Analyse

2^e Baccalauréat Sciences / 1^e Baccalauréat Sciences

Généralités sur les Suites Numériques

Yassine Aouami

version étudiant(e) 1.1

www. f / X.maths01

Sommaire

I. Premières définitions

1. Suite de nombres réels

Définition

Une suite de nombres réels est une **fonction** d'une partie I de l'ensemble $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$U: \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto U(n) = U_n \end{array}$$

- La suite U est notée $(U_n)_{n\in I}$ ou (U_n).
- L'image $U(n)$ est notée U_n et appelée le **terme général de la suite** (U_n).

Exemple

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) par : $U_n = 2n$

- Le **premier** terme de (U_n) est $U_0 = 2\times 0 = 0$.
- Le **deuxième** terme de (U_n) est $U_1 = 2\times 1 = 2$.
- Le **cinquième** terme de (U_n) est $U_4 = 2\times 4 = 8$.
- Déterminer, en fonction de n, l'expression de U_{n+1} et U_{2n}.

2. Modes de présentation d'une suite

Une suite peut être définie par :

- Son terme général; c'est à dire en fonction de n (l'exemple précédent).
- Une relation permettant de calculer un terme à l'aide du terme précédent. Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

Exemple

Soit (U_n) et (V_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = 4U_n + 7 \,;\, n \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_1 = 2, V_2 = 0 \\ V_{n+2} = 2V_n + V_{n+1} \,;\, n \geq 3 \end{cases}$$

1. Calculer U_1, U_2, U_4, V_3 et V_4

3. Suites majorées - minorées - bornées

Définition

1. Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite **majorée** si : $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in I) \quad U_n \leq M$.
2. Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite **minorée** si : $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in I) \quad m \leq U_n$.
3. Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple

1. Soit $(U_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par : $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$
   a. Déterminer le premier terme de la suite (U_n).
   b. Montrer que (U_n) est minorée par 0 et majorée par $\sqrt{2}$.
2. Soit (V_n) la suite définie par : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n - 1 \,;\, n \geq 1 \end{cases}$

   Montrer, par récurrence, que (U_n) est minorée par -2.

Corollaire

Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est bornée s'il existe un réel k tel que :

$$\forall n \in I, \quad |U_n| \leq k$$

4. Suites monotones

Définition

1. Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite **croissante** si : $(\forall n \in I) \quad U_n \leq U_{n+1}$.
2. Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite **décroissante** si : $(\forall n \in I) \quad U_n \leq U_{n+1}$.
3. Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite **constante** si : $(\forall n \in I), \quad U_n = U_{n+1}$.

Exemple

Étudier la monotonie de chacune des suites $(U_n)_{n\geq 0}$, $(V_n)_{n\geq 1}$ et $(W_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$U_n = \frac{2n-1}{n+4} \quad ; \quad V_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad ; \quad \begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = W_n - 3n \, ; \, n \geq 1 \end{cases}$$

II. Suites arithmétiques

1. Définition

Définition

Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout entier n de I :

$$U_{n+1} = U_n + r$$

Le réel r est appelé le **raison** de la suite $(U_n)_{n\in I}$.

Exemple

Indiquer parmi les suites définies ci-dessous celles qui sont des suites arithmétiques :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3n + 5$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = n^2$.
3. $\begin{cases} W_0 = -1 \\ W_n - W_{n+1} + 3 = 0 \, ; \, n \geq 1 \end{cases}$

2. Relation entre deux termes

Propriété

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r.

$$\forall (n,p) \in I^2, \; U_n = U_p + (n-p)r$$

Exemple

1. Soit $(U_n)_{n>1}$ une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $U_2 = -3$. Déterminer U_n le terme général de la suite (U_n).
2. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Déterminer son raison r, sachant que $U_0 = 5$ et

. $U_8 = -16$.

3. Somme des termes consécutifs

Propriété

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de premier terme U_{n_0}.

1. La somme des termes consécutifs de la suite $(U_n)_{n\in I}$ compris entre le rang n_0 et le rang n est égale à :

$$U_{n_0} + U_{n_0+1} + \cdots + +U_n = \frac{n - n_0 + 1}{2}(U_{n_0} + U_n)$$

2. En particulier, si $n_0 = 0$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} U_i = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$

Exemple

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5;\ n \geq 1 \end{cases}$

1. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $U_n - 2 = 5n$.
2. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n-1} U_i = U_1 + \cdots + U_{n-1}$.

III. Suites géométriques

1. Définition

Définition

Une suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout entier n de I :

$$U_{n+1} = q \times U_n$$

Le réel q est appelé le **raison** de la suite $(U_n)_{n\in I}$.

Exemple

Indiquer parmi les suites définies ci-dessous celles qui sont des suites géométriques :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{3}{2^n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = -3n$.
3. $\begin{cases} W_0 = -1 \\ 2W_n - 3W_{n+1} = 0\,;\ n \geq 1 \end{cases}$

2. Relation entre deux termes

Propriété

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite géométrique de raison r.

$$\forall (n,p) \in I^2,\ U_n = U_p \times q^{(n-p)}$$

Exemple

1. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison $q = \sqrt{3}$ et de premier terme $U_0 = 1$. Déterminer U_n le terme général de la suite (U_n).
2. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométriques. Déterminer son raison q, sachant que $U_4 = \frac{1}{27}$ et $U_1 = 1$.

3. Somme des termes consécutifs

Propriété

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme U_{n_0}.

1. Si $q \neq 1$, alors sa somme des termes consécutifs de la suite $(U_n)_{n\in I}$ compris entre le rang n_0 et le rang n est égale à :

$$U_{n_0} + U_{n_0+1} + \cdots + U_n = U_{n_0}\frac{1 - q^{(n-n_0+1)}}{1-q}$$

2. Si $q = 1$, alors on obtient : $U_{n_0} + U_{n_0+1} + \cdots + +U_n = (n - n_0 + 1)U_{n_0}$.

Remarque

En particulier, si $n_0 = 0$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} U_i = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = U_0 \frac{1-q^{(n+1)}}{1-q}$.

Exemple

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{2}{3}\,;\ n \geq 1 \end{cases}$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n = U_n + \frac{4}{3}$

1. Montrer que (V_n) est suite géométrique et préciser son raison et son premier terme.
2. Déduire, en fonction de n, l'expression de V_n, puis celle de U_n.
3. Calculer les deux sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=0}^{i=n} V_i = V_0 + \cdots + V_{n-1} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{i=0}^{i=n} U_i = U_0 + \cdots + U_n$$