{9}{4}$.

971. $y = 2x^2$ et $y = -x - \frac{1}{2}$.

— Tracer sur du papier millimétrique la courbe $y = x^2$ et déterminer graphiquement les racines des équations :

972. $x^2 - 7 = 0$.

973. $x^2 - 3x + 1 = 0$.

974. $3x^2 + 4x - 2 = 0$.

975. $x^2 - 6x + 9 = 0$.

976. $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

977. $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

978. Soient la parabole : $y = x^2$ et la droite : $y = mx - m + 1$. Calculer les coordonnées des points communs à ces deux courbes. Pour quelle valeur de m la droite est-elle tangente à la parabole?

979. On considère la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 2x + m$. Calculer les coordonnées des points communs. Pour quelles valeurs de m la droite est-elle sécante, tangente ou extérieure à la parabole?

980. On considère en orthonormées le point A ($x = 0$, $y = 1$) et la droite (D) définie par la relation $y = -1$. Soit un point M de coordonnées x et y et MB la perpendiculaire à (D).

1° Calculer $\overline{MA}^2$ et $\overline{MB}^2$ en fonction de x et de y.

2° En déduire la relation entre x et y pour que M soit équidistant de A et de la droite (D). Quelle courbe décrit le point M?

981. Dans le demi-cercle de diamètre AB = 10 cm on mène la corde variable AM = x.

1° Calculer la longueur y de la projection AH de AM sur AB.

2° Construire le graphique des variations de y lorsque M décrit le demi-cercle.

982. Soit un segment OA = 5 cm. Un point M décrit la perpendiculaire en O à OA. On pose $\overline{OM} = x$. La perpendiculaire en M à AM coupe la droite OA en B.

1° Calculer y = OB en fonction de x.

2° Représenter graphiquement la variation de y en fonction de x.

983. Soit un angle droit uOv; un point M variable sur Ou, un point A fixe sur Ov tel que OA = 4 cm. On pose OM = x. Le cercle tangent en M à Ou et passant par A recoupe Ov en B et on pose OB = y.

1° Calculer y en fonction de x.

2° Construire le graphique de la variation de la fonction obtenue.

984. Un triangle isocèle OAB a pour base AB = 6 cm et pour hauteur OH = 5 cm. Par le point M de OH tel que OM = x on mène la parallèle à AB qui coupe OA et OB en C et D.

1° Calculer l'aire y du triangle OCD en fonction de x.

2° Étudier la variation de y lorsque M décrit le segment OH. Graphique.

985. Un corps pesant abandonné à lui-même tombe et parcourt en t secondes une distance y égale $4{,}9\ t^2$ mètres.

1° Représenter graphiquement la distance parcourue en fonction de t.

2° Déterminer le temps mis pour parcourir 176,4 m.

3° Trouver la profondeur d'un puits de mine sachant qu'une pierre lachée à l'orifice de ce puits met 7 secondes pour atteindre le fond.

986. On considère en coordonnées orthonormées la courbe $y = x^2$ et la droite $y = 2\,mx - m^2$ où m est supposé connu.

1° Montrer que la droite est tangente à la courbe en un point M dont on demande les coordonnées.

2° La droite coupe Ox en A, Oy en B. Comparer les longueurs AB et AM.

3° Établir l'équation de la perpendiculaire en A à AM. Montrer qu'elle coupe Oy en un point fixe, indépendant de m.

987. 1° Construire la courbe (C) d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$.

2° La courbe est coupée en deux points M' et M'' par une droite variable (D) d'équation $y = x + p$. Trouver en fonction de p les coordonnées du milieu I de M'M''. Lieu géométrique du point I?

3° Qu'arrive-t-il si l'on fait $p = -\dfrac{1}{2}$? Préciser dans ce cas la position de (D) par rapport à (C).

ÉTUDE DE LA FONCTION : $y = ax^2 + bx + c$.

308. Rappel. — D'après la formule (1) du n° 242, le trinôme du second degré $y = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme remarquable :

$$\boxed{y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.}$$

Cette formule et les formules de changements d'axes (n° 267) permettent de rattacher l'étude de la variation et la représentation graphique de la fonction $y = ax^2 + bx + c$ à celles de la fonction $y = ax^2$.

Montrons d'abord comment on opère sur des exemples numériques.

309. Exemple I. — *Étude de la fonction : $y = x^2 - 2x - 3$.*

Quel que soit x on peut calculer la valeur numérique de y. La fonction est donc définie quel que soit x c'est-à-dire pour $-\infty < x < +\infty$.

On peut écrire (n° 308) : $y = (x - 1)^2 - 4$. (1)

Posons $z = x - 1$ et $u = (x - 1)^2$. On obtient : $y = u - 4$.
z est une fonction croissante de x, négative pour $x < 1$, positive pour $x > 1$ (n° 273). Son carré $u = z^2$ est donc décroissant pour $x < 1$, croissant pour $x > 1$ (n° 299). D'autre part y est une fonction de u de la forme $y = au + b$ avec $a = +1$. Donc y varie dans le même sens que u (n° 279). On obtient ainsi le tableau de variation :

x	$-\infty$		$+1$		$+\infty$
$z = x - 1$	$-\infty$	$\nearrow$ $(-)$	0	$\nearrow$ $(+)$	$+\infty$
$u = (x - 1)^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y = u - 4$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction $y = x^2 - 2x - 3$ est donc décroissante lorsque x varie de $-\infty$ à $+1$, croissante lorsque x varie de $+1$ à $+\infty$.

Elle admet, pour $x = 1$, un minimum égal à -4. Pour $x = 0$, on a : $y = -3$.
D'autre part $y = 0$ pour $x^2 - 2x - 3 = 0$, soit pour $x = -1$ et $x = 3$.

Représentation graphique. — Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires $x'x$ et $y'y$ (fig. 64), construisons les points S(1 ; — 4), B (0; — 3), A′ (— 1; 0), A″ (3; 0), B′ (2, — 3) etc... Joignons tous ces points par une courbe continue, nous obtenons la courbe représentative de la fonction envisagée.

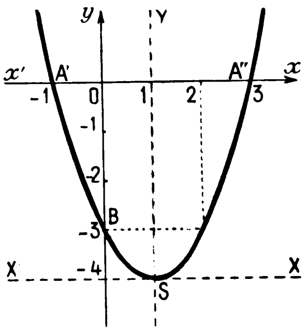


Fig. 64.

Équation réduite. — Menons par le point S (1, — 4) les axes X′X et Y′Y respectivement parallèles à $x'x$ et $y'y$ et de même sens. D'après les formules de changements d'axes (nº 267) on obtient :

$$x = 1 + X \qquad y = -4 + Y.$$

L'équation (1) de la courbe devient :

$$-4 + Y = X^2 - 4 \quad \text{soit} \quad Y = X^2.$$

Il en résulte que la courbe est une parabole qui se déduit par la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$ de la parabole $y = x^2$. Cette courbe admet donc le point S pour sommet, la droite Y′Y d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie et la droite X′X d'équation $y = -4$ pour tangente au sommet.

310. Exemple II. — *Étude de la fonction* : $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

Quel que soit x on peut calculer y, qui est donc défini pour $-\infty < x < +\infty$.

Or (nº 308) :
$$y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3. \qquad (1)$$

Étudions les variations de $z = x - 2$, puis de $u = (x - 2)^2$ et $y = -\frac{u}{2} + 3$.

z croît comme x, est négatif pour $x < 2$ et positif pour $x > 2$. Son carré u est donc décroissant pour $x < 2$ et croissant pour $x > 2$. D'autre part, $y = -\frac{u}{2} + 3$ est une fonction de la forme : $y = au + b$ avec $a = -\frac{1}{2}$. Donc y varie en sens contraire de u (nº 279). On obtient :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$z = x - 2$	$-\infty$	$\nearrow$ (—)	0	$\nearrow$ (+)	$+\infty$
$u = (x - 2)^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y = -\frac{u}{2} + 3$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

La fonction $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + 1$ *est donc croissante lorsque* x *varie de* $-\infty$ *à* $+2$, *décroissante lorsque* x *varie de* $+2$ *à* $+\infty$.

Elle admet pour $x = 2$ un maximum égal à $+3$. Pour $x = 0$, $y = 1$ et $y = 0$ pour $-x^2 + 4x + 2 = 0$ soit pour $x = 2 \pm \sqrt{6}$.

Représentation graphique. — Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires $x'x$ et $y'y$ (fig. 65), construisons les points S (2; 3), B (0; 1), A′ $(2 - \sqrt{6}, 0)$ et A″ $(2 + \sqrt{6}, 0)$, puis quelques autres points correspondant à différentes valeurs de x :

$$\left(1, \frac{5}{2}\right) ; \left(3, \frac{5}{2}\right) ; \left(-1, -\frac{3}{2}\right) ; \left(4, \frac{1}{2}\right).$$

etc...

Joignons tous ces points par une courbe continue; nous obtenons la courbe représentative de la fonction

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1.$$

Équation réduite. — Menons par S (2; 3) les axes X′X et Y′Y respectivement parallèles à $x'x$ et $y'y$ et de même sens. On obtient (n° 267) :

$$x = 2 + X \quad \text{et} \quad y = 3 + Y$$
$$\text{ou} \quad X = x - 2 \quad \text{et} \quad Y = y - 3.$$

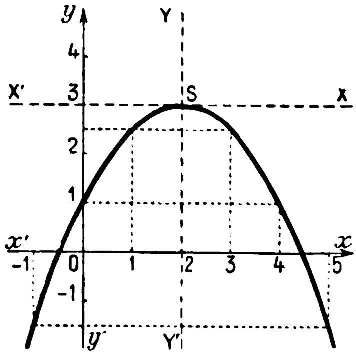


Fig. 65.

L'équation (1) qui s'écrit : $y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x-2)^2$ donne $Y = -\dfrac{1}{2}X^2$.

La courbe est donc une parabole qui se déduit par la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$ de la parabole $y = -\dfrac{1}{2}x^2$. Elle admet comme axe de symétrie la droite $x = 2$ et pour tangente au sommet la droite $y = 3$.

311. Étude du cas général : $y = ax^2 + bx + c$.

La fonction est définie quel que soit x. Pour en étudier la variation on opère comme ci-dessus en utilisant la forme remarquable (n° 308) :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{1}$$

Étudions successivement les variations de $z = x + \dfrac{b}{2a}$; $u = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$; $v = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ et y. On obtient en appliquant les théorèmes n^os^ 279 et 299 :

	x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
	$z = x + \frac{b}{2a}$	$-\infty$	$\nearrow$ $(-)$	0	$\nearrow$ $(+)$	$+\infty$
	$u = z^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$a > 0$	$v = az^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
	y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$
$a > 0$	$v = az^2$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
	y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

On voit ainsi que :

1° **Pour a positif** : *la fonction* $y = ax^2 + bx + c$ *est décroissante lorsque* x *varie de* $-\infty$ *à* $-\frac{b}{2a}$ *croissante lorsque* x *varie de* $-\frac{b}{2a}$ *à* $+\infty$.

Elle admet pour $x = -\frac{b}{2a}$, un minimum égal *à* $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

2° **Pour a négatif** : *la fonction* $y = ax^2 + bx + c$ *est croissante lorsque* x *varie de* $-\infty$ *à* $-\frac{b}{2a}$, *décroissante lorsque* x *varie de* $-\frac{b}{2a}$ *à* $+\infty$.

Elle admet pour $x = -\frac{b}{2a}$, un maximum égal à $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Notons que la valeur $\frac{4ac - b^2}{4a}$ n'est autre que $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ en désignant par $f(x)$ le trinôme $ax^2 + bx + c$.

312. Représentation graphique. — Le plan étant rapporté à un système d'axes de coordonnées rectangulaires xOy, construisons le point S : $x = -\frac{b}{2a}$; $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ et supposons tracée la courbe $y = ax^2 + bx + c$ qui admet ce point S pour sommet (fig. 66 et 67). En prenant pour nouveaux axes X'X et Y'Y d'origine S, on a les formules de changements d'axes (n° 267) :

$$x = -\frac{b}{2a} + X \qquad \text{et} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a} + Y.$$

En portant ces valeurs dans la relation :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

on obtient l'équation réduite : $Y = aX^2$.

La courbe $y = ax^2 + bx + c$ est donc une parabole qui se déduit par la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$, de la parabole $y = ax^2$. Elle admet la droite Y′Y, d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ comme axe de symétrie et la droite X′X d'équation $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ comme tangente au sommet. Elle tourne sa concavité du côté des y positifs si a est positif (fig. 66) et du côté des y négatifs si a est négatif (fig. 67).

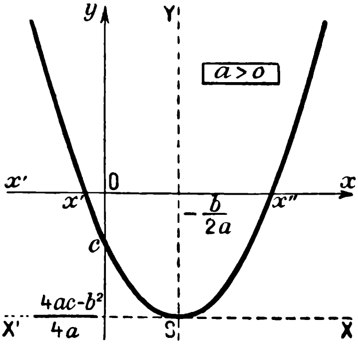


Fig. 66.

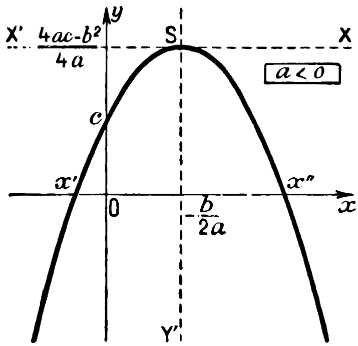


Fig. 67.

Notons que la courbe coupe l'axe Oy au point B $(0, c)$ et si $b^2 - 4ac > 0$ elle coupe l'axe Ox aux points A′ et A″ dont les abscisses sont les racines x' et x'' de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.

313. Remarque. — Dans les problèmes d'application on utilise les résultats établis aux paragraphes précédents (n^os^ 311 et 312) sans en refaire la démonstration directe comme aux n^os^ 309 et 310.

D'autre part pour construire la courbe $y = ax^2 + bx + c$ on pourra toujours utiliser les nouveaux axes X′X et Y′Y en construisant la courbe : $Y = aX^2$.

314. Cas particuliers. 1^er^ cas : $c = 0$. — La courbe $y = ax^2 + bx$ passe par l'origine (fig. 68) et recoupe Ox au point d'abscisse $-\dfrac{b}{a}\cdot$

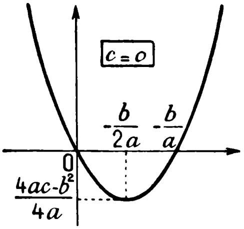


Fig. 68.

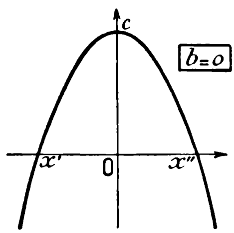


Fig. 69.

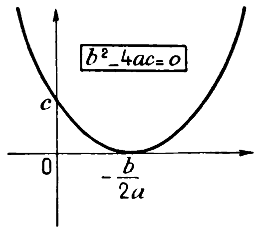


Fig. 70.

2^e^ cas : $b = 0$. — La courbe $y = ax^2 + c$ admet pour axe de symétrie la droite $y'y$ (fig. 69) et si $ac < 0$, elle coupe Ox aux points :

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

3^e^ cas : $b^2 - 4ac = 0$. — La courbe $y = ax^2 + bx + c$ a son sommet sur l'axe $x'x$ (fig. 70) et admet cette droite pour tangente au sommet, au point d'abscisse : $x = -\dfrac{b}{2a}$.

315. Application au signe du trinôme. — La construction de la courbe $y = ax^2 + bx + c$ met en évidence le signe du trinôme $y = f(x)$.

Ainsi (fig. 64) le trinôme $f(x) = x^2 - 2x - 3$ est nul pour $x = -1$ et $x = 3$. Il est positif pour $x < -1$ et pour $x > 3$. Il est négatif pour x compris entre -1 et 3.

De même (fig. 65) le trinôme $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ est nul pour $x = 2 \pm \sqrt{6}$.

Il est négatif pour $x < 2 - \sqrt{6}$ et pour $x > 2 + \sqrt{6}$. Il est positif pour : $2 - \sqrt{6} < x < 2 + \sqrt{6}$.

On peut ainsi dans le cas général (fig. 66 et 67) vérifier la règle du n° 245 :

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour toutes les valeurs de x sauf pour celles qui sont comprises entre ses racines x' et x'' lorsqu'elles existent.

316. Intersection d'une droite et d'une parabole.

Considérons, tracées sur un même graphique la droite D : $y = mx + p$ et la parabole P : $y = ax^2 + bx + c$ (fig. 71).

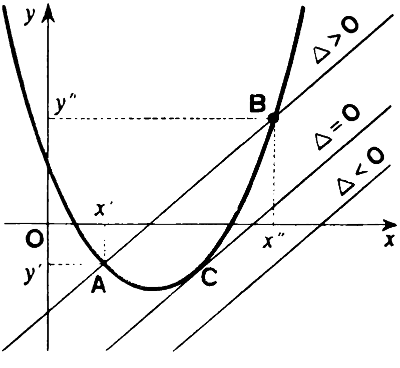


Fig. 71.

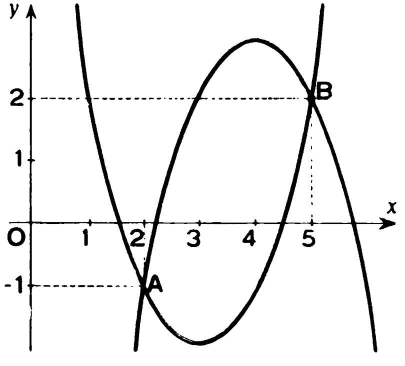


Fig. 72.

Les abscisses des points d'intersection sont les racines de l'équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = mx + p$$

soit :
$$ax^2 + (b - m)x + c - p = 0.$$

Posons $\Delta = (b - m)^2 - 4a(c - p)$. Trois cas sont à envisager :

$\Delta > 0$: La droite D coupe la parabole P en deux points distincts.

$\Delta < 0$: La droite D est extérieure à P.

$\Delta = 0$: La droite D est tangente à P, car elle la coupe en deux points confondus.

317. Intersection de deux paraboles. — Si on trace sur un même graphique les deux courbes : $y = ax^2 + bx + c$ et $y = a'x^2 + b'x + c'$ les abscisses des points d'intersection sont les racines de l'équation :

$$(a - a')x^2 + (b - b')x + c - c' = 0$$

obtenue en éliminant y entre les deux équations.

Ainsi les abscisses des points d'intersection des paraboles (fig. 72) :

$$y = x^2 - 6x + 7 \qquad \text{et} \qquad y = -x^2 + 8x - 13$$

sont les racines de l'équation :

$$2x^2 - 14x + 20 = 0 \quad \text{soit : } x^2 - 7x + 10 = 0.$$

On obtient : $x = 2$ et $x = 5$ d'où les deux points d'intersection

$$A(+2; -1) \quad \text{et} \quad B(+5; +2).$$

EXERCICES

— Étudier et représenter graphiquement une des fonctions suivantes :

988. $y = 2x^2 - 3x + 1$. **989.** $y = x - x^2$. **990.** $y = (x - 2)^2 - 4$.

991. $y = 2x^2 - x - 3$. **992.** $y = 4x - 5x^2$. **993.** $y = 2 - (x - 1)^2$.

994. $y = -x^2 + 5x + 14$. **995.** $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$. **996.** $y = -\frac{x^2}{2} + x + 6$.

997. Déterminer le coefficient a de façon que la parabole : $y = a(x + 1)(x - 3)$ passe par le point A $(+2; +3)$. Construire la courbe obtenue.

— Reprendre le même exercice avec :

998. $y = a(x - 2)^2 + 4$ et le point A $(+1; +3)$.

999. $y = a(x^2 - 1) - 4x$ et le point A $(+3; +4)$.

1000. $y = a(x^2 + 5) + 6x$ et le point A $(+2; +3)$.

1001. Quel est le sommet de la courbe $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$? En déduire l'équation de la parabole admettant pour sommet le point S (2; 8) et passant par le point A (4; 6).

1002. Déterminer les coefficients a, b, c, du trinôme $y = ax^2 + bx + c$ de façon que la parabole correspondante passe par les points A (—1; 0), B (+ 1; + 4) et C (+ 4; + 2,5). Construire cette courbe.

— Reprendre le même exercice avec :

1003. A (— 1; — 1); B (+ 2; — 2,5) et C (+ 4; + 2,5).

1004. A (0; — 6); B (+ 1; 0) et C (+ 2,5; + 1,5).

1005. A (+ 1; — 2,5); B (+ 2,5; — 4) et C (+ 4; + 3,5).

— Construire sur un même graphique les courbes suivantes et déterminer les coordonnées des points d'intersection :

1006. $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = \dfrac{x^2}{2} - x - 4. \end{cases}$

1007. $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 2x^2 - 3x + 1. \end{cases}$

1008. $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = x^2 - 3x + 1. \end{cases}$

1009. $\begin{cases} y = x + \dfrac{7}{2} \\ y = -2x^2 + 3x + 5. \end{cases}$

1010. $\begin{cases} y = 2x^2 + x - 2 \\ y = -x^2 - 2x + 4. \end{cases}$

1011. $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = -\dfrac{x^2}{2} + 4x - \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

1012. $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x}{2} + 2. \end{cases}$

1013. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}. \\ y = x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

1014. On considère en coordonnées orthonormées le point A ($x = 2$; $y = 4$) et la droite (D) définie par la relation $y = +5$. Soit un point M de coordonnées x et y et MB la perpendiculaire en B à (D).

1° Calculer $\overline{MA}^2$ et $\overline{MB}^2$ en fonction de x et de y.

2° En déduire la relation entre x et y pour que M soit équidistant de A et de la droite (D). Quelle courbe décrit le point M? Construire cette courbe.

1015. Un point variable P décrit la droite fixe (D) d'équation en orthonormées : $y + 1 = 0$. La perpendiculaire en P à (D) et la perpendiculaire en O à OP se coupent en M.

1° Trouver la relation qui existe entre les coordonnées x et y du point M.

2° Construire la courbe décrite par le point M lorsque P décrit la droite (D).

1016. Soient A (+ 1; + 4) et B (+ 1; + 3) deux points fixes du plan rapporté au repère orthonormé xOy. Un point variable M décrit la droite (D) d'équation $y = 4$. La perpendiculaire en M à (D) et la perpendiculaire menée par A à BM se coupent en S.

1° Établir que $\overline{AM}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{MS}$. En déduire une relation entre les coordonnées x et y du point S.

2° Construire la courbe décrite par S lorsque le point M parcourt (D).

1017. 1° Construire la courbe $y = x^2 - 6x + 5$.

2° Calculer les coordonnées des points d'intersection de cette courbe avec les droites $y = x$ et $y = -x$.

3° On coupe la courbe par la droite $y = m$. En déduire suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 - 6x + 5 - m = 0$.

1018. 1° Construire sur un même graphique les deux courbes $y = x^2 - 4x + 1$ et $y = 1 - x^2$.

2° Déterminer leurs points d'intersection.

3° Déterminer h de façon que les deux courbes interceptent sur la droite $y = h$ deux cordes égales. Quelle est alors la longueur commune des deux cordes?

1019. 1° Étudier et représenter graphiquement en coordonnées orthonormées la fonction $y = -\frac{x^2}{4} + x + 1$.

2° Montrer que tout point M (x, y) de la courbe est équidistant du point A (2; 1) et de la droite $y = 3$.

3° Par le point B $(-1; 0)$ on mène une droite variable de coefficient directeur m Étudier suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection avec la courbe. Équations des tangentes à la courbe issues de B.

ÉTUDE DE LA FONCTION $y = \frac{1}{x}$.

318. Intervalles de variation. — On peut calculer y pour toute valeur de x différente de zéro. *La fonction n'est pas définie pour $x = 0$.*

La fonction $y = \frac{1}{x}$ est définie dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

On obtient par exemple :

x	-10	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	1	2	5	10
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-10	10	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

1° Notons que le produit xy égal à $+1$, est positif. Donc x et y sont de même signe.

2° A deux valeurs opposées de x correspondent deux valeurs opposées de y.

3° On constate que pour des valeurs croissantes et de même signe de x, les valeurs de y vont en décroissant.

319. Sens de variation. — ***La fonction $y = \frac{1}{x}$ est décroissante dans chacun des intervalles où elle est définie.***

Soient x_1 et x_2 deux valeurs de x de même signe. On obtient :

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = -\frac{x_2 - x_1}{x_1x_2} \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{x_1x_2}.$$

Le produit x_1x_2 étant positif on voit que les accroissements correspondants $x_2 - x_1$ et $y_2 - y_1$ sont de signes contraires. Autrement dit :

Un nombre de signe donné et son inverse varient en sens contraires.

Cela se vérifie à la lecture du tableau du n° 318. D'autre part :

Si $|x|$ devient infiniment grand, y devient aussi voisin de zéro qu'on le veut :

Pour avoir $|y| < \frac{1}{10^6}$, il suffit de prendre $|x| > 10^6$. De même, si $|x|$ prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, $|y| = \frac{1}{|x|}$ augmente indéfiniment. Pour avoir $|y| > 10^9$, il suffit de prendre $|x| < \frac{1}{10^9}$. Ainsi :

Lorsqu'un nombre tend vers $\pm\infty$, son inverse tend vers zéro. Lorsqu'un nombre de signe donné tend vers zéro, son inverse tend vers l'infini de même signe.

Il en résulte le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y = \frac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Le double trait vertical indique que, pour $x = 0$, la fonction n'est pas définie.

320. Représentation graphique de la fonction $y = \frac{1}{x}$.

Le plan étant rapporté à un système d'axes de coordonnées rectangulaires (fig. 73) construisons les points représentatifs des couples de valeurs de x et y trouvés au tableau du n° 318. Nous obtenons une première branche de courbe située dans l'angle xOy correspondant aux valeurs positives de x et y (quadrant I) et une seconde branche située dans l'angle $x'Oy'$ correspondant aux valeurs négatives de x et y (quadrant III).

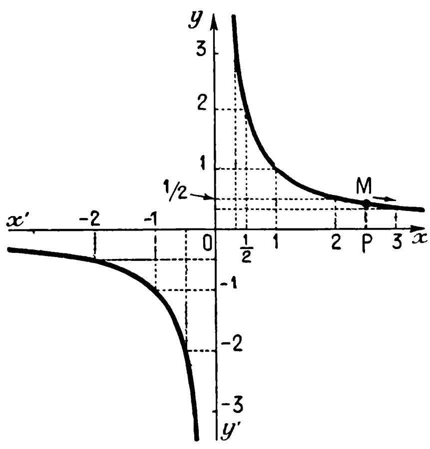


Fig. 73.

L'ensemble de ces deux branches de courbe constitue la courbe représentative de la fonction $y = 1/x$ et se nomme **hyperbole équilatère.**

La courbe ne peut être tracée en entier d'un trait continu car elle ne traverse pas $y'y$. On dit que *la fonction $y = 1/x$ est discontinue pour $x = 0$.*

321. Asymptotes de la courbe. — Lorsque le point M s'éloigne à l'infini sur l'une des branches de la courbe (fig. 73), sa distance MP à l'axe $x'x$ (ou à l'axe $y'y$) devient aussi petite qu'on le veut. On exprime ce fait en disant que les axes de coordonnées sont des *asymptotes* de la courbe $y = \frac{1}{x}\cdot$ En définitive :

La courbe représentative de la fonction $y = \frac{1}{x}$ ***est une hyperbole équilatère située dans les quadrants*** I ***et*** III***, admettant les axes de coordonnées pour asymptotes.***

ÉTUDE DE LA FONCTION $y = \frac{a}{x}$

322. Exemple I. — *Étude de la fonction :* $y = \frac{4}{x}\cdot$ — Posons $u = \frac{1}{x}$ donc $y = 4u$. Lorsque x croît de $-\infty$ à 0 puis de 0 à $+\infty$, son inverse u décroît de 0 à $-\infty$ puis de $+\infty$ à 0 (n° 319). Or y est une fonction linéaire de u de coefficient positif $+4$. Donc y et u varient dans le même sens. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u = \frac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0
$y = 4u$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

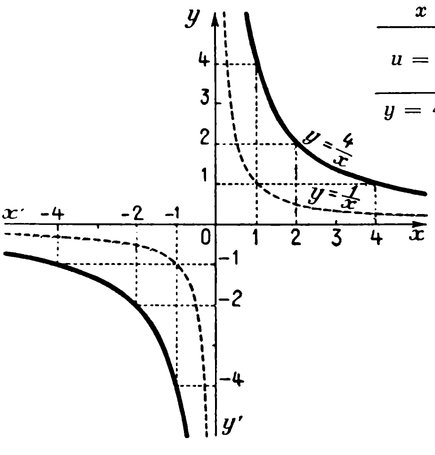


Fig. 74.

Graphique. — En construisant les points tels que (2; 2); (4; 1); (1; 4)... on obtient deux branches de courbe situées dans les quadrants I et III (fig. 74). On peut aussi obtenir ce graphique en multipliant par 4, pour chaque valeur de x, l'ordonnée du point correspondant de la courbe $y = \frac{1}{x}\cdot$ La courbe obtenue est une hyperbole équilatère admettant les mêmes asymptotes que la courbe précédente, mais plus éloignée des axes.

323. Exemple II. — *Étude de la fonction :* $y = -\frac{1}{2x}\cdot$

Posons $u = \frac{1}{x}\cdot$ On obtient $y = -\frac{u}{2}\cdot$ Dans ce cas, y est une fonction linéaire de u de coefficient négatif — $1/2$. Donc y et u varient en sens contraires et on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$u = \frac{1}{x}$	0	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	0
$y = -\frac{u}{2}$	0	↗	$+\infty$	‖	$-\infty$	↗	0

GRAPHIQUE. — Construisons les points :

$$\left(-2; \frac{1}{4}\right); \left(-1; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; 1\right);$$
$$\left(2; -\frac{1}{4}\right); \left(1; -\frac{1}{2}\right), \text{ etc...}$$

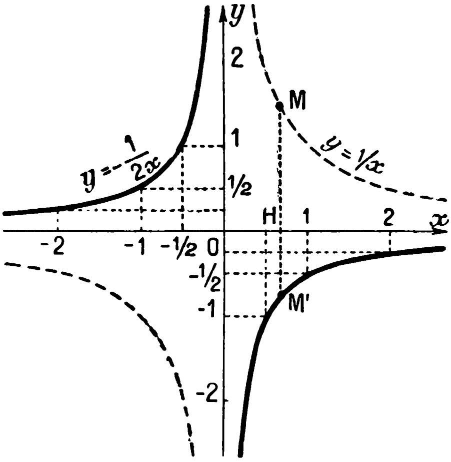


Fig. 75.

Ces points sont disposés sur deux branches de courbes situées à l'intérieur des angles $x'Oy$ et xOy' c'est-à-dire dans les quadrants II et IV (fig. 75). On peut obtenir ce graphique en multipliant par $-\frac{1}{2}$, pour chaque valeur de x, l'ordonnée du point M correspondant de la courbe $y = 1/x$. La courbe est une hyperbole équilatère admettant les mêmes asymptotes que la courbe précédente, mais plus rapprochée des axes.

324. Cas général. — Les résultats obtenus dans les deux exemples précédents se généralisent pour toute fonction $y = a/x$. On peut calculer y pour toute valeur de x différente de 0.

La fonction $y = \frac{a}{x}$ est définie dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Si on pose $u = \frac{1}{x}$ on obtient $y = au$. Il en résulte que y varie dans le même sens que $u = \frac{1}{x}$ si a est positif, en sens contraire si a est négatif (n° 271). Par suite :

Dans chacun des intervalles où elle est définie la fonction $y = \frac{a}{x}$ est décroissante si a est positif, croissante si a est négatif.

Comme d'autre part y devient infiniment grand ou infiniment petit en même temps que u, on en déduit les tableaux de variation :

1° $\boxed{a \text{ positif}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 $\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0
y	0 $\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0

2° $\boxed{a \text{ négatif}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 $\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0
y	0 $\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0

325. Représentation graphique. — Dans le plan rapporté à un système d'axes de coordonnées rectangulaires, supposons déjà tracée l'hyperbole équilatère $y = \frac{1}{x}\cdot$ La courbe $y = \frac{a}{x}$ s'obtient en multipliant par a, pour chaque valeur de x, l'ordonnée du point correspondant de l'hyperbole précédente. On obtient une courbe semblable ayant la disposition de la figure 74 pour a positif ou de la figure 75 pour a négatif.

La courbe représentative de la fonction $y = \frac{a}{x}$ est une hyperbole équilatère admettant pour asymptotes les axes de coordonnées.

La courbe est située dans les quadrants (I) et (III) lorsque a est positif, dans les quadrants (II) et (IV) lorsque a est négatif. Elle est d'autant plus éloigné des asymptotes que a est grand en valeur absolue.

Notons que l'équation $y = \frac{a}{x}$ s'écrit aussi : $xy = a$.

326. Symétries de la courbe $y = \frac{a}{x}\cdot$

1° ***L'origine des coordonnées est un centre de symétrie.*** — Considérons sur l'hyperbole $xy = a$ (fig. 76) deux points M et M′ d'abscisses opposées α et $-\alpha$. Leurs ordonnées $\frac{a}{\alpha}$ et $-\frac{a}{\alpha}$ sont également opposées et (n° 265) on a : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. Les deux points M et M′ sont symétriques par rapport à O. Lorsque M décrit la courbe il en est de même de son symétrique M′.

2° ***Les bissectrices des angles formés par les axes de coordonnées sont des axes de symétrie.*** — Supposons d'abord l'hyperbole rapportée à un repère orthonormé xOy (fig. 77). Au point M d'abscisse $x = \overline{OA} = \alpha$ et d'ordonnée $y = \overline{AM} = \beta = \frac{a}{\alpha}$ de la courbe, on peut associer le point N d'abscisse $x = \overline{BN} = \beta$ et d'ordonnée $y = \overline{OB} = \alpha$. L'unité de longueur étant la même sur les deux axes on a : OA = OB et AM = BN. Les deux triangles rectangles OAM et OBN sont donc égaux et ils se superposent lorsqu'on plie la figure suivant la bissectrice des angles $x\text{O}y$ et $x'\text{O}y'$. Les points M et N sont donc symétriques par rapport à cette *première bissectrice.*

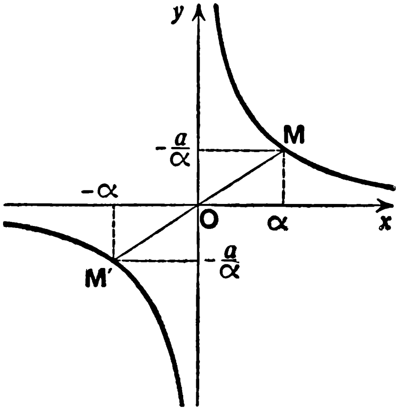


Fig. 76.

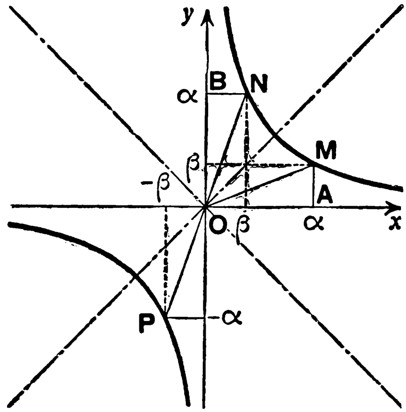


Fig. 77.

On démontrerait de même que les points M ($x = \alpha$, $y = \beta$) et P ($x = -\beta$, $y = -\alpha$) sont symétriques par rapport à la bissectrice des angles $x'\text{O}y$ et $x\text{O}y'$ *(seconde bissectrice). Ces deux bissectrices sont donc des axes de symétrie de l'hyperbole.*

— Cette propriété se conserve en coordonnées rectangulaires quelconques. Si partant du repère orthonormé $x\text{O}y$ on adopte sur l'axe $y'y$ une unité trois fois plus grande, la courbe $y = \frac{a}{x}$ dans le nouveau repère a pour équation $y = \frac{3a}{x}$ dans l'ancien repère orthonormé. Elle admet donc toujours les deux bissectrices comme axes de symétrie.

327. Intersection d'une hyperbole et d'une droite. — On opère comme aux n^{os} 291, 306 et 317.

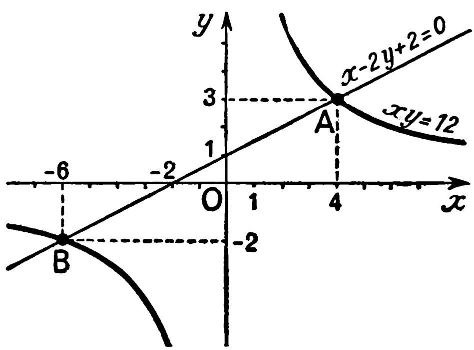


Fig. 78.

Exemple. — *Trouver les points d'intersection de la droite*

$$x - 2y + 2 = 0$$

et de l'hyperbole $xy = 12$ (fig. 78).

Éliminons y entre les deux équations. Pour $x \neq 0$ l'équation de la droite donne

$$x^2 + 2x - 2xy = 0.$$

Comme $xy = 12$ on obtient :

$$x^2 + 2x - 24 = 0.$$

Cette équation a deux racines $+ 4$ et $- 6$, qui correspondent respectivement à $y = + 3$ et $y = - 2$. La droite coupe l'hyperbole aux deux points A $(+ 4; + 3)$ et B $(- 6; + 2)$.

EXERCICES

— Étudier et représenter graphiquement les fonctions :

1020. $y = \frac{3}{x}$, **1021.** $y = \frac{1}{3x}$, **1022.** $y = -\frac{7}{2x}$.

1023. $y = -\frac{2}{x}$. **1024.** $y = -\frac{3}{x}$. **1025.** $y = \frac{5}{2x}$.

1026. $y = \frac{2}{3x}$. **1027.** $y = -\frac{4}{3x}$. **1028.** $y = \frac{7}{5x}$.

1029. Un triangle isocèle a une surface de 2,5 m². Calculer sa hauteur y en fonction de sa base x et étudier graphiquement la fonction obtenue.

1030. Soit un demi-cercle de diamètre AB $= 6$ cm. Une tangente variable coupe en M et N les tangentes en A et B. On pose AM $= x$ et BN $= y$.

1° Démontrer la relation $xy = 9$.

2° Étudier les variations de y en fonction de x.

1031. On donne un angle droit xOy, un point variable A sur Ox, un point variable B sur Oy tels que le rectangle AOBM ait une surface de 12 cm². Construire la courbe décrite par le sommet M de ce rectangle.

1032. Soit un cercle de diamètre AB $= 4$ cm et un point P situé à 4 cm du centre de ce cercle. Une sécante variable issue de P coupe le cercle en M et N. On pose PM $= x$ et PN $= y$. Calculer et représenter graphiquement y en fonction de x.

1033. Soit un angle AOB tel que OA $= 3$ cm. Un cercle variable tangent en A à OA coupe OB en M et N. Calculer et représenter graphiquement ON $= y$ en fonction de OM $= x$.

1034. Soit un rectangle ABCD tel que AB $= 3$ cm et BC $= 2$ cm. On prend sur la droite AB un point M et on pose $\overline{AM} = x$. La droite DM coupe la droite BC en N. Calculer et représenter graphiquement $y = \overline{CN}$ en fonction de x.

1035. On considère un cercle de diamètre AB $= 5$ cm et un point M variable de ce cercle. Les droites BM et AM coupent en A′ et B′ les tangentes en A et B orientées dans le même sens. Calculer et représenter graphiquement $\overline{BB'} = y$ en fonction de $\overline{AA'} = x$.

1036. La droite variable $y = mx$ coupe en M et N les droites fixes $x = 5$ et $y = 3$ qui se coupent elles-mêmes en P. On achève le rectangle MPNS.

1° Calculer en fonction de m, les coordonnées x et y du point S.

2° Montrer que le produit xy est constant et construire la courbe décrite par le point S lorsque m varie.

1037. Par le point A $(- 4; - 3)$ on mène une droite variable D, de coefficient directeur a, qui coupe en M et N les droites fixes : $x = 4$ et $y = 3$.

1° Établir l'équation de la droite D, et calculer les coordonnées x et y du milieu I du segment MN.

2° Montrer que le produit de ces coordonnées est indépendant de a et construire la courbe décrite par le point I.

1038. On mène par le point fixe A (— 3; — 2) une droite variable D de coefficient directeur m et par le point fixe B (+ 3; + 2) une droite variable D' de coefficient directeur — m.

1° Former les équations de D et D', puis, calculer en fonction de m les coordonnées x et y de leur point d'intersection M.

2° Montrer que le produit xy est constant. En déduire la courbe décrite par le point M que l'on construira.

1039. On considère sur l'hyperbole $xy = 6$, les points variables M et N d'abscisses respectives $3\,t$ et $\frac{3}{2t}$.

1° Montrer que la droite MN reste parallèle à elle-même. Établir son équation et trouver les coordonnées de ses intersections A et B avec les axes Ox et Oy.

2° Démontrer que les segments MN et AB ont même milieu I et établir que le point I se déplace sur une droite fixe. Calculer les longueurs MA et MB et démontrer que le produit $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ est constant.

1040. Soit P (+ 3; + 4) un point fixe de l'hyperbole $xy = 12$ et M un point variable d'abscisse m de cette courbe.

1° Déterminer en fonction de m, l'équation de la droite MP et les coordonnées de ses intersections A et B avec Ox et Oy. Établir que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PB}$.

2° Lorsque M vient en P, la droite AB prend la position CD tangente en P à la courbe. Équation de CD? Comparer les segments PC, PD et PO et en déduire une construction simple de la tangente en P.

1041. A température constante le produit de la pression p par le volume v d'une masse gazeuse donnée est constant (Loi de Mariotte).

1° Représenter graphiquement, en fonction de sa pression, les variations du volume d'une masse d'air occupant un volume de 30 cm³ à la pression de 76 cm de mercure à la température de l'expérience.

2° Déterminer la pression correspondant à un volume de 40 cm³, puis le volume correspondant à une pression de 144 cm de mercure.

1042. Simplifier l'expression : $Y = \dfrac{\dfrac{X+a}{X-a} - \dfrac{X-a}{X+a}}{1 - \dfrac{X-a}{X+a}}$,

2° Déterminer X de façon que $Y = a$.

3° Si $a = 1$, remplacer dans l'expression simplifiée X par $x + 1$ et Y par $y + 2$. Calculer y en fonction de x et représenter graphiquement les variations de y lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

1043. 1° Montrer que la droite (D) d'équation : $y = 3 + m\,(x - 2)$ passe, quel que soit m par le point fixe P (+ 2; + 3). Déterminer en fonction de m les coordonnées de ses intersections A et B avec les axes Ox et Oy.

2° Calculer les coordonnées du point M, symétrique de P par rapport au milieu de AB. Montrer que le produit de ces coordonnées est indépendant de m et construire la courbe (H) lieu du point M.

3° Pour quelle valeur de m le point M vient-il en P? Quelles sont alors les mesures de $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$? En déduire une construction simple de la tangente en P à la courbe (H).

PROBLÈMES D'ALGÈBRE

328. Principes généraux. — Rappelons que la résolution algébrique d'un problème comporte les étapes suivantes :

1° **Le choix de l'inconnue ou des inconnues.** — On doit choisir les inconnues de telle façon que leur détermination entraîne la solution du problème. Ne pas craindre de choisir plus d'inconnues que n'en comporte l'énoncé ou une ou plusieurs inconnues auxiliaires, si cela facilite la mise en équation et la résolution.

2° **La mise en équation.** — Elle consiste à traduire l'énoncé par des égalités où entrent les données et les inconnues. *Il faut autant d'équations distinctes que d'inconnues.*

Rechercher également les conditions d'inégalité qui peuvent être imposées aux inconnues par la nature du problème.

3° **La résolution de l'équation ou du système obtenu.** — C'est la partie purement algébrique du problème.

4° **La discussion des résultats.** — On vérifie si les solutions obtenues satisfont effectivement à l'énoncé. Dans le cas où les données sont littérales on recherche les valeurs de ces données pour lesquelles le problème est possible.

PROBLÈMES A UNE INCONNUE.

329. Exemple I. — *Quel nombre entier x faut-il ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{7}{11}$ et retrancher aux deux termes de la fraction $\frac{11}{13}$ pour obtenir deux fractions égales?*

1° **Mise en équation.** — Le nombre inconnu x doit donc vérifier l'équation :

$$\frac{7+x}{11+x}=\frac{11-x}{13-x}. \qquad (1)$$

Réciproquement toute racine entière positive et différente de 13 de cette équation constituera une solution du problème.

2° **Résolution.** — En faisant le produit des moyens et des extrêmes on obtient :

$$91 - 7x + 13x - x^2 = 121 - x^2$$

soit :

$$6x = 121 - 91 = 30.$$

D'où :

$$x = \frac{30}{6} = 5.$$

3° La racine $+5$ satisfait aux conditions du 1°. On vérifie que :

$$\frac{7+5}{11+5} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{11-5}{13-5} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

$+5$ est donc la solution unique du problème.

330. Exemple II. — *Trouver un nombre qui surpasse son inverse de* $\frac{15}{4}$.

Mise en équation. — Soit x le nombre cherché. Il doit vérifier l'équation :

$$x - \frac{1}{x} = \frac{15}{4}.$$

Réciproquement toute racine de cette équation est solution du problème.

Résolution. — L'équation s'écrit :

$$\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{15}{4}.$$

Soit, en supposant $x \neq 0$:

$$4x^2 - 15x - 4 = 0.$$

Cette équation a deux racines de signes contraires :

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 64}}{8} = \frac{15 \pm 17}{8}.$$

Soit :

$$x' = 4 \text{ et } x'' = -\frac{1}{4}.$$

Ces deux nombres sont solutions du problème.

PROBLÈMES A PLUSIEURS INCONNUES.

331. Exemple I. — *Trouver les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est* $2p$ cm, *sachant que si l'on augmente la base de* 3 cm *et la hauteur de* 2 cm, *sa surface augmente de* 246 cm². *Discuter par rapport à* p.

Mise en équations. — Désignons par x et y les dimensions en centimètres de ce rectangle. Son demi-périmètre est p donc :

$$x + y = p.$$

L'aire du rectangle en cm^2 est xy. Si on augmente la base de 3 cm et la hauteur de 2 cm, cette aire devient $(x + 3)(y + 2)$. Donc :

$$(x + 3)(y + 2) - xy = 246.$$

En simplifiant, on voit que x et y satisfont au système :

$$\begin{cases} x + \ \ y = p \\ 2x + 3y = 240. \end{cases}$$

Réciproquement toute solution de ce système où x et y sont des nombres positifs constitue une solution du problème.

Résolution et discussion. — La résolution du système précédent donne :

$$\boxed{x = 3p - 240 \ ; \ y = 240 - 2p}$$

Ces valeurs seront acceptables si x et y sont positifs donc si :

$$3p - 240 > 0 \quad \text{et} \quad 240 - 2p < 0.$$

soit :

$$p > 80 \quad \text{et} \quad p < 120.$$

En définitive le problème admet une solution si : $80 < p < 120$.

Par exemple pour $p = 100$ cm, on obtient : $x = 60$ cm et $y = 40$ cm.

332. Exemple II. — *Trouver les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sachant que leur différence est égale à* 7 cm *et que l'hypoténuse mesure* 13 cm.

Mise en équation. — Désignons par x et y les deux côtés de l'angle droit. En supposant $x < y$, nous obtenons :

$$y - x = 7 \qquad (1)$$

et d'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + y^2 = 13^2. \qquad (2)$$

Résolution. — D'après l'équation (1) : $\quad y = x + 7. \qquad (3)$

Portons cette valeur, dans l'équation (2) :

$$x^2 + (x + 7)^2 = 169.$$

Soit :

$$2x^2 + 14x - 120 = 0$$

ou

$$x^2 + 7x - 60 = 0.$$

Cette équation a deux racines de signes contraires 5 et — 12. Seule la racine positive peut convenir.

Donc : $x = 5$ et d'après (3) : $y = 5 + 7 = 12.$

Le problème admet une solution $x = 5$ cm; $y = 12$ cm.

333. Exemple III. — *Un cycliste parcourt un trajet* AB *qui comporte des montées, des paliers et des descentes. Les vitesses sont* 10 km *à l'heure en montée,* 20 km *à l'heure en palier,* 30 km *à l'heure en descente. Dans le sens* AB *il met* 6 h 50 mn; *dans le sens* BA *il met* 7 h 30 mn. *Le trajet* AB *comportant* 120 km *on demande la longueur des montées, des paliers et des descentes.*

Mise en équations. — Désignons par x la longueur totale des paliers, par y celle des montées dans le sens AB, par z celle des descentes, ces distances étant exprimées en kilomètres. Exprimons les temps en heures, donc les vitesses en kilomètres à l'heure.

La distance AB est 120 km :

$$x + y + z = 120. \tag{1}$$

La durée du trajet AB est 6 h 50, soit 6 h $\frac{5}{6}$ ou $\frac{41}{6}$ d'heure :

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{10} + \frac{z}{30} = \frac{41}{6}. \tag{2}$$

Dans le sens BA, les montées deviennent descentes et inversement les descentes deviennent montées. La durée du trajet BA est 7 h. $\frac{1}{2}$ soit $\frac{15}{2}$ heures.

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{30} + \frac{z}{10} = \frac{15}{2}. \tag{3}$$

Nous sommes conduits au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} x + y + z = 120 & (1) \\ 3x + 6y + 2z = 410 & (2) \\ 3x + 2y + 6z = 450 & (3) \end{array}\right.$$

Réciproquement, toute solution de ce système où x, y et z sont des nombres positifs est une solution du problème.

Résolution. — Éliminons x entre (2) et (3) : $4y - 4z = -40$

soit :
$$y - z = -10. \tag{4}$$

Éliminons x entre (1) et (3) :

$$\begin{array}{r} -3x - 3y - 3z = -360 \\ 3x + 2y + 6z = 450 \\ \hline -\ y + 3z = 90 \end{array} \tag{5}$$

Résolvons le système formé par les équations (4) et (5); on trouve : $y = 30$, $z = 40$ et en portant dans (1) : $x = 50$.

On pourra vérifier que cette solution convient au problème. Il y a donc dans le sens AB, 50 km de paliers, 30 km de montées et 40 km de descentes.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE.

334. Remarque. — Il est toujours bon d'interpréter ou de vérifier par un raisonnement géométrique les résultats de l'étude algébrique d'un problème de géométrie. Il est parfois possible de compléter la solution algébrique par une construction géométrique de cette solution.

335. Exemple I. — *Soit un triangle* ABC *de côtés a, b, c avec $b > c$. Déterminer sur le côté* BC *un point* M *tel qu'en menant les parallèles* MP *et* MQ *aux côtés* AC *et* AB *on ait :* $MP + MQ = l$ *où l désigne une longueur donnée* (fig. 79).

1° **Choix de l'inconnue.** — Posons $BM = x$. La connaissance de la longueur x permet de placer le point M sur le segment BC pourvu que $0 \leq x \leq a$.

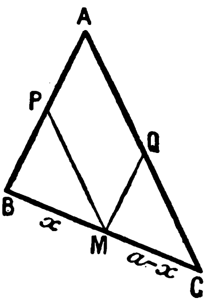


Fig. 79.

2° **Mise en équation.** — Les triangles semblables BMP et BCA donnent :

$$\frac{MP}{CA} = \frac{BM}{BC} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{b} = \frac{x}{a} \quad \text{soit} \quad MP = \frac{bx}{a}.$$

Les triangles semblables CMQ et CBA donnent de même :

$$\frac{MQ}{BA} = \frac{CM}{CB} \quad \text{ou} \quad \frac{MQ}{c} = \frac{a - x}{a} \quad \text{soit} \quad MQ = \frac{c\,(a - x)}{a}.$$

La condition $MP + MQ = l$ s'écrit donc :

$$\frac{bx}{a} + \frac{c\,(a - x)}{a} = l. \qquad (1)$$

3° **Résolution de l'équation.** — Comme $a \neq 0$ l'équation s'écrit :

$$bx + ca - cx = al \quad \text{ou} \quad x\,(b - c) = a\,(l - c)$$

et puisque $b > c$ on a $b - c \neq 0$, donc :

$$\boxed{x = \frac{a\,(l - c)}{b - c}.} \qquad (2)$$

4° **Discussion.** — Il faut s'assurer que la double condition : $0 \leqslant x \leqslant a$ est satisfaite :

a) $x \geqslant 0$ ou : $\dfrac{a\,(l - c)}{b - c} \geqslant 0.$

$b - c$ et a étant positifs cette condition s'écrit : $l - c \geqslant 0$ ou $l \geqslant c$.

b) $x \leqslant a$ ou : $\dfrac{a(l-c)}{b-c} \leqslant a$

ce qui donne puisque a et $b - c$ sont positifs :

$$\frac{l-c}{b-c} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad l - c \leqslant b - c \quad \text{soit} \quad l \leqslant b.$$

En définitive le problème admet une solution unique donnée par la formule (2) si :

$$c \leqslant l \leqslant b.$$

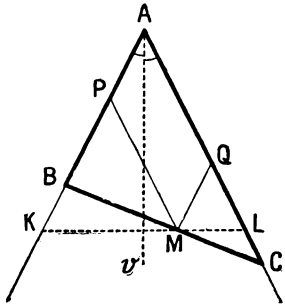


Fig. 80.

5° **Solution géométrique.** — Menons par le point M la perpendiculaire à la bissectrice intérieure de l'angle BAC de façon à obtenir le triangle isocèle AKL (fig. 80). On voit immédiatement que :

$$AK = AP + PK = MQ + MP = l.$$

D'où la construction : Porter à partir de A sur AB et AC, les segments $AK = AL = l$. Le segment KL coupe BC au point M cherché. Le problème n'est possible que si KL coupe BC et non son prolongement, c'est-à-dire si $AK \geqslant AB$ et $AL \leqslant AC$, ce qui donne la condition déjà trouvée : $c \leqslant l \leqslant b$.

336. Exemple II. — *Dans un demi-cercle de diamètre* AB = 2 R, *on inscrit un trapèze isocèle* AMNB. *Déterminer le point* M *de façon que* MN = 2 AM.

Mise en équation. — Posons $AM = x$ (fig. 81).

Désignons par H et K les projections de MN sur AB. On a :

$$MN = HK = AB - 2\,AH = 2R - 2\,AH.$$

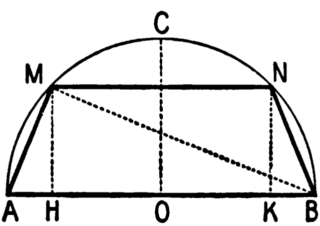


Fig. 81.

Or le triangle AMB est rectangle en M; donc : $\overline{AM}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$

ce qui donne

$$AH = \frac{\overline{AM}^2}{AB} = \frac{x^2}{2R}.$$

D'où :

$$MN = 2R - 2\frac{x^2}{2R} = 2R - \frac{x^2}{R}.$$

Écrivons que $MN = 2AM$. Nous obtenons :

$$2R - \frac{x^2}{R} = 2x.$$

Soit : $$x^2 + 2\,Rx - 2\,R^2 = 0. \tag{1}$$

Réciproquement toute racine de cette équation fournira une solution du problème pourvu que x soit positif et inférieur à AC. Soit :

$$0 < x < R\sqrt{2}.$$

Résolution. — L'équation (1) a deux racines de signes contraires. Seule peut convenir la racine positive :

$$x = -R + \sqrt{R^2 + 2R^2} = -R + R\sqrt{3}.$$

Soit : $$\boxed{x = R(\sqrt{3} - 1)}$$

Cette racine convient car $0 < R(\sqrt{3} - 1) < R\sqrt{2}$.

Construction géométrique. — Pour déterminer géométriquement le point M, nous sommes ramenés à construire la longueur :

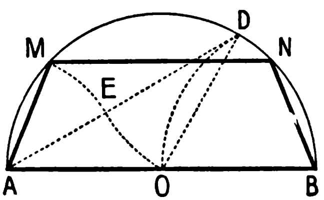


Fig. 82.

$$x = R(\sqrt{3} - 1) = R\sqrt{3} - R.$$

Or $R\sqrt{3}$ est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon R. Construisons le point D du demi-cercle tel que $BD = R$ (fig. 82). Nous avons $AD = R\sqrt{3}$. En prenant sur AD le point E tel que $DE = R$ nous obtenons

$$AE = R\sqrt{3} - R = R(\sqrt{3} - 1).$$

Il suffit alors de construire $AM = AE$ et de terminer le trapèze AMNB.

337. Exemple III. — *Soit un demi-cercle de diamètre* $AB = 2\,R$. *Trouver sur ce demi-cercle un point* M *tel que* $MA + MB = 2\,a$ (*a longueur donnée*).

Mise en équations. — Posons $MA = x$ et $MB = y$. La condition imposée par l'énoncé s'écrit (fig. 83) :

$$x + y = 2\,a \tag{1}$$

D'autre part d'après le théorème de Pythagore :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{AB}^2$$

soit : $$x^2 + y^2 = 4\,R^2 \tag{2}$$

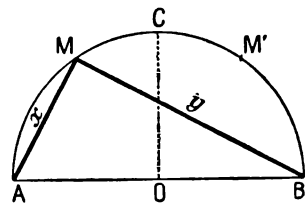


Fig. 83.

Réciproquement tout couple de nombres positifs vérifiant le système formé par les équations (1) et (2) fournit une solution du problème. Il résulte en effet de l'équation (2) que l'on a alors $x^2 < 4\,R^2$, soit $x < 2\,R$ et on pourra par suite construire le point M.

Résolution. — Le système à résoudre est symétrique. On en déduit facilement :

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2\,xy = 4\,a^2$$

Soit : $$4\,\mathrm{R}^2 + 2\,xy = 4\,a^2.$$

D'où : $$xy = 2\,(a^2 - \mathrm{R}^2). \qquad (3)$$

D'après (1) et (3), x et y sont les racines de l'équation (n° 228) :

$$\mathrm{X}^2 - 2\,a\mathrm{X} + 2\,(a^2 - \mathrm{R}^2) = 0.$$

Discussion. — 1° Cette équation a des racines si :

$$\Delta' = a^2 - 2\,(a^2 - \mathrm{R}^2) \geqslant 0 \quad \text{soit} \quad 2\,\mathrm{R}^2 - a^2 \geqslant 0$$

c'est-à-dire si $$a \leqq \mathrm{R}\,\sqrt{2}.$$

2° Pour que les deux racines soient positives, il faut et il suffit que leur somme $\mathrm{S} = 2\,a$ et leur produit $\mathrm{P} = 2\,(a^2 - \mathrm{R}^2)$ soient positifs. Ce qui donne puisque a est positif :

$$a^2 - \mathrm{R}^2 \geqslant 0.$$

Soit : $$a \geqslant \mathrm{R}.$$

Finalement, si $\mathrm{R} < a < \mathrm{R}\,\sqrt{2}$ les longueurs x et y ont pour valeurs :

$$a + \sqrt{2\,\mathrm{R}^2 - a^2} \quad \text{et} \quad a - \sqrt{2\,\mathrm{R}^2 - a^2}.$$

ce qui donne deux points M et M′ symétriques sur le demi-cercle.

Si $a = \mathrm{R}$, les valeurs de x et de y sont 0 et $2\,\mathrm{R}$ et correspondent à M en A ou en B.

Si $a = \mathrm{R}\sqrt{2}$, on a $x = y = \mathrm{R}\sqrt{2}$. Le point M se trouve en C au sommet du demi-cercle.

EXERCICES

1044. Quel nombre x faut-il ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction égale à $\frac{c}{d}$? Application numérique : $\frac{a}{b} = \frac{14}{17}$; $\frac{c}{d} = \frac{8}{9}$.

1045. Trouver deux nombres connaissant leur somme s et sachant que la division du premier par le second donne q comme quotient et r pour reste. Application : $s = 260$; $q = 14$; $r = 5$.

1046. Trouver un nombre de deux chiffres sachant que la somme de ses chiffres est 12 et qu'en permutant les 2 chiffres le nombre diminue de 18.

1047. Un nombre N a 3 chiffres. Le chiffre des dizaines est double de celui des unités; la somme des 3 chiffres est 11; enfin en retranchant de N le nombre N′ obtenu en intervertissant dans N le chiffre des centaines et celui des unités, on trouve 297. Trouver N.

1048. On groupe un nombre inconnu d'oranges en 63 tas égaux et il reste 1 orange. Avec 47 oranges de plus on peut faire exactement 67 tas égaux aux premiers. Trouver le nombre d'oranges dans chaque tas et le nombre total des oranges.

1049. Trois joueurs ont des avoirs proportionnels aux nombres 2, 3 et 4. En fin de partie leurs avoirs sont proportionnels aux nombres 17, 13 et 15. Sachant que le premier a gagné 560 F, trouver les avoirs primitifs et les avoirs finaux.

1050. Soit le x côté d'un carré exprimé en mètres. Si ce côté augmente de a mètres, son aire augmente de b mètres carrés. Trouver x. Application : $a = 7$; $b = 1771$.

1051. Le périmètre d'un rectangle vaut $2\ p$. Si la base augmente de a, et la hauteur de b, l'aire augmente de k. Trouver les côtés du rectangle. Application : $p = 216$; $a = +\ 2$; $b = -\ 3$; $k = -\ 289$.

1052. Deux mobiles animés d'un mouvement rectiligne et uniforme se déplacent sur la même droite. A l'instant initial ils sont séparés par une distance d. Leurs vitesses sont v et v'.

1° Les mobiles vont dans le même sens. Trouver le temps x au bout duquel l'un aura rejoint l'autre.

2° Les mobiles vont en sens contraires. Trouver le temps x au bout duquel ils se rencontreront.

Application : $d = 45$ km; $v = 36$ km/heure; $v' = 24$ km/heure.

1053. Deux mobiles sont, à l'instant initial, séparés par une distance d sur une droite uv. Ils sont animés, sur cette droite, d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesses respectives x et y. Si les mobiles vont dans le même sens ils se rejoignent au bout du temps t; s'ils vont en sens contraires ils se rencontrent au bout du temps t'. Calculer x et y en fonction de d, t et t'.

Application : $d = 36$ km; $t' = 40$ mn; $t = 6$ h.

1054. Un piéton part de A pour B à la vitesse de 4 km à l'heure. Un autocar part de A , 1 h 30 mn plus tard à la vitesse moyenne de 28 km à l'heure. Le piéton monte dans cet autocar lorsqu'il arrive à sa hauteur et arrive ainsi en B trois heures plus tôt que s'il avait terminé le chemin à pied.

1° Trouver la distance AB.

2° A quelle distance de A le piéton a-t-il pris l'autocar?

1055. Deux capitaux sont proportionnels aux nombres 5 et 7. Le premier est placé à 4 %, le second à 3 %. Le revenu annuel total est 5 330 F. Trouver les deux capitaux.

1056. Trouver deux capitaux sachant que si l'on place le premier à 4 % et le second à 5 % on obtient un revenu annuel total de 2 600 F et que si l'on place le premier à 5 % et le second à 4 %, on obtient un revenu annuel total de 2 530 F.

1057. On partage une somme de 8 000 F en deux parts. La première placée pendant 18 mois produit un intérêt de 225 F; la seconde placée au même taux pendant deux ans produit 500 F d'intérêts. Trouver les deux parts et le taux des placements.

1058. On a placé trois capitaux proportionnels aux nombres 5, 7 et 9, le 1er à 3 % pendant 20 mois, le 2e à 4,5 % pendant 16 mois et le 3e à 4 % pendant 21 mois. On a retiré capitaux et intérêts réunis une somme totale de 11 150 F. Trouver la valeur de chaque capital.

1059. Trois joueurs conviennent qu'à chaque partie, le perdant doublera l'avoir des deux autres. Chacun d'eux perd successivement une partie et chaque joueur possède alors 200 F. Quels étaient les avoirs primitifs?

1060. Un tailleur a acheté trois pièces d'étoffe. La première a 8 m de plus que la seconde et 10 m de moins que la troisième. Le prix du mètre de la première vaut 15 F de moins que celui de la seconde et 20 F de plus que celui de la troisième. Finalement la première pièce coûte 100 F de moins que la seconde et 550 F de plus que la troisième. En déduire les longueurs des trois pièces et le prix du mètre de chacune d'elles.

1061. On découpe une première fois une bande de 30 cm de large sur les bords d'un tapis rectangulaire, puis une deuxième fois une bande de 20 cm de large. Le rapport des surfaces enlevées est $\frac{189}{106}$. Sachant que la largeur finale du tapis est les 3 /4 de sa longueur finale, déterminer les dimensions initiales du tapis.

1062. Un réservoir est alimenté par trois robinets A, B et C. Les robinets A et B remplissent le réservoir en 72 mn, A et C le remplissent en 63 mn et B et C le remplissent en 56 mn.

1° Quel temps faut-il à chacun des robinets pour remplir seul le réservoir? Et aux trois robinets ouverts simultanément?

2° Sachant que le robinet C débite10 litres de moins à la minute que les deux robinets A et B simultanément, calculer la capacité du réservoir et le débit de chaque robinet.

1063. On a vendu un terrain carré partagé en 3 lots rectangulaires dont la longueur est égale au côté du terrain. Les prix respectifs du mètre carré sont 20 F pour le premier lot, 24 F pour le second et 30 F pour la troisième. La surface du deuxième lot est le tiers de la surface totale du terrain, le prix du premier lot est égal à celui du troisième et le prix de vente total est de 21 600 F. On demande :

1° La surface de chaque lot.

2° La dimension du terrain et celles de chaque lot.

1064. On a acheté trois tapis de même qualité pour 4 400 F. Le premier a 0,20 m de long de plus que le second et 1 m de moins que le troisième; il a 0,50 m de large de moins que le second et 0,25 m de moins que le troisième. Calculer le prix de chacun des tapis sachant que le second a 1 m² de plus que le premier et 2 m² de moins que le troisième.

1065. Un cycliste se rend d'une ville A à une ville B distante de 36 km et revient en A par la même route. Sa vitesse horaire moyenne au retour est inférieure de 10 km à celle de l'aller et de 4 km à la vitesse moyenne réalisée sur l'ensemble du trajet. Trouver la vitesse réalisée à l'aller et au retour et la durée de chaque partie du trajet.

1066. Un marchand a acheté un lot d'articles identiques. Il en vend d'abord la moitié pour 2 800 F avec un bénéfice de 10 F par unité, puis une autre partie pour 2 100 F avec un bénéfice de 12 F par unité et solde le reste pour 700 F en faisant malgré tout un bénéfice de 5 F par article.

1° Trouver le prix d'achat de chacun des articles.

2° Trouver le nombre d'articles vendus à chaque fois et le bénéfice total réalisé.

1067. Un train doit effectuer un trajet de 480 km. Au bout de 300 km le mécanicien s'aperçoit que sa vitesse horaire a été inférieure de 5 km à la vitesse prévue. Il calcule qu'il lui faut alors réaliser une vitesse dépassant de 10 km la vitesse prévue et arrive ainsi à l'heure fixée.

1° Calculer la vitesse réalisée sur chacune des parties du trajet.

2° Déterminer le retard au moment du changement de vitesse.

1068. Un avion fait le circuit entre trois villes A, B et C. Les distances AB, BC et CA sont proportionnelles à 4, 3 et 5. Sur le trajet AB la vitesse moyenne horaire de l'avion est supérieure de 15 km à celle du trajet BC, et inférieure de 10 km à celle du trajet CA. Sachant que la distance totale parcourue est de 1 620 km et que la durée du trajet AB est le tiers de la durée du parcours total :

1° Trouver les distances, puis les vitesses réalisées sur les trois trajets.

2° Calculer l'heure du retour en A, sachant que le départ a eu lieu à 8 h 15 et que les escales en B et C ont été de 30 mn chacune.

1069. Trouver deux nombres sachant que leur différence est égale à 16 et que la somme de leurs carrés est égale à 2 578.

1070. Trouver deux nombres sachant que leur somme est égale à 17 et que la somme de leurs cubes est égale à 1 241.

1071. Trouver deux nombres sachant que leur différence est égale à 4 et que la différence de leurs cubes est égale à 988.

1072. Trouver les mesures des trois côtés d'un triangle rectangle sachant que ce sont trois nombres entiers consécutifs.

1073. Trouver un nombre qui, additionné avec son inverse, donne 2,05.

1074. Calculer les côtés d'un triangle rectangle sachant que son périmètre est égal à 56 cm et que sa surface est égale à 84 cm². (On pourra calculer d'abord le rayon du cercle inscrit, puis l'hypoténuse.)

1075. Trouver 3 nombres entiers consécutifs tels que leur produit soit les $\frac{24}{5}$ du carré du nombre intermédiaire.

1076. On a payé 300 F un certain nombre de mètres de drap. Si l'on avait payé le mètre 5 F de moins, on aurait eu pour le même prix 2 m de plus. Combien a-t-on acheté de mètres et quel est le prix du mètre?

1077. Un marchand a acheté une pièce de drap 1 440 F. Il en revend une partie pour 1 680 F en faisant un bénéfice de 15 F par mètre. Sachant qu'il lui reste 4 m, trouver la longueur de la pièce et le prix d'achat du mètre.

1078. On doit partager une somme de 7 200 F en un certain nombre de personnes. S'il y avait 5 personnes de moins la part de chacune se trouverait augmentée de 20 F. Trouver le nombre réel de personnes.

1079. Deux villes sont distantes de 450 km. Une automobile met 4 h de moins qu'un camion pour aller de l'une à l'autre. Sachant que la vitesse horaire de l'automobile est supérieure de 30 km à celle du camion, trouver les vitesses de chacun des véhicules.

1080. Évaluer le nombre de diagonales d'un polygone convexe en fonction du nombre de ses côtés.

Calculer le nombre de côtés d'un polygone qui a 90 diagonales.

1081. Un jardin rectangulaire a un périmètre de 280 m. On y trace intérieurement une allée périphérique dont la largeur est de 2 m. Il reste alors une superficie cultivable de 4 256 mètres carrés. Calculer les dimensions du jardin.

1082. Un travail qui nécessite 420 journées d'ouvriers est entrepris par une équipe. Trouver le nombre d'ouvriers de cette équipe sachant que si elle comprenait 5 ouvriers de plus elle mettrait 7 jours de moins pour effectuer le travail.

1083. Un bateau remonte un fleuve dont le courant a une vitesse de 3 km à l'heure. Après avoir parcouru 36 km il revient à son point de départ. Sachant qu'il a mis 5 h pour effectuer le trajet total, trouver la vitesse propre du bateau.

1084. Un avion dont la vitesse par temps calme est 280 km à l'heure fait le trajet entre deux villes A et B distantes de 960 km. A l'aller de A à B il est gêné par le vent et met 1 h de plus qu'au retour de B vers A où il est aidé par le vent. Trouver la vitesse à l'heure du vent.

1085. Deux automobiles partent ensemble pour effectuer un trajet de 270 km. La première a une vitesse horaire supérieure de 12 km à celle de la seconde et arrive 45 mn avant la seconde à destination. Calculer la vitesse de chaque voiture.

1086. Un robinet alimente un réservoir de 2 400 litres. Si le robinet débitait 8 litres de plus à la minute, il faudrait 10 mn de moins pour remplir le réservoir. Calculer le débit à la minute du robinet.

1087. On donne un triangle ABC de base BC $= a$, de hauteur AH $= h$. Inscrire dans ce triangle un carré MNPQ, M sur le segment AB, N sur AC, P et Q sur BC.
Inconnue MQ $= x$. Application : $a = 15$; $h = 9$.

1088. Les données sont les mêmes qu'au problème précédent. Inscrire dans triangle le ABC un rectangle MNPQ, M sur le segment AB, N sur AC, P et Q sur BC, de façon que $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MQ}} = m$, où m est un nombre donné. Application : $a = 24$; $h = 12$; $m = \frac{1}{2}$.

1089. On donne un triangle ABC de côtés BC $= a$; CA $= b$; AB $= c$. Construire une parallèle à BC coupant AB en D et AC en E, de sorte que BD + DE + EC $= l$, où l est une longueur donnée. Application : $a = 25$; $b = 17$; $c = 23$; $l = 34$. On supposera D entre A et B.

1090. Les données sont les mêmes qu'au problème précédent. Construire DE parallèle à BC de sorte que DE = BD + EC.

1091. On donne un demi-cercle de diamètre AB $= 2\,\mathrm{R}$. Trouver un point M du demi-cercle tel que $\overline{\mathrm{MA}}^2 = k \cdot \overline{\mathrm{MB}}^2$. Cas particulier où $k = \frac{2}{5}$.

1092. On donne un demi-cercle de diamètre AB $= 2\,\mathrm{R}$. Trouver un point M du demi-cercle tel que $\overline{\mathrm{MA}}^2 - \overline{\mathrm{MB}}^2 = k^2$. Cas particulier où $k = \mathrm{R}$.

1093. On donne un cercle de centre O, de rayon R, et un diamètre AB de ce cercle. Construire un point C de la droite AB, tel qu'en menant la tangente CT au cercle O, l'aire du triangle OCT soit égale à $m\mathrm{R}^2$ où m est un nombre donné. Cas particulier où $m = \frac{1}{2}$.

1094. On donne un demi-cercle de diamètre AB $= 2\,\mathrm{R}$. Trouver une corde MN parallèle à AB de sorte que, Q et P désignant les projections de M et N sur AB, la diagonale du rectangle MNPQ ait une longueur donnée l. On prendra OP $= x$. Cas particulier où $l = \mathrm{R}\sqrt{3}$.

1095. On donne un demi-cercle de diamètre AB $= 2\,\mathrm{R}$ et la tangente AT en A à ce demi-cercle. Trouver un point M du demi-cercle tel que, H et P désignant ses projections sur AB et AT on ait $\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MP}} = m$ (m, nombre donné). Cas particulier $m = 3$

1096. Étant donné deux points A et B tels que AB = 11 cm, déterminer entre A et B un point M tel que la somme des aires des carrés construits sur AM et MB comme côtés soit égale à 65 cm².

1097. Sur un axe Ox on prend un point A d'abscisse $\overline{\mathrm{OA}} = a$. Trouver l'abscisse x d'un point M tel que : $\overline{\mathrm{OM}}^2 + 2\,\overline{\mathrm{MA}}^2 = 6\,a^2$.

1098. Soit un triangle équilatéral ABC de côté a. On prend sur BA le point M et sur AC le point N tels que BM = AN = x. Calculer x de façon que l'aire du triangle AMN soit égale aux $\frac{2}{9}$ de celle du triangle ABC.

1099. Soit un triangle rectangle isocèle OAB tel que OA = OB = a. On prend sur OA un point M et sur OB un point N et on pose OM = x et ON = y.

1° Déterminer la relation entre x, y et a pour que : MN = MA + NB.

2° Calculer x et y pour que l'on ait alors : $x + y = \frac{7a}{6}$.

1100. Soit un demi-cercle de diamètre AB = 2 R. On mène d'un point M de ce demi-cercle la perpendiculaire MC à la tangente en B. Déterminer la longueur AM = de manière que : AM + MC = $\frac{19}{8}$ R.

1101. Inscrire dans un demi-cercle de diamètre AB un trapèze isocèle AMNB de manière que la somme des bases soit les $\frac{3}{2}$ de la somme des côtés non parallèles.

1102. Soit un demi-cercle de diamètre AB = 2 R et le rayon OC perpendiculaire à ce diamètre. On prend un point M sur le cercle et on mène les perpendiculaires MH à AB et MK à OC. Déterminer AH = x de façon que : $2\,\overline{MA}^2 = 15\,\overline{MK}^2$.

1103. Soit un triangle ABC tel que : AB = 8 a, BC = 7 a et $\widehat{BAC} = 60°$. Calculer la longueur x du côté AC.

1104. Soit un demi-cercle de diamètre AB = 2 a. Une tangente au demi-cercle coupe en M et N les tangentes en A et B.

1° Démontrer les relations : AM + BN = MN et AM · BN = a^2.

2° Déterminer la tangente MN pour que le périmètre du trapèze AMNB soit égal à 7 a.

1105. Déterminer sur un demi-cercle de diamètre AB = 2 R un point M tel que : MA + MB = $\frac{34}{13}$ R. On posera MA = x et MB = y.

1106. On considère un demi-cercle de diamètre AB = 2 R. Trouver sur ce demi-cercle un point M tel que : MA — MB = $\frac{2\,R}{5}$. On prendra : MA = x et MB = y.

1107. Soit un demi-cercle de diamètre AB = 2 R et P la projection sur AB d'un point M de ce demi-cercle. Déterminer le point M de façon que AP + PM = $\frac{12\,R}{5}$. Poser : PM = x et AP = y.

PROBLÈMES DE RÉVISION

1108. On considère un rectangle dont le périmètre mesuré en mètres est $2p$. Si l'on augmente la longueur de 5 m et la largeur de 3 m, la surface augmente de 195 m².

1° Calculer, en fonction de p, les deux dimensions;

2° Appliquer la formule au cas où $p = 50$;

3° Pour quelles valeurs de p le problème est-il possible? — Pour quelles valeurs de p le rectangle présente-t-il des propriétés particulières?

1109. Trois enfants A, B, C, font une partie de billes. Avant la partie, ils possèdent des nombres de billes respectivement proportionnels aux nombres 3, 4, 5.

1° Quelle fraction du nombre total des billes chaque enfant possède-t-il?

2° Après la partie, les nombres de billes des enfants sont respectivement proportionnels aux nombres 15, 16, 17. Qui a gagné ou perdu?

3° L'un des enfants a gagné 9 billes. Quel est le nombre total des billes?

1110. Trois frères ont acheté une propriété pour 100 000 F. Le cadet dit qu'il pourrait la payer seul si le plus jeune lui donnait la moitié de son argent; le plus jeune dit qu'il la paierait seul si l'aîné lui donnait le tiers seulement de son argent; enfin l'aîné ne demande que le quart de l'argent du cadet pour payer seul la propriété. Combien chacun avait-il d'argent?

1111. Un nombre de 3 chiffres N étant donné, on compose un deuxième nombre N' ayant même chiffre des dizaines que N et ayant respectivement pour chiffres des unités et des centaines les chiffres des centaines et des unités de N.

1° A quelle condition aura-t-on N' plus grand que N?

2°° Démontrer que N — N' est un multiple de 99.

3° Calculer tous les nombres N sachant que $N - N' = 594$ et que la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités de N est égale à 8.

1112. Un cycliste parcourt une route AB qui comprend du terrain plat, des montées et des descentes. Sur le terrain plat, sa vitesse est de 24 km à l'heure; en montée, elle est de 16 km à l'heure; en descente, de 30 km à l'heure.

De A vers B, le cycliste met 5 h. De B vers A, il met 4 h 39 mn.

Sachant que les parties horizontales de la route ont 56 km, on demande la longueur des montées et celle des descentes dans le sens de A vers B.

1113. Un cycliste parcourt un trajet AB qui comporte des montées, des paliers et des descentes. Les vitesses moyennes sont de 10 km à l'heure en montée, 20 km à l'heure en plaine, 30 km à l'heure en descente.

Dans le sens de A vers B il met 6 h 50.

Dans le sens de B vers A il met 7 h 30.

Le trajet total AB comportant 120 km, on demande la longueur des montées, des paliers et des descentes.

1114. Un piéton se rend d'un point A à un point B à la vitesse de 4,500 km à l'heure. A un moment donné, pour arriver plus vite à destination, il monte dans un tramway allant également de A vers B, à la vitesse de 16,500 km à l'heure, et qui est parti de A 40 mn après le piéton. Celui-ci arrive en B 72 mn plus tôt que s'il avait fait toute la route à pied. On demande :

1° A quelle distance de A le piéton est monté en tramway?

2° Quelle est la distance de A à B?

1115. Soient les fonctions : $y = 3x + 2$ représentée par la droite D et $y = mx$ représentée par la droite D′ (m est un nombre quelconque, positif ou négatif).

1° Représenter graphiquement les deux fractions : $y = mx$ et $y = 3x + 2$. (On prendra par exemple, $m = 4$).

2° Soit P le point d'intersection des droites D et D′. Calculer les coordonnées de P en fonction de m.

3° Étudier, à l'aide du graphique, comment se déplace le point P sur la droite D lorsque m varie de $-\infty$ à $+\infty$.

1116. On considère les deux fonctions $y = 2x + 1$; $y = -\frac{x}{2} + 1$ et les droites qui les représentent dans un repère orthonormé xOy.

1° Calculer les coordonnées des points où ces droites coupent les axes.

2° Soit A le point de rencontre des deux droites. Calculer ses coordonnées.

3° Soient B et C les points où les deux droites rencontrent respectivement l'axe $x'Ox$. Prouver que le triangle ABC est rectangle.

4° La propriété précédente est-elle modifiée si l'on envisage des fonctions :

$$y = ax + 1 ; \quad y = -\frac{x}{a} + 1 ?$$

Quand a varie le cercle circonscrit au triangle ABC n'a-t-il pas un second point fixe?

1117. 1° Construire les courbes représentatives des fonctions :

$$y = x + 4, \qquad y = -\frac{2}{3}x - 1, \qquad y = -4x + 9.$$

2° Les trois droites obtenues forment un triangle ABC. Trouver les coordonnées des points milieux des côtés de ce triangle.

3° Former l'équation des médianes du triangle ABC.

4° Trouver les coordonnées du centre de gravité de ce triangle.

1118. Dans tout ce qui suit, on supposera x variable non inférieur à a constant. On considère un carré C de côté x cm. On mène parallèlement à chacun de ses côtés les deux droites situées à la distance a cm de ce côté. Les quatre droites extérieures à C forment un carré C_1, les quatre autres un carré C_2.

1° Calculer la longueur du côté de C_1 et celle du côté de C_2.

2° Calculer les surfaces de chacun des carrés C_1 et C_2.

3° Calculer la surface y comprise entre C_1 et C et la surface z comprise entre C et C_2.

4° On suppose $a = \frac{1}{2}$: représenter sur un même graphique les variations de y et z.

5° Montrer par le calcul qu'il existe entre y et z une relation indépendante de x. Pouvait-on prévoir cette relation d'après le graphique? Peut-on la justifier sur la figure formée par C, C_1, C_2?

1119. 1° Résoudre le système à deux inconnues : $3x + my = 4$; $5x + 2y = 25$ dans lequel m est un nombre donné, positif ou négatif.

Appliquez les formules trouvées au calcul des valeurs numériques de x et de y dans le cas particulier où $m = -1$.

2° Déterminez ces mêmes valeurs numériques de x et de y lorsque $m = -1$ en employant une méthode graphique.

1120. Un cycliste doit parcourir une distance AB, aller et retour. Il fait l'aller à la vitesse constante de 25 km à l'heure et le retour à la vitesse constante de 20 km à l'heure. Il s'arrête 1 h en B. La durée du trajet aller et retour est de 10 h arrêt compris.

1° Calculer la distance AB.

2° Représenter sur un même graphique le mouvement du cycliste depuis son départ de A jusqu'à son retour en A (Porter en ordonnées les espaces : 1 cm pour 10 km et en abscisses les temps : 1 cm pour 1 h).

3° Un automobiliste est parti de A 4h ½ après le départ du cycliste, il fait 60 km à l'heure. Trouver au bout de combien de temps et à quelle distance de B il rencontrera le cycliste.

4° Tracer sur le graphique la droite représentative du mouvement de l'automobiliste. Indiquer où sont figurées, sur le graphique, les réponses aux questions du n° 3.

1121. Un cycliste et un piéton parcourent dans le même sens une route rectiligne Ax. Ils partent en même temps de deux points A et B distants de 45 km. On sait que la vitesse du cycliste vaut 4 fois celle du piéton. On demande :

1° De déterminer à quelle distance de A sera le point P où le cycliste atteindra le piéton?

2° De dire à quelle distance de A était le piéton lorsqu'il avait sur le cycliste une avance de 9 km.

3° Le rapport des vitesses devenant $\frac{5}{16}$ dès le début du mouvement, déterminer à quelle distance de A sera le piéton lorsque le cycliste aura sur lui une avance de 10 km.

Représentation graphique des résultats des 2 premières questions en prenant comme vitesse du piéton 6 km à l'heure.

1122. 1° Un train ayant 300 m de long se déplace d'un mouvement uniforme. Il met 36 secondes à passer devant un observateur immobile. Quelle est sa vitesse?

2° Un train marchant en sens inverse d'un mouvement uniforme croise le premier en 24 secondes, c'est-à-dire qu'il s'écoule 24 secondes entre le moment où les têtes des trains arrivent en face l'une de l'autre et le moment où les queues cessent d'être en face l'une de l'autre. Ce deuxième train met 18 secondes pour passer devant l'observateur immobile. Déterminer la vitesse et la longueur du deuxième train.

1123. Deux voyageurs se trouvent ensemble en un point C sur une route AB. L'un se dirige de C vers B en faisant 4,400 km à l'heure, le 2e dans le sens opposé en faisant 5,800 km à l'heure. Ils partent ensemble à 12 h 30. A quelle heure seront-ils séparés l'un de l'autre par une distance de 38,450 km? On fournira une solution graphique.

1124. Un train effectue le parcours Paris-Caen (239 km) avec arrêt d'une minute à Évreux (108 km de Paris) et à Lisieux (191 km de Paris). Ce train part de Paris à 13 h 10, d'Évreux à 14 h 18, de Lisieux à 15 h 10 et arrive à Caen à 15 h 40.

Un rapide part de Caen à 12 h 50 et arrive à Paris à 15 h 54 sans arrêt intermédiaire. Déterminer graphiquement l'instant où les deux trains se croisent.

Il arrive un jour qu'une réparation prolonge l'arrêt à Évreux du 1er train; celui-ci rencontre alors le rapide 5 mn après l'heure habituelle. Déterminer graphiquement le temps dont l'arrêt à Évreux a été prolongé.

1125. Résoudre graphiquement le problème suivant : Deux villes A et B distantes de 250 km sont reliées par une ligne de chemin de fer avec une station intermédiaire C, située à 100 km de A. Un train part de A à 8 h et fait 75 km à l'heure. Arrivé en C, il s'arrête 10 mn et repart vers B avec une vitesse de 60 km à l'heure. Un autre train part de B à 8 h 30 avec une vitesse de 90 km à l'heure, s'arrête en C pendant 10 mn et repart vers A avec une vitesse de 80 km à l'heure. En quel point et à quelle heure les deux trains se croisent-ils?

1126. On donne le système :

$$(m - 1)\,x + 2\,y = m + 1 \qquad (1)$$
$$mx + 2\,my = m + 4. \qquad (2)$$

1° Résoudre ce système pour $m = 3$.

2° On construit la droite d'équation (2) par rapport à deux axes de coordonnées orthonormées $x'Ox$, $y'Oy$. Comment se déplace-t-elle quand m varie? On construit également la droite d'équation (1). Montrer qu'elle tourne autour d'un point fixe quand m varie. Comment sont les droites (1) et (2) lorsque $m = 2$?

3° *a*) Dans le cas où m est un nombre algébrique quelconque, quelles sont les coordonnées du point d'intersection I des deux droites définies par le système donné?

b) Montrer que I se déplace sur une droite fixe quand m varie.

c) Pour quelles valeurs de m le point d'intersection est-il dans le quatrième quadrant $y'Ox$?

4° Déterminer m pour que la droite d'équation (1) coupe Ox et Oy en deux points A et B tels que $OA + OB = l$; l étant une longueur donnée mesurée avec les mêmes unités que x et y. Le problème est-il possible pour toutes les valeurs de l?

1127. 1° Trouver deux nombres, sachant que leur somme est 15 et leur produit 36.

2° Ces deux nombres étant les extrêmes d'une proportion, calculer les deux moyens de cette proportion sachant que la somme de ces moyens est 13.

1128. 1° Le périmètre d'un rectangle mesure 28 m et sa diagonale 10 m. Calculer ses deux dimensions.

2° Même question si les mesures du périmètre et de la diagonale faites avec la même unité sont respectivement $2\,p$ et 10. Conditions de possibilité du problème.

1129. La différence entre la superficie de deux terrains carrés est 464 m². La différence entre leurs périmètres est de 32 m. Ils ont été vendus de la façon suivante : le plus grand a été payé comptant; le 2e sera payé 4 mois plus tard.

On versera alors le prix d'achat augmenté de ses intérêts à 6 %, soit une somme totale de 1 912,50 F.

Sachant que le prix du mètre carré est le même dans les deux cas, trouver le prix du mètre carré et le prix de vente du 1er terrain.

1130. Un tapis rectangulaire étant usé sur les bords, on enlève tout autour une bande d'étoffe; pour cela, on coupe de chaque côté du tapis, une bande de 50 cm de large. Sachant que la partie restante du tapis a une longueur double de la largeur et que sa surface est équivalente à celle de la partie enlevée, trouver les dimensions nouvelles du tapis.

1131. Un automobiliste avait calculé qu'à la vitesse moyenne x qu'il se proposait de faire au cours d'un voyage de 234 km, il arriverait au but à 13 h.

Lorsque le tiers du trajet est parcouru, il s'aperçoit que sa vitesse moyenne n'a été que les 3 /4 de celle qu'il avait espérée. A quelle distance du point de départ aurait-il dû se trouver à ce moment s'il avait fait la vitesse escomptée?

Il veut rattraper son retard, et dans le reste du parcours, il réussit à maintenir une vitesse moyenne horaire supérieure de 8 km à celle qu'il s'était proposée. Il n'arrive néanmoins qu'à 13 h 6 au terme du voyage. Quelle a été la durée réelle de son voyage? (Critiquer la vraisemblance des valeurs trouvées pour la vitesse moyenne x et ne retenir que la solution vraisemblable.)

1132. 1° Représenter graphiquement, en coordonnées orthonormées, les fonctions :

$$y = x^2; \qquad y = 3 - 2\,x.$$

2° Quelles sont les coordonnées des points de rencontre A et B des deux courbes? Vérifier, par le calcul, les résultats obtenus.

3° Déterminer les distances des points A et B à l'origine des coordonnées, ainsi que la longueur AB.

1133. 1° Construire la courbe : $y = \frac{x^2}{2}$.

2° Une droite coupe cette courbe en deux points A et B dont les abscisses sont $x = 1$ pour le point A et $x = -2$ pour le point B; faire figurer cette droite sur le graphique précédent et déterminer algébriquement son équation.

3° Par le point O d'intersection des axes de coordonnées on mène une parallèle D à la droite AB; donner son équation et calculer les coordonnées des points d'intersection de cette deuxième droite avec la courbe $y = \frac{x^2}{2}$.

1134. 1° Trouver un nombre tel que si l'on ajoute 10 à son triple on obtienne son carré.

2° Tableaux des variations et courbes représentatives des fonctions :

$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = 3x + 10.$$

Ces courbes étant tracées avec soin, ne peut-on pas les utiliser pour résoudre graphiquement le problème précédent?

1135. On donne un triangle équilatéral OAB de côté AB = 5 cm, M est sur OA entre O et A, R sur OB entre O et B, OM = OR.

La parallèle à OB menée par M et la parallèle à OA menée par R se coupent en P. OP coupe AB en S. On pose OM = x.

1° Exprimer OP et SP en fonction de x et construire sur les mêmes axes de coordonnées les courbes représentant les variations de OP et SP, lorsque x varie de 0 à 2,5 cm. Utilisant ces courbes déterminer x tel que OP = SP.

2° Représenter graphiquement la surface S_1 du quadrilatère OMPR en fonction de x et, avec les mêmes axes la surface S_2 d'un rectangle dont les côtés sont AB et $\frac{x}{2}$ lorsque x varie de 0 à 5 cm.

Déterminer graphiquement et algébriquement x tel que $S_1 = S_2$.

3° Représenter graphiquement SP en fonction de x lorsque x varie de 0 à 5 cm.

1136. 1° Représenter graphiquement la variation de la fonction $y = \frac{x^2}{4}$ quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. *(Prendre le centimètre pour unité sur chacun des deux axes.)*

2° Sur ce graphique placer : le point A d'abscisse 0 et d'ordonnée $+1$; la droite D dont tous les points ont pour ordonnée -1; le point M ayant pour abscisse $+4$ et situé sur la courbe $y = \frac{x^2}{4}$.

Calculer la distance du point M au point A et la distance MH du point M à la droite D. Que remarquez-vous?

Montrer que cette propriété subsiste pour un point M quelconque de la courbe $y = \frac{x^2}{4}$. *(On pourra appeler α son abscisse.)*

3° Quelles sont les coordonnées du milieu P de AH : quand l'abscisse de M est $+4$? quand l'abscisse de M est α? Quelle ligne décrit le point P quand M parcourt le graphique?

1137. 1° Représenter sur le même graphique les variations des fonctions $y = x - 1$ et $y = \frac{2}{x}$. Les courbes se coupent en deux points A et B. Déterminer graphiquement les coordonnées de ces points.

2° Retrouver par le calcul les coordonnées de ces points.

3° Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes représentant les fonctions $y = -2x + 4$ et $y = \frac{2}{x}$. Que peut-on conclure du résultat?

4° On considère une fonction de la forme $y = ax^2$. Déterminer a pour que la courbe représentant cette fonction passe par l'un des points A ou B de la première question. Tracer la ou les courbes correspondant aux résultats trouvés et dites si elles vous permettent de faire quelque remarque.

1138. On considère la fonction $y = mx + 2m$, dans laquelle x désigne la variable indépendante et m un nombre donné.

1° Tracer les droites D_1 et D_2 qui représentent la variation de cette fonction pour $m = 1$ et pour $m = -2$; trouver les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

2° Sur la figure portant les deux droites D_1 et D_2, représenter graphiquement les fonctions $y = x^2$, $y = \frac{3}{x}$.

3° Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite D_1 avec les deux courbes obtenues au 2°.

1139. On trace deux axes de coordonnées perpendiculaires et on adopte le centimètre comme unité pour la mesure des abscisses et des ordonnées.

1° Construire — sans explications — la ligne (D) qui représente les variations de la fonction $y = x - 3$ et la ligne (H) qui représente les variations de la fonction $y = \frac{4}{x}$.

2° Chercher sur le graphique les coordonnées des points d'intersection A et B de (D) et de (H). Retrouver ces coordonnées par le calcul. Calculer la distance AB à 1 mm près.

3° k étant un nombre variable, on propose de former l'équation fournissant les abscisses x des points d'intersection de la ligne (H) avec la droite (L) qui représente les variations de la fonction $y = -x + k$.

Déterminer k pour que cette équation admette une racine double : tracer sur le graphique les deux droites (L) correspondant à ces valeurs particulières de k.

1140. 1° Trouver les dimensions d'un rectangle connaissant la surface de ce rectangle : 180 m² et le périmètre 56 m.

2° Représenter graphiquement les variations de la longueur de ce rectangle en fonction de la largeur si la surface de ce rectangle reste constamment égale à 180 m².

Représenter graphiquement les variations de la longueur de ce rectangle en fonction de la largeur si le périmètre de ce rectangle reste constamment égal à 56 m.

3° Les deux courbes précédentes étant tracées dans un même système d'axes de coordonnées, montrer que l'intersection de ces courbes donne la solution graphique du problème proposé dans la 1re question.

4° Trouver la relation qui doit exister entre les quantités S et $2p$ représentant respectivement la surface et le périmètre d'un rectangle pour que l'on puisse construire un tel rectangle.

En utilisant les graphiques précédemment construits quelle est la valeur minimum du périmètre quand la surface est 180 m²?

1141. 1° Calculer les dimensions d'un rectangle connaissant sa surface 24 m² et sachant que sa largeur est inférieure de 1 m à sa demi-longueur.

2° Représenter avec un même système d'axes de coordonnées les fonctions :

$$y = \frac{24}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{2} - 1.$$

Montrer que la figure donne une solution graphique de la première question.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE I

CALCUL ALGÉBRIQUE.

LIVRE II

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS.

LIVRE III

FONCTIONS

Imprimé en France
IMPRIMERIE FIRMIN-DIDOT. — PARIS - MESNIL - IVRY — 3073
Dépôt légal : 2e trimestre 1965.