Analyse

2^{e} Baccalauréat Sciences

Fonctions Exponentielles

Yassine Aouami

version étudiant(e) 1.1

Sommaire

I. Fonction exponentielle népérienne

1. Définition de la fonction exp

Définition

On appelle **fonction exponentielle népérienne**, notée exp, la **fonction réciproque** de la fonction logarithme népérien ln , et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in]0;+\infty[)\ \ \exp(x) = y \Leftrightarrow\ x = \ln(y)$$

Remarque

La fonction logarithme népérien ln est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, et sa bijection est la fonction exponentielle népérienne exp.

Conséquences

1. $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = \mathrm{e}$.
2. La fonction exp est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
3. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
   - $\exp(x) > 0$.
   - $\ln(\exp(x)) = x$.
4. Pour tous réels a et b, on a :
   - $\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$.
   - $\exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b$.
5. La fonction $x \longmapsto \exp(u(x))$ est **définie** sur un ensemble E si et seulement si la fonction u est définie sur E.

Exemple

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations ci-dessous :

1. $\exp(x+1) = 1$.
2. $\exp(\frac{1}{x}) = \exp(2-x)$.
3. $\exp(x^2+1) = \exp(x+5)$.
4. $\exp(x-1) < \mathrm{e}$.
5. $\exp(x-2) \leq \exp(2x-3)$.
6. $\exp(x^2-x) \geq \exp(-5x)$.

2. Propriétés algébriques

Propriété

Soit a et b deux réels .

1. $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
2. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
3. Pour tout r de $\mathbb{Q}$, $\exp(ra) = (\exp(a))^r$.

3. La notation e^x

Soit $a \in \mathbb{R}$. On sait que pour tout r de $\mathbb{Q}$: $\exp(ra) = (\exp(a))^r$.
Alors pour $a = 1$, on obtient : $\exp(r) = (\exp(1))^r$.
D'ailleurs, on a : $\exp(1) = \mathrm{e}$.
Ainsi, on trouve :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \ \exp(r) = \mathrm{e}^r$$

Finalement, on prolonge cette relation de l'ensemble $\mathbb{Q}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$, on aura :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(x) = \mathrm{e}^x$$

Les propriétés précédentes deviennent comme-suit :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in]0;+\infty[) \quad \mathrm{e}^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.
2. $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
3. pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
   - $\mathrm{e}^x > 0$.
   - $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
4. Pour tous réels a et b, on a :
   - $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b$.
   - $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a < b$.
   - Pour tout r de $\mathbb{Q}$, $\mathrm{e}^{ra} = (\mathrm{e}^a)^r$.
   - $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.
   - $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
   - $\mathrm{e}^{-b} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^b}$.

Exemple

1. Simplifier le nombre : $A = \dfrac{\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-1} \times (\mathrm{e}^2)^3}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^5}}$.

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations ci-dessous :

- $e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{3}$.
- $e^{2x+1} = e^{x}$.
- $(x-2)\left(\dfrac{1}{e^{3x}} - 1\right) < 0$.
- $\ln(x) = 5$.
- $e^{x}(2e^{x} - 1) = 0$.
- $e^{2x} - 2e^{x} + 1 \geq 0$.

3. Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_n = e^{-n}$

   a. Montrer que la suite (U_n) est géométrique.

   b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

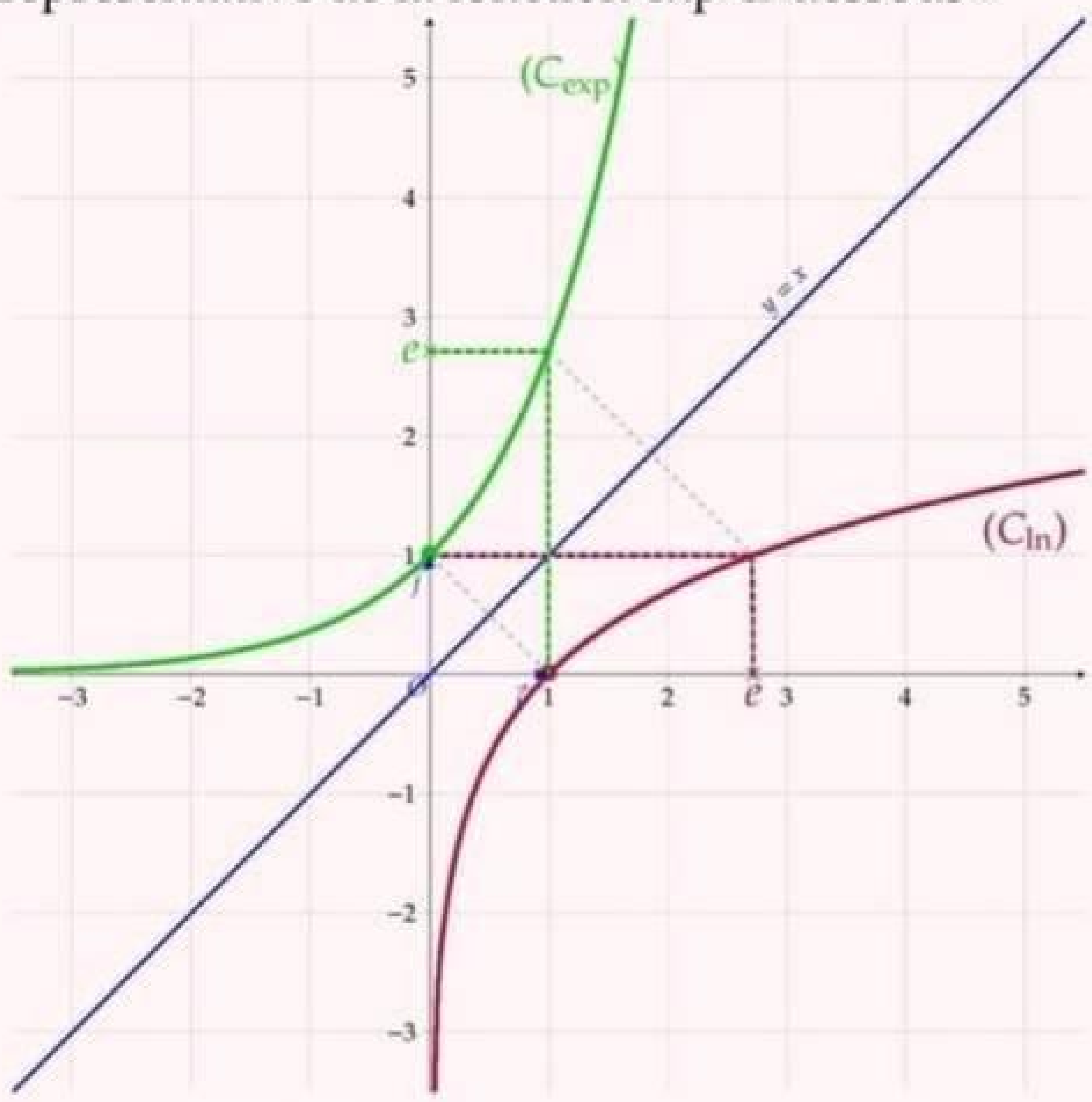
   c. En déduire que la suite (U_n) est convergente.

   d. Calculer la somme : $S_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} U_i$.

II. Étude et représentation graphique de la fonction exp

1. Représentation graphique de la fonction exp

On désigne par $(C_{\exp})$ et $(C_{\ln})$ les courbe représentatives respectives des fonctions exp et ln.
Dans un repère orthonormé, les courbes $(C_{\exp})$ et $(C_{\ln})$ sont **symétriques** par rapport la droite d'équation $y = x$.
On a alors la courbe représentative de la fonction exp ci-dessous :



2. Limites de référence

Théorème (1)

On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Exemple

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{3}{\sqrt{x}} + e^x$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - x)e^x$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\left(\frac{x-1}{x}\right)}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{-4x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{2-x}e^x$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

Théorème (2)

On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.
4. Pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$), on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^3}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x-1)$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x}{e^{-x}}$.
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{3x}-1}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

3. Dérivée de la fonction exp

Théorème (1)

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \exp'(x) = \exp(x)$$

C'est à dire $$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (e^x)' = e^x$$

Théorème (2)

Soit u une fonction **dérivable** sur un intervalle I .
La fonction $f : x \longmapsto e^{(u(x))}$ est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I) \quad f'(x) = u'(x) \times e^{(u(x))}$$

Exemple

Établir le tableau de variations de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x) = (x+3)e^x$.
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$.
3. $h(x) = x^2 e^{-x}$.

Corollaire

Soit u une fonction **dérivable** sur un intervalle I.
Les fonctions primitives de la fonction $x \longmapsto u'(x) \times e^{(u(x))}$ sur l'intervalle I sont les fonctions $x \longmapsto e^{(u(x))} + \lambda$, où λ est une constante réelle.

Exemple

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ et $I =]0; +\infty[$.

III. Fonctions exponentielle de base a

1. Définition de la fonction $\exp_a$

Définition

Soit a un réel strictement positif tel que $a \neq 1$.
On appelle**fonction exponentielle de base a**, notée $\exp_a$, la **fonction réciproque** de $\log_a$ la fonction logarithme de base a , et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in]0;+\infty[)\ \ \exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$$

Propriété

Soit x et y deux réels .

1. $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$.
2. $\exp_a(x-y) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$.
3. Pour tout r de $\mathbb{Q}$, $\exp_a(rx) = \left(\exp_a(x)\right)^r$.

Remarque

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0;+\infty[$, on a :

$$\underbrace{y = \exp_a(x)} \iff \log_a(y) = x \iff x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \iff \ln(y) = x\ln(a) \iff \underbrace{y = e^{x\ln(a)}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{(\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})\,(\forall x \in \mathbb{R})\ \ \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}} \qquad (1.1)$$

Comme $1 = e^0$, on peut aussi écrire : $(\forall x \in \mathbb{R})\ 1 = e^{x\ln(1)}$. On généralise en notant :

$$\boxed{(\forall a \in \mathbb{R}_+^*)\,(\forall x \in \mathbb{R})\ \ \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}} \qquad (1.2)$$

2. Pour $a = e$, on a $\exp_e(x) = e^x$, alors on obtient la fonction exponentielle népérienne.

2. La notation a^x

- Soit a un réel strictement positif tel que $a \neq 1$.
  À l'aide de la relation (2) ci-dessus , on a :

$$\exp_a(1) = e^{\ln(a)} = a$$

or on sait que pour tout r de $\mathbb{Q}$: $\exp_a(rx) = \left(\exp_a(x)\right)^r$, on a pour $x = 1$: $\exp_a(r) = \left(\exp_a(1)\right)^r$.
Ainsi, on trouve :

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ \exp(r) = a^r$$

On prolonge cette relation de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{(\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})(\forall x \in \mathbb{R})\ \ \exp_a(x) = a^x} \quad (1.3)$$

- On pose, par convention, pour tout x de $\mathbb{R}$: $1^x = 1$. Ainsi, on obtient :

$$\boxed{(\forall a \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathbb{R})\ \ \exp_a(x) = e^{x\ln(a)} = a^x} \quad (1.4)$$

Ce qui nous permet de définir **la puissance réelle**.

Définition

Soit a un réel strictement positif et α un réel quelconque. Le nombre a^α est le **réel strictement positif** défini par :

$$a^\alpha = e^{\alpha \ln(a)}$$

Remarque

1. $a^0 = e^{0\ln(a)} = e^0 = 1$.
2. La définition de la puissance réelle est compatible avec la puissance entière, celle que nous connaissons. En effet, pour tout entier n on a :

$$e^{n\ln(a)} = e^{\ln(a^n)} = a^n$$

La puissance réelle a certaines propriétés celles de la puissance entière et de la puissance rationnelle.

Propriété

Soit a et b deux réels strictement positifs et x et y deux réels quelconques.

1. $a^{x+y} = a^x.a^y$.
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.
3. $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$.
4. $(ab)^x = a^x.b^x$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.
6. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Exemple

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

- $10^x - 2 = 0$.
- $2^{2x} - 3.2^{x+1} + 9 = 0$.
- $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

3. Dérivée de la fonction $x \longmapsto a^x$

Propriété

Soit a un réel strictement positif.

1. La fonction $x \longmapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (a^x)' = \ln(a).a^x$$

2. Si u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \longmapsto a^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$(\forall x \in I) \quad \left(a^{u(x)}\right)' = \ln(a).u'(x).a^x$$

Exemple

Établir le tableau de variations de chacune des fonction suivantes :

1. $f(x) = 3^x$.
2. $g(x) = 2^x - x$.
3. $h(x) = \begin{cases} x^x & ,x > 0 \\ 1 & ,x = 0 \end{cases}$.