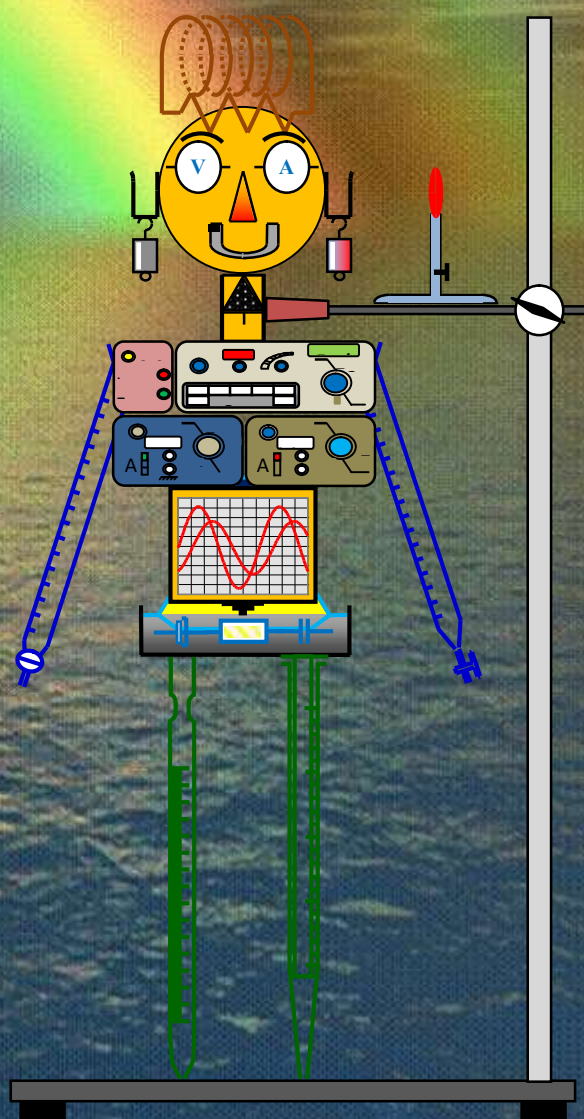


Baccalauréat
Section mathématiques

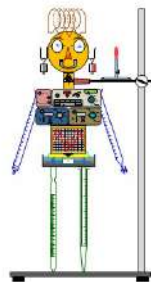
Physique et chimie

Cours
et
Exercices

Mustapha Ayed



Préambule



Je mets à la disposition des candidats au baccalauréat, section mathématiques, ce manuel de physique-chimie qui couvre tout le programme de terminale de la dite section.

Les élèves de chacune des autres sections scientifiques peuvent utiliser ce manuel dans la limite des chapitres communs au programme de la section mathématiques et à celui de leur section.

Le contenu de ce manuel est répertorié comme suit:

- **Le cours de physique - chimie que j'ai dispensé aux élèves des classes terminales du lycée Farhat Hached de Bizerte , conformément au programme officiel.**
- **Chaque leçon est suivie d'une rubrique « pour en savoir plus » dans laquelle j'ai repris d'une façon plus approfondie, à la limite du programme officiel (voir hors programme), quelques thèmes évoqués au cours de la leçon, de sorte que la curiosité scientifique des élèves accros de rigueur soit assouvie.**

Dans cette rubrique, rédigée dans l'esprit : « qui peut le plus, peut le moins », j'ai fait appel à des compétences non requises pour un élève moyen. Ce dernier peut l'omettre.

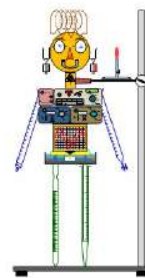
- **A la fin de chaque leçon, une série d'exercices et problèmes corrigés devrait aider le candidat à assimiler le cours, à évaluer sa maîtrise des compétences requises et de ce fait, à se familiariser avec les exigences de l'épreuve du baccalauréat.**

Je remercie tous ceux qui, d'une façon ou d'une autre, ont contribué à l'élaboration de ce manuel en m'encourageant à le finaliser.

Mustapha Ayed

Contenu

Physique



Evolution des systèmes :

- Le condensateur
- Le dipôle RC
- L'induction électromagnétique
- L'auto-induction
- Le dipôle RL
- Les oscillations électriques libres
- Les grandeurs sinusoïdales
- Les oscillations électriques forcées en régime sinusoïdal. La résonance d'intensité
- Les oscillations mécaniques libres
- Les oscillations mécaniques forcées en régime sinusoïdal. La résonance d'amplitude

Ondes :

- La propagation d'un ébranlement
- La propagation d'une onde sinusoïdale entretenue
- L'interaction onde-matière

Physique atomique et nucléaire :

- Le spectre atomique. La quantification des échanges d'énergie
- Le noyau atomique
- Les réactions nucléaires spontanées : la radioactivité
- Les réactions nucléaires provoquées

Chimie

Cinétique chimique :

- L'avancement d'une réaction
- La vitesse d'une réaction. Les facteurs cinétiques

Equilibre chimique :

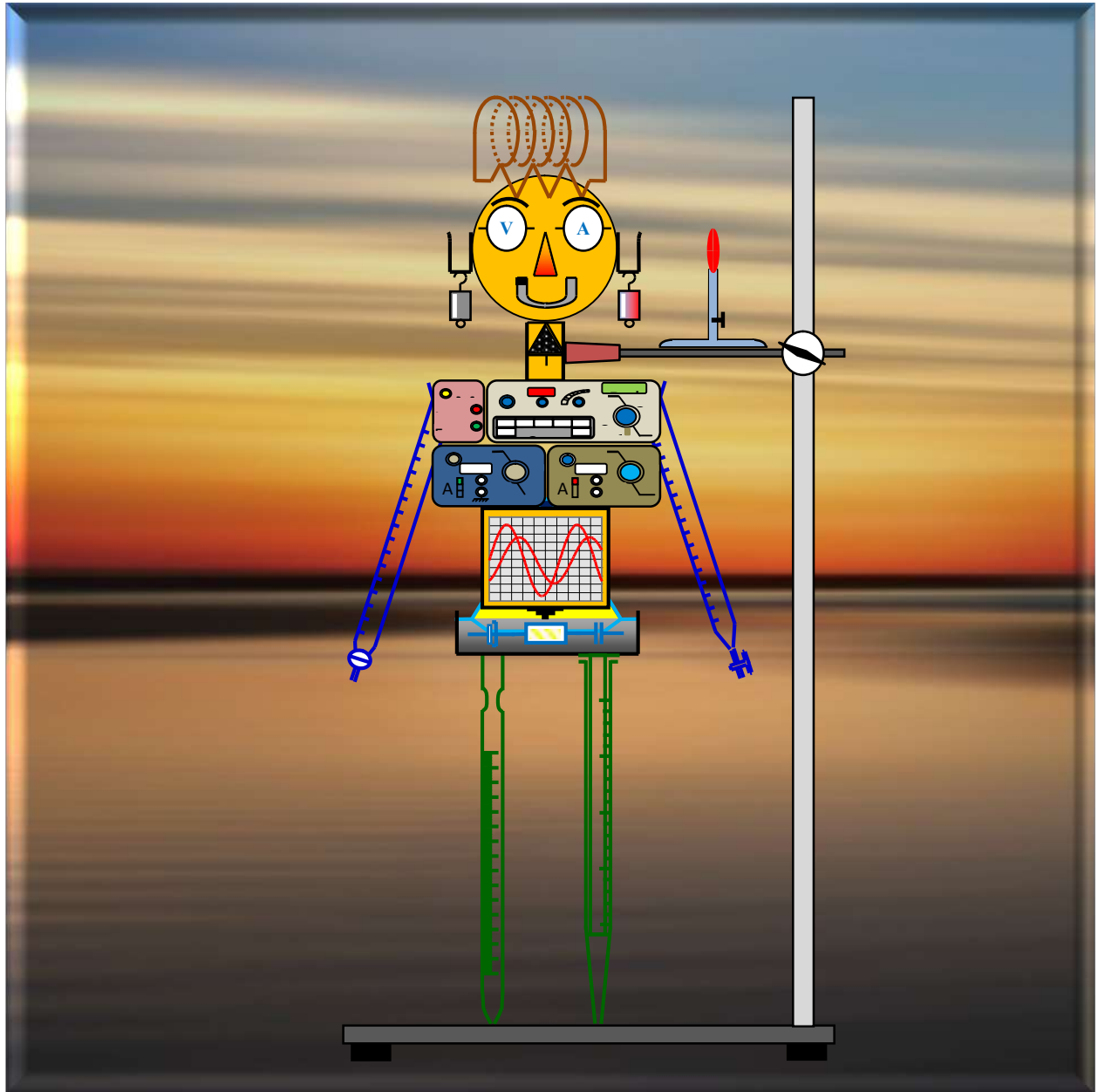
- Les équilibres chimiques
- La loi d'action de masse
- Les lois de déplacement des équilibres chimiques. La loi de modération

Réactions acide-base :

- Les solutions aqueuses d'acides et de bases
- Le pH des solutions aqueuses
- La variation du pH lors des dosages acide-base

Piles électrochimiques :

- Les piles électrochimiques
- Le potentiel standard d'un couple redox
- Les piles alcalines



Physique

LE CONDENSATEUR

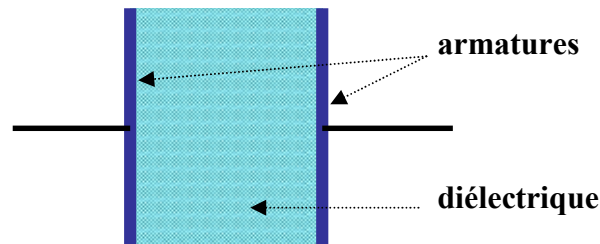
I / Définition et représentation symbolique :

Un condensateur est un dipôle électrique constitué par deux plaques conductrices séparées par un matériau isolant de très faible épaisseur.

Les plaques conductrices en regard sont appelées **armatures** du condensateur (elles sont généralement des lames métalliques).

Le matériau isolant est appelé **diélectrique** (il peut être de l'air, du papier, du verre, de la céramique...).

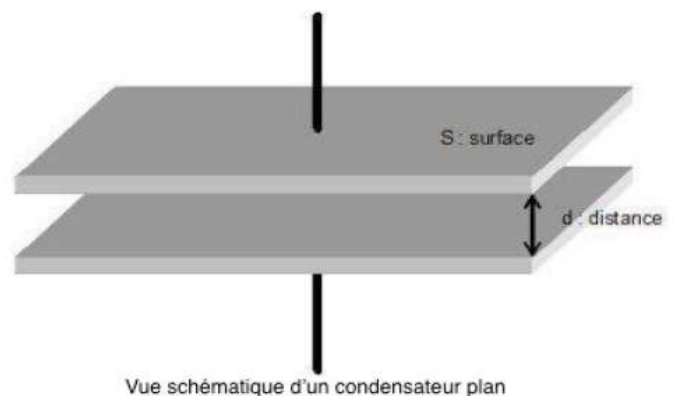
La représentation symbolique d'un condensateur est :



Remarques :

Les condensateurs, d'une grande variété de modèles et de formes, sont fortement utilisés dans les circuits électriques, électroniques et en électrotechnique.

- Si les armatures sont planes et parallèles, le condensateur est alors appelé **condensateur plan**.



II / Charge et décharge d'un condensateur :

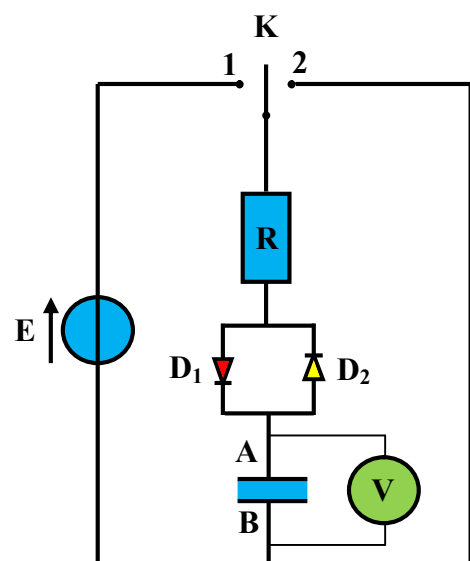
1⁰) Principe de fonctionnement d'un condensateur :

a - Expériences et observations :

On réalise le circuit électrique schématisé ci-contre :

Le générateur possède une f.é.m. E .

- 1^{ère} phase : **K en 2**
 - Aucune LED ne s'allume
 - V indique $U_{AB} = 0$
- 2^{ème} phase : **K en 1**
 - D_1 s'allume brièvement puis s'éteint
 - V indique alors une tension $U_{AB} = E$
- 3^{ème} phase : **on ouvre K et puis on referme sur 1**
 - Rien ne se passe
- 4^{ème} phase : **K en 2**
 - D_2 s'allume brièvement puis s'éteint
 - V indique alors une tension $U_{AB} = 0$



b - Interprétation :

- **1^{ère} phase :**

Aucun courant ne circule dans le circuit.

- **2^{ème} phase :**

- Un courant est passé dans D_1 , donc une circulation de charges électriques a lieu. Mais ces charges ne peuvent pas traverser le diélectrique du condensateur !
- Les électrons issus de la borne (-) du générateur se condensent sur l'armature B du condensateur et en même temps, un même nombre d'électrons quitte l'armature A du condensateur pour rejoindre la borne (+) du générateur.
- L'armature A porte alors une charge $q_A = +q$ et l'armature B porte une charge $q_B = -q$ ($q_A = -q_B$) :

Le condensateur **se charge**.

- Le phénomène cesse lorsque $U_{AB} = V_A - V_B = E$. On dit alors que le **condensateur est chargé**.
- Le courant de charge s'annule lorsque le condensateur est complètement chargé.

- **3^{ème} phase :**

Tant que $U_{AB} = E$, aucun courant ne circule dans le circuit et le condensateur reste chargé.

- **4^{ème} phase :**

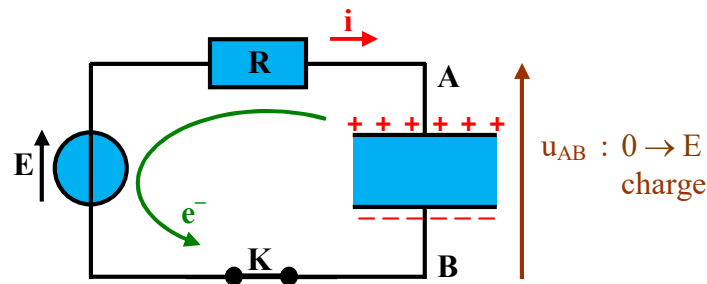
- Un courant est passé dans D_2 , donc une circulation de charges électriques a lieu.
- Les électrons accumulés sur l'armature B du condensateur se déplacent vers l'armature A à travers le résistor : Le condensateur **se décharge**.
- Le phénomène cesse lorsque $U_{AB} = V_A - V_B = 0$. On dit alors que le **condensateur est déchargé**.
- Le courant de décharge, de sens contraire à celui du courant de charge, s'annule lorsque le condensateur est complètement déchargé.

c - Conclusion :

- **Condensateur en circuit de charge :**

Il y a accumulation de charges électriques égales en valeur absolues et de signes contraires sur les armatures du condensateur (l'armature chargée positivement est celle qui est reliée à la borne (+) du générateur). Pendant la charge, un **courant transitoire** de charge parcourt le circuit, il s'annule lorsque le condensateur est complètement chargé.

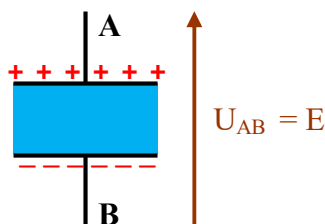
La tension u_{AB} augmente au cours de la charge.



- **Condensateur isolé :**

La charge électrique reste emmagasinée sur les armatures du condensateur.

La tension $U_{AB} = E = \text{constante}$.

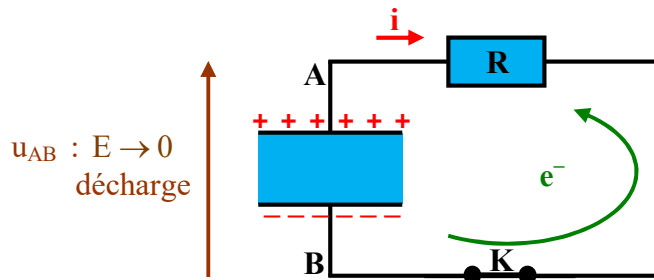


- **Condensateur en circuit de décharge :**

Il y a un débit de charges électriques à travers le résistor.

Pendant la décharge, un **courant transitoire** de décharge parcourt le circuit, il s'annule lorsque le condensateur est complètement déchargé.

La tension u_{AB} diminue au cours de la décharge.



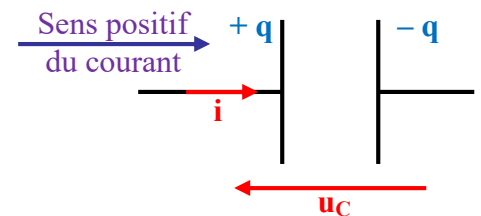
2⁰) Relation entre la charge q du condensateur et l'intensité i du courant :

a - Algébrisation de l'intensité du courant :

Dans la « convention récepteur », la tension u_C aux bornes du condensateur est opposée à l'orientation du courant.

On choisit **arbitrairement** un sens positif du courant.

L'intensité i du courant sera comptée **positive** ($i > 0$) si le courant circule dans **le sens positif choisi** et elle sera comptée négative ($i < 0$) si le courant circule dans le sens contraire.



b - Charge d'un condensateur :

Par convention, la charge q d'un condensateur est la charge de l'armature vers laquelle **pointe le sens positif** du courant.

c - Relation entre i et q en régime transitoire :

L'intensité du courant dans un circuit mesure le débit de charge à travers ce circuit.

Soit Δq la variation de la charge q du condensateur pendant une durée Δt , l'intensité instantanée $i(t)$ du courant est alors :

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

L'intensité $i(t)$ du courant est la dérivée par rapport au temps de la charge du condensateur.

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

Remarques :

Au cours de la charge, $q(t)$ croît alors $\frac{dq}{dt} > 0$ donc $i(t)$ est dans le sens positif ($i > 0$).

Au cours de la décharge, $q(t)$ décroît alors $\frac{dq}{dt} < 0$ donc $i(t)$ est dans le sens contraire du sens positif ($i < 0$).

III / Capacité d'un condensateur :

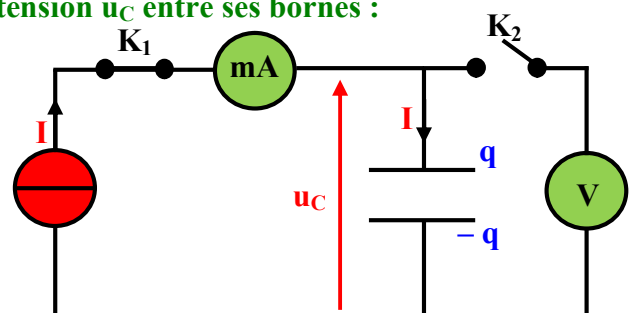
1⁰) Relation entre la charge q d'un condensateur et la tension u_C entre ses bornes :

a - Expérience et mesures :

Réalisons le circuit électrique schématisé ci-contre :

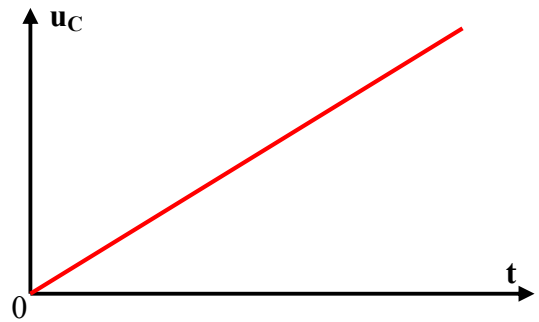
Le générateur de courant possède un débit constant de charges électriques.

Le condensateur étant **initialement déchargé**, on ferme K_1 pendant une durée t . On ouvre K_1 et on ferme K_2 pour mesurer la tension aux bornes du condensateur.



On répète l'opération pour différentes durées t :

t (s)	0	10	20	30
u_C (V)	0			
$\frac{u_C}{t}$ (V.s ⁻¹)				



b - Constatation :

On remarque que $\frac{u_C}{t} = \text{constante}$

→ la tension u_C est proportionnelle à la durée de charge t . On peut alors écrire :

$$u_C(t) = K.t \text{ où } K \text{ est une constante qui dépend du condensateur.}$$

c - Exploitation :

Soit I l'intensité du courant débité par la source de courant constant :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = I \text{ constante} \rightarrow q(t) = I.t + q_0. \text{ A } t = 0, q(0) = 0 \rightarrow q_0 = 0 \text{ il vient alors que : } q(t) = I.t.$$

$$\text{On a alors : } \begin{cases} q(t) = I.t \\ u_C(t) = K.t \end{cases} \rightarrow \frac{q}{u_C} = \frac{I}{K} \text{ où } I \text{ et } K \text{ sont des constantes}$$

Pour un condensateur, le rapport $\frac{q}{u_C}$ est constant. On le note C .

$$C = \frac{q}{u_C}$$

2⁰) Capacité d'un condensateur :

La charge d'un condensateur est proportionnelle à la tension appliquée entre ses armatures.

Le coefficient de proportionnalité, positif, est appelé capacité du condensateur. On la note C .

$$C = \frac{q}{u_C} \rightarrow q = C.u_C$$

Remarques :

- La capacité d'un condensateur traduit son aptitude, sous une tension donnée, à emmagasiner de la charge électrique.
- C ne dépend que des caractéristiques géométriques du condensateur et de la nature du diélectrique.

3⁰) Unité de la capacité :

Dans le S.I, la capacité s'exprime en farad (F)

$$C(F) = \frac{q(C)}{u_C(V)}$$

Le farad est la capacité d'un condensateur qui, sous une tension de 1 V, prend une charge de 1 C.

Remarque : le farad est une unité gigantesque, on utilise alors ses sous multiples :

$$\text{Le micro Farad : } 1\mu F = 10^{-6} F$$

$$\text{Le nano Farad : } 1nF = 10^{-9} F$$

$$\text{Le pico farad : } 1pF = 10^{-12} F$$

4⁰) Capacité d'un condensateur plan :

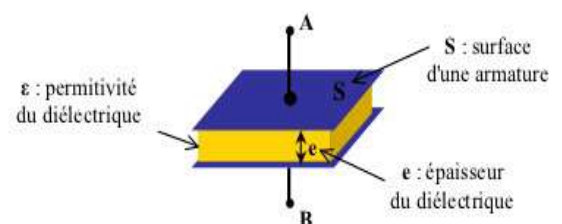
La capacité d'un condensateur plan est donnée par la relation :

$$C = \epsilon \frac{S}{e}$$

S : surface de la plus petite armature en regard (m²)

e : épaisseur du diélectrique (écartement des armatures) (m)

ϵ : Constante qui ne dépend que de la nature du diélectrique appelée **permittivité absolue du diélectrique**.



Remarques :

- Le vide a une permittivité absolue : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.
- La permittivité absolue de l'air est pratiquement égale à celle du vide.
- Pour un diélectrique, on définit sa permittivité relative ϵ_r par :

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \longrightarrow \epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 ; \quad \epsilon_r \geq 1 \text{ sans unité.}$$

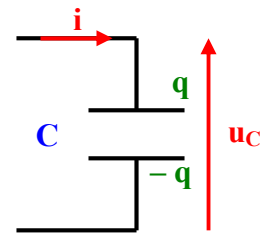
Exemples :

Diélectrique	air	téflon	mica
ϵ_r	1	2	7

5⁰) Relation entre l'intensité i du courant et la tension u_C aux bornes du condensateur :

On a $i = \frac{dq}{dt}$, or $q = C \cdot u_C$, il vient alors que :

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$



Conséquence :

Si la tension $u_C = \text{constante} \rightarrow \frac{du_C}{dt} = 0$ et par conséquent $i = 0$.

En régime **continu**, un condensateur **ne laisse pas** passer le courant électrique.

IV / tension de service d'un condensateur :

Au-delà d'une certaine tension (tension maximale d'isolement où tension de claquage) une étincelle peut jaillir entre les armatures qui détruit le diélectrique.

On dit alors que le condensateur est claqué.

La faculté d'un matériau isolant de résister au claquage est appelée **rigidité diélectrique**.

Pour éviter la détérioration du condensateur, on l'utilise sous une **tension de service** (tension nominale) nettement inférieure à la **tension de claquage**.

Remarque : La tension de service et parfois la tension de claquage sont indiquées par le constructeur.



V / Energie électrostatique stockée par un condensateur :

1⁰) Mise en évidence :

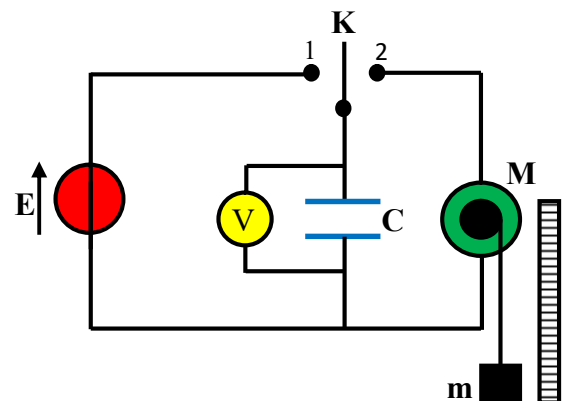
a - Expérience :

Réalisons le circuit électrique schématisé ci-contre :

- K en 1 : Le condensateur, de capacité C , est chargé par le générateur de f é m E (supportée par le moteur M).

Le voltmètre indique une tension $U_C = E$.

- K en 2 : Le moteur M est actionné. La surcharge m , reliée par un fil au moteur et qui pend verticalement, est remontée d'une hauteur h .



b - Interprétation :

- K en 1 : Le condensateur stocke de l'énergie au cours de sa charge.
- K en 2 : Le moteur M tourne donc il reçoit de l'énergie de la part du condensateur au cours de sa décharge. Au cours de sa charge, un condensateur emmagasine de l'énergie électrostatique (où énergie potentielle électrique) qu'il peut restituer au cours de sa décharge sous différentes formes (thermique dans un résistor, cinétique dans un moteur ...).

2⁰) Expression de l'énergie électrostatique :

Un condensateur de capacité C , qui maintient une tension u_C entre ses bornes, emmagasine une énergie électrostatique E_C telle que :

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2$$

Remarques :

- D'après la relation $q = C \cdot u_C$, on peut écrire : $E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot u_C$
- La capacité C caractérise l'aptitude d'un condensateur à emmagasiner de l'énergie électrostatique.
- La relation $E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2$ implique que la tension u_C aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité.

Application :

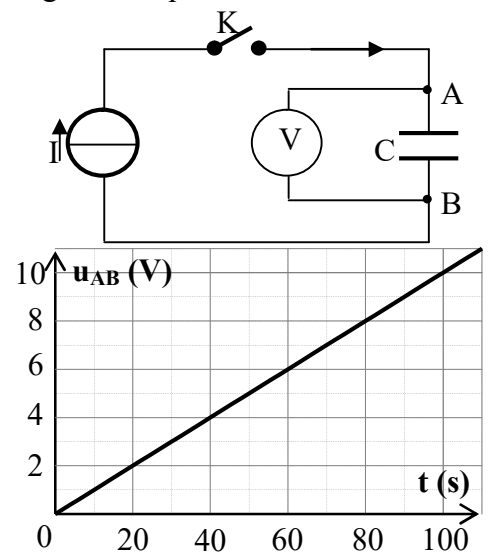
Pour déterminer la capacité C d'un condensateur, on peut utiliser le montage électrique schématisé ci-contre. Le générateur débite un courant d'intensité constante $I = 50 \mu A$.

Le condensateur est initialement déchargé. A $t = 0$, on ferme K et on relève la tension u_{AB} aux bornes du condensateur à différents instants t . On obtient le graphe ci-dessous.

- Exprimer la charge q du condensateur en fonction de I et t .
- En déduire l'expression de u_{AB} en fonction de I , C et t .
- En exploitant le graphe, déterminer la valeur de la capacité C du condensateur utilisé.

2⁰) Le condensateur ne peut supporter qu'une tension $u_{AB} \leq 16 V$.

- Calculer l'énergie maximale $E_{C_{max}}$ que peut emmagasiner le condensateur. A quel instant t_{max} est-elle atteinte ?
 - Si le courant débité par le générateur avait une intensité $I' = 2I$, quelle serait la durée de charge t'_{max} à ne pas dépasser ?
- Que se passera-t-il si on chargeait le condensateur pendant une durée $t' > t'_{max}$?



Réponse :

1⁰) a - Le générateur débite un courant d'intensité constante : $i(t) = \frac{dq}{dt} = I$ constante $\rightarrow q(t) = I \cdot t + q_0$.

A $t = 0$, $q(0) = 0 \rightarrow q_0 = 0$ il vient alors que : $q(t) = I \cdot t$

b - On a : $u_{AB} = \frac{q}{C} \rightarrow u_{AB} = \frac{I}{C} \cdot t$

c - Graphiquement, la courbe $u_{AB} = f(t)$ est une droite linéaire :

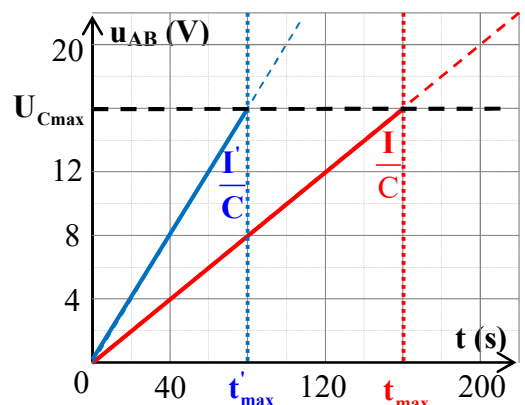
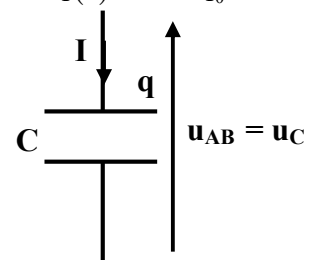
$u_{AB} = a \cdot t$ avec $a = \frac{10-0}{100-0}$ et $a = 0,1 \text{ Vs}^{-1}$.

$$\begin{cases} u_{AB_{th}} = \frac{I}{C} \cdot t \\ u_{AB_{exp}} = a \cdot t \end{cases} \xrightarrow{\text{Par identification}} a = \frac{I}{C} \text{ et } C = \frac{I}{a}$$

A.N : $C = \frac{50 \cdot 10^{-6}}{0,1}$ et $C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ($C = 500 \mu\text{F}$).

2⁰) a - $E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_{AB}^2 \rightarrow E_{C_{max}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{AB_{max}}^2$.

A.N : $E_{C_{max}} = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 10^{-6} \cdot (16)^2$ et $E_{C_{max}} = 64 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.



On a : $u_{AB} = 0,1.t \rightarrow t_{\max} = \frac{U_{AB_{\max}}}{0,1}$.

A.N : $t_{\max} = \frac{16}{0,1}$ et $t_{\max} = 160$ s .

b - $U_{AB_{\max}} = \frac{I'}{C} . t'_{\max} = \frac{I}{C} . t_{\max} \rightarrow t'_{\max} = \frac{I}{I'} . t_{\max} \xrightarrow{I'=2I} t'_{\max} = \frac{t_{\max}}{2}$.

A.N : $t'_{\max} = \frac{160}{2}$ et $t'_{\max} = 80$ s .

Si $t' \succ t'_{\max}$ il y a risque de claquage du condensateur.

Pour en savoir plus

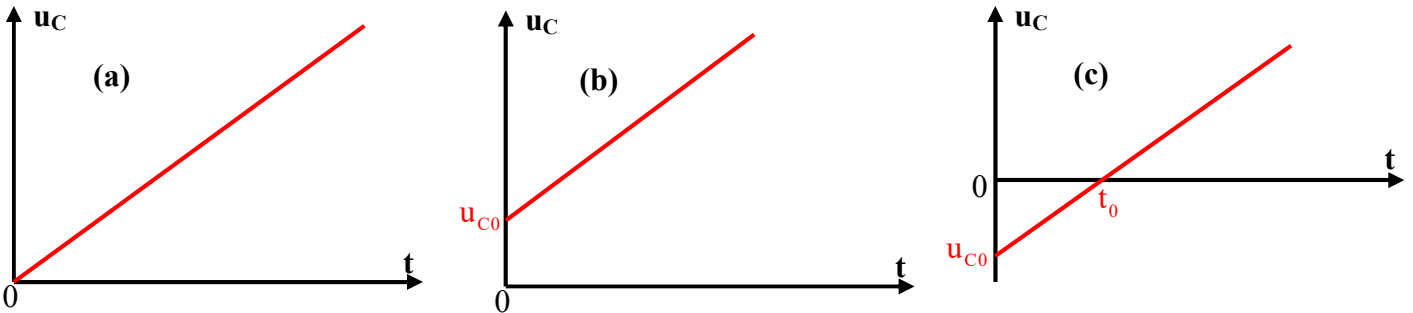
1⁰) Charge d'un condensateur à l'aide d'une source de courant :

Soit I l'intensité du courant débité par la source de courant constant :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = I \text{ constante} \rightarrow q(t) = I.t + q_0.$$

$$u_c(t) = \frac{q(t)}{C} \rightarrow u_c(t) = \frac{I}{C}.t + \frac{q_0}{C} \xrightarrow{\frac{q_0}{C} = u_c(0) = u_{c0}} u_c(t) = \frac{I}{C}.t + u_{c0}.$$

On distingue trois cas de figure :



- Cas (a) : $u_{c0} = 0$ Le condensateur est initialement déchargé. La charge initiale est nulle.

$$u_c(t) = K.t \text{ avec } K = \frac{I}{C}$$

- Cas (b) : $u_{c0} > 0$ Le condensateur est initialement chargé. La charge initiale est positive.

$$u_c(t) = K.t + u_{c0} \text{ avec } K = \frac{I}{C}$$

- Cas (c) : $u_{c0} < 0$ Le condensateur est initialement chargé. La charge initiale est négative.

$$u_c(t) = K.t + u_{c0} \text{ avec } K = \frac{I}{C}$$

Il existe dans ce cas un instant t_0 tel que $u_c(t_0) = 0 \rightarrow t_0 = -\frac{u_{c0}.C}{I}$

Pour $t \geq t_0$, la charge change de signe.

Remarque :

La durée de charge est limitée à $t_{\max}$, temps pour lequel la tension aux bornes du condensateur atteint la

valeur maximale $U_{C\max}$ que peut supporter le condensateur (tension de claquage) : $t_{\max} = \frac{(U_{C\max} - u_{c0}).C}{I}$.

2⁰) Energie électrostatique stockée par un condensateur :

A chaque instant, la puissance électrique reçue par le condensateur au cours de sa charge est $p(t) = u_c.i$

Pendant une durée dt , l'énergie emmagasinée par le condensateur est :

$$dE_c = p(t).dt \rightarrow dE_c = u_c.i.dt \xrightarrow[i = \frac{dq}{dt}]{q = C.u_c} dE_c = u_c.C.du_c \text{ et } dE_c = C.u_c.du_c$$

L'énergie électrostatique stockée par le condensateur est :

$$E_c = \int dE_c \rightarrow E_c = \int C.u_c.du_c = C.\int u_c.du_c \text{ et } E_c = \frac{1}{2}.C.u_c^2 + K$$

Si le condensateur est déchargé alors $u_c = 0$ et $E_c = 0 \rightarrow K = 0$.

Il vient alors que : $E_c = \frac{1}{2}.C.u_c^2$.

Applications

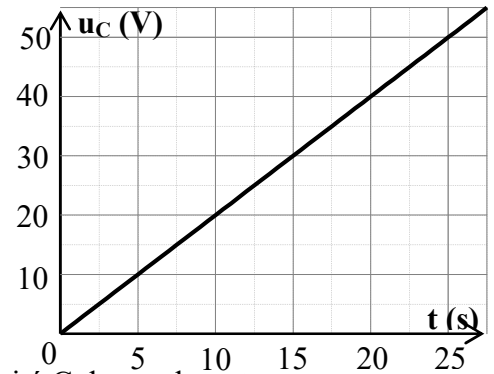
Exercice 1 :

Un condensateur porte les indications suivantes : 500 μF , 150 V.

1⁰) Que représente chacune de ces indications ?

2⁰) Le condensateur étant préalablement déchargé, on le charge en utilisant un générateur de courant délivrant un courant d'intensité constante $I = 1 \text{ mA}$.

Le graphe ci-contre donne l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur au cours du temps :



a - Montrer que $u_c = \frac{I}{C} \cdot t$.

b - En exploitant le graphe $u_c = f(t)$, déterminer la valeur de la capacité C du condensateur.

c - Quelle est la durée maximale t_{max} pendant laquelle on peut charger le condensateur sans risquer de le faire claquer ?

Réponse :

1⁰) L'indication 500 μF représente la capacité du condensateur.

L'indication 150 V représente la tension de service du condensateur.

2⁰) a - $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_c} i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$

or $i = \text{constante} = I \rightarrow \frac{du_c}{dt} = \frac{I}{C} = \text{constante} \rightarrow u_c(t) = \frac{I}{C} \cdot t + u_{c0}$.

A $t = 0$, on a : $u_c(0) = 0 \rightarrow u_{c0} = 0$ et $u_c = \frac{I}{C} \cdot t$.

b - Graphiquement $u_c = f(t)$ est une droite linéaire de pente $a = \frac{40 - 20}{20 - 0} = 2 \text{ V.s}^{-1}$.

$u_c = \frac{I}{C} \cdot t = a \cdot t \rightarrow a = \frac{I}{C}$ et $C = \frac{I}{a}$

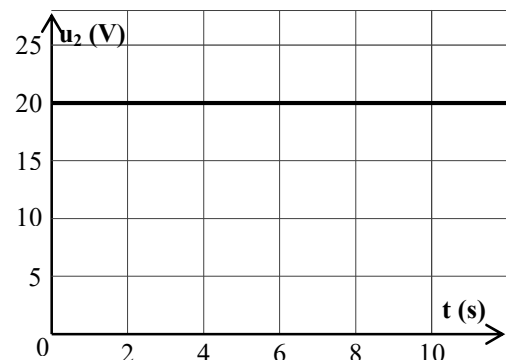
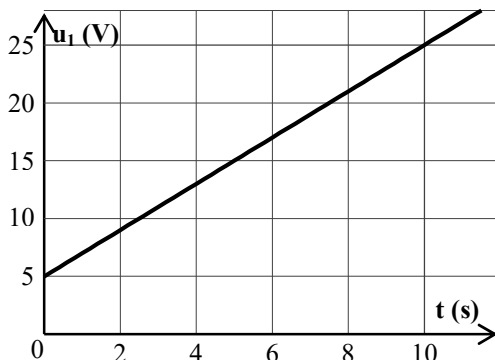
AN : $C = \frac{10^{-3}}{2}$ et $C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ou $C = 500 \mu\text{F}$.

c - $U_{C\text{max}} = a \cdot t_{\text{max}} \rightarrow t_{\text{max}} = \frac{U_{C\text{max}}}{a}$. A.N : $t_{\text{max}} = \frac{150}{2}$ et $t_{\text{max}} = 75 \text{ s}$.

Exercice 2 :

On dispose de deux dipôles électriques D_1 et D_2 , pouvant être chacun soit un résistor de résistance R ou un condensateur de capacité C . Pour identifier ces deux dipôles, on les branche en série, chacun à la fois, à un générateur de courant débitant un courant constant d'intensité $I = 1 \text{ mA}$.

La fermeture du circuit étant prise comme origine du temps, on donne ci-dessous l'évolution temporelle des tensions u_1 et u_2 respectivement aux bornes des dipôles D_1 et D_2 :



1⁰) a - Pourquoi peut-on affirmer que le dipôle D_2 est le dipôle résistor ?

b - D'après la courbe $u_2 = f(t)$, déterminer la valeur de la résistance R du résistor.

2⁰) a - Le condensateur est-il initialement déchargé ? Justifier la réponse.

b - D'après la courbe $u_1 = f(t)$, montrer que la valeur de la capacité du condensateur est $C = 500 \mu F$.

c - Calculer l'énergie électrostatique $E_C(0)$ initialement emmagasinée par le condensateur.

3⁰) Peut-on laisser le condensateur se charger ainsi indéfiniment ? Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰) a - La tension u aux bornes d'un dipôle résistor parcouru par un courant d'intensité i s'écrit : $u = R.i$. L'intensité I étant constante, u sera indépendante du temps. Ceci est vérifié par la courbe $u_2 = f(t)$. On en déduit que le dipôle D_2 est un dipôle résistor.

b - On a : $U = R.I \rightarrow R = \frac{U}{I}$. AN : $R = \frac{20}{10^{-3}}$ et $R = 2.10^4 \Omega$ ou $R = 20 K\Omega$.

2⁰) a - A $t = 0$, on a : $u_C(0) \neq 0$ or $u_C = \frac{q}{C} \rightarrow q(0) \neq 0$. Le condensateur n'est pas initialement déchargé.

b - $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C.u_C} i = C. \frac{du_C}{dt}$

$i = \text{constante} = I \rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{I}{C} = \text{constante} \rightarrow u_C(t) = \frac{I}{C}.t + u_{C0}$ droite affine de pente $a = \frac{I}{C}$.

Graphiquement : $a = \frac{25-20}{10-0} = 2 \text{ V.s}^{-1}$.

$a = \frac{I}{C} \rightarrow C = \frac{I}{a}$. AN : $C = \frac{10^{-3}}{2}$ et $C = 500.10^{-6} \text{ F}$ ou $C = 500 \mu F$.

c - $E_C(0) = \frac{1}{2}.C.u_C^2(0)$. AN : $E_C(0) = \frac{1}{2}.500.10^{-6}.(5)^2$ et $E_C(0) = 6,25.10^{-3} \text{ J}$.

3⁰) Si on charge le condensateur pendant longtemps, la tension u_C entre ses bornes peut dépasser la tension de service et par conséquent le condensateur risque de claquer (si u_C atteint la tension de claquage du condensateur).

Exercice 3 :

On charge un condensateur à l'aide d'un générateur de courant qui délivre une intensité de courant constante $I = 1 \text{ mA}$, selon le montage ci-contre :

A la date $t = 0 \text{ s}$, on ferme l'interrupteur K et on enregistre, à l'aide d'un système informatique, l'évolution au cours du temps de la tension u_C aux bornes du condensateur.

Après traitement, on obtient le graphe ci-dessous :

1⁰) Le condensateur est-il initialement déchargé ? Justifier la réponse.

2⁰) Montrer que $u_C(t) = \frac{I}{C}.t$

3⁰) En exploitant le graphe de la fonction $u_C = f(t)$, trouver la valeur de la capacité C du condensateur.

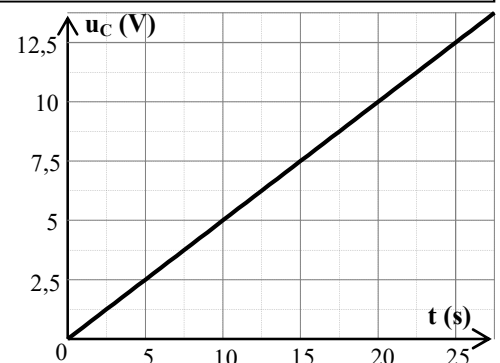
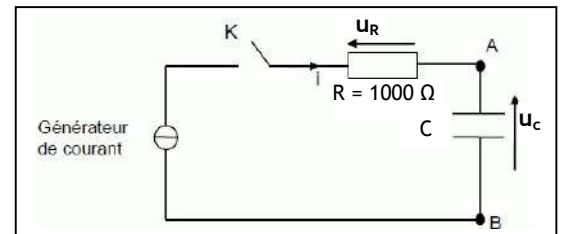
4⁰) Quelle est la durée maximale $t_{\max}$ pendant laquelle on peut charger le condensateur sans risquer de le détériorer sachant que sa tension de claquage est $U = 30 \text{ V}$?

5⁰) Calculer la valeur de l'énergie électrostatique E_C emmagasinée par le condensateur à l'instant $t_{\max}$.

Réponse :

1⁰) Graphiquement : $u_C(0) = 0 \xrightarrow{q=C.u_C} q(0) = 0$ donc le condensateur est initialement déchargé.

2⁰) $i(t) = \left(\frac{dq}{dt} \right)_t = I \xrightarrow{q=C.u_C} C. \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t = I \rightarrow \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t = \frac{I}{C}$ donc $u_C(t) = \frac{I}{C}.t + u_{C0}$



$$\text{A } t = 0, u_c(0) = 0 \rightarrow u_{c0} = 0 \text{ et } u_c(t) = \frac{I}{C} \cdot t.$$

3⁰) Graphiquement, $u_c = f(t)$ est une fonction linéaire

$$\rightarrow u_c(t) = a \cdot t \text{ avec } a = \frac{10-0}{20-0} \text{ et } a = 0,5 \text{ V.s}^{-1}.$$

$$\left. \begin{array}{l} u_c(t) = \frac{I}{C} \cdot t \\ u_c(t) = a \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \frac{I}{C} = a \text{ et } C = \frac{I}{a}. \text{ A.N: } C = \frac{10^{-3}}{0,5} \text{ et } C = 2 \cdot 10^{-3} \text{ F.}$$

$$4^0) u_c(t) = a \cdot t \rightarrow U = a \cdot t_{\max} \text{ et } t_{\max} = \frac{U}{a}. \text{ A.N: } t_{\max} = \frac{30}{0,5} \text{ et } t_{\max} = 60 \text{ s.}$$

$$5^0) E_c = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2 \xrightarrow{u_c(t_{\max})=U} E_c = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2. \text{ A.N: } E_c = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 30^2 \text{ et } E_c = 0,9 \text{ J.}$$

Exercice 4 :

On considère le circuit électrique schématisé ci-contre :

Le générateur débite un courant d'intensité constante $I = 0,5 \text{ mA}$.

Le condensateur, de capacité C , est initialement déchargé.

Le résistor a une résistance R

A $t = 0$, on ferme K .

Un dispositif approprié permet de suivre l'évolution de l'énergie électrique E_c emmagasinée par le condensateur en fonction du carré du temps. On obtient le graphe ci-contre :

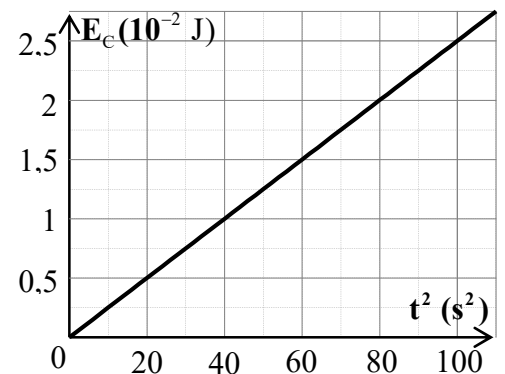
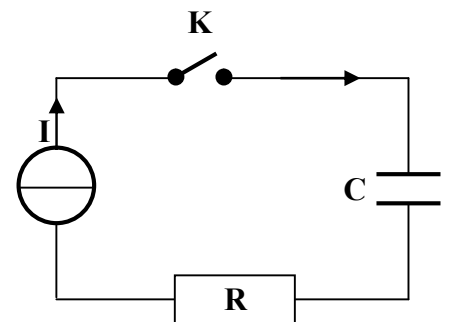
1⁰) a - Trouver graphiquement l'équation de $E_c = f(t^2)$

b - Montrer que : $E_c = \frac{I^2}{2C} \cdot t^2$.

c - En exploitant le graphe, déterminer la valeur de la capacité C du condensateur utilisé.

2⁰) Sachant qu'à l'instant $t = 10 \text{ s}$, l'énergie E_c emmagasinée par le condensateur est égale à l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule dans le résistor, calculer la valeur de R .

On rappelle qu'en courant continu : $E_{th} = R \cdot I^2 \cdot t$.



Réponse :

1⁰) a - $E_c = f(t^2)$ est une droite linéaire $\rightarrow E_c = A \cdot t^2$ avec $A = \frac{(2-0) \cdot 10^{-2}}{80-0}$ et $A = 25 \cdot 10^{-5} \text{ J.s}^{-2}$.

b - On a : $E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

$$\text{or } i(t) = \left(\frac{dq}{dt} \right)_t = I = \text{constante} \rightarrow q(t) = I \cdot t + q_0 \xrightarrow[q_0=0]{q(0)=0} q(t) = I \cdot t \text{ donc } E_c = \frac{I^2}{2C} \cdot t^2$$

$$\text{c - } \left. \begin{array}{l} E_c = A \cdot t^2 \\ E_c = \frac{I^2}{2C} \cdot t^2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{par identification: } A = \frac{I^2}{2C} \text{ et } C = \frac{I^2}{2A}. \text{ A.N: } C = \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-5}} \text{ et } C = 5 \cdot 10^{-4} \text{ F}$$

$$2^0) E_c(10) = E_{th}(10) \rightarrow \frac{I^2}{2C} \cdot (10^2) = R \cdot I^2 \cdot (10) \text{ et } R = \frac{10}{2C}. \text{ A.N: } R = \frac{10}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \text{ et } R = 10^4 \Omega.$$

LE DIPÔLE RC

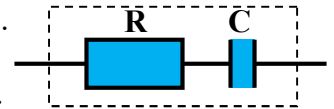
I / Introduction :

Soit un résistor de résistance R associé en série à un condensateur de capacité C .

Le dipôle ainsi constitué s'appelle dipôle RC.

On se propose d'étudier le comportement d'un dipôle RC en régime transitoire.

Le régime transitoire décrit l'état intermédiaire d'un circuit évoluant entre deux états permanents stables. Cette étude s'effectue en appliquant au circuit une excitation très brève appelée échelon de tension (ou tension d'Heaviside) au cours de laquelle la tension passe brusquement de la valeur 0 V à une valeur non nulle constante E (ou vice-versa).



II / Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension :

1⁰ Charge d'un condensateur à travers un résistor :

a - Equation différentielle de réponse :

Considérons le circuit de charge schématisé ci-contre :

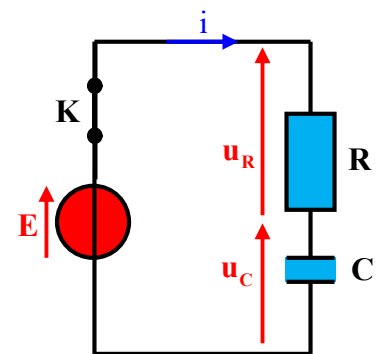
La charge du condensateur est **initialement nulle** : $u_C(0) = 0$.

La loi des mailles s'écrit : $u_R + u_C - E = 0$

On a : $u_R = R.i \rightarrow R.i + u_C = E$

Or $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C.u_C} i = C.\frac{du_C}{dt}$ donc $RC.\frac{du_C}{dt} + u_C = E$

On pose : $R.C = \tau$, il vient alors que : $\tau.\frac{du_C}{dt} + u_C = E$



b - Tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur :

On cherche la solution de l'équation différentielle sous la forme : $u_C(t) = Ae^{-\alpha.t} + B$ où A , B et α sont des constantes.

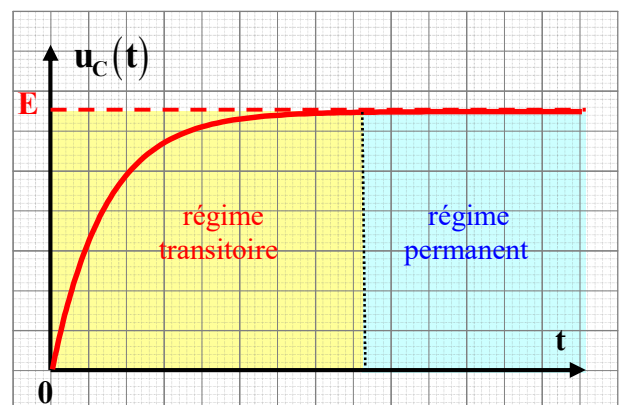
$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{du_C}{dt} &= -\alpha Ae^{-\alpha.t} \rightarrow -\alpha\tau Ae^{-\alpha.t} + Ae^{-\alpha.t} + B = E \\ &\rightarrow Ae^{-\alpha.t}(1 - \alpha\tau) + B = E \end{aligned}$$

Cette expression étant valable à chaque instant :

$$\rightarrow \begin{cases} B = E \\ 1 - \alpha\tau = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{\tau} \end{cases} \quad \text{donc } u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

$$\bullet \quad \text{D'autre part et à } t = 0, u_C(0) = 0 \text{ (condition initiale)} \rightarrow A + E = 0 \rightarrow A = -E$$

$$\text{donc } u_C(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E \text{ et enfin : } \boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \text{ avec } \tau = R.C$$



Remarques :

$$\bullet \quad \text{Autre mode de résolution de l'équation différentielle : } \tau.\frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

$$- \text{ On résout l'équation homogène (équation sans second membre) : } \tau.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\rightarrow \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{\tau}u_C \text{ dont les solutions sont de la forme : } u_{CH}(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } A = \text{constante}$$

- On cherche une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre :

La solution particulière doit avoir la même forme que le second membre de l'équation.

E étant constante, la solution particulière doit être $u_{C_p} = \text{constante}$

$$\rightarrow \tau \cdot \frac{du_{C_p}}{dt} + u_{C_p} = E \xrightarrow[\frac{du_{C_p}}{dt}=0]{u_{C_p}=\text{constante}} u_{C_p} = E$$

- La solution générale de l'équation différentielle est alors : $u_C(t) = u_{C_h}(t) + u_{C_p} \rightarrow u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + E$

- La valeur de A est déterminée à partir de la condition initiale $u_C(0) = 0 \rightarrow A + E = 0 \rightarrow A = -E$

donc $u_C(t) = -E e^{-\frac{t}{\tau}} + E$ et enfin : $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ avec $\tau = R.C$

• En sciences physique, on ne peut composer des grandeurs que lorsqu'elles sont de même nature.

Ainsi et dans l'équation : $\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$, puisque u_C est une tension et E est une tension, alors $\tau \cdot \frac{du_C}{dt}$ est forcément homogène à une tension. Par conséquent τ doit être homogène à un temps.

• Au cours de la charge du condensateur, la tension $u_C(t)$ entre ses bornes passe par deux phases :

- une première phase où $u_C(t)$ croît continuellement au cours du temps.

Le condensateur se charge : c'est le régime transitoire.

- une deuxième phase où $u_C(t)$ devient pratiquement constante et égale à E.

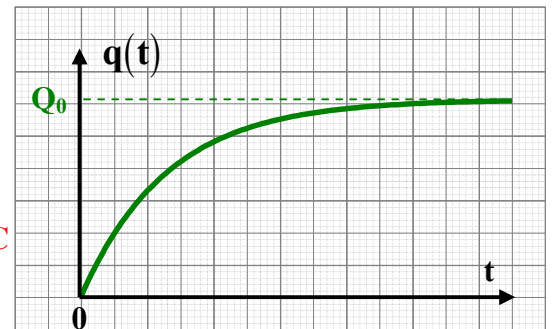
Le condensateur est pratiquement chargé : c'est le régime permanent pour lequel $U_{C_p} = E$.

c - Charge $q(t)$ du condensateur :

D'après la relation : $q(t) = C \cdot u_C(t)$, on écrit : $q(t) = C \cdot E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

On pose $Q_0 = C \cdot E$, Q_0 étant la charge maximale du condensateur,

il vient alors que : $q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ avec $Q_0 = C \cdot E$ et $\tau = R \cdot C$



Remarque :

$$\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E \xrightarrow[\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}]{u_C = \frac{q}{C}} \tau \cdot \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad \text{et} \quad \tau \cdot \frac{dq}{dt} + q = C \cdot E \xrightarrow{Q_0 = C \cdot E} \tau \cdot \frac{dq}{dt} + q = Q_0$$

C'est l'équation différentielle en $q(t)$ dont la solution est : $q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ avec $Q_0 = C \cdot E$ et $\tau = R \cdot C$.

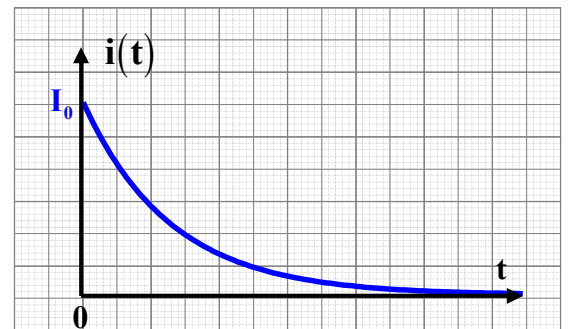
d - Intensité $i(t)$ du courant :

Sachant que $i(t) = \frac{dq}{dt}$, il vient que $i(t) = \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Sachant que $Q_0 = C \cdot E$ et $\tau = R \cdot C$, il vient que : $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

On pose $I_0 = \frac{E}{R}$, I_0 étant l'intensité maximale du courant,

il vient alors que : $i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $I_0 = \frac{E}{R}$ et $\tau = R \cdot C$



Remarque :

$$\text{D'après la loi des mailles, } u_R + u_C = E \xrightarrow{u_R = R \cdot i} R \cdot i + u_C = E \rightarrow R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\xrightarrow{i = C \cdot \frac{du_C}{dt}} R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad \text{et} \quad R \cdot C \cdot \frac{di}{dt} + i = 0 \xrightarrow{\tau = R \cdot C} \tau \cdot \frac{di}{dt} + i = 0$$

Cherchons la solution de l'équation différentielle en $i(t)$:

$$\tau \frac{di}{dt} + i = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{1}{\tau} i \text{ de solution } i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{A } t = 0, R i(0) + u_C(0) = E \xrightarrow{u_C(0)=0} i(0) = \frac{E}{R} \xrightarrow{i(0)=I_0} I_0 = \frac{E}{R}$$

il vient alors que : $i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $I_0 = \frac{E}{R}$ et $\tau = R.C$.

Remarque :

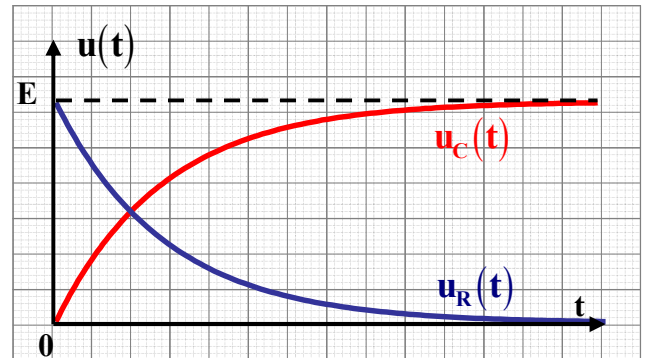
La courbe $i(t)$ présente une **discontinuité** en $t = 0$ correspondant à la fermeture du circuit de charge.

e - Remarque :

A chaque instant, on $u_R(t) + u_C(t) = E$

$$\rightarrow u_R(t) = E - u_C(t) = E - E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Au cours de la charge du condensateur : $u_R(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$



Remarque :

$$u_R(t) + u_C(t) = E \rightarrow \frac{du_R}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0 \xrightarrow{\substack{du_C = i \\ dt = \frac{u_R}{R}}} \frac{du_R}{dt} + \frac{1}{R.C} u_R = 0 \xrightarrow{\tau=R.C} \tau \frac{du_R}{dt} + u_R = 0$$

$$\text{A } t = 0, u_R(0) + u_C(0) = E \xrightarrow{u_C(0)=0} u_R(0) = E.$$

L'équation différentielle en $u_R(t)$ admet comme solution : $u_R(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = R.C$.

Application 1 :

Un dipôle RC constitué par un condensateur de capacité $C = 1000 \mu F$, monté en série avec un résistor de résistance R est alimenté par une tension continue E . Le condensateur est initialement déchargé.

La tension de charge du condensateur est : $u_C(t) = 10(1 - e^{-0,1,t})$ (V).

1⁰) a - A quoi correspond l'instant $t = 0$?

b - Sachant que $u_C(t)$ vérifie l'équation différentielle : $R.C \frac{du_C}{dt} + u_C = E$, déterminer les valeurs de R et de E .

2⁰) a - Calculer la valeur de l'instant t_m où la charge du condensateur atteint la moitié de sa valeur maximale.

b - Calculer la valeur de l'énergie électrique $E_C(t_m)$ emmagasinée par le condensateur à cet instant.

3⁰) Tracer l'allure de la variation de l'intensité du courant $i(t)$ au cours de la charge.

Réponse :

1⁰) a - A $t = 0$, $u_C(0) = 0$ donc $t = 0$ correspond à l'instant de fermeture du circuit.

$$\text{b - On a : } \frac{du_C}{dt} = -10(-0,1.e^{-0,1,t}) = e^{-0,1,t} \rightarrow R.C.e^{-0,1,t} + 10 - 10.e^{-0,1,t} = E \rightarrow (R.C - 10).e^{-0,1,t} + 10 = E$$

$$\text{cette expression doit être vérifiée à chaque instant} \rightarrow \begin{cases} E = 10 \text{ V} \\ R.C - 10 = 0 \rightarrow R.C = 10 \text{ et } R = \frac{10}{C} \end{cases}$$

$$\text{A.N : } R = \frac{10}{1000.10^{-6}} \text{ et } R = 10^4 \Omega \text{ (} R = 10 \text{ K}\Omega \text{)}$$

2⁰) a - En régime permanent : $U_{C_{\max}} = U_{C_p} \rightarrow U_{C_{\max}} = u_C(\infty)$ et $U_{C_{\max}} = E$,

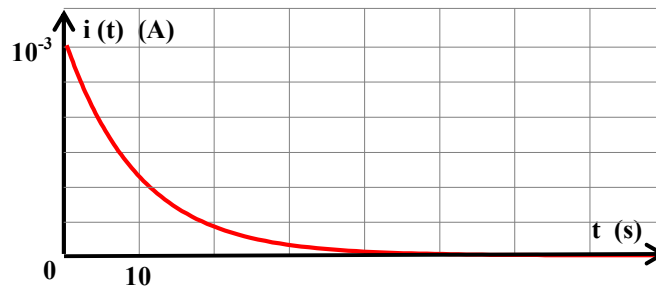
$$u_C(t_m) = \frac{E_{C_{\max}}}{2} \rightarrow E(1 - e^{-0,1 \cdot t_m}) = \frac{E}{2} \rightarrow 1 - e^{-0,1 \cdot t_m} = \frac{1}{2} \rightarrow e^{-0,1 \cdot t_m} = \frac{1}{2} \rightarrow -0,1 \cdot t_m = -\ln 2 \text{ et } t_m = \frac{\ln 2}{0,1}$$

$$\text{A.N : } t_m = \frac{\ln 2}{0,1} \text{ et } t_m = 6,93 \text{ s}$$

$$\text{b - } E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 \rightarrow E_C(t_m) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(t_m) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

$$\text{A.N : } E_C(t_m) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot (5)^2 \text{ et } E_C(t_m) = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$3^0) \text{ On a : } i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} \rightarrow i(t) = 10^{-3} e^{-0,1 \cdot t} \text{ (A)}$$



2⁰) Décharge d'un condensateur à travers un résistor :

a - Equation différentielle de réponse :

Considérons le circuit de décharge schématisé ci-contre :

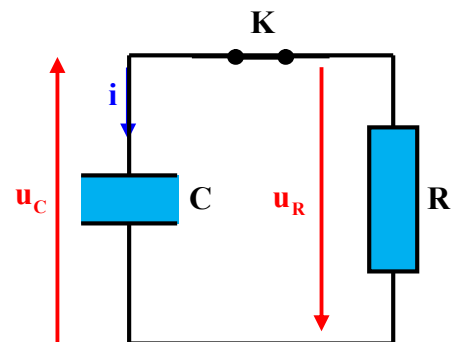
Le condensateur est initialement **chargé** : $u_C(0) = E$.

La loi des mailles s'écrit : $u_R + u_C = 0$

On a : $u_R = Ri \rightarrow Ri + u_C = 0$

Or $i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt} \rightarrow RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

On pose : $R \cdot C = \tau$, il vient alors que : $\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$



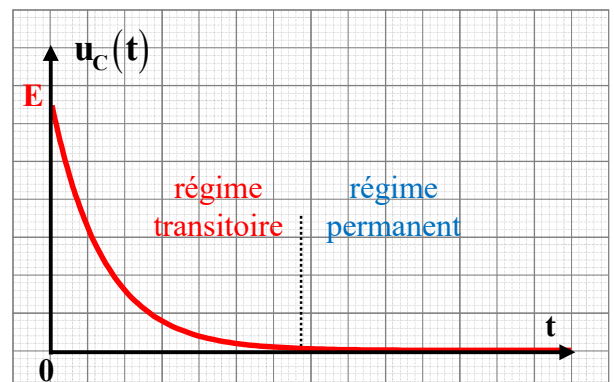
b - Tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur :

On cherche la solution de l'équation différentielle sous la forme: $u_C(t) = Ae^{-\alpha \cdot t} + B$ où A, B et α sont des constantes.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{du_C}{dt} &= -\alpha Ae^{-\alpha \cdot t} \rightarrow -\alpha \tau Ae^{-\alpha \cdot t} + Ae^{-\alpha \cdot t} + B = 0 \\ &\rightarrow Ae^{-\alpha \cdot t}(1 - \alpha \tau) + B = 0 \end{aligned}$$

Cette expression doit être vérifiée à chaque instant :

$$\rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ 1 - \alpha \tau = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{1}{\tau} \quad \text{donc : } u_C(t) = Ae^{\frac{t}{\tau}}$$



D'autre part et à $t = 0$, $u_C(0) = E \rightarrow A = E$ donc : $u_C(t) = Ee^{\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = R \cdot C$

Remarque :

Au cours de la décharge du condensateur, la tension $u_C(t)$ entre ses bornes passe par deux phases :

- une première phase où $u_C(t)$ décroît continuellement au cours du temps.

Le condensateur se décharge : c'est le régime transitoire.

- une deuxième phase où $u_C(t)$ devient pratiquement nulle.

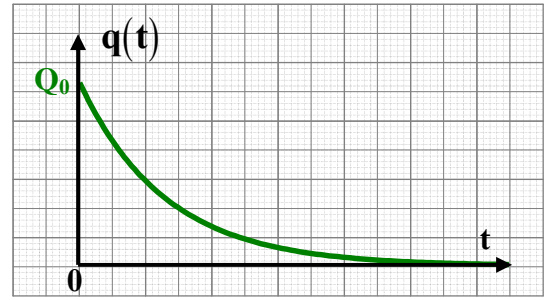
Le condensateur est pratiquement déchargé : c'est le régime permanent pour lequel $U_{C_p} = 0$.

c - Charge $q(t)$ du condensateur :

D'après la relation : $q(t) = C.u_c(t)$, on écrit : $q(t) = C.Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

On pose $Q_0 = C.E$, Q_0 étant la charge maximale du condensateur,

il vient alors que : $q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $Q_0 = C.E$ et $\tau = R.C$



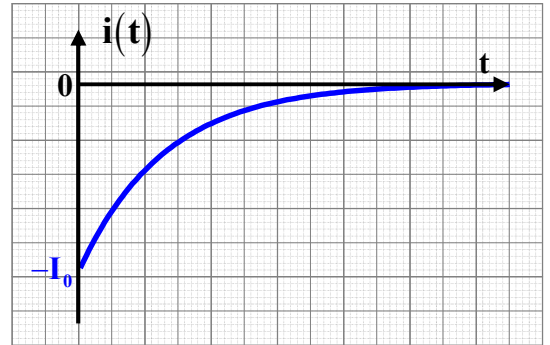
d - Intensité $i(t)$ du courant :

Sachant que $i = \frac{dq}{dt}$, il vient que $i(t) = -\frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Sachant que $Q_0 = C.E$ et $\tau = R.C$, il vient que : $i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

On pose $I_0 = \frac{E}{R}$, I_0 étant l'intensité maximale du courant,

il vient alors que : $i(t) = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $I_0 = \frac{E}{R}$ et $\tau = R.C$



Remarques :

La courbe $i(t)$ présente une **discontinuité** en $t = 0$ correspondant à la fermeture du circuit de décharge.

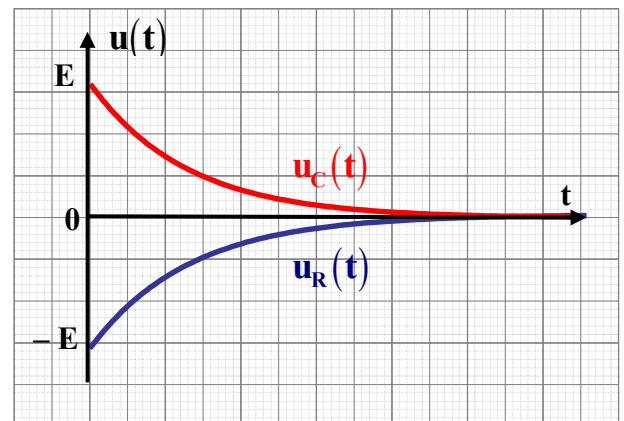
Le courant de décharge circule dans le **sens contraire** que celui de charge.

e - Remarque :

A chaque instant, on $u_R(t) + u_C(t) = 0$

$$\rightarrow u_R(t) = -u_C(t) \xrightarrow{u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}} u_R(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Au cours de la décharge du condensateur : $u_R(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$



Application 2 :

Un condensateur de capacité C , initialement chargé sous une tension constante E , est branché, à $t = 0$, aux bornes d'un résistor de résistance $R = 10 \text{ K}\Omega$.

L'intensité du courant de décharge est : $i(t) = -6.10^{-4}.e^{-0,2.t} \text{ (A)}$

1⁰) Faire un schéma du circuit en indiquant le sens positif du courant.

2⁰) Sachant que la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$R.C. \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

a - En déduire l'expression de l'équation différentielle gérant l'intensité du courant de décharge.

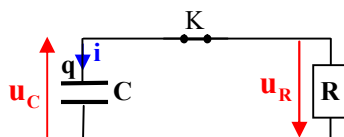
b - Déterminer les valeurs de C et de E .

3⁰) Calculer la valeur de l'énergie électrique $E_C(0)$ initialement emmagasinée par le condensateur.

4⁰) Tracer l'allure de la variation de la charge du condensateur $q(t)$ au cours de la décharge.

Réponse :

1⁰)



$$2^0) \text{ a - } R.C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \xrightarrow[u_c = \frac{q}{C}]{i = C \frac{du_c}{dt}} R.i + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0 \xrightarrow{i = \frac{dq}{dt}} R.C \frac{di}{dt} + i = 0$$

$$\text{b - On a : } \frac{di}{dt} = -6.10^{-4} \cdot (-0,2.e^{-0,2,t}) = 1,2.10^{-4} \cdot e^{-0,2,t} \rightarrow R.C.1,2.10^{-4} \cdot e^{-0,2,t} - 6.10^{-4} \cdot e^{-0,2,t} = 0$$

$$\rightarrow (1,2.R.C - 6) \cdot 10^{-4} \cdot e^{-0,2,t} = 0$$

$$\text{cette expression étant valable à chaque instant} \rightarrow 1,2.R.C - 6 = 0 \quad \text{et} \quad C = \frac{6}{1,2.R}.$$

$$\text{A.N : } C = \frac{6}{1,2.10^4} \quad \text{et} \quad C = 5.10^{-4} \text{ F } (C = 500 \mu\text{F}).$$

$$\text{d'autre part on a : } i(t) = C \frac{du_c}{dt} \rightarrow u_c = \frac{1}{C} \int i dt \rightarrow u_c(t) = \frac{3.10^{-3}}{500.10^{-6}} \cdot e^{-0,2,t} \quad \text{et} \quad u_c(t) = 6 \cdot e^{-0,2,t} \text{ (V)}.$$

$$\text{A } t = 0, u_c(0) = E \rightarrow E = 6 \text{ V}.$$

Remarque :

$$R.C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \xrightarrow[u_c = \frac{q}{C}]{i = C \frac{du_c}{dt}} R.i(t) + \frac{1}{C} \int i dt = 0 \quad \text{et} \quad i(t) + \frac{1}{R.C} \int i dt = 0$$

$$\int i dt = \frac{6.10^{-4}}{0,2} \cdot e^{-0,2,t} + k = 3.10^{-3} \cdot e^{-0,2,t} + k \rightarrow -6.10^{-4} e^{-0,2,t} + \frac{3.10^{-3}}{RC} e^{-0,2,t} + k = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{3.10^{-3}}{RC} - 6.10^{-4} \right) e^{-0,2,t} + k = 0$$

$$\text{cette expression est valable à chaque instant} \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \frac{3.10^{-3}}{RC} - 6.10^{-4} = 0 \end{cases} \rightarrow RC = \frac{3.10^{-3}}{6.10^{-4}} = 5 \quad \text{et} \quad C = \frac{5}{R}$$

$$\text{A.N : } C = \frac{5}{10^4} \quad \text{et} \quad C = 5.10^{-4} \text{ F } (C = 500 \mu\text{F}).$$

$$3^0) E_c(0) = \frac{1}{2} C u_c^2(0) \xrightarrow{u_c(0)=E} E_c(0) = \frac{1}{2} C E^2. \quad \text{A.N : } E_c(0) = \frac{1}{2} \cdot 500.10^{-6} \cdot 6^2 \quad \text{et} \quad E_c(0) = 9.10^{-3} \text{ J}.$$

$$4^0) q(t) = C u_c(t) \rightarrow q(t) = 500.10^{-6} \cdot 6 e^{-0,2,t} \quad \text{et} \quad q(t) = 3.10^{-3} e^{-0,2,t} \text{ (C)}$$



III / La constante de temps τ d'un dipôle RC :

1⁰ Définition :

Par définition, le produit $\tau = R.C$ s'appelle constante de temps du dipôle RC.

La constante de temps τ indique la rapidité avec laquelle s'effectue la charge ou la décharge, à travers la résistance R , du condensateur. C'est une caractéristique du dipôle RC.

Remarque : L'analyse dimensionnelle de τ :

$$[\tau] = [R][C] = \frac{[U]}{[I]} \frac{[q]}{[U]} = \frac{[I][t]}{[I]} = [t]$$

Donc τ est homogène à un temps, elle s'exprime alors en seconde.

2⁰) Détermination :

a - Par calcul direct :

Si on connaît les valeurs de R et de C, on calcule directement $\tau = R.C$.

b - Par des méthodes graphiques :

• Courbe de charge :

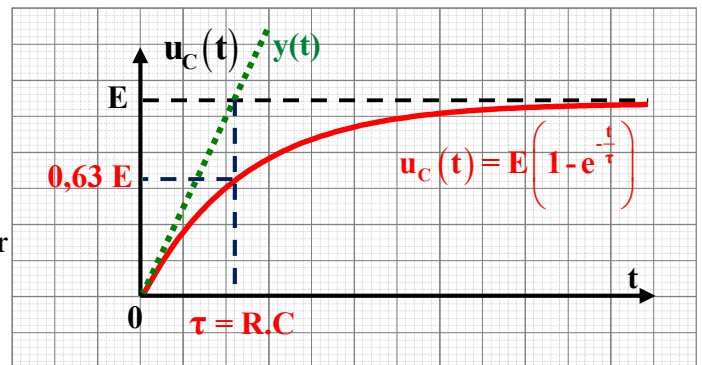
- Par lecture directe :

Pour $t = \tau$, $u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,63.E$

τ est le temps nécessaire pour charger le condensateur jusqu'à 63 % de sa charge maximale.

- Par utilisation de la tangente à l'origine :

L'équation de la tangente à l'origine est $y(t) = \left(\frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t=0} .t = \left(\frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)_{t=0} .t = \frac{E}{\tau} .t \longrightarrow y(\tau) = E$.



Remarque :

Graphiquement τ est l'abscisse du point d'intersection entre l'asymptote à la courbe de $u_C(t)$ et la tangente à l'origine.

• Courbe de décharge :

- Par lecture directe :

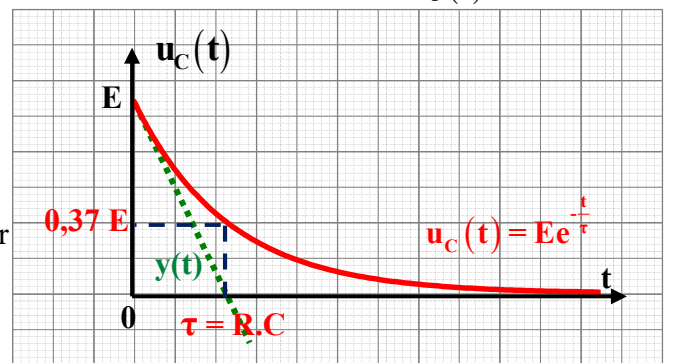
Pour $t = \tau$, $u_C(\tau) = Ee^{-1} \approx 0,37.E$

τ est le temps nécessaire pour décharger le condensateur jusqu'à 37 % de sa charge maximale.

- Par utilisation de la tangente à l'origine :

L'équation de la tangente à l'origine est $y(t) = \left(\frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t=0} .t + K = \left(-\frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)_{t=0} .t + K = -\frac{E}{\tau} .t + K$

A $t = 0$, $y(0) = E \longrightarrow K = E$ donc : $y(t) = -\frac{E}{\tau} .t + E \longrightarrow y(\tau) = 0$.



Remarque :

Graphiquement τ est l'abscisse du point d'intersection entre l'asymptote à la courbe de $u_C(t)$ et la tangente à l'origine.

3⁰) Exploitation :

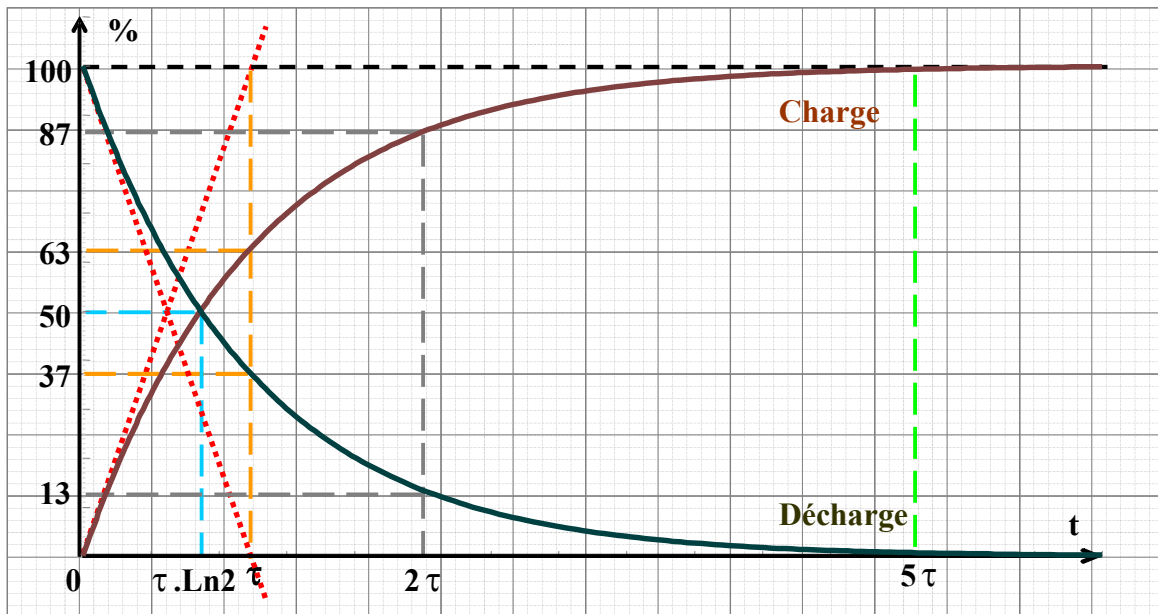
La durée de charge (où de décharge) d'un condensateur étant théoriquement infinie, on se demande à quel instant la charge (où la décharge) dépasse 99 % de sa valeur limite ?

Charge	Décharge
$u_C(t) \geq 0,99E$	$u_C(t) \leq 0,01E$
$E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \geq 0,99E$	$Ee^{-\frac{t}{\tau}} \leq 0,01E$
$e^{-\frac{t}{\tau}} \leq 0,01$	$e^{-\frac{t}{\tau}} \leq 0,01$
$-\frac{t}{\tau} \leq \log 0,01$	$-\frac{t}{\tau} \leq \log 0,01$
$\frac{t}{\tau} \geq 2 \log 10 \approx 4,6$	$\frac{t}{\tau} \geq 2 \log 10 \approx 4,6$
$t \geq 4,6.\tau$	$t \geq 4,6.\tau$

Pratiquement, au bout d'un temps $t = 5\tau$, on s'approche à plus de 99 % de l'état final.

Remarque :

Le pourcentage de charge (ou de décharge) d'un condensateur au cours du temps :



A partir de $t = 5\tau$, le condensateur est pratiquement totalement chargé (ou totalement déchargé).

Application 3 :

On donne : $E = 5 \text{ V}$; $r = R = 30 \text{ K}\Omega$; $C = 50 \mu\text{F}$.

les interrupteurs K_1 et K_2 sont initialement ouverts.

1⁰) On s'intéresse à la charge du condensateur de capacité C par un générateur de tension de f é m E .

A l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur K_1 .

L'évolution, au cours du temps, de la tension u_C aux bornes du condensateur et de la tension u_r aux bornes du conducteur ohmique de résistance r est représentée ci-contre :

a - Quelle est, parmi les deux courbes 1 et 2, celle qui illustre l'évolution de u_C ? Justifier la réponse.

b - Quelle serait la charge q du condensateur à la fin du processus de charge ?

c - On définit la constante de temps τ du circuit comme étant la durée au bout laquelle le condensateur a acquis 63 % de sa charge maximale, déterminer graphiquement la valeur de τ .

Vérifier la valeur par le calcul.

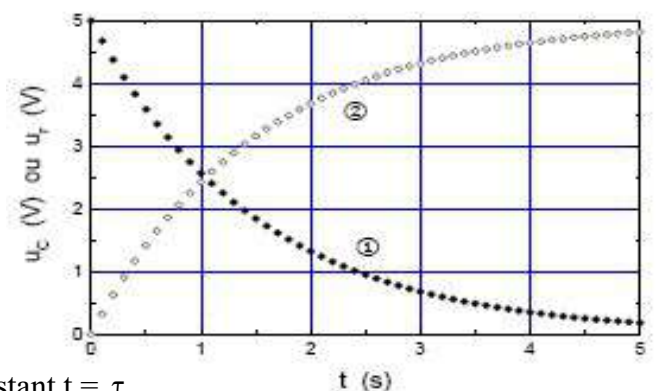
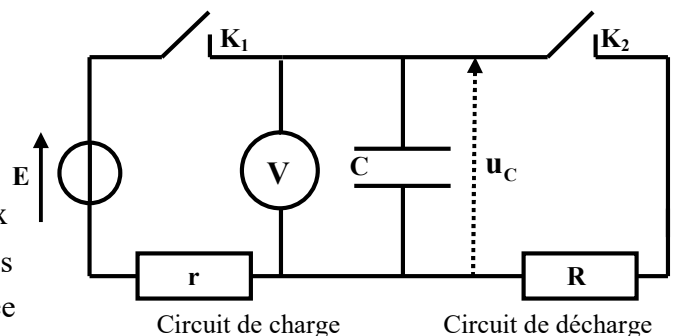
d - Déterminer la valeur de l'intensité du courant à l'instant $t = \tau$.

2⁰) Le condensateur étant chargé, on ouvre l'interrupteur K_1 et on ferme, à un instant pris comme nouvelle origine du temps $t = 0$, l'interrupteur K_2 .

a - Une des courbes 1 ou 2 peut représenter l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur.

Indiquer, en le justifiant, laquelle.

b - Déterminer la valeur de la charge du condensateur à l'instant $t = \tau$.

**Réponse :**

1⁰) a - La condition initiale $u_C(0) = 0$ implique que la courbe 2 représente l'évolution de $u_C(t)$.

b - A la fin de la charge : $U_{C\max} = E$. On a : $q = C.u_C \rightarrow Q_{\max} = C.U_{C\max} \xrightarrow{U_{C\max}=E} Q_{\max} = C.E$.

A.N : $Q_{\max} = 50.10^{-6}.5$ et $Q_{\max} = 25.10^{-5} \text{ C}$.

c - $u_c(\tau) = 0,63.E \rightarrow u_c(\tau) = 0,63.5$ et $u_c(\tau) = 3,15 \text{ V}$

Graphiquement : $\tau = 1,5 \text{ s}$.

Par le calcul : $\tau = r.C \xrightarrow{\text{A.N}} \tau = 30.10^3.50.10^{-6}$ et $\tau = 1,5 \text{ s}$

Remarque : par la méthode de la tangente à l'origine : $\tau = 1,5 \text{ s}$.

d - On a : $i(t) = \frac{E}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow i(\tau) = \frac{E}{r} e^{-\frac{\tau}{\tau}} = \frac{E}{r} e^{-1}$

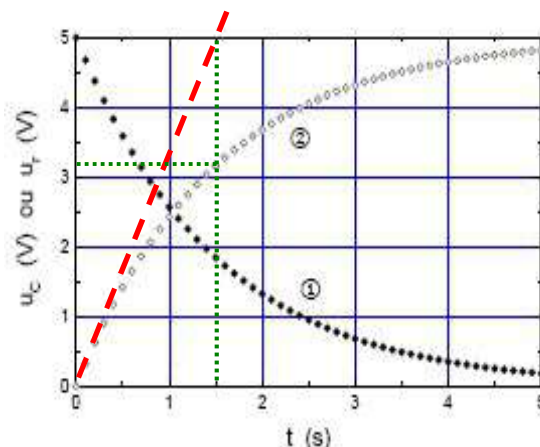
A.N : $i(\tau) = \frac{5}{30.10^3}.0,37$ et $i(\tau) = 6,17.10^{-5} \text{ A}$

2⁰) a - $r = R \rightarrow$ la constante de temps du circuit de charge est égale à celle du circuit de décharge.

Lors de la décharge : $u_c(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ peut être représentée par la courbe 1 (celle qui représente $u_r(t)$ à la charge).

b - $q(\tau) = C.u_c(\tau) = C.E.e^{-\frac{\tau}{\tau}} \rightarrow q(\tau) = C.E.e^{-1}$.

A.N : $q(\tau) = 50.10^{-6}.5.0,37$ et $q(\tau) = 9,25.10^{-5} \text{ C}$.



IV / Conclusion :

Pour un dipôle RC de constante de temps $\tau = R.C$:

$\tau = R.C$	Circuit de charge	Circuit de décharge
Echelon de tension	$0 \text{ V} \xrightarrow{\text{à}} E = \text{constante}$	$E = \text{constante} \xrightarrow{\text{à}} 0 \text{ V}$
Equation différentielle de réponse	$\tau \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c = E ; u_c(0) = 0$	$\tau \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 ; u_c(0) = E$
	$u_c = \frac{q}{C} \left \begin{array}{l} \rightarrow \tau \frac{dq}{dt} + q = Q_0 ; q(0) = 0 \\ Q_0 = C.E \end{array} \right.$	$u_c = \frac{q}{C} \left \begin{array}{l} \rightarrow \tau \frac{dq}{dt} + q = 0 ; q(0) = Q_0 \\ Q_0 = C.E \end{array} \right.$
	$i = \frac{dq}{dt} \left \begin{array}{l} \rightarrow \tau \frac{di}{dt} + i = 0 ; i(0) = I_0 \\ I_0 = \frac{E}{R} \end{array} \right.$	$i = \frac{dq}{dt} \left \begin{array}{l} \rightarrow \tau \frac{di}{dt} + i = 0 ; i(0) = -I_0 \\ I_0 = \frac{E}{R} \end{array} \right.$
Tension $u_c(t)$	$u_c(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$u_c(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$
Charge $q(t)$	$q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Intensité du courant $i(t)$	$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	$i(t) = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Tension $u_R(t)$	$u_R(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$	$u_R(t) = -E e^{-\frac{t}{\tau}}$

Pour en savoir plus :

1⁰) Influence de l'état initial du condensateur :

On étudie le cas où le condensateur est initialement chargé : $u_C(0) = u_{C0} \neq 0$.

L'équation différentielle : $\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E$, $\tau = R.C$

admet comme solution générale : $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$

On a : $u_C(0) = u_{C0} \rightarrow A + E = u_{C0} \rightarrow A = u_{C0} - E$

Il vient alors que : $u_C(t) = E - (E - u_{C0})e^{-\frac{t}{\tau}}$

• L'équation de la tangente à l'origine est sous la forme : $y(t) = \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=0} \cdot t + k$

$$\left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{(E - u_{C0})}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right)_{t=0} = \frac{(E - u_{C0})}{\tau} \rightarrow y(t) = \frac{(E - u_{C0})}{\tau} \cdot t + k$$

A $t = 0$, $y(0) = u_{C0} \rightarrow k = u_{C0}$. Il vient alors que : $y(t) = \frac{(E - u_{C0})}{\tau} \cdot t + u_{C0}$.

On remarque que : $y(\tau) = E$ pour toute valeur de u_{C0} .

Graphiquement τ est l'abscisse du point d'intersection entre l'asymptote à la courbe de $u_C(t)$ et la tangente à l'origine quel que soit l'état initial du condensateur.

• Le régime permanent est pratiquement établi lorsque la tension $u_C(t)$ dépasse 99 % de sa valeur limite E .

$$u_C(t) \geq 0,99E \rightarrow E - (E - u_{C0})e^{-\frac{t}{\tau}} \geq 0,99E \rightarrow (E - u_{C0})e^{-\frac{t}{\tau}} \leq 10^{-2}E \rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} \leq 10^{-2} \frac{E}{(E - u_{C0})}$$

$$\rightarrow -\frac{t}{\tau} \leq -2 \ln 10 - \ln \left(\frac{(E - u_{C0})}{E} \right) \text{ et } t \geq \left[2 \ln 10 + \ln \left(\frac{(E - u_{C0})}{E} \right) \right] \cdot \tau$$

La durée du régime transitoire augmente lorsque u_{C0} diminue.

Exemples :

u_{C0}	$0,5.E$	$0,1.E$	0	$-0,1.E$	$-0,5.E$
$t \geq$	$3,9.\tau$	$4,5.\tau$	$4,6.\tau$	$4,7.\tau$	$5,2.\tau$

• Soit $u_C(t) = E - (E - u_{C0})e^{-\frac{t}{\tau}}$. Pour $t_n = n\tau$, $u_C(t_n) = E - (E - u_{C0})e^{-n}$

Entre t_n et t_{n+1} , $\Delta u_C(n) = u_C(t_{n+1}) - u_C(t_n)$

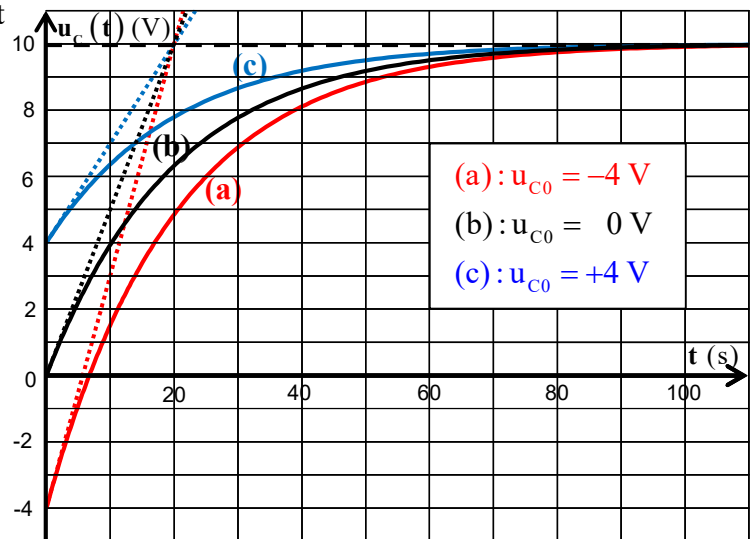
$$\begin{aligned} \Delta u_C(n) = u_C(t_{n+1}) - u_C(t_n) &\rightarrow \Delta u_C(n) = \left[E - (E - u_{C0})e^{-(n+1)} \right] - \left[E - (E - u_{C0})e^{-n} \right] \\ &\rightarrow \Delta u_C(n) = E - (E - u_{C0})e^{-n} \cdot e^{-1} - E + (E - u_{C0})e^{-n} \\ &\text{et } \Delta u_C(n) = (E - u_{C0}) \cdot (1 - e^{-1}) \cdot e^{-n} \end{aligned}$$

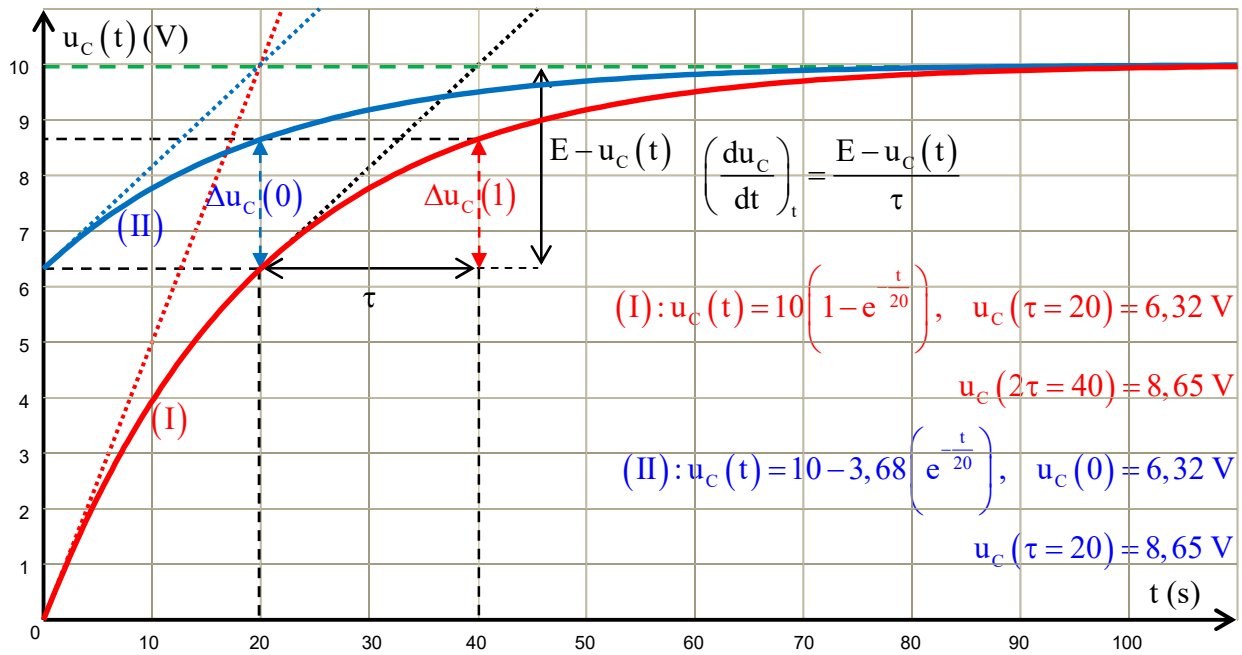
- pour $u_{C0} = 0$ et entre $t = \tau$ et $t = 2\tau$, $\Delta u_C(1) = u_C(2\tau) - u_C(\tau)$

$$\Delta u_C(1) = E(1 - e^{-2}) - E(1 - e^{-1}) = E - Ee^{-1} \cdot e^{-1} - E + Ee^{-1} \text{ et } \Delta u_C(1) = (1 - e^{-1}) \cdot Ee^{-1}$$

- pour $u_{C0} = E(1 - e^{-1})$ et entre $t = 0$ et $t = \tau$, $\Delta u_C(0) = u_C(\tau) - u_C(0)$

$$\Delta u_C(0) = (E - E(1 - e^{-1})) \cdot (1 - e^{-1}) \cdot e^0 = (E - E + Ee^{-1}) \cdot (1 - e^{-1}) \text{ et } \Delta u_C(0) = Ee^{-1} \cdot (1 - e^{-1})$$





Graphiquement, la variation de l'état initial du condensateur engendre un glissement horizontal de la courbe d'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps.

2⁰) Energie emmagasinée par le condensateur :

- Lors de la charge, la tension aux bornes d'un condensateur initialement déchargé est : $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$.

L'énergie stockée par le condensateur est : $E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 \rightarrow E_C(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2$

Le condensateur stocke une énergie maximale :

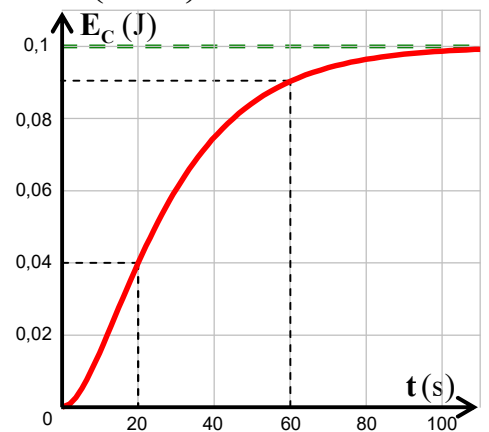
$$E_{C_{\max}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{C_{\max}}^2 \xrightarrow{U_{C_{\max}}=E} E_{C_{\max}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2$$

Soit $\rho(t) = \frac{E_C(t)}{E_{C_{\max}}} \rightarrow \rho(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2$

A $t = \tau$, $\rho(\tau) = (1 - e^{-1})^2$ et $\rho(\tau) \approx 0,4$ ($\rho(\tau) = 40\%$)

La charge totale du condensateur dure $\Delta t = 5\tau$, mais déjà à $t = \tau$, le condensateur a emmagasiné 40 % de son énergie maximale.

Remarque : $\rho(3\tau) = (1 - e^{-3})^2$ et $\rho(3\tau) \approx 0,9$ ($\rho(3\tau) = 90\%$).



- Lors de la décharge, la tension aux bornes d'un condensateur initialement chargé à E est : $u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$.

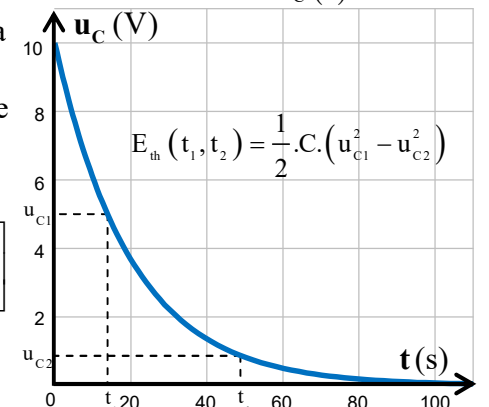
L'énergie perdue par le condensateur est dissipée par effet Joule dans la résistance.

Entre deux instants t_1 et t_2 , l'énergie thermique dissipée par la résistance

est : $E_{th}(t_1, t_2) = -\Delta E_C = E_C(t_1) - E_C(t_2) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(t_1) - \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(t_2)$

$$E_{th}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot [u_C^2(t_1) - u_C^2(t_2)] \text{ et } E_{th}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 \left[e^{-2\frac{t_1}{\tau}} - e^{-2\frac{t_2}{\tau}} \right]$$

entre $t = 0$ et $t = \tau$, $E_{th}(0, \tau) = E_{C_{\max}} [1 - e^{-2}] \approx 0,86 \cdot E_{C_{\max}}$.



Applications

Exercice 1 :

On considère le circuit électrique schématisé ci-contre :

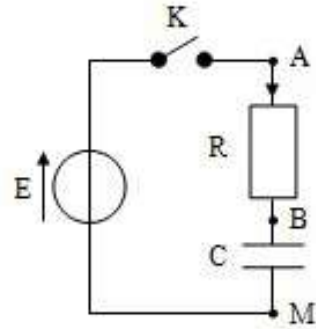
On donne :

- E est la f.e.m. du générateur supposé idéal
- $R = 50\text{ K}\Omega$

Le sens positif du courant est comme indiqué sur le schéma.

Dans la convention récepteur, on appellera :

- u_R la tension aux bornes du résistor de résistance R .
- u_C la tension aux bornes du condensateur de capacité C .



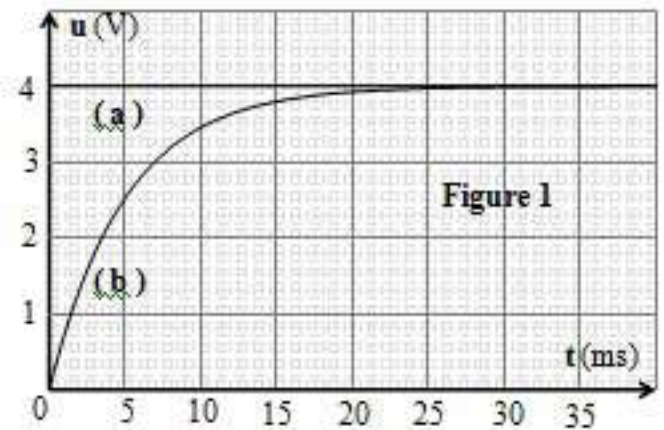
1⁰) On se propose d'enregistrer, à l'aide d'un oscilloscope à mémoire, la tension u_{AM} sur la voie 1 (Y_1) et la tension u_{BM} sur la voie 2 (Y_2).

Reprendre le schéma du circuit électrique et rajouter les flèches représentant les tensions u_R et u_C .

Indiquer alors sur le même schéma les branchements nécessaires à l'oscilloscope.

2⁰) Le condensateur étant initialement complètement déchargé, on ferme, à $t = 0$, l'interrupteur K .

On enregistre les variations des tensions u_{AM} et u_{BM} au cours du temps. On obtient les courbes (a) et (b) de la figure 1 :



a - Que représente chacune des tensions u_{AM} et u_{BM} ?

b - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à la tension qu'elle représente.

3⁰) La tension u_C aux bornes du condensateur vérifie à chaque instant l'équation différentielle :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

a - La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme : $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$.

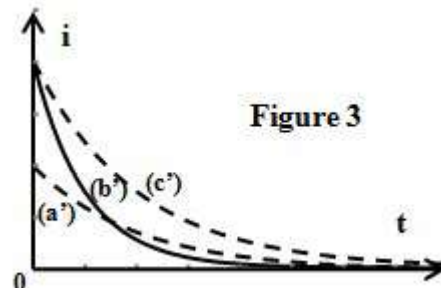
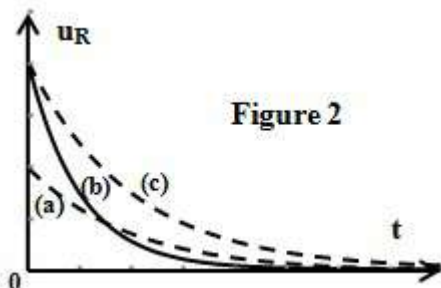
Exprimer A , τ et B en fonction de E , R et C . En déduire l'expression de $u_C(t)$ en fonction de E et τ .

b - Comment nomme-t-on τ ? Montrer qu'elle est homogène à un temps.

c - Déterminer, d'après la figure 1, les valeurs de E et de τ .

d - Calculer alors la valeur de la capacité C du condensateur utilisé.

4⁰) Sur les figures 2 et 3, les courbes (b) et (b') représentent respectivement les variations de la tension $u_R(t)$ aux bornes du résistor et celles de l'intensité du courant $i(t)$ au cours du temps :



a - Etablir les expressions de $u_R(t)$ et $i(t)$ en fonction de E , R et C .

b - On maintient E et C constantes et on double la valeur de la résistance R du résistor.

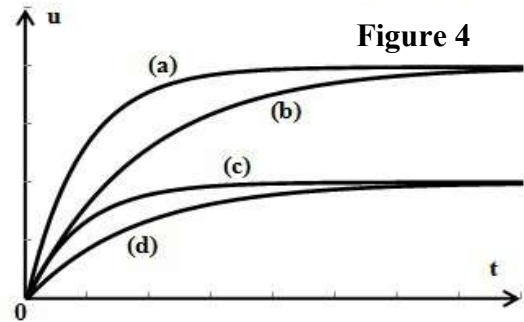
Identifier sur chacune des figures, en le justifiant, respectivement les nouvelles courbes représentatives des variations de $u_R(t)$ et $i(t)$ au cours du temps.

5⁰) On réalise plusieurs expériences de la charge d'un condensateur avec différentes valeurs de E , R et C . On prend soin de décharger rapidement le condensateur avant chaque nouvelle expérience.

a - Comment peut-on réaliser simplement la décharge rapide du condensateur ?

b - La figure 4 donne les différentes courbes de charges relatives aux différentes expériences réalisées :

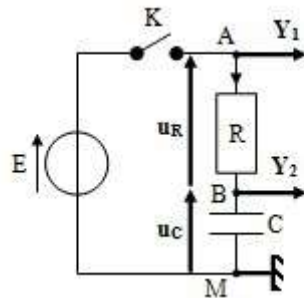
Expérience	1	2	3	4
$R \text{ (K}\Omega\text{)}$	10	20	10	10
$C \text{ (}\mu\text{F)}$	0,22	0,22	0,22	0,47
$E \text{ (V)}$	4	2	2	4



Attribuer à chaque expérience la courbe correspondante.
Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰)



2⁰) **a** - La tension u_{AM} représente la tension u_G aux bornes du générateur.

La tension u_{BM} représente la tension u_C aux bornes du condensateur.

b - * Le générateur est idéal donc $u_G = E = \text{constante} \rightarrow$ la courbe (a) représente la tension u_G .

* Le condensateur est initialement déchargé donc $u_C(0) = 0 \rightarrow$ la courbe (b) représente la tension u_C .

3⁰) **a** - $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{\text{équation différentielle}} -\frac{R.C}{\tau}Ae^{-\frac{t}{\tau}} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B = E \rightarrow Ae^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - \frac{R.C}{\tau}\right) + B = E$$

$$\text{cette expression doit être vérifiée à chaque instant} \rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{R.C}{\tau} = 0 \rightarrow 1 = \frac{R.C}{\tau} \text{ et } \tau = R.C \\ B = E \end{cases}$$

$$\text{donc : } u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

$$\text{D'autre part : } u_C(0) = 0 \rightarrow A + E = 0 \text{ et } A = -E, \text{ on écrit alors : } u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

b - $\tau = R.C$ est la constante de temps du dipôle RC.

$$\text{L'analyse dimensionnelle} \rightarrow [\tau] = [R][C] = \frac{[U][Q]}{[I][U]} = \frac{[I][T]}{[I]} = [T] \rightarrow \tau \text{ est homogène à un temps.}$$

c - Graphiquement : $E = 4 \text{ V}$.

$$\text{et } \tau = 5 \text{ ms} = 5.10^{-3} \text{ s.}$$

$$\text{d - } \tau = R.C \rightarrow C = \frac{\tau}{R}. \text{ A.N : } C = \frac{5.10^{-3}}{50.10^3} \text{ et } C = 10^{-7} \text{ F ou } C = 0,1 \mu\text{F}.$$

4⁰) **a** - A chaque instant on a : $u_R + u_C = E$

$$* u_R = E - u_C = E - E + Ee^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow u_R(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$* u_R = r.i \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \rightarrow i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

b - On double $R \rightarrow R' = 2R \xrightarrow{\tau' = R'.C} \tau' = 2\tau$ avec
$$\begin{cases} u_R'(0) = E \\ i'(0) = \frac{E}{2R} \end{cases}$$

$u_R'(t) = E e^{-\frac{t}{\tau'}}$ est représentée par la courbe (c)

$i'(t) = \frac{E}{2R} e^{-\frac{t}{\tau'}}$ est représentée par la courbe (a')

5⁰ **a** - Pratiquement, on court-circuite le condensateur pour obtenir une décharge rapide.

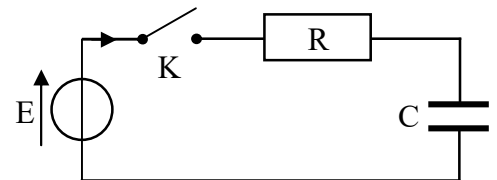
b - La valeur maximale commune de la tension dans les courbes (a) et (b) est supérieure à celle dans les courbes (c) et (d) $\rightarrow$ les courbes (a) et (b) correspondent aux expériences 1 et 4
les courbes (c) et (d) correspondent aux expériences 2 et 3

$\tau(\text{exp1}) < \tau(\text{exp4}) \rightarrow$ la courbe (a) correspond à l'expérience 1
la courbe (b) correspond à l'expérience 4
 $\tau(\text{exp3}) < \tau(\text{exp2}) \rightarrow$ la courbe (c) correspond à l'expérience 3
la courbe (d) correspond à l'expérience 2

Exercice 2 :

Le montage du circuit électrique schématisé ci-contre comporte :

- un générateur de tension idéal de force électromotrice E
- un conducteur ohmique de résistance R
- un condensateur de capacité C
- un interrupteur K



Un dispositif d'acquisition des données relié à un ordinateur permet de suivre l'évolution, en fonction du temps, de la tension u_C aux bornes du condensateur ainsi que l'intensité i du courant qui le traverse.

Le condensateur étant préalablement déchargé, on déclenche les acquisitions à la fermeture de K .

On obtient alors les courbes $u_C(t)$ et $i(t)$ ci-contre :

1⁰ **a** - Recopier le schéma du montage et, en utilisant la convention récepteur, représenter par des flèches les tensions u_C aux bornes du condensateur et u_R aux bornes du conducteur ohmique.

b - Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C pendant la charge du condensateur.

c - Vérifier que : $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ avec $\tau = R.C$

est la solution analytique de l'équation différentielle et qu'elle respecte la condition initiale.

d - En déduire l'expression de $i(t)$ en fonction de E , R et τ .

2⁰ **a** - En exploitant les courbes $u_C(t)$ et $i(t)$, trouver les valeurs de E et de R .

b - Déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps τ du dipôle RC considéré.
En déduire que la valeur de la capacité du condensateur est $C = 2200 \mu\text{F}$.

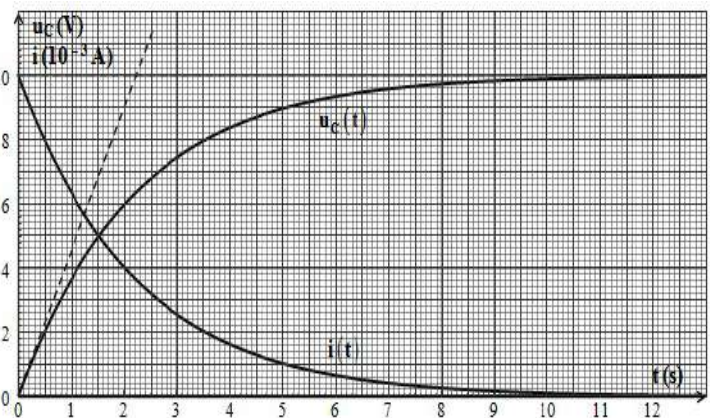
3⁰ **a** - Calculer la valeur de la pente A de la tangente à l'origine à la courbe $u_C(t)$.

b - Montrer que l'intensité du courant à $t = 0$ s'écrit : $i(0) = C.A$.

Calculer la valeur de $i(0)$.

Vérifier que la valeur calculée de $i(0)$ est en accord avec sa valeur graphique.

4⁰ Le condensateur étant initialement totalement chargé, on le décharge à travers deux résistors différents. On enregistre l'évolution temporelle de la tension u_C aux bornes du condensateur au cours de la décharge.



Avec un résistor de résistance (R_1) on obtient la courbe (1) représentée sur le graphe ci-dessous.

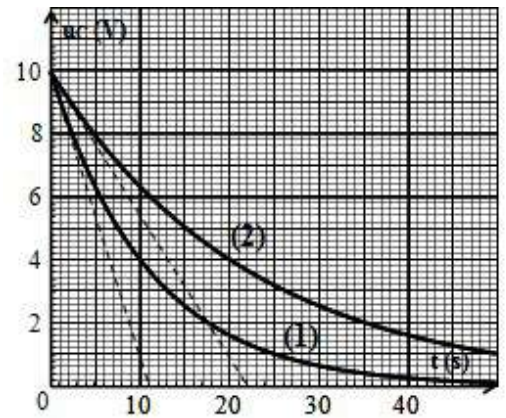
En effectuant la même opération avec un résistor de résistance (R_2), on obtient la courbe (2) du graphe.

a - Proposer une méthode graphique de détermination des résistances R_1 et R_2 . Calculer leurs valeurs numériques.

b - Calculer l'énergie électrostatique E_C initialement emmagasinée par le condensateur lors de sa charge.

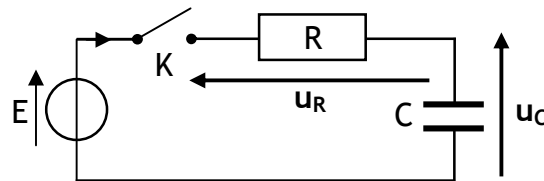
c - En déduire la valeur de l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule dans le résistor de résistance R_1 lorsque la décharge du condensateur est terminée.

d - Cette énergie E_{th} est-elle différente avec le résistor de résistance R_2 ? Justifier la réponse.



Réponse :

1⁰) a -



b - La loi des mailles s'écrit : $u_R + u_C - E = 0 \rightarrow u_R + u_C = E$

On a : $u_R = Ri \rightarrow Ri + u_C = E$

Or $i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt} \rightarrow RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$

On pose : $R \cdot C = \tau$, il vient alors que : $\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = E$

c - $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

• $\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{\text{eq.diff}} \tau \cdot \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + E - E e^{-\frac{t}{\tau}} = E$ l'équation différentielle est vérifiée.

• d'autre part : $u_C(0) = E \left(1 - e^{-\frac{0}{\tau}} \right) = E(1-1) = 0$ la condition initiale est vérifiée.

d - $i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \rightarrow i = C \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{\tau=R \cdot C} i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Remarque : A chaque instant on a : $u_R + u_C = E$

* $u_R = E - u_C = E - E + E e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow u_R(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$.

* $u_R = R \cdot i \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \rightarrow i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

2⁰) a - $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t) = E \xrightarrow{\text{d'après la courbe } u_C(t)} E = 10 \text{ V}.$

$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow i(0) = \frac{E}{R} \xrightarrow{\text{d'après la courbe } i(t)} \frac{E}{R} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ A} ;$

donc : $R = \frac{10}{10 \cdot 10^{-3}}$ et $R = 10^3 \Omega$ ou $R = 1 \text{ k}\Omega$.

b - Graphiquement $\tau = 2,2 \text{ s}$.

$\tau = R \cdot C \rightarrow C = \frac{\tau}{R}$. AN : $C = \frac{2,2}{10^3} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ F}$ donc $C = 2200 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ou $C = 2200 \mu\text{F}$.

3⁰) a - $A = \frac{10-0}{2,2-0} = 4,55 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$.

b - $i(t) = C \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t \rightarrow i(0) = C \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=0}$ donc $i(0) = C.A$.

AN : $i(0) = 2200 \cdot 10^{-6} \cdot 4,55$ et $i(0) = 10,01 \cdot 10^{-3} \text{ A}$.

Graphiquement : $i(0) = 10 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ cette valeur graphique est en accord avec la valeur calculée de $i(0)$.

4⁰ a - On détermine graphiquement la valeur de la constante de temps τ du dipôle RC.

Sachant que $\tau = R.C$ et connaissant la valeur de C , on en déduit la valeur de R par $R = \frac{\tau}{C}$.

• Courbe (1) : $\tau_1 = 11 \text{ s} \rightarrow R_1 = \frac{11}{2,2 \cdot 10^{-3}}$ et $R_1 = 5 \cdot 10^3 \Omega$ ou $R_1 = 5 \text{ K}\Omega$.

• Courbe (2) : $\tau_2 = 22 \text{ s} \rightarrow R_2 = \frac{22}{2,2 \cdot 10^{-3}}$ et $R_2 = 10 \cdot 10^3 \Omega$ ou $R_2 = 10 \text{ K}\Omega$.

b - $E_C(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(0)$. A.N : $E_C(0) = \frac{1}{2} \cdot 2200 \cdot 10^{-6} \cdot (10)^2$ et $E_C(0) = 11 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

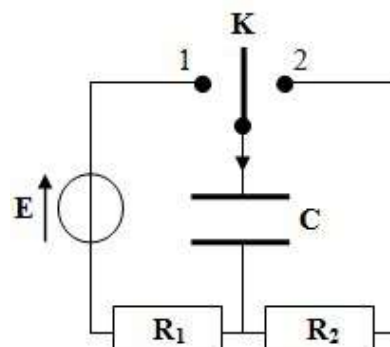
c - A la fin de la décharge du condensateur, E_C s'annule. L'énergie initialement stockée par le condensateur est alors intégralement dissipée par effet Joule aux bornes du résistor. On en déduit que $E_{th} = 11 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

d - A la fin de la décharge du condensateur, E_{th} est égale à $E_C(0)$. Elle est donc indépendante de la valeur de la résistance du résistor.

La valeur de la résistance du résistor influe sur la durée au cours de laquelle l'énergie initialement emmagasinée par le condensateur se dissipe totalement par effet Joule.

Exercice 3 :

On considère le montage du circuit électrique schématisé ci-contre :
Un dispositif d'acquisition des données relié à un ordinateur permet de suivre l'évolution, en fonction du temps, de la tension u_C aux bornes du condensateur ainsi que la tension u_R aux bornes de chacun des résistors.

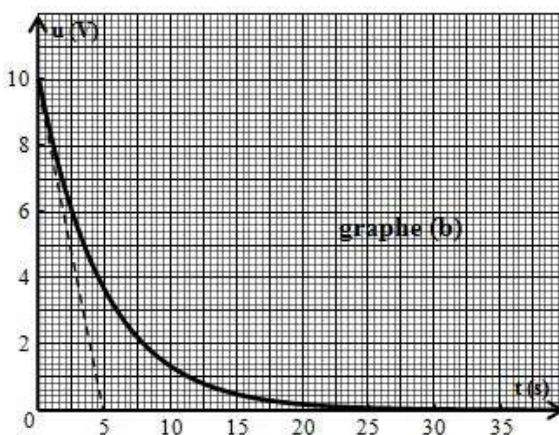
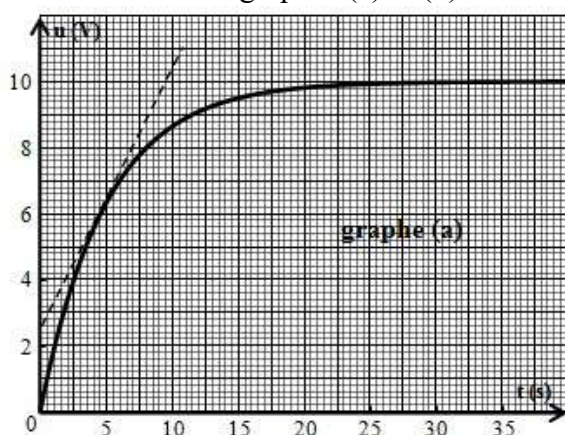


I - Charge du condensateur :

Le condensateur étant initialement déchargé, on ferme l'interrupteur K sur la position 1 à un instant pris comme origine du temps.

On s'intéresse aux tensions u_C et u_{R_1} .

On obtient alors les deux graphes (a) et (b) ci-dessous :



1⁰ a - Des tensions u_C et u_{R_1} , laquelle qui permet de suivre l'évolution au cours du temps de l'intensité i du courant dans le circuit ? Justifier la réponse.

b - Quel est, parmi les graphes (a) et (b), celui qui représente $u_C(t)$. Justifier la réponse.

2⁰ a - Etablir l'équation différentielle : $R_1 \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$ vérifiée par la tension u_C .

b - La solution de cette équation différentielle est de la forme $u_C(t) = Ae^{-\alpha t} + B$ où A , α et B sont des constantes. En posant $\tau_1 = R_1.C$, montrer que $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$. En déduire alors que $u_{R_1}(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau_1}}$.

3⁰) a - Comment appelle-t-on le produit $\tau_1 = R_1.C$?

b - Vérifier que τ_1 est homogène à un temps.

4⁰) a - D'après la courbe $u_{R_1} = f(t)$, déterminer graphiquement les valeurs de E et de τ_1 .

b - Sachant que $R_1 = 10 \text{ K}\Omega$, calculer la valeur de la capacité C du condensateur.

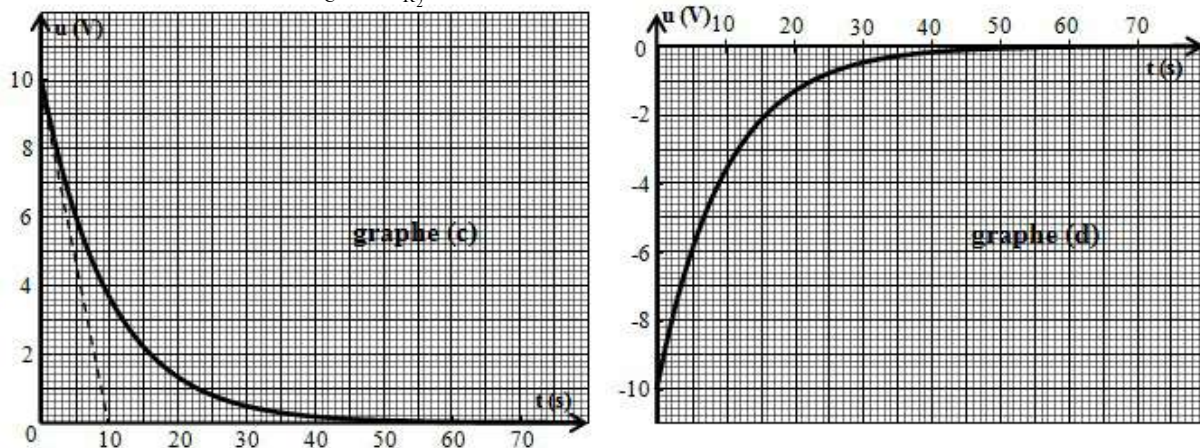
5⁰) a - En exploitant la courbe $u_{R_1} = f(t)$, trouver la valeur de l'intensité $i(\tau_1)$ du courant à l'instant τ_1 .

b - Sachant que $i(t) = C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t$ et en exploitant la tangente à la courbe $u_C = f(t)$ au point d'abscisse τ_1 , retrouver la valeur de la capacité C du condensateur.

II - Décharge du condensateur :

Le condensateur étant pratiquement complètement chargé, on bascule l'interrupteur K sur la position 2 à un instant pris comme origine du temps.

On s'intéresse aux tensions u_C et u_{R_2} . On obtient alors les deux graphes (c) et (d) ci-dessous :



6⁰) a - Associer chacun des graphes (c) et (d) à la tension qu'il représente. Justifier la réponse.

b - En quoi les courbes $u_C(t)$ et $u_{R_2}(t)$ montrent-elles que $R_1 \neq R_2$. Calculer la valeur de R_2 .

7⁰) a - Quelle est la valeur de l'énergie électrostatique E_C initialement emmagasinée par le condensateur.

b - Calculer l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule dans le résistor entre les instants $t = 0$ et $t = \tau_2 = R_2.C$.

Réponse :

1⁰) a - $u_{R_1} = R_1 \cdot i \rightarrow u_{R_1}$ est proportionnelle à $i \rightarrow u_{R_1}$ permet de suivre l'évolution de l'intensité i du courant au cours du temps.

b - $u_C(0) = 0$ et le condensateur se charge au cours du temps ($u_C(t)$ croît en fonction du temps).

On déduit que le graphe (a) représente $u_C(t)$ (le graphe (b) représente alors $u_{R_1}(t)$).

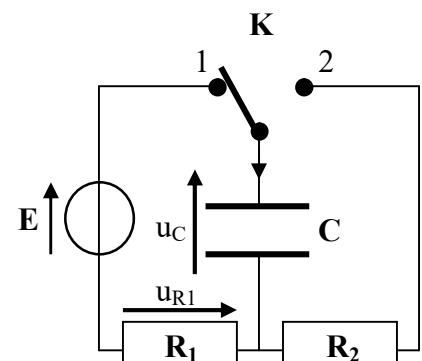
2⁰) a - La loi des mailles s'écrit : $u_{R_1} + u_C - E = 0 \rightarrow u_{R_1} + u_C = E$

On a : $u_{R_1} = R_1 \cdot i \rightarrow R_1 \cdot i + u_C = E$

Or $i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt} \rightarrow R_1 \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$

b - $u_C(t) = A.e^{-\alpha t} + B$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{du_C}{dt} &= -\alpha \cdot A \cdot e^{-\alpha t} \xrightarrow{\text{eq.diff}} -R_1 \cdot C \cdot \alpha \cdot A \cdot e^{-\alpha t} + A \cdot e^{-\alpha t} + B = E \\ &\rightarrow A \cdot e^{-\alpha t} (1 - R_1 \cdot C \cdot \alpha) + B = E \end{aligned}$$



$$\text{Cette expression doit \^etre v\^erifi\^ee \^a chaque instant} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - R_1.C.\alpha = 0 \rightarrow R_1.C.\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{R_1.C} \\ B = E \end{array} \right.$$

donc : $u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{R_1.C}} + E$. En posant : $\tau_1 = R_1.C$, on \^ecrit alors : $u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau_1}} + E$

• d'autre part : $u_C(0) = 0 \rightarrow A + E = 0$ et $A = -E$

donc : $u_C(t) = -E.e^{-\frac{t}{\tau_1}} + E$ ou bien : $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$.

A chaque instant on a : $u_{R_1} + u_C = E \longrightarrow u_{R_1} = E - u_C = E - E + Ee^{-\frac{t}{\tau_1}} \longrightarrow u_{R_1}(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau_1}}$.

3⁰) a - Le produit $\tau_1 = R_1.C$ s'appelle constante de temps du dip\^ole $R_1.C$.

b - L'analyse dimensionnelle : $[\tau_1] = [R_1].[C] = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[I].[t]}{[U]} = [t]$

τ_1 est alors homog\^ene \^a un temps.

4⁰) a - Graphiquement : $E = 10 \text{ V}$ ($u_{R_1}(0) = E$) et $\tau_1 = 5 \text{ s}$ (m\^ethode de la tangente \^a l'origine).

b - $\tau_1 = R_1.C \rightarrow C = \frac{\tau_1}{R_1}$. A.N : $C = \frac{5}{10^4}$ et $C = 5.10^{-4} \text{ F}$ ou $C = 500 \mu\text{F}$.

5⁰) a - $u_{R_1}(\tau_1) = 0,37.E = 0,37.10 = 3,7 \text{ V}$.

or $u_{R_1}(\tau_1) = R_1.i(\tau_1) \rightarrow i(\tau_1) = \frac{u_{R_1}(\tau_1)}{R_1}$. A.N : $i(\tau_1) = \frac{3,7}{10^4}$ et $i(\tau_1) = 3,7.10^{-4} \text{ A}$.

b - $i(\tau_1) = C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=\tau_1} \rightarrow C = \frac{i(\tau_1)}{\left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=\tau_1}}$

graphiquement, la valeur de $\left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=\tau_1}$ est \^egale \^a celle de la pente de la tangente \^a $u_C(t)$ \^a l'instant $t = \tau_1$.

A.N : $C = \frac{3,7.10^{-4}}{\left(\frac{6,3 - 2,6}{5 - 0} \right)} = \frac{3,7.10^{-4}}{0,74}$ et $C = 5.10^{-4} \text{ F}$ ou $C = 500 \mu\text{F}$.

6⁰) a - $u_C(0) = 10 \text{ V}$ et le condensateur se d\^echarge au cours du temps ($u_C(t)$ d\^ecro\^it en fonction du temps).

On d\^eduit que le graphe (c) repr\^esente $u_C(t)$ (le graphe (d) repr\^esente alors $u_{R_2}(t)$).

b - Graphiquement : $\tau_2 = 10 \text{ s}$ (m\^ethode de la tangente \^a l'origine).

$\tau_2 \neq \tau_1 \rightarrow R_2.C \neq R_1.C$ et $R_2 \neq R_1$

$\tau_2 = R_2.C \rightarrow R_2 = \frac{\tau_2}{C}$.

A.N : $R_2 = \frac{10}{5.10^{-4}}$ et $R_2 = 20.10^3 \Omega$ ou $R_2 = 20 \text{ K}\Omega$.

7⁰) a - $E_C(0) = \frac{1}{2}.C.u_C^2(0)$. A.N : $E_C(0) = \frac{1}{2}.500.10^{-6}.(10)^2$ et $E_C(0) = 2,5.10^{-2} \text{ J}$.

b - $E_{th} = E_C(0) - E_C(\tau_2) \rightarrow E_{th} = \frac{1}{2}.C.[u_C^2(0) - u_C^2(\tau_2)]$

A.N : $\left\{ \begin{array}{l} u_C(0) = E = 10 \text{ V} \\ u_C(\tau_2) = 0,37.E = 0,37.10 = 3,7 \text{ V} \end{array} \right. \rightarrow E_{th} = \frac{1}{2}.500.10^{-6}.[(10)^2 - (3,7)^2]$ et $E_{th} = 2,16.10^{-2} \text{ J}$.

Exercice 4 :

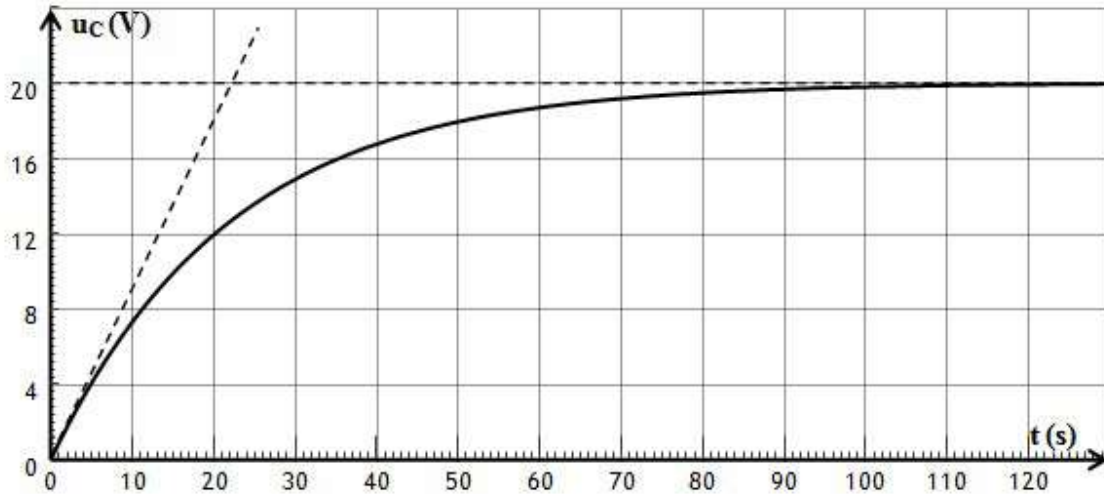
1⁰) Un condensateur comporte les indications suivantes : 2200 μF ; 63 V.

Que représente chacune de ces indications ?

2⁰) Ce condensateur est associé en série avec un résistor de résistance $R = 10 \text{ K}\Omega$.

Le dipôle RC ainsi constitué est alimenté par un générateur de tension idéal de $\mathcal{E}$ m E.

Le condensateur est initialement déchargé. A $t = 0$, on ferme le circuit. L'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps est donnée par le graphe ci-dessous :



a - Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension u_C en fonction du temps.

b - La solution de cette équation différentielle est $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ avec $\tau = R.C$.

Comment appelle-t-on le produit $\tau = R.C$? Vérifier que τ est homogène à un temps.

c - Déterminer graphiquement la valeur de E et celle de τ . Dédire la valeur de la capacité C du condensateur.

d - Evaluer graphiquement la durée Δt du régime transitoire. Comparer Δt à 5τ .

3⁰) En utilisant la loi des mailles, montrer que lorsque le régime permanent est établi, l'intensité du courant $i_p = 0$.

En déduire alors la valeur q_p de la charge du condensateur.

4⁰) Calculer la valeur de l'énergie électrostatique E_C emmagasinée par le condensateur à la fin de la charge.

5⁰) L'intensité du courant s'exprime sous la forme : $i(t) = Ae^{-\alpha.t}$ où A et α sont des constantes.

a - Sachant que $i(t) = C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t$ et par identification, exprimer A et α en fonction de E , R et C .

b - Calculer la valeur de $i(0)$.

Réponse :

1⁰) L'indication 2200 μF représente la capacité du condensateur.

L'indication 63 V représente la tension de service du condensateur.

2⁰) a - La loi des mailles s'écrit : $u_R + u_C - E = 0 \rightarrow u_R + u_C = E$

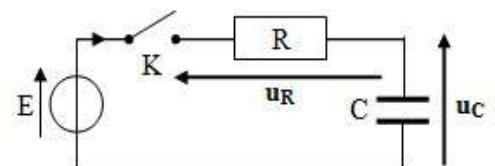
$$\text{On a : } u_R = Ri \rightarrow Ri + u_C = E \text{ Or } i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$\text{il vient alors que : } RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

b - La solution de cette équation différentielle est $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ avec $\tau = R.C$.

τ est la constante de temps du dipôle RC.

L'analyse dimensionnelle : $[\tau] = [R] \cdot [C] = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[i] \cdot [t]}{[U]} = [t]$. Donc τ est alors homogène à un temps.



c - Graphiquement : $E = 20 \text{ V}$ et $\tau = 22 \text{ s}$.

$$\tau = R.C \rightarrow C = \frac{\tau}{R}. \text{ A.N : } C = \frac{22}{10.10^3} \text{ et } C = 2,2.10^{-3} \text{ F ou } C = 2200 \mu\text{F}.$$

d - Graphiquement : $\Delta t = 110 \text{ s}$.

$$5.\tau = 5.22 = 110 \text{ s} \rightarrow \Delta t = 5.\tau \text{ la durée du régime transitoire.}$$

3⁰) D'après la loi des mailles : $u_R(t) + u_C(t) = E$.

* En régime permanent, le condensateur est chargé $\rightarrow u_C(p) = E$ donc

$$u_R(p) = 0 \xrightarrow{u_R(p) = R.i_p} i_p = 0.$$

* $q_p = C.u_C(p) = C.E$. A.N : $q_p = 2,2.10^{-3}.20$ et $q_p = 44.10^{-3} \text{ C}$.

4⁰) On a : $E_C = \frac{1}{2}.C.u_C^2$. A la fin de la charge, $u_C = E \rightarrow E_C = \frac{1}{2}.C.E^2$.

$$\text{A.N : } E_C = \frac{1}{2}.2,2.10^{-3}.(20)^2 \text{ et } E_C = 44.10^{-2} \text{ J}.$$

5⁰) $i(t) = Ae^{-\alpha.t}$ où A et α sont des constantes.

$$\text{a - } i(t) = C.\left(\frac{du_C}{dt}\right)_t \rightarrow i(t) = C.\frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{\tau=R.C} i(t) = C.\frac{E}{R.C}.e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ et } i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$\text{Par identification : } A = \frac{E}{R} \text{ et } \alpha = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R.C}.$$

$$\text{b - } i(0) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{0}{\tau}} \rightarrow i(0) = \frac{E}{R}. \text{ A.N : } i(0) = \frac{20}{10.10^3} \text{ et } i(0) = 2.10^{-3} \text{ A}.$$

Exercice 5 :

On considère le montage du circuit électrique schématisé ci-contre :

I - Charge du condensateur :

Le condensateur étant initialement déchargé, on ferme l'interrupteur K sur la position 1 à un instant pris comme origine du temps.

Le graphe ci-dessous représente l'évolution, au cours du temps, de la charge q du condensateur :

1⁰) La charge q du condensateur est-elle portée sur l'armature A ou B du Condensateur ? Justifier la réponse.

2⁰) a - Etablir l'équation différentielle gérant l'évolution de la charge q du condensateur en fonction du temps.

b - La solution de cette équation différentielle a comme expression :

$$q(t) = C.E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \text{ avec } \tau_1 = R_1.C. \text{ Déduire alors l'expression de}$$

l'intensité $i(t)$ du courant qui circule dans le circuit et l'expression

de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

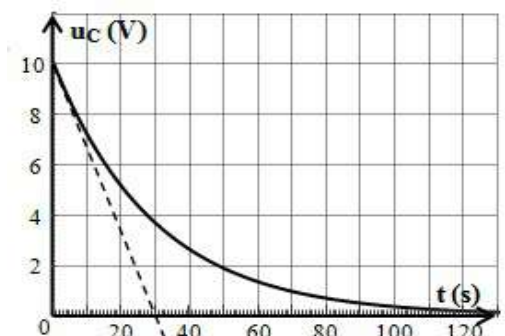
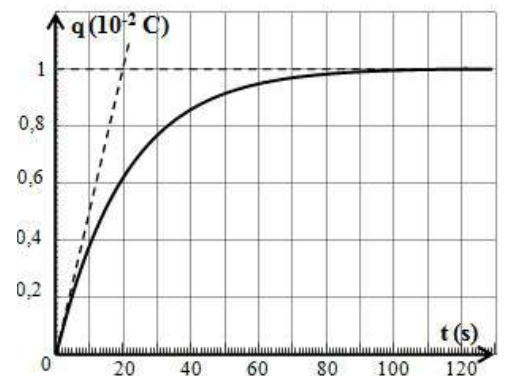
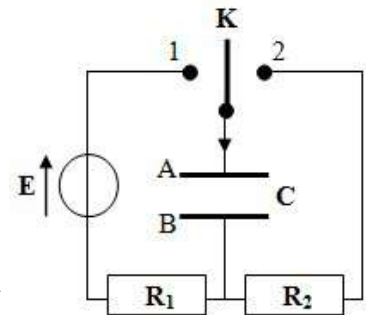
3⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur de $C.E$ ainsi que la valeur de τ_1 .

b - En déduire la valeur de $I_0 = i(0)$.

II - Décharge du condensateur :

Le condensateur étant initialement complètement chargé, on bascule l'interrupteur K sur la position 2 à un instant pris comme origine du temps.

Le graphe ci-contre représente l'évolution, au cours du temps, de la tension u_C aux bornes du condensateur.



4⁰) L'équation différentielle qui gère l'évolution de la tension u_C au cours du temps est :

$$\tau_2 \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_2 = R_2 \cdot C.$$

a - Vérifier que : $u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$.

b - Déterminer graphiquement la valeur de E et celle de τ_2 .

5⁰) Calculer la valeur de C et celle de chacune des résistances R_1 et R_2 .

6⁰) Quelle est la valeur de l'énergie thermique E_{th} dissipée par effet Joule au cours de la décharge complète ?

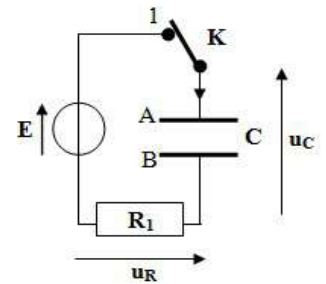
Réponse :

1⁰) Par convention, la charge q d'un condensateur est la charge de l'armature vers laquelle pointe le sens positif du courant électrique. La charge q est alors portée par l'armature A du condensateur ($q = q_A$).

2⁰) a - La loi des mailles s'écrit : $u_R + u_C - E = 0 \rightarrow u_R + u_C = E$

On a : $u_R = Ri \rightarrow Ri + u_C = E$

$$\left. \begin{array}{l} i = \frac{dq}{dt} \\ u_C = \frac{q}{C} \end{array} \right\} \rightarrow R_1 \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E. \quad \text{Il vient alors que : } R_1 \cdot C \cdot \frac{dq}{dt} + q = \frac{E}{C}.$$



b - La solution de cette équation différentielle est $q(t) = C \cdot E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$ avec $\tau_1 = R_1 \cdot C$

$$* \quad i(t) = \frac{dq}{dt} \rightarrow i(t) = \frac{C \cdot E}{\tau_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \xrightarrow{\tau_1 = R_1 \cdot C} i(t) = \frac{C \cdot E}{R_1 \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{E}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}}.$$

$$* \quad u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \rightarrow u_C(t) = \frac{C \cdot E}{C} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \quad \text{et} \quad u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right).$$

3⁰) a - Graphiquement : $C \cdot E = 10^{-2} \text{ C}$ et $\tau_1 = 20 \text{ s}$.

$$b - I_0 = i(0) = \frac{E}{R_1} \cdot e^0 = \frac{E}{R_1}. \quad \text{On écrit : } I_0 = \frac{C \cdot E}{R_1 \cdot C} \rightarrow I_0 = \frac{C \cdot E}{\tau_1}$$

$$A.N : I_0 = \frac{10^{-2}}{20} \quad \text{et} \quad I_0 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

$$4⁰) a - \tau_2 \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_2 = R_2 \cdot C.$$

$$* \quad u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \rightarrow u_C(0) = E \cdot e^0 = E \quad \text{La condition initiale est vérifiée.}$$

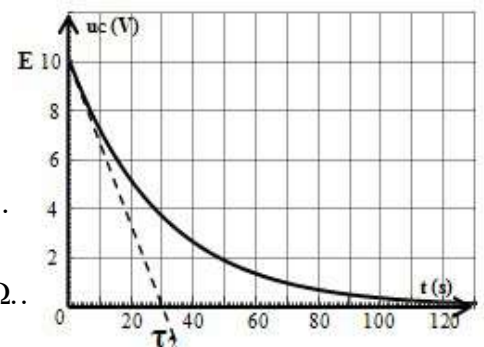
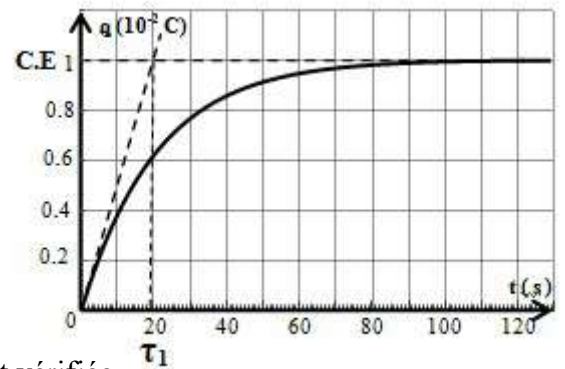
$$* \quad u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \xrightarrow{\text{on remplace dans l'éq. diff}} \tau_2 \cdot \left(-\frac{E}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) + E e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 0 \quad \text{l'équation différentielle est vérifiée}$$

b - Graphiquement : $E = 10 \text{ V}$ et $\tau_2 = 30 \text{ s}$.

$$5⁰) \text{ On a : } C \cdot E = 10^{-2} \text{ C} \xrightarrow{E=10\text{V}} C = \frac{10^{-2}}{10} \quad \text{et} \quad C = 10^{-3} \text{ F}.$$

$$\text{On a : } \tau_1 = R_1 \cdot C \rightarrow R_1 = \frac{\tau_1}{C} \xrightarrow[\tau_1=20\text{s}]{C=10^{-3}\text{F}} R_1 = \frac{20}{10^{-3}} \quad \text{et} \quad R_1 = 2 \cdot 10^4 \Omega.$$

$$\text{On a : } \tau_2 = R_2 \cdot C \rightarrow R_2 = \frac{\tau_2}{C} \xrightarrow[\tau_2=30\text{s}]{C=10^{-3}\text{F}} R_2 = \frac{30}{10^{-3}} \quad \text{et} \quad R_2 = 3 \cdot 10^4 \Omega.$$



$$6^0) E_{th}(t_1, t_2) = E_c(t_1) - E_c(t_2) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot [u_c(t_1)^2 - u_c(t_2)^2].$$

$$\text{Au cours de la décharge complète : } E_{th} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot [u_c(0)^2 - u_c(\infty)^2] = \frac{1}{2} \cdot C \cdot [E^2 - 0] = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2.$$

$$\text{A.N : } E_{th} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \quad \text{et} \quad E_{th} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ J.}$$

Exercice 6 :

On considère le montage du circuit électrique schématisé ci-contre :

1⁰) Le condensateur est initialement déchargé. On ferme l'interrupteur K sur la position 1 à un instant pris comme origine du temps.

Un dispositif d'acquisition des données relié à un ordinateur permet de suivre l'évolution, en fonction du temps, de la tension u_c aux bornes du condensateur. On obtient alors le graphe (a) ci-dessous :

a - La tension u_c aux bornes du condensateur vérifie à chaque instant

$$\text{l'équation différentielle : } R_1 \cdot C \frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

$$\text{Vérifier que : } u_c(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \text{ avec } \tau_1 = R_1 \cdot C \text{ est la solution}$$

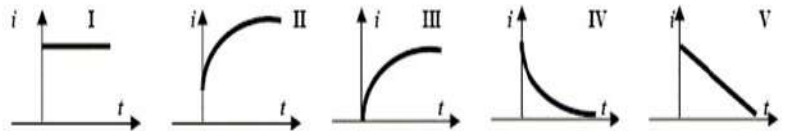
de cette équation différentielle qui respecte la condition initiale.

b - Déterminer graphiquement les valeurs de E et de τ_1 .

c - Sachant que $R_1 = 1 \text{ K}\Omega$, calculer la valeur de la capacité C du condensateur.

d - En admettant que le condensateur est pratiquement totalement chargé à l'instant de date $t = 5\tau_1$, calculer la valeur de l'énergie E_c stockée par le condensateur à cet instant.

e - Quelle est, parmi les courbes suivantes, celle qui représente l'évolution de l'intensité $i(t)$ du courant de charge au cours du temps ? Justifier la réponse.



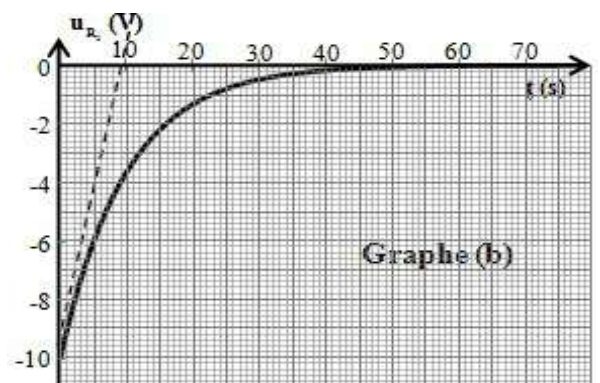
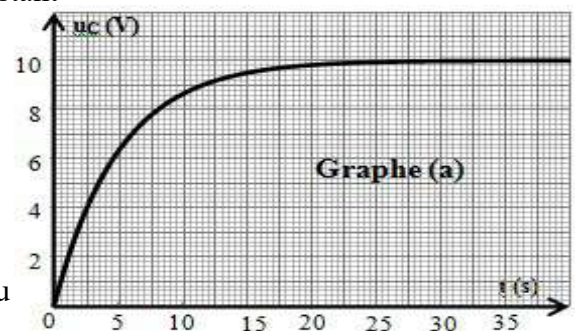
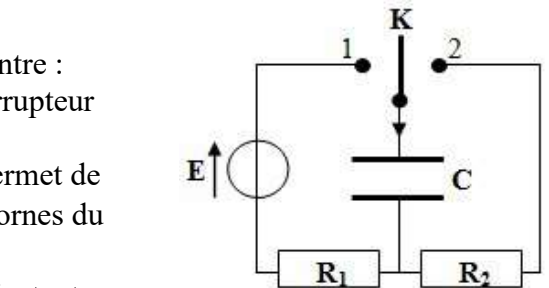
2⁰) Le condensateur étant chargé. On bascule K sur la position 2 à un instant pris comme origine du temps.

Le dispositif d'acquisition relié à l'ordinateur permet de suivre l'évolution, en fonction du temps, de la tension u_{R_2} aux bornes du résistor de résistance R_2 . On obtient le graphe (b) ci-contre :

a - Sachant que $\tau_2 = R_2 \cdot C$ et en exploitant le graphe, montrer que $R_2 = 2R_1$.

b - On donne : $u_c(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$. Montrer alors que l'intensité du courant de décharge est $i(t) = -\frac{E}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 \cdot C}}$.

c - Calculer la valeur de $i(0)$.



Réponse :

1⁰) a - * $u_c(0) = E \left(1 - e^{-\frac{0}{\tau_1}} \right) = E(1-1) = 0$ la condition initiale est vérifiée.

$$* \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \xrightarrow{\text{eq.diff}} R_1 \cdot C \cdot \frac{E}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + E - E e^{-\frac{t}{\tau_1}} = E \rightarrow E e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(\frac{R_1 \cdot C}{\tau_1} - 1 \right) + E = E$$

Cette expression doit être vérifiée à chaque instant $\rightarrow \frac{R_1 \cdot C}{\tau_1} - 1 = 0$ et $\tau_1 = R_1 \cdot C$

b - Graphiquement : $E = 10 \text{ V}$ (valeur de l'asymptote à la courbe $u_C = f(t)$ lorsque t tend vers l'infini).
 $\tau_1 = 5 \text{ s}$ ($u_C(\tau_1) = 0,63 \cdot E = 0,63 \cdot 10 = 6,3 \text{ V}$) ou (méthode de la tangente à l'origine).

c - $\tau_1 = R_1 \cdot C \rightarrow C = \frac{\tau_1}{R_1}$. A.N: $C = \frac{5}{10^3}$ et $C = 5 \cdot 10^{-3} \text{ F}$

d - $E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 \xrightarrow{u_C(5 \cdot \tau_1) = E} E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2$. A.N: $E_C = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2$ et $E_C = 0,25 \text{ J}$.

e - $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q = C \cdot u_C} i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

$i(t) = C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right) = C \cdot \frac{E}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \xrightarrow{\tau_1 = R_1 \cdot C} i(t) = C \cdot \frac{E}{R_1 \cdot C} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ et $i(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$.

La courbe (IV) représente l'évolution de l'intensité $i(t)$ du courant de charge au cours du temps.

2⁰) a - Graphiquement : $\tau_2 = 10 \text{ s}$ (méthode de la tangente à l'origine).

$\left. \begin{array}{l} \tau_1 = R_1 \cdot C \\ \tau_2 = R_2 \cdot C \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_2}{R_1}$ et $R_2 = \frac{\tau_2}{\tau_1} \cdot R_1 \xrightarrow{\frac{\tau_1 = 5 \text{ s}}{\tau_2 = 10 \text{ s}}} R_2 = 2 \cdot R_1$.

b - $u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

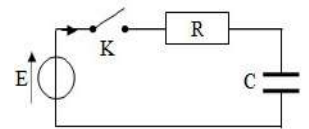
$i(t) = C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right) = C \cdot \left(-\frac{1}{\tau_2} \right) E e^{-\frac{t}{\tau_2}} \xrightarrow{\tau_2 = R_2 \cdot C} i(t) = -C \cdot \frac{E}{R_2 \cdot C} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ et $i(t) = -\frac{E}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

c - $i(0) = -\frac{E}{R_2} e^0 = -\frac{E}{R_2} \rightarrow i(0) = -\frac{10}{2 \cdot 10^3}$ et $i(0) = -5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$.

Exercice 7 :

On étudie la charge d'un condensateur de capacité $C = 100 \mu\text{F}$ à travers un résistor de résistance R par un générateur idéal de f.é.m E .

Le condensateur est initialement déchargé et à $t = 0$, on ferme le circuit de charge.



1⁰) a - En utilisant la convention récepteur, représenter par une flèche la tension u_C aux bornes du condensateur et par une autre la tension u_R aux bornes du résistor.

b - Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur pendant la charge.

c - La solution de cette équation différentielle est de la forme $u_C(t) = A e^{-\alpha \cdot t} + B$ où A , α et B sont des

constantes. En posant $\tau = R \cdot C$, montrer que $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$.

d - En déduire alors que $u_R(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

2⁰) a - Comment appelle-t-on le produit $\tau = R \cdot C$?

b - Vérifier que τ est homogène à un temps.

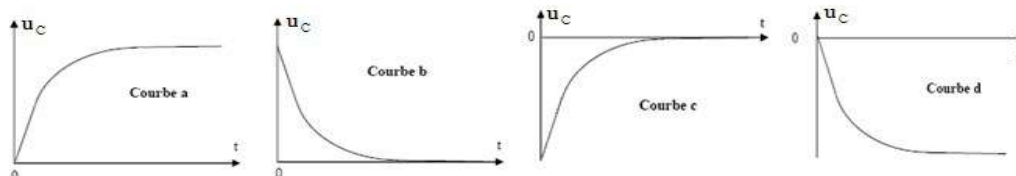
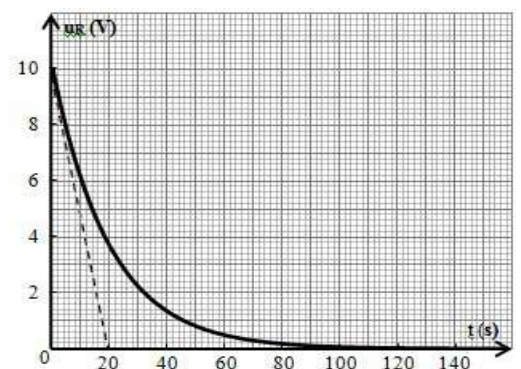
3⁰) La courbe ci-contre donne l'évolution de la tension u_R aux bornes du résistor au cours du temps :

a - Déterminer graphiquement les valeurs de E et de τ .

b - Calculer la valeur de la résistance R du résistor.

4⁰) Calculer la valeur de l'énergie électrostatique E_C emmagasinée par le condensateur à la fin de la charge.

5⁰) Indiquer, parmi les courbes ci-dessous, celle qui représente la tension u_C . Justifier la réponse.



6⁰) Le montage du circuit est modifié en ajoutant :

- aux bornes du condensateur :

un bouton poussoir P qui joue le rôle d'un interrupteur qui se ferme seulement lorsqu'on appuie dessus.

- aux bornes du résistor :

un composant électronique M qui permet l'allumage de la lampe L tant que la tension aux bornes du résistor reste supérieure à une valeur limite $U = 3 \text{ V}$ caractéristique du composant électronique M.

Le composant électronique M a une alimentation propre et ne perturbe pas le fonctionnement du circuit RC. A $t = 0$, le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K, le bouton poussoir P est relâché.

a - Déterminer graphiquement, à partir de la courbe $u_R = f(t)$, la durée t_A d'allumage de la lampe L.

b - Etablir l'expression de t_A en fonction de U , E et τ .

c - Calculer alors la valeur de t_A .

7⁰) a - On appuie sur le bouton poussoir P. Que vaut la tension aux bornes du condensateur ?

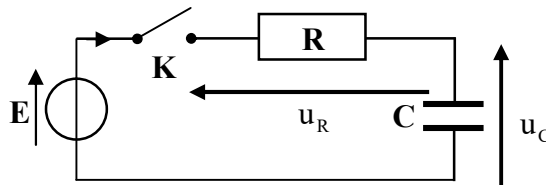
b - Que se passe-t-il alors pour la lampe dans les deux cas suivants :

- si la lampe est déjà allumée.

- si la lampe est éteinte.

Réponse :

1⁰) a -



b - La loi des mailles s'écrit : $u_R + u_C - E = 0 \rightarrow u_R + u_C = E$

On a : $u_R = Ri \rightarrow Ri + u_C = E$

Sachant que : $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$, il vient alors que : $R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$.

c - On a : $u_C(t) = Ae^{-\alpha \cdot t} + B$ où A, B et α sont des constantes.

$$* \frac{du_C}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha \cdot t} \rightarrow -\alpha R \cdot C \cdot Ae^{-\alpha \cdot t} + Ae^{-\alpha \cdot t} + B = E \rightarrow Ae^{-\alpha \cdot t} (1 - \alpha R \cdot C) + B = E$$

$$\text{Cette expression étant valable à chaque instant} \rightarrow \begin{cases} B = E \\ 1 - \alpha R \cdot C = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{R \cdot C} \end{cases}$$

$$\text{donc : } u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{R \cdot C}} + E$$

$$* \text{ D'autre part et à } t = 0, u_C(0) = 0 \rightarrow A + E = 0 \rightarrow A = -E \quad \text{donc : } u_C(t) = -Ee^{-\frac{t}{R \cdot C}} + E$$

$$\text{On pose } \tau = R \cdot C, \text{ Il vient alors que : } u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\text{d - On a : } u_R(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{i = \frac{dq}{dt} \rightarrow q = C \cdot u_C} u_R(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$\xrightarrow{\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}} u_R(t) = R \cdot C \cdot \frac{E}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{\tau = R \cdot C} u_R(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

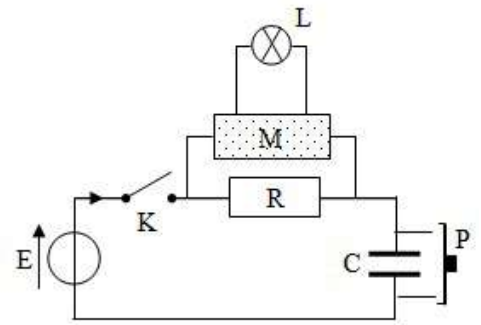
2⁰) a - Le produit $\tau = R \cdot C$ s'appelle constante de temps du dipôle RC.

$$\text{b - L'analyse dimensionnelle de } \tau \rightarrow [\tau] = [R][C] = \frac{[U]}{[I]} \frac{[q]}{[U]} = \frac{[I][t]}{[I]} = [t]$$

Donc τ est homogène à un temps, elle s'exprime alors en seconde.

3⁰) a - Graphiquement : * $u_R(0) = E \rightarrow E = 10 \text{ V}$.

* méthode de la tangente à l'origine $\rightarrow \tau = 20 \text{ s}$.



b - On a : $\tau = R.C \rightarrow R = \frac{\tau}{C}$. A.N : $R = \frac{20}{10^{-4}}$ et $R = 20.10^4 \Omega$ ou $R = 200 K\Omega$.

4⁰ $E_C(t) = \frac{1}{2}.C.[u_C(t)]^2 \xrightarrow[u_R=0 \xrightarrow{u_R+u_C=E}]{\text{A la fin de la charge (régime permanent)}} u_C=E E_C = \frac{1}{2}.C.E^2$.

A.N : $E_C = \frac{1}{2}.10^{-4}.10^2$ et $E_C = 5.10^{-3} J$.

5⁰ $u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \rightarrow \begin{cases} u_C(0) = 0 \\ u_C(t) \text{ croît au cours du temps} \end{cases} \rightarrow u_C(t) \text{ est représentée par la courbe (a)}$

6⁰ **a -** $u_R(t_A) = 3 V \xrightarrow{\text{graphiquement}} t_A = 24 s$.

b - $u_R(t_A) = U \rightarrow E.e^{-\frac{t_A}{\tau}} = U \rightarrow e^{-\frac{t_A}{\tau}} = \frac{U}{E} \rightarrow -\frac{t_A}{\tau} = \ln\left(\frac{U}{E}\right)$ et $t_A = \tau.\ln\left(\frac{E}{U}\right)$

c - A.N : $t_A = 20.\ln\left(\frac{10}{3}\right)$ et $t_A = 24,1 s$.

7⁰ **a -** On appuie sur P alors $u_C = 0$ (le condensateur sr court-circuité).

b - * Si la lampe est allumée, elle reste allumée.

* Si la lampe est éteinte, elle s'allume.

Exercice 8 :

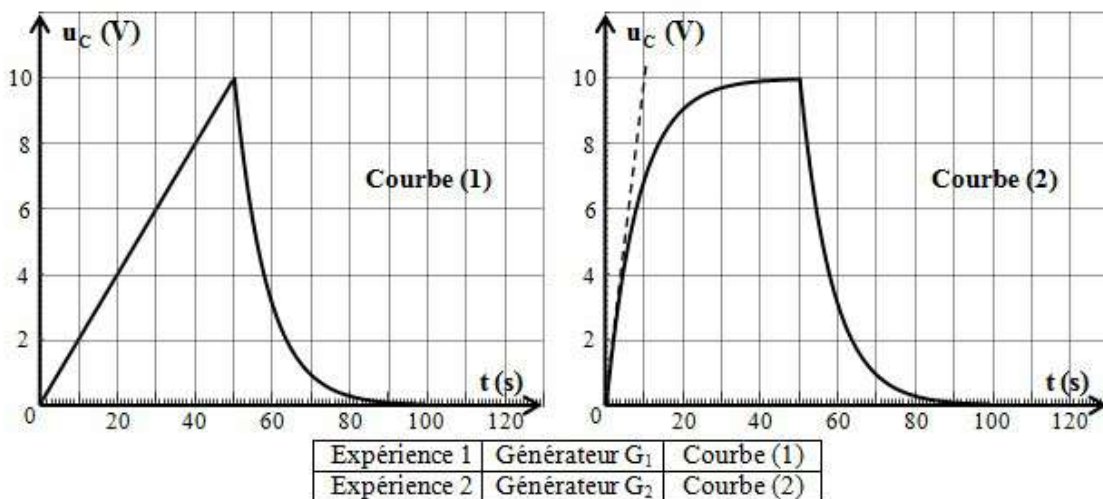
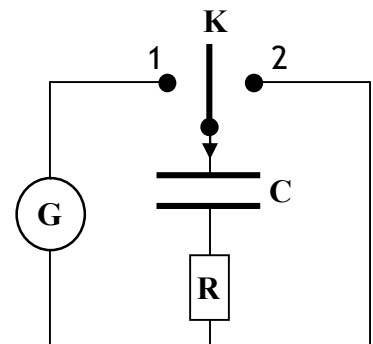
On se propose d'étudier la charge et la décharge d'un condensateur de capacité C à travers un résistor de résistance R. Pour cela, on réalise le montage électrique schématisé ci-contre.

Le condensateur est initialement déchargé.

A l'instant $t = 0$, on place le commutateur K sur la position (1) puis, à un instant $t = t_d$, on bascule le commutateur dans la position (2).

La même expérience est réalisée par deux générateurs différents G_1 et G_2 . L'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur au cours

du temps, pour chacune des deux expériences, est tracée sur le graphe ci-dessous :



1⁰ **a -** Déterminer graphiquement la valeur de l'instant t_d .

b - Le générateur utilisé est, soit un générateur de courant débitant une intensité I constante, soit un générateur de tension idéal de f é m E. Sachant que l'intensité du courant s'exprime par $i(t) = C.\frac{du_C}{dt}$, montrer que G_1 est le générateur de courant.

c - Montrer que dans l'expérience 1, entre $t = 0$ et $t = t_d$, la tension u_C s'exprime par $u_C(t) = \frac{I}{C}.t$.

d - Sachant que $I = 20 \mu A$, déterminer la valeur de la capacité C du condensateur.

2⁰ On s'intéresse à l'expérience 2 :

a - Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur pendant la phase de charge.

b - La solution de cette équation différentielle est de la forme $u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B$ où A , τ et B sont des constantes. Déterminer les expressions de ces constantes en fonction des caractéristiques du circuit.

c - Rappeler le nom de la constante τ et vérifier qu'elle est homogène à un temps.

3⁰) a - Déterminer graphiquement les valeurs de E et de τ .

b - Calculer la valeur de la résistance R du résistor.

c - Déterminer la valeur de l'énergie électrostatique E_C emmagasinée par le condensateur à la fin de la phase de charge.

4⁰) On s'intéresse à la phase de décharge dans les deux expériences. La fermeture de K sur la position 2 est prise comme nouvelle origine du temps.

La tension u_C aux bornes du condensateur s'exprime alors par $u_C(t) = U_{Cm}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

a - Si le condensateur était préalablement chargé pendant une durée de $2.t_d$, quelle serait la valeur de U_{Cm1} et de U_{Cm2} respectivement dans l'expérience 1 et l'expérience 2.

b - La tension maximale que peut supporter le condensateur est $U_{max} = 25 \text{ V}$.

Peut-on, dans chaque expérience, charger le condensateur pendant une durée de $3.t_d$? Justifier la réponse

Réponse :

1⁰) a - Graphiquement et dans les deux expériences : $t_d = 50 \text{ s}$.

b - Un générateur de courant débite un courant $i = I = \text{constante} \xrightarrow{i = C \cdot \frac{du_C}{dt}} \frac{du_C}{dt} = \text{constante}$. La tension u_C est alors une fonction affine du temps.

Sur la courbe (1) et entre $t = 0$ et $t = t_d$, la tension u_C varie linéairement donc G_1 est le générateur de courant.

c - Dans l'expérience 1 et entre $t = 0$ et $t = t_d$, $i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = I = \text{constante} \rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{I}{C} \rightarrow u_C(t) = \frac{I}{C} \cdot t + b$
 A $t = 0$, $u_C(0) = 0 \rightarrow b = 0$ donc $u_C(t) = \frac{I}{C} \cdot t$.

d - Sur la courbe (1) et entre $t = 0$ et $t = t_d$, $u_C(t) = a \cdot t$ avec $a = \frac{10-0}{50-0}$ et $a = 0,2 \text{ V.s}^{-1}$.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{théoriquement: } u_C(t) = \frac{I}{C} \cdot t \\ \text{graphiquement: } u_C(t) = a \cdot t \end{array} \right. \rightarrow \frac{I}{C} = a \text{ et } C = \frac{I}{a}$. A.N : $C = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{0,2}$ et $C = 10^{-4} \text{ F}$ ($C = 100 \mu\text{F}$).

2⁰) a - La loi des mailles s'écrit : $u_R + u_C - E = 0 \rightarrow u_R + u_C = E$

On a : $u_R = Ri \rightarrow Ri + u_C = E$.

Sachant que : $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q = C \cdot u_C} i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

il vient alors que : $R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$.

b - On a : $u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B$ où A, B et τ sont des constantes.

$\frac{du_C}{dt} = -\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow -\frac{R \cdot C}{\tau} \cdot A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B = E \rightarrow A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - \frac{R \cdot C}{\tau} \right) + B = E$

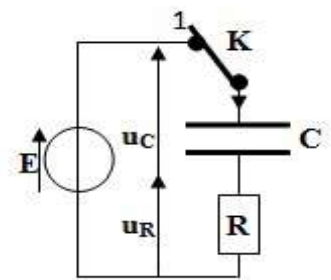
Cette expression étant valable à chaque instant : $\rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{R \cdot C}{\tau} = 0 \rightarrow 1 = \frac{R \cdot C}{\tau} \text{ et } \tau = R \cdot C \\ B = E \end{cases}$

D'autre part et à $t = 0$, $u_C(0) = 0 \rightarrow A + E = 0 \rightarrow A = -E$.

c - Le produit $\tau = R \cdot C$ s'appelle constante de temps du dipôle RC.

L'analyse dimensionnelle de $\tau \rightarrow [\tau] = [R][C] = \frac{[U]}{[I]} \frac{[q]}{[U]} = \frac{[I][t]}{[I]} = [t]$

Donc τ est homogène à un temps, elle s'exprime alors en seconde.



3⁰) a - Graphiquement : * $u_c = E$ en régime permanent $\rightarrow E = 10 \text{ V}$.

* méthode de la tangente à l'origine $\rightarrow \tau = 10 \text{ s}$.

b - On a : $\tau = R.C \rightarrow R = \frac{\tau}{C}$. A.N : $R = \frac{10}{10^{-4}}$ et $R = 10^5 \Omega$ ou $R = 100 \text{ K}\Omega$.

c - $E_c(t) = \frac{1}{2}.C.[u_c(t)]^2 \xrightarrow[u_c=E]{\text{A la fin de la charge (régime permanent)}} E_c = \frac{1}{2}.C.E^2$.

A.N : $E_c = \frac{1}{2}.10^{-4}.10^2$ et $E_c = 5.10^{-3} \text{ J}$.

4⁰) a - Dans l'expérience 1 :

$U_{Cm1} = a.t \xrightarrow{t=2.t_d} U_{Cm1} = a.2.t_d$ A.N : $U_{Cm1} = 0,2.2.50$ et $U_{Cm1} = 20 \text{ V}$.

Dans l'expérience 2 : si $t = 2.t_d$, $U_{Cm2} = E$ car à partir de $t = t_d$ le régime permanent est établi.

Donc $U_{Cm2} = 10 \text{ V}$.

b - Dans l'expérience 1 : $U_{\max} = a.t_{\max} \rightarrow t_{\max} = \frac{U_{\max}}{a}$ A.N : $t_{\max} = \frac{25}{0,2}$ et $t_{\max} = 125 \text{ s}$.

$\frac{t_{\max}}{t_d} = \frac{125}{50} = 2,5$ $t_{\max} = 2,5.t_d$. Donc on ne peut pas charger le condensateur pendant une durée de $3.t_d$ car

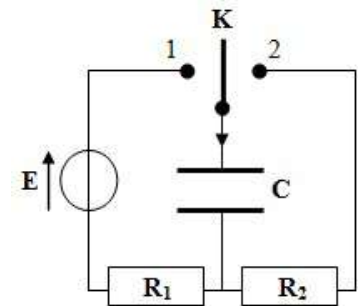
pour $t = 3.t_d > t_{\max} \rightarrow U_{Cm} > U_{\max}$ et le condensateur subit un claquage.

Dans l'expérience 2 : on peut charger le condensateur pendant une durée de $3.t_d$ car à partir de $t = t_d$ le régime permanent est établi et $U_{Cm} = E < U_{\max}$ donc le condensateur ne risque pas de claquer.

Exercice 9 :

On considère le montage du circuit électrique schématisé ci-contre :

Un dispositif d'acquisition des données relié à un ordinateur permet de suivre l'évolution, en fonction du temps, de la tension u_c aux bornes du condensateur.



I - Charge du condensateur :

Le condensateur est initialement déchargé. On bascule le commutateur K sur la position 1 à un instant pris comme origine du temps.

On enregistre alors le graphe (a) donnant la courbe $u_c = f(t)$ ci-dessous:

1⁰) a - Etablir l'équation différentielle :

$$R_1.C \frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

b - La solution de cette équation différentielle est de la forme : $u_c(t) = Ae^{-\alpha.t} + B$ où A, α et B sont des constantes.

On pose $\tau_1 = R_1.C$; Montrer que $u_c(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$.

2⁰) a - Comment appelle-t-on le produit $\tau_1 = R_1.C$?

b - Vérifier que τ_1 est homogène à un temps.

3⁰) a - Déterminer graphiquement les valeurs de E et de τ_1 .

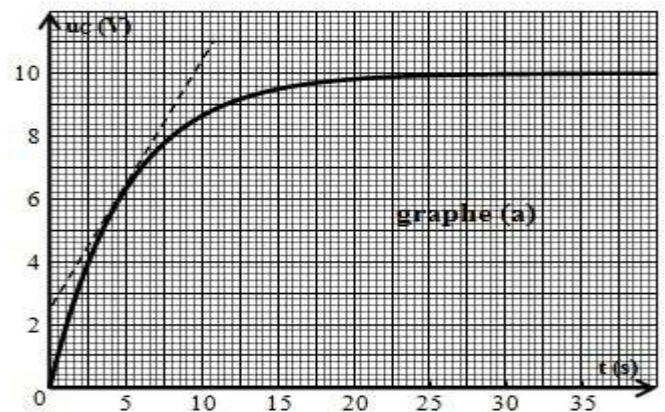
b - Sachant que $R_1 = 10 \text{ K}\Omega$, calculer la valeur de la capacité C du condensateur.

4⁰) a - Déterminer la valeur $u_{R_1}(\tau_1)$ de la tension aux bornes du résistor à l'instant τ_1 .

En déduire la valeur de l'intensité $i(\tau_1)$ du courant à cet instant.

b - Sachant que $i(t) = C \left(\frac{du_c}{dt} \right)_t$ et en exploitant la tangente à la courbe $u_c = f(t)$ au point d'abscisse τ_1 ,

retrouver la valeur de la capacité C du condensateur.



II - Décharge du condensateur :

Le condensateur étant pratiquement complètement chargé, on bascule le commutateur K sur la position 2 à un instant pris comme origine du temps.

On enregistre alors le graphe (b) donnant la courbe $u_C = f(t)$ ci-dessous:

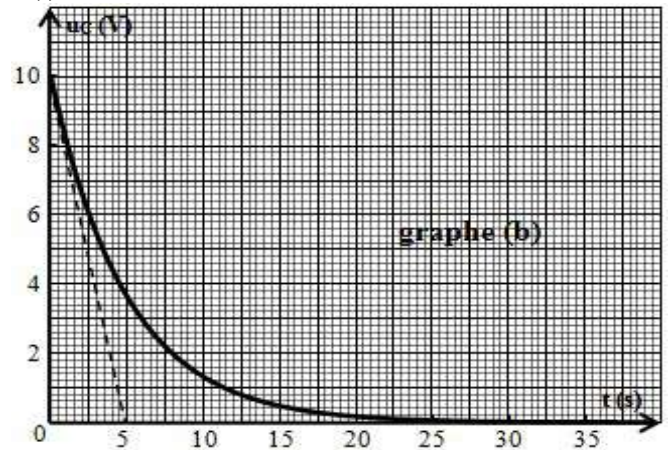
5⁰) a - Trouver graphiquement la valeur de $\tau_2 = R_2.C$
En déduire la valeur de R_2 .

b - En exploitant la loi des mailles, calculer la valeur $i(0)$ de l'intensité du courant à $t = 0$.

c - En utilisant la tangente à la courbe $u_C = f(t)$ en $t = 0$, retrouver la valeur de $i(0)$.

6⁰) Soit $E_C(0)$ l'énergie électrostatique initialement emmagasinée dans le condensateur.

Soit $E_{th}(t)$ l'énergie dissipée par effet Joule dans le résistor à l'instant t .



a - Sachant que $u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$, montrer que : $E_{th}(t) = E_C(0) \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot \frac{t}{\tau_2}}\right)$

b - Calculer le rapport $\frac{E_{th}(t)}{E_C(0)}$ pour $t = 5\tau_2$. Commenter le résultat.

Réponse :

1⁰) a - La loi des mailles s'écrit : $u_{R_1} + u_C - E = 0 \rightarrow u_{R_1} + u_C = E$

On a : $u_{R_1} = R_1 \cdot i \rightarrow R_1 \cdot i + u_C = E$

Sachant que : $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

il vient alors que : $R_1 \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$.

b - On a : $u_C(t) = A \cdot e^{-\alpha \cdot t} + B$ où A, B et α sont des constantes.

$$\frac{du_C}{dt} = -\alpha \cdot A \cdot e^{-\alpha \cdot t} \rightarrow -\alpha R_1 \cdot C \cdot A \cdot e^{-\alpha \cdot t} + A \cdot e^{-\alpha \cdot t} + B = E \rightarrow A \cdot e^{-\alpha \cdot t} (1 - \alpha \cdot R_1 \cdot C) + B = E$$

Cette expression étant valable à chaque instant :

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - \alpha \cdot R_1 \cdot C = 0 \rightarrow 1 = \alpha R_1 \cdot C \xrightarrow{\tau_1 = R_1 \cdot C} \alpha = \frac{1}{\tau_1} \\ B = E \end{cases}$$

D'autre part et à $t = 0$, $u_C(0) = 0 \rightarrow A + E = 0 \rightarrow A = -E$.

Donc $u_C(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + E$ ou bien $u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$; $\tau_1 = R_1 \cdot C$

2⁰) a - Le produit $\tau_1 = R_1 \cdot C$ s'appelle constante de temps du dipôle RC.

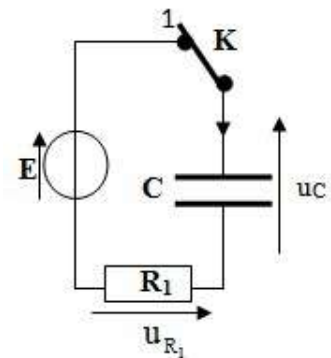
b - L'analyse dimensionnelle de $\tau_1 \rightarrow [\tau_1] = [R_1][C] = \frac{[U]}{[I]} \frac{[q]}{[U]} = \frac{[I][t]}{[I]} = [t]$

Donc τ_1 est homogène à un temps, elle s'exprime alors en seconde.

3⁰) a - Graphiquement : * $u_C = E$ en régime permanent $\rightarrow E = 10 \text{ V}$.

$$* u_C(\tau_1) = 0,63 \cdot E = 0,63 \cdot 10 = 6,3 \text{ V} \rightarrow \tau_1 = 5 \text{ s.}$$

b - On a : $\tau_1 = R_1 \cdot C \rightarrow C = \frac{\tau_1}{R_1}$. A.N : $C = \frac{5}{10^4}$ et $C = 5 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ ou $C = 500 \mu\text{F}$.



4⁰) a - D'après la loi des mailles : $u_{R_1}(\tau_1) + u_C(\tau_1) = E$

$$\rightarrow u_{R_1}(\tau_1) = E - u_C(\tau_1) \xrightarrow{\text{A.N}} u_{R_1}(\tau_1) = 10 - 6,3 \text{ et } u_{R_1}(\tau_1) = 3,7 \text{ V.}$$

$$\text{On a : } u_{R_1}(\tau_1) = R_1 \cdot i(\tau_1) \rightarrow i(\tau_1) = \frac{u_{R_1}(\tau_1)}{R_1} \xrightarrow{\text{A.N}} i(\tau_1) = \frac{3,7}{10^4} \text{ et } i(\tau_1) = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ A.}$$

$$\text{b - } i(\tau_1) = C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=\tau_1} \rightarrow C = \frac{i(\tau_1)}{\left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=\tau_1}} \xrightarrow{\text{graphiquement}} C = \frac{3,7 \cdot 10^{-4}}{\left(\frac{6,3 - 2,6}{5 - 0} \right)} \text{ et } C = 5 \cdot 10^{-4} \text{ F.}$$

5⁰) a - Graphiquement (méthode de la tangente à l'origine) : $\tau_2 = 5 \text{ s.}$

$$\text{On a : } \tau_2 = R_2 \cdot C \rightarrow R_2 = \frac{\tau_2}{C}. \text{ A.N : } R_2 = \frac{5}{5 \cdot 10^{-4}} \text{ et } R_2 = 10^4 \Omega.$$

b - La loi des mailles s'écrit : $u_{R_2} + u_C = 0$

$$u_{R_2}(0) + u_C(0) = 0 \xrightarrow[u_C(0)=E]{u_{R_2}=R_2 \cdot i} R_2 \cdot i(0) + E = 0 \rightarrow i(0) = -\frac{E}{R_2}.$$

$$\text{A.N : } i(0) = -\frac{10}{10^4} \text{ et } i(0) = -10^{-3} \text{ A.}$$

$$\text{c - } i(0) = C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=0} \xrightarrow{\text{graphiquement}} i(0) = 5 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{10 - 0}{0 - 5} \right) \text{ et } i(0) = -10^{-3} \text{ A.}$$

5⁰) a - $E_{th}(t) = E_C(0) - E_C(t)$

$$E_{th}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(0) - \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 - \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau_2}} \right)$$

$$\text{et } E_{th}(t) = E_C(0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau_2}} \right).$$

$$\text{b - } \frac{E_{th}(5 \cdot \tau_2)}{E_C(0)} = 1 - e^{-\frac{2 \cdot 5 \cdot \tau_2}{\tau_2}} = 1 - e^{-10} \text{ et } \frac{E_{th}(5 \cdot \tau_2)}{E_C(0)} = 0,9995.$$

$$\frac{E_{th}(5 \cdot \tau_2)}{E_C(0)} \simeq 1 \rightarrow \text{à } t = 5 \cdot \tau_2 \text{ pratiquement la totalité de l'énergie initialement stockée par le condensateur est}$$

dissipée par effet Joule dans le résistor donc à $t = 5 \cdot \tau_2$ le condensateur est pratiquement déchargé.

Exercice 10 :

On considère le montage du circuit électrique schématisé ci-contre :

Le générateur de tension idéal a une f.e.m $E = 10 \text{ V.}$

Le condensateur étant initialement déchargé, on bascule, à l'instant $t = 0$, le commutateur K sur la position 1.

1⁰) Montrer que l'équation différentielle qui gère l'évolution de la tension

$$u_C \text{ aux bornes du condensateur au cours du temps est : } \tau \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right) + u_C = E \text{ avec } \tau = R \cdot C$$

2⁰) On donne ci-contre les courbes d'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur et de l'intensité $i(t)$ du courant qui parcourt le circuit au cours du temps.

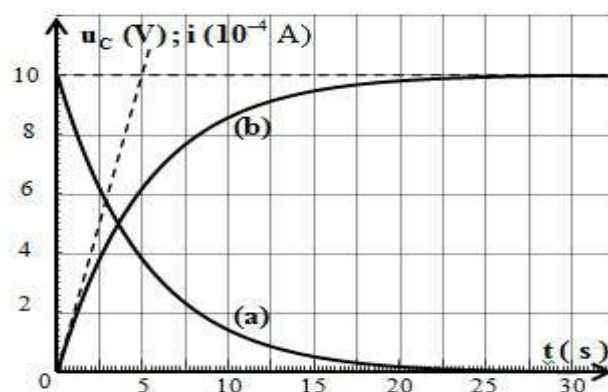
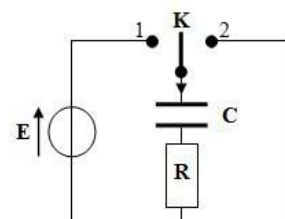
$$\text{Sachant que } u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) :$$

a - Identifier les courbes (a) et (b).

b - Trouver graphiquement la valeur de τ .

c - Dédurre de l'expression de $u_C(t)$ celle de $i(t)$.

d - Déterminer la valeur de C et celle de R .



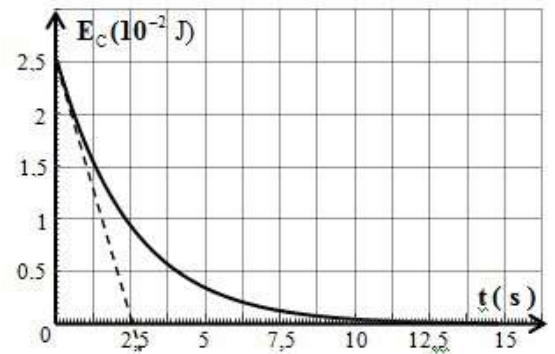
3⁰) Calculer la valeur de l'énergie électrique E_{cm} stockée par le condensateur lorsque le régime permanent est établi.

4⁰) Le condensateur étant initialement totalement chargé, on bascule, à l'instant $t = 0$, le commutateur K sur la position 2.

a - L'équation différentielle qui gère l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur au cours du temps est : $\tau \left(\frac{du_C}{dt} \right) + u_C = 0$ avec $\tau = R.C$

Montrer que l'évolution au cours du temps de l'énergie électrique E_C emmagasinée par le condensateur est gérée par une équation différentielle de la forme : $\tau \left(\frac{dE_C}{dt} \right) + 2E_C = 0$ avec $\tau = R.C$

b - On donne ci-contre la courbe d'évolution de E_C au cours du temps. Sachant que $E_C(t) = E_{cm} \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}}$:



Déterminer graphiquement les valeurs de E_{cm} et de $\left(\frac{dE_C}{dt} \right)_{t=0}$. Dédurre alors les valeurs de C et de R .

c - Calculer la valeur de l'énergie thermique E_{th} dissipée par effet Joule dans le résistor entre $t = 0$ et $t = \tau$.

Réponse :

1⁰) La loi des mailles s'écrit : $u_R + u_C - E = 0 \rightarrow u_R + u_C = E$

On a : $u_R = R \cdot i \rightarrow R \cdot i + u_C = E$

Sachant que : $i = \left(\frac{dq}{dt} \right)_t \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i = C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t$, on écrit : $R.C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t + u_C = E$

On pose $\tau = R.C$, il vient alors que : $\tau \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t + u_C = E$

2⁰) a - $u_C(0) = 0 \rightarrow$ la courbe (b) correspond à $u_C(t)$ et par conséquent la courbe (a) correspond à $i(t)$.

b - Graphiquement : $\tau = 5$ s.

c - On a : $i(t) = C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t \xrightarrow{u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)} i(t) = C \cdot \frac{E}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{\tau = R.C} i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

d - * $i(0) = \frac{E}{R} \rightarrow R = \frac{E}{i(0)} \xrightarrow[A.N:]{i(0)=10 \cdot 10^{-4} A} R = \frac{10}{10 \cdot 10^{-4}} \text{ et } R = 10^4 \Omega$.

* $\tau = R.C \rightarrow C = \frac{\tau}{R}$. A.N: $C = \frac{5}{10^4}$ et $C = 10^{-4} F$.

3⁰) En régime permanent : $u_{Cmax} = E \rightarrow E_{cm} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2$. A.N: $E_{cm} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2$ et $E_{cm} = 2,5 \cdot 10^{-2} J$.

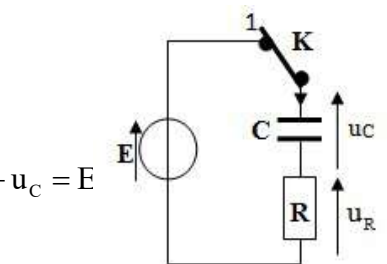
4⁰) a - On a : $E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 \rightarrow \left(\frac{dE_C}{dt} \right)_t = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 2 \cdot u_C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t = C \cdot u_C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t$

On a : $\tau \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t + u_C = 0 \rightarrow C \cdot u_C \left[\tau \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t + u_C \right] = 0 \rightarrow \tau \cdot C \cdot u_C \cdot \left(\frac{du_C}{dt} \right)_t + C \cdot u_C^2 = 0$

Sachant que : $C \cdot u_C^2 = 2 \cdot E_C$, il vient alors que : $\tau \left(\frac{dE_C}{dt} \right)_t + 2 \cdot E_C = 0$

b - Graphiquement : $E_{cm} = 2,5 \cdot 10^{-2} J$.

$\left(\frac{dE_C}{dt} \right)_{t=0} = \frac{(2,5 - 0) \cdot 10^{-2}}{0 - 2,5}$ et $\left(\frac{dE_C}{dt} \right)_{t=0} = -10^{-2} J \cdot s^{-1}$.



$$* E_{Cm} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 \rightarrow C = \frac{2 \cdot E_{Cm}}{E^2}. \text{ A.N : } C = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}}{10^2} \text{ et } C = 5 \cdot 10^{-4} \text{ F.}$$

$$* E_C(t) = E_{Cm} \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}} \rightarrow \left(\frac{dE_C}{dt} \right)_{t=0} = -\frac{2}{\tau} \cdot E_{Cm} = -\frac{2}{R \cdot C} \cdot \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 = -\frac{E^2}{R} \rightarrow R = -\frac{E^2}{\left(\frac{dE_C}{dt} \right)_{t=0}}.$$

$$\text{A.N : } R = -\frac{10^2}{-10^{-2}} \text{ et } R = 10^4 \Omega.$$

$$\text{c - } E_{th} = E_C(0) - E_C(\tau) \xrightarrow{E_C(t) = E_{Cm} \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}}} E_{th} = E_{Cm} (1 - e^{-2}).$$

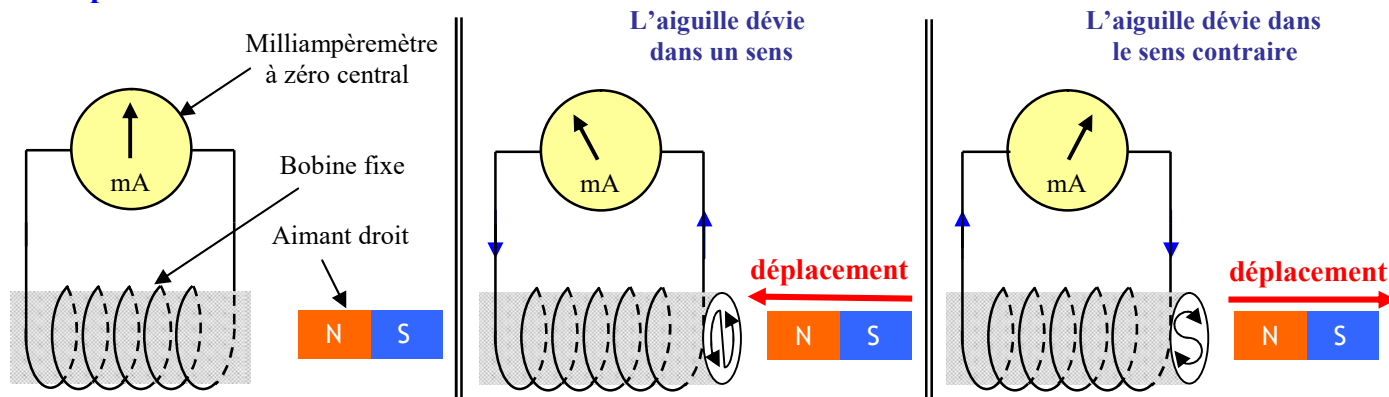
$$\text{A.N : } E_{th} = 2,5 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-2}) \text{ et } E_{th} = 2,16 \cdot 10^{-2} \text{ J.}$$

L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

I / Mise en évidence du phénomène d'induction électromagnétique :

1⁰) Production d'un courant induit :

a - Expériences :



- Si l'aimant et la bobine sont fixent, rien ne se passe.
- On approche rapidement le pôle nord de l'aimant de la bobine suivant son axe, le milliampèremètre indique le passage d'un courant dans un sens.
- On éloigne rapidement le pôle nord de l'aimant de la bobine suivant son axe, le milliampèremètre indique alors le passage d'un courant dans le sens contraire.
- Le courant s'annule dès que le mouvement de l'aimant cesse.

Remarques :

- Si le pôle sud de l'aimant était en regard de la bobine, on obtiendrait dans chaque cas un courant de sens inverse.
- On obtiendrait le même résultat si, dans chaque cas, on maintient l'aimant fixe et on déplace la bobine.

b - Conclusion et définitions :

Lors du déplacement relatif d'une bobine et d'un aimant (le déplacement de l'un par rapport à l'autre), un courant électrique circule dans le circuit fermé de la bobine (qui ne comporte pourtant pas de générateur !). Ce courant électrique est appelé **courant induit**.

Le phénomène qui l'engendre s'appelle **induction électromagnétique**.

Le circuit fermé dans lequel le courant induit apparaît s'appelle l'**induit**.

L'aimant qui permet de créer le courant induit s'appelle **inducteur**.

Remarque :

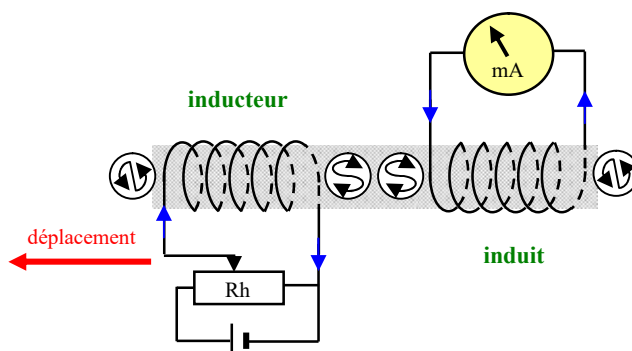
L'intensité du courant induit augmente avec la rapidité du déplacement relatif inducteur - induit.

c - Autre mode de production :

Lorsqu'on déplace le curseur du rhéostat, on fait varier l'intensité du courant dans l'inducteur.

Un courant apparaît alors dans l'induit.

L'apparition du courant induit est due à la variation de l'intensité du courant inducteur au cours du temps dans l'inducteur.



2⁰) Interprétation :

L'induit est placé dans le champ magnétique de l'inducteur.

La variation au cours du temps du champ magnétique, due à l'inducteur, engendre le phénomène d'induction électromagnétique dans l'induit.

Ce champ magnétique variable est appelé **champ inducteur**.

L'induction se manifeste par la circulation dans l'induit, si c'est un circuit fermé, d'un courant électrique appelé **courant induit**.

3⁰) Conclusion :

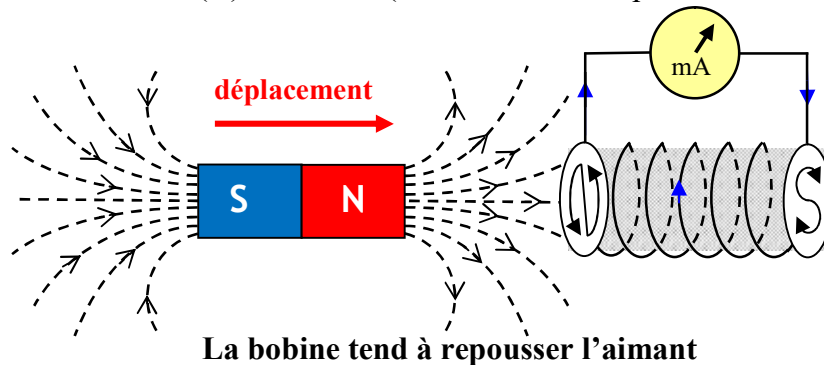
La variation au cours du temps d'un champ magnétique fait apparaître, dans un circuit fermé placé dans ce champ, un courant électrique appelé courant induit : c'est le phénomène d'induction électromagnétique.

II / Le sens du courant induit :

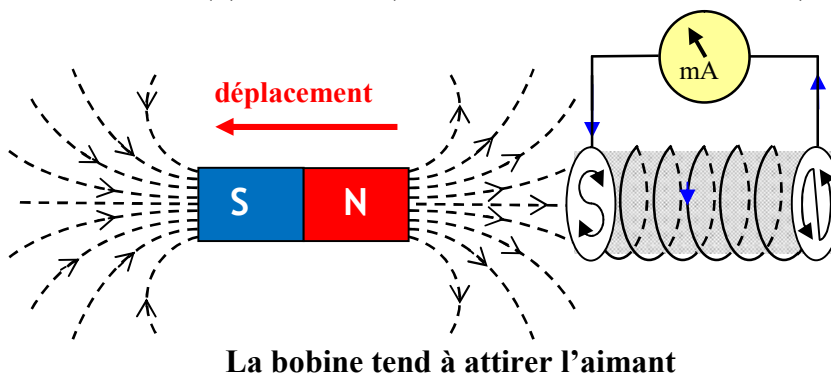
1⁰) Effet de modération du courant induit :

a - Constatations expérimentales :

Lorsqu'on approche le pôle nord (N) de l'aimant de la bobine, le sens du courant induit est de sorte que la bobine présente une face nord (N) à l'aimant (la bobine tend à repousser l'aimant).



Lorsqu'on éloigne le pôle nord (N) de l'aimant de la bobine, le sens du courant induit est de sorte que la bobine présente une face sud (S) à l'aimant (la bobine tend à attirer l'aimant).



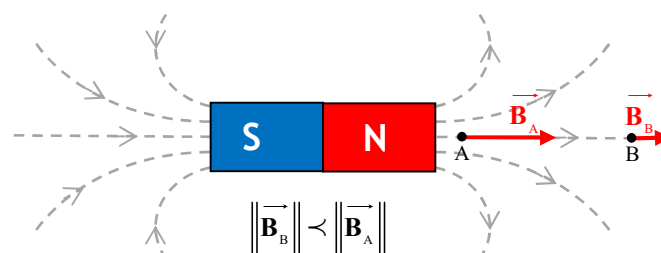
b - Généralisation :

- Lorsqu'on approche l'aimant de la bobine, l'effet induit tend à l'éloigner.
- Lorsqu'on éloigne l'aimant de la bobine, l'effet induit tend à l'attirer.

On en conclue que : **l'effet induit tend toujours à s'opposer à l'effet inducteur.**

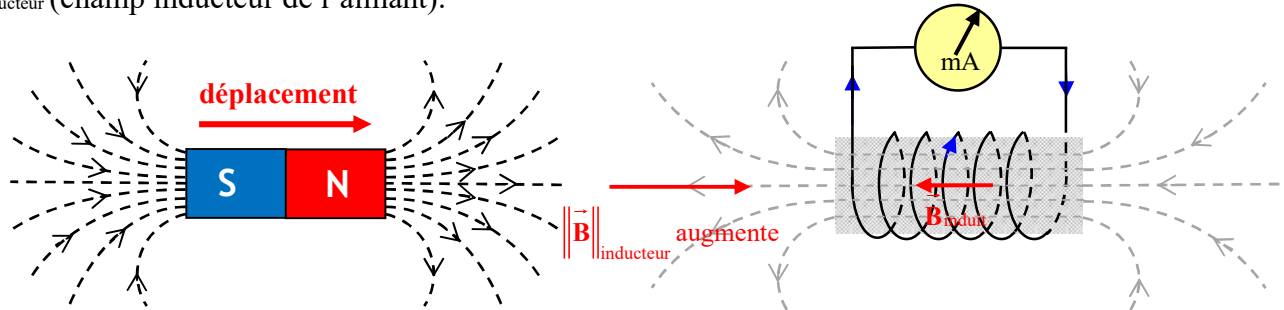
c - Interprétation :

- Le champ magnétique de l'aimant varie autour de l'aimant. Les lignes de champ, qui divergent du pôle nord et convergent vers le pôle sud, se resserrent près des pôles. Le champ magnétique de l'aimant devient donc plus intense en s'approchant des pôles. Le vecteur induction magnétique $\vec{B}$, tangent en tout point à la ligne de champ et de même sens, a un module qui augmente en s'approchant des pôles.



- La bobine est placée dans le champ magnétique de l'aimant.

On approche le pôle nord de l'aimant de la bobine suivant son axe. Le champ magnétique dans lequel est plongée la bobine augmente (champ inducteur), celle-ci réagit en modérant cette augmentation : le circuit fermé de la bobine sera alors parcouru par un courant induit dans le sens où le champ magnétique qu'il génère dans la bobine (champ induit) s'oppose à l'augmentation du champ inducteur. Le vecteur induction magnétique $\vec{B}_{\text{induit}}$ (champ induit de la bobine) sera de sens opposé à celui du vecteur induction magnétique $\vec{B}_{\text{inducteur}}$ (champ inducteur de l'aimant).



- Conclusion : Lorsque le champ magnétique inducteur varie, un courant induit apparaît dans le sens où le champ magnétique qu'il crée, appelé champ induit, s'oppose à la variation du champ inducteur

	augmentation	diminution
Champ inducteur :	initial: $\text{---} \rightarrow$ final: $\text{---} \rightarrow$	$\text{---} \rightarrow$ $\text{---} \rightarrow$
Champ induit :	$\leftarrow \text{---}$ sens opposé	$\text{---} \rightarrow$ même sens

2⁰) La loi de Lenz :

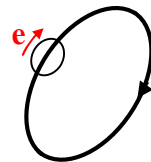
Énoncée par Heinrich Lenz en 1833, elle peut être traduite par plusieurs expressions. La plus commode est : « Le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il tend à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance »

III / La f é m induite :

Le courant induit prend naissance dans le circuit fermé de l'induit qui ne comporte pourtant pas de générateur.

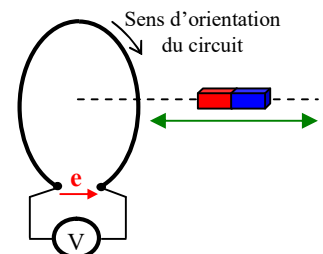
Pour lever ce paradoxe, on admet l'existence d'une force électromotrice délocalisée appelée f é m d'induction ou f é m induite. On la note e .

Le sens positif de la f é m induite e est indiqué par une flèche dans le même sens que le celui de l'orientation choisi sur le circuit.



Remarques :

- Le circuit, siège d'un phénomène d'induction, est équivalent à une source de tension placée dans le circuit.
- Si l'induit est un circuit ouvert, le phénomène d'induction aura lieu et une tension, mesurable au voltmètre, apparaît entre ses bornes.



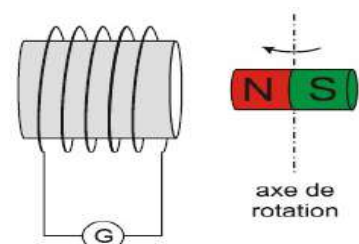
IV / Applications :

1⁰) Les alternateurs :

Si on fait tourner un aimant droit (inducteur) avec une vitesse angulaire ω devant une bobine fixe (induit), il apparaît alors aux bornes de la bobine une tension (f é m induit) alternative

de fréquence $N = \frac{\omega}{2\pi}$.

C'est le principe de fonctionnement d'un alternateur.

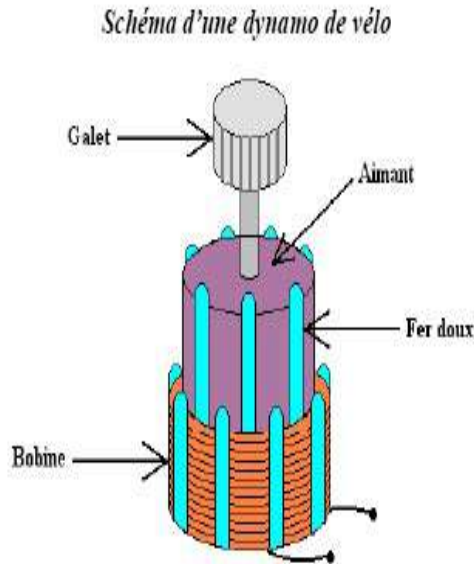


Un alternateur est un convertisseur d'énergie, il transforme l'énergie mécanique en énergie électrique.

Un alternateur est constitué de deux parties :

- une partie fixe : le **stator** (induit constitué d'une ou de plusieurs bobines convenablement connectée).
- une partie mobile : le **rotor** (inducteur constitué d'un aimant ou d'un électroaimant).

Un alternateur peut être de conception simple (dynamo de vélo) comme il peut être de conception industrielle (celui d'une centrale électrique).



2⁰) Les transformateurs :

Un transformateur est un quadripôle électrique formé par deux bobines B_1 et B_2 , dont le nombre de spires sont respectivement N_1 et N_2 , montées face à face sur une carcasse métallique en fer doux.

On alimente la bobine B_1 (le primaire) par une tension alternative u_1 . Il apparaît alors aux bornes de B_2 (le secondaire) une tension alternative u_2 .

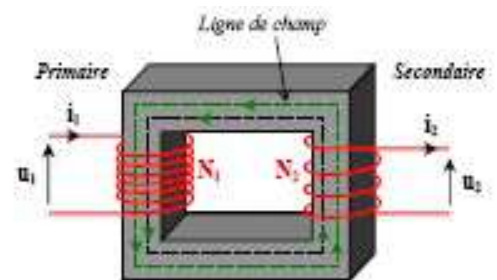
La tension alternative u_1 branchée au primaire fait circuler un courant i_1 qui crée un champ magnétique variable dans la carcasse. La carcasse en fer doux canalise les lignes de champ vers le secondaire où une f.é.m induite alternative u_2 apparaît.

Un transformateur ne fonctionne donc pas en courant continu.

Pour un transformateur idéal, les relations entre les valeurs efficaces des tensions et des intensités de courant sont :

$$\frac{U_2}{U_1} \approx \frac{N_2}{N_1}, \quad \frac{N_2}{N_1} \text{ est le rapport de transformation.}$$

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{N_2}{N_1}, \quad \text{lorsque le secondaire est en circuit fermé.}$$



Un transformateur peut être :

- abaisseur de tension ($\frac{N_2}{N_1} < 1$) : dans les jouets électriques et les appareils électroniques.

Remarque : La forte intensité obtenue au secondaire peut être utilisée dans la soudure électrique des pièces métalliques ou pour permettre la fusion d'un métal par effet joule.

- élévateur de tension ($\frac{N_2}{N_1} > 1$) : dans les tubes luminescents et les tubes cathodiques.

Remarque : Ce transformateur permet le transport, à forte distance, de l'énergie électrique.

3⁰) Les courants de Foucault :

Les courants de Foucault sont des courants induits qui prennent naissance dans toute masse conductrice en mouvement dans un champ magnétique ou soumise à un champ magnétique variable dans le temps.

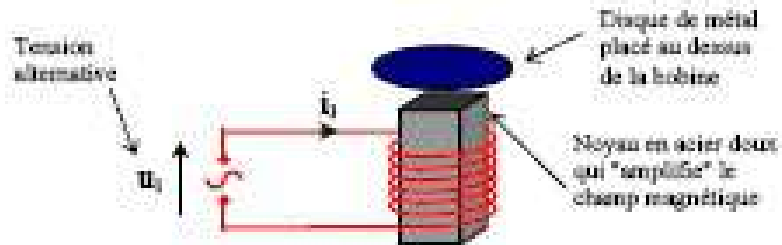
Remarque : L'échauffement des transformateurs est dû à des courants de Foucault qui prennent naissance dans la carcasse métallique. On les minimise en utilisant des carcasses feuilletées.

Les courants de Foucault trouvent leur application dans :

- les fours à induction :

Un récipient métallique est placé dans un champ magnétique variable. Il est parcouru par les courants de Foucault et s'échauffe par effet joule.

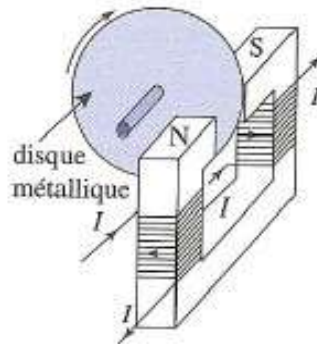
L'échauffement est réalisé sans contact avec une source de chaleur.



- Les ralentisseurs électromagnétiques :

Un disque en rotation dans un champ magnétique est le siège de courants de Foucault qui tendent, d'après la loi de Lenz, à s'opposer à la cause qui leur a donné naissance et par conséquent le disque freine.

Ce mode de freinage, inefficace à faible vitesse, est utilisé en supplément sur les véhicules lourds.



Pour en savoir plus

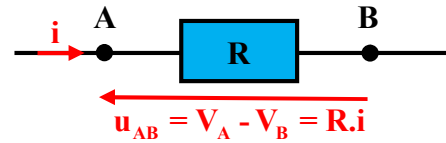
1⁰) La loi d'Ohm généralisée :

- La loi d'Ohm pour un résistor :

Le dipôle (A, B) est un dipôle résistor de résistance R.

Si le dipôle ohmique (A, B) est orienté de A vers B,

la loi d'Ohm s'écrit : $u_{AB} = R.i$ (ou $u_{BA} = -R.i$).



Remarque :

Avec cette orientation, La flèche associée au sens positif de i et la flèche associée à la tension u_{AB} sont de sens contraire (convention récepteur). Il en résulte que u_{AB} et i sont de même signe.

- La loi d'Ohm généralisée :

Le dipôle (A, B) est un dipôle générateur de f é m e et de résistance interne r.

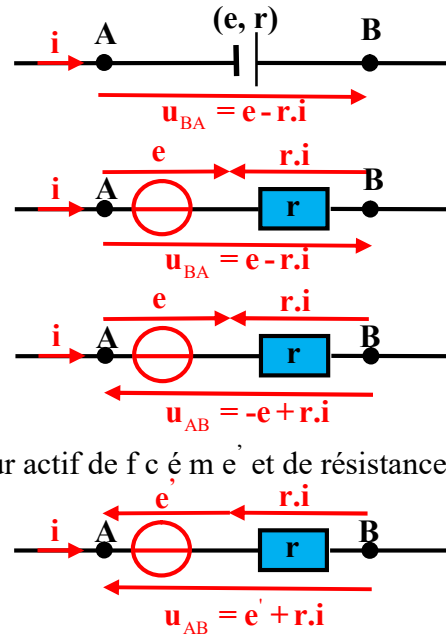
Si le dipôle générateur (A, B) est orienté de A vers B, dans la convention générateur, la loi d'Ohm s'écrit :

$$u_{BA} = e - r.i$$

Il est équivalent à l'association série d'un générateur idéal de tension de f é m e et d'une résistance r.

Dans la convention récepteur, la loi d'ohm s'écrit :

$$u_{AB} = -e + r.i$$



Remarque :

La loi d'Ohm généralisée peut s'appliquer à un dipôle récepteur actif de f c é m e' et de résistance interne r.

Si le dipôle récepteur (A, B) est orienté de A vers B, dans la convention récepteur, la loi d'Ohm s'écrit :

$$u_{AB} = e' + r.i$$

2⁰) La formule de Faraday :

- On considère un circuit fermé plan. Ce circuit étant arbitrairement orienté, on définit le vecteur surface $\vec{S}$ du circuit, représenté au centre du circuit, par les caractéristiques suivantes :

- module : l'aire $\|\vec{S}\|$ de la surface du circuit.
- direction : perpendiculaire au plan du circuit (porté par la normale $n'n$ au plan du circuit).
- sens : donné par la règle du tir-bouchon de Maxwell (il est orienté de la face sud vers la face nord du circuit).

- Le circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$. Le flux magnétique à travers le circuit est défini par la grandeur algébrique :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} \rightarrow \Phi = \|\vec{B}\| \cdot \|\vec{S}\| \cdot \cos \theta$$

Dans le SI, le flux magnétique s'exprime en Webers (Wb).

- La formule de Faraday :

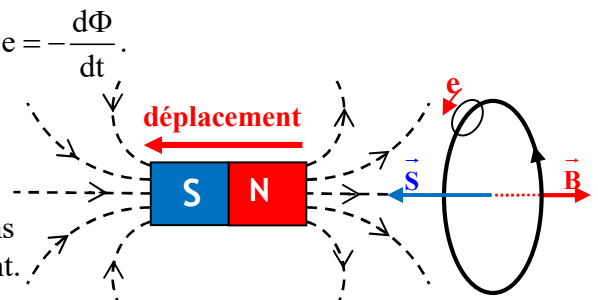
Lorsque le phénomène d'induction électromagnétique a lieu, le flux magnétique inducteur varie au cours du temps et une f é m induite apparaît dans l'induit.

Ces deux conséquences sont reliées par la formule de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Application : on éloigne le pôle (N) de l'aimant de la spire.

$$\Phi = -\|\vec{B}\| \cdot \|\vec{S}\| \text{ or } \|\vec{B}\| \text{ diminue} \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} > 0 \xrightarrow{e = -\frac{d\Phi}{dt}} e < 0$$

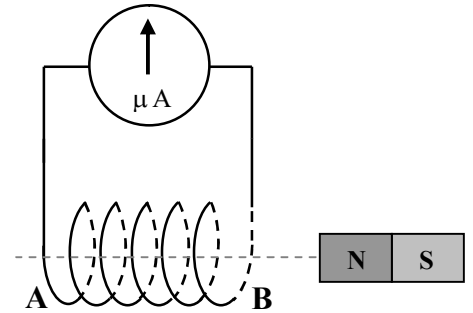
La f é m induite débite un courant dans le sens contraire du sens positif ($i < 0$). La spire présente alors une face sud (S) à l'aimant.



Applications

Exercice 1 :

Une bobine de faces A et B, reliée à un micro ampèremètre, est placée devant un aimant droit de sorte que le pôle nord de sa dernière soit en regard de sa face B suivant son axe (voir figure ci-contre). On approche rapidement l'aimant de la bobine, un courant parcourt le circuit fermé de la bobine.



1⁰) a - Quel est le phénomène observé ?

b - comment nomme-t-on alors le circuit fermé de la bobine ?

2⁰) Le courant circule dans la bobine de sorte que sa face B soit une face nord (↻) ou une face sud (↺) ? Justifier la réponse en énonçant la loi utilisée.

Réponse :

1⁰) a - Le phénomène observé est l'induction électromagnétique.

b - Le circuit fermé de la bobine s'appelle l'induit.

2⁰) D'après la loi de Lenz qui dit que le sens du courant induit est de sorte que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance, lorsqu'on approche le pôle nord de l'aimant de la bobine, celle-ci lui présente une face nord pour le repousser.

Donc le courant circule dans la bobine de sorte que sa face B soit une face nord.

Exercice 2 :

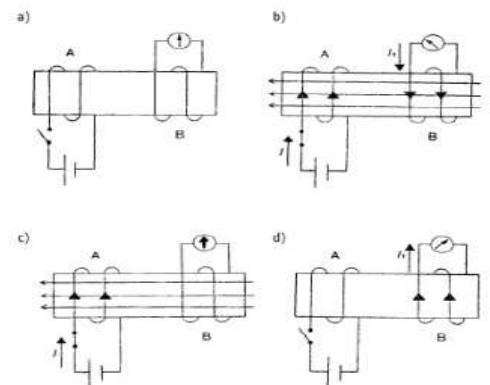
Deux bobines A et B sont montées sur un même noyau ferromagnétique comme indiqué sur la figure ci-contre.

La bobine A est montée en série avec une pile et un interrupteur.

On branche un galvanomètre aux bornes de la bobine B.

1⁰) Parmi les quatre schémas ci-contre, Préciser ceux qui correspondent à des états permanents et ceux qui correspondent à des états transitoires. Justifier chacune des réponses.

2⁰) Interpréter la différence entre les circuits dans chacun des états.



Réponse :

1⁰) * Dans les cas a) et c) : il n'y a pas de courant induit qui circule dans la bobine B donc il n'y a pas de variation du champ inducteur dans la bobine A donc pas de variation de l'intensité du courant dans A.

Cas a) : le circuit de A est ouvert et l'intensité du courant qui la parcourt est nulle.

Cas b) : le circuit de A est fermé est le courant qui la parcourt est établi.

Les cas a) et b) correspondent à des états permanents du circuit.

* Dans les cas b) et d) : il y a un courant induit qui circule dans la bobine B donc il y a une variation du champ inducteur dans la bobine A donc il y a une variation de l'intensité du courant dans A.

Cas b) : à la fermeture du circuit de A, la bobine A est le siège d'un établissement du courant.

Cas d) : à l'ouverture du circuit de A, la bobine A est le siège d'une rupture du courant.

Les cas b) et d) correspondent à des états transitoires du circuit.

2⁰) Pour les états permanents :

Cas a) : le courant dans A est nul donc le champ inducteur est nul (pas d'effet induit).

Cas b) : le courant dans A est établi donc elle est le siège d'un champ inducteur constant (pas d'effet induit).

Pour les états transitoires :

Cas b) : le courant s'établit dans A donc son champ inducteur augmente. La bobine B est parcourue par un courant induit de sorte que le champ induit qu'elle crée soit dans le sens contraire du champ inducteur.

Cas d) : le courant se rompt dans A donc son champ inducteur diminue. La bobine B est parcourue par un courant induit de sorte que le champ induit qu'elle crée soit dans le même sens que celui du champ inducteur.

Etude d'un texte documentaire :

Exercice 1 :

La lampe sans pile

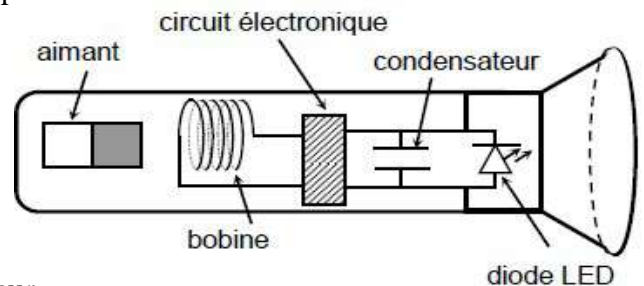
La lampe à induction est une lampe de poche qui ne nécessite aucune pile, contrairement aux lampes de poches

traditionnelles. Elle comporte un aimant pouvant se déplacer dans une bobine, un circuit électronique qui laisse passer le courant dans un seul sens, un condensateur et une diode électroluminescente (LED)

Pour charger cette lampe, il suffit de la secouer avec régularité pendant quelques instants.

L'objectif est d'obtenir le déplacement de l'aimant à travers la bobine. Le courant alternatif créé est redressé par le circuit électronique en courant continu. Le condensateur se charge alors puis se décharge dans la diode électroluminescente.

La lampe à induction peut délivrer de 5 à 30 minutes de luminosité pour 20 à 30 s d'agitation. Elle a une durée de vie estimée d'au moins 50 000 heures. De ce fait elle fournit toujours une lumière efficace sans utiliser de piles ni nécessiter le changement d'aucune pièce.



D'après: jr-international.fr

Questions :

- 1⁰) a - Le fonctionnement de la lampe sans pile est basé sur l'application d'un phénomène physique .Lequel ?
b - Préciser l'inducteur et l'induit dans cette lampe.
- 2⁰) a - Quel est le rôle du circuit électronique utilisé dans la lampe sans pile ?
b - Pourquoi la lampe à induction est-elle capable d'émettre la lumière même après avoir cessé de la secouer ?
- 3⁰) Citer aux moins deux avantages d'une lampe à induction par rapport à une lampe de poche traditionnelle.

Réponse :

- 1⁰) a - L'induction électromagnétique.
b - L'inducteur est l'aimant alors que l'induit est la bobine.
- 2⁰) a - Le rôle du circuit électronique est de redresser le courant induit alternatif en courant continu.
b - Le condensateur se charge lorsqu'on secoue la lampe. L'énergie emmagasinée par le condensateur permet à la lampe d'émettre de la lumière même après avoir cessé de la secouer.
- 3⁰) La lampe à induction fonctionne sans pile, elle ne nécessite le changement d'aucune pièce et elle a une durée de vie très longue (au moins 50000 heures).

Exercice 2 :

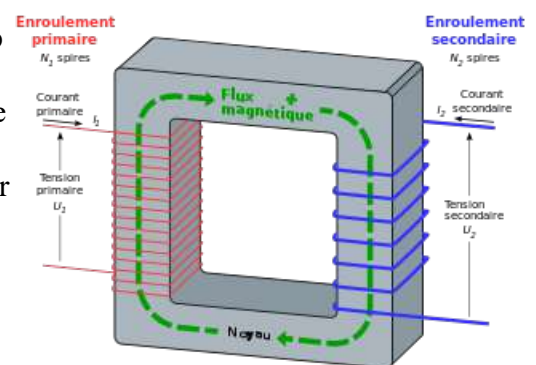
Le transformateur

Le transformateur utilise le principe de la réversibilité magnétique :

- Un courant électrique variable dans un conducteur crée un champ magnétique variable.
- Un champ magnétique variable crée un courant électrique variable dans un conducteur électrique.

Le transformateur est construit à partir d'un circuit magnétique sur lequel sont bobinés deux enroulements :

- un enroulement primaire, ou le primaire, qui reçoit l'énergie électrique et la transforme en énergie magnétique en produisant un champ magnétique.
- un enroulement secondaire, ou le secondaire, qui, étant traversé par le champ magnétique produit par le primaire, fournit un courant alternatif de même fréquence mais de tension qui peut être supérieure ou inférieure à la tension primaire.



Un transformateur qui produit une tension plus grande est dit élévateur de tension, à l'inverse il est dit abaisseur de tension ; s'il produit la même tension, c'est un transformateur d'isolement.

D'après : www.totalbenef.com

Questions :

- 1⁰) a - Combien de bobines comporte le transformateur décrit dans le texte ?
- b - Qu'appelle-t-on la bobine qui reçoit la tension d'entrée du transformateur ?
- 2⁰) a - A quelle condition l'enroulement secondaire fournit un courant électrique ? donner le nom de ce courant.
- b - Le transformateur fonctionnera-t-il si une tension continue est appliquée à son entrée ? Justifier la réponse.
- c - Le secondaire produit-il un courant électrique par auto-induction ou par induction électromagnétique ? Préciser alors l'induit et l'inducteur.
- 3⁰) Relever du texte les trois rôles d'un transformateur dans un circuit électrique.

Réponse :

- 1⁰) a - Le transformateur décrit dans le texte comporte deux bobines.
- b - La bobine qui reçoit la tension d'entrée du transformateur s'appelle le primaire.
- 2⁰) a - L'enroulement secondaire fournit un courant électrique lorsqu'il est traversé par le champ magnétique variable produit par le primaire. Ce courant est appelé courant induit.
- b - Si la tension d'entrée est continue, le champ magnétique produit par le primaire n'est plus variable et le transformateur ne fonctionne plus.
- c - Le secondaire produit un courant électrique par induction électromagnétique.
Le primaire est l'inducteur alors que le secondaire est l'induit.
- 3⁰) Le transformateur peut produire une tension plus grande (élévateur de tension), une tension plus petite (abaisseur de tension) ou la même tension (transformateur d'isolement).

Exercice 3 :

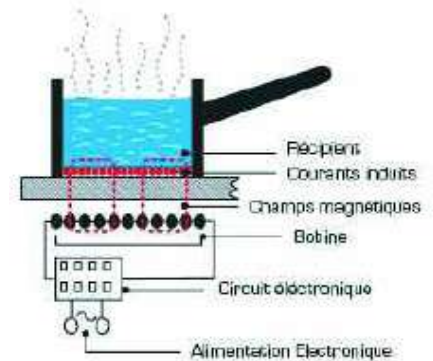
La cuisson par induction

Les plaques de cuisson par induction, ou plaques à induction, ont un fonctionnement nettement différent des plaques de cuisson classiques. Ce type de table de cuisson fonctionne grâce aux phénomènes d'induction. C'est en 1831 que Michael Faraday découvre qu'un courant électrique est créé dans un conducteur lorsqu'il est soumis à un champ magnétique variable. C'est exactement ce qui se passe lorsque vous approchez votre casserole de la plaque :

Un générateur électronique alimente et commande électriquement une bobine (inducteur) située à l'intérieur de l'appareil. Cette bobine crée un champ magnétique variable de telle sorte que le récipient métallique se trouve traversé par les courants dits "d'induction". La casserole se transforme alors en un véritable émetteur de chaleur. Cette chaleur se transmet au contenu de la casserole, et ainsi vos aliments cuisent. L'énergie s'adapte automatiquement à la taille du récipient et la pose ou le retrait du récipient sur la plaque de cuisson déclenche instantanément le démarrage ou l'arrêt de la cuisson.

Grâce à leur puissance exceptionnelle, il ne suffit que de quelques minutes pour faire bouillir une casserole de deux litres d'eau, tout en consommant jusqu'à 50% de moins qu'une cuisinière à gaz.

D'après www.codigel-dal.com et www.cuisson-induction.fr



Questions :

- 1⁰) a - Quelle est la cause de l'apparition des courants induits dans le récipient métallique ?
- b - Le cuisinier peut sans danger mettre la main sur une plaque à cuisson par induction. Pourquoi ?
- 2⁰) Citer, d'après le texte, deux arguments qui justifient cette affirmation : « La cuisson par induction s'effectue pratiquement sans perte d'énergie ».
- 3⁰) Quels sont les avantages de la plaque à cuisson par induction par rapport à la cuisinière à gaz ?

Réponse :

1⁰) a - L'apparition des courants induits dans le récipient métallique est due au champ magnétique variable créé par la bobine située à l'intérieur de l'appareil.

b - Le cuisinier peut sans danger mettre la main sur une plaque à cuisson par induction car le champ magnétique variable de l'appareil crée des courants d'induction importants dans les masses conductrices (le phénomène est généralement mis en évidence dans les masses métalliques).

2⁰) On peut affirmer que : « La cuisson par induction s'effectue pratiquement sans perte d'énergie » car :

- L'énergie s'adapte automatiquement à la taille du récipient
- La pose ou le retrait du récipient sur la plaque de cuisson déclenche instantanément le démarrage ou l'arrêt de la cuisson.

3⁰) Parmi les avantages de la plaque à cuisson par induction par rapport à la cuisinière à gaz, on peut citer :

- le gain sur la durée de cuisson (il ne suffit que de quelques minutes pour faire bouillir une casserole de deux litres d'eau).
- le gain sur la consommation d'énergie (la plaque à cuisson par induction consomme jusqu'à 50% de moins qu'une cuisinière à gaz).

Exercice 4 :

La cuisson par induction

Lorsque l'on pose une casserole d'eau sur une plaque à induction, le liquide se met rapidement à bouillir. Pourtant, la plaque reste froide. L'explication du mystère repose sur l'établissement d'un champ magnétique variable baignant un matériau conducteur.

Sous la plaque de cuisson en vitrocéramique, un électroaimant est alimenté avec un courant alternatif. Il crée ainsi un champ magnétique variable. Celui-ci exerce une force directement sur les électrons ... du fond de la casserole! Cela produit un courant dit induit dans le métal. Le courant chauffe la matière qu'il traverse, quand elle est magnétisable, c'est à dire quand les électrons qui la composent s'agitent sous l'effet d'un champ magnétique. Voilà pourquoi la plaque en vitrocéramique, insensible à l'activité de l'électroaimant, ne chauffe pas. En revanche, les électrons de la casserole s'agitent et s'entrechoquent en se transférant de l'énergie, qui se dégage sous forme de chaleur. Elle est produite au sein même du matériau à chauffer, il n'y a donc pas d'intermédiaire entre l'inducteur et la pièce métallique, ce qui permet d'atteindre de bons rendements, jusqu'à 95 %, contre 70% pour les plaques classiques, dans lesquelles une partie de la chaleur, créée à distance par un courant dans une résistance, est perdue. De plus, le chauffage est instantané, et uniformément réparti dans tout le fond de la casserole.

En l'absence de casserole, aucune chaleur n'est produite si la table à induction reste allumée, la plaque reste froide. De plus, le corps étant insensible au champ magnétique, on peut y poser sa main sans se brûler.

D'après : linternaute.com/science

Questions :

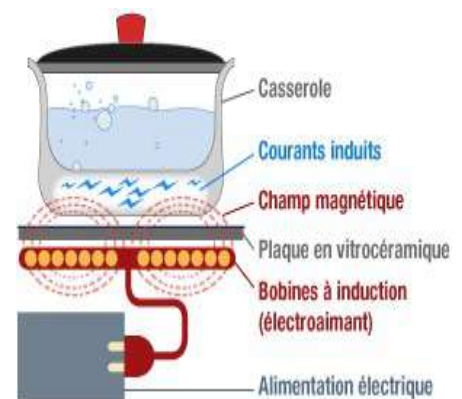
1⁰) a - L'eau chauffe dans une casserole placée sur une plaque à induction alors que la plaque reste froide. Par quoi explique-t-on ce mystère ?

b - Justifier, d'après le texte, que la vitrocéramique n'est pas une matière magnétisable ?

2⁰) a - Pourquoi le rendement des plaques classiques (qui contiennent des résistances chauffantes) est plus faible que celui des plaques à induction ?

b - Citer, d'après le texte, au moins deux propriétés du chauffage par les plaques à induction.

3⁰) Si on pose la main sur une plaque à induction allumée, risque-t-on de se brûler? Justifier la réponse.



Réponse :

1⁰) a - Le mystère est expliqué par l'établissement d'un champ magnétique variable baignant un matériau conducteur.

b - La plaque en vitrocéramique est insensible à l'action de l'électroaimant.

2⁰) a - Dans les plaques classiques, une partie de la chaleur, créée à distance par un courant dans une résistance, est perdue.

b - Le chauffage par induction est :

- instantané.

- uniformément réparti dans tout le fond de la casserole.

3⁰) Si on pose la main sur une plaque à induction allumée, on ne risque pas de se brûler car le corps est insensible au magnétique.

L'AUTO-INDUCTION

I / Mise en évidence du phénomène d'auto-induction :

1⁰) Expériences de mise en évidence :

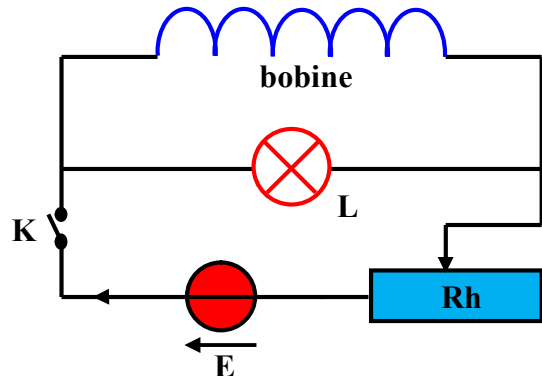
a - Expérience 1 :

On réalise le circuit électrique schématisé ci-contre :

- En régime continu, l'interrupteur K étant fermé, on règle le rhéostat Rh de sorte que la lampe L brille faiblement.
- On ouvre K → la lampe émet un bref éclair avant de s'éteindre.
- On ferme K → la lampe émet un bref éclair puis brille faiblement.

Interprétation :

- On ouvre K → l'intensité du courant dans la bobine passe d'une certaine valeur à 0. Cette variation engendre une diminution du champ magnétique de la bobine et un courant induit, qui s'oppose à cette décroissance, apparaît et passe à travers la lampe.
- On ferme K → l'intensité du courant dans la bobine passe de 0 à une certaine valeur. Cette variation engendre une augmentation du champ magnétique de la bobine et un courant induit, qui s'oppose à cette croissance, apparaît et passe à travers la lampe.



b - Expérience 2 :

On réalise le circuit électrique schématisé ci-contre :

Les lampes L_1 et L_2 sont identiques.

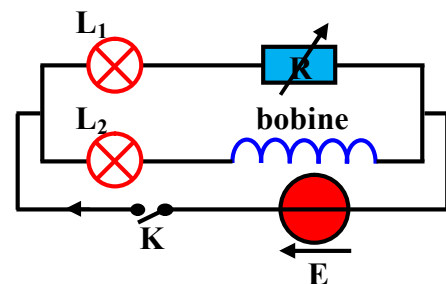
Le résistor et la bobine ont une même résistance.

On ferme K → la lampe L_1 brille instantanément alors que la lampe L_2 brille progressivement.

Interprétation :

On ferme K → l'intensité du courant dans la bobine passe de 0 à une certaine valeur.

Cette variation engendre une augmentation du champ magnétique de la bobine et un courant induit, qui s'oppose à cette croissance, apparaît et retarde la circulation du courant dans la lampe L_2 .



2⁰) Conclusion et définition :

Une bobine placée dans un circuit s'oppose à la variation de l'intensité du courant dans ce circuit.

La variation de l'intensité du courant dans la bobine engendre une variation du champ magnétique propre de la bobine (circuit inducteur) et par conséquent crée un courant induit dans la bobine (circuit induit).

Le circuit inducteur et le circuit induit sont alors confondus.

Ce phénomène porte le nom d'**auto-induction** (ou self-induction).

Remarque : La f é m responsable du courant induit dans ce cas s'appelle f é m d'auto-induction.

II / La f é m d'auto-induction :

1⁰) Expression de la f é m d'auto-induction :

a - Manipulation :

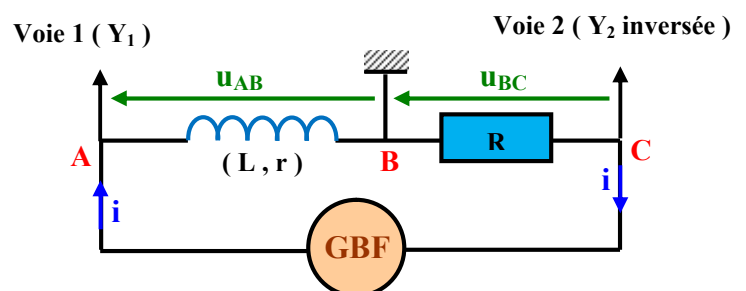
On réalise le montage électrique ci-contre :

Le GBF est à **masse flottante**.

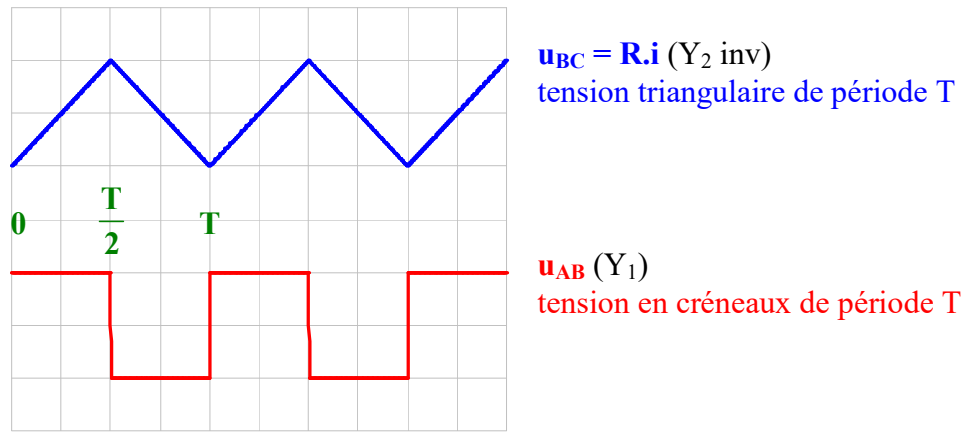
La bobine est de résistance négligeable.

Le GBF délivre un signal triangulaire.

On visualise à l'oscilloscope les tensions u_{AB} sur la voie 1 (Y_1) et u_{BC} sur la voie 2 (Y_2 inversée).



Pour un réglage convenable du GBF, on obtient les oscillogrammes suivant :



b - Exploitation :

- Aux bornes du résistor : $u_{BC} = R.i \rightarrow i = \frac{u_{BC}}{R}$

Aux bornes de la bobine : $u_{AB} = -e + r.i$ (convention récepteur) or $r \approx 0 \rightarrow u_{AB} = -e$.

- Faisons une étude sur une période T :

- Pour le résistor : entre 0 et $\frac{T}{2}$, $u_{BC} = a.t + b \rightarrow i = \frac{a}{R}t + \frac{b}{R} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{a}{R}$ (a constante > 0).
- entre $\frac{T}{2}$ et T , $u_{BC} = -a.t + b' \rightarrow i = -\frac{a}{R}t + \frac{b'}{R} \rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{a}{R}$
- Pour la bobine : entre 0 et $\frac{T}{2}$, $u_{AB} = U_0 \rightarrow e = -U_0$ (U_0 constante > 0).

$$\text{entre } \frac{T}{2} \text{ et } T, u_{AB} = -U_0 \rightarrow e = +U_0$$

- Faisons le rapport $\frac{u_{AB}}{\frac{di}{dt}}$:

$$\text{entre } 0 \text{ et } \frac{T}{2}, \frac{u_{AB}}{\frac{di}{dt}} = \frac{-e}{\frac{di}{dt}} = U_0 \left(\frac{R}{a} \right) \rightarrow e = -\frac{U_0 \cdot R}{a} \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\text{entre } \frac{T}{2} \text{ et } T, \frac{u_{AB}}{\frac{di}{dt}} = \frac{-e}{\frac{di}{dt}} = -U_0 \left(-\frac{R}{a} \right) \rightarrow e = -\frac{U_0 \cdot R}{a} \cdot \frac{di}{dt}$$

- On pose $\frac{U_0 \cdot R}{a} = L$ constante positive, il vient alors que : $e = -L \frac{di}{dt}$

L est appelée **inductance** de la bobine.

2⁰) L'inductance L d'une bobine :

a - Définition :

L'inductance L d'une bobine est une grandeur qui caractérise l'aptitude de cette bobine à s'opposer à la variation de l'intensité du courant qui la traverse.

Dans le S.I, l'inductance L s'exprime en Henry (H).

b - Remarque :

L'inductance L d'une bobine, sans noyau de fer, ne dépend que de ses caractéristiques géométriques (nombre total de spires N , longueur l et section S).

$$L = \mu_0 \frac{N^2 \cdot S}{l} \rightarrow \begin{cases} L \text{ augmente si } N \text{ ou } S \text{ augmente} \\ L \text{ diminue si } l \text{ augmente} \end{cases}$$

3⁰) Conclusion :

Une bobine d'inductance L et parcourue par un courant d'intensité i variable est le siège d'une f é m auto-induite $e = -L \frac{di}{dt}$.

Remarque : le signe $(-)$ traduit la loi de Lenz :

Si i augmente $\rightarrow \frac{di}{dt} > 0 \xrightarrow{L>0} e < 0$ s'oppose à l'augmentation de i .

Si i diminue $\rightarrow \frac{di}{dt} < 0 \xrightarrow{L>0} e > 0$ s'oppose à la diminution de i .

III / Loi d'Ohm aux bornes d'une bobine :

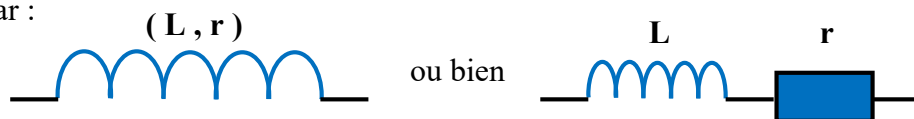
1⁰) Représentation symbolique d'une bobine :

Une bobine est un enroulement, dans le même sens, de fil conducteur.

Si le rayon de la section de la bobine est négligeable devant sa longueur, elle est dite solénoïde.

Une bobine est caractérisée par son inductance L et sa résistance interne r .

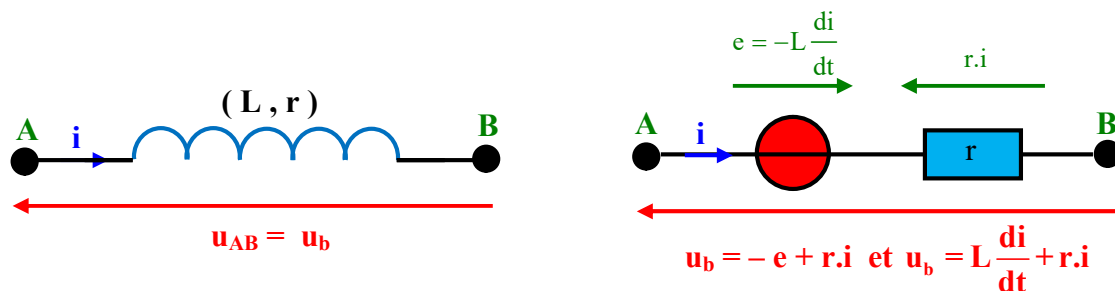
On la symbolise par :



2⁰) Tension aux bornes d'une bobine :

Dans la convention récepteur, la tension aux bornes de la bobine est donnée par la relation :

$$u_b = -e + r.i \quad \text{ou bien} \quad u_b = L \frac{di}{dt} + r.i$$



Remarques :

- Si $r = 0 \rightarrow u_b = L \frac{di}{dt}$ bobine purement inductive (self ou inductance pure).
- Si $i = \text{constante} \rightarrow \frac{di}{dt} = 0$ et $u_b = r.i$

En courant continu, la bobine se comporte comme un résistor de résistance r .

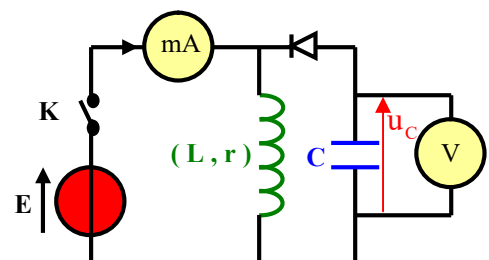
IV / Energie magnétique emmagasinée par une bobine :

1⁰) Mise en évidence :

a - Expérience :

Réalisons le circuit électrique schématisé ci-contre :

- On ferme K : un courant constant s'établit à travers la bobine mais le condensateur reste déchargé.
- On ouvre K : le condensateur se charge et une tension u_c négative apparaît entre ses bornes.



b - Interprétation :

- K fermé $\rightarrow$ la bobine emmagasine de l'énergie, le condensateur reste déchargé grâce à la diode (car elle est montée dans le sens bloquant).
- K ouvert $\rightarrow$ la f é m auto-induite engendre un courant (dans le même sens dans la bobine car $e > 0$) qui circule à travers le condensateur, celui-ci se charge donc il reçoit de l'énergie de la part de la bobine.

2⁰) Expression de l'énergie magnétique :

Une bobine d'inductance L et parcourue par un courant d'intensité i emmagasine de l'énergie magnétique E_L telle que :

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

Remarques :

- L'inductance L caractérise l'aptitude de la bobine à emmagasiner de l'énergie magnétique.
- La relation $E_L = \frac{1}{2} L i^2$ implique que l'intensité du courant qui parcourt une bobine ne peut pas subir de discontinuité.
- Le condensateur peut stocker de l'énergie même hors circuit (c'est un réservoir permanent d'énergie) alors que la bobine stocke de l'énergie tant qu'elle est parcourue par un courant (c'est un réservoir temporaire d'énergie).
- Lors de l'ouverture d'un circuit inductif, l'énergie magnétique emmagasinée par la bobine doit être dissipée, ceci se manifeste par des étincelles aux bornes de l'interrupteur (étincelles de rupture).

Pour y remédier, on place :

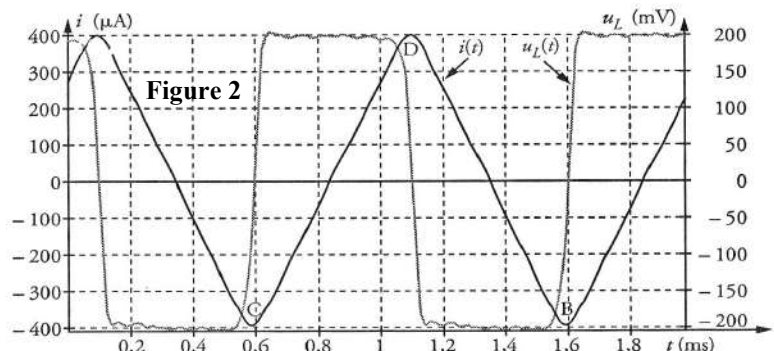
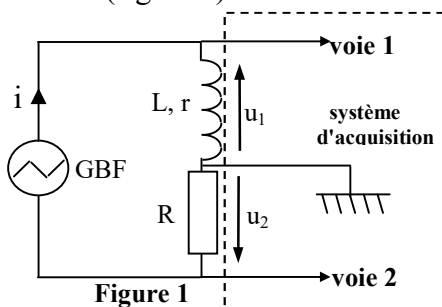
- soit un résistor et une diode en parallèle avec la bobine.
- Soit un condensateur en parallèle avec l'interrupteur.

Application :

On réalise le circuit électrique représenté ci-dessous (figure 1) comprenant un GBF, une bobine de résistance interne r et d'inductance L et une résistance $R = 10^4 \Omega$ montés en série.

Le GBF délivre une tension alternative triangulaire de fréquence $N = 1 \text{ kHz}$.

Un système d'acquisition de données relié à un ordinateur permet d'afficher à l'écran les variations en fonction du temps de la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine et de l'intensité $i(t)$ du courant qui circule dans le circuit (figure 2).



- 1⁰) Vérifier à l'aide de la (figure 2) que la fréquence du GBF est effectivement réglée sur 1 kHz.
- 2⁰) Quelle est l'expression de la tension mesurée sur la voie 2 du système d'acquisition ? En déduire les opérations que devra effectuer le logiciel de traitement des données pour afficher l'intensité à l'écran.
- 3⁰) Exprimer la tension u_L en fonction des caractéristiques de la bobine, de l'intensité i du courant et de sa dérivée $\frac{di}{dt}$.

4⁰) a - Sur la (figure 2), la représentation graphique de la fonction $i(t)$ montre qu'en réalité, les crêtes de l'intensité sont arrondies. Dans ces conditions, la tangente au sommet est horizontale.

En déduire une expression simplifiée de u_L quand l'intensité dans le circuit est extrême.

b - En mesurant u_L sur la (figure 2) quand l'intensité du courant est extrême, à $t = 1,6 \text{ ms}$ par exemple, montrer que $r \ll R$.

5⁰) On néglige dans la suite le terme faisant intervenir r dans l'expression de u_L ainsi que les arrondis des crêtes de l'intensité.

De la demi période comprise entre les points C et D de la (figure 2), mesurer u_L , calculer $\frac{di}{dt}$ et en déduire la valeur de L .

Réponse :

1⁰) Le GBF délivre une tension alternative triangulaire: le courant $i(t)$ qui circule dans le circuit est triangulaire. Entre les points C et B du graphe $i(t)$ on a une période de $i(t)$ telle que :
 $T = 1,6 - 0,6 = 1\text{ms}$ et $T = 10^{-3}\text{ s}$.

La fréquence N est reliée à la période T par: $N = \frac{1}{T}$. A.N : $N = \frac{1}{10^{-3}}$ et $N = 10^3\text{ Hz}$ ($N = 1\text{ kHz}$).

2⁰) Compte tenu du sens du courant choisi, la loi d'Ohm donne : $u_2 = -R.i$

Pour afficher l'intensité i à l'écran, il faut créer une nouvelle variable définie par $i = -\frac{u_2}{R}$.

On indiquera au logiciel de traitement des données : $i = -\frac{u_2}{10^4}$.

3⁰) La tension u_L aux bornes de la bobine est égale à la tension u_1 .

Compte tenu du sens du courant on a : $u_L = r.i + L.\frac{di}{dt}$

4⁰) a - Quand l'intensité dans le circuit est extrême le terme $\frac{di}{dt}$ est nul et donc: $u_L = r.i$.

b - Pour $t = 1,6\text{ ms}$, i est extrême et donc $u_L = r.i$ d'où $r = \frac{u_L}{i}$.

On lit $i = -400\text{ }\mu\text{A}$, mais pour u_L la lecture graphique sur la (figure 2) est difficile on peut seulement dire que : $-50\text{mV} \leq u_L \leq 0\text{ mV}$.

On obtient un encadrement pour r : $\frac{-50.10^{-3}}{-400.10^{-6}} \geq r \geq 0\text{ }\Omega \rightarrow 1,3.10^2\text{ }\Omega \geq r \geq 0\text{ }\Omega$

Cet encadrement de r permet de dire que $r \ll R$.

5⁰) Entre les points C et D, on mesure: $u_L = 0,200\text{ V}$.

D'autre part: $\frac{di}{dt} \simeq \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{i_D - i_C}{t_D - t_C}$

A.N : $\frac{di}{dt} \simeq \frac{[400 - (-400)] \times 10^{-6}}{(1,1 - 0,6) \times 10^{-3}} = \frac{8 \times 10^{-4}}{0,5 \times 10^{-3}}$ et $\frac{di}{dt} \simeq 1,6\text{ A.s}^{-1}$.

On néglige le terme faisant intervenir r dans l'expression de u_L donc: $u_L = L.\frac{di}{dt} \rightarrow L = \frac{u_L}{\left(\frac{di}{dt}\right)}$.

A.N : $L = \frac{0,200}{1,6}$ et $L = 0,125\text{ H}$.

Pour en savoir plus

1⁰) Détermination des caractéristiques d'une bobine :

a - Bobine purement inductive :

On réalise le montage électrique ci-contre :

Le GBF est à **masse flottante**.

La bobine est de résistance interne négligeable.

Le GBF délivre un signal triangulaire de fréquence N.

On visualise, à l'oscilloscope, les tensions u_{AB} sur la voie1 (Y_1) et u_{BC} sur la voie2 (Y_2 inversée).

On obtient les deux oscillogrammes (a) et (b) ci-contre :

- On a : $u_R = R.i \rightarrow u_R$ et i sont proportionnelles.

Or i est triangulaire donc u_R est triangulaire.

L'oscillogramme (a) est alors associé à la tension $u_R = u_{BC}$.

Par conséquent l'oscillogramme (b) est associé à la tension $u_L = u_{AB}$.

- Faisons l'étude sur une durée $\Delta t = \frac{T}{2}$ où la tension u_R est croissante:

* $u_R = f(t)$ est une portion de droite affine $\rightarrow u_R = a.t + b$ et $\frac{du_R}{dt} = a$

$$\begin{cases} |\Delta u_R| = k_2 \cdot S_{V2} & \text{avec} \begin{cases} k_2 : \text{mesure de } \Delta u_R \text{ en nombre de divisions} \\ S_{V2} : \text{sensibilité verticale sur la voie2 de l'oscillo (en V.div}^{-1}\text{)}. \end{cases} \\ \Delta t = k \cdot S_H & \text{avec} \begin{cases} k : \text{mesure de } \Delta t \text{ en nombre de divisions} \\ S_H : \text{sensibilité horizontale (base de temps) de l'oscillo (en s.div}^{-1}\text{)}. \end{cases} \end{cases} \rightarrow a = \frac{|\Delta u_R|}{\Delta t} > 0$$

* $u_L = f(t)$ est une constante $\rightarrow u_L = U_L$ ($U_L > 0$)

$$|\Delta u_L| = k_1 \cdot S_{V1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1 : \text{mesure de } \Delta u_L \text{ en nombre de divisions} \\ S_{V1} : \text{sensibilité verticale sur la voie1 de l'oscillo (en V.div}^{-1}\text{)}. \end{cases} \rightarrow U_L = \frac{|\Delta u_L|}{2} > 0$$

$$\bullet \text{ On a : } u_L = -e \xrightarrow{e = -L \left(\frac{di}{dt} \right)} u_L = L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) \xrightarrow{\substack{u_R = R.i \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \\ \left(\frac{di}{dt} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{du_R}{dt} \right)}} u_L = \frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_R}{dt} \right)$$

$$\text{Il vient alors que : } U_L = \frac{L}{R} \cdot a \quad \text{et} \quad L = \frac{R \cdot U_L}{a}.$$

Remarque :

$$\text{Sur une durée } \Delta t = \frac{T}{2} \text{ où la tension } u_R \text{ est décroissante, on aura } L = \frac{R \cdot U'_L}{a'} \text{ avec } \begin{cases} a' = -\frac{|\Delta u_R|}{\Delta t} = -a < 0 \\ U'_L = -\frac{|\Delta u_L|}{2} = -U_L < 0 \end{cases}$$

b - Bobine réelle :

b₁ - Détermination de la résistance interne r de la bobine :

On réalise le montage électrique ci-contre :

Le générateur idéal de tension a une f é m E constante.

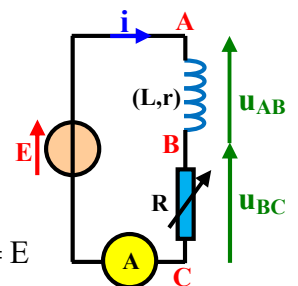
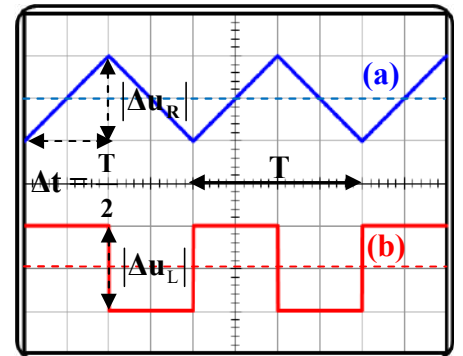
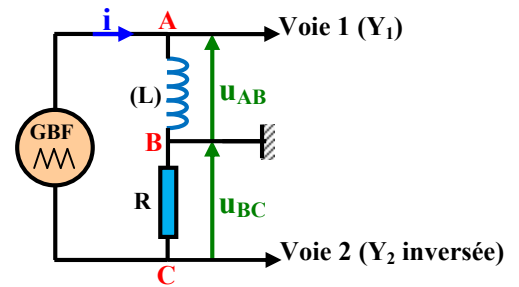
La bobine a une résistance interne r.

Le rhéostat a une résistance R.

$$\text{La loi des mailles s'écrit : } u_{AB} + u_{BC} - E = 0 \xrightarrow{\substack{u_{AB} = u_B = L \cdot \frac{(di)}{dt} + r \cdot i \\ u_{BC} = u_R = R \cdot i}} L \cdot \frac{(di)}{dt} + (R + r) \cdot i = E$$

Lorsque le régime permanent s'établit, l'intensité du courant qui parcourt le circuit est $i = I = \text{constante}$.

$$\text{Lorsque } i = I = \text{constante, } \left(\frac{di}{dt} \right) = 0 \rightarrow (R + r) \cdot I = E \quad \text{et} \quad r = \frac{E}{I} - R.$$



b₂ - Détermination de l'inductance L de la bobine :

On réalise le montage électrique ci-contre :

Le GBF est à **masse flottante**.

La bobine a une inductance L et une résistance interne **r connue**.

Le rhéostat a une résistance R variable.

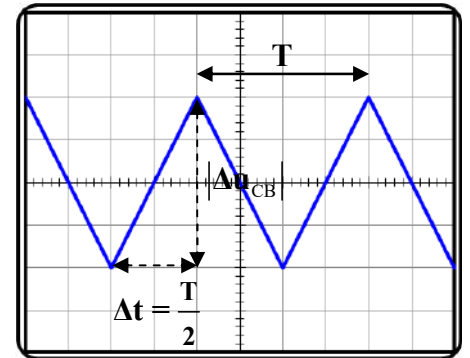
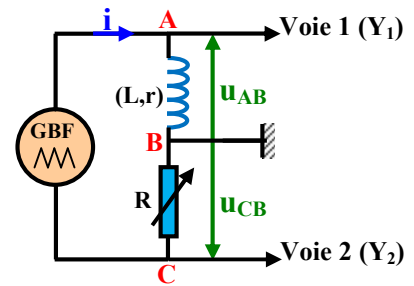
Le GBF délivre un signal triangulaire de fréquence N.

On règle le rhéostat de sorte que **R = r**

On branche l'oscilloscope de sorte qu'on visualise la tension u_{AB}

sur la voie1 (Y₁) et la tension u_{CB} sur la voie2 (Y₂).

Les deux voies 1 et 2 de l'oscilloscope ont la même sensibilité verticale $S_{V1} = S_{V2} = S_V$ (en V.div⁻¹).



$$\rightarrow a = \frac{|\Delta u_{CB}|}{\Delta t} > 0$$

- On visualise la tension u_{CB} . On obtient l'oscillogramme ci-contre :

Faisons l'étude sur une durée $\Delta t = \frac{T}{2}$ où la tension u_{CB} est croissante:

$u_{CB} = f(t)$ est une portion de droite affine $\rightarrow u_{CB} = a.t + b$ et $\frac{du_{CB}}{dt} = a$

$$\begin{cases} |\Delta u_{CB}| = k_2 \cdot S_V & \text{avec } \begin{cases} k_2 : \text{mesure de } |\Delta u_{CB}| \text{ en nombre de divisions} \\ S_V : \text{sensibilité verticale de l'oscillo (en V.div}^{-1}\text{)}. \end{cases} \\ \Delta t = k \cdot S_H & \text{avec } \begin{cases} k : \text{mesure de } \Delta t \text{ en nombre de divisions} \\ S_H : \text{sensibilité horizontale (base de temps) de l'oscillo (en s.div}^{-1}\text{)}. \end{cases} \end{cases}$$

- On visualise la tension somme $u_s = u_{AB} + u_{CB}$ (En enclenchant le bouton add).

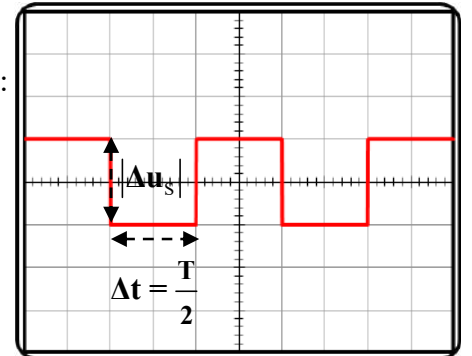
On obtient l'oscillogramme ci-contre :

Faisons l'étude sur la même durée $\Delta t = \frac{T}{2}$ où la tension u_{CB} est croissante:

$u_s = f(t)$ est une constante $\rightarrow u_s = -U_s$ ($U_s > 0$)

$$|\Delta u_s| = k_s \cdot S_V \quad \text{avec } \begin{cases} k_s : \text{mesure de } |\Delta u_s| \text{ en nombre de divisions} \\ S_V : \text{sensibilité verticale de l'oscillo (en V.div}^{-1}\text{)}. \end{cases}$$

$$\rightarrow U_s = \frac{|\Delta u_s|}{2} > 0 \quad \text{et} \quad u_s = -U_s = -\frac{|\Delta u_s|}{2} < 0.$$



$$\bullet \text{ On a : } u_{CB} = -u_r \xrightarrow{u_r = r \cdot i} u_{CB} = -r \cdot i \rightarrow i = -\frac{u_{CB}}{r} \rightarrow \left(\frac{di}{dt}\right) = -\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{du_{CB}}{dt}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{di}{dt}\right) = -\frac{a}{r}$$

$$\text{On a : } u_s = u_{AB} + u_{CB} \xrightarrow[u_{CB} = -u_r = -r \cdot i]{u_{AB} = u_B = L \left(\frac{di}{dt}\right) + r \cdot i} u_s = L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right) \rightarrow -U_s = L \cdot \left(-\frac{a}{r}\right) \quad \text{et} \quad L = \frac{r \cdot U_s}{a}.$$

2⁰ Energie magnétique emmagasinée par une bobine :

A chaque instant, la puissance électrique reçue par la bobine parcourue par un courant est $p(t) = u_B \cdot i$

Pendant une durée dt , l'énergie reçue par la bobine est :

$$dE = p(t) \cdot dt \rightarrow dE = u_B \cdot i \cdot dt = \left(L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right) + r \cdot i \right) \cdot i \cdot dt$$

$$dE = L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right) \cdot i \cdot dt + r \cdot i^2 \cdot dt \rightarrow dE = dE_L + dE_{th} \quad \text{où} \quad \begin{cases} dE_L = L \cdot i \cdot di & \text{énergie stockée par la bobine} \\ dE_{th} = r \cdot i^2 \cdot dt & \text{énergie dissipée par effet Joule} \end{cases}$$

L'énergie magnétique emmagasinée par la bobine est :

$$E_L = \int dE_L \rightarrow E_L = \int L \cdot i \cdot di = L \cdot \int i \cdot di \quad \text{et} \quad E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 + K$$

En circuit ouvert, la bobine ne stocke pas d'énergie donc pour $i = 0$ on a $E_L = 0 \rightarrow K = 0$.

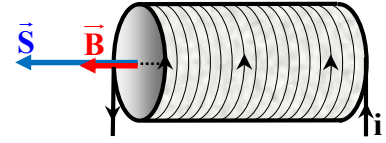
Il vient alors que : $E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$.

3⁰) Flux propre et inductance :

- Une bobine, de longueur l et de section S , comporte N spires. Cette bobine, **sans noyau de fer**, est parcourue par un courant d'intensité i .

Le champ magnétique propre, généré à l'intérieur de la bobine, est uniforme et caractérisé par le vecteur induction magnétique

de valeur : $B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot i$



Le flux propre à travers la bobine est : $\Phi = N \cdot B \cdot S \rightarrow \Phi = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot i \cdot S \rightarrow \Phi = \left(\mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S \right) \cdot i$

Le flux propre à travers la bobine parcourue par un courant est proportionnel à l'intensité de ce courant :

$$\Phi = L \cdot i$$

L est une constante positive appelée inductance de la bobine.

Remarque : L dépend des caractéristiques géométriques de la bobine

$$L = \mu_0 \frac{N^2 \cdot S}{l} \longrightarrow \begin{cases} L \text{ augmente si } N \text{ ou } S \text{ augmente} \\ L \text{ diminue si } l \text{ augmente} \end{cases}$$

- La relation de Faraday s'écrit : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ où e est la f.é.m d'auto induction.

Sachant que : $\Phi = L \cdot i$, il vient alors que : $e = -L \cdot \frac{di}{dt}$

Applications

Exercice 1 :

On réalise le montage électrique ci-contre :

Le circuit est tel que :

* Le GBF, à masse flottante, délivre une tension triangulaire de fréquence N .

* Le résistor a une résistance $R = 4 \text{ K}\Omega$.

* La bobine a une inductance L et une résistance interne r négligeable.

Un oscilloscope permet de visualiser la tension u_R aux bornes du résistor sur la voie 1 (Y_1) et la tension u_B aux bornes de la bobine sur la voie 2 (Y_2 inversée). On obtient les oscillogrammes de la figure ci-dessous :

1⁰) Reprendre le schéma du montage électrique et :

- représenter par des flèches les tensions u_R et u_B .
- indiquer les branchements nécessaires à l'oscilloscope.

2⁰) a - Pourquoi peut-on affirmer que l'oscillogramme (a) représente la tension u_R aux bornes du résistor.

b - Calculer la valeur de la période T de cette tension.

3⁰) Sur l'axe horizontal, l'origine du temps est pris au début de l'écran de l'oscilloscope (comme indiqué ci-contre).

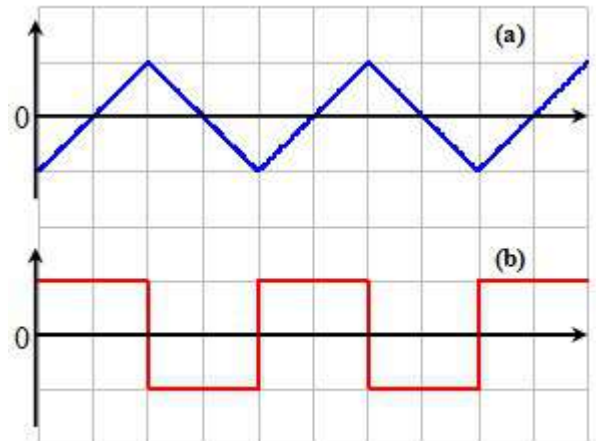
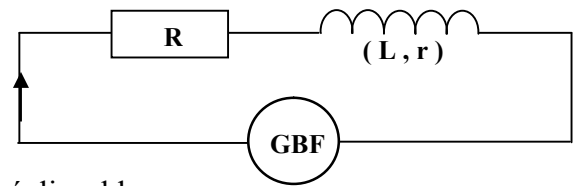
Sur l'intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2}\right]$:

a - Trouver, graphiquement, la valeur de $\left(\frac{du_R}{dt}\right)$.

b - Trouver, graphiquement, la valeur de u_B .

4⁰) a - Montrer que : $u_B = \frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_R}{dt}\right)$

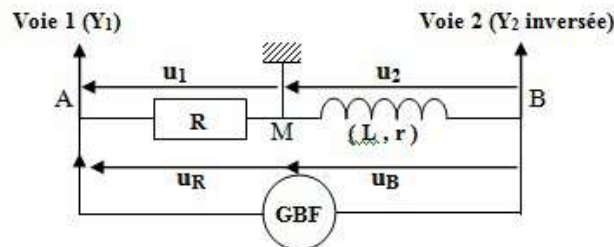
b - Calculer alors la valeur de l'inductance L de la bobine utilisée.



Sensibilité voie 1 : 1 V par division
Sensibilité voie 2 : 0,2 V par division
Base de temps : 0,5 ms par division

Réponse :

1⁰)



2⁰) a - $u_R(t) = R \cdot i(t)$ or $i(t)$ est triangulaire $\xrightarrow[u_R \text{ et } i \text{ ont même allure}]{u_R \text{ et } i \text{ sont proportionnelles}}$ $u_R(t)$ est triangulaire. L'oscillogramme (a) représente alors la tension u_R aux bornes du résistor.

b - Graphiquement : $T = 4,0 \cdot 10^{-3}$ et $T = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

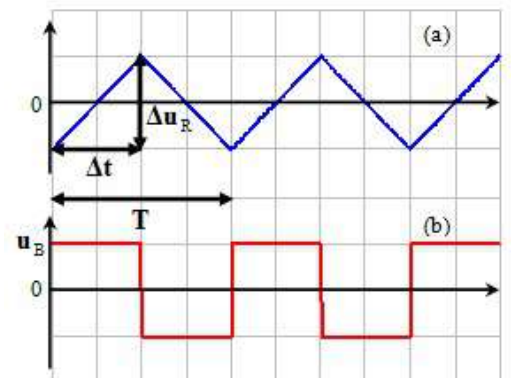
3⁰) Sur l'intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2}\right]$:

a - $u_R = f(t)$ est une droite affine: $u_R(t) = a \cdot t + b \rightarrow \left(\frac{du_R}{dt}\right) = a$

$a = \frac{\Delta u_1}{\Delta t} = \frac{2,1}{2,0 \cdot 10^{-3}}$ et $a = 2 \cdot 10^3 \text{ V.s}^{-1} \rightarrow \left(\frac{du_R}{dt}\right) = 2 \cdot 10^3 \text{ V.s}^{-1}$

b - $u_B = f(t)$ est une constante: $u_B = 1,0,2$ et $u_B = 0,2 \text{ V}$.

4⁰) a - $u_B = -e + r \cdot i \xrightarrow[r \text{ négligeable}]{e = -L \left(\frac{di}{dt}\right)}$ $u_B = L \left(\frac{di}{dt}\right)$



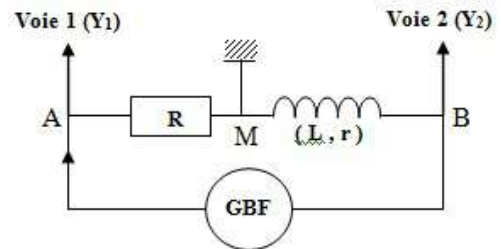
On a $u_R(t) = R \cdot i(t) \rightarrow i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$ et $\left(\frac{di}{dt}\right) = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{du_R}{dt}\right)$. Il vient alors que : $u_B = \frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_R}{dt}\right)$

b - $u_B = \frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_R}{dt}\right) \rightarrow L = \frac{u_B \cdot R}{\left(\frac{du_R}{dt}\right)}$. A.N : $L = \frac{0,2410^3}{2.10^3}$ et $L = 0,4H$.

Exercice 2 :

Dans le montage électrique schématisé ci-contre, le générateur BF, dont la masse est isolé de la terre, délivre une tension triangulaire. Il alimente une portion de circuit série constituée par un résistor de résistance $R = 10^3 \Omega$ et d'une bobine d'inductance $L = 0,1 H$ et de résistance interne r négligeable.

Un oscilloscope, dont le branchement est indiqué sur le schéma du montage, permet la visualisation simultanée des tensions $u_{AM}(t)$ et $u_{BM}(t)$.



1⁰) a - Recopier le schéma électrique et indiquer par des flèches la tension u_R aux bornes du résistor et la tension u_B aux bornes de la bobine.

b - En déduire la relation entre les tensions u_R et u_{AM} et la relation entre les tensions u_B et u_{BM} .

2⁰) a - Donner l'expression de :

- la tension $u_{AM}(t)$ en fonction de R et $i(t)$

- la tension $u_{BM}(t)$ en fonction de L et $\left(\frac{di}{dt}\right)$.

b - En déduire la relation $u_{BM}(t) = -\frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_{AM}}{dt}\right)$

3⁰) a - Déterminer la période T de la tension $u_{AM}(t)$.

b - Calculer la valeur de $\left(\frac{du_{AM}}{dt}\right)$ sur un intervalle de

temps de durée $\frac{T}{2}$ où la tension $u_{AM}(t)$ est croissante.

c - En déduire la valeur de la tension $u_{BM}(t)$ sur ce même intervalle de temps.

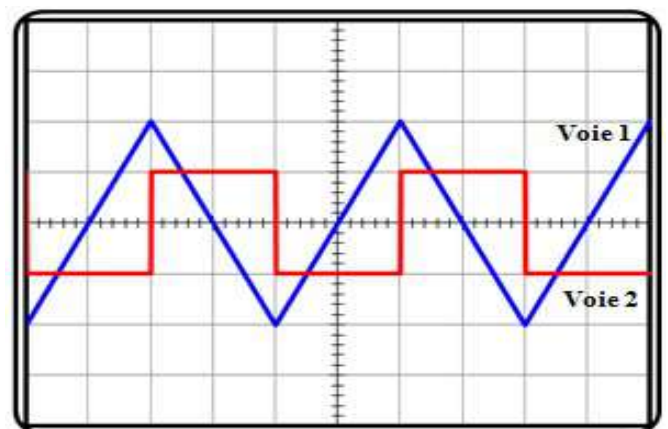
d - Montrer que la valeur de la sensibilité verticale sur la voie 2 de l'oscilloscope est $S_{V2} = 0,2 V \cdot \text{div}^{-1}$.

4⁰) On remplace la bobine par une autre d'inductance L' et de résistance interne r' négligeable.

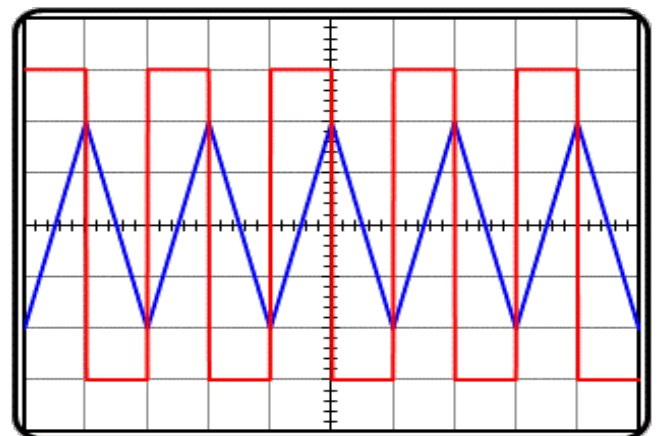
Pour une nouvelle valeur S'_H de la sensibilité horizontale et en enclenchant la touche « inverse » sur la voie 2 de l'oscilloscope, on observe les oscillogrammes ci-contre:

a - Montrer que $S'_H = 2S_H$.

b - Déterminer la valeur de l'inductance L' de la bobine.

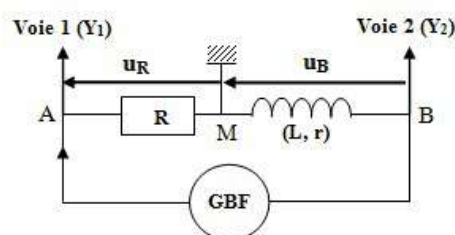


voie 1 : $S_{V1} = 0,5 V \cdot \text{div}^{-1}$
 voie 2 : $S_{V2} = \text{inconnue !}$
 Base de temps : $S_H = 0,5 \cdot 10^{-3} s \cdot \text{div}^{-1}$



Réponse :

1⁰) a -



b - $u_R = u_{AM}$ et $u_B = -u_{BM}$

$$2^0) \text{ a - } u_{AM}(t) = u_R \xrightarrow{u_R = R \cdot i} u_{AM}(t) = R \cdot i(t)$$

$$\text{b - } u_{BM}(t) = -u_B \xrightarrow{u_B = -e + r \cdot i} u_{BM}(t) = e - r \cdot i \xrightarrow[r=0]{e = -L \frac{di}{dt}} u_{BM}(t) = -L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right)$$

$$\text{c - } u_{AM}(t) = R \cdot i(t) \rightarrow i(t) = \frac{u_{AM}(t)}{R} \text{ et } \left(\frac{di}{dt} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{du_{AM}}{dt} \right)$$

$$u_{BM}(t) = -L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) \rightarrow u_{BM}(t) = -\frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_{AM}}{dt} \right)$$

3⁰) a - Graphiquement : $T = 4.0,5 \cdot 10^{-3}$ et $T = 2 \cdot 10^{-3}$ s .

b - Sur un intervalle de temps de durée $\frac{T}{2}$ où la tension $u_{AM}(t)$ est croissante :

$$\left(\frac{du_{AM}}{dt} \right) = \frac{4.0,5}{2.0,5 \cdot 10^{-3}} \text{ et } \left(\frac{du_{AM}}{dt} \right) = 2 \cdot 10^3 \text{ V.s}^{-1}.$$

$$\text{c - } u_{BM} = -\frac{0,1}{10^3} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ et } u_{BM} = -0,2 \text{ V}.$$

$$\text{d - Graphiquement : } |u_{BM}| = 1 \cdot S_{V2} \xrightarrow{|u_{BM}| = 0,2 \text{ V}} S_{V2} = 0,2 \text{ V.div}^{-1}.$$

$$4^0) \text{ a - } T = 4 \cdot S_H = 2S'_H \rightarrow S'_H = 2S_H \xrightarrow[S_H = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ s.div}^{-1}]{A.N} S'_H = 10^{-3} \text{ s.div}^{-1}.$$

b - Sur (Y_2 inv), l'oscilloscope visualise la tension $u_{MB}(t) = u_B = L' \cdot \left(\frac{di}{dt} \right)$

$$\rightarrow u_{MB}(t) = \frac{L'}{R} \cdot \left(\frac{du_{AM}}{dt} \right) \text{ et } L' = \frac{R \cdot u_{MB}(t)}{\left(\frac{du_{AM}}{dt} \right)}$$

Sur un intervalle de temps de durée $\frac{T}{2}$ où la tension $u_{AM}(t)$ est croissante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{du_{AM}}{dt} \right) = \frac{4.0,5}{1 \cdot 10^{-3}} \text{ et } \left(\frac{du_{AM}}{dt} \right) = 2 \cdot 10^3 \text{ V.s}^{-1} \\ u_{MB} = 3.0,2 \text{ et } u_{MB} = 0,6 \text{ V} \end{array} \right. \rightarrow L' = \frac{10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^3} \text{ et } L' = 0,3 \text{ H}.$$

Exercice 3 :

On réalise le montage électrique ci-contre :

Le circuit est tel que :

* Le GBF, à masse flottante, délivre une tension triangulaire de fréquence N .

* Le résistor a une résistance $R = 2 \text{ K}\Omega$.

* La bobine a une inductance L et une résistance interne r négligeable.

Un oscilloscope permet de visualiser la tension u_R aux bornes du résistor sur la voie 1 (Y_1) et la tension u_B aux bornes de la bobine sur la voie 2 (Y_2 inversée).

L'oscilloscope est réglé comme suit :

Sensibilité voie 1 : 1 V par division

Sensibilité voie 2 : 0,1 V par division

Base de temps : 1 ms par division

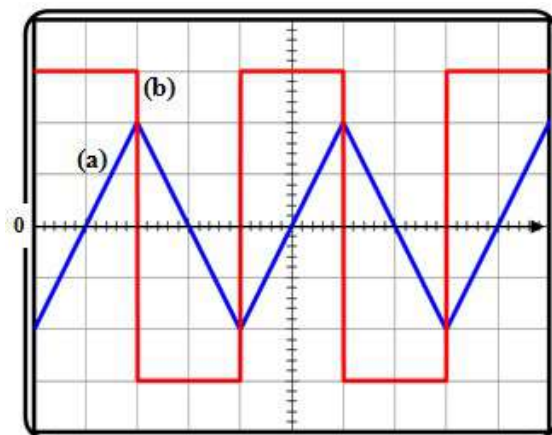
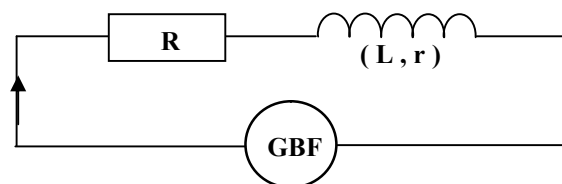
On obtient les oscillogrammes de la figure ci-contre :

1⁰) Reprendre le schéma du montage électrique et :

- représenter par des flèches les tensions u_R et u_B .
- indiquer les branchements nécessaires à l'oscilloscope.

2⁰) a - Pourquoi peut-on affirmer que l'oscillogramme (a) représente la tension u_R aux bornes du résistor.

b - Calculer la valeur de la période T de cette tension.



3⁰) Sur l'axe horizontal, l'origine du temps est pris au début de l'écran de l'oscilloscope.

Sur l'intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2}\right]$:

a - Trouver, graphiquement, la valeur de $\left(\frac{du_R}{dt}\right)$.

b - Trouver, graphiquement, la valeur de u_B .

4⁰) a - Montrer que : $u_B = \frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_R}{dt}\right)$

b - Calculer alors la valeur de l'inductance L de la bobine utilisée :

5⁰) La bobine et le conducteur ohmique sont maintenant insérés dans le montage électrique ci-dessous :

Le générateur de tension idéal a une f.e.m. $E = 10\text{ V}$

Le condensateur a une capacité $C = 0,1\text{ }\mu\text{F}$.

La diode D est supposée parfaite.

L'interrupteur K_2 est maintenu fermé.

• Première étape : On ferme l'interrupteur K_1 .

Le milliampèremètre indique une intensité I et le voltmètre indique une tension nulle.

a - Déterminer la valeur de l'intensité I lorsque le régime permanent s'établit

b - Calculer l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine.

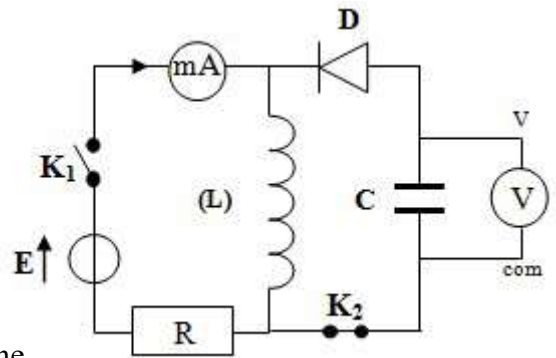
• Deuxième étape : On ouvre l'interrupteur K_1 .

Le milliampèremètre indique une intensité nulle et le voltmètre indique une tension U_C négative.

c - En supposant que l'énergie E_L initialement stockée par la bobine est totalement transférée vers le condensateur sous forme d'énergie électrostatique E_C , déterminer la valeur de la tension U_C indiquée par le voltmètre.

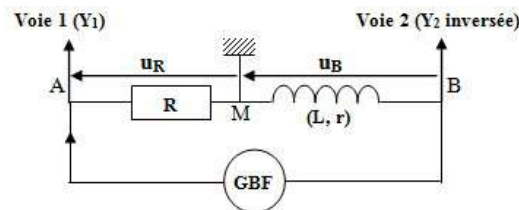
d - L'interrupteur K_2 est maintenu ouvert.

Décrire et interpréter ce qui se passe à l'ouverture l'interrupteur K_1 .



Réponse :

1⁰)



2⁰) a - Le générateur délivre un courant d'intensité $i(t)$ triangulaire.

$u_R(t) = R \cdot i(t) \rightarrow u_R$ et i sont proportionnelles (donc elles ont la même allure d'évolution au cours du temps). On en déduit que l'oscillogramme (a) représente la tension u_R aux bornes du résistor.

b - Graphiquement : $T = 4 \cdot 10^{-3}\text{ s}$

3⁰) Sur l'intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2}\right]$:

a - $\left(\frac{du_R}{dt}\right) = \frac{4,1}{2 \cdot 10^{-3}}$ et $\left(\frac{du_R}{dt}\right) = 2 \cdot 10^3\text{ V.s}^{-1}$.

b - $u_B = 3,0,1$ et $u_B = 0,3\text{ V}$.

4⁰) a - $u_B = -e + r \cdot i \xrightarrow[r=0]{e = -L \frac{di}{dt}} u_B = L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right)$

$u_R = R \cdot i \rightarrow i = \frac{u_R}{R}$ et $\left(\frac{di}{dt}\right) = \frac{1}{R} \left(\frac{du_R}{dt}\right) \rightarrow u_B(t) = \frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_R}{dt}\right)$

$$b - u_B = \frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_R}{dt} \right) \rightarrow L = \frac{u_B \cdot R}{\left(\frac{du_R}{dt} \right)}. \quad \text{A.N : } L = \frac{0,3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} \quad \text{et} \quad L = 0,3 \text{ H.}$$

5⁰) a - La loi des mailles s'écrit : $u_R + u_B - E = 0 \rightarrow u_B + u_R = E$

$$\begin{aligned} u_B &= L \cdot \frac{di}{dt} \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = E \\ u_R &= R \cdot i \end{aligned}$$

En régime permanent : $i = I = \text{constante} \rightarrow \frac{di}{dt} = 0$, on écrit alors :

$$R \cdot I = E \rightarrow I = \frac{E}{R}. \quad \text{A.N : } I = \frac{10}{2 \cdot 10^3} \quad \text{et} \quad I = 5 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

$$b - E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2. \quad \text{En régime permanent (} i = I \text{)} \rightarrow E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2.$$

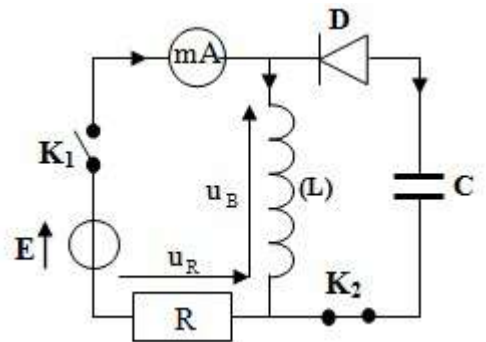
$$\text{A.N : } E_L = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 \quad \text{et} \quad E_L = 3,75 \cdot 10^{-6} \text{ J.}$$

$$c - E_L = E_C \rightarrow E_C = 3,75 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_C^2 \xrightarrow{U_C < 0} U_C = -\sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{C}}. \quad \text{A.N : } U_C = -\sqrt{\frac{2 \cdot 3,75 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 10^{-6}}} \quad \text{et} \quad U_C = -8,66 \text{ V.}$$

d - L'interrupteur K_2 étant ouvert, on observe, à l'ouverture de l'interrupteur K_1 , l'apparition d'une étincelle de rupture au niveau de l'interrupteur K_1 .

L'énergie magnétique préalablement stockée par la bobine doit être dissipée à l'ouverture du circuit inductif, ceci se manifeste par l'apparition de l'étincelle de rupture au niveau de l'interrupteur.

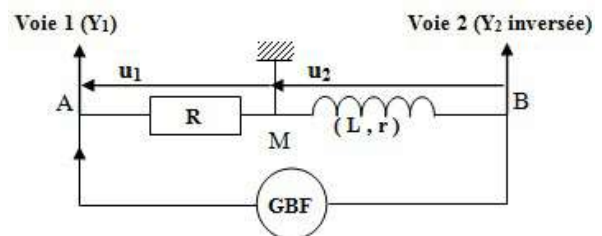


Exercice 4 :

On considère le montage électrique ci-contre :

- Le résistor a une résistance $R = 10^4 \Omega$.
- La bobine a une inductance L et une résistance interne r négligeable.
- Le GBF délivre une tension triangulaire de fréquence $N = 250 \text{ Hz}$ (période $T = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$)

Un oscilloscope, dont le branchement est indiqué sur le schéma du montage, permet la visualisation des oscillogrammes ci-dessous :



On donne :

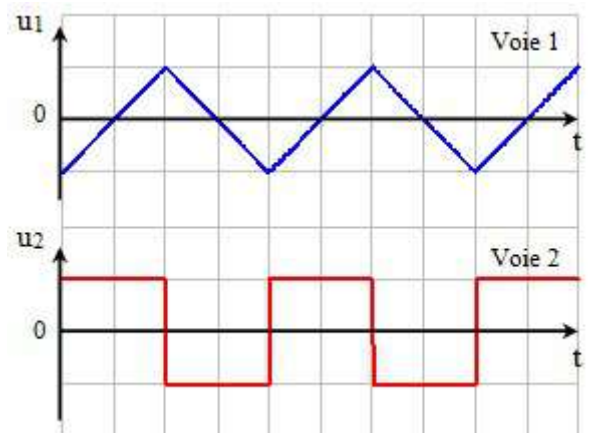
- Sensibilité voie 1 : 2 V par division.
- Sensibilité voie 2 : 0,1 V par division.
- Base de temps : 10^{-3} s par division.

1⁰) a - Montrer que sur l'intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2} \right]$,

la tension u_1 s'exprime par : $u_1(t) = 2000 \cdot t - 2 \text{ (V)}$.

b - En déduire l'expression de $i(t)$ en fonction du temps.

Calculer alors la valeur de $\left(\frac{di}{dt} \right)$.



2⁰) a - Déterminer la valeur de u_2 sur l'intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2} \right]$.

b - Sachant que $u_2 = L \left(\frac{di}{dt} \right)$, calculer alors la valeur de l'inductance L de la bobine.

3⁰) La bobine est insérée dans le circuit électrique schématisé ci-contre :

- Le générateur de tension idéal a une f.e.m. E .
- Le rhéostat est de résistance R variable.
- Le condensateur a une capacité C .
- La diode D est supposée parfaite.

a - Reprendre le schéma du montage et indiquer par une flèche chacune des tensions u_L aux bornes de la bobine et u_C aux bornes du condensateur.

b - Préciser la valeur de la tension u_C à la fermeture du circuit. Justifier la réponse.

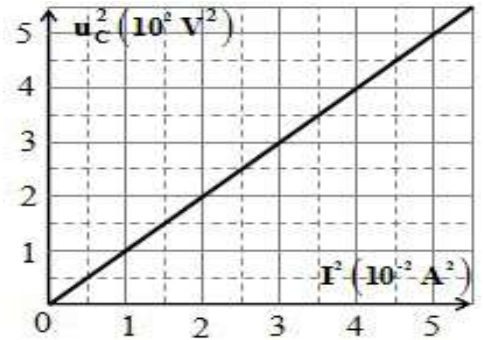
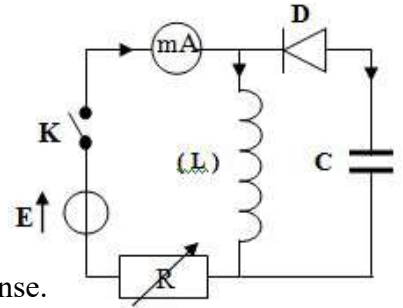
c - A l'ouverture du circuit, le condensateur se charge.

En énonçant la loi utilisée, Justifier le signe de la tension u_C aux bornes du condensateur.

d - On fait varier l'intensité I du courant qui s'établit à la fermeture du circuit et on note chaque fois la tension u_C aux bornes du condensateur qui apparaît à l'ouverture du circuit.

On trace alors la courbe $u_C^2 = f(I^2)$ ci-contre :

En exploitant la courbe donnée, déterminer la valeur de la capacité C du condensateur utilisé.



Réponse :

1⁰) a - Entre $\left[0, \frac{T}{2}\right]$: $u_1(t) = a.t + b$ avec $a = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{2.2}{2.10^{-3}} = 2.10^3 \text{ V.s}^{-1}$ et $b = -1.2 = -2 \text{ V}$

Donc la tension u_1 s'exprime par : $u_1(t) = 2000.t - 2 \text{ (V)}$.

b - On a : $u_1(t) = u_R(t) = R.i(t) \rightarrow i(t) = \frac{u_1(t)}{R} \rightarrow i(t) = \frac{2000.t - 2}{10^4}$ et $i(t) = 0.2.t - 2.10^{-4} \text{ (A)}$.

Par conséquent : $\left(\frac{di}{dt}\right) = 0.2 \text{ A.s}^{-1}$

2⁰) a - Entre $\left[0, \frac{T}{2}\right]$: $u_2(t) = U_0$ avec $U_0 = 1.0, 1 = 0.1 \text{ V}$ et $u_2(t) = 0.1 \text{ V}$.

b - $u_2 = L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right) \rightarrow L = \frac{u_2}{\left(\frac{di}{dt}\right)} \xrightarrow{\text{A.N}} L = \frac{0.1}{0.2}$ et $L = 0.5 \text{ H}$.

3⁰) a - Voir figure ci-contre

b - A la fermeture du circuit, $u_C = 0$ car la diode est dans le sens bloquant.

c - A l'ouverture du circuit, la bobine crée un courant induit et d'après la loi de Lenz qui dit que le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance, ce courant induit circulera dans le sens passant de la diode (sens contraire au sens positif) et chargera le condensateur avec $u_C < 0$.

d - A l'ouverture du circuit, l'énergie magnétique emmagasinée par la bobine est transférée au condensateur qui la stocke sous forme d'énergie électrostatique. $E_C = E_L \rightarrow \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \rightarrow u_C^2 = \frac{L}{C} \cdot I^2$

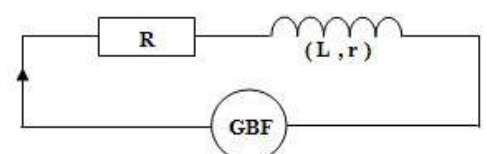
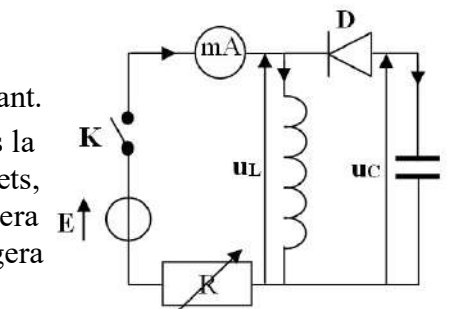
Graphiquement : $u_C^2 = f(I^2)$ est une droite linéaire de pente $A = \frac{(5-0) \cdot 10^2}{(5-0) \cdot 10^{-2}}$ et $A = 10^4 \text{ H.F}^{-1}$

Par identification $\frac{L}{C} = A \rightarrow C = \frac{L}{A} \xrightarrow{\text{A.N}} C = \frac{0.5}{10^4}$ et $C = 5.10^{-5} \text{ F}$ ou $C = 50 \mu\text{F}$.

Exercice 5 :

Une bobine, d'inductance L et de résistance interne r négligeable, est reliée en série à un résistor de résistance $R = 10^4 \Omega$.

L'ensemble est alimenté par un GBF, à masse flottante, qui délivre une tension triangulaire de fréquence N .



Un oscilloscope permet la visualisation de la tension u_R aux bornes du résistor sur la voie 1 (Y_1) et la tension u_L aux bornes de la bobine sur la voie 2 (Y_2 inversée).

On règle les sensibilités de l'oscilloscope comme indiqué sur la figure ci-contre pour obtenir les oscillogrammes (a) et (b) :

1⁰) a - Reprendre le schéma du circuit électrique et indiquer les branchements nécessaires à l'oscilloscope.

b - Associer chacun des oscillogrammes (a) et (b) à la tension u_R ou u_L qu'il représente.

c - Montrer que : $u_L = \frac{L}{R} \left(\frac{du_R}{dt} \right)$.

d - En exploitant les oscillogrammes (a) et b) sur l'intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2} \right]$, calculer la valeur de l'inductance L de la bobine.

2⁰) On agit sur le GBF pour doubler la fréquence de la tension triangulaire qu'il délivre ($N' = 2N$).

Pour deux réglages des sensibilités de l'oscilloscope différents, on visualise les oscillogrammes soit de la figure 1 soit de la figure 2 ci-dessous :

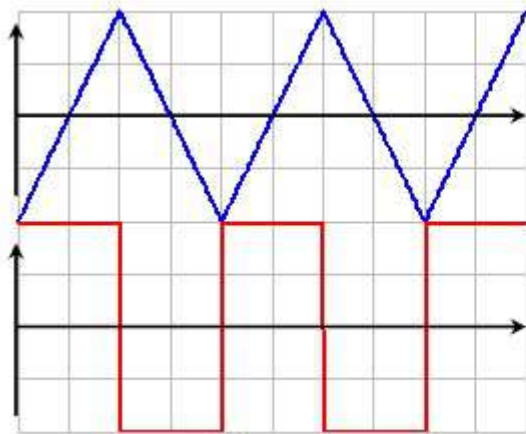


Figure 1

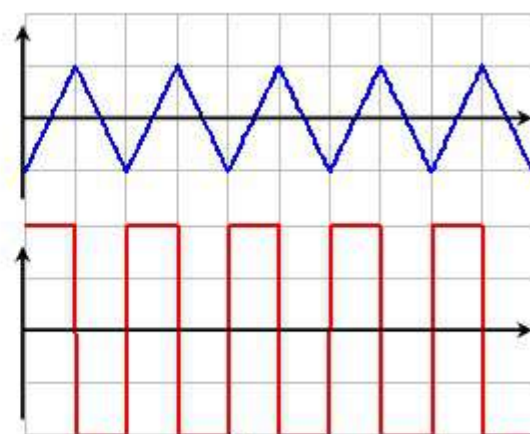


Figure 2

a - Sur l'une des figures on a fait varier la sensibilité horizontale S_H de l'oscilloscope.

Préciser la quelle en calculant la sensibilité horizontale S'_H sur chacune des deux figures.

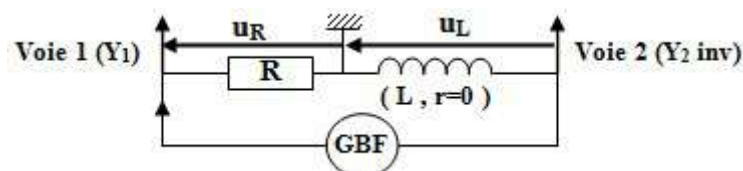
b - Pour chacune des figure 1 et 2 déterminer les valeurs des sensibilités verticales S'_{V1} et S'_{V2} .

Compléter alors le tableau :

	$S'_{V1} (V.div^{-1})$	$S'_{V2} (V.div^{-1})$	$S'_H (s.div^{-1})$
Figure 1			
Figure 2			

Réponse :

1⁰) a -



b - On a : $u_R(t) = R.i(t) \rightarrow u_R(t)$ et $i(t)$ ont même allure.

Donc l'oscillogramme (a) représente $u_R(t)$ et par conséquent l'oscillogramme (b) représente $u_L(t)$.

c - $u_R(t) = R.i(t) \rightarrow i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$ et $\left(\frac{di}{dt} \right)_t = \frac{1}{R} \left(\frac{du_R}{dt} \right)_t$

on a : $u_L(t) = -e = L \left(\frac{di}{dt} \right)_t \rightarrow u_L(t) = \frac{L}{R} \left(\frac{du_R}{dt} \right)_t$.

d - Entre $t = 0$ et $t = \frac{T}{2}$:

$$* \left(\frac{du_R}{dt} \right) = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{4.1}{2.10^{-3}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{du_R}{dt} \right) = 2.10^3 \text{ V.s}^{-1}$$

$$* u_L = 2.0,1 \quad \text{et} \quad u_L = 0,2 \text{ V}.$$

$$* u_L = \frac{L}{R} \left(\frac{du_R}{dt} \right) \rightarrow L = \frac{u_L \cdot R}{\left(\frac{du_R}{dt} \right)}. \quad \text{A.N: } L = \frac{0,2.10^4}{2.10^3} \quad \text{et} \quad L = 1 \text{ H}.$$

$$2^0) \text{ a - On a : } T = 4 \text{ div. } S_H \quad \text{or } S_H = 10^{-3} \text{ s.div}^{-1} \rightarrow T = 4.10^{-3} \text{ s}.$$

$$\text{On double la fréquence : } N' = 2N \rightarrow T' = \frac{T}{2} \xrightarrow{T=4.10^{-3} \text{ s}} T' = 2.10^{-3} \text{ s}.$$

$$\bullet \quad \text{Pour la figure 1 : } T' = 4 \text{ div. } S'_H = 2.10^{-3} \text{ s} \rightarrow S'_H = 0,5.10^{-3} \text{ s.div}^{-1} \quad \text{donc} \quad S'_H \neq S_H$$

$$\bullet \quad \text{Pour la figure 2 : } T' = 2 \text{ div. } S'_H = 2.10^{-3} \text{ s} \rightarrow S'_H = 10^{-3} \text{ s.div}^{-1} \quad \text{donc} \quad S'_H = S_H$$

On a changé la sensibilité horizontale S_H sur la figure 1.

b - Lorsqu'on double la fréquence et entre $t = 0$ et $t = \frac{T}{2}$:

$$* \left(\frac{du'_R}{dt} \right) = \frac{\Delta U}{\Delta t'} = \frac{\Delta U}{\frac{T'}{2}} = \frac{\Delta U}{\frac{T}{4}} = 2. \frac{\Delta U}{\frac{T}{2}} = 2. \frac{\Delta U}{\Delta t} = 2. \left(\frac{du_R}{dt} \right) \xrightarrow{\left(\frac{du_R}{dt} \right) = 2.10^3 \text{ V.s}^{-1}} \left(\frac{du'_R}{dt} \right) = 4.10^3 \text{ V.s}^{-1}$$

$$* u'_L = \frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du'_R}{dt} \right) \rightarrow u'_L = \frac{1}{10^4} \cdot 4.10^3 \rightarrow u'_L = 0,4 \text{ V}.$$

$$\bullet \quad \text{Pour la figure 1 : } \left(\frac{du'_R}{dt} \right) = \frac{4 \text{ div. } S'_{V1}}{2 \text{ div. } (0,5.10^{-3} \text{ s.div}^{-1})} = 4.10^3 \text{ V.s}^{-1} \rightarrow S'_{V1} = 1 \text{ V.div}^{-1}.$$

$$u'_L = 2 \text{ div. } S'_{V2} = 0,4 \text{ V} \rightarrow S'_{V2} = 0,2 \text{ V.div}^{-1}.$$

$$\bullet \quad \text{Pour la figure 2 : } \left(\frac{du'_R}{dt} \right) = \frac{2 \text{ div. } S'_{V1}}{1 \text{ div. } (10^{-3} \text{ s.div}^{-1})} = 4.10^3 \text{ V.s}^{-1} \rightarrow S'_{V1} = 2 \text{ V.div}^{-1}.$$

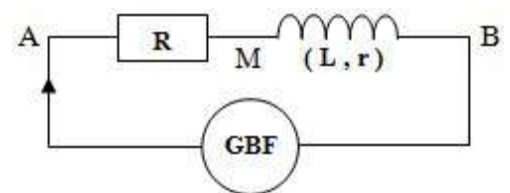
$$u'_L = 2 \text{ div. } S'_{V2} = 0,4 \text{ V} \rightarrow S'_{V2} = 0,2 \text{ V.div}^{-1}.$$

	$S'_{V1} (\text{V.div}^{-1})$	$S'_{V2} (\text{V.div}^{-1})$	$S'_H (\text{s.div}^{-1})$
Figure 1	1	2	$0,5.10^{-3}$
Figure 2	0,2	0,2	10^{-3}

Exercice 6 :

Dans le montage électrique schématisé ci-dessous, le générateur BF, à masse flottante, délivre une tension triangulaire. Il alimente une portion de circuit série constituée par une bobine d'inductance L et de résistance interne $r = 10 \Omega$ et un résistor de résistance R variable.

Un oscilloscope permet la visualisation simultanée des tensions $u_1 = u_{AM}(t)$ sur la voie 1 (Y_1) et $u_2 = u_{BM}(t)$ sur la voie 2 (Y_2).



1⁰) a - Recopier le schéma électrique et indiquer par des flèches la tension u_R aux bornes du résistor et la tension u_B aux bornes de la bobine ainsi que les branchements nécessaires à l'oscilloscope.

b - En déduire la relation entre les tensions u_R et u_1 et la relation entre les tensions u_B et u_2 .

2⁰) a - Exprimer la tension u_1 en fonction de R et $i(t)$.

b - Exprimer la tension u_2 en fonction de L , $\left(\frac{di}{dt}\right)$, r et $i(t)$.

c - En déduire l'expression de la tension $u_s = u_1 + u_2$.

3⁰ La touche ADD de l'oscilloscope permet d'observer la tension somme $u_s = u_1 + u_2$.

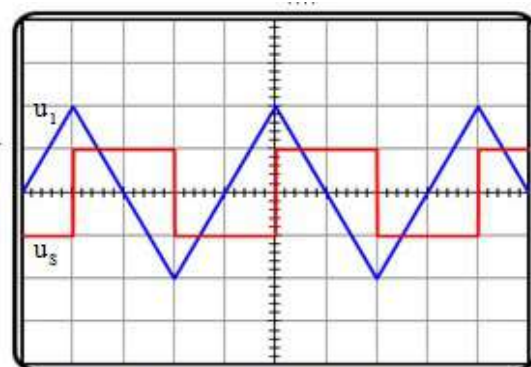
La figure ci-contre donne les oscillogrammes de u_1 et de u_s obtenues lorsque $R = r$.

a - Montrer que dans ce cas, on a : $u_s = -\frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_1}{dt}\right)$.

b - Déterminer, sur un intervalle de temps où u_1 est croissante, la valeur de $a = \left(\frac{du_1}{dt}\right)$.

c - Préciser, sur ce même intervalle, la valeur de u_s .

d - Calculer alors la valeur de l'inductance L de la bobine.



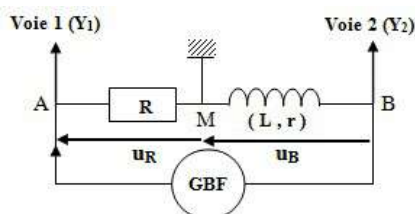
Sensibilité de u_1 : 0,1 V par division

Sensibilité de u_s : 0,5 V par division

Base de temps : $10 \cdot 10^{-3}$ s par division

Réponse :

1⁰ **a** -



b - $u_1 = u_{AM} \rightarrow u_1 = u_R$ et $u_2 = u_{BM} \rightarrow u_2 = -u_B$

2⁰ **a** - $u_1 = u_R \xrightarrow{u_R = R \cdot i} u_1(t) = R \cdot i(t)$

b - $u_2 = -u_B \rightarrow u_2(t) = -(-e + r \cdot i) \xrightarrow{e = -L \frac{di}{dt}} u_2(t) = -L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right) - r \cdot i(t)$

c - $u_s = u_1 + u_2 \rightarrow u_s(t) = R \cdot i(t) - L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right) - r \cdot i(t)$ et $u_s(t) = -L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right) + (R - r) \cdot i(t)$

3⁰ **a** - Pour $R = r \rightarrow u_s(t) = -L \cdot \left(\frac{di}{dt}\right)$.

On a : $u_1 = R \cdot i \rightarrow i = \frac{u_1}{R}$ et $\left(\frac{di}{dt}\right) = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{du_1}{dt}\right)$. Il vient alors que : $u_s(t) = -\frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_1}{dt}\right)$.

b - Sur un intervalle de temps où la tension $u_1(t)$ est croissante :

$a = \left(\frac{du_1}{dt}\right) = \frac{\Delta u_1}{\Delta t} \rightarrow a = \frac{4,0,1}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}$ et $a = 20 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$.

c - Graphiquement : $u_s = -1,0,5$ et $u_s = -0,5 \text{ V}$.

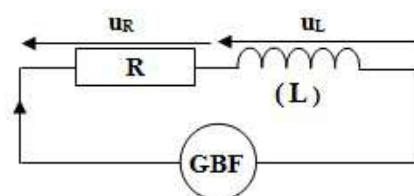
d - On a : $u_s(t) = -\frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_1}{dt}\right) \xrightarrow{\left(\frac{du_1}{dt}\right) = a} L = -\frac{R \cdot u_s(t)}{a}$. A.N : $L = -\frac{10 \cdot (-0,5)}{20}$ et $L = 0,25 \text{ H}$.

Exercice 7 :

On considère le montage électrique schématisé ci-contre :

- Le conducteur ohmique a une résistance $R = 10^3 \Omega$.
- La bobine a une résistance interne négligeable et une inductance L inconnue.
- Le GBF délivre une tension triangulaire de période T .

Un dispositif d'acquisition, convenablement branché, permet de visualiser simultanément la tension u_R aux bornes du résistor et la tension u_L aux bornes de la bobine.



On obtient les oscillogrammes ci-contre :

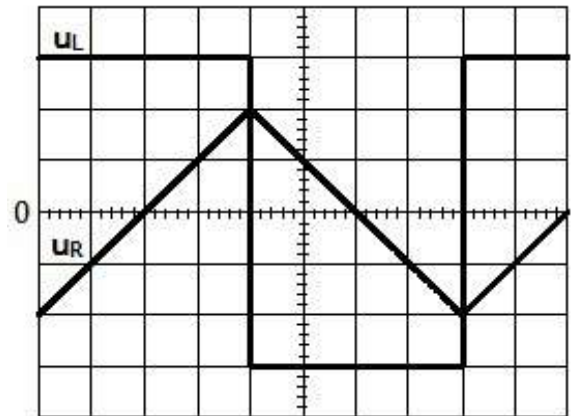
1⁰) Quelle est la valeur de la période T ?

2⁰) a - Pour chaque intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ et $\left[\frac{T}{2}, T\right]$:

- Calculer le coefficient directeur a de u_R (attention au signe).
- Donner la valeur de u_L .
- Calculer le rapport $\frac{u_L}{a}$.

Compléter le tableau ci-dessous en y reportant vos réponses:

	$\left[0, \frac{T}{2}\right]$	$\left[\frac{T}{2}, T\right]$
a (V.s ⁻¹)		
u_L (V)		
$\frac{u_L}{a}$		



Sensibilité de u_R : 1,0 V par division
Sensibilité de u_L : 0,2 V par division
Base de temps : $0,5 \cdot 10^{-3}$ s par division

b - Montrer que : $\frac{di}{dt} = \frac{a}{R}$.

c - Sachant que $u_L = L \frac{di}{dt}$, exprimer L en fonction de u_L , a et R.

d - En déduire alors que la valeur de l'inductance de la bobine est $L = 0,3$ H.

3⁰) La bobine et le conducteur ohmique sont maintenant insérés dans le montage électrique ci-dessous :

- Le générateur de tension idéal a une f.e.m. $E = 10$ V
- Le condensateur a une capacité $C = 0,3 \mu F$.
- La diode D est supposée parfaite.

Première étape : On ferme l'interrupteur K.

Le milliampèremètre indique une intensité $I = 10$ mA et le voltmètre indique une tension nulle.

a - Pourquoi la tension aux bornes du condensateur est-elle nulle ?

b - Calculer l'énergie magnétique E_m emmagasinée par la bobine.

Deuxième étape : On ouvre l'interrupteur K.

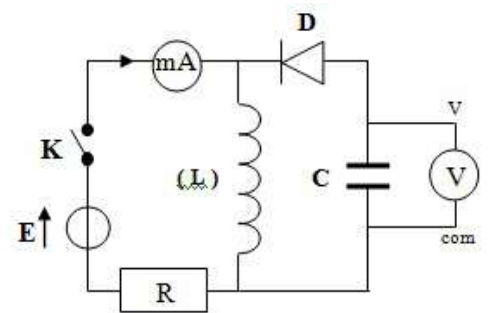
Le milliampèremètre indique une intensité nulle et le voltmètre indique une tension négative $U_C = -10$ V.

c - Quel est le phénomène physique responsable de la charge du condensateur ?

d - En utilisant la loi de Lenz, justifier le signe de la tension lue sur le voltmètre.

e - Calculer l'énergie électrostatique E_C stockée par le condensateur.

f - Comparer les valeurs de E_m et de E_C . Commenter le résultat.



Réponse :

1⁰) Graphiquement $T = 8 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}$ et $T = 4 \cdot 10^{-3}$ s.

2⁰) a - * sur l'intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2}\right]$: $\begin{cases} a = \frac{du_R}{dt} = \frac{4,1,0}{4,0,5 \cdot 10^{-3}} = 2000 \text{ Vs}^{-1} \\ u_L = 3,0,2 = 0,6 \text{ V} \end{cases} \rightarrow \frac{u_L}{a} = \frac{0,6}{2000} = 3 \cdot 10^{-4}$

* sur l'intervalle de temps $\left[\frac{T}{2}, T\right]$: $\begin{cases} a = \frac{du_R}{dt} = \frac{-4,1,0}{4,0,5 \cdot 10^{-3}} = -2000 \text{ Vs}^{-1} \\ u_L = -3,0,2 = -0,6 \text{ V} \end{cases} \rightarrow \frac{u_L}{a} = \frac{-0,6}{-2000} = 3 \cdot 10^{-4}$

	$\left[0, \frac{T}{2}\right]$	$\left[\frac{T}{2}, T\right]$
a (V.s ⁻¹)	2000	-2000
u_L (V)	0,6	-0,6
$\frac{u_L}{a}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$

$$b - a = \frac{du_R}{dt} \xrightarrow{u_R = R \cdot i} a = R \cdot \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = \frac{a}{R}.$$

$$c - u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \xrightarrow{\frac{di}{dt} = \frac{a}{R}} u_L = L \cdot \frac{a}{R} \quad \text{et} \quad L = R \cdot \frac{u_L}{a}.$$

$$d - A.N : L = 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad L = 0,3 \text{ H}.$$

3⁰) a - Le condensateur est en série avec la diode branchée dans le sens bloquant, elle l'empêche donc de se charger. Par conséquent la tension aux bornes du condensateur est nulle.

$$b - E_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2. \quad A.N : E_m = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot (10 \cdot 10^{-3})^2 \quad \text{et} \quad E_m = 15 \cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

c - A l'ouverture du circuit, le courant parcourant la bobine tend à s'annuler, la variation du courant provoque une variation du champ magnétique de la bobine et celle-ci, par phénomène d'auto-induction, crée un courant induit qui, s'opposant à la rupture du courant, circule dans le sens passant de la diode et charge le condensateur.

d - D'après la loi de Lenz, le courant induit circule dans le sens passant de la diode.

Par conséquent, la charge q du condensateur (charge de l'armature vers laquelle pointe le sens positif du courant) sera négative donc la tension $u_C = \frac{q}{C}$ aux bornes du condensateur sera négative.

$$e - E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2. \quad A.N : E_C = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 10^{-6} \cdot (-10)^2 \quad \text{et} \quad E_C = 15 \cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

f - On remarque que $E_m = E_C$.

A l'ouverture du circuit, l'énergie magnétique E_m emmagasinée par la bobine doit s'annuler (la bobine étant un réservoir temporaire d'énergie). Cette énergie est alors transférée intégralement au condensateur qui la stocke sous forme d'énergie électrostatique E_C (le condensateur étant un réservoir permanent d'énergie).

Remarque : En absence du condensateur et à l'ouverture du circuit de la bobine l'énergie E_m se manifestera sous forme d'étincelle de rupture au niveau du contact de l'interrupteur.

Etude d'un texte documentaire :

Exercice 1 :

Protection des circuits inductifs

Lors de l'ouverture d'un interrupteur placé dans un circuit inductif (comportant une bobine), parcouru par un courant intense, un arc électrique s'établit entre les deux pôles qui sont écartés l'un de l'autre.

Il en est de même avec des circuits parcourus par des courants peu intenses mais qui font l'objet de commutations rapides (électronique).

Cet arc, dit étincelle de rupture, est la conséquence du phénomène d'auto-induction : l'installation du courant dans un circuit se traduit par l'induction d'une force électromotrice d'autant plus grande :

- Que le courant interrompu est plus intense
- Que l'interruption est plus rapide

Il peut en résulter une surtension importante entre les pôles des appareils de coupure. En général, il est indispensable de remédier à cet inconvénient afin d'éviter tout danger pour le manipulateur (risque d'électrocution) et pour le matériel. Cette protection peut être assurée par une diode.

Physique appliquée. Nathan technique

Questions :

1⁰) a - Quand et dans quel type de circuit l'étincelle de rupture apparaît-elle ?

b - Quel est le phénomène physique responsable de son apparition ?

2⁰) De quoi dépend la f é m d'auto-induction ?

3⁰) Les circuits inductifs présentent un inconvénient qui peut être dangereux pour le manipulateur et le matériel.

Lequel ? Comment peut-on y remédier ?

Réponse :

1⁰) a - L'étincelle de rupture apparaît lors de l'ouverture d'un interrupteur placé dans un circuit inductif.

b - L'étincelle de rupture est la conséquence du phénomène d'auto induction.

2⁰) La f é m d'auto induction dépend :

* de l'intensité du courant interrompu

* de la rapidité de l'interruption du courant

3⁰) L'inconvénient présenté par les circuits inductifs est la surtension entre les pôles des appareils de rupture.

On peut y remédier en utilisant une diode convenablement branchée.

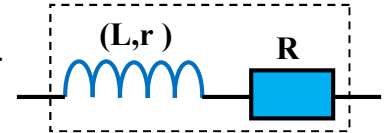
LE DIPÔLE RL

I / Introduction :

Une bobine d'inductance L et de résistance interne r et un résistor de résistance R_0 associés en série constituent un dipôle RL où $R = R_0 + r$ est la résistance totale du dipôle.

On se propose d'étudier le comportement du dipôle RL en régime transitoire.

Cette étude s'effectue en appliquant au circuit un échelon de tension.



II / Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension :

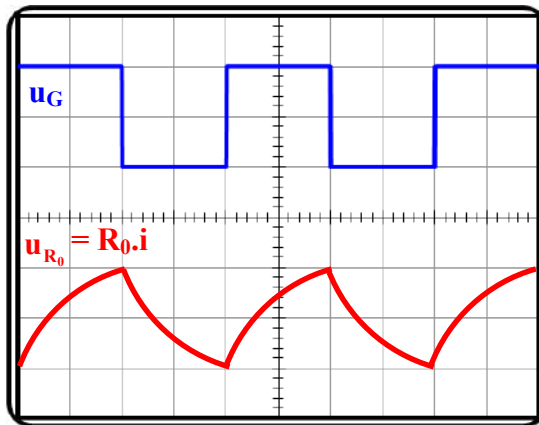
1⁰ Mise en situation :

On réalise le circuit électrique schématisé ci-dessous :

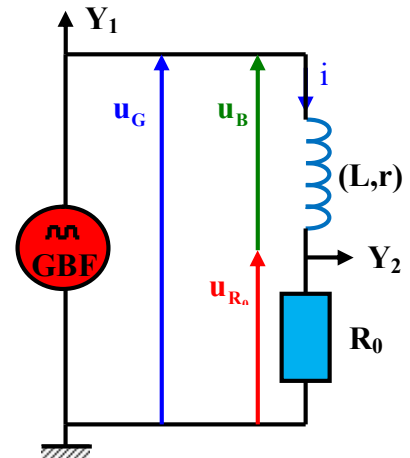
Le GBF délivre une tension en créneaux.

On visualise à l'oscilloscope la tension u_G aux bornes du générateur et la tension u_{R_0} aux bornes du résistor.

Pour un réglage convenable du GBF, on obtient les oscillogrammes suivant :



La bobine retarde l'établissement et la rupture du courant



2⁰ Etablissement du courant dans le dipôle RL :

a - Equation différentielle de réponse :

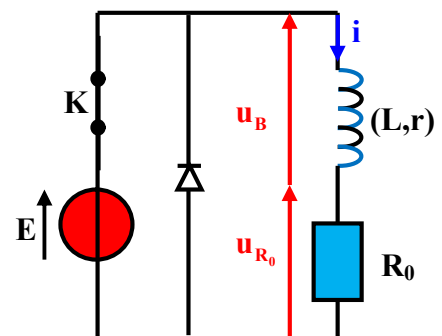
Le générateur délivre une tension constante E (circuit fermé). Le circuit équivalent est ci-dessous :

La loi des mailles s'écrit : $u_B + u_{R_0} - E = 0$

$$\left. \begin{array}{l} u_B = L \frac{di}{dt} + r.i \\ u_{R_0} = R_0.i \end{array} \right\} \longrightarrow L \frac{di}{dt} + (R_0 + r).i = E$$

Soit $R = R_0 + r$, on écrit alors : $L \frac{di}{dt} + R.i = E$

On pose : $\tau = \frac{L}{R}$, il vient alors que : $\tau \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$



b - intensité $i(t)$ du courant :

On cherche la solution de l'équation différentielle sous la forme : $i(t) = Ae^{-\alpha.t} + B$ où A , B et α sont des constantes.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{di}{dt} &= -\alpha Ae^{-\alpha.t} \rightarrow -\alpha \tau Ae^{-\alpha.t} + Ae^{-\alpha.t} + B = \frac{E}{R} \\ &\rightarrow Ae^{-\alpha.t} (1 - \alpha \tau) + B = \frac{E}{R} \end{aligned}$$

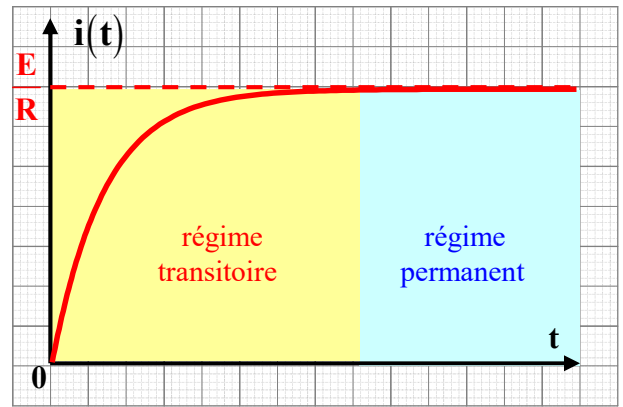
Cette expression doit être vérifiée à chaque instant :

$$\rightarrow \begin{cases} B = \frac{E}{R} \\ 1 - \alpha\tau = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{\tau} \end{cases} \quad \text{donc : } i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

• D'autre part et à $t = 0$, $i(0) = 0 \rightarrow A + \frac{E}{R} = 0$

$$\rightarrow A = -\frac{E}{R} \quad \text{donc : } i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

Il vient alors que : $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ avec $\tau = \frac{L}{R}$



Remarques :

- En sciences physique, on ne peut composer des grandeurs que lorsqu'elles sont de même nature.

Ainsi et dans l'équation : $\tau \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$, puisque i est un courant et $\frac{E}{R}$ est homogène à un courant, alors $\tau \cdot \frac{di}{dt}$ est forcément homogène à un courant. Par conséquent τ doit être homogène à un temps.

- Au cours de l'établissement du courant, l'intensité $i(t)$ du courant passe par deux phases :

- une première phase où $i(t)$ croît continuellement au cours du temps.

Le courant s'établit : c'est le régime transitoire.

- une deuxième phase où $i(t)$ devient pratiquement constante et égale à $\frac{E}{R}$.

Le courant est établi : c'est le régime permanent pour lequel $I_p = \frac{E}{R}$.

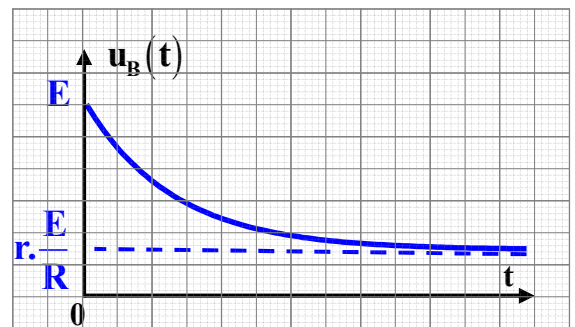
c - Tension $u_B(t)$ aux bornes de la bobine :

$$\text{On a } u_B(t) = L \frac{di}{dt} + r \cdot i \rightarrow u_B(t) = L \cdot \frac{E}{R \cdot \tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + r \cdot \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\rightarrow u_B(t) = \frac{r \cdot E}{R} + E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

$$R = R_0 + r \rightarrow u_B(t) = \frac{r \cdot E}{R} + E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{R_0 + r}{R} - \frac{r}{R} \right)$$

$$\text{et enfin : } u_B(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r \cdot E}{R} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$



Remarque :

$$\text{D'après la loi des mailles : } u_B + u_{R_0} = E \rightarrow u_{R_0} = E - u_B \quad \text{et} \quad \frac{du_{R_0}}{dt} = -\frac{du_B}{dt}$$

$$u_B + u_{R_0} = E \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i + u_{R_0} = E \xrightarrow[i = \frac{u_{R_0}}{R_0} \text{ et } \left(\frac{di}{dt} \right) = \frac{1}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)]{u_{R_0} = R_0 \cdot i} \frac{L}{R_0} \cdot \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + (R_0 + r) \cdot \frac{u_{R_0}}{R_0} = E$$

$$R = R_0 + r \rightarrow \left[-\frac{L}{R_0} \cdot \left(\frac{du_B}{dt} \right) + \frac{R}{R_0} \cdot (E - u_B) = E \right] \cdot \frac{R_0}{R} \rightarrow -\frac{L}{R} \left(\frac{du_B}{dt} \right) + E - u_B = \frac{R_0 \cdot E}{R}$$

$$\rightarrow -\frac{L}{R} \left(\frac{du_B}{dt} \right) - u_B = \frac{R_0 \cdot E}{R} - E = \frac{R_0 \cdot E}{R} - \frac{R \cdot E}{R} = \frac{R_0 \cdot E}{R} - \frac{(R_0 + r) \cdot E}{R} = \frac{R_0 \cdot E}{R} - \frac{R_0 \cdot E}{R} - \frac{r \cdot E}{R} = -\frac{r \cdot E}{R}$$

$$\text{Il vient alors que : } \frac{L}{R} \left(\frac{du_B}{dt} \right) + u_B = \frac{r \cdot E}{R} \xrightarrow{\tau = \frac{L}{R}} \tau \left(\frac{du_B}{dt} \right) + u_B = \frac{r \cdot E}{R}$$

La solution de cette équation différentielle sera de la forme : $u_B(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r.E}{R}$

$$\text{A } t=0, u_B(0) + u_{R_0}(0) = E \xrightarrow{i(0)=0 \rightarrow u_{R_0}(0)=0} u_B(0) = E \rightarrow A + \frac{r.E}{R} = E \xrightarrow{R=R_0+r} A = \frac{R_0.E}{R}$$

Il vient alors que : $u_B(t) = \frac{R_0.E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r.E}{R}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$

d - Tension $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor :

$$u_{R_0}(t) = R_0.i \rightarrow u_{R_0}(t) = \frac{R_0.E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}$$

Remarques :

- A chaque instant, on a : $u_{R_0}(t) + u_B(t) = E$

$$\rightarrow u_{R_0}(t) = E - u_B(t) = E - \frac{r.E}{R} - Ee^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r.E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow u_{R_0}(t) = \frac{1}{R} \left[R.E - r.E - R.Ee^{-\frac{t}{\tau}} + r.Ee^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

$$\text{Sachant que } R = R_0 + r, \text{ on écrit : } u_{R_0}(t) = \frac{1}{R} \left[R_0.E - R_0.Ee^{-\frac{t}{\tau}} \right] \text{ et } u_{R_0}(t) = \frac{R_0.E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}$$

- D'après la loi des mailles : $u_B + u_{R_0} = E \rightarrow L \left(\frac{di}{dt} \right) + r.i + u_{R_0} = E$

$$\xrightarrow{i = \frac{u_{R_0}}{R_0} \text{ et } \left(\frac{di}{dt} \right) = \frac{1}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)} \frac{L}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + r \cdot \frac{u_{R_0}}{R_0} + u_{R_0} = E \rightarrow \frac{L}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + \left(\frac{r}{R_0} + 1 \right) u_{R_0} = E$$

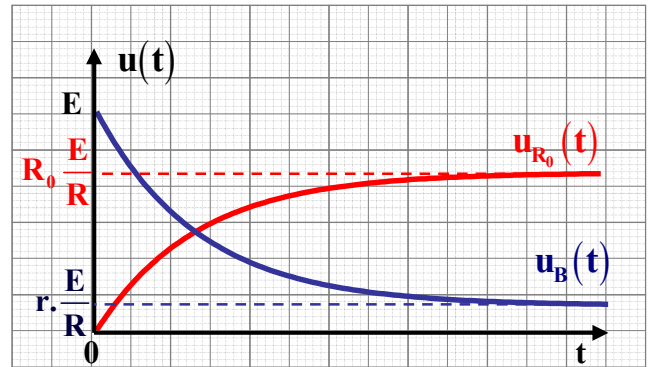
$$\text{On pose : } R = R_0 + r \rightarrow \left[\frac{L}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + \frac{R}{R_0} u_{R_0} = E \right] \cdot \frac{R_0}{R} \rightarrow \frac{L}{R} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + u_{R_0} = \frac{R_0.E}{R}$$

$$\text{On pose : } \tau = \frac{L}{R}, \text{ il vient alors que } \tau \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + u_{R_0} = \frac{R_0.E}{R}$$

La solution de cette équation différentielle sera de la forme : $u_{R_0}(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_0.E}{R}$

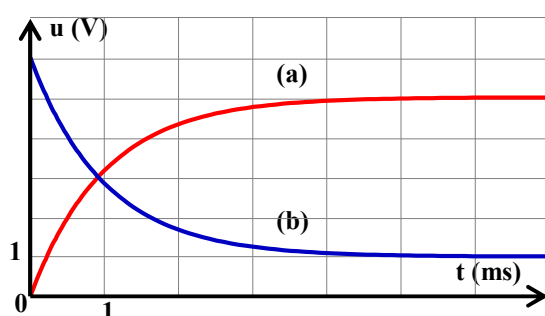
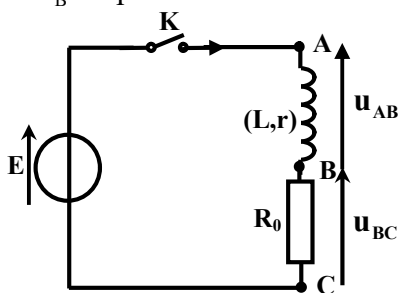
$$\text{A } t=0, i(0)=0 \rightarrow u_{R_0}(0)=0 \rightarrow A + \frac{R_0.E}{R} = 0 \rightarrow A = -\frac{R_0.E}{R}$$

$$\text{Il vient alors que : } u_{R_0}(t) = -\frac{R_0.E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_0.E}{R} \text{ et enfin : } u_{R_0}(t) = \frac{R_0.E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}$$



Application 1 :

On place en série un conducteur ohmique de résistance R_0 et une bobine d'inductance L et de résistance interne r . A l'instant $t = 0$, l'ensemble est soumis à une tension constante E . On enregistre l'évolution des tensions u_{R_0} et u_B respectivement aux bornes du résistor et de la bobine.



1⁰) Associer chacune des courbes (a) et (b) à la tension qu'elle représente.

2⁰) a - Une fois le régime permanent établi, exprimer la tension U_{R_0} en fonction de r , R_0 et E .

Faire de même pour la tension U_B .

b - Sachant que $R_0 = 25 \Omega$, calculer la valeur de r .

c - Calculer alors E .

3⁰) On donne : $u_{R_0}(t) = \frac{R_0}{R_0 + r} E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ avec $\tau = \frac{L}{R_0 + r} = 10^{-3} \text{ s}$

Calculer la valeur de l'inductance L et en déduire l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine lorsque le régime permanent est établi.

4⁰) Lorsqu'on ouvrira le circuit, une étincelle peut apparaître aux bornes de l'interrupteur. Pour éviter cela, on place l'ensemble constitué d'une diode et d'un conducteur ohmique en parallèle avec la bobine.

Faire un schéma et interpréter.

Réponse :

1⁰) A $t = 0$, $i(0) = 0 \rightarrow u_{R_0}(0) = R_0 \cdot i(0) = 0 \rightarrow$ la courbe (a) représente u_{R_0} et la courbe (b) représente u_B .

2⁰) a - En régime permanent, $i = I_0$ constante $\rightarrow \frac{di}{dt} = 0$ or $\begin{cases} u_B = r \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \\ u_{R_0} = R_0 \cdot i \end{cases} \xrightarrow{\text{régime permanent}} \begin{cases} U_B = r \cdot I_0 \\ U_{R_0} = R_0 \cdot I_0 \end{cases}$

D'autre part $U_{R_0} + U_B = E \rightarrow (R_0 + r) \cdot I_0 = E \rightarrow I_0 = \frac{E}{R_0 + r}$ et donc : $\begin{cases} U_B = r \cdot \frac{E}{R_0 + r} \\ U_{R_0} = R_0 \cdot \frac{E}{R_0 + r} \end{cases}$

b - $\frac{U_{R_0}}{U_B} = \frac{R_0}{r} \rightarrow r = R_0 \cdot \frac{U_B}{U_{R_0}}$. A.N : $r = 25 \cdot \frac{1}{5}$ et $r = 5 \Omega$.

c - $U_{R_0} = R_0 \cdot \frac{E}{R_0 + r} \rightarrow E = \frac{R_0 + r}{R_0} U_{R_0}$. A.N : $E = \frac{5+1}{5} \cdot 5$ et $E = 6 \text{ V}$.

3⁰) $\tau = \frac{L}{R_0 + r} \rightarrow L = \tau \cdot (R_0 + r)$.

A.N : $L = 10^{-3} \cdot 30$ et $L = 3 \cdot 10^{-2} \text{ H}$.

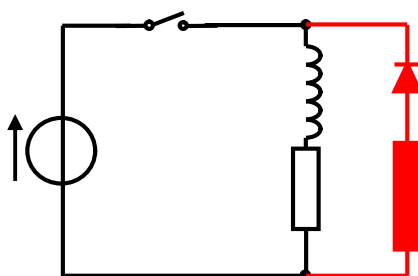
L'énergie magnétique est $E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \xrightarrow[\text{en régime permanent } i=I_0]{} E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2$ et $E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{E}{R_0 + r} \right)^2$

A.N : $E_L = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{6}{30} \right)^2$ et $E_L = 6 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

4⁰) On observe une étincelle de rupture à l'ouverture de l'interrupteur K car la bobine a emmagasinée de l'énergie au cours de la fermeture du circuit.

En ajoutant le dispositif (diod + résistor), l'énergie peut être libérée dans cette nouvelle branche ce qui évite l'étincelle aux bornes de l'interrupteur.

La diode reste bloquée à la fermeture du circuit et ne modifie pas l'étude précédente.



3⁰) Rupture du courant dans le dipôle RL :

a - Equation différentielle de réponse :

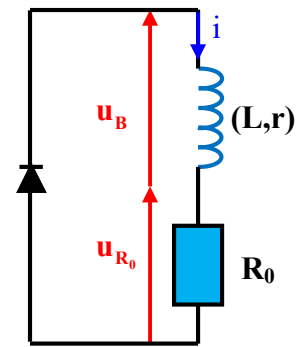
On ouvre l'interrupteur. Le circuit équivalent est ci-dessous :

La loi des mailles s'écrit : $u_B + u_{R_0} = 0$

$$\left. \begin{array}{l} u_B = L \frac{di}{dt} + r.i \\ u_{R_0} = R_0.i \end{array} \right| \rightarrow L \frac{di}{dt} + (R_0 + r).i = 0$$

Soit $R = R_0 + r$, on écrit alors : $L \frac{di}{dt} + R.i = 0$

On pose : $\tau = \frac{L}{R}$, il vient alors que : $\tau \cdot \frac{di}{dt} + i(t) = 0$



b - intensité $i(t)$ du courant :

On cherche la solution de l'équation différentielle sous la forme : $i(t) = Ae^{-\alpha.t} + B$ où A , B et α sont des constantes.

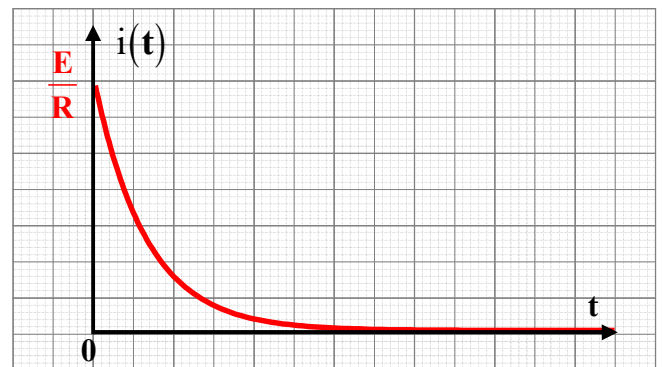
$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{di}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha.t} &\rightarrow -\alpha \tau Ae^{-\alpha.t} + Ae^{-\alpha.t} + B = 0 \\ &\rightarrow Ae^{-\alpha.t} (1 - \alpha \tau) + B = 0 \end{aligned}$$

Cette expression étant valable à chaque instant

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} B = 0 \\ 1 - \alpha \tau = 0 \end{array} \right. \rightarrow \alpha = \frac{1}{\tau} \quad \text{donc : } i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\bullet \quad \text{D'autre part et à } t = 0, i(0) = \frac{E}{R} \rightarrow A = \frac{E}{R}.$$

Il vient alors que : $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$

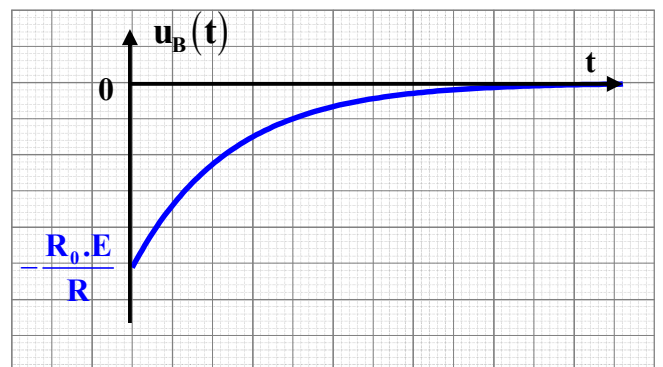


c - Tension $u_B(t)$ aux bornes de la bobine :

$$\text{On a } u_B(t) = L \frac{di}{dt} + r.i \rightarrow u_B(t) = -L \cdot \frac{E}{R \cdot \tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + r \cdot \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow u_B(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{r}{R} - 1 \right) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{r}{R} - \frac{R_0 + r}{R} \right)$$

$$\text{et enfin : } u_B(t) = -\frac{R_0 \cdot E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$



Remarque :

$$\text{D'après la loi des mailles : } u_B + u_{R_0} = 0 \rightarrow u_{R_0} = -u_B \quad \text{et} \quad \frac{du_{R_0}}{dt} = -\frac{du_B}{dt}$$

$$u_B + u_{R_0} = E \rightarrow L \frac{di}{dt} + r.i + u_{R_0} = 0 \xrightarrow[\substack{i = \frac{u_{R_0}}{R_0} \text{ et } \left(\frac{di}{dt}\right) = \frac{1}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt}\right)}]{u_{R_0} = R_0.i} \frac{L}{R_0} \cdot \left(\frac{du_{R_0}}{dt}\right) + (R_0 + r) \cdot \frac{u_{R_0}}{R_0} = 0$$

$$R = R_0 + r \rightarrow \left[-\frac{L}{R_0} \cdot \left(\frac{du_B}{dt}\right) + \frac{R}{R_0} \cdot (-u_B) = 0 \right] \cdot \frac{R_0}{R} \rightarrow -\frac{L}{R} \left(\frac{du_B}{dt}\right) - u_B = 0$$

$$\text{Il vient alors que : } \frac{L}{R} \left(\frac{du_B}{dt}\right) + u_B = 0 \xrightarrow{\tau = \frac{L}{R}} \tau \left(\frac{du_B}{dt}\right) + u_B = 0$$

La solution de cette équation différentielle sera de la forme : $u_B(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\text{A } t=0, u_B(0) + u_{R_0}(0) = 0 \xrightarrow[i(0)=\frac{E}{R} \rightarrow u_{R_0}(0)=\frac{R_0 \cdot E}{R}]{u_{R_0}(0)=R_0 \cdot i(0)} u_B(0) = -u_{R_0}(0) = -\frac{R_0 \cdot E}{R} \rightarrow A = -\frac{R_0 \cdot E}{R}$$

Il vient alors que : $u_B(t) = -\frac{R_0 \cdot E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$

d - Tension $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor :

$$u_{R_0}(t) = R_0 \cdot i \rightarrow u_{R_0}(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}$$

Remarques :

- A chaque instant, on a : $u_{R_0}(t) + u_B(t) = 0$

$$\rightarrow u_{R_0}(t) = -u_B(t)$$

Il vient alors que : $u_{R_0}(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$

- D'après la loi des mailles : $u_B + u_{R_0} = 0$

$$\rightarrow L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) + r \cdot i + u_{R_0} = 0$$

$$\xrightarrow[i=\frac{u_{R_0}}{R_0} \text{ et } \left(\frac{di}{dt} \right) = \frac{1}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)]{u_{R_0}=R_0 \cdot i} \rightarrow \frac{L}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + r \cdot \frac{u_{R_0}}{R_0} + u_{R_0} = 0 \rightarrow \frac{L}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + \left(\frac{r}{R_0} + 1 \right) \cdot u_{R_0} = 0$$

$$\text{On pose : } R = R_0 + r \rightarrow \left[\frac{L}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + \frac{R}{R_0} \cdot u_{R_0} = 0 \right] \cdot \frac{R_0}{R} \rightarrow \frac{L}{R} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + u_{R_0} = 0$$

On pose : $\tau = \frac{L}{R}$, il vient alors que $\tau \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + u_{R_0} = 0$

La solution de cette équation différentielle sera de la forme : $u_{R_0}(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\text{A } t=0, i(0) = \frac{E}{R} \xrightarrow{u_{R_0}(0)=R_0 \cdot i(0)} u_{R_0}(0) = \frac{R_0 \cdot E}{R} \rightarrow A = \frac{R_0 \cdot E}{R}$$

Il vient alors que : $u_{R_0}(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$

Application 2 :

Dans le circuit ci-contre, on donne $R_0 = 10 \Omega$ et $r = 8 \Omega$. Le circuit est initialement fermé.

A l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K. l'intensité du courant varie au

cours du temps suivant la loi : $i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $I_0 = \frac{E}{R_0 + r}$ et $\tau = \frac{L}{R_0 + r}$.

La courbe ci-contre donne l'évolution de la tension u_{R_0} au cours du temps.

1⁰ a - Soient t_1 et t_2 les temps respectifs au bout desquels la tension u_{R_0} atteint 70 % et 10 % de sa valeur maximale.

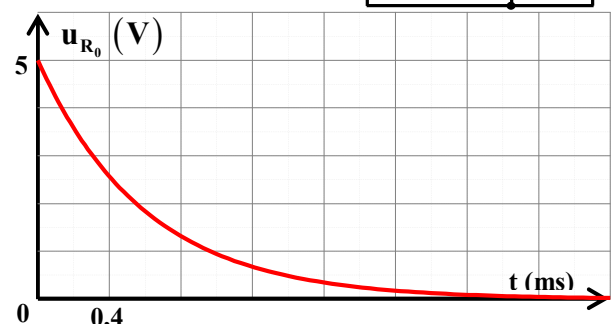
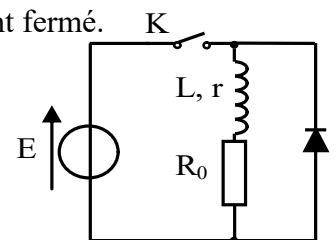
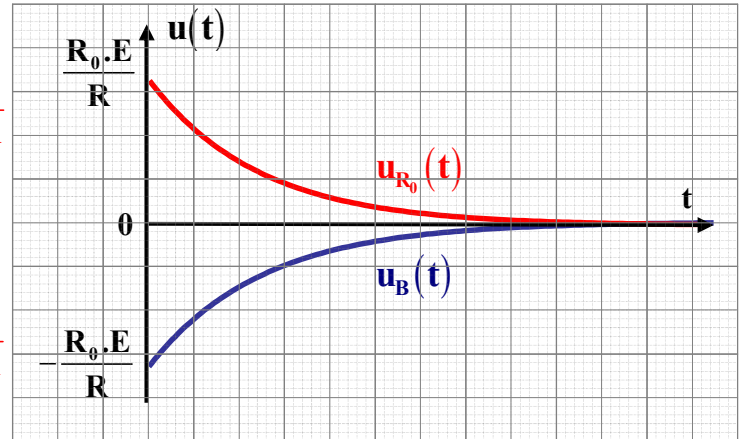
Exprimer $(t_2 - t_1)$ en fonction de τ .

b - Déterminer graphiquement $(t_2 - t_1)$.

En déduire la valeur de τ .

c - Calculer alors la valeur de L

2⁰ Déterminer la valeur de E puis celle de I_0 .



Réponse :

$$1^0) \text{ a - } u_{R_0} = R_0 \cdot i \rightarrow \begin{cases} 0,7 \cdot \frac{R_0 E}{R_0 + r} = R_0 \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau}} \\ 0,1 \cdot \frac{R_0 E}{R_0 + r} = R_0 \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{t_2}{\tau}} \end{cases} \rightarrow 7 = e^{\frac{(t_2 - t_1)}{\tau}} \rightarrow \frac{(t_2 - t_1)}{\tau} = \ln 7 \rightarrow (t_2 - t_1) = \tau \cdot \ln 7$$

b - Graphiquement $(t_2 - t_1) = (1,4 - 0,2) \cdot 10^{-3}$ et $(t_2 - t_1) = 1,2 \cdot 10^{-3}$ s.

$$\tau = \frac{(t_2 - t_1)}{\ln 7} \xrightarrow{\text{A.N.}} \tau = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{\ln 7} \text{ et } \tau = 0,62 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\text{c - } \tau = \frac{L}{R_0 + r} \rightarrow L = \tau \cdot (R_0 + r). \text{ A.N: } L = 0,62 \cdot 10^{-3} \cdot (10 + 8) \text{ et } L = 11,16 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$2^0) u_{R_0}(t) = R_0 \cdot \frac{E}{R_0 + r} e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow u_{R_0}(0) = R_0 \cdot \frac{E}{R_0 + r} \rightarrow E = u_{R_0}(0) \cdot \frac{R_0 + r}{R_0}$$

$$\text{A.N: } E = 5 \cdot \frac{10 + 8}{10} \text{ et } E = 9 \text{ V}$$

$$I_0 = \frac{E}{R_0 + r} \xrightarrow{\text{A.N.}} I_0 = \frac{9}{10 + 8} \text{ et } I_0 = 0,5 \text{ A.}$$

III / La constante de temps τ d'un dipôle RL :

1⁰) Définition :

Par définition, le rapport $\tau = \frac{L}{R}$ s'appelle constante de temps du dipôle RL.

La constante de temps τ indique la rapidité avec laquelle s'effectue l'établissement du régime permanent du courant ou sa rupture dans un circuit inductif. C'est une caractéristique du dipôle RL.

Remarque : L'analyse dimensionnelle de τ :

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[U][t]}{[I]} \cdot \frac{[I]}{[U]} = [t]. \text{ Donc } \tau \text{ est homogène à un temps, elle s'exprime alors en seconde.}$$

2⁰) Détermination :

a - Par calcul direct :

Si on connaît les valeurs de R et de L, on calcule directement $\tau = \frac{L}{R}$.

b - Par des méthodes graphiques :

• Etablissement du courant :

- Par lecture directe :

$$\text{Pour } t = \tau, i(\tau) = \frac{E}{R} (1 - e^{-1}) \approx 0,63 \cdot \frac{E}{R}$$

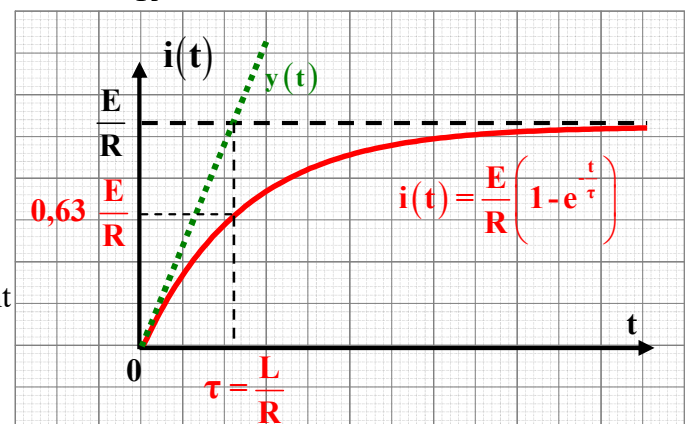
τ est le temps nécessaire pour que l'intensité du courant atteigne 63 % de sa valeur maximale.

- Par utilisation de la tangente à l'origine :

$$\text{L'équation de la tangente à l'origine est } y(t) = \left(\frac{di(t)}{dt} \right)_{t=0} \cdot t = \left(\frac{E}{R \cdot \tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)_{t=0} \cdot t \rightarrow y(t) = \frac{E}{R \cdot \tau} \cdot t \text{ et } y(\tau) = \frac{E}{R}$$

Remarque :

Graphiquement τ est l'abscisse du point d'intersection entre l'asymptote à la courbe de $i(t)$ et la tangente à l'origine.



• Rupture du courant :

- Par lecture directe :

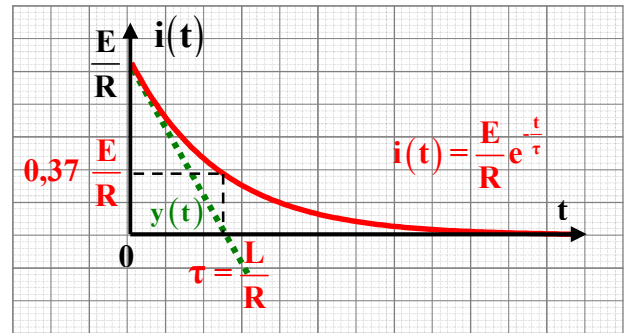
Pour $t = \tau$, $i(\tau) = \frac{E}{R} e^{-1} \approx 0,37 \cdot \frac{E}{R}$

τ est le temps nécessaire pour que l'intensité du courant décroît jusqu'à 37 % de sa valeur maximale.

- Par utilisation de la tangente à l'origine :

L'équation de la tangente à l'origine est $y(t) = \left(\frac{di(t)}{dt} \right)_{t=0} \cdot t + K = \left(-\frac{E}{R \cdot \tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)_{t=0} \cdot t + K = -\frac{E}{R \cdot \tau} \cdot t + K$

A $t = 0$, $y(0) = \frac{E}{R} \longrightarrow K = \frac{E}{R}$ donc : $y(t) = -\frac{E}{R \cdot \tau} \cdot t + \frac{E}{R}$ et $y(\tau) = 0$.



Remarque :

Graphiquement τ est l'abscisse du point d'intersection entre l'asymptote à la courbe de $i(t)$ et la tangente à l'origine.

3⁰ Exploitation :

La durée de l'établissement (où de la rupture) du courant étant théoriquement infinie, on se demande à quel instant l'intensité du courant à l'établissement (où à la rupture) dépasse 99 % de sa valeur limite ?

Etablissement	Rupture
$i(t) \geq 0,99 \frac{E}{R}$	$i(t) \leq 0,01 \frac{E}{R}$
$\frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \geq 0,99 \frac{E}{R}$	$\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \leq 0,01 \frac{E}{R}$
$e^{-\frac{t}{\tau}} \leq 0,01$	$e^{-\frac{t}{\tau}} \leq 0,01$
$-\frac{t}{\tau} \leq \log 0,01$	$-\frac{t}{\tau} \leq \log 0,01$
$\frac{t}{\tau} \geq 2 \log 10 \approx 4,6$	$\frac{t}{\tau} \geq 2 \log 10 \approx 4,6$
$t \geq 4,6 \cdot \tau$	$t \geq 4,6 \cdot \tau$

Lors de l'établissement du courant et pratiquement après une durée voisine de 5τ , l'intensité du courant $i(t)$ dépasse 99 % de sa valeur limite $\frac{E}{R}$.

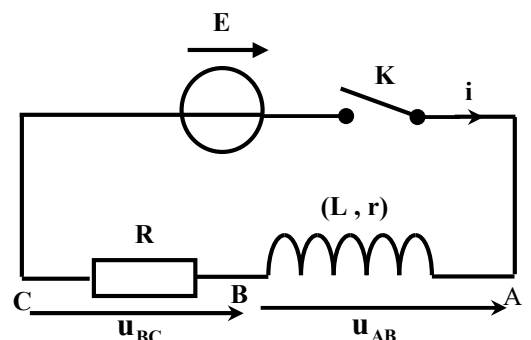
On considère alors qu'à partir d'une durée $t = 5 \tau$, le régime transitoire cesse et le régime permanent est pratiquement atteint.

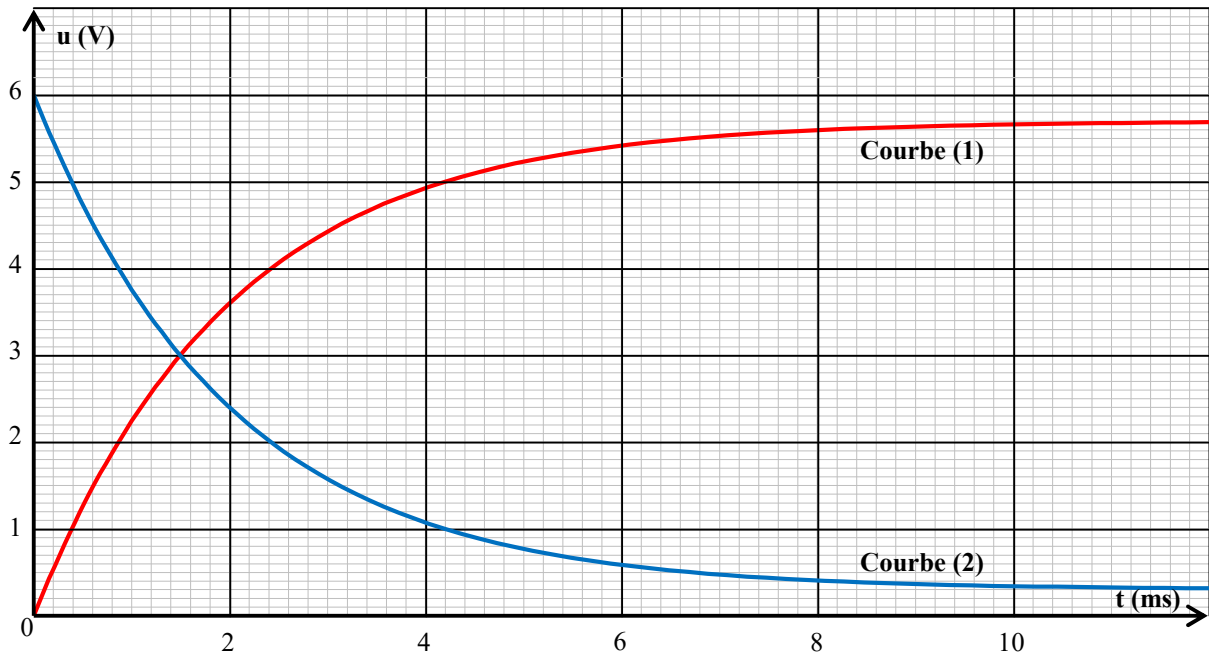
Application 3 :

Un circuit électrique comporte, placés en série : un générateur idéal de tension continue de f é m. $E = 6V$, un interrupteur K , une bobine d'inductance L et de résistance $r = 10 \Omega$ et un conducteur ohmique de résistance $R = 200 \Omega$.

Un ordinateur relié au montage par une interface appropriée permet de visualiser au cours du temps les valeurs des tensions u_{AB} et u_{BC} . Le schéma du circuit, ci-contre, précise l'orientation du circuit et les tensions étudiées.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et on procède à l'acquisition. On obtient les courbes suivantes, notées courbe (1) et courbe (2) :





1⁰) a - A défaut d'ordinateur et d'interface d'acquisition, quel type d'appareil peut-on utiliser pour visualiser le phénomène étudié ?

b - Donner l'expression de u_{AB} en fonction de i et de $\frac{di}{dt}$.

c - Donner l'expression de u_{BC} en fonction de i .

d - Associer les courbes (1) et (2) aux tensions u_{AB} et u_{BC} . Justifier.

2⁰) a - Appliquer la loi d'additivité des tensions pour déterminer l'expression I_0 de l'intensité du courant qui traverse le circuit lorsque le régime permanent est établi. Calculer la valeur de I_0 .

b - Exploiter l'une des courbes pour retrouver cette valeur de I_0 .

3⁰) a - Exploiter l'une des deux courbes pour déterminer la constante de temps τ du montage. Expliciter votre méthode.

b - Rappeler l'expression de la constante de temps τ en fonction des grandeurs caractéristiques du circuit. Montrer que cette expression est homogène à un temps.

c - À partir de la valeur de τ mesurée, calculer l'inductance L de la bobine.

Réponse :

1⁰) a - Les courbes (1) et (2) montrent que le phénomène observé est très bref. On devrait utiliser un oscilloscope à mémoire.

b - Tension aux bornes de la bobine: $u_{AB} = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i$

c - Tension aux bornes du conducteur ohmique, d'après la loi d'Ohm : $u_{BC} = R \cdot i$

d - Lorsqu'on ferme l'interrupteur, le courant va s'établir dans le circuit. La présence de la bobine retarde l'établissement du courant à sa valeur maximale constante.

* À $t = 0$ s, $i(0) = 0$ A $\xrightarrow{u_{BC}=R \cdot i}$ $u_{BC} = 0$ V

La courbe (1) représente donc $u_{BC} = f(t)$:

* La loi des mailles s'écrit : $u_{AB} + u_{BC} - E = 0 \xrightarrow{A \ t=0} u_{AB}(0) + u_{BC}(0) = E \xrightarrow{u_{BC}(0)=0} u_{AB}(0) = E$

La courbe (2) représente alors $u_{AB} = g(t)$:

2⁰) a - La loi de l'additivité des tensions s'écrit : $u_{AB} + u_{BC} = E \rightarrow L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) + r \cdot i + R \cdot i = E$

Lorsque le régime permanent est établi, alors $i = I_0 = \text{constante}$ donc $\frac{di}{dt} = 0$.

$$\rightarrow R.I_0 + r.I_0 = E \rightarrow (R + r).I_0 = E \text{ et } I_0 = \frac{E}{(R + r)}$$

$$\text{A.N : } I_0 = \frac{6}{200 + 10} \text{ et } I_0 = 28,6.10^{-3} \text{ A.}$$

b - A partir de la courbe (1) associée à la tension u_{BC} aux bornes du conducteur ohmique et en régime permanent $U_{BC} = 5,7 \text{ V}$.

$$\text{or } U_{BC} = R.I_0 \rightarrow I_0 = \frac{U_{BC}}{R}$$

$$\text{A.N : } I_0 = \frac{5,7}{200} \text{ et } I_0 = 28,5.10^{-3} \text{ A.}$$

Remarque : A partir de la courbe (2) associée à la tension u_{AB} aux bornes de la bobine et en régime permanent $U_{AB} = 0,3 \text{ V}$.

$$\text{or } U_{AB} = r.I_0 \rightarrow I_0 = \frac{U_{AB}}{r}$$

$$\text{A.N : } I_0 = \frac{0,3}{10} \text{ et } I_0 = 30.10^{-3} \text{ A.}$$

3⁰) a - * A partir de la courbe (1) :

$$u_{BC}(\tau) = 0,63.U_{BC} \xrightarrow{\text{A.N}} u_{BC}(\tau) = 0,63.5,7 = 3,6 \text{ V.}$$

Graphiquement : on trouve $\tau = 2 \text{ ms}$.

* A partir de la courbe (2) :

$$u_{AB}(\tau) = 0,37.(E - U_{AB}) + U_{AB} \xrightarrow{\text{A.N}} u_{AB}(\tau) = 0,37.(6 - 0,3) + 0,3 = 2,4 \text{ V.}$$

Graphiquement : on trouve $\tau = 2 \text{ ms}$.

Remarque : $u_{AB}(\tau) + u_{BC}(\tau) = E$ ce résultat est en accord avec la loi de l'additivité des tensions.

Remarque : On peut utiliser la méthode de la tangente à l'origine (valable pour chacune des deux courbes) :

* On trace l'**asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction $u = f(t)$.

* On trace la **tangente** à la courbe représentative de la fonction $u = f(t)$, en $t = 0 \text{ s}$.

* La tangente à l'origine et l'asymptote se coupent en un point d'abscisse $t = \tau$.

* Graphiquement, on trouve $\tau = 2 \text{ ms}$.

b - La constante de temps d'un circuit RL est : $\tau = \frac{L}{R + r}$

Analyse dimensionnelle :

$$\text{* D'après la loi d'Ohm: } u = R.i \text{ donc } [R] = \frac{[U]}{[I]} = [U].[I]^{-1}$$

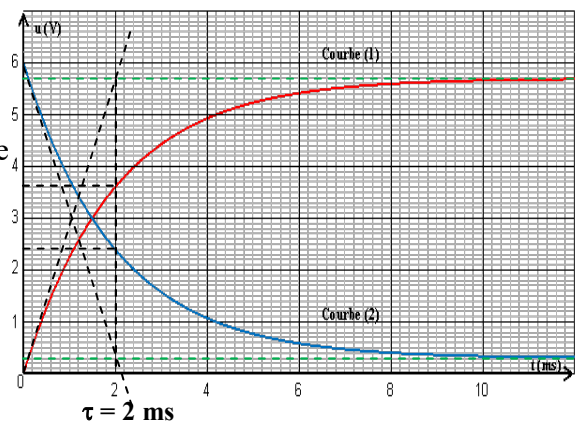
$$\text{* Pour une bobine idéale: } u = L. \left(\frac{di}{dt} \right) \rightarrow L = u. \left(\frac{di}{dt} \right)^{-1} \text{ donc } [L] = [U].[T].[I]^{-1}$$

$$\text{* } [\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[U].[T].[I]^{-1}}{[U].[I]^{-1}} \rightarrow [\tau] = [T]$$

la constante de temps est alors homogène à un temps.

$$\text{c - } \tau = \frac{L}{R + r} \rightarrow L = \tau.(R + r)$$

$$\text{A.N : } L = 2.10^{-3}.(200 + 10) \text{ et } L = 0,42 \text{ H.}$$



IV / Conclusion :

Pour un dipôle RL de constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$:

$\tau = \frac{L}{R}$, $R = R_0 + r$	Etablissement du courant	Rupture du courant
Echelon de tension	$0 \text{ V} \xrightarrow{\text{à}} E = \text{constante}$	$E = \text{constante} \xrightarrow{\text{à}} 0 \text{ V}$
Equation différentielle de réponse	$\tau \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R} ; i(0) = 0$	$\tau \cdot \frac{di}{dt} + i = 0 ; i(0) = \frac{E}{R}$
	$u_{R_0} = R_0 \cdot i$ $\tau \frac{du_{R_0}}{dt} + u_{R_0} = \frac{R_0 \cdot E}{R} ; u_{R_0}(0) = 0$	$u_{R_0} = R_0 \cdot i$ $\tau \frac{du_{R_0}}{dt} + u_{R_0} = 0 ; u_{R_0}(0) = \frac{R_0 \cdot E}{R}$
	$u_B = L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) + r \cdot i$ $\tau \frac{du_B}{dt} + u_B = \frac{r \cdot E}{R} ; u_B(0) = E$	$u_B = L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) + r \cdot i$ $\tau \frac{du_B}{dt} + u_B = 0 ; u_B(0) = -\frac{R_0 \cdot E}{R}$
Intensité du courant $i(t)$	$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$
Tension $u_{R_0}(t)$	$u_{R_0}(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$u_{R_0}(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$
Tension $u_B(t)$	$u_B(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r \cdot E}{R}$	$u_B(t) = -\frac{R_0 \cdot E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Pour en savoir plus

1⁰) Influence du rapport $\frac{r}{R_0}$ sur l'établissement du courant :

Soit : $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$, $R = R_0 + r$ l'intensité du courant à la fermeture du circuit.

•

$$* u_{R_0}(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \rightarrow u_{R_0}(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R_0 + r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{R_0 \cdot E}{R_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{R_0} \right)} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

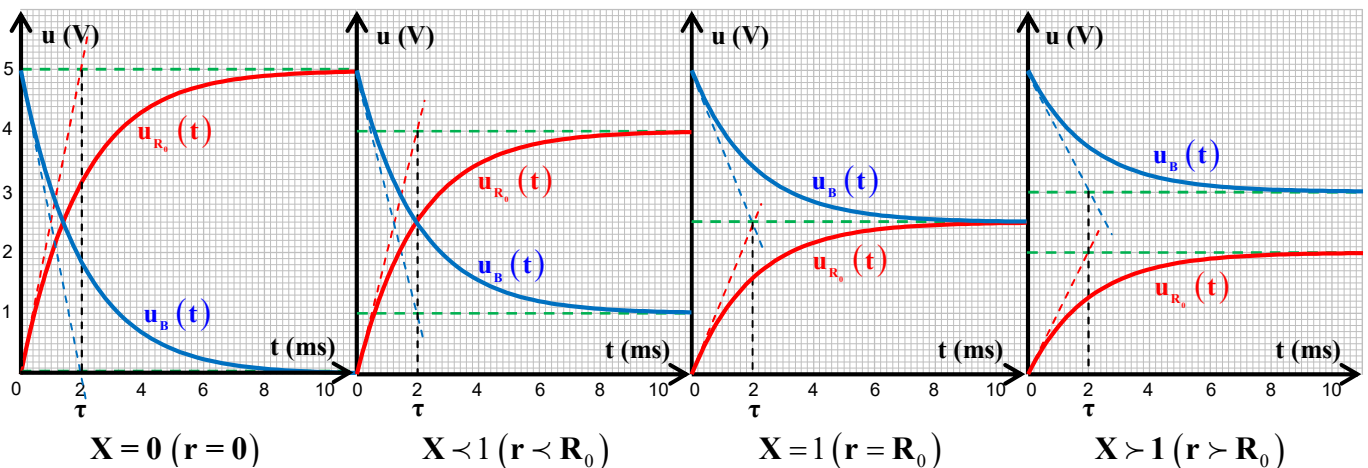
$$\text{et } u_{R_0}(t) = \frac{E}{\left(1 + \frac{r}{R_0} \right)} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$* u_B(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r \cdot E}{R} \rightarrow u_B(t) = \frac{R_0 \cdot E}{R_0 + r} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r \cdot E}{R_0 + r} = \frac{R_0 \cdot E}{R_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{R_0} \right)} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r \cdot E}{R_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{R_0} \right)}$$

$$\text{et } u_B(t) = \frac{E}{\left(1 + \frac{r}{R_0} \right)} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r}{R_0} \right)$$

$$* \text{ On pose : } X = \frac{r}{R_0}, \text{ il vient alors que : } u_{R_0}(t) = \frac{E}{(1+X)} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ et } u_B(t) = \frac{E}{(1+X)} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} + X \right)$$

• Suivant la valeur de X, on peut distinguer plusieurs cas :



$$\text{Remarque : } u_B(t) = u_{R_0}(t) \rightarrow \frac{E}{(1+X)} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{E}{(1+X)} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} + X \right) \rightarrow 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{\tau}} + X$$

$$\rightarrow 2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - X \rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1-X}{2} \rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{1-X}{2}\right) \text{ et } t = \tau \cdot \ln\left(\frac{2}{1-X}\right), X < 1.$$

Remarque :

* A l'état initial, $u_{R_0}(0) = 0$ et $u_B(0) = E$ pour toute valeur de X.

$$* \text{ En régime permanent, } U_{R_0} = \frac{E}{(1+X)} \text{ et } U_B = \frac{X \cdot E}{(1+X)} \rightarrow \frac{U_B}{U_{R_0}} = X$$

Pour $X \geq 1$, les courbes représentatives de $u_{R_0}(t)$ et de $u_B(t)$ ne se chevauchent pas.

2⁰) Transfert d'énergie du générateur vers le dipôle RL :

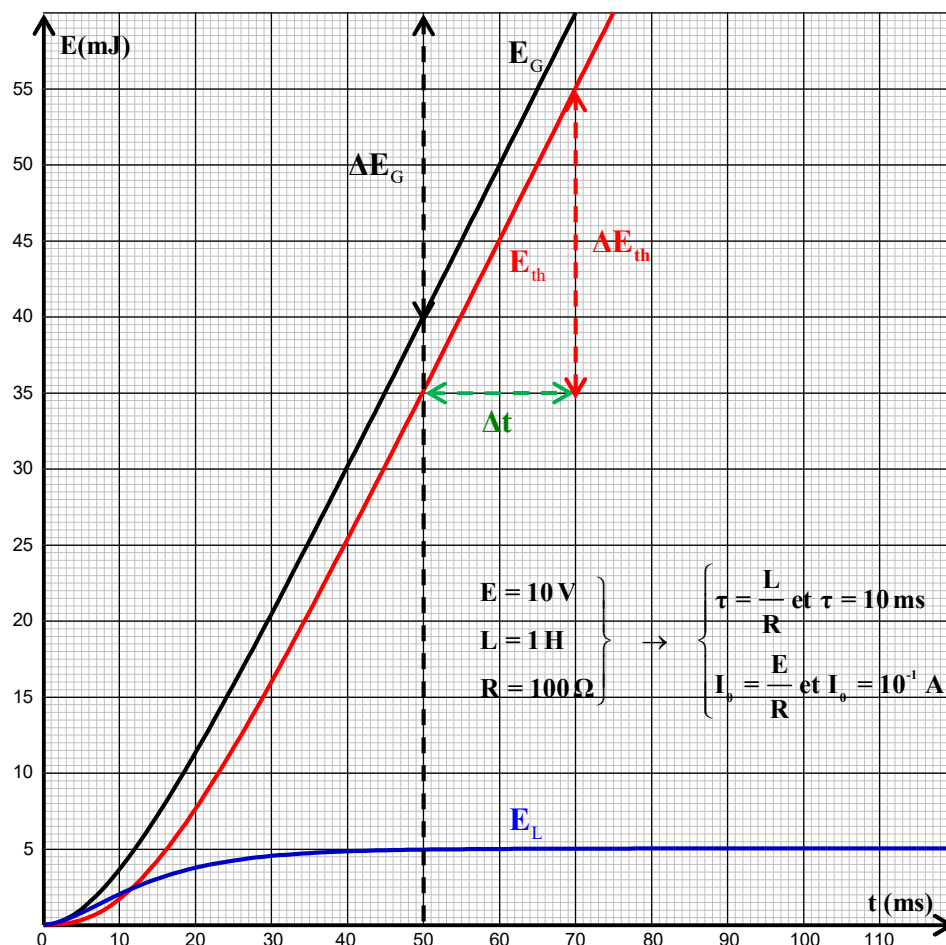
Lors de l'établissement du courant dans le circuit, l'intensité du courant est : $i(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, $I_0 = \frac{E}{R}$.

Le dipôle RL reçoit de la part du générateur une énergie électrique E_G . Une partie E_L de cette énergie est emmagasinée par la bobine alors que le reste E_{th} est dissipée par effet Joule dans les résistances.

On écrit donc : $E_G = E_L + E_{th}$.

$$* E_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t) \rightarrow E_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2 \left(1 + e^{-2\frac{t}{\tau}} - 2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$* E_{th}(t) = \int_0^t R \cdot i^2 \cdot dt \rightarrow E_{th}(t) = R \cdot I_0^2 \cdot \left(t - \frac{\tau}{2} \cdot e^{-2\frac{t}{\tau}} + 2 \cdot \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{3}{2} \cdot \tau\right)$$



A partir de $t = 5 \cdot \tau$, le régime permanent est atteint, l'intensité $i = I_0 = \text{constante}$, l'énergie stockée par la bobine E_L (régime permanent) $= E_{L_{\max}} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2$ devient constante.

A partir de $t = 5 \cdot \tau$, l'énergie consommée par le dipôle RL est pratiquement totalement dissipée par effet Joule dans les résistances. Il vient alors que : $\Delta E_G = \Delta E_{th}$.

Applications

Exercice 1 :

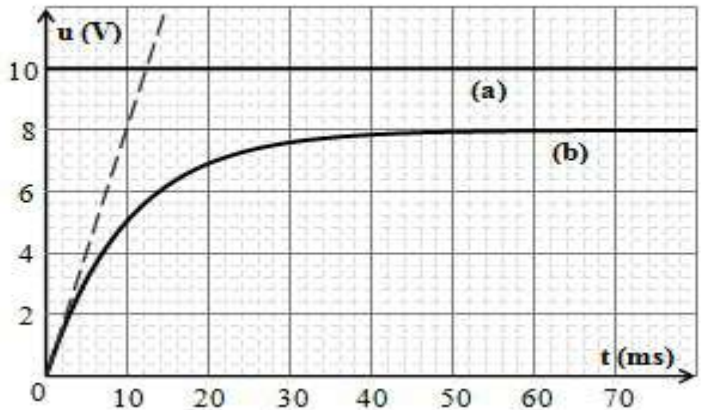
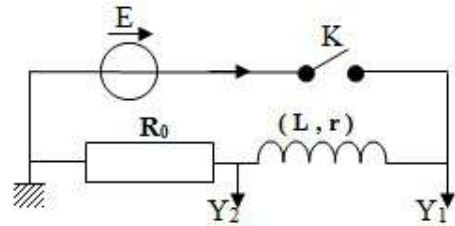
Un générateur de tension idéal, de f.e.m. $E = 10\text{V}$, alimente un dipôle RL constitué par une bobine d'inductance L et de résistance interne r , montée en série avec un résistor de résistance $R_0 = 40\ \Omega$. On visualise, à l'oscilloscope, la tension u_G aux bornes du générateur sur la voie 1 et la tension u_{R_0} aux bornes du résistor sur la voie 2.

A la fermeture du circuit, prise comme origine du temps, on enregistre les oscillogrammes (a) et (b) ci-contre :

1⁰) Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à la tension qu'elle représente.

2⁰) Montrer que l'équation différentielle qui gère l'établissement du courant dans le circuit s'écrit :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_0 + r} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R_0 + r}$$



3⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur U_{R_0} prise par la tension $u_{R_0}(t)$ lorsque le régime permanent est établi. En déduire alors la valeur I prise par l'intensité du courant $i(t)$.

b - En exploitant l'expression de l'équation différentielle lorsque le régime permanent est établi, montrer que la valeur de la résistance interne de la bobine est $r = 10\ \Omega$.

c - Vérifier graphiquement que la valeur de la dérivée de l'intensité du courant par rapport au temps à l'instant $t = 0$ est $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = 20\text{ As}^{-1}$.

d - En exploitant l'expression de l'équation différentielle à $t = 0$, montrer que la valeur de l'inductance de la bobine est $L = 0,5\text{ H}$.

4⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps τ du dipôle RL.

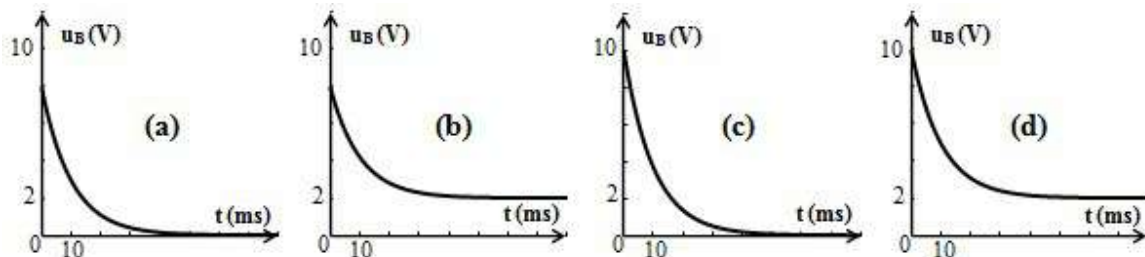
b - Rappeler l'expression théorique de τ puis calculer sa valeur.

Vérifier l'accord avec le résultat graphique.

5⁰) a - L'intensité du courant varie au cours du temps selon l'équation : $i(t) = 0,2(1 - e^{-100t})$ (A).

En déduire l'équation numérique donnant les variations au cours du temps de la tension $u_B(t)$ aux bornes de la bobine.

b - Parmi les courbes ci-dessous, quelle est celle qui représente les variations de la tension u_B aux bornes de la bobine au cours du temps ? Justifier la réponse.



6⁰) a - Donner l'expression de l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine lorsque le régime permanent est établi. Calculer sa valeur.

b - Lorsqu'on ouvre l'interrupteur K, une étincelle de rupture apparaît à ses bornes.

Interpréter le phénomène.

c - Pour éviter cette étincelle de rupture, on insère une diode dans le montage électrique. Reprendre le schéma du circuit électrique en indiquant le branchement de la diode ajoutée.

Réponse :

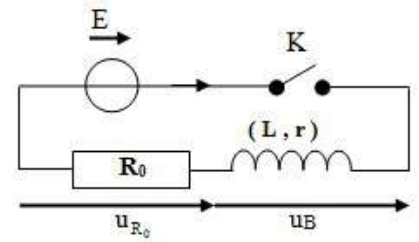
1⁰) $u_G(t) = E$ (constante $\neq 0$) $\rightarrow$ la courbe (a) correspond à u_G .

$u_{R_0}(0) = R_0 i(0) = 0 \rightarrow$ la courbe (b) correspond à u_{R_0}

2⁰) La loi des mailles s'écrit :

$$u_B + u_{R_0} - E = 0$$

$$\begin{cases} u_B = L \frac{di}{dt} + ri \\ u_{R_0} = R_0 i \end{cases} \rightarrow L \frac{di}{dt} + (R_0 + r)i = E \quad \text{et} \quad \frac{L}{(R_0 + r)} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{(R_0 + r)}$$



On pose : $\tau = \frac{L}{R_0 + r}$, il vient alors que : $\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_0 + r}$

3⁰) a - Graphiquement, lorsque le régime permanent est établi, $U_{R_0} = 8 \text{ V}$.

Or $U_{R_0} = R_0 I \rightarrow I = \frac{U_{R_0}}{R_0}$. A.N : $I = \frac{8}{40}$ et $I = 0,2 \text{ A}$.

b - Lorsque le régime permanent est établi, $\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow I = \frac{E}{R_0 + r}$ donc : $r = \frac{E}{I} - R_0$

A.N : $r = \frac{10}{0,2} - 40$ et $r = 10 \Omega$

c - $u_{R_0}(t) = R_0 i(t) \rightarrow \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) = R_0 \left(\frac{di}{dt} \right)$ et $\left(\frac{di}{dt} \right) = \frac{1}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)$

Graphiquement : $\left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)_{t=0} = \frac{8-0}{10^{-2}-0} = 800 \text{ Vs}^{-1}$,

il vient alors que : $\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \frac{1}{40} \cdot 800$ et $\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = 20 \text{ As}^{-1}$

d - A $t = 0$, $i(0) = 0 \rightarrow \tau \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \frac{E}{R_0 + r} \rightarrow \frac{L}{R_0 + r} \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \frac{E}{R_0 + r}$ et $L = \frac{E}{\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0}}$

A.N : $L = \frac{10}{20}$ et $L = 0,5 \text{ H}$.

4⁰) a - Graphiquement : la tangente à l'origine est $y(t) = \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)_{t=0} = 800 \cdot t$ et $y(\tau) = 8 \rightarrow \tau = 10^{-2} \text{ s}$

b - On a : $\tau = \frac{L}{R_0 + r} \rightarrow \tau = \frac{0,5}{40+10}$ et $\tau = 10^{-2} \text{ s}$

On vérifie bien l'accord avec le résultat graphique.

5⁰) a - $u_B(t) = L \frac{di}{dt} + ri$

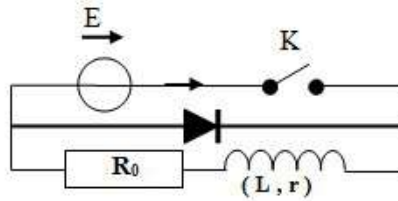
$i(t) = 0,2(1 - e^{-100t}) \rightarrow \frac{di}{dt} = 20e^{-100t}$

$u_B(t) = 0,5 \cdot 20e^{-100t} + 10 \cdot 0,2(1 - e^{-100t}) = 10e^{-100t} + 2 - 2e^{-100t}$ et $u_B(t) = 2 + 8e^{-100t} \text{ (V)}$

b - $\begin{matrix} t : 0 & \longrightarrow & \infty \\ u_B(t) : 10 \text{ V} & \longrightarrow & 2 \text{ V} \end{matrix} \rightarrow$ La courbe (d) correspond à $u_B(t)$

6⁰) a - $E_L = \frac{1}{2} L I^2$. A.N : $E_L = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot (0,2)^2$ et $E_L = 10^{-2} \text{ J}$

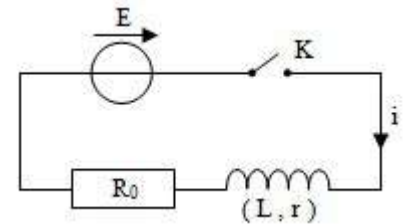
b - Lors de l'ouverture du circuit, la bobine (réservoir temporaire d'énergie) doit se débarrasser de l'énergie magnétique qu'elle a emmagasiné, ceci se manifeste par l'apparition d'étincelle au niveau de l'interrupteur K
c -



Exercice 2 :

Un circuit électrique comporte, placés en série, un générateur idéal de tension continue de f.é.m. E , un interrupteur K , une bobine d'inductance L et de résistance r et un conducteur ohmique de résistance R_0 .

Un système d'acquisition, dont les branchements au montage électrique sont analogues à celle d'un oscilloscope, permet de visualiser les variations au cours du temps des tensions $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor et $u_B(t)$ aux bornes de la bobine.



A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et on procède à l'acquisition.

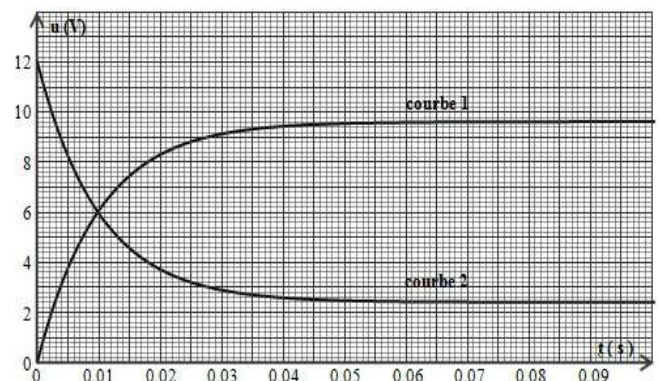
On obtient les deux courbes suivantes, notées courbe 1 et courbe 2.

1⁰ a - Recopier le schéma du montage et, en utilisant la Convention récepteur, représenter par des flèches les tensions u_B aux bornes de la bobine et u_{R_0} aux bornes du conducteur ohmique.

b - Indiquer, sur le même schéma, les branchements nécessaires pour visualiser $u_{R_0}(t)$ et $u_B(t)$.

c - Associer, en le justifiant, chacune des courbes 1 et 2 à la tension qu'elle représente.

d - Quel est l'effet de la bobine sur l'établissement du courant ?



2⁰ a - En appliquant la loi des mailles et en posant $R_0 + r = R$, établir que l'équation différentielle gérant les variations au cours du temps de la tension $u_{R_0}(t)$ s'écrit : $\frac{L}{R} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + u_{R_0} = R_0 \frac{E}{R}$

b - En vérifiant que l'expression $u_{R_0}(t) = R_0 \cdot I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ est solution de cette équation différentielle, déduire

que $I_0 = \frac{E}{R}$ et $\tau = \frac{L}{R}$

c - Que représente τ ? Montrer qu'elle est homogène à un temps.

3⁰ a - En exploitant les courbes 1 et 2 lorsque le régime permanent est établi, prouver que $E = 12 \text{ V}$ et que $R_0 = 4r$.

b - Sachant que $r = 12 \Omega$, calculer R_0 .

c - Déterminer graphiquement la valeur de τ . En déduire celle de L .

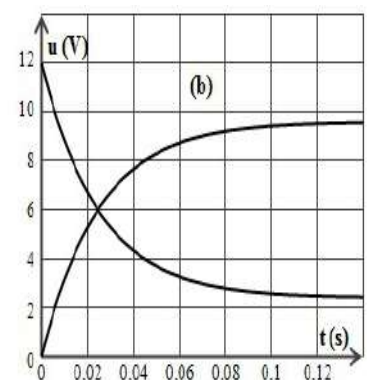
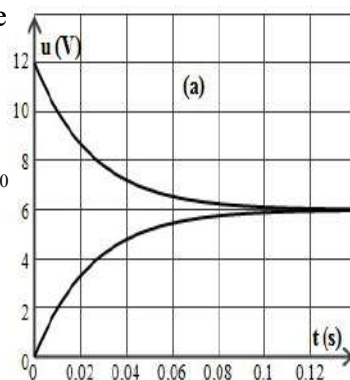
d - Calculer la valeur I_0 de l'intensité du courant lorsque le régime permanent est établi

4⁰ On refait l'acquisition mais en changeant chaque fois une des caractéristiques du circuit électrique :

- Première expérience: On diminue la résistance du conducteur ohmique jusqu'à la valeur $R'_0 = 0,25 \cdot R_0$

- Deuxième expérience: On augmente l'inductance de la bobine jusqu'à la valeur $L' = 2,5 \cdot L$.

On obtient les deux graphes (a) et (b) suivant :

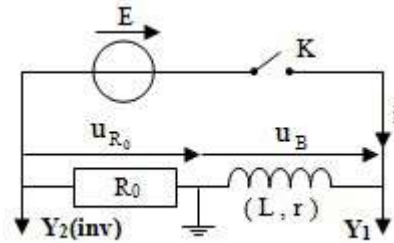


- a** - En exploitant les graphes (a) et (b) lorsque le régime permanent est établi, associer chacun d'eux à l'expérience qu'il représente.
- b** - Vérifier par le calcul que les deux nouveaux circuits ont la même valeur de la constante de temps τ .
- c** - Dans quelle expérience la valeur I_0 de l'intensité du courant en régime permanent diffère de celle du circuit initial ? Justifier la réponse. Calculer alors I_0 .

Réponse :

1⁰) a - Voir schéma ci-contre :

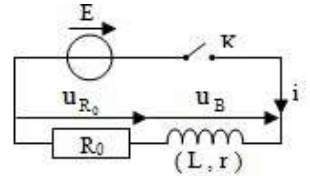
b - Voir schéma ci-contre :



$$\mathbf{c} - \text{A } t = 0, i(0) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \xrightarrow{u_{R_0} = R_0 \cdot i} \quad u_{R_0}(0) = 0 \\ u_{R_0}(0) + u_B(0) = E \rightarrow u_B(0) = E \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{la courbe 1} \rightarrow u_{R_0}(t) \\ \text{la courbe 2} \rightarrow u_B(t) \end{array}$$

d - La bobine retarde l'établissement du courant dans le circuit.

2⁰) a - D'après la loi des mailles : $u_B + u_{R_0} - E = 0 \rightarrow u_B + u_{R_0} = E$



$$\begin{cases} u_B = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_{R_0} = R_0 \cdot i \rightarrow i = \frac{u_{R_0}}{R_0} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} \end{cases} \rightarrow \frac{L}{R_0} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + r \cdot \frac{u_{R_0}}{R_0} + u_{R_0} = E$$

$$\text{on écrit donc : } L \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + r \cdot u_{R_0} + R_0 \cdot u_{R_0} = R_0 \cdot E \rightarrow L \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + (r + R_0) u_{R_0} = R_0 \cdot E$$

$$\text{On pose: } (R_0 + r) = R, \text{ il vient alors que : } L \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + R \cdot u_{R_0} = R_0 \cdot E \quad \text{et enfin : } \frac{L}{R} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + u_{R_0} = R_0 \cdot \frac{E}{R}$$

$$\mathbf{b} - u_{R_0}(t) = R_0 \cdot I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\xrightarrow[\text{on remplace dans l'équation différentielle}]{\frac{du_{R_0}}{dt} = \frac{R_0 \cdot I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}} \left| \begin{array}{l} \frac{L}{R} \cdot \frac{R_0 \cdot I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + R_0 \cdot I_0 - R_0 \cdot I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{R_0 \cdot E}{R} \\ \rightarrow R_0 \cdot I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{L}{R \cdot \tau} - 1 \right) + R_0 \cdot I_0 = \frac{R_0 \cdot E}{R} \end{array} \right.$$

$$\text{Cette expression doit être vérifiée à chaque instant} \rightarrow \begin{cases} \frac{L}{R \cdot \tau} - 1 = 0 \rightarrow \frac{L}{R \cdot \tau} = 1 \quad \text{et} \quad \tau = \frac{L}{R} \\ R_0 \cdot I_0 = \frac{R_0 \cdot E}{R} \quad \text{et} \quad I_0 = \frac{E}{R} \end{cases}$$

c - τ est la constante de temps du dipôle RL.

L'analyse dimensionnelle : $[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[U]}{[I]} \cdot [t] \cdot \frac{[I]}{[U]} = [t]$. Donc τ est bien homogène à un temps.

3⁰) a - Lorsque le régime permanent est établi ($i = \text{constante} = I_0$ et $\frac{di}{dt} = 0$) :

$$\mathbf{*} \text{ Graphiquement : } \begin{cases} U_B = 2,4 \text{ V} \\ U_{R_0} = 9,6 \text{ V} \end{cases} \xrightarrow{U_B + U_{R_0} = E} E = 12 \text{ V.}$$

$$\mathbf{*} \begin{cases} U_{R_0} = R_0 \cdot I_0 \\ U_B = r \cdot I_0 \end{cases} \rightarrow \frac{R_0}{r} = \frac{U_{R_0}}{U_B} = \frac{9,6}{2,4} = 4 \rightarrow R_0 = 4r$$

b - $r = 12 \Omega \rightarrow R_0 = 4.12$ et $R_0 = 48 \Omega$.

c - Graphiquement : $\tau = 10^{-2} \text{ s}$ or $\tau = \frac{L}{R_0 + r} \rightarrow L = (R_0 + r) \cdot \tau$ A.N : $L = 60 \cdot 10^{-2}$ et $L = 0,6 \text{ H}$.

d - $I_0 = \frac{E}{R_0 + r} = \frac{12}{60}$ et $I_0 = 0,2 \text{ A}$

4⁰) a -

En régime permanent $\left| \begin{array}{l} U_{R_0} = R_0 \cdot I_0 = R_0 \cdot \frac{E}{R_0 + r} \\ U_B = r \cdot I_0 = r \cdot \frac{E}{R_0 + r} \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{U_B \text{ et } U_{R_0} \text{ sont indépendantes de la variation de } L \\ U_B \text{ et } U_{R_0} \text{ dépendent de la variation de } R_0}} \left| \begin{array}{l} \text{le graphe (a) correspond à l'expérience 1} \\ \text{le graphe (b) correspond à l'expérience 2} \end{array} \right.$

b - Expérience 1 : $\tau_1 = \frac{L}{R'_0 + r} = \frac{0,6}{0,25 \cdot 48 + 12} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$
 Expérience 2 : $\tau_2 = \frac{L'}{R_0 + r} = \frac{2,5 \cdot 0,6}{48 + 12} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ $\rightarrow \tau_1 = \tau_2$

c - $I_0 = \frac{E}{R_0 + r} \rightarrow$ si $I'_0 \neq I_0$ alors $R'_0 \neq R_0 \rightarrow$ cas de la première expérience

A.N : $I'_0 = \frac{E}{R'_0 + r} = \frac{12}{0,25 \cdot 48 + 12}$ et $I'_0 = 0,5 \text{ A}$.

Exercice 3 :

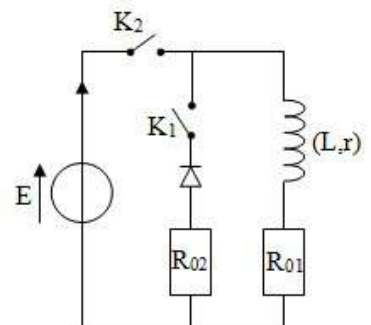
On considère le circuit électrique schématisé ci-contre :

Un système d'acquisition, convenablement branché au montage électrique, permet d'enregistrer les courbes d'évolution au cours du temps de l'intensité du courant électrique $i(t)$ qui

traverse la bobine et de la tension $u_B(t)$ entre ses bornes.

Les unités utilisées sont : i (en mA), u (en V) et t (en ms).

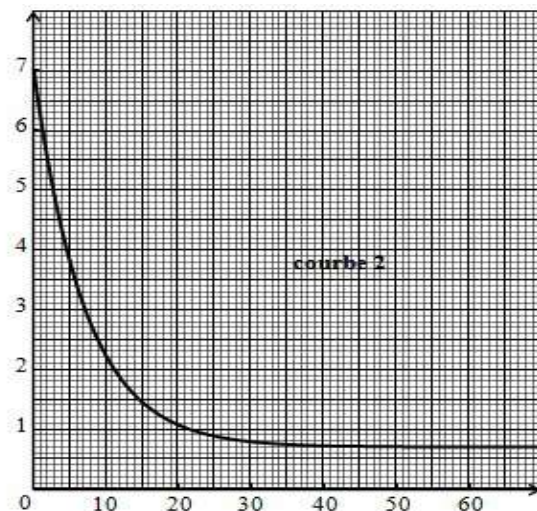
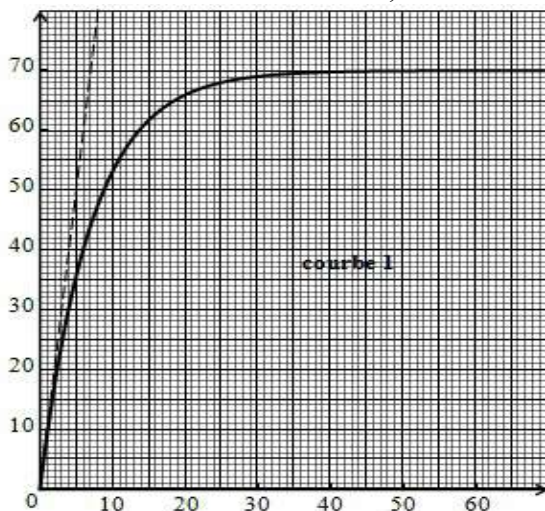
Les deux interrupteurs K_1 et K_2 sont initialement ouverts.



Etablissement du courant :

On ferme l'interrupteur K_1 puis, à un instant pris comme origine du temps, on procède à l'acquisition en fermant l'interrupteur K_2 .

On obtient les deux courbes suivantes, notées courbe 1 et courbe 2.



1⁰) a - Quelle est, parmi ces deux courbes, celle qui représente $i(t)$? Justifier la réponse.

b - Quelle est le phénomène physique responsable du retard à l'établissement du courant ?

c - Les courbes obtenues seraient-elles changées si on laisse l'interrupteur K_1 ouvert puis, à un instant pris comme origine du temps, on procède à l'acquisition en fermant l'interrupteur K_2 ? Justifier la réponse.

2⁰) a - Ecrire la relation qui lie la tension $u_{R_{01}}(t)$ aux bornes du résistor R_{01} , la tension $u_B(t)$ aux bornes de la bobine et la f é m E du générateur idéal ? En déduire que : $E = L \cdot \frac{di}{dt} + (R_{01} + r) \cdot i$.

b - L'intensité du courant s'écrit : $i = \frac{E}{R_{01}} - \frac{u_B}{R_{01}}$, en déduire l'expression de $\left(\frac{di}{dt}\right)$.

c - Montrer alors que la tension $u_B(t)$ aux bornes de la bobine vérifie l'équation différentielle:

$$\tau_1 \cdot \left(\frac{du_B}{dt}\right) + u_B = r \cdot \frac{E}{R_1} \quad \text{avec } R_1 = R_{01} + r \text{ et } \tau_1 = \frac{L}{R_1}$$

d - Vérifier que $u_B(t) = \frac{E}{R_1} \left(R_{01} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + r \right)$ est la solution de cette équation différentielle.

3⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur I de l'intensité du courant en régime permanent.

b - Pourquoi peut-on affirmer que $u_B(0) = E$? Déduire graphiquement la valeur de E .

c - Déterminer graphiquement la valeur U_B de la tension aux bornes de la bobine en régime permanent. Exprimer U_B en fonction de la résistance interne r de la bobine et I . Calculer alors la valeur de r .

d - Montrer que la valeur de la résistance du résistor est $R_{01} = 90 \Omega$.

4⁰) a - Trouver graphiquement la valeur de la constante de temps τ_1 du dipôle $R_1 L$. En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.

b - Calculer la valeur de l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine en régime permanent.

Rupture du courant :

Lorsque le régime permanent est établi, On maintient l'interrupteur K_1 fermé et, à un instant pris comme nouvelle origine du temps, on ouvre l'interrupteur K_2 et on procède à l'acquisition de l'intensité du courant électrique $i(t)$. On obtient la courbe suivante, notée courbe 3.

On supposera que la tension aux bornes de la diode est nulle lorsqu'elle est branchée dans le sens passant.

5⁰) a - Quelle est la valeur $i(0)$ de l'intensité du courant juste à l'ouverture du circuit ?

b - L'équation différentielle gérant la rupture du courant est : $\tau \cdot \left(\frac{di}{dt}\right) + i = 0$ avec $\tau = \frac{L}{R_{01} + R_{02} + r}$.

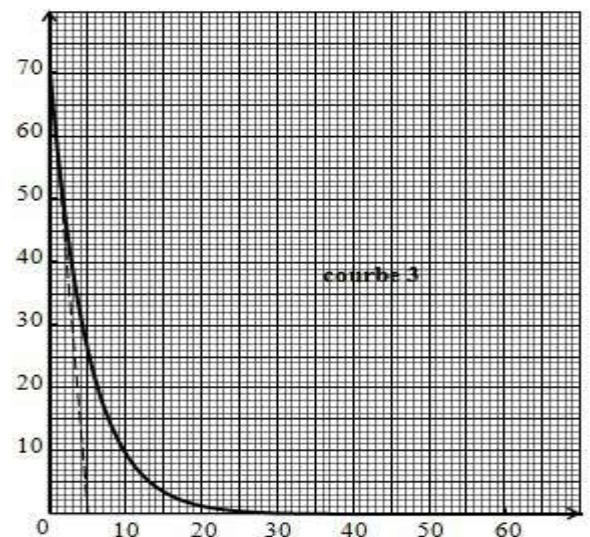
Déterminer graphiquement la valeur de τ .

En déduire la valeur de la résistance du résistor R_2 .

c - Exprimer $\left(\frac{di}{dt}\right)$ en fonction de i et τ . En déduire que

$u_B(t) = -(R_{01} + R_{02}) \cdot i$. Calculer alors la valeur de $u_B(0)$.

6⁰) Que se passe-t-il si, le régime permanent de l'intensité du courant étant établi lorsque l'interrupteur K_2 est fermé, on ouvre l'interrupteur K_1 puis on ouvre l'interrupteur K_2 ?



Réponse :

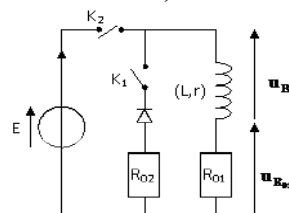
1⁰) a - à $t = 0$, $i(0) = 0 \rightarrow$ la courbe qui représente $i(t)$ est la (courbe 1).

b - Le phénomène physique responsable du retard à l'établissement du courant est l'auto induction.

c - Les courbes ne seront pas changées car la diode est branchée dans le sens bloquant donc elle joue le rôle d'interrupteur ouvert (elle empêche le courant de passer dans sa branche) même si l'interrupteur K_1 est fermé.

2⁰) a - La loi de l'additivité des tensions : $E = u_{R_{01}} + u_B$

$$\left. \begin{array}{l} u_B = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_{R_{01}} = R_{01} \cdot i \end{array} \right\} \rightarrow E = L \cdot \frac{di}{dt} + (R_{01} + r) \cdot i$$



b - On a : $i = \frac{E}{R_{01}} - \frac{u_B}{R_{01}} \rightarrow \left(\frac{di}{dt} \right) = -\frac{1}{R_{01}} \left(\frac{du_B}{dt} \right)$.

c - On a : $L \cdot \left[-\frac{1}{R_{01}} \left(\frac{du_B}{dt} \right) \right] + (R_{01} + r) \cdot \left[\frac{E}{R_{01}} - \frac{u_B}{R_{01}} \right] = E \rightarrow -L \cdot \left(\frac{du_B}{dt} \right) + (R_{01} + r) \cdot E - (R_{01} + r) \cdot u_B = R_{01} \cdot E$
 $\rightarrow -L \cdot \left(\frac{du_B}{dt} \right) - (R_{01} + r) \cdot u_B = -r \cdot E \rightarrow \frac{L}{(R_{01} + r)} \cdot \left(\frac{du_B}{dt} \right) + u_B = \frac{r}{(R_{01} + r)} \cdot E$

On pose : $(R_{01} + r) = R_1$ et $\tau_1 = \frac{L}{(R_{01} + r)}$, on écrit alors : $\tau_1 \cdot \frac{du_B}{dt} + u_B = r \cdot \frac{E}{R_1}$.

d - $u_B(t) = \frac{E}{R_1} \left(R_{01} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + r \right)$

* $u_B(0) = \frac{E}{R_1} (R_{01} \cdot 1 + r) = E$

or $u_B(0) + u_{R_{01}}(0) = E \xrightarrow[u(0)=0]{u_{R_{01}}(0)=R_{01} \cdot i(0)} u_B(0) = E$ donc la condition initiale est vérifiée.

* $\frac{du_B}{dt} = -\frac{R_{01} \cdot E}{R_1 \cdot \tau_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \rightarrow -\frac{\tau_1 \cdot R_{01} \cdot E}{R_1 \cdot \tau_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{E}{R_1} \cdot R_{01} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{E}{R_1} \cdot r = \frac{r \cdot E}{R_1}$ donc l'équation différentielle est vérifiée

3⁰) a - D'après la courbe 1 et en régime permanent $\rightarrow I = 70 \cdot 10^{-3} \text{ A}$

b - $u_B + u_{R_{01}} = E \rightarrow u_B(0) + u_{R_{01}}(0) = E$.

or $u_{R_{01}}(0) = R_{01} \cdot i(0) = 0$ car $i(0) = 0$, on en déduit que $u_B(0) = E$.

Graphiquement : $u_B(0) = 7 \text{ V}$. (d'après la courbe 2) $\rightarrow E = 7 \text{ V}$.

c - Graphiquement : $U_B = 0,7 \text{ V}$. En régime permanent : $U_B = r \cdot \frac{E}{R_1}$

or en régime permanent, $i = I = \text{constante} \rightarrow \frac{di}{dt} = 0$ donc $E = L \cdot 0 + (R_{01} + r) \cdot I \xrightarrow{(R_{01}+r)=R_1} I = \frac{E}{R_1}$

On écrit alors : $U_B = r \cdot I$ et $r = \frac{U_B}{I}$. A.N : $r = \frac{0,7}{70 \cdot 10^{-3}}$ et $r = 10 \Omega$.

d - $I = \frac{E}{R_1} \xrightarrow{R_1=R_{01}+r} R_{01} = \frac{E}{I} - r$. A.N : $R_{01} = \frac{7}{70 \cdot 10^{-3}} - 10$ et $R_{01} = 90 \Omega$.

4⁰) a - Graphiquement : $\tau_1 = 7 \text{ ms}$.

$\tau_1 = \frac{L}{R_1} \rightarrow L = \tau_1 \cdot R_1 = \tau_1 \cdot (R_{01} + r)$. A.N : $L = 7 \cdot 10^{-3} \cdot (90 + 10)$ et $L = 0,7 \text{ H}$.

b - En régime permanent : $E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$. A.N : $E_L = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot (70 \cdot 10^{-3})^2$ et $E_L = 17,15 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

5⁰) a - A l'ouverture du circuit : $i(0) = 70 \cdot 10^{-3} \text{ A}$.

b - Graphiquement : $\tau = 5 \text{ ms}$.

$\tau = \frac{L}{R_{01} + R_{02} + r} \rightarrow R_{02} = \frac{L}{\tau} - R_{01} - r$. A.N : $R_{02} = \frac{0,7}{5 \cdot 10^{-3}} - 90 - 10$ et $R_{02} = 40 \Omega$.

c - $\tau \left(\frac{di}{dt} \right) + i = 0 \rightarrow \left(\frac{di}{dt} \right) = -\frac{i}{\tau}$.

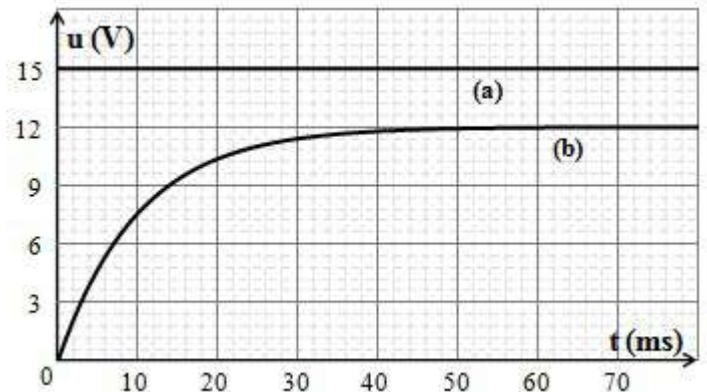
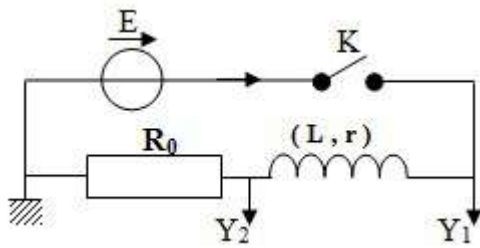
$u_B(t) = L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) + r \cdot i = -\frac{L \cdot i}{\tau} + r \cdot i \xrightarrow{\tau = \frac{L}{R_{01} + R_{02} + r}} u_B(t) = -(R_{01} + R_{02} + r) \cdot i + r \cdot i$ et $u_B(t) = -(R_{01} + R_{02}) \cdot i$.

A.N : $u_B(0) = -(90 + 40) \cdot 70 \cdot 10^{-3}$ et $u_B(0) = -9,1 \text{ V}$.

6⁰) A l'ouverture du circuit, une étincelle de rupture apparaît au niveau de l'interrupteur k_2 .

Exercice 4 :

Un générateur de tension idéal, de f é m E, alimente un dipôle RL constitué par une bobine d'inductance L et de résistance interne r, montée en série avec un résistor de résistance $R_0 = 60 \Omega$. Un système d'acquisition, dont le branchement est identique à celui d'un oscilloscope, nous permet de visualiser la tension u_G aux bornes du générateur sur la voie 1 et la tension u_{R_0} aux bornes du résistor sur la voie 2.



A la fermeture du circuit, prise comme origine du temps, on obtient les oscillogrammes (a) et (b) ci-contre :

1⁰) a - Quelle est l'influence de la bobine sur l'établissement du courant à la fermeture du circuit.

b - Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité $i(t)$ du courant au cours du temps.

c - La solution de cette équation différentielle est de la forme : $i(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

Déterminer les expressions de I_0 et de τ en fonction des caractéristiques du circuit.

2⁰) a - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à la tension qu'elle représente.

b - Déterminer graphiquement la valeur de la f é m E du générateur.

c - Quelle est la valeur U_{R_0} de la tension aux bornes du résistor lorsque le régime permanent est établi.

Exprimer U_{R_0} en fonction de R_0 et I_0 . Calculer la valeur de I_0 .

d - Montrer alors que la résistance interne de la bobine a pour valeur $r = 15 \Omega$.

3⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps τ du dipôle RL. En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.

b - Calculer la valeur de l'énergie magnétique E_L emmagasinée dans la bobine en régime permanent.

c - Qu'observe-t-on, au niveau de l'interrupteur, à l'ouverture du circuit ? Interpréter le phénomène observé.

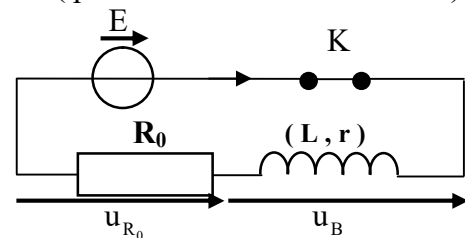
Réponse :

1⁰) a - La bobine retarde l'établissement du courant dans le circuit (phénomène d'auto-induction).

b - D'après la loi des mailles : $u_B + u_{R_0} - E = 0$

$$\rightarrow u_B + u_{R_0} = E$$

$$\left. \begin{array}{l} u_B = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_{R_0} = R_0 \cdot i \end{array} \right\} \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i = E$$



$$\begin{aligned} \text{c - } i(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) &\rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{\text{on remplace dans l'équation différentielle}} L \cdot \frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + (R_0 + r) I_0 - (R_0 + r) I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = E \\ &\rightarrow I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\frac{L}{\tau} - (R_0 + r) \right] + (R_0 + r) I_0 = E \end{aligned}$$

$$\text{Cette expression doit être vérifiée à chaque instant} \rightarrow \begin{cases} \frac{L}{\tau} - (R_0 + r) = 0 & \text{et } \tau = \frac{L}{(R_0 + r)} \\ (R_0 + r) I_0 = E & \text{et } I_0 = \frac{E}{(R_0 + r)} \end{cases}$$

2⁰) a - $u_G(t) = E$ constante $\rightarrow$ La tension $u_G(t)$ est représentée par la courbe (a).

$i(0) = 0 \rightarrow u_{R_0}(0) = 0 \rightarrow$ La tension $u_{R_0}(t)$ est représentée par la courbe (b).

b - Graphiquement : $E = 15 \text{ V}$.

c - Graphiquement et lorsque le régime permanent est établi : $U_{R_0} = 12 \text{ V}$.

En régime permanent : $i = I_0$ constante. $U_{R_0} = R_0 \cdot I_0 \rightarrow I_0 = \frac{U_{R_0}}{R_0}$. A.N : $I_0 = \frac{12}{60}$ et $I_0 = 0,2 \text{ A}$.

d - $I_0 = \frac{E}{R_0 + r} \rightarrow r = \frac{E}{I_0} - R_0$. A.N : $r = \frac{15}{0,2} - 60$ et $r = 15 \Omega$.

3⁰ **a** - $u_{R_0}(\tau) = 0,63 \cdot U_{R_0} = 0,63 \cdot 12 = 7,6 \text{ V}$ $\xrightarrow{\text{graphiquement}}$ $\tau = 10 \text{ ms}$.

$\tau = \frac{L}{R_0 + r} \rightarrow L = \tau \cdot (R_0 + r)$. A.N : $L = 10 \cdot 10^{-3} \cdot (60 + 15)$ et $L = 0,75 \text{ H}$.

b - On a : $E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \xrightarrow[\text{régime permanent}]{i=I_0} E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2$. A.N : $E_L = \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot (0,2)^2$ et $E_L = 15 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

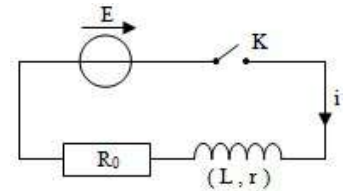
c - A l'ouverture du circuit on observe une étincelle de rupture au niveau de l'interrupteur.

La bobine ne peut stocker de l'énergie que lorsqu'elle est parcourue par un courant (réservoir temporaire d'énergie) donc à l'ouverture du circuit, la bobine doit se débarrasser de l'énergie emmagasinée.

Cette dissipation brusque de l'énergie va se manifester sous forme d'une étincelle de rupture au niveau de l'interrupteur.

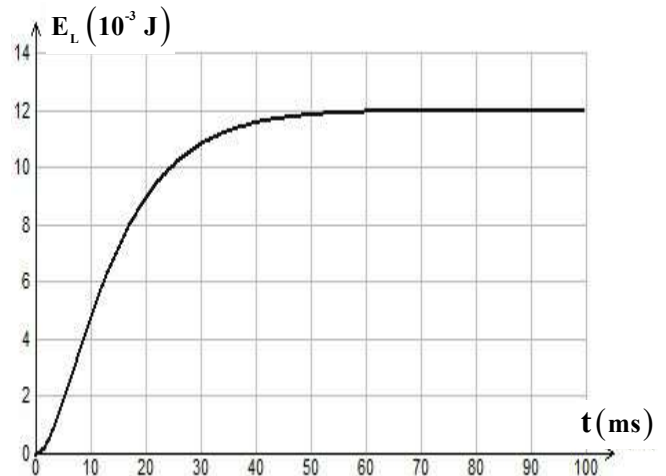
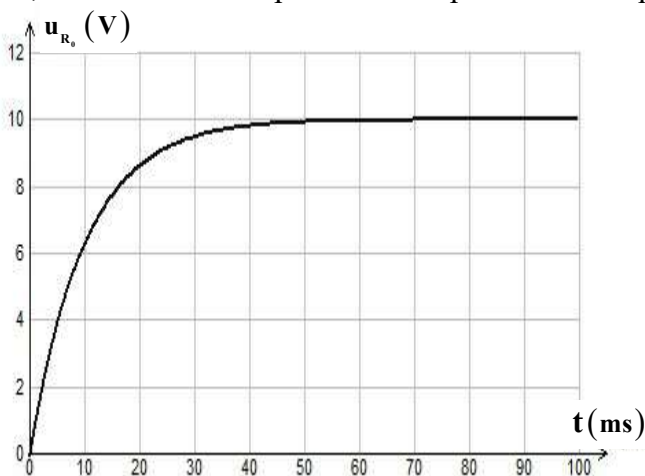
Exercice 5 :

Un circuit électrique comporte, en série, un générateur idéal de tension de f.é.m $E = 12 \text{ V}$, un interrupteur K , une bobine d'inductance L et de résistance r et un conducteur ohmique de résistance R_0 .



Un système d'acquisition permet de suivre l'évolution au cours du temps de la tension $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor et de l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et on procède à l'acquisition. On obtient les deux courbes suivantes :



1⁰ **a** - Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité $i(t)$ du courant au cours du temps.

b - En déduire qu'en régime permanent, l'intensité du courant électrique est : $I = \frac{E}{R_0 + r}$

2⁰ **a** - Déterminer graphiquement la valeur U_{R_0} de la tension aux bornes du résistor lorsque le régime permanent est établie. En déduire la valeur U_B de la tension aux bornes de la bobine.

b - Exprimer U_{R_0} et U_B en fonction de E , R_0 et r .

c - Déduire alors la valeur du rapport $\frac{R_0}{r}$.

3⁰ **a** - Soit $\tau = \frac{L}{R_0 + r}$ la constante de temps du dipôle RL considéré. Montrer que τ est homogène à un temps.

b - Déterminer graphiquement la valeur de τ .

4⁰) Soit E_{Lm} l'énergie magnétique emmagasinée par la bobine lorsque le régime permanent est établi.

a - Déterminer graphiquement la valeur de E_{Lm} .

b - Montrer que l'inductance de la bobine s'exprime par : $L = \frac{\tau^2 \cdot E^2}{2 \cdot E_{Lm}}$. Calculer alors la valeur de L .

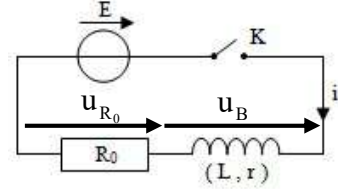
c - Déterminer les valeurs de R_0 et de r .

Réponse :

1⁰) a - D'après la loi des mailles : $u_B + u_{R_0} - E = 0$

$$\rightarrow u_B + u_{R_0} = E$$

$$\begin{aligned} u_B &= L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_{R_0} &= R_0 \cdot i \end{aligned} \quad \rightarrow \quad L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i = E$$



b - En régime permanent : $i = I = \text{constante} \rightarrow \frac{di}{dt} = 0$. On écrit alors : $(R_0 + r) \cdot I = E$ et $I = \frac{E}{(R_0 + r)}$.

2⁰) a - Graphiquement et lorsque le régime permanent est établi : $U_{R_0} = 10 \text{ V}$.

On a : $u_B + u_{R_0} = E \xrightarrow{\text{en régime permanent}}$

$$U_{R_0} + U_B = E \rightarrow U_B = E - U_{R_0}. \quad \text{A.N : } U_B = 12 - 10 \quad \text{et} \quad U_B = 2 \text{ V}.$$

$$\text{b - } u_{R_0} = R_0 \cdot i \xrightarrow[\substack{\text{régime permanent} \\ i = I = \frac{E}{(R_0 + r)}}]{\text{régime permanent}} U_{R_0} = R_0 \cdot \frac{E}{(R_0 + r)}$$

$$u_B = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \xrightarrow[\substack{\text{régime permanent} \\ i = I = \frac{E}{(R_0 + r)} \text{ et } \frac{di}{dt} = 0}]{\text{régime permanent}} U_B = r \cdot \frac{E}{(R_0 + r)}$$

$$\text{c - } \begin{cases} U_{R_0} = R_0 \cdot \frac{E}{(R_0 + r)} \\ U_B = r \cdot \frac{E}{(R_0 + r)} \end{cases} \rightarrow \frac{U_{R_0}}{U_B} = \frac{R_0}{r}. \quad \text{A.N : } \frac{R_0}{r} = \frac{10}{2} \quad \text{et} \quad \frac{R_0}{r} = 5.$$

$$3^0) \text{ a - } \tau = \frac{L}{R_0 + r} \rightarrow [\tau] = \frac{[L]}{[R_0 + r]} \rightarrow [\tau] = \frac{[U][t]}{[I]} \cdot \frac{[I][t]}{[U]} \rightarrow [\tau] = [t]$$

donc τ est homogène à un temps.

$$\text{b - } u_{R_0}(\tau) = 0,63 \cdot U_{R_0} = 0,63 \cdot 10 = 6,3 \text{ V} \xrightarrow{\text{graphiquement}} \tau = 10 \text{ ms}.$$

2⁰) a - Graphiquement : $E_{Lm} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

b - On a :

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \xrightarrow[\substack{\text{régime permanent} \\ i = I}]{\text{régime permanent}} E_{Lm} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \xrightarrow{I = \frac{E}{R_0 + r}} E_{Lm} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{E}{R_0 + r} \right)^2 \rightarrow E_{Lm} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{2} \cdot L^2 \cdot \frac{E^2}{(R_0 + r)^2}$$

$$\xrightarrow{\tau = \frac{L}{R_0 + r}} E_{Lm} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{2} \cdot L^2 \cdot \frac{E^2}{(R_0 + r)^2} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \cdot E^2 \quad \text{et} \quad L = \frac{\tau^2 \cdot E^2}{2 \cdot E_{Lm}}.$$

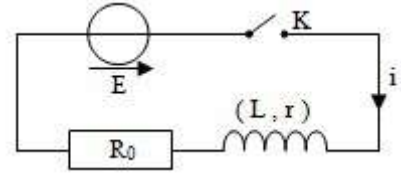
$$\text{A.N : } L = \frac{(10 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 12^2}{2 \cdot 12 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad L = 0,6 \text{ H}.$$

$$\text{c - } \tau = \frac{L}{R_0 + r} \rightarrow R_0 + r = \frac{L}{\tau}. \quad \text{A.N : } R_0 + r = \frac{0,6}{10 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad R_0 + r = 60 \Omega.$$

$$\begin{cases} R_0 + r = 60 \\ \frac{R_0}{r} = 5 \end{cases} \rightarrow R_0 = 50 \Omega \quad \text{et} \quad r = 10 \Omega.$$

Exercice 6 :

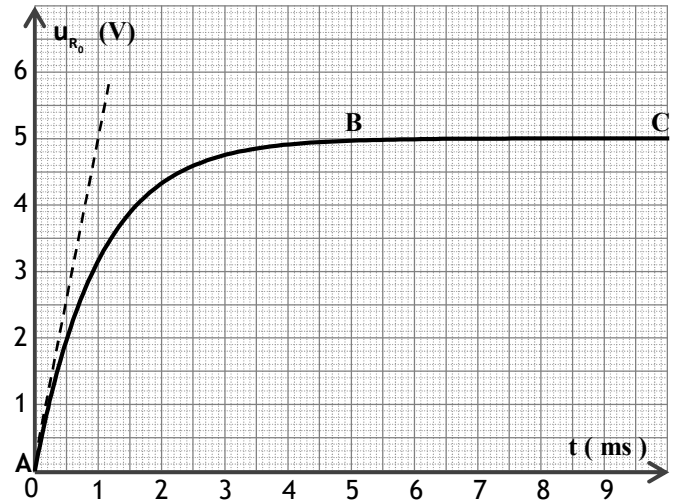
A l'aide d'un générateur idéal de tension de f.é.m. E , d'un interrupteur K , d'une bobine d'inductance $L = 0,06 \text{ H}$ et de résistance interne $r = 10 \Omega$ et d'un conducteur ohmique de résistance R_0 , montés en série, on réalise le circuit électrique schématisé ci-contre :



Un système d'acquisition, dont les branchements au montage électrique sont analogues à celle d'un oscilloscope, permet de visualiser l'évolution, au cours du temps, de la tension $u_{R_0}(t)$

aux bornes du résistor.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et on procède à l'acquisition. On obtient la courbe ci-contre :



1⁰ a - Justifier que la courbe d'évolution de la tension $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor et celle de l'intensité $i(t)$ du courant qui parcourt le circuit ont la même allure.

b - Identifier, parmi les deux portions (AB) et (BC) de la courbe, celle qui s'associe au régime transitoire de l'établissement du courant.

c - En déduire la durée Δt au bout de laquelle le régime permanent s'établit dans le circuit.

2⁰ a - Montrer que l'équation différentielle gérant la tension $u_{R_0}(t)$ s'écrit :

$$\tau \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + u_{R_0} = U_{R_0} \quad \text{avec} \quad U_{R_0} = \frac{R_0 \cdot E}{R_0 + r} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{L}{R_0 + r}$$

b - Sachant que : $u_{R_0}(t) + u_B(t) = E$, déduire que l'équation différentielle gérant la tension $u_B(t)$ au bornes de la bobine s'écrit :

$$\tau \cdot \frac{du_B}{dt} + u_B = U_B \quad \text{avec} \quad U_B = \frac{r \cdot E}{R_0 + r} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{L}{R_0 + r}$$

c - Sachant que : $u_{R_0}(t) = U_{R_0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$, déduire que : $u_B(t) = U_B + U_{R_0} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

3⁰ a - Déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps τ du dipôle RL.

En déduire la relation entre Δt et τ .

b - Calculer la valeur de R_0 .

c - En exploitant graphiquement la valeur U_{R_0} de la tension aux bornes du résistor en régime permanent, déterminer la valeur de E .

4⁰ a - Soit P la pente de la tangente à la courbe $u_{R_0} = f(t)$ prise à l'instant $t = 0$. Montrer que l'inductance de la bobine s'écrit : $L = \frac{R_0 \cdot E}{P}$. En déterminant graphiquement la valeur de P , retrouver la valeur de L .

b - Montrer que la résistance interne de la bobine s'écrit : $r = R_0 \cdot \left(\frac{E}{U_{R_0}} - 1 \right)$. Retrouver la valeur de r .

5⁰ A l'ouverture du circuit, des étincelles de rupture apparaissent au niveau de l'interrupteur.

a - Donner une explication à ce phénomène.

b - Indiquer, sur un schéma, la modification qu'on doit apporter au circuit et qui permet ainsi d'éviter ce phénomène sans perturber l'établissement du courant dans le circuit considéré.

Réponse :

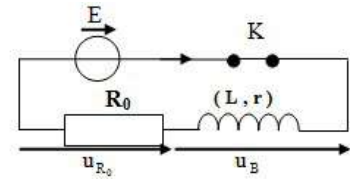
1⁰ a - $u_{R_0}(t) = R_0 \cdot i(t) \rightarrow u_{R_0}(t)$ et $i(t)$ sont proportionnelles, donc les courbes représentatives de l'évolution au cours du temps de u_{R_0} et de i ont la même allure.

b - Sur la portion (AB), u_{R_0} varie au cours du temps alors que sur la portion (BC), u_{R_0} est constante. On déduit alors que la portion (AB) de la courbe $u_{R_0} = f(t)$ s'associe au régime transitoire.

c - Graphiquement, $\Delta t = 5 \text{ ms}$.

2⁰) a - D'après la loi des mailles : $u_B + u_{R_0} - E = 0 \rightarrow u_B + u_{R_0} = E$

$$\left. \begin{array}{l} u_B = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_{R_0} = R_0 \cdot i \end{array} \right| \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i = E$$



On a : $u_{R_0} = R_0 \cdot i \rightarrow i = \frac{u_{R_0}}{R_0}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt}$, on écrit alors : $\frac{L}{R_0} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + (R_0 + r) \cdot \frac{u_{R_0}}{R_0} = E$

$$\rightarrow \frac{L}{(R_0 + r)} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + u_{R_0} = \frac{R_0 \cdot E}{(R_0 + r)} \quad \text{ou bien} \quad \tau \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + u_{R_0} = U_{R_0} \quad \text{avec} \quad U_{R_0} = \frac{R_0 \cdot E}{(R_0 + r)} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{L}{(R_0 + r)}$$

$$\mathbf{b} - u_{R_0} + u_B = E \xrightarrow[\frac{du_{R_0}}{dt} = -\frac{du_B}{dt}]{u_{R_0} = E - u_B} \tau \left(-\frac{du_B}{dt} \right) + (E - u_B) = \frac{R_0 \cdot E}{R_0 + r}$$

$$\rightarrow \tau \cdot \frac{du_B}{dt} + u_B = E - \frac{R_0 \cdot E}{R_0 + r} = \frac{(R_0 + r) \cdot E}{R_0 + r} - \frac{R_0 \cdot E}{R_0 + r} = \frac{r \cdot E}{R_0 + r}$$

$$\text{donc : } \tau \cdot \frac{du_B}{dt} + u_B = U_B \quad \text{avec} \quad U_B = \frac{r \cdot E}{(R_0 + r)} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{L}{(R_0 + r)}$$

$$\mathbf{c} - u_B(t) = E - u_{R_0}(t) = E - U_{R_0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = E - U_{R_0} + U_{R_0} e^{-\frac{t}{\tau}} = \left(E - \frac{R_0 \cdot E}{R_0 + r} \right) + U_{R_0} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{r \cdot E}{R_0 + r} + U_{R_0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{et } u_B(t) = U_B + U_{R_0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

3⁰) a - Graphiquement et en utilisant la méthode de la tangente à l'origine : $\tau = 1 \text{ ms}$

$$\text{On a : } \Delta t = 5 \text{ ms} \xrightarrow{\tau = 1 \text{ ms}} \Delta t = 5 \tau$$

$$\mathbf{b} - \tau = \frac{L}{R_0 + r} \rightarrow R_0 + r = \frac{L}{\tau} \quad \text{et} \quad R_0 = \frac{L}{\tau} - r. \quad \text{A.N : } R_0 = \frac{0,06}{10^{-3}} - 10 \quad \text{et} \quad R_0 = 50 \Omega.$$

c - En régime permanent : $u_{R_0} = U_{R_0} = \text{constante} \rightarrow \frac{du_{R_0}}{dt} = 0$. On écrit alors :

$$U_{R_0} = \frac{R_0 \cdot E}{(R_0 + r)} \quad \text{et} \quad E = \frac{(R_0 + r)}{R_0} \cdot U_{R_0}. \quad \text{Graphiquement, } U_{R_0} = 5 \text{ V} \rightarrow E = \frac{(50 + 10)}{50} \cdot 5 \quad \text{et} \quad E = 6 \text{ V}.$$

$$\mathbf{4⁰) a} - \text{A } t = 0, u_{R_0} = 0 \xrightarrow{\text{eq.diff}} \tau \cdot \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)_{t=0} + 0 = \frac{R_0 \cdot E}{(R_0 + r)} \rightarrow \frac{L}{(R_0 + r)} \cdot P = \frac{R_0 \cdot E}{(R_0 + r)} \quad \text{et} \quad L = \frac{R_0 \cdot E}{P}$$

$$\text{Graphiquement, } P = \frac{5 - 0}{10^{-3} - 0} \quad \text{et} \quad P = 5 \cdot 10^3 \text{ V.s}^{-1}. \quad \text{Donc : } L = \frac{50 \cdot 6}{5 \cdot 10^3} \quad \text{et} \quad L = 60 \cdot 10^{-3} \text{ H} \quad \text{ou} \quad L = 0,06 \text{ H}.$$

b - En régime permanent :

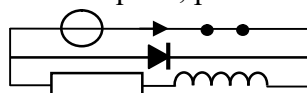
$$U_{R_0} = \frac{R_0 \cdot E}{(R_0 + r)} \rightarrow (R_0 + r) = \frac{R_0 \cdot E}{U_{R_0}} \rightarrow r = \frac{R_0 \cdot E}{U_{R_0}} - R_0 \quad \text{et} \quad r = R_0 \cdot \left(\frac{E}{U_{R_0}} - 1 \right)$$

$$\text{A.N : } r = 50 \cdot \left(\frac{6}{5} - 1 \right) \quad \text{et} \quad r = 10 \Omega.$$

5⁰) a - A l'ouverture du circuit inductif, l'énergie magnétique E_L doit s'annuler ($i = 0 \xrightarrow{E_L = \frac{1}{2} L i^2} E_L = 0$). L'énergie emmagasinée par la bobine, lorsque le circuit était fermé, doit être totalement dissipée.

Ceci se manifeste par l'apparition d'étincelles de rupture au niveau de l'interrupteur.

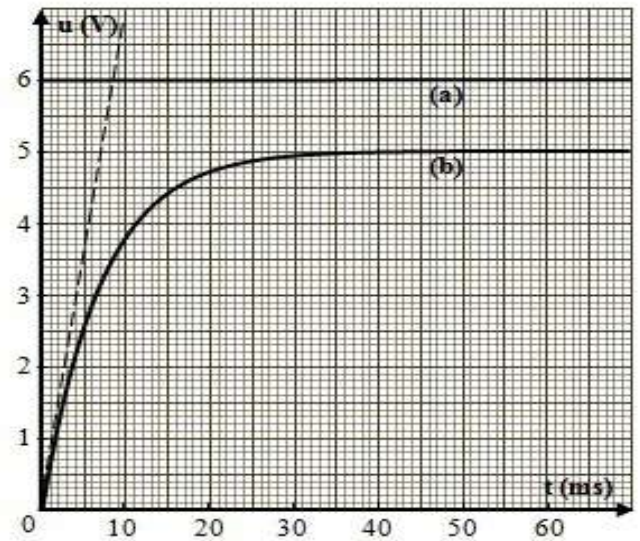
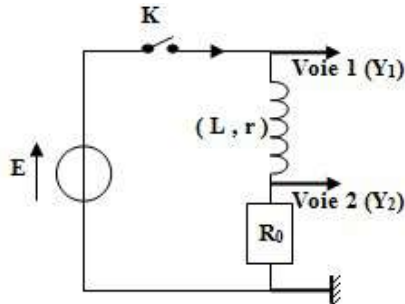
b - On branche une diode, montée dans le sens bloquant, parallèlement au dipôle RL.



Exercice 7 :

Un circuit électrique comporte, placés en série, un générateur idéal de tension continue de f.é.m. E , un interrupteur K , une bobine d'inductance L et de résistance interne $r = 10 \, \Omega$ et un conducteur ohmique de résistance R_0 .

A / Un système d'acquisition, dont les branchements au montage sont analogues à celle d'un oscilloscope, permet de visualiser l'évolution, au cours du temps, des tensions $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor et $u_G(t) = E$ aux bornes du générateur.



A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et on procède à l'acquisition. On obtient les deux courbes ci-dessus, qui sont notées courbe (a) et (b).

1⁰) a - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à la tension qu'elle représente.

b - Quel est l'effet de la bobine sur l'établissement du courant ?

2⁰) a - En appliquant la loi des mailles et en posant $R_0 + r = R$, établir que l'équation différentielle régissant l'évolution au cours du temps de la tension $u_{R_0}(t)$ s'écrit : $\frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + u_{R_0} = R_0 \frac{E}{R}$.

b - En vérifiant que l'expression : $u_{R_0}(t) = R_0 \cdot I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ est solution de cette équation différentielle,

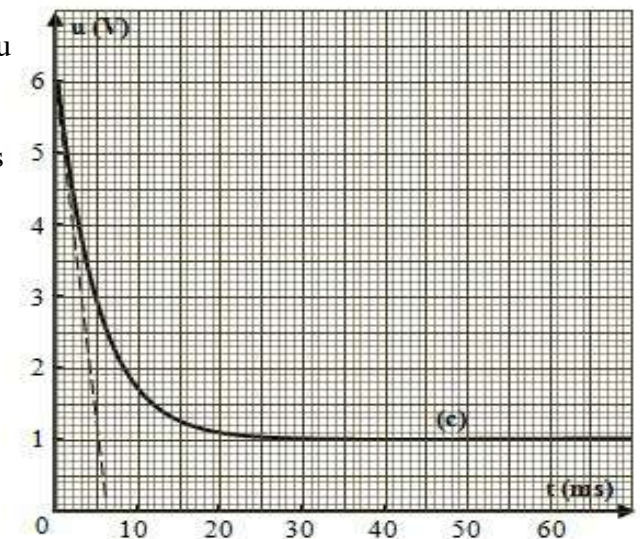
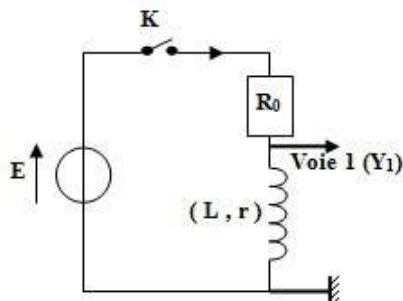
déduire que $I_0 = \frac{E}{R}$ et que $\tau = \frac{L}{R}$.

c - Déterminer graphiquement les valeurs de E , τ et U_{R_0} (U_{R_0} étant la valeur de $u_{R_0}(t)$ en régime permanent).

d - Déduire alors les valeurs de L et de R_0 .

B / On fait varier soit l'une des caractéristiques L ou R_0 du circuit, soit les deux à la fois.

On change le montage électrique de sorte que le système d'acquisition puisse visualiser l'évolution au cours du temps de la tension $u_B(t)$ aux bornes de la bobine.



A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et on procède à l'acquisition. On obtient alors la courbe ci-dessus, notée courbe (c).

3⁰) a - Déterminer, graphiquement, la nouvelle valeur τ' de la constante de temps du dipôle RL et celle de U_B (U_B étant la valeur de $u_B(t)$ en régime permanent).

b - Préciser les valeurs de L et de R_0 . Indiquer alors celle de ces deux grandeurs qui a été changée.

4⁰) Etablir l'expression numérique de la tension $u_B(t)$.

Réponse :

1⁰) a - Sur la voie 1 : $u_G(t) = E$ (constante $\neq 0$) $\rightarrow$ la courbe (a) correspond à u_G .

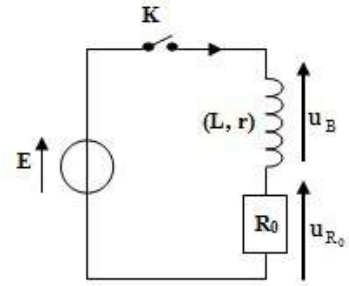
Sur la voie 2 : $u_{R_0}(0) = R_0 \cdot i(0) = 0$ car $i(0) = 0 \rightarrow$ la courbe (b) correspond à u_{R_0}

b - La bobine retarde l'établissement du courant (effet de l'auto induction).

2⁰) a - La loi des mailles s'écrit : $u_B + u_{R_0} - E = 0$

$$\begin{cases} u_B = L \frac{di}{dt} + ri \\ u_{R_0} = R_0 i \end{cases} \rightarrow L \frac{di}{dt} + (R_0 + r)i = E$$

$$u_{R_0} = R_0 i \rightarrow i = \frac{u_{R_0}}{R_0} \text{ et } \frac{di}{dt} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)$$



$$\text{on écrit alors : } \frac{L}{R_0} \cdot \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + (R_0 + r) \cdot \frac{u_{R_0}}{R_0} = E \xrightarrow{R=(R_0+r)} \frac{L}{R} \cdot \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right) + u_{R_0} = R_0 \cdot \frac{E}{R}$$

$$\text{b - } u_{R_0}(t) = R_0 \cdot I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \rightarrow \frac{L}{R} \left(\frac{R_0 \cdot I_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + R_0 \cdot I_0 - R_0 \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = R_0 \cdot \frac{E}{R}$$

$$\rightarrow R_0 \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(\frac{L}{R \cdot \tau} - 1 \right) + R_0 \cdot I_0 = R_0 \cdot \frac{E}{R}$$

$$\text{Cette expression doit être vérifiée à chaque instant} \rightarrow \begin{cases} \frac{L}{R \cdot \tau} - 1 = 0 \rightarrow \frac{L}{R \cdot \tau} = 1 \rightarrow \tau = \frac{L}{R} \\ R_0 \cdot I_0 = R_0 \cdot \frac{E}{R} \rightarrow I_0 = \frac{E}{R} \end{cases}$$

c - Graphiquement : $E = 6 \text{ V}$ (courbe (a))

$\tau = 7 \text{ ms}$ (courbe (b)) : méthode de la tangente à l'origine)

$U_{R_0} = 5 \text{ V}$ (courbe (b))

$$\text{d - } * U_{R_0} = R_0 \cdot \frac{E}{R} = R_0 \cdot \frac{E}{R_0 + r} \rightarrow R_0 \cdot U_{R_0} + r \cdot U_{R_0} = R_0 \cdot E \rightarrow R_0 \cdot (E - U_{R_0}) = r \cdot U_{R_0} \text{ et } R_0 = \frac{r \cdot U_{R_0}}{E - U_{R_0}}$$

$$\text{A.N : } R_0 = \frac{10.5}{6-5} \text{ et } R_0 = 50 \Omega.$$

$$* \tau = \frac{L}{R} \xrightarrow{R=R_0+r} L = \tau \cdot (R_0 + r). \text{ A.N : } L = 7 \cdot 10^{-3} \cdot (50 + 10) \text{ et } L = 0,42 \text{ H.}$$

3⁰) a - Graphiquement : $\tau' = 5 \text{ ms}$ (courbe (c)) : méthode de la tangente à l'origine)

$U_B = 1 \text{ V}$ (courbe (c))

$$\text{b - On a : } u_B(t) = L' \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) + r \cdot i \xrightarrow[\substack{u_{R_0}(t) = R_0' \cdot I_0' \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = R_0' \cdot i(t)}]{i(t) = I_0' \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)} u_B(t) = L' \cdot \frac{I_0'}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + r \cdot I_0' - r \cdot I_0' \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\begin{cases} L' = \tau' \cdot (R_0' + r) \\ I_0' = \frac{E}{R_0' + r} \end{cases} \rightarrow u_B(t) = \left(E - r \cdot \frac{E}{R_0' + r} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + r \cdot \frac{E}{R_0' + r} \text{ et } u_B(t) = \left(\frac{R_0' \cdot E}{R_0' + r} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r \cdot E}{R_0' + r}$$

$$* \text{ En régime permanent : } U_B = \frac{r \cdot E}{R_0' + r} \rightarrow R_0' = \frac{r \cdot E}{U_B} - r.$$

$$\text{Remarque : } u_B(t) = L' \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) + r \cdot i \xrightarrow[\substack{\text{en régime permanent} \\ i = I_0' = \text{constante} \rightarrow \frac{di}{dt} = 0}]{i = I_0' = \text{constante}} U_B = r \cdot I_0' \xrightarrow{I_0' = \frac{E}{R_0' + r}} U_B = \frac{r \cdot E}{R_0' + r}$$

$$\text{A.N : } R'_0 = \frac{10.6}{1} - 10 \quad \text{et} \quad R'_0 = 50 \Omega.$$

$$* \tau' = \frac{L'}{R'_0 + r} \rightarrow L' = \tau' \cdot (R'_0 + r). \quad \text{A.N : } L' = 5.10^{-3} \cdot (50 + 10) \quad \text{et} \quad L' = 0,3 \text{ H}.$$

$R'_0 = R_0$ et $L' \neq L$ on a donc changé l'inductance de la bobine.

$$4^0) u_B(t) = \left(\frac{R'_0 \cdot E}{R'_0 + r} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}} + \frac{r \cdot E}{R'_0 + r} \xrightarrow{\text{A.N}} u_B(t) = \left(\frac{50.6}{50 + 10} \right) \cdot e^{-\frac{t}{5.10^{-3}}} + \frac{10.6}{50 + 10}$$

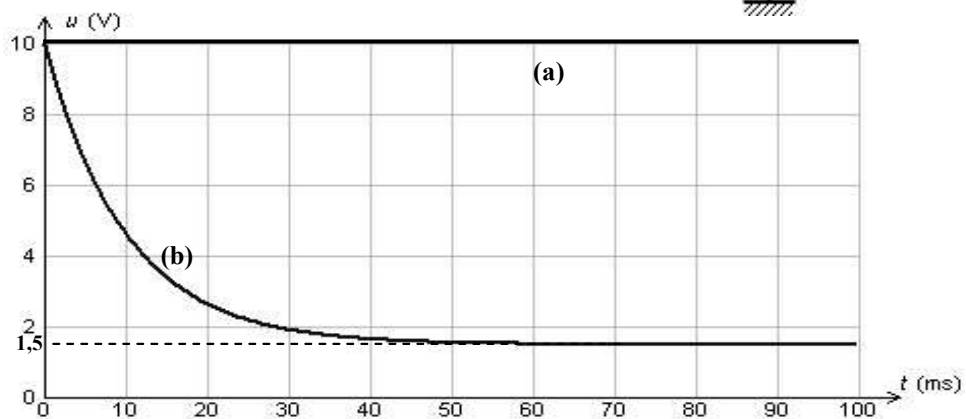
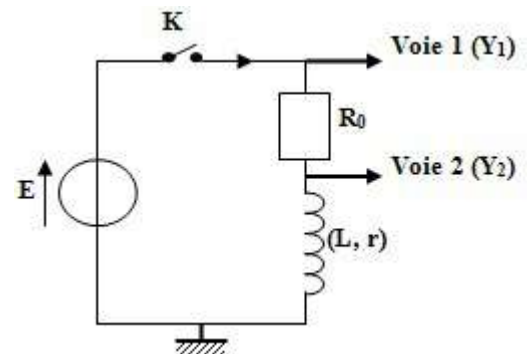
Il vient alors que : $u_B(t) = 5 \cdot e^{-200 \cdot t} + 1 \text{ (V)}.$

Exercice 8 :

Le circuit électrique schématisé ci-contre comporte en série :

- Un générateur de tension idéal de f e m E .
- Un interrupteur K .
- Un résistor de résistance $R_0 = 68 \Omega$.
- Une bobine d'inductance L et de résistance interne r .

A l'instant $t = 0$, on ferme K . Un oscilloscope à mémoire, dont les voies d'entrée (1) et (2) sont branchées comme il est indiqué sur le schéma, permet de visualiser les oscillogrammes (a) et (b) représentés par les courbes suivantes :



1⁰ a - Associer chacune des courbes (a) et (b) à l'entrée (Y_1) ou (Y_2) correspondante.

b - Déterminer graphiquement la valeur de la f e m E du générateur utilisé.

2⁰) Etablir l'équation différentielle régissant l'établissement du courant dans le circuit considéré.

3⁰) Soit $i(t) = I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ l'expression de l'intensité du courant dans le circuit.

Montrer que : $I = \frac{E}{R_0 + r}$ et $\tau = \frac{L}{R_0 + r}$.

4⁰) a - Donner, d'après le graphe, la valeur de la tension U_b aux bornes de la bobine lorsque le régime permanent est établi. En déduire celle de la tension U_{R_0} aux bornes du résistor.

b - Exprimer U_{R_0} en fonction de R_0 et I . Calculer la valeur de I .

c - En déduire alors que la valeur de la résistance interne de la bobine est $r = 12 \Omega$.

5⁰) a - Montrer qu'en régime transitoire, la tension aux bornes de la bobine s'exprime par :

$$u_b(t) = I \left(r + R_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

b - Sachant qu'à $t = 10^{-2} \text{ s}$, on a $u_b(t) = 4,63 \text{ V}$; déterminer la valeur de τ et en déduire alors celle de l'inductance L de la bobine utilisée.

c - Calculer l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine à l'instant $t = \tau$.

6⁰) Représenter l'allure de la tension u_{R_0} aux bornes du résistor au cours de l'établissement du courant.
Préciser les points caractéristiques.

Réponse :

1⁰) a - Sur la voie 1 (Y_1) on visualise la tension $u_G = E = \text{constante}$ aux bornes du générateur donc la courbe (a) correspond à l'entrée (Y_1).

Par conséquent la courbe (b) correspond à l'entrée (Y_2) sur laquelle on visualise la tension u_B aux bornes de la bobine.

b - Graphiquement, $E = 10 \text{ V}$.

2⁰) a - D'après la loi des mailles : $u_b + u_{R_0} - E = 0 \rightarrow u_b + u_{R_0} = E$

$$\left. \begin{array}{l} u_b = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_{R_0} = R_0 \cdot i \end{array} \right\} \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i = E$$

on écrit alors : $\frac{L}{(R_0 + r)} \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{(R_0 + r)}$

3⁰) On a : $i(t) = I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

$$\frac{di}{dt} = \frac{I}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{\text{éq. diff}} \frac{L}{(R_0 + r)} \cdot \frac{I}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + I - I e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{(R_0 + r)} \rightarrow I e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left[\frac{L}{(R_0 + r)} \cdot \frac{1}{\tau} - 1 \right] + I = \frac{E}{(R_0 + r)}$$

Cette expression doit être vérifiée à chaque instant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{(R_0 + r)} \cdot \frac{1}{\tau} - 1 = 0 \rightarrow \frac{L}{(R_0 + r)} \cdot \frac{1}{\tau} = 1 \rightarrow \tau = \frac{L}{(R_0 + r)} \\ I = \frac{E}{(R_0 + r)} \end{array} \right.$$

4⁰) a - Graphiquement et en régime permanent : $U_b = 1,5 \text{ V}$.

On a : $U_b + U_{R_0} = E \rightarrow U_{R_0} = E - U_b$. A.N : $U_{R_0} = 10 - 1,5$ et $U_{R_0} = 8,5 \text{ V}$.

b - On a : $U_{R_0} = R_0 \cdot I \rightarrow I = \frac{U_{R_0}}{R_0}$. A.N : $I = \frac{8,5}{62}$ et $I = 0,125 \text{ A}$.

c - On a : $U_b = r \cdot I \rightarrow r = \frac{U_b}{I}$. A.N : $r = \frac{1,5}{0,125}$ et $r = 12 \Omega$.

5⁰) a - On a : $u_b(t) = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i(t)$

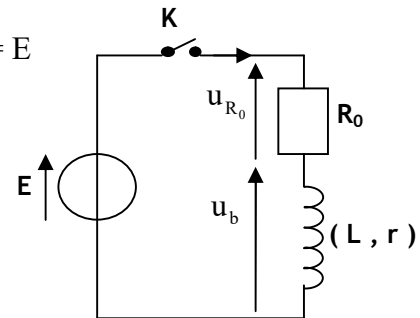
$$\rightarrow u_b(t) = L \cdot \frac{I}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + r \cdot I - r I e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{\tau = \frac{L}{(R_0 + r)}} u_b(t) = (R_0 + r) \cdot I e^{-\frac{t}{\tau}} + r \cdot I - r I e^{-\frac{t}{\tau}} = R_0 \cdot I e^{-\frac{t}{\tau}} + r \cdot I$$

et $u_b(t) = I \left(r + R_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$.

b - $u_b(t) = I \left(r + R_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\frac{u_b(t)}{I} - r}{R_0} = \frac{u_b(t) - r \cdot I}{R_0 \cdot I} = \frac{u_b(t) - U_b}{U_{R_0}}$

$$\rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln \left(\frac{u_b(t) - U_b}{U_{R_0}} \right) \text{ et } \tau = -\frac{t}{\ln \left(\frac{u_b(t) - U_b}{U_{R_0}} \right)} \text{ A.N : } \tau = -\frac{10^{-2}}{\ln \left(\frac{4,63 - 1,5}{8,5} \right)} \text{ et } \tau = 10^{-2} \text{ s.}$$

On a : $\tau = \frac{L}{(R_0 + r)} \rightarrow L = \tau \cdot (R_0 + r)$. A.N : $L = 10^{-2} \cdot (68 + 12)$ et $L = 0,8 \text{ H}$.



c - $E_L(\tau) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot [i(\tau)]^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 (1 - e^{-1})^2$.

A.N: $E_L(\tau) = \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot (0,125)^2 \cdot (1 - e^{-1})^2$ et $E_L(\tau) \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

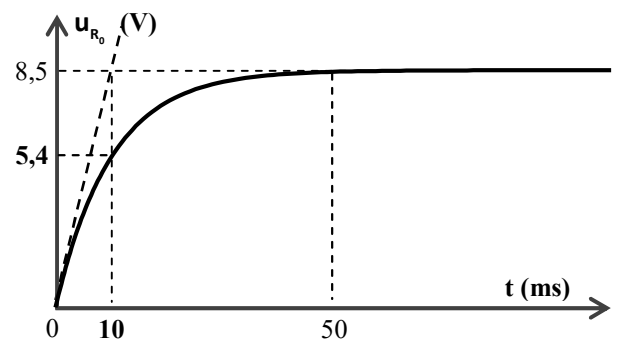
6⁰) * la courbe $u_{R_0} = f(t)$ admet une asymptote horizontale en $U_{R_0} = 8,5 \text{ V}$ (régime permanent).

* $u_{R_0}(\tau) = 0,63 \cdot U_{R_0}$

$\xrightarrow[\substack{\tau=10\text{ms} \\ U_{R_0}=8,5\text{V}}]{} u_{R_0}(10 \cdot 10^{-3}) = 5,4 \text{ V}.$

* La tangente à l'origine $y(t)$ est telle que : $y(\tau) = U_{R_0}$.

* le régime permanent est pratiquement atteint à $t = 5 \cdot \tau$.



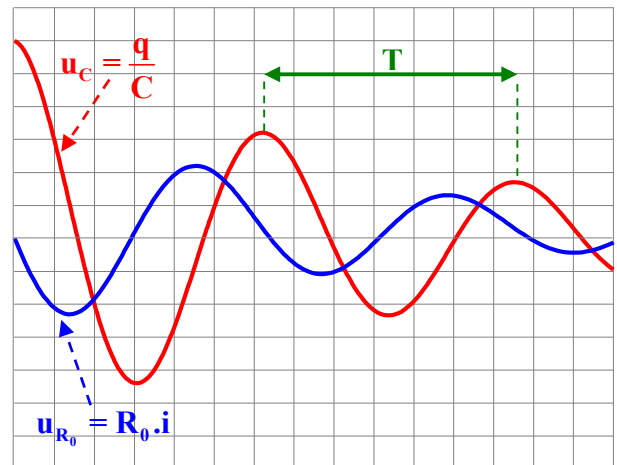
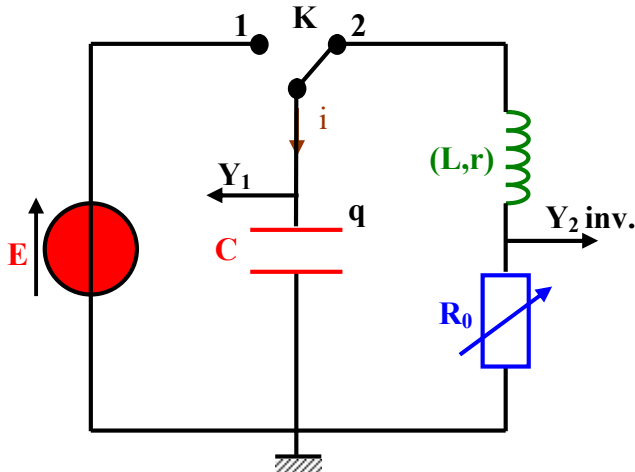
LES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES

I / Les oscillations électriques libres amorties :

1⁰ Le circuit (R,L,C) série en régime libre :

a - Mise en situation :

On étudie la décharge d'un condensateur (C) à travers un circuit inductif comportant une bobine (L,r) et un résistor ajustable (R₀).



b - Commentaire et définitions :

- La charge q du condensateur (ainsi que l'intensité i du courant) change de signe alternativement. On dit que la charge q (ainsi que l'intensité i) oscille au cours du temps. La décharge du condensateur est alors une décharge oscillante.

Les oscillations se succèdent sur des intervalles successifs et égaux à T.

- La grandeur oscillante q (ainsi que i) a lieu dans un circuit ne comportant pas de générateur. On dit alors qu'on a des oscillations électriques libres.
- L'amplitude des oscillations diminue continuellement au cours du temps jusqu'à s'annuler. On dit alors que les oscillations électriques sont amorties.

c - Equation différentielle régissant les oscillations électrique libres amorties :

Considérons un circuit (R,L,C) en régime libre.

Appliquons la loi des mailles au circuit : $u_B + u_{R_0} + u_C = 0$

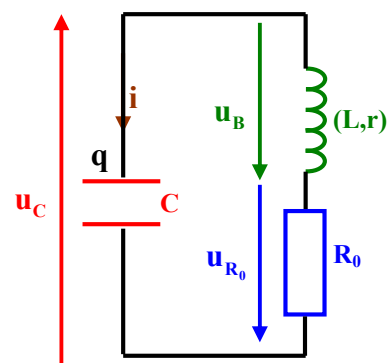
$$\left. \begin{array}{l} u_B = -e + r.i = L \cdot \frac{di}{dt} + r.i \\ u_{R_0} = R_0.i \\ u_C = \frac{q}{C} \end{array} \right\} \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r).i + \frac{q}{C} = 0$$

Sachant que $i = \frac{dq}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, on écrit alors :

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + (R_0 + r) \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\text{On pose } (R_0 + r) = R, \text{ il vient alors que : } L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ ou } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L.C} \cdot q = 0$$

C'est l'équation différentielle associée au circuit (R,L,C) en régime libre .



Remarque : En posant $\omega_0^2 = \frac{1}{L.C}$ et $\alpha.\omega_0 = \frac{R}{2.L}$, il vient que : $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha.\omega_0.\frac{dq}{dt} + \omega_0^2.q = 0$

α est appelé coefficient réduit d'amortissement (sans dimension)

On définit alors : $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$: résistance critique du circuit .

2⁰) Les régimes amortis :

a - Le régime pseudo périodique :

Lorsque R est faible ($R < R_c$) :

La décharge est oscillante.

A chaque oscillation de durée T, l'amplitude diminue et finit par s'annuler. On dit alors que le régime est pseudo périodique de pseudo période T.

Remarque :

La pseudo période dépend de la valeur de R :
si R augmente, T augmente.

b - Le régime apériodique :

Lorsque R est grande ($R > R_c$) :

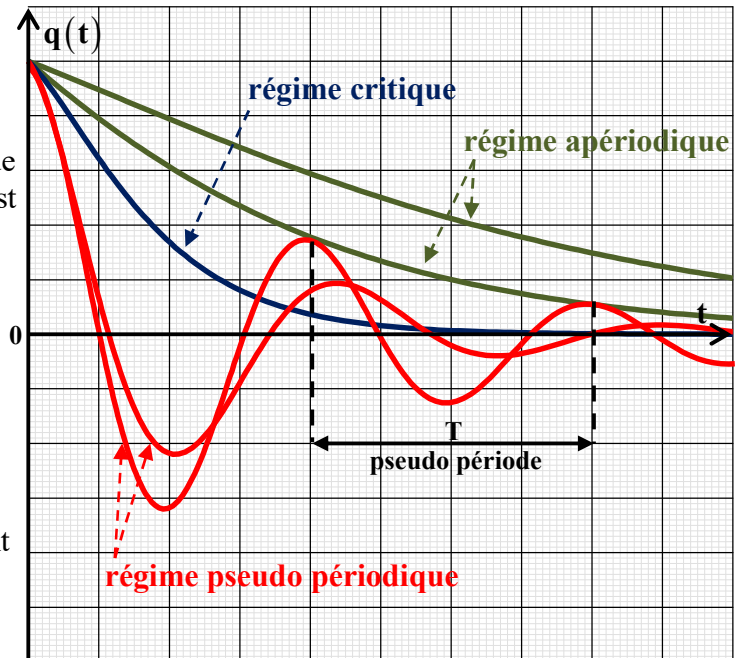
La décharge est monotone.

La charge du condensateur diminue continuellement jusqu'à s'annuler.

c - Le régime critique :

C'est un régime apériodique particulier caractérisé par la propriété ($R = R_c$).

La décharge monotone est la plus rapide.



3⁰) Aspect énergétique :

- L'énergie totale E du circuit est la somme de l'énergie électrostatique E_C (emmagasinée par le condensateur) et de l'énergie magnétique E_L (emmagasinée par la bobine).

$$\left. \begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \\ E_L &= \frac{1}{2} L i^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2$$

Au cours de la décharge oscillante, il y a conversion de E_C en E_L et inversement; donc on assiste à un transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et inversement.

- La variation de l'énergie électromagnétique E au cours du temps est donnée par :

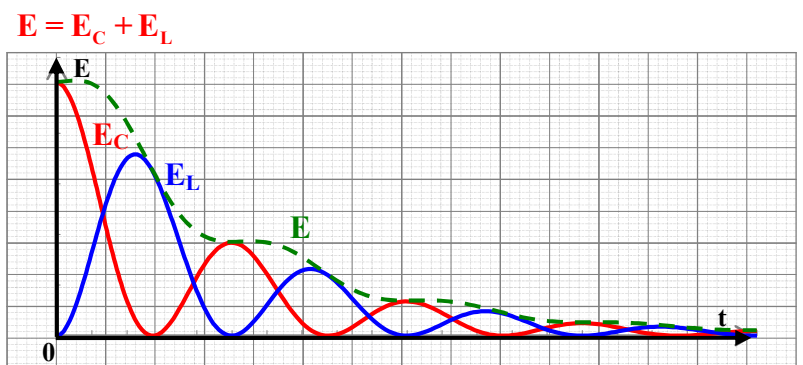
$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2C} \cdot 2q \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{L}{2} \cdot 2i \cdot \frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + L i \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\text{sachant que } i = \frac{dq}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}, \text{ on écrit alors : } \frac{dE}{dt} = i \cdot \left(L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \right)$$

$$\text{or d'après l'équation différentielle : } L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = -R \cdot \frac{dq}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} = i \cdot \left(-R \frac{dq}{dt} \right) = i \cdot (-R \cdot i) \rightarrow \frac{dE}{dt} = -R \cdot i^2 \text{ donc } \frac{dE}{dt} < 0$$

L'énergie totale de l'oscillateur électrique diminue au cours du temps.



- On a : $\frac{dE}{dt} = -R.i^2 \rightarrow dE = -R.i^2.dt$

La variation de l'énergie totale de l'oscillateur électrique est égale à l'énergie thermique dégagée par effet Joule dans la résistance.

Le circuit (R,L,C) en régime libre est un système **dissipatif**.

Remarque :

Si on arrive à entretenir les oscillations (compenser les pertes par effet Joule), le circuit se comporte comme si $R = 0$ et les oscillations électriques deviennent permanentes non amorties.

Le circuit (L,C) en régime libre sera alors un système **conservatif**.

Application 1 :

Un condensateur de capacité $C = 0,1 \mu F$ est initialement chargé sous une tension U_0 .

Il est branché, à $t = 0$, aux bornes d'une portion de circuit série comportant une bobine d'inductance L inconnue et de résistance interne $r = 10 \Omega$ et un résistor de résistance R_0 variable.

La figure 1 donne l'évolution au cours du temps de la tension

$u_C(t)$ aux bornes du condensateur lorsque $R_0 = 600 \Omega$.

1⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur de U_0 .

b - Calculer la valeur de l'énergie électrostatique $E_C(0)$ initialement emmagasinée par le condensateur.

2⁰) Etablir l'équation différentielle qui gère l'évolution de la tension $u_C(t)$ au cours du temps.

3⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur de la pseudo-période T des oscillations électriques.

b - En négligeant la différence entre la pseudo période T

et la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ des oscillations électriques, calculer la valeur de l'inductance L de la bobine utilisée.

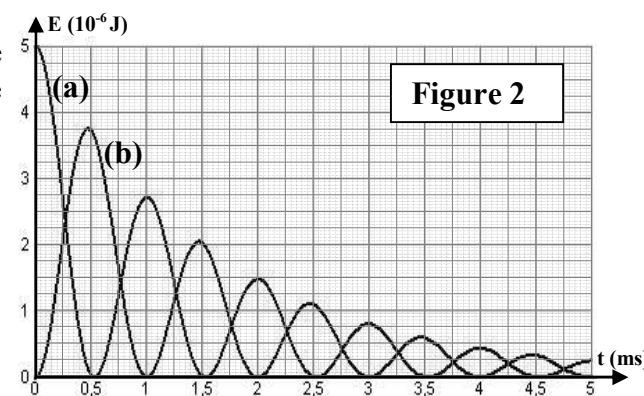
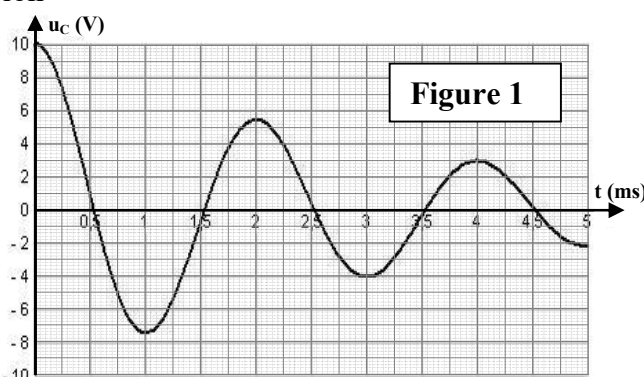
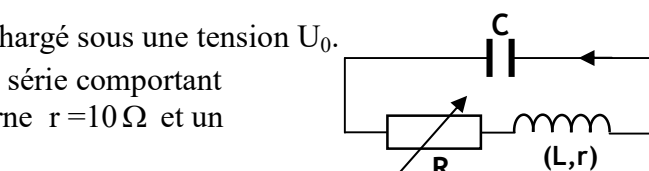
4⁰) La figure 2 donne les variations de l'énergie électrique E_C emmagasinée par le condensateur et celles de l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine.

a - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à l'énergie qu'elle représente.

b - Montrer que l'énergie électromagnétique $E = E_C + E_L$ emmagasinée par le circuit décroît au cours du temps.

c - D'après la figure 2, déterminer l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule à l'instant $t = 2$ ms.

d - Calculer la valeur de E_{th} en exploitant la figure 1.



Réponse :

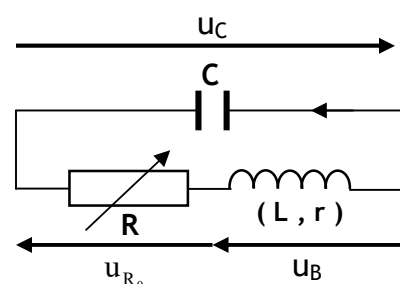
1⁰) a - A $t = 0$, $u_C(0) = U_0$. Graphiquement : $U_0 = 10$ V.

b - $E_C(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$. A.N : $E_C = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2$ et $E_C = 5 \cdot 10^{-6}$ J

2⁰) La loi des mailles s'écrit : $u_B + u_{R_0} + u_C = 0$

$$\begin{cases} u_B = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_{R_0} = R_0 \cdot i \end{cases} \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i + u_C = 0$$

$$\text{On a : } i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2},$$



il vient alors que :

$$L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R_0 + r).C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{(R_0 + r)}{L}.\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

3⁰) a - Graphiquement : la pseudo période est $T = 2.10^{-3}$ s.

b - $T = T_0 \xrightarrow[T=2.10^{-3}\text{s}]{\text{graphiquement}} T_0 = 2.10^{-3}$ s.

On a : $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C} \rightarrow T_0^2 = 4\pi^2.L.C \rightarrow L = \frac{T_0^2}{4\pi^2.C}$. A.N : $L = \frac{(2.10^{-3})^2}{4\pi^2.0,1.10^{-6}}$ et $L = 1$ H

4⁰) a - * $u_C(0) = U_0 \rightarrow E_C(0) = E_{C\max} \rightarrow$ la courbe (a) représente E_C

* $i(0) = 0 \rightarrow E_L(0) = 0 \rightarrow$ la courbe (b) représente E_L

b - $E = E_C + E_L = \frac{1}{2}.C.u_C^2 + \frac{1}{2}.L.i^2 \rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}.C.2u_C.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2}.L.2i.\frac{di}{dt} = C.u_C.\frac{du_C}{dt} + L.i.\frac{di}{dt}$

Or on a : $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C.u_C} i = C.\frac{du_C}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_C}{dt^2}$, on écrit alors :

$$\frac{dE}{dt} = u_C.i + L.i.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} = i.\left(L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C\right)$$

Or d'après l'équation différentielle : $L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = -(R_0 + r).C.\frac{du_C}{dt} = -(R_0 + r).i$, il vient alors que :

$$\frac{dE}{dt} = i.\left[-(R_0 + r).i\right] = -(R_0 + r).i^2 < 0$$

L'énergie électromagnétique E emmagasinée par le circuit décroît au cours du temps.

c - D'après la figure 2 : $E_{th} = E(0) - E(T) = [E_C(0) + E_L(0)] - [E_C(T) + E_L(T)] = E_C(0) - E_C(T)$

A.N : $E_{th} = 5.10^{-6} - 1,5.10^{-6}$ et $E_{th} = 3,5.10^{-6}$ J.

d - D'après la figure 1 : $E_{th} = E_C(0) - E_C(T) = \frac{1}{2}C[u_C^2(0) - u_C^2(T)]$

A.N : $E_{th} = \frac{1}{2}.0,1.10^{-6}[(10)^2 - (5,5)^2]$ et $E_{th} = 3,49.10^{-6}$ J.

II / Les oscillations électriques libres non amorties :

1⁰) Le circuit oscillant (L,C) :

a - Mise en situation :

On étudie la décharge d'un condensateur (C), de charge initiale q_0 , dans une bobine purement inductive (d'inductance L et de résistance interne r négligeable).

A $t = 0$, on couple le condensateur à la bobine.

b - Equation différentielle régissant les oscillations électrique libres non amorties :

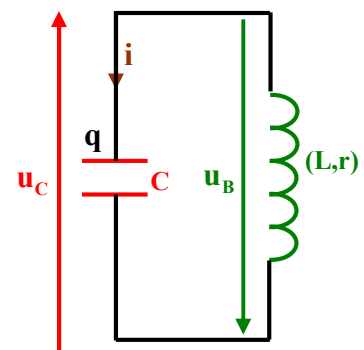
Considérons un circuit (L,C) en régime libre.

Appliquons la loi des mailles au circuit : $u_B + u_C = 0$

$$\left. \begin{array}{l} u_B = -e + r.i = L.\frac{di}{dt} \quad \text{car } r = 0 \\ u_C = \frac{q}{C} \end{array} \right\} \rightarrow L.\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

sachant que $i = \frac{dq}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, on écrit alors : $L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$

il vient alors que : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L.C}.q = 0$



On obtient une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot q = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

Remarque :

Le circuit (L,C) étant isolé et non dissipatif, son énergie totale E se conserve au cours du temps.

$$\left. \begin{array}{l} E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \\ E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \end{array} \right\} \rightarrow E = E_C + E_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

$$\begin{aligned} E \text{ se conserve} \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \quad \forall t &\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2i \cdot \frac{di}{dt} = 0 \quad \forall t \\ &\rightarrow \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

$$\text{sachant que : } \frac{dq}{dt} = i \text{ et } \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}, \text{ il vient que : } i \cdot \left(L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot q \right) = 0 \quad \forall t$$

$$\text{la solution } i = 0 \quad \forall t \text{ est absurde ; donc : } L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot q = 0 \rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L.C} \cdot q = 0$$

on retrouve l'équation différentielle du second ordre de la forme : $\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot q = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$.

2⁰) Charge du condensateur et intensité du courant :

L'équation différentielle $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L.C} \cdot q = 0$ admet comme solution générale :

$$q(t) = Q_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_q)$$

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$: **pulsation propre** de l'oscillateur (en rad.s⁻¹)
- Q_m : **amplitude** de la charge oscillante q(t) (en C).
- $(\omega_0 t + \varphi_q)$: **phase** à l'instant t (en rad).
- φ_q : **phase à l'origine** ou phase initiale de la charge q(t) (en rad)

Remarques :

- ω_0 est une caractéristique propre de l'oscillateur, indépendante de l'état initial du circuit.

$$\rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \mathbf{T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}} : \text{période propre de l'oscillateur (s).}$$

$$\rightarrow N_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow \mathbf{N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}}} : \text{fréquence propre de l'oscillateur (Hz).}$$

Le charge q(t) du condensateur est une fonction sinusoïdale du temps d'amplitude Q_m et de fréquence N_0 .

- Q_m et φ_q sont calculées à partir de l'état initial du circuit :

$$\left. \begin{array}{l} q(0) = q_0 \\ i(0) = i_0 \end{array} \right\} \xrightarrow{i = \frac{dq}{dt}} \begin{cases} q_0 = Q_m \cdot \sin \varphi_q \\ i_0 = \omega_0 \cdot Q_m \cdot \cos \varphi_q \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Q_m = \sqrt{\frac{q_0^2 + \frac{i_0^2}{\omega_0^2}}{\omega_0^2}}} \text{ et } \mathbf{\text{tg}\varphi_q = \frac{\omega_0 \cdot q_0}{i_0}}$$

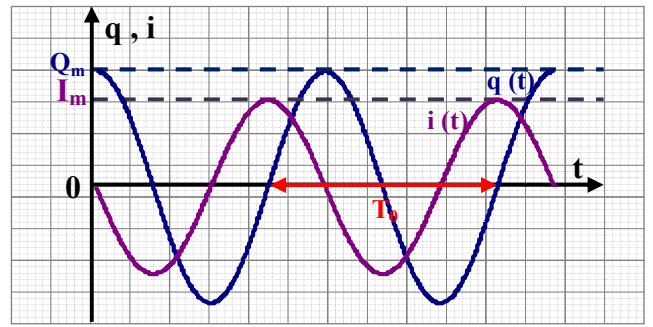
- Soit : $q(t) = Q_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_q)$

on a : $i(t) = \frac{dq}{dt} \rightarrow i(t) = \omega_0 \cdot Q_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_q)$

$$\rightarrow i(t) = \omega_0 \cdot Q_m \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}\right)$$

on pose : $I_m = \omega_0 \cdot Q_m$ et $\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$, il vient alors que :

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_i)$$



La relation $\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$ implique que l'intensité i est en quadrature avance de phase par rapport à la charge q .

3⁰) Aspect énergétique :

Soit $q(t) = Q_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_q) \rightarrow i(t) = \frac{dq}{dt} = \omega_0 \cdot Q_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_q)$

- $E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \omega_0^2 \cdot Q_m^2 \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_q)$ or $\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \rightarrow L \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{C}$ donc : $E_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_q)$

On écrit alors : $E_L = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \cdot [1 + \cos(2\omega_0 \cdot t + 2\varphi_q)]$

L'énergie magnétique E_L est une fonction sinusoïdale du temps de période $T = \frac{T_0}{2}$

- $E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_q)$. On écrit alors : $E_C = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \cdot [1 - \cos(2\omega_0 \cdot t + 2\varphi_q)]$

L'énergie électrique E_C est une fonction sinusoïdale du temps de période $T = \frac{T_0}{2}$

- L'énergie électromagnétique est $E = E_C + E_L$

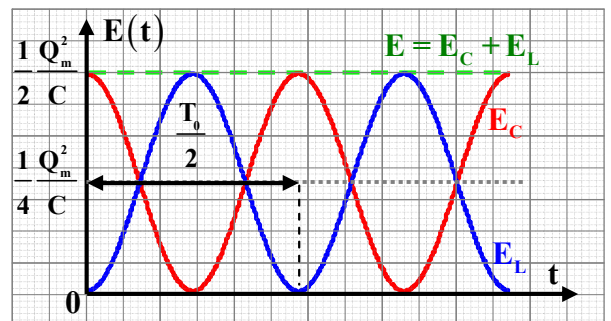
$$\rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C}$$

ou $E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \omega_0^2 \cdot Q_m^2$ et $E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2$

L'énergie électromagnétique E de l'oscillateur se conserve .
On a alors une conversion mutuelle et intégrale de l'énergie magnétique en énergie électrique et inversement.

Pour un même circuit, l'énergie emmagasinée est proportionnelle au carré de la l'amplitude.

Pour une même énergie emmagasinée, les oscillations à hautes fréquences sont de faibles amplitudes.



Remarques :

- $E = E_C + E_L \rightarrow E_L = E - E_C \rightarrow E_L = -\frac{1}{2 \cdot C} \cdot q^2 + E$

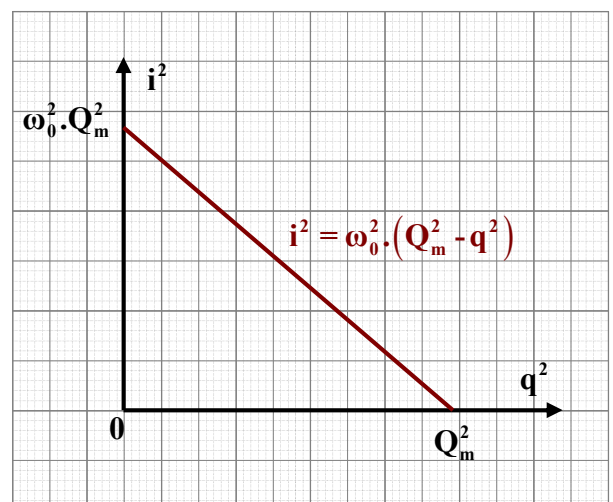
$$\frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = -\frac{1}{2 \cdot C} \cdot q^2 + \frac{Q_m^2}{2 \cdot C} \rightarrow i^2 = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot (q^2 - Q_m^2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \rightarrow i^2 = -\omega_0^2 \cdot (q^2 - Q_m^2)$$

- $E = E_C + E_L \rightarrow E_C = E - E_L \rightarrow E_C = -\frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 + E$

$$\frac{1}{2 \cdot C} \cdot q^2 = -\frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 + \frac{L \cdot I_m^2}{2} \rightarrow q^2 = -L \cdot C \cdot i^2 + L \cdot C \cdot I_m^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \rightarrow q^2 = -\frac{1}{\omega_0^2} \cdot (i^2 - I_m^2)$$



Remarque :

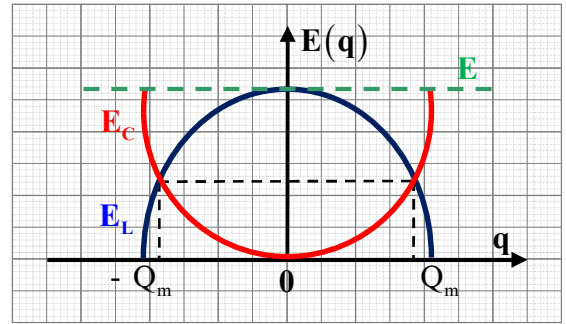
$$q^2 = -\frac{1}{\omega_0^2} \cdot (i^2 - I_m^2) \xrightarrow{I_m = \omega_0 \cdot Q_m} q^2 = -\frac{i^2}{\omega_0^2} + Q_m^2 \rightarrow -\frac{i^2}{\omega_0^2} = (q^2 - Q_m^2) \text{ et } i^2 = -\omega_0^2 \cdot (q^2 - Q_m^2).$$

• Dans le cas où $E_C = E_L \rightarrow E_C = \frac{E}{2}$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q_m^2}{C}$$

$$\rightarrow q^2 = \frac{Q_m^2}{2}$$

donc on a : $E_C = E_L$ pour $q = \pm \frac{Q_m}{\sqrt{2}}$



Application 2 :

Un condensateur, de capacité $C = 0,56 \mu\text{F}$, est initialement chargé sous une tension U_0 .

Il est relié, à l'origine du temps, aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.

On donne l'enregistrement de la tension u_C aux bornes du condensateur.

1⁰) Déterminer graphiquement la valeur de la période T_0 .

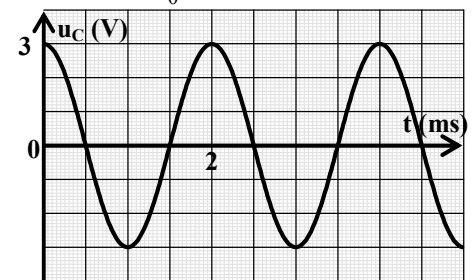
En déduire celle de L .

2⁰) Trouver l'équation horaire de l'intensité du courant $i(t)$ qui parcourt le circuit.

3⁰) a - Donner les expressions des énergies E_C et E_L respectivement emmagasinées par le condensateur et par la bobine.

b - Laquelle de ces deux énergies est nulle à $t = 0$. Justifier.

c - A quelle date l'autre énergie sera t-elle nulle pour la première fois ?



Réponse :

1⁰) Graphiquement : $T_0 = 2 \text{ ms}$.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \longrightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \cdot LC \text{ donc : } L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 \cdot C}. \text{ A.N : } L = \frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi^2 \cdot 0,56 \cdot 10^{-6}} = 0,18 \text{ H}$$

2⁰) * On a : $u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_C})$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 10^3 \pi \text{ rad.s}^{-1}$.

Graphiquement : $\begin{cases} U_{Cm} = 3 \text{ V} \\ u_C(0) = U_{Cm} \rightarrow U_{Cm} \cdot \sin(\varphi_{u_C}) = U_{Cm} \rightarrow \sin(\varphi_{u_C}) = 1 \text{ et } \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$

donc : $u_C(t) = 3 \cdot \sin\left(10^3 \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}.$

* On a : $i(t) = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

$i(t) = C \cdot \omega_0 \cdot U_{Cm} \cdot \sin\left(\omega_0 t + \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow i(t) = I_m \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$

$\begin{cases} I_m = C \cdot \omega_0 \cdot U_{Cm} = 0,56 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \pi \cdot 3 = 2,45 \cdot 10^{-3} \text{ A} \end{cases}$

$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ rad} \end{cases}$

donc : $i(t) = 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(10^3 \pi \cdot t + \pi) \text{ A}.$

3⁰) a - * Aux bornes du condensateur : $E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2$

***** Aux bornes de la bobine : $E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$

b - $i(0) = 0 \rightarrow E_L(0) = 0$

$E_C(t) = 0 \rightarrow u_C(t) = 0 \rightarrow \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow \omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{2} = K \cdot \pi$

$\rightarrow \frac{2\pi}{T_0} t + \frac{\pi}{2} = K \cdot \pi \quad \text{et} \quad t = (2K - 1) \frac{T_0}{4}, K \in \mathbb{N}^*$

E_C sera nulle pour la première fois à l'instant $t = \frac{T_0}{4}$.

Pour en savoir plus

1⁰) Etude analytique des régimes amortis :

a - Mise en équation :

• Considérons un circuit (R,L,C) en régime libre amorti. La forme canonique de l'équation différentielle qui gère l'évolution de la charge $q(t)$ du condensateur au cours du temps est : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L.C} \cdot q = 0$.

On pose $\frac{R}{L} = 2\alpha\omega_0$ et $\frac{1}{L.C} = \omega_0^2$, on écrit alors : $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 \cdot q = 0$

ω_0 est appelée pulsation propre du circuit. (en rad.s^{-1})

α est appelé coefficient réduit d'amortissement. (sans dimension)

On définit les grandeurs suivantes :

* $\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{2\alpha\omega_0}$ est appelé temps de relaxation du circuit (où durée caractéristique). (en s)

Remarque : τ correspond à la constante de temps du dipôle RL associé au circuit (R,L,C).

* $Q = \tau\omega_0 = \frac{1}{2\alpha}$ est appelé facteur de qualité du circuit. (sans dimension)

• Soit $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$, la tension aux bornes du condensateur. On écrit alors : $\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \cdot \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 \cdot u_C = 0$.

On cherche la solution de cette équation différentielle sous la forme : $u_C(t) = y(t) \cdot e^{-\alpha\omega_0 \cdot t}$

$$\frac{du_C}{dt} = y'(t) \cdot e^{-\alpha\omega_0 \cdot t} - \alpha\omega_0 \cdot y(t) \cdot e^{-\alpha\omega_0 \cdot t} \quad \text{et} \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} = y''(t) \cdot e^{-\alpha\omega_0 \cdot t} - 2\alpha\omega_0 \cdot y'(t) \cdot e^{-\alpha\omega_0 \cdot t} + \alpha^2\omega_0^2 \cdot y(t) \cdot e^{-\alpha\omega_0 \cdot t}$$

$$\rightarrow [y''(t) - 2\alpha\omega_0 \cdot y'(t) + \alpha^2\omega_0^2 \cdot y(t) + 2\alpha\omega_0 \cdot y'(t) - 2\alpha^2\omega_0^2 \cdot y(t) + \omega_0^2 \cdot y(t)] \cdot e^{-\alpha\omega_0 \cdot t} = 0$$

$$\rightarrow [y''(t) + \omega_0^2 [1 - \alpha^2] \cdot y(t)] \cdot e^{-\alpha\omega_0 \cdot t} = 0 \xrightarrow{e^{-\alpha\omega_0 \cdot t} \neq 0} y''(t) + \omega_0^2 [1 - \alpha^2] \cdot y(t) = 0$$

b - Les régimes amortis :

• Cas où $\alpha < 1$ ($Q > \frac{1}{2}$) :

On pose : $\omega^2 = \omega_0^2 [1 - \alpha^2] > 0 \rightarrow y''(t) + \omega^2 \cdot y(t) = 0$ de solution : $y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

Il vient alors que : $u_C(t) = A \cdot e^{-\alpha\omega_0 \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ où $u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$.

Ce régime est appelé **régime pseudo périodique** de pseudo période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ou $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}}$

Remarques :

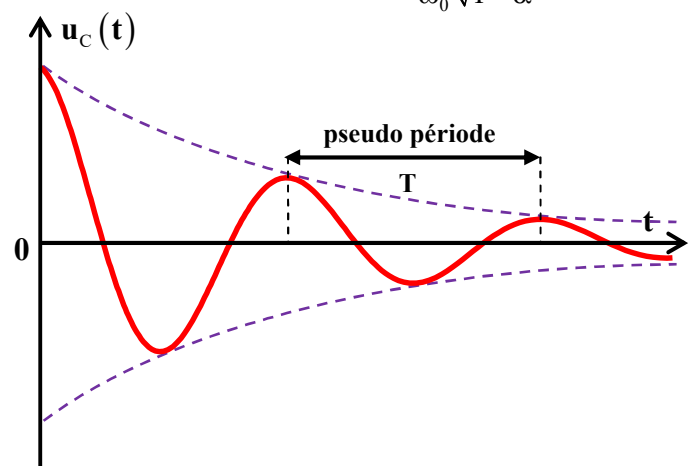
* Soit : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ période propre du circuit

$$\rightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \alpha^2}} > T_0 \quad (\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \alpha^2} < \omega_0)$$

$$* \text{ On a : } \alpha^2 = \frac{1}{4\tau^2\omega_0^2} = \frac{1}{4.Q^2} = \frac{R^2.C}{4.L}$$

$$\rightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4.Q^2}}} \quad \text{ou} \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2.C}{4.L}}}$$

$$\frac{R^2.C}{4.L} < 1 \rightarrow R < 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \text{ On définit alors la résistance critique du circuit par } R_c = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}.$$



* On définit le décrement logarithmique par : $\delta = \ln \left(\frac{u_c(t)}{u_c(t+T)} \right)$

$$\left. \begin{aligned} u_c(t) &= A.e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \\ u_c(t+T) &= A.e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{-\frac{T}{2\tau}} \cdot \cos(\omega(t+T) + \varphi) = e^{-\frac{T}{2\tau}} \cdot A.e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = e^{-\frac{T}{2\tau}} \cdot u_c(t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{u_c(t)}{u_c(t+T)} = e^{\frac{T}{2\tau}}$$

$\rightarrow \delta = \ln \left(e^{\frac{T}{2\tau}} \right)$ et $\delta = \frac{T}{2\tau}$ ou $\delta = \alpha \omega_0 \cdot T$. δ caractérise la décroissance de l'amplitude.

* L'amplitude $U_c(t) = A.e^{-\frac{t}{2\tau}}$ des oscillations diminue continuellement au cours du temps jusqu'à s'annuler.

* Les valeurs de A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$\left. \begin{aligned} u_c(0) &= U_0 \\ i(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \tan \varphi = -\frac{1}{2\tau \cdot \omega} \quad \text{et} \quad A = \frac{U_0}{\cos \varphi}$$

* La figure ci-contre donne l'évolution de $u_c(t)$ et $u_{R_0}(t)$ en fonction du temps :

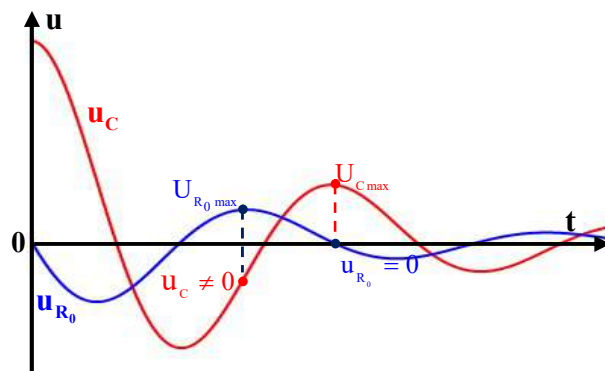
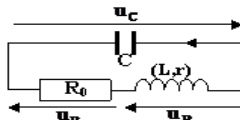
- Lorsque $u_c(t) = U_{C \max} \xrightarrow{i=C \cdot \left(\frac{du_c}{dt} \right)} i(t) = 0$
 $\xrightarrow{u_{R_0}=R_0 \cdot i} u_{R_0}(t) = 0$

- Lorsque $u_{R_0}(t) = U_{R_0 \max} \xrightarrow{u_{R_0}=R_0 \cdot i} i(t) = I_{\max}$

D'après la loi des mailles,

$$u_c = -(u_B + u_{R_0})$$

$$\xrightarrow[u_{R_0}=R_0 \cdot i]{u_B = L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) + r \cdot i} u_c(t) = -(R_0 + r) \cdot I_m \neq 0$$



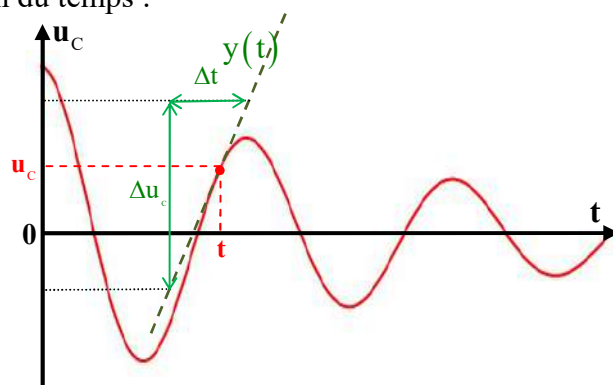
* La figure ci-contre donne l'évolution de $u_c(t)$ en fonction du temps :

$$\text{On a : } i(t) = C \cdot \left(\frac{du_c}{dt} \right)_t$$

Soit $y(t)$ la tangente à la courbe $u_c = f(t)$ à l'instant t .

Graphiquement, la valeur de $\left(\frac{du_c}{dt} \right)_t$ est égale à la pente de la tangente $y(t)$.

$$\text{Soit } P = \left(\frac{\Delta u_c}{\Delta t} \right) \text{ la pente de } y(t) \rightarrow i(t) = C \cdot P$$



* Soit E l'énergie électromagnétique emmagasinée par le circuit (R,L,C) :

$$E = E_C + E_L \xrightarrow[E_C = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2]{E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}} E = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

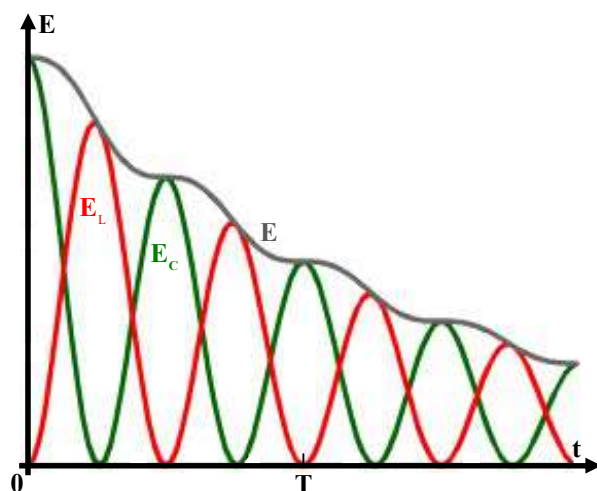
Pour le circuit (R,L,C) et en régime libre: $L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{q}{C} = 0$

$$\left[L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = -R \cdot i \right] \cdot i \xrightarrow{i = \frac{dq}{dt}} \left[\frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} \right] = -R \cdot i^2$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \right] = -R \cdot i^2 \quad \text{et} \quad \frac{dE}{dt} = -R \cdot i^2 < 0$$

Le terme $R \cdot i^2$ représente la puissance électrique dissipée par effet Joule dans les résistances du circuit.

L'énergie totale E du circuit décroît donc au cours du temps.



Remarque : Graphiquement la courbe $E = f(t)$ présente des paliers qui correspondent à $E_C(t) = E_{C_{\max}}$.

En effet et sachant que : $\frac{dE}{dt} = \left[\frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} \right] \xrightarrow{i = \frac{dq}{dt}} \frac{dE}{dt} = \left[\frac{q}{C} \cdot i + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} \right]$ et $\frac{dE}{dt} = i \cdot \left[\frac{q}{C} + L \cdot \frac{di}{dt} \right]$

- Lorsque $E_C = E_{C_{\max}} \rightarrow q = Q_{\max} \xrightarrow{i = \frac{dq}{dt}} i = 0$ donc $\frac{dE}{dt} = 0$.

la courbe $E = f(t)$ présente alors une tangente horizontale.

- Lorsque $E_L = E_{L_{\max}} \rightarrow i = I_{\max} \rightarrow \frac{di}{dt} = 0$ donc $\frac{dE}{dt} = I_m \cdot \frac{q}{C}$ ou $\frac{dE}{dt} = I_m \cdot u_C$.

Or si $i = I_{\max} \rightarrow u_C = -R \cdot I_m$. On en déduit que $\frac{dE}{dt} = I_m \cdot u_C < 0$

la courbe $E = f(t)$ présente alors une tangente oblique de pente négative.

• **Cas où $\alpha > 1$ $\left(Q < \frac{1}{2} \right)$:**

On écrit : $y''(t) - \omega_0^2 [\alpha^2 - 1] \cdot y(t) = 0 \rightarrow y''(t) = \omega_0^2 [\alpha^2 - 1] \cdot y(t)$ avec $\omega_0^2 [\alpha^2 - 1] > 0$

Une équation de la forme : $y''(t) = K^2 \cdot y(t)$ admet deux solutions particulières $\begin{cases} y_1(t) = A \cdot e^{-K \cdot t} \\ y_2(t) = B \cdot e^{K \cdot t} \end{cases}$

La solution générale sera alors : $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$. On en déduit que : $y(t) = A \cdot e^{-\omega_0 \sqrt{\alpha^2 - 1} \cdot t} + B \cdot e^{\omega_0 \sqrt{\alpha^2 - 1} \cdot t}$

$u_C(t) = y(t) \cdot e^{-\alpha \omega_0 \cdot t} \rightarrow u_C(t) = \left(A \cdot e^{-\omega_0 \sqrt{\alpha^2 - 1} \cdot t} + B \cdot e^{\omega_0 \sqrt{\alpha^2 - 1} \cdot t} \right) \cdot e^{-\alpha \omega_0 \cdot t} \rightarrow \mathbf{u_C(t) = A \cdot e^{-\omega_0(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \cdot t} + B \cdot e^{-\omega_0(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}) \cdot t}}$

Ce régime est appelé **régime apériodique**.

Remarques :

* Il n'y a plus d'oscillations et la tension $u_C(t)$ décroît continuellement jusqu'à s'annuler. La décharge du condensateur est alors monotone.

* $\left[-\omega_0(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \right] \cdot \left[-\omega_0(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}) \right] = \omega_0^2$.

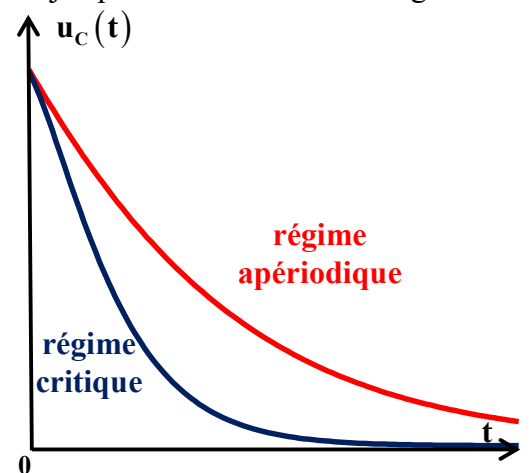
• **Cas où $\alpha = 1$ $\left(Q = \frac{1}{2} \right)$:**

On écrit : $y''(t) = 0 \rightarrow y(t) = A + B \cdot t$

Il vient alors que : $\mathbf{u_C(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 \cdot t}}$.

Ce régime est appelé **régime critique**.

Le régime critique est un régime apériodique particulier où la décharge du condensateur est la plus rapide.



c - Utilisation de l'équation caractéristique :

Soit l'équation différentielle : $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \cdot \omega_0 \cdot \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 \cdot u_C = 0$.

En posant $u_C(t) = U \cdot e^{x \cdot t} \rightarrow \frac{du_C}{dt} = x \cdot U \cdot e^{x \cdot t}$ et $\frac{d^2 u_C}{dt^2} = x^2 \cdot U \cdot e^{x \cdot t}$, l'équation différentielle s'écrit :

$x^2 \cdot U \cdot e^{x \cdot t} + 2\alpha \cdot \omega_0 \cdot x \cdot U \cdot e^{x \cdot t} + \omega_0^2 \cdot U \cdot e^{x \cdot t} = 0 \xrightarrow[\text{est une solution absurde}]{U \cdot e^{x \cdot t} = 0 \forall t} x^2 + 2\alpha \cdot \omega_0 \cdot x + \omega_0^2 = 0$

L'équation : $x^2 + 2\alpha \cdot \omega_0 \cdot x + \omega_0^2 = 0$ est appelée équation caractéristique associée à l'équation différentielle.

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique : $\Delta = 4\alpha^2 \cdot \omega_0^2 - 4\omega_0^2$ et $\Delta = 4\omega_0^2 (\alpha^2 - 1)$

Suivant la valeur de Δ , on distingue trois types de solutions (donc trois régimes libres amortis possibles) :

$\Delta > 0 \quad (\alpha > 1)$ Régime aperiodique	$\Delta = 4.\omega_0^2 (\alpha^2 - 1) > 0$ Deux racines réelles : $x_{1,2} = \frac{-2.\alpha.\omega_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donc : $x_1 = -\omega_0.(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}) < 0$ $x_2 = -\omega_0.(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) < 0$	$u_C(t) = A.e^{x_1.t} + B.e^{x_2.t}$ On écrit alors : $u_C(t) = A.e^{-\omega_0(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}).t} + B.e^{-\omega_0(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}).t}$
$\Delta = 0 \quad (\alpha = 1)$ Régime critique	Racine double : $x = -\omega_0$	On écrit alors : $u_C(t) = (A + B.t).e^{-\omega_0.t}$
$\Delta < 0 \quad (\alpha < 1)$ Régime pseudo périodique	$\Delta = j^2.4.\omega_0^2 (1 - \alpha^2) < 0, j^2 = -1$ Deux racines complexes : $x_{1,2} = \frac{-2.\alpha.\omega_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donc : $x_1 = -\omega_0.(\alpha - j.\sqrt{1 - \alpha^2})$ $x_2 = -\omega_0.(\alpha + j.\sqrt{1 - \alpha^2})$	$u_C(t) = A.e^{x_1.t} + B.e^{x_2.t}$ Remarque : $x_{1,2} = a \pm j.b$ $\rightarrow u_C(t) = A.e^{a.t}.\cos(b .t + \varphi)$ On écrit alors : $u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{2\tau}}.\cos(\omega.t + \varphi)$ avec : $\alpha.\omega_0 = \frac{1}{2\tau}$ et $\omega = \omega_0.\sqrt{1 - \alpha^2}$

2⁰) Les oscillations électriques en régime libre non amorti :

a - Entretien des oscillations :

Dans le circuit (R,L,C) en régime libre, l'amortissement des oscillations est provoqué par la dissipation de l'énergie par effet Joule dans les résistances.

Pour entretenir les oscillations, de sorte qu'elles soient permanentes non amorties, il faut compenser, à l'aide d'une source de tension G branchée en série dans le circuit, l'énergie perdue par effet Joule à chaque instant.

Pour un circuit (R,L,C) en régime libre, on a : $\frac{dE}{dt} = -R.i^2$, $p_{th} = R.i^2$ est la puissance dissipée par effet Joule.

La source G doit apporter une puissance électrique au circuit telle que : $p_G + p_{th} = 0$

$$p_G + p_{th} = 0 \rightarrow p_G = -p_{th} \xrightarrow{p_G = u_G.i} u_G.i = -R.i^2 \text{ et } u_G = -R.i.$$

b - Le montage à résistance négative :

L'entretien des oscillations électriques est obtenu en réalisant le montage à résistance négative :

* L'amplificateur opérationnel est idéal : $i^+ = 0$ et $i^- = 0$.

L'amplificateur opérationnel est en régime linéaire : $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$.

$$u_G = R.i' - \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon=0} u_G = R.i'.$$

$$u_G = R.i' + R_1.i' + R_1.i \xrightarrow{u_G = R.i'} R_1.(i' + i) = 0 \rightarrow i' = -i$$

Il vient alors que : $u_G = -R.i$.

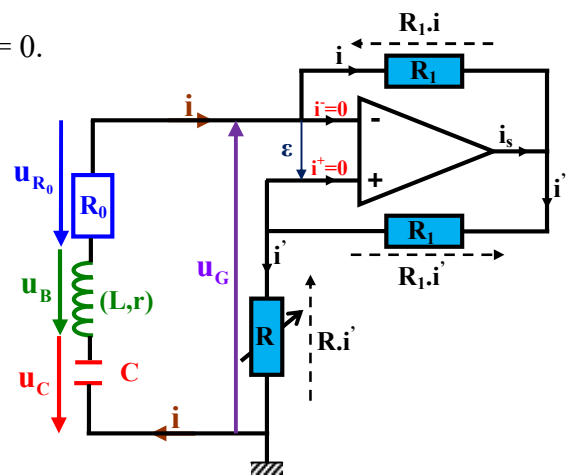
$$\text{Remarque : } i_s + i = i' \xrightarrow{i' = -i} i_s = -2i.$$

* La loi des mailles s'écrit : $u_{R_0} + u_B + u_C + u_G = 0$

$$\rightarrow R_0.i + L.\left(\frac{di}{dt}\right) + r.i + u_C - R.i = 0$$

$$\rightarrow L.\left(\frac{di}{dt}\right) + [(R_0 + r) - R].i + u_C = 0$$

$$\text{Si } R = (R_0 + r) \rightarrow L.\left(\frac{di}{dt}\right) + u_C = 0 \xrightarrow{i = \left(\frac{du_C}{dt}\right)} L.C.\left(\frac{d^2u_C}{dt^2}\right) + u_C = 0 \text{ ou } \left(\frac{d^2u_C}{dt^2}\right) + \frac{1}{L.C}.u_C = 0.$$

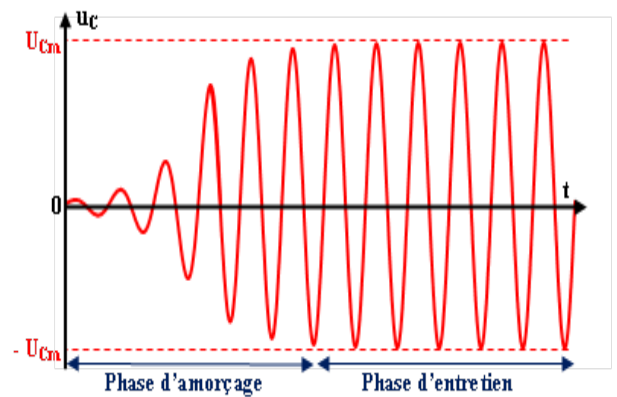


C'est une équation différentielle de la forme :

$$\left(\frac{d^2 u_c}{dt^2}\right) + \omega_0^2 \cdot u_c = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \quad \text{dont la solution}$$

générale est sinusoïdale du type : $u_c(t) = U_{cm} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_{u_c})$.

Un réglage judicieux du montage pour lequel $R = (R_0 + r)$, résistance totale du circuit, le circuit se comporte comme si les résistances sont annulées. Il effectue donc des oscillations non amorties.



Remarque :

L'oscillateur électrique harmonique (L,C) est fictif car les résistances sont en réalité inévitables.

Pour un circuit (R,L,C) en régime libre et lorsque R est très petite, l'amortissement est faible et l'amplitude des premières oscillations reste pratiquement constante avec une pseudo période T pratiquement égale à la période propre T_0 du circuit.

Applications

Exercice 1 :

Un condensateur de capacité $C = 0,1 \mu\text{F}$ est initialement chargé sous une tension U_0 . Il est branché, à $t = 0$, aux bornes d'une portion de circuit série comportant une bobine d'inductance L inconnue et de résistance interne $r = 10 \Omega$ et un résistor de résistance R_0 variable.

La figure 1 donne les variations au cours du temps de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur lorsque $R_0 = 600 \Omega$.

1⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur de U_0 .

b - Calculer la valeur de l'énergie électrostatique $E_C(0)$ initialement emmagasinée par le condensateur.

2⁰) Etablir l'équation différentielle qui gère l'évolution de la tension $u_C(t)$ au cours du temps.

3⁰) a - Déterminer graphiquement la pseudo période T des oscillations électriques.

b - En négligeant la différence entre la pseudo période T et la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ des oscillations électriques, calculer la valeur de l'inductance L de la bobine utilisée.

4⁰) La figure 2 donne les variations de l'énergie électrique E_C emmagasinée par le condensateur et celles de l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine.

a - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à l'énergie qu'elle représente.

b - Montrer que l'énergie électromagnétique $E = E_C + E_L$ emmagasinée par le circuit décroît au cours du temps.

c - D'après la figure 2, déterminer l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule à l'instant $t = 2 \text{ ms}$.

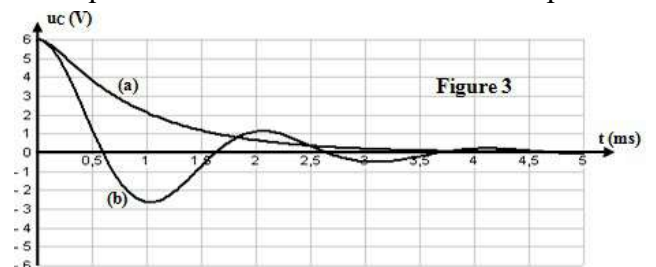
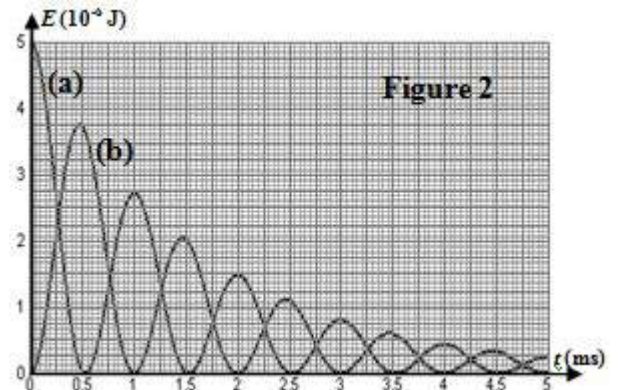
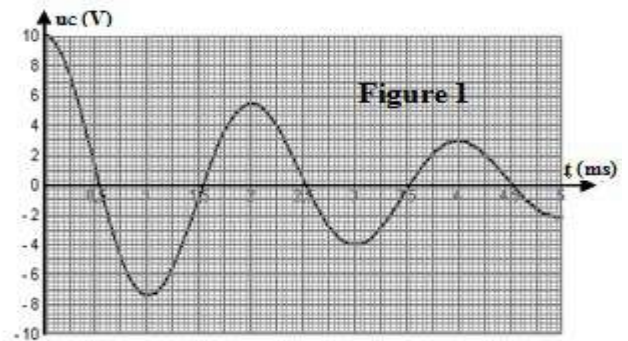
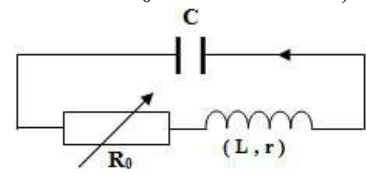
d - Calculer la valeur de E_{th} en exploitant la figure 1.

5⁰) On fait varier la valeur de la résistance R_0 et on enregistre chaque fois la variation au cours du temps de la tension u_C aux bornes du condensateur.

Les deux courbes de la figure 3 ci-dessous correspondent à $R_0 = 1600 \Omega$ et $R_0 = 9600 \Omega$.

a - Préciser le nom du régime amorti correspondant à chacune des courbes (a) et (b).

b - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à la valeur de la résistance R_0 correspondante.



Réponse :

1⁰) a - Graphiquement : $U_0 = 10 \text{ V}$.

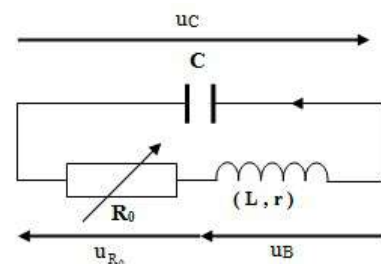
b - $E_C(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$. A.N : $E_C = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2$ et $E_C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$

2⁰) La loi des mailles s'écrit : $u_B + u_{R_0} + u_C = 0$

$$\begin{cases} u_B = L \frac{di}{dt} + ri \\ u_{R_0} = R_0 i \end{cases} \rightarrow L \frac{di}{dt} + (R_0 + r)i + u_C = 0$$

$$\text{On a : } i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i = C \frac{du_C}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2},$$

$$\text{il vient alors que : } LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R_0 + r)C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$



ou bien : $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{(R_0 + r)}{L} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

3⁰) a - Graphiquement : la pseudo période est $T = 2.10^{-3}$ s

b - $T = T_0 \rightarrow T_0 = 2.10^{-3}$ s. Or $T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 LC$ et $L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}$

A.N : $L = \frac{(2.10^{-3})^2}{4\pi^2 0,1.10^{-6}}$ et $L = 1$ H

4⁰) a - $\begin{cases} u_C(0) = U_0 \rightarrow E_C(0) = E_{C\max} \rightarrow \text{la courbe (a) représente } E_C \\ i(0) = 0 \rightarrow E_L(0) = 0 \rightarrow \text{la courbe (b) représente } E_L \end{cases}$

b - $E = E_C + E_L = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} C.2u_C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} L.2i \frac{di}{dt} = C.u_C \frac{du_C}{dt} + L.i \frac{di}{dt}$

Or on a : $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C.u_C} i = C \frac{du_C}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2}$,

on écrit alors : $\frac{dE}{dt} = u_C.i + L.i.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} = i \left(LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \right)$

Or d'après l'équation différentielle : $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = -(R_0 + r)C \frac{du_C}{dt} = -(R_0 + r)i$, il vient alors que :

$\frac{dE}{dt} = i[-(R_0 + r)i] = -(R_0 + r)i^2 < 0$

L'énergie électromagnétique E emmagasinée par le circuit décroît au cours du temps.

c - D'après la figure 2 :

$E_{th} = E(0) - E(T) = [E_C(0) + E_L(0)] - [E_C(T) + E_L(T)] = E_C(0) - E_C(T)$

A.N : $E_{th} = 5.10^{-6} - 1,5.10^{-6}$ et $E_{th} = 3,5.10^{-6}$ J

d - D'après la figure 1 :

$E_{th} = E_C(0) - E_C(T) = \frac{1}{2} C [u_C^2(0) - u_C^2(T)]$

A.N : $E_{th} = \frac{1}{2} . 0,1.10^{-6} [(10)^2 - (5,5)^2]$ et $E_{th} = 3,49.10^{-6}$ J

5⁰) a - La courbe (a) : La décharge est monotone décroissante

$\rightarrow$ le régime amorti est apériodique.

La courbe (b) : La décharge est oscillante avec une amplitude qui décroît au cours du temps

$\rightarrow$ le régime amorti est pseudopériodique.

b - Lorsque la valeur de R_0 augmente, l'amortissement devient de plus en plus important.

L'amortissement est plus important dans la courbe (a) que dans la courbe (b) $\rightarrow R_0(a) > R_0(b)$

donc : la courbe (a) correspond à $R_0 = 9600 \Omega$

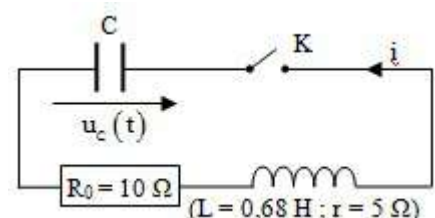
la courbe (b) correspond à $R_0 = 1600 \Omega$

Exercice 2 :

On considère le circuit électrique schématisé ci-contre :

Le condensateur est initialement chargé sous une tension U_0 .

A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et on enregistre les variations de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur au cours du temps.



On obtient le graphe ci-contre :

1⁰) a - Déterminer la valeur de la tension U_0 .

b - Quelle est, à $t = 0$, la valeur de l'intensité du courant électrique.

c - Préciser le signe de l'intensité du courant $i(t)$ juste après la fermeture du circuit.

d - A partir du graphe, déterminer la valeur de la pseudo-période T des oscillations.

En considérant que la valeur de T est très proche de celle de la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$ du circuit, calculer la valeur de la capacité C du condensateur.

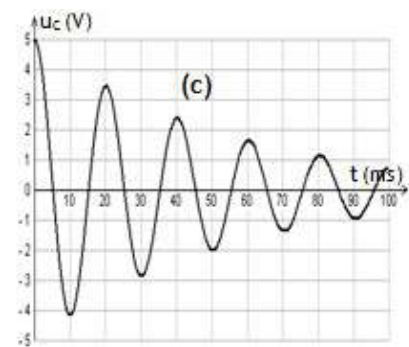
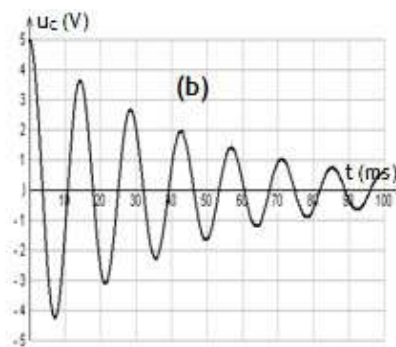
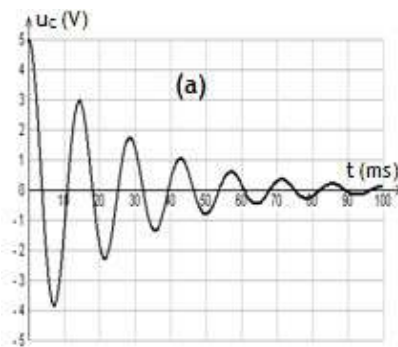
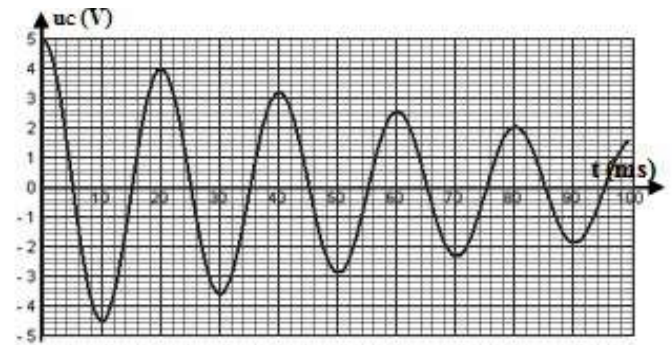
2⁰) a - Quelle est la valeur de l'énergie électrostatique $E_C(0)$ initialement stockée par le condensateur ?

En déduire la valeur initiale $E(0)$ de l'énergie électromagnétique emmagasinée par le circuit.

b - Déterminer la valeur $E(3T)$ de l'énergie électromagnétique encore emmagasinée par le circuit après trois oscillations.

c - Calculer la valeur E_{th} de l'énergie perdue par l'oscillateur après trois oscillations. A quoi est due cette perte d'énergie ? Sous quelle forme se manifeste-t-elle ?

3⁰) On modifie le circuit électrique en changeant soit la valeur de R_0 , soit celle de L , soit les deux en même temps. On enregistre chaque fois les variations de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur au cours du temps. On obtient les trois graphes (a), (b) et (c) ci-dessous :



On admettra que dans tous les cas, la pseudo-période reste sensiblement égale à la période propre.

a - Quel est le graphe qui correspond à la modification de R_0 ? la nouvelle valeur R'_0 est-elle plus grande ou plus petite ? Justifier la réponse.

b - En exploitant les deux autres graphes, déduire si la nouvelle valeur L' est plus grande ou plus petite ?

c - Quel est alors le graphe qui correspond à l'utilisation des valeurs R'_0 et L' ? Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰) a - $U_0 = u_C(0) = 5 \text{ V}$

b - A $t = 0$, $i(0) = 0$

c - Juste après la fermeture du circuit, u_C décroît $\xrightarrow{i=C \cdot \frac{du_C}{dt}}$ $i < 0$.

d - Graphiquement : $T = 20 \text{ ms}$.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L.C} \rightarrow T_0^2 = 4\pi^2.L.C \rightarrow C = \frac{T_0^2}{4\pi^2.L}$$

$$\text{or } T \approx T_0 \xrightarrow{\text{A.N}} C = \frac{(20 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi^2 \cdot 0,68} \text{ et } C = 14,9 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$\mathbf{2^0) a} - E_C(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (u_C(0))^2 \quad \text{A.N: } E_C(0) = \frac{1}{2} \cdot 14,9 \cdot 10^{-6} \cdot 5^2 \text{ et } E_C(0) = 186,25 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$E(0) = E_C(0) + E_L(0) \xrightarrow[\text{car } i(0)=0]{E_L(0)=0} E(0) = E_C(0) \text{ et } E(0) = 186,25 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

b - A $t = 3T$, $u_C(3T) = 2,6 \text{ V}$ est un maximum $\rightarrow E(3T) = E_C(3T) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (u_C(3T))^2$

A.N : $E(3T) = \frac{1}{2} \cdot 14,9 \cdot 10^{-6} \cdot (2,6)^2$ et $E(3T) = 50,36 \cdot 10^{-6} \text{ J}$

c - $E_{th} = -\Delta E = E(0) - E(3T)$

A.N : $E_{th} = (186,25 - 50,36) \cdot 10^{-6}$ et $E_{th} = 135,89 \cdot 10^{-6} \text{ J}$

Cette perte d'énergie est due à l'effet Joules aux bornes des résistances. Elle se manifeste sous forme thermique.

3⁰) a - Pour les faibles amortissements, si on change R_0 , l'amortissement change mais $T \simeq T_0$

$\rightarrow$ graphe (c).

Sur le graphe (c), l'amortissement a augmenté $\rightarrow R'_0 > R_0$.

b - Sur les graphes (a) et (b), $T' \simeq T_0 = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$

or $T' < T \rightarrow L' < L$.

c - $R'_0 > R_0 \rightarrow$ l'amortissement est plus grand dans le circuit (R'_0, L', C) que dans le circuit (R_0, L', C) .

Les oscillations du graphe (a) sont plus amorties que celles du graphe (b)

$\rightarrow$ le graphe (a) correspond au circuit (R'_0, L', C) .

Exercice 3 :

1⁰) Le circuit électrique série ci-contre est constitué par un condensateur de capacité C préalablement chargé, un interrupteur K et une bobine purement inductive d'inductance L (et de résistance interne supposée nulle).

a - A $t = 0$, on ferme K .

Montrer que l'équation différentielle que satisfait la tension u_C aux bornes du condensateur s'écrit :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

b - En déduire la nature des oscillations électriques dans ce circuit.

c - La solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$u_C(t) = U_{C_{\max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_{u_C}\right)$$

On donne ci-contre les variations de la tension $u_C(t)$ au cours du temps. Déterminer les valeurs de :

* la tension maximale $U_{C_{\max}}$ aux bornes du condensateur.

* la pulsation propre ω_0 du circuit oscillant considéré.

* La phase à l'origine φ_{u_C} de la tension $u_C(t)$.

2⁰) a - Soit i l'intensité du courant qui circule dans le circuit. Exprimer l'énergie électromagnétique E emmagasinée par le circuit en fonction de C , u_C , L et i .

b - Montrer que E se conserve au cours du temps.

c - Donner alors l'expression de E en fonction de C et $U_{C_{\max}}$.

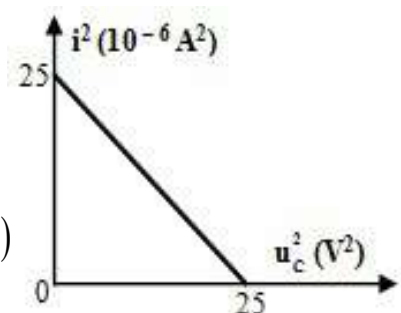
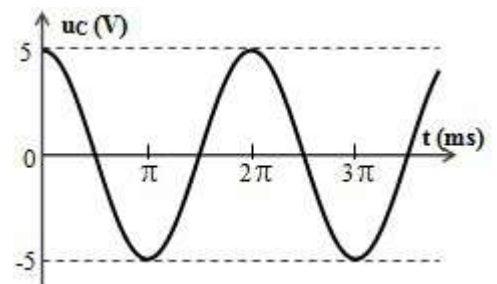
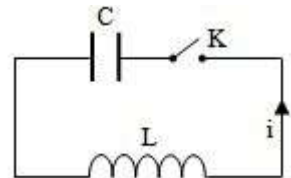
3⁰) a - En utilisant la conservation de l'énergie électromagnétique, montrer qu'on a :

$$i^2 = \frac{C}{L} (U_{C_{\max}}^2 - u_C^2)$$

b - Le graphe ci-contre traduit les variations de i^2 en fonction de u_C^2 :

Trouver graphiquement l'expression numérique de la fonction $i^2 = f(u_C^2)$

c - Déterminer alors les valeurs de la capacité C et de l'inductance L .



Réponse :

1⁰) a - D'après la loi des mailles : $u_C + u_L = 0 \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + u_C = 0$

$$i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

On écrit alors :

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0 \text{ ou bien } \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{L \cdot C} u_C = 0 \text{ et enfin } \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot u_C = 0 \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

b - On assiste à des oscillations électriques libres non amorties.

c - * $U_{C\max} = 5 \text{ V}$.

$$* T_0 = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ s or } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 10^{-3}} \text{ et } \omega_0 = 1000 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$* u_C(0) = U_{C\max} \sin \varphi_{u_C} = U_{C\max} \rightarrow \sin \varphi_{u_C} = 1 \text{ et } \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2}.$$

$$2^0) \text{ a - } E = E_C + E_L \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

$$\text{b - } \frac{dE}{dt} = C \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = C \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} = C \cdot \frac{du_C}{dt} \left(u_C + L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} \right) = 0 \text{ d'après l'éq.diff.}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow E \text{ se conserve.}$$

$$\text{c - } E = E(0) = E_C(0) + E_L(0) = E_C(0) \text{ car } i(0) = 0 \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{C\max}^2.$$

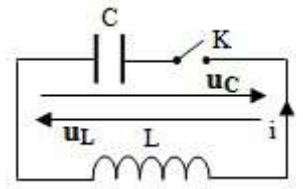
$$3^0) \text{ a - } E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{C\max}^2 \rightarrow L \cdot i^2 = C \cdot [U_{C\max}^2 - u_C^2] \text{ et } i^2 = \frac{C}{L} \cdot [U_{C\max}^2 - u_C^2]$$

$$\text{b - } i^2 = f(u_C^2) \text{ est une fonction affine } \rightarrow i^2 = A \cdot u_C^2 + B$$

$$\left| \begin{array}{l} A = \frac{25 \cdot 10^{-6} - 0}{0 - 25} = -10^{-6} \rightarrow i^2 = -10^{-6} \cdot u_C^2 + 25 \cdot 10^{-6} \\ B = 25 \cdot 10^{-6} \end{array} \right.$$

$$\text{c - Par identification : } \frac{C}{L} = 10^{-6} \text{ or } \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} = 10^6 \rightarrow \omega_0^2 \cdot \frac{C}{L} = \frac{1}{L^2} \text{ donc } \frac{1}{L^2} = 10^6 \cdot 10^{-6} = 1 \text{ et } L = 1 \text{ H}$$

$$C = 10^{-6} \cdot L \rightarrow C = 10^{-6} \cdot 1 = 10^{-6} \text{ F ou } C = 1 \mu\text{F}.$$



Exercice 4 :

On réalise le circuit électrique correspondant au schéma ci-contre :

Le condensateur, de capacité $C = 2 \mu\text{F}$, est préalablement chargé à l'aide d'un générateur de tension idéal de f.é.m $E = 10 \text{ V}$ (K est en position 1).

A la date $t = 0$, on bascule K en position 2, le condensateur se décharge à travers une portion de circuit série comportant une bobine d'inductance L et de résistance interne r , et un résistor de résistance $R_0 = 70 \Omega$.

Un système d'acquisition permet de suivre l'évolution au cours du temps de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

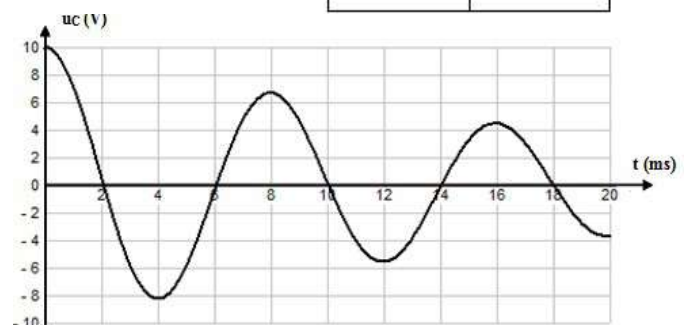
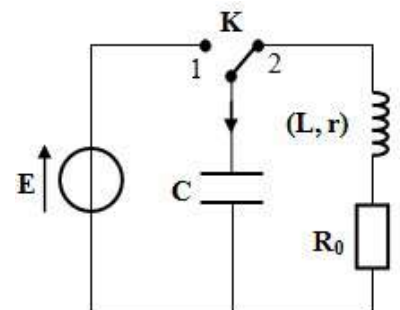
L'enregistrement débute à la date $t = 0$.

On obtient la courbe ci-dessous :

1⁰) a - Comment appelle-t-on ce type d'oscillations?

b - Par quoi peut-on expliquer la diminution de l'amplitude des oscillations?

c - Déterminer graphiquement la valeur de la pseudo-période T des oscillations.



d - Calculer la valeur de l'énergie électrostatique $E_C(0)$ emmagasinée par le condensateur à la date $t = 0$.

2⁰) Sur l'intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ et en exploitant la courbe $u_C = f(t)$:

a - Quel est le signe de l'intensité du courant ? Justifier la réponse

b - Calculer la valeur de l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule dans le circuit.

3⁰) a - Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension u_C au cours du temps.

b - Sachant que cette équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 100 \frac{du_C}{dt} + 6,25 \cdot 10^5 u_C = 0$$

Déterminer les valeurs de l'inductance L et de la résistance interne r de la bobine.

4⁰) Pour entretenir les oscillations, on utilise un dispositif approprié qui annule les effets des résistances.

Le circuit se comporte alors comme si la somme des résistances est nulle.

a - Donner l'expression de l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension u_C au cours du temps.

b - La période propre du circuit s'exprime par : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, calculer sa valeur. Comparer T_0 et T .

c - L'évolution au cours du temps de l'intensité du courant $i(t)$ qui circule dans le circuit est donnée par la courbe ci-contre :

En exprimant l'intensité du courant par :

$$i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$$

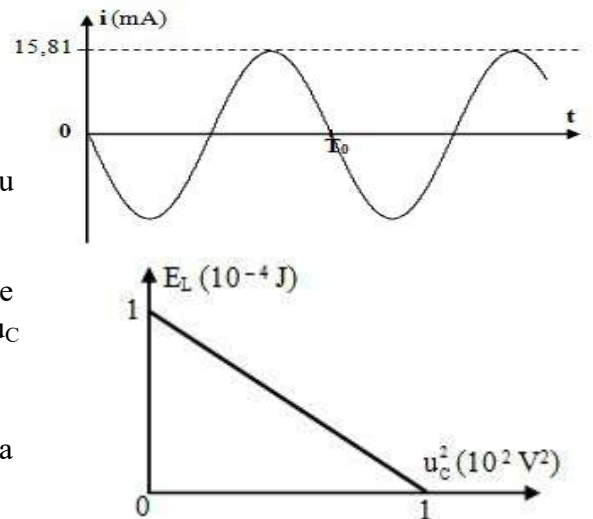
déterminer les valeurs de I_m , ω_0 et φ_i .

d - Montrer que l'énergie E du circuit (L, C) se conserve au cours du temps.

Calculer la valeur de E .

e - On donne ci-contre la courbe représentant les variations de l'énergie magnétique E_L en fonction du carré de la tension u_C aux bornes du condensateur :

- Exprimer E_L en fonction de C , u_C et E .
- En exploitant la courbe $E_L = f(u_C^2)$, retrouver alors la valeur de la capacité C du condensateur.



Réponse :

1⁰) a - On a des oscillations libres amorties (en régime pseudo périodique).

b - La diminution de l'amplitude des oscillations est la conséquence de la dissipation de l'énergie par effet Joule dans les résistances.

c - Graphiquement : $T = 8$ ms.

d - $E_C(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(0)$. A.N : $E_C(0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot (10)^2$ et $E_C(0) = 10^{-4}$ J.

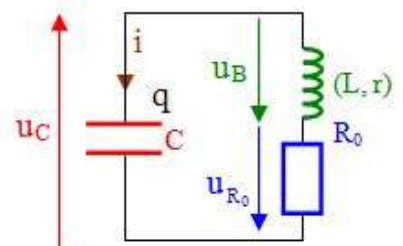
2⁰) a - On a : $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$. Sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, $u_C(t)$ est décroissante $\rightarrow \left(\frac{du_C}{dt}\right) < 0 \xrightarrow{C>0} i < 0$.

b - $E_{th} = E(0) - E\left(\frac{T}{2}\right) \xrightarrow{E_L(0)=0 \text{ et } E_L\left(\frac{T}{2}\right)=0} E_{th} = E_C(0) - E_C\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left[u_C^2(0) - u_C^2\left(\frac{T}{2}\right)\right]$.

A.N : $E_{th} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \left[(10)^2 - (8)^2\right]$ et $E_{th} = 0,36 \cdot 10^{-4}$ J.

3⁰) a - Appliquons la loi des mailles au circuit : $u_B + u_{R_0} + u_C = 0$

$$\begin{aligned} u_B &= -e + r \cdot i = L \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_{R_0} &= R_0 \cdot i \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad L \frac{di}{dt} + (R_0 + r) i + u_C = 0$$



sachant que $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2}$, on écrit alors : $L.C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + (R_0 + r) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

$$\mathbf{b -} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{(R_0 + r)}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{L.C} u_C = 0 \\ \frac{d^2u_C}{dt^2} + 100 \cdot \frac{du_C}{dt} + 6,25 \cdot 10^5 u_C = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Par identification}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(R_0 + r)}{L} = 100 \\ \frac{1}{L.C} = 6,25 \cdot 10^5 \end{array} \right.$$

$$L = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 6,25 \cdot 10^5} \quad \text{et} \quad L = 0,8 \text{ H}.$$

$$r = 100 \cdot 0,8 - 70 \quad \text{et} \quad r = 10 \Omega.$$

4⁰) a - Lorsqu'on considère les résistances nulles, l'expression de l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{L.C} u_C = 0$$

$$\mathbf{b -} T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}. \quad \text{A.N : } T_0 = 2\pi\sqrt{0,8 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \quad \text{et} \quad T_0 = 7,95 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

On remarque que T_0 est légèrement inférieur à T .

$$\mathbf{c -} i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$$

• Graphiquement : $I_m = 15,81 \text{ mA}$.

$$\bullet \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{L.C}}. \quad \text{A.N : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,8 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = 790,57 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\bullet \quad i(0) = 0 \rightarrow I_m \sin(\varphi_i) = 0 \rightarrow \varphi_i = 0 \text{ ou } \pi.$$

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} < 0 \rightarrow \omega_0 \cdot I_m \cdot \cos(\varphi_i) < 0 \rightarrow \cos(\varphi_i) < 0 \quad \text{et} \quad \varphi_i = \pi.$$

On écrit alors : $i(t) = 15,81 \sin(790,57 \cdot t + \pi) \text{ mA}$.

$$\mathbf{d -} E = E_C + E_L = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

$$\bullet \quad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 2u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2i \cdot \frac{di}{dt} = C \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

sachant que : $C \cdot \frac{du_C}{dt} = i$ et $\frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2}$, il vient que :

$$\frac{dE}{dt} = i \cdot \left(L \cdot C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C \right) = 0 \quad \text{d'après l'équation différentielle donc } E \text{ se conserve au cours du temps.}$$

$$\bullet \quad E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2. \quad \text{A.N : } E = \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot (15,81 \cdot 10^{-3})^2 \quad \text{et} \quad E = 10^{-4} \text{ J}.$$

$$\mathbf{e -} * E = E_C + E_L \rightarrow E_L = -E_C + E \quad \text{et} \quad E_L = -\frac{1}{2} C \cdot u_C^2 + E.$$

* Graphiquement : $E_L = A \cdot u_C^2 + B$ avec : $B = 10^{-4}$

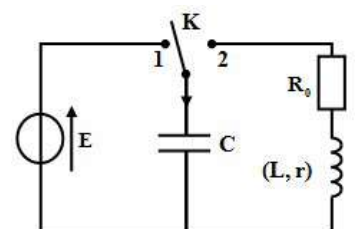
$$\text{et} \quad A = \frac{(1-0) \cdot 10^{-4}}{(0-1) \cdot 10^2} = -10^{-6}$$

$$\text{Par identification : } -\frac{1}{2} \cdot C = -10^{-6} \rightarrow C = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F} \quad \text{ou} \quad C = 2 \mu\text{F}.$$

Exercice 5 :

Un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$ est initialement chargé par un générateur de f é m E et connecté, à la date $t = 0$, à une bobine d'inductance L et de résistance interne r en série avec un résistor de résistance R_0 variable.

Le circuit est relié à l'interface d'acquisition d'un ordinateur qui permet d'enregistrer l'évolution de la tension aux bornes du condensateur.



On enregistre la courbe $u_c = f(t)$ ci-contre :

1°) a - Qualifier, en le justifiant, les oscillations de la tension $u_c(t)$ par l'un ou plusieurs des termes suivants :

entretenues, libres, forcées, non amorties, amorties.

b - Quel est le régime d'oscillation de ce circuit ?

c - Déterminer la valeur de la f.é.m. E du générateur.

d - Déterminer la valeur de la pseudo période T des oscillations électriques.

En admettant que l'on peut confondre la valeur de La pseudo période T et celle de la période propre

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ du circuit, calculer la valeur de l'inductance L de la bobine.

2°) a - Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur.

b - Montrer que l'énergie totale E de l'oscillateur électrique diminue au cours du temps.

3°) a - Entre les instants de dates $t_1 = 10 \text{ ms}$ et $t_2 = 15 \text{ ms}$:

le condensateur se charge-t-il ou se décharge-t-il ? Justifier la réponse.

b - Quel est le signe de l'intensité i du courant sur cet intervalle de temps ?

4°) a - Calculer les valeurs $E(0)$ et $E(T)$ de l'énergie emmagasinée par l'oscillateur respectivement à l'instant $t = 0$ et à l'instant $t = T$.

b - En déduire la valeur de l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule dans les résistances pendant la première oscillation.

5°) On remplace dans le circuit électrique précédent la bobine et le résistor par une autre bobine purement inductive de même inductance L (et de résistance interne supposée nulle).

Le condensateur étant chargé, On le connecte, à la date $t = 0$, à la bobine.

L'enregistrement de l'évolution de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur donne la courbe ci-contre :

a - Quelle est la nature des oscillations électriques dans ce circuit.

b - Les oscillations sont régies par l'équation différentielle : $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0$.

La solution de l'équation différentielle s'écrit : $u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$.

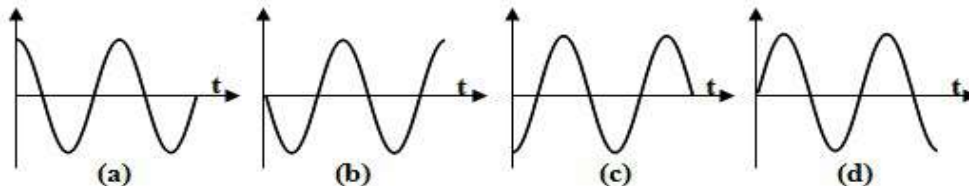
Déterminer :

- la tension maximale U_{cm} aux bornes du condensateur.

- la pulsation propre ω_0 du circuit oscillant considéré.

- la phase à l'origine φ_{uc} de la tension $u_c(t)$.

c - Parmi les courbes suivantes, quelle est celle qui représenterait la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine et celle qui représenterait l'intensité $i(t)$ du courant ? Justifier la réponse.



d - En utilisant la conservation de l'énergie électromagnétique, montrer qu'on a : $i^2 = \frac{C}{L}(U_{cm}^2 - u_c^2)$.

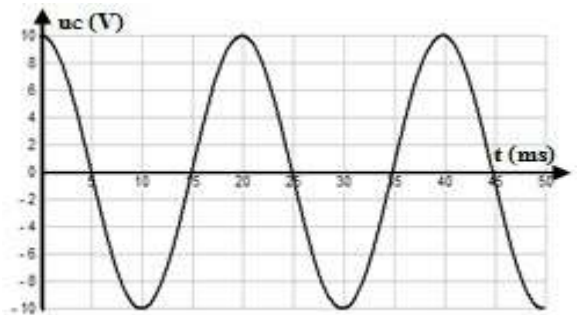
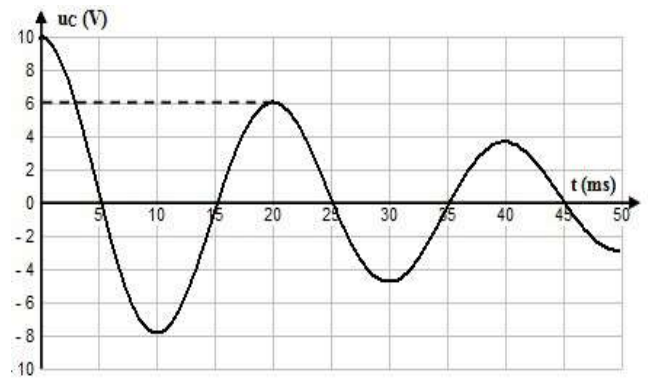
En déduire la valeur maximale I_m de l'intensité du courant qui parcourt le circuit.

Réponse :

1°) a - Les oscillations électriques sont :

- libres : les oscillations ont lieu dans un circuit qui ne comporte pas de générateur.

- amorties : l'amplitude des oscillations diminue continuellement à chaque oscillation jusqu'à s'annuler.



b - Le régime des oscillations est pseudopériodique.

c - A $t = 0$, $u_c(0) = E$. Or graphiquement $u_c(0) = 10 \text{ V} \rightarrow E = 10 \text{ V}$.

d - Graphiquement : $T = 20 \text{ ms}$.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L.C} \rightarrow T_0^2 = 4\pi^2.L.C \rightarrow L = \frac{T_0^2}{4\pi^2.C} \text{ or } T \approx T_0 \rightarrow L = \frac{(20.10^{-3})^2}{4\pi^2.10.10^{-6}} \text{ et } L = 1 \text{ H}.$$

2°) a - La loi des mailles s'écrit : $u_B + u_{R_0} + u_C = 0$

$$\begin{cases} u_B = L \frac{di}{dt} + ri \\ u_{R_0} = R_0 i \end{cases} \rightarrow L \frac{di}{dt} + (R_0 + r)i + u_C = 0 \quad \text{On a : } i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C.u_C} i = C \frac{du_C}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2},$$

il vient alors que : $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R_0 + r)C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

ou bien : $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{(R_0 + r)}{L} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$

b - $E = E_C + E_L = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} C.2u_C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} L.2i \frac{di}{dt} = C.u_C \frac{du_C}{dt} + L.i \frac{di}{dt}$$

Or on a : $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C.u_C} i = C \frac{du_C}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2}, \text{ on écrit:}$

$$\frac{dE}{dt} = u_C.i + L.i.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} = i \left(LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \right)$$

Or d'après l'équation différentielle : $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = -(R_0 + r)C \frac{du_C}{dt} = -(R_0 + r)i$, il vient alors que :

$$\frac{dE}{dt} = i[-(R_0 + r)i] = -(R_0 + r)i^2 < 0 \quad \text{L'énergie électromagnétique } E \text{ décroît au cours du temps.}$$

3°) a - Entre $t = 10 \text{ ms}$ et $t = 15 \text{ ms}$, le condensateur se décharge car $|u_C| \rightarrow 0$.

b - $i = C \frac{du_C}{dt}$ et entre $t = 10 \text{ ms}$ et $t = 15 \text{ ms}$, $u_C(t)$ est croissante $\xrightarrow[\frac{du_C}{dt} > 0]{\frac{du_C}{dt} > 0} i > 0$ (i est positive).

4°) a - A $t = 0$, $E(0) = E_C(0) + E_L(0) \xrightarrow[i(0)=0 \text{ et } E_L(0)=0]{u_C(0) \text{ max}} E(0) = E_C(0) \text{ avec } E_C(0) = \frac{1}{2}.C.(u_C(0))^2$

A.N : $E(0) = \frac{1}{2}.10.10^{-6}.10^2 \text{ et } E(0) = 5.10^{-4} \text{ J}.$

A $t = T$, $E(T) = E_C(T) + E_L(T) \xrightarrow[i(T)=0 \text{ et } E_L(T)=0]{u_C(T) \text{ max}} E(T) = E_C(T) \text{ avec } E_C(T) = \frac{1}{2}.C.(u_C(T))^2$

A.N : $E(T) = \frac{1}{2}.10.10^{-6}.6^2 \text{ et } E(T) = 1,8.10^{-4} \text{ J}.$

b - $E_{th} = -\Delta E = E(0) - E(T) \quad \text{A.N : } E_{th} = (5 - 1,8).10^{-4} \text{ et } E_{th} = 3,2.10^{-4} \text{ J}$

Cette perte d'énergie est due à l'effet Joules dans les résistances pendant la première oscillation.

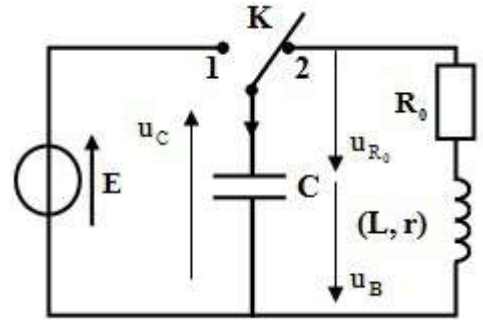
5°) a - Les oscillations sont libres non amorties.

b - $u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega_0.t + \varphi_{u_C})$

* $U_{Cm} = 10 \text{ V}$

* $T_0 = 20.10^{-3} \text{ s} \text{ or } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{20.10^{-3}} \text{ et } \omega_0 = 100\pi \text{ rad.s}^{-1}.$

* $u_C(0) = U_{Cm} \sin \varphi_{u_C} = U_{Cm} \rightarrow \sin \varphi_{u_C} = 1 \text{ et } \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2}.$



Donc : $u_c(t) = 10 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) (V)$.

c - $i = C \frac{du_c}{dt} \rightarrow i(t)$ est en quadrature avance par rapport à $u_c(t)$. $i(t)$ correspond à la courbe (b).

Pour un circuit oscillant (L, C), on a : $u_L + u_C = 0 \rightarrow u_L(t) = -u_C(t)$. $u_L(t)$ correspond à la courbe (c).

d - Le système est conservatif :

$$E = \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} C U_{cm}^2 \rightarrow L i^2 = C [U_{cm}^2 - u_c^2] \text{ et } i^2 = \frac{C}{L} [U_{cm}^2 - u_c^2]$$

$$u_c = 0 \rightarrow i = I_m$$

$$I_m^2 = \frac{C}{L} U_{cm}^2 \rightarrow I_m = \sqrt{\frac{C}{L}} U_{cm} \quad \text{A.N: } I_m = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-6}}{1}} \cdot 10 \text{ et } I_m = 3,16 \cdot 10^{-2} \text{ A.}$$

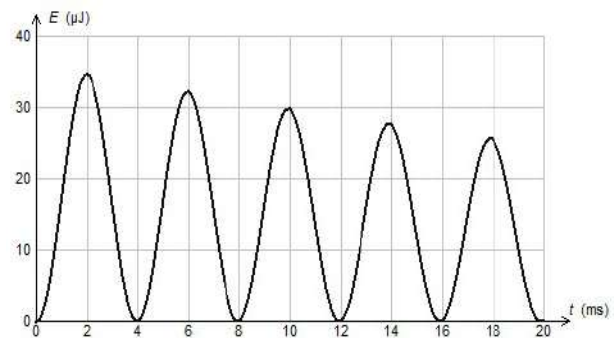
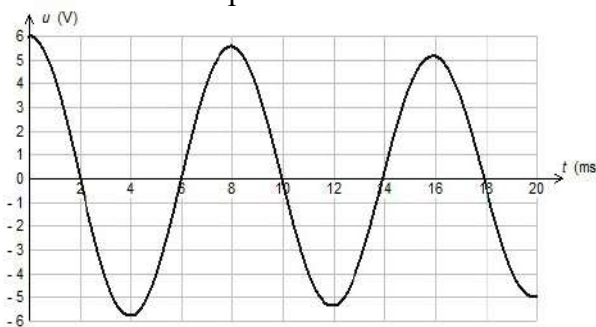
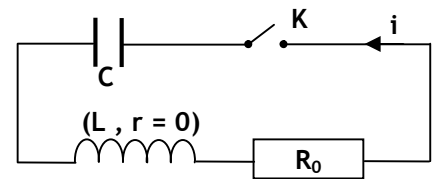
Exercice 6 :

Un condensateur de capacité $C = 2 \mu F$ est préalablement chargé sous une tension U_0 .

Il peut se décharger à travers une bobine purement inductive (d'inductance L et de résistance interne négligeable) et un résistor de résistance $R_0 = 15 \Omega$.

Un système d'acquisition permet de suivre l'évolution au cours du temps de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur et de l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine.

A $t_0 = 0$, on ferme l'interrupteur K. On obtient les deux courbes ci-dessous :



1⁰ a - Les oscillations obtenues sont dites libres et amorties. Justifier les deux qualificatifs utilisés.

b - Déterminer la valeur de la pseudo-période T des oscillations.

La valeur de T étant presque égale à celle de la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ du circuit, calculer la valeur de l'inductance L de la bobine utilisée.

c - Dire, en le justifiant, si le condensateur se charge ou se décharge entre les instants $t_1 = 2 \text{ ms}$ et $t_2 = 4 \text{ ms}$.

2⁰ L'équation différentielle qui gère l'évolution de la tension $u_c(t)$ au cours du temps est :

$$L.C. \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (R_0 + r).C. \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

a - Exprimer l'énergie électromagnétique E du circuit en fonction de u_c , C, L et i.

b - Montrer que E décroît au cours du temps.

c - Calculer la valeur de l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule entre les instants $t_0 = 0$ et $t_3 = 10 \text{ ms}$.

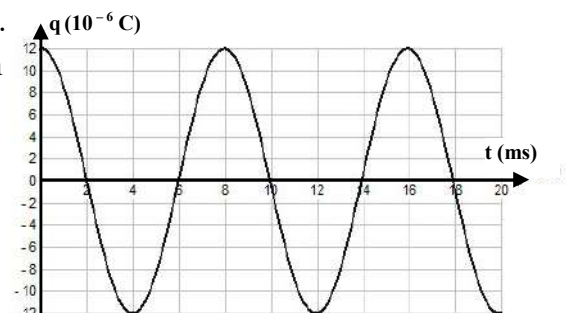
3⁰ On enlève dans le circuit précédent le résistor de résistance R_0 .

Le condensateur étant préalablement chargé sous la même tension U_0 , il peut se décharger à travers la bobine purement inductive.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

Le suivi de l'évolution au cours du temps de la charge $q(t)$ du condensateur donne la courbe ci-dessous :

a - Etablir l'équation différentielle gérant l'évolution de la charge $q(t)$ du condensateur au cours du temps.



b - La solution de cette équation différentielle s'écrit : $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

Déterminer les valeurs de Q_m , ω_0 et φ_q .

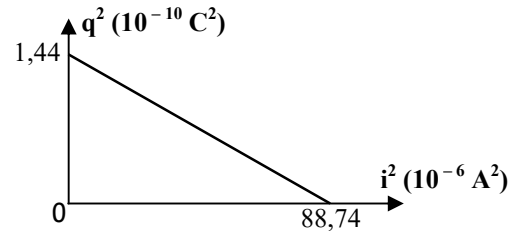
c - L'intensité du courant électrique qui parcourt le circuit s'écrit : $i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$

Calculer les valeurs de I_m et φ_i

4⁰ On donne ci-contre la courbe représentative de $q^2 = f(i^2)$:

a - Montrer que : $q^2 = \frac{1}{\omega_0^2} (I_m^2 - i^2)$.

b - Retrouver graphiquement les valeurs de I_m et ω_0 .



Réponse :

1⁰) a - Les oscillations sont : * libres : elles ont lieu dans un circuit qui ne comporte pas de générateur.

* amorties : l'amplitude des oscillations diminuent à chaque oscillation jusqu'à s'annuler.

b - Graphiquement : $T = 8$ ms.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L.C} \rightarrow T_0^2 = 4\pi^2.L.C \rightarrow L = \frac{T_0^2}{4\pi^2.C} \text{ or } T \approx T_0 \xrightarrow{\text{A.N}} L = \frac{(8.10^{-3})^2}{4\pi^2.2.10^{-6}} \text{ et } L = 0,81 \text{ H.}$$

c - Entre $t = 2$ ms et $t = 4$ ms, le condensateur se charge car $|u_C|$ augmente.

2⁰) a - on a : $E = E_C + E_L \rightarrow E = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$

b - $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} C.2u_C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} L.2i \frac{di}{dt} = C.u_C \frac{du_C}{dt} + L.i \frac{di}{dt}$

Or on a : $i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C.u_C} i = C \frac{du_C}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2}$,

on écrit : $\frac{dE}{dt} = u_C.i + L.i.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} = i \left(LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \right)$

Or d'après l'équation différentielle : $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = -(R_0 + r)C \frac{du_C}{dt} = -(R_0 + r)i$,

il vient alors que : $\frac{dE}{dt} = i \left[-(R_0 + r)i \right] = -(R_0 + r)i^2 < 0$

L'énergie électromagnétique E décroît au cours du temps.

b - $E_{th} = E(0) - E(10 \text{ ms})$.

$E(0) = E_C(0) + E_L(0) = \frac{1}{2} C. [u_C(0)]^2 + E_L(0) = \frac{1}{2} 2.10^{-6}. [6]^2 + 0 \text{ et } E(0) = 36.10^{-6} \text{ J}$

$E(10 \text{ ms}) = E_C(10 \text{ ms}) + E_L(10 \text{ ms}) = \frac{1}{2} C. [u_C(10 \text{ ms})]^2 + E_L(10 \text{ ms}) = \frac{1}{2} 2.10^{-6}. [0]^2 + 30.10^{-6} \text{ et } E(10 \text{ ms}) = 30.10^{-6} \text{ J}$

donc : $E_{th} = 36.10^{-6} - 30.10^{-6} \text{ et } E_{th} = 6.10^{-6} \text{ J}$

3⁰) a - D'après la loi des mailles : $u_B + u_C = 0 \xrightarrow[u_C = \frac{q}{C}]{u_B = L \cdot \frac{di}{dt}} L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

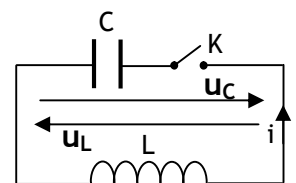
On a : $i = \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$, on écrit alors :

$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \text{ ou bien } \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{L.C} q = 0 \text{ et enfin } \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$

b - $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

* $Q_m = 12.10^{-6} \text{ C}$

* $T_0 = 8.10^{-3} \text{ s or } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{8.10^{-3}} \text{ et } \omega_0 = 250\pi \text{ rad.s}^{-1} \text{ ou } \omega_0 = 785,4 \text{ rad.s}^{-1}$



$$* q(0) = Q_m \sin \varphi_q = Q_m \rightarrow \sin \varphi_q = 1 \text{ et } \varphi_q = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$c - i(t) = I_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_i)$$

$$\text{or } i(t) = \frac{dq}{dt} \rightarrow i(t) = \omega_0 \cdot Q_m \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_q) \text{ et } i(t) = \omega_0 \cdot Q_m \sin\left(\omega_0 \cdot t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Par identification : } I_m = \omega_0 \cdot Q_m. \text{ A.N : } I_m = 250\pi \cdot 12 \cdot 10^{-6} \text{ et } I_m = 9,42 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

$$\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\varphi_q = \frac{\pi}{2}} \varphi_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \text{ et } \varphi_i = \pi \text{ rad}$$

$$4^0) a - \begin{cases} q(t) = Q_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_q) \\ i(t) = \omega_0 \cdot Q_m \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_q) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q^2 = Q_m^2 \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_q) \\ i^2 = \omega_0^2 \cdot Q_m^2 \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_q) \end{cases} \xrightarrow{\sin^2 + \cos^2 = 1} q^2 + \frac{i^2}{\omega_0^2} = Q_m^2$$

$$\rightarrow q^2 = Q_m^2 - \frac{i^2}{\omega_0^2} \rightarrow q^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} Q_m^2 - \frac{i^2}{\omega_0^2} \xrightarrow{I_m = \omega_0 \cdot Q_m} q^2 = \frac{1}{\omega_0^2} (I_m^2 - i^2).$$

$$b - \text{pour } q^2 = 0 \rightarrow i^2 = I_m^2 \xrightarrow{\text{graphiquement}} I_m^2 = 88,74 \cdot 10^{-6} \text{ et } I_m = 9,42 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$\text{pour } i^2 = 0 \rightarrow q^2 = \frac{I_m^2}{\omega_0^2} = Q_m^2 \rightarrow \omega_0^2 = \frac{I_m^2}{Q_m^2}$$

$$\xrightarrow{\text{graphiquement}} \omega_0^2 = \frac{88,74 \cdot 10^{-6}}{1,44 \cdot 10^{-10}} = 61,625 \cdot 10^4 \text{ et } \omega_0 = 7,85 \cdot 10^2 \text{ rad.s}^{-1}.$$

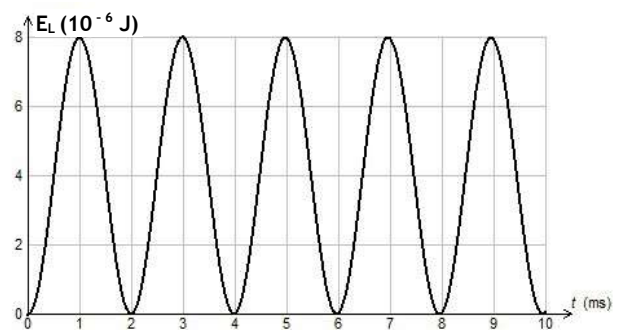
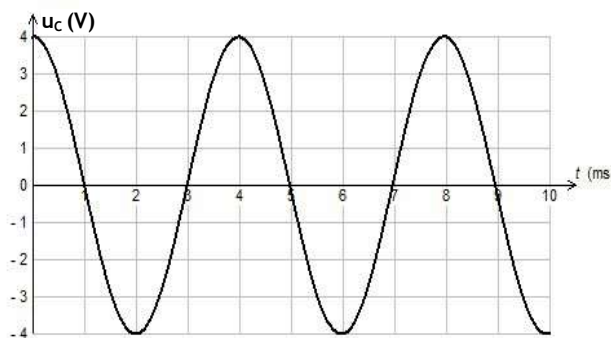
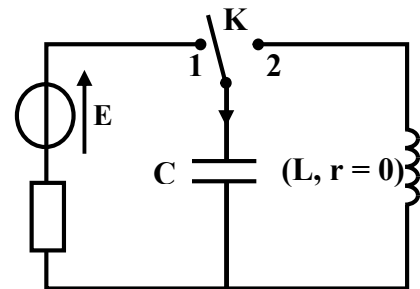
Exercice 7 :

On considère le circuit électrique schématisé ci-contre :
La bobine est considérée purement inductive (d'inductance L est de résistance r négligeable).

On ferme l'interrupteur K sur la position 1 jusqu'à ce que le condensateur soit complètement chargé puis on le bascule, à un instant de date t = 0, sur la position 2.

Le circuit est relié à l'interface d'acquisition d'un ordinateur qui permet d'enregistrer l'évolution, au cours du temps, de la

tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur ainsi que celle de l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine dans le circuit LC. On obtient les courbes ci-dessous :



1⁰) a - Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$.

b - La solution de l'équation différentielle s'exprime par : $u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_{u_c})$.

Déterminer les valeurs de U_{cm} , ω_0 et φ_{u_c} .

c - Déduire alors la valeur de la f é m E du générateur utilisé pour charger le condensateur.

d - L'intensité du courant électrique qui parcourt le circuit s'écrit : $i(t) = I_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_i)$

Sachant que $i(t) = C \cdot \left(\frac{du_c}{dt} \right)_t$, montrer que $I_m = U_{cm} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$ et que $\varphi_i = \pi$.

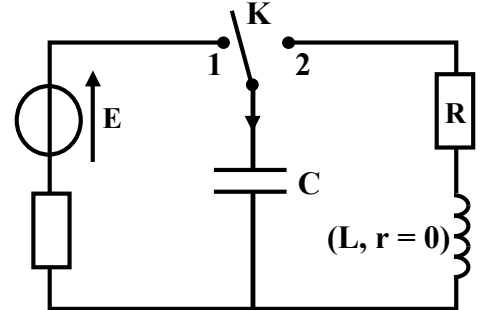
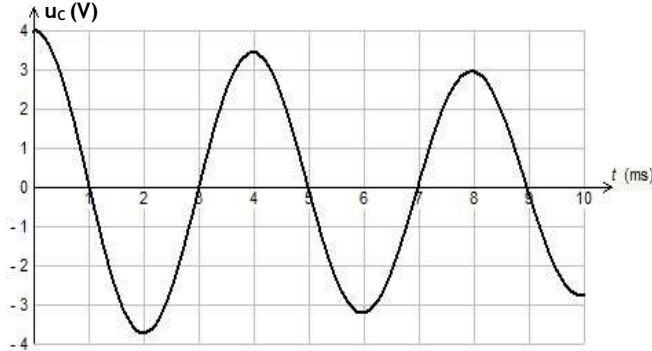
2⁰) a - Donner l'expression de l'énergie électromagnétique E du circuit en fonction de C, u_C , L et i.

b - Montrer que l'énergie E se conserve au cours du temps. Préciser alors la valeur de E.

c - Déterminer la valeur de la capacité C du condensateur et celle de l'inductance L de la bobine.

d - Calculer la valeur de I_m .

3⁰) On ajoute au circuit précédent un résistor de résistance R en série avec la bobine et on répète la même manipulation. L'enregistrement de l'évolution, au cours du temps, de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur donne la courbe ci-dessous :



L'équation différentielle qui gère l'évolution de la tension $u_C(t)$ au cours du temps est :

$$L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} + R.C.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

a - Choisir en justifiant, parmi les qualificatifs suivants, ceux qu'on attribue à ce type d'oscillations :

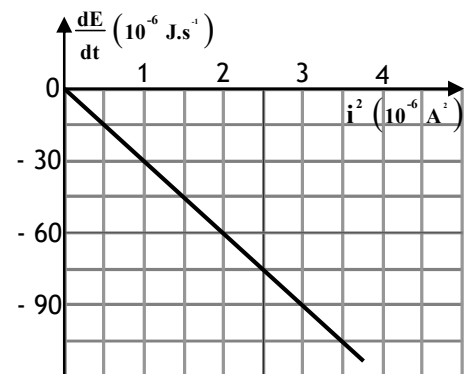
libres – forcées – entretenues – amorties – non amorties

b - Rappeler le nom de la durée T d'une oscillation.

c - Montrer que l'énergie électromagnétique E du circuit décroît au cours du temps.

d - Calculer la valeur de l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule entre les instants $t=0$ et $t=2.T$

e - Une étude énergétique a permis de tracer la courbe $\frac{dE}{dt} = f(i^2)$ ci-contre. Déterminer la valeur de la résistance R du résistor utilisé.



Réponse :

1⁰) a - D'après la loi des mailles : $u_B + u_C = 0 \xrightarrow{u_B = L \frac{di}{dt}} L \frac{di}{dt} + u_C = 0$

On a : $i = C \frac{du_C}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2u_C}{dt^2}$, on écrit alors :

$$L.C \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{L.C} u_C = 0.$$

et enfin $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$

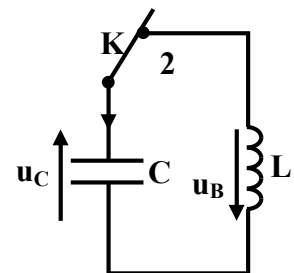
b - $u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_C})$

* $U_{Cm} = 4 \text{ V}$

* $T_0 = 4.10^{-3} \text{ s}$ or $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{4.10^{-3}}$ et $\omega_0 = 500\pi \text{ rad.s}^{-1}$ ou $\omega_0 = 1570,8 \text{ rad.s}^{-1}$

* $u_C(0) = U_{Cm} \sin \varphi_{u_C} = U_{Cm} \rightarrow \sin \varphi_{u_C} = 1$ et $\varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$

c - $u_C(0) = E$ or $u_C(0) = U_{Cm} \rightarrow E = U_{Cm}$ et $E = 4 \text{ V.}$



$$d - i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} \rightarrow i(t) = C \omega_0 U_{Cm} \cos(\omega_0 t + \varphi_{u_C}) \quad \text{et} \quad i(t) = C \omega_0 U_{Cm} \sin\left(\omega_0 t + \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Par identification : } I_m = C \omega_0 U_{Cm} = C \frac{1}{\sqrt{L.C}} U_{Cm} \quad \text{et} \quad I_m = U_{Cm} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

$$\text{et} \quad \varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2}} \varphi_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_i = \pi \text{ rad}$$

$$2^0) a - \text{On a : } E = E_C + E_L \rightarrow E = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

$$b - \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} C \cdot 2 u_C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} L \cdot 2 i \frac{di}{dt} = C u_C \frac{du_C}{dt} + L i \frac{di}{dt}$$

$$\text{Or on a : } i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2}, \text{ on écrit:}$$

$$\frac{dE}{dt} = u_C \cdot i + L i \cdot C \frac{d^2 u_C}{dt^2} = i \left(L C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \right)$$

$$\text{Or d'après l'équation différentielle : } L C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0, \text{ il vient alors que : } \frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{Donc } E \text{ se conserve.}$$

$$E = E_C + E_L \xrightarrow{si u_C=0 \rightarrow E_C=0} E = E_{L_{\max}} \quad \text{et} \quad E = 8 \cdot 10^{-6} \text{ J.}$$

$$c - E = E_C + E_L \xrightarrow{si u_C = U_{Cm} \rightarrow i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = 0 \rightarrow E_L = 0} E = E_{C_{\max}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{Cm}^2 \rightarrow C = \frac{2 \cdot E}{U_{Cm}^2}$$

$$A.N : C = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{4^2} \quad \text{et} \quad C = 10^{-6} \text{ F} \quad \text{ou} \quad C = 1 \mu\text{F}.$$

$$\text{On a : } \omega_0^2 = \frac{1}{L.C} \rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C}. \quad A.N : L = \frac{1}{(500 \cdot \pi)^2 \cdot 10^{-6}} \quad \text{et} \quad L = 0,4 \text{ H.}$$

$$d - I_m = U_{Cm} \sqrt{\frac{C}{L}} \xrightarrow{A.N} I_m = 4 \cdot \sqrt{\frac{10^{-6}}{0,4}} \quad \text{et} \quad I_m = 6,32 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

3⁰) a - Les oscillations sont : * libres : elles ont lieu dans un circuit qui ne comporte pas de générateur.

* amorties : l'amplitude des oscillations diminuent à chaque oscillation jusqu'à s'annuler.

b - La durée T d'une oscillation s'appelle pseudo période.

$$c - \text{On a : } E = E_C + E_L \rightarrow E = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} C \cdot 2 u_C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} L \cdot 2 i \frac{di}{dt} = C u_C \frac{du_C}{dt} + L i \frac{di}{dt}$$

$$\text{Or on a : } i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2}, \text{ on écrit:}$$

$$\frac{dE}{dt} = u_C \cdot i + L i \cdot C \frac{d^2 u_C}{dt^2} = i \left(L C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \right)$$

$$\text{Or d'après l'équation différentielle : } L C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = -R \cdot C \frac{du_C}{dt} = -R \cdot i, \text{ il vient alors que :}$$

$$\frac{dE}{dt} = i [-R \cdot i] = -R \cdot i^2 < 0 \quad \text{L'énergie électromagnétique } E \text{ décroît au cours du temps.}$$

$$d - E_{th} = E(0) - E(2T).$$

$$E(0) = E_C(0) + E_L(0) = \frac{1}{2} C [u_C(0)]^2 + E_L(0) = \frac{1}{2} 10^{-6} \cdot [4]^2 + 0 \quad \text{et} \quad E(0) = 8 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$E(2T) = E_C(2T) + E_L(2T) = \frac{1}{2} C [u_C(2T)]^2 + E_L(2T) = \frac{1}{2} 10^{-6} \cdot [3]^2 + 0 \quad \text{et} \quad E(2T) = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

donc : $E_{th} = 8.10^{-6} - 4,5.10^{-6}$ et $E_{th} = 3,5.10^{-6} \text{ J}$.

e - $\frac{dE}{dt} = (-R).i^2 \rightarrow \frac{dE}{dt} = f(i^2)$ est une droite linéaire de pente $(-R)$.

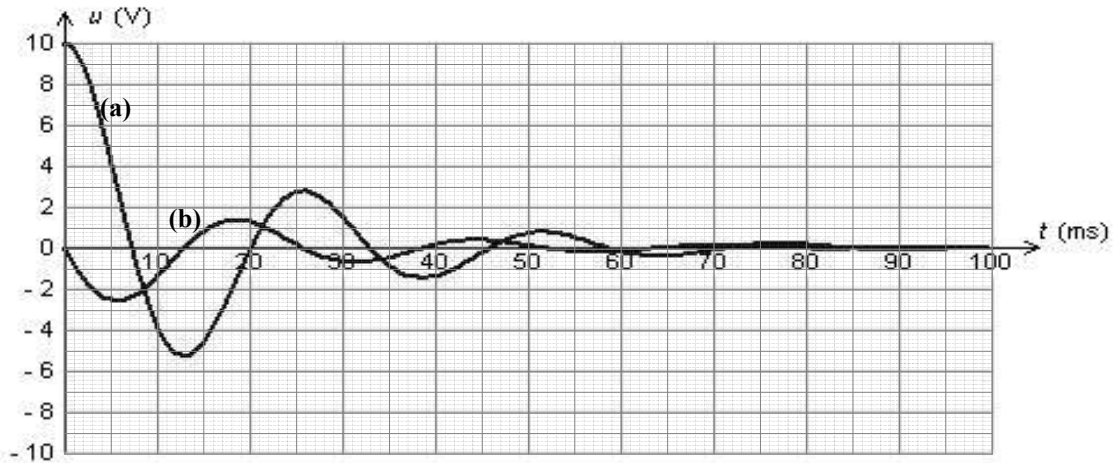
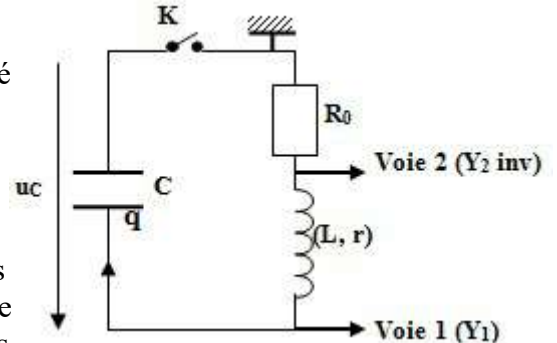
Graphiquement : $(-R) = \frac{-60-0}{2-0} = \rightarrow (-R) = -30$ et $R = 30 \Omega$.

Exercice 8 :

Le circuit électrique schématisé ci-contre comporte en série :

- Un condensateur de capacité $C = 20 \mu\text{F}$ préalablement chargé sous une tension $U_0 = 10 \text{ V}$.
- Un interrupteur K .
- Un résistor de résistance $R_0 = 68 \Omega$.
- Une bobine d'inductance L et de résistance interne r .

A l'instant $t = 0$, on ferme K . Un oscilloscope à mémoire, dont les voies d'entrée (1) et (2) sont branchées comme il est indiqué sur le schéma, permet de visualiser les oscillogrammes (a) et (b) donnés par les courbes suivantes :



1⁰ a - Associer chacune des courbes (c) et (d) à l'entrée (Y_1) ou ($Y_2 \text{ inv}$) correspondante.

b - Donner la nature des oscillations électriques observées.

c - Déterminer la valeur de la pseudo période T des oscillations.

d - Entre les instants $\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{2}$, le condensateur se charge-t-il ou se décharge-t-il ? Justifier la réponse.

2⁰ a - Etablir l'équation différentielle relative à la charge q du condensateur.

b - Sachant que cette équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 10^2 \frac{dq}{dt} + 62,5.10^3 q = 0$$

Déterminer les valeurs de l'inductance L et de la résistance interne r de la bobine.

3⁰ a - Montrer que l'énergie électromagnétique E de l'oscillateur électrique diminue au cours du temps.

Sous quelle forme apparaît l'énergie perdue par l'oscillateur ?

b - Calculer la valeur de l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule au cours de la première pseudo période.

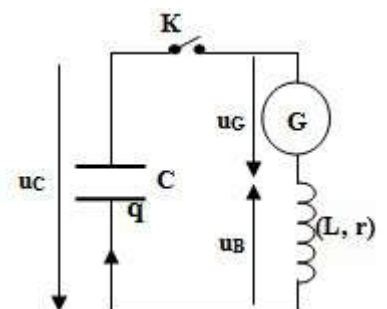
4⁰ Dans le circuit précédent, on enlève le résistor et on place, en série, un générateur G qui maintient à ses bornes une tension proportionnelle à l'intensité du courant: $u_G = k.i$ avec $k > 0$. Le coefficient k est réglable.

a - En exploitant le schéma du montage électrique donné ci-contre,

démontrer la relation : $L \frac{di}{dt} + (r - k)i + \frac{q}{C} = 0$

b - Donner la nature des oscillations obtenues lorsque $k = r$.

Déduire alors l'utilité du générateur G .



c - Calculer la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

d - A $t = 0$, le condensateur étant initialement chargé sous la tension U_0 , on ferme l'interrupteur K. Sachant que la tension aux bornes du condensateur oscille suivant l'équation horaire :

$$u_C(t) = 10 \sin\left(250t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (V)}$$

Déterminer l'équation horaire de la tension $u_G(t)$ aux bornes du générateur G.

Réponse :

1⁰) a - On visualise à l'oscilloscope la tension $u_C(t)$ sur la voie 1 et la tension $u_{R_0}(t)$ sur la voie 2.

à $t = 0$, $u_C(0) = U_0$ et $u_{R_0}(0) = R_0 \cdot i(0) = 0$ car $i(0) = 0$.

Par conséquent la courbe (a) correspond à l'entrée (Y_1) et la courbe (b) correspond à l'entrée (Y_2 inversée).

b - Les oscillations électriques observées sont libres amorties.

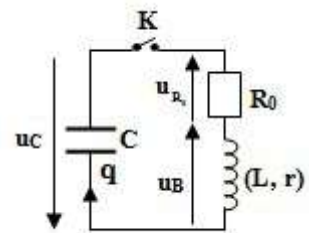
c - Graphiquement : $T = 26 \text{ ms}$.

d - Entre $\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{2}$, $|u_C(t)|$ augmente donc le condensateur se charge.

2⁰) a - Appliquons la loi des mailles au circuit : $u_B + u_{R_0} + u_C = 0$

On a : $u_B = L \frac{di}{dt} + r \cdot i$, $u_{R_0} = R_0 \cdot i$ et $u_C = \frac{q}{C}$, on écrit alors :

$$L \frac{di}{dt} + (R_0 + r) i + \frac{q}{C} = 0$$



sachant que $i = \frac{dq}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, on écrit alors : $L \frac{d^2q}{dt^2} + (R_0 + r) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

b - On a : $\frac{d^2q}{dt^2} + 10^2 \frac{dq}{dt} + 62,5 \cdot 10^3 q = 0$

L'équation différentielle s'écrit : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{(R_0 + r)}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} q = 0$

donc par identification :

$$* \frac{1}{L \cdot C} = 62,5 \cdot 10^3 \xrightarrow{C=20\mu F} L = \frac{1}{20 \cdot 10^{-6} \cdot 62,5 \cdot 10^3} \text{ et } L = 0,8 \text{ H.}$$

$$* \frac{(R_0 + r)}{L} = 10^2 \rightarrow r = L \cdot 10^2 - R_0 \xrightarrow{\substack{R_0=68\Omega \\ L=0,8H}} r = 0,8 \cdot 10^2 - 68 \text{ et } r = 12 \Omega.$$

3⁰) a - On a : $E = E_C + E_L = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2 \rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2C} \cdot 2q \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{L}{2} \cdot 2i \cdot \frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt}$

sachant que $i = \frac{dq}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, on écrit alors : $\frac{dE}{dt} = i \left(L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \right)$

or d'après l'équation différentielle : $L \frac{d^2q}{dt^2} + (R_0 + r) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = -(R_0 + r) \frac{dq}{dt}$

$\rightarrow \frac{dE}{dt} = i \left(-(R_0 + r) \frac{dq}{dt} \right) = i \left(-(R_0 + r) i \right) = -(R_0 + r) i^2$ donc $\frac{dE}{dt} < 0$ L'énergie E décroît au cours du temps.

L'énergie perdue apparaît sous forme d'énergie thermique (dissipée par effet Joule dans les résistances).

b - $E_{th}(T) = E(0) - E(T) = [E_C(0) + E_L(0)] - [E_C(T) + E_L(T)]$

$$E_{th}(T) = \left[\frac{1}{2} C u_C^2(0) + \frac{1}{2} L i^2(0) \right] - \left[\frac{1}{2} C u_C^2(T) + \frac{1}{2} L i^2(T) \right] \xrightarrow{\substack{i(0)=0 \\ i(T)=0}} E_{th}(T) = \frac{1}{2} C [u_C^2(0) - u_C^2(T)]$$

$$A.N : \text{Graphiquement : } \xrightarrow{\substack{u_C(0)=10V \\ u_C(T)=3V}} E_{th}(T) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot [(10)^2 - (3)^2] \text{ et } E_{th}(T) = 9,1 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

4⁰) a - Appliquons la loi des mailles au circuit : $u_B - u_G + u_C = 0$

On a : $u_B = L \frac{di}{dt} + r.i$, $u_G = k.i$ et $u_C = \frac{q}{C}$, on écrit alors : $L \frac{di}{dt} + (r - k)i + \frac{q}{C} = 0$

$$b - r = k \rightarrow L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \xrightarrow{i = \frac{dq}{dt}} \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{L.C} q = 0$$

Les oscillations électriques obtenues sont alors libres non amorties.

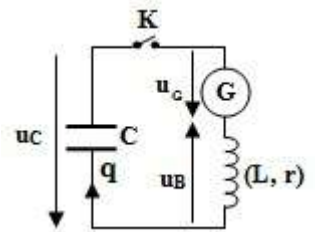
Le rôle du générateur G est de compenser, à chaque oscillation, les pertes par effet Joule dans les résistances.

$$c - \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}. \text{ A.N: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,8.20.10^{-6}}} \text{ et } \omega_0 = 250 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$d - u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_C}) \text{ avec } U_{Cm} = 10 \text{ V et } \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$u_G(t) = k.i(t) \xrightarrow{i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}} u_G(t) = r.C.\omega_0.U_{Cm} \sin\left(\omega_0 t + \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{A.N: } u_G(t) = 12.20.10^{-6}.250.10 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } u_G(t) = 0,6 \sin(250t + \pi) \text{ (V)}.$$



Exercice 9 :

On considère le circuit électrique schématisé ci-contre :

- le générateur de tension idéal a une f é m E.
- le résistor a une résistance R_0 variable
- l'un des deux dipôles D_1 et D_2 est un condensateur de capacité C et l'autre est une bobine d'inductance $L = 0,8 \text{ H}$ et de résistance interne r.

1⁰) On ferme les deux interrupteurs K_1 et K_2 .

Lorsque le régime permanent s'établit, on remarque que l'ampèremètre A indique une intensité constante I non nulle et que le voltmètre V indique une tension nulle. Montrer que le dipôle D_1 correspond au condensateur alors que le dipôle D_2 correspond à la bobine.

2⁰) L'interrupteur K_1 étant fermé, on ouvre K_2 . La tension aux bornes du condensateur est alors $u_{D_1} = u_C = E$.

On ouvre maintenant K_1 et à un instant pris comme origine du temps, on ferme l'interrupteur K_2 .

On enregistre l'évolution, au cours du temps, de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur et la tension

$u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor. On obtient les deux courbes (a) et (b) ci-dessous :

a - Associer chacune des courbes (a) et (b) à la tension qu'elle représente.

b - Préciser la nature des oscillations électriques et le non du régime d'oscillation.

c - On mesure la valeur de la pseudo période T des oscillations électriques. On trouve $T = 26 \text{ ms}$.

En négligeant la différence entre la pseudo période T et la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ des oscillations électriques, déterminer la valeur approchée de la capacité C du condensateur utilisé.

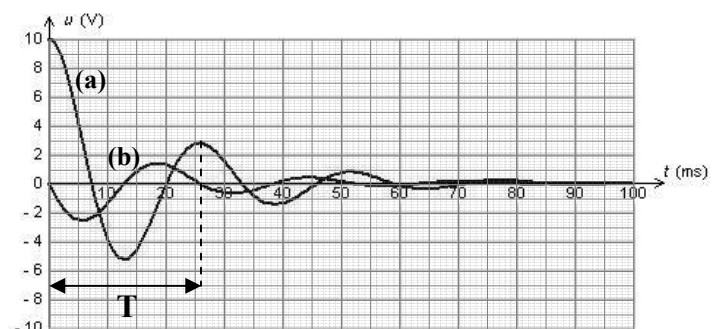
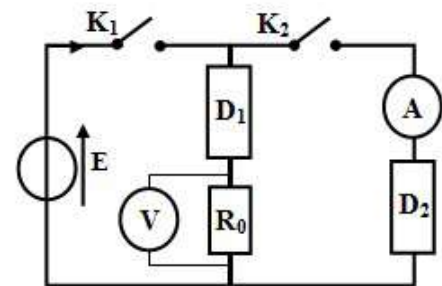
d - Entre les instants $\frac{T}{2}$ et $\frac{3T}{4}$, le condensateur se charge-t-il ou se décharge-t-il ? Justifier la réponse.

3⁰) L'équation différentielle qui gère l'évolution de la tension u_C au cours du temps est :

$$L.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R_0 + r).C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

a - Exprimer l'énergie électromagnétique E du circuit en fonction de C, u_C , L et i.

b - Montrer que E décroît au cours du temps.



4⁰) a - Déduire de l'équation différentielle en u_C la relation : $\frac{L}{R_0} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + \frac{(R_0 + r)}{R_0} \cdot u_{R_0} + u_C = 0$.

b - On considère un instant t_1 tel que $u_{R_0}(t_1)$ est maximale et un instant t_2 tel que $u_{R_0}(t_2)$ est nulle.
Montrer que l'énergie électromagnétique E du circuit s'exprime par :

$$- E(t_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{R_0}^2}{R_0^2} \cdot [C \cdot (R_0 + r)^2 + L] \quad \text{   l'instant } t_1.$$

$$E(t_2) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \frac{L^2}{R_0^2} \cdot \left[\left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)^2 \right]_{t=t_2} \quad \text{   l'instant } t_2.$$

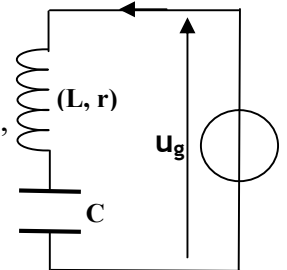
5⁰) Le condensateur et la bobine sont maintenant montés en série avec un générateur qui maintient entre ses bornes une tension proportionnelle au courant qu'il délivre : $u_g = k \cdot i$ avec $k > 0$. Le coefficient k est ajustable.

a - En exploitant le schéma du montage électrique proposé, établir la relation :

$$L \frac{di}{dt} + (r - k)i + u_C = 0$$

b - On fait varier k . Dès que $k = r$ (qui correspond à la résistance interne de la bobine), la tension aux bornes du condensateur oscille suivant l'équation :

$$u_C(t) = 10 \sin\left(250t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (V)}$$



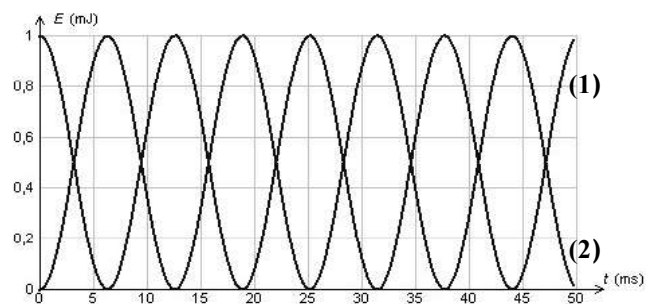
Préciser alors l'utilité du générateur utilisé.

6⁰) Les courbes ci-contre donnent d'évolution de l'énergie électrostatique E_C emmagasinée par le condensateur et de l'énergie magnétique E_L emmagasinée par la bobine.

a - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (1) et (2)    l'énergie qu'elle représente.

b - Préciser la valeur de l'énergie électromagnétique E de l'oscillateur électrique considéré.

c - Retrouver la valeur de la capacité C du condensateur et celle de l'inductance L de la bobine



Réponse :

1⁰) En régime permanent, un condensateur ne laisse pas passer le courant alors qu'une bobine se comporte comme un résistor de résistance égale à la résistance interne de la bobine.

On en déduit que D_1 est un condensateur alors que D_2 est une bobine.

2⁰) a - $u_C(0) = E \neq 0 \rightarrow$ la courbe (a) correspond à $u_C(t)$

par conséquent la courbe (b) correspond à $u_{R_0}(t)$.

b - On observe des oscillations électriques libres amorties en régime apériodique.

c - $T = 26 \text{ ms} \xrightarrow{T \approx T_0} T_0 = 26 \text{ ms}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L \cdot C} \rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \cdot L \cdot C \rightarrow C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 \cdot L}. \text{ A.N: } C = \frac{(26 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi^2 \cdot 0,8} \text{ et } C = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ F.}$$

d - Entre les instants $\frac{T}{2}$ et $\frac{3T}{4}$, $|u_C(t)|$ décroît $\rightarrow$ le condensateur se décharge.

$$3^0) \text{ a - } E = E_C + E_L \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2.$$

$$\text{b - } \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 2 \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2 \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = C \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} \text{ or } i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \rightarrow \frac{dE}{dt} = i \left(L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \right)$$

$$\text{D'après l'équation différentielle : } \frac{dE}{dt} = i \left(-(R_0 + r) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} \right) = i \left(-(R_0 + r) \cdot i \right) = -(R_0 + r) \cdot i^2$$

$$\frac{dE}{dt} < 0 \rightarrow E \text{ décroît au cours du temps.}$$

$$4^0) \text{ a - } L.C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R_0 + r).C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \xrightarrow{i=C \cdot \frac{du_C}{dt}} L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r).i + u_C = 0$$

On a $u_{R_0} = R_0.i \rightarrow i = \frac{u_{R_0}}{R_0}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt}$, on écrit alors :

$$\frac{L}{R_0} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + \frac{(R_0 + r)}{R_0} \cdot u_{R_0} + u_C = 0.$$

b - * à l'instant t_1 , $u_{R_0}(t_1)$ est maximale $\rightarrow$

$$\frac{du_{R_0}}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{(R_0 + r)}{R_0} \cdot u_{R_0} + u_C = 0 \rightarrow u_C = -\frac{(R_0 + r)}{R_0} u_{R_0}.$$

$$E(t_1) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{u_{R_0}}{R_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (R_0 + r)^2 \cdot \frac{u_{R_0}^2}{R_0^2} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{u_{R_0}^2}{R_0^2} \quad \text{et} \quad E(t_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{R_0}^2}{R_0^2} [C \cdot (R_0 + r)^2 + L].$$

***** à l'instant t_2 , $u_{R_0}(t_2)$ est nulle $\rightarrow$

$$\frac{(R_0 + r)}{R_0} \cdot u_{R_0} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{L}{R_0} \cdot \frac{du_{R_0}}{dt} + u_C = 0 \rightarrow u_C = -\frac{L}{R_0} \cdot \left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)_{t=t_2}.$$

$$E(t_2) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{u_{R_0}}{R_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \frac{L^2}{R_0^2} \cdot \left[\left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)_{t=t_2}^2 \right] + 0 \quad \text{et} \quad E(t_2) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \frac{L^2}{R_0^2} \cdot \left[\left(\frac{du_{R_0}}{dt} \right)_{t=t_2}^2 \right].$$

5⁰) a - D'après la loi des mailles :

$$u_C + u_B - u_g = 0 \rightarrow u_C + L \cdot \frac{di}{dt} + r.i - k.i = 0.$$

$$\rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + (r - k).i + u_C = 0$$

$$\text{b - } r = k. \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + u_C = 0 \xrightarrow{i=C \cdot \frac{du_C}{dt}} L.C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

On obtient une équation différentielle de solution générale sinusoïdale.

Le générateur permet donc d'entretenir les oscillations (il compense, à chaque oscillation, l'énergie perdue par effet Joule par les résistances de l'oscillateur).

$$6^0) \text{ a - } E_C(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot [u_C(0)]^2 \xrightarrow{u_C(0) \neq 0} E_C(0) \neq 0.$$

La courbe (1) correspond donc à E_C et par conséquent la courbe (2) correspond à E_L .

b - $E = E_C + E_L$. Graphiquement $E = 10^{-3} \text{ J}$.

$$\text{c - } E_C(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot [u_C(0)]^2 \rightarrow C = \frac{2 \cdot E_C(0)}{[u_C(0)]^2} \xrightarrow{\frac{u_C(0)=10\text{V}}{E_C(0)=10^{-3}\text{J}}} C = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{[10]^2} \quad \text{et} \quad C = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$$

$$\text{on a } \omega_0^2 = \frac{1}{L.C} \rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C} \xrightarrow{\frac{\omega_0=250\text{rad.s}^{-1}}{C=20 \cdot 10^{-6}\text{F}}} L = \frac{1}{(250)^2 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \quad \text{et} \quad L = 0,8 \text{ H}.$$

Exercice 10 :

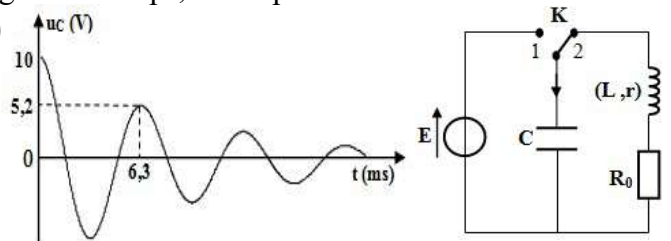
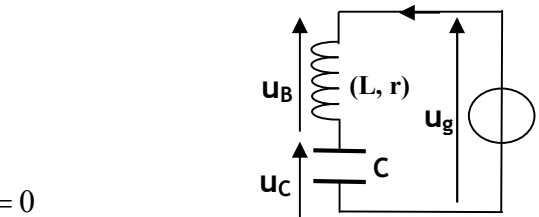
A / On considère le circuit électrique schématisé ci-contre. Le condensateur a une capacité $C = 1 \mu\text{F}$.

Le générateur a une f.e.m. $E = 10 \text{ V}$. L'interrupteur K étant fermé en position 1 pour charger complètement le condensateur, on le bascule, à un instant pris comme origine des temps, sur la position 2.

Le graphe ci-dessous donne l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur au cours du temps.

1⁰) a - Donner le nom des oscillations obtenues et celui du régime correspondant.

b - Déterminer la valeur graphique de la pseudo période T des oscillations.



En supposant que la valeur de T est pratiquement égale à celle de la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$ de l'oscillateur, calculer la valeur de l'inductance L de la bobine utilisée.

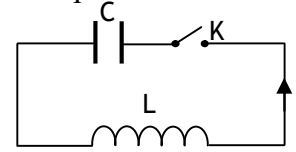
c - Entre les deux instants $\frac{T}{2}$ et $\frac{3T}{4}$, le condensateur se charge-t-il ou se décharge-t-il ? Justifier la réponse.

2⁰) a - Exprimer l'énergie totale E de l'oscillateur à l'instant t en fonction de u_C , i , L , et C .

b - Calculer la variation de l'énergie ΔE de l'oscillateur au cours de la première pseudo période.

B / Le condensateur de capacité $C = 1 \mu F$, préalablement chargé, est monté en série avec un interrupteur K et une bobine purement inductive d'inductance L (de résistance interne supposée nulle).

A un instant pris comme origine du temps, on ferme K .



3⁰) a - En utilisant la loi des mailles, montrer que l'équation différentielle que satisfait la tension $u_C(t)$ aux

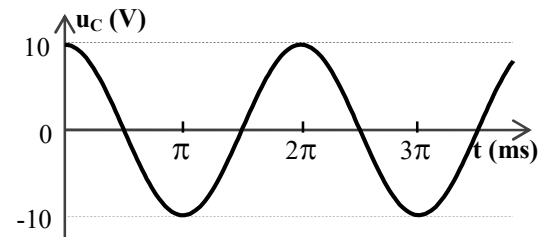
bornes du condensateur s'écrit : $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$.

b - En déduire la nature des oscillations électriques dans ce circuit.

c - La solution de l'équation différentielle s'écrit : $u_C(t) = U_{Cmax} \sin(\omega_0.t + \varphi_{u_C})$

On donne ci-contre les variations de la tension $u_C(t)$ au cours du temps. Déterminer les valeurs de :

- la tension maximale U_{Cmax} aux bornes du condensateur.
- la pulsation propre ω_0 du circuit oscillant considéré.
- La phase à l'origine φ_{u_C} de la tension $u_C(t)$.



4⁰) a - Montrer que l'énergie électromagnétique E emmagasinée par le circuit se conserve au cours du temps.

b - Donner alors l'expression de E en fonction de C et U_{Cmax} . Calculer la valeur de E .

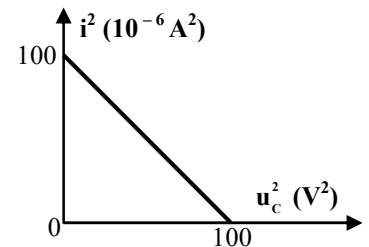
5⁰) a - En utilisant la conservation de l'énergie électromagnétique,

montrer qu'on a : $i^2 = \frac{C}{L}(U_{Cmax}^2 - u_C^2)$

b - Le graphe ci-contre traduit les variations de i^2 en fonction de u_C^2 :

Trouver graphiquement l'expression numérique de la fonction $i^2 = f(u_C^2)$

c - Déterminer alors la valeur de l'inductance L .



Réponse :

1⁰) a - On obtient des oscillations électriques libres amorties en régime pseudo périodique.

b - Graphiquement : $T = 6,3 \text{ ms}$.

$$T \approx T_0 \rightarrow T_0 = 6,3 \text{ ms} \text{ or } T_0 = 2\pi\sqrt{L.C} \rightarrow T_0^2 = 4\pi^2.L.C \text{ et } L = \frac{T_0^2}{4\pi^2.C}.$$

$$\text{A.N : } L = \frac{(6,3 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi^2 \cdot 10^{-6}} \text{ et } L = 1 \text{ H.}$$

c - Entre $\frac{T}{2}$ et $\frac{3T}{4}$ le condensateur se décharge car $|u_C|$ décroît.

$$2^0) \text{ a - } E = E_C + E_L \rightarrow \frac{1}{2}.C.u_C^2 + \frac{1}{2}.L.i^2.$$

$$\text{b - } \Delta E = E(T) - E(0)$$

$$E(0) = E_C(0) + E_L(0) = \frac{1}{2}.C.u_C^2(0) + \frac{1}{2}.L.i^2(0) \text{ or } u_C(0) = U_{Cm0} \xrightarrow{i=C \cdot \frac{du_C}{dt}} i(0) = 0$$

$$\text{et } E(0) = \frac{1}{2}.C.U_{Cm0}^2$$

$$E(T) = E_C(T) + E_L(T) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(T) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(T) \text{ or } u_C(T) = U_{C_{\max}} \xrightarrow{i=C \cdot \frac{du_C}{dt}} i(T) = 0$$

$$\text{et } E(T) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{C_{\max}}^2$$

$$\text{on écrit alors : } \Delta E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (U_{C_{\max}}^2 - U_{C_{\min}}^2). \text{ A.N: } \Delta E = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot (5,2^2 - 10^2) \text{ et } \Delta E = -36,48 \cdot 10^{-6} \text{ J.}$$

$$3^0) \text{ a - La loi des mailles s'écrit : } u_L + u_C = 0 \xrightarrow{u_L = L \cdot \frac{di}{dt}} L \cdot \frac{di}{dt} + u_C = 0$$

$$\text{On a : } i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C \cdot u_C} i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \text{ et } i = C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2}, \text{ on écrit alors}$$

$$LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0 \text{ ou } \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0 \text{ ou } \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b - Le circuit est le siège d'oscillations électriques libres non amorties.

$$\text{c - } u_C(t) = U_{C_{\max}} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_{u_C})$$

$$* U_{C_{\max}} = 10 \text{ V}$$

$$* \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \xrightarrow{T_0=2\pi \text{ ms}} \omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 10^{-3}} \text{ et } \omega_0 = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$* u_C(0) = U_{C_{\max}} \rightarrow \sin(\varphi_{u_C}) = 1 \text{ et } \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$4^0) \text{ a - } E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 2u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2i \cdot \frac{di}{dt} = u_C \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} \xrightarrow{\substack{i=C \cdot \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2}}} \frac{dE}{dt} = i \cdot \left(LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \right)$$

$$\text{D'après l'équation différentielle : } LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0 \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \text{ donc } E \text{ se conserve au cours du temps.}$$

$$\text{b - } E = E(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(0) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(0) \xrightarrow{\substack{u_C(0)=U_{C_{\max}} \\ i(0)=C \cdot \left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0}=0}} E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{C_{\max}}^2.$$

$$\text{A.N } E = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot 10^2 \text{ et } E = 5 \cdot 10^{-5} \text{ J.}$$

$$5^0) \text{ a - } E = E_C + E_L \rightarrow \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{C_{\max}}^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

$$\rightarrow L \cdot i^2 = C \cdot (U_{C_{\max}}^2 - u_C^2) \text{ et } i^2 = \frac{C}{L} \cdot (U_{C_{\max}}^2 - u_C^2)$$

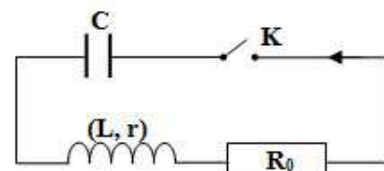
$$\text{b - } i^2 = f(u_C^2) \text{ est une droite affine } \rightarrow i^2 = A \cdot u_C^2 + B$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{100 \cdot 10^{-6} - 0}{0 - 100} = -10^{-6} \text{ A}^2 \text{V}^{-2} \\ B &= 10^{-4} \text{ A}^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow i^2 = -10^{-6} \cdot u_C^2 + 10^{-4} \text{ A}^2$$

$$\text{c - } i^2 = -\frac{C}{L} \cdot u_C^2 + \frac{C}{L} U_{C_{\max}}^2 \xrightarrow{\text{par identification}} A = -\frac{C}{L} \rightarrow L = -\frac{C}{A}. \text{ A.N: } L = -\frac{10^{-6}}{-10^{-6}} \text{ et } L = 1 \text{ H.}$$

Exercice 11 :

On considère le circuit électrique schématisé ci-contre :
La bobine a une inductance L et une résistance interne r .
Le résistor a une résistance R_0 .



Le condensateur, de capacité C , est initialement chargé sous une tension $U = 10 \text{ V}$.

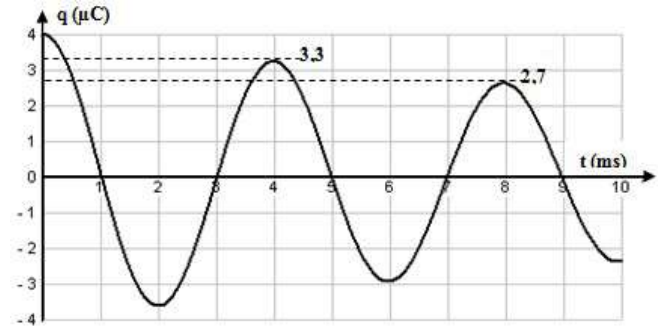
A $t = 0$, on ferme le circuit et un système d'acquisition nous permet de visualiser l'évolution au cours du temps de la charge q du condensateur. On obtient le graphe ci-dessous :

1⁰) a - Pourquoi qualifie-t-on le régime d'oscillations de régime pseudopériodique ?

b - Quel est le signe de l'intensité i du courant juste après la fermeture du circuit ? Justifier la réponse.

c - Quelle est la relation qui lie la tension u_C aux bornes du condensateur à sa charge électrique q ? En déduire la valeur de la capacité C du condensateur utilisé.

d - Déterminer, d'après le graphe, la valeur de la pseudo-période T des oscillations.



La valeur de T étant presque égale à celle de la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$ du circuit, calculer la valeur de l'inductance L de la bobine utilisée.

2⁰) L'équation différentielle qui gère l'évolution de la charge q au cours du temps est :

$$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + (R_0 + r) \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

a - Exprimer l'énergie électromagnétique E du circuit en fonction de q , C , L et i .

b - Montrer que E décroît au cours du temps.

c - Calculer la valeur de l'énergie E_{th} dissipée par effet Joule entre les instants $t_1 = T$ et $t_2 = 2T$.

3⁰) On enlève le résistor de résistance R_0 et on considère que la bobine est purement inductive (on néglige alors la résistance interne r de la bobine).

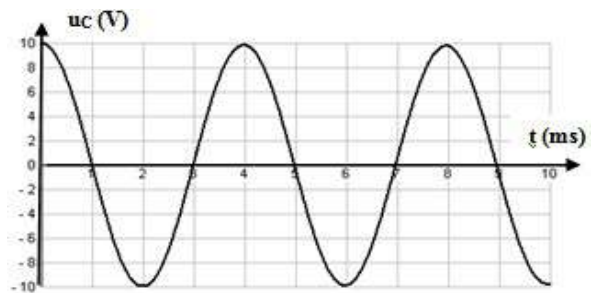
On charge initialement le condensateur et, à $t = 0$, on ferme le circuit.

a - L'évolution, au cours du temps, de la tension u_C aux bornes du condensateur est donnée ci-contre :

Cette tension s'exprime par $u_C(t) = U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_C})$

Déterminer graphiquement les valeurs de ω_0 , U_{cm} et φ_{u_C}

b - Soit $i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$ l'intensité du courant qui parcourt le circuit.



Sachant que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$, vérifier que : $I_m = U_{cm} \sqrt{\frac{C}{L}}$ et $\varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}$.

c - Sachant que le circuit (L , C) considéré constitue un système conservatif, montrer que l'énergie électrique emmagasinée par le condensateur s'exprime par : $E_C = \frac{1}{2}(C.U_{cm}^2 - L.i^2)$

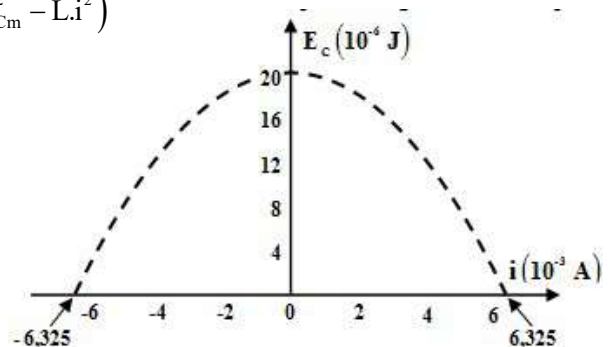
4⁰) On donne les variations de l'énergie électrostatique E_C en fonction de l'intensité i du courant (ci-contre) :

a - Déterminer graphiquement :

- La valeur maximale E_{Cm} de E_C .

- La valeur maximale I_m de i .

b - En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine et celle de la capacité C du condensateur.



Réponse :

1⁰) a - Le régime est dit pseudopériodique car l'amplitude des oscillations diminue à chaque oscillation jusqu'à s'annuler

b - Juste après la fermeture du circuit, $q(t)$ décroît, or $i(t) = \left(\frac{dq}{dt}\right)_t \rightarrow i(t) < 0$.

c - On a : $q(t) = C.u_C(t) \xrightarrow{u_C(0)=U} C = \frac{q(t)}{U}$. A.N : $C = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{10}$ et $C = 4 \cdot 10^{-7} \text{ F}$.

d - Graphiquement : $T = 4.10^{-3} \text{ s}$. On a : $T \approx T_0 \rightarrow T_0 = 4.10^{-3} \text{ s}$.

Or $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C} \rightarrow T_0^2 = 4\pi^2.L.C$ et $L = \frac{T_0^2}{4\pi^2.C}$. A.N: $L = \frac{(4.10^{-3})^2}{4\pi^2.4.10^{-7}}$ et $L = 1\text{H}$.

2⁰) a - $E = E_C + E_L \xrightarrow[E_L = \frac{1}{2}Li^2]{E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}} E = E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + E_L = \frac{1}{2}Li^2$.

b - $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}.2\frac{q}{C}.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}.L.2i.\frac{di}{dt} = \frac{q}{C}.\frac{dq}{dt} + L.i.\frac{di}{dt} \xrightarrow[i = \frac{dq}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}]{\frac{dE}{dt}} \frac{dE}{dt} = i.\left(L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}\right) = i.\left(-(R_0 + r).\frac{dq}{dt}\right)$

$\frac{dE}{dt} = i.\left(-(R_0 + r).i\right) = -(R_0 + r).i^2 < 0$ donc E décroît au cours du temps.

c - $E_{th} = E(T) - E(2T) = (E_C(T) + E_L(T)) - (E_C(2T) + E_L(2T))$

$E_{th} = \left(\frac{1}{2}\frac{q(T)^2}{C} + \frac{1}{2}Li(T)^2\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{q(2T)^2}{C} + \frac{1}{2}Li(2T)^2\right)$
 $\xrightarrow[q(2T)_{\max} \rightarrow i(2T) = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{2T} = 0]{q(T)_{\max} \rightarrow i(T) = \left(\frac{dq}{dt}\right)_T = 0} E_{th} = \left(\frac{1}{2}\frac{q(T)^2}{C}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{q(2T)^2}{C}\right)$

et $E_{th} = \frac{1}{2C}(q(T)^2 - q(2T)^2)$. A.N: $E_{th} = \frac{1}{2.4.10^{-7}}((3.3.10^{-6})^2 - (2.7.10^{-6})^2)$ et $E_{th} = 4.5.10^{-6} \text{ J}$.

3⁰) a - $u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0.t + \varphi_{u_c})$

* $U_{cm} = 10 \text{ V}$

* $T_0 = 4.10^{-3} \text{ s} \xrightarrow[\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}]{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}} \omega_0 = \frac{2\pi}{4.10^{-3}}$ et $\omega_0 = 500 \text{ rad.s}^{-1}$.

* $u_c(0) = U_{cm} \rightarrow \sin(\varphi_{u_c}) = 1 \rightarrow \varphi_{u_c} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

b - $i(t) = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{q=C.u_c} i(t) = C.\frac{du_c}{dt} \rightarrow i(t) = C.\omega_0.U_{cm} \cos(\omega_0.t + \varphi_{u_c}) = \frac{C}{\sqrt{L.C}} U_{cm} \sin\left(\omega_0.t + \varphi_{u_c} + \frac{\pi}{2}\right)$

On écrit alors : $i(t) = I_m \sin(\omega_0.t + \varphi_i)$ avec $I_m = U_{cm}.\sqrt{\frac{C}{L}}$ et $\varphi_i = \varphi_{u_c} + \frac{\pi}{2}$.

c - E se conserve $\rightarrow E = E(0) = E_C(0) + E_L(0) = \frac{1}{2}.C.u_c(0)^2 + \frac{1}{2}.L.i(0)^2 \xrightarrow[i(0)=C\left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0}=0]{u_c(0)=U_{cm}} E = \frac{1}{2}.C.U_{cm}^2$

$E = E_C + E_L \rightarrow E_C = E - E_L = \frac{1}{2}.C.U_{cm}^2 - \frac{1}{2}.L.i^2$ et $E_C = \frac{1}{2}(C.U_{cm}^2 - L.i^2)$

4⁰) a - Graphiquement : $E_{cm} = 20.10^{-6} \text{ J}$ et $I_m = 6,325.10^{-3} \text{ A}$.

b - * $E_{cm} = E_C(i=0) \rightarrow E_{cm} = \frac{1}{2}.C.U_{cm}^2 \rightarrow C = \frac{2.E_{cm}}{U_{cm}^2}$. A.N: $C = \frac{2.20.10^{-6}}{10^2}$ et $C = 4.10^{-7} \text{ F}$.

* $E_C(i=I_m) = 0 \rightarrow C.U_{cm}^2 - L.I_m^2 = 0 \rightarrow L = \frac{C.U_{cm}^2}{I_m^2}$. A.N: $L = \frac{4.10^{-7}.10^2}{(6,325.10^{-3})^2}$ et $L = 1\text{H}$.

Etude d'un texte documentaire :

Exercice 1 :

Le détecteur de métaux

Un détecteur de métaux est un appareil permettant de localiser des objets métalliques en exploitant le phénomène physique de l'induction électromagnétique. Il est utilisé par exemple dans le domaine de la sécurité dans les aéroports pour détecter des armes cachées sur les passagers d'un avion, dans le domaine

militaire pour le déminage, dans les loisirs pour la recherche de divers objets enfouis et, marginalement, en archéologie pour la recherche d'objets anciens.

La méthode de détection peut s'appuyer sur la variation de l'inductance d'une bobine à l'approche d'un métal. En effet, l'inductance augmente si on approche de la bobine un objet en fer, alors qu'elle diminue si l'objet est en or.

Le détecteur est équivalent à un oscillateur constitué d'un condensateur et d'une bobine.

Du fait de la variation de l'inductance de la bobine, l'oscillateur voit sa fréquence propre modifiée.

Un montage électronique permet alors de comparer la fréquence de cet oscillateur à une fréquence fixe.

La comparaison indique ainsi la présence d'un métal et sa nature.



D'après : fr.wikipedia.org et www.Chimix.com

Questions :

1⁰) a - Sur quel phénomène physique est basé le fonctionnement d'un détecteur de métaux ?

b - Préciser au moins deux domaines d'utilisation, cités dans le texte, du détecteur de métaux ?

2⁰) Lequel des composants électriques du détecteur est sensible à l'approche d'un métal ? Justifier la réponse d'après le texte.

3⁰) L'oscillateur utilisé dans un détecteur de métaux est équivalent à un oscillateur électrique non amorti constitué par un condensateur de capacité C et une bobine purement inductive d'inductance $L = 20 \text{ mH}$.

En absence de métal à proximité, la fréquence propre $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ de l'oscillateur est voisine de 20 kHz.

a - Calculer la valeur de la capacité C utilisée dans l'oscillateur.

b - Au cours d'une recherche, un signal de fréquence $N = 15 \text{ kHz}$ est détecté. Justifier alors que le métal qui constitue l'objet trouvé n'est pas de l'or.

Réponse :

1⁰) a - L'induction électromagnétique.

b - * Dans le domaine de la sécurité aérienne.

* dans le domaine militaire.

* Dans le domaine des loisirs.

2⁰) La bobine.

« La méthode de détection peut s'appuyer sur la variation de l'inductance d'une bobine à l'approche d'un métal ».

$$3^0) \text{ a - } N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow N_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot C} \text{ et } C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot N_0^2}$$

$$\text{A.N : } C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot (20 \cdot 10^{-3}) \cdot (20 \cdot 10^3)^2} \text{ et } C = 3,17 \cdot 10^{-9} \text{ F.}$$

b - $N < N_0$:

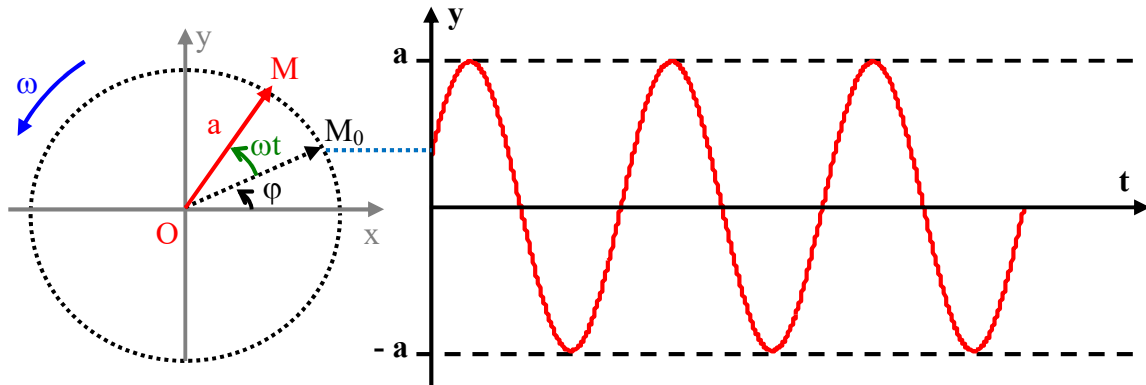
Si N diminue alors L augmente, or pour un objet en or L doit diminuer donc l'objet n'est pas en or.

LES GRANDEURS SINUSOÏDALES

I / Opérations sur les grandeurs sinusoïdales :

1⁰) Représentation vectorielle : Vecteur de Fresnel :

considérons un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de module a qui tourne autour d'un point fixe O avec vitesse angulaire ω dans un plan (Ox, Oy) .



Lorsque le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tourne, l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ varie :

- à l'instant $t = 0$, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_0}) = \varphi$
- à l'instant t , $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = (\omega t + \varphi)$

La projection de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe Oy décrit un mouvement sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude a :

$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

Réciproquement, à toute fonction sinusoïdale $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ on associe un vecteur tournant $\vec{V}$ de module a , de phase à l'origine φ et qui tourne à une vitesse angulaire ω .

Le vecteur tournant $\vec{V}$ est appelé **vecteur de Fresnel** associé à la fonction $y(t)$.

2⁰) Comparaison entre deux grandeurs sinusoïdales :

Pour comparer deux grandeurs sinusoïdales, il faut qu'elles soient :

- de même nature.
- synchrones : elles sont isochrones (même pulsation ω) et évoluent ensemble au cours du temps.

Soient deux grandeurs synchrones de même nature : $y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$

a - Déphasage entre les deux grandeurs :

* Soit $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ le **déphasage** entre $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

- à l'instant t_1 , $y_1 = a_1 \rightarrow \sin(\omega t_1 + \varphi_1) = 1$

- à l'instant t_2 , $y_2 = a_2 \rightarrow \sin(\omega t_2 + \varphi_2) = 1$

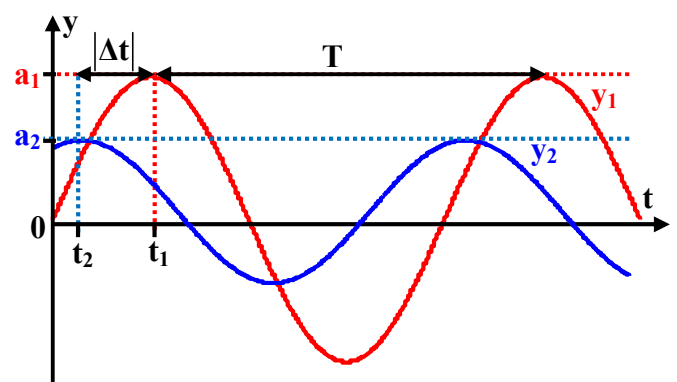
$$\rightarrow \omega t_1 + \varphi_1 = \omega t_2 + \varphi_2 \rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \omega(t_1 - t_2)$$

* Soit $\Delta t = t_2 - t_1$ le **décalage horaire** entre $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

il vient que : $\Delta\varphi = -\omega \Delta t$

et enfin :

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t$$

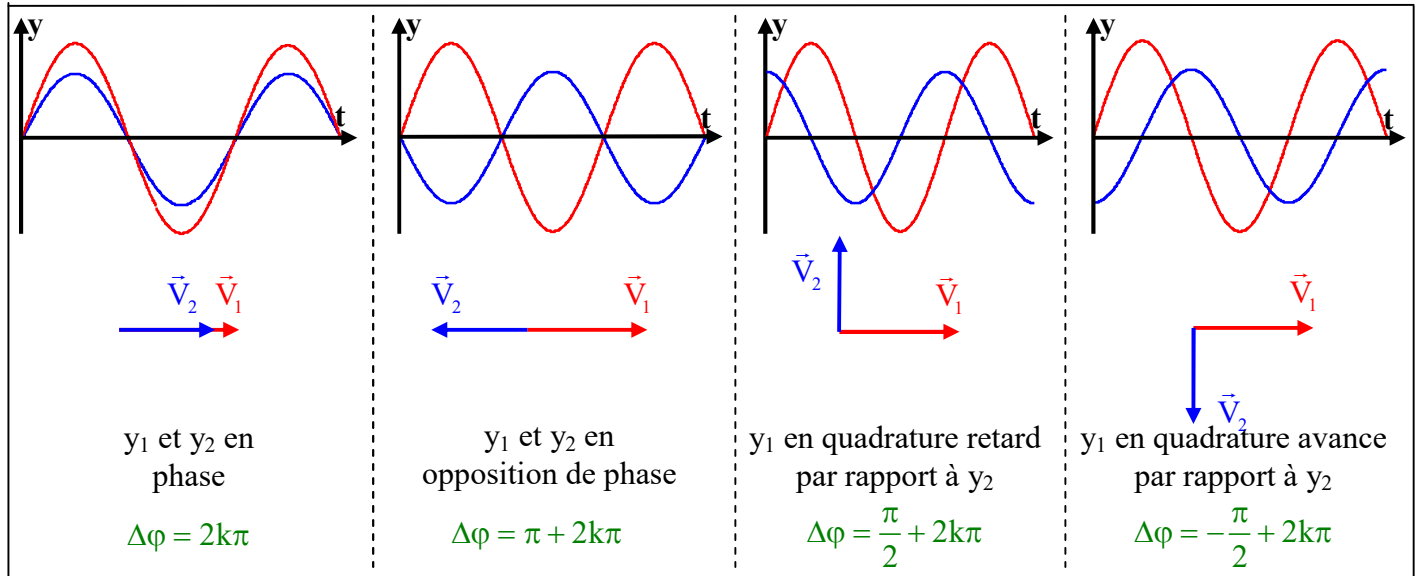


Remarque :

$$|\Delta\varphi| = \omega \cdot |\Delta t| \quad \text{ou} \quad |\Delta\varphi| = 2\pi \cdot \frac{|\Delta t|}{T}$$

- Si $\varphi_2 > \varphi_1$ alors $y_2(t)$ est en avance de phase par rapport à $y_1(t)$.
- Si $\varphi_2 < \varphi_1$ alors $y_2(t)$ est en retard de phase par rapport à $y_1(t)$.
- Si $\varphi_2 = \varphi_1$ alors $y_2(t)$ et $y_1(t)$ sont en phase.

b - Cas particuliers :



II / Composition de deux grandeurs sinusoïdales synchrones et parallèles :

Remarque : Deux grandeurs sinusoïdales évoluent parallèlement si les vecteurs de Fresnel associés aux fonctions représentatives de ces deux grandeurs évoluent dans un même plan.

Considérons deux grandeurs sinusoïdales de même nature, synchrones et qui évoluent parallèlement :

$$y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

On cherche l'expression de la composée : $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

1⁰ Méthode trigonométrique :

$$y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = a_1 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 + a_1 \cdot \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1$$

$$y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = a_2 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + a_2 \cdot \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2$$

• Soit $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = (a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \varphi_2) \cdot \sin \omega t + (a_1 \cdot \sin \varphi_1 + a_2 \cdot \sin \varphi_2) \cdot \cos \omega t$

on écrit alors : $y(t) = A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t$ avec $A = a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \varphi_2$

$$\text{et } B = a_1 \cdot \sin \varphi_1 + a_2 \cdot \sin \varphi_2$$

• Cherchons la solution sous la forme : $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$

il vient que $y(t) = a \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega t + a \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega t$

on écrit alors : $y(t) = A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t$ avec $A = a \cdot \cos \varphi$

$$\text{et } B = a \cdot \sin \varphi$$

• On a d'une part : $A^2 + B^2 = a^2 \cdot \cos^2 \varphi + a^2 \cdot \sin^2 \varphi = a^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a^2 \cdot 1 = a^2$

donc : $a^2 = (a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \varphi_2)^2 + (a_1 \cdot \sin \varphi_1 + a_2 \cdot \sin \varphi_2)^2$

en développant l'expression, il vient que :

$$a^2 = a_1^2 \cdot \cos^2 \varphi_1 + a_2^2 \cdot \cos^2 \varphi_2 + 2 a_1 a_2 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + a_1^2 \cdot \sin^2 \varphi_1 + a_2^2 \cdot \sin^2 \varphi_2 + 2 a_1 a_2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2$$

$$a^2 = a_1^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) + a_2^2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) + 2 a_1 a_2 (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)$$

$$\text{et } a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cdot \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$

- D'autre part on a : $\text{tg}\varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{a \cdot \sin \varphi}{a \cdot \cos \varphi} = \frac{B}{A}$

$$\text{et } \text{tg}\varphi = \frac{a_1 \cdot \sin \varphi_1 + a_2 \cdot \sin \varphi_2}{a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \varphi_2}$$

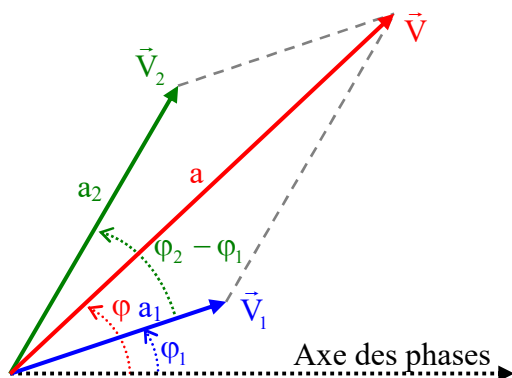
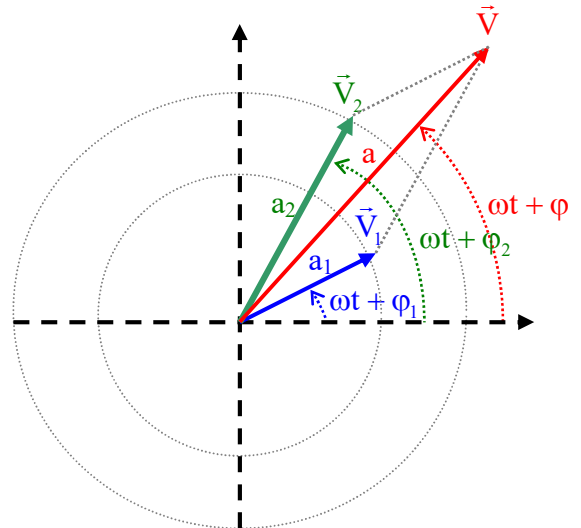
- Conclusion : $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ avec
$$\begin{cases} a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \text{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2} \end{cases}$$

2⁰) Représentation de Fresnel :

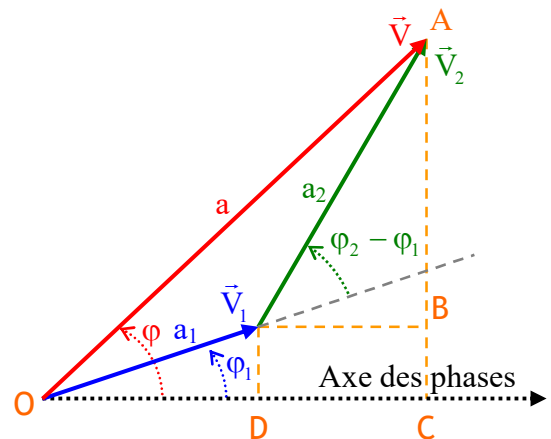
- à $y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ on associe $\vec{V}_1(t) \begin{cases} a_1 \\ \omega t + \varphi_1 \end{cases}$
- à $y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ on associe $\vec{V}_2(t) \begin{cases} a_2 \\ \omega t + \varphi_2 \end{cases}$
- à $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ on associe $\vec{V}(t) \begin{cases} a \\ \omega t + \varphi \end{cases}$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \rightarrow \vec{V}(t) = \vec{V}_1(t) + \vec{V}_2(t)$$

La vitesse angulaire ω étant la même, le parallélogramme généré par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ ne varie pas au cours du temps, on étudie alors la représentation à l'origine du temps :



ou bien



- $a = \|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V}^2}$

$$\rightarrow a^2 = \|\vec{V}\|^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + 2 \cdot \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2})$$

d'où : $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cdot \cos (\varphi_2 - \varphi_1)$

- $\text{tg}\varphi = \frac{AC}{OC} = \frac{AB + BC}{OD + DC}$ d'où : $\text{tg}\varphi = \frac{a_2 \cdot \sin \varphi_2 + a_1 \cdot \sin \varphi_1}{a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \varphi_2}$

- Conclusion : $\vec{V}_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ \varphi_1 \end{vmatrix} + \vec{V}_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ \varphi_2 \end{vmatrix} = \vec{V} \begin{vmatrix} a \\ \varphi \end{vmatrix}$ a telle que $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$
 φ telle que $\text{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$

Pour en savoir plus

L'utilisation de la représentation de Fresnel nécessite une résolution graphique de la situation étudiée. On peut utiliser la notation complexe.

1⁰) Représentation complexe d'une fonction sinusoïdale :

- Considérons un nombre complexe $z = \alpha + j\beta$; (α et $\beta \in \mathbb{R}$, $j^2 = -1$)

Dans le plan complexe $(\Re, \Im)$, le point M représente l'image du nombre complexe z .

α est la partie réelle du nombre complexe z : $\alpha = \rho \cdot \cos \theta$

β est la partie imaginaire du nombre complexe z : $\beta = \rho \cdot \sin \theta$

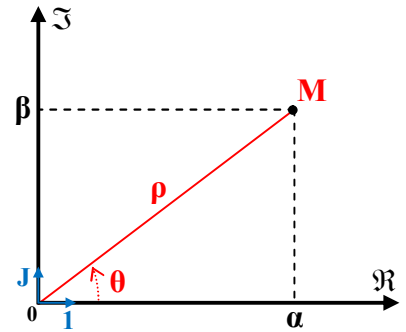
- Le nombre complexe z peut s'exprimer sous la forme exponentielle :

$$z = \rho \cdot e^{j\theta} \quad \text{avec} \quad e^{j\theta} = \cos \theta + j \cdot \sin \theta \quad \rightarrow \quad z = \rho \cdot \cos \theta + j \cdot \rho \cdot \sin \theta$$

ρ est le module du nombre complexe z :

θ est l'argument du nombre complexe z .

$$\text{On en déduit que : } \begin{cases} z = \alpha + j\beta \\ z = \rho \cdot e^{j\theta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 \\ \tan \theta = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$



Remarques :

- * $z = \rho \cdot e^{j\theta} \rightarrow z = [\rho; \theta]$ notation polaire du nombre complexe.

- * Soit le nombre complexe $z = \alpha + j\beta$, le nombre complexe conjugué de z est $z^* = \alpha - j\beta$

On remarque que : $|z|^2 = z \cdot z^* = \alpha^2 + \beta^2$ avec $|z| = \rho$.

- * $j = 1 \cdot e^{j(\frac{\pi}{2})} \rightarrow j = \left[1; \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que : $j^2 = -1$ et $\frac{1}{j} = -j$.

- Soit une fonction sinusoïdale $y(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, on lui associe, dans le plan complexe $(\Re, \Im)$ un

nombre complexe d'affixe z tel que : $z = \rho \cdot e^{j\theta}$ avec $\begin{cases} \rho = a \\ \theta = \omega t + \varphi \end{cases} \rightarrow z = a \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$

on écrit alors : $z = [a \cdot \cos(\omega t + \varphi)] + j[a \cdot \sin(\omega t + \varphi)]$

$y(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ est la partie imaginaire du nombre complexe z associé.

Remarque : $z = a \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \rightarrow z = [a; (\omega t + \varphi)]$

2⁰) Composition de deux fonctions sinusoïdales :

Considérons deux fonctions sinusoïdales : $y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$

On cherche l'expression de la composée : $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ sous la forme $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$

- à $y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ on associe le nombre complexe $z_1 = a_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)}$
- à $y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ on associe le nombre complexe $z_2 = a_2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)}$
- à $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ on associe le nombre complexe $z = a \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$

On a : $y(t) = y_1(t) + y_2(t) \rightarrow z = z_1 + z_2$.

On écrit donc : $a \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = a_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)} + a_2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)} \rightarrow e^{j(\omega t)} \cdot [a \cdot e^{j\varphi}] = e^{j(\omega t)} \cdot [a_1 \cdot e^{j\varphi_1} + a_2 \cdot e^{j\varphi_2}]$

$$\rightarrow a \cdot \cos \varphi + j \cdot a \cdot \sin \varphi = (a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \varphi_2) + j(a_1 \cdot \sin \varphi_1 + a_2 \cdot \sin \varphi_2) \rightarrow \begin{cases} a \cdot \cos \varphi = a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ a \cdot \sin \varphi = a_1 \cdot \sin \varphi_1 + a_2 \cdot \sin \varphi_2 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$* \quad a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2.a_1.a_2.\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$* \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1.\sin \varphi_1 + a_2.\sin \varphi_2}{a_1.\cos \varphi_1 + a_2.\cos \varphi_2}$$

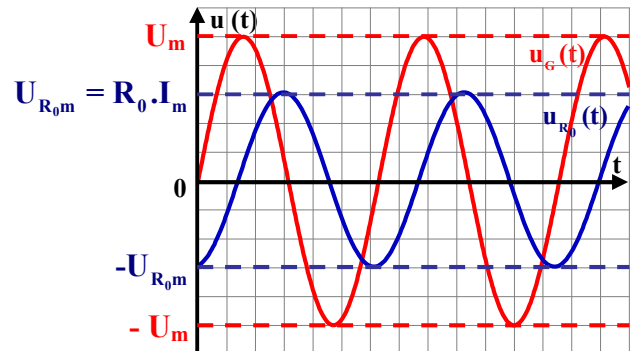
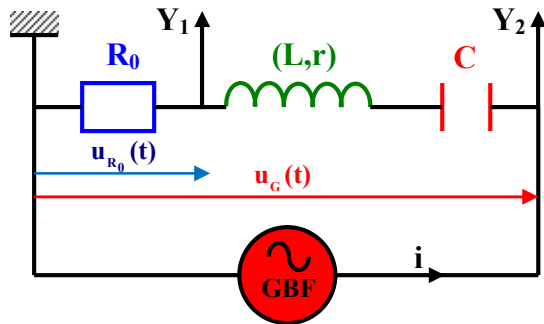
$$\text{Conclusion : } y(t) = a \sin(\omega t + \varphi) \text{ avec } \begin{cases} a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2.\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2} \end{cases}$$

LES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES FORCÉES EN RÉGIME SINUSOÏDAL LA RÉSONANCE D'INTENSITÉ

I / Introduction :

1⁰) Mise en situation :

On considère une portion de circuit série contenant un résistor (R_0), une bobine (L, r) et un condensateur (C).
On alimente cette portion par un générateur BF délivrant une tension sinusoïdale $u(t)$ de pulsation ω_e .



Le circuit, de pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$, est alors parcouru par un courant sinusoïdal $i(t)$ de pulsation ω_e .

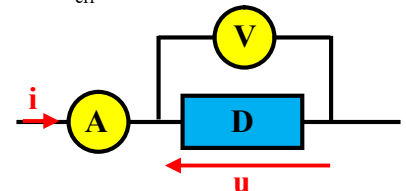
Il effectue donc des oscillations forcées.

2⁰) Impédance d'une portion de circuit :

a - Définition :

L'impédance Z d'une portion de circuit est le rapport de la valeur efficace U_{eff} de la tension entre ses bornes par la valeur efficace I_{eff} de l'intensité du courant qui la traverse.

$$Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U}{I}$$



b - Remarques :

- U_{eff} est mesurée par d'un voltmètre et I_{eff} est mesurée par d'un ampèremètre.
- Dans le S.I, l'impédance Z s'exprime en Ohm (Ω).

$$Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}}{\frac{I_m}{\sqrt{2}}} \longrightarrow Z = \frac{U_m}{I_m}$$

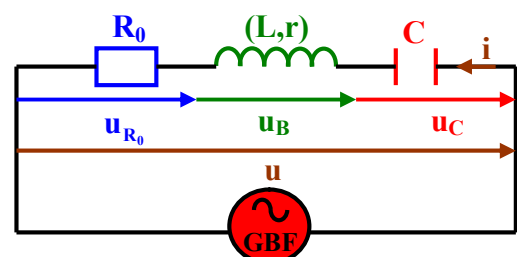
II / Circuit (R,L,C) en régime forcé :

1⁰) Equation différentielle de réponse :

Le générateur de tensions basses fréquences (G.B.F) délivre une tension alternative $u(t)$ de valeur maximale U_m et de pulsation ω_e .

La loi des mailles s'écrit : $u_{R_0} + u_B + u_C - u = 0$

$$\left. \begin{aligned} u_{R_0} &= R_0 \cdot i \\ u_B &= L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_C &= \frac{q}{C} \end{aligned} \right\} \longrightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i + \frac{q}{C} = u$$



or $i = \frac{dq}{dt} \rightarrow q = \int i \cdot dt$, on écrit alors: $L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = u$

on pose $R = (R_0 + r)$, il vient alors que :

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = u$$

C'est l'équation différentielle associée au circuit (R,L,C) en régime forcé.

Remarques :

- La tension excitatrice étant $u(t) = U_m \sin(\omega_e t + \varphi_u)$, l'équation différentielle de réponse admettra une solution sinusoïdale de la forme: $i(t) = I_m \sin(\omega_e t + \varphi_i)$.
- Le circuit oscillant, de pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$, effectue des oscillations forcées de pulsation ω_e .

2⁰) Caractéristiques de réponse :

On peut utiliser la représentation de Fresnel :

- Soit $i(t) = I_m \sin(\omega_e t + \varphi_i)$ l'intensité du courant qui parcourt le circuit :

- à la fonction : $R \cdot i = R \cdot I_m \sin(\omega_e t + \varphi_i) \longrightarrow$ on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V}_1 \left| \begin{array}{l} R \cdot I_m \\ \varphi_i \end{array} \right.$
 - à la fonction : $L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \omega_e \cdot I_m \sin\left(\omega_e t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$ on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V}_2 \left| \begin{array}{l} L \cdot \omega_e \cdot I_m \\ \varphi_i + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$
 - à la fonction : $\frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = \frac{I_m}{C \cdot \omega_e} \sin\left(\omega_e t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$ on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V}_3 \left| \begin{array}{l} \frac{I_m}{C \cdot \omega_e} \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$
 - à la fonction : $u = U_m \sin(\omega_e t + \varphi_u) \longrightarrow$ on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V} \left| \begin{array}{l} U_m \\ \varphi_u \end{array} \right.$
- l'équation différentielle : $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = u$ implique que : $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{V}$

a - Intensité maximale du courant :

Appliquons le théorème de Pythagore :

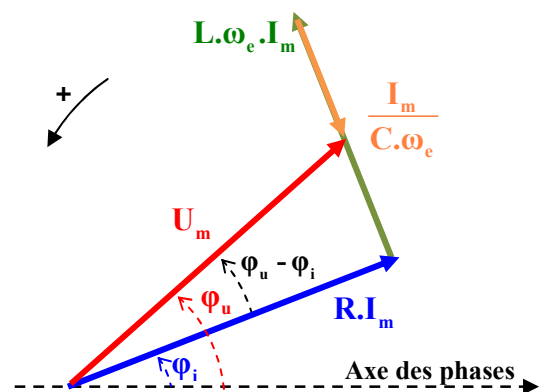
$$\text{On a : } U_m^2 = (R \cdot I_m)^2 + \left[(L \cdot \omega_e \cdot I_m) - \left(\frac{I_m}{C \cdot \omega_e} \right) \right]^2$$

$$\rightarrow U_m^2 = R^2 \cdot I_m^2 + \left[\left(L \cdot \omega_e - \frac{1}{C \cdot \omega_e} \right) \cdot I_m \right]^2$$

$$\rightarrow U_m^2 = I_m^2 \cdot \left[R^2 + \left(L \cdot \omega_e - \frac{1}{C \cdot \omega_e} \right)^2 \right]$$

$$\text{on en déduit que : } I_m^2 = \frac{U_m^2}{R^2 + \left(L \cdot \omega_e - \frac{1}{C \cdot \omega_e} \right)^2}$$

$$\text{et enfin : } I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega_e - \frac{1}{C \cdot \omega_e} \right)^2}}$$



b - Impédance du circuit :

$$Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_m}{I_m} \rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e} \right)^2}$$

Remarque :

- pour une résistance : $Z_R = R$
- pour une inductance : $Z_L = L\omega_e$
- pour une bobine : $Z_B = \sqrt{r^2 + (L\omega_e)^2}$
- pour une capacité : $Z_C = \frac{1}{C\omega_e}$

c - Déphasage courant - tension:

Soit $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ le déphasage entre la tension et le courant :

$$\text{On a : } \text{tg } \Delta\varphi = \frac{\left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e} \right) I_m}{R I_m} \quad \text{donc} \quad \text{tg } \Delta\varphi = \text{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{\left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e} \right)}{R}$$

Remarque :

$$\cos(\Delta\varphi) = \frac{R I_m}{U_m} = \frac{R I_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}} \rightarrow \cos(\Delta\varphi) = \frac{R}{Z}$$

d - Remarque:

Sachant que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et selon la valeur de ω_e , on peut avoir plusieurs cas de figures :

• 1^{er} cas : $\begin{cases} \omega_e < \omega_0 \\ \rightarrow \omega_e^2 < \omega_0^2 \\ \rightarrow \omega_e^2 < \frac{1}{LC} \\ \rightarrow L\omega_e < \frac{1}{C\omega_e} \end{cases}$

$-\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < 0$

Le courant est en avance de phase par rapport à la tension.
Le circuit est dit : **Capacitif**

• 2^{ème} cas : $\begin{cases} \omega_e > \omega_0 \\ \rightarrow \omega_e^2 > \omega_0^2 \\ \rightarrow \omega_e^2 > \frac{1}{LC} \\ \rightarrow L\omega_e > \frac{1}{C\omega_e} \end{cases}$

$0 < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}$

Le courant est en retard de phase par rapport à la tension.
Le circuit est dit : **Inductif**

• 3^{ème} cas : $\begin{cases} \omega_e = \omega_0 \\ \Rightarrow \omega_e^2 = \omega_0^2 \\ \Rightarrow \omega_e^2 = \frac{1}{LC} \\ \Rightarrow L\omega_e = \frac{1}{C\omega_e} \end{cases}$

$\Delta\varphi = 0$

Le courant et la tension sont en concordance de phase.
Le circuit est dit : **Résistif**

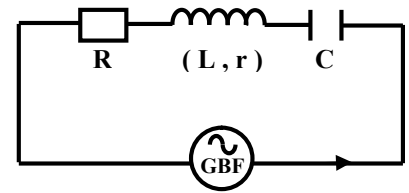
Remarque :

Le facteur $\left(L\omega_c - \frac{1}{C\omega_c} \right)$, exprimé en Ω , est appelé **réactance** du circuit (R,L,C).

Application 1 :

On réalise un montage série comprenant :

- un générateur délivrant une tension $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$.
- un résistor de résistance R.
- une bobine d'inductance L et de résistance interne r négligeable.
- un condensateur de capacité C.



1⁰) On veut visualiser à l'oscilloscope bi-courbes :

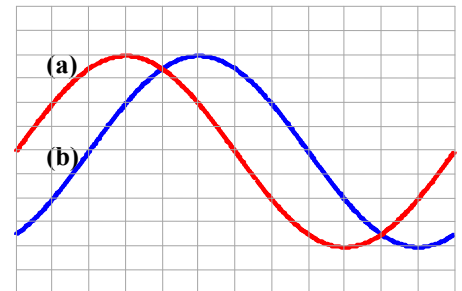
- sur la voie (1) : la tension $u(t)$ délivrée par le générateur.
- sur la voie (2) : la tension $u_{R,L}(t)$ aux bornes de l'ensemble (résistor + bobine).

Reprenre le schéma du circuit et préciser les connexions avec l'oscilloscope nécessaires à cette opération.

2⁰) On donne ci-contre les oscillogrammes ainsi obtenus :

Echelle : - abscisses : $\frac{\pi}{12} \cdot 10^{-3}$ s / division

- ordonnées : $6\sqrt{2}$ V / division



a - Etablir l'équation différentielle qui gère l'intensité du courant électrique qui circule dans le circuit.

b - En exploitant la représentation de Fresnel, identifier la courbe correspondante à chacune des tensions $u(t)$ et $u_{R,L}(t)$.

c - Déterminer les valeurs de ω et de U_m .

3⁰) Montrer que $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur électrique étudié.

4⁰) Un ampèremètre placé en série dans le montage indique une valeur de 48 mA et un voltmètre placé en parallèle aux bornes du condensateur indique une valeur de 24 V.

Déterminer alors les valeurs de C, L et R.

5⁰) a - Calculer l'impédance Z du circuit.

b - Montrer qu'il existe une autre valeur ω' de la pulsation pour laquelle l'impédance Z du circuit garde la même valeur.

Calculer la valeur de ω' .

c - Faire les constructions de Fresnel, relatives aux impédances, respectivement pour la pulsation ω et la pulsation ω' . Commenter le résultat.

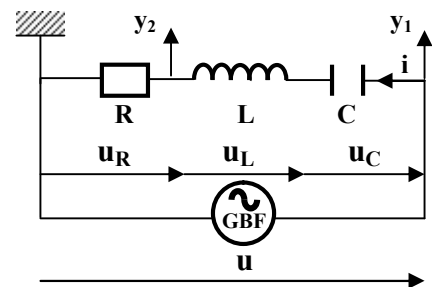
Réponse :

1⁰) Voir schéma ci-contre :

2⁰) a - Appliquons la loi des mailles :

$$u_R + u_L + u_C - u = 0$$

$$\begin{cases} u_R(t) = R \cdot i(t) \\ u_L(t) = L \frac{di}{dt} \quad (r=0) \\ u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{or} \quad q(t) = \int i(t) dt \longrightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{cases}$$



Il vient alors que :

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = u(t)$$

b - D'après les oscillogrammes : $U = U_{R,L}$

D'après la représentation de Fresnel : $u_{R,L}(t)$ est toujours

en avance de phase par rapport à $u(t)$.

On en déduit que : $u(t) \rightarrow$ courbe (b) et $u_{R,L}(t) \rightarrow$ courbe (a)

$$\text{c - } T = 12 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot 10^{-3} = \pi \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi \cdot 10^{-3}} \text{ et } \omega = 2000 \text{ rad.s}^{-1}$$

Graphiquement: $U_m = 4 \cdot 6\sqrt{2}$ et $U_m = 24\sqrt{2} \text{ V}$

$$\text{On a : } U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{A.N.}} U = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \text{ et } U = 24 \text{ V.}$$

$$3^0) U = U_{R,L} \rightarrow \frac{I}{C\omega} = 2 \cdot L \cdot \omega \cdot I \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{2 \cdot L \cdot C} = \frac{\omega_0^2}{2} \rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

$$4^0) \text{ D'après les oscillogrammes : } |\varphi_a - \varphi_b| = 2\pi \frac{|\Delta t_{a,b}|}{T} = 2\pi \frac{2}{12} = \frac{\pi}{3} \text{ et } U = U_{R,L} \rightarrow |\Delta\varphi| = |\varphi_u - \varphi_i| = \frac{\pi}{6}$$

Remarque : $U_C = 24 \text{ V}$ et $U = U_{R,L} = 24 \text{ V} \rightarrow$ triangle équilatéral $\rightarrow |\Delta\varphi| = |\varphi_u - \varphi_i| = \frac{\pi}{6}$

$$* \cos \frac{\pi}{6} = \frac{R \cdot I}{U} \rightarrow R = \frac{U \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{I} \xrightarrow{\text{A.N.}} R = \frac{24 \cdot 0,866}{48 \cdot 10^{-3}} \text{ et } R = 433 \Omega.$$

$$* U_C = \frac{I}{C\omega} \rightarrow C = \frac{I}{U_C \cdot \omega} \xrightarrow{\text{A.N.}} C = \frac{48 \cdot 10^{-3}}{24 \cdot 2000} \text{ et } C = 10^{-6} \text{ F} = 1 \mu\text{F}.$$

$$* \omega_0^2 = 2\omega^2 \rightarrow \frac{1}{L \cdot C} = 2\omega^2 \rightarrow L = \frac{1}{2\omega^2 \cdot C} \xrightarrow{\text{A.N.}} L = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}} \text{ et } L = 0,125 \text{ H}.$$

$$5^0) \text{ a - } Z = \frac{U}{I} \xrightarrow{\text{A.N.}} Z = \frac{24}{48 \cdot 10^{-3}} \text{ et } Z = 500 \Omega.$$

$$\text{Remarque : } \cos \Delta\varphi = \frac{R}{Z} \rightarrow Z = \frac{R}{\cos \Delta\varphi} \xrightarrow{\text{A.N.}} Z = \frac{433}{0,866} \text{ et } Z = 500 \Omega.$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \xrightarrow{\text{A.N.}} Z = \sqrt{(433)^2 + (250 - 500)^2} \text{ et } Z = 499,98 \Omega.$$

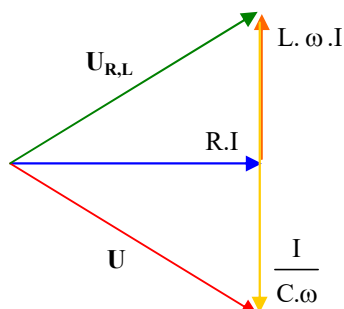
$$\text{b - } Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \rightarrow \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right| = \sqrt{Z^2 - R^2} \text{ il existe alors une valeur } \omega' \text{ telle que :}$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C\omega'} - L\omega' \rightarrow L(\omega + \omega') = \frac{1}{C\omega} + \frac{1}{C\omega'} = \frac{(\omega + \omega')}{C\omega\omega'} \rightarrow L \cdot C = \frac{1}{\omega\omega'} \text{ et } \omega\omega' = \frac{1}{L \cdot C} = \omega_0^2$$

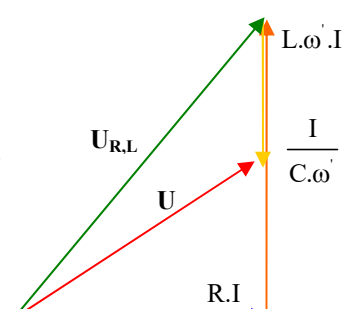
$$\omega' = \frac{\omega_0^2}{\omega} \xrightarrow{\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}} \omega' = \sqrt{2} \cdot \omega_0 \text{ ou } \omega' = 2 \cdot \omega \xrightarrow[\omega = 2000 \text{ rad.s}^{-1}]{\text{A.N.}} \omega' = 4000 \text{ rad.s}^{-1}$$

c -

$\omega < \omega_0$
Circuit capacitif



$\omega' > \omega_0$
Circuit inductif



III / La résonance d'intensité :

1⁰) La pulsation de résonance :

On a : $I = \frac{U}{Z}$ avec $U = \text{constante}$.

A la résonance, l'intensité efficace I du courant est maximale donc l'impédance Z est minimale.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e} \right)^2} \text{ est minimale} \rightarrow \left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e} \right) = 0 \rightarrow L\omega_e = \frac{1}{C\omega_e} \rightarrow \omega_e^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

La résonance d'intensité a lieu pour une pulsation $\omega_e = \omega_r$ telle que :

$$\omega_r = \omega_0 \text{ (pulsation propre du circuit)}$$

Remarques :

- La pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est indépendante de la valeur de la résistance R .
- $\omega_r = \omega_0 \rightarrow N_r = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
- A la résonance d'intensité : $Z = R$ et $\Delta\varphi = 0$.

2⁰) Influence de la résistance :

A la résonance d'intensité on a : $Z = R \rightarrow I_r = \frac{U}{R}$

l'intensité à la résonance est d'autant plus importante que la résistance R est faible :

a - Résonance aiguë :

La résistance R est très faible.

La courbe $I_m = f(\omega_e)$ présente un pic net à la résonance.

b - Résonance floue :

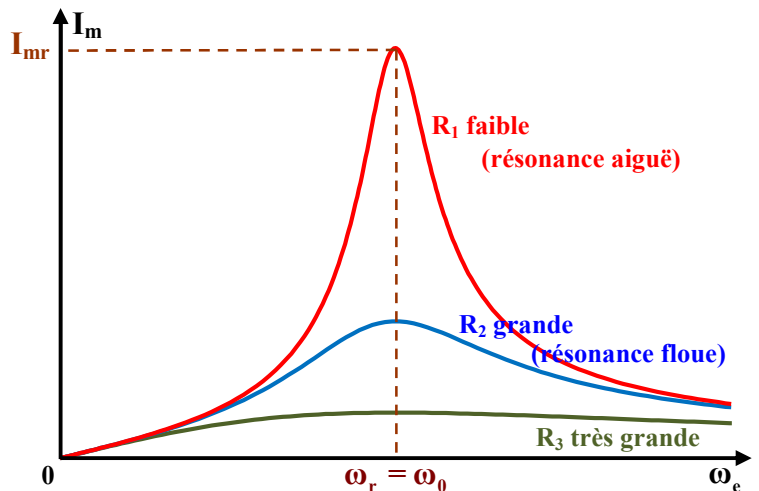
La résistance R est grande.

L'intensité reste faible à la résonance.

c - Résonance très amortie :

La résistance R est très grande.

L'intensité, très faible, est pratiquement indépendante de la variation de ω_e .



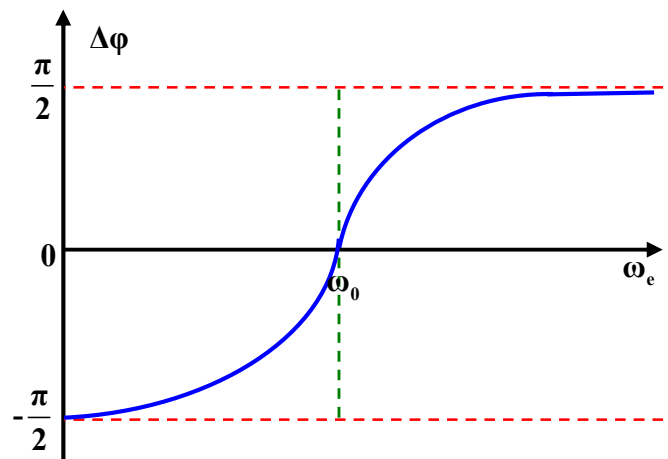
3⁰) Variation de $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ en fonction de ω_e :

$$\text{On a : } \text{tg } \Delta\varphi = \text{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{\left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e} \right)}{R}$$

$$* \omega_e \rightarrow 0 \rightarrow \text{tg} \Delta\varphi \rightarrow -\infty \rightarrow \Delta\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$* \omega_e = \omega_0 \rightarrow \text{tg} \Delta\varphi = 0 \rightarrow \Delta\varphi = 0$$

$$* \omega_e \rightarrow \infty \rightarrow \text{tg} \Delta\varphi \rightarrow +\infty \rightarrow \Delta\varphi \rightarrow +\frac{\pi}{2}$$



Remarques :

- Pour $\omega_e < \omega_0$, $\Delta\varphi < 0$: la tension est en retard de phase par rapport au courant :
le circuit est capacitif.
- Pour $\omega_e = \omega_0$, $\Delta\varphi = 0$: la tension est en phase avec le courant :
le circuit est résistif : c'est la **résonance d'intensité**.
- Pour $\omega_e > \omega_0$, $\Delta\varphi > 0$: la tension est en avance de phase par rapport au courant :
le circuit est inductif.

4⁰) La surtension :

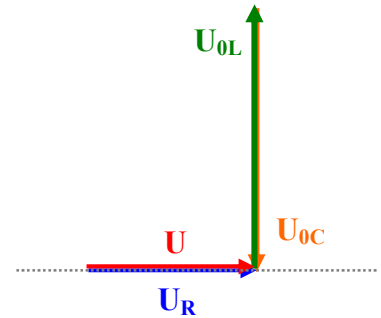
A la résonance d'intensité on a :

$$L.\omega_0 = \frac{1}{C.\omega_0} \rightarrow Z_{0L} = Z_{0C} \rightarrow Z_{0L}.I_r = Z_{0C}.I_r \rightarrow U_{0L} = U_{0C}$$

On définit le coefficient de surtension par le rapport : $Q = \frac{U_{0L}}{U} = \frac{U_{0C}}{U}$

Sachant que $U = R.I_r$, il vient que :

$$Q = \frac{L.\omega_0}{R} = \frac{1}{C.\omega_0.R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



Si **Q est grand**, la tension $U_{0L} = U_{0C}$ est grande devant la tension U à la résonance ; ceci peut amener au claquage du condensateur et à la détérioration du circuit : c'est le **phénomène de surtension**.

Application 2 :

On considère le circuit (R,L,C) série suivant :

- $R = 20 \, \Omega$
- $L = 0,676 \, \text{H}$
- $C = 15 \, \mu\text{F}$

Ce circuit est alimenté par une tension alternative sinusoïdale $u(t) = 6\sqrt{2} \sin(100\pi.t) \, (\text{V})$.

1⁰) Montrer que le circuit est à la résonance d'intensité.

2⁰) a - Calculer la valeur maximale I_{m0} de l'intensité du courant qui parcourt le circuit.

b - Ecrire l'expression en fonction du temps $i(t)$ l'intensité du courant qui parcourt le circuit.

3⁰) Calculer le coefficient de surtension Q du circuit.

4⁰) Le condensateur ne peut supporter qu'une tension efficace maximale de 60 V.

Est-ce qu'il y a risque de claquage du condensateur ? Justifier la réponse.

Réponse :

$$1^0) \begin{cases} \omega = 100\pi \, \text{rad.s}^{-1} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}} = 314 \, \text{rad.s}^{-1} \end{cases} \xrightarrow{\omega=\omega_0} \text{résonance d'intensité}$$

$$2^0) \text{ a - Résonance d'intensité } \rightarrow Z = R \rightarrow I_{m0} = \frac{U_m}{R} . \text{ A.N : } I_{m0} = \frac{6\sqrt{2}}{20} \text{ et } I_{m0} = 424,26.10^{-3} \, \text{A}$$

$$\text{b - Résonance d'intensité } \rightarrow i(t) \text{ en phase avec } u(t) \rightarrow i(t) = 424,26.10^{-3} \sin(100\pi.t) \, (\text{A})$$

$$3^0) Q = \frac{L.\omega_0}{R} \xrightarrow{\text{A.N}} Q = \frac{0,676.100\pi}{20} \text{ et } Q = 10,6.$$

$$4^0) \text{ A la résonance d'intensité : } Q = \frac{U_{C0}}{U} \rightarrow U_{C0} = Q.U \xrightarrow{\text{A.N}} U_{C0} = 10,6.6 \text{ et } U_{C0} = 63,64 \, \text{V}$$

Or $U_{C \max} = 60 \, \text{V} \rightarrow U_{C \max} < U_{C0}$ donc il y a risque de claquage du condensateur.

IV / Le facteur de puissance :

1⁰) La puissance moyenne :

A chaque instant, le circuit reçoit de la part du générateur une puissance instantanée $p(t) = u(t).i(t)$

Soient $i(t) = I_m \sin(\omega_e.t + \varphi_i)$ et $u(t) = U_m \sin(\omega_e.t + \varphi_u)$.

$$p(t) = I_m \sin(\omega_e.t + \varphi_i) \cdot U_m \sin(\omega_e.t + \varphi_u) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} [\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega_e.t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

$$\text{soit : } \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i \rightarrow p(t) = U.I. [\cos \Delta\varphi - \cos(2\omega_e.t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

Pendant une période, l'énergie absorbée par le circuit est : $W_T = \int_0^T p(t).dt$

$$W_T = U.I. \int_0^T \cos \Delta\varphi .dt - U.I. \int_0^T \cos(2\omega_e.t + \varphi_u + \varphi_i).dt = U.I. \cos \Delta\varphi .T$$

La puissance moyenne absorbée par le circuit est définie par : $P = \frac{W_T}{T}$

$$\mathbf{P = U.I.\cos \Delta\varphi} , \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

2⁰) Le facteur de puissance :

- La puissance moyenne $P = U.I.\cos \varphi$ est réellement consommée dans le circuit, on l'appelle **puissance réelle** ou **puissance active** et elle s'exprime en Watt (W).
- Le produit $U.I$ s'obtient par mesures à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre, il est alors appelé **puissance apparente** et il s'exprime en Volt.Ampère (V.A).
- Le facteur $\cos \Delta\varphi$ permet de calculer la puissance réelle à partir de la mesure de la puissance apparente :
Le facteur $\cos \Delta\varphi$ est alors appelé **facteur de puissance** :

$$\cos \Delta\varphi = \frac{R}{Z}$$

Remarques :

- $P = U.I.\cos \Delta\varphi = U.I. \frac{R}{Z}$ or $U = Z.I \rightarrow P = R.I^2$

La puissance moyenne est uniquement consommée par effet Joule aux bornes de la résistance.
On en déduit qu'**une inductance pure ou une capacité ne consomme pas d'énergie**.

- A la résonance de puissance, P est maximale $\rightarrow \cos \Delta\varphi = 1 \rightarrow Z = R$

$$\text{or } Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}\right)^2} \text{ donc si } Z = R \rightarrow \omega_e^2 = \frac{1}{L.C} = \omega_0^2$$

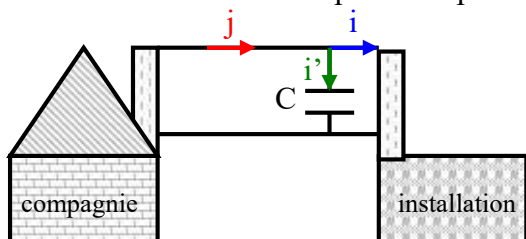
La résonance de puissance a lieu pour $\omega_e = \omega_R$ telle que : $\omega_r = \omega_0$ **pulsation propre** du circuit.

A la résonance de puissance on a : $\mathbf{P = \frac{U_m \cdot I_m}{2} = U.I.}$

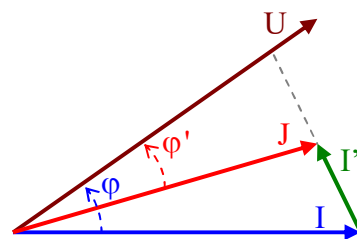
- Une installation électrique de puissance $P = U.I.\cos \varphi$, $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, demande une intensité $I = \frac{P}{U.\cos \varphi}$

d'autant plus grande que $\cos \varphi$ est petit donc la puissance $P_{th} = R.I^2$ perdue dans la ligne qui lie l'installation à la compagnie d'électricité est d'autant plus importante que $\cos \varphi$ est petit (à la charge de la compagnie).

- Pour une installation à caractère inductif, $u(t)$ est en avance de phase sur $i(t)$. On améliore le facteur de puissance en branchant une capacité en parallèle avec l'installation.



$$\varphi' < \varphi \rightarrow \cos \varphi' > \cos \varphi \rightarrow J < I \rightarrow P'_{th} < P_{th}$$



Application 3 :

Un circuit est constitué d'un résistor de résistance R et d'une bobine d'inductance L et de résistance interne négligeable.

1⁰) On alimente le circuit sous une tension continue de 6 V. l'intensité du courant est 0,2 A.

Déterminer la valeur de la résistance R .

2⁰) Le circuit est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace 6 V et de fréquence 50 Hz.

L'intensité efficace du courant est 0,1 A. Calculer :

a - la puissance consommée

b - le facteur de puissance

c - l'inductance L de la bobine

3⁰) Un condensateur associé en série dans le circuit ramène le facteur de puissance à 0,8. Calculer :

a - l'impédance du circuit

b - les deux valeurs possibles de la capacité du condensateur

c - la puissance consommée si la tension efficace aux bornes de l'ensemble reste égale à 6 V.

Réponse :

$$1^0) U = R.I \rightarrow R = \frac{U}{I} \xrightarrow{\text{A.N}} R = \frac{6}{0,2} \text{ et } R = 30 \, \Omega$$

$$2^0) \text{ a - } P = R.I^2 \xrightarrow{\text{A.N}} P = 30.(0,1)^2 \text{ et } P = 0,3 \text{ W.}$$

$$\text{b - } P = R.I^2 = U.I.\cos \Delta\varphi \rightarrow \cos \Delta\varphi = \frac{R.I}{U}$$

$$\text{A.N : } \cos \Delta\varphi = \frac{30.0,1}{6} \text{ et } \cos \Delta\varphi = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\text{c - } \cos \Delta\varphi = \frac{R}{Z} \rightarrow Z = \frac{R}{\cos \Delta\varphi} \xrightarrow{\text{A.N}} Z = \frac{30}{0,5} \text{ et } Z = 60 \, \Omega.$$

$$Z^2 = R^2 + L^2.\omega^2 \rightarrow L.\omega = \sqrt{Z^2 - R^2} \text{ et } L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi N}$$

$$\text{A.N : } L = \frac{\sqrt{3600 - 90}}{2\pi.50} \text{ et } L = 0,165 \text{ H.}$$

$$2^0) \text{ a - } Z = \frac{R}{\cos \Delta\varphi} \xrightarrow{\text{A.N}} Z = \frac{30}{0,8} \text{ et } Z = 37,5 \, \Omega$$

$$\text{b - } Z^2 = R^2 + \left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega} \right)^2 \rightarrow \left| L.\omega - \frac{1}{C.\omega} \right| = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

Il y a deux valeurs de C qui vérifient cette relation :

$$* L.\omega - \frac{1}{C.\omega} = \sqrt{Z^2 - R^2} \rightarrow \frac{1}{C.\omega} = L.\omega - \sqrt{Z^2 - R^2} \rightarrow C = \frac{1}{\omega(L.\omega - \sqrt{Z^2 - R^2})}$$

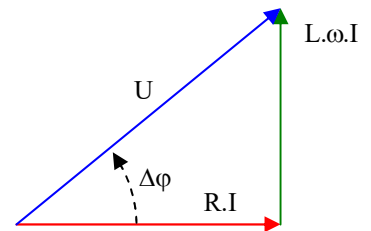
$$\text{A.N : } C = \frac{1}{100\pi(0,165.100\pi - \sqrt{(37,5)^2 - (30)^2})} \text{ et } C = 1,09.10^{-4} \text{ F}$$

$$* \frac{1}{C'.\omega} - L.\omega = \sqrt{Z^2 - R^2} \rightarrow \frac{1}{C'.\omega} = L.\omega + \sqrt{Z^2 - R^2} \rightarrow C' = \frac{1}{\omega(L.\omega + \sqrt{Z^2 - R^2})}$$

$$\text{A.N : } C' = \frac{1}{100\pi(0,165.100\pi + \sqrt{(37,5)^2 - (30)^2})} \text{ et } C' = 4,28.10^{-5} \text{ F}$$

$$\text{c - } U = 6 \text{ V} \rightarrow I = \frac{U}{Z} \xrightarrow{\text{A.N}} I = \frac{6}{37,5} \text{ et } I = 0,16 \text{ A}$$

$$P = R.I^2 \xrightarrow{\text{A.N}} P = 30.(0,16)^2 \text{ et } P = 0,77 \text{ W}$$



V / Echange d'énergie à la résonance d'intensité :

L'énergie emmagasinée dans le circuit (R,L,C) est : $E = E_L + E_C = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2$.

Soient :

- $i(t) = I_{m0} \sin(\omega_0 \cdot t)$ l'intensité du courant qui parcourt le circuit à la résonance d'intensité.
- $u_C(t) = \frac{1}{C \cdot \omega_0} \cdot I_{m0} \sin\left(\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$ la tension aux bornes de la capacité à la résonance d'intensité.

$$\text{donc } E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot [I_{m0} \sin(\omega_0 \cdot t)]^2 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left[-\frac{I_{m0}}{C \cdot \omega_0} \cos(\omega_0 \cdot t)\right]^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_{m0}^2 \sin^2(\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{I_{m0}^2}{C \cdot \omega_0^2} \cos^2(\omega_0 \cdot t)$$

$$\text{sachant que : } I_0^2 = \frac{I_{m0}^2}{2} \text{ et } L = \frac{1}{C \cdot \omega_0^2}, \text{ il vient alors que : } E = L \cdot I_0^2 \cdot [\sin^2(\omega_0 \cdot t) + \cos^2(\omega_0 \cdot t)] = L \cdot I_0^2$$

A la résonance d'intensité, le circuit emmagasine une énergie constante $E = L \cdot I_0^2 = \frac{I_0^2}{C \cdot \omega_0^2}$.

Le rôle du générateur est de compenser la perte d'énergie par effet Joule aux bornes de la résistance.

Remarque :

A la résonance d'intensité, le générateur compense, à chaque période T_0 , l'énergie $W_{th0} = R \cdot I_0^2 \cdot T_0$ perdue par effet Joule dans la résistance.

$$\text{Soit } \rho = \frac{E}{R \cdot I_0^2 \cdot T_0} = \frac{L \cdot I_0^2}{R \cdot I_0^2 \cdot T_0} = \frac{L}{R \cdot T_0} = \frac{L \cdot \omega_0}{2\pi \cdot R} = \frac{Q}{2\pi} \longrightarrow Q = 2\pi \cdot \rho$$

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{énergie emmagasinée}}{\text{énergie perdue par période}}$$

Q est appelé **facteur de qualité** du circuit.

Q caractérise l'acuité de la résonance (la résonance est d'autant plus aiguë que Q est grand).

VI / La résonance de charge :

Les oscillations électriques forcées sont gérées par l'équation différentielle :

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = u(t) \text{ avec } u(t) = U_m \sin(\omega_e t + \varphi_u)$$

de solution générale : $i(t) = I_m \sin(\omega_e t + \varphi_i)$.

$$\text{Sachant que : } i = \frac{dq}{dt}, \text{ il vient que : } \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{di}{dt} \text{ et } q = \int i \cdot dt$$

L'équation différentielle peut s'écrire alors :

$$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u(t) \text{ avec } u(t) = U_m \sin(\omega_e t + \varphi_u)$$

elle admet comme solution : $q(t) = Q_m \sin(\omega_e t + \varphi_q)$

$$\text{or on a : } q = \int i \cdot dt \longrightarrow q(t) = \frac{I_m}{\omega_e} \sin\left(\omega_e t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$$

la charge électrique s'exprime alors par : $q(t) = Q_m \sin(\omega_e t + \varphi_q)$ avec $Q_m = \frac{I_m}{\omega_e}$ et $\varphi_q = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$

Remarques :

$$\bullet \quad Q_m = \frac{I_m}{\omega_e} \longrightarrow Q_m = \frac{U_m}{\omega_e \cdot \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega_e - \frac{1}{C \cdot \omega_e}\right)^2}} \text{ et } Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 \cdot \omega_e^2 + \left(L \cdot \omega_e^2 - \frac{1}{C}\right)^2}}$$

- $\operatorname{tg}(\varphi_u - \varphi_q) = \operatorname{tg}\left(\varphi_u - \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot g(\varphi_u - \varphi_i) = -\frac{R}{L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}}$ et $\operatorname{tg}(\varphi_u - \varphi_q) = \frac{R\omega_e}{\frac{1}{C} - L\omega_e^2}$

- A la résonance de charge, Q_m est maximale $\rightarrow \sqrt{R^2\omega_e^2 + \left(L\omega_e^2 - \frac{1}{C}\right)^2}$ est minimale

$$y = R^2\omega_e^2 + \left(L\omega_e^2 - \frac{1}{C}\right)^2 \min \rightarrow \frac{dy}{d\omega_e} = 0 \rightarrow 2R^2\omega_e + 2\left(L\omega_e^2 - \frac{1}{C}\right) \cdot 2L\omega_e = 0$$

$$\rightarrow R^2 + 2\left(L\omega_e^2 - \frac{1}{C}\right)L = 0 \rightarrow R^2 + 2L^2\omega_e^2 - 2\frac{L}{C} = 0 \rightarrow 2L^2\omega_e^2 = \frac{2L}{C} - R^2 \rightarrow \omega_e^2 = \frac{2L}{2L^2C} - \frac{R^2}{2L^2}$$

$$\rightarrow \omega_e^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} \xrightarrow{\frac{1}{LC} = \omega_0^2} \omega_e^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}$$

A la résonance de charge, on a : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}$

La **résonance de charge** a lieu pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r \neq \omega_0$ **pulsation propre** du circuit oscillant.

- Sachant qu'aux bornes du condensateur : $u_c = \frac{q}{C}$, l'équation différentielle peut aussi s'écrire :

$$L.C.\frac{d^2u_c}{dt^2} + R.C.\frac{du_c}{dt} + u_c = u$$

de solution : $u(t) = U_{cm} \sin(\omega_e t + \varphi_{u_c})$ avec $U_{cm} = \frac{I_m}{C\omega_e}$ et $\varphi_{u_c} = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$

Application 4 :

La tension aux bornes du condensateur d'un circuit (R,L,C) série est gérée par l'équation différentielle :

$$L.C.\frac{d^2u_c}{dt^2} + R.C.\frac{du_c}{dt} + u_c = u \text{ où } u \text{ est la tension d'alimentation du circuit, de valeur efficace } U \text{ et de pulsation } \omega = 100\pi \text{ rad.s}^{-1}.$$

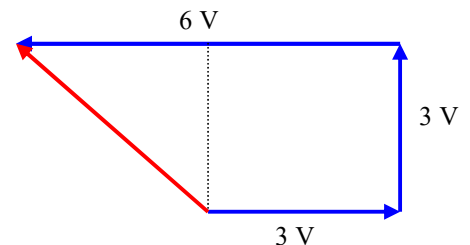
1⁰) On donne ci-contre la construction de Fresnel correspondante.

a - Donner l'expression du module de chacun des vecteurs de Fresnel.

b - Montrer que $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ où ω_0 est la pulsation propre du circuit.

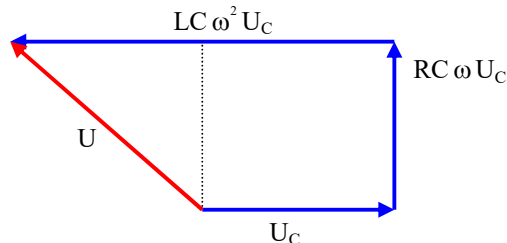
c - Calculer la valeur efficace U de la tension d'alimentation.

2⁰) Sachant que $R = 100 \Omega$, calculer les valeurs de L et de C.



Réponse :

1⁰) a -



b - $L.C.\omega^2.U_C = 2.U_C \rightarrow L.C.\omega^2 = 2 \rightarrow \omega^2 = \frac{2}{L.C} = 2.\omega_0^2$ et $\omega = \sqrt{2}.\omega_0$.

c - $U^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \rightarrow U = \sqrt{18}$ et $U = 4,18 \text{ V}$.

2⁰) $R.C.\omega.U_C = U_C \rightarrow R.C.\omega = 1 \rightarrow C = \frac{1}{R.\omega} \xrightarrow{\text{A.N}} C = \frac{1}{100.100\pi}$ et $C = 31,83.10^{-6} \text{ F}$.

$\omega_0^2 = \frac{1}{L.C} \rightarrow L = \frac{2}{C.\omega^2} \xrightarrow{\text{A.N}} L = \frac{2}{31,84.10^{-6}.(100\pi)^2}$ et $L = 0,64 \text{ H}$.

Pour en savoir plus

1⁰) Construction de Fresnel relative aux impédances :

Les caractéristiques de réponse d'un circuit (R,L,C) en régime forcé ont été déduites à partir de la construction de Fresnel relative aux valeurs **maximales** des tensions. On trouve :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \text{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{\left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}\right)}{R}$$

Sachant que : $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ et $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ et par un changement d'échelle

(échelle : $1/\sqrt{2}$), on peut envisager une construction de Fresnel relative aux valeurs **efficaces** des tensions. On trouve :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \text{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{\left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}\right)}{R}$$

Sachant que : $U = Z \cdot I$ et par un changement d'échelle (échelle : $1/I$), on peut envisager une construction de Fresnel relative aux impédances. On trouve :

$$Z = \sqrt{Z_R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \quad \text{et} \quad \text{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{(Z_L - Z_C)}{Z_R}$$

Remarque :

$$\bullet \quad Z(\omega_e) = \sqrt{Z_R^2 + [Z_L(\omega_e) - Z_C(\omega_e)]^2}$$

A la résonance d'intensité, I est max $\xrightarrow{I=\frac{U}{Z}}$ Z est min $\rightarrow Z_L = Z_C$

$$\rightarrow Z = Z_R = R \quad \text{et} \quad L\omega_e = \frac{1}{C\omega_e} \rightarrow \omega_e^2 = \frac{1}{L.C} \omega_0^2 \quad \text{et} \quad \omega_e = \omega_0$$

$$\bullet \quad \text{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{(Z_L - Z_C)}{Z_R} \xrightarrow{(\varphi_u - \varphi_i) = \Delta\varphi} (Z_L - Z_C) = Z_R \cdot \text{tg}\Delta\varphi$$

$$\rightarrow Z = \sqrt{Z_R^2 + Z_R^2 \cdot (\text{tg}\Delta\varphi)^2} \quad \text{et} \quad Z = Z_R \cdot \sqrt{1 + (\text{tg}\Delta\varphi)^2}$$

$$\text{On a : } I = \frac{U}{Z} \xrightarrow{Z_R R} I = \frac{U}{R \cdot \sqrt{1 + (\text{tg}\Delta\varphi)^2}}$$

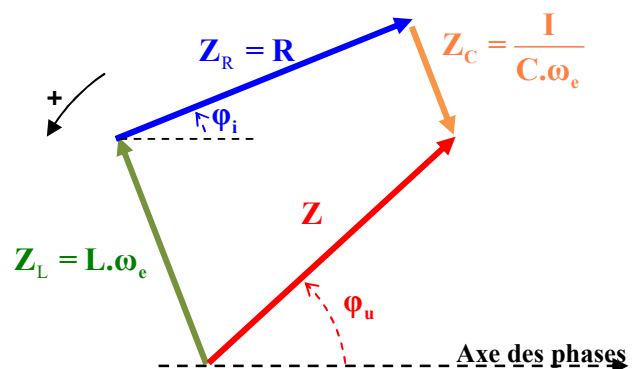
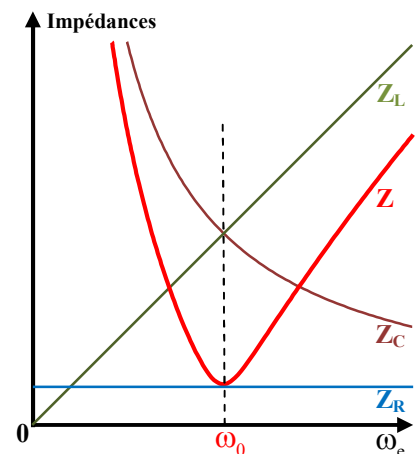
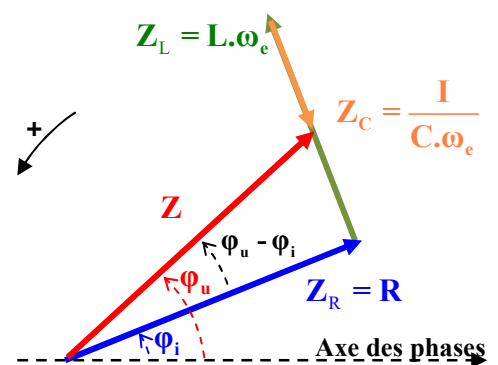
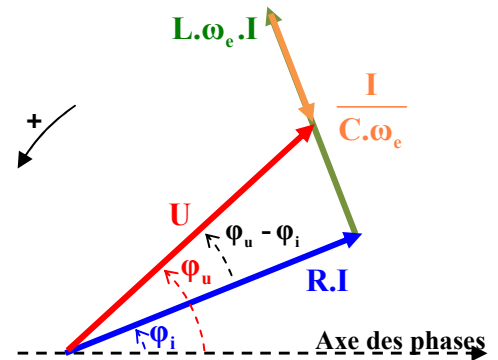
• Considérons la construction de Fresnel suivante :

$$\text{On a : } -\frac{\pi}{2} \leq (\varphi_u - \varphi_i) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{On a : } i = C \cdot \frac{du_c}{dt} \rightarrow \varphi_i = \varphi_{u_c} + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \left(\varphi_u - \varphi_{u_c} - \frac{\pi}{2} \right) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq (\varphi_u - \varphi_{u_c}) \leq \pi$$

La tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur **est toujours en retard de phase** par rapport la tension $u(t)$ aux bornes du générateur.



2⁰) Exploitation de la courbe de résonance d'intensité :

- A la résonance d'intensité, $Z = R$ le circuit est résistif.

$$\rightarrow I_r = \frac{U}{R} \text{ et } R = \frac{U}{I_r}$$

- On a : $Z = \frac{U}{I}$. Pour une même valeur de I , on doit avoir la même valeur de Z :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}\right)^2} \rightarrow Z^2 = R^2 + \left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}\right)^2$$

$$\left(L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}\right)^2 = Z^2 - R^2 \text{ donc } \left|L\omega_e - \frac{1}{C\omega_e}\right| = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

Il existe deux valeurs de ω_e qui vérifient cette équation :

$$* \frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1 = \sqrt{Z^2 - R^2} \rightarrow L\omega_1^2 + \sqrt{Z^2 - R^2}\omega_1 - \frac{1}{C} = 0 \rightarrow \omega_1 = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2L} \left(\sqrt{1 + \frac{4L}{C(Z^2 - R^2)}} - 1 \right)$$

$$* L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2} = \sqrt{Z^2 - R^2} \rightarrow L\omega_2^2 - \sqrt{Z^2 - R^2}\omega_2 - \frac{1}{C} = 0 \rightarrow \omega_2 = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2L} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4L}{C(Z^2 - R^2)}} \right)$$

Remarques :

*

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{Z^2 - R^2}{4L^2} \left[\sqrt{1 + \frac{4L}{C(Z^2 - R^2)}} - 1 + \frac{4L}{C(Z^2 - R^2)} + 1 - \sqrt{1 + \frac{4L}{C(Z^2 - R^2)}} \right] = \frac{Z^2 - R^2}{4L^2} \cdot \frac{4L}{C(Z^2 - R^2)} = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$* \frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1 = L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2} \rightarrow L(\omega_1 + \omega_2) = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{C\omega_1\omega_2} \rightarrow \omega_1\omega_2 = \frac{1}{LC} \text{ et } \omega_1\omega_2 = \omega_0^2$$

$$\begin{cases} \omega_1\omega_2 = \omega_0^2 \\ \omega_1 < \omega_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 < \omega_0 : \text{ le circuit est capacitif} \\ \omega_2 > \omega_0 : \text{ le circuit est inductif} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Cas particulier où } I = \frac{I_r}{\sqrt{2}} \rightarrow Z = R\sqrt{2} \text{ et } Z^2 = 2R^2 ; \text{ il vient alors que : } \begin{cases} \omega_1 = \frac{R}{2L} \left[\sqrt{1 + \frac{4L}{CR^2}} - 1 \right] \\ \omega_2 = \frac{R}{2L} \left[\sqrt{1 + \frac{4L}{CR^2}} + 1 \right] \end{cases}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \rightarrow \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} \xrightarrow{Q = \frac{L\omega_0}{R}} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \xrightarrow{\omega = 2\pi N} \frac{N_2 - N_1}{N_0} = \frac{1}{Q}$$

On définit la **bande passante du circuit** (R, L, C) l'intervalle $[N_1, N_2]$ de fréquences dans lequel $I \geq \frac{I_r}{\sqrt{2}}$.

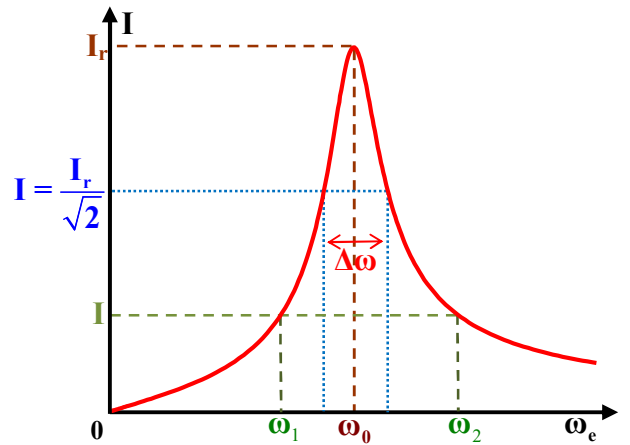
Soit : $\Delta N = N_2 - N_1$ la **largeur de la bande passante**, le facteur de qualité du circuit s'exprime par : $Q = \frac{N_0}{\Delta N}$.

Remarques :

$$* \Delta N = \frac{R}{2\pi L} \rightarrow \text{la largeur de la bande passante est proportionnelle à } R.$$

$$* Q \text{ caractérise l'acuité de la résonance : } \begin{cases} \text{si } Q \text{ est grand } (\Delta N \text{ petite}), \text{ la résonance est aiguë} \\ \text{si } Q \text{ est petit } (\Delta N \text{ grande}), \text{ la résonance est floue} \end{cases}$$

* Un circuit est d'autant plus sélectif que son facteur de qualité Q est plus grand.



* Si le circuit est très sélectif $\rightarrow Q$ est très grand $\rightarrow$ à la résonance d'intensité, la tension aux bornes du condensateur $U_{RC} = Q.U$ (Q désigne ici le coefficient de surtension) peut devenir très grande et le risque de claquage du condensateur devient très grand.

3⁰ Etude énergétique :

a - Puissance électrique en régime sinusoïdal forcé :

A chaque instant, le circuit (R,L,C) reçoit de la part du générateur une puissance électrique $p(t) = u(t).i(t)$.

Soient $u(t) = U_m \sin(\omega_e t)$ et $i(t) = I_m \sin(\omega_e t + \varphi) \rightarrow p(t) = U.I. [\cos \varphi - \cos(2\omega_e t + \varphi)]$

La puissance instantanée $p(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation $\omega = 2\omega_e$ $\left(T = \frac{T_e}{2}\right)$.

La **valeur moyenne** de $p(t)$ sur une période T_e :

$$\langle p(t) \rangle = \langle U.I. \cos \varphi \rangle - \langle U.I. \cos(2\omega_e t + \varphi) \rangle$$

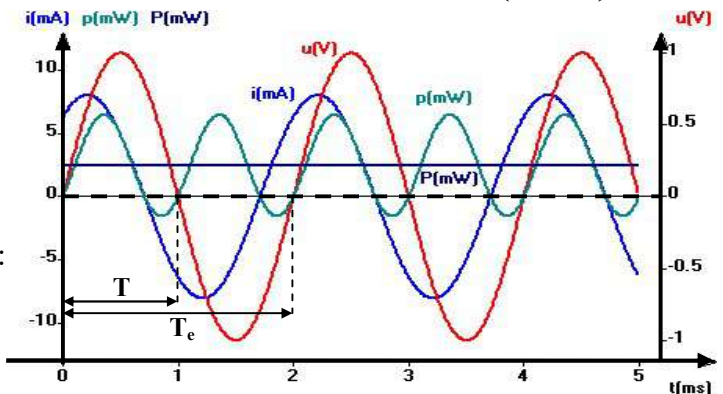
$$\begin{cases} \langle U.I. \cos \varphi \rangle = U.I. \cos \varphi \\ \langle U.I. \cos(2\omega_e t + \varphi) \rangle = 0 \end{cases} \rightarrow P = \langle p(t) \rangle = U.I. \cos \varphi$$

La puissance moyenne consommée par le circuit est :

$$P = U.I. \cos \varphi$$

Remarques :

- * Graphiquement, la valeur moyenne d'une fonction $f(t)$ sur une durée Δt est égale au quotient de l'aire comprise entre la courbe représentative de $f(t)$ et l'axe des abscisses par l'intervalle de temps Δt .
- * La valeur moyenne d'une constante est la constante elle-même.
- * la valeur moyenne d'une somme est la somme des valeurs moyennes.



Remarques :

$$\bullet P = U.I. \cos \varphi \xrightarrow[\substack{\cos \varphi = \frac{R}{Z} \\ U = Z.I}]{\substack{\cos \varphi = \frac{R}{Z} \\ U = Z.I}} P = Z.I^2 \cdot \frac{R}{Z} \quad \text{et} \quad P = R.I^2$$

La puissance moyenne consommée par le circuit est dissipée par effet Joule dans les résistances. Les inductances pures et les condensateurs ne consomment donc pas d'énergie.

- La période T_e étant très faible, on peut exprimer une durée Δt par :

$$\Delta t = n.T_e + \varepsilon, \varepsilon \ll T_e \rightarrow \Delta t \simeq n.T_e, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

L'énergie consommée par le circuit sur une durée Δt est :

$$E_{\text{reçue}}(\Delta t) = K.E_{\text{reçue}}(T_e) = n.[U.I. \cos \varphi.T_e] = U.I. \cos \varphi [n.T_e] \rightarrow E_{\text{reçue}}(\Delta t) = P.\Delta t$$

b - Echange d'énergie entre le générateur et le circuit (R,L,C) :

- L'énergie emmagasinée par le circuit (R,L,C) est $E = E_L + E_C \rightarrow E = \frac{1}{2}.L.i^2 + \frac{1}{2}.\frac{q^2}{C}$.

$$\frac{dE}{dt} = L.i.\left(\frac{di}{dt}\right) + \frac{q}{C}.\left(\frac{dq}{dt}\right) \xrightarrow{i = \left(\frac{dq}{dt}\right)} \frac{dE}{dt} = i.\left[L.\left(\frac{di}{dt}\right) + \frac{q}{C}\right]$$

D'après l'équation différentielle : $L.\left(\frac{di}{dt}\right) + R.i + \frac{q}{C} = u$, il vient alors que : $\frac{dE}{dt} = [u - R.i].i$

Remarques :

$$\bullet u = L.\left(\frac{di}{dt}\right) + R.i + \frac{q}{C} \rightarrow p = u.i = L.i.\left(\frac{di}{dt}\right) + R.i^2 + \frac{q}{C}.\frac{dq}{dt} \rightarrow p = R.i^2 + \frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_L}{dt}$$

Une partie de la puissance reçue par le circuit est dissipée par effet Joule alors que le reste sert à faire varier les énergies électrostatique et magnétique respectivement stockées par le condensateur et la bobine.

- $\frac{dE}{dt} = u \cdot i - R \cdot i^2 \xrightarrow{p(t)=u \cdot i} \frac{dE}{dt} = p(t) - R \cdot i^2$. Déterminons la valeur moyenne sur une période T_e :

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \langle p(t) \rangle - \langle R \cdot i^2 \rangle = U \cdot I \cdot \cos \varphi - R \cdot I^2 \xrightarrow{U \cdot I \cdot \cos \varphi = R \cdot I^2} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = 0$$

Il y a donc un transfert périodique d'énergie entre le condensateur et la bobine.

- Soit $u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega_e t + \varphi_{u_C}) \xrightarrow{i=C \cdot \frac{du_C}{dt}} i(t) = C \cdot \omega_e \cdot U_{Cm} \cos(\omega_e t + \varphi_{u_C})$

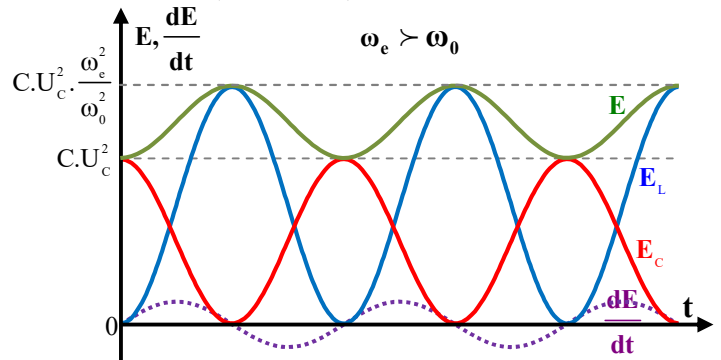
$$* E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{Cm}^2 \cdot \sin^2(\omega_e t + \varphi_{u_C})$$

$$\xrightarrow{U_C = \frac{U_{Cm}}{\sqrt{2}}} E_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_C^2 \cdot [1 - \cos(2\omega_e t + 2\varphi_{u_C})]$$

$$* E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot C^2 \cdot \omega_e^2 U_{Cm}^2 \cdot \cos^2(\omega_e t + \varphi_{u_C})$$

$$\xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}} E_L = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_C^2 \cdot \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} [1 + \cos(2\omega_e t + 2\varphi_{u_C})]$$

$$* E = E_C + E_L \rightarrow E = \frac{C \cdot U_C^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} + 1 \right) + \left(\frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \cdot \cos(2\omega_e t + 2\varphi_{u_C}) \right]$$



A la **résonance d'intensité**, $\omega_e = \omega_0 \rightarrow E = C \cdot U_{rC}^2$ ou $\xrightarrow{U_{rC}^2 = \frac{I_r^2}{C^2 \cdot \omega_0^2} = \frac{L}{C} \cdot I_r^2} E = L \cdot I_r^2$

A la résonance d'intensité, l'énergie emmagasinée par le circuit devient constante.

L'énergie reçue par le circuit de la part du générateur sert uniquement à compenser les pertes par effet Joule dans les résistances.

4⁰) La résonance de charge :

a - La tension $u_C(t)$ dans un circuit (R,L,C) en régime sinusoïdal forcé :

Un circuit (R,L,C) est alimenté, à l'aide d'un GBF, par une tension sinusoïdale : $u(t) = U_C \sin(\omega_e t + \varphi_u)$

L'équation différentielle qui régit les oscillations électriques en régime forcé est : $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + u_C = u$.

Sachant que : $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2}$, on écrit : $L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u$

La tension aux bornes du condensateur, solution de cette équation différentielle, s'écrit sous la forme :

$$u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega_e t + \varphi_{u_C})$$

Pour déterminer les expressions de U_{Cm} et on peut utiliser la représentation de Fresnel :

- à la fonction : $u_C = U_{Cm} \sin(\omega_e t + \varphi_{u_C})$, on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V}_1 \left| \begin{array}{l} U_{Cm} \\ \varphi_{u_C} \end{array} \right.$

- à la fonction : $R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = R \cdot C \omega_e \cdot U_{Cm} \sin\left(\omega_e t + \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}\right)$, on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V}_2 \left| \begin{array}{l} R \cdot C \omega_e \cdot U_{Cm} \\ \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

- à la fonction : $L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} = L \cdot C \omega_e^2 \cdot U_{Cm} \sin(\omega_e t + \varphi_{u_C} + \pi)$, on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V}_3 \left| \begin{array}{l} L \cdot C \omega_e^2 \cdot U_{Cm} \\ \varphi_{u_C} + \pi \end{array} \right.$

- à la fonction : $u = U_m \sin(\omega_e t + \varphi_u)$, on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V} \left| \begin{array}{l} U_m \\ \varphi_u \end{array} \right.$

l'équation différentielle : $L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u$ implique que : $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{V}$

a₁ - L'amplitude U_{Cm} de la tension $u_c(t)$:

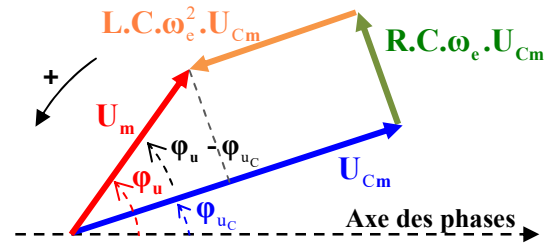
Appliquons le théorème de Pythagore :

$$U_m^2 = R^2 \cdot C^2 \cdot \omega_e^2 \cdot U_{Cm}^2 + (1 - L \cdot C \cdot \omega_e^2)^2 \cdot U_{Cm}^2$$

$$\rightarrow U_m^2 = \left[R^2 \cdot C^2 \cdot \omega_e^2 + (1 - L \cdot C \cdot \omega_e^2)^2 \right] \cdot U_{Cm}^2$$

$$\rightarrow U_{Cm}^2 = \frac{U_m^2}{\left[R^2 \cdot C^2 \cdot \omega_e^2 + (1 - L \cdot C \cdot \omega_e^2)^2 \right]} \quad \text{donc :}$$

$$U_{Cm} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 \cdot C^2 \cdot \omega_e^2 + (1 - L \cdot C \cdot \omega_e^2)^2}}$$



a₂ - Déphasage $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{u_c}$:

Soit $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{u_c}$ le déphasage entre la tension $u(t)$ et la tension $u_c(t)$

$$\text{On a : } \operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{R \cdot C \cdot \omega_e \cdot U_{Cm}}{(1 - L \cdot C \cdot \omega_e^2) \cdot U_{Cm}} \quad \text{donc :}$$

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_u - \varphi_{u_c}) = \frac{R \cdot C \cdot \omega_e}{(1 - L \cdot C \cdot \omega_e^2)}$$

a₃ - Remarque :

Sachant que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ et selon la valeur de ω_e , on peut avoir plusieurs cas de figures :

• 1^{er} cas : $\begin{cases} L \cdot C \cdot \omega_e^2 < 1 \\ \omega_e^2 < \frac{1}{L \cdot C} \\ \omega_e^2 < \omega_0^2 \\ \omega_e < \omega_0 \end{cases}$

Diagramme vectoriel pour le 1^{er} cas. Le vecteur U_m (rouge) est en avance de phase par rapport à U_{Cm} (bleu). Les composantes sont $L \cdot C \cdot \omega_e^2 \cdot U_{Cm}$ (orange) et $R \cdot C \cdot \omega_e \cdot U_{Cm}$ (vert). L'angle $\Delta\varphi$ est positif et inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

$0 \leq \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}$

• 2^{ème} cas : $\begin{cases} L \cdot C \cdot \omega_e^2 > 1 \\ \omega_e^2 > \frac{1}{L \cdot C} \\ \omega_e^2 > \omega_0^2 \\ \omega_e > \omega_0 \end{cases}$

Diagramme vectoriel pour le 2^{ème} cas. Le vecteur U_m (rouge) est en avance de phase par rapport à U_{Cm} (bleu). Les composantes sont $L \cdot C \cdot \omega_e^2 \cdot U_{Cm}$ (orange) et $R \cdot C \cdot \omega_e \cdot U_{Cm}$ (vert). L'angle $\Delta\varphi$ est positif et supérieur à $\frac{\pi}{2}$.

$\pi < \Delta\varphi \leq \frac{\pi}{2}$

• 3^{ème} cas : $\begin{cases} L \cdot C \cdot \omega_e^2 = 1 \\ \omega_e^2 = \frac{1}{L \cdot C} \\ \omega_e^2 = \omega_0^2 \\ \omega_e = \omega_0 \end{cases}$

Diagramme vectoriel pour le 3^{ème} cas. Le vecteur U_m (rouge) est en avance de phase par rapport à U_{Cm} (bleu). Les composantes sont $L \cdot C \cdot \omega_0^2 \cdot U_{Cm}$ (orange) et $R \cdot C \cdot \omega_0 \cdot U_{Cm}$ (vert). L'angle $\Delta\varphi$ est égal à $\frac{\pi}{2}$.

$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$

Dans tous les cas la tension $u(t)$ est toujours **en avance de phase** par rapport à la tension $u_c(t)$

b - La résonance de charge :

A la résonance de charge, U_{Cm} est maximale $\rightarrow \sqrt{R^2 \cdot C^2 \cdot \omega_e^2 + (1 - L \cdot C \cdot \omega_e^2)^2}$ est minimale

$$y = R^2.C^2.\omega_e^2 + (1 - L.C.\omega_e^2)^2 \min \rightarrow \frac{dy}{d\omega_e} = 0$$

$$\rightarrow 2.R^2.C^2.\omega_e + 2.(1 - L.C.\omega_e^2).(-2.L.C.\omega_e) = 0$$

$$\rightarrow R^2.C + 2.(1 - L.C.\omega_e^2).(-L) = 0$$

$$\rightarrow R^2.C - 2L + 2.L^2.C.\omega_e^2 = 0$$

$$\rightarrow 2.L^2.C.\omega_e^2 = 2.L - R^2.C$$

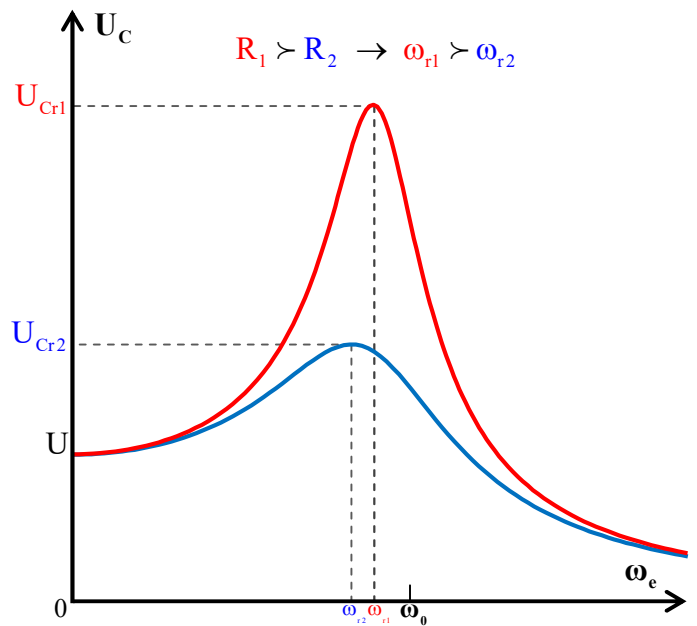
$$\rightarrow \omega_e^2 = \frac{2.L}{2.L^2.C} - \frac{R^2.C}{2.L^2.C}$$

$$\rightarrow \omega_e^2 = \frac{1}{L.C} - \frac{R^2}{2L^2} \xrightarrow{\frac{1}{L.C} = \omega_0^2} \omega_e^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}$$

A la résonance de charge, on a : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}$

La **résonance de charge** a lieu pour $\omega_e = \omega_r$ telle que :

$\omega_r \neq \omega_0$ **pulsation propre** du circuit oscillant.



Remarques :

- Pour $R = 0$, $\omega_{r0} = \omega_0$ mais à la résonance de charge $U_{Cr} \rightarrow \infty$. Ce qui conduit au claquage du condensateur.

- Pour $\omega_e = 0$, $U_C = U$.

- A la résonance de charge, $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2} > 0 \rightarrow \frac{R^2}{2L^2} < \omega_0^2 \xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{1}{L.C}} R^2 < 2L^2 \cdot \frac{1}{L.C} \rightarrow R^2 < 2 \cdot \frac{L}{C}$

La résonance de charge ne peut avoir lieu que lorsque $R < R_{\max} = \sqrt{2 \cdot \frac{L}{C}}$.

- A la résonance de charge, $U_{Cr} = \frac{U}{\sqrt{R^2.C^2.\left(\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}\right) + \left[1 - L.C.\left(\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}\right)\right]^2}}$

$$U_{Cr} = \frac{U}{\sqrt{R^2.C^2.\omega_0^2 - \frac{R^4.C^2}{2L^2} + \left[\frac{R^2.L.C}{2L^2}\right]^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2.C^2.\omega_0^2 - \frac{2.R^4.C^2}{4.L^2} + \frac{R^4.C^2}{4.L^2}}} = \frac{U}{\sqrt{R^2.C^2.\omega_0^2 - \frac{R^4.C^2}{4.L^2}}}$$

$$\text{et } U_{Cr} = \frac{U}{R.C\sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4.L^2}}}$$

Remarque :

à la résonance d'intensité, $U_{C0} = \frac{I_0}{C.\omega_0} \xrightarrow{I_0 = \frac{U}{R}} U_{C0} = \frac{U}{R.C.\omega_0}$

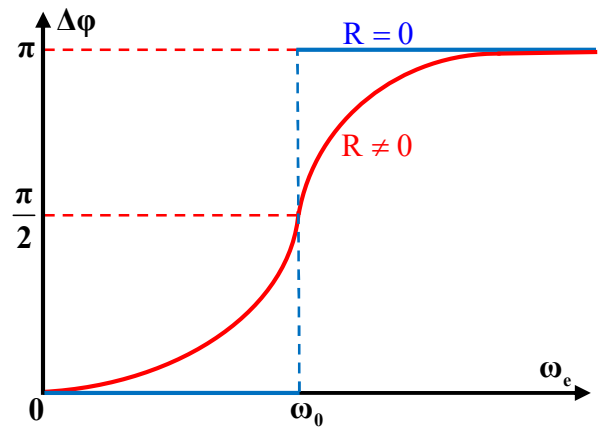
$$U_{Cr} = \frac{U}{R.C\sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4.L^2}}} = \frac{U}{R.C.\omega_0\sqrt{1 - \frac{R^2}{4.L^2.\omega_0^2}}} \rightarrow U_{Cr} = \frac{U_{C0}}{\sqrt{1 - \frac{R^2.C}{4.L}}}$$

Sachant que : $\sqrt{1 - \frac{R^2.C}{4.L}} < 1$, il vient alors que : $U_{Cr} > U_{C0}$.

c - Variation de $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{u_c}$ en fonction de ω_e :

On a : $\text{tg}\Delta\varphi = \text{tg}(\varphi_u - \varphi_{u_c}) = \frac{R.C.\omega_e}{1 - L.C.\omega_e^2}$

- $R = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_e \leq \omega_0, & \text{tg}\Delta\varphi = 0^+ \rightarrow \Delta\varphi = 0 \\ \omega_e > \omega_0, & \text{tg}\Delta\varphi = 0^- \rightarrow \Delta\varphi = \pi \end{cases}$
- $R \neq 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_e \rightarrow 0, & \text{tg}\Delta\varphi = 0^+ \rightarrow \Delta\varphi = 0 \\ \omega_e = \omega_0, & \text{tg}\Delta\varphi = \infty \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \\ \omega_e \rightarrow \infty, & \text{tg}\Delta\varphi = 0^- \rightarrow \Delta\varphi = \pi \end{cases}$



5⁰) Utilisation de la notation complexe :

a - L'impédance complexe :

- Soit un dipôle récepteur D qui maintient entre ses bornes une tension $u(t) = U_m \sin(\omega.t + \varphi_u)$ et qui est parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_m \sin(\omega.t + \varphi_i)$.

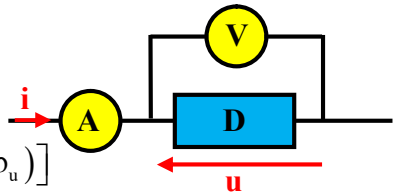
L'impédance complexe du dipôle D est définie par : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$

$\underline{U}$ est la tension complexe associée à $u(t)$: $\underline{U} = U_m \cdot e^{j(\omega.t + \varphi_u)} = [U_m; (\omega.t + \varphi_u)]$

$\underline{I}$ est l'intensité complexe associée à $i(t)$: $\underline{I} = I_m \cdot e^{j(\omega.t + \varphi_i)} = [I_m; (\omega.t + \varphi_i)]$

L'impédance complexe s'écrit : $\underline{Z} = \frac{U_m \cdot e^{j(\omega.t + \varphi_u)}}{I_m \cdot e^{j(\omega.t + \varphi_i)}} \rightarrow \underline{Z} = \frac{U_m}{I_m} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$. Il vient alors que :

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = [Z; (\varphi_u - \varphi_i)] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Z : \text{impédance réelle du dipôle D} \\ (\varphi_u - \varphi_i) : \text{déphasage courant-tension introduit par le dipôle D} \end{cases}$$



Remarques :

- * Pour un résistor : $u_R(t) = R \cdot i(t) \rightarrow (\varphi_{u_R} - \varphi_i) = 0 \rightarrow \underline{Z}_R = R \quad \text{ou} \quad \underline{Z}_R = [R; 0]$
- * Pour une inductance : $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \rightarrow (\varphi_{u_L} - \varphi_i) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \underline{Z}_L = j \cdot L \cdot \omega \quad \text{ou} \quad \underline{Z}_L = [L \cdot \omega; \frac{\pi}{2}]$
- * Pour un condensateur : $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt \rightarrow (\varphi_{u_C} - \varphi_i) = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \underline{Z}_C = -j \cdot \frac{1}{C \cdot \omega} \quad \text{ou} \quad \underline{Z}_C = [\frac{1}{C \cdot \omega}; -\frac{\pi}{2}]$

Remarque :

La loi des nœuds et la loi des mailles, applicables aux valeurs instantanées des grandeurs électriques, restent aussi applicables aux complexes associés.

b - Application au circuit (R,L,C) en régime forcé :

Considérons le circuit (R,L,C) en régime forcé ci-contre.

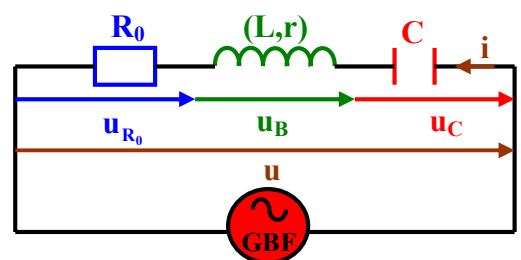
Soit $u(t) = U_m \sin(\omega.t + \varphi_u)$ et $i(t) = I_m \sin(\omega.t + \varphi_i)$.

La loi de l'additivité des tensions s'écrit : $u = u_{R_0} + u_B + u_C$

En notation complexe, on écrit : $\underline{u} = \underline{u}_{R_0} + \underline{u}_B + \underline{u}_C$

$$\rightarrow \underline{Z} \cdot \underline{I} = \underline{Z}_{R_0} \cdot \underline{I} + \underline{Z}_B \cdot \underline{I} + \underline{Z}_C \cdot \underline{I} \rightarrow \underline{Z} = \underline{Z}_{R_0} + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C$$

$$\rightarrow \underline{Z} = R_0 + (r + j \cdot L \cdot \omega) - j \cdot \frac{1}{C \cdot \omega} = (R_0 + r) + j \cdot \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} \right)$$



On pose : $R = R_0 + r$ résistance totale du circuit, il vient alors que : $\underline{Z} = R + j \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$

On pose : $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$ réactance du circuit, il vient alors que : $\underline{Z} = R + jX$

Remarque : $\underline{Z} = Z.e^{j\theta} = [Z; \theta]$ avec $Z = |\underline{Z}|$ et $\theta = \varphi_u - \varphi_i$

On en déduit que :

$$* \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{ou} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

$$* \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{X}{R} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

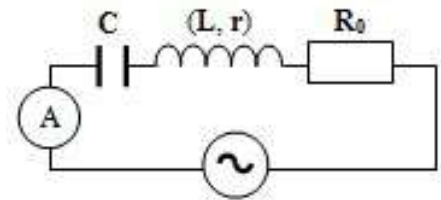
Remarque : on a : $\underline{Z} = Z.e^{j\theta} = Z.\cos \theta + j.\sin \theta \xrightarrow[\text{par identification}]{\underline{Z} = R + jX} \cos \theta = \frac{R}{Z} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{X}{Z}$

Applications

Exercice 1 :

Un générateur basse fréquence (GBF) alimente une portion de circuit série comportant :

- un résistor de résistance R_0
- une bobine d'inductance L et de résistance interne $r = 10 \Omega$.
- un condensateur de capacité C
- un ampèremètre A de résistance interne négligeable



Le GBF délivre une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi N.t)$ de valeur efficace $U = 2 \text{ V}$ constante et de fréquence N variable.

1⁰) Un oscilloscope permet de visualiser simultanément la tension $u(t)$ aux bornes du générateur et la tension $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor.

Reproduire et compléter le schéma du montage en précisant les connections nécessaires avec l'oscilloscope afin de visualiser sur la voie Y_1 la tension $u(t)$ et sur la voie Y_2 la tension $u_{R_0}(t)$.

2⁰) Etablir l'équation différentielle gérant les oscillations électriques et reliant l'intensité du courant $i(t)$ à sa dérivée première et à sa primitive.

3⁰) Pour une fréquence $N_1 = 507,36 \text{ Hz}$ du GBF, l'ampèremètre indique une intensité $I_1 = \sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ A}$ et on observe les oscillogrammes (a) et (b) ci-dessous :

a - Associer chacun des oscillogrammes (a) et (b) à la tension qu'il représente. Justifier la réponse.

b - Montrer que le déphasage entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$

du courant est $\Delta\varphi = (\varphi_u - \varphi_i) = -\frac{\pi}{4}$.

Préciser si le circuit est inductif, capacitif ou résistif.

c - En exploitant la représentation de Fresnel relative aux tensions efficaces, vérifier que :

- $R_0 = 90 \Omega$.
- $\frac{1}{C.N_1} - 4\pi^2.L.N_1 = 200\pi \Omega$.

d - Calculer la valeur de l'impédance Z_1 du circuit.

4⁰) La courbe ci-contre donne la variation de l'intensité efficace I du courant en fonction de la fréquence N du générateur :

a - Quel est le phénomène qui est mis en évidence par la courbe $I = f(N)$?

b - Donner l'expression de la fréquence propre N_0 du circuit électrique en fonction de L et de C .

Déterminer graphiquement la valeur de N_0 .

c - Montrer que : $C = \frac{N_0^2 - N_1^2}{200\pi.N_0^2.N_1}$.

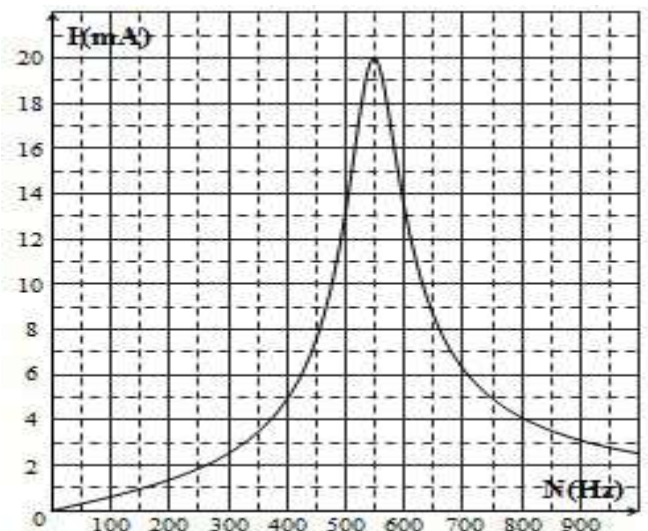
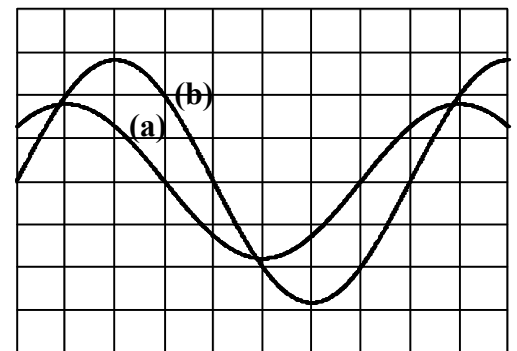
Calculer la valeur de C . Déduire alors celle de L .

d - Trouver graphiquement la valeur de l'intensité efficace I_2 du courant lorsque la fréquence du GBF est $N_2 = 750 \text{ Hz}$.

Déterminer alors la valeur de la puissance moyenne P_2 consommée par le circuit.

En déduire la valeur de l'impédance Z_2 du circuit.

5⁰) On modifie le circuit électrique initial en quadruplant (multipliant par quatre) soit la résistance du résistor, soit l'inductance de la bobine, soit la capacité du condensateur.



circuit	caractéristiques			courbe
(I)	$R_0 + r$	L	C	(a)
(II)	$4R_0 + r$	L	C	(b)
(III)	$R_0 + r$	$4L$	C	(c)
(IV)	$R_0 + r$	L	$4C$	(d)

On enregistre la courbe $I = f(N)$ pour chacun des circuits électriques.

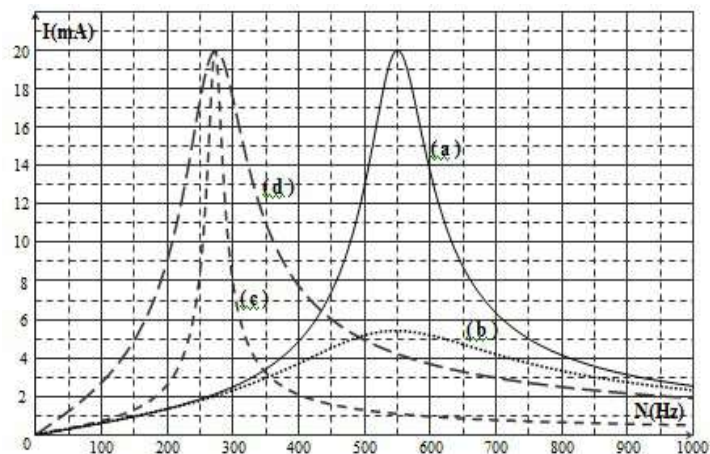
Les résultats sont donnés sur le graphique ci-contre :

a - Quelle conclusion peut-on tirer en comparant les courbes (a) et (b) ?

b - Exprimer les coefficients de surtension Q_c et Q_d respectivement des circuits (III) et (IV) en fonction du coefficient de surtension Q_a du circuit initial (I).

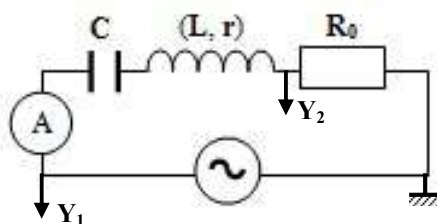
c - Parmi les circuits considérés, quel est celui où le risque de claquage du condensateur, au cours de la variation de la fréquence N , est le plus grand ?

Justifier la réponse.



Réponse :

1°)



2°) D'après la loi des mailles : $u_{R_0} + u_B + u_C - u = 0 \rightarrow u_{R_0} + u_B + u_C = u$

$$\left. \begin{aligned} u_{R_0} &= R_0 \cdot i \\ u_B &= L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_C &= \frac{q}{C} \end{aligned} \right\} \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i + \frac{q}{C} = u$$

or $i = \frac{dq}{dt} \rightarrow q = \int i \cdot dt$, on écrit alors : $L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = u$

on pose $R = (R_0 + r)$, il vient alors que : $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = u$

3°) **a** - $\left| \begin{aligned} u &= Z \cdot i \rightarrow U_m = Z \cdot I_m \\ u_{R_0} &= R_0 \cdot i \rightarrow U_{R_0m} = R_0 \cdot I_m \end{aligned} \right. \xrightarrow{Z > R_0} U_m > U_{R_0m}$

on en déduit que : $\left| \begin{aligned} \text{oscillogramme (b)} &\rightarrow u(t) \\ \text{oscillogramme (a)} &\rightarrow u_{R_0}(t) \end{aligned} \right.$

b - $u_{R_0}(t) = R_0 \cdot i(t) \xrightarrow[u_{R_0} \text{ et } i \text{ sont en phase}]{u_{R_0} \text{ est proportionnelle à } i} \varphi_{u_{R_0}} = \varphi_i$

$\left\{ \begin{aligned} |\Delta\varphi| &= 2\pi \frac{|\Delta t|}{T} \xrightarrow{\text{graphiquement}} |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} \rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\pi}{4} \\ \text{d'après les oscillogrammes : } \Delta\varphi &= (\varphi_u - \varphi_i) < 0 \end{aligned} \right.$

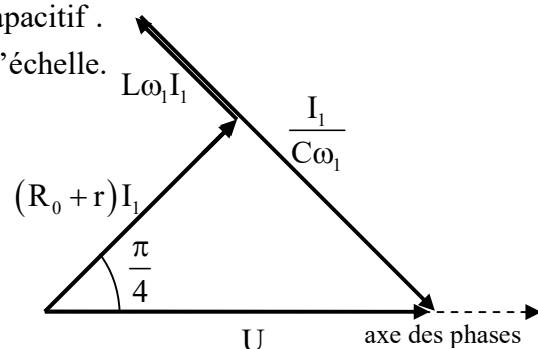
$u(t)$ est en retard de phase par rapport à $i(t) \rightarrow$ le circuit est capacitif.

c - Remarque : les modules des vecteurs de Fresnel ne sont pas à l'échelle.

• $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(R_0 + r)I_1}{U} \rightarrow R_0 + r = \frac{U}{I_1} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

et $R_0 = \frac{U}{I_1} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - r$.

A.N : $R_0 = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 10$ et $R_0 = 90 \Omega$.



$$\bullet \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1\right)I_1}{U} \rightarrow \frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1 = \frac{U}{I_1} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{et } \frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 10^{-2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 100$$

$$\text{On a : } \omega_1 = 2\pi N_1 \text{ donc on écrit : } \frac{1}{C \cdot 2\pi N_1} - L \cdot 2\pi N_1 = 100$$

$$\text{et } \frac{1}{C \cdot N_1} - L \cdot 4\pi^2 N_1 = 200\pi.$$

$$\mathbf{d} - Z_1 = \frac{U}{I_1}.$$

$$\text{A.N : } Z_1 = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 10^{-2}} \text{ et } Z_1 = 100\sqrt{2} \Omega \text{ ou } Z_1 = 141,42 \Omega.$$

4⁰) a - La courbe $I = f(N)$ met en évidence le phénomène de résonance d'intensité.

$$\mathbf{b} - \text{La fréquence propre du circuit électrique est } N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}.$$

La résonance d'intensité ($I = I_{\max}$) est atteinte pour $N = N_0$. Graphiquement : $N_0 = 550 \text{ Hz}$.

$$\mathbf{c} - \frac{1}{C \cdot N_1} - L \cdot 4\pi^2 N_1 = 200\pi \rightarrow 1 - L \cdot C \cdot 4\pi^2 N_1^2 = 200\pi \cdot C \cdot N_1 \xrightarrow{L \cdot C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot N_0^2}} 1 - \frac{4\pi^2 N_1^2}{4\pi^2 N_0^2} = 200\pi \cdot C \cdot N_1$$

$$\text{on écrit alors : } \frac{N_0^2 - N_1^2}{N_0^2} = 200\pi \cdot C \cdot N_1 \text{ et } C = \frac{N_0^2 - N_1^2}{200\pi \cdot N_0^2 \cdot N_1}.$$

$$\text{A.N : } C = \frac{N_0^2 - N_1^2}{200\pi \cdot N_0^2 \cdot N_1} = \frac{(550)^2 - (507,36)^2}{200\pi \cdot (550)^2 \cdot 507,36} \text{ et } C = 4,68 \cdot 10^{-7} \text{ F ou } C \approx 4,7 \mu\text{F}.$$

$$N_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot C} \rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot C \cdot N_0^2}$$

$$\text{A.N : } L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 4,68 \cdot 10^{-7} \cdot (550)^2} \text{ et } L = 0,179 \text{ H}.$$

5⁰) a - L'augmentation de la résistance fait diminuer l'intensité du courant à la résonance (résonance floue).

$$\mathbf{b} - Q_c = \frac{1}{R_0 + r} \sqrt{\frac{4L}{C}} = 2 \cdot \frac{1}{R_0 + r} \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \cdot Q_a \quad \text{et} \quad Q_d = \frac{1}{R_0 + r} \sqrt{\frac{L}{4C}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R_0 + r} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \cdot Q_a$$

c - On remarque que : $Q_b < Q_d < Q_a < Q_c$. Or le risque de claquage du condensateur est d'autant plus grand que le facteur de surtension du circuit est plus grand. Donc c'est le circuit (III) qui présente le risque le plus grand de claquage du condensateur au cours de la variation de la fréquence N .

Exercice 2 :

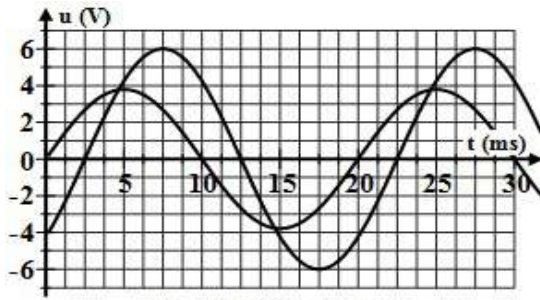
Une portion de circuit série est constituée par un résistor de résistance R_0 , une bobine d'inductance L et de résistance interne r et un condensateur de capacité C .

Un générateur (GBF) maintient aux bornes de cette portion de circuit une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ de valeur efficace U et de fréquence N variable.

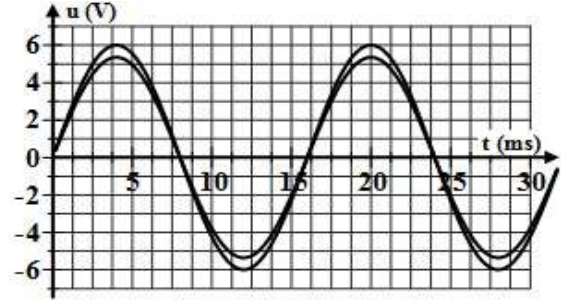
Le circuit est alors parcouru par un courant électrique d'intensité $i(t) = I_m \sin(2\pi N \cdot t)$.

Un système d'acquisition, dont le branchement est analogue à celui d'un oscilloscope bi courbe, permet de visualiser simultanément, la tension $u(t)$ aux bornes du générateur sur la voie (Y_1) et la tension $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor sur la voie (Y_2).

Pour deux valeurs N_a et N_b de la fréquence N du générateur, on obtient respectivement les graphes (a) et (b) représentés ci-dessous :



Grphe (a) : $N = N_a$



Grphe (b) : $N = N_b$

1⁰) a - Faire un schéma du circuit électrique et indiquer les branchements nécessaires pour visualiser les tensions $u(t)$ et $u_{R_0}(t)$.

b - Etablir l'équation différentielle géant les variations de l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit.

Lorsque la fréquence de la tension délivrée par le générateur est réglée sur la valeur $N = N_a$:

2⁰) a - Justifier, en exploitant le graphe (a), qu'on peut affirmer que la valeur maximale de la tension délivrée par le générateur est $U_m = 6 \text{ V}$? En déduire sa valeur efficace U .

b - Déterminer la valeur de la période T_a des oscillations. En déduire celle de la fréquence N_a .

c - Soit $\Delta\varphi = (\varphi_u - \varphi_i)$ le déphasage courant-tension. Montrer que $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{4}$. En déduire si le circuit est inductif, capacitif ou résistif.

3⁰) Un ampèremètre branché en série dans le circuit indique une intensité de courant $I = 26,79 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ alors qu'un voltmètre branché aux bornes du résistor indique une tension $U_{R_0} = 2,68 \text{ V}$.

a - Calculer la valeur de l'impédance Z du circuit et celle de la résistance R_0 .

b - Déterminer alors la valeur de la résistance r .

Lorsque la fréquence de la tension délivrée par le générateur est réglée sur la valeur $N = N_b$:

4⁰) a - Quel phénomène physique est mis en évidence par le graphe (b) ? Que représente alors N_b ?

b - Déterminer la valeur de la période T_b des oscillations. En déduire celle de la fréquence N_b .

c - Quelles sont les nouvelles valeurs I' de l'intensité du courant et U'_{R_0} de la tension aux bornes du résistor indiquées respectivement par l'ampèremètre et le voltmètre ?

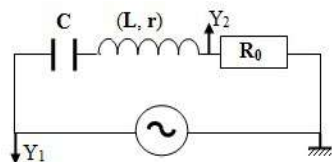
5⁰) a - Montrer que la capacité du condensateur est donnée par la relation : $C = \frac{1 - \frac{N_a^2}{N_b^2}}{2\pi N_a (R_0 + r)}$.

Calculer la valeur de C .

b - Déterminer alors la valeur de l'inductance L de la bobine.

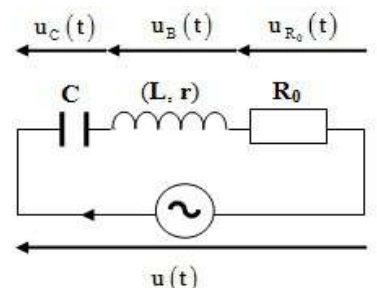
Réponse :

1⁰) a -



b - D'après la loi des mailles : $u_{R_0} + u_B + u_C - u = 0 \rightarrow u_{R_0} + u_B + u_C = u$

$$\left. \begin{aligned} u_{R_0} &= R_0 \cdot i \\ u_B &= L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i \\ u_C &= \frac{q}{C} \end{aligned} \right\} \rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i + \frac{q}{C} = u$$



or $i = \frac{dq}{dt} \longrightarrow q = \int i \cdot dt$, on écrit alors: $L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = u$

on pose $R = (R_0 + r)$, il vient alors que : $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = u$

2⁰) a -
$$\begin{cases} u = Z \cdot i \rightarrow U_m = Z \cdot I_m \\ u_{R_0} = R_0 \cdot i \rightarrow U_{R_0m} = R_0 \cdot I_m \end{cases} \xrightarrow{Z > R_0} U_m > U_{R_0m} \quad \text{on en déduit que : } U_m = 6 \text{ V.}$$

$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \rightarrow U = \frac{6}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad U = 4,24 \text{ V.}$

b - Graphiquement : $T_a = 20 \cdot 10^{-3} \text{ s} \xrightarrow{N = \frac{1}{T}} N_a = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad N_a = 50 \text{ Hz.}$

c - $u_{R_0}(t) = R_0 \cdot i(t) \xrightarrow{u_{R_0} \text{ est proportionnelle à } i \text{ et } i \text{ sont en phase}} \varphi_{u_{R_0}} = \varphi_i$

$$\begin{cases} |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T} \xrightarrow{\text{graphiquement}} |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} \rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\pi}{4} \\ \text{d'après le graphe (a) : } \Delta\varphi = (\varphi_u - \varphi_i) < 0 \end{cases}$$

$u(t)$ est en retard de phase par rapport à $i(t) \rightarrow$ le circuit est capacitif.

3⁰) a - $Z = \frac{U}{I} \quad \text{A.N : } Z = \frac{4,24}{26,79 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad Z = 158,37 \Omega.$

$R_0 = \frac{U_{R_0}}{I} \quad \text{A.N : } R_0 = \frac{2,68}{26,79 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad R_0 \approx 100 \Omega$

b - $\cos \Delta\varphi = \frac{R_0 + r}{Z} \rightarrow r = Z \cdot \cos \Delta\varphi - R_0 \quad \text{A.N : } r = 158,37 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 100 \quad \text{et} \quad r \approx 12 \Omega.$

4⁰) a - Le graphe (b) met en évidence le phénomène de résonance d'intensité. $N_b = N_0$ représente la fréquence propre du circuit étudié.

b - Graphiquement : $T_b = 16 \cdot 10^{-3} \text{ s} \xrightarrow{N = \frac{1}{T}} N_b = \frac{1}{16 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad N_b = 62,5 \text{ Hz.}$

c - A la résonance d'intensité, $Z = R_0 + r \rightarrow I' = \frac{U}{R_0 + r} \quad \text{A.N : } I' = \frac{4,24}{112} \quad \text{et} \quad I' = 37,88 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$

$U'_{R_0} = R_0 \cdot I' \quad \text{A.N : } U'_{R_0} = 100 \cdot 37,88 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad U'_{R_0} \approx 3,79 \text{ V.}$

5⁰) a - $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{4} \rightarrow \text{tg} \Delta\varphi = -1 \xrightarrow{\text{tg} \Delta\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_0 + r}} \frac{1}{C\omega} - L\omega = R_0 + r \rightarrow 1 - LC\omega^2 = C\omega(R_0 + r)$

$$\xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} C = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\omega(R_0 + r)} \xrightarrow{\omega = 2\pi N} C = \frac{1 - \frac{N_a^2}{N_b^2}}{2\pi N_a (R_0 + r)} \quad \text{A.N : } C = \frac{1 - \frac{(50)^2}{(62,5)^2}}{2\pi \cdot 50 \cdot (112)} \quad \text{et} \quad C = 10,23 \cdot 10^{-6} \text{ F.}$$

b - $N_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 N_0^2 C} \quad \text{A.N : } L = \frac{1}{4\pi^2 (62,5)^2 \cdot 10,23 \cdot 10^{-6}} \quad \text{et} \quad L = 0,634 \text{ H.}$

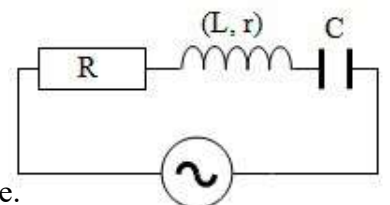
Exercice 3 :

On monte, en série, un résistor de résistance **R**, une bobine d'inductance

L et de résistance interne négligeable et un condensateur de capacité **C**.

L'ensemble est alimenté par un générateur (GBF) délivrant une tension

alternative sinusoïdale de valeur efficace **U** constante et de pulsation ω variable.



Lorsque la pulsation de la tension excitatrice est $\omega_1 = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$, l'intensité efficace du courant qui parcourt le circuit est $I = 4.10^{-3} \text{ A}$ et les tensions efficaces aux bornes du générateur, du résistor et de la bobine sont respectivement $U = 5 \text{ V}$, $U_R = 4 \text{ V}$ et $U_L = 5 \text{ V}$.

1⁰) a - Faire la représentation de Fresnel relative aux tensions efficaces sachant que le circuit considéré est inductif. On prendra comme échelle pour toutes les représentations de Fresnel : $1 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ V}$.

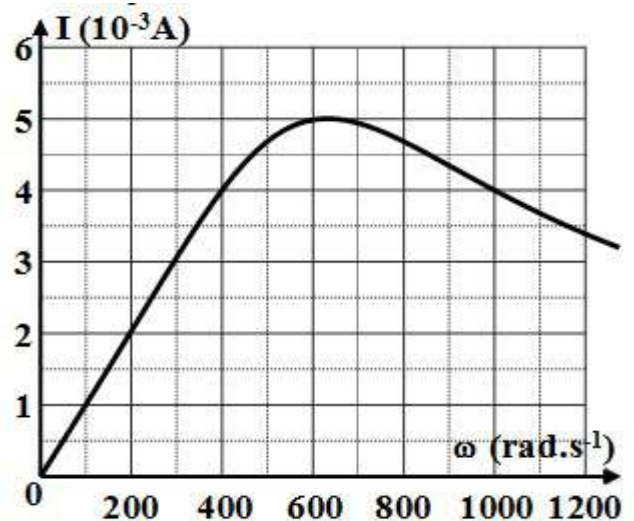
b - Quelle est la tension efficace U_C aux bornes du condensateur ?

c - Déterminer les valeurs de R , de L et de C .

2⁰) a - Calculer le facteur de puissance du circuit. En déduire la valeur de l'impédance Z du circuit.

b - Trouver une autre valeur C' de la capacité du condensateur pour laquelle le circuit aura la même valeur de l'impédance Z . (on pourra exploiter la représentation de Fresnel).

3⁰) On fait varier la pulsation ω du générateur et on mesure chaque fois l'intensité efficace I du courant qui parcourt le circuit (R, L, C). On trace la courbe $I = f(\omega)$ ci-contre :



a - Quelle est la pulsation ω_2 pour laquelle on a la même intensité du courant $I = 4.10^{-3} \text{ A}$?

b - Montrer que $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$ où ω_0 est la pulsation propre du circuit. Calculer alors la valeur de ω_0 .

c - Déterminer le facteur de surtension Q du circuit.

d - Pour $\omega = \omega_2$, calculer la valeur de la puissance moyenne P consommée par le circuit.

4⁰) Faire la représentation de Fresnel relative aux tensions efficaces lorsque $\omega = \omega_2$. En déduire dans ce cas si le circuit est inductif, capacitif ou résistif.

Réponse :

1⁰) a - Voir représentation de Fresnel ci-contre :

b - D'après la représentation de Fresnel : $U_C = 2 \text{ V}$.

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \xrightarrow[U_R=4V]{U=5V} U_L - U_C = 3 \text{ V} \xrightarrow[U_C=2V]{U_L=5V} U_C = 2 \text{ V}$$

$$\text{c - } U_R = R.I \rightarrow R = \frac{U_R}{I}. \text{ A.N : } R = \frac{4}{4.10^{-3}} \text{ et } R = 10^3 \Omega.$$

$$U_L = L\omega_1.I \rightarrow L = \frac{U_L}{\omega_1.I}. \text{ A.N : } L = \frac{5}{10^3.4.10^{-3}} \text{ et } L = 1,25 \text{ H}.$$

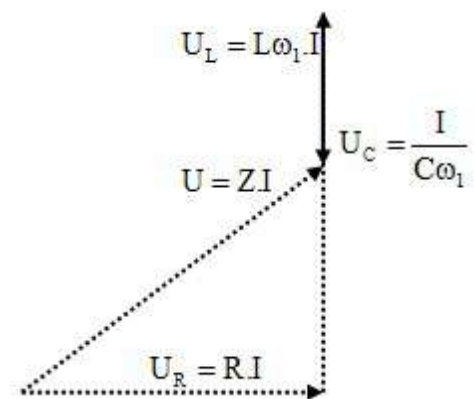
$$U_C = \frac{I}{C\omega_1} \rightarrow C = \frac{I}{\omega_1.U_C}. \text{ A.N : } C = \frac{4.10^{-3}}{10^3.2} \text{ et } C = 2.10^{-6} \text{ F}.$$

Remarque: $u(t)$ est en avance de phase par rapport à $u_R(t)$.

Le circuit est alors inductif.

$$\text{2⁰) a - } \cos \Delta\varphi = \frac{4}{5} \text{ et } \cos \Delta\varphi = 0,8.$$

$$\cos \Delta\varphi = \frac{R}{Z} \rightarrow Z = \frac{R}{\cos \Delta\varphi}. \text{ A.N : } Z = \frac{1000}{0,8} \text{ et } Z = 1250 \Omega.$$



$$\mathbf{b} - \text{Même valeur de } Z \rightarrow L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} = \frac{1}{C'\omega_1} - L\omega_1 \rightarrow \frac{1}{C'} = \frac{2LC\omega_1^2 - 1}{C}.$$

$$\text{et } C' = \frac{C}{2LC\omega_1^2 - 1}.$$

$$\text{A.N : } C' = \frac{2.10^{-6}}{2.1,25.2.10^{-6}.10^6 - 1} \quad \text{et } C' = 0,5.10^{-6} \text{ F}.$$

Remarque: d'après la représentation de Fresnel:

Même $Z \rightarrow$ même $I \rightarrow$ même $U_R = 4 \text{ V}$.

La valeur de C' correspond donc au cas où le circuit est capacitif.

$$U_{C'} = 8 \text{ V} . \quad U_{C'} = \frac{I}{C'\omega_1} \rightarrow C' = \frac{I}{\omega_1 \cdot U_{C'}}.$$

$$\text{A.N : } C' = \frac{4.10^{-3}}{10^3 \cdot 8} \quad \text{et } C' = 0,5.10^{-6} \text{ F}.$$

3⁰) a - Graphiquement: $\omega_2 = 400 \text{ rad.s}^{-1}$.

$$\mathbf{b} - \text{Même } I \rightarrow \text{même } Z \rightarrow L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} = \frac{1}{C\omega_2} - L\omega_2$$

$$\rightarrow L(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{C\omega_1} + \frac{1}{C\omega_2} = \frac{C(\omega_1 + \omega_2)}{C^2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2} = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{C \cdot \omega_1 \cdot \omega_2} \rightarrow LC = \frac{1}{\omega_1 \cdot \omega_2} \xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} . \quad \text{A.N : } \omega_0 = \sqrt{10^3 \cdot 400} \quad \text{et } \omega_0 = 632,46 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\mathbf{c} - Q = \frac{L\omega_0}{R} . \quad \text{A.N : } Q = \frac{1,25.632,46}{1000} \quad \text{et } Q = 0,79 .$$

$$\mathbf{d} - P = R \cdot I^2 . \quad \text{A.N : } P = 10^3 \cdot (4.10^{-3})^2 \quad \text{et } P = 16.10^{-3} \text{ W} .$$

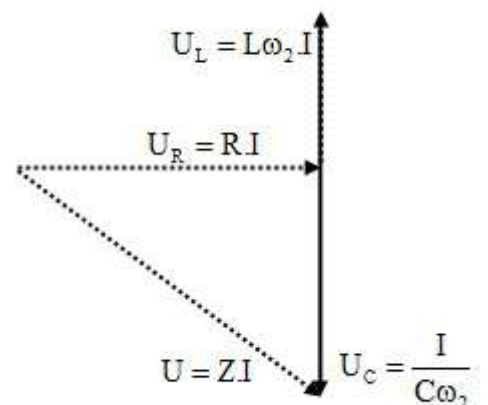
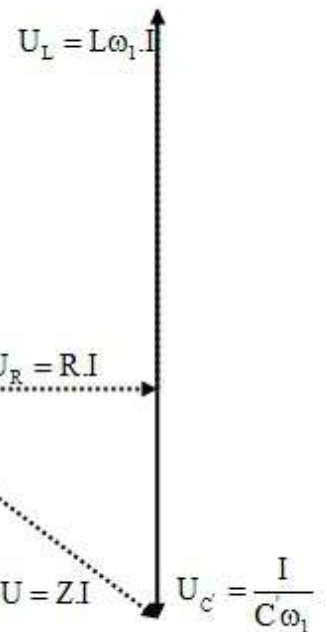
4⁰) Voir représentation de Fresnel ci-contre :

$$* U_R = R \cdot I \xrightarrow{\text{A.N}} U_R = 4 \text{ V}$$

$$* U_L = L \cdot \omega_2 \cdot I \xrightarrow{\text{A.N}} U_L = 2 \text{ V}$$

$$* U_C = \frac{I}{C \cdot \omega_2} \xrightarrow{\text{A.N}} U_C = 5 \text{ V}$$

Le circuit est dans ce cas capacitif.



Exercice 4 :

Une portion de circuit série comporte un résistor de résistance R , un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L et de résistance interne r négligeable.

On alimente cette portion de circuit par un GBF délivrant une tension alternative sinusoïdale

$u(t) = U_m \sin(\omega t)$ de valeur efficace U et de pulsation $\omega = 2\pi N$ variable.

1⁰) Faire un schéma du circuit électrique et indiquer les connexions nécessaires pour pouvoir visualiser sur un oscilloscope la tension $u(t)$ aux bornes du générateur sur la voie 1 (Y_1) et la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur sur la voie 2 (Y_2).

2⁰) On obtient sur l'écran de l'oscilloscope les deux oscillogrammes (a) et (b) ci-contre.

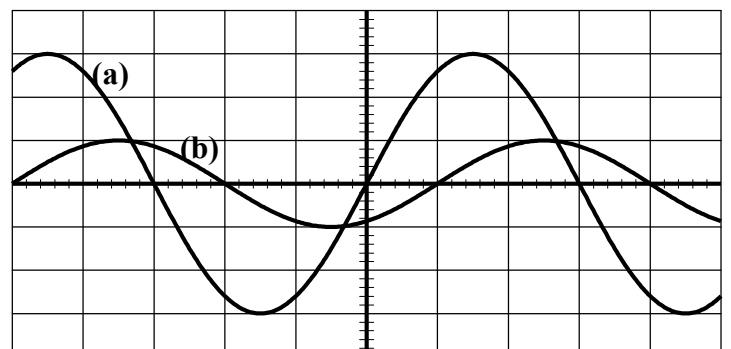
On donne :

* Balayage horizontal : 1 ms.div^{-1}

* Sensibilité verticale de la voie 1 (Y_1) : 1 V.div^{-1}

* Sensibilité verticale de la voie 2 (Y_2) : 5 V.div^{-1}

a - Pourquoi peut-on affirmer que l'oscillogramme (a) représente $u(t)$?



b - Déterminer graphiquement :

b_1 - La pulsation ω de la tension $u(t)$.

b_2 - Le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{u_c}$ entre $u(t)$ et $u_c(t)$.

b_3 - La valeur maximale U_m de $u(t)$.

b_4 - La valeur maximale U_{Cm} de $u_c(t)$.

c - Vérifier que l'intensité du courant $i(t)$ qui parcourt le circuit est en avance de phase de $\frac{\pi}{6}$ rad par rapport à la tension $u(t)$. En déduire la nature du circuit (inductif, capacitif ou résistif).

d - Sachant que : $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R}{Z}$ où Z est l'impédance

du circuit, montrer que : $\frac{1}{C\omega} - L\omega = \frac{R}{\sqrt{3}}$

3⁰ On fait varier la pulsation ω de la tension $u(t)$ et on mesure chaque fois l'intensité maximale I_m du courant. On obtient la courbe $I_m = f(\omega)$ ci-contre :

a - Dans quel état se trouve le circuit lorsque la pulsation prend la valeur $\omega_0 = 1251,42 \text{ rad.s}^{-1}$?

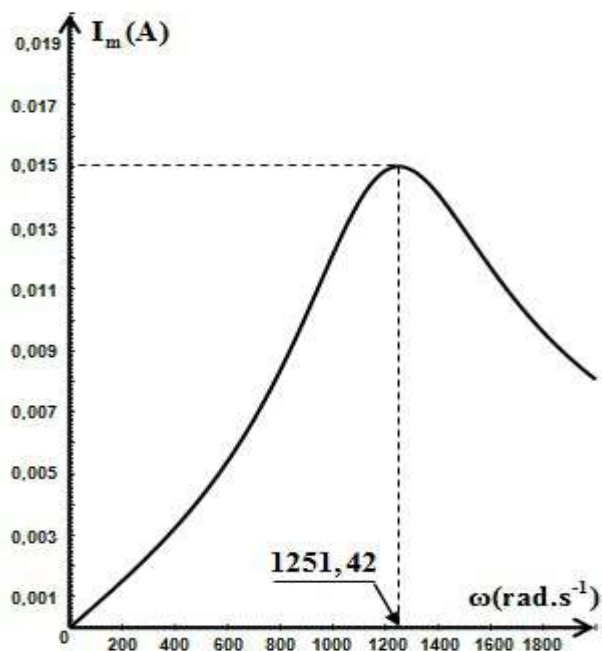
b - Comment nomme-t-on ω_0 ? quelle est son expression en fonction des caractéristiques du circuit électrique ?

c - Vérifier que la résistance du résistor a comme valeur $R = 200 \Omega$.

4⁰ **a** - Montrer que le condensateur utilisé a une capacité de valeur $C = 2,48 \mu\text{F}$.

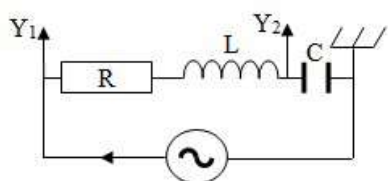
b - Déduire alors la valeur de l'inductance L de la bobine.

5⁰ Lorsque $\omega = \omega_0$, donner les équations horaires des tensions $u_{L0}(t)$ aux bornes de la bobine et $u_{C0}(t)$ aux bornes du condensateur. Quelle est la valeur de la somme : $u_{L0}(t) + u_{C0}(t)$? Ce résultat est-il prévisible ?



Réponse :

1⁰



2⁰ **a** - La tension $u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à la tension $u_c(t)$

On en déduit que l'oscillogramme (a) correspond à $u(t)$.

b₁ - Graphiquement : $T = 6.10^{-3} \text{ s}$.

on a : $\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T=6.10^{-3} \text{ s}} \omega = \frac{1000\pi}{3} \text{ rad.s}^{-1}$ ou $\omega = 1047,2 \text{ rad.s}^{-1}$.

b₂ - $|\Delta\varphi| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T} \xrightarrow{\text{graphiquement}} |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{1}{6}$ et $|\Delta\varphi| = \frac{\pi}{3}$.

On a : $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{u_c} > 0 \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

b₃ - Graphiquement : $U_m = 3.1$ et $U_m = 3 \text{ V}$.

b₄ - Graphiquement : $U_{Cm} = 1.5$ et $U_{Cm} = 5 \text{ V}$

$$\mathbf{c} - \text{on a : } i = \frac{dq}{dt} \rightarrow \varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\varphi_q = \varphi_{u_C}]{q = C \cdot u_C} \varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2} \text{ et } \varphi_{u_C} = \varphi_i - \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Or } \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{3} \rightarrow 0 - \varphi_i + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ et } \varphi_i = \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

$$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{6} \rightarrow i(t) \text{ est en avance de phase par rapport à } u(t) \rightarrow \text{le circuit est alors capacitif.}$$

$$\mathbf{d} - \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R}{Z} \rightarrow Z = \frac{R}{\cos(\varphi_u - \varphi_i)} \xrightarrow{(\varphi_u - \varphi_i) = -\frac{\pi}{6}} Z = \frac{2}{\sqrt{3}}R \text{ et } Z^2 = \frac{4}{3}R^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \rightarrow R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = \frac{4}{3}R^2 \rightarrow \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = \frac{R^2}{3} \text{ et } \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right| = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Le circuit étant capacitif, on déduit que } \frac{1}{C\omega} - L\omega = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

$$\mathbf{3^0) a} - \text{Pour } \omega = \omega_0, I_m \text{ est maximale} \rightarrow \text{le circuit est à la résonance d'intensité.}$$

$$\mathbf{b} - \omega_0 \text{ est la pulsation propre du circuit. } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$$\mathbf{c} - \text{A la résonance d'intensité, } Z = R \rightarrow I_{m0} = \frac{U_m}{R} \text{ et } R = \frac{U_m}{I_{m0}}.$$

$$\mathbf{A.N : graphiquement : } I_{m0} = 15.10^{-3} \text{ A} \rightarrow R = \frac{3}{15.10^{-3}} \text{ et } R = 200 \Omega.$$

$$\mathbf{4^0) a} - \frac{1}{C\omega} - L\omega = \frac{R}{\sqrt{3}} \rightarrow 1 - LC\omega^2 = C\omega \frac{R}{\sqrt{3}} \xrightarrow{LC\omega_0^2 = 1} 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = C\omega \frac{R}{\sqrt{3}} \text{ et } C = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\omega R} \sqrt{3}$$

$$\mathbf{A.N : } C = \frac{1 - \frac{(1047,2)^2}{(1251,42)^2}}{(1047,2) \cdot 200} \sqrt{3} \text{ et } C = 2,48.10^{-6} \text{ F}$$

$$\mathbf{b} - \omega_0^2 = \frac{1}{L.C} \rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C}.$$

$$\mathbf{A.N : } L = \frac{1}{(1251,47)^2 \cdot 2,48.10^{-6}} \text{ et } L = 257,48.10^{-3} \text{ H}.$$

$$\mathbf{5^0) A la résonance d'intensité: } \varphi_u = \varphi_i \xrightarrow{\varphi_u = 0} \varphi_i = 0.$$

$$* u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \xrightarrow{i_0(t) = I_{m0} \sin(\omega_0 t + \varphi_i)} u_{L0}(t) = L\omega_0 I_{m0} \sin\left(\omega_0 t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$L\omega_0 I_{m0} = 257,48.10^{-3} \cdot 1251,42 \cdot 15.10^{-3} = 4,83 \text{ V} \text{ et } u_{L0}(t) = 4,83 \sin\left(1251,42t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

$$* u_C(t) = \frac{1}{C} \int i dt \xrightarrow{i_0(t) = I_{m0} \sin(\omega_0 t + \varphi_i)} u_{C0}(t) = \frac{I_{m0}}{C\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{I_{m0}}{C\omega_0} = \frac{15.10^{-3}}{2,48.10^{-6} \cdot 1251,42} = 4,83 \text{ V} \text{ et } u_{C0}(t) = 4,83 \sin\left(1251,42t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

$$* \text{ On remarque que } u_{L0}(t) + u_{C0}(t) = 0.$$

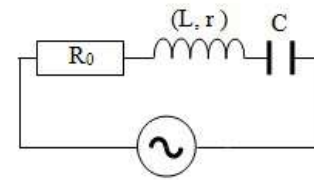
$$* \text{ On a : } u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t) \rightarrow u_L(t) + u_C(t) = u(t) - u_R(t)$$

$$\text{A la résonance d'intensité : } \varphi_u = \varphi_i \text{ et } Z_0 = R \rightarrow u(t) = u_{R0}(t) \text{ et } u_{L0}(t) + u_{C0}(t) = 0.$$

Exercice 5 :

Une portion de circuit série comporte :

- * un condensateur de capacité C
- * une bobine d'inductance L et de résistance interne r
- * un résistor de résistance $R_0 = 60 \Omega$.



Un générateur basses fréquences (GBF) maintient entre les bornes de cette portion de circuit série une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi N.t + \varphi_u)$ de valeur maximale U_m constante et de fréquence N variable. Le circuit est alors parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_m \sin(2\pi N.t + \varphi_i)$.

Un oscilloscope bi courbe, convenablement branché, permet de visualiser simultanément la tension $u(t)$ aux bornes du générateur sur la voie (Y_1) et la tension $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor sur la voie (Y_2).

Expérience 1 :

Pour une fréquence N_1 du GBF, on obtient les oscillogrammes

(a) et (b) de la figure 1 ci-contre :

On donne :

- balayage horizontal : 1 ms.div^{-1} .
- sensibilité verticale pour la voie (Y_1) : 2 V.div^{-1} .
- sensibilité verticale pour la voie (Y_2) : 2 V.div^{-1} .

1⁰) a - Reproduire le schéma du circuit et indiquer les branchements nécessaires pour la visualisation des tensions $u(t)$ et $u_{R_0}(t)$.

b - Pourquoi peut-on affirmer que l'oscillogramme (a) correspond à la tension $u(t)$?

2⁰) a - Déterminer la valeur de la période T_1 des oscillations. En déduire celle de la fréquence N_1 .

b - Quelles sont les valeurs maximales U_m et I_m respectivement de la tension $u(t)$ et de l'intensité $i(t)$ du courant. En déduire la valeur Z_1 de l'impédance du circuit.

c - Déterminer la valeur du déphasage $\Delta\varphi_1 = (\varphi_u - \varphi_i)$ entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ du courant.

Préciser alors si le circuit est inductif, capacitif ou résistif.

3⁰) Quelle est la valeur de la puissance moyenne P consommée par le circuit ?

Expérience 2 :

Pour une fréquence N_2 du GBF, on remarque que les oscillogrammes (a) et (b) prennent l'aspect de la figure 2 ci-contre :

On donne :

- balayage horizontal : 2 ms.div^{-1} .
- sensibilité verticale pour la voie (Y_1) : 2 V.div^{-1} .
- sensibilité verticale pour la voie (Y_2) : 5 V.div^{-1} .

4⁰) a - Quel phénomène le circuit subit-il ? Justifier la réponse.

b - Que représente alors la fréquence N_2 ? Calculer sa valeur.

c - Montrer que la valeur de la résistance de la bobine est $r = 12 \Omega$.

5⁰) a - L'inductance de la bobine s'exprime par : $L = \frac{(R_0 + r) \cdot N_1}{2\pi \cdot (N_1^2 - N_2^2)} \cdot \text{tg} \Delta\varphi_1$

Calculer la valeur de L .

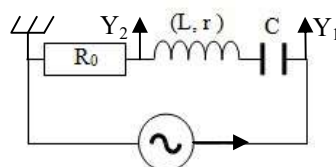
b - Déduire alors la valeur de la capacité C du condensateur.

6⁰) a - Soit $Q = \frac{1}{R_0 + r} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de surtension du circuit. Quelle est sa valeur ?

b - Calculer la valeur maximale U_{0mc} de la tension aux bornes du condensateur à la résonance d'intensité

Réponse :

1⁰) a -



$$\mathbf{b} - \left. \begin{array}{l} U_m = Z \cdot I_m \\ U_{R_0 m} = R_0 \cdot I_m \end{array} \right| \xrightarrow{Z > R_0} U_m > U_{R_0 m}$$

Les deux entrées de l'oscilloscope ayant la même sensibilité verticale, l'oscillogramme qui a l'amplitude la plus grande correspond à $u(t)$. Donc l'oscillogramme (a) correspond à la tension $u(t)$.

$$\mathbf{2^0) a} - T_1 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ s. or } N_1 = \frac{1}{T_1} \rightarrow N_1 = \frac{1}{10^{-2}} \text{ et } \rightarrow N_1 = 100 \text{ Hz.}$$

$$\mathbf{b} - U_m = 3.2 \text{ et } U_m = 6 \text{ V.}$$

$$I_m = \frac{U_{R_0 m}}{R_0} \rightarrow I_m = \frac{2.2}{60} \text{ et } I_m = 66,67 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$Z_1 = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} \rightarrow Z_1 = \frac{6}{66,67 \cdot 10^{-3}} \text{ et } Z_1 = 90 \Omega.$$

$$\mathbf{c} - u_{R_0} = R_0 \cdot i \xrightarrow{u_{R_0} \text{ est proportionnelle à } i} \varphi_{u_{R_0}} = \varphi_i.$$

$$|\Delta \varphi_1| = 2\pi \cdot \frac{|\Delta t|}{T_1} \rightarrow |\Delta \varphi_1| = 2\pi \cdot \frac{1}{10} = \frac{\pi}{5}.$$

$$u(t) \text{ est en avance de phase par rapport à } i(t) \rightarrow \Delta \varphi_1 > 0 \text{ et } \Delta \varphi_1 = \frac{\pi}{5} \text{ rad.}$$

$\Delta \varphi_1 > 0$ le circuit est alors inductif.

$$\mathbf{3^0) P} = U \cdot I \cdot \cos(\Delta \varphi_1) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos(\Delta \varphi_1) \rightarrow P = \frac{6 \cdot 66,67 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ et } P = 16,18 \cdot 10^{-2} \text{ W.}$$

$\mathbf{4^0) a} -$ Le circuit est à la résonance d'intensité car $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase.

$\mathbf{b} - N_2 = N_0$ fréquence propre du circuit.

$$N_2 = \frac{1}{T_2} \rightarrow N_2 = \frac{1}{6.2 \cdot 10^{-3}} \text{ et } N_2 = 83,33 \text{ Hz.}$$

$$\mathbf{c} - \left. \begin{array}{l} U_m = (R_0 + r) \cdot I_{mr} \\ U_{R_0 m} = R_0 \cdot I_{mr} \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} U_m = 3.2 = 6 \text{ V} \\ U_{R_0 m} = 5.1 = 5 \text{ V} \end{array}} \frac{60 + r}{60} = \frac{6}{5} \rightarrow r = 60 \cdot \left(\frac{6}{5} - 1\right) \text{ et } r = 12 \Omega.$$

$$\mathbf{5^0) a} - L = \frac{(60 + 12) \cdot 100}{2\pi \cdot ((100)^2 - (83,33)^2)} \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ et } L = 27,24 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$$

$$\mathbf{b} - N_2^2 = N_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot C} \rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot N_2^2}. \text{ A.N : } C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 27,24 \cdot 10^{-2} \cdot (83,33)^2} \text{ et } C = 1,34 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

$$\mathbf{6^0) a} - Q = \frac{1}{(60 + 12)} \sqrt{\frac{27,24 \cdot 10^{-2}}{1,34 \cdot 10^{-5}}} \text{ et } Q = 1,98.$$

$$\mathbf{b} - U_{0mC} = Q \cdot U_m \rightarrow U_{0mC} = 1,98 \cdot 6 \text{ et } U_{0mC} = 11,88 \text{ V.}$$

Exercice 6 :

On dispose du matériel suivant : un GBF qui délivre une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 6 \text{ V}$ et de fréquence N variable, un résistor de résistance $R = 50 \Omega$, une bobine d'inductance L et de résistance interne r , un condensateur de capacité C , un oscilloscope bi courbe et des fils de connexion.

On se propose de déterminer les valeurs de L , r et C .

$\mathbf{1^0)}$ Faire un schéma du montage permettant de visualiser à l'oscilloscope la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur sur la voie 2 (Y_2) et la tension $u(t)$ aux bornes du générateur BF sur la voie 1 (Y_1).

2⁰) Pour une fréquence N_1 du GBF, on observe à l'oscilloscope les oscillogrammes (a) et (b) ci-dessous :

a - Justifier que l'oscillogramme (b) correspond à $u(t)$.

b - Déterminer graphiquement les valeurs :

* de la fréquence N_1 .

* de la tension maximale U_{Cm} aux bornes du condensateur.

* du déphasage $\Delta\varphi = (\varphi_u - \varphi_{u_c})$ entre les tensions $u(t)$ et $u_c(t)$.

c - Montrer que le déphasage entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ du courant qui parcourt le circuit est

$$\Delta\varphi' = (\varphi_u - \varphi_i) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}.$$

Préciser alors si le circuit est inductif, capacitif ou résistif.

3⁰) La figure ci-dessous donne la représentation de Fresnel relative aux tensions maximales aux bornes du résistor, de la bobine, du condensateur et du générateur:

a - Calculer la valeur de l'intensité maximale I_m .

b - Sachant que $U_{Cm} = \frac{I_m}{C\omega_1}$, Calculer la valeur de la capacité C du condensateur.

c - Déterminer les valeurs de $U_{Rm} = r \cdot I_m$ et de $U_{Lm} = L \cdot \omega_1 \cdot I_m$. En déduire la valeur de la résistance interne r de la bobine et celle de son inductance L .

4⁰) On fait varier la fréquence du GBF jusqu'à une valeur N_2 pour laquelle l'intensité maximale du courant prend la valeur la plus grande I_{m0} .

a - De quel phénomène s'agit-il ?

b - Que représente N_2 ? Calculer sa valeur.

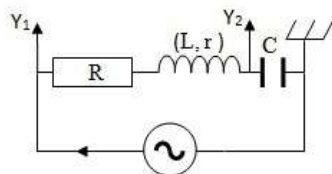
c - Calculer la valeur de I_{m0} .

5⁰) On maintient la fréquence N_2 et on remplace le condensateur par un autre de capacité C' . Le circuit est alors en état de résonance de charge.

Sachant que la pulsation de résonance vérifie la relation : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$ où ω_0 est la pulsation propre du circuit. Calculer la valeur de la capacité C' .

Réponse :

1⁰)



2⁰) a - La tension $u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à la tension $u_c(t)$.

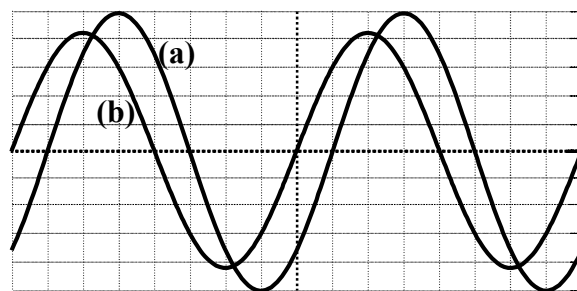
L'oscillogramme (b) correspond donc à la tension $u(t)$.

b - * $N_1 = \frac{1}{T_1} \rightarrow N_1 = \frac{1}{8 \cdot 10^{-3}}$ et $N_1 = 125 \text{ Hz}$.

* D'après l'oscillogramme (a), $U_{Cm} = 5.2$ et $U_{Cm} = 10 \text{ V}$.

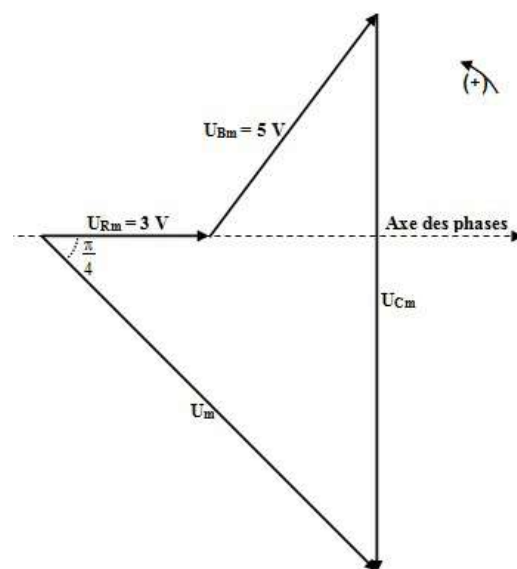
* $|\Delta\varphi| = |\varphi_u - \varphi_{u_c}| = 2\pi \cdot \frac{|\Delta t|}{T_1} \rightarrow |\Delta\varphi| = 2\pi \cdot \frac{1}{8}$ et $|\Delta\varphi| = \frac{\pi}{4}$

On a : $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{u_c} > 0$ $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$.



Réglage de l'oscilloscope :

- Balayage vertical : 2 V.div^{-1}
- Balayage horizontal : 1 ms.div^{-1}



c - On a : $u_c(t) = \frac{1}{C} \int i dt \rightarrow \varphi_{u_c} = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$ et $\varphi_i = \varphi_{u_c} + \frac{\pi}{2}$

$\Delta\varphi' = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u - \varphi_{u_c} - \frac{\pi}{2} = \Delta\varphi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$ et $\Delta\varphi' = -\frac{\pi}{4} \text{ rad.}$

$\Delta\varphi' = \varphi_u - \varphi_i < 0 \rightarrow$ le circuit est capacitif.

3⁰) a - $U_{R_m} = R \cdot I_m \rightarrow I_m = \frac{U_{R_m}}{R}$. A.N : $I_m = \frac{3}{50}$ et $I_m = 6 \cdot 10^{-2} \text{ A.}$

b - $U_{C_m} = \frac{I_m}{C \cdot \omega_1} \xrightarrow{\omega_1 = 2\pi N_1} U_{C_m} = \frac{I_m}{C \cdot 2\pi N_1}$ et $C = \frac{I_m}{U_{C_m} \cdot 2\pi N_1} \cdot \cdot$

A.N : $C = \frac{6 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 2\pi \cdot 125}$ et $C = 7,64 \cdot 10^{-6} \text{ F.}$

c - * $U_{R_m} + U_{r_m} = U_m \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = U_m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = U \rightarrow U_{r_m} = U - U_{R_m}.$

A.N : $U_{r_m} = 6 - 3$ et $U_{r_m} = 3 \text{ V.}$

* $U_{C_m} - U_{L_m} = U_m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = U_m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = U \rightarrow U_{L_m} = U_{C_m} - U.$

A.N : $U_{L_m} = 10 - 6$ et $U_{L_m} = 4 \text{ V.}$

* $U_{r_m} = r \cdot I_m \rightarrow r = \frac{U_{r_m}}{I_m} \cdot \cdot$

A.N : $r = \frac{3}{6 \cdot 10^{-2}}$ et $r = 50 \Omega.$

* $U_{L_m} = L \cdot \omega_1 \cdot I_m \xrightarrow{\omega_1 = 2\pi N_1} U_{L_m} = L \cdot 2\pi N_1 \cdot I_m$ et $L = \frac{U_{L_m}}{2\pi N_1 \cdot I_m}.$

A.N : $L = \frac{4}{2\pi \cdot 125 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}$ et $L = 8,49 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$

4⁰) a - Il s'agit de la résonance d'intensité.

b - La fréquence N_2 représente la fréquence propre du circuit ($N_2 = N_0$).

$N_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} \rightarrow N_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{8,49 \cdot 10^{-2} \cdot 7,64 \cdot 10^{-6}}}$ et $N_2 = 197,6 \text{ Hz.}$

c - A la résonance d'intensité, $Z_0 = R + r$

$\rightarrow I_{m0} = \frac{U_m}{R + r}$ et $I_{m0} = \frac{U\sqrt{2}}{R + r}$. A.N : $I_{m0} = \frac{6\sqrt{2}}{50 + 50}$ et $I_{m0} = 8,49 \cdot 10^{-2} \text{ A.}$

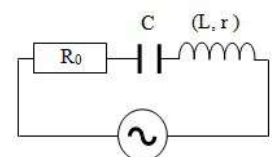
5⁰) $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2} \rightarrow \begin{cases} \omega_r^2 = (2\pi N_2)^2 \\ \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C'} \end{cases} \rightarrow 4\pi^2 N_2^2 = \frac{1}{L \cdot C'} - \frac{(R+r)^2}{2L^2} \rightarrow \frac{1}{L \cdot C'} = 4\pi^2 N_2^2 + \frac{(R+r)^2}{2L^2}$

et $C' = \frac{1}{L \cdot \left(4\pi^2 N_2^2 + \frac{(R+r)^2}{2L^2}\right)}$. A.N : $C' = \frac{1}{8,49 \cdot 10^{-2} \cdot \left(4\pi^2 (197,6)^2 + \frac{(50+50)^2}{2(8,49 \cdot 10^{-2})^2}\right)}$ et $C' = 5,27 \cdot 10^{-6} \text{ F.}$

Exercice 7 :

Une portion de circuit série comporte :

- * un condensateur de capacité C
- * une bobine d'inductance L et de résistance interne r
- * un résistor de résistance $R_0 = 50 \Omega$.



Un générateur basses fréquences (GBF) maintient entre les bornes de cette portion de circuit série une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$ de valeur maximale U_m constante et de pulsation ω variable. Le circuit est alors parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_m \sin(\omega \cdot t)$.

Un système d'acquisition, dont le branchement est identique à celui d'un oscilloscope, nous permet de visualiser simultanément la tension $u(t)$ aux bornes du générateur sur la voie (Y_1) et la tension $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor sur la voie (Y_2).

1⁰) Faire un schéma du montage électrique et indiquer les branchements nécessaires à la visualisation des tensions $u(t)$ et $u_{R_0}(t)$.

2⁰) Pour une pulsation ω du GBF, on observe les deux courbes (a) et (b) ci-dessous :

a - Justifier que la courbe (a) correspond à $u(t)$.

b - Déterminer graphiquement les valeurs :

* de la pulsation ω .

* des tensions maximales U_m et U_{R_0m} respectivement aux bornes du générateur et du résistor.

* du déphasage $\Delta\varphi = (\varphi_u - \varphi_{u_{R_0}})$ entre les tensions $u(t)$ et $u_{R_0}(t)$.

c - Justifier que le déphasage entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$

du courant qui parcourt le circuit est $\Delta\varphi = (\varphi_u - \varphi_i) = \frac{\pi}{12}$ rad.

Préciser alors si le circuit est inductif, capacitif ou résistif.

3⁰) a - Calculer la valeur de l'intensité maximale I_m du courant qui parcourt le circuit. Dédire alors la valeur de l'impédance Z du circuit.

b - En utilisant l'expression du facteur de puissance, calculer la valeur de la résistance interne r de la bobine.

c - Calculer la valeur de la puissance moyenne P consommée par le circuit.

4⁰) La mesure, à l'aide d'un voltmètre, de la tension aux bornes de la bobine donne $U_B = 10$ V et celle de la tension aux bornes de l'ensemble résistor-condensateur donne $U_{R_0,C} = 10$ V.

Ces mesures permettent de faire la construction de Fresnel ci-dessous :

a - Donner, en le justifiant, la nature du triangle de cotés U , $U_{R_0,C}$ et U_B .

Déterminer la valeur de l'angle α entre le vecteur de Fresnel associé à $u_{R_0}(t)$ et celui associé à $u_{R_0,C}(t)$.

b - Calculer la valeur de la tension efficace U_C aux bornes du condensateur.

En déduire la valeur de la capacité C du condensateur.

c - En utilisant l'expression de $\tan \Delta\varphi$, déterminer la valeur de l'inductance L de la bobine.

d - Calculer alors la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur électrique considéré.

5⁰) a - Montrer qu'il existe une autre capacité C' du condensateur pour laquelle l'intensité efficace du courant circulant dans le circuit est la même que pour la capacité C . Calculer alors la valeur de C' .

Préciser dans ce cas si le circuit est inductif, capacitif ou résistif.

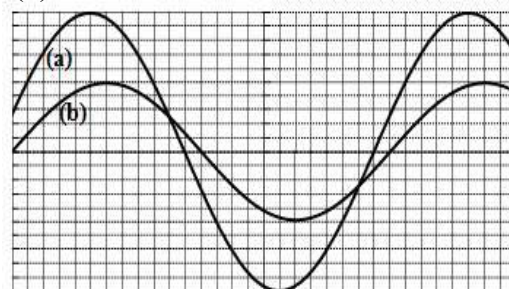
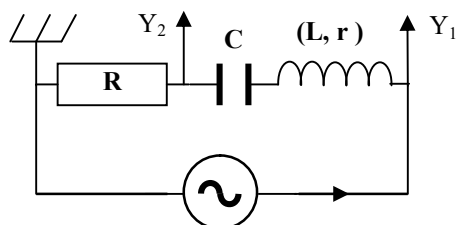
b - Calculer alors la valeur de la tension efficace $U_{C'}$ aux bornes du condensateur.

c - Faire la construction de Fresnel relative aux vecteurs associés aux tensions $u_{R_0,C}(t)$, $u_B(t)$ et $u(t)$.

Echelle : 1 cm $\longrightarrow$ 2 V.

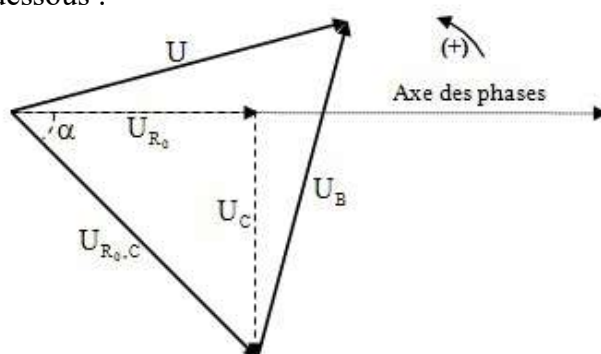
Réponse :

1⁰)



Réglages du système d'acquisition :

- Balayage vertical sur Y_1 : $\sqrt{2}$ V.div⁻¹
- Balayage vertical sur Y_2 : 2 V.div⁻¹
- Balayage horizontal : $\frac{\pi}{12}$ ms.div⁻¹



$$2^0) \text{ a - } \begin{cases} U_m = Z \cdot I_m \\ U_{R_0m} = R_0 \cdot I_m \end{cases} \xrightarrow{Z > R_0} U_m > U_{R_0m} \quad \text{et} \quad \frac{U_m}{U_{R_0m}} > 1$$

Si la courbe (a) correspond à $u_{R_0}(t)$ et la courbe (b) correspond à $u(t)$:

$$\frac{U_m}{U_{R_0m}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{10.2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} < 1 \quad \text{impossible.}$$

Donc la courbe (a) correspond à $u(t)$ et la courbe (b) correspond à $u_{R_0}(t)$.

b - * Graphiquement : $T = 24 \cdot \frac{\pi}{12}$ et $T = 2\pi \text{ ms}$.

$$\text{on a : } \omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T=2\pi \cdot 10^{-3} \text{ s}} \omega = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad \omega = 1000 \text{ rad.s}^{-1}.$$

*** Graphiquement :** $U_m = 10 \cdot \sqrt{2}$ et $U_m = 14,14 \text{ V}$.

$$U_{R_0m} = 5.2 \quad \text{et} \quad U_{R_0m} = 10 \text{ V}$$

$$* |\Delta\phi| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T} \xrightarrow{\text{graphiquement}} |\Delta\phi| = 2\pi \frac{1}{24} \quad \text{et} \quad |\Delta\phi| = \frac{\pi}{12} \text{ rad.}$$

$$\text{On a : } \Delta\phi = \phi_u - \phi_{u_{R_0}} > 0 \rightarrow \Delta\phi = \frac{\pi}{12} \text{ rad.}$$

c - On a $u_{R_0}(t) = R_0 \cdot i(t)$ donc $u_{R_0}(t)$ et $i(t)$ sont en phase donc $\phi_{u_{R_0}} = \phi_i$ et

$$\Delta\phi = \phi_u - \phi_{u_{R_0}} = \phi_u - \phi_i = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

$$\Delta\phi = \phi_u - \phi_i > 0 \rightarrow \text{le circuit est inductif.}$$

$$3^0) \text{ a - } U_{R_0m} = R_0 \cdot I_m \rightarrow I_m = \frac{U_{R_0m}}{R_0}. \quad \text{A.N: } I_m = \frac{10}{50} \quad \text{et} \quad I_m = 0,2 \text{ A.}$$

$$U_m = Z \cdot I_m \rightarrow Z = \frac{U_m}{I_m}. \quad \text{A.N: } Z = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{0,2} \quad \text{et} \quad Z = 50 \cdot \sqrt{2} \Omega \quad (Z = 70,71 \Omega).$$

$$\text{b - } \cos \Delta\phi = \frac{R_0 + r}{Z} \rightarrow r = Z \cdot \cos \Delta\phi - R_0. \quad \text{A.N: } r = 50 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 50 \quad \text{et} \quad r = 18,3 \Omega.$$

$$\text{c - } P = (R_0 + r) \cdot I^2 \xrightarrow{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} P = (R_0 + r) \cdot \frac{I_m^2}{2}. \quad \text{A.N: } P = 50 + 18,3 \cdot \frac{(0,2)^2}{2} \quad \text{et} \quad P = 1,37 \text{ W.}$$

$$4^0) \text{ a - } U_m = 10 \cdot \sqrt{2} \xrightarrow{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}} U = 10 \text{ V.}$$

$$U = U_B = U_{R_0C} \rightarrow \text{le triangle de cotés } U, U_B \text{ et } U_{R_0C} \text{ est un triangle équilatéral.}$$

$$\text{Graphiquement : } \alpha + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$\text{b - } U_C = U_{R_0C} \cdot \sin \alpha. \quad \text{A.N: } U_C = 10 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad U_C = 5 \cdot \sqrt{2} \text{ V} \quad (U_C = 7,071 \text{ V}).$$

$$\text{On a : } U_C = \frac{I}{C \cdot \omega} \rightarrow C = \frac{I}{U_C \cdot \omega} \xrightarrow{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} C = \frac{I_m}{U_C \cdot \omega \cdot \sqrt{2}}. \quad \text{A.N: } C = \frac{0,2}{5 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^3 \cdot \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad C = 2 \cdot 10^{-5} \text{ F.}$$

$$\text{c - } \tan \Delta\phi = \frac{L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}}{R_0 + r} \rightarrow L \cdot \omega = (R_0 + r) \cdot \tan \Delta\phi + \frac{1}{C \cdot \omega} \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{\omega} \cdot \left[(R_0 + r) \cdot \tan \Delta\phi + \frac{1}{C \cdot \omega} \right].$$

$$\text{A.N: } L = \frac{1}{10^3} \cdot \left[(50 + 18,3) \cdot \tan \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3} \right] \quad \text{et} \quad L = 68,3 \cdot 10^{-3} \text{ H.}$$

$$\text{d - } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}. \quad \text{A.N: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{68,3 \cdot 10^{-3} \cdot C \cdot 2 \cdot 10^{-5}}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = 855,6 \text{ rad.s}^{-1}.$$

5⁰) a - La même intensité efficace $I \xrightarrow[U=Z \cdot I]{U=\text{constante}}$ la même impédance Z .

$$Z = \sqrt{(R_0 + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \rightarrow Z^2 = (R_0 + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \text{ et } \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right| = \sqrt{Z^2 - (R_0 + r)^2}.$$

Le circuit étant inductif $\left(L\omega > \frac{1}{C\omega}\right)$, on a : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \sqrt{Z^2 - (R_0 + r)^2}$

Il existe alors une valeur C' de la capacité telle que : $\frac{1}{C'\omega} - L\omega = \sqrt{Z^2 - (R_0 + r)^2}$

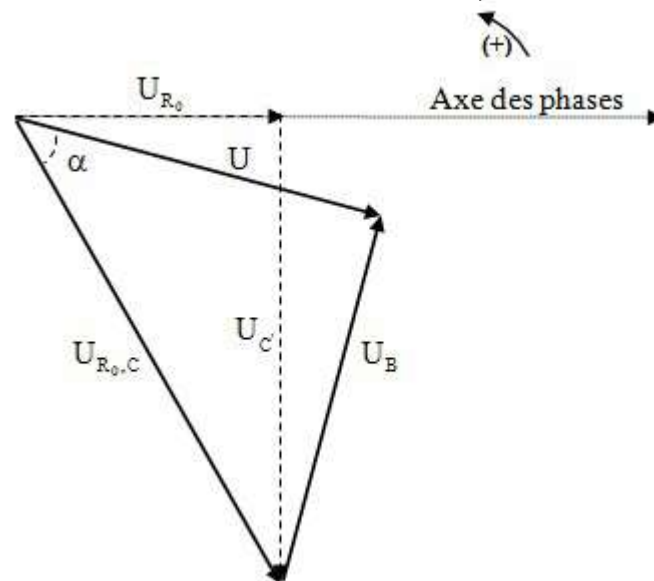
$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C'\omega} - L\omega \rightarrow 2L\omega - \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C'\omega} \rightarrow C' = \frac{1}{\omega \left(2L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \text{ et } C' = \frac{C}{2LC\omega^2 - 1}.$$

$$\text{A.N : } C' = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2.68 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot (10^3)^2 - 1} \text{ et } C' = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ F}.$$

$\frac{1}{C'\omega} > L\omega$ le circuit est dans ce cas capacitif.

$$\text{b - } U_{C'} = \frac{I}{C'\omega} \xrightarrow{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} U_{C'} = \frac{I_m}{C'\omega \sqrt{2}}. \text{ A.N : } U_{C'} = \frac{0,2}{1,15 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 \cdot \sqrt{2}} \text{ et } U_{C'} = 12,3 \text{ V}.$$

c -



Exercice 8 :

Un GBF alimente une portion de circuit série comportant :

- un condensateur de capacité C
- une bobine d'inductance L variable et de résistance interne $r = 12 \Omega$.
- un résistor de résistance R_0
- un ampèremètre A de résistance interne négligeable

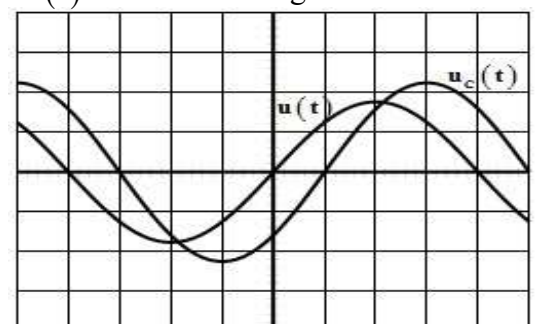
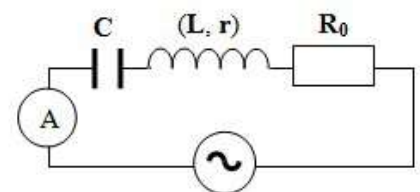
Le GBF délivre une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ de valeur maximale $U_m = 10 \text{ V}$ constante et de pulsation ω variable.

1⁰) Un oscilloscope permet de visualiser simultanément la tension $u(t)$ aux bornes du générateur et la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

Reproduire et compléter le schéma du montage en précisant les connections avec l'oscilloscope afin de visualiser sur la voie Y_1 la tension $u(t)$ et sur la voie Y_2 la tension $u_C(t)$

2⁰) Pour une pulsation $\omega = 800 \text{ rad.s}^{-1}$ du GBF, l'ampèremètre indique une intensité $I = 5 \cdot 10^{-2} \text{ A}$ et on observe sur l'écran de l'oscilloscope les oscillogrammes ci-contre :

D'autre part, branché aux bornes du condensateur, un voltmètre indique une tension $U_C = 9 \text{ V}$.



a - Déterminer la valeur du déphasage $\Delta\varphi = (\varphi_u - \varphi_{u_C})$ entre la tension $u(t)$ et la tension $u_C(t)$.

b - En déduire la valeur du déphasage $\Delta\varphi' = (\varphi_u - \varphi_i)$ entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ du courant.

Préciser alors si le circuit est inductif, capacitif ou résistif.

c - Calculer la valeur de la capacité C du condensateur.

3⁰ **a** - Faire la construction de Fresnel relative aux valeurs efficaces des tensions en prenant comme échelle : $1V \rightarrow 1cm$

b - En exploitant la construction de Fresnel, montrer que $R_0 = 88\Omega$ et $L = 0,1H$.

4⁰ On modifie l'inductance L de la bobine jusqu'à obtenir sur l'écran de l'oscilloscope les oscillogrammes ci-contre :

a - Justifier que le circuit est à l'état de résonance d'intensité.

Déduire alors la valeur de la pulsation propre ω_0 du circuit.

b - Calculer la nouvelle valeur de l'inductance L .

c - Calculer la valeur efficace I_0 de l'intensité du courant.

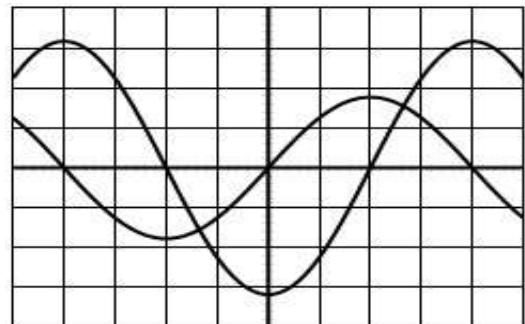
d - Déterminer l'équation horaire de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

e - Calculer la valeur de la puissance moyenne P consommée par le circuit.

5⁰ Soit E l'énergie électromagnétique emmagasinée par le circuit à la résonance d'intensité.

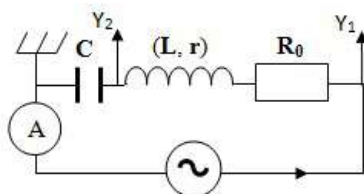
a - Montrer que $E = L.I_0^2$

b - Calculer la valeur de E .



Réponse :

1⁰



2⁰ **a** - $|\Delta\varphi| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T} \xrightarrow{\text{graphiquement}} |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{1}{8} \text{ et } |\Delta\varphi| = \frac{\pi}{4}$

$u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $u_C(t) \rightarrow \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{u_C} > 0$ donc $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$

b - On a $i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} \rightarrow \varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}$.

$\Delta\varphi' = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u - \varphi_{u_C} - \frac{\pi}{2} = \Delta\varphi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}} \Delta\varphi' = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \text{ et } \Delta\varphi' = -\frac{\pi}{4} \text{ rad.}$

$\Delta\varphi' < 0 \rightarrow u(t)$ en retard de phase par rapport à $i(t) \rightarrow$ le circuit est capacitif.

c - $U_C = \frac{I}{C \cdot \omega} \rightarrow C = \frac{I}{U_C \cdot \omega}$. A.N: $C = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{9.800} \text{ et } C = 6,94 \cdot 10^{-6} \text{ F.}$

3⁰ **a** - $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \rightarrow U = \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ et } U = 5\sqrt{2} \text{ V.}$

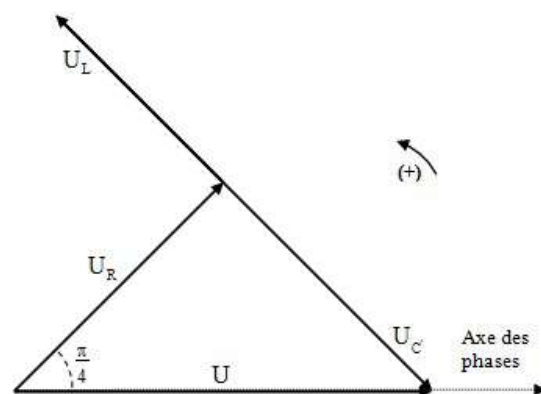
b - * $U_R = (R_0 + r) \cdot I$ et graphiquement : $U_R = U \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\rightarrow R_0 = \frac{U}{I} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - r$

A.N: $R_0 = \frac{5\sqrt{2}}{5 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 12 \text{ et } R_0 = 88\Omega.$

* $U_L = L \cdot \omega \cdot I$ et graphiquement : $U_L = U_C - U \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\rightarrow L = \frac{U_C - U \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\omega \cdot I}$. A.N: $L = \frac{9 - 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{800 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \text{ et } L = 0,1H.$



4⁰) a - Graphiquement, $u(t)$ est en quadrature avance de phase par rapport à $u_c(t) \rightarrow$

$$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{u_c} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\text{Or } \Delta\varphi' = \varphi_u - \varphi_i = \Delta\varphi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}} \Delta\varphi' = 0 \rightarrow \varphi_u = \varphi_i$$

$u(t)$ et $i(t)$ sont en phase donc le circuit est à l'état de résonance d'intensité.

$$\text{A la résonance d'intensité, } \omega = \omega_0 \xrightarrow{\omega = 800 \text{ rad.s}^{-1}} \omega_0 = 800 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\text{b - } \omega_0^2 = \frac{1}{L.C} \rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2.C}. \text{ A.N: } L = \frac{1}{(800)^2 . 6,94.10^{-6}} \text{ et } L = 0,225 \text{ H}.$$

$$\text{c - } I = \frac{U}{Z} \xrightarrow{\text{résonance d'intensité } Z_0 = R_0 + r} I_0 = \frac{U}{R_0 + r}. \text{ A.N: } I_0 = \frac{5.\sqrt{2}}{88+12} \text{ et } I_0 = 5.\sqrt{2}.10^{-2} \text{ A } (I_0 = 7,071.10^{-2} \text{ A}).$$

$$\text{d - } u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0.t + \varphi_{u_c})$$

$$U_{cm} = \frac{I_{0m}}{C.\omega_0} = \frac{I_0.\sqrt{2}}{C.\omega_0}. \text{ A.N: } U_{cm} = \frac{5.\sqrt{2}.\sqrt{2}}{6,94.10^{-6}.800} \text{ et } U_{cm} = 18 \text{ V}.$$

$$\varphi_{u_c} = \varphi_i - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\varphi_u = 0]{\varphi_i = \varphi_u} \varphi_{u_c} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

$$\text{Donc : } u_c(t) = 18 \sin\left(800.t - \frac{\pi}{2}\right) (\text{V})$$

$$\text{e - } P = (R_0 + r).I_0^2. \text{ A.N: } P = (88 + 12).(5.\sqrt{2}.10^{-2})^2 \text{ et } P = 0,5 \text{ W}.$$

$$5^0) \text{ a - } E = E_L + E_C = \frac{1}{2}.L.i^2 + \frac{1}{2}.C.u_c^2$$

$$\xrightarrow{u_c = \frac{1}{C} \int i . dt} E = \frac{1}{2}.L.[I_{0m} \sin(\omega_0.t + \varphi_i)]^2 + \frac{1}{2}.C.\left[-\frac{I_{0m}}{C.\omega_0} \cos(\omega_0.t + \varphi_i)\right]^2$$

$$E = \frac{1}{2}.L.I_{0m}^2 \sin^2(\omega_0.t + \varphi_i) + \frac{1}{2}.\frac{I_{0m}^2}{C.\omega_0^2} \cos^2(\omega_0.t + \varphi_i)$$

$$\xrightarrow{L = \frac{1}{C.\omega_0^2}} E = \frac{1}{2}.L.I_{0m}^2 [\sin^2(\omega_0.t + \varphi_i) + \cos^2(\omega_0.t + \varphi_i)]$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}.L.I_{0m}^2 \xrightarrow{I_{0m} = I_0.\sqrt{2}} E = L.I_0^2.$$

$$\text{b - } E = 0,225.(5.\sqrt{2}.10^{-2})^2 \text{ et } E = 11,25.10^{-4} \text{ J}.$$

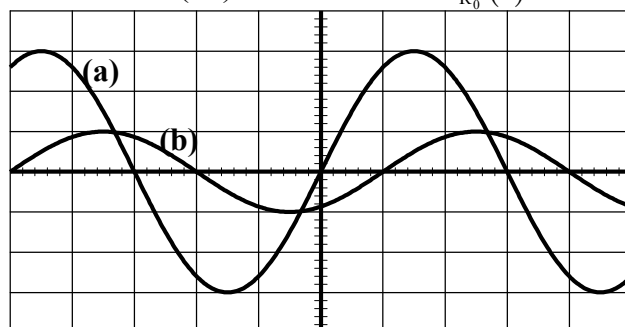
Exercice 9 :

Une portion de circuit série comporte un résistor de résistance $R_0 = 20 \Omega$, un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance $L = 1 \text{ H}$ et de résistance interne r .

On alimente cette portion de circuit par un GBF délivrant une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, elle est alors parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I_m \sin(\omega t)$.

1⁰) Faire un schéma du circuit électrique et indiquer les connections nécessaires pour pouvoir visualiser sur un oscilloscope la tension $u(t)$ aux bornes du générateur sur la voie 1 (Y_1) et la tension $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor sur la voie 2 (Y_2).

2⁰) On obtient sur l'écran de l'oscilloscope les oscillogrammes (a) et (b) ci-dessous :



On donne : Balayage horizontal : $0,5 \text{ ms.div}^{-1}$.

Sensibilité verticale des deux voies : 2 V.div^{-1} .

a - Justifier que l'oscillogramme (a) représente $u(t)$.

b - Déterminer graphiquement :

b_1 - La pulsation ω de la tension $u(t)$.

b_2 - Le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ entre $u(t)$ et $i(t)$.

b_3 - La valeur maximale U_m de $u(t)$.

b_4 - La valeur maximale I_m de $i(t)$.

c - Calculer la valeur de l'impédance Z du circuit.

3⁰) a - L'équation différentielle qui gère l'évolution de l'intensité du courant au cours du temps est :

$$L \cdot \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = u(t)$$

Montrer alors que : $u(t) = (R_0 + r) \cdot I_m \sin(\omega t) + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \cdot I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

b - Soit $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ la relation vectorielle reliant les vecteurs de Fresnel $\vec{V}$, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ de modules respectifs

U_m , $(R_0 + r) \cdot I_m$ et $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \cdot I_m$.

Faire la construction vectorielle correspondante à l'échelle : $1V \leftrightarrow 1cm$.

4⁰) a - Déterminer la valeur de la résistance interne r de la bobine.

b - Montrer que la valeur de la capacité du condensateur est $C = 2,3 \cdot 10^{-7} F$.

c - Déduire alors la valeur de la pulsation propre ω_0 du circuit.

5⁰) a - Déterminer la valeur de la puissance moyenne P consommée par le circuit considéré.

b - Calculer alors la valeur de l'énergie consommée par le circuit pendant une période T .

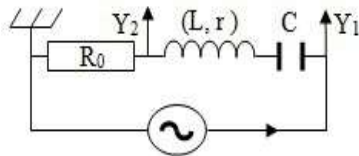
6⁰) a - Déterminer la valeur de l'intensité efficace I_0 du courant à la résonance d'intensité.

b - Le condensateur utilisé a une tension efficace de service $U_s = 400 V$.

En calculant le facteur de surtension Q du circuit, dire, en le justifiant, si on peut expérimentalement atteindre la résonance d'intensité sans risquer la détérioration du condensateur.

Réponse :

1⁰)



$$\begin{aligned} \mathbf{2^0) a - } \quad & U_m = Z \cdot I \\ & U_{R_0m} = R_0 \cdot I \end{aligned} \quad \xrightarrow{Z = \sqrt{(R_0 + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} > R_0} \quad U_m > U_{R_0m}$$

On en déduit que la courbe(a) (de plus grande amplitude) correspond à $u(t)$.

b₁ - Graphiquement : $T = 6,0,5 \cdot 10^{-3} \rightarrow T = 3 \cdot 10^{-3} s$.

$$\text{on a : } \omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T=3 \cdot 10^{-3} s} \omega = \frac{2000\pi}{3} \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{ou} \quad \omega = 2094,4 \text{ rad.s}^{-1}.$$

b₂ - $u_{R_0}(t) = R_0 \cdot i(t) \rightarrow u_{R_0}$ et i sont proportionnelles $\rightarrow \varphi_{u_{R_0}} = \varphi_i$ donc $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u - \varphi_{u_{R_0}}$

$$|\Delta\varphi| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T} \xrightarrow{\text{graphiquement}} |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad |\Delta\varphi| = \frac{\pi}{3}. \quad \text{Graphiquement, } \Delta\varphi > 0 \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

b₃ - Graphiquement : $U_m = 3,2$ et $U_m = 6 V$.

b₄ - Graphiquement : $U_{R_0m} = 1,2$ et $U_{R_0m} = 2 V$

$$\text{On a : } U_{R_0m} = R_0 \cdot I_m \rightarrow I_m = \frac{U_{R_0m}}{R_0} \cdot A.N : I_m = \frac{2}{20} \quad \text{et} \quad I_m = 0,1 A.$$

c - $Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$. A.N : $Z = \frac{6}{0,1}$ et $Z = 60 \Omega$.

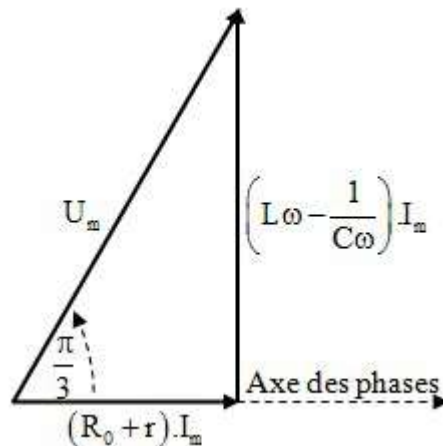
3⁰) a - $L \frac{di}{dt} + (R_0 + r) \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = u(t)$

$\rightarrow u(t) = L \cdot \omega \cdot I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + (R_0 + r) \cdot I_m \sin(\omega t) + \frac{I_m}{C \cdot \omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow u(t) = L \cdot \omega \cdot I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + (R_0 + r) \cdot I_m \sin(\omega t) - \frac{I_m}{C \cdot \omega} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

et $u(t) = (R_0 + r) \cdot I_m \sin(\omega t) + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right) \cdot I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

b -



4⁰) a - On a : $\cos \Delta\varphi = \frac{R_0 + r}{Z} \rightarrow r = Z \cdot \cos \Delta\varphi - R_0$. A.N : $r = 60 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - 20$ et $r = 10 \Omega$.

b - On a : $\tan \Delta\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_0 + r} \rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = (R_0 + r) \cdot \tan \Delta\varphi \rightarrow \frac{1}{C\omega} = L\omega - (R_0 + r) \cdot \tan \Delta\varphi$

$\rightarrow C = \frac{1}{\omega \cdot [L\omega - (R_0 + r) \cdot \tan \Delta\varphi]}$

A.N : $C = \frac{1}{\frac{2000\pi}{3} \cdot \left[1 \cdot \frac{2000\pi}{3} - (20 + 10) \cdot \tan \frac{\pi}{3}\right]}$ et $C = 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ F}$.

c - On a : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$. A.N : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1,2 \cdot 3 \cdot 10^{-7}}}$ et $\omega_0 = 2085,1 \text{ rad.s}^{-1}$

5⁰) a - On a : $P = (R_0 + r) \cdot I^2$. A.N : $P = (20 + 10) \cdot \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)^2$ et $P = 0,15 \text{ W}$.

b - On a : $W = P \cdot T$. A.N : $W = 0,15 \cdot 3 \cdot 10^{-3}$ et $W = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

6⁰) a - A la résonance d'intensité : $Z_0 = R_0 + r \xrightarrow{U=Z \cdot I} I_0 = \frac{U}{R_0 + r}$.

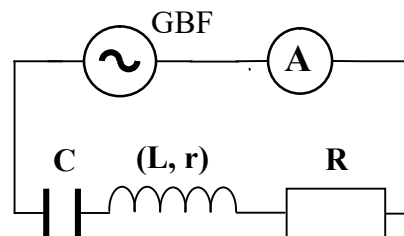
A.N : $I_0 = \frac{6}{\sqrt{2}(20+10)}$ et $I_0 = 0,14 \text{ A}$

b - On a : $Q = \frac{1}{R_0 + r} \sqrt{\frac{L}{C}}$. A.N : $Q = \frac{1}{(20+10)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2,3 \cdot 10^{-7}}}$ et $Q = 69,5$.

A la résonance d'intensité : $U_{0c} = Q \cdot U = 69,5 \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} \approx 295 \text{ V} \xrightarrow{U_s=400 \text{ V}} U_{0c} < U_s$ donc il n'y a pas de risque de claquage du condensateur à la résonance d'intensité.

Exercice 10 :

Un résistor de résistance R , une bobine d'inductance L et de résistance interne négligeable, un condensateur de capacité C et un ampèremètre de résistance négligeable sont associés en série entre les bornes d'un générateur basse fréquence (GBF) délivrant une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ de valeur efficace U et de pulsation ω variable.



Le circuit est alors parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$.

1⁰) a - Etablir l'équation différentielle du circuit relative à l'intensité du courant $i(t)$.

b - Sachant que $i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$, en déduire l'équation différentielle du circuit relative à la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur.

2⁰) a - Ecrire l'expression de l'intensité efficace I du courant en fonction de U , R , L , C et ω .

b - Sachant que $U_c = \frac{I}{C\omega}$, en déduire que la tension efficace U_c aux bornes du condensateur s'écrit :

$$U_c = \frac{U}{\sqrt{R^2 \cdot C^2 \cdot \omega^2 + (L \cdot C \cdot \omega^2 - 1)^2}}$$

3⁰) Pour une pulsation du générateur $\omega = 1400 \text{ rad.s}^{-1}$, l'ampèremètre indique $I = 7 \text{ mA}$.

On relève les tensions efficaces aux bornes du résistor, de la bobine et du condensateur.

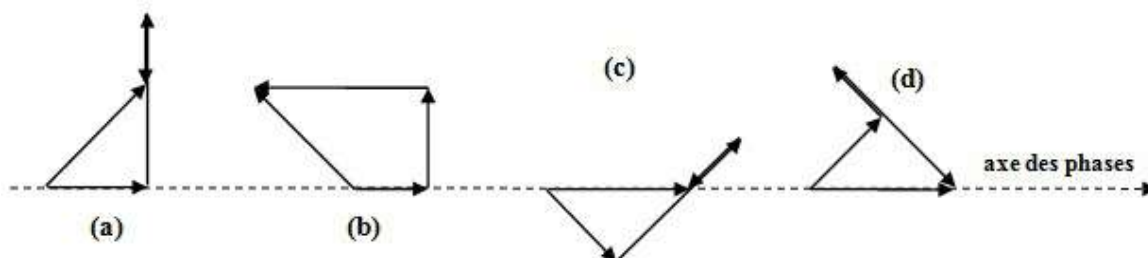
Les mesures donnent respectivement : $U_R = 1,40 \text{ V}$, $U_L = 2,45 \text{ V}$ et $U_C = 1,01 \text{ V}$.

a - Déterminer les valeurs de R , L et C .

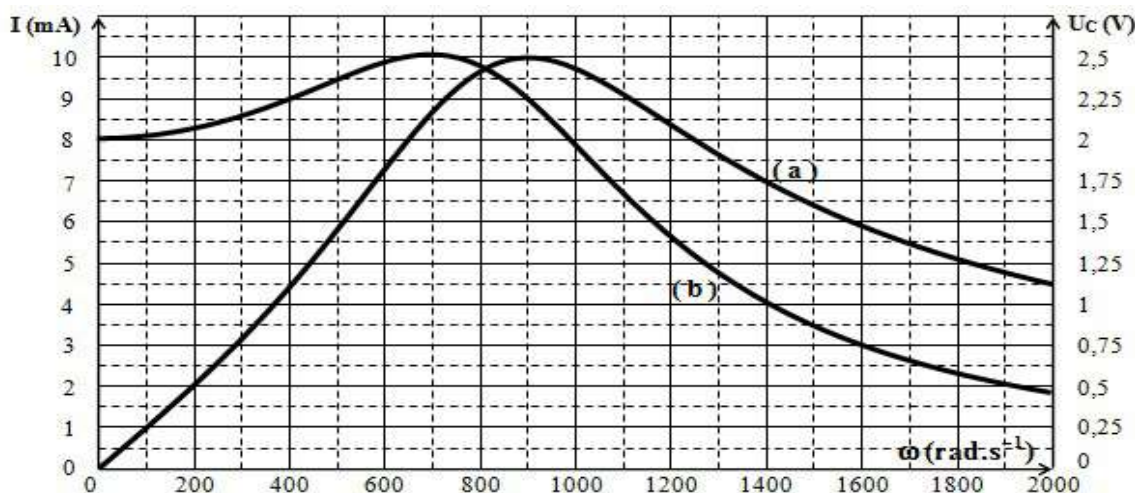
b - Calculer la valeur de l'impédance Z du circuit. En déduire celle de la tension efficace U .

c - Quelle est la valeur du facteur de puissance du circuit. En déduire celle de φ_i .

d - Parmi les constructions de Fresnel (a), (b), (c) et (d) suivantes, prises à l'origine du temps, quelle est celle qui correspond au circuit étudié. Justifier la réponse.



4⁰) On fait varier la pulsation ω du générateur et on mesure à chaque fois l'intensité efficace I du courant qui parcourt le circuit et la tension efficace U_c aux bornes du condensateur. On représente ci-dessous les courbes de variations de I (échelle à gauche) et de U_c (échelle à droite) en fonction de ω .



a - Montrer que la résonance d'intensité a lieu pour une pulsation $\omega_r(I)$ telle que $\omega_r(I) = \omega_0$ où ω_0 est la pulsation propre du circuit alors que la résonance de tension aux bornes du condensateur a lieu pour une pulsation $\omega_r(U_C)$ telle que $\omega_r^2(U_C) = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}$.

b - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à la fonction $I = f(\omega)$ ou $U_C = g(\omega)$ qu'elle représente. Déterminer alors graphiquement $\omega_r(I)$ et $\omega_r(U_C)$.

c - En exploitant les courbes (a) et (b), déterminer les valeurs de R , L , C et U .

d - Calculer la valeur du facteur de surtension Q du circuit.

En déduire la valeur de la tension efficace U_{C0} aux bornes du condensateur à la résonance d'intensité.

Réponse :

1⁰) a - D'après la loi des mailles :

$$u_R + u_B + u_C - u = 0 \longrightarrow u_R + u_B + u_C = u$$

$$\left. \begin{array}{l} u_R = R.i \\ u_B = L \cdot \frac{di}{dt} + r.i = L \cdot \frac{di}{dt} \text{ car } r = 0 \\ u_C = \frac{q}{C} \end{array} \right\} \longrightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + R.i + \frac{q}{C} = u$$

$$\text{or } i = \frac{dq}{dt} \longrightarrow q = \int i \cdot dt, \text{ on écrit alors: } L \cdot \frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = u$$

$$\text{b - } i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \longrightarrow \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} \text{ et } \int i \cdot dt = C \cdot u_C, \text{ il vient alors que : } LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

$$\text{2⁰) a - } I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\text{b - } U_C = \frac{I}{C\omega} = \frac{U}{C\omega \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 C^2 \omega^2 + C^2 \omega^2 \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\text{il vient alors que : } U_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 C^2 \omega^2 + (L C \omega^2 - 1)^2}}$$

$$\text{3⁰) a - } * U_R = R.I \longrightarrow R = \frac{U_R}{I} \text{ . A.N : } R = \frac{1,40}{7,10^{-3}} \text{ et } R = 200 \Omega$$

$$* U_L = L\omega.I \longrightarrow L = \frac{U_L}{\omega.I} \text{ . A.N : } L = \frac{2,45}{1400 \cdot 7,10^{-3}} \text{ et } L = 0,25 \text{ H}$$

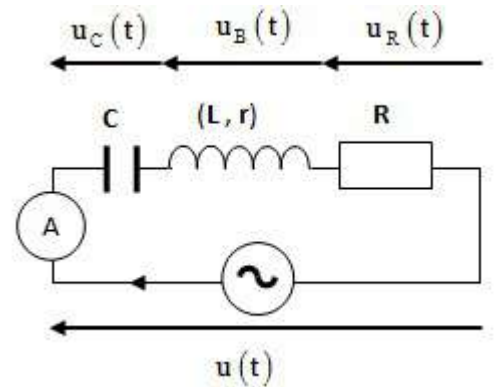
$$* U_C = \frac{I}{C\omega} \longrightarrow C = \frac{I}{U_C \omega} \text{ . A.N : } C = \frac{7,10^{-3}}{1,01 \cdot 1400} \text{ et } C = 4,95 \cdot 10^{-6} \text{ F ou } C = 4,95 \mu\text{F}$$

$$\text{b - } Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{200^2 + \left(0,25 \cdot 1400 - \frac{10^6}{4,95 \cdot 1400}\right)^2} \text{ et } Z = 286,9 \Omega$$

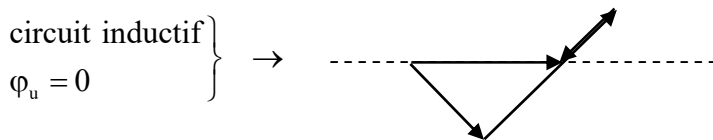
$$\text{On a : } U = Z.I \xrightarrow{\text{A.N}} U = 286,9 \cdot 7,10^{-3} \text{ et } U = 2 \text{ V}$$

$$\text{c - } \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R}{Z} \xrightarrow{\text{A.N}} \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{200}{286,9} \text{ et } \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 0,7$$

$$\cos(\varphi_u - \varphi_i) = 0,7 \xrightarrow[\substack{U_L > U_C \text{ (circuit inductif)} \\ (\varphi_u - \varphi_i) > 0}]{U_L > U_C \text{ (circuit inductif)}} (\varphi_u - \varphi_i) = 0,8 \text{ rad} \xrightarrow{\varphi_u = 0} \varphi_i = -0,8 \text{ rad}$$



d - la représentation de Fresnel (c) correspond au circuit étudié :



3⁰) a - * Résonance d'intensité :

$$I \text{ est max} \rightarrow Z \text{ est min} \rightarrow L \cdot \omega_r = \frac{1}{C \cdot \omega_r} \rightarrow \omega_r^2 = \frac{1}{L \cdot C} = \omega_0^2 \quad \text{et} \quad \omega_r(I) = \omega_0$$

***** Résonance de tension aux bornes du condensateur :

$$U_C \text{ est max} \rightarrow y = R^2 \cdot C^2 \cdot \omega^2 + (L \cdot C \cdot \omega^2 - 1)^2 \text{ est min} \rightarrow \frac{dy}{d\omega} = 0$$

$$\rightarrow 2R^2 C^2 \omega_r + 2(LC \omega_r^2 - 1)(2LC \omega_r) = 0 \rightarrow R^2 C + 2L^2 C \omega_r^2 - 2L = 0 \rightarrow 2L^2 C \omega_r^2 = 2L - R^2 C$$

$$\rightarrow \omega_r^2 = \frac{2L}{2L^2 C} - \frac{R^2 C}{2L^2 C} = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} \quad \text{et} \quad \omega_r^2(U_C) = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}$$

b - $\omega_r(U_C) < \omega_r(I) \rightarrow$ la courbe (a) correspond à $I = f(\omega)$ et la courbe (b) correspond à $U_C = g(\omega)$.

Graphiquement : $\omega_r(I) = 900 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_r(U_C) = 700 \text{ rad.s}^{-1}$.

c - $U = g(0) \rightarrow U = 2 \text{ V}$

$$f(\omega_0) = I_{\text{max}} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ A} \xrightarrow{Z(\omega_0)=R} R = \frac{U}{I_{\text{max}}} = \frac{2}{10 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad R = 200 \, \Omega$$

$$\omega_r^2(U_C) = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2} \rightarrow L^2 = \frac{R^2}{2(\omega_0^2 - \omega_r^2(U_C))} = \frac{200^2}{2(900^2 - 700^2)} = 6,25 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad L = 0,25 \text{ H}$$

$$\omega_r^2(I) = \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \rightarrow C = \frac{1}{L \cdot \omega_r^2(I)} = \frac{1}{0,25 \cdot 900^2} \quad \text{et} \quad C = 4,94 \cdot 10^{-6} \text{ F} \quad \text{ou} \quad C = 4,94 \, \mu\text{F}$$

$$\mathbf{d} - Q = \frac{L \cdot \omega_0}{R} \rightarrow Q = \frac{0,25 \cdot 900}{200} \quad \text{et} \quad Q = 1,125$$

$$Q = \frac{U_{C0}}{U} \rightarrow U_{C0} = Q \cdot U \xrightarrow{A.N} U_{C0} = 1,125 \cdot 2 \quad \text{et} \quad U_{C0} = 2,25 \text{ V}.$$

Exercice 11 :

On dispose du matériel suivant : un GBF qui délivre une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 10 \text{ V}$ et de fréquence N variable, un ampèremètre, un résistor de résistance R , un condensateur de capacité C , une bobine d'inductance $L = 0,2 \text{ H}$ et de résistance interne $r = 50 \, \Omega$, un oscilloscope bi courbe et des fils de connexion.

On se propose, par une étude expérimentale, de déterminer les valeurs de C et de R .

1^o) Faire un schéma du montage permettant de mesurer la valeur de l'intensité efficace I du courant et de visualiser à l'oscilloscope la tension $u_R(t)$ aux bornes du conducteur ohmique sur la voie 2 (Y_2) et la

tension $u(t)$ aux bornes du GBF sur la voie 1 (Y_1).

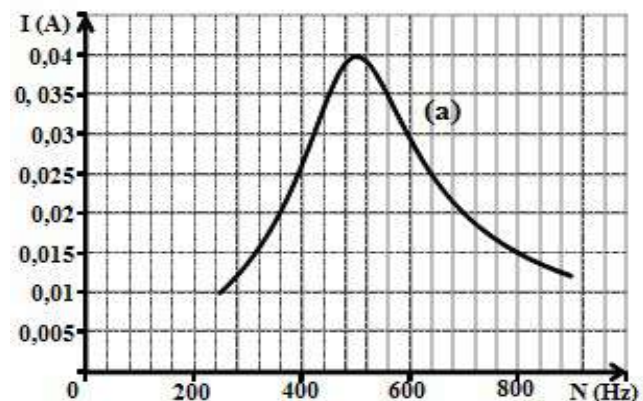
2^o) On fait varier la fréquence N de la tension $u(t)$ et on mesure chaque fois l'intensité efficace I du courant qui parcourt le circuit. On obtient la courbe (a) ci-contre:

a - Quel est le phénomène mis en évidence lorsque l'intensité I atteint sa valeur la plus élevée I_0 ?

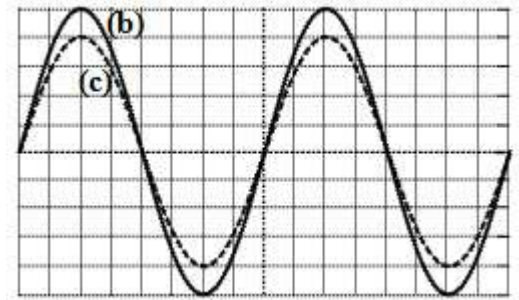
b - Trouver graphiquement la valeur de l'intensité I_0 et celle de la fréquence N_0 correspondante.

c - Calculer la valeur de la capacité C du condensateur.

d - Calculer la valeur de la résistance R du résistor.



3°) Sur l'écran de l'oscilloscope et pour $N = N_0$, on observe les deux oscillogrammes (b) et (c) ci-contre :



a - Montrer que l'oscillogramme (b) correspond à $u(t)$.

b - Vérifier que la sensibilité de la voie 1 (Y_1) de l'oscilloscope est $S_{V1} = 2\sqrt{2} \text{ V.div}^{-1}$.

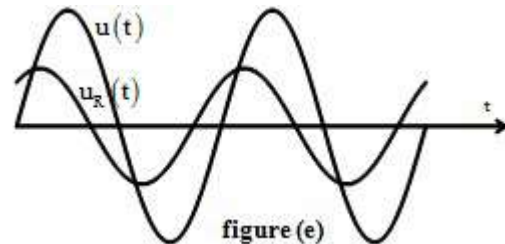
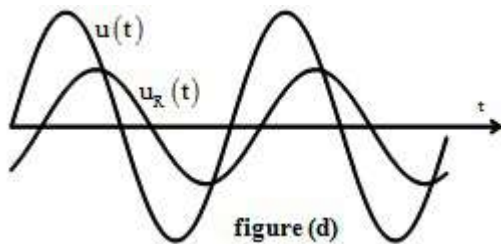
c - Justifier que la sensibilité de la voie 2 (Y_2) de l'oscilloscope est $S_{V2} = S_{V1}$.

d - Déterminer la sensibilité horizontale S_H de l'oscilloscope.

4°) On a constaté que pour deux valeurs N_1 et N_2 de la fréquence N ($N_1 < N_2$), on mesure la même valeur de l'intensité efficace $I = 0,025 \text{ A}$.

a - Relever les valeurs des fréquences N_1 et N_2 de la courbe (a).

b - Les deux figures (d) et (e) ci-dessous, représentent l'évolution au cours du temps les tensions $u_R(t)$ et $u(t)$ pour les fréquences $N = N_1$ et $N = N_2$.



Associer, en le justifiant, chacune des deux figures à la fréquence correspondante.

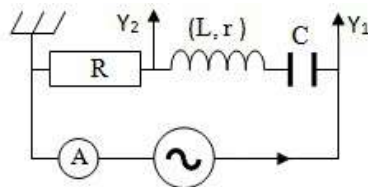
5°) lorsque la fréquence $N = N_1$, déterminer :

a - La valeur de l'impédance Z du circuit.

b - La valeur du facteur de puissance du circuit.

Réponse :

1°)



2°) a - Le phénomène mis en évidence est la résonance d'intensité.

b - Graphiquement : $I_0 = 0,04 \text{ A}$ et $N_0 = 500 \text{ Hz}$.

c - On a : $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}} \rightarrow N_0^2 = \frac{1}{4\pi^2.L.C}$ et $C = \frac{1}{4\pi^2.L.N_0^2}$.

A.N : $C = \frac{1}{4\pi^2.0,2.(500)^2}$ et $C = 5,07.10^{-7} \text{ F}$.

d - A la résonance d'intensité, $I_0 = \frac{U}{R+r} \rightarrow R = \frac{U}{I_0} - r$

A.N : $R = \frac{10}{0,04} - 50$ et $R = 200 \Omega$.

3°) a - $N = N_0 \rightarrow Z = Z_0 = R + r$

$\begin{cases} U_m = (R+r).I_{0m} \\ U_{Rm} = R.I_{0m} \end{cases} \rightarrow U_{Rm} < U_m \rightarrow \text{l'oscillogramme (b) correspond à } u(t).$

b - $U_m = 5.S_{V1} \rightarrow S_{V1} = \frac{U_m}{5} \xrightarrow{U_m = U.\sqrt{2}} S_{V1} = \frac{U.\sqrt{2}}{5}$.

A.N : $S_{V1} = \frac{10\sqrt{2}}{5}$ et $S_{V1} = 2\sqrt{2} \text{ V.div}^{-1}$.

$$c - \begin{cases} U_{Rm} = 4.S_{V2} \\ U_m = 5.S_{V1} \end{cases} \rightarrow \frac{U_{Rm}}{U_m} = \frac{4.S_{V2}}{5.S_{V1}} \rightarrow \frac{R}{R+r} = \frac{4.S_{V2}}{5.S_{V1}} \rightarrow \frac{S_{V2}}{S_{V1}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{R}{R+r}$$

$$A.N : \frac{S_{V2}}{S_{V1}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{200}{200+50} = 1 \rightarrow S_{V2} = S_{V1}.$$

$$d - T_0 = 8.S_H \rightarrow S_H = \frac{T_0}{8} \xrightarrow{T_0 = \frac{1}{N_0}} S_H = \frac{1}{8N_0}.$$

$$A.N : S_H = \frac{1}{8.500} \text{ et } S_H = 0,25.10^{-3} \text{ s.div}^{-1}.$$

$$4^0) a - \text{Graphiquement : } N_1 = 400 \text{ Hz et } N_2 = 640 \text{ Hz}.$$

$$b - * N_1 < N_0 \rightarrow \text{circuit capacitif} \xrightarrow[\substack{u_R(t) \text{ et } i(t) \text{ en phase}}]{u_R(t) = R.i(t)} u(t) \text{ est en retard de phase par rapport à } i(t) \\ \rightarrow \text{la figure (e) correspond donc à la fréquence } N_1.$$

$$* N_2 > N_0 \rightarrow \text{circuit inductif} \xrightarrow[\substack{u_R(t) \text{ et } i(t) \text{ en phase}}]{u_R(t) = R.i(t)} u(t) \text{ est en avance de phase par rapport à } i(t) \\ \rightarrow \text{la figure (d) correspond donc à la fréquence } N_2.$$

$$5^0) a - Z = \frac{U}{I}. \quad A.N : Z = \frac{10}{0,025} \text{ et } Z = 400 \Omega.$$

$$b - \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R+r}{Z}. \quad A.N : \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{200+50}{400} \text{ et } \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 0,625.$$

Exercice 12 :

On se propose d'étudier, séparément, la résonance d'intensité et la résonance de charge dans un circuit formé par un condensateur de capacité C , un résistor de résistance $R_0 = 70 \Omega$ et une bobine d'inductance $L = 0,1 \text{ H}$ et de résistance interne r , associés en série avec un générateur basses fréquences délivrant une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ d'amplitude U_m constante et de fréquence N variable.

• Expérience 1 :

On visualise à l'oscilloscope la tension instantanée $u_{R_0}(t)$ aux bornes du résistor.

On fait varier la fréquence du générateur et mesure chaque fois la valeur de la tension maximale $U_{R_{0m}}$.

• Expérience 2 :

On visualise à l'oscilloscope la tension instantanée $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

On fait varier la fréquence du générateur et mesure chaque fois la valeur de la tension maximale U_{Cm} .

Les mesures effectuées ont permis de tracer, sur la figure ci-contre, les courbes de la charge maximale du condensateur $Q_m = f(N)$ et de l'intensité maximale du courant $I_m = g(N)$.

1⁰) Sachant que l'intensité maximale I_m du courant s'exprime par :

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{(R_0 + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

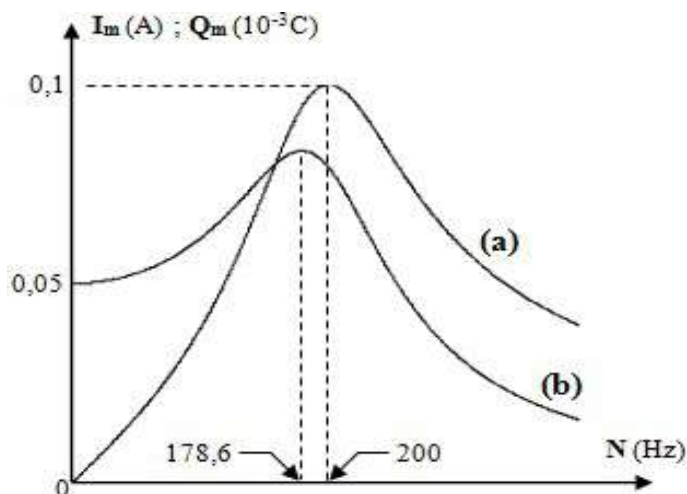
a - Trouver l'expression de la charge maximale Q_m du condensateur en fonction des mêmes paramètres.

On rappelle que : $I_m = \omega.Q_m$.

b - Montrer que la résonance de charge a lieu pour une fréquence N_r telle que : $N_0^2 - N_r^2 = \frac{(R_0 + r)^2}{8\pi^2.L^2}$ où

N_0 est la fréquence propre du circuit oscillant.

On rappelle que : $\omega = 2\pi.N$.



2⁰) a - Identifier parmi les courbes (a) et (b) celle qui correspond à $Q_m = f(N)$ et celle qui correspond à $I_m = g(N)$. Justifier votre réponse.

b - Déduire, graphiquement, les valeurs de la fréquence propre N_0 du circuit oscillant et de la fréquence N_r de la résonance de charge.

3⁰) Calculer la valeur de la capacité C du condensateur.

4⁰) a - Déterminer la valeur de la résistance interne r de la bobine.

b - Montrer que si $(R_0 + r)$ dépasse une valeur limite R qu'on calculera, la résonance de charge disparaît.

5⁰) Déterminer graphiquement la valeur I_{m0} de I_m à la résonance d'intensité. En déduire la valeur de U_m .

6⁰) a - Exprimer la puissance moyenne P consommée par le circuit en fonction de R_0 , r et I_m .

Calculer sa valeur P_0 à la résonance d'intensité.

b - Montrer que la puissance moyenne peut s'exprimer par : $P = \frac{(R_0 + r)}{2} \cdot \frac{U_m^2}{Z^2}$.

c - Déterminer la valeur de l'impédance Z du circuit à la résonance de charge.

d - Calculer la valeur P_r de la puissance moyenne consommée par le circuit à la résonance de charge.

Comparer P_0 et P_r . Commenter le résultat.

Réponse :

$$1^0) \text{ a - } Q_m = \frac{I_m}{\omega} = \frac{U_m}{\omega \sqrt{(R_0 + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \rightarrow Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R_0 + r)^2 \cdot \omega^2 + \left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2}}$$

b - La résonance de charge $\rightarrow Q_m$ est max $\rightarrow y(\omega) = (R_0 + r)^2 \cdot \omega^2 + \left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2$ est min $\rightarrow \frac{dy}{d\omega} = 0$.

$$(R_0 + r)^2 \cdot 2\omega + 2\left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right) \cdot 2L\omega = 0 \rightarrow (R_0 + r)^2 + 2L^2\omega^2 - \frac{2L}{C} = 0 \rightarrow 2L^2\omega^2 = \frac{2L}{C} - (R_0 + r)^2$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{2L}{2L^2 \cdot C} - \frac{(R_0 + r)^2}{2L^2} \xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}} \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{(R_0 + r)^2}{2L^2}$$

$$\omega = 2\pi \cdot N \rightarrow 4\pi^2 \cdot N^2 = 4\pi^2 \cdot N_0^2 - \frac{(R_0 + r)^2}{2L^2} \rightarrow N^2 = N_0^2 - \frac{(R_0 + r)^2}{8\pi^2 \cdot L^2}$$

la résonance de charge a lieu pour une fréquence N_r telle que : $N_0^2 - N_r^2 = \frac{(R_0 + r)^2}{8\pi^2 \cdot L^2}$

2⁰) a - D'après les expressions de I_m et de Q_m et pour $\omega = 0$ ($N = 0$), on a : $I_m(0) = 0$ et $Q_m(0) = C \cdot U_m \neq 0$

La courbe (a) correspond à I_m et la courbe (b) correspond à Q_m .

b - Graphiquement : $N_0 = 200$ Hz et $N_r = 178,6$ Hz.

$$3^0) \text{ On a : } \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \xrightarrow{N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}} N_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot C} \text{ et } C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot N_0^2}.$$

$$A.N : C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 0,1 \cdot 200^2} \text{ et } C = 6,33 \cdot 10^{-6} \text{ F.}$$

$$4^0) \text{ a - } N_0^2 - N_r^2 = \frac{(R_0 + r)^2}{8\pi^2 \cdot L^2} \rightarrow (R_0 + r)^2 = 8\pi^2 \cdot L^2 \cdot (N_0^2 - N_r^2) \rightarrow (R_0 + r) = \sqrt{8\pi^2 \cdot L^2 \cdot (N_0^2 - N_r^2)}$$

$$\rightarrow r = \sqrt{8\pi^2 \cdot L^2 \cdot (N_0^2 - N_r^2)} - R_0. \text{ A.N : } r = \sqrt{8\pi^2 \cdot 0,1^2 \cdot (200^2 - 178,6^2)} - 70 \text{ et } r = 10 \Omega.$$

$$b - N_r^2 = N_0^2 - \frac{(R_0 + r)^2}{8\pi^2 \cdot L^2} \geq 0 \rightarrow \frac{(R_0 + r)^2}{8\pi^2 \cdot L^2} \leq N_0^2 \rightarrow (R_0 + r)^2 \leq 8\pi^2 \cdot L^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot C} \rightarrow (R_0 + r)^2 \leq \frac{2L}{C}$$

Si $(R_0 + r)$ dépasse la valeur $R = \sqrt{\frac{2L}{C}}$, la résonance de charge disparaît.

$$A.N : R = \sqrt{\frac{2.0,1}{6,33.10^{-6}}} \quad \text{et} \quad R = 177,75 \Omega.$$

5⁰) Graphiquement et d'après la courbe (a) : $I_{m0} = 0,1 \text{ A}$.

On a : $U_m = Z.I_m$ or à la résonance d'intensité, $Z_0 = R_0 + r \rightarrow U_m = (R_0 + r).I_{m0}$.

$$A.N : U_m = (70 + 10).0,1 \quad \text{et} \quad U_m = 8 \text{ V}.$$

$$6^0) \text{ a - } P = (R_0 + r).I^2 \xrightarrow{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} P = (R_0 + r). \frac{I_m^2}{2}$$

$$\text{A la résonance d'intensité : } P_0 = (R_0 + r). \frac{I_{m0}^2}{2}. \quad A.N : P_0 = (70 + 10). \frac{0,1^2}{2} \quad \text{et} \quad P_0 = 0,4 \text{ W}$$

$$\text{b - } P = (R_0 + r). \frac{I_m^2}{2} \xrightarrow{I_m = \frac{U_m}{Z}} P = \frac{(R_0 + r)}{2} \cdot \frac{U_m^2}{Z^2}.$$

$$\text{c - } Z_r = \sqrt{(R_0 + r)^2 + \left(L.\omega_r - \frac{1}{C.\omega_r} \right)^2} \xrightarrow{\omega_r = 2\pi.N_r} Z_r = \sqrt{(R_0 + r)^2 + \left(L.2\pi.N_r - \frac{1}{C.2\pi.N_r} \right)^2}$$

$$A.N : Z_r = \sqrt{(70 + 10)^2 + \left(0,1.2\pi.178,6 - \frac{1}{6,33.10^{-6}.2\pi.178,6} \right)^2} \quad \text{et} \quad Z_r = 84,95 \Omega.$$

$$\text{d - } P_r = \frac{(R_0 + r)}{2} \cdot \frac{U_m^2}{Z_r^2}. \quad A.N : P_r = \frac{(70 + 10)}{2} \cdot \frac{8^2}{84,95^2} \quad \text{et} \quad P_r = 0,35 \text{ W}.$$

$P_r < P_0 \rightarrow$ Le circuit consomme plus d'énergie à la résonance d'intensité qu'à la résonance de charge.

Etude d'un texte documentaire :

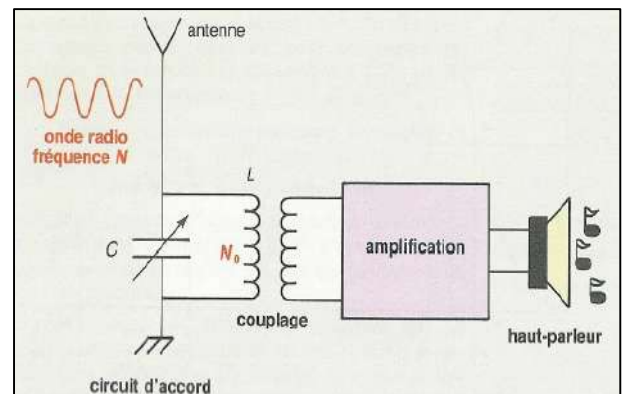
Exercice 1 :

La réception radio

C'est grâce au phénomène de résonance que l'on capte de manière sélective une station radiophonique ou une chaîne de télévision.

La figure ci-contre schématise la chaîne électronique d'un récepteur radio. L'antenne capte les signaux électriques qui viennent d'un très grand nombre de stations et il faut sélectionner ceux qui correspondent à la station désirée (fréquence N). C'est le circuit d'accord qui le permet; on modifie la valeur de C (condensateur variable) jusqu'à ce que la fréquence propre N_0 du circuit d'accord devienne voisine de N . Le circuit, très sélectif car R est très faible, ne répond pratiquement qu'aux sollicitations de fréquences N_0 (résonance très aigue). Un couplage inductif envoie les signaux sinusoïdaux dans un système amplificateur et le haut parleur transforme les vibrations* électriques amplifiées en vibrations mécaniques d'une membrane: il en résulte un son.

* vibrations : oscillations rapides.



D'après : PHYSIQUE Terminales CE, (Nathan, 1989)

Questions :

1⁰) a - Préciser le phénomène physique qui permet la réception radio de manière sélective.

b - Quel est le rôle de l'antenne d'un récepteur radio ?

2⁰) a - Pourquoi le circuit d'accord doit-il avoir une résistance R très faible ?

b - Pour être capable de capter un signal de fréquence N , le circuit LC d'accord doit avoir une fréquence propre $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ égale à la fréquence N .

La bobine a une inductance $L = 25,33 \text{ mH}$. Déterminer les limites $C_{\min}$ et $C_{\max}$ de la valeur de la capacité C du condensateur variable pour être capable de capter des signaux dont les fréquences sont comprise entre $N_{\min} = 1 \text{ KHz}$ et $N_{\max} = 10 \text{ KHz}$?

3⁰) De quoi résulte le son émis par le haut parleur ?

Réponse :

1⁰) a - Le phénomène physique qui permet la réception radio de manière sélective est « la résonance ».

b - Le rôle de l'antenne d'un récepteur radio est de capter les signaux électriques qui viennent d'un très grand nombre de stations.

2⁰) a - Le circuit d'accord doit avoir une résistance R très faible pour subir une résonance très aigüe et par conséquent il devient très sélectif.

$$\mathbf{b} - N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}} = N \rightarrow N^2 = \frac{1}{4\pi^2.L.C} \rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2.L.N^2}$$

$$* C_{\min} = \frac{1}{4\pi^2.L.N_{\max}^2}. \text{ A.N: } C_{\min} = \frac{1}{4\pi^2.25,33.10^{-3}.(10^3)^2} \text{ et } C_{\min} = 10^{-6} \text{ F.}$$

$$* C_{\max} = \frac{1}{4\pi^2.L.N_{\min}^2}. \text{ A.N: } C_{\max} = \frac{1}{4\pi^2.25,33.10^{-3}.(10.10^3)^2} \text{ et } C_{\min} = 10^{-4} \text{ F.}$$

3⁰) Le son émis par le haut parleur résulte de la transformation des vibrations électriques amplifiées en vibrations mécaniques d'une membrane.

LES OSCILLATIONS MÉCANIQUES LIBRES

I / Les oscillations mécaniques libres amorties :

1⁰) Le pendule élastique en régime libre amorti :

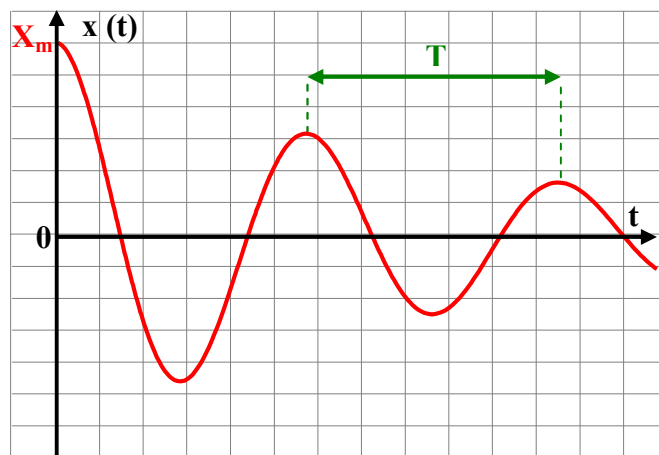
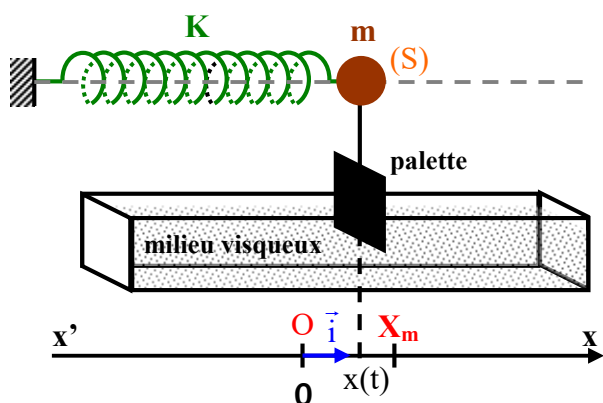
a - Mise en situation :

Soit un solide (S), de masse m , attaché à l'extrémité libre d'un ressort horizontal **sans masse**, à spires non jointives et de constante de raideur K .

Le système (masse + ressort) constitue un pendule élastique.

A l'équilibre, le centre d'inertie de (S) coïncide avec l'origine O d'un axe $x'x$ parallèle à l'axe du ressort. On écarte le pendule de sa position d'équilibre jusqu'à l'abscisse X_m et on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale.

Il effectue alors un mouvement de translation rectiligne parallèle à l'axe du ressort d'élongation $x(t)$.



b - Commentaire et définitions :

- Le solide (S) effectue un mouvement de va et vient de part et d'autre de sa position d'équilibre, l'élongation $x(t)$ du mouvement est oscillante. Les oscillations se succèdent sur des intervalles successifs et égaux à T .
- Le pendule effectue de lui-même un mouvement oscillatoire. On dit alors qu'on a des oscillations mécaniques libres.
- L'amplitude des oscillations diminue continuellement au cours du temps jusqu'à s'annuler. On dit alors que les oscillations sont amorties.

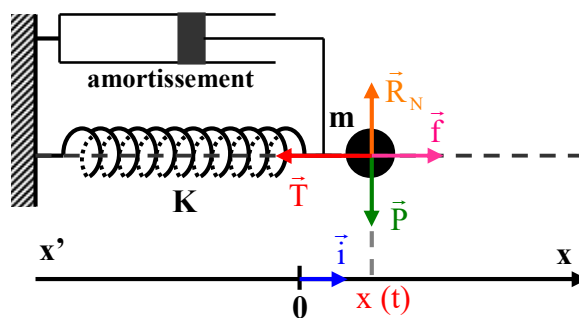
c - Equation différentielle régissant les oscillations mécaniques libres amorties :

Au cours de son mouvement, le solide (S) est soumis à :

- son poids $\vec{P}$.
- la composante $\vec{R}_N$ de la réaction du plan.
- la force de rappel (tension du ressort) $\vec{T}$.
- des forces de frottement visqueux équivalentes à une force unique $\vec{f}$ qui, si le mouvement n'est pas trop rapide, s'exprime par $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$ où :

$\vec{v}$: la vitesse du solide.

h : une constante positive appelée coefficient de frottement.



Remarque : Le solide (S) étant indéformable, on s'intéresse au mouvement de son centre d'inertie G .

On applique donc le théorème du centre d'inertie au solide (S) : « Dans un référentiel galiléen le mouvement du centre d'inertie G d'un système est celui d'un point matériel G où serait concentrée toute la masse du système et auquel serait appliquée la résultante des forces extérieures au système ».

- Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au centre d'inertie G du système (solide + ressort) :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m\vec{a}$$

projetons sur l'axe (x', x) : $\vec{T}_x + \vec{P}_x + \vec{R}_{N_x} + \vec{f}_x = m\vec{a}_x \rightarrow T \cdot \vec{i} + \vec{0} + \vec{0} + f \cdot \vec{i} = m \cdot a \cdot \vec{i}$

$$\rightarrow (T + f) \cdot \vec{i} = m \cdot a \cdot \vec{i}$$

$$\rightarrow T + f = m \cdot a$$

$$\rightarrow -K \cdot x - h \cdot v = m \cdot a$$

$$\rightarrow m \cdot a + h \cdot v + K \cdot x = 0$$

or : $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ et $v = \frac{dx}{dt}$, il vient alors que : $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = 0$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m} \cdot x = 0$

C'est l'équation différentielle associée au pendule élastique en régime amorti.

Remarque : En posant $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ et $\alpha \cdot \omega_0 = \frac{h}{2 \cdot m}$, il vient que : $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \cdot \omega_0 \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0$

α est appelé coefficient réduit d'amortissement (sans dimension)

On définit alors : $h_C = 2 \cdot \sqrt{m \cdot K}$: coefficient d'amortissement critique associé au pendule élastique.

2⁰) Les régimes amortis :

a - Le régime pseudo périodique :

Lorsque le frottement est faible ($h < h_C$) :

Le mouvement du pendule est oscillatoire mais l'amplitude diminue à chaque oscillation de durée T. On dit alors que le régime est pseudo périodique de pseudo période T.

Remarque :

La pseudo période T augmente avec l'amortissement.

b - Le régime apériodique :

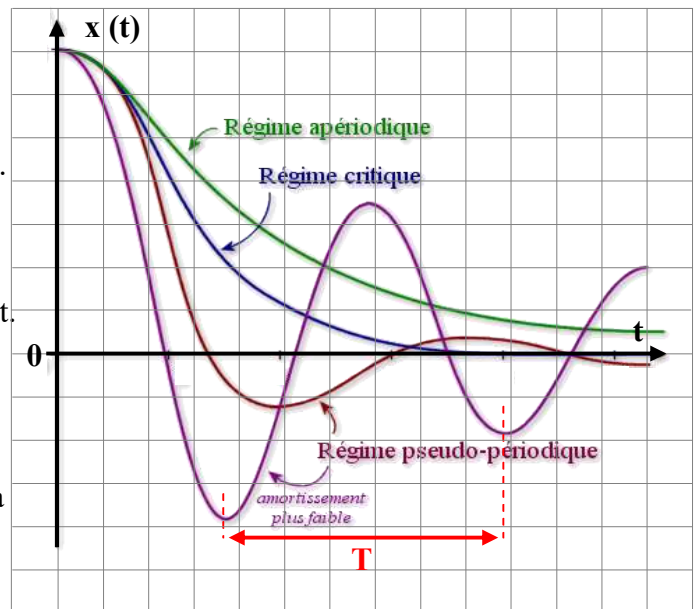
Lorsque le frottement est important ($h > h_C$) :

Le mouvement n'est plus oscillatoire et le solide revient lentement vers sa position d'équilibre sans la dépasser.

c - Le régime critique :

C'est un régime apériodique particulier caractérisé par la propriété ($h = h_C$) .

Le solide revient vers sa position d'équilibre le plus rapidement sans la dépasser.



3⁰) Aspect énergétique :

- Pour un pendule élastique horizontal, l'énergie mécanique E est la somme de :

- son énergie cinétique $E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

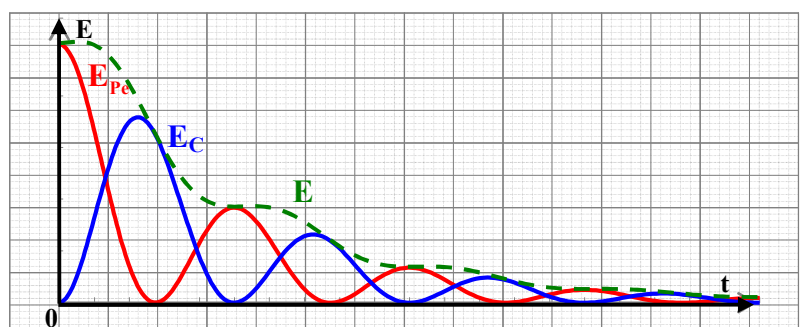
- Son énergie potentielle élastique $E_{pe} = \frac{1}{2} K \cdot [\text{déformation}]^2 \rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2} K \cdot x^2$.

Le plan horizontal contenant le pendule étant pris comme plan de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur. On écrit alors :

$$E = E_C + E_{pe}$$

Il vient alors que : $E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} K \cdot x^2$

Au cours des oscillations, il y a conversion de E_C en E_{pe} et inversement.



- La variation de l'énergie mécanique E au cours du temps est donnée par :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m.2v.\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}K.2x.\frac{dx}{dt} = m.v.\frac{dv}{dt} + K.x.\frac{dx}{dt}$$

sachant que $v = \frac{dx}{dt}$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, on écrit alors : $\frac{dE}{dt} = v.\left(m.\frac{d^2x}{dt^2} + K.x\right)$

or d'après l'équation différentielle : $m.\frac{d^2x}{dt^2} + h.\frac{dx}{dt} + K.x = 0 \rightarrow m.\frac{d^2x}{dt^2} + K.x = -h.\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dE}{dt} = v.\left(-h.\frac{dx}{dt}\right) = v.(-h.v) \rightarrow \frac{dE}{dt} = -h.v^2$ donc $\frac{dE}{dt} < 0$

L'énergie mécanique du pendule élastique diminue au cours du temps.

- On a : $\frac{dE}{dt} = -h.v^2 \rightarrow dE = -h.v^2.dt$

La variation de l'énergie mécanique du pendule élastique est égale au travail de la force de frottement.
Le pendule élastique en régime libre amorti est un système **dissipatif**.

Remarque :

Si on arrive à éliminer les frottements ($\vec{f} = \vec{0} \rightarrow h = 0$), le pendule effectuera des oscillations permanentes non amorties.

Le pendule élastique en régime libre non amorti sera alors un système **conservatif**.

Application 1 :

Un ressort (R) de masse négligeable, à spires non jointives, a une constante de raideur de valeur $K = 10 \text{ N.m}^{-1}$. L'axe du ressort est horizontal.

Il est fixé à son extrémité gauche à un support fixe. A son extrémité droite on accroche un solide (S), de centre d'inertie G, de masse $m = 250 \text{ g}$, qui peut coulisser le long d'une tige horizontale (figure 1).

On travaille dans le repère $(O, \vec{i})$, l'origine O du repère coïncide avec le centre d'inertie G de (S) quand le ressort n'est ni étiré, ni comprimé. On repère la position de G par son abscisse $x = x(t)$.

Les frottements sont modélisés par une force dont la valeur est proportionnelle à celle de la vitesse et dont le sens est opposé à celui du mouvement. La (figure 2) donne l'évolution, au cours du temps, de l'élongation du solide (S). La (figure 3) donne l'évolution, au cours du temps, des énergies mécanique E_m , cinétique E_c , et potentielle élastique E_p du système (solide + ressort).

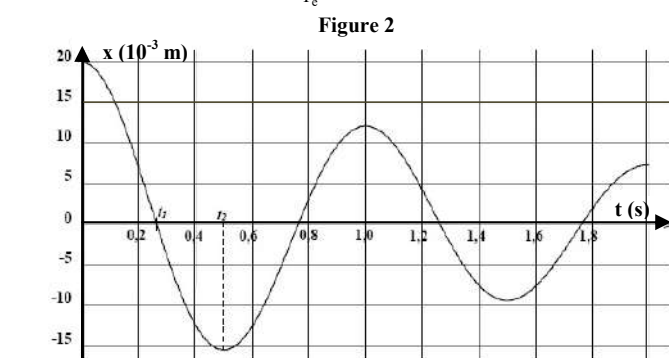


Figure 2

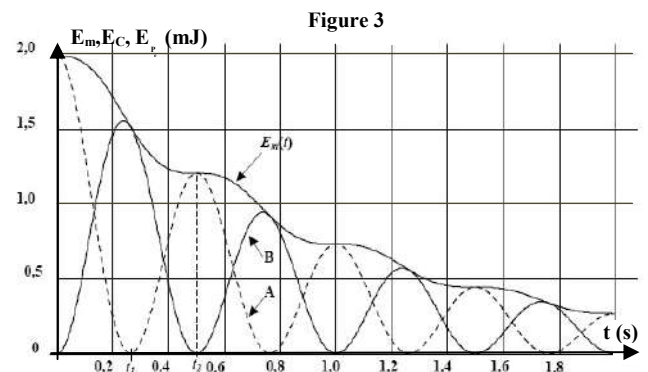


Figure 3

1⁰ a - A l'aide de la (figure 2), déterminer la pseudo période T du mouvement.

b - Calculer la valeur de la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ de l'oscillateur. Comparer les valeurs de T et T_0 .

2⁰ a - A l'aide de la (figure 3), identifier par leur lettre A et B, en le justifiant, les courbes E_c et E_p .

b - Pourquoi l'énergie mécanique de l'oscillateur diminue au cours du temps ?

3⁰ a - En utilisant la (figure 2), indiquer, en le justifiant, auquel des instants t_1 et t_2 la vitesse du solide (S) est maximale ou nulle.

b - Que peut-on en conclure quant à la valeur de la force de frottement à chacun de ces instants ?

Réponse :

1⁰) a - Graphiquement : $T = 1 \text{ s}$.

$$\mathbf{b - } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \xrightarrow{\text{A.N}} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0,250}{10}} = 0,99 \text{ s}.$$

T est légèrement supérieure à T_0 .

$$\mathbf{2^0) a - } E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \quad E_{Pe} = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\begin{aligned} \text{A } t = 0, x(0) \text{ est extrême} &\rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0 \rightarrow E_C(0) = 0 \\ &\rightarrow E_C \text{ correspond à la courbe B.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A } t = 0, x(0) \text{ est extrême} &\rightarrow E_{Pe}(0) \text{ est extrême} \\ &\rightarrow E_{Pe} \text{ correspond à la courbe A.} \end{aligned}$$

b - La diminution de l'énergie mécanique $E_m = E_C + E_{Pe}$ est due au travail résistant des forces de frottement.

$$\begin{aligned} \mathbf{3^0) a - } x(t_1) = 0 &\xrightarrow{\substack{x(t_1) \text{ est un point d'inflexion} \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t_1} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_1} = 0}} v(t_1) \text{ est maximale.} \\ x(t_2) \text{ est extrême} &\xrightarrow{v = \frac{dx}{dt}} v(t_2) \text{ est nulle.} \end{aligned}$$

b - la force de frottement s'exprime par : $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où $h > 0$ coefficient de frottement.

$$\|\vec{f}(t_1)\| = h.\|\vec{v}(t_1)\| \text{ est extrême.}$$

$$\|\vec{f}(t_2)\| = h.\|\vec{v}(t_2)\| \text{ est nulle.}$$

II / Les oscillations mécaniques libres non amorties :

1⁰) Le pendule élastique en régime libre non amorti :

a - Mise en situation :

On étudie le mouvement du pendule élastique horizontal en absence de frottement.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre jusqu'à l'abscisse x_0 et on le lâche, à $t = 0$, avec une vitesse initiale v_0 .

b - Equation différentielle régissant les oscillations mécanique libres non amorties :

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au centre d'inertie G du système (solide + ressort) :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$$

$$\text{projetons sur l'axe } (x', x) : \vec{T}_x + \vec{P}_x + \vec{R}_x = m.\vec{a}_x$$

$$\rightarrow T\vec{i} + \vec{0} + \vec{0} = m.a\vec{i}$$

$$\rightarrow T\vec{i} = m.a\vec{i}$$

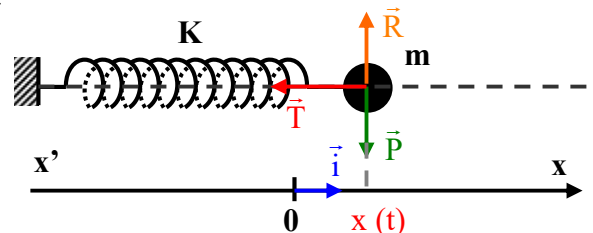
$$\rightarrow T = m.a$$

$$\rightarrow -K.x = m.a$$

$$\rightarrow m.a + K.x = 0$$

$$\text{sachant que } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ il vient que : } m.\frac{d^2x}{dt^2} + K.x = 0$$

$$\text{ou } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}.x = 0$$



On obtient une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Remarque :

Le pendule élastique étant isolé et non dissipatif, son énergie mécanique E se conserve au cours du temps.

$$\left. \begin{array}{l} E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \\ E_{Pe} = \frac{1}{2} K \cdot x^2 \end{array} \right| \rightarrow E = E_C + E_{Pe} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} K \cdot x^2$$

$$E \text{ se conserve } \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \quad \forall t \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot 2v \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} K \cdot 2x \frac{dx}{dt} + 0 = 0 \quad \forall t$$

$$\rightarrow m \cdot v \frac{dv}{dt} + K \cdot x \frac{dx}{dt} = 0 \quad \forall t$$

$$\text{sachant que : } \frac{dx}{dt} = v \text{ et } \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ il vient que : } v \cdot \left(m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K \cdot x \right) = 0 \quad \forall t$$

$$\text{la solution } v = 0 \quad \forall t \text{ est absurde ; donc : } m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K \cdot x = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} \cdot x = 0$$

$$\text{on retrouve l'équation différentielle du second ordre de la forme : } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

2⁰) Nature du mouvement :

L'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ admet comme solution générale :

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_x)$$

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$: **pulsation propre** de l'oscillateur (rad.s⁻¹)
- X_m : **amplitude** de l'élongation oscillante x(t) (m).
- $(\omega_0 t + \varphi_x)$: **phase** à l'instant t (rad).
- φ_x : **phase à l'origine** ou phase initiale de l'élongation x(t) (rad)

Remarques :

- ω_0 est une caractéristique propre de l'oscillateur, indépendante des conditions initiales du mouvement.

$$\rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} : \text{période propre de l'oscillateur (s)}.$$

$$\rightarrow N_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} : \text{fréquence propre de l'oscillateur (Hz)}.$$

Le pendule élastique est animé d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude X_m et de fréquence N_0 .

- X_m et φ_x sont calculées à partir de l'état initial du circuit :

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{array} \right| \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt}} \begin{cases} x_0 = X_m \sin \varphi_x \\ v_0 = \omega_0 \cdot X_m \cos \varphi_x \end{cases} \rightarrow X_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \text{ et } \tan \varphi_x = \frac{\omega_0 \cdot x_0}{v_0}$$

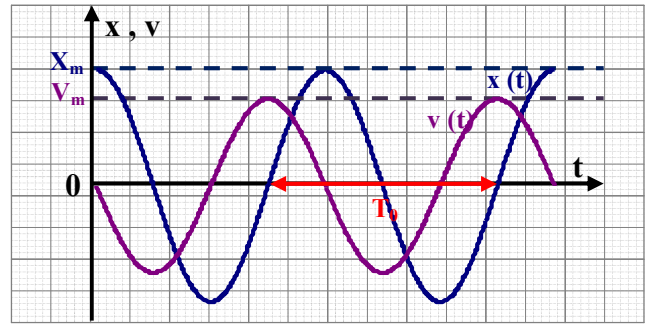
- Soit : $x(t) = X_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_x)$

on a : $v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow v(t) = \omega_0 \cdot X_m \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_x)$

$$\rightarrow v(t) = \omega_0 \cdot X_m \sin\left(\omega_0 \cdot t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$$

on pose : $V_m = \omega_0 \cdot X_m$ et $\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$, il vient alors que :

$$v(t) = V_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_v)$$



La relation $\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$ implique que la vitesse v est en quadrature avance de phase par rapport l'élongation x .

3⁰) Aspect énergétique :

Soit $x(t) = X_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_x) \rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega_0 \cdot X_m \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_x)$

- $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 \cdot X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)$ or $\omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow m \cdot \omega_0^2 = K$ donc : $E_c = \frac{1}{2} \cdot K \cdot X_m^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)$

On écrit alors : $E_c = \frac{1}{4} \cdot K \cdot X_m^2 \cdot [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)]$

L'énergie cinétique E_c est une fonction sinusoïdale du temps de période $T = \frac{T_0}{2}$

- $E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot X_m^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi_x)$. On écrit alors : $E_{pe} = \frac{1}{4} \cdot K \cdot X_m^2 \cdot [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)]$

L'énergie potentielle élastique E_{pe} est une fonction sinusoïdale du temps de période $T = \frac{T_0}{2}$

- L'énergie mécanique est $E = E_c + E_{pe}$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot X_m^2$$

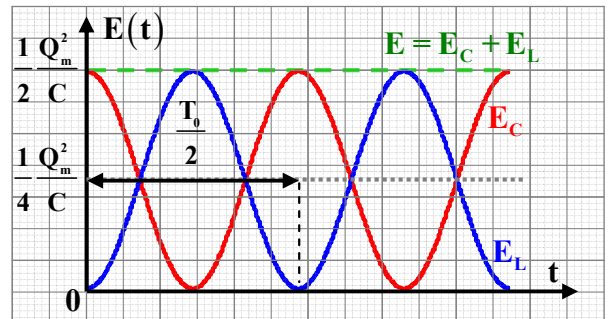
ou $E = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 \cdot X_m^2$ et $E = \frac{1}{2} m \cdot V_m^2$

L'énergie mécanique E de l'oscillateur se conserve .

On a alors une conversion mutuelle et intégrale de l'énergie cinétique en énergie potentielle élastique et inversement.

Pour un même pendule élastique, l'énergie emmagasinée est proportionnelle au carrée de la l'amplitude.

Pour une même énergie emmagasinée, les oscillations à hautes fréquences sont de faibles amplitudes.



Remarques :

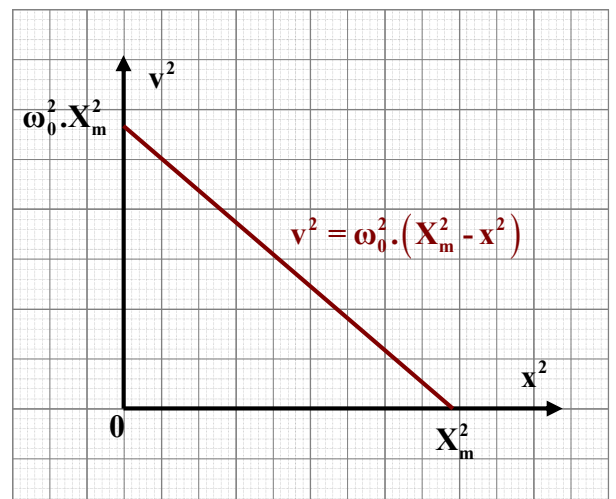
- $E = E_c + E_{pe} \rightarrow E_c = E - E_{pe} \rightarrow E_c = -\frac{1}{2} K \cdot x^2 + E$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + \frac{K \cdot X_m^2}{2} \rightarrow v^2 = -\frac{K}{m} \cdot (x^2 - X_m^2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow v^2 = -\omega_0^2 \cdot (x^2 - X_m^2)$$

- $E = E_c + E_{pe} \rightarrow E_{pe} = E - E_c \rightarrow E_{pe} = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 + E$

$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{m \cdot V_m^2}{2} \rightarrow x^2 = -\frac{m}{K} \cdot v^2 + \frac{m}{K} \cdot V_m^2$$



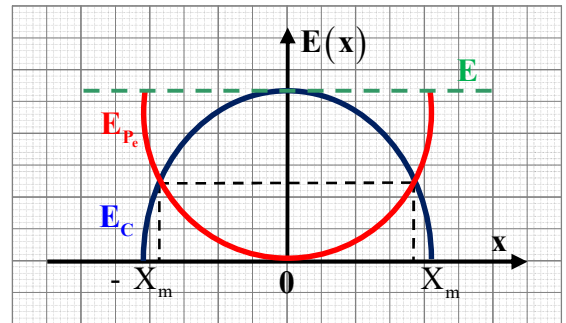
$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow x^2 = -\frac{1}{\omega_0^2} \cdot (v^2 - V_m^2)$$

Remarque :

$$x^2 = -\frac{1}{\omega_0^2} \cdot (v^2 - V_m^2) \xrightarrow{V_m = \omega_0 \cdot X_m} x^2 = -\frac{v^2}{\omega_0^2} + X_m^2 \rightarrow -\frac{v^2}{\omega_0^2} = (x^2 - X_m^2) \text{ et } v^2 = -\omega_0^2 \cdot (x^2 - X_m^2).$$

- Dans le cas où $E_{pe} = E_c \rightarrow E_{pe} = \frac{E}{2}$
 $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 = \frac{1}{4} \cdot K \cdot X_m^2$
 $\rightarrow x^2 = \frac{X_m^2}{2}$

donc on a : $E_{pe} = E_c$ pour $x = \pm \frac{X_m}{\sqrt{2}}$



Application 2 :

Un solide (S) de masse m , de centre d'inertie G , peut glisser sans frottements sur une tige horizontale.

Il est accroché à un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur $K = 4,0 \text{ N.m}^{-1}$.

L'ensemble constitue un oscillateur élastique non amorti.

On étudie le mouvement de translation du solide (S) dans le référentiel terrestre

supposé galiléen. Lorsque le solide (S) est à l'équilibre, son centre d'inertie G se situe à la verticale du point O , origine de l'axe des abscisses. Le solide est écarté de 10 cm de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale à la date $t = 0$ s.

On procède à l'enregistrement des positions successives de G au cours du temps par un dispositif approprié.

On obtient la courbe ci - contre :

1⁰) Représenter et nommer les forces en G s'exerçant sur le solide (S).

2⁰) L'élongation du mouvement s'écrit :

$$x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_x\right)$$

a - Trouver graphiquement les valeurs de X_m et T_0 .

b - En déduire l'équation numérique de $x(t)$.

c - Calculer la masse m du solide (S).

3⁰) a - L'énergie potentielle de pesanteur est choisie nulle dans le plan horizontal passant par G .

Donner l'expression littérale de l'énergie mécanique du système {ressort + solide}, en fonction de K , m , x et sa dérivée première.

b - À partir de l'enregistrement ci-dessus, trouver pour quelles dates l'énergie potentielle élastique du système (ressort + solide) est maximale. Que vaut alors l'énergie cinétique ?

c - Calculer la valeur de l'énergie mécanique du système.

Réponse :

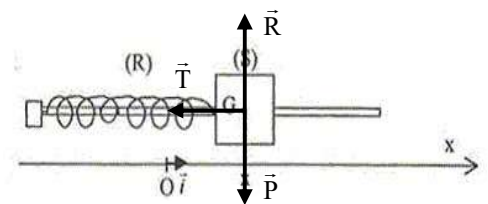
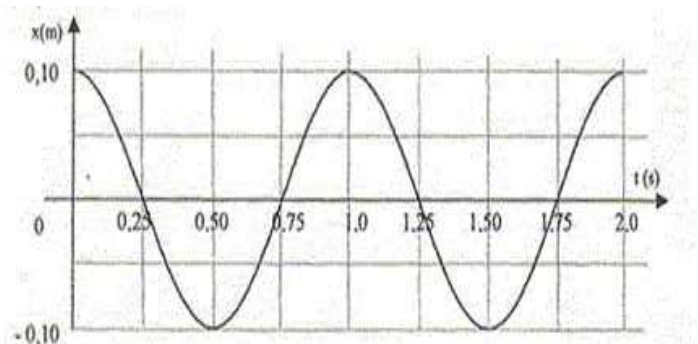
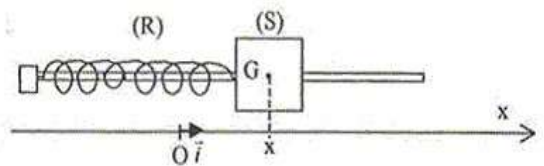
1⁰) Les forces extérieures s'exerçant sur le solide (S) sont :

$\vec{R}$: réaction de la tige

$\vec{P}$: poids du solide (S)

$\vec{T}$: tension du ressort (force de rappel)

2⁰) a - Graphiquement : $X_m = 0,1 \text{ m}$ et $T_0 = 1 \text{ s}$.



$$\mathbf{b} - \begin{cases} x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) & , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \\ x(0) = X_m \rightarrow \sin \varphi_x = 1 \rightarrow \varphi_x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow x(t) = 0,1 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{m})$$

$$\mathbf{c} - T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{K} \quad \text{et} \quad m = T_0^2 \cdot \frac{K}{4\pi^2} \quad \text{et} \quad m = l^2 \cdot \frac{4}{40} = 0,1 \text{ Kg}$$

$$\text{A.N : } m = l^2 \cdot \frac{4}{40} \quad \text{et} \quad m = 0,1 \text{ Kg}$$

$$\mathbf{3^0) a} - E = E_C + E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt}} E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

$$\mathbf{b} - E_{pe} \text{ est maximale} \rightarrow x(t) = \pm X_m$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1 \rightarrow \frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow t = k \cdot \frac{T_0}{2}, k \in \mathbb{N}$$

Le système est conservatif (absence de frottement) $\rightarrow E = E_C + E_{pe} = \text{constante}$.

Lorsque E_{pe} est maximale, E_C est nulle.

$$\mathbf{c} - E = E_{pe_{\max}} \rightarrow E = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (0,1)^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

$$\text{A.N : } E = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (0,1)^2 \quad \text{et} \quad E = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

Pour en savoir plus

1⁰) Le pendule élastique vertical en régime libre :

On considère un pendule élastique vertical soumis, au cours de son mouvement, à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$.

A l'équilibre, le centre d'inertie du solide coïncide avec l'origine O d'un axe $x'x$ parallèle à l'axe du ressort. On écarte le pendule de sa position d'équilibre jusqu'à une abscisse X_m et on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale.

a - Mise en équation :

• A l'équilibre : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

$$\rightarrow \vec{P} + \vec{T}_{\text{eq}} = \vec{0} \rightarrow (P + T_{\text{eq}}).\vec{i} = \vec{0} \rightarrow P + T_{\text{eq}} = 0$$

$$\begin{cases} P = m.g \\ T_{\text{eq}} = -K.(l_{\text{eq}} - l_0) = -K.\Delta l_{\text{eq}} \end{cases} \rightarrow m.g - K.\Delta l_{\text{eq}} = 0$$

• En mouvement : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m.\vec{a}$

$$\rightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m.\vec{a} \rightarrow P.\vec{i} + T.\vec{i} + f.\vec{i} = m.a.\vec{i}$$

$$\rightarrow (P + T + f).\vec{i} = m.a.\vec{i} \text{ et } (P + T + f) = m.a$$

$$\rightarrow \begin{cases} P = m.g \\ T = -K.\Delta l \\ f = -h.v \end{cases} \rightarrow m.g - K.\Delta l - h.v = m.a$$

on écrit alors : $m.a + h.v + K.\Delta l - m.g = 0$

$$\text{or on a : } \Delta l = (l - l_0) \xrightarrow{l_0 = l_{\text{eq}} - \Delta l_{\text{eq}}} \Delta l = [(l - l_{\text{eq}}) + \Delta l_{\text{eq}}] \xrightarrow{l - l_{\text{eq}} = x(t)} \Delta l = [x(t) + \Delta l_{\text{eq}}]$$

$$\text{on écrit alors : } m.a + h.v + K.[x + \Delta l_{\text{eq}}] - m.g = 0 \rightarrow m.a + h.v + K.x + (K.\Delta l_{\text{eq}} - m.g) = 0$$

d'après l'état d'équilibre : $K.\Delta l_{\text{eq}} - m.g = 0$, il vient alors que : $m.a + h.v + K.x = 0$.

$$\text{On a : } v = \frac{dx}{dt} \text{ et } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ il vient alors que : } m.\frac{d^2x}{dt^2} + h.\frac{dx}{dt} + K.x = 0 \text{ ou } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}.\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}.x = 0$$

b - Aspect énergétique :

L'énergie mécanique E du pendule élastique vertical est la somme de son énergie cinétique E_C , de son énergie potentielle élastique E_{pe} et de son énergie potentielle de pesanteur E_{pp} .

- L'énergie cinétique $E_C = \frac{1}{2}m.v^2$.

- l'énergie potentielle élastique $E_{\text{pe}} = \frac{1}{2}K.[\text{déformation}]^2 \rightarrow E_{\text{pe}} = \frac{1}{2}K.[x + \Delta l_{\text{eq}}]^2$.

- le plan horizontal contenant l'origine 0 de l'axe (x', x) étant pris comme plan de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur, on écrit : $E_{\text{pp}} = -m.g.x$.

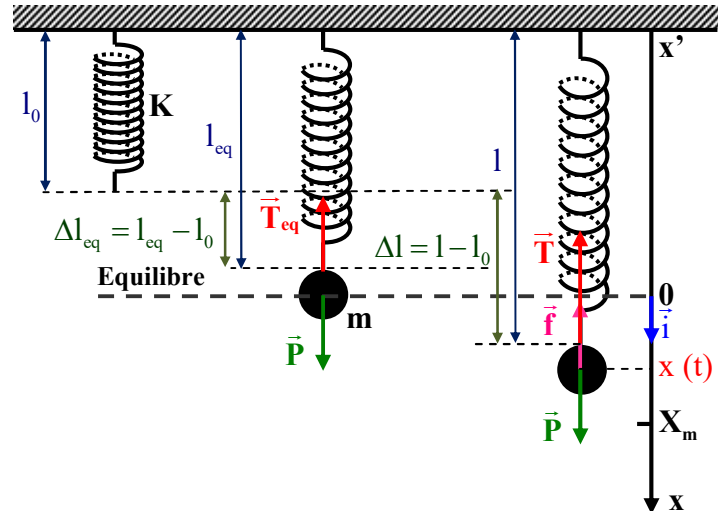
$$E = E_C + E_{\text{pe}} + E_{\text{pp}} \rightarrow E = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}K.(x + \Delta l_{\text{eq}})^2 - m.g.x$$

Etudions l'évolution de E au cours du temps :

$$\frac{dE}{dt} = m.v.\frac{dv}{dt} + K.(x + \Delta l_{\text{eq}}).\frac{dx}{dt} - m.g.\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dE}{dt} = m.v.\frac{dv}{dt} + K.x.\frac{dx}{dt} + (K.\Delta l_{\text{eq}} - m.g).\frac{dx}{dt}$$

d'après l'état d'équilibre : $K.\Delta l_{\text{eq}} - m.g = 0$, il vient alors que : $\frac{dE}{dt} = m.v.\frac{dv}{dt} + K.x.\frac{dx}{dt}$

$$\text{On a : } v = \frac{dx}{dt} \text{ et } \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ il vient alors que : } \frac{dE}{dt} = v.\left[m.\frac{d^2x}{dt^2} + K.x\right]$$



or d'après l'équation différentielle : $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = 0 \rightarrow m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K \cdot x = -h \cdot \frac{dx}{dt}$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} = v \cdot \left(-h \cdot \frac{dx}{dt} \right) = v \cdot (-h \cdot v) = -h \cdot v^2 \text{ donc } \frac{dE}{dt} < 0$$

L'énergie mécanique du pendule élastique diminue au cours du temps.

2⁰) Etude analytique des régimes amortis :

a - Mise en équation :

- Considérons un pendule élastique en régime libre amorti. La forme canonique de l'équation différentielle

qui gère l'évolution de l'élongation $x(t)$ au cours du temps est : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m} x = 0$.

On pose $\frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$ et $\frac{K}{m} = \omega_0^2$, on écrit alors : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0$

ω_0 est appelée pulsation propre du pendule. (en rad.s^{-1})

$Q = \frac{m \cdot \omega_0}{h}$ est appelé facteur de qualité du pendule. (sans dimension)

On définit les grandeurs suivantes :

* $\tau = \frac{m}{h} = \frac{Q}{\omega_0}$ est appelé temps de relaxation du pendule (où durée caractéristique). (en s)

* $\alpha = \frac{1}{2Q} = \frac{1}{2\tau \cdot \omega_0}$ est appelé coefficient réduit d'amortissement. (sans dimension)

- Soit l'équation différentielle : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0$.

En posant $x(t) = X \cdot e^{r \cdot t} \rightarrow \frac{dx}{dt} = r \cdot X \cdot e^{r \cdot t}$ et $\frac{d^2x}{dt^2} = r^2 \cdot X \cdot e^{r \cdot t}$, l'équation différentielle s'écrit :

$$r^2 \cdot X \cdot e^{r \cdot t} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot r \cdot X \cdot e^{r \cdot t} + \omega_0^2 \cdot X \cdot e^{r \cdot t} = 0 \xrightarrow[\text{est une solution absurde}]{X \cdot e^{r \cdot t} \neq 0 \forall t} r^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot r + \omega_0^2 = 0$$

L'équation : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot r + \omega_0^2 = 0$ est appelée équation caractéristique associée à l'équation différentielle.

b - Les régimes amortis :

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4 \cdot \omega_0^2$ et $\Delta = 4 \cdot \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$

Suivant la valeur de Δ , on distingue trois types de solutions (donc trois régimes libres amortis possibles) :

- Cas où $\Delta > 0$ $\left(Q < \frac{1}{2} \right)$:

L'équation caractéristique admet deux racines réelles : $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{2 \cdot \omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \quad \text{et} \quad r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$$

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{2 \cdot \omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$$

La solution générale sera de la forme : $x(t) = A \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot e^{r_2 \cdot t}$

On écrit alors : $x(t) = A \cdot e^{\frac{\omega_0}{2Q}(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}) \cdot t} + B \cdot e^{\frac{\omega_0}{2Q}(1 + \sqrt{1 - 4Q^2}) \cdot t}$

Ce régime est appelé **régime aperiodique**.

Remarques :

* Il n'y a pas d'oscillations et l'élongation $x(t)$ décroît continuellement jusqu'à s'annuler. Le mouvement du pendule est alors monotone.

$$* \left[-\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2} \right) \right] \cdot \left[-\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2} \right) \right] = \omega_0^2.$$

- Cas où $\Delta = 0$ $\left(Q = \frac{1}{2} \right)$:

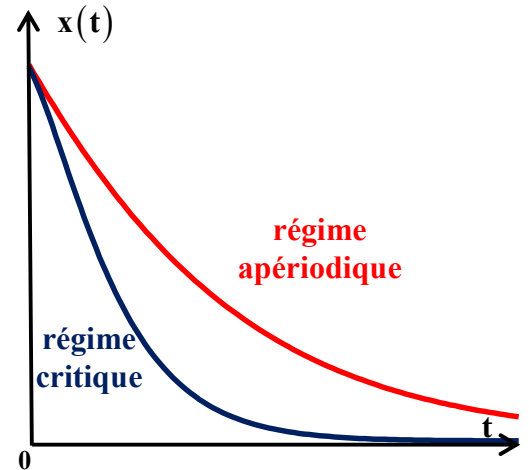
L'équation caractéristique admet une racine double : $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$

La solution générale sera de la forme : $x(t) = (A + B.t).e^{r.t}$

Il vient alors que : $x(t) = (A + B.t).e^{-\omega_0.t}$.

Ce régime est appelé **régime critique**.

Le régime critique est un régime aperiodique particulier où la décharge du condensateur est la plus rapide.



- Cas où $\Delta < 0$ $\left(Q > \frac{1}{2} \right)$:

$$\Delta = 4.\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) < 0 \rightarrow \Delta = -4.\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) < 0 \rightarrow \Delta = j^2.4.\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) < 0, j^2 = -1$$

L'équation caractéristique admet deux racines complexes : $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j.\frac{2.\omega_0}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j.\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \quad \text{et} \quad r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - j.\sqrt{4Q^2 - 1} \right)$$

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j.\frac{2.\omega_0}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} - j.\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 + j.\sqrt{4Q^2 - 1} \right)$$

La solution générale sera de la forme : $x(t) = A.e^{r_1.t} + B.e^{r_2.t}$

Remarque : $r_{1,2} = a \pm j.b \rightarrow x(t) = A.e^{a.t} \cdot \cos(|b|.t + \varphi)$

On écrit alors : $x(t) = A.e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$ avec : $\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{1}{2\tau}$ et $\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

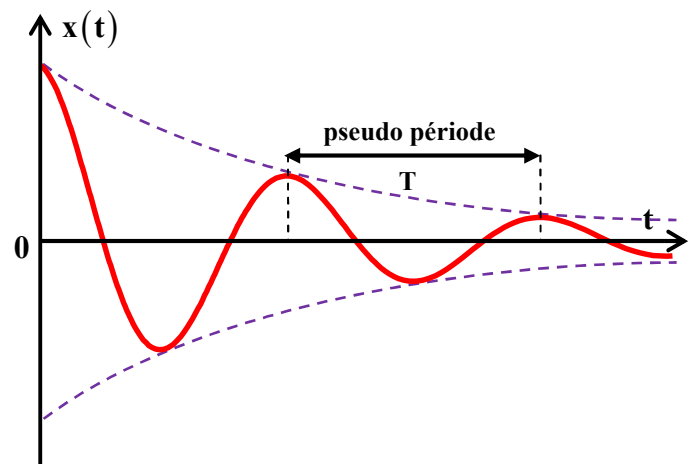
Ce régime est appelé **régime pseudo périodique** de pseudo période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ou $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

Remarques :

* Soit : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ période propre du circuit

$$\rightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > T_0 \quad \left(\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < \omega_0 \right)$$

$$* \text{ On a : } \frac{1}{4.Q^2} = \frac{1}{4.\tau^2.\omega_0^2} = \frac{1}{4.\left(\frac{m}{h}\right)^2 \cdot \frac{K}{m}} = \frac{h^2}{4.m.K}.$$



Il vient alors que : $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{4.m.K}}}$

$\frac{h^2}{4.m.K} < 1 \rightarrow h < 2.\sqrt{m.K}$. On définit alors le coefficient de frottement critique par $h_c = 2.\sqrt{m.K}$.

* L'amplitude $X(t) = A.e^{-\frac{t}{2\tau}}$ des oscillations diminue continuellement au cours du temps jusqu'à s'annuler.

* Les valeurs de A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = X_0 \\ v(0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{2\tau.\omega} \quad \text{et} \quad A = \frac{X_0}{\cos \varphi}.$$

* On définit le décrément logarithmique par : $\delta = \operatorname{Ln} \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right) \xrightarrow{\frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{-\frac{T}{2\tau}}} \delta = \frac{T}{2\tau}$. δ caractérise la décroissance de l'amplitude des oscillations.

Remarque :

On a : $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \xrightarrow{\alpha = \frac{1}{2Q}} T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$, on écrit alors :

$$\delta = \frac{T}{2\tau} = \frac{T_0}{2\tau.\sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{2\pi}{2\tau.\omega_0.\sqrt{1 - \alpha^2}} \xrightarrow{\tau = \frac{1}{2\alpha.\omega_0}} \delta = 2\pi.\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

Si l'amortissement est très faible $\rightarrow \alpha \ll 1 \rightarrow \sqrt{1 - \alpha^2} \simeq 1$ et $\delta \simeq 2\pi.\alpha$.

c - Etude énergétique du régime pseudo périodique :

• L'énergie mécanique E du pendule élastique s'écrit $E = E_c + E_p$

* L'énergie cinétique s'exprime par : $E_c = \frac{1}{2}.m.v^2$

* L'énergie potentielle s'exprime par : $E_p = E_{pe} + E_{pp}$ avec $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.[x + \Delta l_{eq}]^2$ et $E_{pp} = -m.g.x$

$$\rightarrow E_p = \frac{1}{2}.K.(x^2 + 2.x.\Delta l_{eq} + \Delta l_{eq}^2) - m.g.x \xrightarrow{\Delta l_{eq} = \frac{m.g}{K}} E_p = \frac{1}{2}.K.x^2 + \frac{m^2.g^2}{2K}$$

* L'énergie mécanique s'exprime alors par : $E = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.K.x^2 + \frac{m^2.g^2}{2K}$

• Soit $x(t) = A.e^{-\frac{t}{2\tau}}.\cos(\omega.t + \varphi)$ avec $\omega = \omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

* On a : $\alpha = \frac{1}{2Q} = \frac{1}{2\tau.\omega_0} \rightarrow x(t) = A.e^{-\alpha.\omega_0.t}.\cos(\omega.t + \varphi)$ avec $\omega = \omega_0.\sqrt{1 - \alpha^2}$

* $v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow v(t) = -A.e^{-\alpha.\omega_0.t}.[\alpha.\omega_0.\cos(\omega.t + \varphi) + \omega.\sin(\omega.t + \varphi)]$

On pose : $\begin{cases} \alpha.\omega_0 = C. \\ \omega = C.\cos \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = \omega_0 \\ \sin \theta = \alpha \end{cases}$

donc $v(t) = -A.C.e^{-\alpha.\omega_0.t}[\sin(\theta).\cos(\omega.t + \varphi) + \cos(\theta).\sin(\omega.t + \varphi)]$

il vient alors que : $v(t) = -A.\omega_0.e^{-\alpha.\omega_0.t}.\sin(\omega.t + \varphi + \theta)$

$$* E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega_0^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi + \theta) + \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$$

$$\text{or } \omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow K = m \cdot \omega_0^2, \text{ on écrit alors : } E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot [\sin^2(\omega \cdot t + \varphi + \theta) + \cos^2(\omega \cdot t + \varphi)] + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot [1 + \sin^2(\omega \cdot t + \varphi + \theta) - \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)] + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} [\cos(2\omega \cdot t + 2\varphi) - \cos(2\omega \cdot t + 2\varphi + 2\theta)] \right] + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} [-2 \sin(2\omega \cdot t + 2\varphi + \theta) \cdot \sin(\theta)] \right] + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$$

$$\xrightarrow{\sin \theta = \alpha} E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot [1 + \alpha \cdot \sin(2\omega \cdot t + 2\varphi + \theta)] + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$$

Remarque :

* Si on change le plan de référence de E_{pp} de sorte que :

$$E_p = E_{pe} + E_{pp} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 \rightarrow E_{pp} = -m \cdot g \cdot x - \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$$

L'énergie mécanique E de l'oscillateur s'exprimera par :

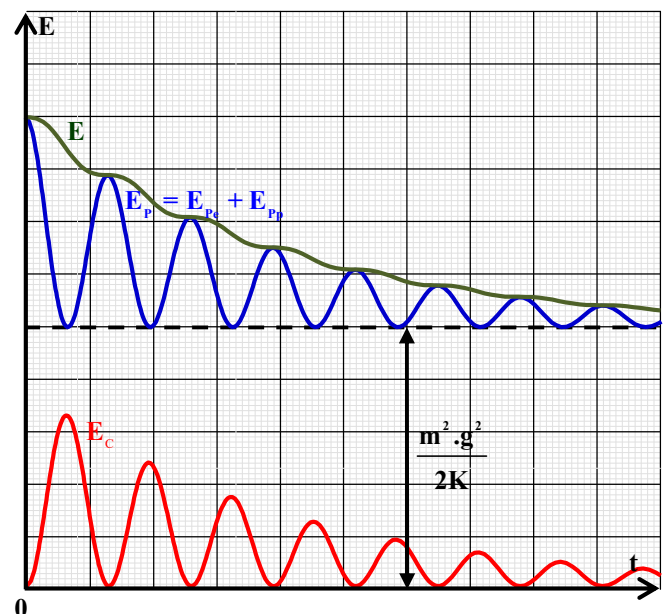
$$E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot [1 + \alpha \cdot \sin(2\omega \cdot t + 2\varphi + \theta)]$$

* Si l'amortissement est très faible $\rightarrow \alpha \ll 1$, on écrit :

$$E(t) = E_0 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2$$

$$\text{Entre deux instants } t_1 \text{ et } t_2 : \frac{E(t_2)}{E(t_1)} = \frac{E_0 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t_2}}{E_0 \cdot e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot t_1}}$$

$$\rightarrow \frac{E(t_2)}{E(t_1)} = e^{-2\alpha \cdot \omega_0 \cdot (t_2 - t_1)} \xrightarrow[\tau = \frac{m}{h}]{\alpha = \frac{1}{2 \cdot \tau \cdot \omega_0}} \frac{E(t_2)}{E(t_1)} = e^{-\frac{h}{m} \cdot (t_2 - t_1)}$$



3⁰) Le régime non amorti :

a - Elongation et vitesse :

• En absence de frottement ($h = 0$), l'équation différentielle qui gère l'élongation de l'oscillateur peut se

mettre sous la forme : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Le pendule élastique en régime libre non amorti, dont l'élongation est gérée par ce type d'équation différentielle, est un **oscillateur harmonique**.

La solution générale de cette équation est de la forme : $x(t) = X_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_x)$.

$$\text{On a : } v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ on écrit alors : } \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \xrightarrow{\text{on dérive}} \frac{d^2v}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot v = 0.$$

La solution générale de cette équation est de la forme : $v(t) = V_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_v)$.

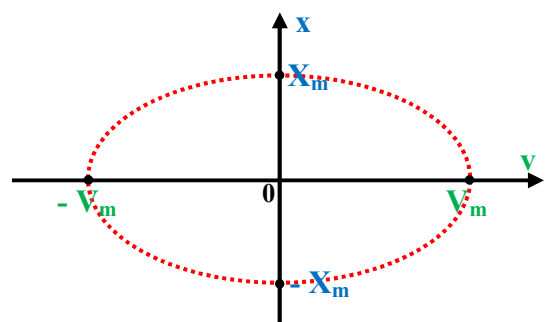
$$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow V_m = \omega_0 \cdot X_m \quad \text{et} \quad \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \quad v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow v(t) = \omega_0 \cdot X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_x)$$

$$\begin{cases} x(t) = X_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_x) \\ v(t) = \omega_0 \cdot X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_x) \end{cases} \xrightarrow{\omega_0 \cdot X_m = V_m} \frac{v^2}{V_m^2} + \frac{x^2}{X_m^2} = 1$$

On obtient l'équation d'une ellipse.

Cette ellipse représente l'orbite de l'oscillateur harmonique.



b - Etude énergétique :

- L'énergie potentielle de l'oscillateur est $E_p = E_{pe} + E_{pp}$

$$\begin{cases} E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot [x + \Delta l_{eq}]^2 \\ E_{pp} = -m \cdot g \cdot x \end{cases} \rightarrow E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta l_{eq} + \Delta l_{eq}^2) - m \cdot g \cdot x \xrightarrow{\Delta l_{eq} = \frac{m \cdot g}{K}} E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$$

On écrit alors : $E_p(t) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot X_m^2 \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_x) + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$

- L'énergie cinétique s'exprime par : $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

On écrit alors : $E_c(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot X_m^2 \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_x)$

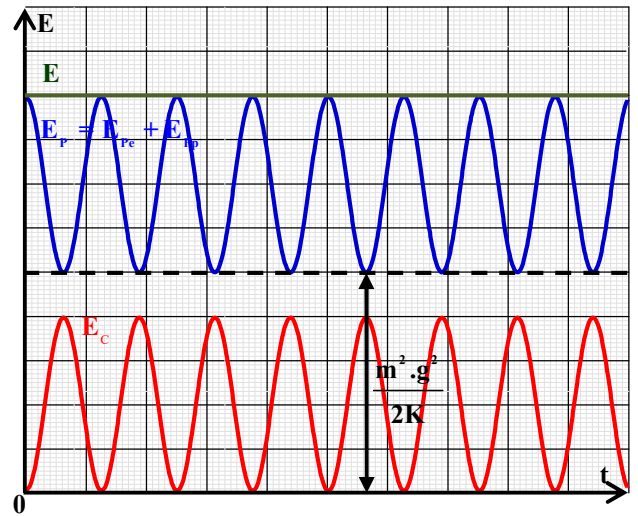
- L'énergie mécanique s'exprime alors par :

$$E = E_c + E_p$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$$

On écrit alors : $E(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot X_m^2 \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_x) + \frac{1}{2} \cdot K \cdot X_m^2 \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_x) + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K}$

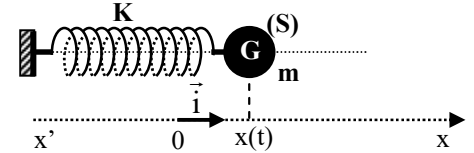
Sachant que $K = m \cdot \omega_0^2$, il vient alors que : $E(t) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot X_m^2 + \frac{m^2 \cdot g^2}{2K} = \text{constante}$



Applications

Exercice 1 :

Un solide (S), de masse m , est attaché à l'extrémité libre d'un ressort horizontal parfaitement élastique, à spires non jointives, de constante de raideur K et de masse négligeable. On néglige les frottements.



On étudie le mouvement de (S) relativement à un repère $(o, \vec{i})$ dont l'origine o coïncide avec la position d'équilibre du centre d'inertie G de (S).

Le plan horizontal contenant le ressort est pris comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur. On écarte (S) de sa position d'équilibre dans le sens des elongations positives jusqu'à une abscisse x_0 et on le lâche, à la date $t = 0$, sans vitesse initiale ($\vec{v}(0) = \vec{0}$).

On donne ci-contre les courbes de variations en fonction de l'elongation x , de l'énergie mécanique E et de l'énergie potentielle élastique E_{pe} du système {solide + ressort}.

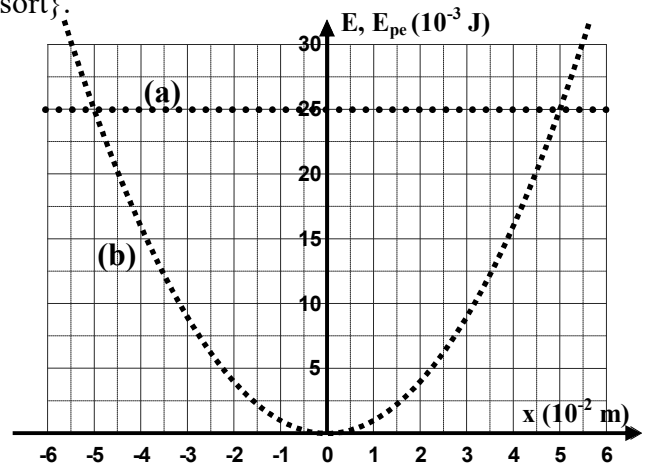
1⁰) a - Par application de la relation fondamentale de la dynamique, établir l'équation différentielle régissant le mouvement du centre d'inertie G de (S).

b - En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur considéré.

c - Vérifier que : $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ est une solution de l'équation différentielle.

2⁰) a - Donner l'expression de l'énergie mécanique E de l'oscillateur en fonction de m , K , x et v .

b - Montrer que E est constante. Donner alors son expression en fonction de K et X_m .



3⁰) a - Identifier, parmi les courbes (a) et (b), celle qui représente $E = f(x)$. En déduire la valeur de E .

b - Déterminer graphiquement la valeur de l'amplitude X_m des oscillations.

c - Calculer la valeur de la constante de raideur K du ressort.

4⁰) a - Sachant que le solide passe par la position d'équilibre avec une vitesse de module $\|\vec{v}\| = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$, montrer que sa masse est $m = 0,2 \text{ Kg}$.

b - Calculer la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

c - Déterminer la phase initiale φ_x de l'elongation $x(t)$. Ecrire alors la loi horaire de $x(t)$.

5⁰) En réalité et au cours de son mouvement, l'oscillateur subit des frottements visqueux dont l'action est représentée par une force unique $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$. L'équation différentielle régissant le mouvement du centre d'inertie

G de (S) s'écrit alors : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0$.

L'enregistrement des variations de l'elongation $x(t)$

au cours du temps est donné ci-contre

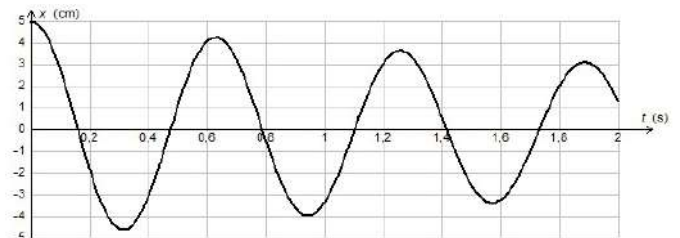
a - Quelle est la nature du régime oscillatoire ?

Interpréter l'amortissement des oscillations.

b - L'équation différentielle régissant le mouvement du centre d'inertie G de (S) s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0,5 \cdot \frac{dx}{dt} + 100 \cdot x = 0$$

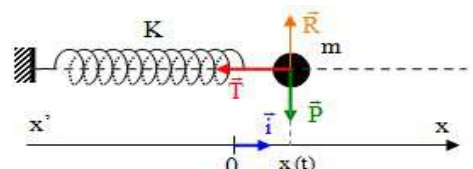
Déterminer la valeur du coefficient de frottement h et retrouver celle de ω_0 .



Réponse :

1⁰) a - Appliquons la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$$



projetons sur l'axe (x'x) : $\vec{T}_x + \vec{P}_x + \vec{R}_x = m.\vec{a}_x$

$$\rightarrow T\vec{i} + \vec{0} + \vec{0} = m.a\vec{i} \rightarrow T = m.a \rightarrow -K.x = m.a \rightarrow m.a + K.x = 0$$

On a : $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, on écrit : $m.\frac{d^2x}{dt^2} + K.x = 0$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}.x = 0$

b - On obtient une équation différentielle du second ordre de la forme : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2.x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

c - $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \xrightarrow{\text{eq. diff}} -\omega_0^2 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) + \omega_0^2 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) = 0$ vérifiée.

2⁰) a - L'énergie mécanique est $E = E_C + E_{pe} \rightarrow E = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}K.x^2$

b - $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m.2v\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}K.2x\frac{dx}{dt} = m.v\frac{dv}{dt} + K.x\frac{dx}{dt}$

On a : $\frac{dx}{dt} = v$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, il vient que : $\frac{dE}{dt} = v.\left(m.\frac{d^2x}{dt^2} + K.x\right) = 0$ d'après l'équation différentielle.

E se conserve. (pour $x = X_m$, $v = 0$) $\rightarrow E = \frac{1}{2}K.X_m^2$.

3⁰) a - E se conserve $\rightarrow$ la courbe (a) représente $E = f(x)$. Graphiquement $E = 25.10^{-3}$ J.

b - Graphiquement : $X_m = 5.10^{-2}$ m.

c - $E = \frac{1}{2}K.X_m^2 \rightarrow K = \frac{2E}{X_m^2}$. A.N : $K = \frac{2.25.10^{-3}}{(5.10^{-2})^2}$ et $K = 20 \text{ N.m}^{-1}$.

4⁰) a - Pour $x = 0$, $v = V_m \rightarrow E = \frac{1}{2}m.V_m^2$ et $m = \frac{2E}{V_m^2}$. A.N : $m = \frac{2.25.10^{-3}}{(0,5)^2}$ et $m = 0,2 \text{ Kg}$.

b - $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$. A.N : $\omega_0 = \sqrt{\frac{20}{0,2}}$ et $\omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.

c - A $t = 0$, $x(0) = x_0 \rightarrow X_m \sin \varphi_x = x_0 \xrightarrow[x_0 > 0 \rightarrow \sin \varphi_x > 0]{v(0)=0 \rightarrow \omega_0 X_m \cos \varphi_x = 0} \varphi_x = \frac{\pi}{2}$

il vient alors que : $x(t) = 5.10^{-2} \sin\left(10.t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$.

5⁰) a - le régime oscillatoire est pseudopériodique. L'amortissement des oscillations est dû aux frottements.

b - l'équation différentielle qui gère les oscillations amorties est : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}.\frac{dx}{dt} + \omega_0^2.x = 0$.

On a : $\frac{d^2x}{dt^2} + 0,5.\frac{dx}{dt} + 100.x = 0$ donc par identification :

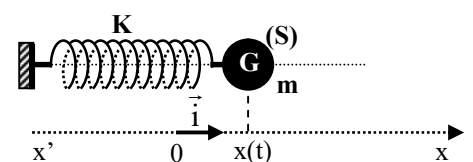
* $\frac{h}{m} = 0,5 \rightarrow h = 0,5.m = 0,5.0,2$ et $h = 0,1 \text{ Kg.s}^{-1}$

* $\omega_0^2 = 100 \rightarrow \omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$

Exercice 2 :

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse $m = 0,1 \text{ Kg}$ relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K. A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec l'origine O d'un repère (O, $\vec{i}$) d'axe x'x horizontal parallèle à l'axe du ressort. On ne tiendra pas compte des frottements.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre et on le lâche, à $t = 0$, sans vitesse initiale.



1⁰) a - Etablir l'équation différentielle régissant le mouvement du pendule élastique.

b - En déduire l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de m et de K .

2⁰) On donne ci-contre la courbe d'évolution de l'élongation x du pendule en fonction du temps :

a - Trouver graphiquement la valeur de T_0 .

En déduire la valeur de la constante de raideur K du ressort.

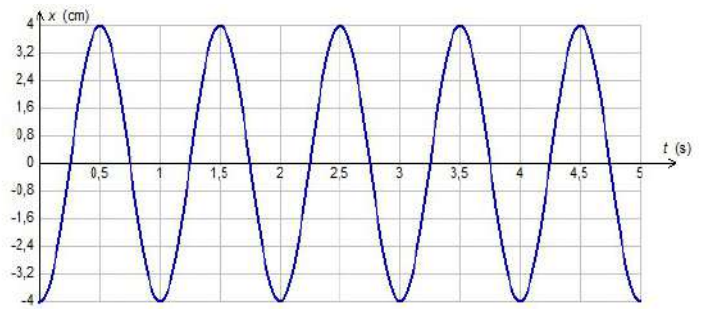
b - L'équation horaire de l'élongation s'écrit :

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \quad \text{avec } X_m > 0.$$

Déterminer les valeurs de ω_0 , X_m et φ_x .

c - Quelle est alors l'équation horaire de la vitesse $v(t)$ du mouvement ?

3⁰) Calculer la valeur de l'énergie mécanique E emmagasinée par le pendule élastique.



Réponse :

1⁰) a - Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au système (solide + ressort) :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

projetons sur l'axe ($x'x$) : $\vec{T}_x + \vec{P}_x + \vec{R}_x = m\vec{a}_x$

$$\rightarrow T\vec{i} + 0 + 0 = m\vec{a}\vec{i}$$

$$\rightarrow T = m\cdot a$$

$$\rightarrow -K\cdot x = m\cdot a$$

$$\rightarrow m\cdot a + K\cdot x = 0$$

sachant que $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, il vient que : $m\cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K\cdot x = 0$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}\cdot x = 0$

on obtient une équation différentielle du second ordre de la forme : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\cdot x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

b - $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$.

2⁰) a - $T_0 = 1\text{ s}$.

$T_0^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{K} \rightarrow K = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T_0^2} \rightarrow K = \frac{4\pi^2 \cdot 0,1}{1^2}$ et $K = 3,95 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

b - $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = 2\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

$X_m = 4\cdot 10^{-2} \text{ m}$.

$x(0) = X_m \sin(\varphi_x) = -X_m \rightarrow \sin(\varphi_x) = -1$ et $\varphi_x = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

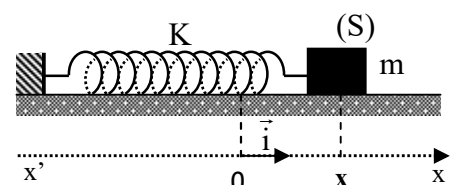
c - $v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega_0 \cdot X_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow v(t) = 4\pi \cdot 10^{-2} \sin(2\pi t) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

3⁰) Le système étant conservatif, l'énergie mécanique du pendule s'exprime par $E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot X_m^2$.

$E = \frac{1}{2} \cdot 3,95 \cdot (4\cdot 10^{-2})^2$ et $E = 31,6 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

Exercice 3 :

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K .



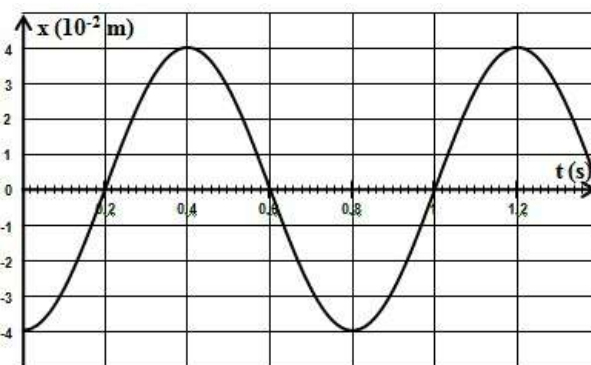
A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine O d'un repère $(O, \vec{i})$ d'axe $x'x$ horizontal parallèle à l'axe du ressort.

Le plan horizontal contenant le ressort est pris comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur.

On ne tient pas compte des frottements.

On écarte le solide (S) depuis sa position d'équilibre jusqu'à l'abscisse x_0 et on le lance, à $t = 0$, avec une vitesse initiale v_0 .

On donne ci-contre la courbe d'évolution de l'élongation x du pendule en fonction du temps.



1⁰) Préciser, en le justifiant, si le solide (S) :

a - est initialement écarté dans le sens des élongations positives ou négatives ?

b - est lancé avec ou sans vitesse initiale ?

c - effectue des oscillations amorties ou non amorties ?

2⁰) a - Par application de la relation fondamentale de la dynamique, établir l'équation différentielle régissant le mouvement du centre d'inertie du solide (S). Dédurre l'expression de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

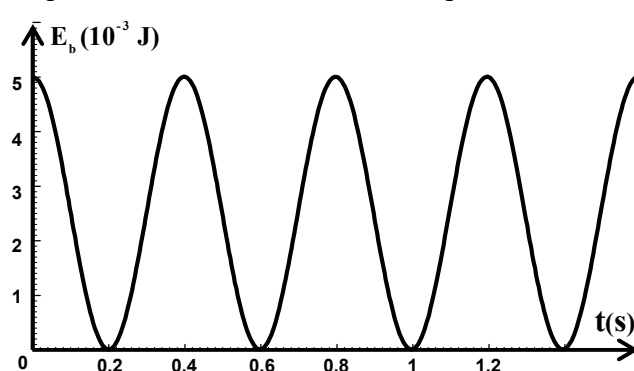
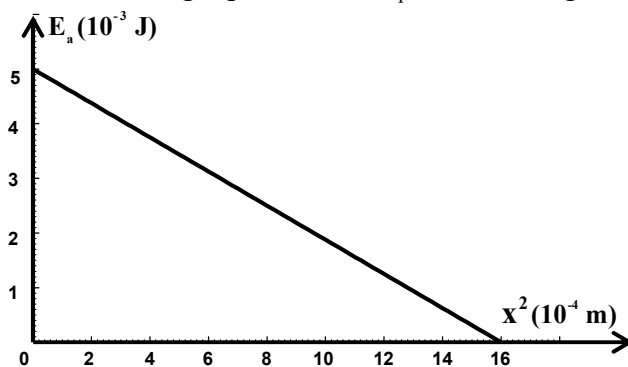
b - Déterminer graphiquement la valeur de l'amplitude X_m et celle de la période propre T_0 des oscillations.

c - L'équation horaire de l'élongation s'écrit : $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$. Déterminer la valeur de φ_x .

3⁰) a - Donner l'expression de l'énergie mécanique E de l'oscillateur en fonction de K , m , x et v .

b - Montrer que E se conserve. Donner son expression en fonction de K et X_m .

4⁰) Chacune des fonctions $E_a = f(x^2)$ et $E_b = f(t)$, dont les courbes d'évolution sont données ci-dessous, représente soit l'énergie potentielle E_{pe} soit l'énergie cinétique E_c de l'oscillateur mécanique considéré.



a - Associer, en le justifiant, chacune des fonctions E_a et E_b à l'énergie qu'elle représente.

b - Déterminer la valeur de la constante de raideur K du ressort ainsi que celle de la masse m du solide (S).

Réponse :

1⁰) a - $x(0) = -X_m \rightarrow$ le solide est initialement écarté dans le sens des élongations négatives.

b - $v_0 = v(0) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}$ or $x(0) = -X_m$ minimale $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$ donc $v_0 = 0$.

c - L'amplitude des oscillations ne varie pas au cours du temps $\rightarrow$ les oscillations sont non amorties.

2⁰) a - Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au système (solide + ressort) :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

projetons sur l'axe $(x'x)$: $\vec{T}_x + \vec{P}_x + \vec{R}_x = m\vec{a}_x$

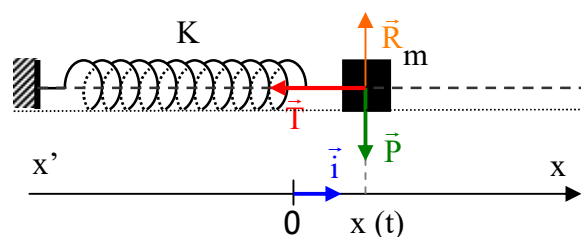
$$\rightarrow T\vec{i} + 0 + 0 = m.a\vec{i}$$

$$\rightarrow T = m.a$$

$$\rightarrow -K.x = m.a$$

$$\rightarrow m.a + K.x = 0$$

$$\text{sachant que : } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ il vient que : } m.\frac{d^2x}{dt^2} + K.x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}.x = 0$$



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} : \text{pulsation propre de l'oscillateur} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

b - Graphiquement : $X_m = 4.10^{-2} \text{ m}$ et $T_0 = 0,8 \text{ s}$.

c - $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$

$$x(0) = -X_m \rightarrow \cos(\varphi_x) = -1 \text{ et } \varphi_x = \pi \text{ rad.}$$

$$3^0) \text{ a - } E = E_C + E_{pe} \rightarrow E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} K \cdot x^2$$

$$\text{b - } \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot 2v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} K \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} + K \cdot x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\text{sachant que } v = \frac{dx}{dt} \text{ et } \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ on écrit alors : } \frac{dE}{dt} = v \left(m \frac{d^2x}{dt^2} + K \cdot x \right)$$

$$\text{d'après l'équation différentielle : } m \frac{d^2x}{dt^2} + K \cdot x = 0 \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \text{ et } E \text{ se conserve.}$$

$$\text{Pour } x = X_m, \quad v = 0 \rightarrow E_C = 0 \text{ et } E = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2.$$

$$4^0) \text{ a - } E = E_C + E_{pe} \rightarrow E = E_C + \frac{1}{2} K \cdot x^2 \text{ et } E_C = E - \frac{1}{2} K \cdot x^2 \rightarrow \text{la fonction } E_a \text{ représente } E_C$$

$$E_{pe}(t) = \frac{1}{2} K \cdot x(t)^2 \rightarrow E_{pe}(0) = \frac{1}{2} K \cdot x(0)^2 = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2 \neq 0 \rightarrow \text{la fonction } E_b \text{ représente } E_{pe}.$$

$$\text{b - } * E = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2 \rightarrow K = \frac{2E}{X_m^2}$$

$$\text{A.N : graphiquement : } E = 5.10^{-3} \text{ J} \rightarrow K = \frac{2.5.10^{-3}}{(4.10^{-2})^2} \text{ et } K = 6,25 \text{ N.m}^{-1}.$$

$$* \omega_0^2 = \frac{K}{m} \xrightarrow{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}} m = \frac{K \cdot T_0^2}{4\pi^2}.$$

$$\text{A.N : } m = \frac{6,25 \cdot (0,8)^2}{4\pi^2} \text{ et } m = 0,1 \text{ Kg.}$$

Exercice 4 :

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K .

A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec

l'origine O d'un repère $(O, \vec{i})$ d'axe $x'Ox$ horizontal parallèle à l'axe du ressort.

On ne tiendra pas compte des frottements.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre, dans le sens positif, d'une distance x_0 et on le lance,

à $t = 0$, avec une vitesse initiale v_0 .

On donne, ci-contre, la courbe traduisant l'évolution de l'élongation $x(t)$ en fonction du temps :

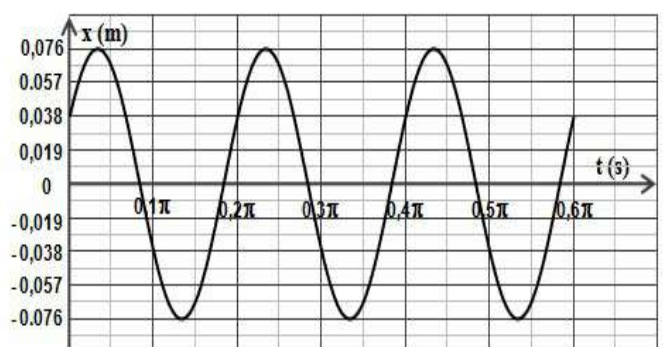
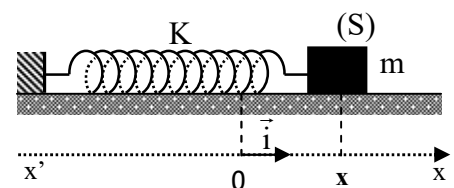
1°) a - Montrer que l'équation horaire du mouvement est :

$$x(t) = 7,6.10^{-2} \sin\left(10.t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ m.}$$

b - Dédurre que l'équation horaire de la vitesse est :

$$v(t) = 76.10^{-2} \sin\left(10.t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ m.s}^{-1}$$

c - Déterminer la valeur de la vitesse v_0 .



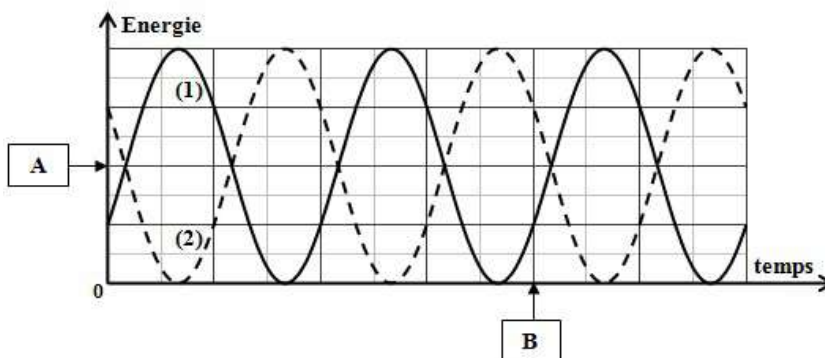
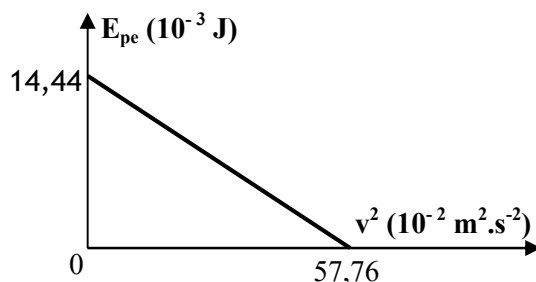
2°) Une étude expérimentale appropriée a permis de tracer la courbe représentative de l'évolution de l'énergie potentielle élastique E_{pe} du pendule en fonction de v^2 .

a - Montrer que : $E_{pe} = \frac{1}{2}.m.(V_m^2 - v^2)$.

b - Déterminer, graphiquement, la valeur de la masse m de la bille.

c - En déduire la valeur de la constante de raideur k du ressort.

3°) Sur la figure ci-dessous sont représentées les courbes illustrant l'évolution de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle élastique E_{pe} du système {solide + ressort} en fonction du temps.



a - Donner les valeurs de A et B.

b - Identifier parmi, les courbes (1) et (2), celle qui correspond à l'énergie cinétique E_c .

Réponse :

1°) a - $x(t) = X_m \sin(\omega_0.t + \varphi_x)$.

Graphiquement : * $X_m = 7,6.10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$

$$* \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{0,2\pi} \text{ et } \omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$* \begin{cases} x(0) = \frac{X_m}{2} \rightarrow \sin \varphi_x = \frac{1}{2} \\ \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} > 0 \rightarrow \omega_0.X_m.\cos \varphi_x > 0 \rightarrow \cos \varphi_x > 0 \end{cases} \rightarrow \varphi_x = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

donc : $x(t) = 7,6.10^{-2} \sin\left(10.t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ m.}$

b - $v(t) = V_m \sin(\omega_0.t + \varphi_v)$

On a : $v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow V_m = \omega_0.X_m \text{ et } \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$

$$* V_m = \omega_0.X_m \rightarrow V_m = 10.7,6.10^{-2} \text{ et } V_m = 76.10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$$

$$* \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_v = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \text{ et } \varphi_v = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

donc : $v(t) = 76.10^{-2} \sin\left(10.t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ m.s}^{-1}.$

c - $v_0 = v(0) = V_m \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow v_0 = 76.10^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } v_0 = 65,82.10^{-2} \text{ m.s}^{-1}.$

2°) a - $E = E_c + E_{pe} \rightarrow \frac{1}{2}.m.V_m^2 = \frac{1}{2}.m.v^2 + E_{pe} \text{ et } E_{pe} = \frac{1}{2}.m.(V_m^2 - v^2).$

b - Graphiquement, $E_{pe} = f(v^2)$ est une droite affine $\rightarrow E_{pe} = a.v^2 + b$

par identification : $a = -\frac{1}{2}.m \text{ et } m = -2.a$.

A.N : $m = -2.\left(\frac{14,44.10^{-3} - 0}{0 - 57,76.10^{-2}}\right) \text{ et } m = 50.10^{-3} \text{ Kg.}$

c - On a $\omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow K = m.\omega_0^2$.

A.N : $K = 50.10^{-3}.(10)^2$ et $K = 5 \text{ N.m}^{-1}$.

3⁰) a - * $A = \frac{E}{2} \rightarrow A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} . K . X_m^2 \right) \rightarrow A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} . 5 . (7,6.10^{-2})^2 \right)$ et $A = 7,22.10^{-3} \text{ J}$.

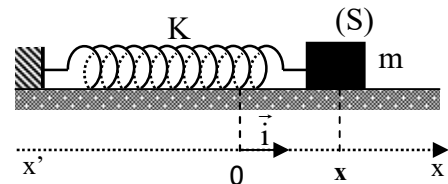
* $B = T_0 \xrightarrow{T_0=0,2\pi\text{s}} B = 0,2\pi\text{s}$ (ou $B = 0,628\text{s}$).

b - $E_c(0) = \frac{1}{2} . m . v_0^2 \rightarrow E_c(0) = \frac{1}{2} . m . \left(V_m . \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)^2 = \frac{1}{2} . m . V_m^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = E . \frac{3}{4}$ et $E_c(0) = 10,83.10^{-3} \text{ J}$

la courbe (2) correspond à l'énergie cinétique E_c .

Exercice 5 :

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse $m = 0,1 \text{ Kg}$ relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K . A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec l'origine O d'un repère $(O, \vec{i})$ d'axe $x'x$ horizontal parallèle à l'axe du ressort.



On ne tiendra pas compte des frottements.

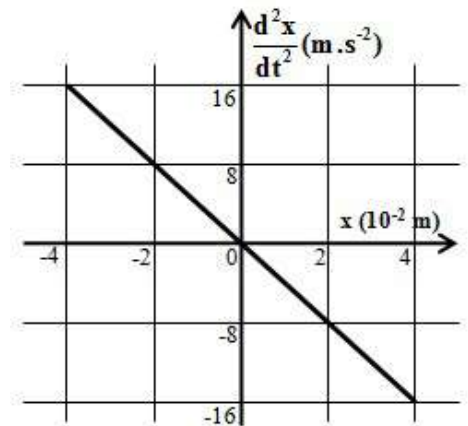
On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre, dans le sens positif, d'une distance $x_0 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ et on le lance, à $t = 0$, avec une vitesse initiale v_0 positive.

1⁰) L'élongation $x(t)$ du mouvement satisfait une équation

différentielle de la forme : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 . x = 0$

En déduire la nature du mouvement du pendule.

2⁰) Le graphique ci-contre représente la fonction $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$:



a - En exploitant le graphe, déterminer la pulsation propre ω_0 du pendule élastique.

b - Calculer la constante de raideur K du ressort.

c - Sachant que l'amplitude des oscillations est $X_m = 4.10^{-2} \text{ m}$, calculer la valeur de l'énergie mécanique E du pendule ?

d - Calculer alors la valeur de la vitesse maximale V_m du pendule.

3⁰) Soit $x(t) = X_m \sin(\omega_0 . t + \varphi_x)$ l'élongation du mouvement du pendule.

a - Déterminer la valeur de φ_x .

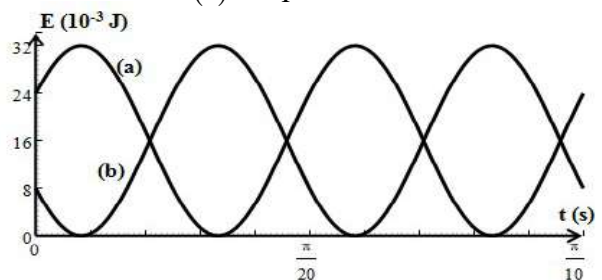
b - En déduire la valeur de la vitesse initiale v_0 du pendule.

c - Ecrire alors l'équation horaire de l'élongation $x(t)$ et celle de la vitesse $v(t)$ du pendule.

4⁰) Le graphe ci-contre donne les variations au cours du temps de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle élastique E_{pe} du pendule élastique :

a - Faire correspondre, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à l'énergie qu'elle représente.

b - Retrouver, à partir du graphe, les valeurs de x_0 et v_0 .



Réponse :

1⁰) Le mouvement du pendule élastique est rectiligne sinusoïdal.

2⁰) a - $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 . x = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 . x \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$ est une droite linéaire de pente $(-\omega_0^2)$

Graphiquement : $-\omega_0^2 = \frac{8-0}{0-2.10^{-2}} = -400 \rightarrow \omega_0^2 = 400 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{400}$ et $\omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$.

b - On a : $\omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow K = m \cdot \omega_0^2$. A.N : $K = 0,1 \cdot 400$ et $K = 20 \text{ N.m}^{-1}$.

c - On a : $E = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2$. A.N : $E = \frac{1}{2} 20 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2$ et $E = 32 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

d - $v = \frac{dx}{dt} \rightarrow V_m = \omega_0 \cdot X_m$ A.N : $V_m = 20 \cdot 4 \cdot 10^{-2}$ et $V_m = 0,8 \text{ m.s}^{-1}$.

Remarque : $E = \frac{1}{2} m \cdot V_m^2 \rightarrow V_m = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m}}$ A.N : $V_m = \sqrt{\frac{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{0,1}}$ et $V_m = 0,8 \text{ m.s}^{-1}$.

3⁰) a - $x(0) = X_m \sin \varphi_x = x_0 \rightarrow \sin \varphi_x = \frac{x_0}{X_m} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\varphi_x = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$

$v(0) = v_0 = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} > 0 \rightarrow \omega_0 \cdot X_m \cdot \cos \varphi_x > 0 \rightarrow \cos \varphi_x > 0$ donc $\varphi_x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

b - $v_0 = v(0) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = \omega_0 \cdot X_m \cdot \cos \varphi_x$. A.N : $v_0 = 20 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cos \frac{\pi}{3}$ et $v_0 = 0,4 \text{ m.s}^{-1}$.

c - $x(t) = 4 \cdot 10^{-2} \sin \left(20 \cdot t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ m}$

$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow v(t) = 0,8 \cos \left(20 \cdot t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ m.s}^{-1}$ ou $v(t) = 0,8 \sin \left(20 \cdot t + \frac{5\pi}{6} \right) \text{ m.s}^{-1}$

4⁰) a - $x_0 > 0$ et $v_0 = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} > 0 \rightarrow$ à partir de $t = 0$, l'élongation $x(t)$ augmente donc $E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$ croît. La courbe (a) correspond à E_{pe} et par conséquent, la courbe (b) correspond à E_c .

b - A $t = 0$:

* $E_{pe}(0) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x_0^2 \rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{pe}(0)}{K}}$. A.N : $x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 24 \cdot 10^{-3}}{20}} = \sqrt{4 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}$ et $x_0 = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ m}$

* $E_c(0) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c(0)}{m}}$. A.N : $v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{0,1}}$ et $v_0 = 0,4 \text{ m.s}^{-1}$.

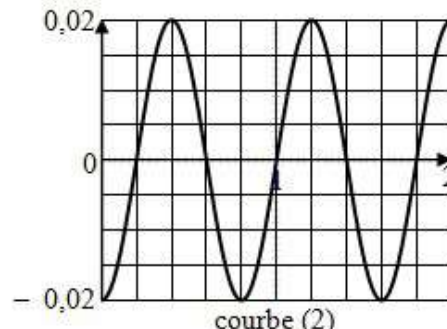
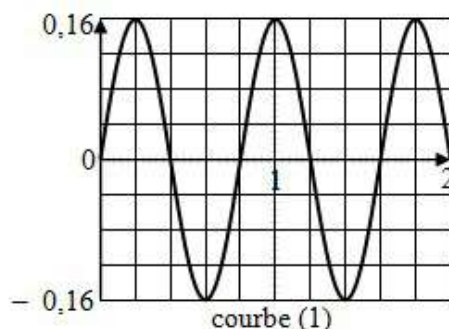
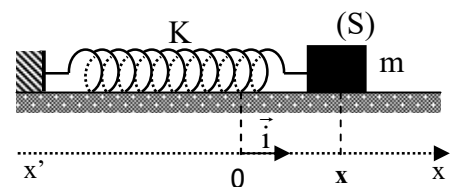
Exercice 6 :

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur $K = 8 \text{ N.m}^{-1}$.

A la position d'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec l'origine O d'un repère $(O, \vec{i})$ d'axe $x'x$ horizontal parallèle à l'axe du ressort.

On ne tiendra pas compte des frottements.

L'enregistrement de l'évolution en fonction du temps (exprimé en (s)), de l'élongation $x(t)$ (exprimée en (m)), et de la vitesse $v(t)$ (exprimée en (m.s^{-1})), permet d'obtenir les courbes (1) et (2) ci-dessous :



1⁰) a - Exprimer l'énergie mécanique E du pendule élastique en fonction de m , K , v et x .

b - Sachant que E se conserve, déduire que l'équation différentielle vérifiée par l'élongation $x(t)$ s'écrit

sous la forme : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$. Donner le nom de ω_0 .

c - Déterminer graphiquement la valeur de la période propre T_0 du pendule élastique.
Exprimer T_0 en fonction de m et K . Calculer alors la valeur de la masse m du solide (S).

2⁰) L'équation horaire de l'élongation s'écrit sous la forme $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

a - Sachant qu'on : $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, justifier que la courbe (2) représente $x(t)$.

b - Déterminer les valeurs de X_m , ω_0 et φ_x .

c - Déduire alors l'équation horaire de la vitesse $v(t)$.

3⁰) a - Donner l'expression de l'énergie E en fonction de K et X_m . Calculer la valeur de E .

b - Calculer les valeurs initiales $E_{pe}(0)$ de l'énergie potentielle élastique et $E_c(0)$ de l'énergie cinétique.

c - Déterminer graphiquement l'instant t pour lequel $E_{pe}(t) = E_c(0)$ pour la première fois. Retrouver ce résultat par le calcul.

Réponse :

1⁰) a - $E = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}K.x^2$

b - E se conserve $\rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \quad \forall t \rightarrow \frac{1}{2}m.2v \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}K.2x \frac{dx}{dt} + 0 = 0 \quad \forall t \rightarrow m.v \frac{dv}{dt} + K.x \frac{dx}{dt} = 0 \quad \forall t$

sachant que : $\frac{dx}{dt} = v$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, il vient que : $v \cdot \left(m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K.x \right) = 0 \quad \forall t$

la solution $v = 0 \quad \forall t$ est absurde ; donc : $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K.x = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}.x = 0$

on obtient une équation différentielle du second ordre de la forme : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2.x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

ω_0 est la pulsation propre du pendule élastique.

c - Graphiquement : $T_0 = 0,8s$.

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K}$ et $m = \frac{K.T_0^2}{4\pi^2}$. A.N : $m = \frac{8.0,8^2}{4\pi^2}$ et $m = 0,13Kg$.

2⁰) a - $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

On a : $v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow v(t) = \omega_0.X_m \sin\left(\omega_0.t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$

$v(t) = V_m \sin(\omega_0.t + \varphi_v) \rightarrow \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$

$v(t)$ est en quadrature avance de phase par rapport à $x(t)$.

Donc la courbe (2) représente $x(t)$.

b - Graphiquement :

* $X_m = 0,02m$

* $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow c \frac{2\pi}{0,8}$ et $\omega_0 = 2,5\pi \text{ rad.s}^{-1}$ ($\omega_0 = 7,85 \text{ rad.s}^{-1}$)

* $x(0) = X_m \sin \varphi_x = -X_m \rightarrow \sin \varphi_x = -1$ et $\varphi_x = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

c - $v(t) = \omega_0.X_m \sin\left(\omega_0.t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow v(t) = 2,5\pi.0,02 \sin\left(2,5\pi.t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

et $v(t) = 0,16 \sin(2,5\pi.t) \text{ m.s}^{-1}$

3⁰) a - $E = \frac{1}{2}.K.X_m^2$. A.N : $E = \frac{1}{2}.8.(0,02)^2$ et $E = 1,6.10^{-3} J$.

b - A $t = 0$:

$$* E_{pe}(0) = \frac{1}{2} K x(0)^2 \rightarrow E_{pe}(0) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (-0,02)^2 \text{ et } E_{pe}(0) = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$* E_c(0) = \frac{1}{2} m v(0)^2 \rightarrow E_c(0) = \frac{1}{2} \cdot 0,13 \cdot (0)^2 \text{ et } E_c(0) = 0$$

c - Pour la première fois $E_{pe}(t) = E_c(0)$ $\xrightarrow{E_c(0)=0}$ $E_{pe}(t) = 0 \rightarrow$ graphiquement, $t = 0,2 \text{ s}$.

$$E_{pe}(t) = 0 \xrightarrow{E_{pe} = \frac{1}{2} K x^2} x(t) = 0 \rightarrow X_m \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = k\pi$$

$$\frac{2\pi}{T_0} t - \frac{\pi}{2} = k\pi \rightarrow \frac{4}{T_0} t - 1 = 2k \rightarrow t = (2k + 1) \frac{T_0}{4}.$$

Pour la première fois $\rightarrow k = 0 \rightarrow t = \frac{T_0}{4}$ et $t = 0,2 \text{ s}$.

Exercice 7 :

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K .

A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec l'origine O d'un repère $(O, \vec{i})$ d'axe $x'Ox$ horizontal parallèle à l'axe du ressort. On ne tiendra pas compte des frottements.

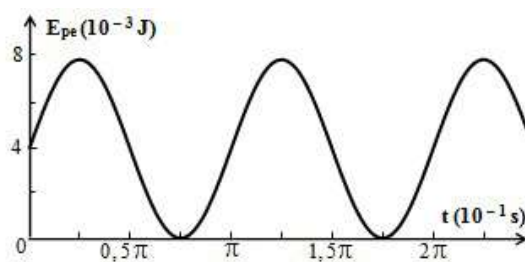
On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre, dans le sens positif, jusqu'à l'abscisse x_0 et on le lance, à $t = 0$, avec une vitesse initiale v_0 positive.

1⁰) a - Donner l'expression de l'énergie mécanique E du pendule élastique en fonction de m , de K , de l'élongation x de l'oscillateur et de la vitesse v du mouvement.

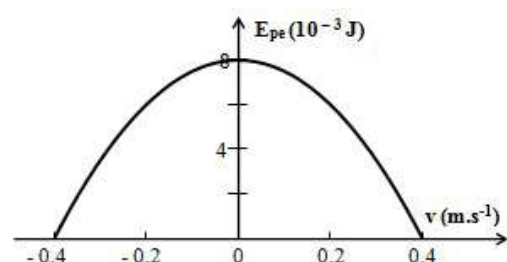
b - En exploitant la conservation de l'énergie E au cours du temps, déduire l'équation différentielle qui relie l'élongation x à sa dérivée seconde par rapport au temps.

c - Vérifier que pour $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, l'expression $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ est une solution de cette équation différentielle. Préciser le nom attribué à ω_0 .

2⁰) On donne ci-dessous les graphes (a) et (b) représentant les variations de l'énergie potentielle élastique E_{pe} emmagasinée par l'oscillateur respectivement en fonction du temps t et en fonction de la vitesse v du mouvement.



graphe (a)



graphe (b)

a - Montrer que $E_{pe}(t) = \frac{K X_m^2}{4} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)]$

b - Exprimer la période T de $E_{pe}(t)$ en fonction de la période propre T_0 de l'oscillateur.

c - En exploitant les graphes (a) et (b), déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur ainsi que celle de la vitesse maximale V_m du mouvement.

En déduire la valeur de l'élongation maximale X_m du pendule.

d - Calculer alors les valeurs de la raideur K du ressort et de la masse m du solide.

3⁰) a - Déterminer la valeur de x_0 et celle de v_0

b - Ecrire les équations horaires de l'élongation $x(t)$ et de la vitesse $v(t)$.

Réponse :

$$1^0) \text{ a - } E = E_C + E_{pe} \xrightarrow[E_{pe} = \frac{1}{2} K x^2]{E_C = \frac{1}{2} m v^2} E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

$$\text{b - } E = \text{constante} \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} m 2v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} K 2x \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow m v \cdot \frac{dv}{dt} + K x \cdot \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\text{on a : } v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ on écrit alors : } v \cdot \left(m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K x \right) = 0.$$

La solution $v = 0 \forall t$ est une solution absurde,

$$\text{donc : } m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K x = 0$$

$$\text{c - } x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) = -\omega_0^2 x(t)$$

$$x(t) \text{ étant la solution de l'équation différentielle : } m(-\omega_0^2 x(t)) + K x(t) = 0 \rightarrow x(t) \cdot (-m\omega_0^2 + K) = 0$$

$$\rightarrow K - m\omega_0^2 = 0 \rightarrow m\omega_0^2 = K \rightarrow \omega_0^2 = \frac{K}{m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

$$2^0) \text{ a - } E_{pe}(t) = \frac{1}{2} K x^2(t) = \frac{1}{2} K X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_x) = \frac{1}{2} K X_m^2 \left[\frac{1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)}{2} \right]$$

$$\text{Donc : } E_{pe}(t) = \frac{1}{4} K X_m^2 [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)]$$

$$\text{b - } T = \frac{2\pi}{\omega} \xrightarrow{\omega = 2\omega_0} T = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \xrightarrow{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}} T = \frac{T_0}{2}.$$

$$\text{c - * graphiquement : } T = \pi \cdot 10^{-1} \text{ s} \xrightarrow{T_0 = 2T} T_0 = 2\pi \cdot 10^{-1} \text{ s} \xrightarrow{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}} \omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 10^{-1}} \text{ et } \omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\text{* graphiquement : } V_m = 0,4 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\text{* on a : } V_m = \omega_0 X_m \rightarrow X_m = \frac{V_m}{\omega_0}. \text{ A.N : } X_m = \frac{0,4}{10} \text{ et } X_m = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$\text{d - * } E = E_C + E_{pe} = \text{constante} \xrightarrow[E = E_{pe} \text{ max}]{\text{lorsque } E_C = 0} E = E_{pe} \text{ max} = \frac{1}{2} K X_m^2 \text{ et } K = \frac{2E}{X_m^2}$$

$$\text{graphiquement : } E = 8 \cdot 10^{-3} \text{ J} \xrightarrow{\text{A.N}} K = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{(4 \cdot 10^{-2})^2} \text{ et } K = 10 \text{ N.m}^{-1}.$$

$$\text{* } \omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2}. \text{ A.N : } m = \frac{10}{(10)^2} \text{ et } m = 0,1 \text{ Kg.}$$

$$3^0) \text{ a - * } E_{pe}(0) = \frac{1}{2} K x_0^2 \xrightarrow{x_0 > 0} x_0 = \sqrt{\frac{2 E_{pe}(0)}{K}}$$

$$\xrightarrow[E_{pe}(0) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ J}]{\text{A.N}} x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{10}} \text{ et } x_0 = 2,83 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$\text{* } E = E_C(0) + E_{pe}(0) \xrightarrow[\rightarrow E_C(0) = \frac{E}{2}]{E_{pe}(0) = \frac{E}{2}} \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{E}{2} \xrightarrow{v_0 > 0} v_0 = \sqrt{\frac{E}{m}}.$$

$$\text{A.N : } v_0 = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{0,1}} \text{ et } v_0 = 2,83 \cdot 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\text{b - * } x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \text{ avec : } X_m = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m et } \omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$x(0) = x_0 = X_m \cdot \sin \varphi_x \rightarrow 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \sin \varphi_x \rightarrow \sin \varphi_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ 3\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$v(0) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} \succ 0 \rightarrow \omega_0 \cdot X_m \cdot \cos \varphi_x \succ 0 \rightarrow \cos \varphi_x \succ 0 \quad \text{donc} \quad \varphi_x = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$\text{On écrit alors : } x(t) = 4 \cdot 10^{-2} \sin \left(10 \cdot t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ m.}$$

$$* \quad v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t \rightarrow v(t) = 0,4 \cdot \cos \left(10 \cdot t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ m.s}^{-1}.$$

LES OSCILLATIONS MÉCANIQUES FORCÉES EN RÉGIME SINUSOÏDAL LA RÉSONANCE D'AMPLITUDE

I / Introduction :

1⁰) Mise en situation :

Dans la réalité, les frottements sont inévitables et un mouvement oscillatoire se dégrade au cours du temps et finit par disparaître.

Pour avoir des oscillations entretenues, le système oscillatoire doit comprendre :

- un excitateur (E) : c'est le système qui fournit l'énergie.
- un résonateur : c'est l'oscillateur qui reçoit l'énergie.
- un couplage : c'est le dispositif transmetteur d'énergie entre l'excitateur et le résonateur.

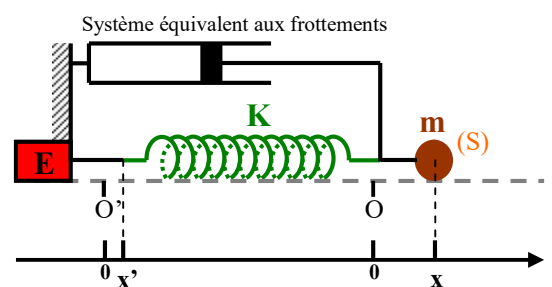
2⁰) Excitation en déplacement d'un pendule élastique :

L'excitateur impose à l'extrémité O' du ressort un déplacement rectiligne sinusoïdal $x'(t) = A_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$ avec $\omega_e = 2\pi N_e$

où N_e est la fréquence de l'excitateur.

Le résonateur (ici le pendule élastique), de fréquence propre N_0 , oscille à la fréquence N_e imposée par l'excitateur.

Il effectue donc des oscillations forcées.



II / le pendule élastique en régime forcé :

1⁰) Equation différentielle de réponse :

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au centre d'inertie du solide (S) :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$$

projetons sur l'axe ($x'x$) : $\vec{T}_x + \vec{P}_x + \vec{R}_{N_x} + \vec{f}_x = m \cdot \vec{a}_x$

$$\rightarrow T \cdot \vec{i} + 0 + 0 + f \cdot \vec{i} = m \cdot a \cdot \vec{i}$$

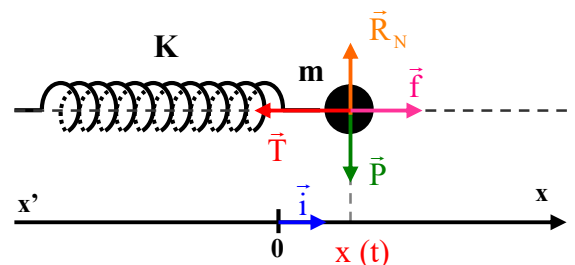
$$\rightarrow (T + f) \cdot \vec{i} = m \cdot a \cdot \vec{i}$$

$$\rightarrow T + f = m \cdot a$$

$$\rightarrow -K \cdot (x - x') - h \cdot v = m \cdot a$$

$$\rightarrow -K \cdot x + K \cdot x' - h \cdot v = m \cdot a$$

$$\text{Donc : } m \cdot a + h \cdot v + K \cdot x = K \cdot x'$$



On pose $F = k \cdot x' = K \cdot A_m \sin(\omega_e t + \varphi_e) \rightarrow F = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$ force excitatrice, on écrit donc :

$$m \cdot a + h \cdot v + K \cdot x = F$$

or : $v = \frac{dx}{dt}$ et $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, il vient alors que :

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F$$

C'est l'équation différentielle associée au pendule élastique en régime forcé.

Remarques :

- La force excitatrice étant $F(t) = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$, l'équation différentielle de réponse admettra une solution sinusoïdale de la forme : $x(t) = X_m \sin(\omega_e t + \varphi_r)$.

- Le pendule élastique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, effectue des oscillations forcées de pulsation ω_e .

2⁰) Caractéristiques de réponse :

On peut utiliser la représentation de Fresnel :

- Soit $x(t) = X_m \sin(\omega_e t + \varphi_r)$ la réponse du résonateur :

- à la fonction : $K.x = K.X_m \sin(\omega_e t + \varphi_r)$	on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V}_1$ $\left \begin{array}{l} K.X_m \\ \varphi_r \end{array} \right.$
- à la fonction : $h.\frac{dx}{dt} = h.\omega_e.X_m \sin\left(\omega_e t + \varphi_r + \frac{\pi}{2}\right)$	on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V}_2$ $\left \begin{array}{l} h.\omega_e.X_m \\ \varphi_r + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$
- à la fonction : $m.\frac{d^2x}{dt^2} = m.\omega_e^2.X_m \sin(\omega_e t + \varphi_r + \pi)$	on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V}_3$ $\left \begin{array}{l} m.\omega_e^2.X_m \\ \varphi_r + \pi \end{array} \right.$
- à la fonction : $F = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$	on associe le vecteur de Fresnel $\vec{V}$ $\left \begin{array}{l} F_m \\ \varphi_e \end{array} \right.$

- l'équation différentielle : $m.\frac{d^2x}{dt^2} + h.\frac{dx}{dt} + K.x = F$ implique que : $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{V}$

a - Amplitude des oscillations forcées:

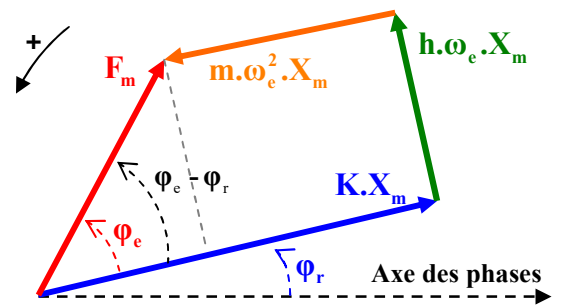
Appliquons le théorème de Pythagore :

On a : $F_m^2 = (h.\omega_e.X_m)^2 + [(K.X_m) - (m.\omega_e^2.X_m)]^2$

$$\rightarrow F_m^2 = h^2.\omega_e^2.X_m^2 + X_m^2.(K - m.\omega_e^2)^2$$

donc : $F_m^2 = X_m^2.[h^2.\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2]$

on en déduit que : $X_m^2 = \frac{F_m^2}{h^2.\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2}$ et enfin : $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2.\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2}}$



b - Déphasage entre l'excitateur et le résonateur:

Soit $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_r$ le déphasage la force excitatrice et l'élongation du pendule :

On a : $\text{tg } \Delta\varphi = \frac{h.\omega_e.X_m}{(K - m.\omega_e^2).X_m}$ donc $\text{tg } \Delta\varphi = \text{tg } (\varphi_e - \varphi_r) = \frac{h.\omega_e}{K - m.\omega_e^2}$

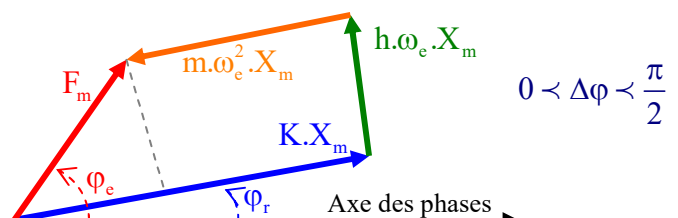
Remarque :

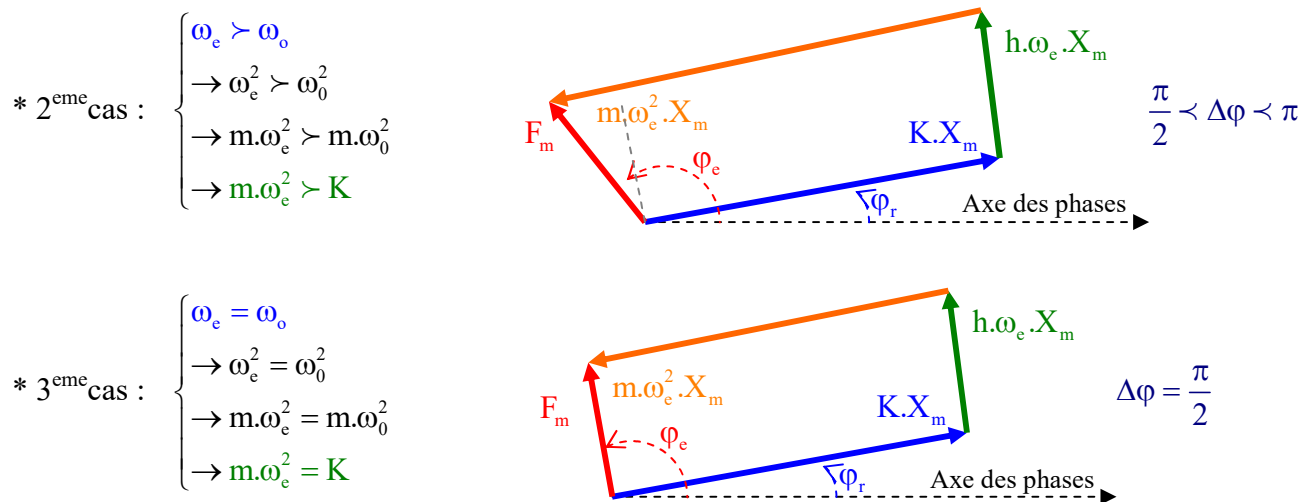
sachant que $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$, il vient que : $\text{tg } (\varphi_e - \varphi_r) = \frac{h.\omega_e}{m.(\omega_0^2 - \omega_e^2)}$

c - Remarque:

Sachant que $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et selon la valeur de ω_e , on peut avoir plusieurs cas de figures :

* 1^{er} cas : $\left\{ \begin{array}{l} \omega_e < \omega_0 \\ \rightarrow \omega_e^2 < \omega_0^2 \\ \rightarrow m.\omega_e^2 < m.\omega_0^2 \\ \rightarrow m.\omega_e^2 < K \end{array} \right.$





Remarque :

Dans tous les cas de figures, la force excitatrice est **toujours en avance de phase** par rapport à l'élongation.

Application 1 :

Un oscillateur, formé par un aimant de masse $m = 50 \text{ g}$ attaché à un ressort horizontal sans masse et de constante de raideur $K = 500 \text{ N.m}^{-1}$, est excité par un électroaimant, parcouru par un courant alternatif sinusoïdal, de fréquence N_e réglable entre 5 Hz et 25 Hz .

On admet que l'électroaimant exerce sur l'oscillateur une force excitatrice sinusoïdale d'équation :

$$\vec{F} = 40 \sin(2\pi.N_e.t) . \vec{i}, \quad \vec{i} \text{ étant un vecteur unitaire horizontal.}$$

1⁰) Soit x l'abscisse du centre d'inertie G de l'aimant dans le repère $(O, \vec{i})$; O étant la position du point G à l'équilibre.

a - Etablir l'équation différentielle reliant x à sa dérivée seconde.

b - Montrer que la force excitatrice F et l'abscisse x sont en phase à une condition particulière que l'on précisera.

c - Calculer l'amplitude des oscillations pour une fréquence excitatrice $N_e = 20 \text{ Hz}$.

2⁰) Un dispositif d'amortissement exerce maintenant sur l'oscillateur une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\pi.\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse instantanée de l'aimant.

a - Etablir l'équation différentielle qui relie x à ses dérivées première et seconde.

b - Pour une fréquence excitatrice $N_e = 20 \text{ Hz}$, déduire à partir de la construction de Fresnel :

- la phase initiale de l'abscisse x de G.
- la valeur de l'amplitude X_m des oscillations

Réponse :

1⁰) On ne tient pas compte des amortissements $\rightarrow \vec{f} = \vec{0}$.

a - Appliquons la RFD à l'aimant : $\underbrace{(\vec{P} + \vec{R})}_{=0} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$

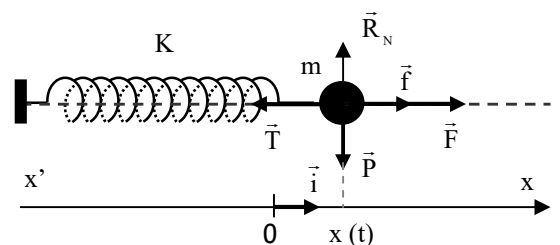
Projetons sur $(x', x) \rightarrow T + F = ma \rightarrow -Kx + F = ma$
donc : $ma + Kx = F$

$$\text{on a : } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = F \text{ avec } F = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$$

b - Pour une excitation $F(t) = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$; $\omega_e = 2\pi N_e$, la réponse de l'oscillateur sera de la forme :

$$x(t) = X_m \sin(\omega_e t + \varphi_r)$$

$$\begin{aligned} \text{L'équation différentielle donne : } m.\omega_e^2.X_m \sin(\omega_e t + \varphi_r) + K.X_m \sin(\omega_e t + \varphi_r) &= F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e) \\ \rightarrow (K - m.\omega_e^2).X_m \sin(\omega_e t + \varphi_r) &= F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e) \end{aligned}$$



Cette expression doit être vérifiée à chaque instant $\rightarrow \varphi_r = \varphi_e$ (x (t) et F (t) en phase) à condition que : $K > m\omega_e^2$.

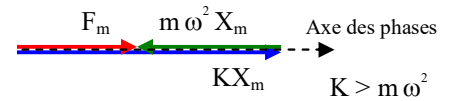
$$K > m\omega_e^2 \rightarrow \frac{K}{m} > \omega_e^2 \rightarrow \omega_0^2 > \omega_e^2 \rightarrow \omega_0 > \omega_e \rightarrow N_0 > N_e.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \xrightarrow{\text{A.N}} \omega_0 = \sqrt{\frac{200}{0,05}} \text{ et } \omega_0 = 100 \text{ rad.s}^{-1}$$

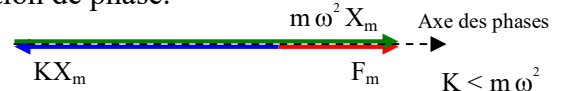
$$\rightarrow N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \xrightarrow{\text{A.N}} N_0 = \frac{100}{2\pi} \text{ et } N_0 = 15,92 \text{ Hz}$$

Donc x (t) et F (t) sont en phase pour toute fréquence de l'excitateur $N_e < 15,92 \text{ Hz}$.

c - $N_e = 20 \text{ Hz} \rightarrow N_e > N_0 \rightarrow$ x (t) et F (t) sont en opposition de phase.



$$X_m = \frac{F_m}{m\omega_e^2 - K} \xrightarrow{\text{A.N}} X_m = \frac{40}{0,05 \cdot (2\pi \cdot 20)^2 - 500} \text{ et } X_m = 13,81 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$



2⁰) On tient compte des amortissements $\rightarrow \vec{f} \neq \vec{0}$.

a - Appliquons la RFD à l'aimant : $\underbrace{(\vec{P} + \vec{R})}_{=\vec{0}} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$

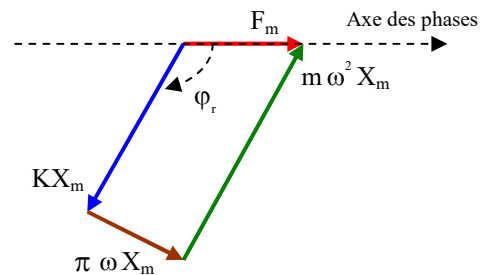
Projetons sur (x',x) $\rightarrow T + f + F = ma \rightarrow -Kx - h\dot{v} + F = ma$ donc : $ma + h\dot{v} + Kx = F$

$$\text{on a : } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ et } v = \frac{dx}{dt} \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + Kx = F$$

$$h = \pi \rightarrow \text{l'équation différentielle s'écrit : } m \frac{d^2x}{dt^2} + \pi \frac{dx}{dt} + Kx = F$$

b - $N_e = 20 \text{ Hz} \rightarrow N_e > N_0 \rightarrow K < m\omega_e^2$.

$$\bullet \quad \text{tg}(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{h\omega_e}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)} = \frac{hN_e}{2\pi m(N_0^2 - N_e^2)}$$



$$\text{A.N : } \text{tg}(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{\pi \cdot 20}{2\pi \cdot 0,05(15,92^2 - 20^2)} = -1,36 \text{ et } (\varphi_e - \varphi_r) = \begin{cases} -0,94 \text{ rad} \\ -0,94 + \pi = 2,2 \text{ rad} \end{cases}$$

F (t) est toujours en avance de phase sur x (t) $\rightarrow (\varphi_e - \varphi_r) = 2,2 \text{ rad}$.

puisque $\varphi_e = 0 \rightarrow \varphi_r = -2,2 \text{ rad}$.

$$\bullet \quad X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m\omega_e^2)^2}} = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \cdot 4\pi^2 N_e^2 + (K - m \cdot 4\pi^2 N_e^2)^2}}$$

$$\text{A.N : } X_m = \frac{40}{\sqrt{\pi^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 20^2 + (500 - 0,05 \cdot 4\pi^2 \cdot 20^2)^2}} \text{ et } X_m = 8,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

II / La résonance d'élongation :

1⁰) La pulsation de résonance :

A la résonance d'élongation, l'amplitude X_m des oscillations est maximale.

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m\omega_e^2)^2}} \text{ est maximale } \rightarrow [h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m\omega_e^2)^2] \text{ est minimale car } F_m \text{ est constante.}$$

$$\rightarrow \frac{d}{d\omega_e} \left[h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m \cdot \omega_e^2)^2 \right] = 0 \rightarrow 2 \cdot h^2 \cdot \omega_e + 2 \cdot (K - m \cdot \omega_e^2) \cdot (-2 \cdot m \cdot \omega_e) = 0$$

$$\rightarrow 2 \cdot \omega_e \cdot [h^2 - 2 \cdot m(K - m \cdot \omega_e^2)] = 0 \rightarrow h^2 - 2 \cdot m(K - m \cdot \omega_e^2) = 0 \quad \text{car } \omega_e \neq 0$$

$$\text{on a donc : } h^2 - 2 \cdot m \cdot K + 2 \cdot m^2 \cdot \omega_e^2 = 0 \rightarrow 2 \cdot m^2 \cdot \omega_e^2 = 2 \cdot m \cdot K - h^2 \quad \text{et} \quad \omega_e^2 = \frac{K}{m} - \frac{h^2}{2 \cdot m^2}$$

sachant que $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$, la résonance d'élongation a lieu pour $\omega_e = \omega_r$ telle que :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2 \cdot m^2}$$

Remarques :

- La résonance d'élongation a lieu pour $\omega_e \neq \omega_0$.
- Sachant que : $\omega = 2\pi \cdot N$, il vient que : $N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot m^2}$

2⁰) Influence de l'amortissement :

a - Amortissement nul ($h_0 = 0$) :

La résonance a lieu pour $\omega_e = \omega_0$

L'amplitude à la résonance $X_m = \infty$, le ressort subit alors une déformation permanente.

b - Amortissement faible (h_1 faible) :

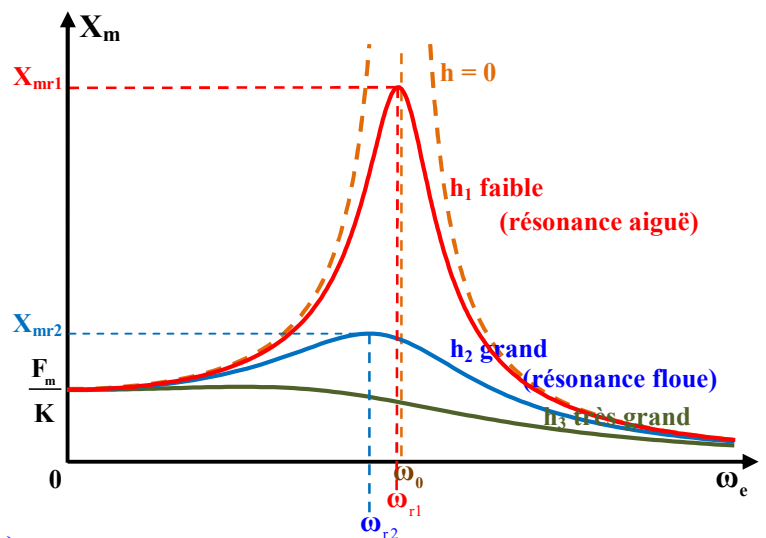
La résonance a lieu pour ω_e légèrement inférieure à ω_0 .

La courbe $X_m = f(\omega_e)$ présente un pic aigu à la résonance :
on dit que la **résonance est aiguë**.

c - Amortissement grand (h_2 grand) :

La résonance a lieu pour ω_e inférieure à ω_0 .

La courbe $X_m = f(\omega_e)$ présente un pic flou à la résonance :
on dit que la **résonance est floue**.



d - Amortissement très grand (h_3 très grand) :

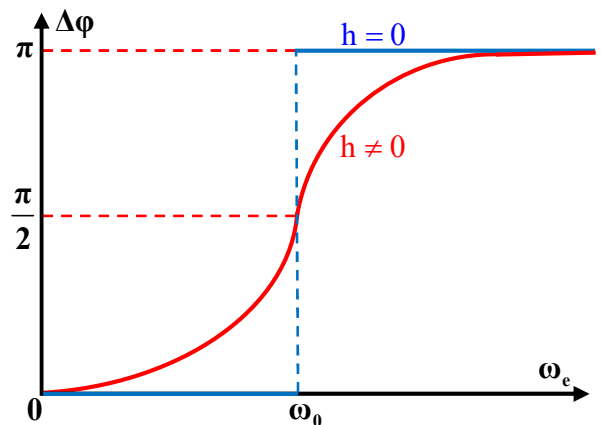
Il n'y a pratiquement plus pic de résonance. La courbe $X_m = f(\omega_e)$ est aplatie à la résonance.

3⁰) Variation de $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_r$ en fonction de ω_e :

$$\text{On a : } \text{tg } \Delta\varphi = \text{tg}(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{h \cdot \omega_e}{K - m \cdot \omega_e^2}$$

$$\bullet \quad h = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_e \leq \omega_0, & \text{tg } \Delta\varphi = 0^+ \rightarrow \Delta\varphi = 0 \\ \omega_e > \omega_0, & \text{tg } \Delta\varphi = 0^- \rightarrow \Delta\varphi = \pi \end{cases}$$

$$\bullet \quad h \neq 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_e \rightarrow 0, & \text{tg } \Delta\varphi = 0^+ \rightarrow \Delta\varphi = 0 \\ \omega_e = \omega_0, & \text{tg } \Delta\varphi = \infty \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \\ \omega_e \rightarrow \infty, & \text{tg } \Delta\varphi = 0^- \rightarrow \Delta\varphi = \pi \end{cases}$$



Application 2 :

L'élongation $x(t) = X_m \sin(\omega_e t)$ d'un pendule élastique ($K = 100 \text{ N.m}^{-1}$, $m = 0,01 \text{ Kg}$) en régime forcé est

une solution de l'équation différentielle : $m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + k.x = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$

1⁰) Pour une fréquence d'excitation $N_e = 9 \text{ Hz}$, l'amplitude X_m est maximale. Calculer alors le coefficient de frottement h .

2⁰) Pour une fréquence d'excitation $N_e = 10 \text{ Hz}$, Calculer φ_e et le rapport $\frac{F_m}{X_m}$

3⁰) Montrer que pour certaines valeurs de h , la résonance d'amplitude est impossible.

Réponse :

1⁰) A la résonance d'élongation :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2} \rightarrow \frac{h^2}{2.m^2} = \omega_0^2 - \omega_r^2 \rightarrow h^2 = 2.m^2 (\omega_0^2 - \omega_r^2) \text{ donc : } h = \sqrt{2.m^2 (\omega_0^2 - \omega_r^2)}$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0,01}} = 100 \text{ rad.s}^{-1} \\ \omega_r = \omega_e = 2\pi N_e = 2\pi.9 = 56,55 \text{ rad.s}^{-1} \end{cases} \xrightarrow{\text{A.N}} h = \sqrt{2.(0,01)^2 ((100)^2 - (56,55)^2)} \text{ et } h = 1,17 \text{ Kg.s}^{-1}$$

$$2^0) * \text{tg}(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{h.\omega_e}{m.(\omega_0^2 - \omega_e^2)}$$

$$\text{On a : } \omega_e = 2\pi N_e = 2\pi.10 = 62,83 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{A.N : } \text{tg}(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{1,17.62,83}{0,01.((100)^2 - (62,83)^2)} = 1,21 \text{ et } (\varphi_e - \varphi_r) = \begin{cases} 0,88 \text{ rad} \\ 0,88 + \pi \text{ rad} \end{cases}$$

$F(t)$ est toujours en avance de phase sur $x(t) \rightarrow (\varphi_e - \varphi_r) = 0,88 \text{ rad}$.

puisque $\varphi_r = 0 \rightarrow \varphi_e = 0,88 \text{ rad}$.

$$* X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2.\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2}} \rightarrow \frac{F_m}{X_m} = \sqrt{h^2.\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2}$$

$$\text{A.N : } \frac{F_m}{X_m} = \sqrt{1,17^2 (62,83)^2 + (100 - 0,01(62,83)^2)^2} \text{ et } \frac{F_m}{X_m} = 95,22 \text{ N.m}^{-1}$$

3⁰) Pour avoir la résonance d'amplitude, la pulsation excitatrice doit vérifier la relation : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2}$

$$\omega_r^2 \geq 0 \rightarrow \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2} \geq 0 \rightarrow \frac{h^2}{2.m^2} \leq \omega_0^2 \rightarrow h^2 \leq 2.m^2 \cdot \frac{K}{m} \rightarrow h \leq \sqrt{2.m.K}.$$

La résonance d'amplitude a lieu pour $h < h_{\max}$ avec $h_{\max} = \sqrt{2.0,01.100}$ et $h_{\max} = 1,41 \text{ Kg.s}^{-1}$.

III / La vitesse des oscillations :

Les oscillations mécaniques forcées sont gérées par l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + K.x = F \text{ avec } F(t) = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$$

de solution générale : $x(t) = X_m \sin(\omega_e t + \varphi_r)$.

Sachant que : $v = \frac{dx}{dt}$, il vient que : $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ et $x = \int v dt$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$m \frac{dv}{dt} + h.v + K \int v dt = F \text{ avec } F(t) = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$$

elle admet comme solution : $v(t) = V_m \sin(\omega_e t + \varphi_v)$

or on a : $v = \frac{dx}{dt} \rightarrow v(t) = \omega_e \cdot X_m \sin\left(\omega_e t + \varphi_r + \frac{\pi}{2}\right)$

la vitesse s'exprime alors par : $v(t) = V_m \sin(\omega_e t + \varphi_v)$ avec $V_m = \omega_e \cdot X_m$ et $\varphi_v = \varphi_r + \frac{\pi}{2}$

Remarques :

- $V_m = \omega_e \cdot X_m \rightarrow V_m = \omega_e \cdot \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m \cdot \omega_e^2)^2}}$ et $V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega_e} - m \cdot \omega_e\right)^2}}$

On définit alors l'impédance mécanique de l'oscillateur par : $Z_m = \sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega_e} - m \cdot \omega_e\right)^2}$

- $\text{tg}(\varphi_e - \varphi_v) = \text{tg}\left(\varphi_e - \varphi_r - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot g(\varphi_e - \varphi_r) = -\frac{K - m \cdot \omega_e^2}{h \cdot \omega_e}$ et $\text{tg}(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{m \cdot \omega_e - \frac{K}{\omega_e}}{h}$
- A la résonance de vitesse, V_m est maximale $\rightarrow Z_m$ est minimale
 $\rightarrow \frac{K}{\omega_e} - m \cdot \omega_e = 0 \rightarrow \omega_e^2 = \frac{K}{m} = \omega_0^2 \rightarrow \omega_e = \omega_0$.

La **résonance de vitesse** a lieu pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r = \omega_0$ **pulsation propre** du résonateur.

La fréquence de résonance de vitesse est **indépendante** de l'amortissement.

IV / La puissance moyenne :

A chaque instant, le résonateur reçoit de la part de l'excitateur une puissance $p(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v$

Soient $F(t) = F_m \sin(\omega_e \cdot t + \varphi_e)$ et $v(t) = V_m \sin(\omega_e t + \varphi_v)$.

$$p(t) = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e) \cdot V_m \sin(\omega_e t + \varphi_v) = \frac{F_m \cdot V_m}{2} \cdot [\cos(\varphi_e - \varphi_v) - \cos(2 \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_e + \varphi_v)]$$

soit : $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_v \rightarrow p(t) = \frac{F_m \cdot V_m}{2} \cdot [\cos \Delta\varphi - \cos(2 \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_e + \varphi_v)]$

Pendant une période, l'énergie absorbée par le résonateur est : $W_T = \int_0^T p(t) \cdot dt$

$$W_T = \frac{F_m \cdot V_m}{2} \cdot \int_0^T \cos \Delta\varphi \cdot dt - \frac{F_m \cdot V_m}{2} \int_0^T \cos(2 \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_e + \varphi_v) \cdot dt = \frac{F_m \cdot V_m}{2} \cdot \cos \Delta\varphi \cdot T$$

La puissance moyenne absorbée par le résonateur est définie par : $P = \frac{W_T}{T}$

$$P = \frac{F_m \cdot V_m}{2} \cdot \cos \Delta\varphi \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_v$$

Remarque :

A la résonance de puissance, P est maximale $\rightarrow \cos(\varphi_e - \varphi_v) = 1 \rightarrow \varphi_e = \varphi_v$

or $\text{tg}(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{m \cdot \omega_e - \frac{K}{\omega_e}}{h}$ donc si $\varphi_e = \varphi_v \rightarrow \frac{K}{\omega_e} - m \cdot \omega_e = 0 \rightarrow \omega_e^2 = \frac{K}{m} = \omega_0^2$

La résonance de puissance a lieu pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r = \omega_0$ **pulsation propre** du résonateur.

A la résonance de puissance on a :

$$P_r = \frac{F_m \cdot V_m}{2}$$

Application 3 :

L'équation différentielle relative à la vitesse v d'un pendule élastique effectuant des oscillations forcées est :

$$0,1 \cdot \frac{dv}{dt} + 0,4 \cdot v + 40 \int v \cdot dt = F(t) \quad \text{avec} \quad F(t) = 1,5 \cdot \sin(10\pi \cdot t) \text{ N}$$

1⁰) A l'aide de la construction de Fresnel :

a - Exprimer puis calculer la valeur maximale V_m de la vitesse.

b - Exprimer puis calculer la phase initiale φ_v de la vitesse.

2⁰) On fait varier la constante de raideur K du ressort :

a - Pour quelle valeur K_0 de K la force excitatrice F et la vitesse v deviennent-elles en phase ?

b - Calculer, dans ce cas, la puissance mécanique moyenne absorbée par le pendule.

Réponse :

1⁰) L'équation différentielle relative à la vitesse v d'un pendule élastique effectuant des oscillations forcées est :

$$m \cdot \frac{dv}{dt} + h \cdot v + K \int v \cdot dt = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$$

Par identification avec l'équation différentielle :

$$0,1 \cdot \frac{dv}{dt} + 0,4 \cdot v + 40 \int v \cdot dt = 1,5 \cdot \sin(10\pi \cdot t)$$

on déduit que :

- $m = 0,1 \text{ Kg}$
- $h = 0,4 \text{ Kg} \cdot \text{s}^{-1}$
- $K = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
- $F_m = 1,5 \text{ N}$
- $\omega_e = 10\pi = 31,42 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- $\varphi_e = 0$

$$\text{D'autre part : } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \xrightarrow{\text{A.N}} \omega_0 = \sqrt{\frac{40}{0,1}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{On remarque que : } \omega_e > \omega_0 \rightarrow \omega_e^2 > \frac{K}{m} \rightarrow m\omega_e^2 > K$$

$$\text{a - } V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(m\omega_e - \frac{K}{\omega_e}\right)^2}} \xrightarrow{\text{A.N}} V_m = \frac{1,5}{\sqrt{0,4^2 + \left(0,1 \cdot 10\pi - \frac{40}{10\pi}\right)^2}} \quad \text{et} \quad V_m = 0,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{b - } \text{tg}(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{m\omega_e - \frac{K}{\omega_e}}{h} \xrightarrow{\text{A.N}} \text{tg}(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{0,1 \cdot 10\pi - \frac{40}{10\pi}}{0,4} = 4,67 \rightarrow (\varphi_e - \varphi_v) = 1,36 \text{ rad}$$

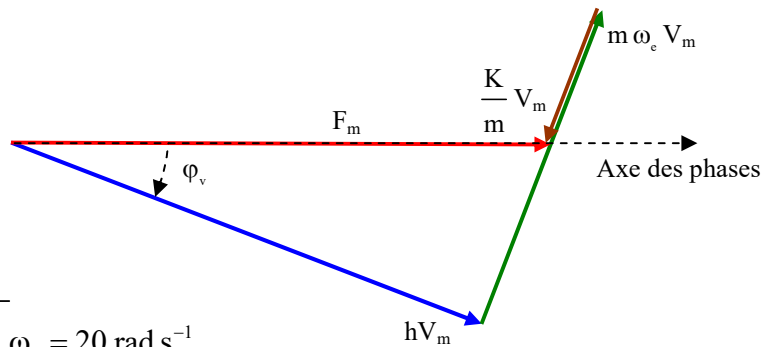
$$\text{tg}(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{0,1 \cdot 10\pi - \frac{40}{10\pi}}{0,4} = 4,67 \rightarrow (\varphi_e - \varphi_v) = 1,36 \text{ rad} \xrightarrow{\varphi_e=0} \varphi_v = -1,36 \text{ rad}$$

$$2^0) \text{ a - } F \text{ et } v \text{ en phase} \rightarrow \varphi_v = \varphi_e \rightarrow m\omega_e = \frac{K_0}{\omega_e} \rightarrow K_0 = m \cdot \omega_e^2$$

$$\text{A.N : } K_0 = 0,1(10\pi)^2 \quad \text{et} \quad v = 98,7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{b - } F \text{ et } v \text{ en phase} \rightarrow \text{résonance de vitesse} \rightarrow P = \frac{F_m \cdot V_m}{2} = \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{h}$$

$$\text{A.N : } P = \frac{1}{2} \frac{(1,5)^2}{0,4} \quad \text{et} \quad P = 2,81 \text{ W}.$$



Pour en savoir plus

1⁰) Le pendule élastique en régime sinusoïdal forcé :

a - Forme canonique de l'équation différentielle du mouvement :

L'équation différentielle associée au pendule élastique en régime forcé est : $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F$.

La force excitatrice s'écrit : $F(t) = F_m \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_e)$, $F_m > 0$

On pose : $F_m = K \cdot X_0$, $X_0 > 0$, la force excitatrice s'écrit : $F(t) = K \cdot X_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_e)$

L'équation différentielle s'écrit alors : $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = K \cdot X_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_e)$

Il vient alors que : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m} \cdot x = \frac{K}{m} \cdot X_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_e)$

On pose : $\frac{K}{m} = \omega_0^2$ et $\frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$, il vient que : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = \omega_0^2 \cdot X_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_e)$

Remarque : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$: pulsation propre du pendule élastique.

$Q = \frac{m \cdot \omega_0}{h}$: facteur de qualité du pendule élastique.

b - Solution de l'équation différentielle :

La solution générale de l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = \omega_0^2 \cdot X_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_e)$ est la somme de :

- La solution de l'équation homogène : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0$.

Elle caractérise le régime amorti transitoire et finit par s'annuler.

- Une solution particulière de la même forme que celle du second membre de l'équation.

On cherche cette solution sous la forme : $x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_r)$

Remarque : La solution transitoire étant limitée dans le temps, on n'en tiendra pas compte. Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle, en régime sinusoïdal forcé, se limite à sa solution particulière sinusoïdale de même pulsation ω_e que celle de la force excitatrice.

c - Résolution de l'équation différentielle :

La résolution de l'équation différentielle revient à la détermination de l'amplitude X_m ainsi que de la phase à l'origine φ_r de l'élongation $x(t)$.

- **Utilisation de la notation complexe :**

* A l'élongation $x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_r)$ on associe une élongation complexe $\underline{x} = X_m \cdot e^{j(\omega_e \cdot t + \varphi_r)}$

conséquences : $\dot{x} = \frac{dx}{dt} \rightarrow \underline{\dot{x}} = j \cdot \omega_e \cdot \underline{x}$ et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \underline{\ddot{x}} = (j \cdot \omega_e) \cdot (j \cdot \omega_e) \cdot \underline{x} \rightarrow \underline{\ddot{x}} = -\omega_e^2 \cdot \underline{x}$

* A l'élongation $y(t) = X_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_e)$ on associe une élongation complexe $\underline{y} = X_0 \cdot e^{j(\omega_e \cdot t + \varphi_e)}$

* L'équation différentielle complexe associée sera : $\underline{\ddot{x}} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \underline{\dot{x}} + \omega_0^2 \cdot \underline{x} = \omega_0^2 \cdot \underline{y}$

$\rightarrow -\omega_e^2 \cdot \underline{x} + j \cdot \omega_e \cdot \frac{\omega_0}{Q} \cdot \underline{x} + \omega_0^2 \cdot \underline{x} = \omega_0^2 \cdot \underline{y} \rightarrow \left(-\omega_e^2 + j \cdot \omega_e \cdot \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) \cdot \underline{x} = \omega_0^2 \cdot \underline{y}$

On écrit donc : $\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + j \cdot \omega_e \cdot \frac{\omega_0}{Q} \right) \cdot X_m \cdot e^{j(\omega_e \cdot t)} \cdot e^{j \cdot \varphi_r} = \omega_0^2 \cdot X_0 \cdot e^{j(\omega_e \cdot t)} \cdot e^{j \cdot \varphi_e}$

Il vient alors que : $\left[(\omega_0^2 - \omega_e^2) + j\omega_e \cdot \frac{\omega_0}{Q} \right] \cdot X_m \cdot e^{j\varphi_r} = \omega_0^2 \cdot X_0 \cdot e^{j\varphi_e}$

• **Amplitude X_m :**

$$\left[(\omega_0^2 - \omega_e^2) + j\omega_e \cdot \frac{\omega_0}{Q} \right] \cdot X_m \cdot e^{j\varphi_r} = \omega_0^2 \cdot X_0 \cdot e^{j\varphi_e} \rightarrow X_m \cdot e^{j\varphi_r} = \frac{\omega_0^2 \cdot X_0 \cdot e^{j\varphi_e}}{\left[(\omega_0^2 - \omega_e^2) + j\omega_e \cdot \frac{\omega_0}{Q} \right]}$$

$$X_m = |X_m \cdot e^{j\varphi_r}| \rightarrow X_m = \frac{\omega_0^2 \cdot |X_0 \cdot e^{j\varphi_e}|}{\left| (\omega_0^2 - \omega_e^2) + j\omega_e \cdot \frac{\omega_0}{Q} \right|} \text{ et } X_m = \frac{\omega_0^2 \cdot X_0}{\sqrt{\frac{\omega_e^2 \cdot \omega_0^2}{Q^2} + (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2}}$$

On écrit alors : $X_m = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{\omega_e^2}{\omega_0^2 \cdot Q^2} + \left(1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}\right)^2}}$. On pose : $u = \frac{\omega_e}{\omega_0}$, il vient que : $X_m = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\frac{u}{Q}\right)^2 + (1 - u^2)^2}}$

Remarque : $X_m = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \cdot \frac{h}{m \cdot \omega_0}\right)^2 + \left(\frac{m}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega_e^2}{\omega_0^2}\right)^2}} \xrightarrow{K=m \cdot \omega_0^2} X_m = \frac{K \cdot X_0}{\sqrt{h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m \cdot \omega_e^2)^2}}$

Sachant que : $F_m = K \cdot X_0$, il vient alors que : $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m \cdot \omega_e^2)^2}}$

• **Déphasage $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_r$:**

$$\left[(\omega_0^2 - \omega_e^2) + j\omega_e \cdot \frac{\omega_0}{Q} \right] \cdot X_m \cdot e^{j\varphi_r} = \omega_0^2 \cdot X_0 \cdot e^{j\varphi_e} \rightarrow \frac{e^{j\varphi_e}}{e^{j\varphi_r}} = \frac{X_m}{\omega_0^2 \cdot X_0} \left[(\omega_0^2 - \omega_e^2) + j\omega_e \cdot \frac{\omega_0}{Q} \right]$$

$$\rightarrow e^{j(\varphi_e - \varphi_r)} = \frac{X_m}{\omega_0^2 \cdot X_0} \left[(\omega_0^2 - \omega_e^2) + j\omega_e \cdot \frac{\omega_0}{Q} \right] \rightarrow \begin{cases} \cos(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{X_m}{\omega_0^2 \cdot X_0} \cdot (\omega_0^2 - \omega_e^2) \\ \sin(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{X_m}{\omega_0^2 \cdot X_0} \cdot \frac{\omega_e \cdot \omega_0}{Q} \end{cases}$$

$$\text{tg}(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{\frac{\omega_e \cdot \omega_0}{Q}}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)} \xrightarrow{Q = \frac{m \cdot \omega_0}{h}} \text{tg} \Delta\varphi = \text{tg}(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{h \cdot \omega_e}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega_e^2)}$$

Remarque : $\text{tg}(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{\frac{\omega_e \cdot \omega_0}{Q}}{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}\right)} \xrightarrow{u = \frac{\omega_e}{\omega_0}} \text{tg}(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{\left(\frac{u}{Q}\right)}{(1 - u^2)}$

d - Résonance d'amplitude :

• L'amplitude des oscillations s'exprime par : $X_m(u) = \frac{X_0}{\sqrt{D(u)}}$ avec $D(u) = (1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2$

A la résonance d'amplitude, $X_m(u)$ est maximale $\rightarrow D(u)$ est minimale $\rightarrow \frac{dD(u)}{du} = 0$

$$\rightarrow 2 \cdot (1 - u^2) \cdot (-2 \cdot u) + \frac{2 \cdot u}{Q^2} = 0 \rightarrow u \cdot \left(u^2 + \frac{1}{2 \cdot Q^2} - 1\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u^2 = 1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2} \end{cases}$$

La solution $u^2 = 1 - \frac{1}{2.Q^2}$ n'existe que si $1 > \frac{1}{2.Q^2} \rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

• Pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$* u_r^2 = 1 - \frac{1}{2.Q^2} \rightarrow u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2.Q^2}} \xrightarrow{u_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}} \omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2.Q^2}} \xrightarrow{Q = \frac{m.\omega_0}{h}} \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2}}$$

$$* X_{mr} = \frac{X_0}{\left[\left(1 - 1 + \frac{1}{2.Q^2} \right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2.Q^2}}{Q^2} \right]}, \text{ il vient que : } X_{mr} = \frac{Q.X_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4.Q^2}}} \xrightarrow[Q = \frac{m.\omega_0}{h}]{m.\omega_0^2 = K} X_{mr} = \frac{F_m}{h \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4.m^2}}}$$

Remarques :

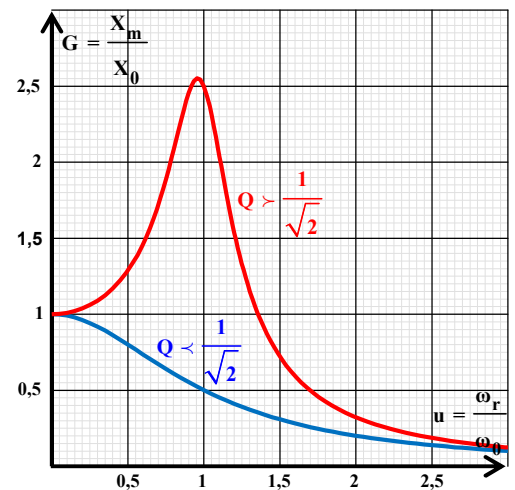
la solution $u = 0 \rightarrow D(u) = 1 \rightarrow X_m(0) = X_0 < X_{mr}$.

La résonance d'amplitude a lieu pour $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2.Q^2}} < \omega_0$.

Si Q est très grand alors $\omega_r \approx \omega_0$ et $X_{mr} \approx Q.X_0$.

• Pour $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$:

Il n'y a pas de phénomène de résonance et l'amplitude $X_m(u)$ décroît à partir de la valeur $X_m(0) = X_0$.



e - Résonance de vitesse :

• La vitesse du pendule est $v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow v(t) = \omega_e.X_m.\cos\left(\omega_e.t + \varphi_r + \frac{\pi}{2}\right)$

On écrit alors : $v(t) = V_m.\cos(\omega_e.t + \varphi_v)$ avec $V_m = \omega_e.X_m$ et $\varphi_v = \varphi_r + \frac{\pi}{2}$

$$V_m = \omega_e.X_m \xrightarrow{u = \frac{\omega_e}{\omega_0}} V_m = \frac{u.\omega_0.X_0}{\sqrt{\left(\frac{u}{Q}\right)^2 + (1-u^2)^2}} = \frac{\omega_0.X_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{Q}\right)^2 + \left(\frac{1}{u} - u\right)^2}} \text{ et } V_m = \frac{Q.\omega_0.X_0}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{1}{u} - u\right)^2}}$$

Remarque :

$$V_m = \frac{m.\omega_0^2.X_0}{h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{m.\omega_0}{h.u} - \frac{m.\omega_0}{h}u\right)^2}} \xrightarrow[Q = \frac{m.\omega_0}{h}]{u = \frac{\omega_e}{\omega_0}} V_m = \frac{K.X_0}{h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{K}{h.\omega_e} - \frac{m.\omega_e}{h}\right)^2}} \text{ et } V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega_e} - m.\omega_e\right)^2}}$$

• $V_m(u) = \frac{Q.\omega_0.X_0}{\sqrt{D(u)}}$ avec $D(u) = 1 + Q^2 \cdot \left(\frac{1}{u} - u\right)^2$

A la résonance de vitesse, $V_m(u)$ est maximale $\rightarrow D(u)$ est minimale

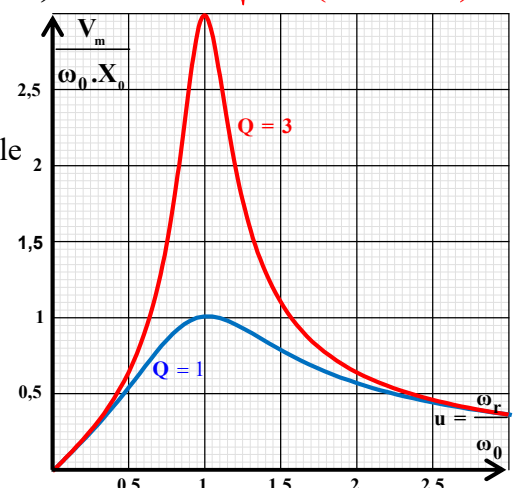
$$\rightarrow u = 1 \xrightarrow{u = \frac{\omega_e}{\omega_0}} \omega_e = \omega_0.$$

La résonance de vitesse a alors lieu pour $\omega_r = \omega_0$.

A la résonance de vitesse : $V_{mr} = Q.\omega_0.X_0$

Remarque :

$$V_{mr} = Q.\omega_0.X_0 \xrightarrow[Q = \frac{m.\omega_0}{h}]{Q = \frac{m.\omega_0}{h}} V_{mr} = \frac{K.X_0}{h} \text{ et } V_{mr} = \frac{F_m}{h}$$



2⁰) L'analogie électromécanique :

a - Analogie des grandeurs physiques :

L'équation différentielle qui gère les oscillations électriques forcées s'écrit : $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot q = u(t)$

L'équation différentielle qui gère les oscillations mécaniques forcées s'écrit : $m \cdot \frac{dv}{dt} + h \cdot v + K \cdot x = F(t)$

Les deux équations différentielles sont formellement transposables en utilisant les analogies suivantes :

Oscillations électriques		Oscillations mécaniques	
grandeur	symbole	grandeur	symbole
charge électrique	q	élongation	x
intensité du courant	i	vitesse	v
inductance	L	masse	m
inverse de la capacité	$\frac{1}{C}$	raideur du ressort	K
résistance	R	coefficient de frottement	h
tension	u	force	F

b - Analogie des systèmes oscillatoires :

Système		mécanique	électrique
		ressort + masse + amortisseur	circuit (R,L,C) série
Caractéristiques	pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$
	facteur de qualité	$Q = \frac{\sqrt{K \cdot m}}{h}$	$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$
Excitateur		$F(t) = F_m \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_e)$	$u(t) = U_m \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_u)$
Réponse	élongation	$x(t) = X_m \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_r)$	charge $q(t) = Q_m \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_q)$
	vitesse	$v(t) = V_m \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_v)$	intensité $i(t) = I_m \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_i)$

c - Analogie de la réponse à l'excitation :

On pose : $F_m = K \cdot X_0$ et par analogie électromécanique $U_m = \frac{Q_0}{C}$.

On pose : $u = \frac{\omega_e}{\omega_0}$ la pulsation réduite de l'oscillateur.

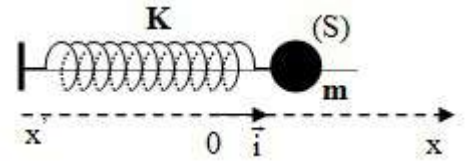
Réponse	en élongation ou en charge		en vitesse ou en intensité	
Amplitude	$X_m = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\frac{u}{Q}\right)^2 + (1-u^2)^2}}$	$Q_m = \frac{Q_0}{\sqrt{\left(\frac{u}{Q}\right)^2 + (1-u^2)^2}}$	$V_m = \frac{Q \cdot \omega_0 \cdot X_0}{\sqrt{1+Q^2 \cdot \left(\frac{1}{u} - u\right)^2}}$	$I_m = \frac{Q \cdot \omega_0 \cdot Q_0}{\sqrt{1+Q^2 \cdot \left(\frac{1}{u} - u\right)^2}}$
Déphasage	$\text{tg}(\varphi_e - \varphi_r) = \frac{\left(\frac{u}{Q}\right)}{(1-u^2)}$	$\text{tg}(\varphi_u - \varphi_q) = \frac{\left(\frac{u}{Q}\right)}{(1-u^2)}$	$\text{tg}(\varphi_e - \varphi_v) = Q \cdot \left(u - \frac{1}{u}\right)$	$\text{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = Q \cdot \left(u - \frac{1}{u}\right)$
Pulsation à la résonance	$\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2}}$		$\omega_r = \omega_0$	
Réponse à la résonance	$X_{mr} = \frac{Q \cdot X_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q^2}}}$	$Q_{mr} = \frac{Q \cdot Q_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q^2}}}$	$V_{mr} = Q \cdot \omega_0 \cdot X_0$	$I_{mr} = Q \cdot \omega_0 \cdot Q_0$

Applications

Exercice 1 :

On dispose d'un pendule élastique horizontal constitué par un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K , et d'un solide (S) de masse m .

Le solide (S), pouvant glisser sur un plan horizontal parallèle à l'axe du ressort, est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide.



Le mouvement de l'oscillateur est étudié dans le repère $(0, \vec{i})$ dont l'origine 0 coïncide avec la position d'équilibre du centre d'inertie G de (S) sur un axe $x'x$ parallèle à l'axe du ressort.

On excite l'oscillateur par une force horizontale sinusoïdale $F(t) = F_m \sin(\omega_e \cdot t)$ de pulsation ω_e .

Le solide (S) effectue alors un mouvement rectiligne sinusoïdal d'élongation $x(t) = X_m \sin(\omega_e \cdot t + \varphi_x)$.

1⁰) Pour une pulsation ω_e de la force excitatrice, On donne ci-dessous les courbes d'évolution de la force excitatrice F et de l'élongation x en fonction du temps.

a - En identifiant chacune des courbes (a) et (b), déterminer graphiquement :

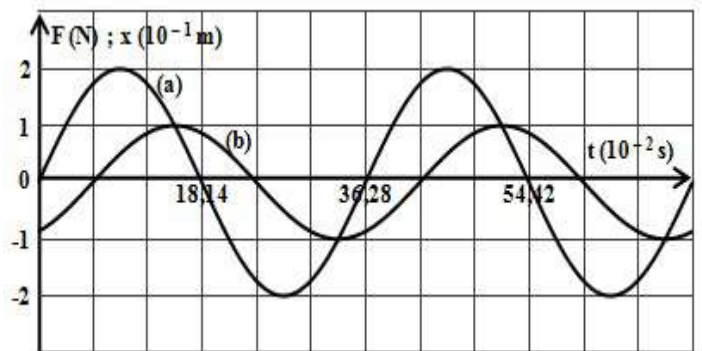
* La valeur de la pulsation ω_e .

* la valeur maximale F_m de la force excitatrice et celle de sa phase initiale φ_e .

* la valeur de l'amplitude X_m des oscillations.

b - Montrer que le déphasage $\varphi_e - \varphi_x$ entre la force

excitatrice et l'élongation est $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad.



2⁰) L'équation différentielle qui gère les oscillations du pendule élastique est : $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F(t)$

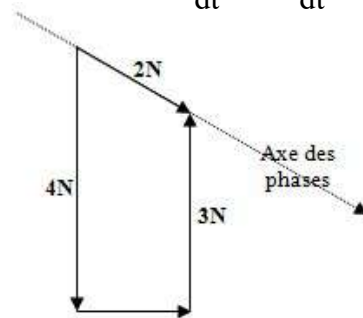
La représentation de Fresnel associée au système oscillatoire étudié permet de construire la figure ci-contre :

a - Montrer que $\frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ où ω_0 est la pulsation

propre du pendule élastique considéré.

Calculer alors la valeur de ω_0 .

b - Déterminer les valeurs de h , K et m .



3⁰) Les courbes de résonance d'amplitude $X_m = f(\omega_e)$ et de vitesse $V_m = g(\omega_e)$ sont données sur la figure ci-contre :

a - L'expression de la vitesse maximale

est : $V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega_e} - m \cdot \omega_e\right)^2}}$.

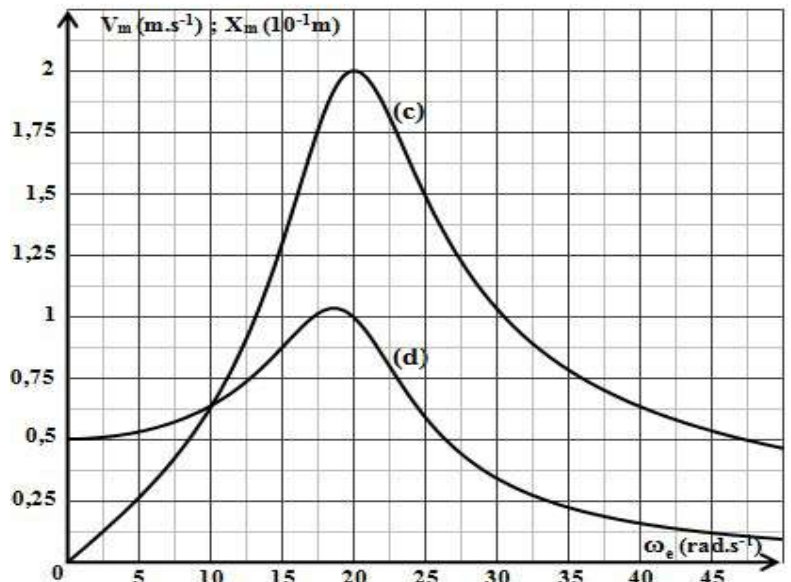
En déduire celle de l'amplitude X_m .

b - Montrer que la résonance d'amplitude

a lieu pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$.

c - Identifier les courbes (c) et (d).

d - Retrouver les valeurs de h , K et m .



4⁰) Pour $\omega_{e1} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, $V_{m1} = 10.X_{m1}$.

a - Déterminer graphiquement la valeur de ω_{e2} pour laquelle $V_{m2} = V_{m1}$.

b - Montrer que $\omega_{e1}.\omega_{e2} = \omega_0^2$. Retrouver par le calcul la valeur de ω_{e2} . Déterminer alors la valeur de X_{m2} .

Réponse :

1⁰) a - La force excitatrice $F(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à l'élongation $x(t)$ donc la courbe (a) correspond à $F(t)$ et la courbe (b) correspond à $x(t)$.

$$* \omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \xrightarrow{T_e = 36,28.10^{-2} \text{ s}} \omega_e = \frac{2\pi}{36,28.10^{-2}} \text{ et } \omega_e = 17,32 \text{ rad.s}^{-1} \quad (\text{ou } \omega_e \approx 5,51\pi \text{ rad.s}^{-1}).$$

* Graphiquement : $F_m = 2 \text{ N}$.

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ \left(\frac{dF(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_m \cdot \sin \varphi_e = 0 \rightarrow \sin \varphi_e = 0 \rightarrow \varphi_e = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \\ \omega_e \cdot F_m \cdot \cos \varphi_e > 0 \rightarrow \cos \varphi_e > 0 \end{cases} \rightarrow \varphi_e = 0.$$

* Graphiquement : $X_m = 0,1 \text{ m}$.

b - Soit $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x$.

$$|\Delta\varphi| = 2\pi \cdot \frac{|\Delta t|}{T_e} \rightarrow |\Delta\varphi| = 2\pi \cdot \frac{1}{6} \text{ et } |\Delta\varphi| = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{or } \Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x > 0 \rightarrow \varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

2⁰) a - D'après la représentation de Fresnel :

$$\begin{cases} K.X_m = 4 \\ m.\omega_e^2.X_m = 3 \end{cases} \rightarrow \frac{m.\omega_e^2}{K} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{K}{m}} \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} = \frac{3}{4} \text{ et } \frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}.\omega_e. \text{ A.N: } \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}.17,32 \text{ et } \omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\text{b - } * K.X_m = 4 \rightarrow K = \frac{4}{X_m} \xrightarrow{X_m = 10^{-1} \text{ m}} K = \frac{4}{10^{-1}} \text{ et } K = 40 \text{ N.m}^{-1}.$$

$$* m.\omega_e^2.X_m = 3 \rightarrow m = \frac{3}{\omega_e^2.X_m} \xrightarrow{\omega_e = 17,32 \text{ rad.s}^{-1}} m = \frac{3}{(17,32)^2.10^{-1}} \text{ et } m = 0,1 \text{ Kg.}$$

$$\text{Remarque : } \omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2}. \text{ A.N: } m = \frac{40}{(20)^2} \text{ et } m = 0,1 \text{ Kg.}$$

$$* \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h.\omega_e.X_m}{F_m} \rightarrow h = \frac{F_m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\omega_e.X_m}. \text{ A.N: } h = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{17,32.10^{-1}} \text{ et } h = 1 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$\text{Remarque : } \text{tg}\Delta\varphi = \frac{h.\omega_e}{K - m\omega_e^2} \rightarrow h = \frac{(K - m\omega_e^2).\text{tg}\Delta\varphi}{\omega_e} \text{ A.N: } h = \frac{(40 - 0,1 \cdot 17,32^2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{17,32} \text{ et } h = 1 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$3^0) \text{ a - } V_m = \omega_e.X_m \rightarrow X_m = \frac{V_m}{\omega_e} \rightarrow X_m = \frac{F_m}{\omega_e \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega_e} - m.\omega_e\right)^2}} \text{ et } X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2}}.$$

b - Résonance d'élongation $\rightarrow X_m$ est maximale $\rightarrow y(\omega_e) = h^2.\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2$ est minimale $\rightarrow$

$$\frac{dy}{d\omega_e} = 0.$$

$$\rightarrow 2.h^2.\omega_e + 2(K - m.\omega_e^2).(-2m.\omega_e) = 0 \rightarrow h^2 - 2m(K - m.\omega_e^2) = 0 \rightarrow h^2 - 2mK + 2m.\omega_e^2 = 0$$

$$\rightarrow 2m.\omega_e^2 = 2mK - h^2 \rightarrow \omega_e^2 = \frac{2mK - h^2}{2m^2} \rightarrow \omega_e^2 = \frac{K}{m} - \frac{h^2}{2m^2}$$

Sachant que $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$, la résonance d'élongation a lieu pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2}$.

c - $V_m(\omega_e) = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega_e} - m.\omega_e\right)^2}} \rightarrow V_m(0) = 0$: la courbe (c) représente V_m .

$X_m(\omega_e) = \frac{F_m}{\sqrt{h^2.\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2}} \rightarrow X_m(0) = \frac{F_m}{K}$: la courbe (d) représente X_m .

d - * A la résonance de vitesse : $\left\{ \begin{array}{l} \omega_e = \omega_0 \xrightarrow{\text{graphiquement}} \omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1} \\ V_{m0} = \frac{F_m}{h} \rightarrow h = \frac{F_m}{V_{m0}} \xrightarrow[V_{m0} = 2 \text{ m.s}^{-1}]{F_m = 2 \text{ N}} h = \frac{2}{2} \text{ et } h = 1 \text{ Kg.s}^{-1} \end{array} \right.$

* $X_m(0) = \frac{F_m}{K} \rightarrow K = \frac{F_m}{X_m(0)} \xrightarrow[X_m(0) = 0,5.10^{-1} \text{ m}]{F_m = 2 \text{ N}} K = \frac{2}{0,05} \text{ et } K = 40 \text{ N.m}^{-1}$.

* $\omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2}$. A.N : $m = \frac{40}{(20)^2} \text{ et } m = 0,1 \text{ Kg}$.

4⁰) a - Graphiquement : $\omega_{e2} = 40 \text{ rad.s}^{-1}$.

b - $V_{m1} = V_{m2} \rightarrow \frac{K}{\omega_{e1}} - m.\omega_{e1} = m.\omega_{e2} - \frac{K}{\omega_{e2}} \rightarrow m(\omega_{e2} + \omega_{e1}) = K \left(\frac{1}{\omega_{e1}} + \frac{1}{\omega_{e2}} \right)$

$\rightarrow m(\omega_{e2} + \omega_{e1}) = K \left(\frac{\omega_{e2} + \omega_{e1}}{\omega_{e1}.\omega_{e2}} \right) \rightarrow \omega_{e1}.\omega_{e2} = \frac{K}{m} \xrightarrow[\omega_0^2 = \frac{K}{m}]{\omega_0 = 20} \omega_{e1}.\omega_{e2} = \omega_0^2$.

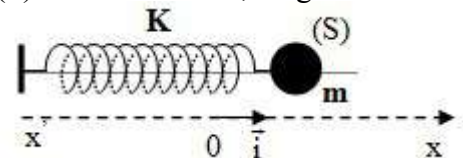
$\omega_{e1}.\omega_{e2} = \omega_0^2 \rightarrow \omega_{e2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{e1}}$. A.N : $\omega_{e2} = \frac{(20)^2}{10} \text{ et } \omega_{e2} = 40 \text{ rad.s}^{-1}$.

$V_{m2} = \omega_{e2}.X_{m2} \rightarrow X_{m2} = \frac{V_{m2}}{\omega_{e2}} \xrightarrow[V_{m2} = V_{m1} = 0,625 \text{ m.s}^{-1}]{V_{m2} = 0,625 \text{ m.s}^{-1}} X_{m2} = \frac{0,625}{40} \text{ et } X_{m2} = 1,56.10^{-2} \text{ m}$.

Exercice 2 :

On dispose d'un pendule élastique horizontal constitué par un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur $K = 40 \text{ N.m}^{-1}$, et d'un solide (S) de masse $m = 0,1 \text{ Kg}$.

Le solide (S), pouvant glisser sur un plan horizontal parallèle à l'axe du ressort, est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide.



Le mouvement de l'oscillateur est étudié dans le repère $(0, \vec{i})$ dont l'origine 0 coïncide avec la position d'équilibre du centre d'inertie G de (S) sur un axe $x'x$ parallèle à l'axe du ressort.

On excite l'oscillateur par une force horizontale sinusoïdale $F(t) = F_m \sin(\omega_e.t + \varphi_e)$ de pulsation ω_e .

Le solide (S) effectue alors un mouvement rectiligne sinusoïdal d'élongation $x(t) = X_m \sin(\omega_e.t + \varphi_x)$.

1⁰) a - Calculer la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur mécanique considéré.

b - La mesure de la durée correspondant à 10 oscillations du système donne $\Delta t = 4 \text{ s}$.

En déduire la valeur de la pulsation ω_e de la force excitatrice.

c - Justifier alors le caractère forcé de ces oscillations.

2⁰) On rappelle que pour un oscillateur électrique (R,L,C) en régime forcé, la charge électrique maximale du condensateur est donnée par l'expression :

$$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2.\omega_e^2 + \left(\frac{1}{C} - L.\omega_e^2\right)^2}}$$

a - En utilisant l'analogie formelle électrique-mécanique, écrire l'équivalent mécanique de cette expression.

b - Montrer que la résonance d'élongation est obtenue pour une pulsation ω_r telle que :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2}.$$

c - Déterminer la valeur de h sachant que la pulsation ω_e de la force excitatrice est égale à la pulsation ω_r de résonance d'élongation ?

3⁰) a - On rappelle que pour un oscillateur électrique (R,L,C) en régime forcé, l'intensité électrique maximale du courant est donnée par l'expression :

$$I_m = \frac{U_m}{Z} \quad \text{avec} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L.\omega_e - \frac{1}{C.\omega_e} \right)^2}.$$

En utilisant l'analogie formelle électrique-mécanique, donner l'équivalent mécanique de cette expression.

b - Le facteur de puissance d'un oscillateur électrique (R,L,C) en régime forcé est donné par l'expression :

$$\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R}{Z}, \quad \text{déduire l'expression de son équivalent mécanique.}$$

c - Montrer alors qu'à la résonance de vitesse on a :

$$V_{m0} = \frac{F_m}{h} \quad \text{et} \quad \varphi_e = \varphi_x + \frac{\pi}{2}.$$

4⁰) Sans changer la pulsation ω_e de la force excitatrice, on remplace le solide (S) par un autre solide (S') de masse m' . Un système d'acquisition, relié à un ordinateur, permet de tracer les courbes d'évolution de la force excitatrice F et de l'élongation x en fonction du temps. On obtient le graphe ci-dessous :

a - En identifiant chacune des courbes (a) et (b), déterminer graphiquement :

* la valeur maximale F_m de la force excitatrice et celle de sa phase initiale φ_e .

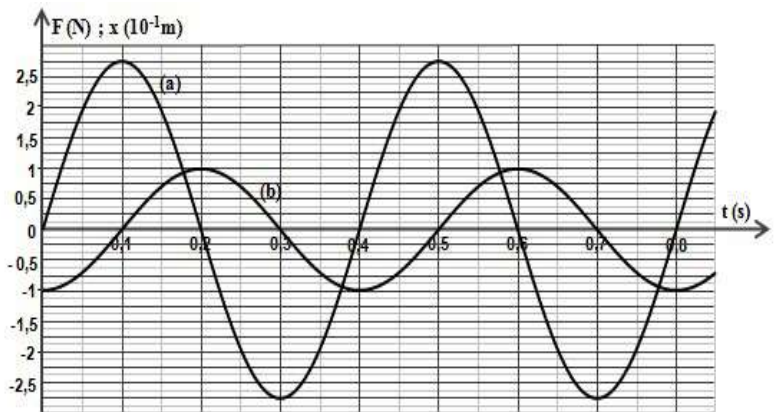
* la valeur de l'amplitude X_m des oscillations.

* le déphasage $\varphi_e - \varphi_x$ entre la force excitatrice et l'élongation.

b - Déduire que l'oscillateur est en état de résonance de vitesse.

c - Calculer alors la valeur de la masse m' du solide (S').

d - Calculer la valeur de la vitesse maximale V_{m0} .



Réponse :

1⁰) a - $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$. A.N: $\omega_0 = \sqrt{\frac{40}{0,1}}$ et $\omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$.

b - $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \xrightarrow{T_e = \frac{\Delta t}{10}} \omega_e = 2\pi \frac{10}{\Delta t}$. A.N: $\omega_e = 2\pi \frac{10}{4}$ et $\omega_e = 5\pi \text{ rad.s}^{-1}$ ($\omega_e = 15,71 \text{ rad.s}^{-1}$)

c - Le pendule élastique, de pulsation propre ω_0 , oscille à la pulsation ω_e imposée par l'excitateur. Il effectue donc des oscillations forcées.

2⁰) a - $Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2.\omega_e^2 + \left(\frac{1}{C} - L.\omega_e^2 \right)^2}} \xrightarrow{\text{analogie électrique-mécanique}} X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2.\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2}}$

b - Résonance d'élongation $\rightarrow X_m$ est maximale $\rightarrow y(\omega_e) = h^2.\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2$ est minimale

$$\rightarrow \frac{dy}{d\omega_e} = 0.$$

$$\rightarrow 2.h^2.\omega_e + 2(K - m.\omega_e^2).(-2m.\omega_e) = 0 \rightarrow h^2 - 2m(K - m.\omega_e^2) = 0 \rightarrow h^2 - 2mK + 2m.\omega_e^2 = 0$$

$$\rightarrow 2m.\omega_e^2 = 2mK - h^2 \rightarrow \omega_e^2 = \frac{2mK - h^2}{2m^2} \rightarrow \omega_e^2 = \frac{K}{m} - \frac{h^2}{2m^2}$$

Sachant que $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$, la résonance d'élongation a lieu pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$.

$$\mathbf{c} - \omega_e = \omega_r \rightarrow \omega_e^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \rightarrow \frac{h^2}{2m^2} = \omega_0^2 - \omega_e^2 \rightarrow h^2 = 2m^2(\omega_0^2 - \omega_e^2) \text{ et } h = \sqrt{2m^2(\omega_0^2 - \omega_e^2)}.$$

$$\text{A.N : } h = \sqrt{2.(0,1)^2((20)^2 - (5\pi)^2)} \text{ et } h = 1,75 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$\mathbf{3^0) a} - I_m = \frac{U_m}{Z} \text{ avec } Z = \sqrt{R^2 + \left(L.\omega_e - \frac{1}{C.\omega_e}\right)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{analogie électrique-mécanique}} V_m = \frac{F_m}{Z_m} \text{ avec } Z_m = \sqrt{h^2 + \left(m.\omega_e - \frac{K}{\omega_e}\right)^2}$$

$$\mathbf{b} - \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R}{Z} \xrightarrow{\text{analogie électrique-mécanique}} \cos(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{h}{Z_m}.$$

$$\mathbf{c} - \text{Résonance de vitesse} \rightarrow V_m \text{ est maximale} \rightarrow Z_m = \sqrt{h^2 + \left(m.\omega_e - \frac{K}{\omega_e}\right)^2} \text{ est minimale}$$

$$\rightarrow m.\omega_e - \frac{K}{\omega_e} = 0 \rightarrow m.\omega_e = \frac{K}{\omega_e} \rightarrow \omega_e^2 = \frac{K}{m} \xrightarrow{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}} \omega_e = \omega_0.$$

A la résonance de vitesse :

$$* Z_{m0} = h \rightarrow V_{m0} = \frac{F_m}{h}.$$

$$* Z_{m0} = h \rightarrow \cos(\varphi_e - \varphi_v) = 1 \rightarrow \varphi_e - \varphi_v = 0 \text{ et } \varphi_e = \varphi_v \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}} \varphi_e = \varphi_x + \frac{\pi}{2}.$$

4⁰) a - La force excitatrice $F(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à l'élongation $x(t)$ donc la courbe (a) correspond à $F(t)$ et la courbe (b) correspond à $x(t)$.

* Graphiquement : $F_m = 2,75 \text{ N}$.

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ \left(\frac{dF(t)}{dt}\right)_{t=0} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_m \cdot \sin \varphi_e = 0 \rightarrow \sin \varphi_e = 0 \rightarrow \varphi_e = \begin{vmatrix} 0 \\ \pi \end{vmatrix} \\ \omega_e \cdot F_m \cdot \cos \varphi_e > 0 \rightarrow \cos \varphi_e > 0 \end{cases} \rightarrow \varphi_e = 0.$$

* Graphiquement : $X_m = 0,1 \text{ m}$.

$$* \Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x$$

$$|\Delta\varphi| = 2\pi \cdot \frac{|\Delta t|}{T_e} \rightarrow |\Delta\varphi| = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \text{ et } |\Delta\varphi| = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x > 0 \rightarrow \varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

$$\mathbf{b} - \varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_e = \varphi_x + \frac{\pi}{2} \text{ donc l'oscillateur est en état de résonance de vitesse.}$$

$$\mathbf{c} - \text{Résonance de vitesse} \rightarrow \omega_e = \omega_0' \rightarrow \omega_e = \sqrt{\frac{K}{m'}} \rightarrow \omega_e^2 = \frac{K}{m'} \text{ et } m' = \frac{K}{\omega_e^2}.$$

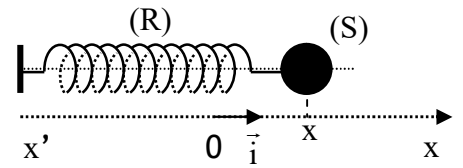
$$\text{A.N : } m' = \frac{40}{(5\pi)^2} \text{ et } m' = 162,1 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}.$$

$$\mathbf{d} - V_{m0} = \frac{F_m}{h}. \text{ A.N : } V_{m0} = \frac{2,75}{1,75} \text{ et } V_{m0} = 1,57 \text{ m.s}^{-1}.$$

Exercice 3 :

Un oscillateur mécanique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G , attaché à l'extrémité libre d'un ressort (R), à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K .

A l'équilibre, le centre d'inertie G de (S) coïncide avec l'origine O du repère $(O, \vec{i})$ d'axe (x', x) . On désigne par x l'abscisse de G à un instant de date t , dans le repère $(O, \vec{i})$



Le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f}$ portée par l'axe (x', x) telle que $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du centre d'inertie G .

Les oscillations de (S) sont entretenues à l'aide d'une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(\omega \cdot t + \varphi_e) \cdot \vec{i}$ exercée par un dispositif approprié non représenté. L'équation différentielle régissant les oscillations de (S) est alors

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F_m \sin(\omega \cdot t)$$

Elle admet une solution générale de la forme :

$$x(t) = X_m \sin(\omega \cdot t + \varphi_x)$$

1⁰) La figure ci-contre donne l'évolution au cours du temps de $x(t)$ et de $F(t)$.

a - Justifier qu'on peut affirmer que la courbe (b) correspond à $x(t)$.

b - Montrer que la valeur du déphasage entre la force excitatrice $F(t)$ et l'élongation $x(t)$ est :

$$\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

c - Déterminer les valeurs de X_m , F_m , ω , φ_e et φ_x .

2⁰) a - En utilisant la construction de Fresnel relative à l'équation différentielle, exprimer le coefficient de frottement h en fonction de F_m , $\sin(\Delta\varphi)$, ω et X_m . Calculer alors la valeur de h .

b - En utilisant l'expression de $\cos(\Delta\varphi)$, montrer que : $K - m \cdot \omega^2 = 12,5$.

3⁰) On fait varier la pulsation ω de la force excitatrice et on mesure à chaque fois l'amplitude X_m des oscillations puis on en déduit l'amplitude V_m de la vitesse instantanée du mouvement oscillatoire.

On trace alors les courbes (c) et (d) ci-dessous traduisant les variations de X_m et V_m en fonction de ω :

a - On donne :
$$X_m(\omega) = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \cdot \omega^2 + (K - m \cdot \omega^2)^2}}$$

Sachant que $v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t$, déduire l'expression de $V_m(\omega)$.

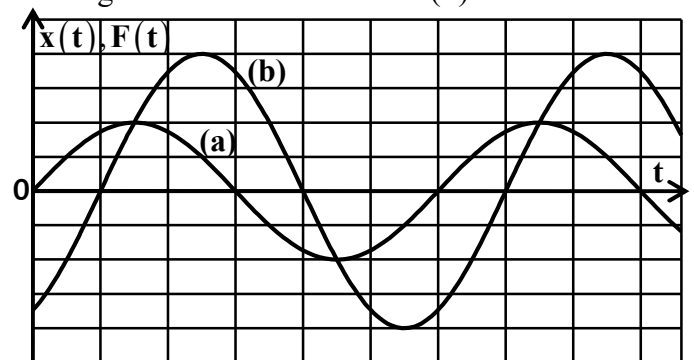
b - Préciser, parmi les deux courbes (c) et (d), celle qui correspond à $V_m(\omega)$.

c - Montrer que la résonance de vitesse aura lieu pour une pulsation $\omega_{rv} = \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ pulsation propre de l'oscillateur.

Déterminer graphiquement la valeur de ω_0 .

d - Calculer alors la valeur de m et celle de K .

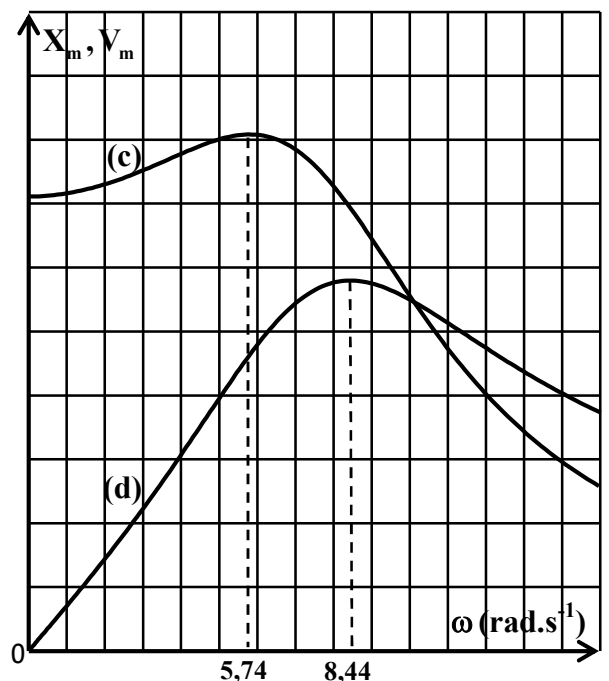
4⁰) a - Calculer la valeur de $X_m(0)$.



Echelle : Pour t : $\left(\frac{1}{6} \right) \text{ s.div}^{-1}$

Pour x : $(2 \cdot 10^{-2}) \text{ m.div}^{-1}$

Pour F : $(1) \text{ N.div}^{-1}$



b - La résonance d'amplitude a lieu pour une pulsation ω_{rx} telle que : $\omega_{rx}^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2}$.

Retrouver la valeur de h.

5⁰) Calculer la valeur de la puissance moyenne consommée par l'oscillateur à la résonance de vitesse.

Réponse :

1⁰) a - La force excitatrice $F(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à l'élongation $x(t)$.

La courbe (b) correspond donc à $x(t)$.

b - Soit $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x$

$$|\Delta\varphi| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T} \rightarrow |\Delta\varphi| = 2\pi \cdot \frac{1}{6} \text{ et } |\Delta\varphi| = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\Delta\varphi > 0} \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

$$\mathbf{b} - * X_m = 4.2.10^{-2} \rightarrow X_m = 8.10^{-2} \text{ m.}$$

$$* F_m = 2.1 \rightarrow F_m = 2 \text{ N.}$$

$$* \omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow[T=1s]{T=6 \cdot \frac{1}{6}} \omega = \frac{2\pi}{1} \text{ et } \omega = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$* \begin{cases} F(0) = 0 \rightarrow F_m \cdot \sin \varphi_e = 0 \xrightarrow{F_m \neq 0} \sin \varphi_e = 0 \rightarrow \varphi_e = 0 \text{ ou } \varphi_e = \pi \\ \left(\frac{dF(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 \rightarrow \omega \cdot F_m \cdot \cos \varphi_e > 0 \xrightarrow[\varphi_e > 0]{\omega > 0} \cos \varphi_e > 0 \text{ et } \varphi_e = 0. \end{cases}$$

$$* \Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\varphi_e = 0} \varphi_x = -\frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

$$\mathbf{2^0) a} - \sin(\Delta\varphi) = \frac{h \cdot \omega \cdot X_m}{F_m} \rightarrow h = \frac{F_m \cdot \sin(\Delta\varphi)}{\omega \cdot X_m}.$$

$$\text{A.N : } h = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2\pi \cdot 8.10^{-2}} \text{ et } h = 3,45 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$\mathbf{b} - \cos(\Delta\varphi) = \frac{(K - m \cdot \omega^2) \cdot X_m}{F_m} \rightarrow (K - m \cdot \omega^2) = \frac{F_m \cdot \cos(\Delta\varphi)}{X_m}.$$

$$\text{A.N : } K - m \cdot \omega^2 = \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{8.10^{-2}} \text{ et } K - m \cdot \omega^2 = 12,5.$$

$$\mathbf{3^0) a} - v = \frac{dx}{dt} \rightarrow V_m = \omega \cdot X_m \text{ donc : } V_m = \omega \cdot \frac{F_m}{\omega \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega} - m \cdot \omega\right)^2}} \text{ et } V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega} - m \cdot \omega\right)^2}}.$$

b - $V_m(0) = 0 \rightarrow$ la courbe (d) correspond à $V_m(\omega)$.

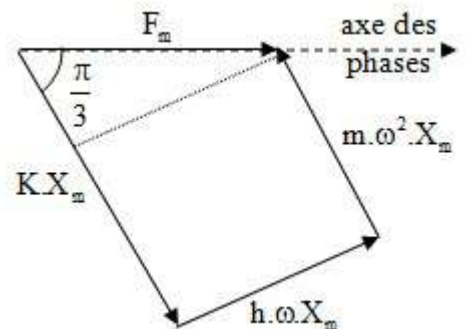
$$\mathbf{c} - \text{La résonance de vitesse} \rightarrow V_m \text{ max} \rightarrow \frac{K}{\omega_{rv}} - m \cdot \omega_{rv} = 0 \rightarrow \omega_{rv}^2 = \frac{K}{m} \xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{K}{m}} \omega_{rv} = \omega_0$$

graphiquement : $\omega_0 = 8,44 \text{ rad.s}^{-1}$.

$$\mathbf{d} - * \omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow K = m \cdot \omega_0^2 \text{ or } K - m \cdot \omega^2 = 12,5 \rightarrow m \cdot [\omega_0^2 - \omega^2] = 12,5 \text{ et } m = \frac{12,5}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

$$\text{A.N : } m = \frac{12,5}{(8,44)^2 - (2\pi)^2} \text{ et } m = 0,394 \text{ Kg.}$$

$$* K = m \cdot \omega_0^2 \xrightarrow{\text{A.N}} K = 0,394 \cdot (8,44)^2 \text{ et } K = 28,1 \text{ N.m}^{-1}.$$



$$4^0) \text{ a - } X_m(0) = \frac{F_m}{K} \xrightarrow{\text{A.N}} X_m(0) = \frac{2}{28,1} \text{ et } X_m(0) = 7,12 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$\text{b - } \omega_{rx}^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2} \rightarrow h = \sqrt{2.m^2(\omega_0^2 - \omega_{rx}^2)}.$$

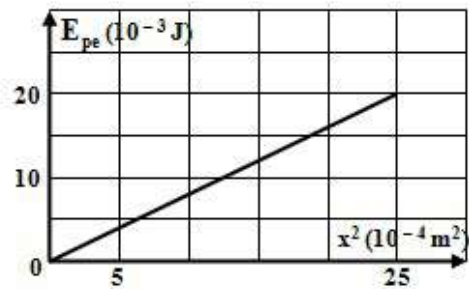
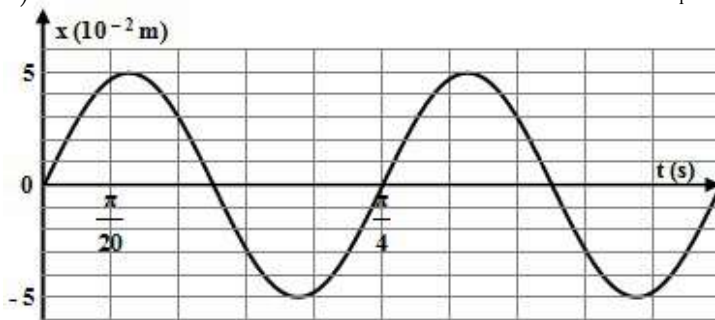
$$\text{A.N : } h = \sqrt{2.(0,394)^2[(8,44)^2 - (5,74)^2]} \text{ et } h = 3,45 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$5^0) \text{ A la résonance de vitesse : } P_0 = \frac{1}{2}.h.V_{m0}^2 \xrightarrow{V_{m0} = \frac{F_m}{h}} P_0 = \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{h}. \text{ A.N : } P_0 = \frac{1}{2} \frac{2^2}{3,45} \text{ et } P_0 = 0,58 \text{ W.}$$

Exercice 4 :

Un oscillateur mécanique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G , attaché à l'extrémité libre d'un ressort horizontal (R) de masse négligeable, à spires non jointives et de constante de raideur K . Le mouvement de l'oscillateur est étudié par rapport à un repère $(0, \vec{i})$ dont l'origine 0 coïncide avec la position d'équilibre du centre d'inertie G de (S) sur un axe $x'x$ parallèle à l'axe du ressort.

1⁰) On donne ci-dessous la courbe $x(t)$ de l'évolution de l'élongation x en fonction du temps et la courbe $E_{pe}(x^2)$ des variations de l'énergie potentielle élastique E_{pe} de l'oscillateur en fonction de x^2 .



a - Calculer la valeur de la constante de raideur K du ressort (R).

b - Déterminer graphiquement la valeur de la période propre T_0 des oscillations

En déduire la valeur de la pulsation propre ω_0 du pendule élastique..

c - Calculer la valeur de la masse m du solide (S).

d - Trouver l'équation horaire $x(t)$ de l'élongation du mouvement du solide (S).

2⁰) L'oscillateur est maintenant soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du centre d'inertie G de (S) et h est une constante positive.

Les oscillations de (S) sont entretenues grâce à une force excitatrice $F(t) = F_m \sin(\omega_e t + \varphi_e)$ d'amplitude F_m

constante et de fréquence $N_e = \frac{\omega_e}{2\pi}$ variable.

Le solide (S) effectue alors des oscillations forcées d'élongation $x(t) = X_m \sin(\omega_e t + \varphi_x)$.

L'équation différentielle gérant le mouvement de l'oscillateur est : $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + K.x = F(t)$

On donne ci-dessous la construction de Fresnel associée au système oscillatoire :

a - Déterminer les valeurs de X_m , ω_e et h .

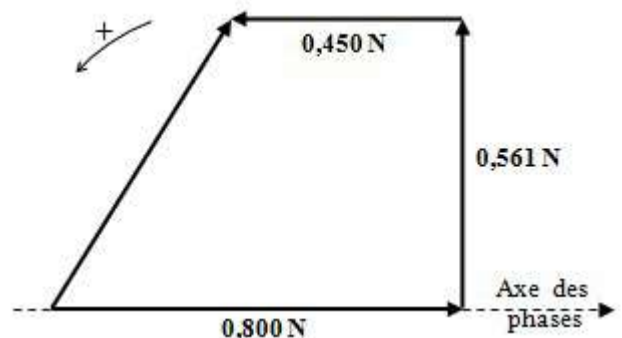
b - Calculer les valeurs de F_m et φ_e .

c - La résonance d'amplitude a lieu lorsque $\omega_e = \omega_r$

telle que $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2}}$.

Calculer la valeur de ω_r . Conclure.

d - Déterminer la valeur de la puissance moyenne P reçue par le pendule élastique.



3⁰) a - Montrer que pour obtenir la résonance de vitesse, on doit fixer au solide (S) une surcharge (S') de masse m' que l'on déterminera.

b - Calculer dans ce cas la valeur maximale V_{0m} de la vitesse.

Réponse :

1⁰) a - $E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 \rightarrow E_{pe} = f(x^2)$ est une droite linéaire de pente $A = \frac{K}{2}$.

Graphiquement : $A = \frac{20 \cdot 10^{-3} - 0}{25 \cdot 10^{-4} - 0} = 8 \xrightarrow{K=2 \cdot A} K = 2.8 \text{ et } K = 16 \text{ N.m}^{-1}$.

b - Graphiquement : $T_0 = \frac{\pi}{4} \text{ s } (T_0 = 78,54 \cdot 10^{-2} \text{ s})$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \omega_0 = 2\pi \frac{4}{\pi} \text{ et } \omega_0 = 8 \text{ rad.s}^{-1}$.

c - $\omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2}$. A.N : $m = \frac{16}{8^2} \text{ et } m = 0,25 \text{ Kg}$.

d - $x(t) = X_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_x)$

graphiquement : $X_m = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

$$\begin{cases} x(0) = 0 \rightarrow X_m \sin \varphi_x = 0 \xrightarrow{X_m \neq 0} \sin \varphi_x = 0 \rightarrow \varphi_x = 0 \text{ ou } \varphi_x = \pi \text{ rad} \\ \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} > 0 \rightarrow \omega_0 \cdot X_m \cos \varphi_x > 0 \xrightarrow{\frac{X_m > 0}{\omega_0 > 0}} \cos \varphi_x > 0 \text{ donc } \varphi_x = 0 \end{cases}$$

On écrit alors : $x(t) = 5 \cdot 10^{-2} \sin(8 \cdot t) \text{ (m)}$

2⁰) a - D'après la construction de Fresnel :

* $K \cdot X_m = 0,800 \text{ N} \rightarrow X_m = \frac{0,800}{K} \text{ donc } X_m = \frac{0,800}{16} \text{ et } X_m = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

* $m \cdot \omega_e^2 \cdot X_m = 0,450 \text{ N} \rightarrow \omega_e = \sqrt{\frac{0,450}{m \cdot X_m}} \text{ donc } \omega_e = \sqrt{\frac{0,450}{0,25 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}} \text{ et } \omega_e = 6 \text{ rad.s}^{-1}$.

* $h \cdot \omega_e \cdot X_m = 0,561 \text{ N} \rightarrow h = \frac{0,561}{\omega_e \cdot X_m} \text{ donc } h = \frac{0,561}{6 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \text{ et } h = 1,87 \text{ Kg.s}^{-1}$.

b - * le théorème de Pythagore :

$F_m^2 = (0,561)^2 + (0,800 - 0,450)^2 \rightarrow F_m = \sqrt{(0,561)^2 + (0,350)^2} \text{ et } F_m = 0,661 \text{ N}$.

* $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x \xrightarrow{\varphi_x=0} \Delta\varphi = \varphi_e$

$\text{tg} \Delta\varphi = \frac{0,561}{(0,800 - 0,450)} = \frac{0,561}{0,350} = 1,6 \quad \Delta\varphi = 1,01 \text{ rad} \xrightarrow{\Delta\varphi = \varphi_e} \varphi_e = 1,01 \text{ rad}$.

c - $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2 \cdot m^2}} \rightarrow \omega_r = \sqrt{8^2 - \frac{(1,87)^2}{2 \cdot (0,25)^2}} \text{ et } \omega_r = 6 \text{ rad.s}^{-1}$.

$\omega = \omega_r \rightarrow$ l'oscillateur est à l'état de résonance d'élongation.

d - $P = \frac{1}{2} \cdot h \cdot V_m^2 \xrightarrow{V_m = \omega \cdot X_m} P = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \omega^2 \cdot X_m^2$. A.N : $P = \frac{1}{2} \cdot 1,87 \cdot 6^2 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \text{ et } P = 841,5 \cdot 10^{-4} \text{ W}$.

Remarque : $v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\varphi_x=0} \varphi_v = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

$P = \frac{1}{2} \cdot F_m \cdot V_m \cdot \cos(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{1}{2} \cdot F_m \cdot \omega_e \cdot X_m \cdot \cos(\varphi_e - \varphi_v)$.

A.N : $P = \frac{1}{2} \cdot 0,661 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot \cos\left(1,01 - \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } P = 839,6 \cdot 10^{-4} \text{ W}$.

3⁰) a - Résonance de vitesse $\rightarrow \omega = \omega_0 = 6 \text{ rad.s}^{-1}$.

$\omega_0^2 = \frac{K}{(m + m')} \rightarrow m' = \frac{K}{\omega_0^2} - m$. A.N : $m' = \frac{16}{6^2} - 0,25 \text{ et } m' = 0,194 \text{ Kg}$.

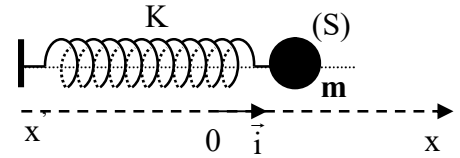
b - A la résonance de vitesse : $V_{0m} = \frac{F_m}{h}$.

A.N : $V_{0m} = \frac{0,661}{1,87}$ et $V_{0m} = 35,35.10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$.

Exercice 5 :

On dispose d'un pendule élastique horizontal constitué par un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K, et d'un solide (S) de masse m.

Le solide (S), pouvant glisser sur un plan horizontal parallèle à l'axe du ressort, est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide.



Le mouvement de l'oscillateur est étudié dans le repère $(0, \vec{i})$ dont l'origine 0 coïncide avec la position d'équilibre du centre d'inertie G de (S) sur un axe $x'x$ parallèle à l'axe du ressort.

On excite l'oscillateur par une force horizontale sinusoïdale $F(t) = F_m \sin(\omega_e.t)$ de pulsation ω_e .

Le solide (S) effectue alors un mouvement rectiligne sinusoïdal d'élongation $x(t) = X_m \sin(\omega_e.t + \varphi_x)$.

1⁰) Soit $T = -K.x$ la tension du ressort et $v = \frac{dx}{dt}$ la vitesse du solide.

a - En adoptant les expressions $T(t) = T_m \sin(\omega_e.t + \varphi_T)$ et $V(t) = V_m \sin(\omega_e.t + \varphi_v)$, montrer que :

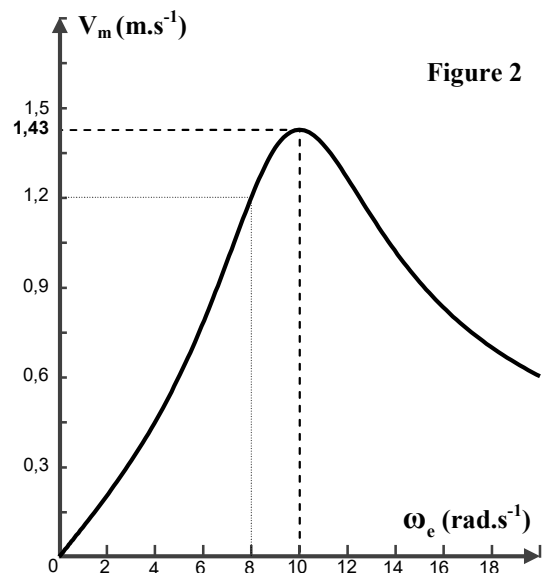
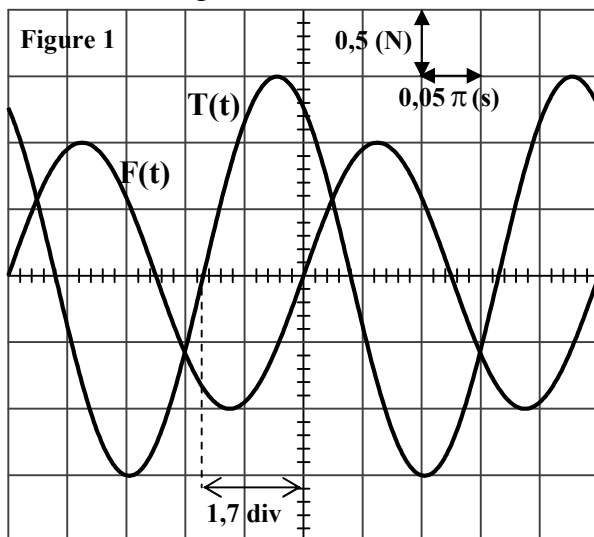
$$T_m = K.X_m, \quad \varphi_T = \varphi_x + \pi, \quad V_m = \omega_e.X_m \quad \text{et} \quad \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}.$$

b - On donne : $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2.\omega_e^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2}}$ où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur, exprimer V_m en

fonction de F_m , h, ω_e , m et ω_0 .

c - Soit V_{m0} la valeur de V_m à la résonance de vitesse, montrer que : $V_{m0} = \frac{F_m}{h}$.

2⁰) On donne les figures 1 et 2 ci-dessous :



a - En exploitant la figure 1, déterminer les valeurs de ω_e , F_m et T_m .

b - En exploitant ensuite la figure 2, déterminer alors les valeurs de ω_0 , X_m et h.

c - Calculer les valeurs de K et de m.

d - Montrer, d'après la figure 1, que $\varphi_x = -1 \text{ rad}$.

3⁰) Calculer la valeur de la puissance moyenne P consommée par l'oscillateur.

4⁰) Pour différentes valeurs du coefficient de frottement h, on fait varier la pulsation excitatrice ω_e et on mesure chaque fois la valeur de l'amplitude X_m .

On obtient la figure ci-contre :

a - Montrer que la résonance d'amplitude a lieu

pour $\omega_e = \omega_r$ telle que $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2}$.

b - Quelle est la valeur h_a de h qui correspond à la courbe (a) ? Justifier la réponse.

c - Calculer la valeur h_b de h qui correspond à la courbe (b).

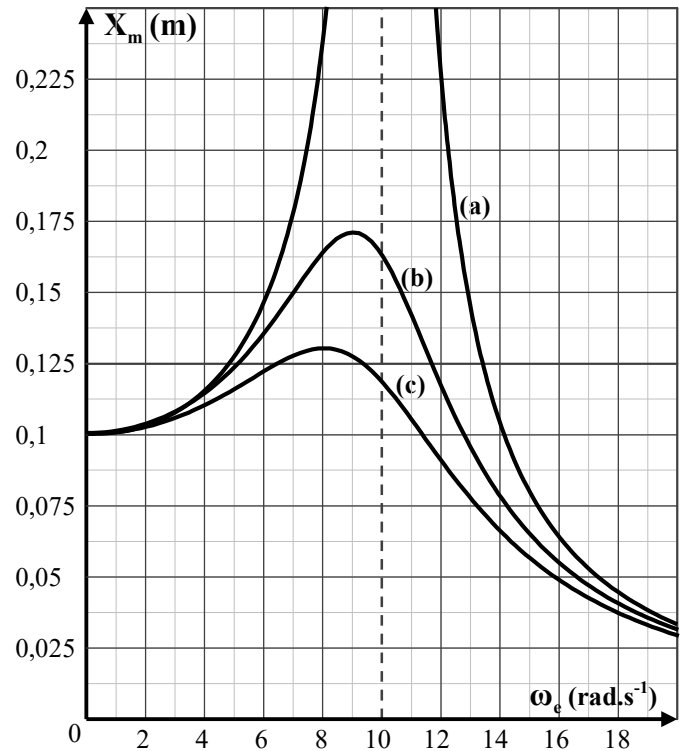
d - La valeur h_c de h qui correspond à la courbe (c) est-elle plus grande ou plus petite que h_b ? Justifier.

e - Pour quelle valeur limite h_m de h la résonance d'amplitude n'a plus lieu ?

5⁰) a - Soit X_{mr} la valeur de X_m à la résonance

d'amplitude. Montrer que : $X_{mr} = \frac{F_m}{h \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4.m^2}}}$.

b - Soit X_{m0} la valeur de X_m à la résonance de vitesse. Montrer que pour $h \neq 0$, $X_{m0} < X_{mr}$.



Réponse :

1⁰) a - * $T = -K.x = -K.X_m \sin(\omega_e.t + \varphi_x) = K.X_m \sin(\omega_e.t + \varphi_x + \pi)$

On écrit : $T = T_m \sin(\omega_e.t + \varphi_T) \xrightarrow{\text{par identification}} \begin{cases} T_m = K.X_m \\ \varphi_T = \varphi_x + \pi \end{cases}$

* $v = \frac{dx}{dt} = \omega_e.X_m \cos(\omega_e.t + \varphi_x) = \omega_e.X_m \sin(\omega_e.t + \varphi_x + \frac{\pi}{2})$

On écrit : $v = V_m \sin(\omega_e.t + \varphi_v) \xrightarrow{\text{par identification}} \begin{cases} V_m = \omega_e.X_m \\ \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

b - $V_m = \omega_e.X_m = \omega_e \cdot \frac{F_m}{\sqrt{h^2.\omega_e^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2}} = \omega_e \cdot \frac{F_m}{\omega_e \cdot \sqrt{h^2 + m^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_e} - \omega_e\right)^2}}$ et $V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + m^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_e} - \omega_e\right)^2}}$

c - Résonance de vitesse $\rightarrow V_m$ est maximale $\rightarrow \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_e} - \omega_e\right) = 0 \rightarrow \frac{\omega_0^2}{\omega_e} = \omega_e \rightarrow \omega_0^2 = \omega_e^2$ et $\omega_0 = \omega_e$

A la résonance de vitesse : $V_{m0} = \frac{F_m}{\sqrt{h^2}}$ et $V_{m0} = \frac{F_m}{h}$.

2⁰) a - * graphiquement : $T_e = 5.0,05\pi \rightarrow T_e = 0,25\pi$ s or $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \rightarrow \omega_e = \frac{2\pi}{0,25\pi}$ et $\omega_e = 8 \text{ rad.s}^{-1}$

* graphiquement : $F_m = 2.0,5$ et $F_m = 1$ N

* graphiquement : $T_m = 3.0,5$ et $T_m = 1,5$ N

b - * A la résonance de vitesse on a : $\omega_e = \omega_0 \rightarrow$ graphiquement : $\omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.

* $V_m = \omega_e.X_m \rightarrow X_m = \frac{V_m}{\omega_e}$

graphiquement : pour $\omega_e = 8 \text{ rad.s}^{-1}$, $V_m = 1,2 \text{ m.s}^{-1} \rightarrow X_m = \frac{1,2}{8}$ et $X_m = 0,15 \text{ m}$.

$$* V_{m0} = \frac{F_m}{h} \rightarrow h = \frac{F_m}{V_{m0}}$$

$$\text{graphiquement : } V_{m0} = 1,43 \text{ m.s}^{-1} \rightarrow h = \frac{1}{1,43} \text{ et } h = 0,7 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$c - * T_m = K.X_m \rightarrow K = \frac{T_m}{X_m} \dots$$

$$\text{A.N : } K = \frac{1,5}{0,15} \text{ et } K = 10 \text{ N.m}^{-1}$$

$$* \omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2} \dots$$

$$\text{A.N : } m = \frac{10}{10^2} \text{ et } m = 0,1 \text{ Kg}$$

$$d - \text{Soit } \Delta\varphi = (\varphi_e - \varphi_T)$$

$$|\Delta\varphi| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T_e} \rightarrow |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{1,7}{5} \text{ et } |\Delta\varphi| = 0,68\pi \text{ or graphiquement } \Delta\varphi < 0 \rightarrow \Delta\varphi = -0,68\pi.$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_e - \varphi_T) = -0,68\pi \xrightarrow[\varphi_T = \varphi_x + \pi]{\varphi_e = 0} -\varphi_x - \pi = -0,68\pi \rightarrow \varphi_x = 0,68\pi - \pi \text{ et } \varphi_x = -1 \text{ rad.}$$

$$\text{Remarque : } \text{tg}(\varphi_e - \varphi_x) = \frac{h.\omega_e}{K - m.\omega_e^2} = \frac{0,7.8}{10 - 0,1.64} = 1,55 \rightarrow \varphi_e - \varphi_x = 1 \text{ rad} \xrightarrow{\varphi_e = 0} \varphi_x = -1 \text{ rad.}$$

$$3^0) P = \frac{1}{2}.h.V_m^2. \text{ A.N : } P = \frac{1}{2}.0,7.(1,2)^2 \text{ et } P = 0,5 \text{ W.}$$

$$4^0) a - \text{Résonance d'amplitude} \rightarrow X_m \text{ est maximale} \rightarrow y(\omega_e) = h^2.\omega_e^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 \text{ minimale.}$$

$$\frac{dy(\omega_e)}{d\omega_e} = 0 \rightarrow 2.\omega_r.h^2 + 2m^2(\omega_0^2 - \omega_r^2).(-2\omega_r) = 0 \rightarrow h^2 - 2m^2(\omega_0^2 - \omega_r^2) = 0$$

$$\rightarrow \omega_0^2 - \omega_r^2 = \frac{h^2}{2m^2} \text{ et } \omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}.$$

$$b - \text{Pour la courbe (a), } \omega_r = \omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1} \rightarrow h_a = 0.$$

$$c - \text{Pour la courbe (b), } \omega_r = 9 \text{ rad.s}^{-1}. \omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \rightarrow h^2 = 2m^2.(\omega_0^2 - \omega_r^2) \text{ et } h = \sqrt{2m^2.(\omega_0^2 - \omega_r^2)}$$

$$\text{A.N : } h_b = \sqrt{2(0,1)^2.((10)^2 - (9)^2)} \text{ et } h_b = 0,62 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$d - \text{Pour la courbe (c), } \omega_r = 8 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\omega_r(c) < \omega_r(b) \xrightarrow{h^2 = 2m^2.(\omega_0^2 - \omega_r^2)} h_c > h_b.$$

$$e - \omega_r^2 \geq 0 \rightarrow \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \geq 0 \rightarrow \frac{h^2}{2m^2} \leq \omega_0^2 \rightarrow h^2 \leq 2m^2.\frac{K}{m} \text{ et } h \leq \sqrt{2.m.K} \text{ donc } h_m = \sqrt{2.m.K}$$

$$\text{A.N : } h_m = \sqrt{2.0,1.10} \text{ et } h_m = \sqrt{2} \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$5^0) a - X_{mr} = \frac{F_m}{\sqrt{h^2.\omega_r^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2}} = \frac{F_m}{\sqrt{h^2.(\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}) + m^2[\omega_0^2 - (\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2})]^2}}$$

$$\rightarrow X_{mr} = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_0^2 - \frac{h^4}{2m^2} + m^2.\frac{h^4}{4m^4}}} = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_0^2 - \frac{h^4}{4m^4}}} \text{ et } X_{mr} = \frac{F_m}{h\sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4m^4}}}.$$

$$b - \text{A la résonance de vitesse, } X_{m0} = \frac{V_{m0}}{\omega_0} \xrightarrow{V_{m0} = \frac{F_m}{h}} X_{m0} = \frac{F_m}{h.\omega_0}.$$

$$\text{Pour } h \neq 0, \omega_0 > \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4.m^2}} \rightarrow X_{mr} > X_{m0}.$$

Exercice 6 :

Un oscillateur mécanique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G , attaché à l'extrémité libre d'un ressort horizontal (R) de masse négligeable, à spires non jointives et de constante de raideur $K = 50 \text{ N.m}^{-1}$. L'oscillateur ainsi constitué est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du centre d'inertie G de (S) et h est une constante positive.

Le mouvement de l'oscillateur est étudié par rapport à un repère $(0, \vec{i})$ dont l'origine 0 coïncide avec la position d'équilibre du centre d'inertie G de (S) sur un axe $x'x$ parallèle à l'axe du ressort.

Les oscillations de (S) sont entretenues grâce à une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m \sin(2\pi Nt + \varphi_e) \cdot \vec{i}$ d'amplitude F_m constante et de fréquence N variable.

Le solide (S) effectue alors des oscillations forcées d'élongation $x(t) = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x)$.

L'équation différentielle gérant le mouvement de l'oscillateur est : $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$

1⁰) Pour une valeur N_1 de la fréquence de l'excitateur, on enregistre les courbes d'évolution au cours du temps de la force excitatrice $F(t)$ et de l'élongation $x(t)$. On obtient la figure ci-dessous :

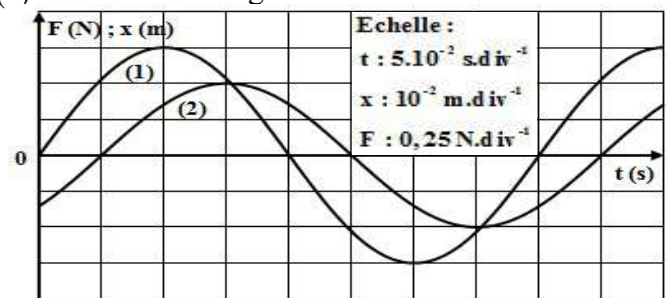
a - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (1) et (2) à la grandeur qu'elle représente.

b - Déterminer la valeur de la fréquence N_1 .

En déduire celle de la pulsation ω_1 .

c - Montrer que le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$.

d - Quelles sont les valeurs de F_m , X_m , φ_e et φ_x ?



2⁰) a - En utilisant la construction de Fresnel, montrer que : $h = \frac{F_m}{\omega_1 X_m \sqrt{2}}$ et $m = \frac{K - h \omega_1}{\omega_1^2}$.

b - Calculer alors les valeurs de h et m .

c - Déduire la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

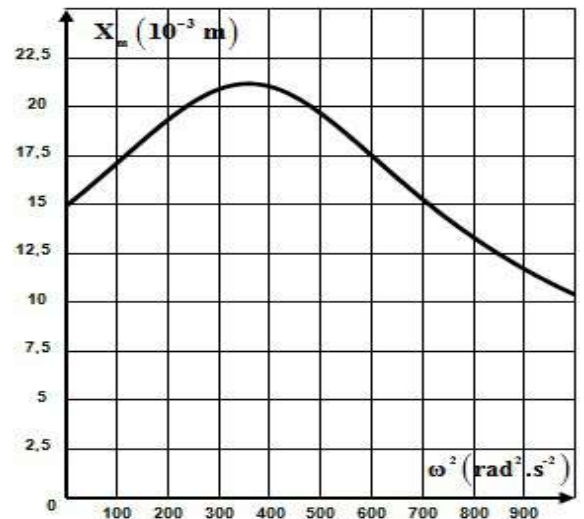
3⁰) L'amplitude des oscillations est : $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (K - m \omega^2)^2}}$

On donne ci-contre la courbe $X_m(\omega^2)$ de X_m en fonction de ω^2 :

a - Comment est la pulsation de résonance d'amplitude ω_r par rapport à la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur ?

b - Quelle est la valeur graphique de $X_m(0)$? Retrouver alors la valeur de la constante de raideur K du ressort.

c - Sachant que : $\omega_0^2 - \omega_r^2 = \frac{h^2}{2m^2}$. Calculer la valeur de ω_r .



4⁰) Pour une valeur N_2 de la fréquence de l'excitateur, on enregistre les courbes d'évolution au cours du temps de la force excitatrice $F(t)$ et de la force de frottement $f(t)$. On obtient la figure ci-dessous :

a - Déduire, d'après l'équation différentielle du mouvement, que : $m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = F(t) + f(t)$.

Que devient cette expression à la fréquence N_2 ?

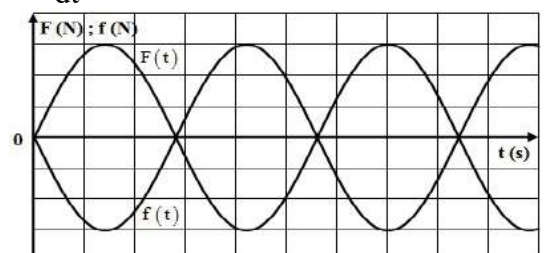
b - Soit $v(t) = V_{m0} \sin(2\pi N_2 t + \varphi_v)$ la vitesse des oscillations.

Montrer que $V_{m0} = \frac{F_m}{h}$ et $\varphi_v = \varphi_e$.

Dans quel état se trouve l'oscillateur ?

c - Que représente la fréquence N_2 ? Déterminer sa valeur.

d - Calculer la valeur de la puissance moyenne P_0 absorbée par l'oscillateur.



Réponse :

1⁰) a - La force excitatrice $F(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à l'élongation $x(t)$
On en déduit que la courbe (1) représente $F(t)$ et la courbe (2) représente $x(t)$.

b - Graphiquement : $T_1 = 8.5 \cdot 10^{-2} = 0,4 \text{ s} \xrightarrow{N_1 = \frac{1}{T_1}} N_1 = \frac{1}{0,4} \text{ et } N_1 = 2,5 \text{ Hz}.$

On a : $\omega_1 = 2\pi N_1 \rightarrow \omega_1 = 2\pi \cdot 2,5 \text{ et } \omega_1 = 5\pi \text{ rad.s}^{-1} \left(\omega_1 = 15,7 \text{ rad.s}^{-1} \right).$

c - Soit $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x$. On a : $|\Delta\varphi| = 2\pi \cdot \frac{|\Delta t|}{T_1} \rightarrow |\Delta\varphi| = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \text{ et } |\Delta\varphi| = \frac{\pi}{4} \text{ or } \Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x > 0 \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}.$

d - Graphiquement : * $F_m = 3,0,25 \text{ et } F_m = 0,75 \text{ N}.$

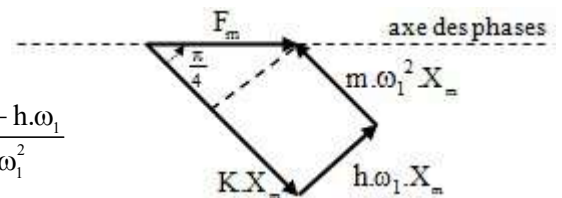
* $X_m = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ et } X_m = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$

* $F(t) = F_m \sin(\omega_1 t + \varphi_e)$ avec $\begin{cases} F(0) = 0 \rightarrow F_m \sin(\varphi_e) = 0 \rightarrow \sin(\varphi_e) = 0 \text{ et } \varphi_e = 0 \text{ ou } \pi \\ \left(\frac{dF(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 \rightarrow \omega F_m \cos(\varphi_e) > 0 \rightarrow \cos(\varphi_e) > 0 \text{ et } \varphi_e = 0. \end{cases}$

* $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \xrightarrow{\varphi_e=0} \varphi_x = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}.$

2⁰) a - * $\sin(\Delta\varphi) = \frac{h \cdot \omega_1 \cdot X_m}{F_m} \xrightarrow[\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}]{\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}} h = \frac{F_m}{\omega_1 \cdot X_m \cdot \sqrt{2}}.$

* $\text{tg}(\Delta\varphi) = \frac{h \cdot \omega_1 \cdot X_m}{(K - m \cdot \omega_1^2) \cdot X_m} \xrightarrow[\text{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1]{\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}} h \cdot \omega_1 = K - m \cdot \omega_1^2 \text{ et } m = \frac{K - h \cdot \omega_1}{\omega_1^2}$



b - * $h = \frac{F_m}{\omega_1 \cdot X_m \cdot \sqrt{2}} \rightarrow h = \frac{0,75}{5\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{2}} \text{ et } h = 1,69 \text{ Kg.s}^{-1}.$

* $m = \frac{K - h \cdot \omega_1}{\omega_1^2} \rightarrow m = \frac{50 - 1,69 \cdot 5\pi}{(5\pi)^2} \text{ et } m = 95,1 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}.$

c - La pulsation propre de l'oscillateur est $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{50}{95,1 \cdot 10^{-3}}} \text{ et } \omega_0 = 22,93 \text{ rad.s}^{-1}.$

3⁰) a - Graphiquement : $\omega_r < \omega_0$

b - Graphiquement : $X_m(0) = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$

On a : $X_m(0) = \frac{F_m}{K} \rightarrow K = \frac{F_m}{X_m(0)} . \text{ A.N : } K = \frac{0,75}{15 \cdot 10^{-3}} \text{ et } K = 50 \text{ N.m}^{-1}.$

c - $\omega_0^2 - \omega_r^2 = \frac{h^2}{2 \cdot m^2} \rightarrow \omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2 \cdot m^2} \text{ et } \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2 \cdot m^2}}$

A.N : $\omega_r = \sqrt{(22,93)^2 - \frac{(1,69)^2}{2 \cdot (95,1 \cdot 10^{-3})^2}} \text{ et } \omega_r = 19,18 \text{ rad.s}^{-1}.$

4⁰) a - $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F(t) \rightarrow m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K \cdot x = F(t) - h \cdot \frac{dx}{dt} \xrightarrow[f = -h \cdot \frac{dx}{dt}]{f = -h \cdot v} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K \cdot x = F(t) + f(t).$

Pour $N = N_2$, $F(t)$ et $f(t)$ sont directement opposées $\rightarrow F(t) = -f(t) \text{ et } m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + K \cdot x = 0$

b - $F(t) = -f(t) \xrightarrow{f(t) = -h \cdot v(t)} F_m \sin(2\pi N_2 t + \varphi_e) = h \cdot V_{m0} \sin(2\pi N_2 t + \varphi_v)$

On en déduit que $\begin{cases} V_{m0} = \frac{F_m}{h} \\ \varphi_e = \varphi_v \end{cases}$

$\varphi_e = \varphi_v \rightarrow F(t)$ et $v(t)$ sont en phase $\rightarrow$ L'oscillateur est à la résonance de vitesse.

c - A la résonance de vitesse : $N_2 = N_0$ fréquence propre de l'oscillateur.

$$N_2 = N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow N_2 = \frac{22,93}{2\pi} \text{ et } N_2 = 3,65 \text{ Hz.}$$

$$\mathbf{d} - P_0 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (v_{m0})^2 \xrightarrow{v_{m0} = \frac{F_m}{h}} P_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(F_m)^2}{h} \cdot A.N : P_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(0,75)^2}{1,69} \text{ et } P_0 = 16,64 \cdot 10^{-2} \text{ W.}$$

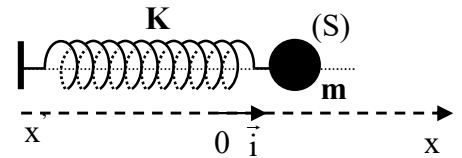
Exercice 7 :

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m , attaché à l'extrémité libre d'un ressort horizontal, de masse négligeable, à spires non jointives et de constante de raideur K .

L'oscillateur ainsi constitué est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du centre d'inertie G de (S) et h est une constante positive.

Le mouvement de l'oscillateur est étudié dans le repère $(0, \vec{i})$.

L'origine 0 coïncide avec la position d'équilibre du centre d'inertie G de (S) sur un axe $x'x$ parallèle à l'axe du ressort.



On excite l'oscillateur par une force horizontale sinusoïdale $\vec{F}(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_e) \cdot \vec{i}$ de pulsation ω .

Le solide (S) prend alors un mouvement rectiligne sinusoïdal d'élongation $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$.

1⁰) a - Montrer que l'équation différentielle gérant le mouvement de l'oscillateur est :

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F$$

b - Pourquoi dit-on que les oscillations sont forcées ?

2⁰) Le graphe ci-dessous représente les variations de la force excitatrice F et celles de l'élongation du mouvement x au cours du temps :

a - Identifier, en le justifiant, les courbes (a) et (b).

Quelle est alors la phase à l'origine φ_e de la force excitatrice F ?

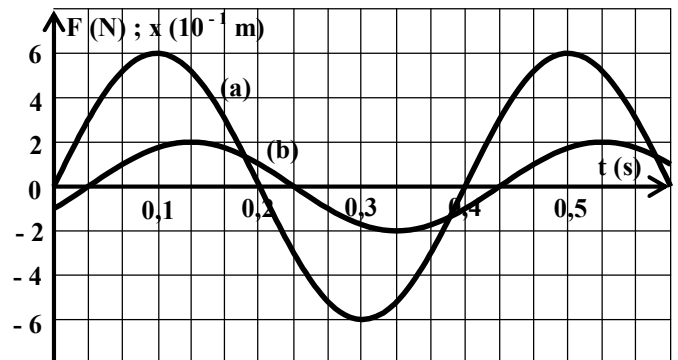
b - Déterminer la période T des oscillations.

En déduire la valeur de la pulsation excitatrice ω .

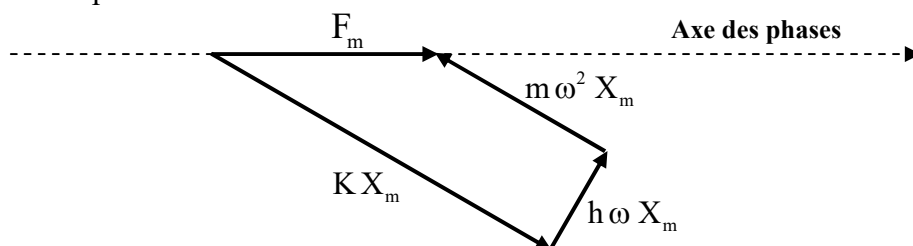
c - Quelles sont les valeurs de F_m et de X_m ?

d - Montrer que le déphasage $\Delta\varphi = (\varphi_e - \varphi_x) = \frac{\pi}{6}$.

En déduire la phase initiale φ_x de l'élongation x .



3⁰) On donne ci-dessous la représentation de Fresnel associée aux oscillations étudiées :



a - Etablir les expressions de X_m et de $\text{tg} \Delta\varphi$ en fonction de F_m , h , ω , K et m .

b - Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur. Pourquoi peut-on dire que $\omega < \omega_0$?

c - Sachant que $K = 2m\omega^2$, montrer que $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

d - Exprimer $\cos \Delta\varphi$ en fonction K , X_m et F_m . Déterminer alors la valeur de K . En déduire celle de m .

4⁰) a - Calculer la valeur de ω_0 .

b - En exploitant l'expression de $\text{tg} \Delta\varphi$, déterminer la valeur de h .

5⁰) On fait varier ω et on note chaque fois X_m .

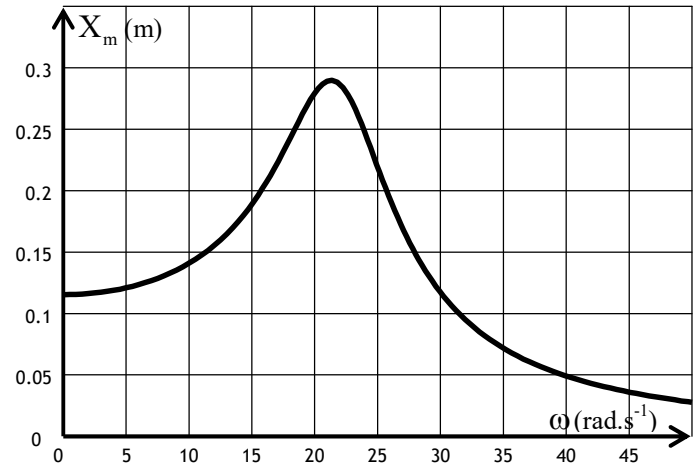
On trace alors la courbe $X_m = f(\omega)$ ci-contre :

a - Montrer que la résonance d'amplitude a lieu pour une pulsation ω_r telle que : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$.

Calculer la valeur de ω_r .

b - Calculer les valeurs des amplitudes X_{m0} et X_{mr} respectivement pour $\omega = 0$ et $\omega = \omega_r$.

c - Montrer que la résonance d'amplitude n'est possible que si la valeur de h reste inférieure à une valeur limite h_m qu'on déterminera.



Réponse :

1⁰) a - Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au solide (S) du pendule élastique : $\vec{T} + \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

projetons sur l'axe ($x'x$) : $\vec{T}_x + \vec{P}_x + \vec{R}_{Nx} + \vec{f}_x + \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x$

$$\rightarrow T \vec{i} + 0 + 0 + f \vec{i} + F \vec{i} = m \cdot a \vec{i}$$

$$\rightarrow T + f + F = m \cdot a \rightarrow -K \cdot x - h \cdot v + F = m \cdot a \quad \text{et} \quad m \cdot a + h \cdot v + K \cdot x = F$$

$$\text{or : } v = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ il vient alors que : } m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F$$

b - Le pendule oscille avec la pulsation imposée par l'excitateur. On parle alors d'oscillations forcées.

2⁰) a - $F(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $x(t)$ $\rightarrow (a) \leftrightarrow F(t)$ et $(b) \leftrightarrow x(t)$.

$$F(0) = 0 \rightarrow F_m \sin \varphi_e = 0 \rightarrow \sin \varphi_e = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_e = 0 \text{ ou } \pi.$$

$$\left(\frac{dF(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 \rightarrow F_m \omega \cos \varphi_e > 0 \rightarrow \cos \varphi_e > 0 \quad \text{et} \quad \varphi_e = 0.$$

$$\text{b - Graphiquement : } T = 0,4 \text{ s. or } \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0,4} \quad \text{et} \quad \omega = 5\pi \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\text{c - Graphiquement : } F_m = 6 \text{ N} \quad \text{et} \quad X_m = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m.}$$

$$\text{d - } |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T} = 2\pi \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ rad. Or } \Delta\varphi = (\varphi_e - \varphi_x) > 0 \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$\varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\varphi_e=0} \varphi_x = -\frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

3⁰) a - * D'après le théorème de Pythagore :

$$F_m^2 = (h \cdot \omega_e \cdot X_m)^2 + \left[(K \cdot X_m) - (m \cdot \omega_e^2 \cdot X_m) \right]^2 = h^2 \cdot \omega_e^2 \cdot X_m^2 + X_m^2 \cdot (K - m \cdot \omega_e^2)^2 \quad \text{et}$$

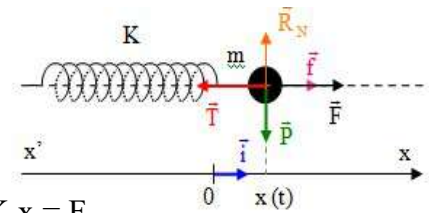
$$F_m^2 = X_m^2 \cdot \left[h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m \cdot \omega_e^2)^2 \right]$$

$$\text{On en déduit que : } X_m^2 = \frac{F_m^2}{h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m \cdot \omega_e^2)^2} \quad \text{et enfin : } X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m \cdot \omega_e^2)^2}}$$

* Soit $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_r$ le déphasage la force excitatrice et l'élongation du pendule :

$$\text{On a : } \text{tg } \Delta\varphi = \frac{h \cdot \omega_e \cdot X_m}{(K - m \cdot \omega_e^2) \cdot X_m} \quad \text{et enfin : } \text{tg } \Delta\varphi = \text{tg } (\varphi_e - \varphi_r) = \frac{h \cdot \omega_e}{K - m \cdot \omega_e^2}$$

$$\text{b - } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{pulsation propre de l'oscillateur.}$$



D'après la construction de Fresnel : $m.\omega^2 < K \xrightarrow{K=m.\omega_0^2} m.\omega^2 < m.\omega_0^2 \rightarrow \omega^2 < \omega_0^2 \rightarrow \omega < \omega_0$

$$\text{c - } K = 2m.\omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{K}{2m} = \frac{\omega_0^2}{2} \text{ et } \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{d - } \cos \Delta\varphi = \frac{K.X_m - m\omega^2.X_m}{F_m} \xrightarrow{K=2m\omega^2} \cos \Delta\varphi = \frac{K.X_m}{2F_m}.$$

$$* K = \frac{2F_m.\cos \Delta\varphi}{X_m}. \text{ A.N : } K = \frac{2.6.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2.10^{-1}} \text{ et } K = 51,96 \text{ N.m}^{-1}.$$

$$* m = \frac{K}{2\omega^2}. \text{ A.N : } m = \frac{51,96}{2(5\pi)^2} \text{ et } m = 105,3.10^{-3} \text{ Kg}.$$

$$4^0) \text{ a - } \omega_0 = \sqrt{\frac{51,96}{105,3.10^{-3}}} \text{ et } \omega_0 = 22,21 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\text{b - } \text{tg } \Delta\varphi = \frac{h.\omega}{k - m.\omega^2} \xrightarrow{K=2m.\omega^2} \text{tg } \Delta\varphi = \frac{2h.\omega}{k} \text{ et } h = \frac{K.\text{tg } \Delta\varphi}{2\omega}.$$

$$\text{A.N : } h = \frac{51,96.\frac{1}{\sqrt{3}}}{2.5\pi} \text{ et } h = 0,95 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$5^0) \text{ a - } X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2.\omega^2 + (K - m.\omega^2)^2}} \text{ est maximale } \Rightarrow y = h^2.\omega^2 + (K - m.\omega^2)^2 \text{ est minimale } \rightarrow \frac{dy}{d\omega} = 0$$

$$\rightarrow 2.h^2.\omega + 2.(K - m.\omega^2).(-2.m.\omega) = 0 \rightarrow h^2 - 2.m(K - m.\omega^2) = 0 \text{ car } \omega \neq 0$$

$$\text{on a donc : } h^2 - 2.m.K + 2.m^2.\omega^2 = 0 \longrightarrow 2.m^2.\omega^2 = 2.m.K - h^2 \text{ et } \omega^2 = \frac{K}{m} - \frac{h^2}{2.m^2}$$

$$\text{sachant que } \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \text{ la résonance d'élongation a lieu pour } \omega = \omega_r \text{ telle que : } \omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2}.$$

$$\text{A.N : } \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2}} = \sqrt{(22,21)^2 - \frac{(0,95)^2}{2.(105,3.10^{-3})^2}} \text{ et } \omega_r = 21,27 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\text{b - } * X_{m0} = \frac{F_m}{K} = \frac{6}{51,96} \text{ et } X_{m0} = 0,12 \text{ m}.$$

$$* X_{mr} = \frac{6}{\sqrt{(0,95)^2.(21,27)^2 + (51,96 - 105,3.10^{-3}.(21,27)^2)^2}} \text{ et } X_{mr} = 0,29 \text{ m}.$$

$$\text{c - } \omega_r^2 \geq 0 \longrightarrow \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2} \geq 0 \longrightarrow \frac{h^2}{2.m^2} \leq \omega_0^2 \longrightarrow h^2 \leq 2.m^2.\frac{K}{m} \longrightarrow h \leq \sqrt{2.m.K}.$$

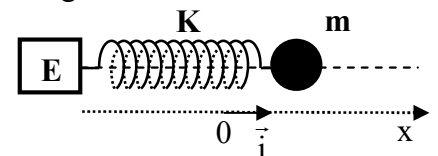
$$\text{A.N : } h_m = \sqrt{2.m.K} = \sqrt{2.105,3.10^{-3}.51,96} \text{ et } h_m = 3,3 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

Exercice 8 :

On dispose d'un pendule élastique horizontal constitué par un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K, et d'un solide (S) de masse $m = 0,1 \text{ Kg}$.

Le solide (S), pouvant glisser sur un plan horizontal parallèle à l'axe du ressort, est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide.

A l'équilibre, le centre d'inertie du solide coïncide avec l'origine des abscisses du repère (o, $\vec{i}$).



Pour entretenir les oscillations, on se sert d'un excitateur qui exerce sur le pendule élastique une force excitatrice sinusoïdale $F(t) = 2 \cdot \sin\left(20 \cdot t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (N).

Il effectue alors des oscillations forcées d'élongation $x(t) = X_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_x)$.

1⁰) a - Préciser le rôle énergétique de l'excitateur.

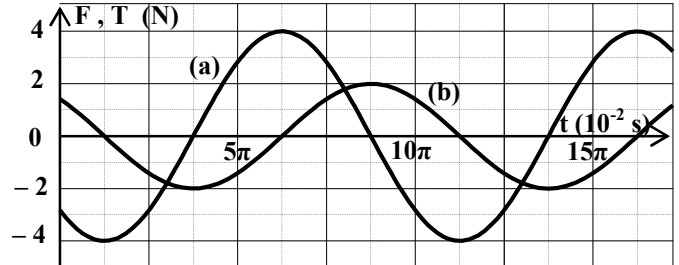
b - Etablir l'équation différentielle : $m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + h \cdot \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = F(t)$

c - Pourquoi peut-on affirmer que $\omega = 20 \text{ rad.s}^{-1}$

2⁰) Soit $T = -K \cdot x$ la valeur algébrique de la tension du ressort.

On donne ci-contre les variations de F et T au cours du temps.

a - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à la grandeur qu'elle représente.



b - En déterminant graphiquement le déphasage entre F et T , déduire que $\varphi_x = \frac{\pi}{4}$.

3⁰) a - Faire la représentation de Fresnel relative à l'élongation.

b - Comment peut-on en déduire que $\omega = \omega_0$ où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur.

c - Déterminer les valeurs de K , X_m et h .

4⁰) a - Calculer la puissance mécanique moyenne P absorbée par l'oscillateur.

b - Cette puissance est-elle maximale ? Justifier la réponse.

5⁰) La pulsation ω de l'excitateur étant maintenue constante, on fait varier la masse m du solide (S) pour pouvoir atteindre la résonance d'amplitude.

a - Doit-on augmenter ou diminuer m ? Justifier qualitativement la réponse.

b - Calculer la ou les valeurs de m correspondantes.

Réponse :

1⁰) a - Le rôle de l'excitateur est d'assurer l'énergie nécessaire au résonateur pour entretenir ses oscillations.

b - Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au solide (S) du pendule élastique :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

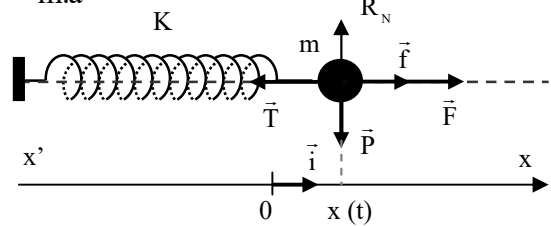
projetons sur l'axe ($x'x$) : $\vec{T}_x + \vec{P}_x + \vec{R}_{N_x} + \vec{f}_x + \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x$

$$\rightarrow T \vec{i} + \vec{0} + \vec{0} + f \vec{i} + F \vec{i} = m \cdot a$$

$$\rightarrow T + f + F = m \cdot a$$

$$\rightarrow -K \cdot x - h \cdot v + F = m \cdot a$$

$$\text{et } m \cdot a + h \cdot v + K \cdot x = F$$



$$\text{or : } v = \frac{dx}{dt} \text{ et } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ il vient alors que : } m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F$$

c - La force excitatrice est : $F(t) = 2 \cdot \sin\left(20 \cdot t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (N)

Le pendule élastique est en régime forcé, il oscille alors avec la pulsation de l'excitateur donc $\omega = 20 \text{ rad.s}^{-1}$.

2⁰) a - La force excitatrice F est toujours en avance de phase par rapport à l'élongation x .

$T = -K \cdot x \rightarrow F$ est en retard de phase par rapport à T .

Graphiquement, la courbe (a) représente $T(t)$ et la courbe (b) représente $F(t)$.

$$b - |\varphi_F - \varphi_T| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T} = 2\pi \frac{2}{8} = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(\varphi_F - \varphi_T) < 0} \varphi_F - \varphi_T = -\frac{\pi}{2}$$

$$T = -K \cdot x \rightarrow \varphi_T = \varphi_x + \pi \text{ alors}$$

$$\varphi_F - \varphi_x - \pi = -\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\varphi_F = \frac{3\pi}{4}} \varphi_x = \frac{3\pi}{4} - \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi - 4\pi + 2\pi}{4} \text{ et } \varphi_x = \frac{\pi}{4}$$

$$3^0) \text{ a - } \varphi_F - \varphi_x - \pi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b - } \varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2} \rightarrow K \cdot X_m = m \cdot \omega^2 \cdot X_m$$

$$\rightarrow K = m \cdot \omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m} = \omega_0^2 \text{ et } \omega = \omega_0$$

$$\text{c - } K = m \cdot \omega^2 \xrightarrow{\text{A.N}} K = 0,1 \cdot (20)^2 \text{ et } K = 40 \text{ N.m}^{-1}$$

$$T_m = K \cdot X_m \rightarrow X_m = \frac{T_m}{K} \xrightarrow{\text{A.N}} X_m = \frac{4}{40} \text{ et } X_m = 0,1 \text{ m}$$

$$F_m = h \cdot \omega \cdot X_m \rightarrow h = \frac{F_m}{\omega \cdot X_m} \xrightarrow{\text{A.N}} h = \frac{2}{20 \cdot 0,1} \text{ et } h = 1 \text{ Kg.s}^{-1}$$

$$4^0) \text{ a - } P = \frac{h \cdot V_m^2}{2} = \frac{h \cdot \omega^2 \cdot X_m^2}{2} \xrightarrow{\text{A.N}} P = \frac{1 \cdot (20)^2 \cdot (0,1)^2}{2} \text{ et } P = 2 \text{ W}$$

b - $\omega = \omega_0 \rightarrow$ résonance de vitesse $\rightarrow$ la puissance est alors maximale (résonance de puissance).

5⁰) a - Résonance d'amplitude $\rightarrow$

$$\omega_r < \omega_0 \xrightarrow{\omega=\omega_r} \text{il faut augmenter } \omega_0 \xrightarrow{\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}} \text{il faut diminuer } m.$$

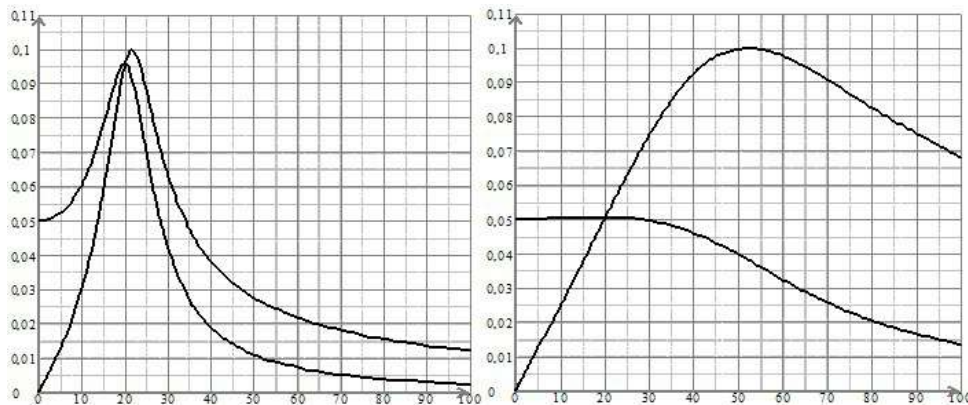
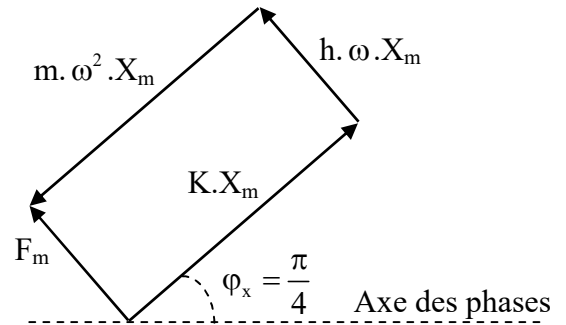
b - A la résonance d'amplitude :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m} - \frac{h^2}{2m^2} = \frac{2Km - h^2}{2m^2} \rightarrow 2\omega^2 m^2 - 2Km + h^2 = 0 \text{ et } 800m^2 - 80m + 1 = 0$$

$$\Delta = (80)^2 - 4 \cdot 800 \cdot 1 = 6400 - 3200 = 3200 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 56,47$$

$$m_1 = \frac{80 - 56,47}{1600} \text{ et } m_1 = 14,7 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \quad (\omega_{01} = 52,16 \text{ rad.s}^{-1})$$

$$m_2 = \frac{80 + 56,47}{1600} \text{ et } m_2 = 85,3 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \quad (\omega_{02} = 21,65 \text{ rad.s}^{-1})$$



Etude d'un texte documentaire :

Exercice 1 :

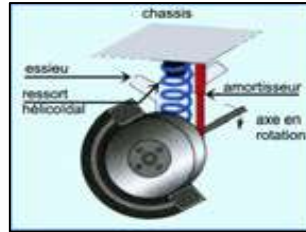
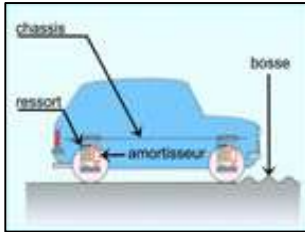
La suspension automobile

On peut considérer qu'une automobile est constituée, d'une part, du châssis supportant la caisse et le moteur, d'autre part, des essieux sur lesquels les roues sont fixées. Entre ces deux parties se situe la suspension formée de ressorts et d'amortisseurs. La fréquence propre N_0 d'une automobile moderne est de l'ordre du hertz.

Lorsque l'automobile roule sur une série de bosses ou de trous régulièrement répartis, elle reçoit des impulsions périodiques dont la fréquence N dépend de sa vitesse. Elle peut entrer en résonance si la fréquence excitatrice est voisine de N_0 . Si la suspension est molle, cela se traduit par des oscillations lentes et de grande amplitude.

De nombreuses pistes africaines recouvertes de sable ont un aspect de « tôle ondulée » dû à une succession régulière de bosses distantes de quelques dizaines de centimètres.

Un véhicule roulant sur une telle piste subit donc, pour une vitesse v une suite d'excitations à la fréquence N . Si la fréquence N est égale ou peu différente de la fréquence propre N_0 du véhicule, celui-ci entre en résonance et les oscillations de grande amplitude rendent le voyage très inconfortable. Comment faut-il conduire pour voyager sur la « tôle ondulée » ? Il faut éviter la résonance c'est-à-dire la vitesse v_0 qui rend la fréquence excitatrice N égale ou voisine de N_0 . On peut choisir une vitesse faible (vitesse v nettement inférieure à v_0) mais le voyage est alors très lent ; on choisit en fait une vitesse relativement grande et pour laquelle la résonance ne se manifeste pas.



D'après: centrefrancophone-bg.org

Questions :

- 1⁰) a - Par quoi est constituée la suspension automobile ?
- b - En assimilant l'automobile à un oscillateur, quel est l'ordre de grandeur de sa fréquence propre N_0 ?
- 2⁰) a - Que se passe-t-il si la fréquence excitatrice est voisine de N_0 ?
- b - Par quoi cela se traduit-il si la suspension est molle ?
- 3⁰) Pour voyager sur une « tôle ondulée », il est plus commode de rouler à faible vitesse ou à grande vitesse ? Justifier la réponse.

Réponse :

- 1⁰) a - La suspension automobile est constituée de ressorts et d'amortisseurs.
- b - La fréquence propre N_0 d'une automobile est de l'ordre du Hertz.
- 2⁰) a - Si la fréquence excitatrice est voisine de N_0 , l'automobile peut entrer en résonance.
- b - Si la suspension est molle, cela se traduit par des oscillations lentes et de grandes amplitudes.
- 3) Pour voyager sur une tôle ondulée, il faut rouler à une vitesse v différente de la vitesse v_0 qui réalise la résonance.
Il est plus commode de rouler à grande vitesse (v supérieure à v_0) car à faible vitesse (v inférieure à v_0), le voyage sera plus lent.

Exercice 2 :

Le 16 avril 1850 à Angers, un régiment (troupe de soldats) provoqua l'écroulement d'un pont suspendu enjambant la Maine simplement par le passage des soldats au pas cadencé. Un autre pont suspendu, cette fois-ci au Tacoma (USA) s'est effondré en 1940 par le seul effet de rafales de vent régulières sans être particulièrement violentes.



Comment la simple marche d'un régiment peu nombreux ou des rafales de vent peu violentes peuvent-elles détruire un pont ? La réponse : le phénomène de résonance mécanique. Lorsqu'un système mécanique pouvant vibrer (osciller) est mis en oscillations forcées par un phénomène extérieur, celui-ci impose sa fréquence de vibration au système. Il y a résonance lorsque la fréquence imposée devient égale à la fréquence

propre du système mécanique. Ce phénomène se manifeste par des oscillations très fortes pouvant entraîner la destruction du système...

Depuis lors, les codes militaires du monde entier interdisent à une troupe de marcher au pas sur un pont et lors de la construction d'un pont, les constructeurs tiennent compte dans leurs études de la fréquence naturelle de l'ouvrage en lui donnant une valeur qui ne puisse pas correspondre à celle de rafales de vent.

D'après Brochure du concours du Rallye Scientifique (au Gabon) 2006

Questions :

- 1⁰) a - Par quoi la destruction de chacun des deux ponts cités dans le texte fut-elle provoquée ?
- b - Quel est le phénomène physique responsable de la destruction des deux ponts ?
- 2⁰) D'après l'auteur, quelle est la condition de la manifestation du phénomène ? Dans quel cas peut-on affirmer, avec une bonne approximation, que cette condition reste pratiquement vraie ?
- 3⁰) Comment, de nos jours, peut-on éviter que de telles catastrophes se répètent ?

Réponse :

1⁰) a - La destruction du pont d'Angers fut provoquée par le passage des soldats au pas cadencé et celle du pont de Tacoma par des rafales de vent régulières.

b - Le phénomène physique responsable de la destruction des deux ponts est la résonance mécanique.

2⁰) D'après l'auteur, il y a résonance lorsque la fréquence imposée devient égale à la fréquence propre du système mécanique.

La résonance mécanique a lieu pour : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$

La condition de l'auteur reste pratiquement vraie tant que le terme $\frac{h^2}{2m^2}$ est négligeable devant ω_0^2 .

3⁰) Pour éviter de nos jours que ces catastrophes se répètent :

- les codes militaires du monde entier interdisent à une troupe de marcher au pas sur un pont
- lors de la construction d'un pont, les constructeurs tiennent compte dans leurs études de la fréquence naturelle de l'ouvrage en lui donnant une valeur qui ne puisse pas correspondre à celle de rafales de vent.

Exercice 3 :

Résonance et corps humain

Lorsqu'un corps humain est soumis à une vibration, mouvement mécanique périodique, il peut y avoir des effets pathologiques. La complexité du corps humain incite à une modélisation simplifiée.

Les médecins et ergonomes, qui s'intéressent à ces effets, utilisent des modèles simples où le corps est assimilé à un ensemble d'oscillateurs constitués par des masses élémentaires suspendues (tête, thorax, bassin...) liées entre elles par des liaisons élastiques qui jouent aussi le rôle d'amortisseurs (les ligaments, les muscles, les disques de vertèbres...).

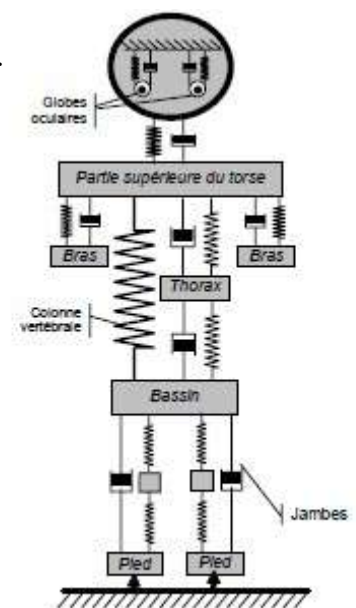
Les effets désagréables (et parfois dangereux) de ces vibrations sur le corps humain sont dus aux déformations et aux déplacements relatifs que subissent les organes ou les tissus à certaines fréquences où elles prennent de l'ampleur.

En dessous de 2 Hz, le corps, lorsqu'il est soumis à des vibrations, se comporte comme une masse unique.

Pour des fréquences plus élevées, il y a certaines parties du corps qui peuvent entrer en résonance avec la vibration extérieure.

Quelques exemples sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Partie du corps	Gamme de fréquence (Hz)
thorax	3 à 7
cœur	4 à 8
bassin	4 à 9
tête	20 à 30
globes oculaires	60 à 90



D'après : Extrait de Ondes et électromagnétisme, M. Nicolas, éditions Dunod. www.mersante.com

Questions :

1⁰) Pour étudier l'effet des excitations oscillatoires sur le corps humain, par quoi le modélise-t-on ?

2⁰) Relever du texte un extrait montrant que la résonance dont-il s'agit est une résonance d'élongation.

3⁰) **a** - Pour quelles fréquences le corps humain n'est plus considéré comme un ensemble d'oscillateurs mécaniques ?

b - Un moteur de tracteur crée, au cours de son fonctionnement, des vibrations de fréquences comprises entre 55 Hz et 85 Hz.

Quel organe du corps humain risque de se fatiguer le plus lorsqu'il subit ces vibrations ? Justifier.

Réponse :

1⁰) Les médecins et ergonomes, qui s'intéressent à ces effets, utilisent des modèles simples où le corps est assimilé à **un ensemble d'oscillateurs** constitués par des masses élémentaires suspendues ...) liées entre elles par des liaisons élastiques qui jouent aussi le rôle d'amortisseurs.

2⁰) Les effets désagréables de ces vibrations sur le corps humain sont dus aux déformations et aux déplacements relatifs que subissent les organes ou les tissus à certaines fréquences où **elles prennent de l'ampleur**.

3⁰) **a** - En dessous de 2 Hz, le corps, lorsqu'il est soumis à des vibrations, se comporte comme une masse unique.

b - Les fréquences de vibration du tracteur coïncident avec les fréquences de résonance des globes oculaires. Ceux-ci risquent alors de se fatiguer le plus lorsqu'ils subissent ces vibrations.

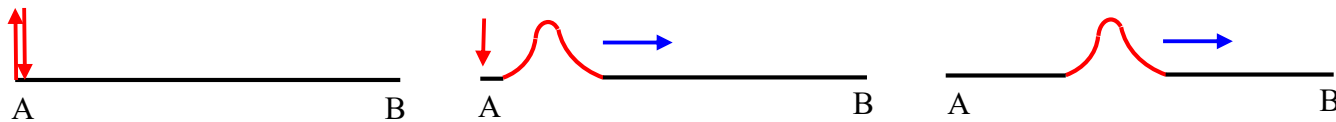
LA PROPAGATION D'UN ÉBRANLEMENT

I / Propagation d'un ébranlement dans un milieu unidimensionnel :

1⁰) Propagation d'un ébranlement le long d'une corde :

a - Expérience et observations :

Soit une longue corde élastique horizontale AB tendue.



On induit une déformation brève au point A.

De proche en proche, la déformation touche tous les points de la corde.

Chaque point de la corde reproduit le mouvement de la source de déformation avec un certain retard.

On dit que la déformation locale se propage le long de la corde.

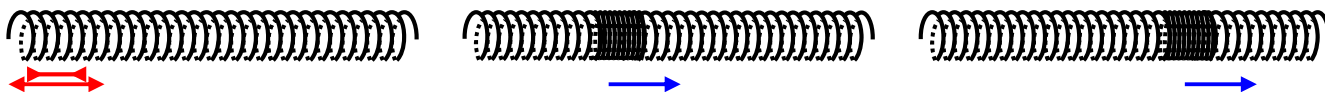
b - Définitions :

- Une déformation **brève et locale** imposée à un milieu élastique est appelée **ébranlement**.
- Un ébranlement qui **se propage** est appelé **onde**.
- Si l'ébranlement se fait dans une direction **perpendiculaire** à celle de la propagation, l'onde est alors dite **transversale**.

2⁰) Propagation d'un ébranlement le long d'un ressort :

a - Expérience et observations :

Soit un long ressort à spires non jointives tendu.



On comprime quelques spires à l'extrémité du ressort et on les lâche.

De proche en proche, la zone de compression touche toutes les spires du ressort.

Suivant l'axe du ressort, chaque spire reproduit le mouvement de la source de compression avec un certain retard.

On dit que la zone de compression se propage le long du ressort.

b - Conséquences :

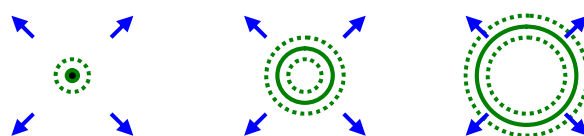
- La zone de compression constitue un ébranlement.
- La propagation de l'ébranlement induit une onde le long du ressort.
- De même, une zone de dilatation peut se propager le long du ressort.

c - Définition :

Si le déplacement des spires se fait **dans la direction** de propagation, l'onde est alors dite **longitudinale**.

II / Propagation d'un ébranlement dans un milieu bidimensionnel :

La perturbation créée en un point O de la surface plane d'un liquide au repos induit une déformation qui se propage, si le milieu est élastique, homogène et isotrope, suivant une ride circulaire centrée sur l'origine O.



Tous les points qui sont atteints par l'ébranlement au même instant et qui ont le même retard par rapport à la source constituent une **ligne d'onde**.

III / Propagation d'un ébranlement dans un milieu tridimensionnel :

Un son est provoqué par un corps élastique animé de vibration mécanique et reçue par l'oreille.

Dans l'air, le son se propage dans toutes les directions.

Dans un milieu homogène, isotrope et indéfini, le son se propage suivant des **ondes sphériques** centrées sur la source du son. Très loin de la source, on obtient des **ondes planes**.

Tous les points qui sont atteints par le son au même instant et qui ont le même retard par rapport à la source constituent une **surface d'onde**.

Remarques :

- Le son ne se propage pas dans le vide, il nécessite un support matériel pour se propager : c'est donc une onde mécanique.
- Les solides transmettent les ondes transversales et longitudinales (résistance à la variation de forme et de volume) alors que dans les fluides, seules les ondes longitudinales sont transmises (résistance à la variation de volume).

La transmission du son par les fluides indique que **le son est une onde longitudinale**.

IV / Aspect énergétique de la propagation :

Dans tous les cas, la propagation d'un ébranlement se fait **sans transport de matière**, c'est uniquement l'énergie mécanique emmagasinée qui se transmet, de proche en proche, le long du milieu propageur.

Remarque :

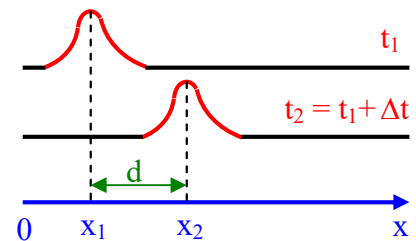
Au cours de la propagation, l'ébranlement est amorti suite aux frottements inévitables.

Si la propagation se fait dans un plan ou dans l'espace, l'amortissement est dû aussi à la **dilution d'énergie**.

V / La célérité de l'ébranlement :

On appelle célérité (ou vitesse) de propagation de l'ébranlement la valeur de la distance qu'il parcourt par unité de temps.

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{d}{\Delta t}$$



Remarques :

- La célérité d'un ébranlement se propageant dans un milieu élastique, homogène et isotrope est **constante**. Elle ne dépend **ni de la forme** de l'ébranlement **ni du sens** de sa propagation.
- La célérité d'un ébranlement dépend des caractéristiques du milieu propageur.
- Ordres de grandeur :

Milieu propageur	Célérité (en m.s ⁻¹)
Corde élastique	10
Corde à piano	200
Surface d'un liquide	0,5
Son dans l'air	340
Son dans l'eau	1500
Ondes sismiques	8000

VI / Principe de propagation :

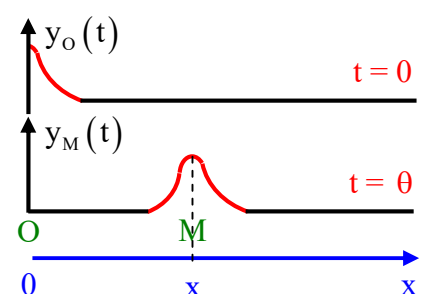
Un point quelconque M de la corde, d'abscisse x, **reproduit** le

mouvement de la source O avec un **certain retard** $\theta = \frac{x}{v}$

v est la célérité de propagation de l'ébranlement.

θ est la **durée** que met l'ébranlement pour parcourir la distance x.

$$y_M(t) = y_O(t - \theta) = y_O\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad t \geq \theta$$



Pour en savoir plus

1⁰) Différences entre « déplacement d'un mobile » et « propagation d'un ébranlement » :

Déplacement d'un mobile	Propagation d'un ébranlement
Le mobile suit une trajectoire bien précise	A partir de la source, la propagation s'effectue dans toutes les directions disponibles
Il s'accompagne d'un transport de matière	Elle s'effectue sans transport de matière
Il peut avoir lieu dans le vide	Elle ne peut pas avoir lieu dans le vide
Il s'effectue plus facilement à travers un gaz qu'à travers un liquide. il est inconcevable à travers un solide	Elle s'effectue plus rapidement dans les liquides que dans les gaz. Généralement, elle est plus rapide dans les solides que dans les liquides
Il est ralenti par les frottements avec le milieu environnant.	L'amortissement affecte essentiellement l'amplitude de l'ébranlement.
Le mouvement du mobile est modifié lors d'un choc avec un autre mobile venant à sa rencontre.	Les ébranlements peuvent se rencontrer dans un même milieu propagateur. Ils se chevauchent, puis passent l'un à travers l'autre sans se perturber.
La vitesse du mouvement du mobile dépend des conditions initiales	La célérité, pour des faibles amplitudes, ne dépend pas des conditions initiales du mouvement de la source

2⁰) La célérité d'une onde :

La célérité d'une onde dépend des propriétés physiques du milieu propagateur. Elle ne dépend pas de la forme de l'ébranlement.

Dans le cas général, la célérité d'une onde mécanique, dans un milieu propagateur donné, s'exprime par :

$$v = \sqrt{\frac{\text{grandeur liée à l'élasticité du milieu (tend à rappeler le système à l'équilibre)}}{\text{grandeur liée à l'inertie du milieu (tend à résister au retour du système à l'équilibre)}}}$$

Exemple : La célérité d'une onde mécanique le long d'une corde tendue s'exprime par :

$$v = \sqrt{\frac{\|\vec{T}\|}{\mu}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{T} : \text{tension de la corde} (\|\vec{T}\| \text{ en N}) \\ \mu : \text{masse linéique de la corde (en Kg.m}^{-1}\text{)} \end{cases}$$

3⁰) Propagation d'un ébranlement le long d'une corde :

A $t = 0$, un ébranlement dont l'élongation est décrite par la fonction $y_s(t) = y(x=0, t)$, est créé à l'extrémité d'une corde tendue. Il se propage sans déformation le long de la corde avec une célérité constante v .

L'élongation d'un point M de la corde d'abscisse x , à l'instant t , sera notée $y_M(t) = y(x, t)$

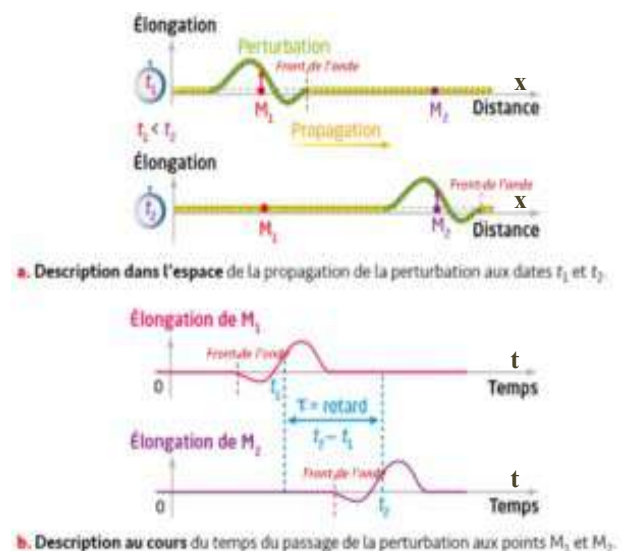
a - Aspect de la corde à un instant donné :

A un instant t donné, l'élongation d'un point d'abscisse x est la même que celle qu'avait un point d'abscisse $(x - v.t)$ mais à l'instant $t = 0$. On écrit alors : $y_t(x) = y_{t=0}(x - v.t)$

Remarque : On nomme **front d'onde** le point le plus avancé de l'ébranlement le long de la corde.

b - Equation horaire d'un point de la corde :

L'élongation d'un point d'abscisse x et à l'instant t est la même que celle qu'avait la source d'abscisse $x = 0$ mais à l'instant $\left(t - \frac{x}{v}\right)$. On écrit alors : $y_x(t) = y_{x=0}\left(t - \frac{x}{v}\right)$



LA PROPAGATION D'UNE ONDE SINUSOÏDALE ENTRETENUE

I / Onde progressive le long d'une corde :

1⁰) Mise en évidence et Définitions :

a - Expérience de mise en évidence :

Le vibreur entretient une vibration sinusoïdale à l'une des extrémités de la corde tendue.

L'autre extrémité plonge dans un liquide pour éviter toute réflexion éventuelle de l'onde.

• En lumière ordinaire :

La corde prend l'aspect d'une bande floue.

Tous les points de la corde vibrent avec la même amplitude (celle de la source).

• En lumière stroboscopique :

- A l'immobilité apparente :

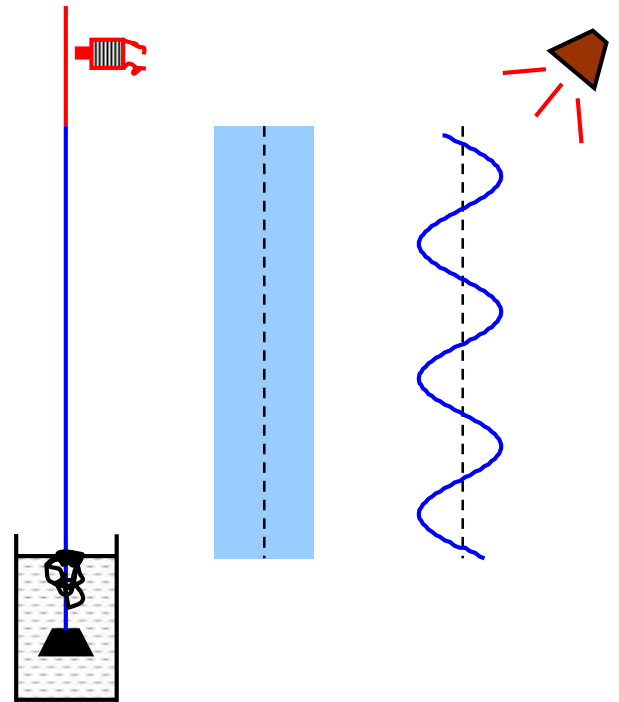
La corde prend l'aspect d'une sinusoïde spatiale.

L'onde présente alors une **périodicité spatiale**.

- Au ralenti stroboscopique :

Tout point de la corde vibre sur place au cours du temps.

L'onde présente alors une **périodicité temporelle**.



b - Onde progressive :

La vibration de la source étant entretenue, l'onde progresse le long de la corde et provoque le mouvement des points successifs de la corde. On parle alors d'**onde progressive** le long de la corde.

Remarques :

- Si la corde est homogène, l'onde se propage avec une **célérité constante**.
- La déformation de la corde s'effectue dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation ; on parle alors d'**onde progressive transversale**.
- La partie la plus avancée de l'onde le long de la corde est appelée **front d'onde**.

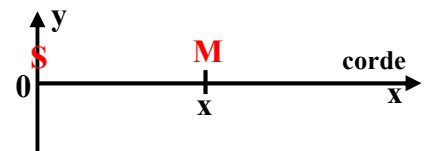
II / Etude du mouvement d'un point quelconque de la corde :

1⁰) Equation du mouvement d'un point quelconque de la corde :

* Soit une corde $[0, x[$ infiniment longue, homogène et tendue.

Un vibreur, de fréquence N , entretient en la source S la vibration :

$$y_s(t) = a \sin(\omega t + \varphi) ; \omega = 2\pi N$$



* Un point **M** de la corde, d'abscisse x , reproduit le mouvement de la source S avec un certain retard θ tel que $\theta = \frac{x}{v}$ où v est la célérité de l'onde le long de la corde.

D'après le principe de propagation : $y_M(t) = y_s(t - \theta)$

$$\text{donc : } y_M(t) = a \sin \left[\omega(t - \theta) + \varphi_s \right] = a \sin \left[\frac{2\pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_s \right] = a \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_s - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{x}{v} \right)$$

On pose : $\lambda = v \cdot T$, il vient alors que :

$$y(x, t) = a \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_s - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right)$$

Remarques :

- On a $y(0, t) = a \sin(\omega.t + \varphi_s)$
et $y(x, t) = a \sin\left(\omega.t + \varphi_s - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

Le terme $\frac{2\pi x}{\lambda}$ représente le retard de phase du point M par rapport à la source O.

- On peut écrire $y(x, t) = a \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_s\right]$

L'équation du mouvement est doublement périodique du temps et de l'espace.

- La source commence son mouvement à partir de la position d'équilibre, soit vers le haut soit vers le bas.

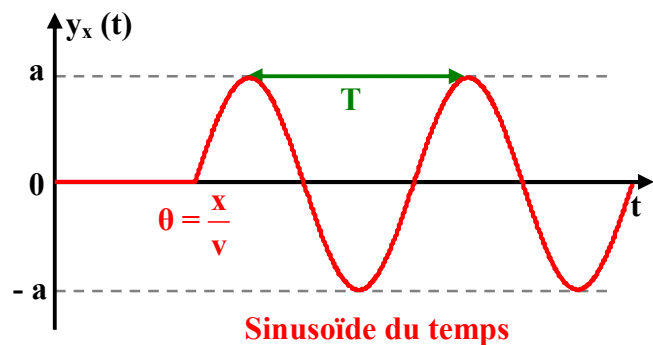
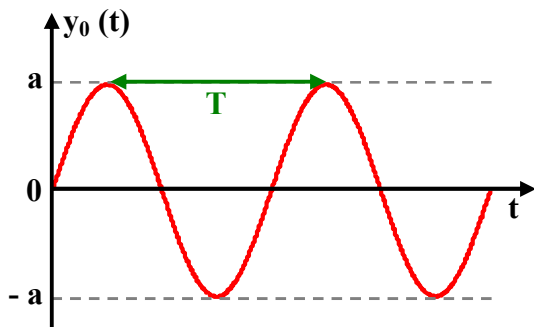
La phase à l'origine de la source S est donc : soit $\varphi_s = 0$ $\left(\left(\frac{dy_s}{dt}\right)_{t=0} > 0\right)$ soit $\varphi_s = \pi$ $\left(\left(\frac{dy_s}{dt}\right)_{t=0} < 0\right)$

2⁰) Périodicité temporelle :

a - Forme de l'équation :

Un point M de la corde, d'abscisse x, vibre selon l'équation :

$$\begin{cases} t < \theta = \frac{x}{v} ; y_x(t) = 0 \\ t \geq \theta = \frac{x}{v} ; y_x(t) = a \sin(\omega.t + \varphi) \text{ avec } \varphi = \varphi_s - \frac{2\pi x}{\lambda} \end{cases}$$



b - Période temporelle :

La période T du mouvement d'un point quelconque de la corde est le même que celle de la source O.

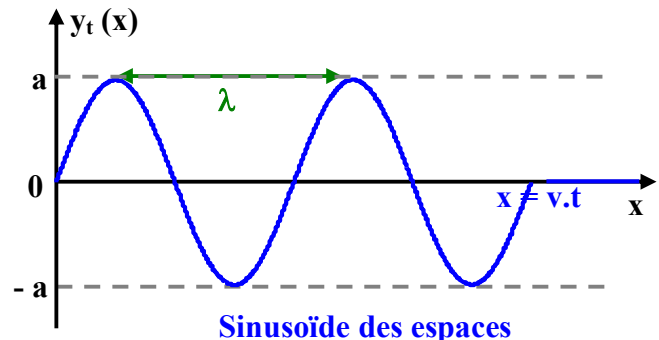
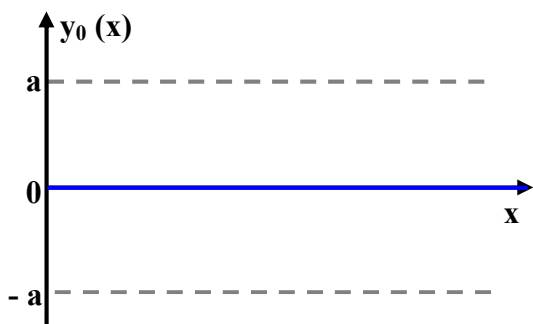
Soit N la fréquence du vibreur, on a : $T = \frac{1}{N}$.

3⁰) Périodicité spatiale :

a - Forme de l'équation :

A un instant donné, les elongations des différents points de la corde sont données par l'équation :

$$\begin{cases} x \leq v.t ; y_t(x) = a \sin\left(-\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right) \text{ avec } \varphi = \omega.t + \varphi_s \\ x > v.t ; y_t(x) = 0 \end{cases}$$



b - Période spatiale :

Le produit $\lambda = v.T$ est appelé **longueur d'onde**.

La longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde pendant une période T .

Remarque :

$$\lambda = v.T = \frac{v}{N} = \frac{2\pi v}{\omega}$$

4⁰) Déphasage entre deux points quelconques de la corde :

Soient deux points A et B de la corde d'abscisses respectifs x_A et x_B .



$$y_S(t) = a \sin(\omega.t + \varphi_S) = a \sin \Phi_S(t) \quad \text{avec} \quad \Phi_S(t) = \Phi(0, t) = \omega.t + \varphi_S$$

$$y_A(t) = a \sin\left(\omega.t + \varphi_S - \frac{2\pi x_A}{\lambda}\right) = a \sin \Phi_A(t) \quad \text{avec} \quad \Phi_A(t) = \Phi(x_A, t) = \omega.t + \varphi_S - \frac{2\pi x_A}{\lambda}$$

$$y_B(t) = a \sin\left(\omega.t + \varphi_S - \frac{2\pi x_B}{\lambda}\right) = a \sin \Phi_B(t) \quad \text{avec} \quad \Phi_B(t) = \Phi(x_B, t) = \omega.t + \varphi_S - \frac{2\pi x_B}{\lambda}$$

Soit $\Delta\Phi = \Phi_A - \Phi_B$ le déphasage entre les mouvements des points A et B.

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_B - x_A) = \frac{2\pi}{\lambda}.\delta \quad \text{avec} \quad \delta = (x_B - x_A)$$

$\delta = (x_B - x_A)$ est la **différence de marche** entre les points B et A.

a - Les points vibrants en phase :

$$\Delta\Phi = 2k\pi \longrightarrow \delta = k.\lambda \quad ; \quad k \text{ entier}$$

Les points vibrants en phase sont distants d'un nombre entier de longueur d'onde.

Remarque :

Les points vibrants en phase avec la source sont d'abscisses : $x_k = k.\lambda \quad ; \quad k \in \mathbb{N}$

b - Les points vibrants en opposition de phase :

$$\Delta\Phi = (2k+1)\pi \longrightarrow \delta = (2k+1).\frac{\lambda}{2} \quad ; \quad k \text{ entier}$$

Les points vibrants en phase sont distants d'un nombre entier impair de demi-longueur d'onde.

Remarque :

Les points vibrants en opposition de phase avec la source sont d'abscisses : $x_k = (2k+1).\frac{\lambda}{2} \quad ; \quad k \in \mathbb{N}$

c - Les points vibrants en quadrature de phase :

$$\Delta\Phi = (2k+1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow \delta = (2k+1).\frac{\lambda}{4} \quad ; \quad k \text{ entier}$$

Les points vibrants en quadrature de phase sont distants d'un nombre entier impair de quart de longueur d'onde.

Remarques :

- Les points vibrants en quadrature avance de phase par rapport à la source :

$$\Delta\Phi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_k = (4k-1)\frac{\lambda}{4} ; k \in \mathbb{N}^*$$

- Les points vibrants en quadrature retard de phase par rapport à la source :

$$\Delta\Phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_k = (4k+1)\frac{\lambda}{4} ; k \in \mathbb{N}$$

Application 1 :

Un fil élastique, homogène, de longueur $l = 1 \text{ m}$ est tendu verticalement.

L'extrémité supérieure du fil est reliée à un vibreur qui lui communique une vibration sinusoïdale entretenue $y_0(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t)$ (m) perpendiculaire au fil.

La célérité de propagation de l'onde le long du fil est $v = 15 \text{ m.s}^{-1}$.

On néglige tout amortissement et on ne tient pas compte des réflexions éventuelles de l'onde.

1⁰) Calculer la longueur d'onde λ de l'onde progressive le long du fil.

2⁰) Soit un point M du fil d'abscisse $x_M = 22,5 \text{ cm}$:

a - Etablir l'équation du mouvement du point M.

b - Comment vibre le point M par rapport à la source O ?

3⁰) Représenter sur le même graphique les mouvements de M et de O en fonction du temps.

4⁰) Représenter l'aspect du fil à l'instant $t = \frac{2,25}{N}$, N étant la fréquence du vibreur.

5⁰) Déterminer le nombre et le lieu des points qui vibrent :

a - en opposition de phase avec la source.

b - en quadrature de phase avance par rapport à la source.

Réponse :

$$1^0) \lambda = \frac{v}{N}$$

$$2\pi N = 200\pi \rightarrow N = 100 \text{ Hz} \text{ donc } \lambda = \frac{15}{100} \text{ et } \lambda = 15 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$2^0) \text{ a - } y_M(t) = y_0(t - \theta_M) = y_0\left(t - \frac{x_M}{v}\right) = 5 \cdot 10^{-3} \sin\left(200\pi t - \frac{2\pi x_M}{T v}\right) \text{ or } \lambda = v \cdot T \rightarrow$$

$$y_M(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin\left(200\pi t - \frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) (\text{m}) , t \geq \theta_M = \frac{x_M}{v}$$

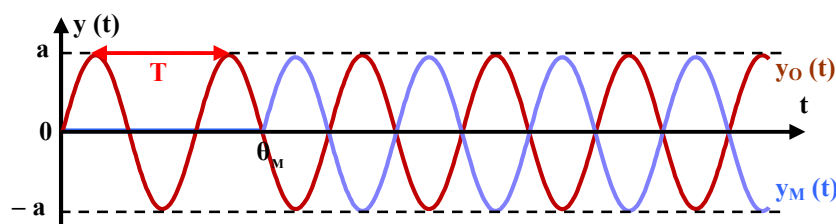
$$\text{Pour } x_M = 22,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \rightarrow y_M(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin\left(200\pi t - 2\pi \frac{22,5}{15}\right) = 5 \cdot 10^{-3} \sin\left(200\pi t - 2\pi \frac{22,5}{15}\right) \text{ et}$$

$$y_M(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t - \pi) (\text{m}) , t \geq \theta_M = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

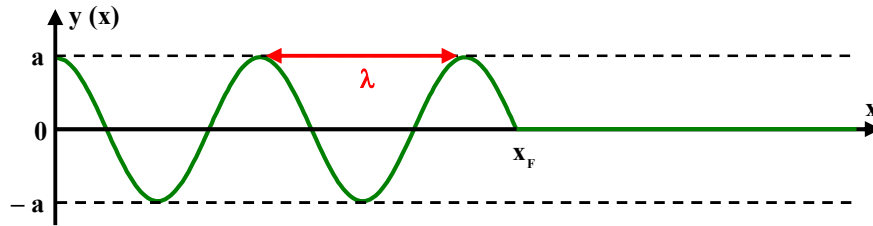
b - $\Delta\varphi = \varphi_O - \varphi_M = \pi$ le point M et la source vibrent en opposition de phase.

$$\text{Remarque : } \Delta\varphi = \varphi_O - \varphi_M = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x_M - 0) \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta\varphi = \frac{2\pi}{15} \cdot 22,5 \text{ et } \Delta\varphi = \pi.$$

$$3^0) \frac{x_M}{\lambda} = \frac{22,5}{15} = 1,5 \rightarrow x_M = 1,5\lambda \rightarrow \theta_M = 1,5T$$



$$4^0) \frac{t}{T} = \frac{2,25}{N} \cdot \frac{N}{1} = 2,25 \rightarrow t = 2,25T \rightarrow x_F = 2,25\lambda$$



$$5^0) \text{ a - opposition de phase / source } \rightarrow \begin{cases} x_k = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2} & ; k \in \mathbb{N} \\ x_k \leq l \end{cases}$$

$$\rightarrow 0 \leq (2k+1) \frac{15}{2} \leq 100$$

$$\rightarrow 0 \leq (2k+1) \leq \frac{200}{15}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \leq (2k+1) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{200}{15} - 1 \right) \rightarrow -0,5 \leq k \leq 6,16 \rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

k	0	1	2	3	4	5	6
$x_k (10^{-2} \text{ m})$	7,5	22,5	37,5	52,5	67,5	82,5	97,5

$$\text{b - quadrature de phase avance / source } \rightarrow \begin{cases} x_k = (4k-1) \cdot \frac{\lambda}{4} & ; k \in \mathbb{N}^* \\ x_k \leq l \end{cases}$$

$$\rightarrow 0 \leq (4k-1) \frac{15}{4} \leq 100$$

$$\rightarrow 0 \leq (4k-1) \leq \frac{400}{15}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{1}{4} \left(\frac{400}{15} + 1 \right) \rightarrow 0,25 \leq k \leq 6,91 \rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

k	1	2	3	4	5	6
$x_k (10^{-2} \text{ m})$	11,25	26,25	41,25	56,25	71,25	86,25

III / Onde progressive le long d'un ressort :

1⁰) Mise en évidence :

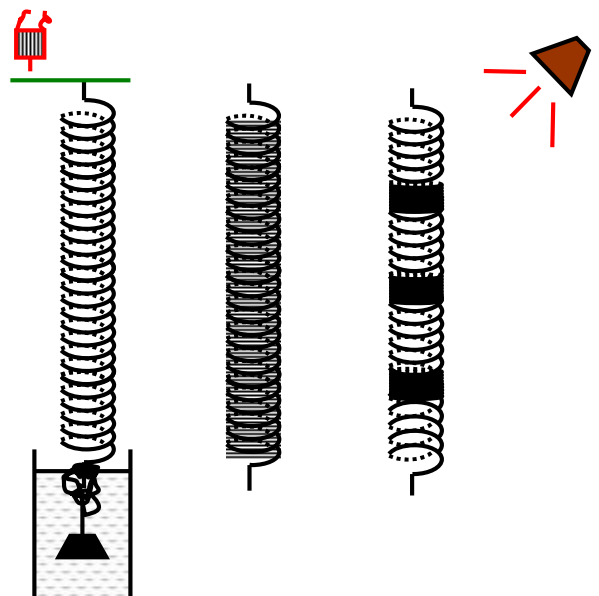
Le vibreur entretient une vibration sinusoïdale à l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives tendu. L'autre extrémité plonge dans un liquide pour éviter toute réflexion éventuelle de l'onde.

• En lumière ordinaire :

Le ressort paraît flou.
Tous les spires vibrent.

• En lumière stroboscopique :

Au ralenti stroboscopique, on observe une succession de zones de compression et de zones de dilatation qui progressent le long du ressort.
On parle alors d'onde progressive longitudinale le long du ressort.



2⁰) Etude théorique :

De la même manière que pour la corde, si le vibreur maintient un mouvement :

$$y_s(t) = a \sin(\omega \cdot t + \varphi_s) ; \omega = 2\pi N$$

Une spire M d'abscisse x le long du ressort aura un mouvement :

$$y_M(t) = a \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_s - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \text{où} \quad \lambda = v \cdot T \quad \text{longueur d'onde}$$

Les spires vibrent suivant l'axe du ressort à la même fréquence que celle du vibreur.

IV / Onde progressive à la surface d'un liquide:

1⁰) Mise en évidence :

La pointe frappe la surface du liquide d'un mouvement vibratoire sinusoïdal entrete nu vertical.

- **En lumière ordinaire :**

On observe une série continue de rides circulaires concentriques claires et sombres qui se propage de la pointe vers les bords de la cuve à ondes.

- **En lumière stroboscopique :**

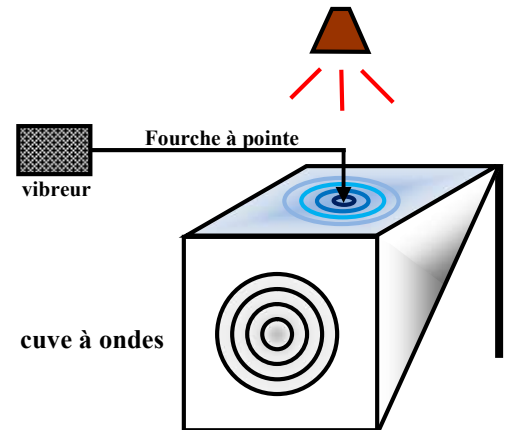
- **A l'immobilité apparente :**

La distance entre deux rides circulaires consécutives de même brillance est la même.

L'onde présente alors une périodicité spatiale.

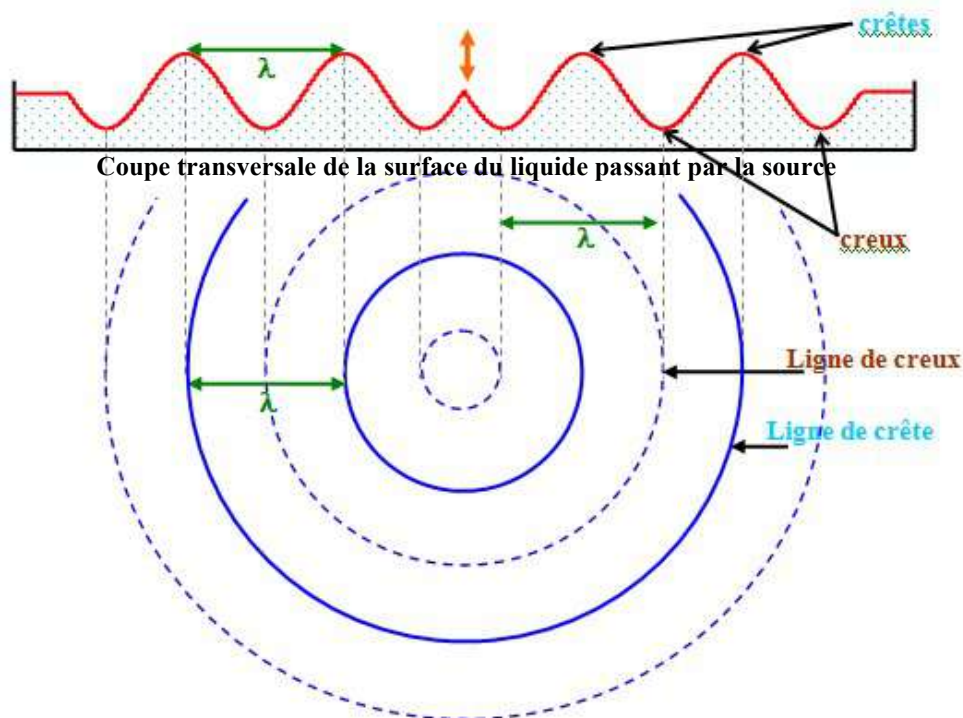
- **Au ralenti stroboscopique :**

Les rides progressent en s'éloignant de la source. On parle alors d'**onde progressive circulaire**.



Remarques :

- L'onde à la surface du liquide est une onde **transversale**.
- Tous les points situés sur une même ride circulaire centrée sur la source vibrent en phase et avec la même amplitude : ils constituent une **ligne d'onde**.
- En s'éloignant de la source, les rides deviennent de plus en plus claires, donc l'amplitude diminue lorsque le rayon augmente. Ce phénomène est dû à la **dilution d'énergie**.
- La distance séparant deux rides consécutives de même brillance est la longueur d'onde λ .



2⁰) Etude théorique :

Une pointe reliée à un vibreur de fréquence N frappe la surface d'un liquide en un point S . Elle lui communique un mouvement rectiligne vertical sinusoïdal d'amplitude a .

$$\text{Soit } y_s(t) = a \sin(\omega \cdot t + \varphi_s) = a \sin(2\pi N \cdot t + \varphi_s) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_s\right)$$

Un point M de la surface du liquide, situé à une distance r de source S , reproduit le mouvement de la source avec un certain retard $\theta = \frac{r}{v}$ où v est la célérité de l'onde à la surface du liquide.

$$\text{Soit } y_M(t) = y_s(t - \theta) = a \sin\left[\omega \cdot (t - \theta) + \varphi_s\right] = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_s - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{r}{v}\right)$$

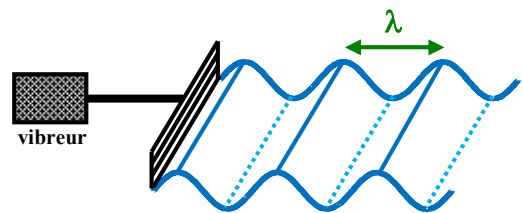
Or $\lambda = v \cdot T$, il vient alors que :

$$y(r, t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_s - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r\right)$$

Tous les points situés à la même distance r de la source S vibrent en phase avec la même amplitude ; ils constituent une ligne d'onde circulaire centrée sur la source S .

3⁰) Onde progressive rectiligne :

Si le vibreur est muni d'une lame rectiligne, cette lame Provoque à la surface du liquide des rides rectilignes qui se propagent perpendiculairement à la lame. Les lignes d'onde sont des droites parallèles à la lame.



Application :

Une lame vibrante de fréquence $N = 25$ Hz est munie d'une pointe qui frappe la surface d'un liquide en un point O . Le mouvement de la source O est rectiligne vertical sinusoïdal d'amplitude $a = 1$ mm.

1⁰) a - Ecrire l'équation du mouvement de la source O en supposant qu'à $t = 0$, la source O passe par sa position d'équilibre en allant vers le bas.

b - Ecrire l'équation du mouvement d'un point M de la surface du liquide situé à une distance $r = 1,5$ cm de la source O . On donne la célérité de l'onde $V = 30$ cm.s⁻¹.

c - Représenter sur le même graphique les mouvements de O et de M en fonction du temps.

2⁰) Représenter, à l'instant $t = 0,14$ s, une coupe transversale de la surface du liquide passant par O .

Réponse :

1⁰) a - $y_o(t) = a \sin(2\pi N t + \varphi_o)$

$$\begin{cases} y_o(0) = 0 \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \sin(\varphi_o) = 0 \\ a 2\pi N \cos(\varphi_o) < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi_o = 0 \text{ ou } \pi \\ \varphi_o = \pi \end{cases}$$

On écrit alors : $y_o(t) = 10^{-3} \sin(50\pi t + \pi)$ (m)

b - $y_M(t) = y_o(t - \theta_M) = y_o\left(t - \frac{r}{v}\right) = 10^{-3} \sin\left(50\pi \cdot t + \pi - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{r}{v}\right)$

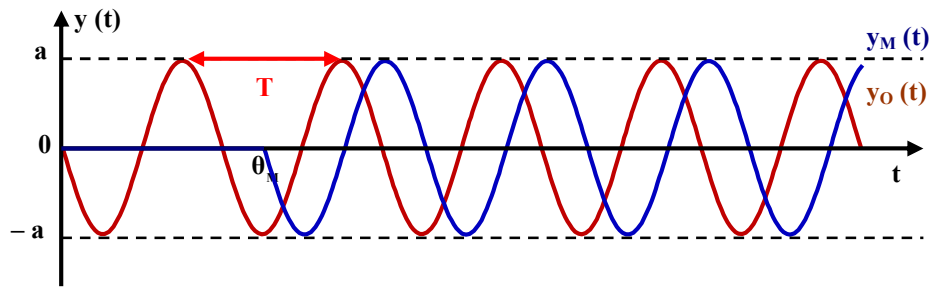
or $\lambda = v \cdot T = \frac{v}{N} \xrightarrow{A.N} \lambda = \frac{30 \cdot 10^{-2}}{25}$ et $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-2}$ m

donc : $y_M(t) = 10^{-3} \sin\left(50\pi \cdot t + \pi - \frac{200\pi \cdot r}{1,2}\right)$ (m) , $t \geq \theta_M = \frac{r}{v}$

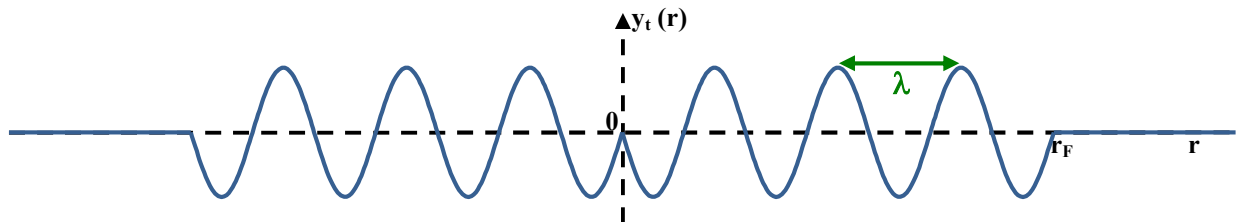
Pour $r = 1,5 \cdot 10^{-2}$ m $\rightarrow y_M(t) = 10^{-3} \sin\left(50\pi t + \pi - 200\pi \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{1,2}\right) = 10^{-3} \sin(200\pi t + \pi - 2,5\pi)$

il vient alors que : $y_M(t) = 10^{-3} \sin\left(200\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m) , $t \geq \theta_M = 5 \cdot 10^{-2}$ s

$$c - \frac{r}{\lambda} = \frac{1,5}{1,2} = 1,25 \rightarrow r = 1,25.\lambda \xrightarrow{\lambda=v.T} \theta_M = 1,25.T$$



$$2^0) \frac{t}{T} = t.N = 0,14.25 = 3,5 \rightarrow t = 3,5.T \xrightarrow{\lambda=v.T} r_F = 3,5.\lambda$$

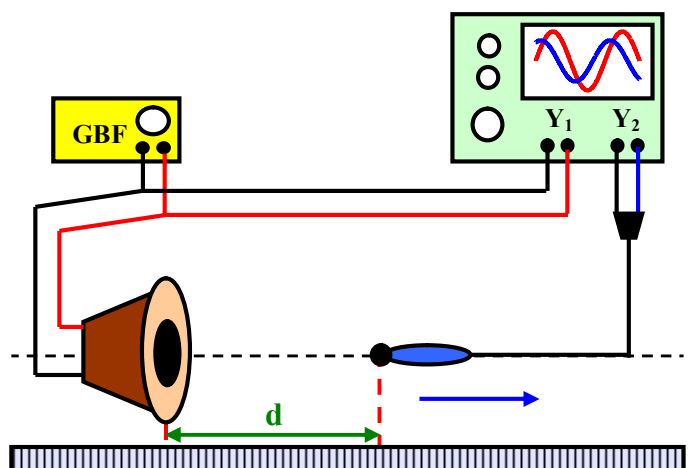


V / Onde progressive acoustique :

1⁰) Expérience de mise en évidence :

La tension u_1 visualisée sur la voie Y_1 représente le son émis par le haut parleur alimenté par le GBF.
La tension u_2 visualisée sur la voie Y_2 représente le son reçu par le microphone.

- En déplaçant le microphone à la même distance autour du haut parleur, u_2 reste stable.
- En éloignant le microphone, rectilignement, du haut parleur, l'amplitude de u_2 diminue et le déphasage entre u_1 et u_2 varie continuellement.



2⁰) Interprétation :

- L'onde sonore se propage dans toutes les directions.
- L'onde sonore est amortie (dilution d'énergie).
- Si pour une position donnée du microphone, u_1 et u_2 sont en phase, la distance minimale par laquelle il faut déplacer le microphone pour que u_1 et u_2 redeviennent en phase est égale à la longueur d'onde λ .

Application 3 :

A l'origine d'une règle graduée de longueur 1m, on met un haut parleur alimenté par un GBF réglé sur la fréquence $N = 1\text{KHz}$ et relié à la voie A d'un oscilloscope.

Le long de la règle graduée, on fait déplacer un microphone relié à la voie B du même oscilloscope.

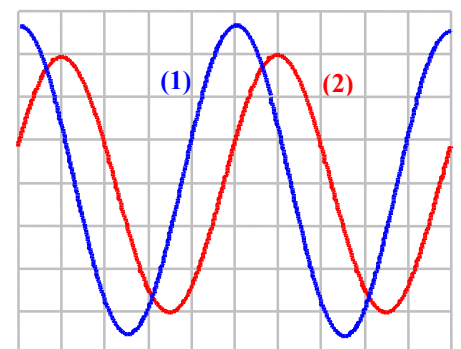
Pour une certaine position du microphone on obtient les oscillogrammes ci-contre :

1⁰) a - Associer, en le justifiant, chaque oscillogramme à la voie correspondante.

b - Quelle est la sensibilité horizontale de l'oscilloscope ?

2⁰) Déterminer les différentes abscisses des positions du microphone pour lesquelles on obtient des oscillogrammes de même déphasage que ceux ci-contre.

On donne : célérité du son $v = 340 \text{ m.s}^{-1}$.



Réponse :

1⁰) a - L'onde reçue par le microphone est amortie par dilution d'énergie :

On en conclue que : (1) $\longrightarrow$ voie A

et (2) $\longrightarrow$ voie B.

$$\mathbf{b} - T = k.S \rightarrow S = \frac{T}{k} = \frac{1}{kN} \xrightarrow{\text{A.N}} S = \frac{1}{5.10^3} \text{ et } S = 0,2.10^{-3} \text{ s.div}^{-1}.$$

2⁰) Soit t le temps mis par l'onde issue du haut parleur pour arriver au microphone.

On peut écrire : $t = nT + |\Delta\theta|$ où $\Delta\theta$ est le décalage horaire entre les deux signaux (1) et (2).

La position du microphone est d'abscisse $x = v.t$

$$\rightarrow x = n.vT + v|\Delta\theta| = n.\lambda + v|\Delta\theta|$$

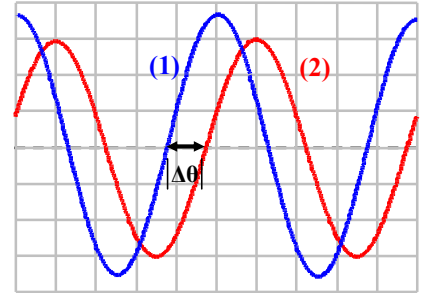
$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{v}{N} \xrightarrow{\text{A.N}} \lambda = \frac{340}{1000} \text{ et } \lambda = 0,34 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow x = 0,34.n + 0,068 \text{ m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Delta\theta| = \frac{T}{5} = 2.10^{-4} \text{ s} \rightarrow v.|\Delta\theta| = 340.2.10^{-4} = 0,068 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$0 \leq x \leq 1 \rightarrow 0 \leq 0,34.n + 0,068 \leq 1 \rightarrow \frac{-0,068}{0,34} \leq n \leq \frac{1-0,068}{0,34} \rightarrow -0,2 \leq n \leq 2,74$$

n	0	1	2
x (m)	0,068	0,408	0,748



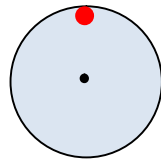
Pour en savoir plus

1⁰) La stroboscopie :

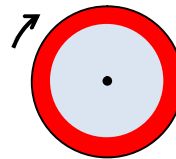
- A cause de la persistance des impressions lumineuses, l'œil humain est incapable de suivre un phénomène périodique dont la fréquence est supérieure à une dizaine de hertz (c'est le cas de la majorité des phénomènes ondulatoires).

Dans l'étude de ces phénomènes vibratoires, on peut utiliser un stroboscope qui est une source de lumière qui émet des flashes (ou éclairs) très brefs et intenses à une fréquence N_e connue et réglable.

- Considérons un disque tournant muni d'une tâche colorée à l'extrémité de l'un de ses rayons.
- * Lorsque le disque est immobile : la tâche est fixe.
- * Lorsque le disque est en mouvement de rotation uniforme de fréquence N : il apparaît à l'extrémité du disque tournant un anneau de même couleur que celle de la tâche.



disque immobile



disque en mouvement

• L'immobilité apparente :

- * Si entre deux éclairs consécutifs, le disque effectue n tours complets : la tâche paraît immobile.

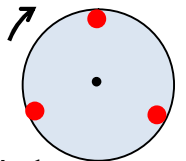
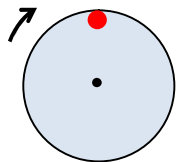
$$\rightarrow T_e = n.T, n \in \mathbb{N} \rightarrow N_e = \frac{N}{n}.$$

Remarque : N est la plus grande valeur de N_e pour laquelle la tâche paraît immobile.

- * Si entre deux éclairs consécutifs, le disque effectue n tours complets plus une fraction $\frac{1}{k}$ de tour : On observe k tâches immobiles situées aux sommets d'un polygone régulier ayant k cotés.

$$\rightarrow T_e = n.T + \frac{T}{k}, \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \rightarrow T_e = \frac{(k.n+1)}{k}.T \rightarrow N_e = \frac{k.N}{(k.n+1)}.$$

Exemple : pour $k = 3$, on observe 3 tâches immobiles situées aux sommets d'un triangle équilatéral.



• Le mouvement ralenti apparent :

- * Si entre deux éclairs consécutifs, le disque effectue n tours complets plus une petite fraction ε de tour : On observe un mouvement ralenti de la tâche dans le sens direct de rotation.

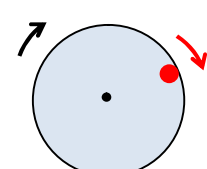
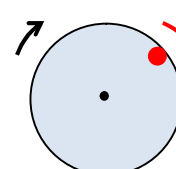
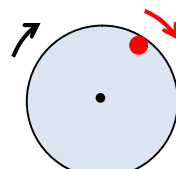
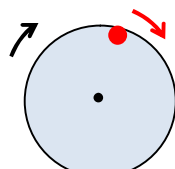
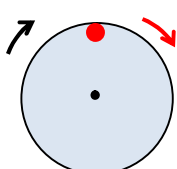
$$\rightarrow T_e = n.T + \varepsilon.T, \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ \varepsilon \ll 1 \end{cases} \rightarrow T_e = (n + \varepsilon).T \rightarrow N_e = \frac{N}{(n + \varepsilon)}.$$

Soit T_{app} la période du mouvement ralenti apparent.

$$\text{On a : } \begin{cases} T_{app} = \frac{T_e}{\varepsilon} \\ T_{app} = \frac{(n + \varepsilon).T}{\varepsilon} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{T_{app}}{T_e} \\ \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \left(\frac{T_{app}}{T} - 1 \right) \end{cases} \rightarrow \frac{T_{app}}{T_e} = \frac{1}{n} \left(\frac{T_{app}}{T} - 1 \right) \rightarrow \frac{1}{T_e} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{app}} \right)$$

La fréquence du mouvement ralenti apparent direct N_{app} est telle que :

$$N_e = \frac{1}{n} \cdot (N - N_{app}) \rightarrow N_{app} = N - n.N_e.$$



* Si entre deux éclairs consécutifs, le disque effectue n tours complets moins une petite fraction ε de tour :
On observe un mouvement ralenti de la tâche dans le sens rétrograde.

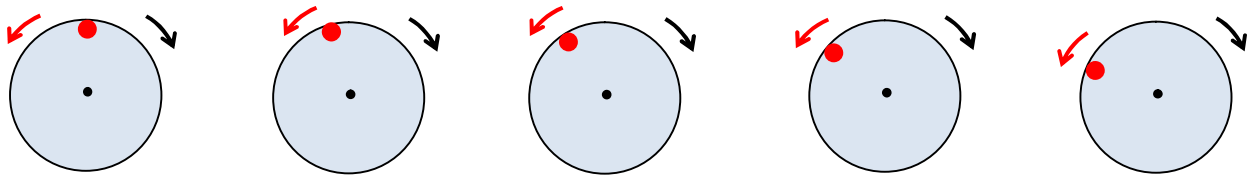
$$\rightarrow T_e = n.T - \varepsilon.T, \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ \varepsilon \ll 1 \end{cases} \rightarrow T_e = (n - \varepsilon).T \rightarrow N_e = \frac{N}{(n - \varepsilon)}.$$

Soit T_{app} la période du mouvement ralenti apparent.

$$\text{On a : } \begin{cases} T_{app} = \frac{T_e}{\varepsilon} \\ T_{app} = \frac{(n - \varepsilon).T}{\varepsilon} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{T_{app}}{T_e} \\ \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{T_{app}}{T} + 1 \right) \end{cases} \rightarrow \frac{T_{app}}{T_e} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{T_{app}}{T} + 1 \right) \rightarrow \frac{1}{T_e} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_{app}} \right)$$

La fréquence du mouvement ralenti apparent rétrograde N_{app} est telle que :

$$N_e = \frac{1}{n} \cdot (N + N_{app}) \rightarrow N_{app} = n.N_e - N.$$



2⁰) Fonction d'onde et équation d'onde :

• Considérons une onde progressive transversale périodique qui se propage le long d'une corde tendue.
Cette onde est provoquée par une source animée d'une vibration : $y_s(t) = y(x=0, t) = a \sin(\omega.t + \varphi_s)$

L'élongation d'un point d'abscisse x et à l'instant t est telle que : $y_x(t) = y(x, t) = y_{x=0} \left(t - \frac{x}{v} \right)$

La fonction d'onde s'écrit alors : $y(x, t) = a \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_s \right]$

sachant que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $\lambda = v.T$, il vient alors que : $y(x, t) = a \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_s \right]$

• On définit le nombre d'onde par : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (en m^{-1}), la fonction d'onde s'écrit alors :

$$y(x, t) = a \sin[(\omega.t - k.x) + \varphi_s]$$

Remarque : le nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est pour la périodicité spatiale l'équivalent de la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ pour la périodicité temporelle.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \xrightarrow{\lambda = v.T} k = \frac{2\pi}{v.T} \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \omega = v.k$$

• Considérons la fonction d'onde : $y(x, t) = a \sin[(\omega.t - k.x) + \varphi_s]$

* $\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega.a \cos[(\omega.t - k.x) + \varphi_s]$ représente la vitesse transversale d'une particule de la corde

* $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2.a \sin[(\omega.t - k.x) + \varphi_s] = -\omega^2.y(x, t)$ représente l'accélération d'une particule de la corde

* $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = -k.a \cos[(\omega.t - k.x) + \varphi_s]$ représente la pente de la corde

* $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -k^2.a \sin[(\omega.t - k.x) + \varphi_s] = -k^2.y(x, t)$ représente la courbure de la corde

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \xrightarrow{\omega=v.k} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Cette équation porte le nom d'équation d'onde (ou équation de d'Alembert)

3⁰) L'onde progressive longitudinale :

a - Onde progressive le long d'un ressort :

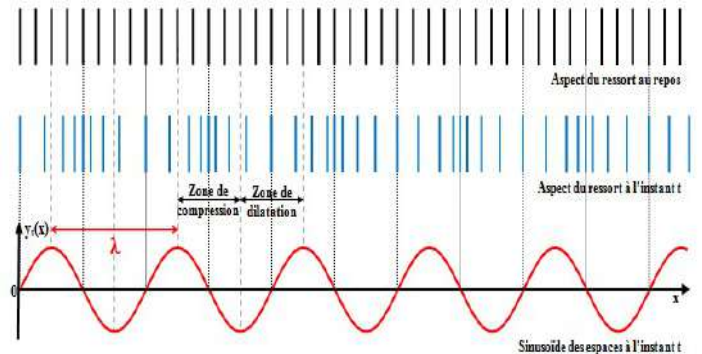
Un vibreur entretient à l'extrémité d'un ressort tendu une vibration sinusoïdale : $y_s(t) = a \sin(\omega.t + \varphi_s)$.

A un instant t donné, les élongations des différentes spires du ressort sont données par la sinusoïde des

espaces : $y_t(x) = a \sin\left[-\frac{2\pi}{\lambda}.x + (\omega.t + \varphi_s)\right]$.

A partir de cette équation, on peut reproduire l'aspect du ressort à l'instant t en assignant à chaque spire du ressort l'écart correspondant par rapport à sa position au repos.

On remarque que le long d'une longueur d'onde λ , les spires, de part et d'autre d'une spire d'élongation nulle, soit ils se rapprochent soit ils s'éloignent. Le ressort prend alors l'aspect d'une succession consécutive de zones de compression et de zones de dilatation le long du ressort.



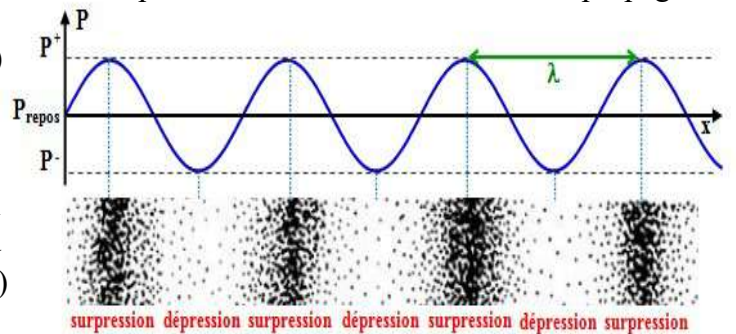
b - Onde progressive sonore :

- L'onde sonore résulte de la propagation d'une suite de compression et de dilatation du milieu propageur. L'onde sonore est alors une onde de pression.

Une source de vibrations mécaniques (haut parleur) génère, dans un fluide, une onde sonore (ou onde de pression) longitudinale qui se propage à travers le fluide.

La grandeur qui subit la perturbation est la pression à l'intérieur du fluide par rapport à la pression au repos (généralement la pression atmosphérique P_{atm}) ou pression d'équilibre.

On va donc observer une suite de surpression (compression) et de dépression (raréfaction) du fluide.



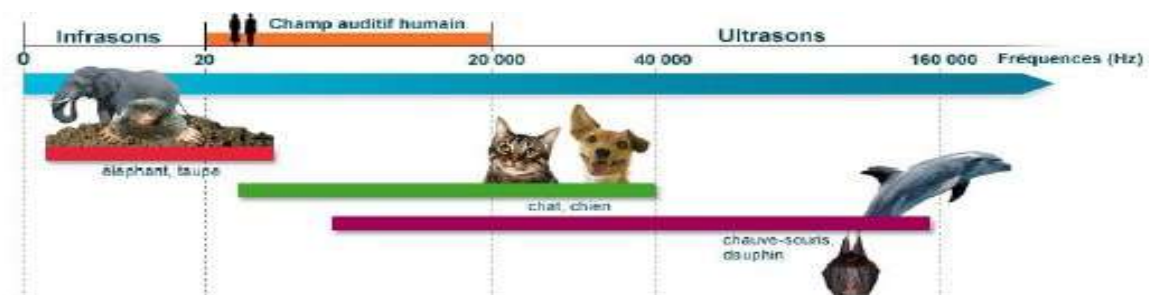
- Un son est dit audible s'il est détecté par l'oreille humaine.

Le domaine auditif humain s'étale de 20 Hz jusqu'à 20000 Hz. Au deçà de 20 Hz ce sont des infrasons, au delà de 20000 Hz ce sont des ultrasons.

Remarque :

- * les sons graves correspondent aux basses fréquences
- * les sons aigus correspondent aux hautes fréquences

20 Hz < fréquence des sons < 20 kHz



4⁰) Les ondes sismiques :

Les ondes sismiques sont des vibrations (provoquées par une rupture de faille) qui se propagent dans toutes les directions, depuis l'épicentre (foyer du séisme) situé dans l'écorce terrestre jusqu'à la surface du globe. Lorsqu'elles arrivent en surface, ces ondes font subir au sol un mouvement d'oscillation. Ces oscillations du sol sont ressenties comme un tremblement de terre.

Les ondes sismiques sont des ondes élastiques, c'est-à-dire que l'onde peut traverser un milieu sans modifier durablement ce milieu.

On distingue deux types d'ondes sismiques : les ondes de volume qui traversent la Terre et les ondes de surface qui se propagent parallèlement à sa surface de la terre.

- **Les ondes de volume :**

- * Les ondes P sont des ondes de compression semblables aux ondes sonores et qui se propagent dans tous les états de la matière.

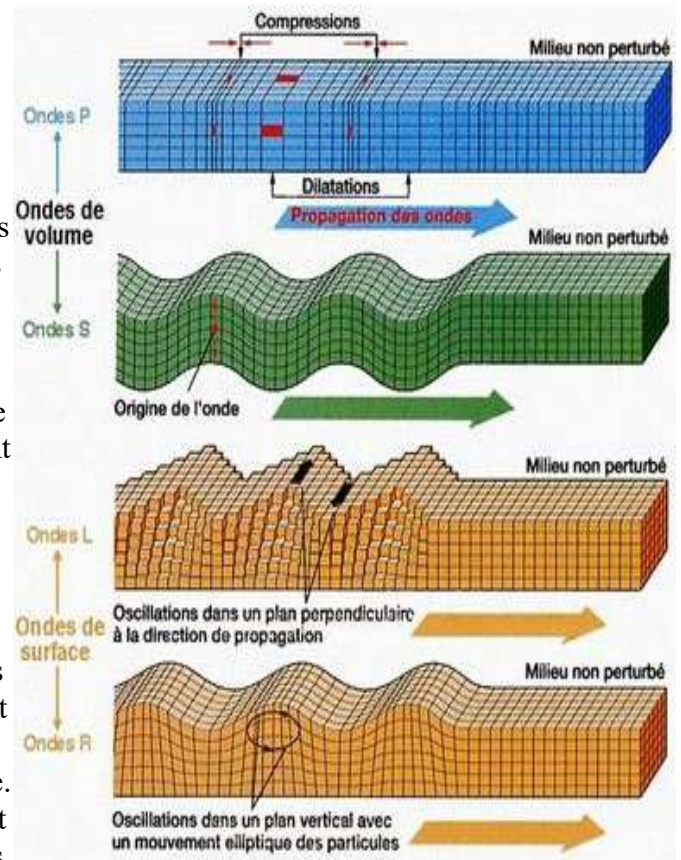
Les particules se déplacent selon un mouvement avant-arrière dans la direction de la propagation de l'onde.

- * Les ondes S sont des ondes de cisaillement qui ne se propagent que dans les solides. Les particules oscillent dans un plan vertical, à angle droit par rapport à la direction de propagation de l'onde.

- **Les ondes de surface :**

- * Les ondes de Love ou ondes L sont des ondes de cisaillement, comme les ondes S, mais qui oscillent dans un plan horizontal. Elles impriment au sol un mouvement de vibration latéral.

- * Les ondes de Rayleigh sont assimilables à une vague. Les particules du sol se déplacent selon une ellipse créant une véritable vague qui affecte le sol lors des séismes.



Applications

L'onde progressive le long d'une corde :

Exercice 1 :

La lame d'un vibreur est animée d'un mouvement sinusoïdal entrete nu de fréquence N .

A la lame du vibreur est fixée l'extrémité S d'une corde élastique, homogène et tendue horizontalement.

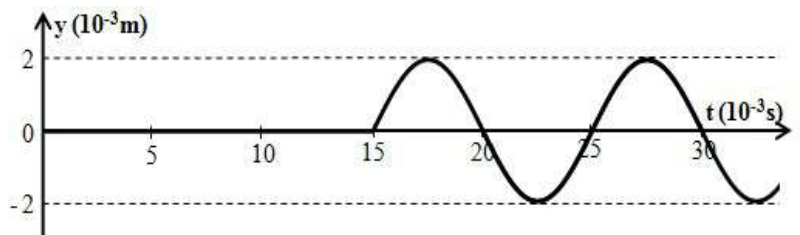
On évite, par un dispositif approprié, toute réflexion éventuelle de l'onde à l'autre extrémité de la corde et on néglige tout amortissement.

Le vibreur communique à l'extrémité S de la corde, à partir de la date $t = 0$, une vibration sinusoïdale dont l'équation horaire est de la forme : $y_S(t) = a \sin(\omega t + \varphi_S)$ avec $\omega = 2\pi N$.

Une onde progressive se propage le long de la corde qui matérialise l'axe des abscisses dont l'origine $x = 0$ coïncide avec la source S.



1⁰) La figure ci-dessous représente la sinusoïde du temps $y_A(t)$ correspondant à l'élongation d'un point A de la corde d'abscisse $x_A = 0,15$ m.



a - Déterminer l'amplitude a et la fréquence N du mouvement de la lame.

b - Montrer que la célérité de propagation de l'onde le long de la corde est $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

c - Définir la longueur d'onde λ , donner son expression en fonction de v et de N puis calculer sa valeur.

d - Montrer que $\varphi_S = 0$. Déterminer alors l'équation horaire $y_A(t)$ du mouvement du point A.

2⁰) L'équation horaire d'un point B de la corde, d'abscisse x_B , est :

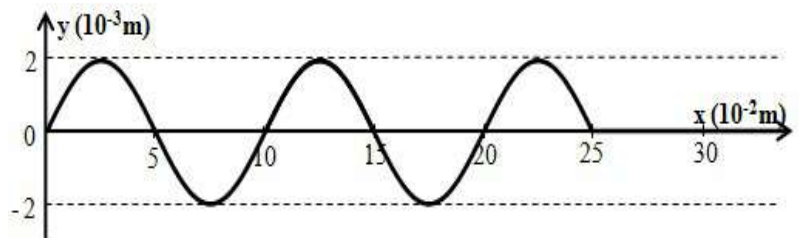
$$y_B(t) = 2 \cdot 10^{-3} \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{m}) ; \quad t \geq 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

a - Calculer la valeur de x_B .

b - Comparer les états vibratoires des points A et B.

c - Représenter sur un même graphique $y_S(t)$ et $y_B(t)$.

3⁰) La figure ci-dessous représente la sinusoïde des espaces $y_{t_F}(x)$ correspondant à l'aspect de la corde à un instant t_F .



a - Calculer la valeur de t_F .

b - Déterminer graphiquement, à l'instant t_F , le nombre et les abscisses des points qui ont une élongation minimale $y_{t_F}(x) = -a$.

c - Retrouver ce résultat par le calcul.

Réponse :

1⁰) a - Graphiquement :

* $a = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

* $T = 10^{-2} \text{ s} \xrightarrow{N=\frac{1}{T}} N = 100 \text{ Hz}$.

b - Graphiquement : $\theta_A = 15 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Or $\theta_A = \frac{x_A}{v} \rightarrow v = \frac{x_A}{\theta_A}$. A.N : $v = \frac{0,15}{15 \cdot 10^{-3}}$ et $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

c - La longueur d'onde λ est la distance parcourue par l'onde pendant une période temporelle T . $\lambda = v \cdot T$. A.N : $\lambda = 10 \cdot 10^{-2}$ et $\lambda = 0,1 \text{ m}$.

d - Principe de propagation : $y_A(t) = y_S(t - \theta_A)$; $t \geq \theta_A = \frac{x_A}{v}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A(\theta_A) = 0 \\ \left(\frac{dy_A(t)}{dt} \right)_{t=\theta_A} > 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{principe de propagation}} \left\{ \begin{array}{l} y_S(0) = 0 \\ \left(\frac{dy_S(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \cdot \sin \varphi_S = 0 \rightarrow \sin \varphi_S = 0 \rightarrow \varphi_S = \left| \begin{array}{l} 0 \\ \pi \end{array} \right. \rightarrow \varphi_S = 0 \\ \omega \cdot a \cdot \cos \varphi_S > 0 \rightarrow \cos \varphi_S > 0 \end{array} \right.$$

$$y_A(t) = y_S(t - \theta_A) = a \sin[\omega(t - \theta_A)] = a \sin(\omega t - \omega \theta_A) = a \sin(200\pi t - 200\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}) = a \sin(200\pi t + \pi) \quad ; \quad t \geq \theta_A$$

et $y_A(t) = 2 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t + \pi) \text{ (m)} \quad ; \quad t \geq 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$

2⁰) a - On a : $y_B(t) = 2 \cdot 10^{-3} \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (m)} \quad ; \quad t \geq 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$

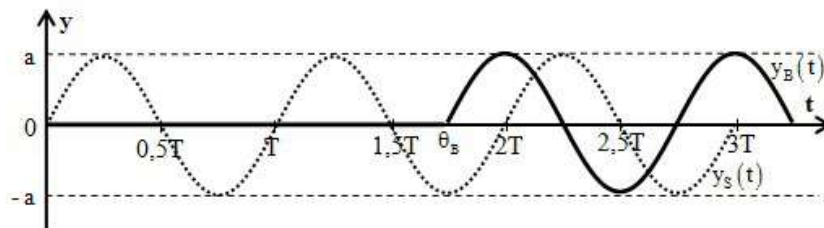
$$\theta_B = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ s. Or } \theta_B = \frac{x_B}{v} \rightarrow x_B = v \cdot \theta_B \quad . \quad \text{A.N: } x_B = 10 \cdot 1,75 \cdot 10^{-2} \quad \text{et } x_B = 0,175 \text{ m.}$$

Remarque : $\frac{\theta_B}{T} = \frac{1,75 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 1,75 \rightarrow \theta_B = 1,75 \cdot T \xrightarrow{\lambda = v \cdot T} x_B = 1,75 \lambda \quad \text{et } x_B = 0,175 \text{ m.}$

b - $\Delta\Phi = \Phi_A - \Phi_B = \frac{2\pi}{\lambda}(x_B - x_A)$. A.N: $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{0,1}(0,175 - 0,15)$ et $\Delta\Phi = \Phi_A - \Phi_B = \frac{\pi}{2}$.

Le point A vibre en quadrature avance de phase par rapport au point B.

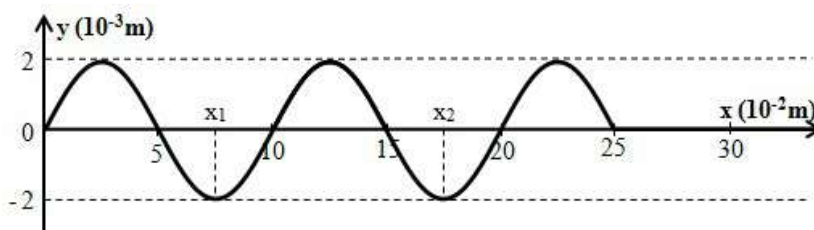
c - $\theta_B = 1,75 \cdot T$.



3⁰) a - Graphiquement : $x_F = 25 \cdot 10^{-2} \text{ m. Or } x_F = v \cdot t_F \rightarrow t_F = \frac{x_F}{v}$. A.N: $t_F = \frac{25 \cdot 10^{-2}}{10}$ et $t_F = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$

Remarque : $\frac{x_F}{\lambda} = \frac{25 \cdot 10^{-2}}{10^{-1}} = 2,5 \rightarrow x_F = 2,5 \lambda \xrightarrow{\lambda = v \cdot T} t_F = 2,5 \cdot T$ et $t_F = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$

b -



$y_{t_F}(x) = -a$ est vérifiée graphiquement pour deux points d'abscisses $x_1 = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ et $x_2 = 17,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

c - D'après le principe de propagation et pour un point M quelconque de la corde, d'abscisse x , on a :

$$y_M(t) = y_S(t - \theta_M) \quad \text{avec } \theta_M = \frac{x}{v} \xrightarrow{\varphi_S = 0} y(x, t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi \cdot x}{T \cdot v}\right) \xrightarrow{\lambda = v \cdot T} y(x, t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right).$$

A l'instant t_F , l'élongation des différents points de la corde atteints par l'onde est donnée par :

$$y_{t_F}(x) = a \sin\left(\omega t_F - \frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) \quad ; \quad x \leq x_F = v \cdot t_F$$

$$\rightarrow y_{t_F}(x) = a \sin\left(200\pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} - \frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) = a \sin\left(5\pi - \frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) \quad \text{et } y_{t_F}(x) = a \sin\left(\pi - \frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) \quad ; \quad x \leq x_F = 2,5\lambda$$

$$y_{t_F}(x) = -a \rightarrow \sin\left(\pi - \frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) = -1 \rightarrow \pi - \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} + 2K\pi \rightarrow \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} = \frac{3\pi}{2} - 2K\pi \quad \text{et } x = \frac{3\lambda}{4} - K\lambda$$

$$0 \leq x \leq x_F \rightarrow 0 \leq \frac{3\lambda}{4} - K\lambda \leq 2,5\lambda \rightarrow -\frac{3}{4} \leq -K \leq 2,5 - \frac{3}{4} \quad \text{et } 0,75 \geq K \geq -1,75 \quad \text{donc } K \in \{-1, 0\}$$

Il existe alors deux points tels que :

K	0	-1
x	$\frac{3\lambda}{4}$	$\frac{7\lambda}{4}$
x (m)	$7,5 \cdot 10^{-2}$	$17,5 \cdot 10^{-2}$

Exercice 2 :

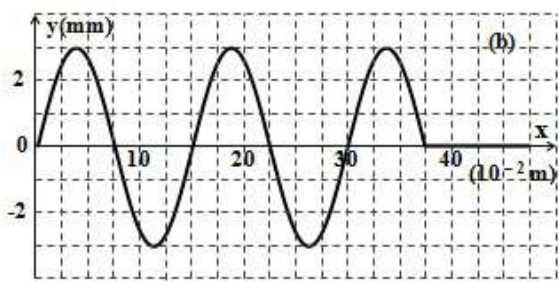
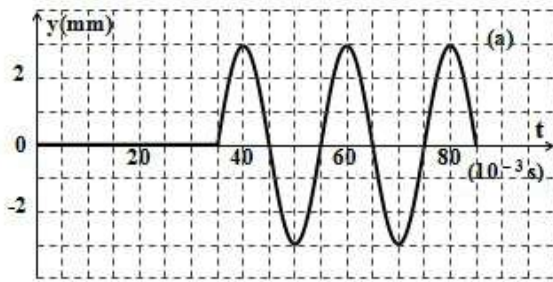
La lame d'un vibreur, de fréquence N , est reliée à l'extrémité d'une corde élastique, homogène, tendue horizontalement et de longueur $L = 0,75$ m. L'autre extrémité de la corde est reliée à un dispositif qui permet d'éviter toute réflexion éventuelle de l'onde.

On suppose que les amortissements sont négligeables.

Le vibreur communique à l'extrémité S de la corde, à partir de la date $t = 0$, une vibration sinusoïdale dont l'équation horaire est de la forme $y_s(t) = a \sin(2\pi Nt + \varphi_s)$.

Une onde progressive se propage le long de la corde qui matérialise l'axe des abscisses dont l'origine $x = 0$ coïncide avec la source S.

1⁰) Les courbes (a) et (b) ci-dessous représentent, respectivement, le mouvement au cours du temps $y_M(t)$ d'un point M d'abscisse x_M (sinusoïde du temps) et l'aspect de la corde $y_t(x)$ à un instant t_1 (sinusoïde des espaces) :



a - Pourquoi l'onde progressive le long de la corde est-elle dite transversale ?

b - Déterminer les valeurs de la fréquence N et de la longueur d'onde λ le long de la corde. En déduire la célérité de propagation v de l'onde le long de la corde.

c - Calculer la valeur de x_M et celle de t_1 .

2⁰) a - Quelle est l'équation horaire $y_s(t)$ du mouvement de la source S au cours du temps.

b - Déterminer l'équation horaire $y_M(t)$ du mouvement du point M de la corde.

c - Comment vibre le point M par rapport à la source S ?

3⁰) Représenter l'aspect de la corde à l'instant $t_2 = 70 \cdot 10^{-3}$ s.

4⁰) a - A partir de quel instant t_F la totalité de la corde est en vibration ?

b - Trouver, à l'instant t_F , le lieu des points qui vibrent en quadrature de phase avance par rapport à la source.

Réponse :

1⁰) a - La déformation de la corde s'effectue dans une direction perpendiculaire à celle de la propagation. L'onde progressive le long de la corde est alors dite transversale.

b - * Graphiquement (courbe (a)) : $T = 20 \cdot 10^{-3}$ s $\xrightarrow{N=\frac{1}{T}}$ $N = 50$ Hz.

* Graphiquement (courbe (b)) : $\lambda = 15 \cdot 10^{-2}$ m.

* $\lambda = v \cdot T \rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot N$. A.N: $v = 15 \cdot 10^{-2} \cdot 50$ et $v = 7,5 \text{ m.s}^{-1}$.

c - * $\theta_M = \frac{x_M}{v} \rightarrow x_M = v \cdot \theta_M$. Graphiquement : $\theta_M = 35 \cdot 10^{-3}$ s $\rightarrow x_M = 7,5 \cdot 35 \cdot 10^{-3}$ et $x_M = 26,25 \cdot 10^{-2}$ m.

Remarque : $\frac{\theta_M}{T} = \frac{35 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}} = 1,75 \rightarrow \theta_M = 1,75 \cdot T$ donc $x_M = 1,75 \cdot \lambda$ et $x_M = 26,25 \cdot 10^{-2}$ m.

* $x_{F1} = v \cdot t_1 \rightarrow t_1 = \frac{x_{F1}}{v}$. Graphiquement : $x_{F1} = 37,5 \cdot 10^{-2}$ m $\rightarrow t_1 = \frac{37,5 \cdot 10^{-2}}{7,5}$ et $t_1 = 50 \cdot 10^{-3}$ s.

Remarque : $\frac{x_{F1}}{\lambda} = \frac{37,5 \cdot 10^{-2}}{15 \cdot 10^{-2}} = 2,5 \rightarrow x_{F1} = 2,5 \cdot \lambda$ donc $t_1 = 2,5 \cdot T$ et $t_1 = 50 \cdot 10^{-3}$ s.

2⁰) a - $y_s(t) = a \sin(2\pi Nt + \varphi_s)$

D'après le principe de propagation : $y_M(t) = y_s(t - \theta_M)$ avec $\theta_M = \frac{x_M}{v}$

$$\begin{cases} y_M(\theta_M) = 0 \rightarrow y_s(0) = 0 \rightarrow a \sin(\varphi_s) = 0 \rightarrow \sin(\varphi_s) = 0 \text{ et } \varphi_s = 0 \text{ ou } \pi \\ \left(\frac{dy_M(t)}{dt} \right)_{t=\theta_M} > 0 \rightarrow \left(\frac{dy_s(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 \rightarrow 2\pi N a \cos(\varphi_s) > 0 \rightarrow \cos(\varphi_s) > 0 \text{ et } \varphi_s = 0 \end{cases}$$

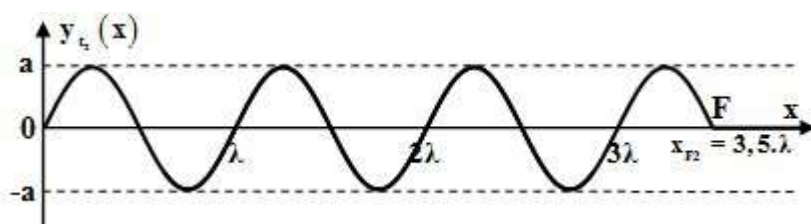
$$\left. \begin{array}{l} a = 3.10^{-3} \text{ m} \\ N = 50 \text{ Hz} \\ \varphi_s = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y_s(t) = 3.10^{-3} \sin(100\pi t) \text{ (m)}.$$

$$\mathbf{b} - y_M(t) = y_s(t - \theta_M) = y_s\left(t - \frac{x_M}{v}\right) \xrightarrow{\lambda = v.T} y_M(t) = a \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi x_M}{\lambda}\right), \quad t \geq \theta_M$$

$$y_M(t) = a \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi \cdot 1,75 \cdot \lambda}{\lambda}\right) = a \sin(2\pi Nt - 3,5\pi) \text{ et } y_M(t) = 3.10^{-3} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (m)}, \quad t \geq 1,75.T$$

$$\mathbf{c} - \varphi_s - \varphi_M = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \rightarrow \text{le point M vibre en quadrature avance de phase par rapport à la source S.}$$

$$\mathbf{3^0)} \quad \frac{t_2}{T} = \frac{70.10^{-3}}{20.10^{-3}} = 3,5 \rightarrow t_2 = 3,5.T \text{ donc } x_{F2} = 3,5.\lambda.$$



$$\mathbf{4^0)} \mathbf{a} - L = v.t_F \rightarrow t_F = \frac{L}{v}. \text{ A.N: } t_F = \frac{0,75}{7,5} \text{ et } t_f = 100.10^{-3} \text{ s.}$$

b - Les points qui vibrent en quadrature de phase avance par rapport à la source ont des abscisses : $x = (4K - 1)\frac{\lambda}{4}$

$$0 \leq x \leq L \rightarrow 0 \leq (4K - 1)\frac{\lambda}{4} \leq L \xrightarrow{L=5\lambda} \frac{1}{4} \leq K \leq \frac{20+1}{4} \text{ et } 0,25 \leq K \leq 5,25$$

K	1	2	3	4	5
x	$3\frac{\lambda}{4}$	$7\frac{\lambda}{4}$	$11\frac{\lambda}{4}$	$15\frac{\lambda}{4}$	$19\frac{\lambda}{4}$
x (10 ⁻² m)	11,25	26,25	41,25	56,25	71,25

Exercice 3 :

La lame d'un vibreur, de fréquence N, est reliée à l'extrémité d'une corde élastique, homogène, tendue horizontalement et de longueur L = 1 m. L'autre extrémité de la corde est reliée à un dispositif qui permet d'éviter toute réflexion éventuelle de l'onde. On suppose que les amortissements sont négligeables.

Le vibreur communique à l'extrémité S de la corde, à partir de la date t = 0, une vibration sinusoïdale dont l'équation horaire est de la forme : $y_s(t) = a \sin(2\pi Nt + \varphi_s)$. Une onde progressive se propage le long de la corde qui matérialise l'axe des abscisses dont l'origine x = 0 coïncide avec la source S.

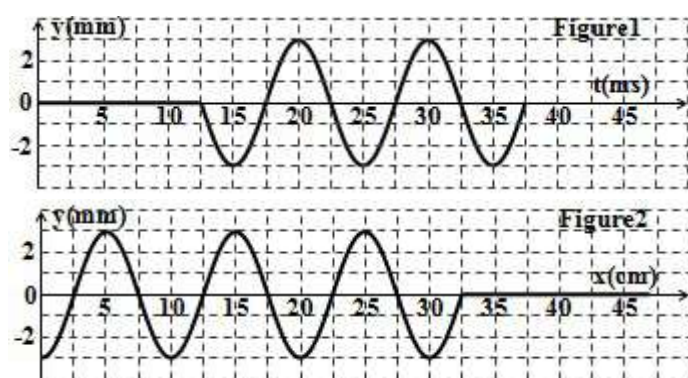
1⁰) La figure 1 ci-contre représente les variations de l'élongation $y_P(t)$ d'un point P de la corde situé à une distance x_P de la source S, alors que la figure 2 représente l'aspect de la corde à un instant t_1 .

a - Déterminer les valeurs de la fréquence N et de la longueur d'onde λ le long de la corde.

En déduire la célérité de propagation v de l'onde.

b - Calculer la valeur de x_P et celle de t_1 .

c - Montrer que $y_s(t) = 3.10^{-3} \sin(200\pi t + \pi)$ m



2⁰) a - Trouver l'équation horaire du mouvement du point P de la corde.

b - Comparer les états vibratoires des points P et S.

3⁰) a - Représenter l'aspect de la corde à l'instant $t_2 = 2,75.T$, T étant la période du vibreur.

b - Déterminer graphiquement, à l'instant t_2 , le nombre et les abscisses des points qui ont une elongation maximale $y_{t_2}(x) = a$.

c - Retrouver ce résultat par le calcul.

On donne l'équation d'onde : $y(t, x) = a \sin\left(\omega t + \pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$.

Réponse :

1⁰) a - * $N = \frac{1}{T} \xrightarrow[T=10.10^{-3}s]{\text{graphiquement}} N = \frac{1}{10.10^{-3}} \text{ et } N = 100 \text{ Hz.}$

* graphiquement : $\lambda = 10.10^{-2} \text{ m.}$

* on a : $\lambda = v.T \xrightarrow[T=\frac{1}{N}]{\text{graphiquement}} \lambda = \frac{v}{N} \text{ et } v = \lambda.N. \text{ A.N: } v = 10.10^{-2}.100 \text{ et } v = 10 \text{ m.s}^{-1}.$

b - * $\theta_p = \frac{x_p}{v} \rightarrow x_p = v.\theta_p \xrightarrow[\text{graphiquement: } \theta_p=12,5.10^{-3}s]{\text{A.N}} x_p = 10.12,5.10^{-3} \text{ et } x_p = 12,5.10^{-2} \text{ m.}$

Remarque : $\theta_p = 1,25.T \xrightarrow[\lambda=10.10^{-2}m]{\lambda=v.T} x_p = 1,25.\lambda \xrightarrow[\lambda=10.10^{-2}m]{\text{A.N}} x_p = 12,5.10^{-2} \text{ m.}$

* $x_F = v.t_1 \rightarrow t_1 = \frac{x_F}{v} \xrightarrow[\text{graphiquement: } x_F=32,5.10^{-2}m]{\text{A.N}} t_1 = \frac{32,5.10^{-2}}{10} \text{ et } t_1 = 32,5.10^{-3} \text{ s.}$

Remarque : $x_F = 3,25.\lambda \xrightarrow[\lambda=v.T]{\lambda=v.T} t_1 = 3,25.T \xrightarrow[T=10.10^{-3}s]{\text{A.N}} t_1 = 32,5.10^{-3} \text{ s.}$

c - Soit : $y_s(t) = a.\sin(\omega.t + \varphi_s)$ avec $\omega = 2\pi.N$.

* graphiquement : $a = 3.10^{-3} \text{ m.}$

* $\omega = 2\pi.N \xrightarrow[N=100\text{Hz}]{\text{graphiquement}} \omega = 200\pi \text{ rad.s}^{-1}.$

* D'après le principe de propagation : $y_p(t) = y_s(t - \theta_p)$ avec $\theta_p = \frac{x_p}{v}$

$$\left\{ \begin{array}{l} * y_p(\theta_p) = y_s(0) \xrightarrow{y_p(\theta_p)=0} y_s(0) = 0 \rightarrow a \sin \varphi_s = 0 \xrightarrow{a \neq 0} \sin \varphi_s = 0 \text{ et } \varphi_s = 0 \text{ ou } \varphi_s = \pi. \\ * \left(\frac{dy_p(t)}{dt} \right)_{t=\theta_p} = \left(\frac{dy_s(t)}{dt} \right)_{t=0} \xrightarrow{\left(\frac{dy_p(t)}{dt} \right)_{t=\theta_p} < 0} \left(\frac{dy_s(t)}{dt} \right)_{t=0} < 0 \\ \rightarrow \omega.a \cos \varphi_s < 0 \xrightarrow[\omega > 0]{a > 0} \cos \varphi_s < 0 \text{ et } \varphi_s = \pi \text{ rad.} \end{array} \right.$$

Donc : $y_s(t) = 3.10^{-3}.\sin(200\pi.t + \pi) \text{ (m)}$

2⁰) a - $y_p(t) = y_s(t - \theta_p) \quad t \geq \theta_p.$

$y_p(t) = a.\sin\left[\omega.(t - \theta_p) + \pi\right] = a.\sin(\omega.t + \pi - 200\pi.12,5.10^{-3}) = a.\sin(\omega.t + \pi - 2,5\pi)$

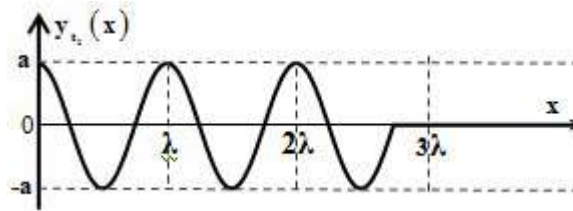
Donc : $y_p(t) = 3.10^{-3}.\sin\left(200\pi.t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (m)} ; \quad t \geq \theta_p = 12,5.10^{-3} \text{ s.}$

b - $\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_p \rightarrow \Delta\varphi = (\pi) - \left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

la source S vibre en quadrature avance de phase par rapport au point P.

Remarque : $\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_p = \frac{2\pi}{\lambda}.(x_p - 0) = \frac{2\pi}{10.10^{-2}}.(12,5.10^{-2} - 0) \text{ et } \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

$$3^0) \text{ a - } t_2 = 2,75.T \xrightarrow{\lambda = v.T} x_{F_2} = 2,75.\lambda .$$



b - Graphiquement, il y a 3 points tels que $y_{t_2}(x) = a$ d'abscisses respectives :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \lambda = 10 \text{ cm} \quad \text{et} \quad x_3 = 2\lambda = 20 \text{ cm}.$$

$$\text{c- } y(t, x) = a \sin\left(\omega t + \pi - \frac{2\pi.x}{\lambda}\right).$$

$$y_{t_2}(x) = a \cdot \sin\left(\omega.t_2 + \pi - \frac{2\pi.x}{\lambda}\right) = a \rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 2,75.T + \pi - \frac{2\pi.x}{\lambda}\right) = 1 \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi.x}{\lambda}\right) = 1$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi.x}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \rightarrow \frac{2\pi.x}{\lambda} = -2K\pi \quad \text{et} \quad x = -K.\lambda$$

$$x \leq x_{F_2} \rightarrow 0 \leq -K.\lambda \leq 2,75.\lambda \rightarrow 0 \geq K \geq -2,75 \rightarrow K \in \{0, -1, -2\}.$$

il y a donc 3 points tels que :

K	0	-1	-2
x	0	λ	2λ
x (cm)	0	10	20

Exercice 4 :

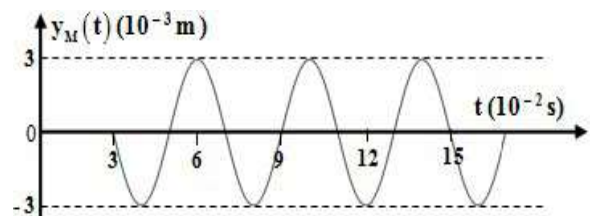
On provoque une onde progressive le long d'une corde élastique, infiniment longue, homogène, et tendue horizontalement en reliant son extrémité S à un vibreur qui entretient une vibration verticale sinusoïdale d'amplitude a et de fréquence N , l'autre extrémité de la corde est reliée à un dispositif qui permet d'éviter toute réflexion éventuelle de l'onde. On suppose que les amortissements sont négligeables.

La longueur de la corde est $L = 0,8 \text{ m}$.

L'équation horaire de la source S est de la forme : $y_s(t) = a \sin(\omega.t + \varphi_s)$ avec $\omega = 2\pi N$.

Un point quelconque de la corde sera repéré par son abscisse x sur un axe confondu avec la direction de la corde et dont l'origine coïncide avec la source de vibration S.

On donne ci-contre la sinusoïde du temps $y_M(t)$ correspondant à l'élongation au cours du temps d'un point M de la corde d'abscisse $x_M = 12 \text{ cm}$.



1⁰) Déterminer, graphiquement, les valeurs de :

a - l'amplitude a et la fréquence N du vibreur.

b - la célérité de propagation v de l'onde le long de la corde. Calculer alors la valeur de la longueur d'onde λ .

c - la phase à l'instant φ_s du mouvement de la source S.

2⁰) a - Etablir l'équation horaire $y_M(t)$ du mouvement du point M de la corde.

b - Montrer que le point M vibre en quadrature avance de phase par rapport à la source S.

3⁰) A partir de l'instant t_L , l'onde progressive s'établit le long de la totalité de la corde.

a - Préciser la valeur de t_L

b - Pour $t \geq t_L$, déterminer le nombre et les positions des points de la corde qui vibrent en opposition de phase par rapport à la source S.

c - Représenter l'aspect de la corde à l'instant $t = 0,65.t_L$.

Réponse :

1⁰) a - Graphiquement :

$$* \quad a = 3.10^{-3} \text{ m}.$$

* $1,5T = (9-3) \cdot 10^{-2} \rightarrow T = \frac{6}{1,5} \cdot 10^{-2}$ et $T = 4 \cdot 10^{-2}$ s. On a : $N = \frac{1}{T} \rightarrow N = \frac{1}{4 \cdot 10^{-2}}$ et $N = 25$ Hz.

b - On a : $\theta_M = \frac{x_M}{v} \rightarrow v = \frac{x_M}{\theta_M}$. A.N : $v = \frac{12 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-2}}$ et $v = 4 \text{ m.s}^{-1}$.

On a : $\lambda = \frac{v}{N} \xrightarrow{\text{A.N}} \lambda = \frac{4}{25}$ et $\lambda = 16 \cdot 10^{-2}$ m.

c - D'après le principe de propagation : $y_M(t) = y_S(t - \theta_M)$, $t \geq \theta_M = \frac{x_M}{v}$ avec $y_S(t) = a \sin(\omega t + \varphi_S)$

$$\begin{cases} y_M(\theta_M) = 0 \rightarrow y_S(0) = 0 \rightarrow a \sin(\varphi_S) = 0 \rightarrow \sin(\varphi_S) = 0 \rightarrow \varphi_S = 0 \text{ ou } \pi \text{ rad} \\ \left(\frac{dy_M(t)}{dt} \right)_{t=\theta_M} < 0 \rightarrow \left(\frac{dy_S(t)}{dt} \right)_{t=0} < 0 \rightarrow \omega a \cos(\varphi_S) < 0 \rightarrow \cos(\varphi_S) < 0 \rightarrow \varphi_S = \pi \text{ rad.} \end{cases}$$

2⁰) a - $y_M(t) = y_S(t - \theta_M)$, $t \geq \theta_M = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s} = \frac{3}{4} T$

$$y_M(t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3}{4} T + \pi\right) = a \sin\left(2\pi N t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ et}$$

$$y_M(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin\left(50\pi t - \frac{\pi}{2}\right) (\text{m}), \quad t \geq \theta_M = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$

b - $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_M \rightarrow \Delta\varphi = (\pi) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} (\text{mod } 2\pi) \rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad.}$

Le point M vibre alors en quadrature avance de phase par rapport à la source S.

Remarque : $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_M = \frac{2\pi}{\lambda}(x_M - 0) \rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{16}(12) = \frac{3\pi}{2} (\text{mod } 2\pi) \rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad.}$

3⁰) a - $L = v \cdot t_L \rightarrow t_L = \frac{L}{v}$. A.N : $t_L = \frac{0,8}{4}$ et $t_L = 0,2$ s.

Remarque : $\frac{L}{\lambda} = \frac{0,8}{0,16} = 5 \rightarrow L = 5\lambda \rightarrow t_L = 5T$ et $t_L = 20 \cdot 10^{-2}$ s.

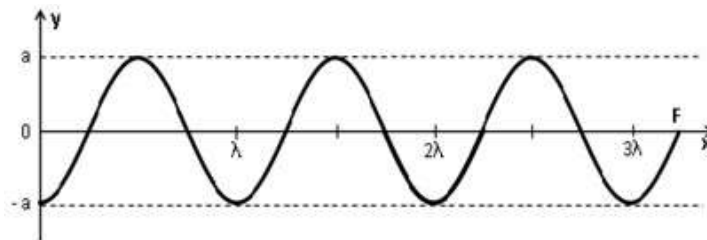
b - Les abscisses des points qui vibrent en opposition de phase par rapport à la source: $x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$; $k \in \mathbb{N}$.

$$0 \leq x \leq L \rightarrow 0 \leq (2k+1)\frac{\lambda}{2} \leq 5\lambda \rightarrow 0 \leq (2k+1) \leq 10 \rightarrow -1 \leq 2k \leq 9 \text{ et } -0,5 \leq k \leq 4,5.$$

$k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ donc il existe 5 points tels que:

k	0	1	2	3	4
x	$\frac{\lambda}{2}$	$3 \cdot \frac{\lambda}{2}$	$5 \cdot \frac{\lambda}{2}$	$7 \cdot \frac{\lambda}{2}$	$9 \cdot \frac{\lambda}{2}$
x (cm)	8	24	40	56	72

c - $\frac{t}{T} = \frac{0,65 \cdot 5T}{T} = 3,25 \rightarrow t = 3,25T \rightarrow x_F = 3,25\lambda.$



Exercice 5 :

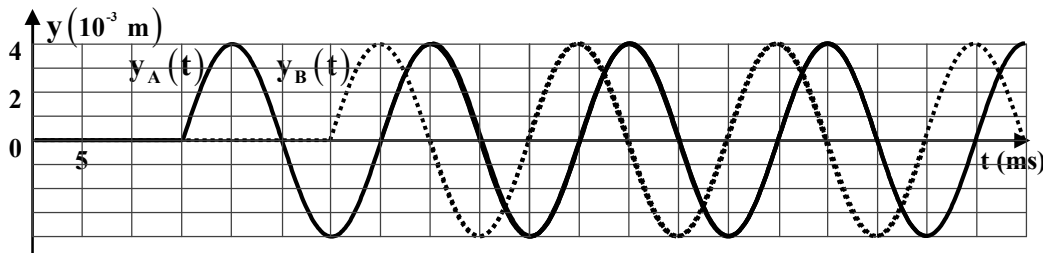
On provoque une onde progressive le long d'une corde élastique, infiniment longue, homogène, et tendue horizontalement en reliant son extrémité S à un vibreur qui entretient une vibration verticale sinusoïdale d'amplitude a et de fréquence N, l'autre extrémité de la corde est reliée à un dispositif qui permet d'éviter toute réflexion éventuelle de l'onde.

On suppose que les amortissements sont négligeables.

L'équation horaire de la source S est de la forme : $y_s(t) = a \sin(2\pi Nt + \varphi_s)$.

Un point quelconque de la corde sera repéré par son abscisse x sur un axe confondu avec la direction de la corde et dont l'origine coïncide avec la source de vibration S.

Sur le graphe ci-dessous sont représentés les diagrammes de mouvement de deux points A et B de la corde distants de $d = x_B - x_A = 15 \text{ cm}$.



1⁰) Déterminer à partir du graphe :

a - La période T puis calculer la fréquence N du vibreur.

b - Les deux instants de dates θ_A et θ_B à partir desquelles, respectivement les points A et B débutent leurs mouvements.

2⁰) Montrer que la célérité de propagation de l'onde le long de la corde est $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

3⁰) a - Calculer la valeur de la longueur d'onde λ .

b - Calculer les valeurs des abscisses x_A et x_B respectivement des points A et B.

4⁰) a - Montrer que la phase initiale de la source S est $\varphi_s = 0$.

b - Etablir l'équation horaire du point A.

c - Comparer les états vibratoires des points S et A.

5⁰) On se propose de représenter l'aspect de la corde à une date $t_0 = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

a - Montrer que l'aspect de la corde à la date t_0 , se traduit par l'équation :

$$y_{t_0}(x) = 4 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10 \cdot \pi \cdot x\right) (\text{m}) ; \quad x \leq v \cdot t_0$$

b - Représenter l'aspect de la corde à cet instant t_0 .

c - Déterminer, par le calcul, le nombre et la position des points de la corde qui possèdent à la date t_0 une elongation nulle et une vitesse positive.

Réponse :

1⁰) a - $T = 4,5 \cdot 10^{-3} \rightarrow T = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

$$N = \frac{1}{T} \xrightarrow{T=2 \cdot 10^{-2} \text{ s}} N = 50 \text{ Hz}.$$

b - * $\theta_A = 3,5 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_B = 15 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ($\theta_A = 0,75 \cdot T$)

* $\theta_B = 6,5 \cdot 10^{-3}$ et $\theta_B = 30 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ($\theta_A = 1,5 \cdot T$)

$$2^0) \theta_B - \theta_A = \frac{x_B}{v} - \frac{x_A}{v} = \frac{x_B - x_A}{v} = \frac{d}{v} \rightarrow v = \frac{d}{\theta_B - \theta_A}. \quad \text{A.N: } v = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-3} - 15 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et } v = 10 \text{ m.s}^{-1}.$$

3⁰) a - $\lambda = v \cdot T \rightarrow \lambda = 10 \cdot 2 \cdot 10^{-2}$ et $\lambda = 20 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

b - * $x_A = v \cdot \theta_A \rightarrow x_A = 10 \cdot 3,5 \cdot 10^{-3}$ et $x_A = 35 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

* $x_B = v \cdot \theta_B \rightarrow x_B = 10 \cdot 15 \cdot 10^{-3}$ et $x_B = 150 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

4⁰) a - D'après le principe de propagation : $y_A(t) = y_s(t - \theta_A)$, $t \geq \theta_A$

$$y_A(\theta_A) = 0 \xrightarrow{y_A(\theta_A) = y_s(0)} y_s(0) = 0 \rightarrow a \sin(\varphi_s) = 0 \rightarrow \varphi_s = 0 \text{ ou } \pi.$$

$$\left(\frac{dy_A(t)}{dt}\right)_{t=\theta_A} > 0 \xrightarrow{\left(\frac{dy_A(t)}{dt}\right)_{t=\theta_A} = \left(\frac{dy_s(t)}{dt}\right)_{t=0}} \left(\frac{dy_s(t)}{dt}\right)_{t=0} > 0 \rightarrow \omega \cdot a \cos(\varphi_s) > 0 \rightarrow \cos(\varphi_s) > 0 \text{ donc } \varphi_s = 0$$

b - $y_A(t) = y_S(t - \theta_A)$, $t \geq \theta_A = 0,75.T$

$\rightarrow y_A(t) = a \sin[\omega(t - \theta_A)] = a \sin(\omega t - \omega \theta_A) = a \sin\left[\omega t - \frac{2\pi}{T} \cdot 0,75.T\right] = a \sin(\omega t - 1,5\pi)$

$a = 4.10^{-3} \text{ m}$
 $\omega = 2\pi.50 = 100\pi \text{ rad.s}^{-1}$ $\left\{ \rightarrow y_A(t) = 4.10^{-3} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}, \quad t \geq \theta_A = 15.10^{-3} \text{ s} \right.$

c - $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_A = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \rightarrow$ la point A vibre en quadrature de phase avance par rapport à la source S.

5⁰ **a** - Principe de propagation : $y_M(t) = y_S(t - \theta_M)$ avec $\theta_M = \frac{x_M}{v}$

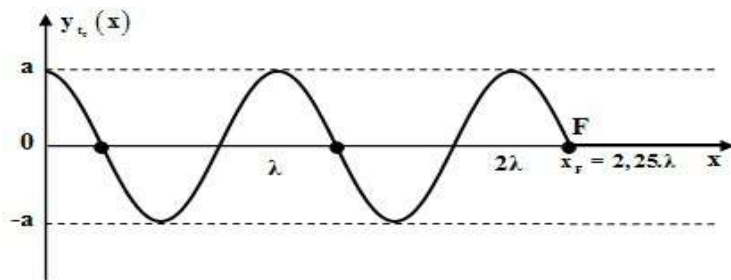
$\rightarrow y(x, t) = a \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = a \sin\left(\omega t - \omega \frac{x}{v}\right) = a \sin\left[\omega t - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{x}{v}\right] = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

A la date t_0 et pour $x \leq x_F = v.t_0$:

$y_{t_0}(x) = a \sin\left(\omega t_0 - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \xrightarrow[t_0 = 2,25.T]{t_0 = 4,5.10^{-2} \text{ s}} y_{t_0}(x) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 2,25.T - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

$a = 4.10^{-3} \text{ m}$
 $\lambda = 20.10^{-2} \text{ m}$ $\left\{ \rightarrow y_{t_0}(x) = 4.10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10\pi x\right) \text{ m}, \quad x \leq x_F = 45.10^{-2} \text{ m} \right.$

b - $\frac{t_0}{T} = \frac{4,5.10^{-2}}{2.10^{-2}} = 2,25 \rightarrow t_0 = 2,25.T \xrightarrow[x_F = v.t_0]{\lambda = v.T} x_F = 2,25.\lambda$



c - $y(x, t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

$\left\{ \begin{aligned} y(x, t_0) &= a \sin\left(\omega t_0 - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0 \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{2K\pi}{(2K+1)\pi} \\ \left(\frac{dy(x, t)}{dt}\right)_{t=t_0} &> 0 \rightarrow \omega a \cos\left(\omega t_0 - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) > 0 \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) > 0 \text{ et } \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda} = 2K\pi \end{aligned} \right.$

$\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda} = 2K\pi \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{2x}{\lambda} = 2K \rightarrow \frac{2x}{\lambda} = \frac{1}{2} - 2K \rightarrow x = \frac{\lambda}{4} - K\lambda \text{ et } x = (1 - 4K)\frac{\lambda}{4}$

$0 \leq x \leq x_F \rightarrow 0 \leq (1 - 4K)\frac{\lambda}{4} \leq 2,25\lambda \rightarrow 0 \leq (1 - 4K) \leq 9 \rightarrow -1 \leq -4K \leq 8 \text{ et } \frac{1}{4} \geq K \geq -2$

$k \in \{-1, -2, 0\}$ donc il existe 3 points tels que

K	0	-1	-2
x	$\frac{\lambda}{4}$	$5\frac{\lambda}{4}$	$9\frac{\lambda}{4}$
x (10⁻² m)	5	25	45

Exercice 6 :

On considère une corde élastique, infiniment longue, homogène et tendue horizontalement.

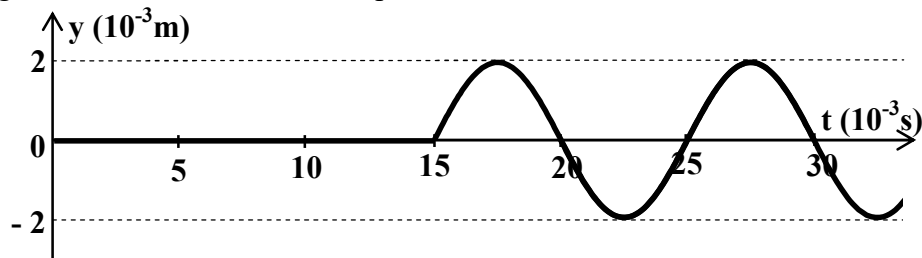
La lame d'un vibreur anime à l'extrémité S de la corde un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal perpendiculaire à la direction de la corde, d'amplitude a et de fréquence N .

$y_S(t) = a \sin(2\pi N.t + \varphi_S)$

1⁰ Quelle est la nature de l'onde créée le long de la corde ?

2⁰) La lame débute son mouvement à l'instant $t = 0$.

On donne le diagramme du mouvement d'un point M_1 de la corde d'abscisse $x_1 = SM_1 = 0,15 \text{ m}$:



a - Déterminer l'amplitude a et la fréquence N du mouvement de la lame.

b - Montrer que la célérité de propagation de l'onde le long de la corde est $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

c - Définir la longueur d'onde λ puis calculer sa valeur.

d - Montrer que $\varphi_s = 0$. Déterminer alors l'équation horaire du mouvement du point M_1 .

3⁰) Etablir l'équation horaire d'un point quelconque M de la corde situé au repos à l'abscisse $x = SM$.

4⁰) a - Quelle est l'abscisse $x_2 = SM_2$ du point M_2 le plus proche de M_1 , situé après M_1 ($x_2 > x_1$) et dont le mouvement est en opposition de phase par rapport à celui du point M_1 .

b - Représenter le diagramme du mouvement du point M_2 .

5⁰) a - Représenter l'aspect de la corde à l'instant $t = 3,5.10^{-2} \text{ s}$.

b - Déterminer, à cet instant, le nombre et les abscisses des points de la corde qui ont une élongation nulle et qui se déplacent dans le sens des élongations négatives.

Réponse :

1⁰) L'onde créée le long de la corde est une onde progressive transversale.

2⁰) a - * $a = 2.10^{-3} \text{ m}$.

$$* T = 10^{-2} \text{ s} \xrightarrow{N = \frac{1}{T}} N = 100 \text{ Hz}.$$

$$b - \theta_1 = \frac{x_1}{v} \rightarrow v = \frac{x_1}{\theta_1}.$$

$$A.N : v = \frac{15.10^{-2}}{15.10^{-3}} \text{ et } v = 10 \text{ m.s}^{-1}.$$

c - La longueur d'onde λ est la distance parcourue par l'onde pendant une période T .

$$\lambda = v.T = \frac{v}{N}.$$

$$A.N : \lambda = \frac{10}{100} \text{ et } \lambda = 0,1 \text{ m}.$$

$$d - y_s(t) = a \sin(\omega t + \varphi_s) \text{ et } y_{M_1}(t) = y_s(t - \theta_1)$$

$$\left. \begin{aligned} y_{M_1}(\theta_1) = y_s(0) = 0 &\rightarrow a \sin \varphi_s = 0 \xrightarrow{a \neq 0} \sin \varphi_s = 0 \\ \left(\frac{dy_{M_1}(t)}{dt} \right)_{t=\theta_1} = \left(\frac{dy_s(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 &\rightarrow \omega a \cos \varphi_s > 0 \xrightarrow[\omega > 0]{a > 0} \cos \varphi_s > 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \varphi_s = 0$$

$$\frac{\theta_1}{T} = \frac{15.10^{-3}}{10.10^{-3}} = 1,5 \rightarrow \theta_1 = 1,5.T.$$

$$y_{M_1}(t) = y_s(t - \theta_1) \rightarrow y_{M_1}(t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{T} \cdot 1,5T\right) = a \sin(2\pi Nt - 3\pi), \text{ on écrit alors :}$$

$$\begin{cases} y_{M_1}(t) = 2.10^{-3}(200\pi t + \pi) \text{ m} & ; t \geq \theta_1 = 1,5.T \\ y_{M_1}(t) = 0 & ; t < \theta_1 = 1,5.T \end{cases}$$

$$3^0) y_M(t) = y_s(t - \theta) \text{ avec } \theta = \frac{x}{v}$$

$$y_M(t) = a \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = a \sin \left(2\pi Nt - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{x}{v} \right) = a \sin \left(2\pi Nt - \frac{2\pi x}{\lambda} \right), \text{ on écrit alors :}$$

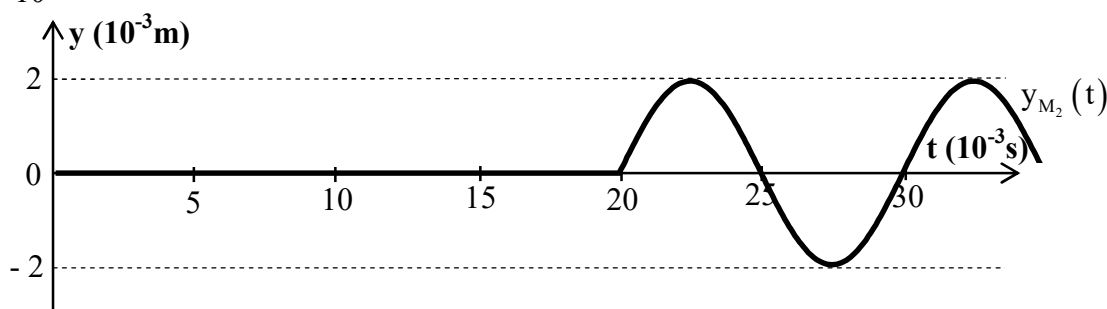
$$\begin{cases} y_M(t) = 2 \cdot 10^{-3} (200\pi t - 20\pi x) \text{ m} & ; \quad t \geq \theta = \frac{x}{v} \\ y_M(t) = 0 & ; \quad t < \theta = \frac{x}{v} \end{cases}$$

4⁰) a - M_1 et M_2 vibrent en opposition de phase : $\Delta\Phi = (2k+1)\pi \xrightarrow{\Delta\Phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}} \delta = (x_2 - x_1) = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$.

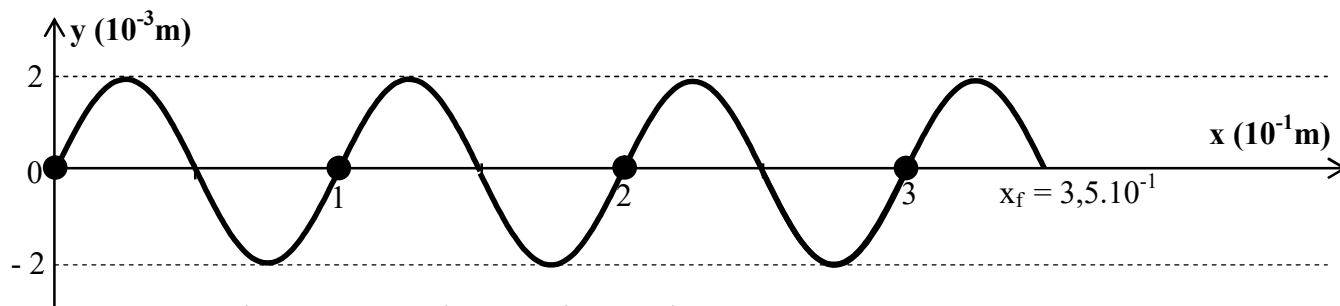
On en déduit que : $x_2 = x_1 + (2k+1) \frac{\lambda}{2}$, $k \in \mathbb{N}$ (car $x_2 > x_1$)

M_2 le plus proche de $M_1 \xrightarrow{k=0} x_2 = x_1 + \frac{\lambda}{2} = 0,15 + \frac{0,1}{2}$ et $x_2 = 0,2 \text{ m}$.

b - $\theta_2 = \frac{x_2}{v} = \frac{0,2}{10}$ et $\theta_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ donc : $\theta_2 = 2 \cdot T$.



5⁰) a - $\frac{t}{T} = \frac{3,5 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 3,5 \rightarrow t = 3,5 \cdot T \xrightarrow{x_f = v \cdot t} x_f = 3,5 \lambda$.



b - $y_t(x) = a \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot 3,5T - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = a \sin \left(\pi - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$

* $y_t(x) = 0 \rightarrow \sin \left(\pi - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = 0$ et $\left(\pi - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = \begin{cases} 0 + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases}$

* $\left(\frac{dy(t, x)}{dt} \right)_{t=3,5T} < 0 \rightarrow \omega a \cos \left(\pi - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) < 0 \rightarrow \cos \left(\pi - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) < 0$ donc $\pi - \frac{2\pi x}{\lambda} = \pi + 2k\pi$.

$\pi - \frac{2\pi x}{\lambda} = \pi + 2k\pi \rightarrow x = -k \cdot \lambda$.

D'autre part : $0 \leq x \leq 3,5\lambda \rightarrow 0 \leq -k\lambda \leq 3,5\lambda \rightarrow 0 \geq k \geq -3,5$.

$k \in \{-3, -1, -2, 0\}$ donc il existe 4 points tels que

k	0	-1	-2	-3
x (m)	0	0,1	0,2	0,3

Exercice 7 :

La lame d'un vibreur est animée d'un mouvement sinusoïdal entreteu de fréquence $N = 50 \text{ Hz}$.

A la lame du vibreur est fixée l'extrémité S d'une corde élastique tendue horizontalement.

On empêche la réflexion des ondes par un dispositif approprié.

Le vibreur impose au point S un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude $a = 5.10^{-3}$ m.

On supposera l'amortissement des ondes négligeable lors de la propagation.

1⁰) a - Donner la définition de la longueur d'onde λ .

b - Sachant que la célérité des ondes le long de la corde est $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$, vérifier que $\lambda = 0,2$ m.

2⁰) En prenant comme origine du temps l'instant où la lame du vibreur passe par sa position d'équilibre dans le sens des elongations positives :

a - Déterminer l'équation $y_s(t)$ du mouvement du point source S.

b - Soit un point M de la corde situé à une distance x du point source S. Montrer que l'équation du mouvement du point M peut s'écrire sous la forme :

$$y_M(t) = 5.10^{-3} \sin[10\pi(10t - x)] \text{ (m)} ; t \geq 0,1x \text{ (s)}$$

3⁰) Soient deux points A et B de la corde situés respectivement à des distances $x_A = 10$ cm et $x_B = 15$ cm du point source S.

a - Ecrire les équations de mouvement $y_A(t)$ et $y_B(t)$ respectivement des point A et B.

b - Représenter sur un même graphique $y_A(t)$ et $y_B(t)$.

c - Préciser la valeur du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$ entre les mouvements des points A et B ?

4⁰) a - Représenter l'aspect de la corde à l'instant $t = 0,04$ s.

b - Déterminer, à l'instant $t = 0,04$ s, les abscisses des points de la corde qui vibrent en quadrature retard de phase par rapport à la source S.

Réponse :

1⁰) a - La longueur d'onde λ est la distance parcourue par l'onde pendant une période temporelle T.

b - $\lambda = \frac{v}{N} \xrightarrow{A.N} \lambda = \frac{10}{50}$ et $\lambda = 0,2$ m.

2⁰) a - $y_s(t) = a \sin(\omega t + \varphi_s)$

$$a = 5.10^{-3} \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi N \xrightarrow{A.N} \omega = 100\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\begin{cases} y_s(0) = 0 \rightarrow a \sin(\varphi_s) = 0 \rightarrow \sin(\varphi_s) = 0 \rightarrow \varphi_s = 0 \text{ ou } \pi \text{ rad} \\ \left(\frac{dy_s(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 \rightarrow \omega a \cos(\varphi_s) > 0 \rightarrow \cos(\varphi_s) > 0 \rightarrow \varphi_s = 0. \end{cases}$$

$$\text{donc : } y_s(t) = 5.10^{-3} \sin(100\pi t) \text{ m.}$$

b - D'après le principe de propagation : $y_M(t) = y_s(t - \theta)$, $t \geq \theta = \frac{x}{v}$

$$y_M(t) = a \sin\left(100\pi t - 100\pi \frac{x}{v}\right), t \geq \theta \xrightarrow{v=10 \text{ m.s}^{-1}} y_M(t) = a \sin(100\pi t - 10\pi x), t \geq \theta$$

$$\xrightarrow{\theta = \frac{x}{v} = 0,1x} y_M(t) = 5.10^{-3} \sin[10\pi(10t - x)] \text{ (m)}, t \geq 0,1x \text{ (s)}$$

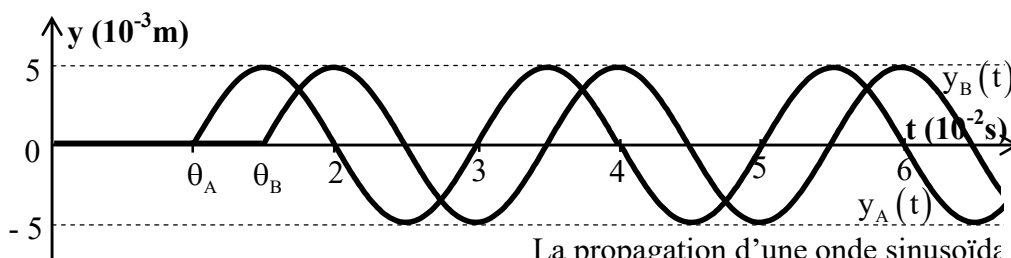
3⁰) a - * $y_A(t) = 5.10^{-3} \sin(100\pi t - 10\pi.10^{-1})$, $t \geq 0,1.10^{-1}$

$$\text{et } y_A(t) = 5.10^{-3} \sin(100\pi t + \pi) \text{ m, } t \geq 10^{-2} \text{ s}$$

$$* y_B(t) = 5.10^{-3} \sin(100\pi t - 10\pi.1,5.10^{-1}), t \geq 0,1.1,5.10^{-1}$$

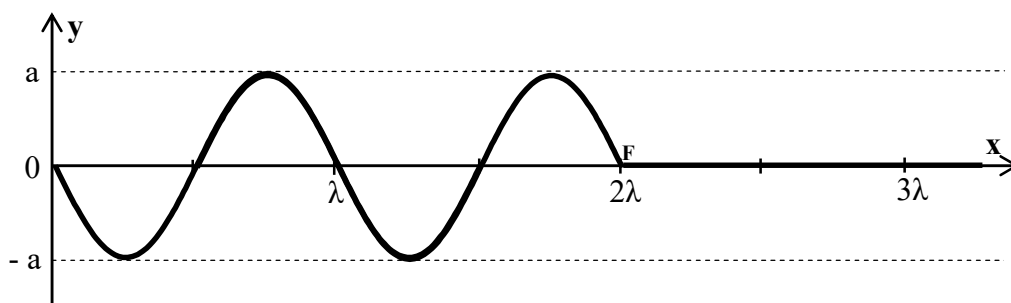
$$\text{et } y_B(t) = 5.10^{-3} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m, } t \geq 1,5.10^{-2} \text{ s}$$

$$\text{b - } T = \frac{1}{N} \rightarrow T = \frac{1}{50} \text{ et } T = 2.10^{-2} \text{ s. donc } \theta_A = \frac{T}{2} \text{ et } \theta_B = \frac{3T}{4}.$$



$$c - \Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \pi \text{ et } \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$4^0) a - t = 0,04 \text{ s} \rightarrow t = 2T \xrightarrow{\lambda = v \cdot T} x_F = 2\lambda$$



$$b - \text{Quadrature retard par rapport à la source : } x = (4k+1)\frac{\lambda}{4}, \quad x \leq x_F = 2\lambda$$

$$0 \leq (4k+1)\frac{\lambda}{4} \leq 2\lambda \rightarrow 0 \leq 4k+1 \leq 8 \rightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{7}{4} \rightarrow k \in \{0,1\}$$

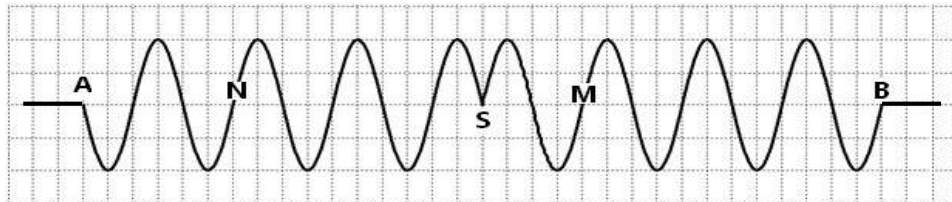
k	0	1
x	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{5\lambda}{4}$
x (m)	0,05	0,25

L'onde progressive à la surface d'un liquide :

Exercice 1 :

Un vibreur, muni d'une pointe, provoque à la surface d'un liquide contenu dans une cuve à ondes et à partir d'une date $t = 0 \text{ s}$, une onde progressive sinusoïdale circulaire de source S et de fréquence 20 Hz.

La figure ci-dessous représente, à une date t_1 , une coupe de cette surface par un plan vertical passant par la source S :



A cette date t_1 , la source S a une élongation nulle et une vitesse négative.

La distance AB est égale à 8 cm. L'amplitude de l'onde, supposée constante, est égale à 4 mm.

1⁰) a - Calculer la valeur de la longueur d'onde λ .

b - Déterminer la valeur de la célérité v de l'onde qui se propage à la surface du liquide.

c - En déduire la valeur de la date t_1 .

2⁰) a - Etablir l'équation horaire du mouvement de la source S.

b - En déduire celle du point M. de la surface du liquide.

3⁰) Comparer les mouvements des deux points M et N de la surface du liquide.

4⁰) Préciser le nombre de fois, dans l'intervalle de temps $[0 ; 0,5 \text{ s}]$, que le point B passe par une ligne de crêtes (l'élongation de B est alors maximale).

Réponse :

$$1^0) a - \text{D'après la figure, } AB = 8\lambda \rightarrow \lambda = \frac{AB}{8} \xrightarrow{AB=8 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \lambda = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{8} \text{ et } \lambda = 10^{-2} \text{ m}$$

$$b - \text{On a : } \lambda = \frac{v}{N} \rightarrow v = \lambda \cdot N \quad A.N: \quad v = 10^{-2} \cdot 20 \text{ et } v = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$$

c - D'après la figure, le front d'onde se situe, à l'instant t_1 , sur une ligne d'onde telle que $r_F = 4\lambda$.

$$r_F = v \cdot t_1 \xrightarrow{r_F=4\lambda} t_1 = \frac{4\lambda}{v} \xrightarrow{v=\lambda \cdot N} t_1 = \frac{4}{N} \xrightarrow{N=20 \text{ Hz}} t_1 = \frac{4}{20} \text{ et } t_1 = 0,2 \text{ s}$$

$$\text{Remarque : } r_F = 4\lambda \rightarrow t_1 = 4T \xrightarrow{T=\frac{1}{N} \rightarrow T=\frac{1}{20} \text{ et } T=0,05 \text{ s}} t_1 = 4 \cdot 0,05 \text{ et } t_1 = 0,2 \text{ s}$$

2⁰) a - On a : $y_s(t) = a \sin(\omega.t + \varphi_s)$.

* $a = 4.10^{-3} \text{ m}$.

* $\omega = 2\pi N \rightarrow \omega = 2\pi.20 \text{ et } \omega = 40\pi \text{ rad.s}^{-1}$.

* $y_s(t_1) = 0 \xrightarrow{t_1=4T} a \sin\left(\frac{2\pi}{T}.4T + \varphi_s\right) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} \sin(\varphi_s) = 0 \text{ et } \varphi_s = 0 \text{ ou } \pi$.

$$\left(\frac{dy_s(t)}{dt}\right)_{t=t_1} < 0 \rightarrow \omega.a.\cos(\varphi_s) < 0 \xrightarrow{\omega>0, a>0} \cos(\varphi_s) < 0 \text{ et } \varphi_s = \pi \text{ rad}$$

Il vient alors que : $y_s(t) = 4.10^{-3} \sin(40\pi.t + \pi) \text{ m}$.

b - D'après le principe de propagation :

$$y_M(t) = y_s(t - \theta_M), \quad t \geq \theta_M \quad \text{avec} \quad \theta_M = \frac{r_M}{v} \xrightarrow{r_M=\lambda} \theta_M = \frac{\lambda}{v} = T$$

$$y_M(t) = a \sin\left(\omega.t - \frac{2\pi}{T}T + \pi\right) \rightarrow y_M(t) = a \sin(\omega.t + \pi), \quad t \geq \theta_M$$

Il vient alors que : $y_M(t) = 4.10^{-3} \sin(40\pi.t + \pi) \text{ m}, \quad t \geq 5.10^{-2} \text{ s}$.

3⁰) $\varphi_M - \varphi_N = \frac{2\pi}{\lambda}(r_N - r_M) \rightarrow \varphi_M - \varphi_N = \frac{2\pi}{\lambda}(2,5\lambda - \lambda) = 3\pi \pmod{2\pi} \text{ et } \varphi_M - \varphi_N = \pi \text{ rad}$

Les mouvements des points M et N sont alors en opposition de phase.

4⁰) Le point B commence à vibrer avec un retard $\theta_B = \frac{r_B}{v} = \frac{r_{F_1}}{v} = \frac{4\lambda}{v} = 4T$ par rapport à la source.

Lorsqu'il est en mouvement et à chaque vibration de période $T = 0,05 \text{ s}$, il passe une fois par la ligne de crête. Sur l'intervalle de temps $[0; 0,5\text{s}] = [0; 10T]$ il passera donc 6 fois par une ligne de crête.

Remarque :

$$y_B(t) = y_s(t - \theta_B), \quad t \geq \theta_B = 4T \rightarrow y_B(t) = a \sin\left(\omega.t - \frac{2\pi}{T}4T + \pi\right) \text{ et } y_B(t) = a \sin(\omega.t + \pi), \quad t \geq 4T$$

$$y_B(t) = a \rightarrow \sin(\omega.t + \pi) = 1 \rightarrow \frac{2\pi}{T}.t + \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } t = -\frac{T}{4} + kT$$

$$4T \leq t \leq 10T \rightarrow 4T \leq -\frac{T}{4} + kT \leq 10T \rightarrow 4,25 \leq k \leq 10,25 \text{ et } k \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Exercice 2 :

On considère une cuve à ondes associée à un vibreur électrique de fréquence $N = 25 \text{ Hz}$. Le vibreur est muni d'une fourche à une pointe. Cette pointe frappe la surface du liquide en un point S considéré alors comme source de vibrations sinusoïdales transversales d'équation :

$$y_s(t) = a \sin(\omega.t + \varphi_s) \text{ avec } a = 2.10^{-3} \text{ m et } \omega = 2\pi.N$$

1⁰) La source commence son mouvement, à $t = 0$, de sa position d'élongation nulle en se déplaçant vers les élongations croissantes. Déterminer la valeur de φ_s

2⁰) En lumière ordinaire, on observe, à la surface du liquide, la propagation de rides circulaires centrées sur la source S.

a - La surface du liquide est éclairée par une lumière stroboscopique de fréquence N_e .

Préciser la plus grande valeur de N_e pour laquelle on observe des rides circulaires concentriques immobiles.

b - La différence entre les diamètres de deux rides circulaires consécutives de même nature est $d = 2 \text{ cm}$.

Calculer la valeur de la longueur d'onde λ . Déduire celle de la célérité v de l'onde à la surface du liquide.

3⁰) Un point M de la surface du liquide reproduit le mouvement de la source avec un retard $\theta = 0,1 \text{ s}$.

a - Préciser la distance r séparant le point M de la source S.

b - Déterminer l'équation de mouvement du point M.

c - Comparer les mouvements de S et de M.

d - Représenter sur le même graphique, les diagrammes de mouvements de S et de M.

4⁰) a - Représenter une coupe transversale verticale de la surface du liquide, passant par la source S, à la date $t_F = 0,15 \text{ s}$.

b - A l'instant t_F , l'élongation des différents points de la surface du liquide, définis par leurs distances r par rapport à la source est donnée par l'équation : $y_{t_F}(r) = a \sin\left(\omega t_F + \varphi_s - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)$, $r \leq r_F = v \cdot t_F$.

Déterminer, à l'instant t_F , les lieux des points de la surface du liquide, définis par leurs distances r par rapport à la source, qui passent par une élongation nulle avec une vitesse v_0 positive.
Calculer la valeur de v_0 .

Réponse :

1⁰) $y_s(t) = a \sin(\omega t + \varphi_s)$

$$\begin{cases} y_s(0) = 0 \rightarrow a \sin(\varphi_s) = 0 \rightarrow \sin(\varphi_s) = 0 \rightarrow \varphi_s = 0 \text{ ou } \pi \text{ rad} \\ \left(\frac{dy_s(t)}{dt}\right)_{t=0} > 0 \rightarrow \omega a \cos(\varphi_s) > 0 \rightarrow \cos(\varphi_s) > 0 \rightarrow \varphi_s = 0. \end{cases}$$

2⁰) a - Immobilité apparente : $T_e = k \cdot T \rightarrow N_e = \frac{N}{k} \xrightarrow[N_e \text{ est maximale}]{k=1} N_e = N \text{ et } N_e = 25 \text{ Hz}.$

b - $d = 2\lambda \rightarrow \lambda = \frac{d}{2}$. A.N : $\lambda = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2}$ et $\lambda = 10^{-2} \text{ m}.$

On a : $\lambda = \frac{v}{N} \rightarrow v = \lambda \cdot N$. A.N : $v = 10^{-2} \cdot 25$ et $v = 0,25 \text{ m.s}^{-1}.$

3⁰) a - $r = v \cdot \theta \xrightarrow{\text{A.N}} r = 0,25 \cdot 0,1$ et $r = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$

Remarque : $\frac{\theta}{T} = 0,1 \cdot 25 = 2,5 \rightarrow \theta = 2,5T \rightarrow r = 2,5\lambda$ et $r = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$

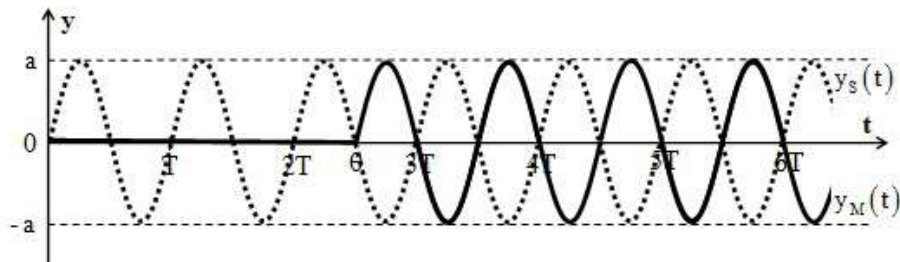
b - D'après le principe de propagation : $y_M(t) = y_s(t - \theta)$, $t \geq \theta$

$y_M(t) = a \sin(2\pi N \cdot t - 2\pi N \cdot \theta) = a \sin(50\pi \cdot t - 50\pi \cdot 0,1)$ et $y_M(t) = 2 \cdot 10^{-3} \sin(50\pi \cdot t - \pi) \text{ (m)}, t \geq \theta = 0,1 \text{ s}.$

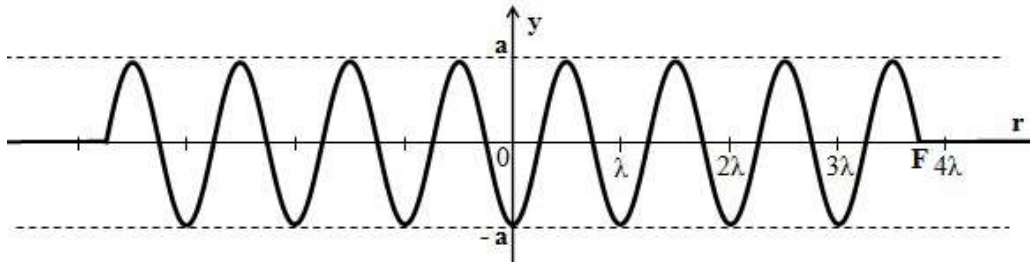
c - $\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_M \rightarrow \Delta\varphi = (0) - (-\pi) \rightarrow \Delta\varphi = \pi \text{ rad}.$

Le point M vibre alors en opposition de phase par rapport à la source S.

d - $r = 2,5\lambda \rightarrow \theta = 2,5T$



4⁰) a - $\frac{t_F}{T} = t_F \cdot N = 0,15 \cdot 25 = 3,75 \rightarrow t_F = 3,75T \rightarrow r_F = 3,75\lambda.$



b - $y_{t_F}(r) = 0 \rightarrow a \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 3,75T + 0 - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) = 0 \rightarrow -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi r}{\lambda}\right) = \begin{cases} 2k\pi \\ (2k+1)\pi \end{cases}$

$\left(\frac{dy_r(t)}{dt}\right)_{t=t_F} > 0 \rightarrow \omega a \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) > 0 \xrightarrow[\omega > 0]{a > 0} \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) > 0 \text{ et } -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi r}{\lambda}\right) = 2k\pi$

$$\rightarrow \frac{2\pi r}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \quad \text{et} \quad r = -k\lambda - \frac{\lambda}{4}; \quad k \text{ entier } < 0.$$

$$0 \leq r \leq r_F \rightarrow 0 \leq -k\lambda - \frac{\lambda}{4} \leq 3,75\lambda \rightarrow \frac{1}{4} \leq -k \leq 4 \quad \text{et} \quad -0,25 \geq k \geq -4.$$

$k \in \{-1, -2, -3, -4\}$ donc il existe 4 points :

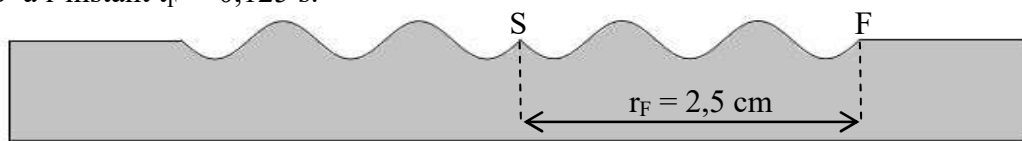
k	-1	-2	-3	-4
x	$3 \cdot \frac{\lambda}{4}$	$7 \cdot \frac{\lambda}{4}$	$11 \cdot \frac{\lambda}{4}$	$15 \cdot \frac{\lambda}{4}$
x (cm)	0,75	1,75	2,75	3,75

$$v_0 = \omega a \cos(2k\pi) \rightarrow v_0 = \omega a. \quad \text{A.N: } v_0 = 50\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad v_0 = 0,1\pi \text{ m.s}^{-1} \quad (v_0 = 0,314 \text{ m.s}^{-1})$$

Exercice 3 :

Un vibreur de fréquence N est muni d'une pointe S qui provoque, à la surface d'un liquide contenu dans une cuve à ondes, une onde progressive circulaire d'amplitude a et de longueur d'onde λ .

La figure ci-dessous représente une coupe transversale de la surface du liquide passant par la source de vibration S à l'instant $t_F = 0,125$ s.



1⁰) Sachant que l'équation du mouvement de la pointe est : $y_s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(40\pi t + \pi)$ m, en déduire les valeurs de N et de a .

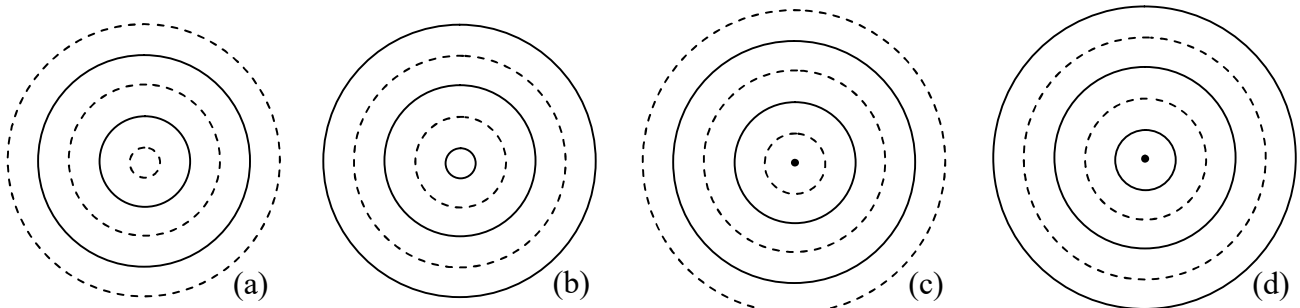
2⁰) Déterminer les valeurs de la longueur d'onde λ et la célérité v de l'onde à la surface du liquide.

3⁰) Quelle sera l'équation horaire $y_F(t)$ du mouvement du point F en fonction du temps.

Représenter alors, sur le même graphique, les mouvements de F et de S en fonction du temps

4⁰) Quelle est, parmi les figures suivantes, celle qui représente les lignes d'ondes observées, à l'instant t_F , à la surface du liquide ? Justifier votre choix.

Les lignes de crêtes sont dessinées en traits continus et les lignes de creux en traits discontinus.



Réponse :

1⁰) $y_s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(40\pi t + \pi)$ m

Par identification avec l'expression générale de la vibration de la pointe $y_s(t) = a \sin(2\pi Nt + \varphi_s)$:

* $a = 3 \cdot 10^{-3}$ m

* $40\pi = 2\pi N \rightarrow N = 20$ Hz.

2⁰) Graphiquement : $r_F = 2,5\lambda \rightarrow \lambda = \frac{r_F}{2,5}$. A.N: $\lambda = \frac{2,5 \cdot 10^{-2}}{2,5}$ et $\lambda = 10^{-2}$ m.

On a : $\lambda = \frac{v}{N} \rightarrow v = \lambda \cdot N$. A.N: $v = 10^{-2} \cdot 20$ et $v = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$.

Ou bien : $r_F = v \cdot t_F \rightarrow v = \frac{r_F}{t_F}$. A.N: $v = \frac{2,5 \cdot 10^{-2}}{0,125}$ et $v = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$.

3⁰) Pour $t \geq t_F = 0,125 \text{ s}$:

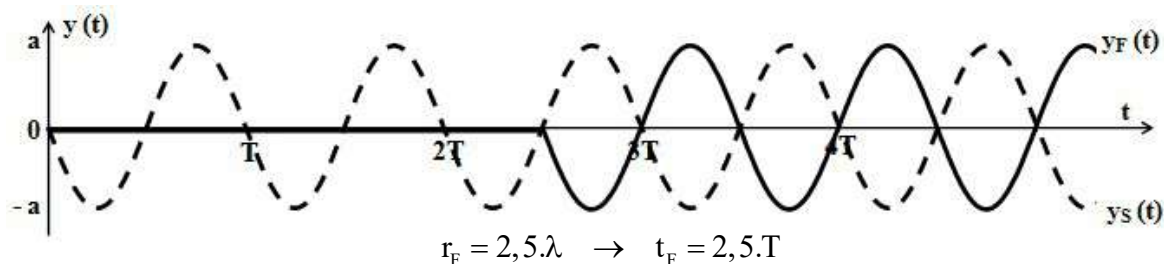
$$y_F(t) = y_s(t - t_F)$$

$$y_F(t) = 3.10^{-3} \sin(40\pi(t - t_F) + \pi)$$

$$y_F(t) = 3.10^{-3} \sin(40\pi(t - 0,125) + \pi)$$

$$y_F(t) = 3.10^{-3} \sin(40\pi t - 5\pi + \pi)$$

$$\text{donc : } \begin{cases} y_F(t) = 3.10^{-3} \sin(40\pi t) \text{ m} & , \quad t \geq t_F \\ y_F(t) = 0 & , \quad t < t_F \end{cases}$$



4⁰) La figure doit comporter 2 lignes de crête et 3 lignes de creux avec $y_s(t) = 0$.

La figure (a) vérifie ces critères.

Exercice 4 :

Un vibreur de fréquence $N = 20 \text{ Hz}$ est muni d'une pointe qui produit à la surface d'un liquide, contenu dans une cuve à ondes, des ondes progressives circulaires sinusoïdales d'amplitude a et de longueur d'onde λ . On néglige les amortissements et on évite toute réflexion de l'onde aux bords de la cuve.

L'équation du mouvement de la pointe, source de vibrations, est : $y_s(t) = 2.10^{-3} \sin(40\pi.t) \text{ (m)}$.

En éclairage stroboscopique et à l'immobilité apparente, on observe, à la surface du liquide, des rides circulaires concentriques, équidistantes et immobiles, centrées sur la source de vibrations.

La figure ci-contre représente l'aspect de la surface du liquide :

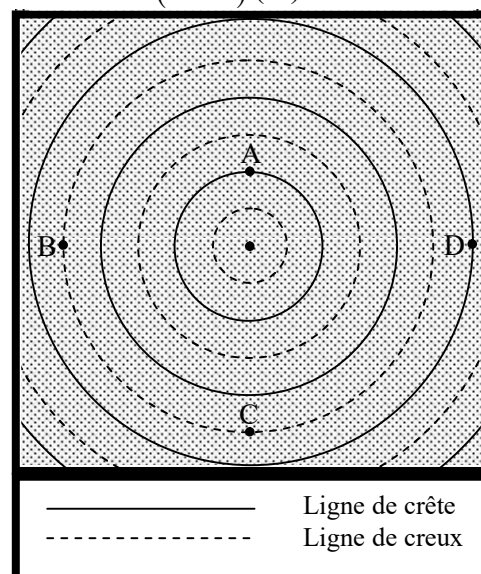
1⁰) a - Que représente la distance d qui sépare deux rides consécutives de même nature ?

b - La mesure de cette distance donne $d = 2 \text{ cm}$. Montrer alors que la célérité de propagation de l'onde est $v = 0,4 \text{ m.s}^{-1}$.

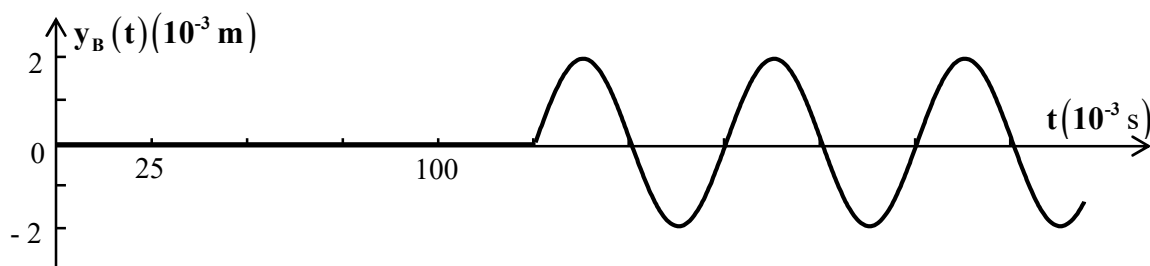
c - Parmi les points A, B, C et D de la surface du liquide, quels sont ceux qui vibrent en phase ? justifier la réponse.

d - Soit un point M de la surface du liquide situé à une distance r de la source. Montrer que l'équation horaire du mouvement du point M, lorsqu'il est atteint par l'onde issue de la source, est :

$$y(r, t) = 2.10^{-3} \sin(40\pi.t - 100\pi.r) \text{ (m)} \quad ; \quad t \geq \frac{r}{v}$$



2⁰) La figure ci-dessous représente le diagramme de mouvement du point B de la surface du liquide :



a - Montrer que le point A commence à vibrer à l'instant de date $\theta_A = 50 \text{ ms}$.

b - Représenter sur une même figure les diagrammes de mouvement des points A et B.

3⁰) Faire une représentation d'une coupe transversale de la surface du liquide passant par la source de vibration à l'instant $t_F = 87,5$ ms.

Réponse :

1⁰) a - La distance d séparant deux rides consécutives de même nature est la longueur d'onde λ .

b - On a : $v = \lambda \cdot N$. A.N : $v = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 20$ et $v = 0,4 \text{ m.s}^{-1}$.

c - Soient deux points M et N de la surface du liquide situés respectivement à une distance r_M et r_N de la

source de vibration. On a : $\Delta\varphi = \varphi_N - \varphi_M = \frac{2\pi}{\lambda}(r_M - r_N)$.

Les points M et N vibrent en phase $\rightarrow \Delta\varphi = 2K\pi$, K entier $\rightarrow (r_M - r_N) = K \cdot \lambda$, K entier.

- $(r_D - r_A) = 2\lambda$ (K = 2) $\rightarrow$ A et D vibrent en phase.

- $(r_B - r_C) = 0$ (K = 0) $\rightarrow$ B et C vibrent en phase

Remarque : Tous les points appartenant à des rides de même nature vibrent en phase.

d - D'après le principe de propagation : $y_M(t) = y_s(t - \theta)$ avec $\theta = \frac{r}{v}$

$$\rightarrow y(r, t) = y(0, t - \theta) \quad t \geq \theta = \frac{r}{v}$$

$$\rightarrow y(r, t) = a \sin(2\pi N(t - \theta)) = a \sin(2\pi Nt - 2\pi N\theta) = a \sin\left(2\pi Nt - 2\pi N \frac{r}{v}\right) \quad t \geq \theta = \frac{r}{v}$$

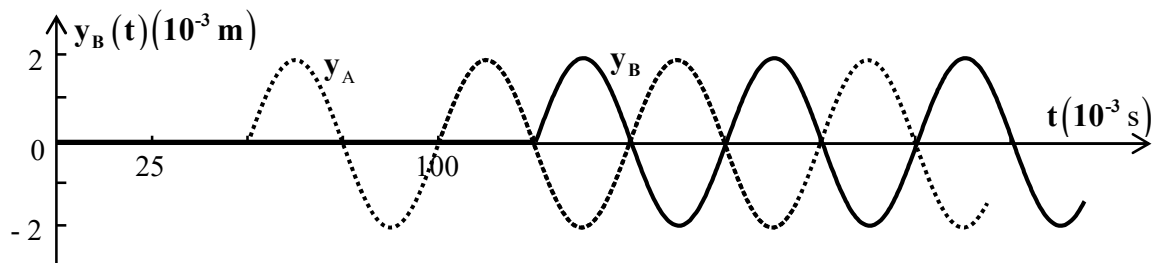
$$\rightarrow y(r, t) = a \sin\left(40\pi t - 40\pi \frac{r}{0,4}\right) \quad t \geq \theta = \frac{r}{v} \quad \text{et} \quad y(r, t) = 2 \cdot 10^{-3} \sin(40\pi t - 100\pi r) \text{ (m)} \quad t \geq \frac{r}{v}.$$

2⁰) a - Graphiquement : $\theta_B = 125 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 2,5 \cdot T$ avec $T = \frac{1}{N} \xrightarrow{N=20\text{Hz}} T = 50 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ou $T = 50 \text{ ms}$.

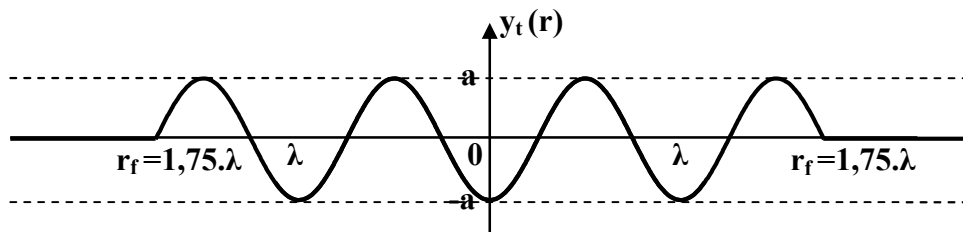
$$(r_B - r_A) = 1,5 \cdot \lambda \rightarrow (\theta_B - \theta_A) = 1,5 \cdot T \quad \text{et} \quad \theta_A = \theta_B - 1,5 \cdot T.$$

$$\theta_A = 2,5 \cdot T - 1,5 \cdot T = T \quad \text{et} \quad \theta_A = 50 \text{ ms}.$$

b -



$$3^0) \frac{t}{T} = \frac{87,5 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3}} = 1,75 \rightarrow t = 1,75 \cdot T. \quad t = 1,75 \cdot T \rightarrow r_f = 1,75 \cdot \lambda.$$



Exercice 5 :

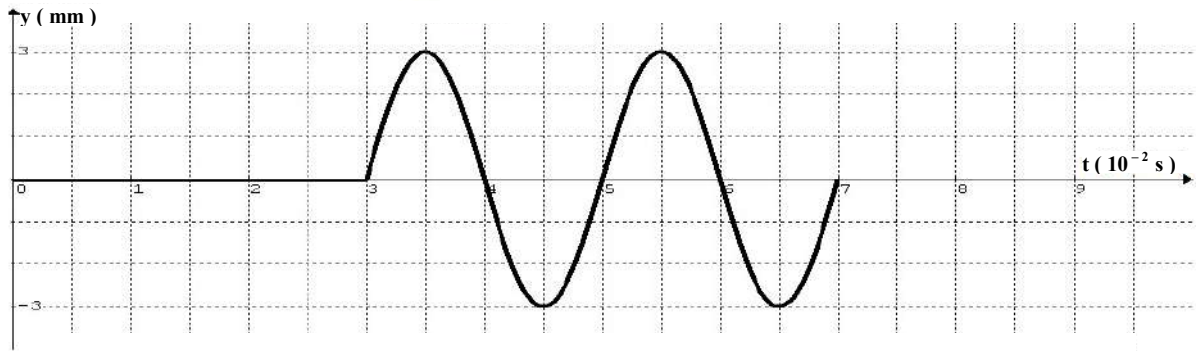
Une pointe, liée à une lame vibrante, produit, en un point S de la surface libre d'une nappe d'eau au repos, des vibrations sinusoïdales verticales. La source S débute son mouvement à l'instant $t = 0$ s.

On néglige l'amortissement et la réflexion des ondes issues de S.

1⁰) a - Décrire brièvement la surface de la nappe d'eau en lumière ordinaire.

b - En réalité, le phénomène observé est plus net au voisinage de S. Justifier.

2⁰) La courbe d'évolution au cours du temps de l'élongation d'un point M₁ du milieu de propagation, se trouvant au repos à une distance r₁ = 1,5 cm de S, est donnée par la figure ci-dessous :



a - Calculer la valeur de la célérité v de l'onde qui se propage à la surface de l'eau.

b - Définir la longueur d'onde λ d'une onde progressive. Calculer sa valeur λ.

c - Déterminer l'équation horaire du mouvement de la source S.

On précisera les valeurs de l'amplitude a, de la pulsation ω et de la phase initiale φ_s.

d - Déduire l'équation horaire du mouvement du point M₁.

3⁰) a - Représenter l'aspect de la coupe de la surface de l'eau par un plan vertical passant par S à l'instant de date t = 4,5 · 10⁻² s.

b - Etablir l'équation de la sinusoïde traduisant l'aspect de cette coupe transversale de la surface de l'eau passant par S à l'instant de date t = 4,5 · 10⁻² s.

4⁰) Soit un point M₂ situé sur une ligne d'onde de rayon r₂ = 1,75 cm.

a - Comment vibre ce point par rapport à la source S.

b - Déterminer, à l'instant de date t = 4,5 · 10⁻² s, les lieux des points vibrants avec le même déphasage par rapport à la source que le point M₂.

Réponse :

1⁰) a - On observe des rides circulaires centrées sur la source S qui se propagent à la surface de l'eau.

b - En s'éloignant de la source, l'onde s'amortit à cause de la dilution d'énergie.

2⁰) a - $v = \frac{r_1}{\theta_1}$ avec $\theta_1 = 3 \cdot 10^{-2}$ s. A.N: $v = \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-2}}$ et $v = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$.

b - La longueur d'onde λ est la distance parcourue par l'onde pendant une période temporelle T.

$\lambda = v.T$ et graphiquement $T = 2 \cdot 10^{-2}$ s → $\lambda = 0,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}$ et $\lambda = 10^{-2}$ m.

c - $y_s(t) = a \sin(\omega t + \varphi_s)$ avec $a = 3 \cdot 10^{-3}$ m et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-2}} = 100\pi \text{ rad.s}^{-1}$

Principe de propagation : $y_{M_1}(t) = y_s(t - \theta_1)$; $t \geq \theta_1 = \frac{r_1}{v}$.

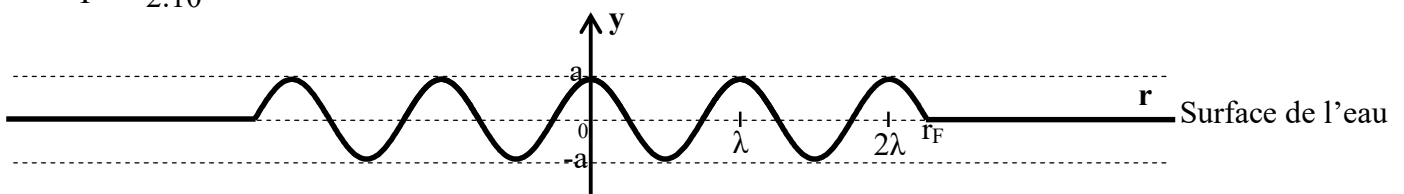
$$\left\{ \begin{array}{l} y_{M_1}(\theta_1) = 0 \\ \left(\frac{dy_{M_1}(t)}{dt} \right)_{t=\theta_1} > 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{principe de propagation}} \left\{ \begin{array}{l} y_s(0) = 0 \\ \left(\frac{dy_s(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \cdot \sin \varphi_s = 0 \rightarrow \sin \varphi_s = 0 \rightarrow \varphi_s = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \\ \omega a \cdot \cos \varphi_s > 0 \rightarrow \cos \varphi_s > 0 \end{array} \right. \rightarrow \varphi_s = 0$$

Donc : $y_s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t) \text{ (m)}$.

d - $y_{M_1}(t) = y_s(t - \theta_1) = a \sin[\omega(t - \theta_1)] = a \sin(\omega t - \omega \theta_1) = a \sin(100\pi t - 100\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}) = a \sin(100\pi t + \pi)$; $t \geq \theta_1$

et $y_{M_1}(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t + \pi) \text{ (m)}$; $t \geq 3 \cdot 10^{-2}$ s.

3⁰) a - $\frac{t}{T} = \frac{4,5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 2,25 \rightarrow t = 2,25.T \xrightarrow[\lambda = v.T]{r_F = v.t} r_F = 2,25\lambda$.



b - D'après le principe de propagation et pour un point M de la surface du liquide, appartenant à une ligne d'onde circulaire de rayon r, on a :

$$y_M(t) = y_S(t - \theta_M) \quad \text{avec} \quad \theta_M = \frac{r}{v} \xrightarrow{\varphi_S=0} y(r, t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{r}{v}\right) \xrightarrow{\lambda=v.T} y(r, t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right).$$

À l'instant t donné, l'élongation des différents points de la surface de l'eau atteint par l'onde est donnée par :

$$y_t(r) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) ; \quad r \leq r_F = v.t$$

$$\rightarrow y_t(r) = a \sin\left(100\pi \cdot 4,5 \cdot 10^{-2} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) = a \sin\left(4,5\pi - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) \quad \text{et} \quad y_t(r) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) ; \quad r \leq r_F = 2,25\lambda$$

$$\text{Donc : } y_t(r) = 3 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 200\pi r\right) (\text{m}) ; \quad r \leq 2,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

$$4^0) \text{ a - } \Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_{M_2} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r_2. \quad \text{A.N : } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{10^{-2}} \cdot 1,75 \cdot 10^{-2} = 3,5\pi \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Le point M₂ vibre en quadrature avance de phase par rapport à la source S.

b - À l'instant $t = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, les points qui vibrent en quadrature avance de phase par rapport à la source appartiennent à des lignes d'ondes de rayons r tels que : $r = (4K - 1) \frac{\lambda}{4}$, $K \in \mathbb{N}^*$ et $r \leq 2,25\lambda$.

$$0 \leq (4K - 1) \frac{\lambda}{4} \leq 2,25\lambda \rightarrow 0 \leq (4K - 1) \leq 9 \rightarrow 1 \leq 4K \leq 10 \rightarrow 0,25 \leq K \leq 2,5 \quad \text{et} \quad K \in \{1, 2\}$$

K	1	2
r	$\frac{3}{4}\lambda$	$\frac{7}{4}\lambda$
r (cm)	0,75	1,75

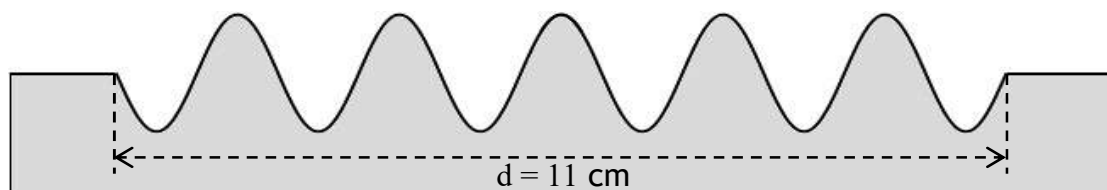
Exercice 6 :

Un vibreur de fréquence $N = 25 \text{ Hz}$ est muni d'une pointe qui produit à la surface d'un liquide, contenu dans une cuve à ondes, des ondes progressives circulaires sinusoïdales d'amplitude $a = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

On néglige les amortissements et on évite toute réflexion de l'onde aux bords de la cuve.

L'équation du mouvement de la pointe, source de vibrations, s'écrit : $y_S(t) = a \sin(50\pi t + \varphi_S) (\text{m})$.

On donne, ci-dessous, une coupe transversale, passant par S, de la surface du liquide à un instant t_F .

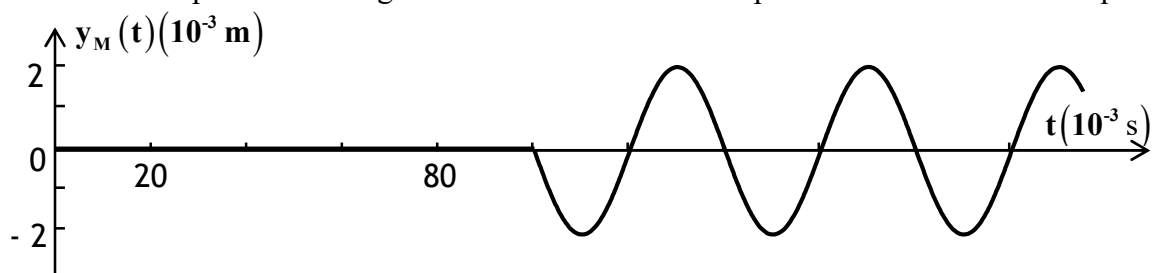


1⁰) a - Déterminer les valeurs de la longueur d'onde λ et la célérité v de l'onde à la surface du liquide.

b - Montrer que $t_F = 11 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ et que $\varphi_S = \pi \text{ rad}$.

2⁰) Etablir l'équation horaire $y_r(t)$ du mouvement d'un point quelconque P de la surface du liquide situé à une distance r de la source S.

3⁰) La figure ci-dessous représente le diagramme de mouvement d'un point M de la surface du liquide :



a - Déterminer le rayon r de la ligne d'onde à laquelle appartient le point M.

b - Justifier que le point M vibre en opposition de phase par rapport à la source S.

c - Montrer que le point M appartient, à l'instant t_F , à une ligne de creux.

Réponse :

$$1^0) \text{ a - } d = 5,5\lambda \rightarrow \lambda = \frac{d}{5,5} \xrightarrow{\text{A.N}} \lambda = \frac{11}{5,5} \text{ et } \lambda = 2 \text{ cm.}$$

$$\lambda = \frac{v}{N} \rightarrow v = \lambda \cdot N \xrightarrow{\text{A.N}} v = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \text{ et } v = 0,5 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\text{b - } r_F = \frac{d}{2} = \frac{5,5\lambda}{2} \rightarrow r_F = 2,75\lambda \xrightarrow{\lambda=v \cdot T} t_F = 2,75 \cdot T.$$

$$\xrightarrow{T=\frac{1}{N}=\frac{1}{25}} \xrightarrow{T=4 \cdot 10^{-2} \text{ s}} t_F = 2,75 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ et } t_F = 11 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$$

$$\text{Graphiquement : } y_s(t_F) = a \rightarrow a \sin(50\pi \cdot 11 \cdot 10^{-2} + \varphi_s) = a \rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi_s\right) = 1 \text{ et } \varphi_s = \pi \text{ rad.}$$

$$2^0) \text{ D'après le principe de propagation : } y_p(t) = y_s(t - \theta), t \geq \theta = \frac{r}{v}$$

$$y_p(t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{T} \frac{r}{v} + \pi\right), t \geq \theta \xrightarrow[\omega=50\pi \text{ rad.s}^{-1}]{\lambda=v \cdot T} y_p(t) = a \sin\left(50\pi t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \pi\right), t \geq \frac{r}{v}$$

$$\xrightarrow[v=0,5 \text{ m.s}^{-1}]{\lambda=0,02 \text{ m}} y_p(t) = 2 \cdot 10^{-3} \sin(50\pi t - 100\pi r)(\text{m}), t \geq 2 \cdot r(\text{s})$$

$$3^0) \text{ a - } \theta_M = \frac{r}{v} \rightarrow r = v \cdot \theta_M \xrightarrow[\theta_M=100 \cdot 10^{-3} \text{ s}]{\text{graphiquement}} r = 0,5 \cdot 100 \cdot 10^{-3} \text{ et } r = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$\text{b - } \Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_M = \frac{2\pi}{\lambda}(r - 0) \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta\varphi = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-2}} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ et } \Delta\varphi = \pi \text{ rad.}$$

M et S vibrent en opposition de phase.

$$\text{c - } y_M(t_F) = a \sin(50\pi \cdot 11 \cdot 10^{-2} - 100\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} + \pi) = a \sin(5,5\pi - 5\pi + \pi) = a \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -a$$

donc le point M, à l'instant t_F , appartient à une ligne de creux.

Les ondes sonores :

Exercice 1 :

Un haut parleur H, alimenté par un GBF, produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence N variable.

Un microphone M, placé devant le haut parleur, peut se déplacer suivant l'axe de symétrie de ce dernier.

Le signal émis par le haut parleur et le signal reçu par le microphone sont visualisés respectivement sur les voies Y₁ et Y₂ d'un oscilloscope, réglées sur la même la sensibilité verticale.

La position du haut parleur est repérée, par rapport à une règle graduée parallèle à son axe de symétrie, par son abscisse x₀. Celle du microphone est repérée, sur la même règle, par son abscisse x (figure ci-contre).

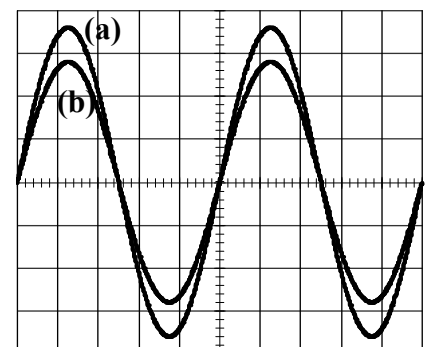
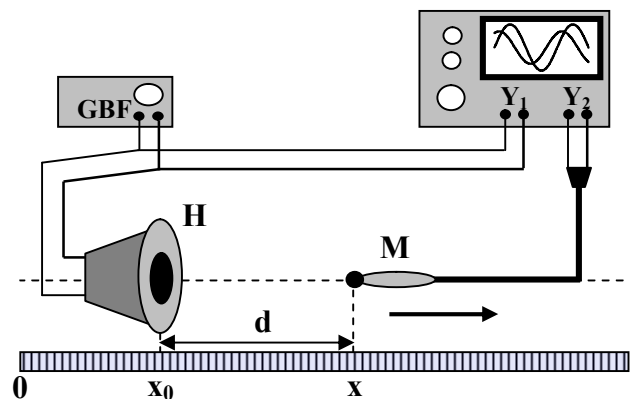
1⁰) Pour une position M₁ du microphone, d'abscisse x₁ = 40 cm, on visualise à l'oscilloscope les courbes ci-contre obtenues avec un balayage horizontal de 0,2 ms par division :

a - Associer chacun des oscillogrammes (a) et (b) à la voie Y₁ ou Y₂ correspondante. Justifier la réponse.

b - Déterminer la valeur de la fréquence N de l'onde sonore.

2⁰) On éloigne lentement le microphone du haut parleur et on relève l'abscisse x de sa position chaque fois que les deux oscillogrammes (a) et (b) redeviennent en phase. On obtient le tableau suivant :

position	1	2	3	4
x (cm)	40	74	108	142



a - Quelle est la valeur de la longueur d'onde λ de l'onde sonore ?

b - Déterminer alors la valeur de la célérité v de l'onde sonore dans l'air.

3⁰) a - Montrer que l'abscisse de la position du haut parleur est $x_0 = 6$ cm.

b - Le microphone étant à la position d'abscisse $x_1 = 40$ cm, on place maintenant le haut parleur à la position d'abscisse $x = 0$.

On fait varier la fréquence de l'onde sonore jusqu'à une valeur N' pour laquelle les deux oscillogrammes (a) et (b) redeviennent en phase. Calculer alors la valeur de N' .

Réponse :

1⁰) a - La propagation de l'onde sonore s'accompagne du phénomène de dilution d'énergie donc d'une diminution de son amplitude.

Par conséquent, l'oscillogramme (a) correspondant à la voie Y_1 et l'oscillogramme (b) correspondant à la voie Y_2 .

b - Graphiquement : $T = 5.0, 2.10^{-3} = 10^{-3}$ s $\xrightarrow{N=\frac{1}{T}}$ $N = 1000$ Hz.

2⁰) a - L'abscisse de la position du microphone pour laquelle les deux oscillogrammes (a) et (b) sont en phase est telle que : $x_k = x_0 + k\lambda$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ (la distance $d = x_k - x_0$ entre le H et M est un multiple entier de λ)

On a : $x_{k+1} - x_k = (x_0 + (k+1)\lambda) - (x_0 + k\lambda) = \lambda$

A.N : $\lambda = 74 - 40$ et $\lambda = 34$ cm.

b - On a : $\lambda = \frac{v}{N} \rightarrow v = \lambda.N \xrightarrow{A.N} v = 34.10^{-2}.10^3$ et $v = 340$ m.s⁻¹

3⁰) a - on a : $x_1 = x_0 + 1.\lambda \rightarrow x_0 = x_1 - \lambda \xrightarrow{A.N} x_0 = 40 - 34$ et $x_0 = 6$ cm.

b - Les deux oscillogrammes (a) et (b) redeviennent en phase $\rightarrow x_1 = \lambda' \xrightarrow{\lambda' = \frac{v}{N'}} x_1 = \frac{v}{N'}$ et $N' = \frac{v}{x_1}$.

A.N : $N' = \frac{340}{0,4}$ et $N' = 850$ Hz.

Exercice 2 :

Un émetteur d'ondes sonores émet un son de fréquence N . Le son émis est capté par un récepteur placé à une distance d devant l'émetteur. Le signal émis et le signal reçu sont visualisés respectivement sur les voies Y_A et Y_B d'un oscilloscope (figure ci-contre).

1⁰) En maintenant la distance d constante, on fait varier la fréquence N et on observe les oscillogrammes (a) et (b) respectivement sur les voies Y_A et Y_B de l'oscilloscope.

Pour $d = 34$ cm, la plus petite valeur de la fréquence qui nous donne les oscillogrammes ci-contre est $N_0 = 1000$ Hz.

a - Quelle est la sensibilité horizontale (en ms.div⁻¹) commune aux deux voies Y_A et Y_B de l'oscilloscope ?

b - Que représente la distance $d = 34$ cm ? Justifier la réponse.

c - Calculer la valeur de la célérité v du son dans l'air.

d - La sensibilité verticale de l'oscilloscope est assez grande de sorte que les amplitudes des oscillogrammes paraissent identiques.

En est-il réellement ainsi ? Justifier la réponse.

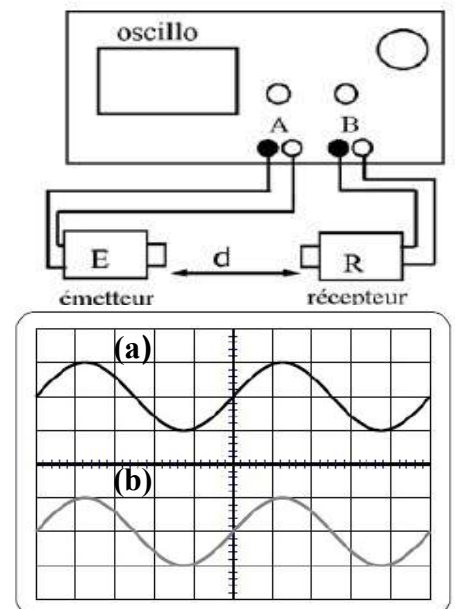
2⁰) On plonge l'émetteur et le récepteur dans l'eau. En maintenant la fréquence du son N_0 , on fait varier la distance d . la plus petite valeur pour laquelle on retrouve les mêmes oscillogrammes (a) et (b) ci-dessus est $d = 150$ cm.

Déterminer alors la valeur de la célérité v' du son dans l'eau.

Réponse :

1⁰) a - $N_0 = 1000$ Hz $\xrightarrow{N_0 = \frac{1}{T_0}}$ $T_0 = 10^{-3}$ s ou $T_0 = 1$ ms.

Soit S la sensibilité horizontale commune aux deux voies Y_A et Y_B de l'oscilloscope.



On a : $T_0 = 5.S \rightarrow S = \frac{T_0}{5}$

$S = \frac{10^{-3}}{5}$ et $S = 0,2.10^{-3} \text{ s.div}^{-1}$ ou $S = 0,2 \text{ ms.div}^{-1}$.

b - Les oscillogrammes (a) et (b) sont en phase $\rightarrow d = k.\lambda$.

$d = k.\lambda = k.\frac{v}{N} \xrightarrow[v=\text{constante}]{d=\text{constante}} \frac{k}{N} = \frac{d}{v} = \text{constante}.$

La plus petite valeur de la fréquence N_0 correspond à $k = 1 \rightarrow d = \lambda$.

La distance d représente la longueur d'onde λ

c - $\lambda = \frac{v}{N_0} \rightarrow v = \lambda.N_0.$

A.N : $v = 0,24.1000$ et $v = 340 \text{ m.s}^{-1}$.

d - En réalité, l'amplitude du signal reçu devrait être inférieur à celle du signal émis et ceci à cause de la dilution d'énergie au cours de la propagation.

2⁰) Les oscillogrammes (a) et (b) sont en phase $\rightarrow d = k.\lambda'$.

La plus petite valeur de la distance d correspond à $k = 1 \rightarrow d = \lambda'$.

$\lambda' = \frac{v'}{N_0} \rightarrow v' = \lambda'.N_0.$

A.N : $v' = 1,50.1000$ et $v = 1500 \text{ m.s}^{-1}$.

Etude d'un texte documentaire :

Exercice 1 :

Qu'est-ce qu'une onde ?

Une nouvelle part de Washington et arrive très rapidement à New York, bien que pas un des individus qui prennent part à sa propagation ne fasse le voyage d'une cité à l'autre. Il y a là deux mouvements tout à fait différents, celui de la nouvelle, qui part de Washington à New York, et celui des personnes qui l'ont répandue. Le vent qui passe sur un champ de blé fait naître une onde qui se propage à travers tout le champ. Ici (...) nous devons distinguer le mouvement de l'onde et le mouvement des épis séparés, qui ne subissent que de petites oscillations.

Nous avons tous vu des ondes qui se répandent en cercles de plus en plus larges quand on jette une pierre dans un lac. Le mouvement de l'onde est très différent de celui des particules d'eau. Les particules se relèvent et s'abaissent. Un bouchon de liège flottant sur l'eau le montre clairement, car il se relève et s'abaisse à limitation du mouvement réel de l'eau, au lieu d'être emporté par l'onde.

L'évolution des idées en physique :
Albert Einstein et Léopold Infeld © Flammarion

Questions :

1⁰) En prenant l'exemple de la nouvelle qui se répand d'une ville à une autre, les auteurs veulent expliquer une propriété fondamentale de la propagation d'une onde. Laquelle ?

2⁰) a - Quelle différence ya-t-il entre le mouvement de l'onde créée dans le champ de blé et le mouvement des épis séparés.

b - L'onde qui se propage à la surface de l'eau est-elle transversale ou longitudinale ? justifier.

3⁰) Citer un passage du texte qui montre que la propagation d'une onde s'effectue sans transport de matière.

Réponse :

1⁰) La propagation de l'onde se fait sans transport de matière.

2⁰) a - L'onde se propage à travers tout le champ alors que les épis séparés subissent de petites oscillations.

b - L'onde à la surface de l'eau est transversale car l'onde se propage à la surface du liquide alors que les particules d'eau se relèvent et s'abaissent.

3⁰) « un bouchon de liège flottant sur l'eau le montre clairement, car il se relève et s'abaisse à limitation du mouvement réel de l'eau, au lieu d'être emporté par l'onde ».

Exercice 2 :

Le tsunami

Un tsunami (du japonais 津 tsu, port, et 波 nami, vague, donc littéralement « vague portuaire ») est une onde provoquée par un rapide mouvement d'un grand volume d'eau (océan ou mer). Ce mouvement est en général dû à un séisme, à une éruption volcanique de type explosive ou bien à un glissement de terrain de grande ampleur. Ainsi, contrairement aux vagues, un tsunami n'est pas créé par le vent.

Bien que les tsunamis atteignent une vitesse de 800 km/h quand le fond de l'océan est profond, ils sont imperceptibles au large car leur amplitude n'y dépasse que rarement le mètre pour une période (temps entre deux vagues successives) de plusieurs minutes à plusieurs heures ; il ne faut donc pas les confondre avec les vagues scélérates qui provoquent des naufrages en haute mer. En revanche, ils peuvent provoquer d'énormes dégâts sur les côtes où ils se manifestent par :

- une baisse du niveau de l'eau et un recul de la mer dans les quelques minutes qui le précèdent ;
- un raz-de-marée, à savoir une élévation rapide du niveau des eaux d'un mètre à plusieurs dizaines de mètres provoquant un courant puissant capable de pénétrer profondément à l'intérieur des terres lorsque le relief est plat.

Dans certains cas assez rares, le tsunami peut prendre la forme d'une vague déferlante ou, sur un fleuve, d'un mascaret.

* Les vagues scélérates sont des vagues océaniques très hautes et soudaines, rares et particulièrement puissantes.

* Le déferlement est une dissipation d'énergie qui correspond à la dernière étape de la vie de la vague.

* Le mascaret est un phénomène brusque caractérisé par une vague déferlante qui remonte le cours d'un fleuve.

www. Réunion bysat.com

Questions :

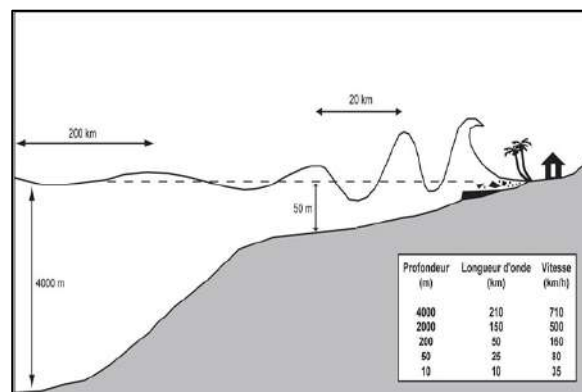
1⁰) a - Citer au moins deux catastrophes naturelles qui peuvent provoquer un tsunami.

b - Le tsunami est-il dangereux pour les marins lorsqu'ils sont en haute mer ? Justifier la réponse.

2⁰) Pourquoi le tsunami ne peut pas être considéré comme une vague scélérate ?

3⁰) a - Par quoi se manifeste un tsunami lors de l'approche de la terre ferme ?

b - A quoi sont dus les dégâts provoqués par un tsunami ?



Réponse :

1⁰) a - Un séisme, une éruption volcanique de type explosive ou un glissement de terrain de grande ampleur.

b - En haute mer, les tsunamis sont imperceptibles car leur amplitude dépasse rarement le mètre. Ils ne sont pas alors dangereux pour les marins en haute mer.

2⁰) La vague scélérate est très haute en haute mer et peut provoquer des naufrages. Elle est dangereuse pour les marins. Le tsunami ne peut donc pas être considéré comme une vague scélérate.

3⁰) a - A l'approche de la terre ferme, le tsunami se manifeste par une baisse du niveau de l'eau et un recul de la mer.

b - Les dégâts provoqués par un tsunami sont dus à une élévation rapide du niveau des eaux provoquant un courant puissant capable de pénétrer profondément à l'intérieur des terres.

Exercice 3 :

Les ondes sonores

Le son est la conséquence d'un mouvement matériel alternatif... Sans la présence de l'air, aucune chance d'entendre quoi que ce soit car les sons n'existent que par ce qu'ils sont supportés par un milieu matériel.

Dans l'air, l'onde de pression sonore ne se propage que si ses molécules s'entrechoquent. Ainsi, lorsque la température augmente, les collisions se produisent plus fréquemment, et à 20 °C, la vitesse de propagation du son passe à 343 m.s⁻¹.

Beaucoup moins compressibles, les liquides transmettent plus rapidement les sons.

Datant de 1826, les premières mesures effectuées dans l'eau du lac Léman donnèrent une valeur de 1435 m.s⁻¹, alors que la température était de 4 °C.

Rien de comparable dans un solide où les particules y ont encore moins de liberté de se déplacer ! .. C'est dans les solides que la vitesse du son est la plus élevée. Elle peut atteindre 20000 m.s⁻¹ dans le diamant, où les forces interatomiques responsables de la dureté de ce cristal de carbone sont particulièrement raides

D'après Claude Reyraud. La recherche n°320. 1999

Questions :

- 1⁰) Qu'est ce qui indique, d'après le texte, que la propagation du son nécessite un support matériel ?
- 2⁰) a - Quelle est l'influence de la température sur la vitesse de propagation du son dans l'air ?
b - Pourquoi les liquides transmettent-ils plus rapidement les sons que les gaz ?
- 3⁰) Par quoi l'auteur justifie-t-il que la vitesse du son est plus élevée dans les solides que dans les liquides ?

Réponse :

- 1⁰) Sans la présence de l'air, aucune chance d'entendre quoi que ce soit car les sons n'existent que par ce qu'ils sont supportés par un milieu matériel.
- 2⁰) a - Lorsque la température augmente, la vitesse de propagation du son dans l'air augmente.
b - Les liquides transmettent plus rapidement les sons que les gaz parce qu'ils sont beaucoup moins compressibles.
- 3⁰) La vitesse du son est plus élevée dans les solides que dans les liquides car dans les solides, les particules ont encore moins de liberté de se déplacer.

Exercice 4 :

Les sons chez les dauphins

Beaucoup d'animaux tels que les dauphins, les éléphants, et les chauves-souris utilisent des «sons» pour communiquer entre eux, chasser leur proie ou pour se localiser.

Un son est un phénomène physique lié à la transmission d'un mouvement vibratoire. Tout objet susceptible de vibrer peut générer un son aussi longtemps que les vibrations sont entretenues. Pour entendre un son, il faut que les vibrations soient transportées jusqu'au récepteur par un milieu, par exemple l'air, mais aussi les liquides et les solides. Les molécules du milieu qui reçoivent une impulsion sont mises en mouvement dans une certaine direction. Elles rencontrent d'autres molécules qu'elles poussent devant elles en formant ainsi une zone de compression. A la compression succède une détente et ainsi de suite: il s'établit alors une série d'oscillations qui se transmettent de proche en proche.

Le dauphin est un mammifère capable d'émettre et de capter des ultrasons lui permettant de se localiser par écho grâce à un sonar biologique. Les dauphins n'émettent pas des ultrasons en continu mais des salves ultrasonores très brèves et puissantes appelées « clics ».

Afin de se localiser, le dauphin émet des clics de fréquence 50 kHz et de portée de plusieurs centaines de mètres. Ces clics, espacés de 220 ms se réfléchissent sur le fond marin ou les rochers et sont captés à leur retour par le dauphin. La perception du retard de l'écho lui fournit des informations concernant l'aspect du fond marin ou la présence d'une masse importante (bateau ou nourriture).

D'après : Bac. liban 2005

Questions :

- 1⁰) a - Justifier, d'après le texte, que l'onde sonore ne peut pas se propager dans le vide.
b - Relever un passage du texte qui indique que l'onde sonore est longitudinale.
- 2⁰) Citer au moins deux domaines d'utilisation des ondes sonores par des animaux, comme le dauphin et la chauve-souris.
- 3⁰) La célérité des ultrasons dans l'eau salée est de 1530 m.s⁻¹.
a - Calculer la longueur d'onde λ des ondes ultrasonores émises par le dauphin pour se localiser.
b - L'intervalle de temps séparant l'émission d'un clic et la réception de son écho est $\Delta t = 10$ ms.
Calculer la distance D à laquelle se trouve le dauphin du fond marin.

Réponse :

1⁰) a - D'après le texte : Pour entendre un son, il faut que les vibrations soient transportées jusqu'au récepteur par un milieu, par exemple l'air, mais aussi les liquides et les solides.

b - ... Elles rencontrent d'autres molécules qu'elles **poussent devant elles** en formant ainsi une zone de compression.

2⁰) Des animaux comme le dauphin ou la chauve souris utilisent les ondes sonores pour :

* communiquer entre eux

* chasser leur proie

* se localiser

3⁰) a - $\lambda = \frac{v}{N} \xrightarrow{A.N} \lambda = \frac{1530}{50.10^3} \text{ et } \lambda = 30,6.10^{-3} \text{ m.}$

b - $D = \frac{v \cdot \Delta t}{2} \xrightarrow{A.N} D = \frac{1530.10.10^{-3}}{2} \text{ et } D = 7,65 \text{ m.}$

L'INTERACTION ONDE – MATIÈRE

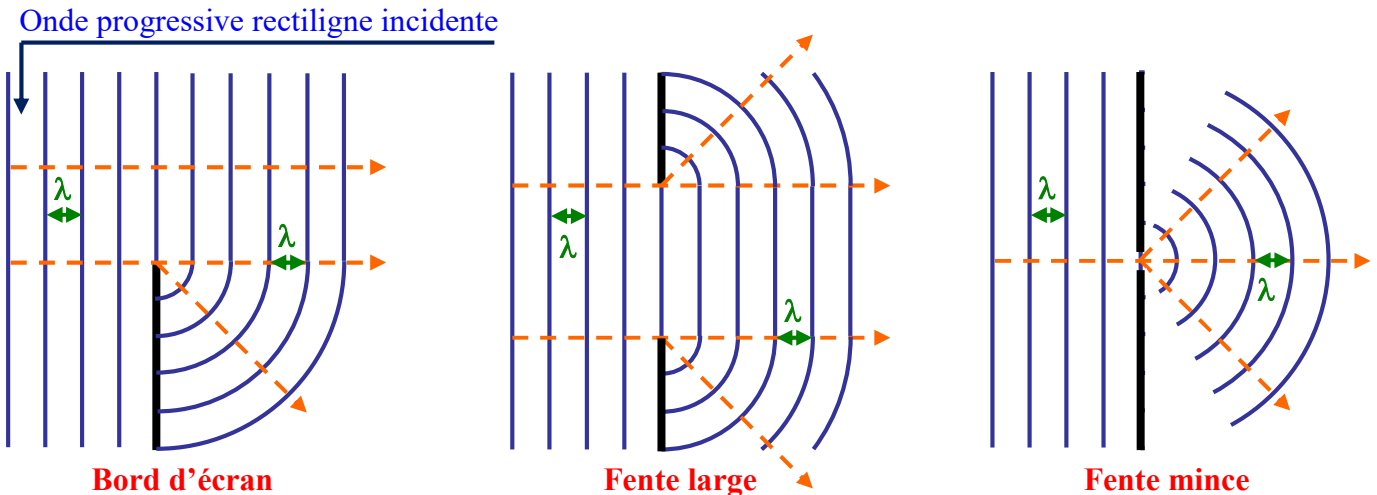
I / Le phénomène de diffraction :

1⁰) Diffraction d'une onde mécanique :

a - Diffraction à la surface d'un liquide :

• Expériences :

A la surface d'un liquide, une onde rectiligne se propage à la rencontre d'un obstacle :



• Constatations et définitions :

- En arrivant sur le bord d'écran, l'onde incidente le contourne en se déformant : c'est l'effet de bord.
- En traversant la fente, l'onde subit une déformation, cette déformation est d'autant plus grande que la largeur de la fente est plus faible.
- L'aptitude d'une onde à contourner un obstacle en se déformant est le phénomène de **diffraction**.

• Remarques :

- La diffraction se fait avec conservation de la longueur d'onde λ .
- Si la largeur a de la fente est de l'ordre de la longueur d'onde λ , la fente est dite **mince**.
La fente mince joue le rôle de **source secondaire** d'onde circulaire.

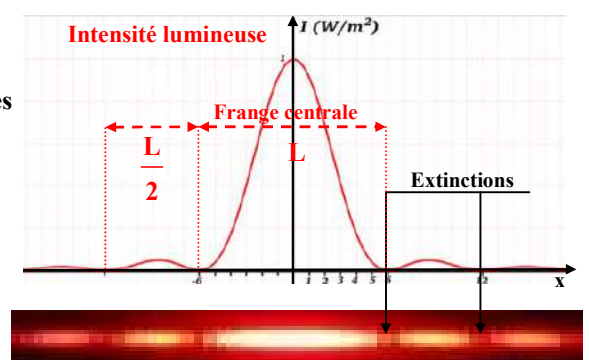
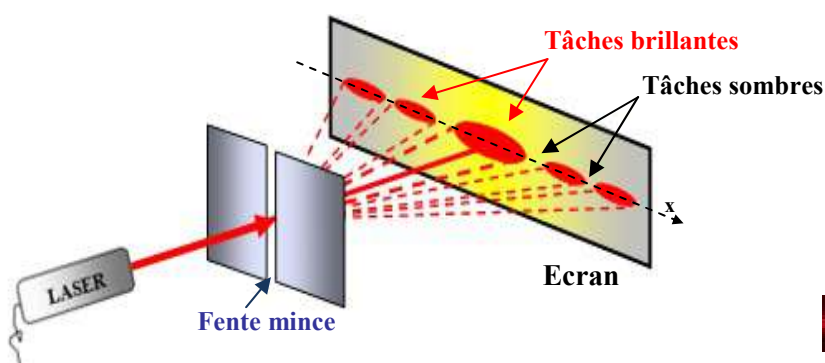
b - Diffraction des ondes sonores :

Les ondes sonores subissent le phénomène de diffraction ; ainsi pour les haut-parleurs, les tweeters (sons aigus) sont plus directifs que les boomers (sons graves).

2⁰) Diffraction de la lumière :

a - Expérience de mise en évidence :

Une source LASER éclaire un obstacle muni d'une fente de largeur réglable.



b - Constatations :

- Sur l'écran, on observe une frange centrale brillante encadrée par des franges sombres et brillantes.
- La lumière subit le phénomène de **diffraction** : elle a donc un **caractère ondulatoire**.
- La diffraction de la lumière se fait suivant la direction de la dimension la plus faible de la fente.
- La largeur **L** de la frange centrale augmente lorsqu'on diminue la largeur **a** de la fente.

c - L'onde lumineuse :

La lumière possède le caractère d'une onde progressive pouvant se propager même dans le vide (elle n'est donc pas de nature mécanique) avec une célérité qui dépend du milieu propageur.

Une onde lumineuse sera caractérisée par sa fréquence **N** et sa longueur d'onde **λ** dans le vide.

Remarque : dans le **vide**, la **célérité de la lumière** est **$c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$** .

3⁰) Influence du rapport $\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ sur le phénomène de diffraction :

Le phénomène de diffraction est d'autant plus appréciable que le rapport $\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ plus grand.

Application :

Pour une onde lumineuse de longueur d'onde **λ** , la largeur **L** de la frange centrale brillante obtenue sur un écran situé à une distance **D** d'une fente de largeur **a** est telle que :

$$L = \frac{k}{a} \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

Soit **θ** la demi largeur angulaire de la frange centrale brillante :

$$\text{on a : } \tan(\theta) = \frac{L}{2D}$$

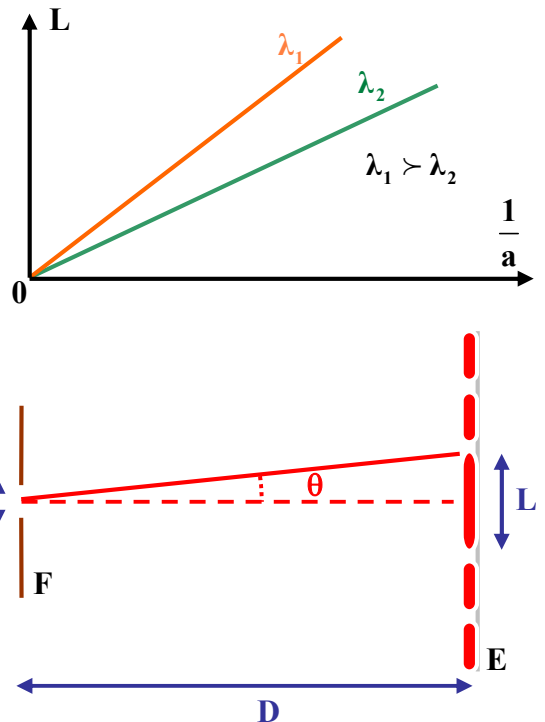
$$D \gg L \longrightarrow \tan(\theta) \approx \theta \longrightarrow \theta \approx \frac{L}{2D}$$

d'autre part, on montre que $\theta \approx \frac{\lambda}{a}$

$$\text{donc } \frac{L}{2D} = \frac{\lambda}{a} \quad \text{et enfin :} \quad \mathbf{L = \frac{2D\lambda}{a}}$$

La largeur de la frange centrale brillante augmente :

- si **λ** augmente.
- Si **a** diminue.



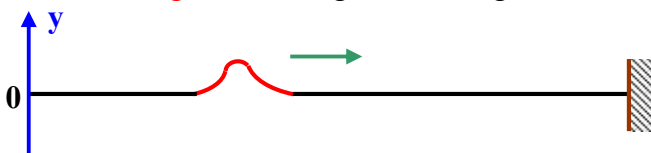
II / La réflexion :

1⁰) Réflexion d'un ébranlement :

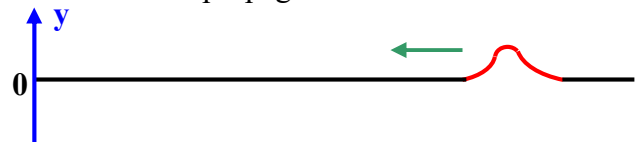
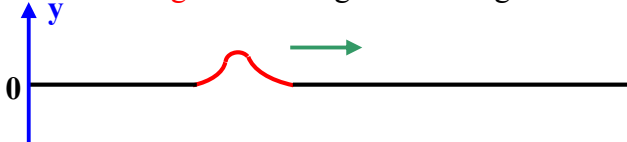
Un ébranlement mécanique, se propageant jusqu'à la frontière du milieu propageur, est renvoyé par la frontière : c'est le phénomène de **réflexion**.

Cette réflexion s'effectue :

- **avec changement** du signe des elongations si l'extrémité du milieu propageur est **fixe**.



- **Sans changement** du signe des elongations si l'extrémité du milieu propageur est **libre**.



2⁰) Réflexion d'une onde mécanique :

a - Cas d'une onde progressive rectiligne :

Lorsque les lignes d'onde incidentes rencontrent un obstacle rigide, elles se réfléchissent.

Lors de la réflexion on a :

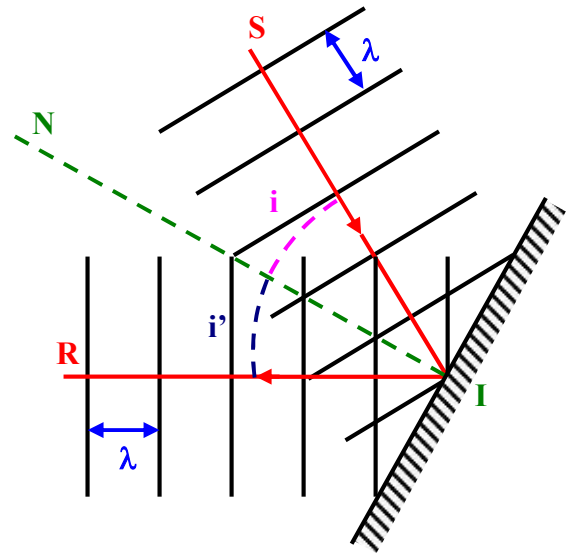
- conservation de la longueur d'onde λ .
- Les directions de propagation de l'onde incidente et de l'onde réfléchi obéissent à la loi de Descartes :
angle d'incidence = angle de réflexion
 $i = i'$

Remarque :

On définit le rayon d'onde comme étant la perpendiculaire à la ligne d'onde.

Le rayon d'onde incident SI et le rayon d'onde réfléchi IR sont de part et d'autre de la normale IN au point d'incidence I et tels que :

$$(\widehat{SI, IN}) = (\widehat{IN, IR})$$



b - Cas d'une onde acoustiques :

Les ondes sonores subissent le phénomène de réflexion, ainsi, l'écho est justifié par la réflexion des ondes sonores planes.

La réflexion des ondes acoustiques trouvent leur application dans le sonar actif pour :

- la détection des fonds marins, épaves et bancs de poissons.
- La surveillance des sous-marins.
- Le contrôle des pièces métalliques.

III / La réfraction d'une onde mécanique :

1⁰) Expérience de mise en évidence :

a - Transmission d'une onde :

Lorsqu'une onde progressive traverse la frontière entre deux milieux propagateurs, on dit qu'elle est transmise.

La transmission s'accompagne toujours du phénomène de réflexion sur la frontière.

b - Expérience et observations :

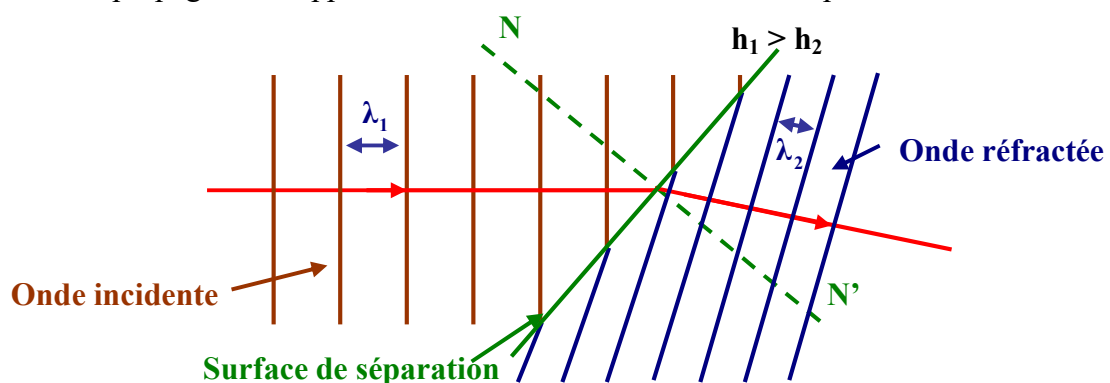
Une onde progressive rectiligne de longueur d'onde λ_1 se propage à la surface d'un liquide de hauteur h_1 . Elle passe dans une région où la hauteur du liquide est h_2 plus petite que h_1 .

La limite séparant les deux milieux propagateurs est appelée surface de séparation.

En traversant la surface de séparation, l'onde subit un changement de direction de propagation : c'est le phénomène de réfraction.

On observe :

- une diminution de la longueur d'onde ($\lambda_2 < \lambda_1$).
- la direction de propagation s'approche de la normale à la surface de séparation.



Remarque :

Si l'onde passait d'un milieu de hauteur h_2 vers un milieu de hauteur h_1 plus grande, les phénomènes contraires seraient observés.

2⁰) Interprétation :

On appelle :

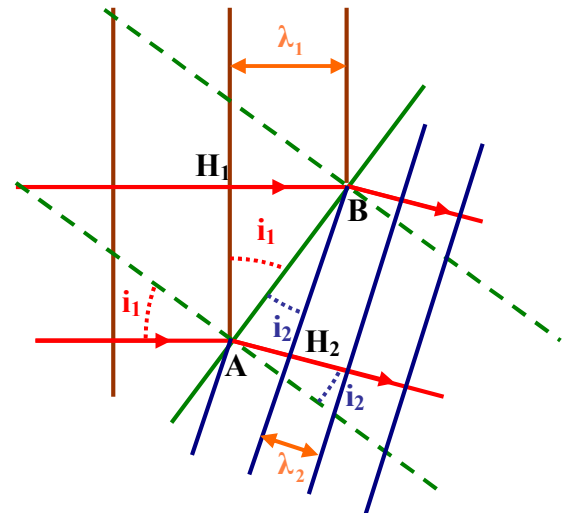
- angle d'incidence (i) : l'angle que fait le rayon d'onde incident avec la normale.
- angle de réfraction (i') : l'angle que le rayon d'onde réfracté avec la normale.

$$\left. \begin{aligned} \sin i_1 &= \frac{BH_1}{AB} \\ \sin i_2 &= \frac{AH_2}{AB} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{BH_1}{AH_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$
$$\text{donc : } \frac{\sin i_1}{\lambda_1} = \frac{\sin i_2}{\lambda_2}$$

Sachant que : $\lambda = v.T$, on écrit alors :

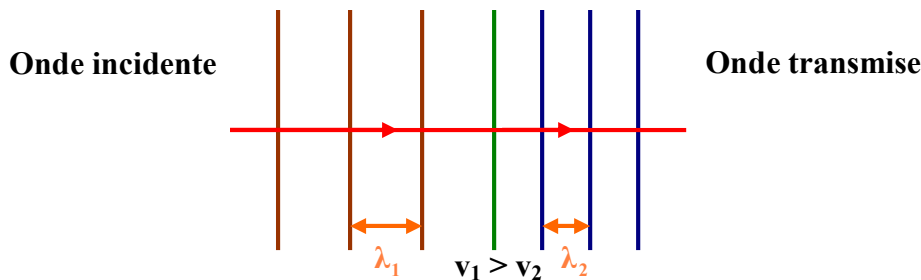
$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$$

Si $h_1 > h_2 \longrightarrow v_1 > v_2 \longrightarrow \sin i_1 > \sin i_2 \longrightarrow i_1 > i_2$.



Remarque:

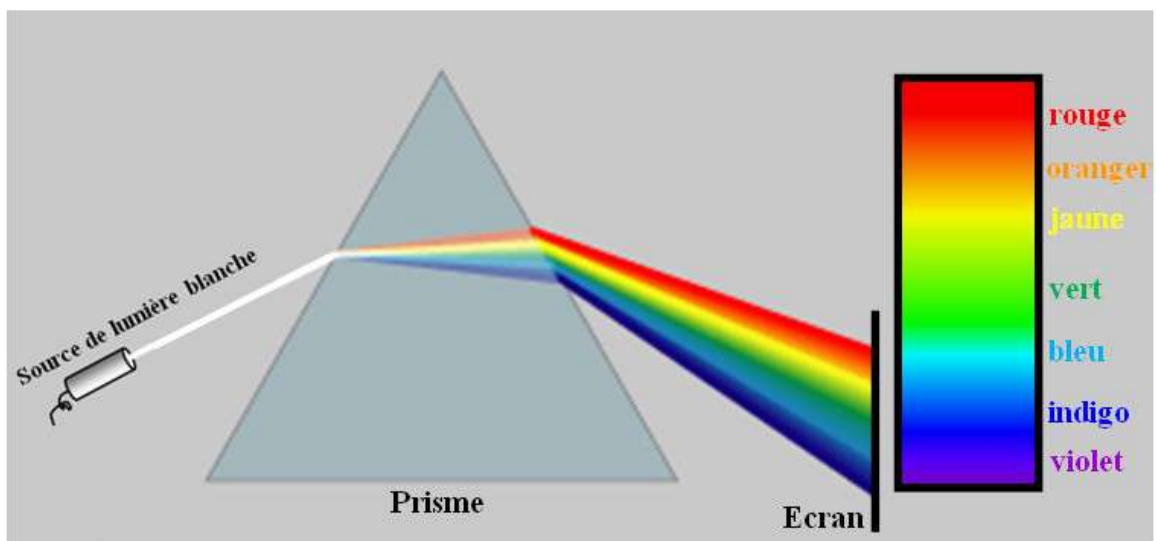
Si $i_1 = 0$ (incidence normale), l'onde passe sans déviation. C'est uniquement la longueur d'onde qui varie.



IV / La dispersion :

1⁰) Dispersion de la lumière blanche par un prisme :

a - Expérience et observations :



La lumière blanche (lumière du jour) incidente, en émergeant du prisme, **dévie en se décomposant**.

On recueille sur l'écran un spectre coloré continu dont les couleurs passent progressivement du rouge vers le violet (couleurs de l'arc-en-ciel) : c'est **le spectre visible** de la lumière blanche.

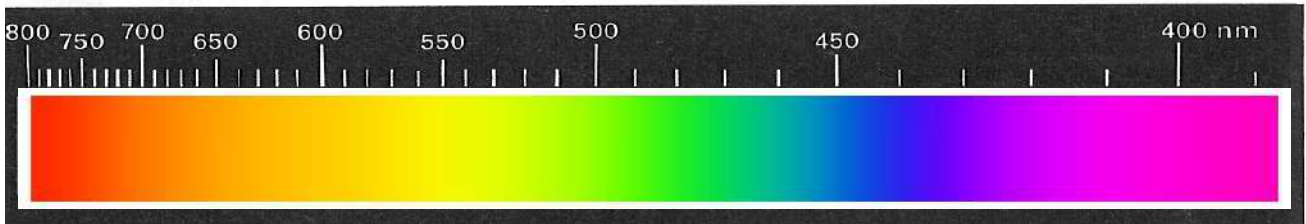
b - Conclusion :

La lumière blanche est constituée d'une infinité de radiations de couleurs différentes, chacune de ces radiations est appelée radiation **mono chromatique**.

La lumière blanche est alors une lumière **poly chromatique**.

Remarques :

- Une lumière monochromatique **n'est pas décomposée** par un prisme.
- Chaque radiation monochromatique est caractérisée par une fréquence ν bien déterminée, donc par une longueur d'onde λ dans le vide bien déterminée.
- Les longueurs d'ondes du spectre visible de la lumière blanche vont de $0,4 \mu\text{m}$ pour la radiation violette à $0,75 \mu\text{m}$ pour la radiation rouge.



c - Interprétation :

La déviation des radiations par un prisme est due à une double réfraction sur les faces du prisme.

La dispersion des radiations à la sortie du prisme indique que l'indice de réfraction n du prisme varie suivant la fréquence ν de la radiation incidente ; or la célérité de la lumière dans un milieu transparent d'indice n est

$$v = \frac{c}{n} \text{ donc si } n \text{ dépend de } \nu \text{ alors } v \text{ dépend de } \nu.$$

Le phénomène de dispersion de la lumière dans un milieu est dû à la variation de la célérité de la lumière dans ce milieu en fonction de sa fréquence ν .

2⁰) Dispersion des ondes mécaniques :

Les ondes mécaniques subissent le phénomène de dispersion. Ainsi, en haute mer, les vagues ont des vitesses qui dépendent de leurs longueurs d'onde (la vitesse d'une vague croît avec sa longueur d'onde).

3⁰) Milieu dispersif – Milieu non dispersif :

Un milieu est dit dispersif si la célérité v d'une onde dans ce milieu dépend de sa fréquence.

Dans le cas contraire, le milieu est dit non dispersif.

Exemples :

- Le verre est un milieu dispersif pour les ondes lumineuses.
- L'air est un milieu non dispersif pour les ondes sonores.

Pour en savoir plus

1⁰) Diffraction des ondes mécaniques :

a - Diffraction à la surface d'un liquide :

- A la surface d'un liquide, une ouverture (ou un obstacle) placée sur le trajet d'une onde rectiligne sinusoïdale se comportent comme une source secondaire d'onde circulaire de même fréquence que la source primaire créant l'onde. La longueur d'onde avant et après l'ouverture est la même, la direction de propagation reste inchangée, l'onde contourne l'obstacle en se déformant. C'est le phénomène de diffraction.

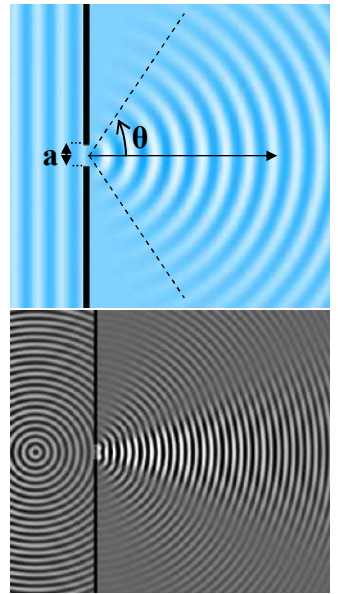
- Le phénomène de diffraction est appréciable si la largeur de l'ouverture est de l'ordre de la longueur d'onde λ .

En effet, si on considère que les ondes sont diffractées dans un secteur de demi-angle au sommet θ , cet angle sera d'autant plus grand que la dimension de l'ouverture « a » pratiquée dans l'obstacle est plus petite : $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$.

- Si l'onde primaire est une onde circulaire sinusoïdale, elle se diffracte en passant par l'ouverture.

L'ouverture joue le rôle d'une source secondaire d'onde circulaire.

- La diffraction dans la nature :



b - Diffraction des ondes sonores :

- Les sons audibles ont des fréquences N comprises entre 20 et 20 000 Hz.

Sachant que $\lambda = \frac{v}{N}$ et que la célérité du son dans l'air est $v = 340 \text{ m.s}^{-1}$, ces ondes seront diffractées par une ouverture dont les dimensions sont comprises entre $a = 17 \text{ m}$ et $a = 1,7 \text{ cm}$.

Ainsi, d'une pièce à une autre, ces différentes ondes seront diffractées en franchissant l'ouverture d'une porte (dont la largeur est de l'ordre de 1 m de large), mais avec des angles θ différents.

- Les basses fréquences (sons graves) seront davantage diffractées que les hautes fréquences (sons aigus).

2⁰) Le sonar actif :

Le sonar, acronyme de « sound navigation and ranging », est un dispositif de détection et de localisation des objets sous l'eau qui utilise les propriétés de la propagation des ondes sonores dans l'eau.

• Le sonar passif :

Le principe de sonar passif est d'écouter les sons, à l'aide d'hydrophones, sans en émettre.

Il est principalement utilisé par les sous-marins et les sous-marins.

• Le sonar actif :

Le principe du sonar actif est d'émettre des impulsions sonores à intervalles de temps réguliers et de recevoir leurs échos à l'aide d'hydrophones.

Le sonar émet une impulsion qui se propage dans l'eau, en rencontrant un obstacle, elle se réfléchit et son écho est reçu par le sonar.

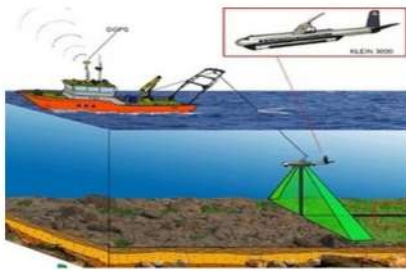
Connaissant la célérité v des ondes sonores dans l'eau, la mesure de la durée Δt séparant l'émission d'une impulsion et la réception de son

écho permet de calculer la distance L séparant l'obstacle du sonar : $L = v \cdot \frac{\Delta t}{2}$.

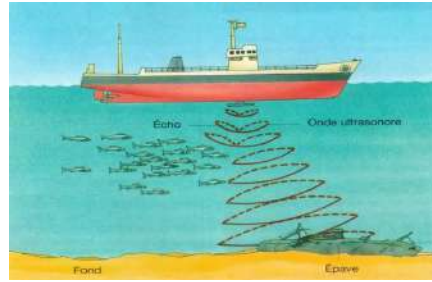


Remarques :

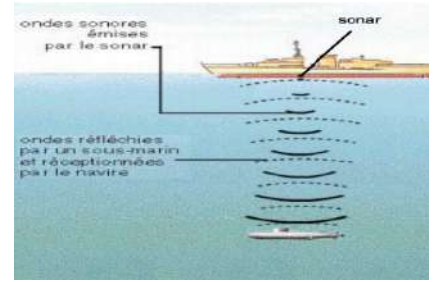
* les applications du sonar actif :



Cartographie du relief sous marin



Détection des épaves et des bancs de poissons



Détection des sous-marins

* Certains animaux marins (comme les dauphins ou les baleines à dents) ou aériens (comme les chauves souris) sont pourvus d'un système interne d'écholocation similaire à un sonar actif qui leur permet de se repérer, même dans l'obscurité, ou de localiser leurs proies.

* L'échographie utilise le principe du sonar actif : des ultrasons sont émis, se propagent et sont réfléchis sur les divers obstacles qu'elles rencontrent. Les échos provoqués par les différents tissus et organes permettent de créer une imagerie médicale étudiée.

3⁰) Le phénomène de dispersion :

Le phénomène de dispersion caractérise la sensibilité du milieu de propagation à la fréquence de l'onde qui s'y propage.

• Cas d'une onde lumineuse :

Un milieu transparent est caractérisé par son indice de réfraction absolu défini par :

$$n = \frac{c}{v} \quad \text{où} \quad \begin{cases} c : \text{célérité de la lumière dans le vide} \\ v : \text{célérité de l'onde lumineuse dans le milieu transparent considéré} \end{cases}$$

Dans le domaine de transparence du milieu, la valeur de n peut être approchée par la formule de Cauchy :

$$n(\lambda) = \sqrt{a + \frac{b}{\lambda^2}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \lambda : \text{longueur d'onde dans le vide de la radiation lumineuse considérée} \\ a \text{ et } b \text{ sont deux constantes qui dépendent du milieu considéré} \end{cases}$$

* En passant à travers un prisme d'angle au sommet A et d'indice de réfraction n , un rayon lumineux, venant sous un angle d'incidence i , subit une double réfraction sur les deux faces du prisme et sa direction va dévier d'un angle D .

La loi de Snell-Descartes pour la réfraction implique que :

$$\sin i = n \cdot \sin r \quad (1)$$

et $\sin i' = n \cdot \sin r' \quad (2)$

D'autre part on a : $A = r + r' \quad (3)$

Ce qui mène à : $D = (i + i') - A$

* Etudions la variation de D en fonction de n :

$$\frac{dD}{dn} = \frac{di}{dn} + \frac{di'}{dn} - \frac{dA}{dn} \quad \xrightarrow[\frac{dA}{dn}=0]{\frac{di}{dn}=0} \quad \frac{dD}{dn} = \frac{di'}{dn}$$

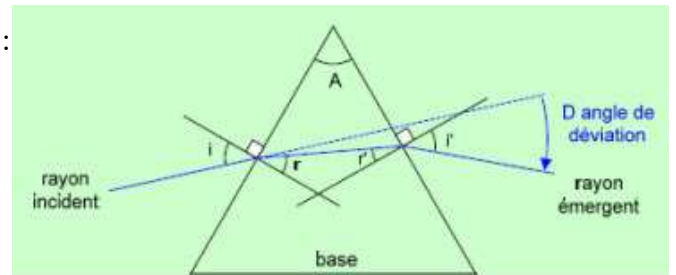
$$\text{D'après (3) : } 0 = \frac{dr'}{dn} + \frac{dr}{dn} \rightarrow \frac{dr'}{dn} = -\frac{dr}{dn}$$

$$\text{D'après (1) : } 0 = \sin r + n \cdot \frac{dr}{dn} \cdot \cos r \rightarrow \frac{dr}{dn} = -\frac{\sin r}{n \cdot \cos r}$$

$$\text{D'après (2) : } \frac{di'}{dn} \cdot \cos i' = \sin r' + n \cdot \frac{dr'}{dn} \cdot \cos r' \rightarrow \frac{dD}{dn} \cdot \cos i' = \sin r' + n \cdot \left(\frac{\sin r}{n \cdot \cos r} \right) \cdot \cos r'$$

$$\rightarrow \frac{dD}{dn} \cdot \cos i' = \frac{\cos r \cdot \sin r' + \sin r \cdot \cos r'}{\cos r} = \frac{\sin(r + r')}{\cos r} \xrightarrow{r+r'=A} \frac{dD}{dn} = \frac{\sin A}{\cos i' \cdot \cos r} > 0$$

Sous un même angle d'incidence, la déviation D augmente si l'indice n augmente.



En se référant à la formule de Cauchy, on constate que si la longueur d'onde λ de l'onde incidente décroît, l'indice de réfraction n augmente et par conséquent la déviation D augmente.

Conclusion : En passant à travers un prisme, la lumière blanche dévie en se décomposant de sorte que la radiation lumineuse dont la longueur d'onde est la plus petite ait la déviation la plus grande.

- **Cas d'une onde mécanique à la surface de l'eau :**

On considère une onde progressive se propageant à la surface de l'eau et dont la longueur d'onde $\lambda > 1,74 \text{ cm}$. Ceci nous permet de ne pas tenir compte des phénomènes de capillarité (induite par le vent et les effets de tension de surface). L'onde considérée est alors dite onde de gravité.

Le phénomène de dispersion à la surface de l'eau dépend de la profondeur h de l'eau :

* Cas d'une eau profonde :

Si $k.h \gg 1$ $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$, la célérité de l'onde à la surface de l'eau est donnée par : $v = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}$

Le milieu est dispersif. L'onde progressive se propagera d'autant plus rapidement que sa longueur d'onde est plus grande.

* cas d'une eau peu profonde :

Si $k.h \ll 1$ $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$, la célérité de l'onde à la surface de l'eau est donnée par : $v = \sqrt{g \cdot h}$

Le milieu est alors non dispersif. Les ondes progressives se propageront avec la même célérité.

Applications

Exercice 1 :

Un faisceau de lumière monochromatique, de fréquence $\nu = 4,762 \cdot 10^{14}$ Hz, émise par une source Laser, traverse une fente fine horizontale de largeur a . Sur un écran, placé perpendiculairement à la fente, à une distance $D \gg a$, on observe des taches lumineuses réparties sur une ligne verticale. La tache centrale est plus large et plus brillante que les autres.

1⁰) a - Quel est le phénomène physique observé ? Que peut-on en déduire quant-à la nature de la lumière ?

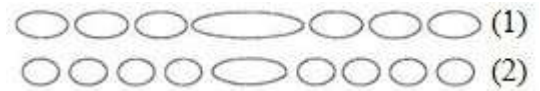
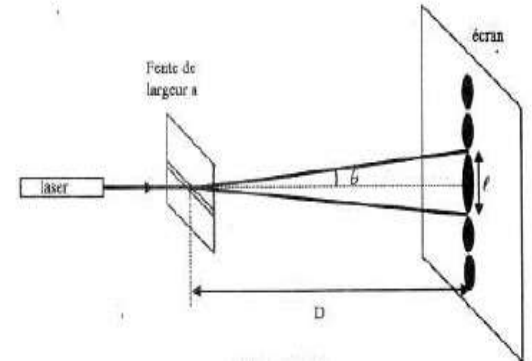
b - Calculer la longueur d'onde λ dans le vide de la lumière émise par le laser.

La célérité de la lumière dans le vide est : $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹.

2⁰) a - La demi-largeur angulaire de la tache centrale est donné par : $\theta = \frac{\lambda}{a}$. Montrer, en utilisant l'approximation $\tan \theta \approx \theta$, que

la largeur l de la tache centrale a comme expression : $l = \frac{2\lambda \cdot D}{a}$.

b - Pour deux largeurs a_1 et a_2 de la fente, on observe, sur l'écran, respectivement les figures (1) et (2). Comparer, en le justifiant, les deux largeurs a_1 et a_2 de la fente.



3⁰) Un élève cherche à déterminer l'épaisseur d'un cheveu. Pour cela, il utilise le dispositif précédent en mettant le cheveu à la place de la fente. Pour $D = 2$ m, il observe sur l'écran une figure analogue à celle obtenue avec la fente et dont la largeur de la tache centrale est $l = 2,8$ cm.

Déterminer alors l'épaisseur a du cheveu utilisé.

4⁰) Le faisceau laser est maintenant dirigé, sur l'une des faces d'un prisme placé dans l'air, suivant une incidence normale. On observe qu'à la sortie du prisme, ce faisceau est dévié (figure ci-dessous).

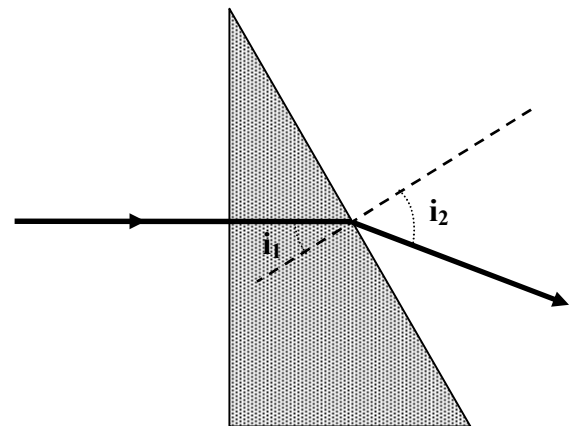
a - En utilisant la loi de Descartes-Snell : $n \sin i_1 = \sin i_2$ et sachant que $i_1 = 30^\circ$ et $i_2 = 54^\circ$, déterminer la valeur de n .

On donne : l'indice de réfraction n d'un milieu est le rapport de la célérité de la lumière dans le vide par sa vitesse dans le milieu considéré : $n = \frac{c}{v}$.

b - On refait la même expérience en utilisant un autre Laser qui émet une lumière monochromatique de fréquence $\nu' \neq \nu$. Pour $i_1 = 30^\circ$, on trouve $i_2 = 56^\circ$. En déduire la valeur n' de l'indice de réfraction.

c - Justifier alors que le prisme est dit un milieu dispersif.

d - Que se passe-t-il si on refait la même expérience en utilisant une source de lumière blanche?



Réponse :

1⁰) a - Le phénomène observé est la diffraction.

Ce phénomène met en évidence la nature ondulatoire de la lumière.

b - $\lambda = \frac{c}{\nu}$. A.N : $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{4,762 \cdot 10^{14}}$ et $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-6}$ m ou $\lambda = 0,63 \mu\text{m}$.

2⁰) a - $\tan \theta = \frac{l}{2D} = \frac{1}{2D}$ or $\tan \theta \approx \theta \xrightarrow{\theta = \frac{\lambda}{a}} \frac{1}{2D} = \frac{\lambda}{a}$ et $l = \frac{2D\lambda}{a}$.

b - l est inversement proportionnelle à $a \rightarrow$ si $a \nearrow$ alors $l \searrow$. $l(1) > l(2) \rightarrow a_1 < a_2$.

3⁰) $l = \frac{2\lambda D}{a} \rightarrow a = \frac{2\lambda D}{l}$. A.N : $a = \frac{2 \cdot 0,63 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{2,8 \cdot 10^{-2}}$ et $a = 0,9 \cdot 10^{-4}$ m.

$$4^0) \text{ a - } n = \frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{\sin 54}{\sin 30} \quad \text{et} \quad n = 1,62.$$

$$\text{b - } n = \frac{\sin i'_2}{\sin i_1} = \frac{\sin 56}{\sin 30} \quad \text{et} \quad n' = 1,66.$$

$$\text{c - } v' \neq v \rightarrow n' \neq n \xrightarrow{n = \frac{c}{v}} v' \neq v.$$

La vitesse de propagation de la lumière dépend de sa fréquence donc le prisme est un milieu dispersif.

d - La lumière blanche étant polychromatique, le prisme présente, pour les différentes fréquences (couleurs), des indices de réfraction différents.

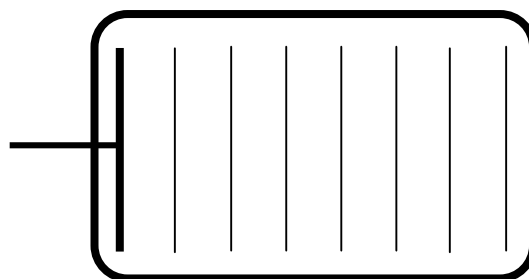
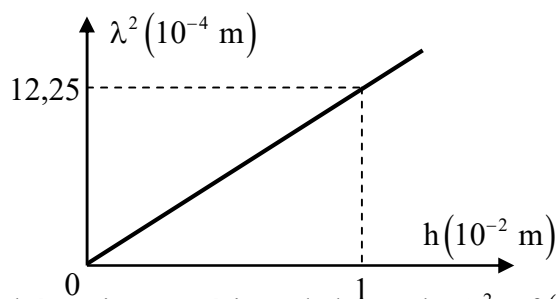
Donc chaque radiation monochromatique sort du prisme avec une déviation différente. La lumière blanche sera alors décomposée par le prisme.

On obtient un spectre coloré continu présentant les couleurs de l'arc en ciel.

Exercice 2 :

On étudie la propagation d'une onde mécanique rectiligne à la surface d'un liquide contenu dans une cuve à ondes. La fréquence du vibreur est fixée à $N = 10$ Hz.

1⁰) On fait varier la profondeur h du liquide et on mesure chaque fois la longueur d'onde λ . Les résultats ont permis de tracer la courbe ci-dessous :



a - Quel est l'équation numérique de la courbe $\lambda^2 = f(h)$?

b - En déduire que la célérité de propagation de l'onde à la surface du liquide s'exprime par: $v = 3,5\sqrt{h}$.

c - Calculer les célérités de propagation de l'onde v_1 et v_2 pour les profondeurs respectives $h_1 = 1$ cm et $h_2 = 0,64$ cm.

2⁰) Au fond de la cuve à onde, on place une plaque de verre de façon à délimiter deux régions (1) et (2) ayant des profondeurs uniformes respectivement égales à $h_1 = 1$ cm et $h_2 = 0,64$ cm.

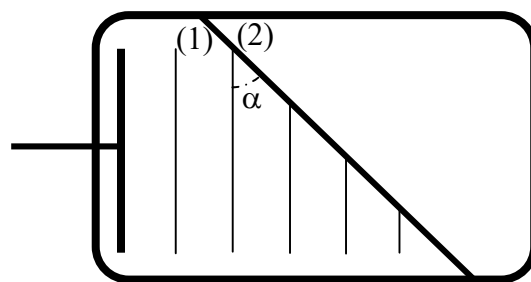
La surface de séparation est inclinée d'un angle $\alpha = 45^\circ$ par rapport à l'onde rectiligne incidente.

a - Quel est le phénomène physique que subit l'onde lors du passage de la région (1) vers la région (2) ?

b - Comment se nomme l'angle i_1 entre la direction de propagation de l'onde dans la région (1) et la normale à surface de séparation ? Quelle est la valeur de i_1 ?

c - Comment se nomme l'angle i_2 entre la direction de propagation de l'onde dans la région (2) et la normale à surface de séparation ? Déterminer la valeur de i_2 .

d - Faire un schéma sur lequel on indiquera les directions de propagation des ondes dans les régions (1) et (2) ainsi que les angles i_1 et i_2 .



3⁰) On enlève la lame de verre et on fixe la profondeur du liquide à $h = 2$ cm.

On fait varier la fréquence N du vibreur et on mesure chaque fois la longueur d'onde λ de l'onde qui se propage à la surface du liquide. Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau ci-dessous :

N (Hz)	12	23	28
λ (10^{-3} m)	30	17	16
v (m.s ⁻¹)			

a - Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

b - Que peut-on dire du milieu propageur ? Justifier la réponse.

Réponse:

1⁰) a - $\lambda^2 = f(h)$ est une droite linéaire $\rightarrow \lambda^2 = a.h$ avec $a = \frac{12,25 \cdot 10^{-4} - 0}{1 \cdot 10^{-2} - 0} = 12,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

$$\rightarrow \lambda^2 = 12,25 \cdot 10^{-2} \cdot h$$

b - $\lambda = \frac{v}{N} \xrightarrow{\lambda^2 = a.h} v = N \cdot \sqrt{a.h} \xrightarrow[N=10]{a=0,1225} v = 3,5 \cdot \sqrt{h}$

c - Pour $h_1 = 1 \text{ cm}$: $v_1 = 3,5 \cdot \sqrt{10^{-2}}$ et $v_1 = 0,35 \text{ m.s}^{-1}$.

Pour $h_2 = 0,64 \text{ cm}$: $v_2 = 3,5 \cdot \sqrt{64 \cdot 10^{-4}}$ et $v_2 = 0,28 \text{ m.s}^{-1}$.

2⁰) a - Lors du passage de la région (1) vers la région (2), l'onde subit le phénomène de réfraction.

b - L'angle i_1 s'appelle angle d'incidence.

Graphiquement : $i_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$

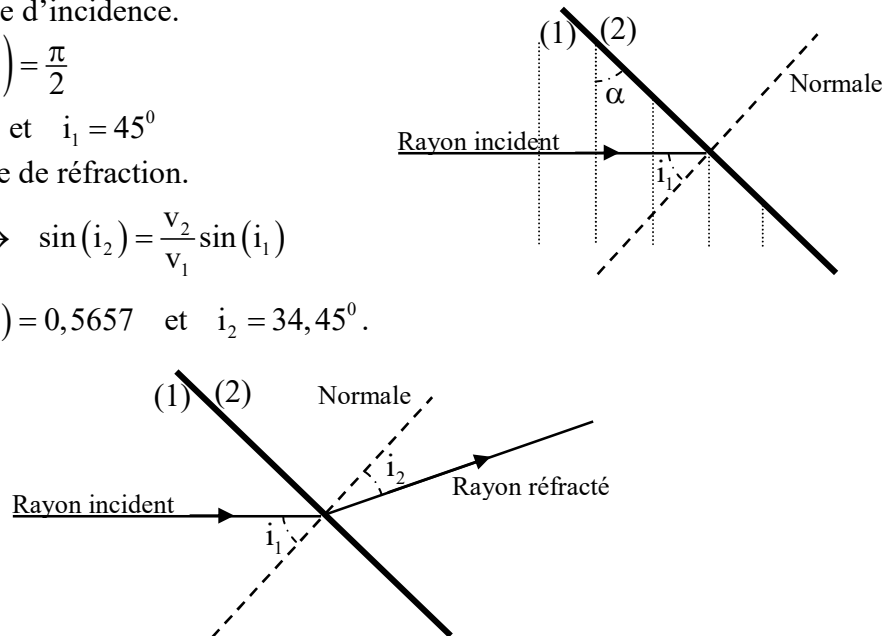
$$\rightarrow i_1 = \alpha \text{ et } i_1 = 45^\circ$$

c - L'angle i_2 s'appelle angle de réfraction.

On a : $\frac{\sin(i_1)}{v_1} = \frac{\sin(i_2)}{v_2} \rightarrow \sin(i_2) = \frac{v_2}{v_1} \sin(i_1)$

A.N : $\sin(i_2) = \frac{0,28}{0,35} \sin(45) = 0,5657$ et $i_2 = 34,45^\circ$.

d -



3⁰) a -

N (Hz)	12	23	28
λ (10^{-3} m)	30	17	16
v (m.s^{-1})	0,360	0,391	0,448

b - La célérité v de propagation dépend de la fréquence N de l'onde progressive. Le milieu propageur est alors dit dispersif.

Exercice 3 :

1⁰) On provoque, à la surface d'un liquide, une onde rectiligne progressive sinusoïdale de longueur d'onde λ .

Le liquide, contenu dans la cuve à ondes, a une profondeur h constante.

La célérité de l'onde est $v = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$.

Sur le trajet de l'onde progressive rectiligne on place, au fond de la cuve à ondes, une plaque trapézoïdale en verre d'épaisseur $e < h$.

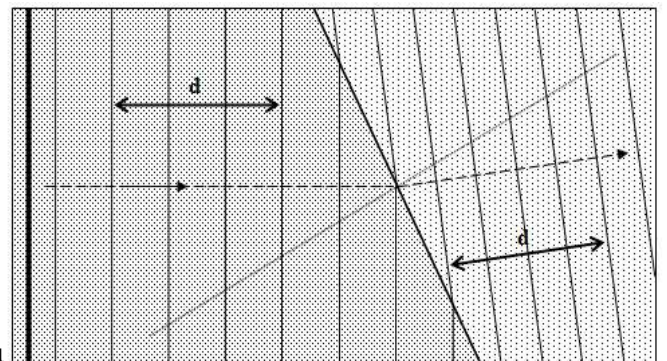
Un stroboscope permet d'observer l'immobilité apparente des lignes d'onde. La figure ci-dessous donne l'aspect de la surface de la cuve à ondes :

a - Quel est le phénomène décrit sur la figure ?

Par quoi se caractérise-t-il ?

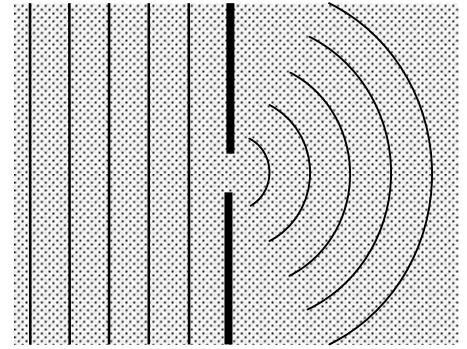
b - Un autre phénomène, non décrit sur la figure, a lieu lorsque l'onde incidente arrive à la surface de séparation entre les deux régions de profondeurs différentes. Lequel ?

c - Soit λ' la longueur d'onde dans la région de plus faible profondeur. Quelle est, d'après la figure, la relation qui lie λ et λ' . En déduire la célérité v' de l'onde dans la région de plus faible profondeur.



2⁰) On enlève la plaque de verre et on dispose, sur le trajet de l'onde rectiligne, parallèlement aux lignes d'onde, un obstacle muni d'une ouverture dont la largeur est de l'ordre de λ .

Un stroboscope permet d'observer l'immobilité apparente des lignes d'onde. La figure ci-contre donne l'aspect de la surface de la cuve à ondes.



a - Quel est le phénomène décrit sur la figure ?

b - Comparer la longueur d'onde avant et après l'obstacle.

c - La célérité de l'onde varie-t-elle à la traversée de l'obstacle ?

Réponse :

1⁰) a - Le phénomène observé à la frontière des deux milieux propageur est la réfraction.

Elle se caractérise par :

- Une variation de la longueur d'onde.
- Un changement de la direction de propagation.

b - Le phénomène qui accompagne toujours la réfraction est la réflexion.

c - $d = 3\lambda = 4\lambda' \rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{3}{4}$. Or $\lambda = \frac{v}{N} \xrightarrow{\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{3}{4}} \frac{v'}{v} = \frac{3}{4}$ et $v' = \frac{3}{4}v$.

A.N : $v' = \frac{3}{4} \cdot 0,2$ et $v' = 0,15 \text{ m.s}^{-1}$.

2⁰) a - Le phénomène observé est la diffraction.

b - La longueur d'onde est la même avant et après l'obstacle.

c - A la traversée de l'obstacle, la célérité de l'onde ne varie pas.

Exercice 4 :

On dispose d'un Laser de longueur d'onde λ .

On interpose, comme l'indique la figure ci-dessous, une fente fine horizontale de largeur a entre le Laser et un écran E situé à une distance D du plan de la fente.

1⁰) a - Décrire ce que l'on observe sur l'écran E. On précisera la direction de la figure observée.

b - Nommer le phénomène observé.

c - Quel caractère de la lumière est-il alors mis en évidence ?

2⁰) a - Soit L la largeur de la frange centrale obtenue sur l'écran et θ sa demi largeur angulaire.

En s'aidant d'un schéma, exprimer θ en fonction de D et de L . On prendra : $D \gg L$.

b - Sachant que : $\theta = \frac{\lambda}{a}$, établir l'expression de la largeur L de la tâche centrale en fonction de D, a et λ .

3⁰) On remplace la fente fine de largeur a par une autre fente fine de largeur a' .

Pour la même distance D , on observe une figure analogue à celle obtenue avec la fente a .

Une mesure de la largeur de la tâche centrale donne $L' = 2,6 \text{ cm}$.

a - Exprimer L en fonction de L', a et a' .

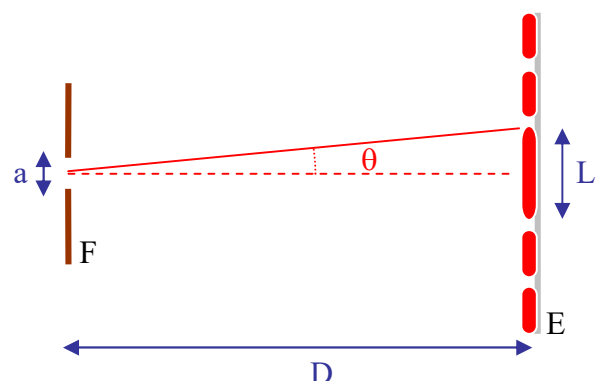
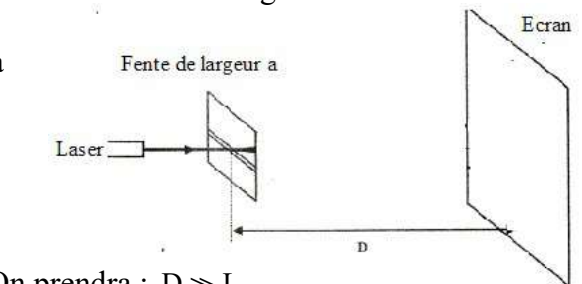
b - Calculer L sachant que $a' = 2a$.

Réponse :

1⁰) a - On observe sur l'écran une frange centrale brillante encadrée par des franges alternativement sombres et brillantes. La figure observée est verticale (la direction de la figure est suivant la dimension la plus faible de la fente).

b - Le phénomène observé est la diffraction de la lumière.

c - Le phénomène de diffraction met en évidence le caractère ondulatoire de la lumière.



2⁰) a - Soit θ la demi largeur angulaire de la frange centrale brillante :

$$\text{on a : } \operatorname{tg}(\theta) = \frac{L}{2D} \xrightarrow{D \gg L} \operatorname{tg}(\theta) \simeq \theta \rightarrow \theta \simeq \frac{L}{2D}$$

$$\text{b - d'autre part, on montre que } \theta \simeq \frac{\lambda}{a} \text{ donc } \frac{L}{2D} = \frac{\lambda}{a} \text{ et enfin : } L = \frac{2D\lambda}{a}$$

$$3^0) \text{ a - } L = \frac{2D\lambda}{a} \text{ et } L' = \frac{2D\lambda}{a'} \rightarrow \frac{L}{L'} = \frac{a'}{a} \text{ et } L = L' \cdot \frac{a'}{a}.$$

$$\text{b - } a' = 2a \rightarrow L = L' \cdot \frac{2a}{a} \text{ et } L = 2L'.$$

$$A.N : L = 2.2,6 \text{ et } L = 5,2 \text{ cm.}$$

Exercice 5 :

Un vibreur de fréquence $N = 25 \text{ Hz}$, muni d'une réglette, provoque à la surface d'un liquide une onde rectiligne progressive sinusoïdale de longueur d'onde λ qui se propage avec une célérité $v = 0,25 \text{ m.s}^{-1}$.

Le liquide, contenu dans la cuve à ondes, a initialement une profondeur h constante.

Sur le trajet de l'onde rectiligne produite par le vibreur on place, au fond de la cuve à ondes, une plaque trapézoïdale en verre d'épaisseur $e = \frac{3}{4}h$.

Un stroboscope permet d'observer l'immobilité apparente des lignes d'onde.

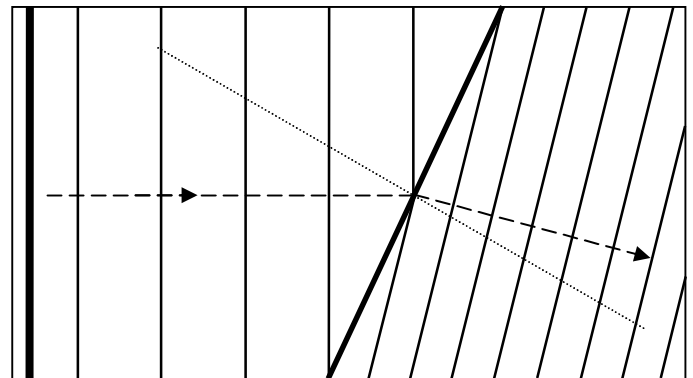
La figure ci-contre donne l'aspect de la surface de la cuve à ondes.

1⁰) Préciser la caractéristique du phénomène de réfraction observé.

2⁰) Sachant que la célérité de l'onde à la surface du liquide s'exprime par $v = A\sqrt{h}$ où A est une constante et h la profondeur du liquide, calculer la valeur de la célérité v' de l'onde dans la région de plus faible profondeur.

3⁰) Soit λ' la longueur d'onde dans la région de plus faible profondeur. Déterminer sa valeur.

4⁰) La valeur de l'angle d'incidence étant $i_1 = 30^\circ$, calculer la valeur de l'angle de réfraction i_2 .



Réponse :

1⁰) Lors de la réfraction, l'onde incidente subit un changement de direction de propagation.

$$2^0) v' = A\sqrt{h'} \xrightarrow{h' = h - e = \frac{h}{4}} v' = A\sqrt{\frac{h}{4}} = \frac{A\sqrt{h}}{2} \rightarrow v' = \frac{v}{2} \xrightarrow{A.N} v' = \frac{0,5}{2} \text{ et } v' = 0,25 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$3^0) \lambda' = \frac{v'}{N} \xrightarrow{A.N} \lambda' = \frac{0,25}{25} \text{ et } \lambda' = 10^{-2} \text{ m.}$$

$$4^0) \frac{\sin(i_1)}{v} = \frac{\sin(i_2)}{v'} \rightarrow \sin(i_2) = \frac{v'}{v} \sin(i_1) \xrightarrow{A.N} \sin(i_2) = \frac{0,25}{0,5} \sin(30^\circ) \text{ et } i_2 = 14,5^\circ.$$

Exercice 6 :

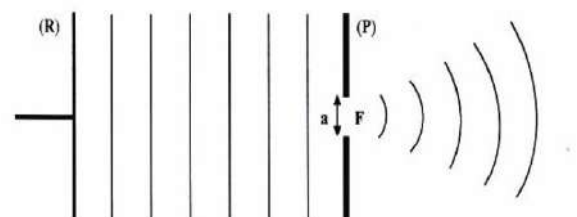
Un vibreur muni d'une réglette (R) provoque à la surface du liquide une onde progressive rectiligne. On place, sur le trajet de l'onde et parallèlement à la réglette, une plaque (P) rigide munie d'une fente F de largeur a variable.

L'onde traverse la fente comme indiqué sur la figure ci-contre:

1⁰) Préciser le nom du phénomène physique observé.

2⁰) Justifier qu'à la traversée de la fente, la longueur d'onde λ est conservée.

3⁰) Le phénomène est d'autant plus appréciable que $a \ll \lambda$. Indiquer dans ce cas le qualificatif que porte la fente et le rôle qu'elle joue.



Réponse :

1⁰) Le phénomène physique observé est la diffraction.

2⁰) A la traversée de la fente, le milieu propageur est conservé donc la longueur d'onde λ est conservée.

3⁰) $a \ll \lambda \rightarrow$ la fente est dite **mince**.

La fente mince joue le rôle de **source secondaire d'ondes circulaires**.

LE SPECTRE ATOMIQUE ET LA QUANTIFICATION DES ÉCHANGES D'ÉNERGIE

I / Quantification de l'énergie d'un atome :

1⁰ Mise en situation :

a - Energie d'un système en interaction :

• Cas d'un système macroscopique (terre + satellite) :

Soit un satellite (S) qui tourne autour de la terre (T).

S est placé dans le champ gravitationnel de la terre.

La cohésion du système (T + S) est alors assurée par des forces d'interaction gravitationnelles :

force gravitationnelle : $\vec{F}_{T/S} = -\vec{F}_{S/T} = -G \frac{M.m}{r^2} \cdot \vec{u}$

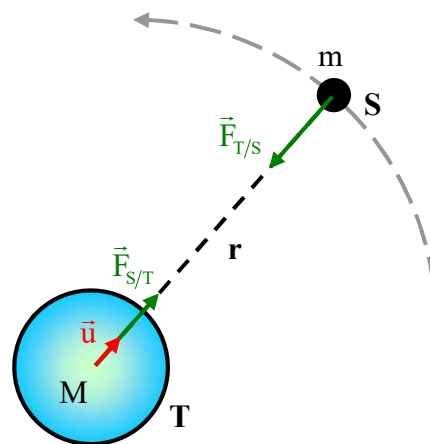
M : masse de la terre.

m : masse du satellite

r : distance terre – satellite

G : constante de gravitation universelle ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI)

$\vec{u}$: vecteur unitaire



Suivant l'altitude du satellite, le système (T + S) possède une énergie mécanique E dont la variation s'accompagne d'une variation de l'altitude du satellite.

• Cas d'un système microscopique (atome d'hydrogène) :

Ce système est constitué par un électron e^- qui gravite autour du noyau formé par un proton H^+ .

l'électron est placé dans le champ électrique du noyau.

La cohésion du système ($H^+ + e^-$) est alors assurée par des forces d'interaction électrostatiques :

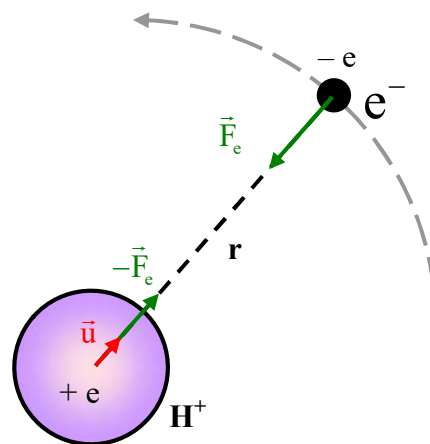
force coulombienne : $\vec{F}_e = -K \frac{e^2}{r^2} \cdot \vec{u}$

e : charge élémentaire

r : rayon de l'atome

K : constante ($K = 9 \cdot 10^9$ SI)

$\vec{u}$: vecteur unitaire



b - Le modèle atomique de Rutherford (1911) :

En se basant sur les analogies entre les systèmes (terre + satellite) et (noyau + électrons), Rutherford proposa un modèle planétaire de l'atome où les électrons gravitent autour du noyau sur des orbites circulaires.

Ce modèle, très simple, souffre d'une insuffisance majeure :

En s'appuyant sur la loi de l'électromagnétisme de Maxwell :

« toute particule électriquement chargée et accélérée rayonne de l'énergie »

et sachant que dans le modèle planétaire de Rutherford, l'électron subit une accélération centripète, il rayonne donc de l'énergie et finit par s'effondrer sur le noyau !

2⁰ Les postulats de Bohr (1913) :

En s'appuyant sur la théorie des quantas de Planck (1900), Bohr proposa un modèle atomique basé sur les hypothèses suivantes :

• 1^{ère} hypothèse :

L'énergie d'un atome ne peut prendre que certaines valeurs bien déterminées, elle ne peut varier que d'une façon discontinue : on dit qu'elle est **quantifiée**.

Remarques :

- On dit que les niveaux d'énergie de l'atome sont **discrets**.
- Lorsque l'atome est à un niveau d'énergie, il ne rayonne pas, son état énergétique est dit **stationnaire**.

• 2^{ème} hypothèse :

Les variations d'énergie de l'atome sont quantifiées.

Remarque :

L'atome n'absorbe ou n'émet de l'énergie que pour passer d'un niveau d'énergie vers un autre.

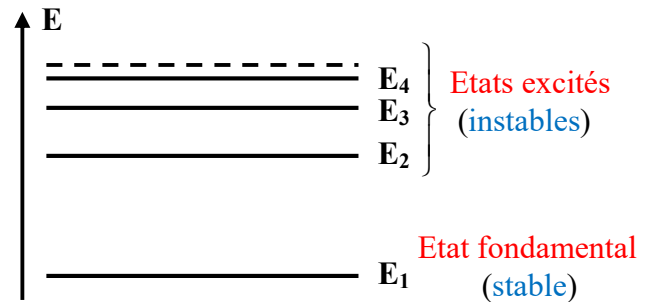
3⁰) Les niveaux d'énergie d'un atome :

a - Représentation des niveaux d'énergie :

On représente les niveaux d'énergie d'un atome dans un diagramme énergétique.

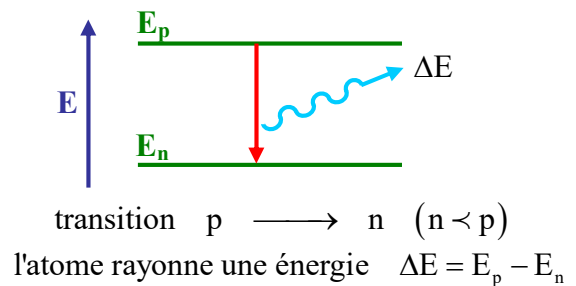
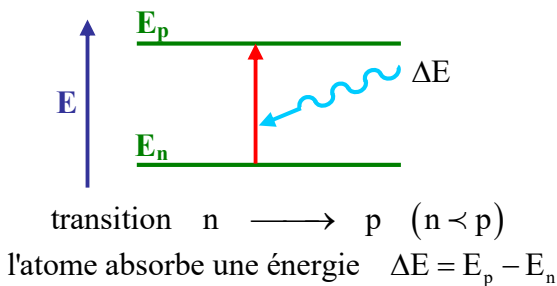
Lorsque l'atome est à son niveau d'énergie le plus bas, on dit qu'il est à son **état fondamental**.

Tous les autres états sont des **états excités**.



b - Les transitions électroniques :

Le passage de l'atome d'un niveau d'énergie à un autre s'appelle **transition électronique**.



Remarques :

- La variation de l'énergie de l'atome au cours d'une transition est **quantifiée**.
- On utilisera généralement comme unité d'énergie l'électron-volt : **1 eV = 1,6.10⁻¹⁹ J**.

4⁰) L'expérience de Franck et hertz (1914) :

a - Présentation de l'expérience :

Un canon à électrons émet un faisceau d'électrons dont l'énergie cinétique E_C est réglable.

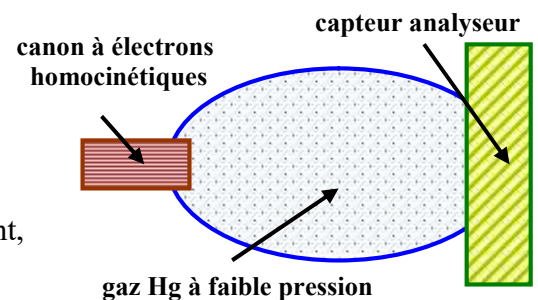
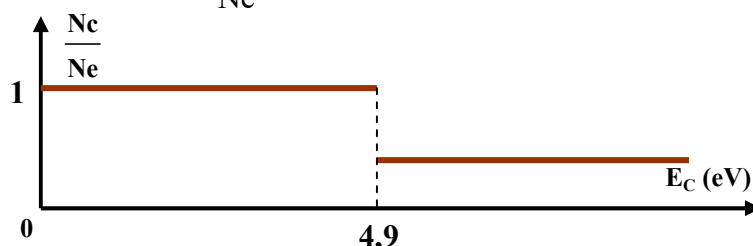
Ces électrons projectiles bombardent de la vapeur de mercure Hg contenue, sous faible pression, dans une enceinte close.

Un capteur analyseur permet de capter les électrons qui l'atteignent, à la sortie de l'enceinte, avec la même énergie E_C.

Soient :

- N_e le nombre d'électrons émis par unité de temps par le canon à électrons.
- N_c le nombre d'électrons captés par unité de temps par l'analyseur.

On fait varier E_C et on note chaque fois $\frac{N_c}{N_e}$; on obtient le graphe ci-dessous :



b - Interprétation :

- Pour $E_c < 4,9 \text{ eV}$, $\frac{N_c}{N_e} = 1$

Sur leur trajet, les électrons rentrent en collision avec les atomes de mercure mais gardent toute leur énergie cinétique : les chocs sont élastiques.

- Pour $E_c \geq 4,9 \text{ eV}$, $\frac{N_c}{N_e} < 1$

Un certain nombre d'électrons rentrent en collision avec les atomes de mercure et leur cèdent une énergie de 4,9 eV : les chocs sont inélastiques.

- Au cours de l'interaction, l'atome de mercure ne peut absorber qu'une énergie de 4,9 eV, ceci met en évidence la quantification du transfert d'énergie entre l'atome et le milieu extérieur.

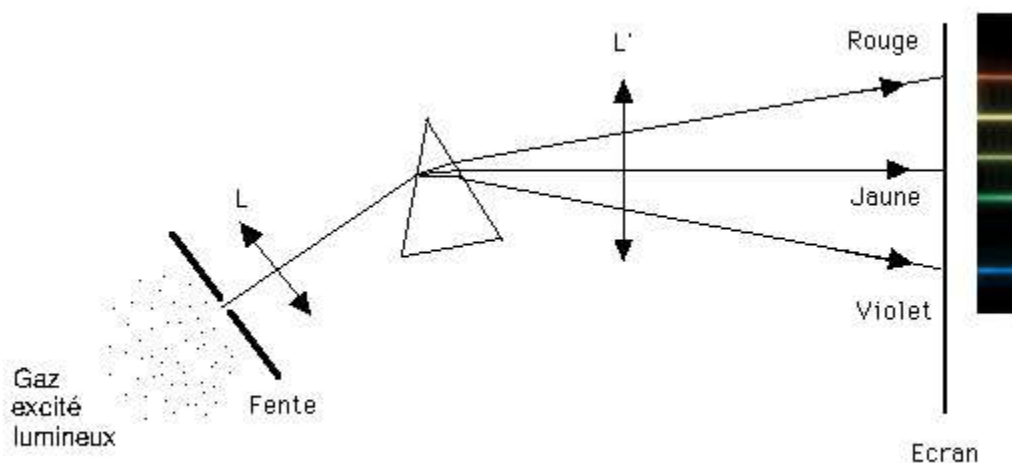
II / Les spectres atomiques :

1⁰) La spectroscopie :

La spectroscopie est la mise en évidence des différentes radiations monochromatiques constituant une lumière donnée.

Ces différentes radiations monochromatiques constituent le **spectre** de la lumière étudiée.

Le spectre lumineux est observé à l'aide d'un spectroscopie dont l'élément essentiel est le disperser (prisme ou réseau).



2⁰) Les spectres d'émission :

a - Spectre de la lumière blanche :

La source est une lumière blanche.

L'analyse spectrale conduit à un spectre continu coloré dont les couleurs varient progressivement du violet au rouge (les couleurs de l'arc en ciel) : c'est le spectre visible de la lumière blanche.



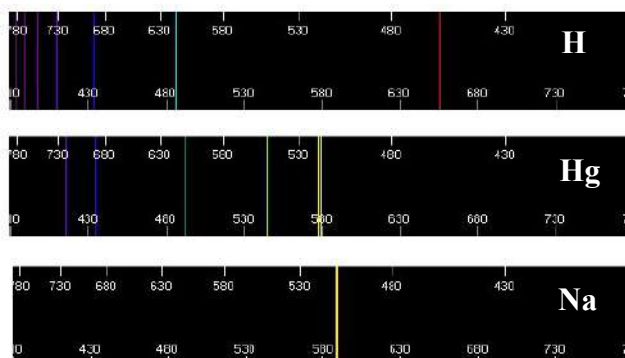
b - Spectre d'émission :

La source est une lampe spectrale (lampe à vapeurs de mercure ou à hydrogène).

L'analyse spectrale conduit à un spectre discontinu constitué d'une série de raies colorées brillantes et fines sur fond sombre.

Remarques :

- Les spectres d'émission sont des spectres de raies.
- Le spectre d'émission est caractéristique de l'élément chimique correspondant.



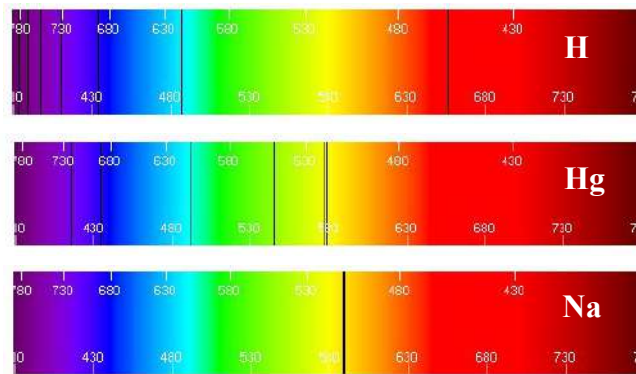
c - Spectre d'absorption :

Un élément absorbant (vapeurs de sodium) est placé entre une source de lumière blanche et le système dispersif d'un spectroscope.

On obtient un spectre coloré continu (spectre de la lumière blanche) avec des raies noires (cannelures).

Remarques :

- Les raies noires correspondent aux radiations absorbées par l'élément chimique.
- Le spectre d'absorption est caractéristique de l'élément chimique correspondant.
- Les cannelures du spectre d'absorption d'un élément correspondent aux raies du spectre d'émission du même élément.
- Chaque élément chimique est caractérisé par son spectre d'émission et son spectre d'absorption.



III / Interprétation des spectres d'hydrogène :

1⁰) Notion de photon :

La nature ondulatoire de la lumière peut expliquer le phénomène de diffraction mais elle est incapable d'interpréter les spectres atomiques d'émission.

En 1900, Max Planck postula qu'une radiation lumineuse de fréquence ν ne peut échanger de l'énergie avec la matière que sous forme de paquet d'énergie (quantum d'énergie) de valeur énergétique $h \cdot \nu$ où h est une constante universelle appelée constante de Planck ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ SI).

En 1905, Einstein postula qu'une radiation lumineuse de fréquence ν est constituée d'un flux de particules sans charge ni masse appelées photons. Chaque photon transporte une énergie :

$$w = h \cdot \nu = h \frac{c}{\lambda} \quad \text{où } h : \text{constante de Planck}$$

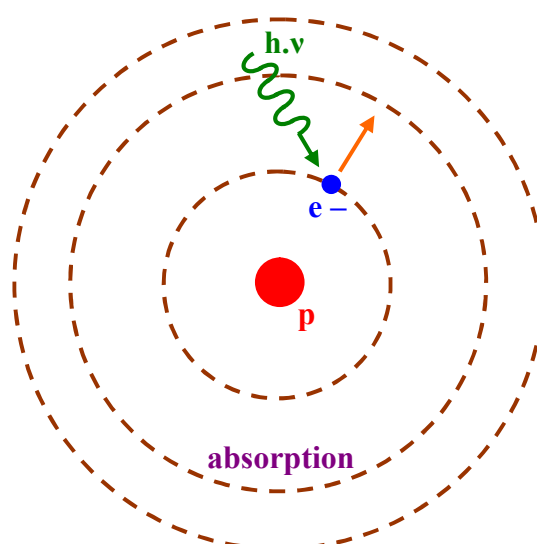
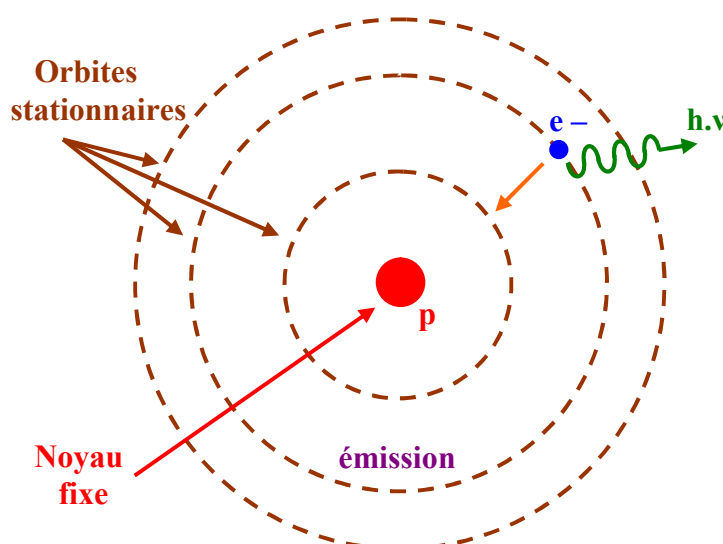
C'est la nature corpusculaire de la lumière.

Remarque : La lumière a un double aspect : $\left\{ \begin{array}{ll} \text{ondulatoire} & \rightarrow \text{diffraction} \\ \text{corpusculaire} & \rightarrow \text{spectre atomique} \end{array} \right.$

2⁰) Le modèle de Bohr pour l'atome d'hydrogène :

a - Les bases du modèle :

- Le noyau (proton) est fixe.
- L'électron gravite autour du noyau sur des orbites circulaires privilégiées, chacune correspondant à une valeur de l'énergie quantifiée (orbite stationnaire).
- L'électron n'échange de l'énergie avec le milieu extérieur que lorsqu'il passe d'une orbite stationnaire à une autre.



b - Diagramme énergétique de l'atome d'hydrogène :

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation suivante :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \left| \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}^* \\ E_0 = 13,6 \text{ eV} \end{array} \right.$$

- $E_0 = 13,6 \text{ eV} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$

- Pour $n = 1 \longrightarrow E_1 = -13,6 \text{ eV} = -E_0 :$

L'énergie est minimale, l'atome est dans son état le plus stable : c'est l'état fondamental.

- Pour $1 < n < \infty \longrightarrow -13,6 \text{ eV} < E_n < 0 :$

L'atome est dans un état excité.

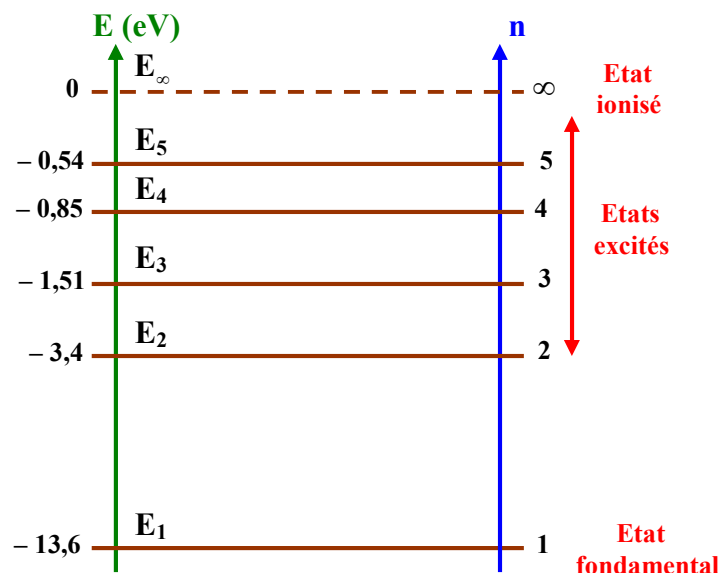
- Pour $n = \infty \longrightarrow E_\infty = 0 :$

L'électron quitte l'atome. L'atome est alors ionisé.

Pour ioniser l'atome d'hydrogène, pris à l'état fondamental, il faut lui fournir une énergie $w \geq 13,6 \text{ eV}$.

L'énergie d'ionisation E_i de l'atome d'hydrogène est définie comme étant l'énergie minimale qu'il faut fournir à l'atome d'hydrogène, pris à l'état fondamental, pour l'ioniser.

$$E_1 + E_i = 0 \rightarrow E_i = -E_1 \xrightarrow{E_i = -E_0} E_i = E_0 = 13,6 \text{ eV}$$



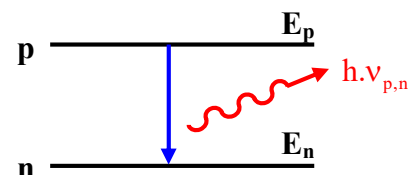
3⁰) Interprétation des raies d'émission :

a - Mécanisme de désexcitation :

Excité par un apport extérieur d'énergie convenable, l'atome se trouve dans un état instable. Il se désexcite alors en passant d'un niveau p vers un niveau n inférieur ($n < p$).

Au cours de la désexcitation, l'atome émet un photon d'énergie :

$$h \cdot \nu_{p,n} = E_p - E_n = E_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) = |\Delta E_{p,n}|$$



Remarque :

L'atome se désexcite soit en passant directement à son état fondamental soit en passant par des états excités intermédiaires.

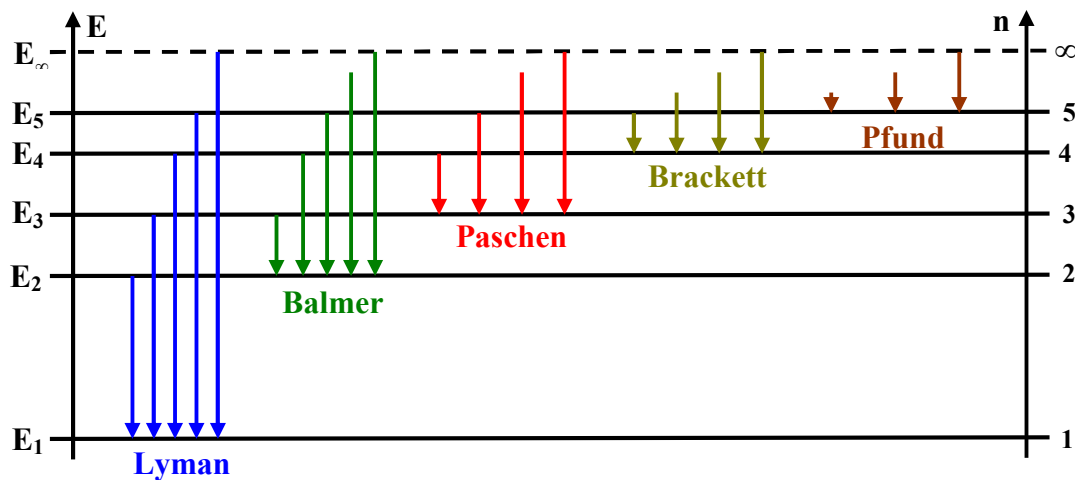
b - Les séries de transition :

Lors de la désexcitation du niveau p vers le niveau n, l'atome émet une radiation de longueur d'onde :

$$\lambda_{p,n} = \frac{h \cdot c}{E_p - E_n}$$

Suivant le niveau d'arrivée n , on distingue plusieurs séries de transitions :

- Série de Lyman : $n = 1$, $p = 2, 3, 4 \dots$ (des raies dans l'UV)
- Série de Balmer : $n = 2$, $p = 3, 4, 5 \dots$ (à la quelle appartiennent les raies visibles du spectre d'émission de l'hydrogène).
- Série de Paschen : $n = 3$, $p = 4, 5, 6 \dots$ (des raies dans l'IR)



Application 1 :

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation : $E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \left| \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}^* \\ E_0 = 13,6 \text{ eV} \end{array} \right.$

1⁰) Montrer que la longueur d'onde de la radiation émise lors d'une transition d'un niveau p vers un niveau n ($p > n$) peut être calculée par la formule : $\lambda(\text{nm}) = \frac{1240}{E_p - E_n}$.

2⁰) a - Montrer que les émissions de la série de Lyman sont dans le domaine UV ou de plus petites longueurs d'onde.

b - Montrer que les émissions de la série de Paschen sont dans le domaine IR ou de plus grandes longueurs d'onde.

c - Quelles sont les longueurs d'onde limites des émissions de la série de Balmer ?

3⁰) a - Montrer que la longueur d'onde de la radiation émise lors d'une transition d'un niveau p vers un

niveau n ($p > n$) vérifie la formule de Ritz : $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{p^2 - n^2}{n^2 \cdot p^2} \right)$ où R_H est une constante appelée constante

de Rydberg.

b - Calculer la valeur de R_H dans le SI.

On donne : $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$; $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$; $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Réponse :

$$1^0) h \cdot \nu = h \frac{c}{\lambda} = E_p - E_n \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E_p - E_n} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 2,998 \cdot 10^8}{(E_p - E_n)_{\text{eV}} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} \rightarrow \lambda = \frac{12,399 \cdot 10^{-7}}{(E_p - E_n)_{\text{eV}}} \rightarrow \lambda(\text{nm}) = \frac{1240}{E_p - E_n}$$

$$2^0) \text{ a - Série de Lyman} \rightarrow n = 1 \text{ et } \lambda_{\text{max}} \rightarrow p = 2$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{1240}{E_2 - E_1} \xrightarrow{\text{A.N}} \lambda_{\text{max}} = \frac{1240}{(-3,4) - (-13,6)} \text{ et } \lambda_{\text{max}} = 121,57 \text{ nm}$$

Les émissions de la série de Lyman sont dans le domaine UV ou de plus petites longueurs d'onde.

$$\text{b - Série de Paschen} \rightarrow n = 3 \text{ et } \lambda_{\text{min}} \rightarrow p = \infty$$

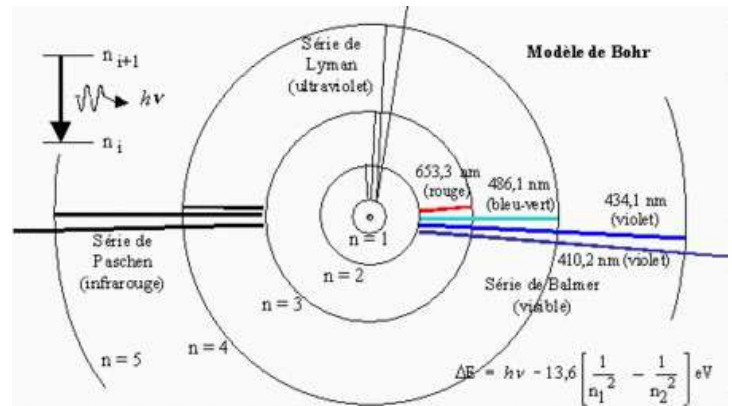
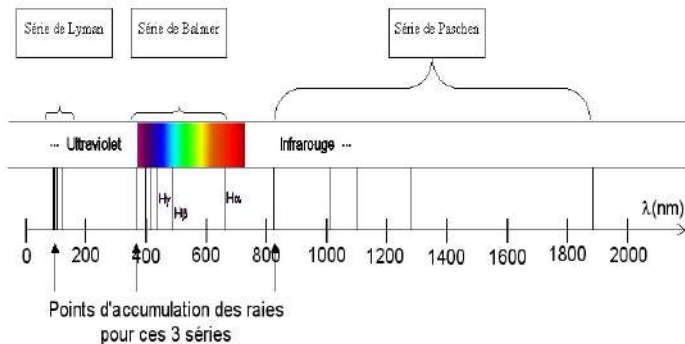
$$\lambda_{\text{min}} = \frac{1240}{E_{\infty} - E_3} \xrightarrow{\text{A.N}} \lambda_{\text{min}} = \frac{1240}{(0) - (-1,51)} \text{ et } \lambda_{\text{min}} = 821,19 \text{ nm}$$

Les émissions de la série de Paschen sont dans le domaine IR ou de plus grandes longueurs d'onde.

b - Série de Balmer $\longrightarrow n = 2$

$$\lambda_{\min} \longrightarrow p = \infty \quad \text{donc} \quad \lambda_{\min} = \frac{1240}{E_{\infty} - E_2} \xrightarrow{\text{A.N}} \lambda_{\min} = \frac{1240}{(0) - (-3,4)} \quad \text{et} \quad \lambda_{\min} = 364,71 \text{ nm}$$

$$\lambda_{\max} \longrightarrow p = 3 \quad \text{donc} \quad \lambda_{\max} = \frac{1240}{E_3 - E_2} \xrightarrow{\text{A.N}} \lambda_{\max} = \frac{1240}{(-1,51) - (-3,4)} \quad \text{et} \quad \lambda_{\max} = 656,08 \text{ nm}$$



3⁰) a - $h \cdot \nu = h \frac{c}{\lambda} = E_p - E_n$

$$\longrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{h \cdot c} (E_p - E_n) = \frac{1}{h \cdot c} \left(\frac{-E_0}{p^2} - \frac{-E_0}{n^2} \right) = \frac{E_0}{h \cdot c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{E_0}{h \cdot c} \left(\frac{p^2 - n^2}{p^2 \cdot n^2} \right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{p^2 - n^2}{n^2 \cdot p^2} \right) \quad \text{où} \quad R_H = \frac{E_0}{h \cdot c}$$

b - $R_H = \frac{13,6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 2,998 \cdot 10^8} \quad \text{et} \quad R_H = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

4⁰) Interprétation des raies d'absorption :

Soit un atome d'hydrogène à un niveau d'énergie E_n . Il reçoit un photon d'énergie $h \cdot \nu$:

• **Si $h \cdot \nu < E_i$:**

- Si $h \cdot \nu$ correspond exactement à une transition vers un niveau d'énergie E_p ($p > n$) alors le photon est absorbé, on a donc : $h \cdot \nu = E_p - E_n$

La fréquence ν correspond à une raie noire (cannelure) dans le spectre d'absorption.

L'atome est capable d'absorber le photon qu'il peut émettre.

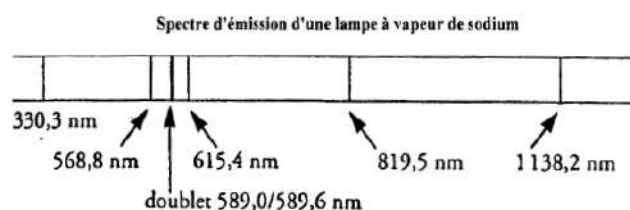
- Si $h \cdot \nu$ ne correspond pas à une transition possible, le photon est diffusé (renvoyé sans être absorbé).

• **Si $h \cdot \nu \geq E_i$:**

Le photon est absorbé, une partie de son énergie sert à l'ionisation de l'atome, le reste est acquis par l'électron éjecté sous forme d'énergie cinétique.

Application 2 :

L'analyse du spectre d'émission d'une lampe à vapeur de sodium révèle la présence de raies de longueur d'onde λ bien définie.



1⁰) a - Calculer la valeur de la fréquence ν de la raie de longueur d'onde $\lambda = 589,0 \text{ nm}$.

b - Calculer, en eV, l'énergie ΔE qui correspond à l'émission de cette radiation.

c - Sans justifier, indiquer par une flèche notée 1 sur le diagramme des niveaux d'énergie la transition correspondante.

2⁰) L'atome de sodium, considéré maintenant à l'état E₁, reçoit une radiation lumineuse dont le quantum d'énergie w a pour valeur 1,65 eV.

a - Cette radiation lumineuse peut-elle interagir avec l'atome de sodium à l'état E₁ ? Justifier.

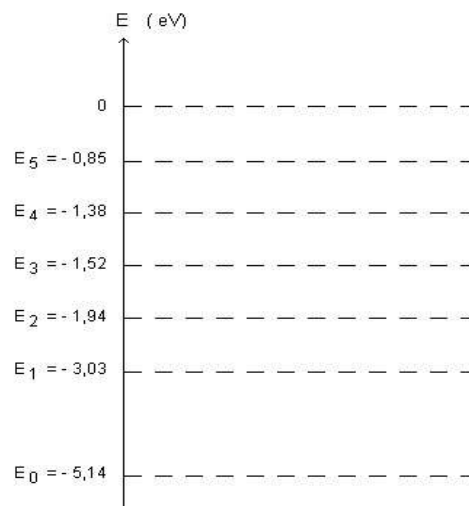
b - Représenter sur le diagramme la transition correspondante par une flèche notée 2.

c - La raie associée à cette transition est-elle une raie d'émission ou une raie d'absorption ? Justifier votre réponse.

d - Calculer la longueur d'onde de la radiation émise lorsque l'atome se désexcite et revient à l'état fondamental.

On donne : $c = 2,998.10^8 \text{ m.s}^{-1}$; $h = 6,626.10^{-34} \text{ J.s}$; $1 \text{ eV} = 1,602.10^{-19} \text{ J}$.

Diagramme simplifié des niveaux d'énergie de l'atome de sodium



Réponse :

1⁰) a - $v = \frac{c}{\lambda} \xrightarrow{\text{A.N}} v = \frac{2,998.10^8}{589.10^{-9}} \text{ et } v = 5,09.10^{14} \text{ Hz}$

b - $\Delta E = h.v \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta E = 6,626.10^{-34} \cdot 5,09.10^{14} \text{ et } \Delta E = 33,73.10^{-20} \text{ J}$

$\Delta E = \frac{33,73.10^{-20}}{1,602.10^{-19}} \text{ et } \Delta E = 2,11 \text{ eV}.$

c - $\Delta E = E_1 - E_0 \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta E = -3,03 - (-5,14) \text{ et } \Delta E = 2,11 \text{ eV}$

2⁰) a - $E_n = E_1 + w \xrightarrow{\text{A.N}} E_n = -3,03 + 1,65 \text{ et } E_n = -1,38 \text{ eV}$

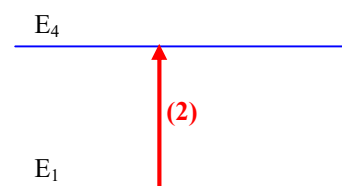
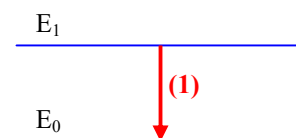
On remarque que $E_n = E_4$ donc le photon est absorbé.

b - Voir figure.

c - La raie correspondante est une raie d'absorption : $E_{\text{finale}} (E_4) > E_{\text{initiale}} (E_1)$

d - $h.v = E_4 - E_0 = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h.c}{E_4 - E_0}$

A.N : $\lambda = \frac{6,626.10^{-34} \cdot 2,998.10^8}{(-1,38 + 5,14) \cdot 1,602.10^{-19}} \text{ et } \lambda = 329,78.10^{-9} \text{ m}.$



Pour en savoir plus

1⁰) La nature corpusculaire de la lumière :

• En s'attaquant à un des plus vieux problèmes de la physique théorique « Pourquoi un corps émet-il de la lumière lorsqu'on le chauffe ? », Max Planck s'intéressa au rayonnement du corps noir (Un corps noir est un objet qui absorbe toutes les radiations reçues. Un corps noir en équilibre thermique réémet autant d'énergie qu'il en reçoit) pour lequel la théorie classique était incapable d'expliquer les propriétés (cette incapacité fut appelée catastrophe ultra-violette). Ses travaux l'ont menés, en 1900, à énoncer une nouvelle théorie suivant laquelle les échanges d'énergie entre la matière et une radiation lumineuse de fréquence ν se font par paquets d'énergie appelés quanta, chaque quantum d'énergie a une valeur énergétique $h \cdot \nu$ ou h est une constante appelée constante de Planck ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s).

C'est la théorie des quanta de Planck. (quantification des échanges d'énergie entre une radiation lumineuse et la matière).

L'énergie échangée entre la radiation et la matière s'écrit alors : $|\Delta E| = n \cdot (h \cdot \nu)$ ou $n \in \mathbb{N}$

• En 1905, Einstein proposa une hypothèse suivant laquelle le rayonnement électromagnétique lui-même est quantifié : une radiation lumineuse de fréquence ν est constituée de particules sans masse ni charge appelés photons. Chaque photon transporte une énergie $E = h \cdot \nu$ où h : constante de Planck.

Cet aspect corpusculaire de la lumière a permis d'expliquer l'effet photoélectrique (émission d'électrons par un matériau exposé à la lumière) et d'interpréter les spectres atomiques.

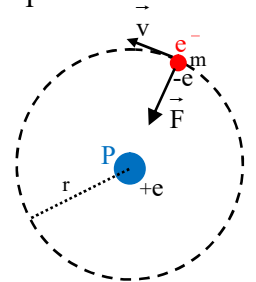
2⁰) La genèse du modèle de Bohr pour l'atome d'hydrogène :

a - Le modèle classique de Rutherford :

Dans le modèle planétaire classique de l'atome d'hydrogène, l'électron tourne autour du proton sur une orbite de rayon r d'un mouvement circulaire uniforme avec une vitesse v .

• La force électrostatique est alors une force centrale :

$$\begin{cases} \|\vec{F}\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \\ \|\vec{F}\| = m \cdot \frac{v^2}{r} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m \cdot v^2}$$



La valeur de r peut prendre toutes les valeurs possibles car il n'y a aucune restriction sur v .

• L'énergie totale de l'atome est égale à la somme de l'énergie cinétique de l'électron (le proton étant supposé fixe) et de l'énergie potentielle.

$$E(r) = E_C(r) + E_p(r) \xrightarrow[E_p(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}]{E_C(r) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2} E(r) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} \xrightarrow[m \cdot v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}]{ } E(r) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

L'énergie peut prendre, d'une façon continue, toutes les valeurs possibles entre $E = 0$ et $E = \infty$.

Remarque :

En prenant comme référence de l'énergie potentielle $E_p(r = \infty) = 0$, l'énergie potentielle $E_p(r)$ est égale au travail $W(\vec{F})$ nécessaire pour ramener l'électron de $r = \infty$ jusqu'à r .

$$E_p(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \rightarrow E_p(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

b - Défaillances du modèle planétaire de Rutherford :

• D'après la théorie classique de l'émission électromagnétique, toute particule chargée et accélérée rayonne de l'énergie. L'atome perd donc continuellement de l'énergie et l'électron finit par tomber sur le noyau

• Le modèle planétaire classique ne peut pas interpréter la discontinuité des spectres d'émission des atomes (les spectres d'émission sont des spectres de raies).

En effet et en 1885, Balmer proposa une formule empirique permettant de retrouver les longueurs d'onde du spectre de l'atome d'hydrogène dans sa partie visible. Revue par Rydberg en 1890, cette formule s'écrit :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n : \text{entier} > 2 \\ R_H = 1,097.10^7 \text{ m}^{-1} : \text{constante de Rydberg} \end{cases}$$

Cette formule, vérifiée expérimentalement, est incompatible avec le modèle atomique de Rutherford.

c - Le modèle de Bohr pour l'atome d'hydrogène :

Un nouveau modèle atomique doit solutionner les deux difficultés suivantes :

- Interpréter la discontinuité observée dans les spectres atomiques
- Lever le paradoxe de la perte continue d'énergie d'une particule chargée dans le cas de l'atome.

Pour ce faire, Bohr proposa les postulats suivants :

• Premier postulat :

L'électron ne peut graviter autour du noyau que sur des orbites bien précises. Lorsque l'électron est sur une orbite privilégiée, il ne rayonne pas d'énergie.

Le rayon r de l'orbite de l'électron est alors discontinu (on dit qu'il est quantifié).

Ce postulat est basé sur l'hypothèse de quantification du moment cinétique de l'électron.

$$m.v.r = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad \text{où} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ h : \text{constante de Planck} (h = 6,63.10^{-34} \text{ J.s}) \end{cases}$$

$$\rightarrow v = n \cdot \frac{h}{2\pi.m.r} \quad \xrightarrow{r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m.v^2}} \quad r_n = \left(\frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot e^2 \cdot m} \right) \cdot n^2$$

Remarque : pour $n = 1$, $r_1 = \left(\frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot e^2 \cdot m} \right) \xrightarrow{\text{A.N}} r_1 = 0,53.10^{-10} \text{ m}$ (rayon de Bohr). On écrit alors : $r_n = r_1 \cdot n^2$.

• Deuxième postulat :

A chaque orbite privilégiée correspond un niveau d'énergie. Les niveaux d'énergie sont donc quantifiés.

L'atome n'absorbe ou n'émet de l'énergie que pour passer d'un niveau d'énergie vers un autre.

Par conséquent, les variations d'énergie de l'atome sont quantifiées.

Ce deuxième postulat découle logiquement du premier. En effet, si on revient à l'expression de l'énergie :

$$E(r) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} \quad \xrightarrow{r_n = \left(\frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot e^2 \cdot m} \right) \cdot n^2} \quad E_n = -\left(\frac{m \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \right) \cdot \frac{1}{n^2}$$

Remarque : pour $n = 1$, $E_1 = -\left(\frac{m \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \right) = -E_0 \xrightarrow{\text{A.N}} E_0 = 21,8.10^{-19} \text{ J}$ ou $E_0 = 13,6 \text{ eV}$ (E_1 est le niveau

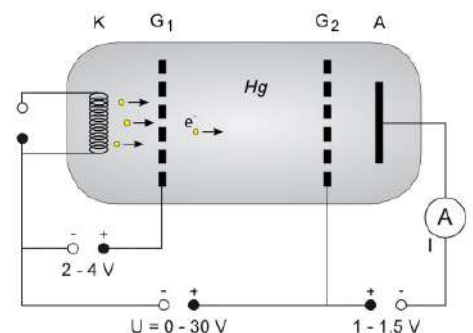
d'énergie le plus bas de l'atome ou état fondamental). On écrit alors : $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ avec $\begin{cases} E_0 = 13,6 \text{ eV} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Remarque : lors de la transition (passage) d'un niveau n vers un niveau p , l'atome échange avec le milieu extérieur une énergie : $|\Delta E| = |E_p - E_n|$.

3⁰) L'expérience de Franck et Hertz :

- L'expérience de Franck et Hertz permet de confirmer expérimentalement la quantification des échanges d'énergie entre l'atome et le milieu extérieur.

Dans une enceinte close contenant du mercure Hg gazeux à très faible pression, des électrons émis par un filament chauffé et accélérés sous une tension U jusqu'à une vitesse v traversent l'enceinte et ils sont légèrement freinés avant d'atteindre l'anode pour créer un courant dont l'intensité I devrait augmenter si la tension accélératrice U croît. En augmentant la tension U , l'intensité I commence par croître, mais lorsque U atteint la valeur $U_0 = 4,9 \text{ V}$, l'intensité I chute brusquement et un rayonnement ultra-violet est émis de l'enceinte.



En augmentant encore la tension U le même phénomène se répète pour les valeurs $2 U_0$, $3 U_0$...etc.

- Dès que la tension accélératrice dépasse la tension de freinage, les électrons émis traversent l'enceinte créant un courant qui circule dans le circuit. Sur leur passage, les électrons rentrent en collision avec les atomes de Hg sans effet notable (chocs élastiques).

Lorsque $U = U_0 = 4,9 \text{ V}$, le courant chute. La tension de freinage a repoussé les électrons qui n'ont plus assez d'énergie pour atteindre l'anode.

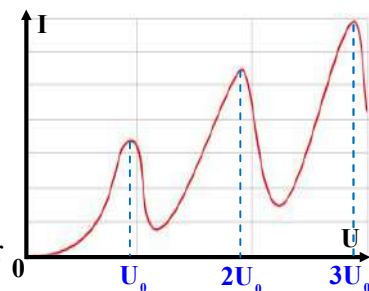
Sur leur passage, les électrons rentrent en collision avec les atomes de Hg et leur transfèrent une énergie $E = 4,9 \text{ eV}$ (chocs inélastiques).

chaque atome de Hg, en absorbant une énergie E , passe de l'état fondamental au premier état excité, puis revient à l'état fondamental en émettant un rayonnement ultra-violet (en accord avec le modèle de Bohr).

Lorsque $U = 2 U_0$, chaque électron interagit avec deux atomes de Hg et le courant chute de nouveau ...etc.

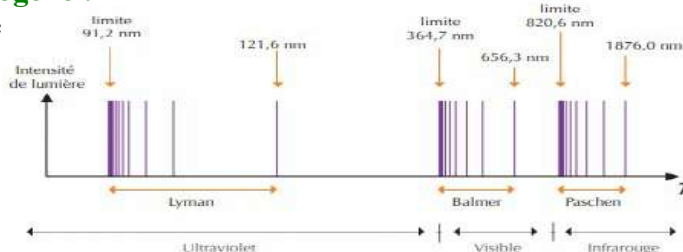
- L'expérience de Franck et Hertz prouve expérimentalement la quantification des échanges d'énergie entre un atome et le milieu extérieur.

Remarque : pour leurs travaux, Franck et Hertz reçurent le prix Nobel de physique en 1925.



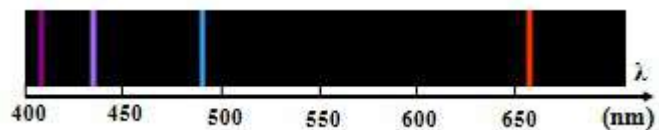
4⁰) Les raies visibles du spectre d'émission de l'hydrogène :

Les raies visibles du spectre d'émission de l'hydrogène appartiennent à la série de Balmer. Elles correspondent donc à des transitions électroniques d'un niveau $n > 2$ vers le niveau $n = 2$. On se propose de déterminer leur nombre, les transitions correspondantes et la longueur d'onde de la radiation lumineuse émise qui est associée à chacune d'elles.



Les longueurs d'onde des radiations émises dans la série de Balmer sont données par : $\lambda = \frac{h.c}{E_n - E_2}$

$$\lambda = \frac{h.c}{E_0 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)} \rightarrow \lambda = \frac{4.h.c}{E_0} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right)$$



$$\frac{4.h.c}{E_0} = \frac{4.6,626.10^{-34} \cdot 2,998.10^8}{13,61,602.10^{-19}} \text{ et } \frac{4.h.c}{E_0} = 364,70.10^{-9} \text{ m} \rightarrow \lambda_{(m)} = 364,7.10^{-9} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right)$$

$$\text{Dans le spectre visible : } 400.10^{-9} \text{ m} \leq \lambda \leq 750.10^{-9} \text{ m} \rightarrow 400.10^{-9} \leq 364,7.10^{-9} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right) \leq 750.10^{-9}$$

$$\rightarrow \frac{400}{364,7} \leq \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right) \leq \frac{750}{364,7} \rightarrow \frac{364,7}{400} \geq 1 - \frac{4}{n^2} \geq \frac{364,7}{750} \rightarrow \frac{364,7 - 400}{400} \geq -\frac{4}{n^2} \geq \frac{364,7 - 750}{750}$$

$$\rightarrow \frac{400 - 364,7}{400} \leq \frac{4}{n^2} \leq \frac{750 - 364,7}{750} \rightarrow \frac{1600}{400 - 364,7} \geq n^2 \geq \frac{3000}{750 - 364,7} \rightarrow 6,73 \geq n \geq 2,79$$

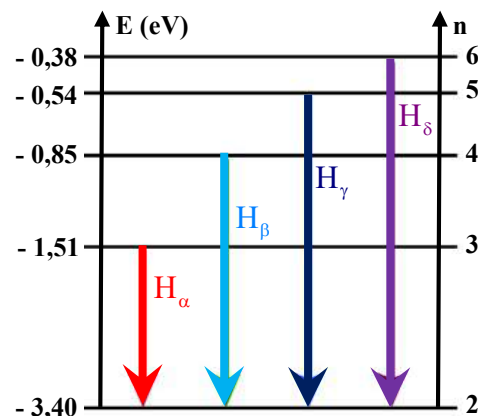
$n \in \{3, 4, 5, 6\}$ donc il existe quatre raies colorées visibles dans le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène.

$$* n = 3 : \lambda = 364,7.10^{-9} \cdot \left(\frac{3^2}{3^2 - 4} \right) \text{ et } \lambda = 656,46 \text{ nm} \rightarrow \text{raie } H_\alpha$$

$$* n = 4 : \lambda = 364,7.10^{-9} \cdot \left(\frac{4^2}{4^2 - 4} \right) \text{ et } \lambda = 486,27 \text{ nm} \rightarrow \text{raie } H_\beta$$

$$* n = 5 : \lambda = 364,7.10^{-9} \cdot \left(\frac{5^2}{5^2 - 4} \right) \text{ et } \lambda = 434,17 \text{ nm} \rightarrow \text{raie } H_\gamma$$

$$* n = 6 : \lambda = 364,7.10^{-9} \cdot \left(\frac{6^2}{6^2 - 4} \right) \text{ et } \lambda = 410,29 \text{ nm} \rightarrow \text{raie } H_\delta$$



5⁰) Absorption d'énergie par l'atome d'hydrogène :

- **Interaction avec un photon :**

L'atome d'hydrogène est à l'état fondamental, il reçoit un photon d'énergie $w = h \cdot \nu$.

* Si $w \geq E_i$: le photon est absorbé et l'atome est ionisé.

L'électron est éjecté avec une énergie cinétique $E_c = w - E_i$.

Sachant que $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}}$ donc l'électron est éjecté avec une vitesse $v = \sqrt{\frac{2 \cdot (w - E_i)}{m}}$.

* Si $w < E_i$: le photon n'est absorbé que si l'atome passe à un niveau E_n

$$\rightarrow E_i + w = E_n \rightarrow -E_0 + w = E_n \xrightarrow{E_n = -\frac{E_0}{n^2}} \frac{E_0}{n^2} = E_0 - w \rightarrow n^2 = \frac{E_0}{E_0 - w}$$

Le photon ne peut être absorbé que si $n = \sqrt{\frac{E_0}{E_0 - w}}$ est un entier naturel.

Remarque : dans le cas où n n'est pas un entier naturel, le photon est diffusé sans être absorbé.

- **Interaction avec un électron :**

L'atome d'hydrogène est initialement à un niveau énergétique E_n , il rentre en collision avec un électron d'énergie cinétique E_c .

L'atome interagit avec l'électron à condition qu'il puisse passer à un niveau E_p tel que $p > n$.

L'électron cède alors à l'atome une énergie $(E_p - E_n)$. Son énergie cinétique, après le choc, devient alors :

$$E'_c = E_c - (E_p - E_n). \text{ Sa vitesse après le choc devient } v' = \sqrt{\frac{2[E_c - (E_p - E_n)]}{m}}.$$

Remarque :

L'atome d'hydrogène n'interagit avec l'électron incident que s'il puisse au moins passer du niveau E_n vers le niveau E_{n+1} .

$$E_c \geq E_{n+1} - E_n \rightarrow E_c \geq \left[-\frac{E_0}{(n+1)^2} \right] - \left[-\frac{E_0}{n^2} \right] \rightarrow E_c \geq E_0 \cdot \left[\frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2 \cdot (n+1)^2} \right] \text{ et } E_c \geq E_0 \cdot \left[\frac{2n+1}{[n \cdot (n+1)]^2} \right].$$

Applications

Données :

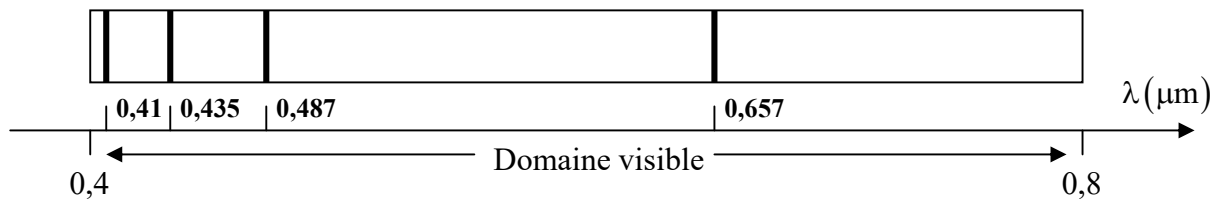
- La constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
- La célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- L'unité de masse atomique : $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} = 931,5 \text{ MeV.C}^{-2}$
- L'électron-volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- la masse de l'électron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$.

Exercice 1 :

Les différents niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la formule :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} E_0 = 13,6 \text{ eV} \\ n \text{ un nombre entier } \geq 1 \end{array} \right.$$

On donne ci-dessous le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène où seulement les raies situées dans le domaine visible sont représentées :



1⁰) a - Quelle est la signification physique du signe moins (−) dans la formule ?

b - Quel est l'état de l'atome d'hydrogène lorsque :

- $n = 1$?
- $n = \infty$?

c - Que représente la valeur $E_0 = 13,6 \text{ eV}$?

2⁰) Lorsque l'atome se désexcite, en passant d'un niveau d'énergie E_n à un niveau d'énergie E_p ($n > p$), il émet une radiation de fréquence $\nu_{n,p}$.

a - Exprimer $\nu_{n,p}$ en fonction de E_n , E_p et la constante de Planck h .

b - En déduire l'expression de la longueur d'onde $\lambda_{n,p}$ émise en fonction E_0 , h , c , n et p .

3⁰) On appelle « série de Balmer » l'ensemble des transitions de l'atome d'un niveau d'énergie quelconque $n > 2$ vers le niveau $p = 2$.

a - Montrer que $\lambda_{n,2} = 9,127 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{4n^2}{n^2 - 4} \text{ (m)}$

b - Calculer les valeurs limites $\lambda_{\min} = \lambda_{\infty,2}$ et $\lambda_{\max} = \lambda_{3,2}$ de la série de Balmer.

4⁰) On donne ci-contre le diagramme des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène :

a - Pourquoi dit-on que l'énergie de l'atome est quantifiée ?

b - Un photon d'énergie $W = 2,55 \text{ eV}$ arrive sur un atome d'hydrogène. Que se passe-t-il :

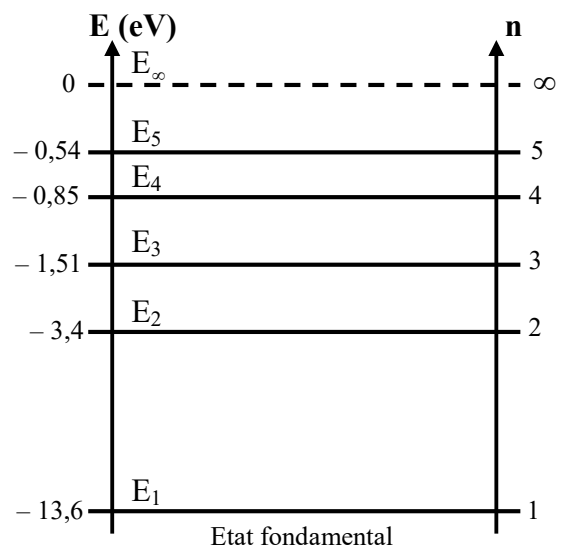
- Si l'atome est dans son état fondamental ?
- Si l'atome est dans son état excité $n = 2$?

c - A partir de quel niveau d'énergie, dans lequel devrait se trouver l'atome, le photon incident d'énergie $W = 2,55 \text{ eV}$ est capable de l'ioniser ?

d - Un atome d'hydrogène, pris dans son état fondamental, reçoit un électron d'énergie cinétique $E_C = 12 \text{ eV}$.

L'atome sera-t-il excité ? si oui, déterminer :

- Le niveau d'énergie de l'état excité.
- La vitesse V_e de l'électron après le choc.



Réponse :

1⁰) a - Pour ioniser l'atome d'hydrogène ($E = 0$), il faut lui fournir de l'énergie ($W > 0$).

A l'état ionisé : $E_n + W = 0 \rightarrow E_n < 0$.

b - $n = 1$: l'énergie de l'atome est minimale $\rightarrow$ L'atome est à l'état fondamental

$n = \infty$: l'énergie de l'atome est nulle $\rightarrow$ l'atome est à l'état ionisé

c - E_0 est l'énergie minimale qu'il faut fournir à l'atome d'hydrogène, pris à l'état fondamental, pour l'ioniser. E_0 est alors appelée énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

2⁰) a - $W = h \cdot \nu_{n,p} = E_n - E_p \rightarrow \nu_{n,p} = \frac{E_n - E_p}{h}$.

b - $\nu_{n,p} = \frac{c}{\lambda_{n,p}} \rightarrow \lambda_{n,p} = \frac{c}{\nu_{n,p}} = \frac{h \cdot c}{E_n - E_p} \xrightarrow{E_n = -\frac{E_0}{n^2}} \lambda_{n,p} = \frac{h \cdot c}{E_0 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right)}$ et $\lambda_{n,p} = \frac{h \cdot c}{E_0} \cdot \frac{p^2 \cdot n^2}{(n^2 - p^2)}$.

3⁰) a - $\lambda_{n,2} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{2^2 \cdot n^2}{n^2 - 2^2}$ et $\lambda_{n,2} = 9,127 \cdot 10^{-8} \frac{4n^2}{n^2 - 4}$ (m).

b - $\lambda_{\min} = 9,127 \cdot 10^{-8} \cdot 4$ et $\lambda_{\min} = 0,365 \cdot 10^{-6}$ m ou $\lambda_{\min} = 0,365 \mu\text{m}$.

$\lambda_{\max} = 9,127 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{4 \cdot 3^2}{3^2 - 4}$ et $\lambda_{\max} = 0,657 \cdot 10^{-6}$ m ou $\lambda_{\max} = 0,657 \mu\text{m}$.

4⁰) a - L'énergie de l'atome ne peut prendre que des valeurs bien déterminées (discrètes). Elle ne peut varier que d'une façon discontinue. On dit alors que l'énergie de l'atome est quantifiée.

b - * Si l'atome est dans son état fondamental :

$E = E_1 + W = -13,6 + 2,55 = -11,05$ eV ne correspond à aucun niveau d'énergie ($E_1 < E < E_2$).

Le photon ne sera pas absorbé et l'atome reste dans son état fondamental.

* Si l'atome est dans son état excité $n = 2$:

$E = E_2 + W = -3,4 + 2,55 = -0,85$ eV correspond au niveau d'énergie E_4 ($E = E_4$).

Le photon sera absorbé et l'atome passe à l'état excité $n = 4$.

c - l'atome est ionisé $\rightarrow E_n + W \geq 0 \rightarrow -\frac{E_0}{n^2} \geq -W \rightarrow n^2 \geq \frac{E_0}{W} \rightarrow n \geq \sqrt{\frac{E_0}{W}}$

A.N : $n \geq \sqrt{\frac{13,6}{2,55}}$ et $n \geq 2,31$ (n entier !)

Pour pouvoir être ionisé, l'atome devrait être au minimum au niveau d'énergie $n = 3$ ($n \geq 3$).

d - $E = E_1 + E_C = -13,6 + 12 = -1,6$ eV $\rightarrow E_2 < E < E_3$

L'atome sera excité et il passe au niveau d'énergie $n = 2$.

L'énergie cinétique résiduelle de l'électron sera : $E'_C = E_C - (E_2 - E_1) = 12 - (-3,4 + 13,6)$ et $E'_C = 1,8$ eV.

$E'_C = \frac{1}{2} m_e \cdot V_e^2 \rightarrow V_e = \sqrt{\frac{2E'_C}{m_e}}$.

A.N : $V_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}}$ et $V_e = 7,96 \cdot 10^5$ m.s⁻¹

Exercice 2 :

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} E_0 = 13,6 \text{ eV} \\ n \text{ entier} \geq 1 \end{array} \right.$$

1⁰) a - Pourquoi dit-on que les niveaux d'énergie sont quantifiés ?

b - Que vaut n lorsque l'atome est à son état de plus basse énergie ? Comment nomme-t-on cet état ?

c - Définir l'énergie d'ionisation E_i de l'atome d'hydrogène. Calculer sa valeur.

2⁰) Lorsque l'atome d'hydrogène passe d'un niveau d'énergie E_p vers un niveau d'énergie E_n tels que $p > n$, il émet un photon d'énergie $w = h \cdot \nu_{p,n}$.

a - Exprimer la longueur d'onde $\lambda_{p,n}$ de la radiation émise au cours de cette transition électronique en fonction de E_p, E_n , la constante de Planck h et la célérité de la lumière c .

b - La longueur d'onde peut s'exprimer par :

$$\lambda_{p,n} = \frac{1}{R_H} \cdot \frac{p^2 \cdot n^2}{p^2 - n^2} \quad \text{où } R_H \text{ est la constante de Rydberg}$$

En déduire l'expression de R_H en fonction de E_0 , h et c . Vérifier alors que $R_H = 1,096 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

3⁰) Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est un spectre de raies. Chaque raie correspond à une transition électronique d'un niveau $p > n$ vers un niveau n .

Ce spectre se décompose en plusieurs séries. Chacune est formée de l'ensemble de raies correspondantes aux transitions vers un même niveau n .

a - Chaque série admet deux limites $\lambda_{\max}$ et $\lambda_{\min}$:

- $\lambda_{\max}$ correspond à la transition: $p = (n+1) \rightarrow n$
- $\lambda_{\min}$ correspond à la transition: $p = \infty \rightarrow n$

Montrer que : $\lambda_{\max} = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{R_H \cdot (2n+1)}$ et $\lambda_{\min} = \frac{n^2}{R_H}$

b - Calculer $\lambda_{\max}$ de la série de Lyman ($n = 1$) et $\lambda_{\min}$

de la série de Paschen ($n = 3$).

c - Les limites du spectre visible sont $[0,4 ; 0,75] \mu\text{m}$.

En déduire que les raies visibles du spectre de l'atome d'hydrogène n'appartiennent ni à la série de Lyman ni à la série de Paschen.

4⁰) Un atome d'hydrogène, pris à son état fondamental, reçoit un photon d'énergie $w = 12,75 \text{ eV}$.

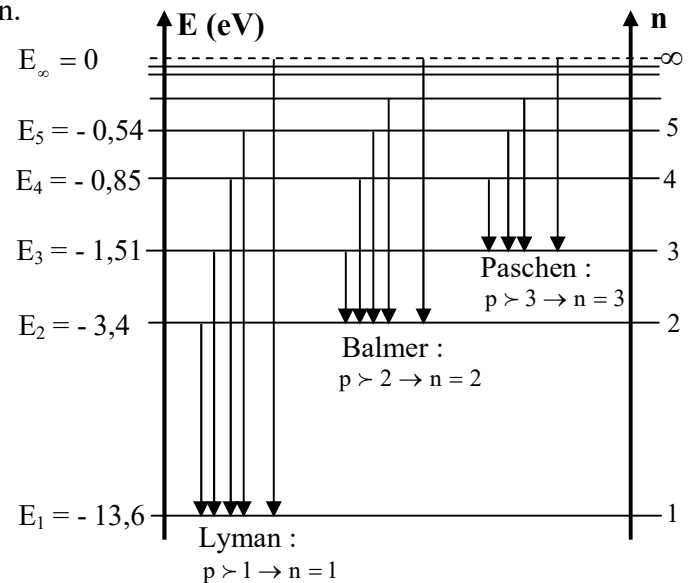
a - Ce photon est-il absorbé ? Si oui, dans quel état se trouvera l'atome ?

b - Que se passe-t-il si l'énergie du photon incident était $w = 14 \text{ eV}$?

5⁰) L'atome d'hydrogène, pris à l'état excité E_2 , est heurté par un électron d'énergie cinétique $E_C = 2,2 \text{ eV}$.

a - A quel état excité l'atome passera-t-il ?

b - Calculer la vitesse v de l'électron après la collision avec l'atome d'hydrogène.



Réponse :

1⁰) a - Les niveaux d'énergie de l'atome sont discrets. Les valeurs énergétiques correspondantes varient d'une façon discontinue. On dit alors que les niveaux d'énergie de l'atome sont quantifiés.

b - L'atome est à son état de plus basse énergie $\rightarrow E_n$ est minimale $\xrightarrow{E_n = -\frac{E_0}{n^2}} n = 1$.

L'état de plus basse énergie de l'atome est appelé état fondamental.

c - L'énergie d'ionisation E_i de l'atome d'hydrogène est l'énergie minimale qu'il faut fournir à l'atome, pris initialement à son état fondamental, pour l'ioniser.

$$E_i + E_1 = 0 \rightarrow E_i = -E_1 \rightarrow E_i = E_0 \quad \text{et} \quad E_i = 13,6 \text{ eV}.$$

$$2^0) \text{ a - } W = h \cdot \nu_{p,n} = E_p - E_n \xrightarrow{\nu_{p,n} = \frac{c}{\lambda_{p,n}}} \lambda_{p,n} = \frac{c}{\nu_{p,n}} = \frac{h \cdot c}{E_p - E_n} \xrightarrow{E_n = -\frac{E_0}{n^2}} \lambda_{p,n} = \frac{h \cdot c}{E_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)}$$

$$\text{et } \lambda_{p,n} = \frac{h \cdot c}{E_0} \cdot \frac{p^2 \cdot n^2}{(p^2 - n^2)}$$

$$b - \lambda_{p,n} = \frac{1}{R_H} \cdot \frac{p^2 \cdot n^2}{p^2 - n^2} \rightarrow \text{Par identification : } R_H = \frac{E_0}{h \cdot c} \quad \text{A.N :}$$

$$R_H = \frac{13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \quad \text{et} \quad R_H = 1,096 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

$$3^0) a - \lambda_{\max} = \frac{1}{R_H} \cdot \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{1}{R_H} \cdot \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{n^2 + 2n + 1 - n^2} \quad \text{et} \quad \lambda_{\max} = \frac{1}{R_H} \cdot \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{2n+1}.$$

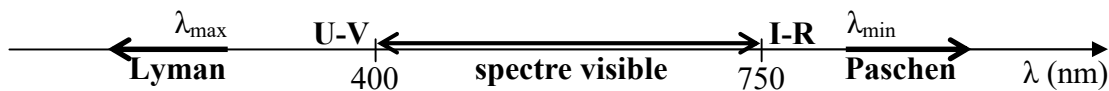
$$\lambda_{\min} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{R_H} \cdot \frac{p^2 \cdot n^2}{p^2 - n^2} \quad \text{et} \quad \lambda_{\min} = \frac{n^2}{R_H}.$$

$$b - \lambda_{\max}(\text{Lyman}) = \lambda_{\max}(n=1) = \frac{1}{R_H} \cdot \frac{2^2 \cdot 1^2}{2 \cdot 1 + 1} \quad \text{et} \quad \lambda_{\max}(\text{Lyman}) = 121,65 \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

$$\lambda_{\min}(\text{Paschen}) = \lambda_{\min}(n=3) = \frac{3^2}{R_H} \quad \text{et} \quad \lambda_{\min}(\text{Paschen}) = 821,17 \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

c - $\lambda_{\max}(\text{Lyman}) = 121,65 \cdot 10^{-9} \text{ m} < 400 \cdot 10^{-9} \text{ m}$: les radiations émises par la série de Lyman sont des radiations U-V ou de plus petite longueur d'onde.

$\lambda_{\min}(\text{Paschen}) = 821,17 \cdot 10^{-9} \text{ m} > 750 \cdot 10^{-9} \text{ m}$: les radiations émises par la série de Paschen sont des radiations I-R ou de plus grande longueur d'onde.



4⁰) a - L'atome est initialement à l'état fondamental :

$E_1 + w = -13,6 + 12,75 = -0,85 \text{ eV} = E_4$. Le photon est alors absorbé et l'atome au niveau d'énergie E_4 ($n = 4$).

Remarque : Pour que le photon soit absorbé, il faut que

$$E_1 + w = E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec } n \text{ entier } \geq 2 \rightarrow -E_0 + w = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{et} \quad n = \sqrt{\frac{E_0}{E_0 - w}}.$$

$$n = \sqrt{\frac{13,6}{13,6 - 12,75}} = 4. \quad \text{Le photon est alors absorbé et l'atome au niveau d'énergie } E_4$$

b - $w = 14 \text{ eV} \xrightarrow{E_i = 13,6 \text{ eV}} w > E_i$. Le photon est absorbé et l'atome est ionisé.

5⁰) a - L'atome est initialement à l'état excité E_2 :

$$E_2 + E_C = -3,4 + 2,2 = -1,2 \text{ eV} \rightarrow E_3 < -1,2 \text{ eV} < E_4$$

L'atome passe alors au niveau d'énergie E_3 ($n = 3$).

b - L'énergie cinétique résiduelle de l'électron

$$\text{sera : } E'_C = E_C - (E_3 - E_2) = 2,2 - (-1,51 + 3,4) \quad \text{et} \quad E'_C = 0,31 \text{ eV}.$$

$$E'_C = \frac{1}{2} m_e \cdot V_e^2 \rightarrow V_e = \sqrt{\frac{2E'_C}{m_e}} \quad \text{A.N : } V_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,31 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \quad \text{et} \quad V_e = 0,33 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}.$$

Exercice 3 :

Les différents niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la formule :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} E_0 = 13,6 \text{ eV} \\ n \text{ un nombre entier } \geq 1 \end{array} \right.$$

1⁰) a - Pourquoi dit-on que les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont quantifiés ?

b - Quelle est la signification physique du signe moins (-) dans la formule ?

c - Donner la valeur de l'entier n correspondant à l'état fondamental. Calculer alors, en Joule, la valeur de l'énergie correspondante.

2⁰) a - Définir l'énergie d'ionisation E_i de l'atome d'hydrogène. Calculer sa valeur.

b - Déterminer la valeur minimale $\nu_{\min}$ de la fréquence de la radiation correspondante au photon que doit absorber un atome d'hydrogène, se trouvant initialement à l'état fondamental, pour être ionisé.

3⁰) Un atome d'hydrogène, initialement à l'état fondamental, reçoit un photon d'énergie W . L'atome est alors ionisé et l'électron est éjecté avec une vitesse $v = 10^5 \text{ m.s}^{-1}$.

a - Calculer, en eV, la valeur de l'énergie W du photon absorbé.

b - Calculer la valeur de la longueur d'onde λ de la radiation correspondante au photon absorbé.

4⁰) Un atome d'hydrogène, pris initialement au niveau d'énergie E_n , reçoit un photon correspondant à une longueur d'onde $\lambda_{n,p}$. Il passe alors à un niveau d'énergie E_p .

a - Comment appelle-t-on le passage de l'atome d'un niveau d'énergie à un autre ?

b - Donner la relation qui lie $\lambda_{n,p}$, E_n et E_p .

c - Calculer la valeur de p lorsque $n = 2$ et $\lambda_{2,p} = 656,75 \text{ nm}$.

5⁰) Un atome d'hydrogène, pris initialement au niveau d'énergie E_3 , se désexcite en passant directement à l'état fondamental.

a - Indiquer ce passage, par une flèche, sur un schéma du diagramme d'énergie (sans échelle) de l'atome.

b - Montrer que la raie spectrale, sur le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène, associée à ce passage, n'est pas dans le domaine visible ? Justifier la réponse.

On rappelle que les limites des longueurs d'onde du spectre visible sont $[0,4 ; 0,75] \mu\text{m}$.

Réponse :

1⁰) a - L'énergie de l'atome est discontinue donc les niveaux d'énergie ont des valeurs discrètes.

b - L'énergie de l'atome est une énergie de liaison : il faut lui fournir de l'énergie pour l'ioniser.

c - L'état fondamental correspond à $n = 1$.

$$E_1 = -E_0 \rightarrow E_1 = -13,61,6.10^{-19} \text{ et } E_1 = -21,76.10^{-19} \text{ J.}$$

2⁰) a - L'énergie d'ionisation E_i est l'énergie minimale qu'il faut fournir à un atome d'hydrogène, pris à l'état fondamental, pour l'ioniser.

$$E_1 + E_i = 0 \rightarrow E_i = -E_1 \xrightarrow{E_1 = -E_0} E_i = E_0 \text{ et } E_i = 13,6 \text{ eV.}$$

$$\mathbf{b} - W = E_i \xrightarrow[E_i = E_0]{W = h \cdot \nu_{\min}} h \cdot \nu_{\min} = E_0 \text{ et } \nu_{\min} = \frac{E_0}{h}. \text{ A.N :}$$

$$\nu_{\min} = \frac{13,61,6.10^{-19}}{6,62.10^{-34}} \text{ et } \nu_{\min} = 3,29.10^{15} \text{ Hz.}$$

3⁰) a - $W = E_i + E_c$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} \cdot 9,1.10^{-31} \cdot (10^5)^2 = 4,55.10^{-21} \text{ J donc } E_c = \frac{4,55.10^{-21}}{1,6.10^{-19}} \text{ et } E_c = 2,84.10^{-2} \text{ eV.}$$

$$W = 13,6 + 2,84.10^{-2} \text{ et } W = 1362,84.10^{-2} \text{ eV.}$$

$$\mathbf{b} - W = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{W}. \text{ A.N :}$$

$$\lambda = \frac{6,62.10^{-34} \cdot 3.10^8}{1362,84.10^{-2} \cdot 1,6.10^{-19}} \text{ et } \lambda = 91,08.10^{-9} \text{ m ou } \lambda = 91,08 \text{ nm.}$$

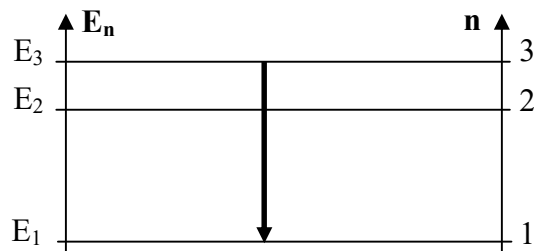
4⁰) a - Le passage de l'atome d'un niveau d'énergie à un autre est une transition électronique.

$$\mathbf{b} - W = E_p - E_n \xrightarrow[W = h \cdot \nu_{n,p} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{n,p}}]{\lambda_{n,p}} \frac{h \cdot c}{\lambda_{n,p}} = E_p - E_n \text{ et } \lambda_{n,p} = \frac{h \cdot c}{E_p - E_n}.$$

$$\mathbf{c} - E_p - E_2 = \frac{h \cdot c}{\lambda_{2,p}} \xrightarrow[E_2 = -\frac{E_0}{4}]{\lambda_{2,p}} -\frac{E_0}{p^2} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{2,p}} - \frac{E_0}{4} \rightarrow p = \sqrt{\frac{E_0}{\frac{E_0}{4} - \frac{h \cdot c}{\lambda_{2,p}}}}.$$

$$\text{A.N : } p = \sqrt{\frac{13,6}{\frac{13,6}{4} - \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{656,75 \cdot 10^{-9} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}}} = \sqrt{\frac{13,6}{3,4 - 1,89}} \text{ et } p = 3.$$

5⁰) a -



$$\text{b - } E_3 - E_1 = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E_3 - E_1} = \frac{h \cdot c}{E_0 - \frac{E_0}{9}}.$$

$$\text{A.N : } \lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\left(13,6 - \frac{13,6}{9}\right) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ et } \lambda = 0,103 \cdot 10^{-6} \text{ m ou } \lambda = 0,103 \mu\text{m}$$

$\lambda \notin [0,4 ; 0,75] \mu\text{m}$ donc la raie spectrale associée à cette transition n'est pas dans le domaine visible.

Exercice 4 :

L'atome d'hydrogène H est constitué d'un proton et d'un électron.

Les niveaux d'énergie (en eV) de cet atome sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ avec } \begin{cases} E_0 = 13,6 \text{ eV} \\ n \text{ entier } \geq 1 \end{cases}$$

On donne ci-contre le diagramme d'énergie de l'atome d'hydrogène.

L'état de plus basse énergie correspond à $n = 1$, le premier état excité à $n = 2$, etc...,

et $n = \infty$ correspond à l'état ionisé.

1⁰) a - Comment nomme-t-on l'état correspondant au niveau de plus basse énergie ?

b - Pourquoi dit-on que les niveaux d'énergie sont quantifiés ?

c - Que signifie « état ionisé » ? Donner la formule de l'espèce chimique obtenue.

d - Donner la définition de l'énergie d'ionisation E_i de l'atome d'hydrogène.

Déterminer sa valeur en eV puis en joule.

2⁰) Un atome d'hydrogène, initialement à niveau d'énergie E_n , absorbe un photon de longueur d'onde λ et passe à un niveau d'énergie E_p ($p > n$).

a - Comment appelle-t-on le passage de l'atome d'un niveau d'énergie vers un autre ?

b - Montrer que la longueur d'onde λ dans le vide du photon absorbé s'exprime par :

$$\lambda = \frac{1241,25}{(E_p - E_n)} \text{ avec } \lambda \text{ en nm et } (E_p - E_n) \text{ en eV.}$$

c - Calculer la valeur de l'entier p lorsque l'entier $n = 1$ et la longueur d'onde $\lambda = 102,67 \text{ nm}$.

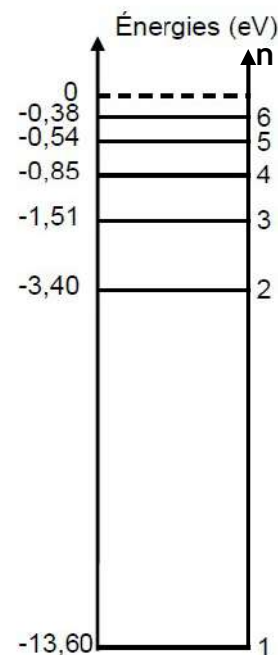
d - Déterminer la valeur $\lambda_{\max}$ de la longueur d'onde du photon absorbé par l'atome d'hydrogène pour passer de l'état de plus basse énergie à l'état ionisé.

3⁰) Dans le spectre d'émission de l'hydrogène, on identifie seulement quatre raies visibles désignées par H_α , H_β ,

H_γ et H_δ de longueurs d'onde respectives $\lambda_\alpha = 657,27 \text{ nm}$, $\lambda_\beta = 486,87 \text{ nm}$, $\lambda_\gamma = 434,70 \text{ nm}$ et $\lambda_\delta = 410,79 \text{ nm}$. Ces quatre raies appartiennent à la série de Balmer correspondant aux désexcitations d'un niveau $p > 2$ vers le niveau $n = 2$.

a - Montrer que, dans la série de Balmer, le niveau de désexcitation p et la longueur d'onde λ (en nm) de la radiation émise sont reliés par la relation :

$$p = \sqrt{\frac{4\lambda}{\lambda - 365,07}}$$



b - Recopier et compléter le tableau suivant :

Raie spectrale	H _α	H _β	H _γ	H _δ
Niveau p				
Niveau n	2	2	2	2

4⁰) Un atome d'hydrogène, initialement au niveau de plus basse énergie, reçoit un photon d'énergie $W = 12,75 \text{ eV}$.

a - Le photon est-il absorbé ? si oui, à quel niveau excité passe l'atome ?

b - En se désexcitant, quelles sont les longueurs d'onde des radiations visibles qu'il peut émettre ? Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰) a - L'état de plus basse énergie est appelé état fondamental.

b - L'énergie de l'atome ne peut prendre que des valeurs bien déterminées (discrètes). L'énergie de l'atome ne peut varier que d'une façon discontinue. On dit alors que les niveaux d'énergie de l'atome sont quantifiés.

c - A l'état ionisé, l'atome d'hydrogène perd son électron. Il se transforme alors en ion H^+ .

d - L'énergie d'ionisation E_i de l'atome d'hydrogène est l'énergie minimale qu'il faut fournir à un atome d'hydrogène, pris à l'état fondamental, pour l'ioniser.

$$E_i + E_i = 0 \rightarrow E_i = -E_i \xrightarrow{E_i = -E_0} E_i = E_0.$$

$$\text{A.N : } E_i = 13,6 \text{ eV} \text{ donc } E_i = 13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ et } E_i = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J.}$$

2⁰) a - Le passage de l'atome d'un niveau d'énergie vers un autre s'appelle transition électronique.

$$\text{b - } E_p - E_n = h \cdot \nu \xrightarrow{\nu = \frac{c}{\lambda}} E_p - E_n = \frac{h \cdot c}{\lambda} \text{ et } \lambda = \frac{h \cdot c}{E_p - E_n}.$$

$$\lambda_{(m)} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{(E_p - E_n)_{(eV)} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = \frac{12,4125}{(E_p - E_n)_{(eV)}} \cdot 10^{-7} \xrightarrow{1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}} \lambda_{(nm)} = \frac{1241,25}{(E_p - E_n)_{(eV)}}.$$

$$\text{c - } E_p - E_i = \frac{1241,25}{102,67} = 12,09 \xrightarrow{E_i = -13,6 \text{ eV}} E_p = 12,09 - 13,6 \text{ et } E_p = -1,51 \text{ eV.}$$

$$E_p = -\frac{E_0}{p^2} \rightarrow p = \sqrt{-\frac{E_0}{E_p}}. \text{ A.N : } p = \sqrt{-\frac{13,6}{-1,51}} \text{ et } p = 3.$$

$$\text{d - } \lambda_{\max} = \frac{1241,25}{0 - E_i} = \frac{1241,25}{E_0}. \text{ A.N : } \lambda_{\max} = \frac{1241,25}{13,6} \text{ et } \lambda_{\max} = 91,27 \text{ nm.}$$

$$\text{3⁰) a - } \lambda = \frac{1241,25}{E_p - E_2} \rightarrow E_p - E_2 = \frac{1241,25}{\lambda} \rightarrow E_p = \frac{1241,25}{\lambda} + E_2 \rightarrow -\frac{E_0}{p^2} = \frac{1241,25}{\lambda} - \frac{E_0}{2^2}$$

$$\rightarrow \frac{E_0}{p^2} = \frac{\lambda \cdot E_0 - 4 \cdot 1241,25}{4 \cdot \lambda} \rightarrow \frac{p^2}{E_0} = \frac{4 \cdot \lambda}{\lambda \cdot E_0 - 4 \cdot 1241,25} = \frac{4 \cdot \lambda}{E_0 \left(\lambda - \frac{4 \cdot 1241,25}{E_0} \right)} \text{ et } p = \sqrt{\frac{4 \cdot \lambda}{\lambda - \frac{4 \cdot 1241,25}{E_0}}}$$

$$\xrightarrow{E_0 = 13,6 \text{ eV}} p = \sqrt{\frac{4 \cdot \lambda}{\lambda - 365,07}}.$$

b - Pour chacune des raies visibles H_i :

$$p_i = \sqrt{\frac{4 \cdot \lambda_i}{\lambda_i - 365,07}}$$

Raie spectrale	H _α	H _β	H _γ	H _δ
Niveau p	3	4	5	6
Niveau n	2	2	2	2

$$\text{4⁰) a - Si le photon est absorbé } \rightarrow E_p = E_i + w \rightarrow -\frac{E_0}{p^2} = -E_0 + w \rightarrow p = \sqrt{\frac{E_0}{E_0 - w}} \text{ avec } p \text{ entier } \geq 1$$

Pour $w = 12,75 \text{ eV}$, $p = \sqrt{\frac{13,6}{13,6 - 12,75}}$ et $p = 4$. Le photon est absorbé et l'atome passe au niveau d'énergie E_4 .

b - En se désexcitant, l'atome peut émettre les longueurs d'ondes λ_α et λ_β associées aux raies visibles H_α et H_β .

Lors de la désexcitation du niveau $p = 4$ vers un niveau inférieur, seules les transitions $(4 \rightarrow 2)$ et $(3 \rightarrow 2)$ donnent des radiations visibles.

Exercice 5 :

On donne ci-dessous le diagramme d'énergie de l'atome d'hydrogène :

1⁰ Lorsque l'atome d'hydrogène passe d'un niveau d'énergie E_n vers un autre E_p ($n > p$), il émet un photon d'énergie $w = E_n - E_p$.

a - Justifier la discontinuité du spectre d'émission de l'atome.

b - Montrer que, d'une façon générale, la longueur d'onde λ du rayonnement émis et l'énergie $w = h \cdot \nu$ du photon

correspondant sont liées par la relation : $w(\text{eV}) = \frac{1241,25}{\lambda(\text{nm})}$.

2⁰ L'atome d'hydrogène, excité, passe d'un niveau d'énergie E_n à son état fondamental E_1 en libérant

une radiation de longueur d'onde $\lambda_c = 97,35 \text{ nm}$.

a - La raie associée à cette transition est-elle une raie d'émission ou d'absorption ? Justifier la réponse.

b - Déterminer, en eV, l'énergie du niveau E_n .

c - Représenter sur un schéma, par une flèche, la transition entre le niveau E_n et le niveau E_1 .

3⁰ Les différents niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la formule :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} E_0 = 13,6 \text{ eV} \\ n \text{ un nombre entier } \geq 1 \end{array} \right.$$

Les transitions associées aux différentes raies d'émission de la série de Balmer correspondent au retour de l'atome excité d'un niveau $n > 2$ au niveau $p = 2$.

a - Montrer que les longueurs d'onde associées aux raies de la série de Balmer vérifient l'expression :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{où } R_H \text{ est une constante appelée constante de Rydberg}$$

b - Déterminer la valeur de la constante R_H et préciser son unité dans le système international (SI).

4⁰ Un photon d'énergie $w = 13,223 \text{ eV}$ arrive sur un atome d'hydrogène pris à l'état fondamental E_1 .

Montrer que ce photon est absorbé par l'atome d'hydrogène.

5⁰ L'atome d'hydrogène, pris à l'état fondamental, est bombardé par un électron dont l'énergie cinétique est $E_c = 12 \text{ eV}$.

a - L'atome d'hydrogène est-il excité ? Justifier la réponse.

b - Si oui, quelle est l'énergie cinétique E'_c de l'électron après le choc ?

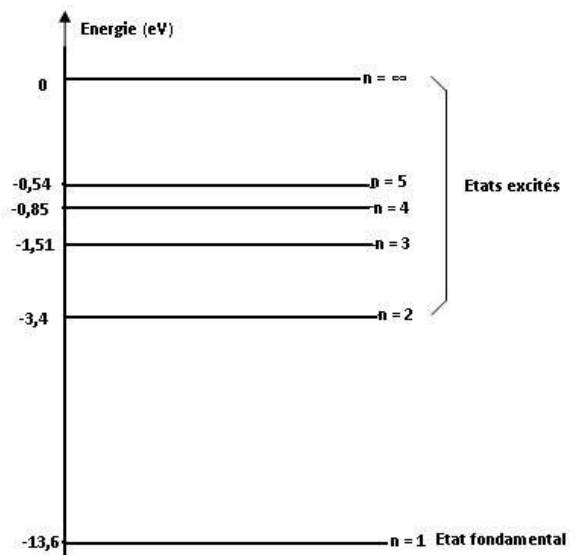
Réponse :

1⁰ **a** - Les niveaux d'énergie E_n de l'atome étant discontinues (quantifiées), les photons qui sont émis au cours de la désexcitation de l'atome ont des énergies w discontinues.

Le spectre d'émission correspondant aux radiations émises sera donc discontinu (spectre de raies).

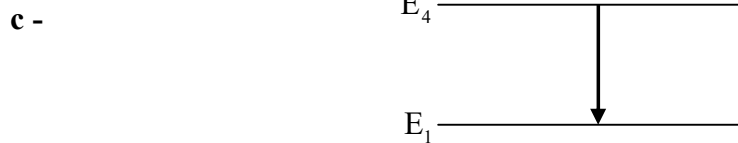
b - $w = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow w(\text{eV}) = 6,62 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{\lambda(\text{nm}) \cdot 10^{-9}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \quad \text{et} \quad w(\text{eV}) = \frac{1241,25}{\lambda(\text{nm})}$.

2⁰ **a** - L'atome passe vers un niveau d'énergie plus bas avec émission d'un photon. Donc la raie associée à cette transition est une raie d'émission.



b - $w = E_n - E_1 \rightarrow E_n = w + E_1$ et $E_n = \frac{h.c}{\lambda} + E_1$.

A.N : $E_n = \frac{1241,25}{97,35} - 13,6$ et $E_n = -0,85 \text{ eV}$.



3⁰) a - Lors de la transition d'un niveau $n > 2$ au niveau $p = 2$, un photon d'énergie $w = E_n - E_2$ est émis.

$$w = \left(-\frac{E_0}{n^2} \right) - \left(-\frac{E_0}{2^2} \right) = E_0 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ or } w = h.v = h.\frac{c}{\lambda}$$

donc $h.\frac{c}{\lambda} = E_0 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ et $\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{h.c} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

Expression de la forme $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ avec $R_H = \frac{E_0}{h.c}$.

b - $R_H = \frac{13,6.1,6.10^{-19}}{6,62.10^{-34}.3.10^8}$ et $R_H = 1,096.10^7 \text{ m}^{-1}$.

4⁰) Si le photon est absorbé, l'atome passera à un niveau d'énergie E_n tel que $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ avec n entier.

$$w = E_n - E_1 \rightarrow E_n = w + E_1 \rightarrow -\frac{E_0}{n^2} = w + E_1 \rightarrow n = \sqrt{-\frac{E_0}{w + E_1}} \xrightarrow{E_1 = -E_0} n = \sqrt{\frac{E_0}{E_0 - w}}$$

A.N : $n = \sqrt{\frac{13,6}{13,6 - 13,223}}$ et $n = 6$ entier donc le photon est absorbé et l'atome passe au niveau E_6 .

5⁰) a - Après le choc avec l'électron, l'énergie disponible pour l'atome est : $E = E_1 + E_C$.

A.N : $E = -13,6 + 12$ et $E = -1,6 \text{ eV}$.

On remarque que $E_2 < E < E_3$ l'atome est alors excité et passe au niveau E_2 .

b - L'énergie cinétique de l'électron après le choc est :

$$E'_C = E - E_2 \xrightarrow{E = E_1 + E_C} E'_C = (E_1 + E_C) - E_2 \text{ ou } E'_C = E_C - (E_2 - E_1)$$

A.N : $E'_C = 12 - (-3,4 + 13,6)$ et $E'_C = 1,8 \text{ eV}$.

Exercice 6 :

1⁰) Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ avec } \begin{cases} E_0 = 13,6 \text{ eV} \\ n \text{ entier} \geq 1 \end{cases}$$

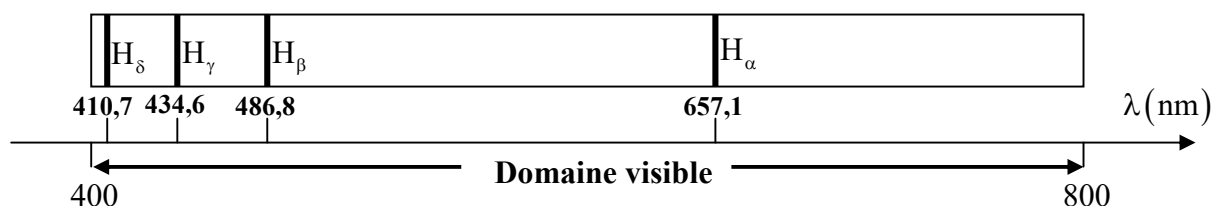
a - Donner la signification physique du signe moins (−) dans la formule.

b - Préciser le sens de la proposition suivante : « les niveaux d'énergie de l'atome sont quantifiés ».

c - Indiquer la valeur de n lorsque l'atome est à son état fondamental.

d - Définir l'énergie d'ionisation E_i de l'atome d'hydrogène. Calculer sa valeur.

2⁰) On donne le spectre d'émission de l'hydrogène où seulement les raies situées dans le domaine visible sont représentées :



a - Montrer que, d'une façon générale, la longueur d'onde λ du rayonnement émis et l'énergie $w = h \cdot \nu$ du photon correspondant sont liées par la relation : $\lambda(\text{nm}) = \frac{1241,25}{w(\text{eV})}$.

b - Lorsque l'atome d'hydrogène passe d'un niveau d'énergie E_n vers un autre E_p ($n > p$), il émet un photon d'énergie $w = E_n - E_p$. Montrer que : $w(\text{eV}) = 13,6 \cdot \frac{n^2 - p^2}{p^2 \cdot n^2}$. En déduire que la longueur d'onde du rayonnement correspondant s'exprime par : $\lambda(\text{nm}) = 91,27 \cdot \frac{p^2 \cdot n^2}{n^2 - p^2}$.

c - On appelle série de Balmer l'ensemble des transitions de l'atome d'un niveau d'énergie quelconque $n > 2$ vers le niveau $p = 2$. Montrer que : $n = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{365,08}{\lambda(\text{nm})}}}$ où $\lambda(\text{nm})$ est la longueur d'onde associée au photon

émis d'énergie $w = E_n - E_2$.

d - Les raies visibles du spectre d'émission de l'hydrogène appartiennent à la série de Balmer. Calculer, pour chacune des raies H_α , H_β , H_γ et H_δ , la valeur de n correspondante.

3⁰ L'atome d'hydrogène, initialement à l'état fondamental, reçoit un photon d'énergie $w = 12,75 \text{ eV}$.

a - Montrer que ce photon est absorbé et préciser le niveau excité vers lequel passe l'atome.

b - Indiquer, en le justifiant, la ou les longueurs d'onde des radiations visibles que peut émettre l'atome en se désexcitant.

Réponse :

1⁰) a - Le signe moins (-) signifie que l'énergie de l'atome est une énergie de liaison (il faut fournir de l'énergie à l'atome pour l'ioniser).

b - L'énergie de l'atome est discontinue.

c - L'état fondamental est l'état de plus basse énergie donc il correspond à $n = 1$.

d - L'énergie d'ionisation E_i est l'énergie minimale qu'il faut fournir à l'atome, pris à l'état fondamental, pour l'ioniser.

$$E_i + E_1 = 0 \rightarrow E_i = E_1 \xrightarrow{E_1 = -E_0} E_i = E_0. \text{ A.N : } E_i = 13,6 \text{ eV}.$$

$$\mathbf{2^0) a} - w = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{w}$$

$$\lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{w(\text{eV}) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = \frac{12,4125}{w(\text{eV})} \cdot 10^{-7} \text{ m} = \frac{1241,25}{w(\text{eV})} \cdot 10^{-9} \text{ m} \text{ et } \lambda(\text{nm}) = \frac{1241,25}{w(\text{eV})}.$$

$$\mathbf{b} - w = E_n - E_p = \left(-\frac{E_0}{n^2} \right) - \left(-\frac{E_0}{p^2} \right) = E_0 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) = E_0 \cdot \frac{n^2 - p^2}{p^2 \cdot n^2} \xrightarrow{E_0 = 13,6 \text{ eV}} w(\text{eV}) = 13,6 \cdot \frac{n^2 - p^2}{p^2 \cdot n^2}.$$

$$\lambda(\text{nm}) = \frac{1241,25}{w(\text{eV})} \rightarrow \lambda(\text{nm}) = \frac{1241,25}{13,6 \cdot \frac{n^2 - p^2}{p^2 \cdot n^2}} = \frac{1241,25}{13,6} \cdot \frac{p^2 \cdot n^2}{n^2 - p^2} \text{ et } \lambda(\text{nm}) = 91,27 \cdot \frac{p^2 \cdot n^2}{n^2 - p^2}$$

$$\mathbf{c} - \text{pour } p = 2 : \lambda(\text{nm}) = 91,27 \cdot \frac{2^2 \cdot n^2}{n^2 - 2^2} \rightarrow \lambda(\text{nm}) = \frac{365,08 \cdot n^2}{n^2 - 4} \rightarrow \frac{n^2 - 4}{n^2} = \frac{365,08}{\lambda(\text{nm})}$$

$$\rightarrow 1 - \frac{4}{n^2} = \frac{365,08}{\lambda(\text{nm})} \rightarrow \frac{4}{n^2} = 1 - \frac{365,08}{\lambda(\text{nm})} \rightarrow n^2 = \frac{4}{1 - \frac{365,08}{\lambda(\text{nm})}} \text{ et } n = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{365,08}{\lambda(\text{nm})}}}$$

d -

raie	H_α	H_β	H_γ	H_δ
n	$n = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{365,08}{657,1}}}$	$n = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{365,08}{486,8}}}$	$n = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{365,08}{434,6}}}$	$n = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{365,08}{410,7}}}$
	3	4	5	6

3⁰) a - Si le photon est absorbé alors :

$$E_1 + w = E_n \rightarrow -E_0 + w = -\frac{E_0}{n^2} \rightarrow n^2 = \frac{E_0}{E_0 - w} \text{ et } n = \sqrt{\frac{E_0}{E_0 - w}}$$

A.N : pour $w = 12,75 \text{ eV}$, $\sqrt{\frac{13,6}{13,6 - 12,75}} = 4$ entier,

donc le photon est absorbé et l'atome passe au niveau E_4

b - En se désexcitant, à partir du niveau $n = 4$, les radiations visibles (qui appartiennent à la série de Balmer) que peut émettre l'atome correspondent aux transitions $(4 \rightarrow 2)$ et $(3 \rightarrow 2)$ associées aux raies H_β et H_α dont les longueurs d'onde sont respectivement $\lambda = 486,8 \text{ nm}$ et $\lambda = 657,1 \text{ nm}$.

Exercice 7 :

Les énergies de l'atome d'hydrogène vérifient la relation : $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ avec $\left| \begin{array}{l} E_0 = 13,6 \text{ eV} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

1⁰) a - Pourquoi dit-on que l'énergie de l'atome est quantifiée ?

b - Préciser ce qu'on appelle état fondamental et donner la valeur de l'énergie correspondante.

c - Définir l'énergie d'ionisation E_i de l'atome d'hydrogène. Calculer sa valeur.

2⁰) a - Lorsque l'atome d'hydrogène absorbe un photon d'énergie W , il passe alors d'un niveau d'énergie

E_n à un niveau d'énergie E_p supérieur ($p > n$). Montrer que : $p = n \cdot \sqrt{\frac{E_0}{E_0 - n^2 \cdot W}}$

b - L'atome d'hydrogène étant dans un état correspondant au niveau d'énergie E_3 , il reçoit un photon d'énergie $W = 0,968 \text{ eV}$. Vérifier que ce photon est absorbé.

3⁰) Lorsqu'il est dans son état fondamental, l'atome d'hydrogène est capable d'absorber un photon de longueur d'onde $\lambda = 97,35 \text{ nm}$. Il passe alors dans l'état excité d'énergie E_n .

a - Vérifier que l'énergie W (en eV) d'un photon et la longueur d'onde λ (en nm) de la radiation correspondante sont liées par la relation : $W = \frac{1241,25}{\lambda}$

b - Calculer la valeur de l'énergie W du photon absorbé. En déduire celle du niveau d'énergie E_n .

Réponse :

1⁰) a - L'énergie de l'atome ne peut prendre que des valeurs bien déterminées, elle varie d'une façon discontinue. On dit alors que l'énergie de l'atome est quantifiée.

b - L'état fondamental est l'état de plus basse énergie.

L'énergie la plus basse $\rightarrow n = 1 \rightarrow E_1 = -E_0 \xrightarrow{E_0 = 13,6 \text{ eV}} E_1 = -13,6 \text{ eV}$.

c - L'énergie d'ionisation est l'énergie minimale qu'il faut fournir à l'atome d'hydrogène, pris à l'état fondamental, pour l'ioniser.

$$E_1 + E_i = 0 \rightarrow E_i = -E_1 \xrightarrow{E_1 = -E_0} E_i = E_0 \text{ et } E_i = 13,6 \text{ eV}.$$

$$\mathbf{2^0) a} - W = E_p - E_n \rightarrow W = \frac{E_0}{n^2} - \frac{E_0}{p^2} \rightarrow \frac{E_0}{p^2} = \frac{E_0}{n^2} - W = \frac{E_0 - n^2 \cdot W}{n^2}$$

$$\rightarrow p^2 = n^2 \cdot \frac{E_0}{E_0 - n^2 \cdot W} \text{ et } p = n \cdot \sqrt{\frac{E_0}{E_0 - n^2 \cdot W}}.$$

$$\mathbf{b} - E_n = E_3 \rightarrow n = 3 \xrightarrow{A.N} p = 3 \cdot \sqrt{\frac{13,6}{13,6 - 3^2 \cdot 0,968}} \text{ et } p = 5 \text{ entier}$$

Le photon est alors absorbé (et l'atome passe au niveau $E_p = E_5$).

$$\mathbf{3^0) a} - W = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow W = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\lambda} \quad W(J) = \frac{19,86 \cdot 10^{-26}}{\lambda(m)}.$$

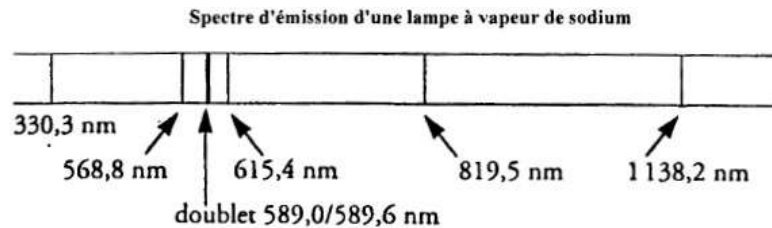
$$W(\text{eV}) = \frac{19,86 \cdot 10^{-26}}{[\lambda(\text{nm}) \cdot 10^{-9}] \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \quad \text{et} \quad W(\text{eV}) = \frac{1241,25}{\lambda(\text{nm})}.$$

b - $W = \frac{1241,25}{97,35}$ et $W = 12,75 \text{ eV}$.

$$E_1 + W = E_n \xrightarrow{\text{A.N}} E_n = -13,6 + 12,75 \quad \text{et} \quad E_n = -0,85 \text{ eV} (n = 4).$$

Exercice 8 :

L'analyse du spectre d'émission d'une lampe à vapeur de sodium révèle la présence de raies de longueur d'onde λ bien définie.



1⁰) a - Justifier la discontinuité du spectre d'émission de l'atome.

b - Montrer que, d'une façon générale, la longueur d'onde λ du rayonnement émis et l'énergie $w = h \cdot \nu$ du photon correspondant sont liées par la relation : $w(\text{eV}) = \frac{1241,25}{\lambda(\text{nm})}$.

2⁰) La figure ci-contre représente le diagramme simplifié des niveaux d'énergie de l'atome de sodium :

a - A quoi correspond le niveau d'énergie $E = 0$?

b - Quelle est l'énergie d'ionisation E_i de l'atome de sodium ?

c - Un photon d'énergie $w = 3,03 \text{ eV}$ arrive sur un atome de sodium au repos dans l'état fondamental. Est-il absorbé ? Justifier la réponse.

3⁰) Lorsque l'atome de sodium passe d'un niveau d'énergie E_p vers un autre E_n ($p > n$), il émet un photon d'énergie $w = E_p - E_n$.

La raie jaune très intense émise par une lampe de sodium est en fait constituée par les deux raies $\lambda_a = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_b = 589,6 \text{ nm}$ du spectre. Elles correspondent à la désexcitation de l'atome, à partir de deux niveaux très proches E_a et E_b , vers le niveau fondamental E_0 . Calculer, en eV, la différence d'énergie $E_a - E_b$ entre ces niveaux.

4⁰) L'atome de sodium, excité, passe d'un niveau d'énergie E_e à son état fondamental E_0 en libérant une radiation de longueur d'onde $\lambda_e = 289,3 \text{ nm}$.

a - La raie associée à cette transition est-elle une raie d'émission ou d'absorption ? Justifier la réponse.

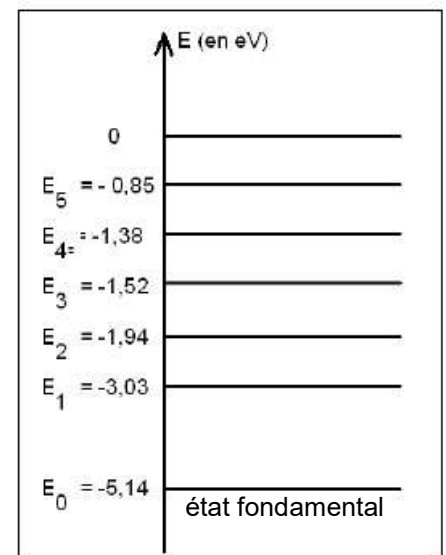
b - Déterminer, en eV, l'énergie du niveau E_e .

c - Représenter sur un schéma, par une flèche, la transition entre le niveau E_e et le niveau E_0 .

5⁰) L'atome de sodium, pris à l'état fondamental, est bombardé par un électron dont l'énergie cinétique est $E_c = 2,5 \text{ eV}$.

a - L'atome de sodium est-il excité ? Justifier la réponse.

b - Si oui, quelle est l'énergie cinétique E'_c de l'électron après le choc ?



Réponse :

1⁰) a - En se désexcitant, l'atome passe d'un niveau d'énergie vers un autre niveau plus bas en émettant un photon. Les niveaux d'énergie de l'atome étant quantifiés, l'énergie des photons qui accompagnent les transitions électroniques est discontinue. Par conséquent, le spectre d'émission de l'atome sera un spectre discontinu (un spectre de raies).

b - $w = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow w = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\lambda} \quad w(\text{J}) = \frac{19,86 \cdot 10^{-26}}{\lambda(\text{m})}$

il vient alors que : $w(\text{eV}) = \frac{19,86 \cdot 10^{-26}}{[\lambda(\text{nm}) \cdot 10^{-9}] \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}$ et $w(\text{eV}) = \frac{1241,25}{\lambda(\text{nm})}$.

2⁰) a - Le niveau d'énergie $E = 0$ correspond à l'état ionisé de l'atome.

b - L'énergie d'ionisation est telle que : $E_0 + E_i = 0 \rightarrow E_i = -E_0 \xrightarrow[E_0 = -5,14\text{eV}]{\text{A.N.}} E_i = 5,14\text{eV}$.

c - $E_0 + w = -5,14 + 3,03$ et $E_0 + w = -2,11\text{eV}$. Cette valeur ne correspond à aucun des niveaux d'énergie donc le photon ne sera pas absorbé (il sera diffusé).

$$3^0) \begin{cases} E_a - E_0 = w_a = \frac{h \cdot c}{\lambda_a} \\ E_b - E_0 = w_b = \frac{h \cdot c}{\lambda_b} \end{cases} \rightarrow E_a - E_b = w_a - w_b = h \cdot c \cdot \left(\frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_b} \right)$$

$$\text{A.N. : } E_a - E_b = 1241,25 \cdot \left(\frac{1}{589,0} - \frac{1}{589,6} \right) \text{ et } E_a - E_b = 2,14 \cdot 10^{-3} \text{ eV}.$$

4⁰) a - La raie associée à cette transition est une raie d'émission car elle correspond à une radiation émise par l'atome.

$$\text{b - } E_e - E_0 = w_e = \frac{h \cdot c}{\lambda_e} \rightarrow E_e = \frac{h \cdot c}{\lambda_e} + E_0$$

$$\text{A.N. : } E_e = \frac{1241,25}{289,3} - 5,14 \quad E_e = -0,85\text{eV}.$$

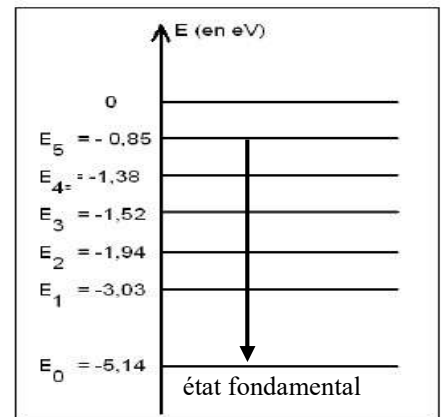
c - Voir figure ci-contre :

$$5^0) \text{ a - } E_0 + E_C = -5,14 + 2,5 \text{ et } E_0 + E_C = -2,64\text{eV}.$$

$$E_1 < E_0 + E_C < E_2 \rightarrow \text{l'atome est excité et passe au niveau d'énergie } E_1.$$

$$\text{b - } E_C = (E_1 - E_0) + E'_C \rightarrow E'_C = E_C - (E_1 - E_0).$$

$$\text{A.N. : } E'_C = 2,5 - (-3,03 + 5,14) \text{ et } E'_C = 0,39\text{eV}.$$



LE NOYAU ATOMIQUE

I / Structure du noyau atomique :

1⁰) Composition du noyau :

a - Les nucléons :

Le noyau atomique est constitué par :

- **des protons** : Ce sont des particules élémentaires fondamentales chargées positivement .
La charge électrique d'un proton est égale à la charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
La masse d'un proton est $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$.
- **des neutrons** : Ce sont des particules élémentaires fondamentales dépourvues de charge électrique.
La masse d'un neutron est $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$.

Les protons et les neutrons sont appelés des **nucléons**.

b - L'unité de masse atomique :

En physique nucléaire, on utilise comme unité de masse l'**unité de masse atomique** (uma ou u).

Par définition, l'unité de masse atomique est la fraction $\frac{1}{12}$ de la masse de l'atome de carbone $^{12}_6\text{C}$.

$$1 \text{ uma} = \frac{1}{12} \cdot \frac{M(\text{C})}{N} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M(\text{C}) : \text{masse molaire atomique de } ^{12}_6\text{C} \\ N : \text{nombre d'Avogadro} \end{cases}$$

$$\text{Application : } 1 \text{ uma} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3}}{6,023 \cdot 10^{23}} \text{ Kg} \rightarrow \mathbf{1 \text{ uma} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}}$$

Remarque :

$$m_p \simeq m_n \simeq 1 \text{ uma}$$

c - Nombre de masse - Nombre de charge :

- Le nombre de nucléons d'un noyau atomique est appelé **nombre de masse**, on le note **A**.
- Le nombre de protons d'un noyau atomique est appelé **nombre de charge**, on le note **Z**.

Conséquence :

Le nombre de neutrons d'un noyau atomique, noté **N**, sera alors $N = A - Z$

Remarque :

Le nombre de charge Z, encore appelé **numéro atomique**, est aussi égal au nombre d'électrons qui gravitent autour du noyau de l'atome considéré.

2⁰) Élément chimique - Nucléide et Isotope :

a - Élément chimique :

L'élément chimique est l'ensemble des noyaux qui ont le même nombre de charge Z.

Exemples :

- $Z = 6$ caractérise l'élément chimique carbone, de symbole C.
- $Z = 8$ caractérise l'élément chimique oxygène, de symbole O.
- $Z = 17$ caractérise l'élément chimique chlore, de symbole Cl.

Remarque :

Tous les atomes d'un même élément chimique ont le même nombre d'électrons, ils auront donc les mêmes propriétés chimiques.

b - Nucléide :

Le nucléide représente l'ensemble des noyaux qui ont le même nombre de charge Z et le même nombre de masse A .

Un nucléide est symbolisé par : ${}^A_ZX$ où X est le symbole de l'élément chimique considéré.

Exemples :

${}^{16}_8O$, ${}^{35}_{17}Cl$, ${}^{14}_7N$, ${}^{23}_{11}Na$, ${}^{235}_{92}U$...

Remarque :

Tous les atomes d'un nucléide sont identiques, ils ont donc les mêmes propriétés.

c - Isotope :

Les isotopes d'un même élément chimique sont les nucléides qui ont le même nombre de charge Z mais qui diffèrent par le nombre de masse A .

Exemples :

- pour l'élément hydrogène : ${}^1_1H$, ${}^2_1H$, ${}^3_1H$
- pour l'élément chlore : ${}^{35}_{17}Cl$, ${}^{37}_{17}Cl$

Remarque :

Les isotopes d'un même élément chimique possèdent les mêmes propriétés chimiques mais diffèrent par leurs propriétés physiques.

3⁰) Les propriétés du noyau atomique :

- La masse d'un atome est pratiquement égale à celle de son noyau.
- La masse du noyau ${}^A_ZX$ est sensiblement égale à $A \text{ uma}$.

Conséquence :

- La masse molaire atomique du nucléide ${}^A_ZX$ est :

$$M(X) = N.A \text{ uma} \quad \text{or} \quad N.1 \text{ uma} = 6,023.10^{23}.1,66.10^{-27} \approx 10^{-3} \text{ Kg} \rightarrow M(X) \approx A \text{ g.mol}^{-1}$$

- Le rayon nucléaire est environ 10^5 fois plus petit que le rayon de l'atome correspondant.
- Le rayon du noyau est donné par la relation : $r = r_0.A^{\frac{1}{3}}$ avec $r_0 = 1,3.10^{-15} \text{ m} = 1,3 \text{ fm}$ (Fermi).

II / Cohésion du noyau atomique :

La cohésion du noyau atomique est assurée par des forces de nature non électrique qui existent entre les nucléons : ce sont **les forces nucléaires**.

Les forces nucléaires ont une faible portée (elles agissent à l'intérieur du noyau).

Les forces nucléaires, attractives, portent le nom **d'interaction forte**.

III / Energie de liaison d'un noyau :

1⁰) Le défaut de masse d'un noyau :

La masse d'un noyau est toujours inférieure à la somme des masses des nucléons qui le constituent pris séparément et au repos.

Pour un nucléide ${}^A_ZX$, on a :

$$m_x < Z.m_p + (A - Z).m_n$$

On appelle **défaut de masse** la quantité :

$$\Delta m = [Z.m_p + (A - Z).m_n] - m_x$$

La formation d'un noyau à partir de ses nucléons s'accompagne d'une perte de masse.

Remarque :

Le défaut de masse Δm est une **quantité positive**.

Application 1 :

Calculer le défaut de masse qui accompagne la formation du noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$.

$$m({}^4_2\text{He}) = 6,6647 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}, \quad m_n = 1,6750 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}, \quad m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$$

Réponse :

$$\Delta m = [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n] - m_X \rightarrow \Delta m = (2 \cdot 1,6726 + 2 \cdot 1,6750) \cdot 10^{-27} - 6,6647 \cdot 10^{-27} = 0,0305 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$$

2⁰) La relation d'Einstein

a - L'équivalence masse - énergie :

En relativité restreinte, Einstein (1905) a montré que la masse et l'énergie étaient deux aspects d'une même grandeur.

Un système matériel, de masse au repos m_0 , possède une énergie :

$$E_0 = m_0 \cdot c^2$$

C étant la célérité de la lumière dans le vide ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$).

E_0 est appelée **énergie de masse** du système.

b - Expression des masses:

- On utilise comme unité de l'énergie l'électronvolt : **$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$**

Conséquence :

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

- D'après la relation d'Einstein, $E = m \cdot c^2 \rightarrow m = E/c^2$

Si E s'exprime en MeV, la masse peut s'exprimer en MeV/c^2 .

Conséquence :

$$\text{Pour } m = 1 \text{ uma}, \quad E = m \cdot c^2 = \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{1,6 \cdot 10^{-13}} \approx 931,5 \text{ MeV}$$

$$\mathbf{1 \text{ uma} = 931,5 \text{ MeV}/c^2}$$

3⁰) Energie de liaison d'un noyau :

L'énergie de liaison d'un noyau est l'énergie libérée lors de la formation de ce noyau à partir de ses nucléons pris au repos.

Lors de la formation d'un noyau ${}^A_Z\text{X}$, le défaut de masse correspondant est :

$$\Delta m = [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n] - m_X$$

L'énergie de liaison E_l correspondante est alors :

$$E_l = \Delta m \cdot c^2$$

$$\mathbf{E_l = ([Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n] - m_X) \cdot c^2}$$

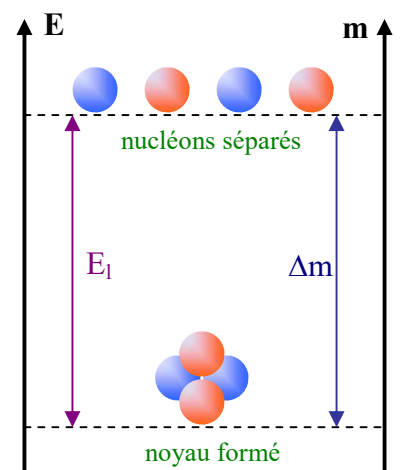
L'énergie de liaison est positive car c'est une énergie qu'il faut fournir au système.

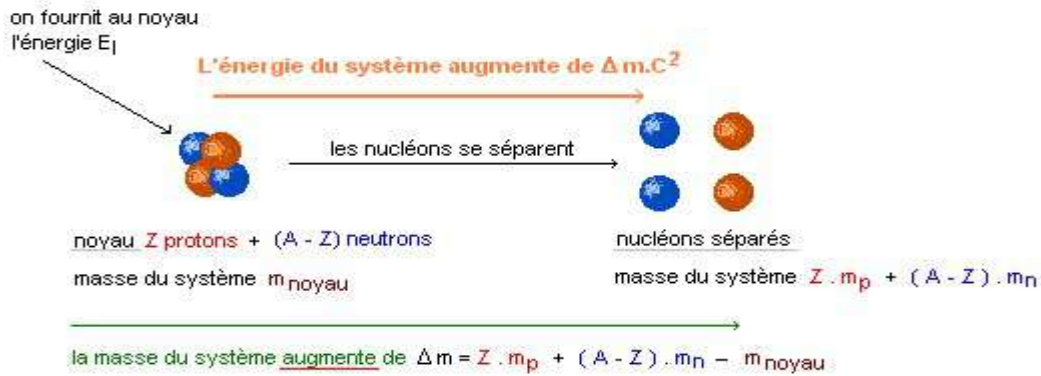
Remarque :

$$\begin{aligned}
 E_l &= ([Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n] - m_X) \cdot c^2 \\
 &= (Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n) \cdot c^2 - m_X \cdot c^2 \\
 &= m_{\text{nucléons}} \cdot c^2 - m_{\text{noyau}} \cdot c^2
 \end{aligned}$$

$$\text{Il vient alors que :} \quad \mathbf{E_l + m_{\text{noyau}} \cdot c^2 = m_{\text{nucléons}} \cdot c^2}$$

L'énergie de liaison est l'énergie qu'il faut fournir à un noyau immobile pour le dissocier en ses différents nucléons au repos.





Remarque : $E_1 (\text{MeV}) = \Delta m (\text{uma}) \cdot 931,5$

Application 2 :

Calculer l'énergie de liaison du noyau de lithium ${}^7_3\text{Li}$.

$m({}^7_3\text{Li}) = 7,01601 \text{ u}$, $m_n = 1,00866 \text{ u}$, $m_p = 1,00727 \text{ u}$

Réponse :

On a : $\Delta m = [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n] - m(\text{Li})$

A.N : $\Delta m = [3 \cdot 1,00727 + 4 \cdot 1,00866] - 7,01601$ et $\Delta m = 0,04044 \text{ u}$

On a : $E_1 = \Delta m \cdot c^2$ ou $E_1 (\text{MeV}) = \Delta m (\text{u}) \cdot 931,5$ A.N : $E_1 = 0,04044 \cdot 931,5$ et $E_1 \approx 37,8 \text{ MeV}$

IV / Stabilité du noyau atomique :

1⁰) Energie de liaison par nucléon :

Pour un noyau ${}^A_Z\text{X}$, l'énergie de liaison par nucléon ou énergie de liaison moyenne est :

$$E = \frac{E_1}{A}$$

E s'exprime en **MeV/ nucléon**

Cette énergie correspond à l'énergie nécessaire pour arracher un nucléon au noyau.

Exemple :

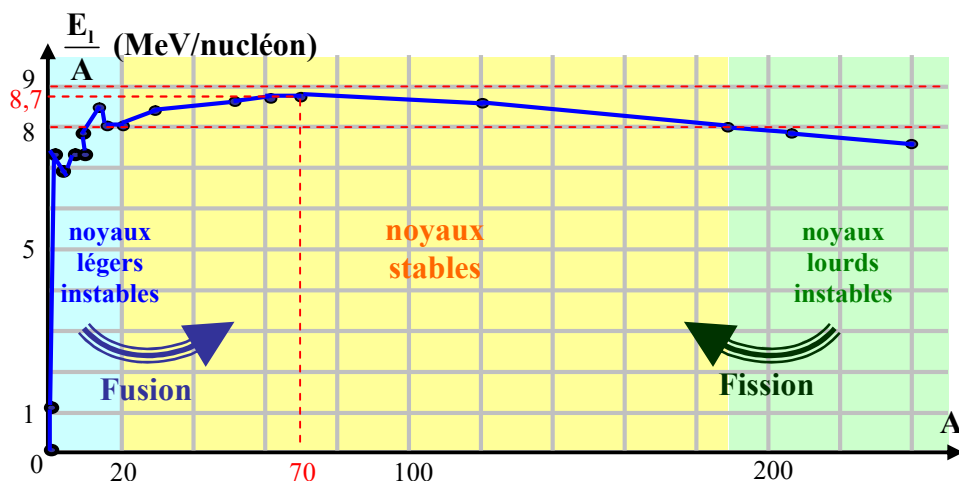
Pour le noyau de lithium ${}^7_3\text{Li}$:

$$E = \frac{E_1}{A} = \frac{37,8}{7} = 5,4 \text{ MeV/ nucléon}$$

2⁰) Stabilité du noyau atomique :

Un noyau est d'autant **plus stable** que son énergie de liaison par nucléon est **plus grande**.

Les noyaux les plus stables ont des nombres de masse $20 < A < 190$.



Application 3 :

L'énergie de liaison du fer ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ est $E_l(\text{Fe}) = 492 \text{ MeV}$ et celle de l'uranium ${}^{238}_{92}\text{U}$ est $E_l(\text{U}) = 1802 \text{ MeV}$. Comparer la stabilité de ses deux noyaux.

Réponse :

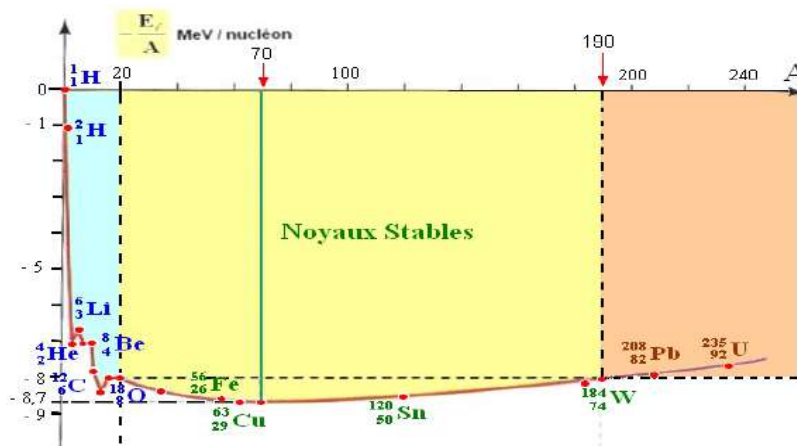
$$E(\text{Fe}) = \frac{E_l(\text{Fe})}{A}(\text{Fe}) \xrightarrow{\text{A.N}} E(\text{Fe}) = \frac{492}{56} \quad \text{et} \quad E(\text{Fe}) = 8,79 \text{ MeV/nucléon}$$

$$E(\text{U}) = \frac{E_l(\text{U})}{A}(\text{U}) \xrightarrow{\text{A.N}} E(\text{U}) = \frac{1802}{92} \quad \text{et} \quad E(\text{U}) = 7,57 \text{ MeV/nucléon}$$

$$\frac{E_l}{A}(\text{Fe}) > \frac{E_l}{A}(\text{U}) \rightarrow \text{Le fer 56 est alors plus stable que l'uranium 238.}$$

Remarques :

- Les noyaux légers instables peuvent évoluer **par association** vers des noyaux stables (c'est le phénomène de **fusion**).
- Les noyaux lourds instables peuvent évoluer **par fractionnement** vers des noyaux stables (c'est le phénomène de **fission**).
- La courbe d'Aston : Il s'agit en fait de la représentation de la quantité $-E_l/A$ en fonction de A afin que les noyaux les plus stables (ceux qui ont la plus grande valeur de E_l/A) apparaissent dans la partie la plus basse de la courbe, comme dans les diagrammes énergétiques.



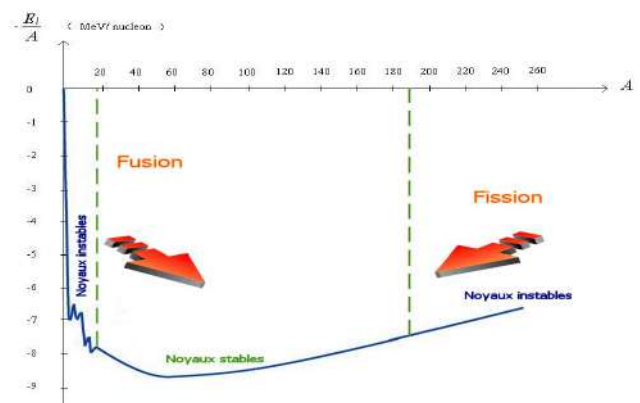
Application 4 :

Sur la courbe d'Aston dont vous disposez, indiquez :

- Dans quelle zone se situent les noyaux les plus liés (les plus stables)
- Parmi les noyaux suivants, quel est celui le plus stable : ${}^4_2\text{He}$, ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ ou ${}^{235}_{92}\text{U}$?
- Dans quelles zones se situent les noyaux les moins liés (les moins stables) ?
- Dans quelle zone peut-on prévoir des réactions de fusion nucléaire ?
- Dans quelle zone peut-on prévoir des réactions de fission nucléaire ?

Réponse :

- Les noyaux les plus liés sont ceux dont l'énergie de liaison par nucléon est la plus élevée (en valeur absolue). Ils sont situés dans la zone centrale
- Le noyau de fer 56 est le plus stable car son énergie de liaison par nucléon est la plus élevée.
- Les noyaux les moins liés sont situés aux extrémités de la courbe d'Aston.
- Les réactions de fusion nucléaire affecteront les noyaux les plus légers.
- Les réactions de fission nucléaire affecteront les noyaux les plus lourds.



Pour en savoir plus

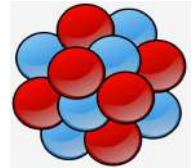
1⁰) La force nucléaire et la cohésion du noyau atomique :

- Le rayon du noyau est donné par la relation : $r = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$ avec $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1,3 \text{ fm}$ (Fermi)

Les nucléons sont donc confinés à l'intérieur du noyau dans un volume V qui, si on suppose que le noyau est

de forme sphérique, s'exprime par : $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \xrightarrow{r=r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}} V = \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3 \right) \cdot A$

On écrit alors : $V = A \cdot V_n$ avec $V_n = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3$ le volume (supposé sphérique) d'un nucléon .



Les nucléons paraissent accolés les uns aux autres à l'intérieur du noyau (ce qui confère au noyau atomique une masse volumique de l'ordre de $10^{17} \text{ Kg.m}^{-3}$).

- Chaque proton possède une charge électrique positive (+e). Par conséquent et à l'intérieur du noyau, des forces de répulsion coulombienne s'exercent entre les protons et tendent de les séparer. La cohésion du noyau atomique ne peut être assurée que par l'existence d'une force attractive qui agit entre les nucléons et les empêche de se séparer. Cette force est appelée force nucléaire (ou interaction forte). La force nucléaire, de très faible portée (elle agit uniquement à l'intérieur du noyau atomique) est très intense par rapport à la force coulombienne, ce qui assure le confinement aussi bien des protons que des neutrons à l'intérieur du noyau. Les nucléons restent donc liés au sein du noyau atomique grâce à la force nucléaire.

2⁰) Equivalence masse-énergie :

- Le concept de masse d'un corps est intuitivement associé à la quantité de matière qui constitue ce corps. En physique classique, la notion de masse est différenciée, suivant le contexte, en deux types :

* la masse gravitationnelle m_g qui intervient dans l'interaction gravitationnelle.

* la masse inertielle m_i qui rend compte de l'opposition d'un corps au changement de son état dynamique.

Newton a constaté, avec un choix judicieux d'unités, l'égalité entre ses deux masses. Ce constat mène au principe d'équivalence : $m_{\text{gravitationnelle}} = m_{\text{inertielle}}$

Remarque : Ces deux masses, de natures différentes, sont équivalentes.

Remarque : Einstein, se basant sur l'équivalence entre $m_{\text{gravitationnelle}}$ et $m_{\text{inertielle}}$, déduit que les effets de la gravitation et les effets de l'accélération sont équivalents. En adoptant le principe d'équivalence comme principe fondamental, il développa la théorie de la relativité généralisée.

- Dans la théorie de la relativité restreinte, la masse relative d'une particule est donnée par la relation :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{avec} \begin{cases} m_0 : \text{masse au repos (ou masse propre) de la particule} \\ v : \text{vitesse de la particule} \\ c : \text{célérité de la lumière} \end{cases}$$

$$\text{Pour } v \ll c, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \rightarrow m = m_0 + \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot \frac{v^2}{c^2} \rightarrow m \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$$

Le terme $\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$ désigne l'énergie cinétique E_c de la particule ($E_c = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$).

Par conséquent, le terme $m \cdot c^2$ est homogène à une énergie, on écrit alors : $E = m \cdot c^2$.

Il vient alors que : $E = E_0 + E_c$ avec $E_0 = m_0 \cdot c^2$ énergie de masse de la particule .

Généralisation : Tout système, de **masse au repos** m_0 , possède une **énergie de masse** $E_0 = m_0 \cdot c^2$.

Cette relation porte le nom de relation d'équivalence masse-énergie.

- La formule $E = m \cdot c^2$ implique que tout corps massif possède de l'énergie même s'il est au repos.

Le terme c désignant la célérité de la lumière dans le vide acquiert alors le statut d'une constante universelle.

En écrivant $m = \frac{E}{c^2}$, la masse apparaît comme une mesure de l'énergie. Masse et énergie sont deux aspects d'une même grandeur physique.

3⁰) Stabilité du noyau atomique :

La stabilité du noyau atomique est assurée par l'interaction forte qui s'exerce indifféremment entre protons, entre neutrons ou entre proton et neutron. Elle est en concurrence avec la répulsion coulombienne qui existe entre les protons.

Les protons, chargés positivement, tendent à se repousser. L'ajout de neutrons stabilise le noyau par effet de "dilution" des charges positives qui, éloignées les unes des autres, auront tendance à moins se repousser.

Le rapport entre le nombre de proton et le nombre de neutron dans un noyau donné est le facteur primordial qui détermine la stabilité ou l'instabilité de ce noyau.

Si on reporte tous les noyaux connus dans un diagramme dont l'axe des abscisses représente le nombre de neutrons (N) et l'axe des ordonnées représente le nombre de protons (Z), on obtient une répartition dans laquelle il apparaît que les noyaux stables, représentés par des points noirs, sont minoritaires par rapport à l'ensemble des autres noyaux et que ceux-ci se situent de part et d'autre de la trace générée par les points noirs. Ce diagramme porte alors le nom de vallée de stabilité.

On remarque que :

* Pour $Z < 20$: les noyaux stables sont pratiquement situés sur la droite ($Z = N$).

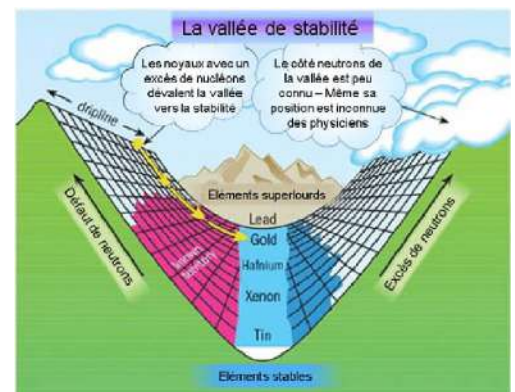
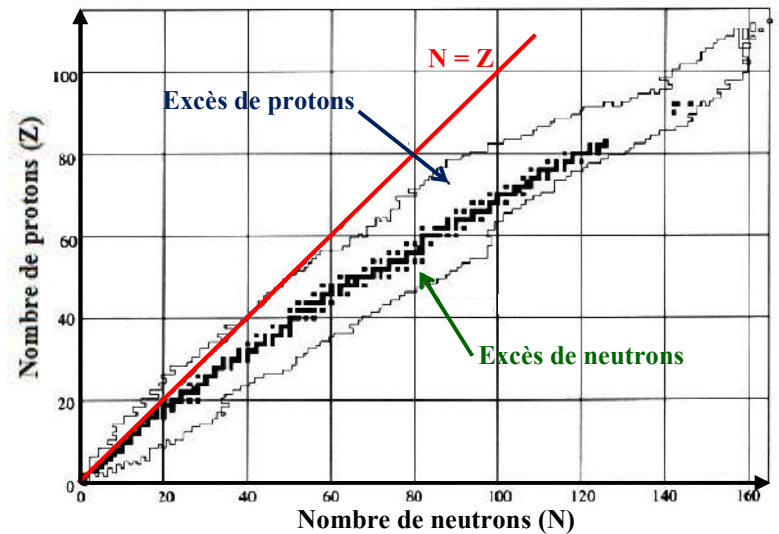
Ce sont les noyaux qui ont autant de protons que de neutrons.

* Pour $20 < Z < 83$: les noyaux stables sont situés au dessous de la droite ($Z = N$).

Les noyaux instables se situent :

- soit au dessus du domaine de stabilité : ces noyaux possèdent plus de protons que de neutrons
- soit au dessous du domaine de stabilité : ces noyaux possèdent plus de neutrons que de protons

* Pour $Z \geq 83$: les noyaux concernés sont les noyaux lourds qui sont tous instables



Applications

Exercice 1 :

Calculer le défaut de masse qui accompagne la formation du noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$.

On donne : $m({}^4_2\text{He}) = 6,6647 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$; $m_n = 1,6750 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$; $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$.

Réponse :

$$\Delta m = (2.m_p + 2.m_n) - m({}^4_2\text{He}).$$

$$\text{A.N : } \Delta m = (2.1,6726 + 2.1,6750) - 6,6647 \quad \text{et} \quad \Delta m = 30,5 \cdot 10^{-30} \text{ Kg}.$$

$$\text{Remarque : } \Delta m = \frac{30,5 \cdot 10^{-30}}{1,66 \cdot 10^{-27}} \quad \text{et} \quad \Delta m = 1,84 \cdot 10^{-2} \text{ uma}.$$

Exercice 2 :

Calculer l'énergie de liaison du noyau de lithium ${}^7_3\text{Li}$.

On donne : $m({}^7_3\text{Li}) = 7,01601 \text{ u}$; $m_n = 1,00866 \text{ u}$; $m_p = 1,00727 \text{ u}$; $1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$.

Réponse :

$$\text{On a : } E_l = \Delta m \cdot c^2 \quad \text{avec} \quad \Delta m = (3.m_p + 4.m_n) - m({}^7_3\text{Li}).$$

$$\text{A.N : } \Delta m = (3.1,00727 + 4.1,00866) - 7,01601 \quad \text{et} \quad \Delta m = 4,044 \cdot 10^{-2} \text{ u}$$

$$E_l = 4,044 \cdot 10^{-2} \cdot 931,5 \quad \text{et} \quad E_l = 37,67 \text{ MeV}.$$

Exercice 3 :

L'énergie de liaison du fer ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ est $E_l(\text{Fe}) = 462 \text{ MeV}$

alors que celle de l'uranium ${}^{238}_{92}\text{U}$ est $E_l(\text{U}) = 1802 \text{ MeV}$

Comparer la stabilité de ces deux noyaux.

Réponse :

L'énergie de liaison par nucléon du fer ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ est :

$$E(\text{Fe}) = \frac{E_l(\text{Fe})}{A} \xrightarrow{\text{A.N}} E(\text{Fe}) = \frac{462}{56} \quad \text{et} \quad E(\text{Fe}) = 8,25 \text{ MeV/nucléon}$$

L'énergie de liaison par nucléon de l'uranium ${}^{238}_{92}\text{U}$ est:

$$E(\text{U}) = \frac{E_l(\text{U})}{A} \xrightarrow{\text{A.N}} E(\text{U}) = \frac{1802}{238} \quad \text{et} \quad E(\text{U}) = 7,57 \text{ MeV/nucléon}$$

On remarque que : $E(\text{Fe}) > E(\text{U})$ donc le ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ est plus stable que le ${}^{238}_{92}\text{U}$.

Exercice 4 :

L'énergie de liaison du néon ${}^{22}_{10}\text{Ne}$ est voisine de 8 MeV/nucléon .

Calculer, en $\text{MeV} \cdot \text{c}^{-2}$, la masse du noyau ${}^{22}_{10}\text{Ne}$.

On donne : $m_p \approx 938,3 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$; $m_n \approx 939,6 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$

Réponse :

$$\text{On a : } E(\text{Ne}) = \frac{E_l(\text{Ne})}{A} \rightarrow E_l(\text{Ne}) = A \cdot E(\text{Ne}) \xrightarrow{\text{A.N}} E_l(\text{Ne}) = 22 \cdot 8 \quad \text{et} \quad E_l(\text{Ne}) = 176 \text{ MeV}.$$

$$\text{On a : } E_1 = \Delta m \cdot c^2 \rightarrow \Delta m = \frac{E_1}{c^2} \xrightarrow[E_1=176 \text{ MeV}]{\text{A.N}} \Delta m = 176 \text{ MeV} \cdot c^{-2}.$$

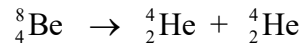
$$\text{On a : } \Delta m = (10 \cdot m_p + 12 \cdot m_n) - m\left({}^{22}_{10}\text{Ne}\right) \rightarrow m\left({}^{22}_{10}\text{Ne}\right) = (10 \cdot m_p + 12 \cdot m_n) - \Delta m.$$

$$\text{A.N : } m\left({}^{22}_{10}\text{Ne}\right) = (10.938,3 + 12.939,6) - 176 \text{ et } m\left({}^{22}_{10}\text{Ne}\right) = 20482,2 \text{ MeV} \cdot c^{-2}.$$

$$\text{Remarque : } m\left({}^{22}_{10}\text{Ne}\right) = \frac{20482,2}{931,5} \text{ et } m\left({}^{22}_{10}\text{Ne}\right) = 21,988 \text{ uma}.$$

Exercice 5 :

Justifier, par des considérations énergétiques, la transformation spontanée du béryllium 8 en hélium 4 .



$$\text{On donne : } m\left({}_4^8\text{Be}\right) = 8,0031 \text{ u} ; m\left({}_2^4\text{He}\right) = 4,0015 \text{ u}.$$

Réponse :

$$\begin{cases} m_i = m\left({}_4^8\text{Be}\right) \xrightarrow{\text{A.N}} m_i = 8,0031 \text{ u} \\ m_f = 2 \cdot m\left({}_2^4\text{He}\right) \xrightarrow{\text{A.N}} m_f = 8,0030 \text{ u} \end{cases} \rightarrow m_i > m_f$$

La transformation nucléaire s'accompagne d'une perte de masse donc d'une diminution d'énergie.
Le système physique évolue donc spontanément vers un état de plus grande stabilité.

LES RÉACTIONS NUCLÉAIRES SPONTANÉES LA RADIOACTIVITÉ

I / Introduction :

En assemblant Z protons et ($N = A - Z$) neutrons, il se forme un noyau ${}^A_ZX$ généralement instable ; il se désexcite alors spontanément en émettant un rayonnement : c'est le phénomène de radioactivité.

Le phénomène de la radioactivité naturelle a été découvert en 1896 par Henri Becquerel.

Peu de temps après, Marie Curie mena des travaux pour isoler des éléments naturels radioactifs.

En 1934, la radioactivité artificielle fut découverte par Irène et Frédéric Joliot - Curie.

II / Le phénomène de radioactivité :

1⁰) Définition :

Le phénomène de radioactivité consiste en une **émission spontanée** de rayonnement par certains noyaux appelés **radionucléides**.

2⁰) Les rayonnements radioactifs :

Il existe quatre sortes de rayonnements radioactifs :

- le rayonnement α :

Constitué par des particules chargées positivement (noyaux d'hélium ${}^4_2\text{He}$).

- le rayonnement β^- :

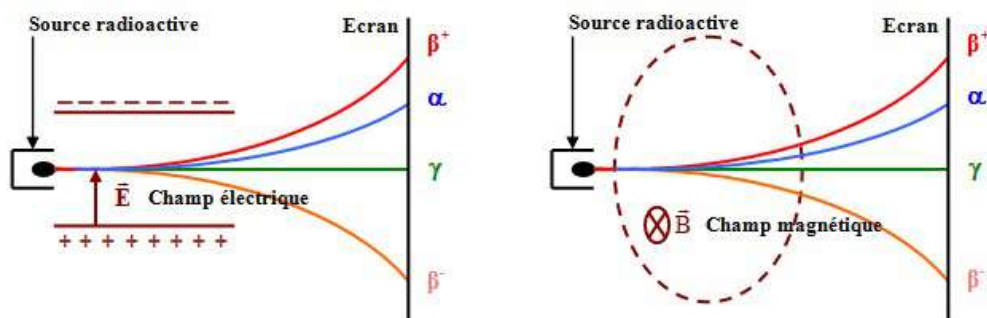
Constitué par des électrons très rapides ($e^- = {}^0_{-1}e$).

- le rayonnement β^+ :

Constitué par des positons ($e^+ = {}^0_1e$) : c'est une radioactivité artificielle.

- le rayonnement γ :

Constitué par des ondes électromagnétiques de très courtes longueurs d'onde.



Déviation d'un rayonnement radioactif par un champ électrique ou magnétique

2⁰) Détection des rayonnements radioactifs :

Le phénomène de radioactivité peut se manifester par :

- les scintillations des substances fluorescentes
- l'ionisation des gaz
- l'impression des plaques photosensibles

III / Les transformations nucléaires :

1⁰) Les lois de conservation :

La radioactivité se présente comme conséquence d'une instabilité nucléaire.

Le noyau radioactif (noyau père) se désintègre en donnant un nouveau noyau (noyau fils) accompagné d'une émission radioactive.

Au cours de la réaction nucléaire on a :

- conservation de la charge électrique
- conservation du nombre de nucléons
- conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement

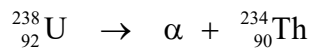
2⁰) Les réactions radioactives :

a - La radioactivité α :

La particule α est le noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$.



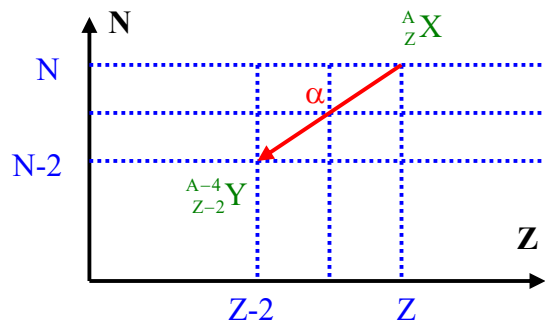
Exemple :



Les particules α produites ont des vitesses de l'ordre de 20000 Km.s⁻¹ ; elles ont un pouvoir pénétrant très faible (une feuille de papier peut les arrêter).

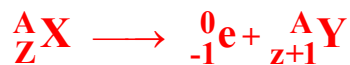
Remarques :

- Lors de la désintégration α , la quasi-totalité de l'énergie est emportée par la particule α .
- La désintégration α concerne les noyaux lourds ($A > 2000$).

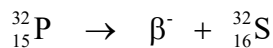


b - La radioactivité β^- :

L'électron émis provient de la transformation d'un neutron en un proton : ${}_0^1\text{n} \rightarrow {}_{-1}^0\text{e} + {}_1^1\text{p}$

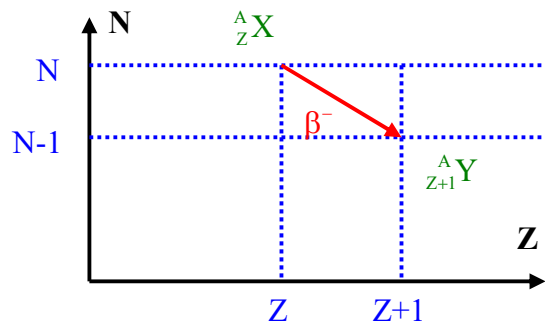


Exemple :



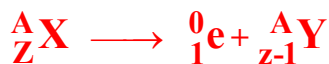
Les particules β^- produites ont des vitesses de l'ordre de 0,9.C ; elles sont très pénétrantes (7 mm d'Al).

Remarque : La désintégration β^- concerne les noyaux qui possèdent trop de neutrons.

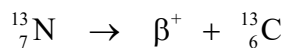


c - La radioactivité β^+ : (radioactivité artificielle)

Le positon émis provient de la transformation d'un proton en un neutron : ${}_1^1\text{p} \rightarrow {}_1^0\text{e} + {}_0^1\text{n}$

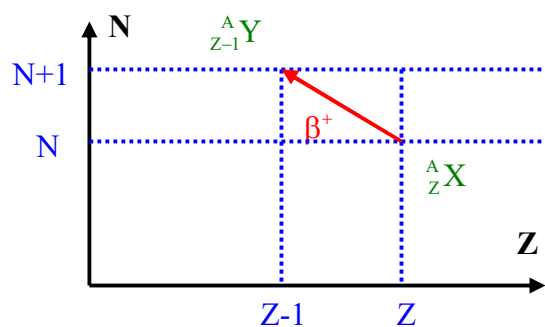


Exemple :



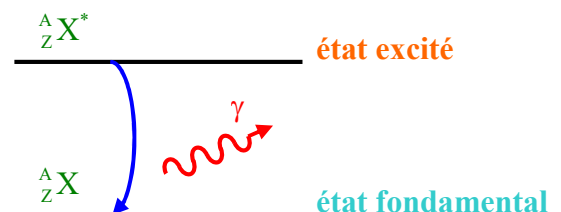
Les particules β^+ produites ont des vitesses de l'ordre de 0,9.C ; elles sont très pénétrantes (7 mm d'Al).

Remarque : La désintégration β^+ concerne les noyaux qui possèdent trop de protons.



d - La radioactivité γ :

Elle résulte de la désexcitation radiative du noyau.



Les rayons γ sont des ondes électromagnétiques de très hautes fréquences (10²¹ Hz) qui ont un très grand pouvoir pénétrant (20 cm de Pb).

Remarque : Le rayonnement γ accompagne toujours les radioactivités α , β^- et β^+ .

3⁰) Bilan énergétique :

La radioactivité est un phénomène spontané dans lequel le noyau évolue vers un état de plus grande stabilité ; c'est alors une transformation exothermique.

L'énergie libérée au cours de la transformation est liée au défaut de masse qui l'accompagne :

$$E(\text{MeV}) = \Delta m(\text{uma}) \cdot 931,5$$

Application 1 :

Par désintégration, le radium $^{226}_{88}\text{Ra}$ se transforme en radon $^{222}_{86}\text{Rn}$.

1⁰) Ecrire l'équation de la réaction nucléaire.

2⁰) On donne : $m(^{226}_{88}\text{Ra}) = 226,0960 \text{ u}$, $m(^{222}_{86}\text{Rn}) = 222,0869 \text{ u}$, $m(^4_2\text{He}) = 4,0026 \text{ u}$.

a - Calculer, en Joule et en MeV, l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau Ra.

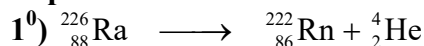
b - Le noyau de Ra étant au repos, on supposera que toute l'énergie est acquise sous forme cinétique E_C .

Sachant que $\frac{E_C(\alpha)}{E_C(\text{Rn})} = \frac{m(\text{Rn})}{m(\alpha)}$, calculer $E_C(\alpha)$.

3⁰) a - En admettant que l'énergie libérée est entièrement acquise par la particule légère émise sous forme d'énergie cinétique, calculer la vitesse d'émission de cette particule.

b - En réalité et au cours de la réaction, il y a émission d'un photon de longueur d'onde $\lambda = 10^{-12} \text{ m}$. Calculer la valeur réelle de la vitesse d'émission de la particule.

Réponse :



2⁰) a - $E_{\text{MeV}} = |\Delta m_u| \cdot 931,5 \rightarrow E_{(\text{MeV})} = [m(^{222}_{86}\text{Rn}) + m(^4_2\text{He}) - m(^{226}_{88}\text{Ra})]_{(\text{u})} \cdot 931,5$

A.N : $E_{(\text{MeV})} = [222,0869 + 4,0026 - 226,0960] \cdot 931,5$ et $E_{(\text{MeV})} = 6,0548 \text{ MeV}$.

b -
$$\begin{cases} E = E_C(\text{Rn}) + E_C(\alpha) \\ \frac{E_C(\alpha)}{E_C(\text{Rn})} = \frac{m(\text{Rn})}{m(\alpha)} \end{cases} \rightarrow E_C(\alpha) = \frac{E}{\left(1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Rn})}\right)}$$
 A.N: $E_C(\alpha) = \frac{6,0548}{1 + \frac{4,0026}{222,0869}}$ et $E_C(\alpha) = 5,9476 \text{ MeV}$

3⁰) a - $E_C(\alpha) = E \rightarrow E_C(\alpha) = 6,0548 \text{ MeV}$

$$E_C(\alpha) = \frac{1}{2} m(\alpha) \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_C(\alpha)}{m(\alpha)}} \xrightarrow{\text{A.N}} v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,0548 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}{4,0026 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}} \text{ et } v = 1,7 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

b - $E_C(\alpha) = E - h\nu = E - h \frac{C}{\lambda} \xrightarrow{\text{A.N}} E_C(\alpha) = 6,0548 - \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{1,6 \cdot 10^{-13}} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{10^{-12}} \text{ et } E_C(\alpha) = 4,8135 \text{ MeV}$

A.N : $v' = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,8135 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}{4,0026 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}} \text{ et } v' = 1,5 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$.

IV / La loi de décroissance radioactive :

1⁰) la loi de désintégration :

a - Enonce de la loi :

Soit N_0 le nombre de noyaux radioactifs contenus dans l'échantillon à l'instant $t = 0$.

Soit N le nombre de noyaux radioactifs non désintégrés à l'instant t .

Le nombre de noyaux d'un radionucléide en cours de désintégration est proportionnel à chaque instant, au nombre de noyaux présents :

$$\frac{dN}{dt} \propto -N \rightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$$

λ est une constante positive appelée **constante radioactive** du radionucléide.

Remarque : λ , exprimée en (s^{-1}), est une caractéristique du radioélément considéré.

b - Etablissement de la loi :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt \rightarrow \ln N = -\lambda \cdot t + C^{ste}$$

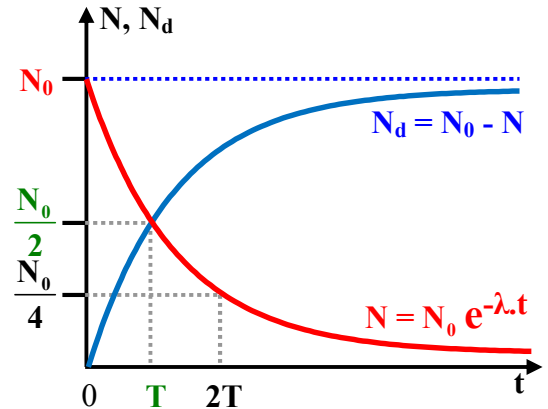
$$\text{A } t = 0, \text{ on a : } N = N_0 \rightarrow \ln N_0 = C^{ste}$$

$$\text{donc : } \ln N - \ln N_0 = -\lambda \cdot t$$

$$\rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda \cdot t$$

$$\rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\text{Il vient alors que : } N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t}$$



$$\text{Remarque : Le nombre de noyaux désintégrés sera : } N_d = N_0 - N \rightarrow N_d = N_0 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$$

2⁰) la période radioactive :

La période radioactive **T** (ou temps de demi-vie) d'un radionucléide est le temps au bout duquel le nombre de noyaux présents diminue de moitié.

$$\text{A } t = T, N(T) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \cdot T} \rightarrow e^{-\lambda \cdot T} = \frac{1}{2} \rightarrow \lambda \cdot T = \ln 2$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{ou} \quad T = \frac{0,693}{\lambda}$$

3⁰) Activité d'une source radioactive :

L'activité **A** d'une source radioactive est le nombre de désintégrations que subit cette source radioactive par unité de temps.

$$A = -\frac{dN}{dt} \quad \text{or} \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \rightarrow A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\text{on pose } A_0 = \lambda \cdot N_0, \text{ il vient alors que : } A(t) = A_0 e^{-\lambda \cdot t}.$$

Unité :

Dans le S.I, l'activité s'exprime en Becquerel (Bq).

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ désintégration / seconde.}$$

Application 2 :

Le Bismuth $^{212}_{83}\text{Bi}$ est radioactif α

Une source de Bi, contenant 0,05 g de ce radioélément, produit $1,89 \cdot 10^{17}$ désintégrations en 7,0 s.

1⁰) Calculer, en Bq, l'activité de la source.

2⁰) En déduire la constante et la période radioactives du Bi.

3⁰) Calculer le volume d'hélium, dans les conditions normales, produit en 1 minute par cette source en supposant que son activité est constante.

Réponse :

$$1^0) A = \frac{1,89 \cdot 10^{17}}{7} \quad \text{et} \quad A = 27 \cdot 10^{15} \text{ Bq}$$

$$2^0) A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N^0 \cdot n = \lambda \cdot N^0 \cdot \frac{m}{M} \rightarrow \lambda = \frac{M \cdot A}{m \cdot N^0}$$

$$A \cdot N : \lambda = \frac{212 \cdot 27 \cdot 10^{15}}{0,05 \cdot 6,023 \cdot 10^{23}} \quad \text{et} \quad \lambda = 19 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{On a : } T = \frac{\ln 2}{\lambda} \xrightarrow{A.N} T = \frac{0,693}{19.10^{-5}} \quad \text{et} \quad T = 3647,4 \text{ s.}$$

$$3^0) \text{ L'activité est supposée constante } \rightarrow N_t(\alpha) = A.t \rightarrow \mathcal{N}.n_t(\alpha) = A.t \rightarrow \mathcal{N} \cdot \frac{V_t(\alpha)}{V_M} = A.t$$

$$\text{Il vient alors que } V_t(\alpha) = \frac{V_M}{\mathcal{N}} \cdot A.t$$

$$A.N : V_t(\alpha) = \frac{22,4}{6,023.10^{23}} \cdot 27.10^{15} \cdot 60 \quad \text{et} \quad V_t(\alpha) = 6.10^{-5} \text{ L.}$$

V / Applications et Dangers :

1⁰) Utilisations :

a - Traceur radioactif :

On suit le cheminement d'un isotope radioactif dans un organisme vivant.

Exemples :

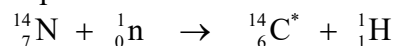
- le $^{11}_6\text{C}$ sert à étudier la photosynthèse chez les plantes.
- le $^{131}_{53}\text{I}$ sert à contrôler le fonctionnement des glandes thyroïdes.

b - La radiothérapie :

C'est l'utilisation du rayonnement γ (produit par un canon à cobalt $^{60}_{27}\text{Co}$) pour le traitement des cancers.

c - Datation par le carbone 14 :

Le carbone 14 est produit en haute atmosphère :



Le $^{14}_6\text{C}$ est un radioélément émetteur β^- , il est absorbé par les plantes sous forme de CO_2 au cours de la photosynthèse.

On détermine l'âge d'un bois ancien en comparant l'activité de deux masses égales de :

$$\left. \begin{array}{l} \text{jeune bois : } A_0 = \lambda \cdot N_0 \\ \text{ancien bois : } A = \lambda \cdot n \end{array} \right\} \longrightarrow \frac{N}{N_0} = \frac{A}{A_0} = e^{-\lambda \cdot t} \longrightarrow t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{A_0}{A}$$

Remarque :

Pour la datation des roches, on utilise les radioéléments U, Th ou K.

d - Autres :

Les éléments radioactifs sont aussi utilisés dans la vérification des soudures, la conservation des aliments, la stérilisation ...

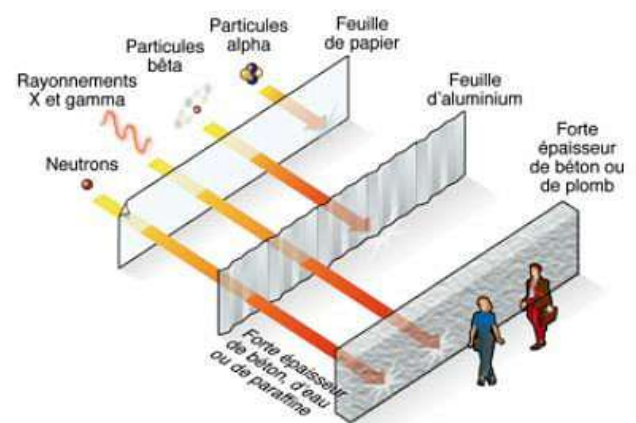
2⁰) Dangers :

L'exposition aux rayonnements radioactifs est dangereuse pour l'homme.

On définit une unité pour l'équivalent physiologique de dose reçue (r.e.m).

L'irradiation naturelle est équivalente à 0,5 milli r.e.m par jour.

A partir de 100 r.e.m, un danger de mort apparaît ...



Pour en savoir plus

1⁰) Stabilité du noyau et radioactivité :

a - Stabilité du noyau atomique :

La stabilité ou l'instabilité d'un noyau atomique résulte de la compétition entre l'interaction forte (attractive, agissant entre tous les nucléons mais de faible portée) et l'interaction coulombienne (répulsive, agissant entre les protons et de longue portée).

- Lorsque Z est petit (noyaux légers) l'interaction forte l'emporte sur la répulsion électrique et les noyaux stables se situent sur la bissectrice $Z = N$ du diagramme (Z,N).
- Lorsque Z augmente, l'interaction coulombienne, bien que moins intense que l'interaction forte, croît. Un nombre plus grand de neutrons favorise la « dilution » de l'effet répulsif de l'interaction coulombienne entre les protons et permet à ceux-ci de rester agglutinés.

Pour les noyaux intermédiaires, la stabilité est assurée pour un rapport $\frac{N}{Z} = 1,3$ mais ce rapport atteint 1,5 pour les noyaux lourds.

- En général, La stabilité d'un noyau atomique est tributaire du rapport entre le nombre de protons et le nombre de neutrons qu'il contient.

Une troisième force, appelée interaction faible, permet d'ajuster les proportions entre protons et neutrons. Cette force, discrète, permet la transformation d'un proton en un neutron ou l'inverse.

b - Le phénomène de radioactivité :

Un noyau instable se désintègre spontanément pour se transformer en un noyau plus stable avec émission d'un rayonnement. C'est le phénomène de radioactivité.

Il y a plusieurs types de rayonnement radioactifs. Les principaux sont :

- **Le rayonnement bêta :**

Il concerne les noyaux qui ont un excès d'une des deux espèces de nucléons. On distingue alors :

* **la radioactivité β^-** : Elle se manifeste dans les noyaux instables qui ont un excès de neutrons. Dans de tels noyaux un neutron se transforme en un proton avec émission d'un électron : ${}_0^1\text{n} \rightarrow {}_1^1\text{p} + {}_{-1}^0\text{e}$

* **la radioactivité β^+** : Elle se manifeste dans les noyaux instables qui ont un excès de protons. Dans de tels noyaux un proton se transforme en un neutron avec émission d'un positron : ${}_1^1\text{p} \rightarrow {}_0^1\text{n} + {}_{+1}^0\text{e}$

Remarque : le positron est l'antiparticule de l'électron (ils ont la même masse mais des charges électriques opposées).

Remarque : la radioactivité β^+ est une radioactivité artificielle.

- **Le rayonnement alpha :**

il concerne les noyaux très lourds. Ils ont donc un grand nombre de nucléons. Le noyau se désintègre en expulsant une particule α qui est le noyau d'Hélium ${}_2^4\text{He}$.

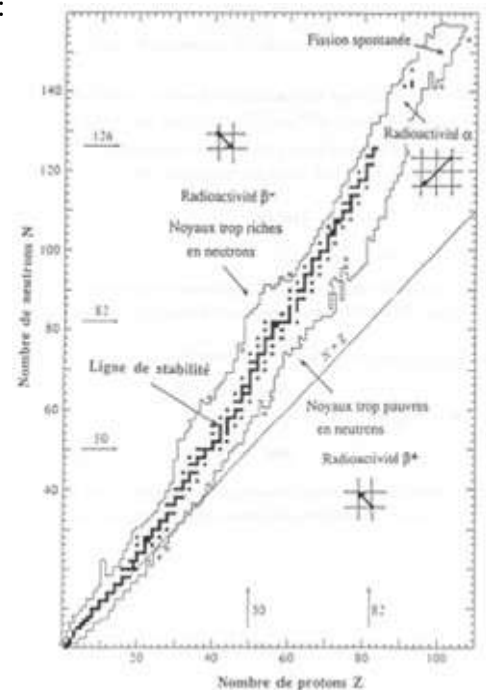
- **Le rayonnement gamma :**

Il succède les désintégrations alfa ou bêta. Lors de ces désintégrations, le noyau formé est généralement à un état excité. Il se désexcite alors en émettant une onde électromagnétique de très haute fréquence donc très énergétique : c'est la radioactivité γ .

Remarque : la radioactivité γ est une émission radiative qui succède la désintégration d'un noyau radioactif.

- **La capture électronique :**

C'est un mode de radioactivité mineur dans lequel le noyau capte un électron du cortège électronique qui l'enveloppe. Un réarrangement des couches électroniques est alors nécessaire et s'accompagne de l'émission d'un rayons X. Comme la radioactivité β^+ , la capture électronique permet la transformation d'un proton en un neutron : ${}_1^1\text{p} + {}_{-1}^0\text{e} \rightarrow {}_0^1\text{n}$.



2⁰) La décroissance radioactive :

a - La loi de décroissance radioactive :

• La décroissance radioactive est la diminution du nombre de noyaux instables dans un échantillon. Dans un même échantillon, un noyau radioactif a autant de chance de se désintégrer à un instant donné qu'un autre. Cette décroissance s'effectue donc suivant une loi statistique.

• La probabilité pour qu'un noyau radioactif puisse se désintégrer par unité de temps s'appelle la **constante radioactive** et elle est notée λ .

Ce caractère probabiliste fait qu'on ne connaît jamais le moment où un noyau donné va se désintégrer mais on peut statistiquement prédire le comportement d'un grand nombre de noyaux.

• Considérons un échantillon qui contient initialement un nombre N_0 de noyaux radioactifs.

A un instant t , le nombre de noyaux non désintégrés est $N(t)$.

Pendant une durée dt très petite, la probabilité pour qu'un noyau se désintègre est : $\lambda \cdot dt$.

Dans l'échantillon et à partir de l'instant t , le nombre de noyaux désintégrés pendant dt sera : $N(t) \cdot \lambda \cdot dt$

A l'instant $t + dt$, Le nombre de noyaux non désintégrés sera : $N(t + dt) = N(t) - N(t) \cdot \lambda \cdot dt$

$$\text{Soit } dN(t) = N(t + dt) - N(t) \rightarrow dN(t) = -N(t) \cdot \lambda \cdot dt \quad \text{et} \quad \left(\frac{dN}{dt} \right)_t = -\lambda \cdot N(t)$$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt \rightarrow \ln(N) = -\lambda \cdot t + C \xrightarrow[A \text{ à } t=0, N(0)=N_0]{\rightarrow C=\ln(N_0)} \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda \cdot t \rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Remarque :

$$\text{On a : } \frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \rightarrow \frac{dN}{dt} + \lambda \cdot N = 0 \xrightarrow{\tau = \frac{1}{\lambda}} \tau \cdot \frac{dN}{dt} + N = 0. \text{ On obtient une équation différentielle dont}$$

la solution qui respecte la condition initiale est $N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

τ est appelée constante de temps radioactive du radionucléide considéré.

La période radioactive T du radionucléide considéré est la durée au bout de laquelle le nombre de noyau présent diminue de moitié.

$$N(T) = \frac{N_0}{2} \rightarrow e^{-\frac{T}{\tau}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{T}{\tau} = \ln(2) \quad \text{et} \quad T = \tau \cdot \ln(2).$$

$$\text{Remarque : } \tau = \frac{1}{\lambda} \rightarrow T = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

L'activité A de l'échantillon d'un radionucléide est le nombre de désintégrations par unité de temps que subit cet échantillon.

$$\text{On écrit alors : } A(t) = \frac{N(t) \cdot \lambda \cdot dt}{dt} \rightarrow A(t) = \lambda \cdot N(t).$$

Remarque : L'activité s'exprime en Becquerel (Bq) : 1 Bq = 1 désintégration.s⁻¹.

$$\text{Remarque : } A(t) = \lambda \cdot N(t) \rightarrow A(t) = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{A(0)=A_0=\lambda \cdot N_0} A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

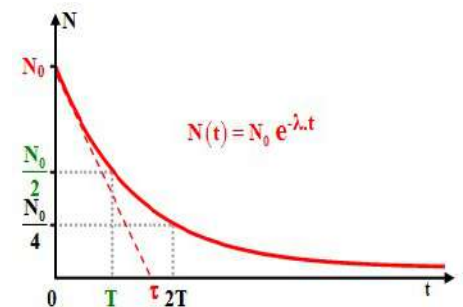
b - La filiation radioactive :

Le noyau radioactif étant instable, il se désintègre en un autre noyau qui lui-même peut être instable. Ce dernier se désintègre encore...etc... jusqu'à la fin du processus de stabilisation où on obtient un noyau stable. Ce processus est marqué par le passage par des nucléides radioactifs intermédiaires. La transition entre deux radionucléides s'accompagne de l'émission d'un rayonnement radioactif spécifique.

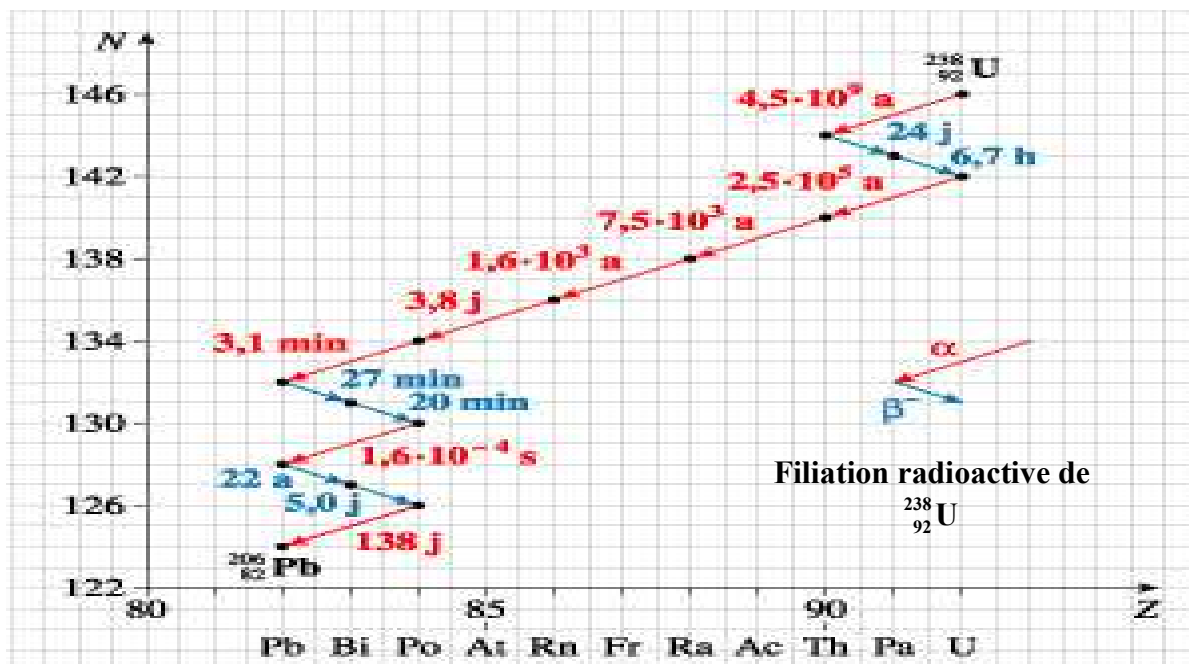
Cette série de désintégration en cascade se déroule dans un ordre et sur une durée spécifique à chaque radionucléide.

Cet enchaînement est appelé « chaîne de désintégration » ou « chaîne de filiation ».

Dans une filiation radioactive le radionucléide de départ est appelé « noyau père », les autres radionucléides intermédiaires sont appelés « noyau fils », le noyau final étant le noyau stable.



Dans la nature, les filiations radioactives concernent principalement trois éléments lourds dont le temps de vie est de l'ordre du milliard d'années : l'uranium 238, l'uranium 235 et le Thorium 232.



3⁰) La géochronologie :

La géochronologie a pour objet l'établissement de la chronologie des événements géologiques. Cette discipline scientifique est utilisée, grâce à des méthodes de datation, dans la détermination de l'âge des roches et des fossiles.

a - Equation fondamentale :

Soit un noyau père P radioactif qui se désintègre, au cours du temps, pour se transformer en un noyau fils F. Soit un échantillon qui contient initialement N_{0P} de noyaux P (et éventuellement N_{0F} de noyaux F).

A un instant t, on a : $N_P(t) = N_{0P} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow N_{0P} = N_P(t) \cdot e^{\lambda \cdot t}$

D'autre part, on a : $N_F(t) = [N_{0P} - N_P(t)] + N_{0F} \rightarrow N_F(t) = N_P(t) \cdot (e^{\lambda \cdot t} - 1) + N_{0F}$

On déduit que : $(e^{\lambda \cdot t} - 1) = \frac{N_F(t) - N_{0F}}{N_P(t)} \rightarrow e^{\lambda \cdot t} = 1 + \frac{N_F(t) - N_{0F}}{N_P(t)}$ et $t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(1 + \frac{N_F(t) - N_{0F}}{N_P(t)} \right)$.

Cette équation permet, à première vue, de déterminer l'âge d'un échantillon supposé un système fermé. Mais si la connaissance de λ et les mesures de $N_P(t)$ et $N_F(t)$ sont possibles avec précision, ce n'est pas toujours le cas avec N_{0F} .

b - Datation au carbone 14 :

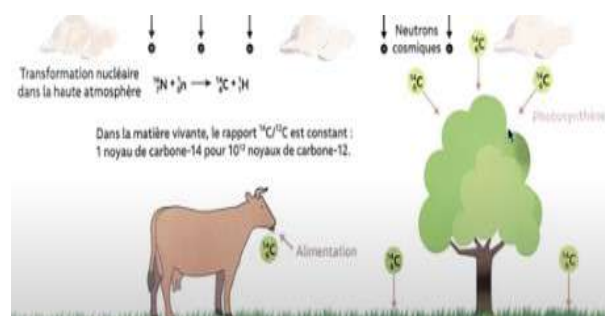
- Le carbone 14 (ou radiocarbone) est un isotope du carbone qui se forme en haute atmosphère suite à la capture d'un neutron (éjecté par un noyau de la haute atmosphère sous l'effet des rayons cosmiques) par un noyau d'azote 14 : ${}_0^1n + {}_7^{14}N \rightarrow {}_6^{14}C + {}_1^1p$.

Les atomes de radiocarbone s'unissent avec l'oxygène pour former du dioxyde de carbone CO_2 qui sera par la suite absorbé par les végétaux et les organismes vivants et s'insère ainsi dans l'environnement.

Notons que cet isotope du carbone constitue une infime proportion du carbone naturel ($1/10^{12}$).

- Le carbone 14 est un isotope radioactif.

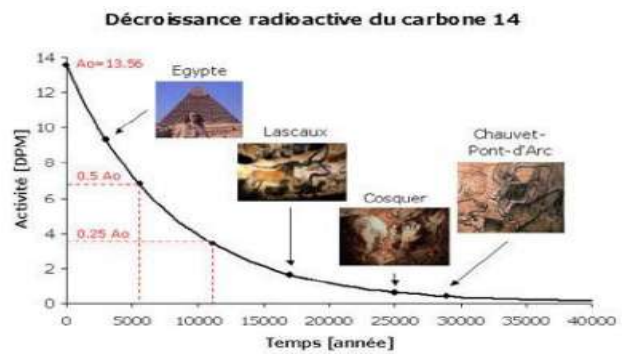
Il subit une radioactivité β^- pour se transformer en azote 14 : ${}_6^{14}C \xrightarrow{\beta^-} {}_7^{14}N + {}_{-1}^0e$ avec une période radioactive $T = 5730 \pm 40$ ans.



De son vivant un organisme assimile le CO_2 atmosphérique donc possède une activité carbone 14 égale à celle de l'atmosphère.

Lorsqu'il meurt, les échanges avec l'atmosphère cessent. L'équilibre est rompu et la décroissance radioactive du carbone 14 commence.

Pour déterminer l'âge d'un ancien échantillon organique, on mesure son activité A et celle d'un échantillon organique contemporain de même masse et de même nature, notée A_0 .



D'après la loi de décroissance radioactive : $A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \cdot \text{Ln} \left(\frac{A_0}{A} \right)$.

Remarque :

Appliquons la loi fondamentale de la géochronologie avec, $N_{0F} = 0$

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \text{Ln} \left(1 + \frac{N_F(t)}{N_P(t)} \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \text{Ln} \left(1 + \frac{N_{0P} - N_P(t)}{N_P(t)} \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \text{Ln} \left(1 + \frac{N_{0P}}{N_P(t)} - 1 \right) \xrightarrow{A=\lambda \cdot N} t = \frac{1}{\lambda} \cdot \text{Ln} \left(\frac{A_0}{A} \right).$$

Remarque :

La datation au carbone 14 trouve ses limites du fait que :

- * Au-delà de 50000 ans, elle devient inutilisable car la proportion de carbone 14 devient indétectable.
- * elle permet de dater toutes sortes d'organismes (bois, charbon, corail, coquillage, ossements...) mais elle ne peut être utilisée sur des minéraux.

Applications

Exercice 1 :

Le bismuth $^{210}_{83}\text{Bi}$ est un isotope radioactif qui se désintègre en se transformant en polonium Po avec émission d'une particule x. L'isotope du polonium formé est lui-même radioactif, sa désintégration aboutit à la formation de l'isotope stable du plomb Pb avec émission d'une particule y.

Le diagramme ci-dessous traduit ces deux transformations (1) et (2) successives :

1⁰) a - Pour chacune des désintégrations (1) et (2) :

- écrire l'équation de la réaction nucléaire correspondante. Préciser les lois appliquées.
- identifier la nature de la particule émise
- donner le nom de la radioactivité subite.

b - Expliquer l'émission de la particule x par le noyau de bismuth lors de la désintégration (1).

2⁰) a - Rappeler la définition de l'énergie de liaison E_l d'un noyau ^A_ZX .

b - Calculer, en MeV, les énergies de liaison $E_l(\text{Po})$ et $E_l(\text{Pb})$ des noyaux de polonium et plomb formés.

c - Comparer la stabilité de ces deux noyaux.

3⁰) On suppose que le noyau de polonium Po est immobile dans le repère lié au laboratoire et que toute l'énergie libérée au cours de sa désintégration est transférée aux noyaux formés sous forme cinétique.

a - Montrer que l'énergie libérée au cours de la désintégration (2) est $E = 5,4 \text{ MeV}$,

b - Sachant que l'énergie cinétique de recul du noyau de plomb est $E_c(\text{Pb}) = 0,1 \text{ MeV}$, calculer l'énergie cinétique $E_c(y)$ de la particule y.

c - Une étude expérimentale montre que certaines particules y sont émises avec une énergie cinétique $E'_c(y) = 5,1 \text{ MeV}$. Interpréter ce résultat et calculer la longueur d'onde λ du rayonnement γ émis.

4⁰) On se propose de déterminer la période radioactive T de l'isotope du polonium Po formé.

On dispose, à l'instant $t = 0$, d'un échantillon contenant N_0 noyaux de Po.

On détermine, à chaque instant t, le nombre N de noyaux non désintégrés.

Les résultats sont rassemblés sur le graphe ci-contre :

a - Rappeler la loi de décroissance radioactive $N = f(t)$.

b - Déterminer graphiquement la valeur de la constante radioactive λ .

c - Définir la période radioactive T d'un radionucléide. Exprimer T en fonction de λ . En déduire la valeur de T pour l'isotope du polonium étudié

d - Déterminer le nombre de particule y émise au cours du premier jour de désintégration si la masse initiale de l'échantillon est $m_0 = 4,2 \text{ mg}$.

On rappelle que : $m = \frac{M}{N} \cdot N$ où N est le nombre

d'Avogadro et M la masse molaire.

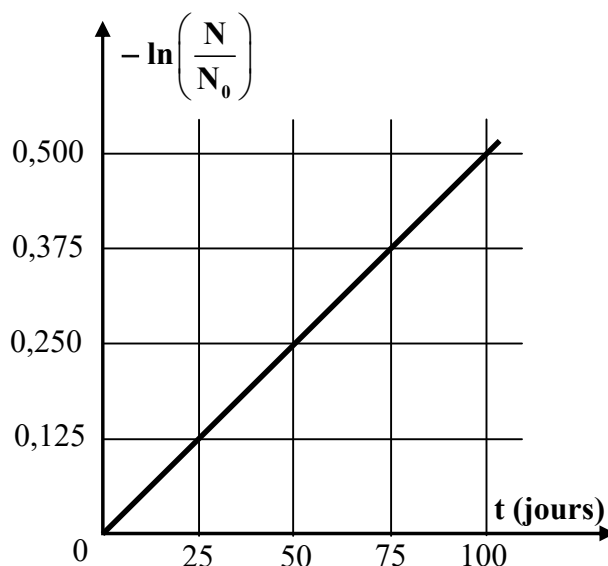
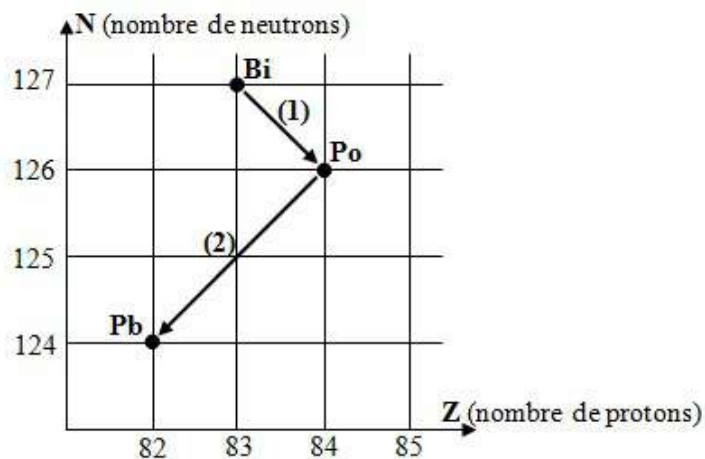
On donne : $N = 6,02 \cdot 10^{23}$; $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$

$m(\alpha) = 4,0015 \text{ u}$; $m(\text{Po}) = 210,0008 \text{ u}$; $m(\text{Pb}) = 205,9935 \text{ u}$; $m(n) = 1,0087 \text{ u}$; $m(p) = 1,0073 \text{ u}$

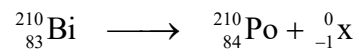
Réponse :

1⁰) a - * Pour la désintégration (1) : $^{210}_{83}\text{Bi} \longrightarrow ^{210}_{84}\text{Po} + ^A_Z\text{x}$

- La loi de conservation de la charge électrique : $83 = 84 + Z \rightarrow Z = 83 - 84 \text{ et } Z = -1$.



La loi de conservation du nombre de nucléons : $210 = 210 + A \rightarrow A = 210 - 210$ et $A = 0$.



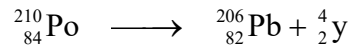
- La particule émise est un électron ${}_{-1}^0\text{e}$ (particule β^-)

- La radioactivité subite est une radioactivité β^- .

* Pour la désintégration (2) : ${}_{84}^{210}\text{Po} \longrightarrow {}_{82}^{206}\text{Pb} + {}_Z^A\text{y}$

- La loi de conservation de la charge électrique : $84 = 82 + Z \rightarrow Z = 84 - 82$ et $Z = 2$.

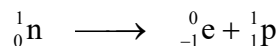
La loi de conservation du nombre de nucléons : $210 = 206 + A \rightarrow A = 210 - 206$ et $A = 4$.



- La particule émise est un noyau d'hélium ${}_2^4\text{He}$ (particule α)

- La radioactivité subite est une radioactivité α .

b - L'émission d'un électron par le noyau de Bi est expliquée par la transformation d'un neutron en un proton.



2⁰) a - L'énergie de liaison E_l d'un noyau est l'énergie qu'il faut fournir à ce noyau, au repos, pour séparer les différents nucléons qui le constituent. Ceux-ci se trouvant au repos à l'état final.

$$\mathbf{b} - E_l({}_Z^AX) = [(Z.m_p + (A - Z).m_n) - m_X].c^2$$

$$* E_l({}_{84}^{210}\text{Po}) = [(84.1,0073 + 126.1,0087) - 210,0008].931,5 \text{ et } E_l({}_{84}^{210}\text{Po}) = 1591,56 \text{ MeV.}$$

$$* E_l({}_{82}^{206}\text{Pb}) = [(82.1,0073 + 124.1,0087) - 205,9935].931,5 \text{ et } E_l({}_{82}^{206}\text{Pb}) = 1568,55 \text{ MeV.}$$

c - Un noyau est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléon $\overline{E}_l({}_Z^AX) = \frac{E_l({}_Z^AX)}{A}$ est plus grande.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{E}_l({}_{84}^{210}\text{Po}) = \frac{1591,56}{210} \text{ et } \overline{E}_l({}_{84}^{210}\text{Po}) = 7,58 \text{ MeV.nucléon}^{-1} \\ \overline{E}_l({}_{82}^{206}\text{Pb}) = \frac{1568,55}{206} \text{ et } \overline{E}_l({}_{84}^{210}\text{Po}) = 7,61 \text{ MeV.nucléon}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \overline{E}_l({}_{82}^{206}\text{Pb}) > \overline{E}_l({}_{84}^{210}\text{Po}) \\ {}_{82}^{206}\text{Pb} \text{ est plus stable que } {}_{84}^{210}\text{Po} \end{array} \right|$$

$$\mathbf{3^0) a} - E = [m_{\text{Po}} - (m_{\alpha} + m_{\text{Pb}})].c^2$$

$$\text{A.N : } E = [210,0008 - (4,0015 + 205,9935)].931,5 \text{ et } E = 5,4 \text{ MeV.}$$

$$\mathbf{b} - E = E_c(\text{Pb}) + E_c(\alpha) \rightarrow E_c(\alpha) = E - E_c(\text{Pb}). \text{ A.N : } E_c(\alpha) = 5,4 - 0,1 \text{ et } E_c(\alpha) = 5,3 \text{ MeV.}$$

c - Le noyau formé est à l'état excité. Il se désexcite alors en émettant un rayonnement γ .

$$W(\gamma) = E_c(\alpha) - E'_c(\alpha) \xrightarrow{W(\gamma)=h.v=h.\frac{c}{\lambda}} h.\frac{c}{\lambda} = E_c(\alpha) - E'_c(\alpha) \text{ et } \lambda = \frac{h.c}{E_c(\alpha) - E'_c(\alpha)}.$$

$$\text{A.N : } \lambda = \frac{6,62.10^{-34}.3.10^8}{(5,3 - 5,1).1,6.10^{-13}} \text{ et } \lambda = 6,2.10^{-12} \text{ m.}$$

4⁰) a - La loi de décroissance radioactive : $N = N_0 e^{-\lambda.t}$

$$\mathbf{b} - \text{Ln} \frac{N}{N_0} = -\lambda.t \rightarrow -\text{Ln} \frac{N}{N_0} = \lambda.t \text{ . } \lambda \text{ est alors la pente de la droite linéaire } -\text{Ln} \frac{N}{N_0} = f(t).$$

$$\text{Graphiquement : } \lambda = \frac{0,375 - 0,125}{75 - 25} \text{ et } \lambda = 5.10^{-3} \text{ jour}^{-1}.$$

c - La période radioactive T d'un radionucléide est la durée au bout de laquelle le nombre de noyaux présents de ce radionucléide diminue de moitié.

$$T = \frac{\text{Ln}2}{\lambda} \text{ . A.N : } T = \frac{\text{Ln}2}{5.10^{-3}} \text{ et } T = 138,63 \text{ jour.}$$

$$d - N_0 = \frac{m_0 \cdot N}{M}. \quad A.N: \quad N_0 = \frac{4,2 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{210} \quad \text{et} \quad N_0 = 12,04 \cdot 10^{18} \text{ noyaux.}$$

Après 1 jour, le nombre de noyaux non désintégrés est

$$N(1) = 12,04 \cdot 10^{18} e^{-5 \cdot 10^{-3} \cdot 1} \quad \text{et} \quad N(1) = 11,98 \cdot 10^{18} \text{ noyaux.}$$

Le nombre de particules α formées est égal au nombre de noyaux désintégrés :

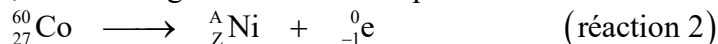
$$N(\alpha) = N_0 - N(1) = 12,04 \cdot 10^{18} - 11,98 \cdot 10^{18} \quad \text{et} \quad N(\alpha) = 6 \cdot 10^{16} \text{ particules.}$$

Exercice 2 :

1⁰) En bombardant un noyau de cobalt ${}_{27}^{59}\text{Co}$ naturel par un neutron, on obtient un noyau de cobalt ${}_{27}^{60}\text{Co}$:



Le ${}_{27}^{60}\text{Co}$ est radionucléide β^- , il se désintègre alors suivant l'équation :



a - Chacune des réactions 1 et 2 est-elle provoquée ou spontanée ?

b - Déterminer le nombre de charge Z et le nombre de masse A du noyau fils nickel Ni.

2⁰) La loi de la décroissance radioactive s'écrit : $N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t}$ où N_0 est le nombre initial de noyaux radioactifs, N est le nombre de noyaux radioactifs restant à l'instant t et λ la constante radioactive du radionucléide considéré.

Le suivi de la variation de la masse m (en gramme) d'un échantillon de ${}_{27}^{60}\text{Co}$ au cours du temps a permis de tracer la courbe ci-contre :

a - Trouver l'équation de la courbe : $\ln(m) = f(t)$.

b - On rappelle que : $m = \frac{M}{N} \cdot N$ où N est le nombre

d'Avogadro et M la masse molaire du ${}_{27}^{60}\text{Co}$.

Montrer que : $m(t) = m_0 e^{-\lambda \cdot t}$. Que représente m_0 ?

c - Déterminer les valeurs de m_0 et de λ . En déduire alors celle de la période radioactive T du ${}_{27}^{60}\text{Co}$.

d - Calculer la valeur de l'activité A de l'échantillon à la date t = 10 années.

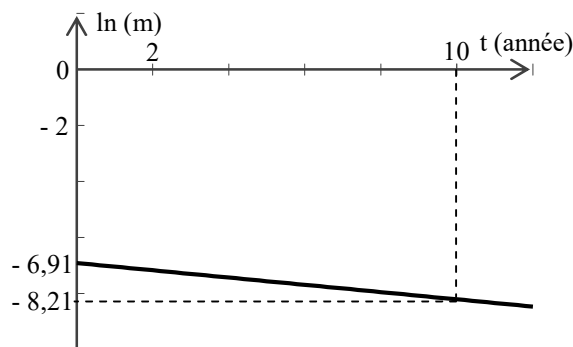
3⁰) Le noyau fils est émis dans un état excité, il revient à l'état fondamental en émettant un rayonnement γ dont l'énergie est $E_\gamma = 1,33 \text{ MeV}$. C'est ce rayonnement γ qui est utilisé en radiothérapie dans le traitement de certains cancers.

L'énergie libérée par la réaction de désintégration est $E = 4,7 \cdot 10^{-13} \text{ J}$

Cette énergie E est libérée sous forme de rayonnement β^- d'énergie E_β et de photons γ d'énergie E_γ .

Quelle est l'énergie E_β (en MeV) emportée par le rayonnement β^- ?

On donne : $M = 60 \text{ g.mol}^{-1}$; $N = 6,02 \cdot 10^{23}$; $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$



Réponse :

1⁰) a - * La réaction 1 est initiée par un choc entre un neutron et le noyau ${}_{27}^{59}\text{Co}$ (deux réactifs) donc elle est une réaction provoquée.

* Au cours de la réaction 2, le noyau ${}_{27}^{60}\text{Co}$ se désintègre de lui-même (un seul réactif) donc elle est une réaction spontanée.

b - Au cours de la réaction 2 :

La loi de conservation de la charge électrique : $27 = Z - 1 \rightarrow Z = 27 + 1 \quad \text{et} \quad Z = 28.$

La loi de conservation du nombre de nucléons : $60 = A + 0 \rightarrow A = 60.$

2⁰) a - Graphiquement, $\ln(m) = f(t)$ est une droite affine

$\rightarrow \ln(m) = a \cdot t + b$ avec :

$$\begin{cases} a = \frac{(-8,21) - (-6,91)}{10 - 0} & \text{et } a = -0,13 \text{ an}^{-1} & \text{donc } \ln(m) = -0,13.t - 6,91 \\ b = -6,91 \end{cases}$$

$$\mathbf{b} - m = \frac{M}{N^0} \cdot N \rightarrow m(t) = \frac{M}{N^0} \cdot N_0 e^{-\lambda \cdot t} \xrightarrow{m_0 = \frac{M}{N^0} \cdot N_0} m(t) = m_0 e^{-\lambda \cdot t}$$

$m_0 = \frac{M}{N^0} \cdot N_0$ représente la masse initiale de l'échantillon considéré.

$$\mathbf{c} - m(t) = m_0 e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \ln(m) = \ln(m_0) + \ln(e^{-\lambda \cdot t}) \quad \text{et} \quad \ln(m) = -\lambda \cdot t + \ln(m_0)$$

$$\begin{cases} \ln(m) = -\lambda \cdot t + \ln(m_0) \\ \ln(m) = -0,13 \cdot t - 6,91 \end{cases} \xrightarrow{\text{par identification}} \begin{cases} \lambda = 0,13 \text{ an}^{-1} \\ \ln(m_0) = -6,91 \end{cases} \rightarrow m_0 = e^{-6,91} \quad \text{et} \quad m_0 \approx 10^{-3} \text{ g}$$

$$\text{On a : } T = \frac{\ln(2)}{\lambda} \xrightarrow{A \cdot N} T = \frac{\ln(2)}{0,13} \quad \text{et} \quad T = 5,33 \text{ an.}$$

$$\mathbf{d} - \text{On a : } A(t) = \lambda \cdot N(t) \xrightarrow[\substack{N = \frac{m}{M} \\ m = \frac{M}{N^0} \cdot N}]{m = \frac{M}{N^0} \cdot N} A(t) = \lambda \cdot \frac{N^0}{M} \cdot m(t)$$

$$\text{à } t = 10 \text{ an, } \ln(m) = -8,21 \rightarrow m(10) = e^{-8,91} \quad \text{et} \quad m(10) = 2,72 \cdot 10^{-4} \text{ g.}$$

$$A \cdot N : A(10) = 0,13 \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{60} \cdot 2,72 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad A(10) = 35,48 \cdot 10^{16} \text{ désintégration} \cdot \text{an}^{-1}.$$

$$\text{Remarque : } A(t) = \lambda \cdot N(t) = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \lambda \cdot \frac{N^0}{M} \cdot m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

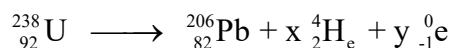
$$A \cdot N : A(10) = 0,13 \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{60} \cdot 10^{-3} \cdot e^{-0,13 \cdot 10} \quad \text{et} \quad A(10) = 35,55 \text{ désintégration} \cdot \text{an}^{-1}$$

$$\mathbf{3^0) } E = E_\beta + E_\gamma \rightarrow E_\beta = E - E_\gamma$$

$$A \cdot N : E_\beta = \frac{4,7 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-13}} - 1,33 \quad \text{et} \quad E_\beta = 1,61 \text{ MeV.}$$

Exercice 3 :

1⁰) L'uranium ${}_{92}^{238}\text{U}$ se transforme, par désintégrations successives, en plomb ${}_{82}^{206}\text{Pb}$ selon le schéma global suivant :



a - En précisant les lois de conservation utilisées, déterminer la valeur de x et celle de y.

b - Définir l'énergie de liaison d'un noyau.

c - Calculer l'énergie de liaison par nucléon $E_{\text{A}}(U)$ de l'uranium.

d - Sachant que celle du plomb est $E_{\text{A}}(\text{Pb}) = 7,58 \text{ MeV/nucléon}$, comparer alors la stabilité de ces deux noyaux. Ce résultat est-il prévisible ?

2⁰) La première désintégration de l'uranium ${}_{92}^{238}\text{U}$ conduit au thorium ${}_{90}^{234}\text{Th}$.

a - Ecrire l'équation de cette désintégration.

b - Calculer l'énergie E libérée lors de la désintégration d'un noyau d'uranium.

c - Le rapport des énergies cinétiques des produits de la désintégration vérifie la relation :

$$\frac{E_{\text{C}\alpha}}{E_{\text{CTh}}} = \frac{m(\text{Th})}{m(\alpha)}$$

Calculer $E_{\text{C}\alpha}$. On supposera que toute l'énergie libérée est sous forme cinétique.

d - En fait, parmi les particules émises il y a celles qui ont une énergie cinétique $E_{\text{C}\alpha} = 4,122 \text{ MeV}$ et les autres une énergie cinétique $E_{\text{C}2\alpha} = 4,107 \text{ MeV}$. Interpréter ce résultat et calculer la longueur d'onde λ de la radiation qui accompagne la désintégration.

3⁰) La courbe ci-contre traduit la variation du nombre de noyaux d'uranium $^{238}_{92}\text{U}$ dans un échantillon au cours du temps :

a - La loi de la décroissance radioactive s'écrit

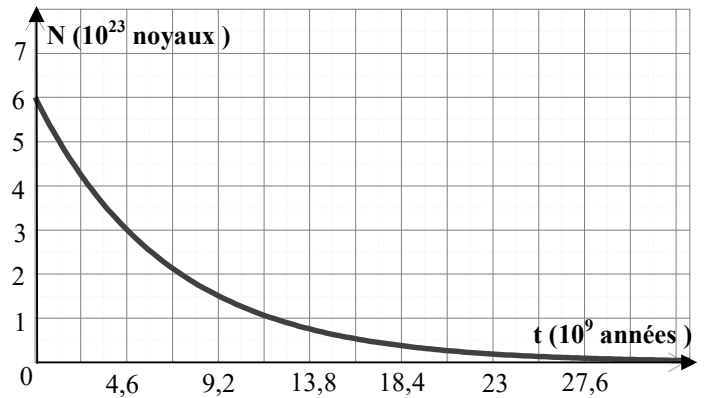
$$N_t(\text{U}) = N_0(\text{U})e^{-\lambda \cdot t}$$

Que représentent les termes N_t , N_0 et λ ?

b - Déterminer graphiquement les valeurs de $N_0(\text{U})$ et λ .

c - Définir l'activité de l'échantillon considéré et calculer sa valeur A_0 à l'instant $t = 0$.

4⁰) La période radioactive de l'uranium $^{238}_{92}\text{U}$ est $T = 4,6 \cdot 10^9$ années.



En supposant qu'une roche ne contient pas initialement de plomb $^{206}_{82}\text{Pb}$, on se propose de calculer son âge en déterminant la masse d'uranium $m_t(\text{U})$ et la masse de plomb $m_t(\text{Pb})$ qu'elle contient à l'instant t

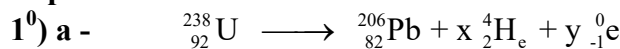
a - Montrer que le nombre de noyaux de plomb $N_t(\text{Pb})$ présents dans la roche à l'instant t s'écrit :

$$N_t(\text{Pb}) = N_t(\text{U}) \cdot (e^{\lambda \cdot t} - 1)$$

b - Sachant que : $\frac{m_t(\text{U})}{m_t(\text{Pb})} = 37$, déterminer l'âge de la roche .

On donne : $m_n = 1,00866 \text{ u}$; $m_p = 1,00727 \text{ u}$; $m(\alpha) = 4,0015 \text{ u}$; $m(\text{U}) = 238,0598 \text{ u}$; $m(\text{Th}) = 234,0538 \text{ u}$; $m(\text{Pb}) = 205,9935 \text{ u}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$; $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$; $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Réponse :



La loi de conservation de la charge électrique : $92 = 82 + 16 - y \rightarrow y = 92 - 82 - 16$ et $y = 6$.

La loi de conservation du nombre de nucléons : $238 = 206 + 4 \cdot x \rightarrow x = \frac{238 - 206}{4}$ et $x = 8$.

b - L'énergie de liaison d'un noyau est l'énergie libérée lors de la formation de ce noyau, immobile, à partir de ses nucléons pris séparément et au repos.

c - $E_{\text{lia}}(\text{U}) = \frac{E_l(\text{U})}{A} \xrightarrow{E_l(\text{U}) = \Delta m \cdot c^2} E_{\text{lia}}(\text{U}) = \frac{\Delta m \cdot c^2}{A}$

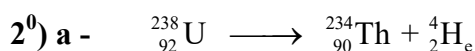
$\Delta m = (92 \cdot m_p + 146 \cdot m_n) - m(\text{U}) \xrightarrow{A \cdot N} \Delta m = (92 \cdot 1,00727 + 146 \cdot 1,00866) - 238,0598$ et $\Delta m = 1,8734 \text{ u}$

$A \cdot N : E_{\text{lia}}(\text{U}) = \frac{1,8734 \cdot 931,5}{238}$ et $E_{\text{lia}}(\text{U}) = 7,33 \text{ MeV/nucléon}$.

d - $E_{\text{lia}}(\text{Pb}) = 7,58 \text{ MeV/nucléon} \xrightarrow{E_{\text{lia}}(\text{U}) = 7,33 \text{ MeV/nucléon}} E_{\text{lia}}(\text{Pb}) > E_{\text{lia}}(\text{U})$

Le plomb $^{206}_{82}\text{Pb}$ est donc plus stable que l'uranium $^{238}_{92}\text{U}$.

Ce résultat est prévisible puisque l'uranium $^{238}_{92}\text{U}$ se désintègre spontanément pour former le plomb $^{206}_{82}\text{Pb}$.



b - $E = \Delta m \cdot c^2$ où Δm est le défaut de masse qui accompagne la désintégration .

$\Delta m = [m(\text{U})] - [m(\text{Th}) + m(\alpha)] \xrightarrow{A \cdot N} \Delta m = (238,0598) - (234,0538 + 4,0015)$ et $\Delta m = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ u}$

$A \cdot N : E = 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 931,5$ et $E = 4,192 \text{ MeV}$.

c - $E = E_c(\alpha) + E_c(\text{Th}) = E_c(\alpha) + E_c(\alpha) \cdot \frac{m(\alpha)}{m(\text{Th})} = E_c(\alpha) \cdot \left[1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Th})}\right] \rightarrow E_c(\alpha) = \frac{E}{1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Th})}}$

$$\text{A.N : } E_c(\alpha) = \frac{4,192}{1 + \frac{4,0015}{234,0538}} \quad \text{et} \quad E_c(\alpha) = 4,122 \text{ MeV}.$$

d - La désintégration s'accompagne de l'émission d'un rayonnement γ d'énergie w .

$$E'_c(\alpha) = \frac{E - w}{1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Th})}} \rightarrow w = E - E'_c(\alpha) \cdot \left[1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Th})} \right] = \left[1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Th})} \right] \cdot \left(\frac{E}{1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Th})}} - E'_c(\alpha) \right)$$

$$\text{et } w = \left[1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Th})} \right] \cdot (E_c(\alpha) - E'_c(\alpha)). \quad \text{A.N :}$$

$$w = \left[1 + \frac{4,0015}{234,0538} \right] \cdot (4,122 - 4,107) \quad \text{et} \quad w = 15,26 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}.$$

$$\text{On a : } w = \frac{h \cdot c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{w}.$$

$$\text{A.N : } \lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{15,26 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}} \quad \text{et} \quad \lambda = 0,815 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

$$3^0) \text{ a - } N_t(\text{U}) = N_0(\text{U}) e^{-\lambda \cdot t}$$

$N_t(\text{U})$: nombre de noyaux présents à l'instant t dans l'échantillon.

$N_0(\text{U})$: nombre de noyaux présents à l'instant $t = 0$ dans l'échantillon.

λ : constante radioactive du radionucléide considéré.

b - graphiquement :

$$* N_0(\text{U}) = 6 \cdot 10^{23} \text{ noyaux}.$$

$$* \text{ Soit } T \text{ la période radioactive. On a : } N_T(\text{U}) = \frac{N_0(\text{U})}{2} \xrightarrow[\text{graphiquement}]{N_T(\text{U}) = 3 \cdot 10^{23} \text{ noyaux}} T = 4,6 \cdot 10^9 \text{ an}.$$

$$\text{On a : } T = \frac{\ln(2)}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{T}. \quad \text{A.N : } \lambda = \frac{\ln(2)}{4,6 \cdot 10^9} \quad \text{et} \quad \lambda = 0,15 \cdot 10^{-9} \text{ an}^{-1}.$$

c - L'activité de l'échantillon à l'instant t est le nombre de désintégration par unité de temps à l'instant t .

$$A_0(\text{U}) = \lambda \cdot N_0(\text{U}) \xrightarrow{\text{A.N}} A_0(\text{U}) = 0,15 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^{23} \quad \text{et} \quad A_0(\text{U}) = 9 \cdot 10^{13} \text{ désintégration} \cdot \text{an}^{-1}.$$

$$4^0) \text{ a - } N_t(\text{Pb}) = N_0(\text{U}) - N_t(\text{U}) \xrightarrow[N_0(\text{U}) = N_t(\text{U}) \cdot e^{\lambda \cdot t}]{N_t(\text{U}) = N_0(\text{U}) \cdot e^{-\lambda \cdot t}} N_t(\text{Pb}) = N_t(\text{U}) \cdot e^{\lambda \cdot t} - N_t(\text{U})$$

$$\text{et } N_t(\text{Pb}) = N_t(\text{U}) \cdot (e^{\lambda \cdot t} - 1).$$

$$\text{b - } \frac{m_t(\text{U})}{m_t(\text{Pb})} = \frac{\frac{M(\text{U})}{N} \cdot N_t(\text{U})}{\frac{M(\text{Pb})}{N} \cdot N_t(\text{Pb})} = \frac{M(\text{U})}{M(\text{Pb})} \cdot \frac{N_t(\text{U})}{N_t(\text{Pb})} \xrightarrow{N_t(\text{Pb}) = N_t(\text{U}) \cdot (e^{\lambda \cdot t} - 1)} \frac{m_t(\text{U})}{m_t(\text{Pb})} = \frac{M(\text{U})}{M(\text{Pb})} \cdot \frac{1}{(e^{\lambda \cdot t} - 1)}$$

$$e^{\lambda \cdot t} - 1 = \frac{M(\text{U})}{M(\text{Pb})} \cdot \frac{m_t(\text{Pb})}{m_t(\text{U})} \rightarrow e^{\lambda \cdot t} = \frac{M(\text{U})}{M(\text{Pb})} \cdot \frac{m_t(\text{Pb})}{m_t(\text{U})} + 1 \rightarrow \lambda \cdot t = \ln \left[\frac{M(\text{U})}{M(\text{Pb})} \cdot \frac{m_t(\text{Pb})}{m_t(\text{U})} + 1 \right]$$

$$\text{et } t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left[\frac{M(\text{U})}{M(\text{Pb})} \cdot \frac{m_t(\text{Pb})}{m_t(\text{U})} + 1 \right]. \quad \text{A.N : } t = \frac{1}{0,15 \cdot 10^{-9}} \cdot \ln \left[\frac{238}{206} \cdot \frac{1}{37} + 1 \right] \quad \text{et} \quad t = 2 \cdot 10^8 \text{ an}.$$

$$\text{Remarque : } t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left[\frac{m(\text{U})}{m(\text{Pb})} \cdot \frac{m_t(\text{Pb})}{m_t(\text{U})} + 1 \right] = \frac{1}{0,15 \cdot 10^{-9}} \cdot \ln \left[\frac{238,0598}{205,9935} \cdot \frac{1}{37} + 1 \right] \quad \text{et} \quad t = 2 \cdot 10^8 \text{ an}.$$

Exercice 4 :

Le Bismuth $^{212}_{83}\text{Bi}$ est radioactif α .

Une source de Bi, contenant 0,05 g de ce radioélément, produit $1,89 \cdot 10^{17}$ désintégration en 7,0 s.

1⁰) Calculer, en Bq, l'activité de la source.

2⁰) En déduire la constante et la période radioactive du Bi.

3⁰) Calculer le volume d'hélium, dans les conditions normales, produit en 1 minute par cette source en supposant que son activité reste constante.

On donne : $\mathcal{N}^\circ = 6,023 \cdot 10^{23}$; $V_M = 22,4 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Réponse :

$$1^0) A = \frac{1,89 \cdot 10^{17}}{7,0} \quad \text{et} \quad A = 27 \cdot 10^{15} \text{ Bq.}$$

$$2^0) A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot \mathcal{N}^\circ \cdot n = \lambda \cdot \mathcal{N}^\circ \cdot \frac{m}{M} \rightarrow \lambda = \frac{A \cdot M}{\mathcal{N}^\circ \cdot m} \quad A \cdot N : \lambda = \frac{27 \cdot 10^{15} \cdot 212}{6,023 \cdot 10^{23} \cdot 0,05} \quad \text{et} \quad \lambda = 19 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

$$T = \frac{\ln(2)}{\lambda} \xrightarrow{A \cdot N} T = \frac{\ln(2)}{19 \cdot 10^{-5}} \quad \text{et} \quad T = 3648 \text{ s.}$$

$$3^0) A = -\frac{dN(\text{Bi})}{dt} \rightarrow \frac{dN(\text{Bi})}{dt} = -A \xrightarrow{A=\text{constante}} N(\text{Bi}) = -A \cdot t + N_0(\text{Bi})$$

$$N(\alpha) = N_0(\text{Bi}) - N(\text{Bi}) \rightarrow N(\alpha) = A \cdot t.$$

$$N(\alpha) = A \cdot t \rightarrow \mathcal{N}^\circ \cdot n(\alpha) = A \cdot t \rightarrow \mathcal{N}^\circ \cdot \frac{V(\alpha)}{V_M} = A \cdot t \quad \text{et} \quad V(\alpha) = \frac{A \cdot t \cdot V_M}{\mathcal{N}^\circ}.$$

$$A \cdot N : V(\alpha) = \frac{27 \cdot 10^{15} \cdot 60 \cdot 22,4}{6,023 \cdot 10^{23}} \quad V(\alpha) = 6 \cdot 10^{-5} \text{ L.}$$

Exercice 5 :

Le sodium 24 est radioactif par émission β^- et sa période est $T = 15$ heures.

1⁰) On injecte, dans le sang d'un individu, un volume $V_0 = 10 \text{ cm}^3$ d'une solution contenant initialement du sodium 24 à la concentration $C = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

a - Calculer le nombre de moles n_0 de sodium 24 introduites dans le sang.

b - Déterminer le nombre de moles n de sodium 24 qui reste au bout de 6 heures.

2⁰) Au bout de 6 heures, on prélève $V = 10 \text{ cm}^3$ de sang du même individu.

On trouve alors $n' = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ mol}$ de sodium 24.

En supposant que le sodium 24 est réparti uniformément, calculer le volume sanguin V_s de l'individu.

Réponse :

$$1^0) \text{ a - } n_0 = C \cdot V \xrightarrow{A \cdot N} n_0 = 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad n_0 = 10^{-5} \text{ mol.}$$

$$\text{b - La loi de la décroissance radioactive : } N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{\mathcal{N}^\circ} = \frac{N_0}{\mathcal{N}^\circ} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \xrightarrow{\lambda = \frac{\ln(2)}{T}} n = n_0 \cdot e^{-\ln(2) \cdot \frac{t}{T}}$$

$$\text{A } t = 6 \text{ heure, } n = 10^{-5} \cdot e^{-\ln(2) \cdot \frac{6}{15}} \quad \text{et} \quad n = 0,76 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

$$2^0) \text{ Le sodium 24 étant réparti uniformément dans le sang : } \frac{n}{V_s} = \frac{n'}{V} \rightarrow V_s = \frac{n}{n'} \cdot V$$

$$A \cdot N : V_s = \frac{0,76 \cdot 10^{-5}}{1,5 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad V_s = 5,07 \text{ L.}$$

Etude d'un texte documentaire :

Exercice 1 :

La datation au carbone 14

La datation au carbone 14 est basée sur la mesure de l'activité radiologique du carbone 14 contenu dans toute matière organique. Elle permet de déterminer l'intervalle de temps écoulé depuis la mort de l'organisme à dater.

Le carbone 14 ($^{14}_6\text{C}$) ou radiocarbone est un isotope radioactif du carbone dont la période radioactive est égale à 5730 ans. Un organisme vivant assimile le carbone sans distinction isotopique, la proportion de C14 par rapport au carbone C total ($^{12}_6\text{C}$, $^{13}_6\text{C}$ et $^{14}_6\text{C}$) étant la même que celle existant dans l'atmosphère du moment. La datation par carbone 14 se fonde ainsi sur la présence, dans tout organisme vivant, de radiocarbone en infime proportion (de l'ordre de 10^{-12} pour le rapport $^{14}_6\text{C}/\text{C total}$). A partir de l'instant où meurt un organisme, les échanges avec l'extérieur cessant, la quantité de radiocarbone qu'il contient décroît au cours du temps selon une loi exponentielle connue (désintégration naturelle des atomes de carbone 14). Un échantillon de matière organique issu de cet organisme peut donc être daté en mesurant le rapport $^{14}_6\text{C}/\text{C total}$. Dater un échantillon de matière organique consiste à mesurer le rapport $^{14}_6\text{C}/\text{C total}$ et à en déduire son âge...

Signalons que les échantillons vieux de plus de 50000 ans ne peuvent être datés au carbone 14 car le rapport $^{14}_6\text{C}/\text{C total}$ est alors trop faible pour être mesuré par les techniques actuelles.

www.ciram-art.com

Questions :

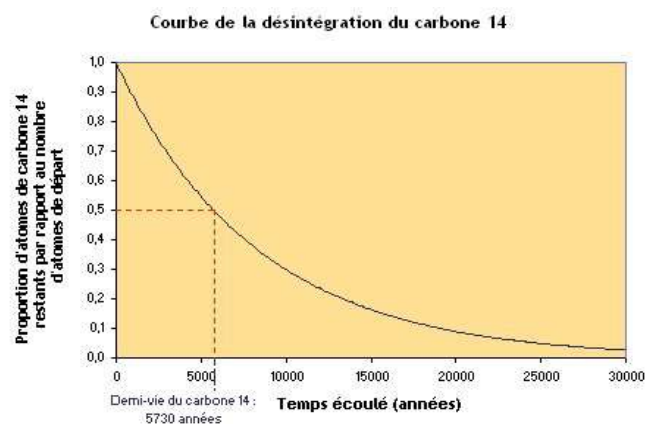
1⁰) a - Sur quoi est basée la datation au carbone 14 ?

b - D'après le texte, la période radioactive du carbone 14 est de 5730 ans. Que représente cette durée ?

2⁰) a - Citer, à partir du texte, un passage indiquant que Dans un organisme vivant la proportion de C 14 par rapport au carbone C total est constante.

b - D'après le texte, l'âge d'un organisme représente la durée de vie de cet organisme ou l'intervalle de temps écoulé depuis sa mort ? Justifier la réponse.

3⁰) Pourquoi ne peut-on pas dater des échantillons vieux de plus de 50000 ans ?



Réponse :

1⁰) a - La datation au carbone 14 est basée sur la mesure de l'activité radiologique du carbone 14 contenu dans toute matière organique.

b - La période radioactive représente la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux initialement présents se désintègre.

2⁰) a - « Un organisme vivant assimile le carbone sans distinction isotopique, la proportion de C14 par rapport au carbone C total ($^{12}_6\text{C}$, $^{13}_6\text{C}$ et $^{14}_6\text{C}$) étant la même que celle existant dans l'atmosphère du moment. »

b - D'après le texte l'âge d'un organisme représente l'intervalle de temps écoulé depuis sa mort. « ... Elle permet de déterminer l'intervalle de temps écoulé depuis la mort de l'organisme à dater »

3⁰) Les échantillons vieux de plus de 50000 ans ne peuvent être datés au carbone 14 car le rapport $^{14}_6\text{C}/\text{C total}$ est alors trop faible pour être mesuré par les techniques actuelles.

Exercice 2 :

Polonium 210 : L'assassin qui dévore les globules rouges.

Le Polonium 210 ($^{210}_{84}\text{Po}$) est mille fois plus toxique que le plutonium et un million de fois plus que le cyanure : un seul centième de milligramme (10 microgrammes) suffit à tuer en quelques semaines un homme

de poids moyen; une dose évidemment invisible à l'œil nu, indétectable par la police (la radioactivité alpha est arrêtée par une simple feuille de papier, ou quelques centimètres d'air). Mais une dose à manipuler avec moult précautions quand on souhaite s'en servir pour éliminer quelqu'un.

Il faut de plus faire vite car le Polonium perd la moitié de sa radioactivité tous les 138 jours. C'est-à-dire que pour une efficacité optimale (de l'échantillon) il doit avoir été récemment fabriqué par irradiation du bismuth dans un réacteur nucléaire.

Après l'ingestion du poison, il passe de l'estomac dans la circulation sanguine. Chaque atome de Polonium est alors porteur d'un projectile alpha expulsé à grande vitesse : de quoi littéralement griller toutes les cellules de l'organisme, les globules rouges en premier, et causer une mort dite "multifactorielle".

Ce redoutable métal est pourtant omniprésent dans la nature, produit en permanence par la désintégration de l'uranium et du thorium, qui abondent dans la croûte terrestre. Si bien qu'on le trouve à l'état de traces dans tout organisme humain. »

D'après Fabien Gruhier- Nouvel Observateur 11-17 Janvier 2007

Questions :

1⁰) a - Préciser le type de rayonnement radioactif émis par le polonium 210.

b - Quelle est la période radioactive T du polonium 210 ?

2⁰) Justifier, d'après le texte, que :

a - Le polonium 210 n'est pas dangereux hors de l'organisme humain.

b - Le polonium 210 devient très dangereux lorsqu'il passe à l'intérieur de l'organisme humain.

3⁰) Le polonium 210 est-il un radioélément artificiel ou naturel ? Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰) a - Le polonium 210 émet un rayonnement α .

b - La période radioactive du polonium 210 est $T = 138$ jours.

2⁰) a - la radioactivité alpha est arrêtée par une simple feuille de papier, ou quelques centimètres d'air.

b - Chaque atome de Polonium est alors porteur d'un projectile alpha expulsé à grande vitesse : de quoi littéralement griller toutes les cellules de l'organisme.

3⁰) Le polonium 210 est un radioélément naturel puisqu'il est omniprésent dans la nature.

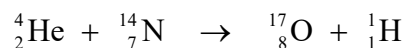
LES RÉACTIONS NUCLÉAIRES PROVOQUÉES

I / Introduction :

Après avoir découverts et étudiés la radioactivité qui est une réaction nucléaire spontanée, les physiciens ont montrés qu'ils pouvaient eux mêmes provoquer des réactions nucléaires en bombardant des noyaux cibles par des projectiles.

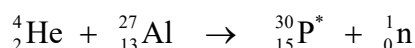
Les réactions nucléaires provoquées sont appelées **transmutations**.

La première réaction nucléaire provoquée fut réalisée par Rutherford en 1919 :



Cette transmutation est symbolisée par : ${}_7^{14}(\alpha, \text{P}) {}_8^{17}\text{O}$.

En 1934, la découverte de la radioactivité artificielle était la conséquence de la transmutation :



Le ${}_{15}^{30}\text{P}^*$ est un radioélément artificiel : ${}_{15}^{30}\text{P}^* \rightarrow {}_{14}^{30}\text{Si} + \beta^+ + \gamma$

II / Propriétés des transmutations :

La transmutation est caractérisée par un choc entre un noyau projectile et un noyau cible qui engendre de nouveaux noyaux.

Remarques :

- Les noyaux projectiles sont des particules légères (${}_2^4\text{He}$, ${}_0^1\text{n}$, ${}_1^1\text{H}$...).
- Les transmutations ont aboutis à la fabrication de nucléides artificiels tous radioactifs.

Au cours d'une réaction nucléaire provoquée, il y a :

- conservation du nombre de nucléons et conservation de la charge électrique.
- conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale du système.

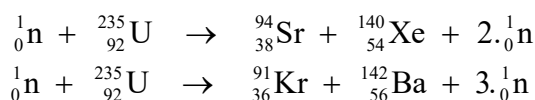
III / Fission et Fusion nucléaires :

1⁰) La fission :

a - Procédure :

Un noyau lourd, bombardé par un neutron, peut se briser en donnant deux noyaux plus légers et libérer d'autres neutrons : c'est la fission nucléaire.

Exemples :

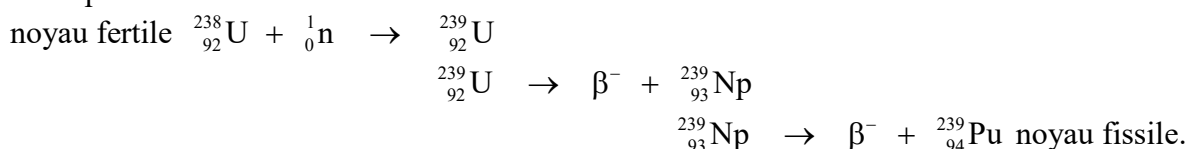


Le seul noyau fissile naturel est le ${}_{92}^{235}\text{U}$ mais il existe plusieurs noyaux fissiles artificiels (${}_{92}^{233}\text{U}$, ${}_{94}^{239}\text{Pu}$).

Remarque :

Les noyaux dits **fertiles**, peuvent par réaction nucléaire, donner des noyaux fissiles.

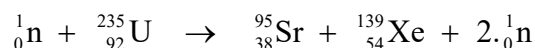
Exemple :



b - Aspect énergétique :

La fission nucléaire est **très énergétique**.

Exemple :

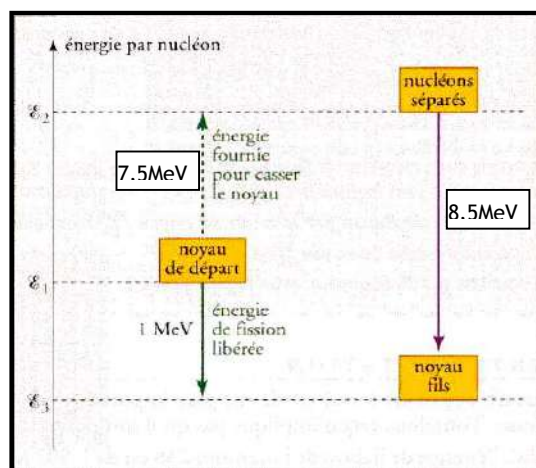


- formation de Xe : $8,2 \cdot 139 = 1139,8 \text{ MeV}$
- formation de Sr : $8,5 \cdot 95 = 807,5 \text{ MeV}$
- désintégration de U : $- 7,5 \cdot 235 = - 1762,5 \text{ MeV}$

Bilan énergétique par noyau de U = 184,8 MeV

Utilisation de la courbe d'Aston

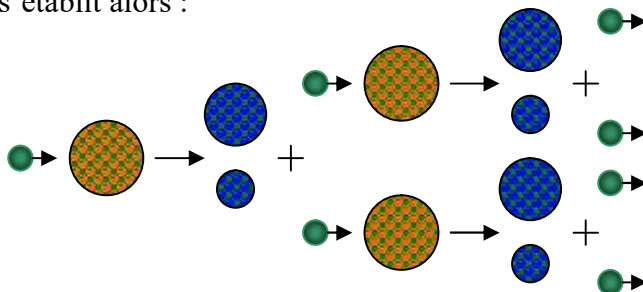
- La courbe d'Aston nous indique que la dissociation du noyau d'uranium 235 en nucléons isolés et au repos nécessite l'apport de 7,5 MeV par nucléon.
- Si ce noyau père se désintègre en noyaux fils se situant au minimum de la courbe d'Aston, une énergie d'environ 8,5 MeV par nucléon serait libérée.
- La différence entre l'énergie à apporter et celle libérée serait de 1 MeV par nucléon, soit environ 200 MeV par noyau d'uranium ayant subi la fission.
- A titre de comparaison, la fission d'1g d'uranium 235 libère autant d'énergie que 1,8 t de pétrole.



c - La réaction en chaîne :

Les neutrons produits par une fission peuvent engendrer d'autres fissions qui produisent d'autres neutrons et ainsi de suite ...

Une réaction en chaîne s'établit alors :



La réaction en chaîne ne s'amorce que si la masse disponible de ${}_{92}^{235}\text{U}$ dépasse une certaine valeur appelée **masse critique** (de l'ordre d'une dizaine de Kg).

Remarque :

Le bilan énergétique de la réaction en chaîne est immensément grand.

La réaction en chaîne peut prendre :

- une allure contrôlée : où l'énergie de la réaction en chaîne est mise sous contrôle (centrale nucléaire)
- une allure emballée : qui conduit à l'explosion nucléaire (bombe atomique).

Application 1 :

Soit la réaction de fission : ${}_0^1\text{n} + {}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{38}^{94}\text{Sr} + {}_{54}^{140}\text{Xe} + 2.{}_0^1\text{n}$

Les énergies de liaison par nucléon (en MeV/nucléon) de ces noyaux sont:

$E({}_{92}^{235}\text{U}) = 7,590$; $E({}_{54}^{140}\text{Xe}) = 8,290$; $E({}_{38}^{94}\text{Sr}) = 8,593$.

1⁰) Calculer les énergies de liaison des noyaux en MeV.

2⁰) Calculer la variation d'énergie de masse du système au cours de cette réaction. Cette énergie est-elle reçue ou libérée par le système ?

3⁰) Calculer la variation de masse au cours de cette réaction. Est-ce un gain ou une perte de masse ?

Réponse :

$$1^0) E_1({}^{235}_{92}\text{U}) = 7,590 \times 235 = 1783,650 \text{ MeV.}$$

$$E_1({}^{140}_{54}\text{Xe}) = 8,290 \times 140 = 1160,600 \text{ MeV.}$$

$$E_1({}^{94}_{38}\text{Sr}) = 8,593 \times 94 = 807,742 \text{ MeV.}$$

$$2^0) \Delta E = \Delta m \cdot C^2 = \left[(m(\text{Sr}) + m(\text{Xe}) + 2m_n) - (m(\text{U}) + m_n) \right] \cdot C^2$$

On a : $E_1({}^A_Z\text{X}) = (Zm_p + (A - Z)m_n - m(\text{X})) \cdot C^2$, on écrit alors :

$$\Delta E = \left[\left(\left(38m_p + 56m_n - \frac{E_1({}^{94}_{38}\text{Sr})}{C^2} \right) + \left(54m_p + 86m_n - \frac{E_1({}^{140}_{54}\text{Xe})}{C^2} \right) + 2m_n \right) - \left(\left(92m_p + 143m_n - \frac{E_1({}^{235}_{92}\text{U})}{C^2} \right) + m_n \right) \right] \cdot C^2$$

$$\Delta E = \left[\left(-\frac{E_1({}^{94}_{38}\text{Sr})}{C^2} \right) + \left(-\frac{E_1({}^{140}_{54}\text{Xe})}{C^2} \right) - \left(-\frac{E_1({}^{235}_{92}\text{U})}{C^2} \right) \right] \cdot C^2 \rightarrow \Delta E = E_1({}^{235}_{92}\text{U}) - E_1({}^{94}_{38}\text{Sr}) - E_1({}^{140}_{54}\text{Xe})$$

$$\text{A.N : } \Delta E = 1783,650 - 807,742 - 1160,600 \text{ et } \Delta E = -184,692 \text{ MeV.}$$

Cette énergie est libérée par le système.

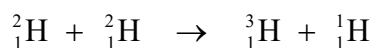
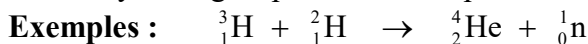
$$3^0) \Delta m(u) = \frac{\Delta E(\text{MeV})}{931,5} \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta m = -\frac{184,692}{931,5} \text{ et } \Delta m = -0,198 \text{ u.}$$

Cette perte de masse correspond à l'énergie de masse libérée.

2⁰) La fusion :

a - Procédure :

Deux noyaux légers peuvent s'unir pour former un noyau plus lourd.



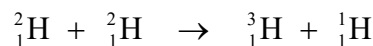
Remarque :

Les réactions de fusion ne peuvent s'effectuer qu'à très hautes températures ($T \sim 10^8 \text{ K}$) ; on parle alors de réaction thermonucléaire.

b - Aspect énergétique :

La réaction de fusion est **très énergétique** :

Exemple :



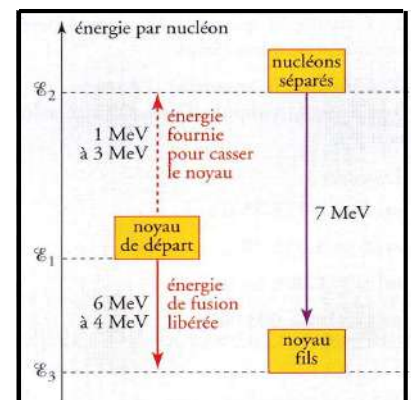
- formation de ${}^3_1\text{H}$: $2,83 \cdot 3 = 8,49 \text{ MeV}$

- désintégration de ${}^2_1\text{H}$: $(-1,11 \cdot 2) \cdot 2 = -4,44 \text{ MeV}$

Bilan énergétique par noyau de ${}^3_1\text{H}$ = 4,05 MeV

Utilisation de la courbe d'Aston

- La courbe d'Aston nous indique que la dissociation de noyaux légers comme le deutérium (${}^2_1\text{H}$) ou le tritium (${}^3_1\text{H}$) en nucléons isolés et au repos nécessite l'apport de 1 à 3 MeV par nucléon.
- Si ces nucléons isolés se réunissaient pour former un noyau plus lourd comme l'hélium (${}^4_2\text{He}$), une énergie d'environ 7 MeV par nucléon serait libérée.
- La différence entre l'énergie à apporter et celle libérée serait de 4 à 6 MeV par nucléon.
- A titre de comparaison, la fusion d'1 g de tritium libère autant d'énergie que 13,5 t de pétrole.



Remarques :

- La fusion nucléaire, très énergétique, demande une très haute température pour s'amorcer ; on atteint cette température par explosion d'une bombe atomique.
- Le soleil est un énorme **réacteur thermonucléaire** dont le combustible est l'hydrogène :



C'est la fusion de l'hydrogène en hélium qui est à l'origine de l'énergie solaire.

Application 2 :

Soit la réaction de fusion : $4\cdot {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2\cdot {}^A_Z\text{X}$

1⁰) Identifier la particule ${}^A_Z\text{X}$.

2⁰) On donne :

$m_{\text{H}} = 1,0073 \text{ u}$; $m_{\text{X}} = 0,0005 \text{ u}$; $m_{\text{He}} = 4,0015 \text{ u}$.

Calculer la perte de masse. En déduire l'énergie libérée.

Réponse :

1⁰) Conservation du nombre de nucléons $\rightarrow 4.1 = 4 + 2.A \rightarrow A = 0$

Conservation de la charge électrique $\rightarrow 4.1 = 2 + 2.Z \rightarrow Z = 1$

La particule ${}^A_Z\text{X}$ est alors un positon ${}^0_1\text{e}$

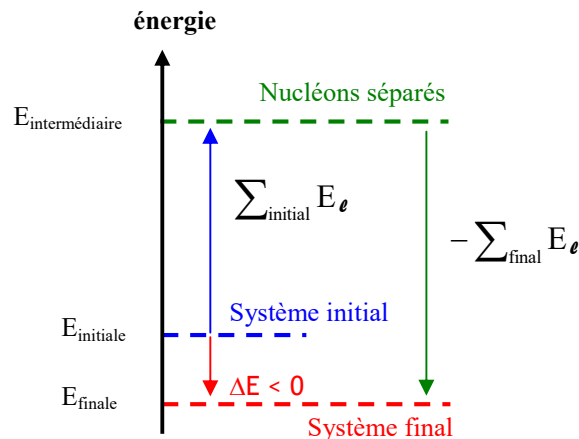
2⁰) La perte de masse $|\Delta m| = \left| \left(m({}^4_2\text{He}) + 2m({}^0_1\text{e}) \right) - 4m({}^1_1\text{H}) \right|$

A.N : $|\Delta m| = |4,0015 + 2.0,0005 - 4.1,0073|$ et $|\Delta m| = 0,0267 \text{ u}$.

L'énergie libérée correspondante sera : $|\Delta E| (\text{Mev}) = |\Delta m| (\text{u}). 931,5$

A.N : $|\Delta E| = 0,0267.931,5$ et $|\Delta E| = 24,871 \text{ MeV}$.

3⁰) Bilan énergétique d'une réaction nucléaire :



- Conformément au principe de conservation de l'énergie, l'énergie libérée se trouve, dans un premier temps, répartie essentiellement sous forme cinétique entre les produits de la réaction ; elle est ensuite transférée au milieu extérieur lorsque ceux-ci reviennent au repos.
- D'après la relation d'équivalence masse - énergie, une réaction nucléaire s'accompagne toujours d'une diminution de la masse du système.

Pour en savoir plus

1⁰) La fission nucléaire :

a - Le phénomène de fission :

La fission est une réaction nucléaire au cours de laquelle un noyau lourd se scinde en deux ou en plusieurs autres noyaux plus légers. Cette réaction nucléaire s'accompagne de l'émission de neutrons.

Il y a deux types de fission nucléaire :

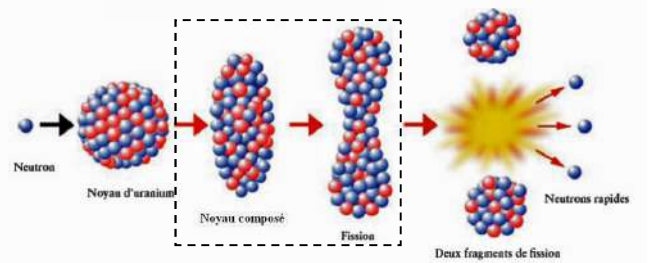
* La fission spontanée : Un noyau lourd instable se désintègre spontanément et aléatoirement en d'autres noyaux plus légers et plus stables. C'est un phénomène naturel extrêmement rare.

* La fission induite : Un neutron est capturé par un noyau lourd appelé noyau fissile. Le noyau ainsi formé, appelé noyau composé, est très instable (10^{-22} s) et se fragmente immédiatement en deux autres noyaux plus légers et plus stables (généralement de tailles différentes) avec émission de neutrons (généralement 2 ou 3).

Cette réaction nucléaire provoquée s'accompagne d'un important dégagement d'énergie.

Le seul noyau fissile naturel est l'uranium 235. Cet isotope est présent en faible proportion (0,7 %) dans les minerais d'uranium.

Il existe des noyaux fissiles artificiels (produits dans les laboratoires) fabriqués à partir de noyaux appelés noyaux fertiles (comme l'uranium 233 généré à partir du thorium 232 ou le plutonium 239 généré à partir de l'uranium 238).



b - Le bilan énergétique :

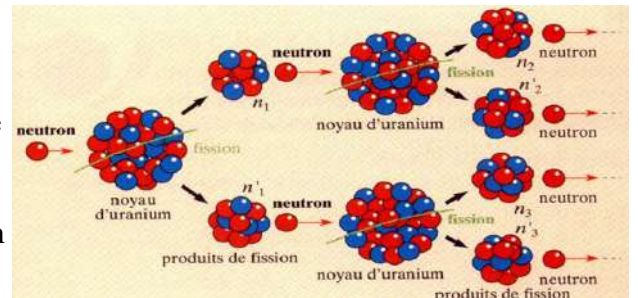
La fission d'un noyau d'uranium 235 libère en moyenne une énergie de 0,8 MeV par nucléon, soit une énergie de 188 MeV par noyau d'uranium 235. Cette énergie est colossale comparée à l'énergie dégagée dans les réactions chimiques (la fission d'un noyau d'uranium 235 libère autant d'énergie que la combustion de 33 millions d'atomes de carbone).

c - La réaction en chaîne :

Quand un noyau fissile absorbe un neutron primaire, il subit une fission en se fragmentant en deux noyaux plus légers avec émission de deux ou trois neutrons secondaires.

Chacun de ces neutrons éjectés peut être à son tour absorbé par un autre noyau fissile qui subira la fission et ainsi de suite ... une réaction en chaîne s'établit.

La réaction en chaîne ne s'établit que si au moins un neutron émis lors d'une fission provoque une nouvelle fission.



Remarques :

- Dans une réaction en chaîne non contrôlée, le nombre de neutrons émis croît de manière exponentielle. Cette réaction prend alors une allure emballée et l'énorme énergie dégagée provoque une explosion (c'est le cas d'une bombe atomique).
- Dans une réaction en chaîne contrôlée, on introduit dans le système nucléaire des noyaux qui possèdent la propriété d'absorber les neutrons (Bore, Cadmium). On contrôle ainsi le nombre de fissions de noyaux d'uranium 235 ainsi que la quantité d'énergie produite.

Un système nucléaire, où se déroule une réaction de fission en chaîne, est caractérisé par un facteur noté k et appelé facteur de multiplication. Il indique le nombre moyen de neutrons émis par une fission qui engendrent une nouvelle fission dans un milieu réactif donné. Les autres neutrons issus de la fission seront absorbés sans provoquer de fission nucléaire.

- si $k < 1$ (situation sous-critique) : La réaction en chaîne ne peut pas s'entretenir.

- si $k > 1$ (situation sur-critique) : La réaction en chaîne s'emballe et conduit à une explosion.

- si $k = 1$ (situation critique) : La réaction en chaîne est auto-entretenu et l'énergie dégagée est contrôlée dans le temps. C'est le principe de fonctionnement des centrales nucléaires.

d - La centrale nucléaire :

Une centrale nucléaire est une centrale thermique du moment qu'elle produit du courant électrique à partir de la chaleur. Sa particularité est que la chaleur est générée par une réaction nucléaire de fission.

Dans un réacteur à eau pressurisée (REP) utilisant l'uranium comme matière fissile, celui-ci doit être enrichi jusqu'à 3,5 % (l'uranium naturel contient uniquement 0,7 % de l'isotope ^{235}U fissile) pour entretenir la réaction en chaîne.

Une centrale nucléaire est constituée de trois compartiments :

- Le circuit primaire :

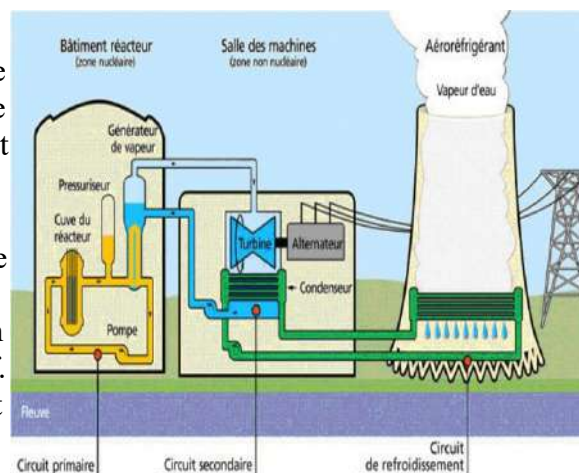
Dans le réacteur, la fission de l'uranium produit une très grande quantité de chaleur. Cette chaleur est utilisée pour chauffer de l'eau qui circule autour du réacteur jusqu'à 320 °C (l'eau est alors maintenue sous pression pour l'empêcher de bouillir).

- Le circuit secondaire :

Dans un générateur de vapeur, l'eau chaude du circuit primaire chauffe l'eau d'un circuit secondaire. Celle-ci se transforme en vapeur qui fait tourner une turbine qui entraîne à son tour un alternateur. L'alternateur produit un courant électrique alternatif. Un transformateur élève la tension du courant électrique produit par l'alternateur pour qu'il puisse être plus facilement transporté dans les lignes très hautes tensions.

- Le circuit de refroidissement :

La vapeur d'eau du circuit secondaire est transformée en eau liquide grâce à un condenseur dans lequel circule de l'eau froide en provenance de la mer ou d'un fleuve. L'eau peut alors être refroidie au contact de l'air circulant dans de grandes tours, appelées aéroréfrigérants.



2⁰) La fusion nucléaire :

a - Le phénomène de fusion :

La fusion est une réaction nucléaire au cours de laquelle deux noyaux légers s'unissent pour former un noyau plus lourd.

A masse égale, la fusion nucléaire libère une énergie à peu près quatre fois supérieure à celle de la fission nucléaire. En plus, elle génère peu de déchets radioactifs (en plus de courte durée de vie) et pas de gaz à effet de serre. La fusion nucléaire est alors qualifiée de source d'énergie propre.

b - la réaction thermonucléaire :

Pour que deux noyaux fusionnent, il faut surmonter la répulsion électrique due à leurs charges électriques positives. La fusion nucléaire nécessite le franchissement de cette barrière coulombienne. Cette condition est vérifiée à des températures de quelques dizaines de millions de degrés Celsius. La fusion nucléaire est alors dite réaction thermonucléaire.

Remarques :

* la fusion nucléaire est à l'origine de l'énergie dégagée par les étoiles. Ainsi, l'énergie solaire est due à la fusion de l'hydrogène en hélium et nécessite une température de l'ordre de 15 millions de degrés Celsius.

* Aux très hautes températures susceptibles d'amorcer la réaction de fusion, la matière est à l'état de plasma. C'est un état particulier de la matière où les atomes perdent une partie ou la totalité de leurs cortèges électroniques pour former un ensemble (électriquement neutre) d'ions positifs et d'électrons libres.

Dans un plasma, l'agitation des particules produit des collisions assez violentes pour amorcer la fusion.

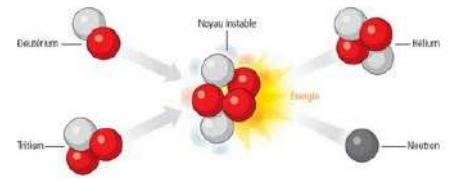
c - la fusion contrôlée :

- La fusion nucléaire fut utilisée, d'une façon non contrôlée, dans la fabrication de la bombe H ou bombe thermonucléaire. Dans cette bombe, les conditions extrêmes de température nécessaire pour initier la fusion de l'hydrogène sont assurées par l'explosion d'une bombe A (bombe atomique : bombe à fission nucléaire).



Si la puissance de la bombe A est équivalente à quelques dizaines Kilotonnes de TNT, celle de la bombe H dépasse quelques dizaines de Mégatonnes de TNT.

- L'application de la fusion nucléaire d'une façon contrôlée, dans le domaine civil, est encore à l'échelle de prototypes d'étude. La réaction de fusion la plus accessible est la réaction impliquant le deutérium et le tritium. C'est sur cette réaction que se concentrent les recherches sur la fusion contrôlée.

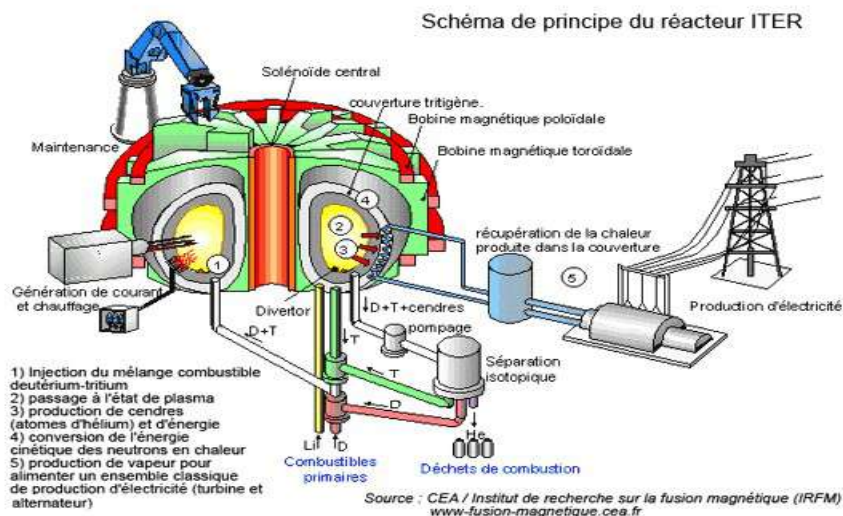


Si on connaît reproduire sur terre la fusion nucléaire (essentielle dans le domaine stellaire), on n'arrive pas encore à la contrôler. Parmi les voies de recherches scientifiques, on peut citer :

- * la fusion magnétique (projet ITER) :

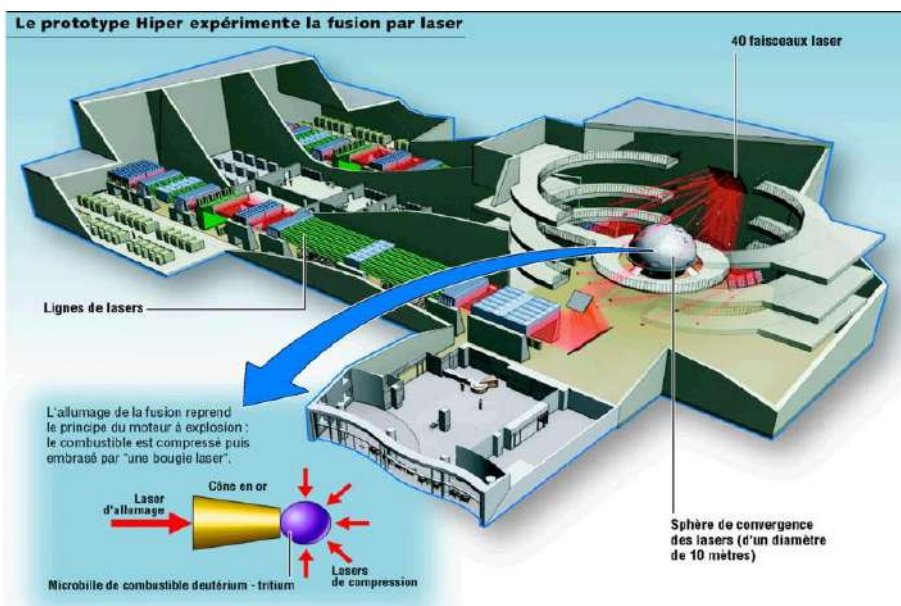
On mobilise des champs magnétiques très intenses pour maintenir un plasma de très faible densité, à très haute température, pendant un temps assez long pour que la réaction de fusion s'auto-entretient.

La difficulté provient de l'instabilité du plasma et du maintien dans le temps des conditions nécessaires à la fusion nucléaire.



- * La fusion inertielle (projet HIPER) :

L'idée est de produire une fusion nucléaire entre les atomes de deutérium et de tritium en les confinant dans de petites capsules sur lesquelles on fait converger plusieurs faisceaux lasers pour former un plasma à des densités et des températures très élevées.



Applications

On donne :

Unité de masse atomique	$u = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Énergie de masse de l'unité de masse atomique	931,5 MeV
Électron-volt	$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Exercice 1 :

On donne :

Particule ou noyau	neutron	proton	strontium	xénon	uranium 235
Symbole	${}_0^1\text{n}$	${}_1^1\text{H}$	${}_{38}^{94}\text{Sr}$	${}_{54}^{139}\text{Xe}$	${}_{92}^{235}\text{U}$
Masse (u)	1,0087	1,0073	93,8946	138,8882	235,0135

L'uranium est un métal relativement répandu dans l'écorce terrestre. Il est principalement constitué de deux isotopes, l'uranium 238 ${}_{92}^{238}\text{U}$ et l'uranium 235 ${}_{92}^{235}\text{U}$, formés en même temps que la Terre, il y a environ 4,5 milliards d'années.

1⁰) Les noyaux ${}_{92}^{238}\text{U}$ et ${}_{92}^{235}\text{U}$ subissent spontanément une désintégration radioactive α en donnant du thorium (de symbole chimique Th).

a - Ecrire l'équation de la réaction nucléaire que subit chacun de ces isotopes.

b - Soit $T(238)$ la période radioactive de ${}_{92}^{238}\text{U}$ et $T(235)$ celle de ${}_{92}^{235}\text{U}$. Calculer le rapport $\frac{T(238)}{T(235)}$.

En supposant que les noyaux d'uranium ${}_{92}^{238}\text{U}$ et ${}_{92}^{235}\text{U}$ ont été initialement formés en quantités égales, qu'on

notera N_0 , calculer le rapport $\frac{N(238)}{N(235)}$ des nombres de noyaux de ces deux isotopes qui seront actuellement

présents dans l'écorce terrestre (on prendra l'âge de la terre $t = 4,50 \cdot 10^9$ ans).

2⁰) a - Définir l'énergie de liaison E_ℓ d'un noyau.

b - Déterminer la valeur, en MeV, de l'énergie de liaison $E_\ell({}_{92}^{235}\text{U})$ du noyau d'uranium ${}_{92}^{235}\text{U}$.

c - En déduire la valeur de l'énergie de liaison par nucléon $E({}_{92}^{235}\text{U})$ de ce noyau.

3⁰) L'uranium ${}_{92}^{235}\text{U}$ peut se scinder en deux noyaux plus légers, comme par exemple, le strontium et le xénon selon l'équation suivante :



a - Donner le nom de ce type de réaction.

b - En précisant les lois de conservation utilisées, déterminer la valeur de Z et celle de x .

c - L'énergie de liaison du noyau de strontium est $E_\ell({}_{38}^{94}\text{Sr}) = 810,28 \text{ MeV}$ et celle du noyau de xénon est

$E_\ell({}_{54}^{139}\text{Xe}) = 1160,63 \text{ MeV}$, comparer alors la stabilité de chacun d'eux à celle du noyau d'uranium ${}_{92}^{235}\text{U}$.

4⁰) a - Calculer le défaut de masse Δm qui accompagne la réaction nucléaire étudiée.

b - En déduire la valeur, en MeV, de l'énergie E libérée par la fission d'un noyau d'uranium ${}_{92}^{235}\text{U}$.

c - Etablir l'expression de E en fonction de $E_\ell({}_{38}^{94}\text{Sr})$, $E_\ell({}_{54}^{139}\text{Xe})$ et $E_\ell({}_{92}^{235}\text{U})$.

d - Calculer, à partir de cette expression et en MeV, la valeur de E .

5⁰) Il existe un phénomène appelé capture neutronique permettant d'apporter de l'énergie, notée E_a , au noyau ${}_Z^AX$ et conduisant à un nouveau noyau ${}_Z^{A+1}X$. On donne ci-contre les valeurs de l'énergie E_a apportée par la capture d'un neutron, quasiment au repos, par les noyaux ${}_{92}^{235}\text{U}$ et ${}_{92}^{238}\text{U}$.

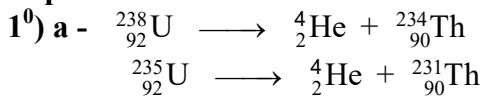
Pour réaliser une réaction de fission, il faut apporter au noyau une énergie minimale appelée énergie seuil E_s .

D'après le tableau ci-contre, justifier que le noyau ${}_{92}^{238}\text{U}$ ne peut pas conduire à une fission après capture d'un neutron pratiquement au repos.

Noyau	Période radioactive en 10^9 ans
${}_{92}^{238}\text{U}$	4,50
${}_{92}^{235}\text{U}$	0,713

Noyau avant capture	${}_{92}^{235}\text{U}$	${}_{92}^{238}\text{U}$
Noyau après capture	${}_{92}^{236}\text{U}$	${}_{92}^{239}\text{U}$
Énergie apportée E_a (MeV)	6,5	4,8
Énergie seuil de fission E_s (MeV)	5,9	5,8

Réponse :



$$\text{b - } \frac{T(238)}{T(235)} = \frac{4,5.10^9}{0,713.10^9} \quad \text{et} \quad \frac{T(238)}{T(235)} = 6,31.$$

Soit N_0 le nombre de noyaux de chaque isotope initialement présent dans l'écorce terrestre.

$$\frac{N(238)}{N(235)} = \frac{N_0 \cdot e^{-\lambda(238) \cdot t}}{N_0 \cdot e^{-\lambda(235) \cdot t}} \xrightarrow{\lambda = \frac{\ln 2}{T}} \frac{N(238)}{N(235)} = \frac{e^{-\frac{\ln 2}{T(238)} \cdot t}}{e^{-\frac{\ln 2}{T(235)} \cdot t}} = e^{-\frac{\ln 2}{T(238)} \cdot t} \cdot e^{\frac{\ln 2}{T(235)} \cdot t} \quad \text{et} \quad \frac{N(238)}{N(235)} = e^{\ln 2 \cdot \left[\frac{t}{T(235)} - \frac{t}{T(238)} \right]}$$

$$\text{Actuellement, } t \approx 4,5.10^9 \text{ an} = T(238) \rightarrow \frac{N(238)}{N(235)} = e^{\ln 2 \cdot \left[\frac{T(238)}{T(235)} - \frac{T(238)}{T(238)} \right]} = e^{\ln 2 \cdot [6,31-1]} \quad \text{et} \quad \frac{N(238)}{N(235)} = 39,67.$$

2⁰) a - L'énergie de liaison E_ℓ d'un noyau est l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau immobile à partir de ses nucléons pris séparément et au repos.

Remarque : L'énergie de liaison E_ℓ d'un noyau est l'énergie qu'il faut fournir à un noyau immobile pour le dissocier en ses différents nucléons au repos.

$$\text{b - } E_\ell({}_{92}^{235}\text{U}) = \Delta m \cdot c^2 \quad \text{avec} \quad \Delta m = 92 \cdot m_p + 143 \cdot m_n - m({}_{92}^{235}\text{U})$$

$$\text{A.N : } \Delta m = 92 \cdot 1,0073 + 143 \cdot 1,0087 - 235,0135 \quad \text{et} \quad \Delta m = 1,9022 \text{ u}$$

$$E_\ell({}_{92}^{235}\text{U}) = 1,9022 \cdot 931,5 \quad \text{et} \quad E_\ell({}_{92}^{235}\text{U}) = 1771,90 \text{ MeV.}$$

$$\text{c - On a : } E({}_Z^AX) = \frac{E_\ell({}_Z^AX)}{A} \rightarrow E({}_{92}^{235}\text{U}) = \frac{E_\ell({}_{92}^{235}\text{U})}{235}$$

$$\text{A.N : } E({}_{92}^{235}\text{U}) = \frac{1771,90}{235} \quad \text{et} \quad E({}_{92}^{235}\text{U}) = 7,54 \text{ MeV.nucléon}^{-1}.$$

3⁰) a - La réaction étudiée est une réaction de fission nucléaire.

$$\text{b - * conservation de la charge électrique : } 92 + 0 = Z + 54 + x \cdot 0 \rightarrow Z = 92 - 54 \quad \text{et} \quad Z = 38.$$

$$\text{* conservation du nombre de nucléons : } 235 + 1 = 94 + 139 + x \cdot 1 \rightarrow x = 236 - 233 \quad \text{et} \quad x = 3.$$

$$\text{c - * } E({}_{38}^{94}\text{Sr}) = \frac{E_\ell({}_{38}^{94}\text{Sr})}{94} \rightarrow E({}_{38}^{94}\text{Sr}) = \frac{810,28}{94} \quad \text{et} \quad E({}_{38}^{94}\text{Sr}) = 8,62 \text{ MeV.nucléon}^{-1}.$$

$$E({}_{38}^{94}\text{Sr}) > E({}_{92}^{235}\text{U}) \rightarrow {}_{38}^{94}\text{Sr} \text{ est plus stable que } {}_{92}^{235}\text{U}$$

$$\text{* } E({}_{54}^{139}\text{Xe}) = \frac{E_\ell({}_{54}^{139}\text{Xe})}{139} \rightarrow E({}_{54}^{139}\text{Xe}) = \frac{1160,63}{139} \quad \text{et} \quad E({}_{54}^{139}\text{Xe}) = 8,35 \text{ MeV.nucléon}^{-1}.$$

$$E({}_{54}^{139}\text{Xe}) > E({}_{92}^{235}\text{U}) \rightarrow {}_{54}^{139}\text{Xe} \text{ est plus stable que } {}_{92}^{235}\text{U}$$

$$\text{4⁰) a - } \Delta m = [m({}_{92}^{235}\text{U}) + m_n] - [m({}_{38}^{94}\text{Sr}) + m({}_{54}^{139}\text{Xe}) + 3 \cdot m_n].$$

$$\text{A.N : } \Delta m = [235,0135 + 1,0087] - [93,8946 + 138,8882 + 3 \cdot 1,0087] \quad \text{et} \quad \Delta m = 0,2133 \text{ u.}$$

$$\text{b - } E = \Delta m \cdot c^2 \rightarrow E = 0,2133 \cdot 931,5 \quad \text{et} \quad E = 198,69 \text{ MeV.}$$

$$\text{c - } E = \Delta m \cdot c^2 = \left([m({}_{92}^{235}\text{U}) + m_n] - [m({}_{38}^{94}\text{Sr}) + m({}_{54}^{139}\text{Xe}) + 3 \cdot m_n] \right) \cdot c^2$$

Pour un noyau

$${}_Z^AX, E({}_Z^AX) = \Delta m \cdot c^2 = [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m({}_Z^AX)] \cdot c^2 \rightarrow m({}_Z^AX) = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - \frac{E({}_Z^AX)}{c^2}$$

$$E = \left(\left[92 \cdot m_p + 143 \cdot m_n - \frac{E({}_{92}^{235}\text{U})}{c^2} + m_n \right] - \left[38 \cdot m_p + 56 \cdot m_n - \frac{E({}_{38}^{94}\text{Sr})}{c^2} + 54 \cdot m_p + 85 \cdot m_n - \frac{E({}_{54}^{139}\text{Xe})}{c^2} + 3 \cdot m_n \right] \right) \cdot c^2$$

$$\text{donc } E = E({}_{38}^{94}\text{Sr}) + E({}_{54}^{139}\text{Xe}) - E({}_{92}^{235}\text{U})$$

d - $E = 810,28 + 1160,63 - 1771,90$ et $E = 199,01 \text{ MeV}$.

5⁰) Après la capture neutronique, le noyau $^{238}_{92}\text{U}$ reçoit une énergie apportée $E_a = 4,8 \text{ MeV}$ alors que pour subir une réaction de fission ce noyau a besoin d'une énergie seuil $E_s = 5,8 \text{ MeV}$.

$E_a < E_s$ donc le noyau $^{238}_{92}\text{U}$ ne peut pas conduire à une fission après capture d'un neutron pratiquement au repos.

Exercice 2 :

On donne :

la célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$; le nombre d'Avogadro : $N = 6,022.10^{23}$;

la constant de Planck : $h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$; $1 \text{ MeV} = 1,6.10^{-13} \text{ J}$; $1 \text{ u} = 1,66054.10^{-27} \text{ Kg} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$.

Particule ou noyau	Neutron (n)	Proton (p)	Deutérium (d)	Tritium (t)	Hélium (α)	Uranium	Stronsium	Xénon
Symbole	^1_0n	^1_1H	^2_1H	^3_1H	^4_2He	$^{235}_{92}\text{U}$	$^{94}_{38}\text{Sr}$	$^{140}_{54}\text{Xe}$
Masse (u)	1,00866	1,00728	2,01355	3,01550	4,00150	234,99333	93,89446	139,89194

1⁰) On dispose d'une source contenant du tritium ^3_1H dont la période radioactive est $T = 12,3 \text{ ans}$.

a - Le tritium se désintègre spontanément pour donner de l'hélium ^3_2He , qui est stable.

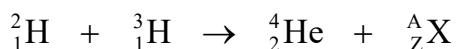
Ecrire l'équation de désintégration du tritium en précisant les lois de conservation utilisées.

b - Calculer la valeur de la constante radioactive λ du radionucléide ^3_1H .

c - Déterminer la valeur initiale N_0 de la population de noyaux radioactifs sachant que l'activité initiale de la source est $A_0 = 10^{16} \text{ Bq}$ (on rappelle que : $1 \text{ an} = 365,25 \text{ jours}$)

d - Déterminer la durée t au bout de laquelle la source ne possèdera plus que le huitième de sa population de départ

2⁰) Le noyau de deutérium ^2_1H et le noyau de tritium ^3_1H peuvent subir une fusion nucléaire selon l'équation :



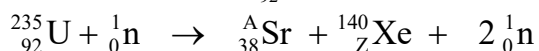
a - Pourquoi la réaction de fusion est-elle appelée une réaction thermonucléaire ?

b - Déterminer la nature de la particule ^A_ZX .

c - Calculer l'énergie E_1 libérée lors de la formation d'un noyau d'hélium ^4_2He .

d - Calculer l'énergie E_2 libérée par la fusion de $1,00 \text{ kg}$ de mélange de deutérium ^2_1H et de tritium ^3_1H , sachant que $1,00 \text{ kg}$ de ce mélange contient 200 moles de noyaux de deutérium et autant de noyaux de tritium.

3⁰) Dans une centrale nucléaire, le noyau d'uranium $^{235}_{92}\text{U}$ subit une fission nucléaire selon l'équation :



a - Déterminer les valeurs de A et Z .

b - Montrer que l'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium $^{235}_{92}\text{U}$ s'exprime par :

$$E_3 = E_1(^{140}_{54}\text{Xe}) + E_1(^{94}_{38}\text{Sr}) - E_1(^{235}_{92}\text{U}) \text{ où } E_1(^A_Z\text{X}) \text{ désigne l'énergie de liaison du noyau } ^A_Z\text{X}.$$

c - Calculer la valeur de E_3 .

Les énergies de liaison par nucléon (en $\text{MeV}/\text{nucléon}$) de ces noyaux sont :

$$E(^{235}_{92}\text{U}) = 7,590 ; E(^{140}_{54}\text{Xe}) = 8,290 ; E(^{94}_{38}\text{Sr}) = 8,593.$$

d - Déterminer la valeur de l'énergie E_4 dégagée par la fission de $1,00 \text{ kg}$ d'uranium $^{235}_{92}\text{U}$.

4⁰) Comparer les valeurs de E_2 et E_4 . Conclure.

Réponse :

1⁰) a - $^3_1\text{H} \longrightarrow ^3_2\text{He} + ^A_Z\text{X}$

- La loi de conservation de la charge électrique : $1 = 2 + Z \rightarrow Z = 1 - 2 \text{ et } Z = -1.$

La loi de conservation du nombre de nucléons : $3 = 3 + A \rightarrow A = 3 - 3 \text{ et } A = 0.$

- La particule émise est un électron ${}^0_{-1}\text{e}$ (radioactivité β^-).

l'équation de la réaction est : ${}^3_1\text{H} \longrightarrow {}^3_2\text{He} + {}^0_{-1}\text{e}$

$$\text{b - } \lambda = \frac{\ln 2}{T} \xrightarrow{T=12,3\text{an}} \lambda = \frac{\ln 2}{12,3} \text{ et } \lambda = 5,64 \cdot 10^{-2} \text{ an}^{-1}.$$

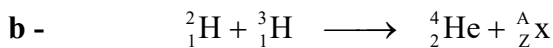
$$\text{c - } A_0 = \lambda \cdot N_0 \rightarrow N_0 = \frac{A_0}{\lambda}.$$

$$\text{A.N : } N_0 = \frac{10^{16} \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600}{5,64 \cdot 10^{-2}} \text{ et } N_0 = 5,6 \cdot 10^{24} \text{ noyaux}$$

d - Au cours de la désintégration et à chaque période T, le nombre de noyaux présents diminue de moitié.

$$N(t) = \frac{N_0}{8} \rightarrow t = 3T \text{ et } t = 36,9 \text{ an}.$$

2⁰) a - La réaction de fusion se fait à très haute température (qqes millions de degrés) : c'est une réaction thermonucléaire.



- La loi de conservation de la charge électrique : $1+1 = 2 + Z \rightarrow Z = 2-2 \text{ et } Z = 0.$

La loi de conservation du nombre de nucléons : $2+3 = 4 + A \rightarrow A = 5-4 \text{ et } A = 1.$

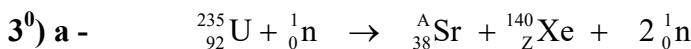
- La particule ${}^A_Z\text{X}$ est alors un neutron ${}^1_0\text{n}$

$$\text{c - } E_1 = |\Delta m| \cdot c^2 \rightarrow E_1 = [m({}^2_1\text{H}) + m({}^3_1\text{H}) - m({}^4_2\text{He}) - m({}^1_0\text{n})] \cdot c^2$$

$$\text{A.N : } E_1 = [2,01355 + 3,01550 - 4,00150 - 1,00866] \cdot 931,5 \text{ et } E_1 = 17,596 \text{ MeV}.$$

d - La fusion de 1 Kg du mélange (mélange équimolaire de 200 moles de ${}^2_1\text{H}$ et 200 moles de ${}^3_1\text{H}$) aboutit à la formation de 200 moles de ${}^4_2\text{He} \rightarrow E_2 = N \cdot 200 \cdot E_1.$

$$\text{A.N : } E_2 = 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 200 \cdot 17,596 \text{ et } E_2 = 21,193 \cdot 10^{26} \text{ MeV}.$$



La loi de conservation de la charge électrique : $92+0 = 38 + Z + 2 \cdot 0 \rightarrow Z = 92-38 \text{ et } Z = 54.$

La loi de conservation du nombre de nucléons : $235+1 = A + 140 + 2 \cdot 1 \rightarrow A = 236-142 \text{ et } A = 94.$

$$\text{b - } E_3 = |\Delta m| \cdot c^2 \text{ avec } |\Delta m| = [m({}^{235}_{92}\text{U}) + m({}^1_0\text{n}) - m({}^{94}_{38}\text{Sr}) - m({}^{140}_{54}\text{Xe}) - 2 \cdot m({}^1_0\text{n})]$$

D'autre part on a :

$$E_1({}^A_Z\text{X}) = [Z \cdot m({}^1_1\text{p}) + (A-Z) \cdot m({}^1_0\text{n}) - m({}^A_Z\text{X})] \cdot c^2 \rightarrow m({}^A_Z\text{X}) = Z \cdot m({}^1_1\text{p}) + (A-Z) \cdot m({}^1_0\text{n}) - \frac{E_1({}^A_Z\text{X})}{c^2}$$

$$|\Delta m| = \left[92 \cdot m(\text{p}) + 143 \cdot m(\text{n}) - \frac{E_1(\text{U})}{c^2} + m(\text{n}) - 54 \cdot m(\text{p}) - 86 \cdot m(\text{n}) + \frac{E_1(\text{Xe})}{c^2} - 38 \cdot m(\text{p}) - 56 \cdot m(\text{n}) + \frac{E_1(\text{Sr})}{c^2} - 2 \cdot m(\text{n}) \right]$$

$$\rightarrow |\Delta m| = \left[\frac{E_1({}^{140}_{54}\text{Xe})}{c^2} + \frac{E_1({}^{94}_{38}\text{Sr})}{c^2} - \frac{E_1({}^{235}_{92}\text{U})}{c^2} \right] \xrightarrow{E_3 = |\Delta m| \cdot c^2} E_3 = E_1({}^{140}_{54}\text{Xe}) + E_1({}^{94}_{38}\text{Sr}) - E_1({}^{235}_{92}\text{U}).$$

$$\text{c - On a : } E_1({}^A_Z\text{X}) = A \cdot E({}^A_Z\text{X})$$

$$\rightarrow E_3 = 140,8,290 + 94,8,593 - 235,7,590 \text{ et } E_3 = 184,692 \text{ MeV}.$$

$$\text{Remarque : } E_3 = |\Delta m| \cdot c^2 \rightarrow E_3 = [m(\text{U}) + m(\text{n}) - m(\text{Sr}) - m(\text{Xe}) - 2m(\text{n})] \cdot c^2$$

$$\text{A.N : } E_3 = [234,99333 + 1,00866 - 93,89446 - 139,89194 - 2 \cdot 1,00866] \cdot 931,5 \text{ et } E_3 = 184,689 \text{ MeV}.$$

$$\text{d - } E_4 = N \cdot \frac{m(\text{U})}{M(\text{U})} \cdot E_3.$$

$$\text{A.N : } E_4 = 6,022 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1000}{235} \cdot 184,692 \text{ et } E_4 = 4,733 \cdot 10^{26} \text{ MeV}.$$

4⁰) $E_2 \gg E_4$ donc la réaction de fusion est plus énergétique que la réaction de fission.

Exercice 3 :

On donne :

Particule ou noyau	neutron	proton	barium	krypton	uranium 235	deutérium	tritium	hélium
Symbole	${}_0^1\text{n}$	${}_1^1\text{H}$	${}_{56}^{142}\text{Ba}$	${}_{36}^{92}\text{Kr}$	${}_{92}^{235}\text{U}$	${}_1^2\text{H}$	${}_1^3\text{H}$	${}_2^4\text{He}$
Masse (u)	1,0087	1,0073	141,9165	91,9262	235,0135	2,0136	3,0155	4,0026

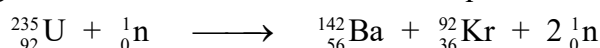
La bombe H est une bombe nucléaire dont l'énergie provient de la fusion de noyaux légers. Elle est constituée de deux parties :

- une partie haute (ou primaire) formée d'une bombe à fission où se déroule une réaction en chaîne.
- une partie basse (ou secondaire) formée de matériau fusible.

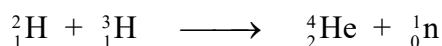
L'énergie libérée par la bombe à fission sous forme de rayonnement permet de comprimer le combustible de fusion jusqu'à ce que sa densité soit suffisamment élevée pour déclencher des réactions de fusion. L'explosion d'une bombe H se déroule sur un intervalle de temps très court : l'ensemble des réactions de fission et de fusion réclame 600 milliardièmes de seconde.

Pour simplifier l'étude, on considérera :

- que la partie haute est le siège d'une seule réaction de fission d'équation :



- que la partie basse de la bombe est le siège de la réaction de fusion d'équation :



1⁰) a - Calculer le défaut de masse Δm qui accompagne la réaction de fission.

b - En déduire la valeur, en MeV, de l'énergie E libérée par la fission d'un noyau d'uranium ${}_{92}^{235}\text{U}$.

2⁰) a - Rappeler la définition de l'énergie de liaison E_l d'un noyau ${}_Z^AX$.

b - L'énergie de liaison d'un noyau ${}_Z^AX$ s'écrit : $E_l(X)_{\text{MeV}} = [Z.m_p + (A-Z).m_n - m(X)]_{\text{u}} . 931,5$

Calculer $E_l(d)$, $E_l(t)$ et $E_l(\alpha)$ respectivement les énergies de liaison des noyaux ${}_1^2\text{H}$, ${}_1^3\text{H}$ et ${}_2^4\text{He}$.

c - Comparer la stabilité des noyaux ${}_1^2\text{H}$, ${}_1^3\text{H}$ et ${}_2^4\text{He}$.

d - Montrer que l'énergie E' dégagée lors de la formation d'un noyau d'hélium ${}_2^4\text{He}$ par la réaction de fusion étudiée est : $E' = E_l(\alpha) - E_l(d) - E_l(t)$. Calculer alors la valeur, en MeV, de E' .

3⁰) Le noyau de baryum 142, déchet de l'explosion de la bombe H, est un émetteur $\square^\square$ qui se désintègre en un noyau de lanthane ${}_Z^A\text{La}$.

a - Écrire l'équation de désintégration d'un noyau de baryum 142 en précisant le nombre de charge Z et le nombre de masse A du noyau de lanthane formé.

b - Soit un échantillon de baryum 142 contenant initialement un nombre N_0 de noyaux. Le nombre N de noyaux non désintégrés à l'instant t s'écrit :

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

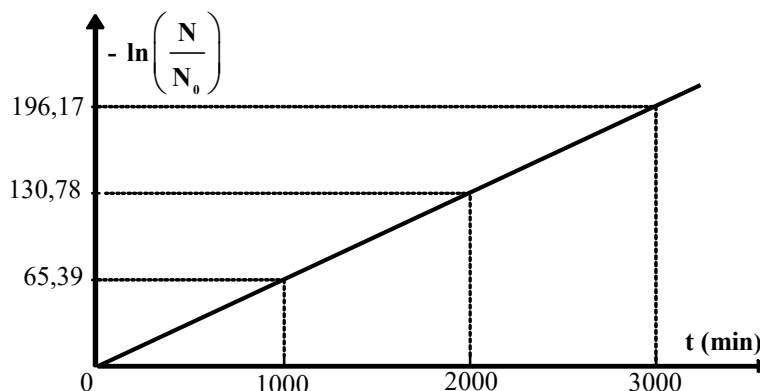
La courbe ci-contre donne l'évolution de

$-\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$ au cours du temps. En cherchant

la relation qui lie $-\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$, λ et t , puis en

exploitant la courbe, calculer la valeur de la constante radioactive λ .

c - Définir de la période radioactive T . Exprimer T en fonction de λ . En déduire la valeur de T .



Réponse :

1⁰) a - $\Delta m = [m(\text{U}) + m_n] - [m(\text{Ba}) + m(\text{Kr}) + 2.m_n]$

A.N : $\Delta m = [235,0135 + 1,0087] - [141,9165 + 91,9262 + 2.1,0087]$ et $\Delta m = 0,1621 \text{ u}$.

b - $E = \Delta m.c^2 \rightarrow E = 0,1621.931,5$ et $E = 150,996 \text{ MeV}$.

2⁰) a - L'énergie de liaison d'un noyau est l'énergie libérée lors de formation d'un noyau immobile à partir de ses différents nucléons pris séparément et au repos.

b - * $E_l(d)_{\text{MeV}} = [m_p + m_n - m({}_1^2\text{H})]_{\text{u}} . 931,5$

A.N: $E_l(d)_{\text{MeV}} = [1,0073 + 1,0087 - 2,0136]_{\text{u}} . 931,5$ et $E_l(d) = 2,24 \text{ MeV}$.

***** $E_l(t)_{\text{MeV}} = [m_p + 2.m_n - m({}_1^3\text{H})]_{\text{u}} . 931,5$

A.N: $E_l(t)_{\text{MeV}} = [1,0073 + 2.1,0087 - 3,015]_{\text{u}} . 931,5$ et $E_l(t) = 8,57 \text{ MeV}$.

***** $E_l(\alpha)_{\text{MeV}} = [2.m_p + 2.m_n - m({}_2^4\text{He})]_{\text{u}} . 931,5$

A.N: $E_l(\alpha)_{\text{MeV}} = [2.1,0073 + 2.1,0087 - 4,0026]_{\text{u}} . 931,5$ et $E_l(\alpha) = 27,39 \text{ MeV}$.

c - $E_{\text{lia}}(d) = \frac{E_l(d)}{2} \rightarrow E_{\text{lia}}(d) = \frac{2,24}{2}$ et $E_{\text{lia}}(d) = 1,12 \text{ MeV.nucléon}^{-1}$.

$E_{\text{lia}}(t) = \frac{E_l(t)}{3} \rightarrow E_{\text{lia}}(t) = \frac{8,57}{3}$ et $E_{\text{lia}}(t) = 2,86 \text{ MeV.nucléon}^{-1}$.

$E_{\text{lia}}(\alpha) = \frac{E_l(\alpha)}{4} \rightarrow E_{\text{lia}}(\alpha) = \frac{27,39}{4}$ et $E_{\text{lia}}(\alpha) = 6,85 \text{ MeV.nucléon}^{-1}$.

$E_{\text{lia}}(d) < E_{\text{lia}}(t) < E_{\text{lia}}(\alpha) \rightarrow {}_2^4\text{He} \text{ est plus stable que } {}_1^3\text{H} \text{ qui est plus stable que } {}_1^2\text{H}.$

d - $E' = \Delta m' . c^2 \rightarrow E' = [m({}_1^2\text{H}) + m({}_1^3\text{H}) - m({}_2^4\text{He}) - m_n] . c^2$

on a: $E_l({}_Z^AX) = [Z.m_p + (A-Z).m_n - m({}_Z^AX)] . c^2 \rightarrow m({}_Z^AX) = Z.m_p + (A-Z).m_n - \frac{E_l({}_Z^AX)}{c^2}.$

$\rightarrow E' = \left[\left(m_p + m_n - \frac{E_l(d)}{c^2} \right) + \left(m_p + 2.m_n - \frac{E_l(t)}{c^2} \right) - \left(2.m_p + 2.m_n - \frac{E_l(\alpha)}{c^2} \right) - m_n \right] . c^2$

$\rightarrow E' = E_l(\alpha) - E_l(d) - E_l(t).$

A.N: $E' = 27,39 - 2,24 - 8,57$ et $E' = 16,58 \text{ MeV}$.

3⁰) a - ${}_{56}^{142}\text{Ba} \longrightarrow {}_{-1}^0\text{e} + {}_Z^A\text{La}.$

*conservation de la charge électrique : $56 = -1 + Z \rightarrow Z = 57$

*conservation de du nombre de nucléons : $142 = 0 + A \rightarrow A = 142$

donc : ${}_{56}^{142}\text{Ba} \longrightarrow \beta^- + {}_{57}^{142}\text{La}$

b - $N = N_0 . e^{-\lambda . t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda . t} \rightarrow -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = \lambda . t$

Graphiquement : $-\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = f(t)$ est une droite linéaire

$\rightarrow -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = a.t$ avec $a = \frac{130,78 - 65,39}{2000 - 1000}$ et $a = 65,39 . 10^{-3} \text{ min}^{-1}$

$$\begin{cases} -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = \lambda . t \\ -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = a . t \end{cases} \xrightarrow{\text{Par identification}} \lambda = a \text{ et } \lambda = 65,39 . 10^{-3} \text{ min}^{-1}$$

c - La période radioactive est la durée au bout de laquelle le nombre de noyaux présents diminue de moitié.

$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \rightarrow T = \frac{\ln 2}{65,39 . 10^{-3}}$ et $T = 10,6 \text{ min}.$

Exercice 4 :

1⁰) L'uranium $^{238}_{92}\text{U}$ se transforme, par désintégrations successives de type α et β^- , en radium $^{226}_{88}\text{Ra}$ selon le schéma global suivant : $^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow ^{226}_{88}\text{Ra} + 3\ ^4_2\text{He} + 2\ ^0_{-1}\text{e}$

a - Dire, en le justifiant, si cette transformation est spontanée ou provoquée.

b - Calculer, en unité de masse atomique, le défaut de masse $\Delta m(\text{U})$ du noyau d'uranium $^{238}_{92}\text{U}$.

c - Que représente l'expression : $\left[\Delta m(\text{U}) \cdot \frac{931,5}{238} \right]$?

Calculer sa valeur.

d - L'énergie de liaison du radium est $E_l(\text{Ra}) = 1738,09 \text{ MeV}$. Comparer alors la stabilité des noyaux $^{238}_{92}\text{U}$ et $^{226}_{88}\text{Ra}$.

2⁰) L'isotope $^{226}_{88}\text{Ra}$ du radium est radioactif. Il donne du radon $^{222}_{86}\text{Rn}$ avec émission d'une particule α .

a - Ecrire l'équation de cette désintégration.

b - Calculer, en MeV, l'énergie E libérée lors de la désintégration d'un noyau de radium $^{226}_{88}\text{Ra}$.

c - En supposant que toute l'énergie E libérée par la désintégration est sous forme cinétique et sachant le rapport des énergies cinétiques des produits de la désintégration vérifie la relation :

$$\frac{E_c(\text{Rn})}{E_c(\alpha)} = \frac{m(\alpha)}{m(\text{Rn})},$$

Calculer, en MeV, la valeur de $E_c(\alpha)$.

3⁰) En réalité, la désintégration du noyau de radium est accompagnée par l'émission d'une radiation de longueur d'onde $\lambda = 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.

a - Interpréter ce phénomène.

b - Calculer dans ce cas la valeur de l'énergie cinétique $E'_c(\alpha)$ de la particule α émise.

4⁰) L'isotope $^{222}_{86}\text{Rn}$ du radon est aussi radioactif, il se désintègre avec émission d'une particule α .

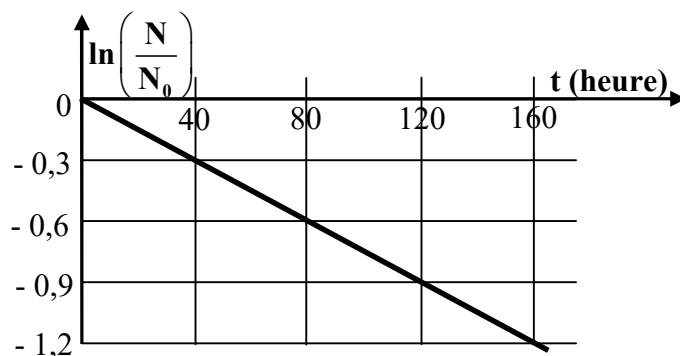
A la date $t = 0$, on dispose d'un échantillon contenant N_0 noyaux de radon $^{222}_{86}\text{Rn}$. A la date t , il reste $N(t)$ noyaux non désintégrés.

La courbe ci-dessous donne les variations de $\left(\ln \frac{N}{N_0} \right)$

en fonction du temps t :

a - En précisant les lois de conservation utilisées, déterminer le nombre de charge Z et le nombre de masse A du nucléide formé lors de la désintégration du radon $^{222}_{86}\text{Rn}$.

D'après le tableau ci-dessous, donner le symbole de ce nucléide.



Z	83	84	85	86	87	88	89
Symbole	Bi	Po	At	Rn	Fr	Ra	Ac
Nom	bismuth	polonium	astate	radon	francium	radium	actinium

b - La loi de décroissance radioactive s'écrit : $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. Que représente λ dans cette expression ?

c - Déterminer graphiquement la valeur de λ .

d - Donner la définition de la période radioactive T et établir son expression en fonction de λ .

Calculer alors la valeur de la période T du $^{222}_{86}\text{Rn}$.

On donne : $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$; $m(\alpha) = 4,0015 \text{ u}$; $m(\text{U}) = 238,0598 \text{ u}$; $m(\text{Ra}) = 225,9771 \text{ u}$; $m(\text{Rn}) = 221,9703 \text{ u}$; $m(\text{p}) = 1,0073 \text{ u}$; $m(\text{n}) = 1,0087 \text{ u}$

Réponse :

1⁰) a - L'uranium se désintègre de lui-même sans intervention extérieure. Il subit alors une transformation spontanée

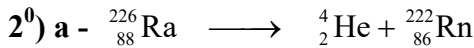
$$\mathbf{b - } \Delta m(\text{U}) = (92.m_p + 146.m_n) - m(\text{U}) \rightarrow \Delta m(\text{U}) = 1,882 \text{ u}$$

c - L'expression $\left[\Delta m(\text{U}) \cdot \frac{931,5}{238} \right]$ représente l'énergie de liaison par nucléon $E(\text{U}) = \frac{E_l(\text{U})}{A}$ de l'uranium.

$$E(\text{U}) = \frac{1,882 \cdot 931,5}{238} \text{ et } E(\text{U}) = 7,37 \text{ MeV.nucléon}^{-1}.$$

$$\mathbf{d - } E(\text{Ra}) = \frac{1738,09}{226} \text{ et } E(\text{Ra}) = 7,69 \text{ MeV.nucléon}^{-1}.$$

$E(\text{Ra}) > E(\text{U}) \rightarrow$ le radium $^{226}_{88}\text{Ra}$ est plus stable que l'uranium $^{238}_{92}\text{U}$.



$$\mathbf{b - } E = |\Delta m| \cdot c^2$$

$$E_{\text{Mev}} = [m(\text{Ra}) - (m(\text{Rn}) + m(\alpha))] \cdot 931,5 \rightarrow E = 4,937 \text{ MeV}$$

$$\mathbf{c - } E = E_c(\alpha) + E_c(\text{Rn})$$

$$\frac{E_c(\text{Rn})}{E_c(\alpha)} = \frac{m(\alpha)}{m(\text{Rn})} \rightarrow E_c(\text{Rn}) = E_c(\alpha) \cdot \frac{m(\alpha)}{m(\text{Rn})} \xrightarrow{E=E_c(\alpha)+E_c(\text{Rn})} E_c(\alpha) = \frac{E}{1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Rn})}}$$

$$\mathbf{A.N : } E_c(\alpha) = \frac{4,937}{1 + \frac{4,0015}{221,9703}} \text{ et } E_c(\alpha) = 4,85 \text{ MeV}$$

3⁰) a - La désintégration du noyau de radium s'accompagne d'une émission d'un rayonnement γ .

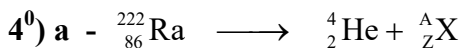
b - L'énergie du photon γ émis est :

$$w = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} \rightarrow w = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^{-11}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ et } w = 8,275 \cdot 10^{-2} \text{ MeV}.$$

On aura donc : $E' = E_c(\alpha) + E_c(\text{Rn})$ avec $E' = E - W$.

$$\text{Donc : } E'_c(\alpha) = \frac{E'}{1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Rn})}} \text{ et } E'_c(\alpha) = \frac{E - W}{1 + \frac{m(\alpha)}{m(\text{Rn})}}$$

$$\mathbf{A.N : } E'_c(\alpha) = \frac{4,937 - 8,2758 \cdot 10^{-2}}{1 + \frac{4,0015}{221,9703}} \text{ et } E'_c(\alpha) = 4,77 \text{ MeV}$$



* conservation du nombre de nucléons : $222 = 4 + A \rightarrow A = 218$

* conservation de la charge électrique: $86 = 2 + Z \rightarrow Z = 84$

Le nucléide formé est alors le polonium $^{218}_{84}\text{Po}$.

b - λ représente la constante radioactive du radioélément considéré.

$$\mathbf{c - } N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda \cdot t.$$

Or graphiquement, la courbe $\left(\ln \frac{N}{N_0} \right) = f(t)$ est une droite linéaire

$$\text{donc} \left(\ln \frac{N}{N_0} \right) = a \cdot t \text{ avec } a = \frac{(-1,2) - (-0,3)}{(160) - (40)} \text{ et } a = -7,5 \cdot 10^{-3}$$

Par identification : $\lambda = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ heure}^{-1}$.

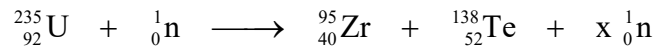
d - La période radioactive T est le temps au bout du quel le nombre de noyaux radioactifs diminue de moitié.

$$N(T) = \frac{N_0}{2} \rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T} \rightarrow e^{\lambda \cdot T} = 2 \rightarrow \lambda \cdot T = \ln 2 \quad \text{et} \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

$$A.N : T = \frac{\ln 2}{7,5 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad T = 92,42 \text{ heure}.$$

Exercice 5 :

1⁰ Le bombardement d'un noyau d'uranium $^{235}_{92}\text{U}$ par un neutron peut produire un noyau de zirconium $^{95}_{40}\text{Zr}$ et un noyau de tellure $^{138}_{52}\text{Te}$ avec émission d'autres neutrons selon l'équation :



a - Déterminer le nombre x de neutrons produits par cette réaction de fission.

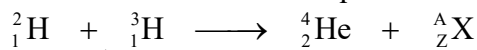
b - Calculer, en unité de masse atomique, le défaut masse Δm qui accompagne cette réaction.

c - En déduire la valeur, en MeV, de l'énergie E dégagée lors de la fission d'un noyau d'uranium $^{235}_{92}\text{U}$.

d - Les noyaux U , Zr et Te sont placés sur la courbe d'Aston (courbe ci-contre). A partir de cette courbe, dégager l'intérêt énergétique de cette réaction de fission.

e - Quelle est l'énergie $\mathcal{E}$ libérée par nucléon participant à cette réaction de fission.

2⁰ Le noyau de deutérium ^2_1H et le noyau de tritium ^3_1H peuvent subir une fusion nucléaire selon l'équation :



a - Identifier la particule ${}^A_Z\text{X}$ émise.

b - L'énergie de liaison d'un noyau ${}^A_Z\text{Y}$ est donnée par :

$$E_l(Y)_{\text{MeV}} = [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m(Y)] \cdot 931,5$$

Soient $E_l(d)$, $E_l(t)$ et $E_l(\alpha)$ respectivement les énergies de liaison des noyaux ^2_1H , ^3_1H et ^4_2He .

On donne : $E_l(d) = 2,23 \text{ MeV}$; $E_l(t) = 8,48 \text{ MeV}$ et $E_l(\alpha) = 28,30 \text{ MeV}$.

Montrer que l'énergie E' dégagée lors de la formation d'un noyau d'hélium ^4_2He par la réaction de fusion étudiée est : $E' = E_l(\alpha) - E_l(d) - E_l(t)$. Calculer alors la valeur, en MeV, de E' .

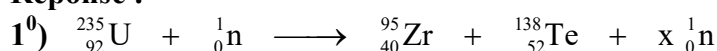
c - Quelle est l'énergie $\mathcal{E}'$ libérée par nucléon participant à cette réaction de fusion.

3⁰ Comparer $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Que peut-on en conclure ?

On donne : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$; $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$; $1 \text{ u} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} = 931,5 \text{ MeV/c}^2$.

Particule ou noyau	Neutron (n)	Proton (p)	Deutérium (d)	Tritium (t)	Hélium (α)	Uranium	Zirconium	Tellure
Symbole	${}^1_0\text{n}$	${}^1_1\text{H}$	${}^2_1\text{H}$	${}^3_1\text{H}$	${}^4_2\text{He}$	$^{235}_{92}\text{U}$	$^{95}_{40}\text{Zr}$	$^{138}_{52}\text{Te}$
Masse (u)	1,00866	1,00728	2,01355	3,01550	4,00150	234,99333	94,88604	137,90067

Réponse :

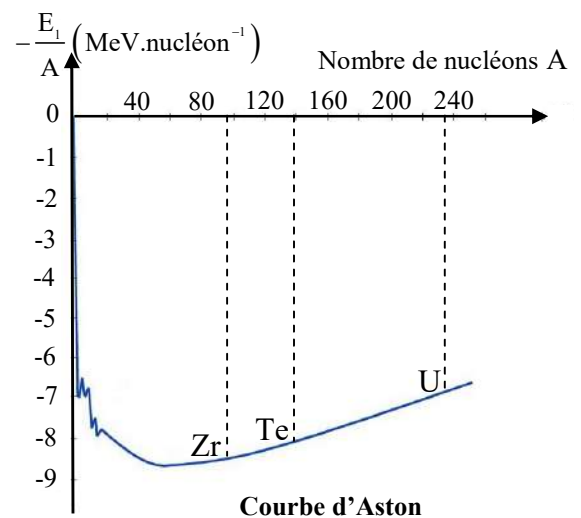


a - La loi de conservation du nombre de nucléons : $235 + 1 = 95 + 138 + x \rightarrow x = 236 - 233$ et $x = 3$

b - $\Delta m = [m(\text{U}) + m(\text{n})] - [m(\text{Zr}) + m(\text{Te}) + 3 \cdot m(\text{n})]$.

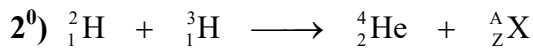
$$A.N : \Delta m = [234,99333 + 1,00866] - [94,88604 + 137,90067 + 3 \cdot 1,00866] \quad \text{et} \quad \Delta m = 0,1893 \text{ u}.$$

$$\text{c} - E = \Delta m \cdot c^2 \xrightarrow{A.N} E = 0,1893 \cdot 931,5 \quad \text{et} \quad E = 176,33 \text{ MeV}.$$



d - D'après la courbe d'Aston, les noyaux de Zr et de Te sont plus stables que le noyau de U.
La réaction dégage de l'énergie donc le système physique évolue vers un état de plus grande stabilité.

$$\text{e} - \mathcal{E} = \frac{E}{235+1} \xrightarrow{\text{A.N}} \mathcal{E} = \frac{176,33}{235+1} \text{ et } \mathcal{E} = 0,747 \text{ MeV.nucléon}^{-1}$$



a - La conservation de la charge électrique : $1+1=2+Z \rightarrow Z=0$

La conservation du nombre de nucléons : $2+3=4+A \rightarrow A=1$

La particule ${}^A_Z\text{X}$ émise est donc un neutron ${}_0^1\text{n}$.

$$\text{b} - E'_{\text{MeV}} = \Delta m_u \cdot 931,5 \text{ avec } \Delta m = [m(d) + m(t)] - [m(\alpha) + m_n]$$

$$\text{On a : } E_1(Y)_{\text{MeV}} = [Z \cdot m_p + (A-Z) \cdot m_n - m(Y)]_u \cdot 931,5 \rightarrow m(Y) = Z \cdot m_p + (A-Z) \cdot m_n - \frac{E_1(Y)}{931,5}$$

$$\Delta m = \left[\left(m_p + m_n - \frac{E_1(d)}{931,5} \right) + \left(m_p + 2 \cdot m_n - \frac{E_1(t)}{931,5} \right) \right] - \left[\left(2 \cdot m_p + 2 \cdot m_n - \frac{E_1(\alpha)}{931,5} \right) + m_n \right]$$

$$\rightarrow \Delta m = \left[2 \cdot m_p + 3 \cdot m_n - \frac{E_1(d)}{931,5} - \frac{E_1(t)}{931,5} \right] - \left[2 \cdot m_p + 3 \cdot m_n - \frac{E_1(\alpha)}{931,5} \right] \text{ et } \Delta m = \frac{E_1(\alpha) - E_1(d) - E_1(t)}{931,5}$$

$$E' = \Delta m \cdot 931,5 \rightarrow E' = \frac{E_1(\alpha) - E_1(d) - E_1(t)}{931,5} \cdot 931,5 \text{ et } E' = E_1(\alpha) - E_1(d) - E_1(t)$$

$$\text{A.N : } E' = 28,30 - 2,23 - 8,48 \text{ et } E' = 17,59 \text{ MeV.}$$

$$\text{c} - \mathcal{E}' = \frac{E'}{2+3} \xrightarrow{\text{A.N}} \mathcal{E}' = \frac{17,59}{2+3} \text{ et } \mathcal{E}' = 3,518 \text{ MeV.nucléon}^{-1}.$$

3⁰) On remarque que : $\mathcal{E}' > \mathcal{E}$

A quantités de matière égales, la réaction de fusion dégage plus d'énergie que la réaction de fission.
La fusion est donc plus énergétique que la fission.

Etude d'un texte documentaire :

Exercice 1 :

Le réacteur nucléaire naturel d'Oklo au Gabon

L'uranium naturel se compose de trois isotopes principaux (en % massique) :

${}^{238}_{92}\text{U}$ (abondance = 99,2745 %), ${}^{235}_{92}\text{U}$ (abondance = 0,7200 %), ${}^{234}_{92}\text{U}$ (abondance = 0,0055 %).

Cependant, dans un gisement situé au Gabon, la composition en ${}^{235}_{92}\text{U}$ est égale à 0,440 %.

Seul, l'isotope naturel ${}^{235}_{92}\text{U}$ est fissile. Pour l'utiliser dans les réacteurs nucléaires à eau sous pression, il est nécessaire d'enrichir en ${}^{235}_{92}\text{U}$ le combustible à base d'uranium naturel; le pourcentage en ${}^{235}_{92}\text{U}$ doit atteindre 3%.

... On estime qu'il y a deux milliards d'années, l'abondance de ${}^{235}_{92}\text{U}$ était approximativement 3,5 %.

On explique la baisse d'abondance anormale de ${}^{235}_{92}\text{U}$ dans le gisement du Gabon en faisant l'hypothèse qu'un réacteur naturel a fonctionné sur ce site. On a constaté, au cœur de ce site, une abondance en ${}^{235}_{92}\text{U}$ plus élevée que l'abondance moyenne du gisement de 0,44 %. Cela confirme l'existence d'un réacteur nucléaire qui a fonctionné pendant 1,7 milliard d'années.

Vraisemblablement, les eaux souterraines ont contribué à ralentir les neutrons de fission afin de provoquer la réaction en chaîne. On explique ainsi la présence de zones où l'abondance en ${}^{235}_{92}\text{U}$ est plus élevée que la moyenne.

Le ${}^{238}_{92}\text{U}$, par capture de neutron, peut se transformer en plutonium qui donne du ${}^{239}_{94}\text{Pu}$. Des réactions semblables se produisent dans des réacteurs modernes et sont à l'origine de la production de plutonium.

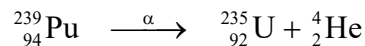
D'après: <http://www.physics.isu.edu>

Questions :

- 1⁰) Pourquoi peut-on affirmer qu'une réaction en chaîne de fission de $^{235}_{92}\text{U}$, comme celle qui peut s'effectuer de nos jours dans les réacteurs nucléaires, pouvait avoir lieu il y a deux milliards d'années ?
- 2⁰) a - Comment expliquer la baisse d'abondance anormale de $^{235}_{92}\text{U}$ dans le gisement du Gabon ?
- b - Quel indice permet de confirmer qu'il y a eu un réacteur nucléaire naturel au Gabon ?
- 3⁰) a - Un isotope est dit "fertile" s'il peut, à l'issue d'une ou plusieurs réactions nucléaires, engendrer un isotope fissile. Citer, d'après le texte, une phrase qui justifie que le $^{238}_{92}\text{U}$ est fertile.
- b - Le plutonium $^{239}_{94}\text{Pu}$ se transforme, par radioactivité, en uranium $^{235}_{92}\text{U}$ avec une période d'environ 24000 ans. Préciser le type de radioactivité que subit le plutonium et écrire l'équation de la réaction nucléaire correspondante.

Réponse :

- 1⁰) Dans les réacteurs nucléaires à eau sous pression, le pourcentage en $^{235}_{92}\text{U}$ doit atteindre 3%. Or on estime qu'il y a deux milliards d'années, l'abondance de $^{235}_{92}\text{U}$ dans le gisement était approximativement 3,5 %.
- 2⁰) a - On explique la baisse d'abondance anormale de $^{235}_{92}\text{U}$ dans le gisement du Gabon en faisant l'hypothèse qu'un réacteur naturel a fonctionné sur ce site.
- b - On a constaté, au cœur de ce site, une abondance en $^{235}_{92}\text{U}$ plus élevée que l'abondance moyenne du gisement de 0,44 %.
- 3⁰) a - Le $^{238}_{92}\text{U}$, par capture de neutron, peut se transformer en plutonium qui donne du $^{235}_{92}\text{U}$.
- b - Le plutonium subit une radioactivité α :



Exercice 2 :

Le fonctionnement d'une centrale nucléaire de type REP (Réacteur à Eau Pressurisée)

Le "réacteur" est l'endroit où se produit la réaction nucléaire (en pratique il s'agit d'une grande cuve métallique).

L'expression "à eau pressurisée" vient du fait que l'eau qui transporte la chaleur, dans le circuit primaire, est sous très forte pression : 155 bars , c'est-à-dire 155 fois la pression atmosphérique.

Une réaction nucléaire se produit dans le cœur du réacteur et dégage une chaleur très importante. La chaleur ainsi produite est transférée à l'eau du circuit primaire. Cette eau est à 300°C environ. A son tour, l'eau du circuit primaire transmet sa chaleur à celle du circuit secondaire et la fait bouillir, autrement dit la transforme en vapeur.

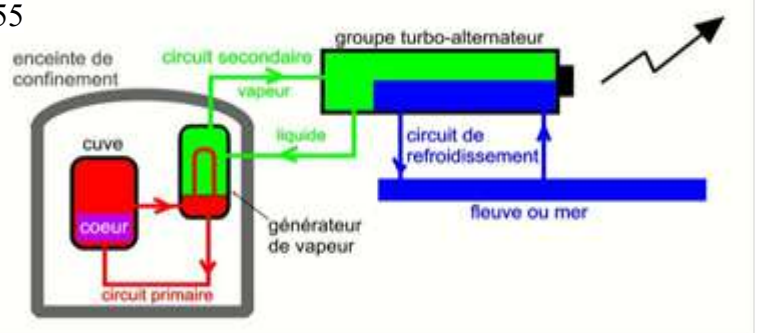
Cette vapeur fait tourner le groupe turbo-alternateur qui produit l'électricité.

La vapeur est refroidie par l'eau du circuit de refroidissement ou circuit tertiaire: elle est condensée, autrement dit elle redevient liquide.

Le risque des centrales nucléaires provient du combustible utilisé, l'uranium.

L'uranium n'est pas classé parmi les éléments les plus toxiques du point de vue de sa radioactivité, mais, lors de la réaction de fission nucléaire qu'il subit dans le cœur - réaction qui produit la chaleur utile - il se transforme en différentes substances qui, elles, sont très radioactives, et donc très dangereuses : cobalt, césium, plutonium, etc...

De plus, cette réaction doit être très soigneusement contrôlée, sous peine de s'emballer ce qui pourrait mener à une fusion catastrophique du cœur (fusion au sens de fondre, la température pouvant atteindre 2000 à 3000°C).



Questions :

1⁰) a - Préciser le circuit (primaire, secondaire ou tertiaire) dans lequel :

a₁ - l'énergie nucléaire est convertie en énergie thermique.

a₂ - l'énergie thermique est convertie en énergie électrique.

b - Justifier l'installation des centrales nucléaires près d'une source d'eau froide (mer, rivière, lac...).

2⁰) a - Indiquer l'origine du risque radioactif dans la centrale nucléaire.

b - Justifier qu'une centrale nucléaire doit être sous contrôle permanent.

3⁰) a - Une centrale fournit annuellement une énergie électrique $W_e = 3,15 \cdot 10^{16}$ J avec un rendement $r = 25\%$. Calculer la valeur de l'énergie nucléaire W_n produite annuellement par la centrale.

b - Sachant que l'énergie libérée lors de la fission d'une mole d'uranium $^{235}_{92}\text{U}$ est $E_m = 1,80 \times 10^{13}$ J, calculer la masse m d'uranium 235 consommée annuellement par la centrale nucléaire.

Réponse :

1⁰) a - a₁: circuit primaire.

a₂: circuit secondaire.

b - L'eau froide sert à refroidir la vapeur dans le circuit tertiaire pour la condenser (elle redevient alors liquide) avant de la réinjecter dans le primaire.

2⁰) a - Le risque radioactif provient des noyaux hautement radioactifs issus de la réaction de fission.

b - La centrale nucléaire doit être sous contrôle permanent pour éviter l'emballement de la réaction de fission.

3⁰) a - $W_e = r \cdot W_n \rightarrow W_n = \frac{W_e}{r}$. A.N: $W_n = \frac{100}{25} \cdot 3,15 \cdot 10^{16}$ et $W_n = 12,60 \cdot 10^{16}$ J.

b - $\frac{W_n}{E_m} = \frac{m}{M(U)} \rightarrow m = M(U) \cdot \frac{W_n}{E_m}$. A.N: $m = 235 \cdot \frac{12,60 \cdot 10^{16}}{1,80 \cdot 10^{13}}$ et $m = 1645 \cdot 10^3$ g ($m = 1645$ Kg)

Exercice 3 :

Une énergie nucléaire à la fois sûre et propre

Si la fission est artificiellement produite dans les centrales nucléaires actuelles, la fusion, elle, s'opère seulement dans quelques laboratoires et dans toutes les étoiles! Dans un réacteur, la fusion la plus facile à obtenir est celle d'un noyau de deutérium avec un noyau de tritium, deux isotopes de l'hydrogène, c'est-à-dire des atomes d'hydrogène avec un surplus de neutrons: le noyau d'hydrogène n'est composé que d'un proton, alors que le deutérium comporte en plus un neutron et le tritium, deux neutrons.

Avantage inestimable : ces deux éléments sont abondants dans la nature. Le deutérium se trouve dans la simple eau de mer, à raison de 33 milligrammes par litre (un litre d'eau a alors la même capacité à produire de l'énergie que 300 litres de pétrole !), et le tritium est tiré du lithium, élément disponible sur Terre dans de nombreux gisements, et dans l'eau également, à raison de 0,17 milligramme par litre. 300 kilogrammes de ce mélange deutérium/tritium suffiraient à faire tourner pendant un an une centrale électrique alimentant un million de personnes.

La fusion présente un autre atout sur la fission: elle ne laisse pas de déchets radioactifs de longue durée de vie, véritable casse-tête du nucléaire actuel. Et elle est sûre: la réaction ne peut pas s'emballer, contrairement à la fission, qui libère un neutron capable d'entraîner à son tour une nouvelle réaction. Dans une réaction de fusion, si l'on coupe l'alimentation en combustible, la réaction s'arrête.

Autre problème majeur: la température. Un réacteur à fusion ne peut simplement pas fonctionner à moins de 100 millions de degrés! Car la réaction est très difficile à obtenir, pour une raison simple : il faut que les deux noyaux de départ soient approchés très près l'un de l'autre, à 10^{-15} mètre (un milliardième de micromètre !), afin que la force d'interaction nucléaire qui peut les lier agisse...

Extrait d'un article de Sciences et vie de Novembre 2003 par Cécile Bonneau

Questions :

1⁰) a - Préciser le symbole de chacun des nucléides : hydrogène, deutérium et tritium.

b - Ecrire l'équation de la réaction de fusion entre le deutérium et le tritium sachant que l'hélium ^4_2He est l'isotope de l'hélium le plus instable (avec une durée de vie de $7,6 \times 10^{-22}$ seconde).

Il se désintègre alors principalement par émission de neutron en hélium ${}^4_2\text{He}$ stable.

c - Citer, d'après le texte, trois avantages de la réaction de fusion par rapport à la réaction de fission.

2⁰) Pourquoi la fusion est-elle qualifiée de :

a - propre

b - sûre

3⁰) a - La réaction de fusion est dite thermonucléaire. Justifier cette appellation.

b - Dédurre, d'après le texte, une estimation de la température au cœur d'une étoile.

Réponse :

1⁰) a - Hydrogène : ${}^1_1\text{H}$, deutérium : ${}^2_1\text{H}$ et tritium : ${}^3_1\text{H}$.

b - ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \longrightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$.

c - Les avantages de la réaction de fusion par rapport à la réaction de fission :

- les réactifs sont très abondants dans la nature.
- elle ne laisse pas de déchets radioactifs de longues durées de vie.
- elle ne peut pas s'emballer.

2⁰) a - La réaction de fusion est propre car elle ne génère pas de déchets radioactifs de longues durées de vie.

b - La réaction de fusion est sûre car elle ne peut pas s'emballer.

3⁰) a - La réaction de fusion est dite thermonucléaire car elle nécessite une très haute température pour s'amorcer.

b - D'après le texte :

- la fusion s'opère seulement dans quelques laboratoires et dans toutes les étoiles.
- un réacteur à fusion ne peut pas fonctionner à moins de 100 millions de degrés.

Donc au cœur d'une étoile, la température est de l'ordre de 100 millions de degrés.

Chimie

L'AVANCEMENT D'UNE RÉACTION

I / Evolution d'un système chimique au cours du temps :

1⁰) Notion de système chimique :

a - Définitions :

- Un système est une partie de l'univers délimitée par des frontières bien définies (réelles ou fictives).

Conséquence : tout ce qui n'appartient pas au système constitue le milieu extérieur (ou environnement).

- Un système chimique est défini par les entités chimiques (atomes, molécules ou ions) qui rentrent dans sa constitution.

Remarque : Un système chimique peut présenter une ou plusieurs phases.

La phase est une portion de système à l'intérieur de laquelle les propriétés physico-chimiques demeurent constantes : une phase est caractérisée par sa composition et son état.

b - Etat d'un système chimique :

L'état d'un système chimique est déterminé par la connaissance, pour chacune de ses phases, de la température et la pression, ainsi que la nature et la quantité de matière de chacun de ses constituants.

2⁰) La transformation chimique :

a - Définitions :

Considérons un système chimique dont la quantité de matière de l'un ou de plusieurs de ses constituants varie au cours du temps avec apparition de nouveaux constituants. On dit alors que le système est le siège d'une transformation chimique.

Remarque : A ne pas confondre avec la transformation physique au cours de laquelle la quantité de matière de chacun des constituants du système reste invariante (en physique classique).

b - Modélisation :

- Une transformation chimique est modélisée par une réaction chimique :

La transformation chimique rend compte de l'évolution du système chimique au cours du temps à l'échelle macroscopique.

La réaction chimique rend compte des interactions ayant lieu entre les entités chimiques constituants le système à l'échelle microscopique.

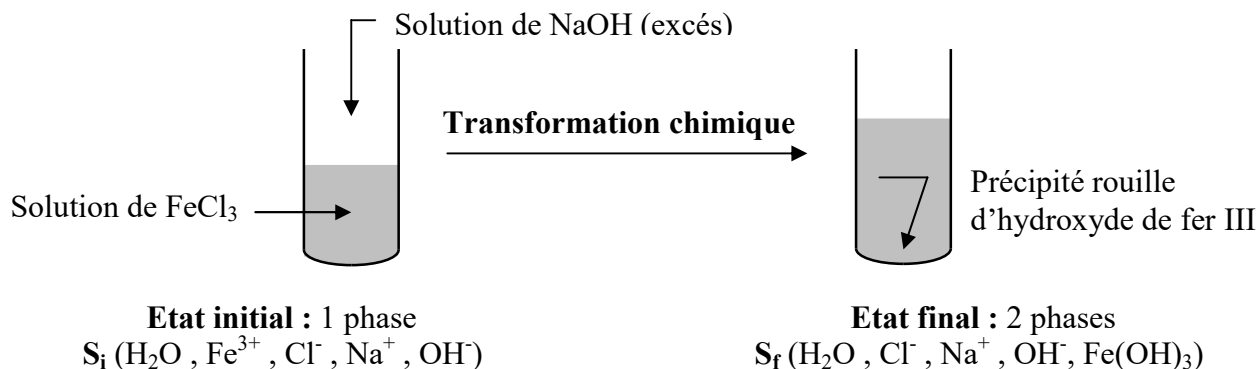
La réaction chimique est associée à la transformation chimique.

Remarque : Au cours d'une transformation chimique :

- les entités chimiques qui disparaissent sont appelées réactifs.
- les entités chimiques qui apparaissent sont appelées produits.

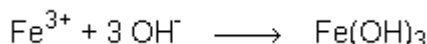
- Une réaction chimique est symbolisée par une équation chimique :

Exemple :



A cette transformation on associe une réaction de précipitation.

L'équation chimique qui symbolise cette réaction est :



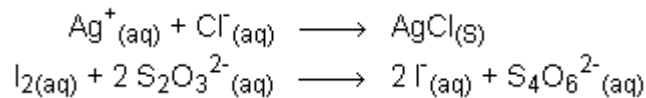
3⁰) Classification cinétique des transformations chimiques :

La cinétique chimique est l'étude de l'évolution des systèmes chimiques au cours du temps.

a - Transformation rapide (instantanée) :

La réaction se produit immédiatement à l'instant où les réactifs sont mis en contact.

Exemples :



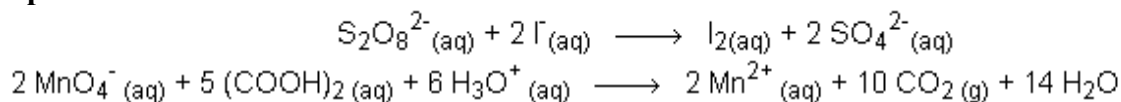
L'évolution du système est si rapide qu'à nos yeux, la transformation semble achevée à l'instant même où elle a commencée.

Remarque : Le qualificatif "rapide" décrit qualitativement la transformation. Si l'on se contente d'un suivi à l'oeil, les modifications d'aspect s'effectuant à l'échelle de la durée de la persistance rétinienne paraîtront quasi-instantanées.

b - Transformation lente :

La réaction n'est pas immédiate, son évolution peut durer quelques secondes, quelques heures, voir quelques jours.

Exemples :

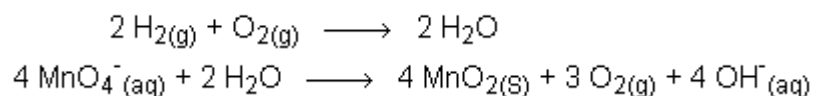


Nos sens nous permettent de suivre le déroulement de la transformation lente.

c - Transformation infiniment lente :

L'évolution du système ne peut être appréciée même après quelques jours.

Exemples :



Remarques :

- Lorsque la transformation est infiniment lente, le système est dit **cinétiquement inerte** (mais il peut évoluer spontanément si on change les conditions expérimentales).

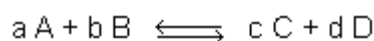
L'apparente stabilité est due à la très grande lenteur de la transformation.

- A ne pas confondre avec un système **stable** où aucune transformation spontanée ne peut avoir lieu.

II / L'avancement d'une réaction :

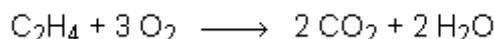
1⁰) Mise en situation :

- Considérons un système chimique fermé (sans transfert de matière) qui subit une transformation chimique. La réaction chimique associée à cette transformation est symbolisée par l'équation chimique :



Les coefficients a, b, c et d sont appelés **coefficients stœchiométriques** dans le sens où ils indiquent les **proportions d'or** (les proportions stœchiométriques) dans lesquelles les réactifs A et B réagissent pour donner les produits C et D.

Exemple :



Remarque : Un mélange est dit stœchiométrique si les quantités de matière initiales des réactifs qui le constituent sont dans les proportions des nombres stœchiométriques de ces réactifs dans l'équation de la réaction.

Les réactifs A et B sont dans les proportions stœchiométriques lorsque : $\frac{n_A(0)}{a} = \frac{n_B(0)}{b}$, $n_A(0)$ et $n_B(0)$

sont les quantités de matière de A et B à l'état initial.

Si à la fin de la transformation chimique, les réactifs sont entièrement consommés alors l'état final n'est constitué que des produits de la réaction.

- Considérons la transformation chimique : $\text{C}_2\text{H}_4 + 3 \text{O}_2 \longrightarrow 2 \text{CO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O}$

Soit v_i le coefficient stœchiométrique du constituant i .

Au cours de la transformation chimique on a :

Etat du système	Quantités de matière (mol)	C_2H_4	O_2	CO_2	H_2O
Initial ($t = 0$)	$n_i(0)$	2	6	0	1
Intermédiaire (t)	$n_i(t)$	1	3	2	3
	$\frac{\Delta n_i}{v_i} = \frac{n_i(t) - n_i(0)}{v_i}$	$\frac{1-2}{1} = -1$	$\frac{3-6}{3} = -1$	$\frac{2-0}{2} = 1$	$\frac{3-1}{2} = 1$

On remarque alors que lors de la transformation chimique on a :

$$-\frac{\Delta n_A(t)}{a} = -\frac{\Delta n_B(t)}{b} = \frac{\Delta n_C(t)}{c} = \frac{\Delta n_D(t)}{d}$$

2⁰) L'avancement d'une réaction :

a - Notion d'avancement :

Au cours de l'évolution du système chimique, le rapport $\left| \frac{\Delta n_i}{v_i} \right|$ est commun à toutes les entités qui interviennent dans la transformation.

On pose alors : $\frac{\Delta n_i}{\pm v_i} = x$ avec $\begin{cases} +v_i & \text{si } i \text{ est un produit} \\ -v_i & \text{si } i \text{ est un réactif} \end{cases}$

Le terme x , positif, est appelé **avancement de la réaction**.

Exemple : Considérons la réaction chimique : $\text{N}_2 + 3 \text{H}_2 \rightleftharpoons 2 \text{NH}_3$

Etat du système	Quantités de matière (mol)	N_2	H_2	NH_3
Initial ($t = 0$)	$n(0)$	2	2	1
Intermédiaire (t)	$n(t)$	$2 - x$	$2 - 3x$	$1 + 2x$

A chaque instant, on a :

$$\begin{aligned} \Delta n(\text{N}_2) &= (2 - 1x) - (2) = -x \\ \Delta n(\text{H}_2) &= (2 - 3x) - (2) = -3x \\ \Delta n(\text{NH}_3) &= (1 + 2x) - (1) = 2x \end{aligned} \Rightarrow \frac{\Delta n(\text{N}_2)}{-1} = \frac{\Delta n(\text{H}_2)}{-3} = \frac{\Delta n(\text{NH}_3)}{2} = x$$

x est alors l'avancement de la réaction considérée.

Remarques :

- L'avancement x , appelé aussi variable de 'de Donder', s'exprime en moles (mol).
- L'avancement x décrit l'évolution du système chimique au cours de la transformation.
- Pour un constituant i du système et à chaque instant on a :

$$n_i(t) = n_i(0) \pm v_i \cdot x \quad \text{avec} \quad \begin{cases} +v_i & \text{si } i \text{ est un produit} \\ -v_i & \text{si } i \text{ est un réactif} \end{cases}$$

La composition de l'état initial d'un système chimique à une influence sur la composition de son état final. L'avancement est un outil qui permet de déterminer les quantités de matière des différentes espèces chimiques présentes au cours de la transformation, jusqu'à l'état final.

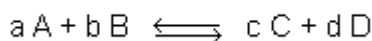
- Si la réaction s'effectue dans un **milieu homogène** de **volume V constant**, on définit alors l'avancement volumique de la réaction par : $y = \frac{x}{V}$

L'avancement volumique y s'exprime en mol.L^{-1} .

b - Le tableau d'avancement :

Le tableau d'avancement est un tableau descriptif de l'évolution de la transformation chimique au cours du temps.

Considérons l'équation de la réaction chimique :



On élabore le tableau descriptif suivant :

Equation de la réaction		$a A + b B \rightleftharpoons c C + d D$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial (t = 0)	0	$n_A(0)$	$n_B(0)$	$n_C(0)$	$n_D(0)$
Intermédiaire (t)	x	$n_A(0) - a.x$	$n_B(0) - b.x$	$n_C(0) + c.x$	$n_D(0) + d.x$
final	x_f	$n_A(0) - a.x_f$	$n_B(0) - b.x_f$	$n_C(0) + c.x_f$	$n_D(0) + d.x_f$

L'état final du système est atteint lorsque la transformation chimique arrive à son terme, c'est-à-dire lorsque le système n'évolue plus.

Application 1 :

On peut produire du dichlore (Cl_2) en faisant réagir du chlorure d'hydrogène (HCl) et du dioxygène (O_2). On obtient en plus de la vapeur d'eau H_2O .

Le graphe ci-contre donne l'évolution des quantités de matière n des réactifs en fonction de l'avancement x de la réaction.

1⁰) Écrire l'équation de la réaction.

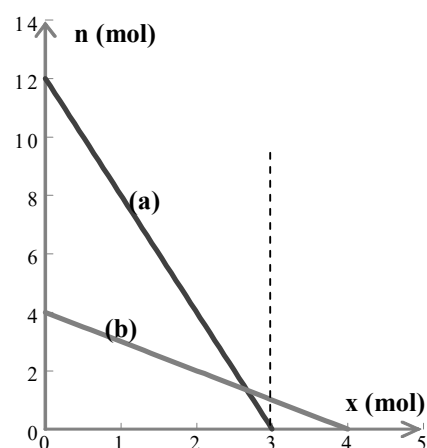
2⁰) Identifier les courbes (a) et (b).

3⁰) Dresser un tableau d'avancement de la réaction en précisant :

- la composition, en quantité de matière, du système dans l'état initial.
- L'expression des quantités de matières des constituants du système en fonction de l'avancement x de la réaction..
- la composition du système, en quantité de matière, dans l'état final.

4⁰) Tracer, sur le même graphique, les courbes représentant l'évolution

des quantités de matière n des produits formés en fonction de l'avancement x de la réaction.



Réponse :

1⁰) $4 HCl + O_2 \longrightarrow 2 Cl_2 + 2 H_2O$

2⁰) on a : $n_i(t) = n_i(0) \pm \nu_i . x$

La courbe (a) est de pente (- 4) → elle correspond à n_{HCl}

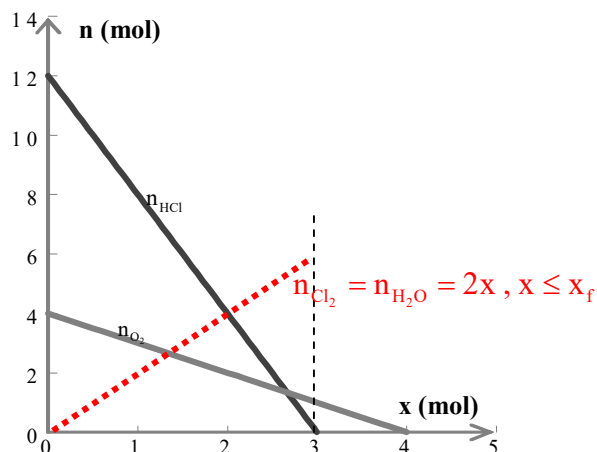
La courbe (b) est de pente (- 1) → elle correspond à n_{O_2}

3⁰)

Equation de la réaction		$4 HCl + O_2 \longrightarrow 2 Cl_2 + 2 H_2O$			
Etat du système	avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	12	4	0	0
Etat intermédiaire	x	$12 - 4x$	$4 - x$	$2x$	$2x$
Etat final	$x_f = 3$	0	1	6	6

$$x \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} 12 - 4x \geq 0 \longrightarrow x \leq 3 \\ 4 - x \geq 0 \longrightarrow x \leq 4 \end{cases} \longrightarrow x_f = 3 \text{ mol}$$

4⁰)



3⁰) le réactif limitant :

Au cours de la transformation chimique, l'avancement x augmente de sorte que les quantités de matière des réactifs diminuent. Si un des réactifs vient à manquer, empêchant la transformation de se poursuivre, il sera appelé **réactif limitant**. Le ou les réactifs restant à l'état final sont appelés réactifs **en excès**.

Le réactif limitant est alors celui qui disparaît le premier au cours de la transformation :

- Si les réactifs étaient dans les proportions stœchiométriques, alors :

$$\frac{n_A(0)}{a} = \frac{n_B(0)}{b} \rightarrow \frac{n_A(0)}{n_B(0)} = \frac{a}{b}$$

- Si $\frac{n_A(0)}{n_B(0)} > \frac{a}{b} \rightarrow$ B est limitant (A en excès)

- Si $\frac{n_A(0)}{n_B(0)} < \frac{a}{b} \rightarrow$ A est limitant (B en excès)

Exemple : Considérons le tableau d'avancement suivant :

Equation de la réaction		$\text{C}_2\text{H}_6\text{O} + 3 \text{O}_2 \longrightarrow 2 \text{CO}_2 + 3 \text{H}_2\text{O}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial (t = 0)	0	0,2	0,4	0	0
Intermédiaire (t)	x	$0,2 - x$	$0,4 - 3x$	2x	3x
final	$x_f = 0,133$	0,067	0	0,266	0,399

$$\frac{n_{\text{C}_2\text{H}_6\text{O}}(0)}{n_{\text{O}_2}(0)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5 > \frac{1}{3} \rightarrow \text{O}_2 \text{ est limitant (C}_2\text{H}_6\text{O est en excès)}$$

$$\rightarrow 0,4 - 3x_f = 0 \rightarrow x_f = \frac{0,4}{3} = 0,133 \text{ mol}$$

Remarque : lorsque le réactif limitant est **totalement épuisé**, l'avancement est **maximal** x_{max} .

Application 2 :

Le fer brûle dans le dioxygène pour donner un oxyde de fer de formule Fe_3O_4 .

On mélange initialement 0,2 mol de fer et 0,05 mol de dioxygène.

1⁰) En réalisant un tableau décrivant l'évolution du système chimique lors de cette réaction, identifier le réactif limitant et déterminer les quantités de matière des espèces présentes à l'état final ?

2⁰) Calculer le volume de dioxygène nécessaire pour opérer dans les proportions stœchiométriques.

Dans les conditions de l'expérience, le volume molaire est $V_M = 24,0 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Réponse :

1⁰)

Equation de la réaction		3 Fe	+	2O ₂	→	Fe ₃ O ₄
Etat du système	avancement (mol)	Quantités de matière (mol)				
Etat initial	0	0,2		0,05		0
Etat intermédiaire	x	0,2 - 3x		0,05 - 2x		x
Etat final	x _f = x _{max} = 0,025	0,125		0		0,025

$$\frac{n_0(\text{Fe})}{n_0(\text{O}_2)} = \frac{0,2}{0,05} = 4 > \frac{3}{2} \longrightarrow \text{O}_2 \text{ est limitant}$$

$$0,05 - 2x_{\text{max}} = 0 \longrightarrow x_{\text{max}} = 0,025 \text{ mol}$$

$$2^0) \text{ Proportions stœchiométriques } \rightarrow \frac{n_0(\text{Fe})}{n_0(\text{O}_2)} = \frac{3}{2} \rightarrow n_0(\text{O}_2) = n_0(\text{Fe}) \frac{2}{3}$$

$$\text{A.N : } n_0(\text{O}_2) = 0,2 \frac{2}{3} = \frac{0,4}{3} \text{ et } n_0(\text{O}_2) = 0,133 \text{ mol.}$$

$$\text{or } n_0(\text{O}_2) = \frac{V_0(\text{O}_2)}{V_M} \rightarrow V_0(\text{O}_2) = n_0(\text{O}_2) \cdot V_M. \quad \text{A.N : } V_0(\text{O}_2) = \frac{0,4}{3} \cdot 24 \text{ et } V_0(\text{O}_2) = 3,2 \text{ L.}$$

Pour en savoir plus

1⁰) Description de l'état d'un système chimique :

- Pour décrire l'état d'un système chimique, il faut préciser :
 - la pression P et la température du système.
 - la formule brute, l'état physique (solide, liquide ou gaz) et la quantité de matière de chaque espèce chimique contenue dans le système.

Remarque : L'état physique d'un constituant A du système est indiqué par un indice :

état physique de A	solide	liquide	gaz
notation	$A_{(s)}$	$A_{(l)}$	$A_{(g)}$

Si le constituant A est un soluté en solution aqueuse, il sera noté : $A_{(aq)}$.

- Dans un système chimique, des espèces chimiques peuvent réagir entre elles pour donner d'autres espèces chimiques (contenues déjà dans le système ou nouvellement apparues). Dans ce cas, les quantités de matière de ces constituants vont varier, depuis leurs valeurs initiales, jusqu'à atteindre des valeurs finales constantes dans le temps.

L'état du système chimique évolue donc dans le temps depuis **un état initial** E_i jusqu'à **un état final** E_f .

Lorsque l'état du système chimique évolue dans le temps, on dit que le système chimique est le siège d'une **transformation chimique**.

- Au cours d'une transformation chimique :
 - les espèces chimiques dont la quantité de matière diminue au cours du temps sont des réactifs.
 - les espèces chimiques dont la quantité de matière augmente au cours du temps sont des produits.
 - les espèces chimiques qui ne participent pas à la transformation sont des espèces spectatrices (ou inertes).
- Exemple :

Dans un bêcher contenant un volume $V = 0,1 \text{ L}$ d'une solution aqueuse de nitrate d'argent AgNO_3 de concentration molaire $C = 2 \text{ mol.L}^{-1}$, on introduit $n_0(\text{Cu}) = 1 \text{ mol}$ de cuivre et $n_0(\text{Ag}) = 0,1 \text{ mol}$ d'argent.

Pression : P = 1 atm Température : θ = 25 °C	
Cu _(s)	n _i (Cu) = n _o (Cu) = 1 mol
Ag _(s)	n _i (Ag) = n _o (Ag) = 0,1 mol
Ag ⁺ _(aq)	n _i (Ag ⁺) = C.V → n _i (Ag ⁺) = 0,2 mol
NO ₃ ⁻ _(aq)	n _i (NO ₃ ⁻) = C.V → n _i (NO ₃ ⁻) = 0,2 mol
H ₂ O	solvant
Etat initial E _i	

Transformation chimique

Pression : P = 1 atm Température : θ = 25 °C	
Cu _(s)	n _f (Cu) = 0,9 mol
Ag _(s)	n _f (Ag) = 0,3 mol
Cu ²⁺ _(aq)	n _f (Cu ²⁺) = 0,1 mol
NO ₃ ⁻ _(aq)	n _f (NO ₃ ⁻) = 0,2 mol
H ₂ O	solvant
Etat final E _f	

Au cours de la transformation chimique :

- * $\begin{cases} n(\text{Cu}) \text{ diminue} \\ \text{Ag}^+ \text{ disparaît} \end{cases} \rightarrow \text{Cu et Ag}^+ \text{ sont des réactifs.}$
- * $\begin{cases} n(\text{Ag}) \text{ augmente} \\ \text{Cu}^{2+} \text{ apparaît} \end{cases} \rightarrow \text{Ag et Cu}^{2+} \text{ sont des produits.}$
- * $n_i(\text{NO}_3^-) = n_f(\text{NO}_3^-) \rightarrow \text{NO}_3^- \text{ est un ion spectateur.}$

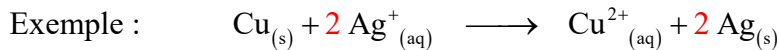
Remarques :

L'ensemble des espèces présentes lors de la transformation chimique constitue le mélange réactionnel.

Le contenant du mélange réactionnel est le réacteur.

- A la transformation chimique on associe une réaction chimique dans laquelle les réactifs se transforment en produits tout en respectant les lois de conservations suivantes :
 - loi de conservation des éléments chimiques
 - loi de conservation de la charge électrique

La réaction chimique est symbolisée par une équation chimique dans laquelle chaque espèce chimique est précédée par un coefficient afin d'ajuster la stœchiométrie de la réaction. Ainsi les lois de conservations seront vérifiées. Ces coefficients sont appelés coefficients stœchiométriques.



Remarques :

- * Les coefficients stœchiométriques sont les plus petits entiers qui vérifient la stœchiométrie de la réaction.
- * Si le coefficient stœchiométrique est égal à 1, on ne le fait pas apparaître.
- * Dans l'équation de la réaction, on ne fait pas apparaître les espèces spectatrices.
- * D'une façon synthétique, on peut écrire :

$$\sum_i \nu_i \cdot R_i = \sum_j \nu_j \cdot P_j \quad \text{où} \quad \begin{cases} \nu_i & \text{et le coefficient stœchiométrique du réactif } R_i \\ \nu_j & \text{et le coefficient stœchiométrique du produit } P_j \end{cases}$$

On définit également des coefficients stœchiométriques **algébriques** tels que : $\begin{cases} \nu < 0 & \text{pour un réactif} \\ \nu > 0 & \text{pour un produit} \end{cases}$

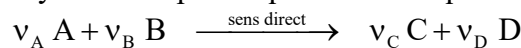
La forme synthétique de l'équation de la réaction s'écrit alors :

$$\sum_i \nu_i \cdot A_i = 0 \quad \text{où} \quad \nu_i \text{ est le coefficient stœchiométrique algébrique du composé } A_i$$

2⁰) Evolution de l'état d'un système chimique au cours du temps :

a - L'avancement d'une réaction :

Considérons une réaction chimique symbolisée par l'équation chimique :



Soit $n_i(0)$ la quantité de matière initiale du constituant i du mélange réactionnel.

A l'instant t , la quantité de matière du constituant i devient $n_i(t)$. Elle évolue de $\Delta n_i(t) = n_i(t) - n_i(0)$.

La stœchiométrie implique que : $-\frac{\Delta n_A(t)}{\nu_A} = -\frac{\Delta n_B(t)}{\nu_B} = \frac{\Delta n_C(t)}{\nu_C} = \frac{\Delta n_D(t)}{\nu_D}$

Au cours de l'évolution de l'état du système chimique et à chaque instant, le terme $\left| \frac{\Delta n_i(t)}{\nu_i} \right|$ est commun à tous les constituants du mélange réactionnel. Ce terme, **positif**, permet de suivre l'évolution de la réaction au cours du temps. On l'appelle **avancement** de la réaction et on le note $x(t)$.

L'avancement de la réaction s'exprime donc par : $x(t) = \frac{\Delta n_i(t)}{\pm \nu_i}$ avec $\begin{cases} +\nu_i & \text{si } i \text{ est un produit} \\ -\nu_i & \text{si } i \text{ est un réactif} \end{cases}$

Lorsque le système chimique évolue depuis l'état initial jusqu'à l'état final, l'avancement de la réaction varie de $x(t_i = 0) = 0$ jusqu'à $x(t_f) = x_f$.

x_f désigne l'avancement final de la réaction. Il est atteint lorsque le système chimique n'évolue plus.

Remarques :

* L'avancement de la réaction s'exprime en mol.

* $x(t) = \frac{\Delta n_i(t)}{\pm \nu_i}$ avec $\begin{cases} +\nu_i & \text{si } i \text{ est un produit} \\ -\nu_i & \text{si } i \text{ est un réactif} \end{cases} \rightarrow n_i(t) = n_i(0) \pm \nu_i \cdot x(t)$ avec $\begin{cases} +\nu_i & \text{si } i \text{ est un produit} \\ -\nu_i & \text{si } i \text{ est un réactif} \end{cases}$

* Si le mélange réactionnel est homogène de volume constant V , on définit l'avancement volumique de la réaction par $y(t) = \frac{x(t)}{V}$ (s'exprime en mol.L⁻¹).

b - Le réactif limitant :

• Soit ν_i le coefficient stœchiométrique du **réactif** i du mélange réactionnel. On a : $n_i(t) = n_i(0) - \nu_i \cdot x(t)$

$$n_i(t) \geq 0 \rightarrow n_i(0) - \nu_i \cdot x(t) \geq 0 \rightarrow x(t) \leq \frac{n_i(0)}{\nu_i}$$

Au cours d'une réaction chimique, $0 \leq x \leq x_{\max}$ tel que : $x_{\max} = \min\left(\frac{n_i(0)}{v_i}\right)$.

- Le réactif limitant est le réactif qui est le premier à être totalement consommé au cours d'une réaction chimique. La disparition complète du réactif limitant empêche la réaction de se poursuivre (l'état final du système chimique est alors atteint).

Considérons la réaction chimique : $v_A A + v_B B \xrightarrow{\text{sens direct}} v_C C + v_D D$

- Si $\frac{n_A(0)}{v_A} < \frac{n_B(0)}{v_B}$ $\left(\frac{n_A(0)}{v_A} < \frac{v_A}{v_B} \right) \rightarrow A$ est le réactif limitant (B en excès).

$$x_{\max} = \min\left(\frac{n_A(0)}{v_A}, \frac{n_B(0)}{v_B}\right) \text{ et } x_{\max} = \frac{n_A(0)}{v_A}.$$

- Si $\frac{n_A(0)}{v_A} > \frac{n_B(0)}{v_B}$ $\left(\frac{n_A(0)}{v_A} > \frac{v_A}{v_B} \right) \rightarrow B$ est le réactif limitant (A en excès).

$$x_{\max} = \min\left(\frac{n_A(0)}{v_A}, \frac{n_B(0)}{v_B}\right) \text{ et } x_{\max} = \frac{n_B(0)}{v_B}.$$

- Si $\frac{n_A(0)}{v_A} = \frac{n_B(0)}{v_B}$ $\left(\frac{n_A(0)}{v_A} = \frac{v_A}{v_B} \right) \rightarrow A$ et B sont en proportions stœchiométriques.

$$x_{\max} = \min\left(\frac{n_A(0)}{v_A}, \frac{n_B(0)}{v_B}\right) \text{ et } x_{\max} = \frac{n_A(0)}{v_A} = \frac{n_B(0)}{v_B}.$$

c - Le tableau d'avancement :

L'évolution de l'état d'un système chimique au cours du temps est décrite dans un tableau où on inscrit les valeurs (ou les expressions en fonction de l'avancement) des quantités de matière des différents constituants du mélange réactionnel à l'état initial, à un état intermédiaire et à l'état final.

Exemple :

Equation de la réaction		$\text{Cu}_{(s)} + 2 \text{Ag}^+_{(aq)} \longrightarrow \text{Cu}^{2+}_{(aq)} + 2 \text{Ag}_{(s)}$			
Etat du système	Avancement de la réaction (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	1	0,2	0	0,1
Intermédiaire	x	1-x	0,2-2.x	x	0,1+2.x
final	$x_f = x_{\max} = 0,1$	0,9	0	0,1	0,3

$$x_{\max} = \min\left(\frac{n_{\text{Cu}}(0)}{v_{\text{Cu}}}, \frac{n_{\text{Ag}^+}(0)}{v_{\text{Ag}^+}}\right) \rightarrow x_{\max} = \min\left(\frac{1}{1}, \frac{0,2}{2}\right) = \min(1; 0,1) \text{ et } x_{\max} = 0,1 \text{ mol (Ag}^+ \text{ est limitant)}.$$

Remarque :

$$* \begin{cases} 1 - x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 1 \text{ mol} \\ 0,2 - 2.x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 0,1 \text{ mol} \end{cases} \xrightarrow[\text{la plus petite}]{\text{on prend la valeur}} x_{\max} = 0,1 \text{ mol}.$$

$$n_f(\text{Ag}^+) = 0 \rightarrow \text{Ag}^+ \text{ est limitant}.$$

$$* \begin{cases} \frac{n_{\text{Cu}}(0)}{v_{\text{Cu}}} = \frac{1}{1} = 1 \\ \frac{n_{\text{Ag}^+}(0)}{v_{\text{Ag}^+}} = \frac{0,2}{2} = 0,1 \end{cases} \rightarrow \frac{n_{\text{Ag}^+}(0)}{v_{\text{Ag}^+}} < \frac{n_{\text{Cu}}(0)}{v_{\text{Cu}}} \rightarrow \text{Ag}^+ \text{ est le réactif limitant}.$$

$$n_f(\text{Ag}^+) = 0 \rightarrow 0,2 - 2.x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 0,1 \text{ mol}.$$

Applications

Exercice 1 :

L'eau oxygénée contient des molécules H_2O_2 qui sont capables d'oxyder les ions tartrate $\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6^{2-}$. Pour réaliser la transformation chimique correspondante, on mélange une solution d'eau oxygénée avec une solution contenant les ions tartrate. Le mélange réactionnel est ensuite légèrement acidifié.

On supposera que la transformation chimique est totale.

On donne ci-dessous le tableau descriptif de l'évolution du système chimique considéré :

Equation chimique		$5\text{H}_2\text{O}_2 + \text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6^{2-} + 2\text{H}_3\text{O}^+ \longrightarrow 10\text{H}_2\text{O} + 4\text{CO}_2$				
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)				
Initial	0	n_0	10^{-2}	Excès	Excès	0
Intermédiaire	x	$n_0 - 5x$	$10^{-2} + ax$	Excès	Excès	bx
final	x_f	$5 \cdot 10^{-2}$	0	Excès	Excès	c

1⁰) Quelles sont les valeurs de a et b dans le tableau ?

2⁰) a - D'après le tableau, quel est le réactif limitant ? Justifier la réponse.

b - En déduire la valeur de l'avancement final x_f .

c - Quelle est alors la valeur de c dans le tableau ?

d - Trouver la valeur de n_0 .

3⁰) a - Quelle serait la valeur de n_0 si le mélange était stœchiométrique ?

b - La valeur de x_f changerait-elle dans ce cas ? Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰) Au cours d'une transformation chimique et à chaque instant, la quantité de matière d'une entité chimique qui participe à la transformation est donnée par :

$$n_i(t) = n_i(0) \pm \nu_i \cdot x \quad \text{où } \nu_i : \text{coefficient stœchiométrique du constituant } i \text{ du système chimique}$$

$$\text{avec } \begin{cases} + \nu_i & \text{si } i \text{ est un produit} \\ - \nu_i & \text{si } i \text{ est un réactif} \end{cases}$$

donc : $a = -1$ et $b = 4$.

2⁰) a - D'après le tableau d'avancement, la quantité de matière de l'ion tartrate à l'état final est nulle ; les ions tartrate sont alors totalement consommés au cours de la transformation ; donc l'ion tartrate est le réactif limitant.

b - A l'état final, on a : $n_f(\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6^{2-}) = 0 \rightarrow 10^{-2} - x_f = 0$ et $x_f = 10^{-2}$ mol.

c - On a : $c = 4 x_f \rightarrow c = 4 \cdot 10^{-2}$ mol.

d - On a : $n_0 - 5x_f = 5 \cdot 10^{-2} \rightarrow n_0 = 5 \cdot 10^{-2} + 5x_f = 5 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-2}$ et $n_0 = 10^{-1}$ mol.

3⁰) a - Mélange stœchiométrique $\rightarrow \frac{n_0(\text{H}_2\text{O}_2)}{n_0(\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6^{2-})} = \frac{5}{1} \rightarrow \frac{n_0}{10^{-2}} = 5$ et $n_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ mol.

b - La valeur de x_f ne change pas car dans ce cas aussi et à l'état final, les ions tartrate sont totalement épuisés.

Exercice 2 :

On considère le tableau d'avancement incomplet suivant :

Equation chimique		$\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2\text{I}^- \longrightarrow \text{I}_2 + 2\text{SO}_4^{2-}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	n	$8 \cdot 10^{-3}$	0	0
Intermédiaire	x			x	
final	$x_f = x_{\max}$	$n - x_f$	$2 \cdot 10^{-3}$		$2 \cdot x_f$

1⁰) Recopier et compléter le tableau d'avancement.

2⁰) a - Pourquoi peut-on affirmer que $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ est le réactif limitant ?

b - Calculer la valeur de l'avancement final x_f . En déduire celle de n .

3⁰) On fait varier la valeur de n .

A partir de quelle valeur n_0 de n l'avancement final x_f devient-il indépendant de la valeur de n ?

Réponse :

1⁰)

Equation chimique		$\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2 \text{I}^- \longrightarrow \text{I}_2 + 2 \text{SO}_4^{2-}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	n	$8 \cdot 10^{-3}$	0	0
Intermédiaire	x	$n - x$	$8 \cdot 10^{-3} - 2x$	x	$2x$
final	$x_f = x_{\max}$	$n - x_f$	$2 \cdot 10^{-3}$	x_f	$2x_f$

2⁰) a - A l'état final, $n_f(\text{I}^-) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \neq 0 \rightarrow \text{I}^-$ est le réactif en excès

et par conséquent $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ est le réactif limitant.

b - On a : $n_f(\text{I}^-) = 8 \cdot 10^{-3} - 2x_f = 2 \cdot 10^{-3} \rightarrow x_f = \frac{8 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}}{2}$ et $x_f = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$.

Le réactif $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ étant limitant $\rightarrow n_f(\text{S}_2\text{O}_8^{2-}) = n - x_f = 0 \rightarrow n = x_f$ et $n = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$.

3⁰) L'avancement final x_f dépend de la quantité de matière initiale du réactif limitant.

x_f devient indépendant de $n \rightarrow$ le réactif I^- est alors limitant

$\rightarrow n_f(\text{I}^-) = 8 \cdot 10^{-3} - 2x'_f = 0$ et $x'_f = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$.

Le réactif $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ est en excès donc à l'état final, $n_f(\text{S}_2\text{O}_8^{2-}) = n - x'_f > 0 \rightarrow n > x'_f$

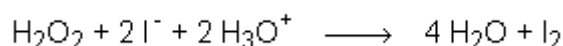
On en conclue qu'à partir de

$n_0 = x'_f = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$, l'avancement final x_f devient indépendant de la valeur de n .

Exercice 3 :

On se propose d'étudier l'évolution, au cours du temps, de l'oxydation des ions iodures (I^-) par le peroxyde d'hydrogène (H_2O_2) en milieu acide (excès d'ions H_3O^+).

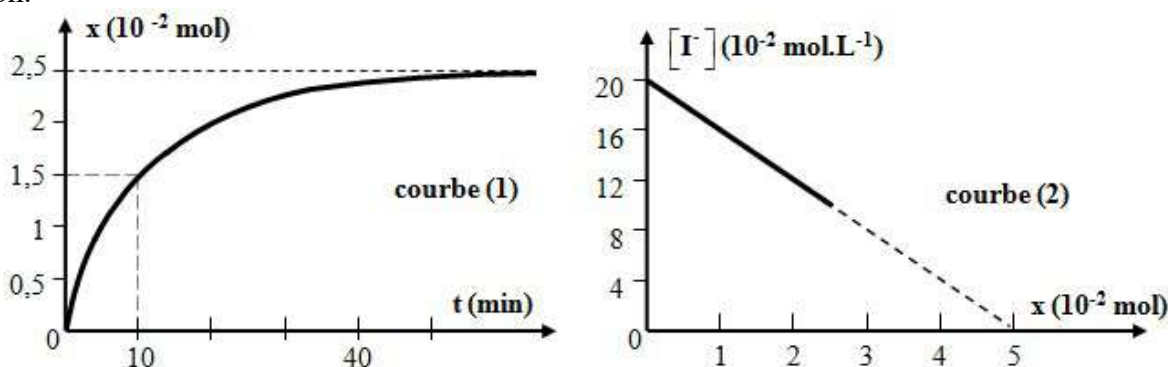
L'équation chimique qui symbolise la réaction associée à la transformation chimique étudiée est :



Le volume du milieu réactionnel est $V = 0,5 \text{ L}$.

La courbe (1) représente la variation de l'avancement x de la réaction au cours du temps.

La courbe (2) représente la variation de la molarité $[\text{I}^-]$ des ions iodure en fonction de l'avancement x de la réaction.



1⁰) D'après les courbes (1) et (2) :

a - Déterminer la quantité de matière initiale $n_0(\text{I}^-)$ d'ions iodure utilisée.

b - Quelle est la valeur de l'avancement final x_f de la réaction ?

c - Montrer que (I^-) n'est pas le réactif limitant.

2⁰) a - Calculer la quantité de matière initiale $n_0(\text{H}_2\text{O}_2)$ de peroxyde d'hydrogène utilisée.

b - Déterminer la molarité $[\text{H}_2\text{O}_2]$ du peroxyde d'hydrogène à l'instant $t = 10 \text{ min}$.

Réponse :

1⁰) a - D'après la courbe (2) : $n_0(\text{I}^-) = [\text{I}^-]_0 \cdot V$ A.N : $n_0(\text{I}^-) = 20 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5$ et $n_0(\text{I}^-) = 10^{-1} \text{ mol}$.

b - D'après la courbe (1) : $x_f = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

c - A l'état final : $n_f(\text{I}^-) = n_0(\text{I}^-) - 2x_f \xrightarrow{\text{A.N}} n_f(\text{I}^-) = 10^{-1} - 2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}$ et $n_f(\text{I}^-) = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

$n_f(\text{I}^-) \neq 0$ donc (I^-) n'est pas le réactif limitant.

2⁰) a - H_2O_2 est limitant $\rightarrow n_f(\text{H}_2\text{O}_2) = n_0(\text{H}_2\text{O}_2) - x_f = 0$

$\rightarrow n_0(\text{H}_2\text{O}_2) = x_f$ et $n_0(\text{H}_2\text{O}_2) = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

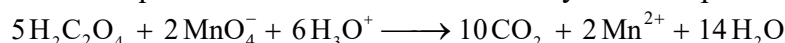
b - A $t = 10 \text{ min}$ et d'après la courbe (1) : $x = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

$n(\text{H}_2\text{O}_2) = n_0(\text{H}_2\text{O}_2) - x \xrightarrow{\text{A.N}} n(\text{H}_2\text{O}_2) = 2,5 \cdot 10^{-2} - 1,5 \cdot 10^{-2}$ et $n(\text{H}_2\text{O}_2) = 10^{-2} \text{ mol}$.

$[\text{H}_2\text{O}_2] = \frac{n(\text{H}_2\text{O}_2)}{V} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{H}_2\text{O}_2] = \frac{10^{-2}}{0,5}$ et $[\text{H}_2\text{O}_2] = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Exercice 4 :

On étudie la transformation chimique dont la réaction associée est symbolisée par l'équation chimique :



On supposera que la transformation chimique est totale.

A la date $t = 0$, on mélange un volume $V_1 = 30 \text{ mL}$ d'une solution (S_1) de permanganate de potassium KMnO_4 de concentration molaire C_1 et un volume $V_2 = 20 \text{ mL}$ d'une solution (S_2) d'acide oxalique $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ de concentration molaire C_2 en présence d'un excès d'ions hydronium H_3O^+ .

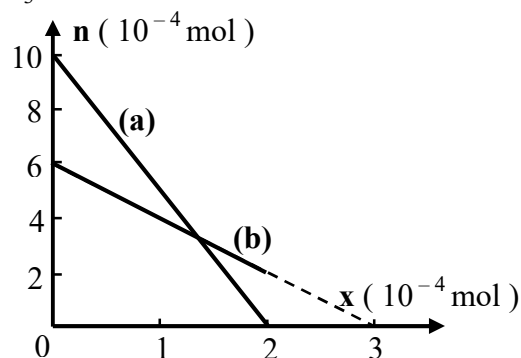
1⁰) L'évolution des quantités de matière n des réactifs MnO_4^- et $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ en fonction de l'avancement x de la réaction est donnée par le graphe ci-contre:

a - Montrer que la courbe (a) correspond au réactif $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ et que la courbe (b) correspond au réactif MnO_4^- .

b - Déterminer les valeurs des concentrations molaires C_1 et C_2 respectivement des solutions (S_1) et (S_2) utilisées.

c - Dédurre graphiquement le réactif limitant ainsi que la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

2⁰) Recopier et compléter le tableau d'avancement de la réaction représenté ci-dessous :



Equation chimique		$5\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 + 2\text{MnO}_4^- + 6\text{H}_3\text{O}^+ \longrightarrow 10\text{CO}_2 + 2\text{Mn}^{2+} + 14\text{H}_2\text{O}$					
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)					
Initial	0			Excès			Excès
Intermédiaire	x			Excès			Excès
final	x_f			Excès			Excès

3⁰) a - Quelle devrait être la valeur C_2' de la concentration molaire de la solution (S_2) d'acide oxalique pour que le mélange soit stœchiométrique ?

b - Calculer alors la nouvelle valeur x_f' de l'avancement final de la réaction.

Réponse :

1⁰) a - Au cours d'une transformation chimique et à chaque instant, la quantité de matière d'une entité chimique qui participe à la transformation est donnée par :

$n_i(t) = n_i(0) \pm v_i \cdot x$ où v_i : coefficient stœchiométrique du constituant i du système chimique

$$\text{avec} \begin{cases} + v_i & \text{si } i \text{ est un produit} \\ - v_i & \text{si } i \text{ est un réactif} \end{cases}$$

Graphiquement : $n_i = f(x)$ est une droite de pente $a = \pm v_i$

La courbe (a) est de pente $a = \frac{(10-0) \cdot 10^{-4}}{(0-2) \cdot 10^{-4}} = -5 \rightarrow$ la courbe (a) correspond au réactif $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$.

La courbe (b) est de pente $a = \frac{(6-0) \cdot 10^{-4}}{(0-3) \cdot 10^{-4}} = -2 \rightarrow$ la courbe (b) correspond au réactif MnO_4^- .

b - $n_0(\text{MnO}_4^-) = C_1 \cdot V_1 \rightarrow C_1 = \frac{n_0(\text{MnO}_4^-)}{V_1}$. A.N : $C_1 = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{30 \cdot 10^{-3}}$ et $C_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

$n_0(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4) = C_2 \cdot V_2 \rightarrow C_2 = \frac{n_0(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4)}{V_2}$. A.N : $C_2 = \frac{10 \cdot 10^{-4}}{20 \cdot 10^{-3}}$ et $C_2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

c - Le réactif limitant est celui dont la quantité de matière s'épuise la première au cours de la réaction chimique.

Graphiquement, $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ est le réactif limitant et à l'état final, $n_f(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4) = 0$ pour $x_f = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$.

Equation chimique		$5 \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 + 2 \text{MnO}_4^- + 6 \text{H}_3\text{O}^+ \longrightarrow 10 \text{CO}_2 + 2 \text{Mn}^{2+} + 14 \text{H}_2\text{O}$					
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)					
Initial	0	$10 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	Excès	0	0	Excès
Intermédiaire	x	$10 \cdot 10^{-4} - 5x$	$6 \cdot 10^{-4} - 2x$	Excès	10x	2x	Excès
final	x_f	0	$2 \cdot 10^{-4}$	Excès	$20 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	Excès

$$\frac{n_0(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4)}{n_0(\text{MnO}_4^-)} = \frac{10 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-4}} = 1.66 < \frac{5}{2} \rightarrow \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 \text{ est limitant. Donc : } 10 \cdot 10^{-4} - 5x_f = 0 \text{ et } x_f = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol.}$$

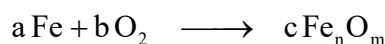
3⁰) a - Mélange stœchiométrique $\rightarrow \frac{n_0(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4)}{n_0(\text{MnO}_4^-)} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{C'_2 \cdot V_2}{n_0(\text{MnO}_4^-)} = \frac{5}{2}$ et $C'_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{n_0(\text{MnO}_4^-)}{V_2}$.

A.N : $C'_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-4}}{20 \cdot 10^{-3}}$ et $C'_2 = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - A l'état final, $n_f(\text{MnO}_4^-) = 0 \rightarrow 6 \cdot 10^{-4} - 2x'_f = 0$ et $x'_f = 3 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$.

Exercice 5 :

On considère la transformation chimique, supposée totale, dont la réaction associée est symbolisée par l'équation chimique:



Un système chimique contient initialement $n_0(\text{Fe})$ moles

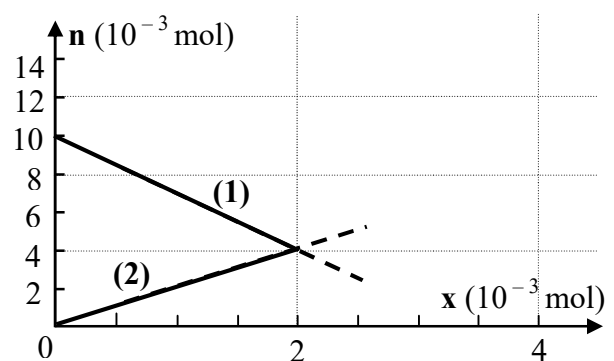
de Fe et $n_0(\text{O}_2)$ moles de O_2 .

Le graphique ci-contre représente les variations, en fonction de l'avancement de la réaction x , des quantités de matière des espèces O_2 et $\text{Fe}_n \text{O}_m$.

1⁰) a - Justifier que la courbe (1) correspond au réactif O_2 et que la courbe (2) correspond au produit $\text{Fe}_n \text{O}_m$.

b - Déduire graphiquement la valeur de $n_0(\text{O}_2)$.

c - Montrer, d'après le graphique, que $b = 3$ et $c = 2$.



2⁰) Pour $x = 2.10^{-3}$ mol, on constate que : $n(\text{Fe}) = n(\text{O}_2) = n(\text{Fe}_n\text{O}_m)$.

a - Sachant que l'avancement maximal de la réaction est $x_{\max} = 3.10^{-3}$ mol, justifier que O_2 ne peut pas être le réactif limitant.

b - Montrer que $a = 4$ et que $n_0(\text{Fe}) = 12.10^{-3}$ mol.

c - Déterminer les valeurs de n et m dans la formule de l'oxyde de fer Fe_nO_m .

3⁰) Dresser alors le tableau d'avancement de la réaction étudiée.

Réponse :

1⁰) a - La quantité de matière du réactif O_2 diminue en fonction de l'avancement x suivant:

$n_t(\text{O}_2) = n_0(\text{O}_2) - b.x$. Elle est représentée par une droite de pente négative. La courbe (1) correspond donc au réactif O_2 .

La quantité de matière du produit Fe_nO_m augmente en fonction de l'avancement x suivant:

$n_t(\text{Fe}_n\text{O}_m) = 0 + c.x$. Elle est représentée par une droite de pente positive. La courbe (2) correspond donc au produit Fe_nO_m .

b - Graphiquement : $n_0(\text{O}_2) = 10.10^{-3}$ mol.

c - D'après la courbe (1), on a : $n_t(\text{O}_2) = n_0(\text{O}_2) - b.x$ avec $-b = \frac{(10-4).10^{-3}}{(0-2).10^{-3}} \rightarrow b = 3$.

D'après la courbe (2), on a : $n_t(\text{Fe}_n\text{O}_m) = 0 + c.x$ avec $c = \frac{(4-0).10^{-3}}{(2-0).10^{-3}} \rightarrow c = 2$.

2⁰) a - A l'état final : $n_f(\text{O}_2) = n_0(\text{O}_2) - 3.x_{\max} \rightarrow n_f(\text{O}_2) = 10.10^{-3} - 3.3.10^{-3}$ et $n_f(\text{O}_2) = 10^{-3}$ mol.

$n_f(\text{O}_2) \neq 0$ donc le réactif O_2 n'est pas limitant

b - Fe est limitant $\rightarrow n_f(\text{Fe}) = 0 \rightarrow n_0(\text{Fe}) - a.x_{\max} = 0 \xrightarrow{x_{\max}=3.10^{-3} \text{ mol}} n_0(\text{Fe}) = 3.a.10^{-3}$ mol.

Pour $x = 2.10^{-3}$ mol, $n(\text{Fe}) = n(\text{Fe}_n\text{O}_m) \rightarrow n_0(\text{Fe}) - a.2.10^{-3} = 0 + 2.2.10^{-3}$.

$\xrightarrow{n_0(\text{Fe})=3.a.10^{-3}} 3.a.10^{-3} - 2.a.10^{-3} = 4.10^{-3}$ et $a = 4$.

$n_0(\text{Fe}) = 3.a.10^{-3} \xrightarrow[\text{a=4}]{\text{A.N}} n_0(\text{Fe}) = 12.10^{-3}$ mol.

c - On a : $4\text{Fe} + 3\text{O}_2 \longrightarrow 2\text{Fe}_n\text{O}_m$

La conservation de la matière implique :

$\begin{cases} 2.n = 4 \rightarrow n = 2 \\ 2.m = 3.2 \rightarrow m = 3 \end{cases} \rightarrow \text{l'oxyde de fer obtenu est le } \text{Fe}_2\text{O}_3$

4⁰)

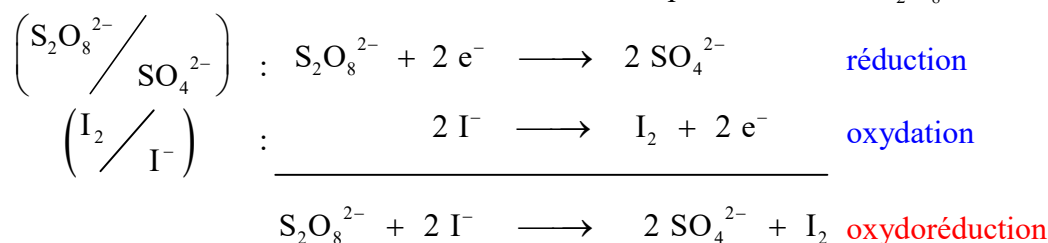
Equation chimique		$4\text{Fe} + 3\text{O}_2 \longrightarrow 2\text{Fe}_2\text{O}_3$		
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)		
Initial	0	12.10^{-3}	10.10^{-3}	0
Intermédiaire	x	$12.10^{-3} - 4x$	$10.10^{-3} - 3x$	2 x
final	$x_{\max} = 3.10^{-3}$	0	10^{-3}	6.10^{-3}

LA VITESSE D'UNE RÉACTION CHIMIQUE

I / Aspect quantitatif de l'évolution d'un système chimique au cours du temps :

1⁰) Exemple de mise en situation :

Considérons la réaction entre les ions iodure I^- et les ions peroxodisulfate $S_2O_8^{2-}$:

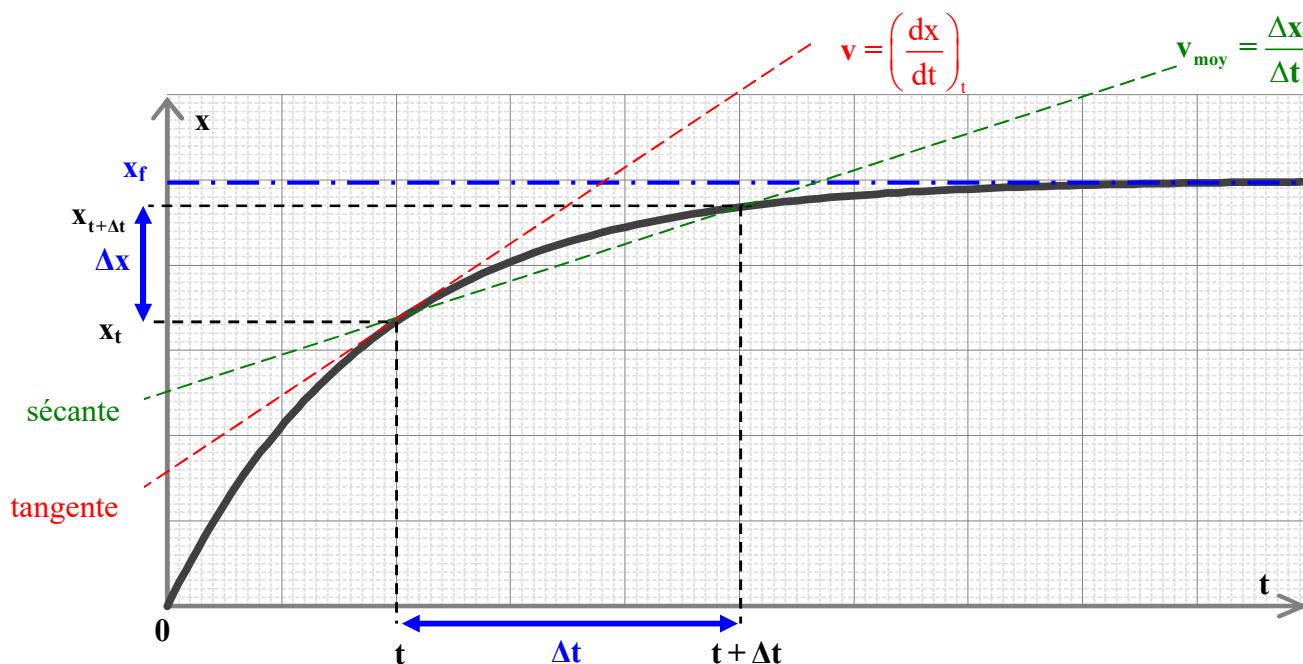


Le tableau d'avancement de la réaction est :

Equation de la réaction		$S_2O_8^{2-} + 2 I^- \longrightarrow 2 SO_4^{2-} + I_2$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	$n_0(S_2O_8^{2-})$	$n_0(I^-)$	0	0
Intermédiaire	x	$n_0(S_2O_8^{2-}) - x$	$n_0(I^-) - 2x$	2x	x
final	x_f ↗ ↘ si $\frac{n_0(S_2O_8^{2-})}{n_0(I^-)} \leq \frac{1}{2}$; $S_2O_8^{2-}$ est limitant et $x_f = n_0(S_2O_8^{2-})$ si $\frac{n_0(S_2O_8^{2-})}{n_0(I^-)} \geq \frac{1}{2}$; I^- est limitant et $x_f = \frac{n_0(I^-)}{2}$				

2⁰) Evolution de l'avancement de la réaction au cours du temps :

L'évolution au cours du temps de l'avancement x de la réaction est donnée par la courbe :



On définit une grandeur **positive** capable de décrire l'évolution de l'avancement de la réaction au cours du temps : c'est **la vitesse de la réaction**.

II / La vitesse de réaction :

1⁰) Vitesse moyenne :

La vitesse moyenne de réaction, entre les instants t et $t + \Delta t$, est définie par :

$$v_{\text{moy}}(t, t + \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Soit $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, il vient alors que :

$$v_{\text{moy}}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{en mol.s}^{-1}) \text{ ou } (\text{en mol.min}^{-1})$$

Remarque :

Graphiquement, $v_{\text{moy}}(t, t + \Delta t)$ est égale à la valeur du coefficient directeur de la **sécante** à la courbe $x = f(t)$ passant par les deux points d'abscisses respectives t et $t + \Delta t$.

2⁰) Vitesse instantanée ou vitesse de réaction :

Par définition, la vitesse instantanée de la réaction à l'instant t est :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

On a $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$, il vient alors que :

$$v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t \quad (\text{en mol.s}^{-1}) \text{ ou } (\text{en mol.min}^{-1})$$

Remarque :

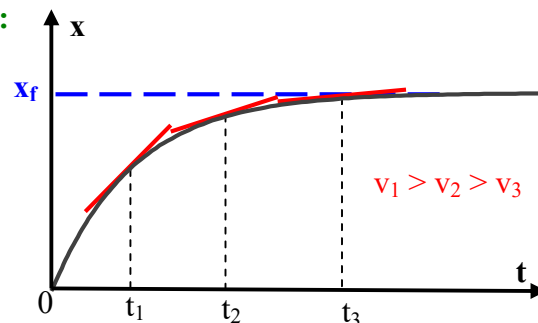
Graphiquement, $v(t)$ est égale à la valeur du coefficient directeur de la **tangente** à la courbe $x = f(t)$ passant par le point d'abscisse t .

3⁰) Variation de la vitesse de réaction au cours du temps :

La vitesse de réaction décroît au cours du temps.

Interprétation :

Au cours du temps, les quantités de matière des réactifs diminuent. La probabilité de rencontre entre les entités réagissantes diminue donc le nombre de chocs efficaces par unité de temps entre elles diminue et par conséquent la vitesse de réaction diminue.



Application 1 :

Dans un flacon contenant $m = 5,6$ g de fer Fe, on verse un volume $V = 20 \text{ cm}^3$ de solution d'acide chlorhydrique ($\text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$) de concentration $0,5 \text{ mol.L}^{-1}$.

On observe une effervescence avec dégagement gazeux de Dihydrogène H_2 et la formation d'une solution de chlorure de fer II.

1⁰) Ecrire l'équation de la réaction entre le fer et les ions H_3O^+ .

2⁰) Déterminer les quantités de matière initiales des réactifs.

3⁰) Exprimer l'avancement x de la réaction en fonction du volume $V(\text{H}_2)$ de dihydrogène dégagé.

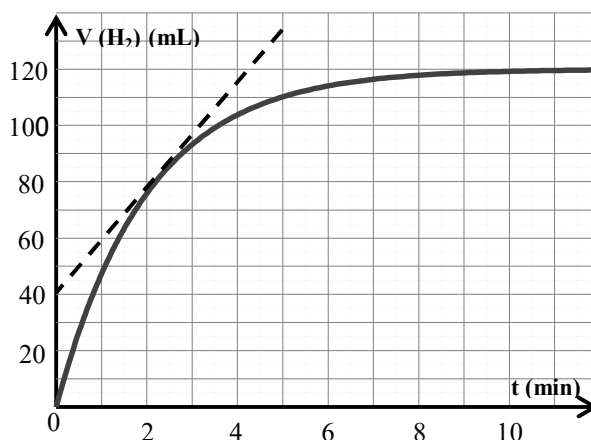
4⁰) a - Déterminer la vitesse moyenne de la réaction entre les instants $t_1 = 2,5 \text{ min}$ et $t_2 = 6,5 \text{ min}$.

b - Déterminer la vitesse de la réaction à l'instant $t = 2,5 \text{ min}$.

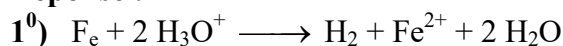
5⁰) Montrer qu'à l'état final, un des réactifs est totalement épuisé.

On donne : Masse molaire du fer $M_{\text{Fe}} = 56 \text{ g.mol}^{-1}$.

Volume molaire $V_M = 24 \text{ L.mol}^{-1}$.



Réponse :



$$2^0) n_0(\text{Fe}) = \frac{m}{M_{\text{Fe}}} \xrightarrow{\text{A.N}} n_0(\text{Fe}) = \frac{5,6}{56} \text{ et } n_0(\text{Fe}) = 10^{-1} \text{ mol.}$$

$$n_0(\text{H}_3\text{O}^+) = C.V \xrightarrow{\text{A.N}} n_0(\text{H}_3\text{O}^+) = 0,5.20.10^{-3} \text{ et } n_0(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-2} \text{ mol.}$$

$$3^0) x = \frac{\Delta n(\text{H}_2)}{1} = \frac{n(\text{H}_2) - n_0(\text{H}_2)}{1} = n(\text{H}_2) \text{ or } n(\text{H}_2) = \frac{V(\text{H}_2)}{V_M} \rightarrow x = \frac{V(\text{H}_2)}{V_M}$$

$$4^0) \text{a - } v_{\text{moy}}(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{V_M} \frac{V(\text{H}_2)_{t_2} - V(\text{H}_2)_{t_1}}{t_2 - t_1},$$

$$\text{A.N: } v_{\text{moy}}(2,5;6,5) = \frac{1}{24} \frac{(115-85).10^{-3}}{6,5-2,5} \text{ et } v_{\text{moy}}(2,5;6,5) = 0,167.10^{-3} \text{ mol.min}^{-1}.$$

$$\text{b - } v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{V_M} \frac{dV(\text{H}_2)}{dt},$$

$$\text{A.N: } v(2,5) = \frac{1}{24} \frac{(85-40).10^{-3}}{2,5-0} \text{ et } v(2,5) = 0,75.10^{-3} \text{ mol.min}^{-1}$$

$$5^0) \text{ A l'état final, } V_f(\text{H}_2) = 120 \text{ mL} \longrightarrow x_f = \frac{120.10^{-3}}{24} \text{ et } x_f = 5.10^{-3} \text{ mol.}$$

$$n_f(\text{Fe}) = n_0(\text{Fe}) - x_f \xrightarrow{\text{A.N}} n_f(\text{Fe}) = 10^{-1} - 5.10^{-3} \text{ et } n_f(\text{Fe}) = 95.10^{-3} \text{ mol.}$$

$$n_f(\text{H}_3\text{O}^+) = n_0(\text{H}_3\text{O}^+) - 2x_f \xrightarrow{\text{A.N}} n_f(\text{H}_3\text{O}^+) = 10^{-2} - 2.5.10^{-3} \text{ et } n_f(\text{H}_3\text{O}^+) = 0.$$

A l'état final, l'acide est totalement épuisé.

III / La vitesse volumique de réaction :

Si la réaction s'effectue dans un milieu homogène de volume V constant :

Soit $v(t)$ la vitesse de la réaction à l'instant t.

On définit la vitesse volumique de la réaction à l'instant t par :

$$v_v(t) = \frac{1}{V} v(t)$$

$$\text{On écrit alors : } v_v(t) = \frac{1}{V} \left(\frac{dx}{dt} \right)_t = \left(\frac{d\left(\frac{x}{V}\right)}{dt} \right)_t$$

Le rapport $\frac{x}{V} = y$ est appelé **avancement volumique** de la réaction, il vient alors que :

$$v_v(t) = \left(\frac{dy}{dt} \right)_t \text{ avec } y = \frac{x}{V} \quad (\text{mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}) \text{ ou } (\text{mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1})$$

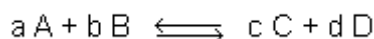
La vitesse volumique d'une réaction à l'instant t est la dérivée par rapport au temps, à l'instant t, de son avancement volumique $y = \frac{x}{V}$. Elle est **indépendante** du **volume V** de la solution.

Remarques :

- L'intérêt de cette définition vient du fait que la plupart des études expérimentales fournissent des molarités et non des quantités de matière.

$$\bullet \quad v_v(t) = \frac{1}{V} v(t) = \frac{1}{V} \left(\frac{dx}{dt} \right)_t = \frac{1}{V} \left(\frac{\frac{dn_i}{\pm v_i}}{dt} \right)_t = \frac{1}{\pm v_i} \left(\frac{\frac{dn_i}{V}}{dt} \right)_t = \frac{1}{\pm v_i} \left(\frac{d[i]}{dt} \right)_t$$

donc pour une réaction chimique :

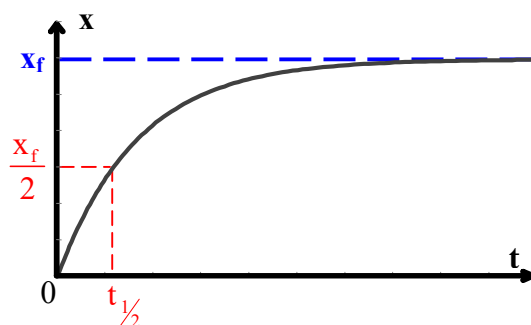


$$v_v(t) = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt}$$

IV / Le temps de demi réaction :

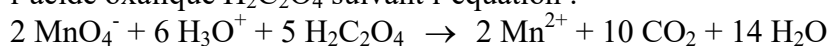
Le temps de demi réaction est le temps nécessaire pour que l'avancement de la réaction atteigne la moitié de sa valeur finale.

$$x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$$



Application 2 :

Les ions permanganate MnO_4^- en milieu acide oxydent lentement l'acide oxalique $H_2C_2O_4$ suivant l'équation :



On mélange 20 cm^3 d'une solution aqueuse de $KMnO_4$ de concentration $0,2 \text{ mol.L}^{-1}$ et 20 cm^3 d'une solution aqueuse de $H_2C_2O_4$ de concentration $0,5 \text{ mol.L}^{-1}$. On acidifie le mélange par de l'acide sulfurique.

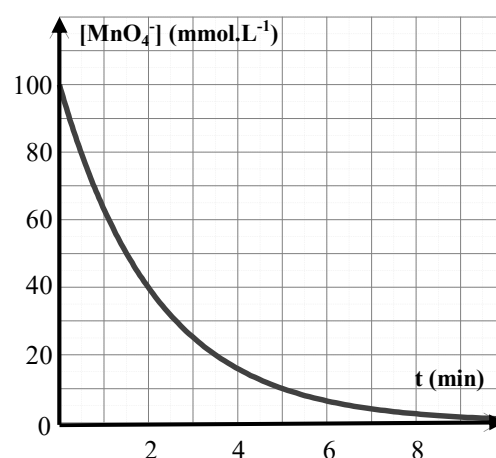
Le graphe ci-contre donne l'évolution de la concentration des ions MnO_4^- restant dans le mélange en fonction du temps.

1⁰) Montrer que MnO_4^- et $H_2C_2O_4$ sont dans les proportions stœchiométriques.

2⁰) a - Déterminer la vitesse volumique de la réaction à l'instant où la moitié de la quantité de matière initiale de MnO_4^- est consommée.

b - En déduire la vitesse de la réaction à cet instant

3⁰) Quelle est la valeur du temps de demi réaction $t_{1/2}$.



Réponse :

$$1^0) \frac{n_0(MnO_4^-)}{n_0(C_2H_2O_4)} = \frac{C_{MnO_4^-} \cdot V_{MnO_4^-}}{C_{C_2H_2O_4} \cdot V_{C_2H_2O_4}} \xrightarrow{A.N} \frac{n_0(MnO_4^-)}{n_0(C_2H_2O_4)} = \frac{0,2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad \frac{n_0(MnO_4^-)}{n_0(C_2H_2O_4)} = \frac{2}{5}$$

→ MnO_4^- et $H_2C_2O_4$ sont en proportions stœchiométriques.

$$2^0) \text{ a - } n_0(MnO_4^-) = C_{MnO_4^-} \cdot V_{MnO_4^-} \xrightarrow{A.N} n_0(MnO_4^-) = 0,2 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad n_0(MnO_4^-) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$\text{A l'instant } t, \quad n_t(MnO_4^-) = \frac{n_0(MnO_4^-)}{2} \xrightarrow{A.N} n_t(MnO_4^-) = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2} \quad \text{et} \quad n_t(MnO_4^-) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$\text{et } [MnO_4^-]_t = \frac{n_t(MnO_4^-)}{V} \xrightarrow{A.N} [MnO_4^-]_t = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad [MnO_4^-]_t = 50 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

Graphiquement : $t = 1,5 \text{ min.}$

$$\text{On a : } v_v(t) = -\frac{1}{2} \frac{d[MnO_4^-]}{dt},$$

$$\text{Graphiquement : } v_v(1,5) = -\frac{1}{2} \frac{(50 - 85) \cdot 10^{-3}}{1,5 - 0} \quad \text{et} \quad v_v(1,5) = 11,67 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}.$$

$$\text{b - } v(t) = V \cdot v_v(t) \xrightarrow{A.N} v(1,5) = 40 \cdot 10^{-3} \cdot 11,67 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad v(1,5) = 4,67 \cdot 10^{-4} \text{ mol.min}^{-1}$$

3⁰) $n(MnO_4^-) = n_0(MnO_4^-) - 2x$ où x est l'avancement de la réaction.

MnO_4^- est totalement épuisé à la fin de la réaction $\rightarrow x_f = \frac{n_0(\text{MnO}_4^-)}{2}$

On a : $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$, il vient alors que :

$$n_{t_{1/2}}(\text{MnO}_4^-) = n_0(\text{MnO}_4^-) - 2 \frac{x_f}{2} = n_0(\text{MnO}_4^-) - x_f = n_0(\text{MnO}_4^-) - \frac{n_0(\text{MnO}_4^-)}{2} = \frac{n_0(\text{MnO}_4^-)}{2}$$

$$\text{Donc } [\text{MnO}_4^-]_{t_{1/2}} = \frac{n_{t_{1/2}}(\text{MnO}_4^-)}{V} = \frac{[\text{MnO}_4^-]_0}{2} \quad \text{et} \quad [\text{MnO}_4^-]_{t_{1/2}} = 50.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

Graphiquement : $t_{1/2} = 1,5 \text{ min}$.

V / Les facteurs cinétiques en solution aqueuse :

1⁰) Influence de la concentration des réactifs :

La vitesse d'une réaction augmente avec la concentration des réactifs.

Interprétation : Lorsque la concentration des réactifs augmente, la probabilité de rencontre des entités réagissantes augmente, le nombre de chocs efficaces par unité de temps augmente et la réaction évolue plus rapidement.

Remarques :

- On accélère une réaction chimique en augmentant la concentration des réactifs.
- On ralentit une réaction chimique en diluant le mélange réactionnel.

2⁰) Influence de la température :

La vitesse d'une réaction augmente avec la température du mélange réactionnel.

Interprétation : Lorsque la température du mélange réactionnel augmente, l'agitation thermique des entités réagissantes augmente, le nombre de chocs efficaces par unité de temps augmente et la réaction évolue plus rapidement.

Remarques :

- On accélère une réaction chimique en augmentant la température du mélange réactionnel.
- On ralentit une réaction chimique en procédant à une trempe (refroidissement) du mélange réactionnel.

3⁰) Utilisation d'un catalyseur :

a - Définitions :

Un catalyseur est une substance qui accélère une réaction chimique sans entrer dans le bilan de la réaction.

Lorsque le catalyseur appartient à la même phase que les réactifs, la catalyse est dite homogène.

Lorsque le catalyseur n'appartient pas à la même phase que les réactifs, la catalyse est dite hétérogène.

Remarque : On parle d'autocatalyse quand l'un des produits formés catalyse la réaction qui l'a engendré.

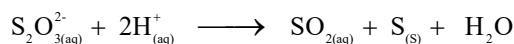
b - Propriétés :

Un catalyseur, quel qu'il soit, présente les propriétés suivantes :

- le catalyseur n'apparaît pas dans l'équation de la réaction.
- le catalyseur participe à la réaction mais il retrouve son état initial (il est régénéré) à la fin de la réaction.
- une réaction ne peut être accélérée par n'importe quel catalyseur, il lui est spécifique.
- un catalyseur ne peut accélérer qu'une réaction possible en son absence, il ne peut provoquer une réaction impossible.

Application 3 :

Les ions thiosulfate réagissent avec les ions hydrogène suivant l'équation :

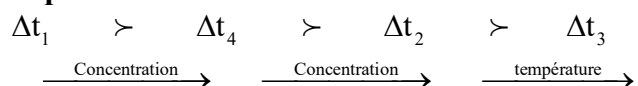


On réalise la transformation évoquée plus haut dans quatre béchers différents en modifiant les conditions d'expérience d'un bécher à l'autre. Ces conditions sont indiquées dans le tableau suivant :

Conditions expérimentales	bécher 1	bécher 2	bécher 3	bécher 4
Température des mélanges (°C)	20	20	50	20
Volume de la solution de thiosulfate (mL)	20	20	20	20
Volume de la solution d'acide chlorhydrique (mL)	10	40	40	20
Volume d'eau (mL)	30	0	0	20
Durée de la transformation (s)	Δt_1	Δt_2	Δt_3	Δt_4

Comparer les durées Δt de la transformation en indiquant dans chaque cas le facteur cinétique mis en jeu.

Réponse :



Pour en savoir plus

1⁰) Notion de vitesse de réaction :

• Lorsqu'un système chimique fermé (pas d'échange de matière avec le milieu extérieur) est le siège d'une transformation chimique, son état évolue au cours du temps depuis un état initial jusqu'à un état final. Le système chimique subit donc un régime transitoire au cours duquel l'avancement de la réaction x passe de la valeur nulle à sa valeur finale x_f .

Au cours de la réaction chimique (associée à la transformation chimique), la quantité de matière d'un constituant i du mélange réactionnel vérifie la relation :

$$n_i(t) = n_i(0) \pm \nu_i \cdot x \quad \text{avec} \quad \begin{cases} +\nu_i & \text{si } i \text{ est un produit} \\ -\nu_i & \text{si } i \text{ est un réactif} \end{cases}$$

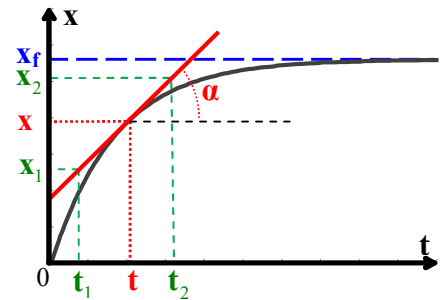
• L'évolution de l'état du système chimique au cours du temps est caractérisée par la fonction $x = f(t)$

Pour étudier la rapidité avec laquelle s'effectue la transformation chimique, on définit la vitesse de la réaction (ou vitesse instantanée) par :

$$v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t$$

Graphiquement, la valeur de la vitesse de la réaction à un instant est égale à celle de la pente de la tangente à la courbe $x = f(t)$ au point

d'abscisse t : $v(t) = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$.



Remarque : soit α l'angle entre la tangente à la courbe $x = f(t)$ au point d'abscisse t et l'axe du temps.

Numériquement : $v(t) = \tan(\alpha)$.

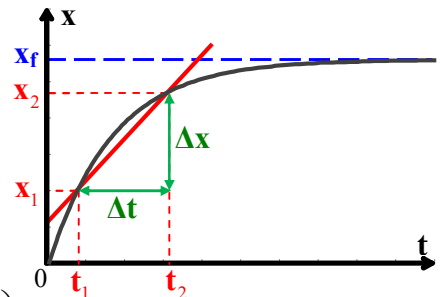
Remarque : $v(t)$ s'exprime en $\text{mol} \cdot (\text{unité de temps})^{-1}$.

• On définit la vitesse moyenne de la réaction entre deux instants t_1 et t_2 par :

$$v_{\text{moy}}(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Graphiquement, la valeur de la vitesse moyenne de la réaction entre deux instants t_1 et t_2 est égale à celle de la pente de la sécante à la courbe $x = f(t)$ passant par les deux points d'abscisses t_1 et t_2 .

Remarque : $v(t)$ s'exprime en $\text{mol} \cdot (\text{unité de temps})^{-1}$.



Remarque : $v_{\text{moy}}(t, t + \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ or $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t \rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{moy}}(t, t + \Delta t)$.

• Si la transformation chimique a lieu dans un mélange réactionnel homogène de volume V constant, on définit la vitesse volumique de réaction par :

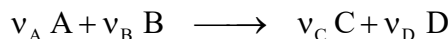
$$v_v(t) = \frac{1}{V} \cdot v(t)$$

Remarque : $v_v(t) = \frac{1}{V} \left(\frac{dx}{dt} \right)_t = \left(\frac{d\left(\frac{x}{V}\right)}{dt} \right)_t \xrightarrow{y=\frac{x}{V}} v_v(t) = \left(\frac{dy}{dt} \right)_t$.

Remarque : $v_v(t)$ s'exprime en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot (\text{unité de temps})^{-1}$.

2⁰) Disparition d'un réactif – Apparition d'un produit :

Soit une réaction chimique ayant lieu dans un milieu réactionnel homogène de volume constant V. Elle symbolisée par l'équation chimique :



Soit $v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t$ la vitesse de la réaction et $v_v(t) = \frac{1}{V} \cdot v(t)$ sa vitesse volumique.

a - Disparition d'un réactif :

Considérons le réactif R_i de coefficient stœchiométrique ν_i :

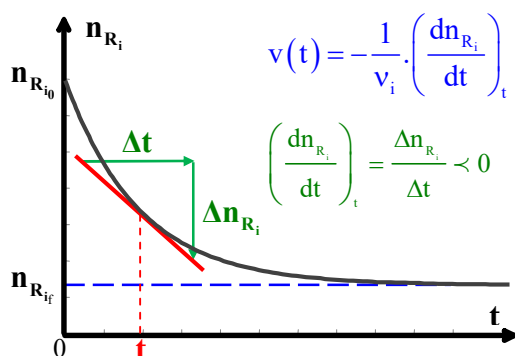
$$\text{On a : } n_{R_i}(t) = n_{R_i}(0) - \nu_i \cdot x$$

- la vitesse de réaction :

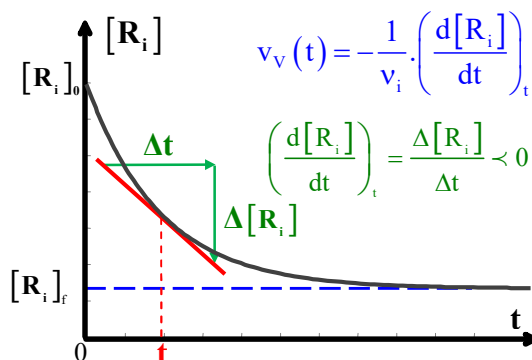
$$\left(\frac{dn_{R_i}}{dt} \right)_t = 0 - \nu_i \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)_t \xrightarrow{v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t} v(t) = -\frac{1}{\nu_i} \cdot \left(\frac{dn_{R_i}}{dt} \right)_t$$

- la vitesse volumique de réaction :

$$v_v(t) = \frac{1}{V} \cdot \left[-\frac{1}{\nu_i} \cdot \left(\frac{dn_{R_i}}{dt} \right)_t \right] = -\frac{1}{\nu_i} \cdot \left[\frac{1}{V} \cdot \left(\frac{dn_{R_i}}{dt} \right)_t \right] = -\frac{1}{\nu_i} \cdot \left(\frac{d \left(\frac{n_{R_i}}{V} \right)}{dt} \right)_t \xrightarrow{[R_i] = \frac{n_{R_i}}{V}} v_v(t) = -\frac{1}{\nu_i} \cdot \left(\frac{d[R_i]}{dt} \right)_t$$



La valeur de $\left(\frac{dn_{R_i}}{dt} \right)_t$ est égale à celle de la pente de la tangente à la courbe $n_{R_i} = f(t)$ au point d'abscisse t.



La valeur de $\left(\frac{d[R_i]}{dt} \right)_t$ est égale à celle de la pente de la tangente à la courbe $[R_i] = f(t)$ au point d'abscisse t.

b - Apparition d'un produit :

Considérons le produit P_i de coefficient stœchiométrique ν_i :

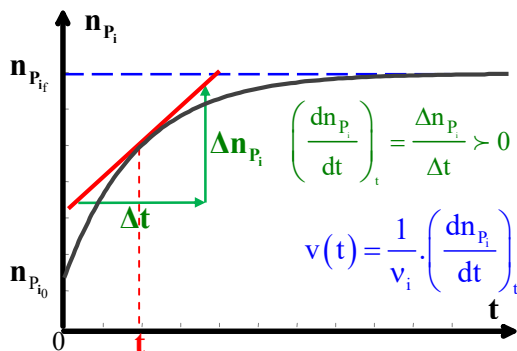
$$\text{On a : } n_{P_i}(t) = n_{P_i}(0) + \nu_i \cdot x$$

- la vitesse de réaction :

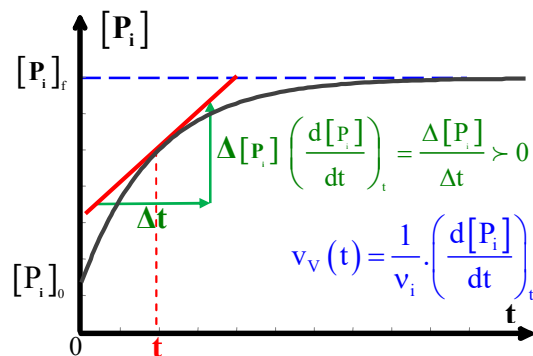
$$\left(\frac{dn_{P_i}}{dt} \right)_t = 0 + \nu_i \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)_t \xrightarrow{v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t} v(t) = \frac{1}{\nu_i} \cdot \left(\frac{dn_{P_i}}{dt} \right)_t$$

- la vitesse volumique de réaction :

$$v_v(t) = \frac{1}{V} \cdot \left[\frac{1}{\nu_i} \cdot \left(\frac{dn_{P_i}}{dt} \right)_t \right] = \frac{1}{\nu_i} \cdot \left[\frac{1}{V} \cdot \left(\frac{dn_{P_i}}{dt} \right)_t \right] = \frac{1}{\nu_i} \cdot \left(\frac{d \left(\frac{n_{P_i}}{V} \right)}{dt} \right)_t \xrightarrow{[P_i] = \frac{n_{P_i}}{V}} v_v(t) = \frac{1}{\nu_i} \cdot \left(\frac{d[P_i]}{dt} \right)_t$$



La valeur de $\left(\frac{dn_P}{dt}\right)_t$ est égale à celle de la pente de la tangente à la courbe $n_P = f(t)$ au point d'abscisse t .



La valeur de $\left(\frac{d[P_i]}{dt}\right)_t$ est égale à celle de la pente de la tangente à la courbe $[P_i] = f(t)$ au point d'abscisse t .

3⁰) Vitesse de réaction et énergie d'activation :

a - L'énergie d'activation d'une réaction :

- Lorsqu'une réaction chimique a lieu, les réactifs rentrent en collision entre eux. Si les chocs entre eux sont efficaces, les réactifs acquièrent l'énergie nécessaire à la rupture des liaisons chimiques et passent dans un état de transition instable avant de se transformer en produits de la réaction.

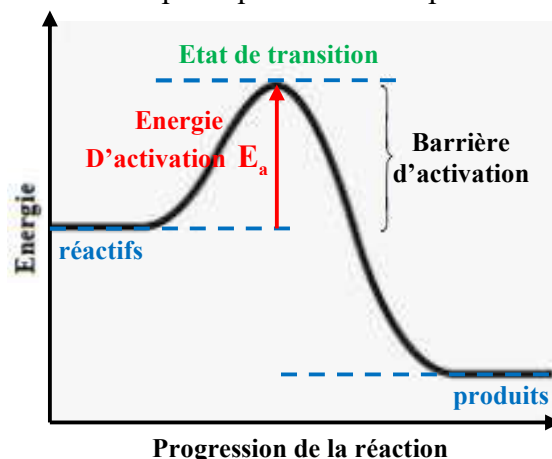
L'énergie d'activation E_a d'une réaction chimique est l'énergie nécessaire pour que les réactifs passent à l'état de transition.

Remarque :

Un choc est dit efficace si la collision entraîne le passage des réactifs à l'état de transition. Sinon, le choc sera dit élastique.

- Pour que la réaction chimique ait lieu, il faut que les réactifs dépassent une barrière énergétique appelée barrière d'activation.

Plus l'énergie d'activation de la réaction est grande, plus la barrière d'activation est élevée et moins il y a d'entités réagissantes ayant suffisamment d'énergie pour atteindre l'état de transition. Par conséquent, la réaction chimique sera plus lente.



b - Les principaux facteurs cinétiques :

- La concentration des réactifs :

L'augmentation de la concentration des réactifs favorise la probabilité de rencontre entre les entités réagissantes, le nombre de chocs efficaces par unité de temps entre elles augmente, le débit de franchissement de la barrière d'activation augmente et par conséquent la vitesse de réaction augmente.

Remarque :

Pour ralentir une réaction chimique, on dilue le milieu réactionnel.

- La température du milieu réactionnel :

L'élévation de la température du milieu réactionnel fait augmenter l'énergie cinétique des entités réagissantes favorisant l'augmentation du nombre de chocs efficaces par unité de temps entre elles, le débit de franchissement de la barrière d'activation augmente et par conséquent la vitesse de réaction augmente.

Remarque :

Pour ralentir une réaction chimique, on refroidit le milieu réactionnel.

- L'utilisation d'un catalyseur :

Un catalyseur est une substance qui augmente la vitesse d'une réaction chimique sans apparaître dans le bilan de cette réaction. Il est donc complètement récupéré à la fin de la réaction.

Le catalyseur fait baisser l'énergie d'activation de la réaction chimique favorisant l'augmentation du débit de franchissement de la barrière d'activation donc l'augmentation de la vitesse de la réaction.

Applications

Exercice n° 1 :

On se propose d'étudier la cinétique de la transformation lente de décomposition de l'eau oxygénée H_2O_2 par les ions iodure I^- en milieu acide, transformation considérée comme totale.

À la date $t = 0$ s, on réalise un mélange réactionnel constitué de :

- Un volume $V_1 = 30$ mL d'une solution d'iodure de potassium KI de concentration $C_1 = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$.
- Un volume $V_2 = 12$ mL d'eau oxygénée de concentration $C_2 = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$.
- Un volume $V_e = 8$ mL d'eau distillée acidifiée avec de l'acide sulfurique en excès.

L'équation de la réaction qui modélise la transformation d'oxydoréduction qui a lieu s'écrit :

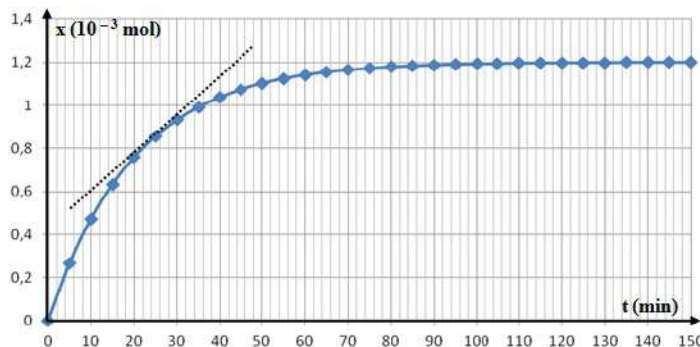


L'évolution de l'avancement de la réaction au cours du temps est donnée par la courbe $x = f(t)$ ci-contre :

1°) a - Déterminer les quantités de matière initiales $n_0(\text{H}_2\text{O}_2)$ et $n_0(\text{I}^-)$ dans le mélange réactionnel.

b - Préciser le réactif limitant et en déduire la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

c - Recopier et compléter le tableau d'avancement de la réaction ci-dessous :



Equation de la réaction		$\text{H}_2\text{O}_2 + 2 \text{I}^- + 2 \text{H}_3\text{O}^+ \longrightarrow \text{I}_2 + 4 \text{H}_2\text{O}$				
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)				
initial	0			excès		excès
intermédiaire	x			excès		excès
final	$x_{\text{max}} =$			excès		excès

2°) a - Définir le temps de demi réaction $t_{1/2}$. Déterminer graphiquement sa valeur.

b - Calculer la valeur de la vitesse moyenne de la réaction v_{moy} entre les instants $t = 0$ et $t = t_{1/2}$.

3°) a - Déterminer graphiquement la valeur de la vitesse de réaction $v(t)$ à l'instant $t = 25$ min.

b - En déduire la valeur de la vitesse volumique de réaction $v_v(t)$ à cet instant.

Réponse :

1°) a - $n_0(\text{H}_2\text{O}_2) = C_2 \cdot V_2$ A.N: $n_0(\text{H}_2\text{O}_2) = 0,1 \cdot 12 \cdot 10^{-3}$ et $n_0(\text{H}_2\text{O}_2) = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$.

$n_0(\text{I}^-) = C_1 \cdot V_1$ A.N: $n_0(\text{I}^-) = 0,1 \cdot 30 \cdot 10^{-3}$ et $n_0(\text{I}^-) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$.

b - $\frac{n_0(\text{I}^-)}{n_0(\text{H}_2\text{O}_2)} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-3}} = 2,5 < \frac{2}{1} \rightarrow \text{H}_2\text{O}_2$ est le réactif limitant.

H_2O_2 est limitant $\rightarrow n_f(\text{H}_2\text{O}_2) = 0 \rightarrow n_0(\text{H}_2\text{O}_2) - x_f = 0 \rightarrow x_f = n_0(\text{H}_2\text{O}_2)$

A.N: $x_f = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$.

c - La réaction est totale $\rightarrow x_f = x_{\text{max}}$.

Equation de la réaction		$\text{H}_2\text{O}_2 + 2 \text{I}^- + 2 \text{H}_3\text{O}^+ \longrightarrow \text{I}_2 + 4 \text{H}_2\text{O}$				
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)				
initial	0	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	excès	0	excès
intermédiaire	x	$1,2 \cdot 10^{-3} - x$	$3 \cdot 10^{-3} - 2x$	excès	x	excès
final	$x_{\text{max}} = 1,2 \cdot 10^{-3}$	0	$0,6 \cdot 10^{-3}$	excès	$1,2 \cdot 10^{-3}$	excès

2⁰) a - Le temps de demi réaction est la durée au bout de laquelle l'avancement de la réaction atteint la moitié de sa valeur finale.

$$\text{On a : } x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x_f}{2} \rightarrow x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{2} \text{ et } x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \xrightarrow{\text{graphiquement}} t_{\frac{1}{2}} = 14 \text{ min.}$$

$$\text{b - } v_{\text{moy}}\left(0, t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) - x(0)}{t_{\frac{1}{2}} - 0} \rightarrow v_{\text{moy}}\left(0, t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{0,6 \cdot 10^{-3} - 0}{14 - 0} \text{ et } v_{\text{moy}}\left(0, t_{\frac{1}{2}}\right) = 4,29 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}.$$

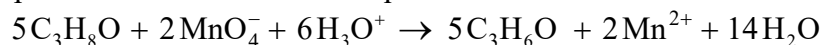
$$3^0) \text{ a - } v(t) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_t \xrightarrow{\text{graphiquement}} v(25) = \frac{(1,2 - 0,6) \cdot 10^{-3}}{44 - 10} \text{ et } v(25) = 1,76 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}.$$

$$\text{b - On a : } v_v(t) = \frac{v(t)}{V} \xrightarrow{\text{A.N.}} v_v(25) = \frac{1,76 \cdot 10^{-5}}{(30 + 12 + 8) \cdot 10^{-3}} \text{ et } v_v(25) = 3,52 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}.$$

Exercice 2 :

On étudie la transformation chimique qui a lieu dans un mélange réactionnel contenant initialement 10^{-2} mol d'ions permanganate MnO_4^- et $2 \cdot 10^{-2}$ mol de propan-2-ol $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$.

Le milieu réactionnel, de volume $V = 100 \text{ mL}$, est acidifié par des gouttes d'acide sulfurique concentré. L'équation chimique représentant la réaction totale qui a lieu est:

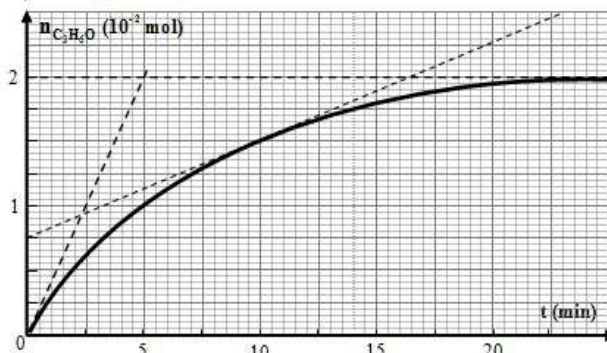


Le graphe, ci-contre, donne l'évolution, au cours du temps, de la quantité de matière $n_{\text{C}_3\text{H}_6\text{O}}$ de propanone $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$ formée :

1⁰) Déduire de la courbe que la valeur de l'avancement final de la réaction $x_f = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$.

2⁰) a - La vitesse de la réaction est définie par : $v(t) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_t$.

$$\text{Montrer qu'elle s'écrit : } v(t) = \frac{1}{5} \left(\frac{dn_{\text{C}_3\text{H}_6\text{O}}}{dt}\right)_t.$$



b - Déterminer, graphiquement, les valeurs $v(0)$ et $v(10)$ de la vitesse de la réaction respectivement aux instants $t = 0$ et $t = 10 \text{ min}$.

En déduire les valeurs $v_v(0)$ et $v_v(10)$ de la vitesse volumique de la réaction à ces deux instants

c - Comment varie la vitesse de la réaction au cours du temps ? Interpréter cette variation.

3⁰) a - Que représente l'instant $t = 5 \text{ min}$? Justifier la réponse.

b - Calculer la molarité $[\text{MnO}_4^-]$ des ions permanganate à cet instant.

Réponse :

1⁰) Graphiquement : A l'état final, $n_f(\text{C}_3\text{H}_6\text{O}) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

$$\text{On a : } n_f(\text{C}_3\text{H}_6\text{O}) = n_0(\text{C}_3\text{H}_8\text{O}) + 5 \cdot x_f \xrightarrow{n_0(\text{C}_3\text{H}_6\text{O})=0} x_f = \frac{n_f(\text{C}_3\text{H}_6\text{O})}{5}.$$

$$\text{A.N. : } x_f = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{5} \text{ et } x_f = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol}.$$

$$\text{Remarque : } \frac{n_0(\text{C}_3\text{H}_8\text{O})}{n_0(\text{MnO}_4^-)} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 2 < \frac{5}{2} \rightarrow \text{C}_3\text{H}_8\text{O est limitant}$$

$$\rightarrow n_f(\text{C}_3\text{H}_8\text{O}) = 2 \cdot 10^{-2} - 5x_f = 0 \rightarrow x_f = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{5} \text{ et } x_f = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol}.$$

2⁰) a - On a : $n(\text{C}_3\text{H}_6\text{O}) = n_0(\text{C}_3\text{H}_8\text{O}) + 5x$

$$\text{On dérive par rapport au temps : } \left(\frac{dn(\text{C}_3\text{H}_6\text{O})}{dt}\right)_t = 0 + 5 \left(\frac{dx}{dt}\right)_t \xrightarrow{v(t) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_t} v(t) = \frac{1}{5} \left(\frac{dn(\text{C}_3\text{H}_6\text{O})}{dt}\right)_t$$

b - * Graphiquement : $v(0) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-2} - 0}{5 - 0} \right)$ et $v(0) = 8 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$.

* Graphiquement : $v(10) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1,5 \cdot 10^{-2} - 0,75 \cdot 10^{-2}}{10 - 0} \right)$ et $v(10) = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$.

* On a : $v_v(0) = \frac{v(0)}{V} \rightarrow v_v(0) = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{0,1}$ et $v_v(0) = 8 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$.

* On a : $v_v(10) = \frac{v(10)}{V} \rightarrow v_v(10) = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{0,1}$ et $v_v(10) = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$.

c - La vitesse de réaction décroît au cours du temps.

Au cours du temps, les quantités de matière des réactifs diminuent. La probabilité de rencontre entre les entités réagissantes diminue donc le nombre de chocs efficaces par unité de temps entre elles diminue et par conséquent la vitesse de réaction diminue.

3⁰) a - A $t = 5 \text{ min}$: $n(\text{C}_3\text{H}_6\text{O}) = 10^{-2} \text{ mol} = \frac{n_f(\text{C}_3\text{H}_6\text{O})}{2} \xrightarrow{n(\text{C}_3\text{H}_6\text{O})=5x} x = \frac{x_f}{2}$

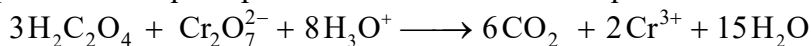
donc $t = 5 \text{ min}$ représente le temps de demi-réaction. $t = t_{1/2}$ tel que : $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$

b - A $t = t_{1/2}$: $[\text{MnO}_4^-] = \frac{n(\text{MnO}_4^-)}{V} = \frac{n_0(\text{MnO}_4^-) - 2x}{V} = \frac{n_0(\text{MnO}_4^-) - 2 \cdot \frac{x_f}{2}}{V} = \frac{n_0(\text{MnO}_4^-) - x_f}{V}$.

A.N : $[\text{MnO}_4^-] = \frac{10^{-2} - 0,4 \cdot 10^{-2}}{0,1}$ et $[\text{MnO}_4^-] = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Exercice 3 :

On étudie l'évolution, en fonction du temps, de la transformation chimique qui a lieu dans un mélange réactionnel de volume $V = 100 \text{ mL}$ contenant initialement $4 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ d'acide oxalique $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ et 10^{-2} mol de dichromate de potassium $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ et quelques gouttes d'acide sulfurique concentré. L'équation chimique représentant la réaction totale qui a lieu est :



Le graphe ci-contre représente l'évolution au cours du temps de la molarité de l'acide oxalique $[\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]$.

1⁰) Les ions H_3O^+ jouent-ils le rôle de réactif ou de catalyseur. Justifier.

2⁰) a - L'acide oxalique est-il le réactif limitant ? justifier.

b - Calculer la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

3⁰) a - La vitesse volumique de réaction est définie par : $v_v(t) = \frac{v(t)}{V} = \frac{1}{V} \left(\frac{dx}{dt} \right)_t$.

Montrer qu'elle peut s'écrire : $v_v(t) = -\frac{1}{3} \left(\frac{d[\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]}{dt} \right)_t$.

b - Déterminer graphiquement la valeur $v_v(0)$. En déduire alors la valeur initiale $v(0)$ de la vitesse de la réaction.

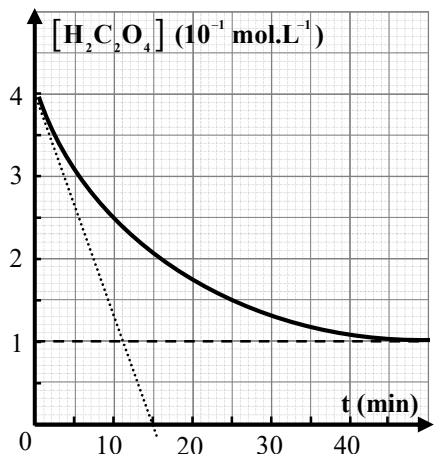
4⁰) Calculer la molarité $[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]$ des ions dichromate à l'instant $t = 25 \text{ min}$.

Réponse :

1⁰) Les ions H_3O^+ sont consommés au cours de la réaction donc ils jouent le rôle de réactif.

2⁰) a - Graphiquement : A l'état final, $[\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]_f \neq 0 \rightarrow \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ n'est pas le réactif limitant.

b - $n_f(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4) = n_0(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4) - 3 \cdot x_f \xrightarrow{[\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4] = \frac{n(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4)}{V}} [\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]_f = [\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]_0 - 3 \cdot \frac{x_f}{V}$



et $x_f = \frac{V}{3}([H_2C_2O_4]_0 - [H_2C_2O_4]_f)$. AN : $x_f = \frac{0,1}{3}(4.10^{-1} - 10^{-1})$ et $x_f = 10^{-2}$ mol.

Remarque : $Cr_2O_7^{2-}$ est limitant $\xrightarrow{A \text{ l'état final}}$ $n_f(Cr_2O_7^{2-}) = 10^{-2} - x_f = 0$ et $x_f = 10^{-2}$ mol.

3⁰) a - $n(H_2C_2O_4) = n_0(H_2C_2O_4) - 3.x \xrightarrow{[H_2C_2O_4] = \frac{n(H_2C_2O_4)}{V}}$ $[H_2C_2O_4] = [H_2C_2O_4]_0 - 3 \cdot \frac{x}{V}$

On dérive par rapport au temps : $\left(\frac{d[H_2C_2O_4]}{dt}\right)_t = -\frac{3}{V}\left(\frac{dx}{dt}\right)_t \xrightarrow{v_v(t) = \frac{1}{V}\left(\frac{dx}{dt}\right)_t}$ $v_v(t) = -\frac{1}{3}\left(\frac{d[H_2C_2O_4]}{dt}\right)_t$.

b - Graphiquement : $v_v(0) = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4.10^{-1} - 0}{0 - 15}\right)$ et $v_v(0) = 8,9.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$.

On a : $v(0) = V \cdot v_v(0) \rightarrow v(0) = 0,18,9.10^{-3}$ et $v(0) = 8,9.10^{-4} \text{ mol.min}^{-1}$.

4⁰) Graphiquement : A $t = 25 \text{ min}$: $[H_2C_2O_4] = 1,5.10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

On a : $[H_2C_2O_4] = [H_2C_2O_4]_0 - 3 \cdot \frac{x}{V} \rightarrow x = \frac{V}{3}([H_2C_2O_4]_0 - [H_2C_2O_4])$.

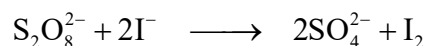
A.N : $x = \frac{0,1}{3}(4.10^{-1} - 1,5.10^{-1})$ et $x = 8,33.10^{-3} \text{ mol}$.

On a : $[Cr_2O_7^{2-}] = \frac{n(Cr_2O_7^{2-})}{V} = \frac{n_0(Cr_2O_7^{2-}) - x}{V}$.

A.N : $[Cr_2O_7^{2-}] = \frac{10^{-2} - 8,33.10^{-3}}{0,1}$ et $[Cr_2O_7^{2-}] = 1,67.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Exercice 4 :

Les ions iodure (I^-) et les ions peroxydisulfate ($S_2O_8^{2-}$) donnent, par une réaction lente et totale, du diiode (I_2) et des ions sulfate (SO_4^{2-}) selon l'équation chimique suivante :



A un instant $t = 0$, on fait agir $n_0(S_2O_8^{2-})$ moles d'ions peroxydisulfate avec $n_0(I^-)$ moles d'ions iodure.

La courbe ci-dessous représente l'évolution de la quantité de matière des ions iodure au cours du temps.

1⁰) a - Justifier, d'après l'allure de la courbe, que

l'ion iodure (I^-) est le réactif en excès.

b - Montrer que la valeur de l'avancement final de la réaction est $x_f = 2.10^{-3} \text{ mol}$.

c - Soit $n_0(S_2O_8^{2-})$ la quantité de matière initiale des ions peroxydisulfate. Calculer sa valeur.

2⁰) a - Soit $v(t) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_t$ la vitesse de la réaction

à l'instant t . Montrer que $v(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{dn(I^-)}{dt}\right)_t$.

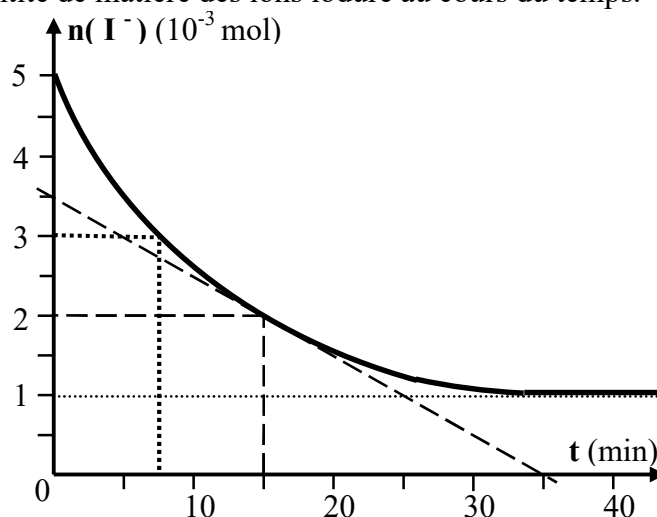
b - Déterminer la valeur de $v(t)$ à l'instant $t = 15 \text{ min}$.

3⁰) a - Définir le temps de demi réaction $t_{\frac{1}{2}}$ et déterminer graphiquement sa valeur.

b - Comment varie la valeur de $t_{\frac{1}{2}}$ si on augmente la température du milieu réactionnel ?

4⁰) a - Déterminer, à l'instant $t = 15 \text{ min}$, la valeur $x(15)$ de l'avancement de la réaction.

b - Comment varie la valeur de $x(15)$ si on augmente la température du milieu réactionnel ?



Réponse :

1⁰) a - A l'état final, $n_f(I^-) \neq 0$ donc le réactif (I^-) est le réactif en excès.

$$b - n_f(I^-) = n_0(I^-) - 2x_f \rightarrow x_f = \frac{n_0(I^-) - n_f(I^-)}{2}$$

Graphiquement : $n_0(I^-) = 5.10^{-3}$ mol et $n_f(I^-) = 10^{-3}$ mol. A.N : $x_f = \frac{5.10^{-3} - 10^{-3}}{2}$ et $x_f = 2.10^{-3}$ mol.

c - Le réactif $S_2O_8^{2-}$ est limitant $\rightarrow n_f(S_2O_8^{2-}) = 0 \rightarrow n_0(S_2O_8^{2-}) - x_f = 0$ et $n_0(S_2O_8^{2-}) = x_f$

A.N : $n_0(S_2O_8^{2-}) = 2.10^{-3}$ mol.

$$2^0) a - n(I^-) = n_0(I^-) - 2x \rightarrow \left(\frac{dn(I^-)}{dt} \right)_t = 0 - 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)_t \xrightarrow{v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t} v(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{dn(I^-)}{dt} \right)_t$$

$$b - v(15) = -\frac{1}{2} \left(\frac{(3,5 - 2) \cdot 10^{-3}}{0 - 15} \right) \text{ et } v(15) = 5.10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}.$$

3⁰) a - Le temps de demi réaction $t_{\frac{1}{2}}$ est la durée au bout de laquelle l'avancement de la réaction atteint la moitié de sa valeur finale.

$$x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x_f}{2} \rightarrow x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2.10^{-3}}{2} \text{ et } x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = 10^{-3} \text{ mol}$$

$$n_{t_{\frac{1}{2}}}(I^-) = n_0(I^-) - 2x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) \xrightarrow{\text{A.N}} n_{t_{\frac{1}{2}}}(I^-) = 5.10^{-3} - 2.10^{-3} \text{ et } n_{t_{\frac{1}{2}}}(I^-) = 3.10^{-3} \text{ mol}$$

$$\xrightarrow{\text{graphiquement}} t_{\frac{1}{2}} = 7,5 \text{ min}.$$

b - Une augmentation de température accélère la réaction donc $t_{\frac{1}{2}}$ diminue.

4⁰) a - Graphiquement et à $t = 15$ min, $n_t(I^-) = 2.10^{-3}$ mol.

$$\text{On a : } n_t(I^-) = n_0(I^-) - 2x(t) \rightarrow x(t) = \frac{n_0(I^-) - n_t(I^-)}{2}.$$

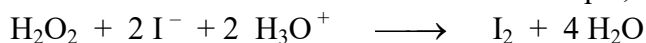
$$\text{A.N: } x(15) = \frac{5.10^{-3} - 2.10^{-3}}{2} \text{ et } x(15) = 1,5.10^{-3} \text{ mol}.$$

b - Une augmentation de température accélère la réaction donc $x(15)$ augmente.

Exercice 5 :

On réalise l'oxydation des ions iodure (I^-) par le peroxyde d'hydrogène (H_2O_2) en milieu acide.

L'équation qui symbolise la réaction associée à cette transformation chimique, supposée totale, s'écrit :

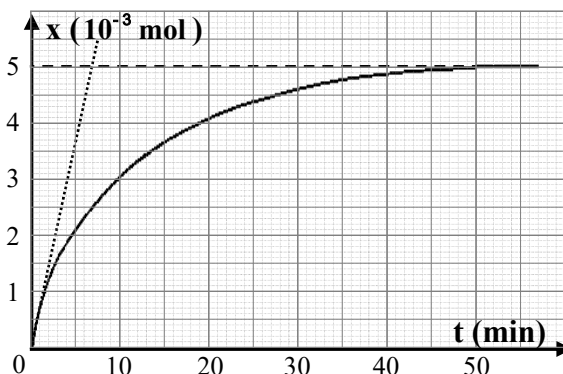


Le mélange réactionnel est préparé à partir d'un volume $V_1 = 100$ mL d'une solution de H_2O_2 de concentration molaire C_1 et d'un volume $V_2 = 100$ mL d'une solution de KI de concentration molaire $C_2 = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Le milieu est acidifié par des gouttes d'acide sulfurique concentré (H_3O^+ en excès).

La courbe ci-contre donne l'évolution de l'avancement de la réaction x au cours du temps.

1⁰) Dire, en le justifiant, si les ions H_3O^+ jouent le rôle de réactif ou de catalyseur.



2⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

b - Calculer la quantité de matière initiale $n_0(I^-)$ d'ions iodure. Montrer alors que (I^-) n'est pas limitant.

c - Calculer la valeur de la concentration molaire initiale C_1 de la solution de H_2O_2 utilisée.

3⁰) Déterminer graphiquement :

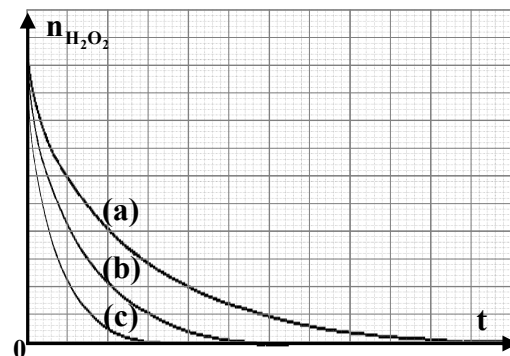
a - la valeur de la vitesse initiale $v(0)$ de la réaction.

b - le temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$.

4⁰) On recommence l'expérience dans des conditions expérimentales différentes :

Exp	$[H_2O_2]_0$ (mol.L ⁻¹)	$[I^-]_0$ (mol.L ⁻¹)	θ (°C)	Catalyseur
I	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-2}$	25	
II	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-2}$	40	
III	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-2}$	50	Fe^{2+}

On donne ci-contre les courbes d'évolution au cours du temps de la quantité de matière de H_2O_2 . Associer chacune des courbes (a), (b) et (c) à l'expérience correspondante en précisant chaque fois le ou les facteurs cinétique mis en jeu.



Réponse :

1⁰) Les ions H_3O^+ , inscrits dans l'équation de la réaction, sont consommés au cours de la réaction. Ils jouent donc le rôle de réactif.

2⁰) a - Graphiquement : $x_f = 5 \cdot 10^{-3}$ mol

b - $n_0(I^-) = C_2 \cdot V_2 \rightarrow n_0(I^-) = 0,2 \cdot 0,1$ et $n_0(I^-) = 20 \cdot 10^{-3}$ mol.

A l'état final : $n_f(I^-) = n_0(I^-) - 2 \cdot x_f \rightarrow n_f(I^-) = 20 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}$ et $n_f(I^-) = 10 \cdot 10^{-3}$ mol.

$n_f(I^-) \neq 0$ donc le réactif (I^-) n'est pas limitant.

c - Le réactif H_2O_2 est limitant $\rightarrow n_f(H_2O_2) = 0 \rightarrow n_0(H_2O_2) - x_f = 0 \rightarrow n_0(H_2O_2) = x_f$

On a : $n_0(H_2O_2) = C_1 \cdot V_1 \rightarrow C_1 = \frac{n_0(H_2O_2)}{V_1} \xrightarrow{n_0(H_2O_2)=x_f} C_1 = \frac{x_f}{V_1}$.

A.N : $C_1 = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,1}$ et $C_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ mol.L⁻¹

3⁰) a - On a : $v(0) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} \xrightarrow{\text{graphiquement}} v(0) = \frac{(5-0) \cdot 10^{-3}}{7-0}$ et $v(0) = 71,43 \cdot 10^{-5}$ mol.min⁻¹.

b - On a : $x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x_f}{2} \rightarrow x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2}$ et $x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = 2,5 \cdot 10^{-3}$ mol $\xrightarrow{\text{graphiquement}} t_{\frac{1}{2}} = 7$ min.

4⁰) La réaction dans l'expérience II est plus rapide que celle dans l'expérience I sous l'effet d'une augmentation de la température du milieu réactionnel.

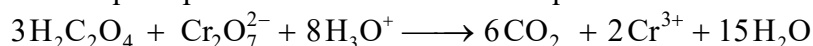
La réaction dans l'expérience III est plus rapide que celle dans l'expérience II sous l'effet d'une augmentation de la température du milieu réactionnel et l'utilisation d'un catalyseur.

Sachant qu'une réaction est d'autant plus rapide qu'elle atteint son état final ($n_{H_2O_2} = 0$) plus rapidement :

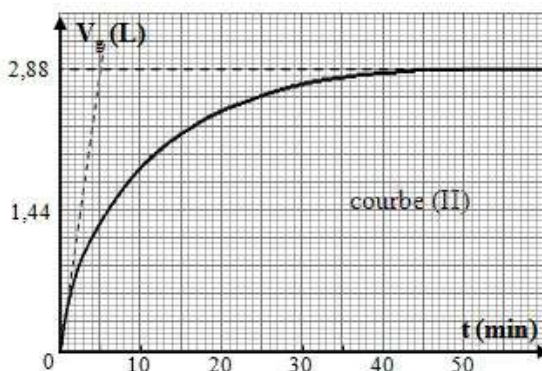
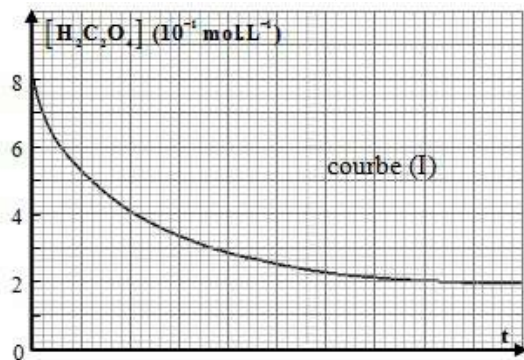
- l'expérience III correspond à la courbe (c)
- l'expérience II correspond à la courbe (b)
- l'expérience I correspond à la courbe (a)

Exercice 6 :

On étudie l'évolution, en fonction du temps, de la transformation chimique qui a lieu dans un mélange constitué initialement d'un volume $V_1 = 50$ mL d'une solution d'acide oxalique $H_2C_2O_4$ de concentration molaire C_1 , d'un volume $V_2 = 50$ mL d'une solution de dichromate de potassium $K_2Cr_2O_7$ de concentration molaire C_2 et quelques gouttes d'acide sulfurique concentré. Le volume du mélange réactionnel considéré est $V = 100$ mL. L'équation chimique représentant la réaction totale qui a lieu est :



On donne ci-dessous la courbe d'évolution au cours du temps de la molarité $[H_2C_2O_4]$ de l'acide oxalique (courbe (I)) et celle du volume V_g du dioxyde de carbone CO_2 dégagé (courbe (II)).



1⁰) a - Les ions H_3O^+ jouent-ils le rôle de réactif ou de catalyseur. Justifier.

b - Les ions H_3O^+ étant en excès, justifier que l'ion dichromate est le réactif limitant.

2⁰) a - Déterminer graphiquement, à partir de la courbe (II), la valeur de l'avancement final x_f de la réaction. On rappelle que le volume molaire est $V_M = 24 \text{ L.mol}^{-1}$.

b - Préciser la valeur du temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$.

c - Calculer les valeurs des concentrations molaires C_1 et C_2 .

d - Déterminer la molarité $[Cr^{3+}]_f$ des ions chrome dans le mélange à l'état final.

3⁰) a - Soit $v(t)$ la vitesse de réaction à l'instant t . Montrer que : $v(t) = \frac{1}{6 \cdot V_M} \cdot \left(\frac{dV_g}{dt} \right)_t$.

Déterminer graphiquement la valeur V_0 de la vitesse de la réaction à l'instant $t = 0$.

b - En supposant qu'entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 1 \text{ min}$, la vitesse de la réaction reste pratiquement constante et égale à V_0 , calculer la quantité de matière $n(1)$ de CO_2 formée à l'instant $t = 1 \text{ min}$.

4⁰) a - Montrer que la vitesse volumique de réaction peut s'écrire : $v_v(t) = -\frac{1}{3} \left(\frac{d[H_2C_2O_4]}{dt} \right)_t$.

b - Soit $Y_0(t) = a \cdot t + b$ l'équation de la tangente à la courbe (I), au point d'abscisse $t = 0$. Déterminer les valeurs de a et de b .

Réponse :

1⁰) a - L'ion H_3O^+ joue le rôle de réactif car il est consommé au cours de la réaction chimique.

b - D'après la courbe (I) et à l'état final $[H_2C_2O_4]_f \neq 0 \rightarrow n_f(H_2C_2O_4) \neq 0$ donc $H_2C_2O_4$ est en excès. Par conséquent l'ion dichromate $Cr_2O_7^{2-}$ est le réactif limitant.

2⁰) a - On a : $n_f(CO_2) = n_0(CO_2) + 6 \cdot x_f \xrightarrow[n(CO_2) = \frac{V_g}{V_M}]{n_0(CO_2) = 0} \frac{V_{gf}}{V_M} = 6 \cdot x_f \text{ et } x_f = \frac{1}{6} \cdot \frac{V_{gf}}{V_M}$

Graphiquement, d'après la courbe (II), et à l'état final, $V_{gf} = 2,88 \text{ L}$. A.N :

$$x_f = \frac{1}{6} \cdot \frac{2,88}{24} \text{ et } x_f = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

b - On a : $x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x_f}{2} \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{V_{gt_{\frac{1}{2}}}}{V_M} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{V_{gf}}{V_M} \right) \text{ et } V_{gt_{\frac{1}{2}}} = \frac{V_{gf}}{2} \xrightarrow[V_{gt_{\frac{1}{2}}} = \frac{2,88}{2} = 1,44 \text{ L}]{\text{graphiquement}} t_{\frac{1}{2}} = 6 \text{ min.}$

c - * $[H_2C_2O_4]_0 = \frac{n_0(H_2C_2O_4)}{V_1 + V_2} = \frac{C_1 \cdot V_1}{V_1 + V_2} \rightarrow C_1 = \frac{[H_2C_2O_4]_0 \cdot (V_1 + V_2)}{V_1}$.

A.N : graphiquement : $[H_2C_2O_4]_0 = 8 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1} \rightarrow C_1 = \frac{8 \cdot 10^{-1} \cdot (50 + 50) \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3}} \text{ et } C_1 = 1,6 \text{ mol.L}^{-1}$.

* $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ est le réactif limitant $\rightarrow n_f(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) = 0 \rightarrow n_0(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) - x_f = 0$ et $n_0(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) = x_f$

Or $n_0(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) = C_2 \cdot V_2 \rightarrow C_2 = \frac{x_f}{V_2}$. A.N : $C_2 = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{50 \cdot 10^{-3}}$ et $C_2 = 0,4 \text{ mol.L}^{-1}$.

$$\text{Remarque : } C_2 = \frac{n_0(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-})}{V_2} = \frac{1}{V_2} \left(\frac{n_{\text{réagi}}(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4)}{3} \right) = \frac{1}{V_2} \left(\frac{([\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]_0 - [\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]_f) \cdot (V_1 + V_2)}{3} \right)$$

A.N : $C_2 = 0,4 \text{ mol.L}^{-1}$.

$$\mathbf{d} - [\text{Cr}^{3+}]_f = \frac{n_f(\text{Cr}^{3+})}{V_1 + V_2} = \frac{n_0(\text{Cr}^{3+}) + 2 \cdot x_f}{V_1 + V_2}.$$

$$\text{A.N : } [\text{Cr}^{3+}]_f = \frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{(50 + 50) \cdot 10^{-3}} \text{ et } [\text{Cr}^{3+}]_f = 0,4 \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\mathbf{3^0) a} - v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t \text{ or } x = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{V_g}{V_M} \right) \rightarrow v(t) = \frac{1}{6 V_M} \cdot \left(\frac{dV_g}{dt} \right)_t$$

$$\text{A.N : } V_0 = v(0) = \frac{1}{6 \cdot 24} \left(\frac{2,88 - 0}{5 - 0} \right) \text{ et } V_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.min}^{-1}.$$

b - Entre $t = 0$ et $t = 1 \text{ min}$:

$$v(t) = V_0 = \text{constante} \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt}} \frac{dx}{dt} = V_0 \rightarrow x(t) = V_0 \cdot t + x_0 \xrightarrow[\rightarrow x_0 = 0]{x(0) = 0} x(t) = V_0 \cdot t$$

$$\text{On a : } n(t) = n_t(\text{CO}_2) = n_0(\text{CO}_2) + 6 \cdot x(t) \xrightarrow[\rightarrow x(t) = V_0 \cdot t]{n_0(\text{CO}_2) = 0} n(t) = 6 \cdot V_0 \cdot t.$$

$$\text{A.N : } n(1) = 6 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \text{ et } n(1) = 24 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$\mathbf{4^0) a} - \text{On a : } n(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4) = n_0(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4) - 3 \cdot x \rightarrow \left(\frac{dn(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4)}{dt} \right)_t = 0 - 3 \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)_t$$

$$\text{or } v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t \rightarrow v(t) = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{dn(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4)}{dt} \right)_t$$

$$\text{d'autre part : } v_v(t) = \frac{v(t)}{V} \rightarrow v_v(t) = -\frac{1}{3 \cdot V} \cdot \left(\frac{dn(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4)}{dt} \right)_t = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d \left(\frac{n(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4)}{V} \right)}{dt} \right)_t$$

$$\text{et } v_v(t) = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d[\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]}{dt} \right)_t.$$

b - $Y_0(t) = a \cdot t + b$ équation de la tangente à l'origine à la courbe $[\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4] = f(t)$

$$* a = \left(\frac{d[\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]}{dt} \right)_{t=0} = -3 \cdot v_v(0) = -3 \cdot \frac{v(0)}{V} = -3 \cdot \frac{V_0}{V_1 + V_2}.$$

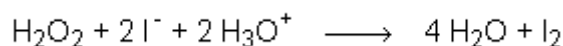
$$\text{A.N : } a = -3 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{(50 + 50) \cdot 10^{-3}} \text{ et } a = -12 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}.$$

$$* \text{ Graphiquement : } b = 8 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$$

Exercice 7 :

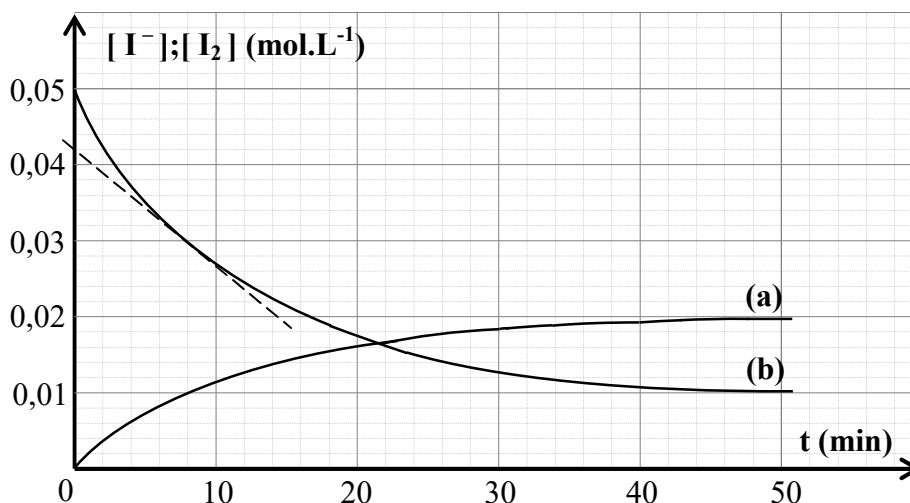
On étudie l'évolution au cours du temps de la réaction d'oxydation des ions iodures I^- par le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 (eau oxygénée) en milieu acide.

L'équation chimique qui symbolise la réaction associée à la transformation chimique étudiée est :



A la date $t = 0$, on mélange un volume $V_1 = 100 \text{ mL}$ d'une solution (S_1) d'eau oxygénée de concentration molaire C_1 avec un volume $V_2 = 100 \text{ mL}$ d'une solution (S_2) d'iodure de potassium KI de concentration molaire C_2 et quelques gouttes d'acide sulfurique concentré.

Le suivi temporel de cette transformation chimique a permis de tracer, sur le graphe ci-dessous, les courbes représentant les variations de la molarité des ions iodure I^- et de celle des molécules de diiode I_2 en fonction du temps.



- 1⁰) Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à la grandeur qu'elle représente.
- 2⁰) a - L'ion iodure I^- est-il le réactif limitant ? Justifier la réponse.
b - En exploitant le graphe, trouver les molarités initiale $[\text{I}^-]_0$ et finale $[\text{I}^-]_f$ des ions iodure dans le mélange et en déduire la valeur de l'avancement final de la réaction x_f .
c - Calculer la molarité initiale $[\text{H}_2\text{O}_2]_0$ de l'eau oxygénée dans le mélange.
d - Montrer alors que la concentration molaire de la solution (S_1) est $C_1 = 0,04 \text{ mol.L}^{-1}$ et celle de la solution (S_2) est $C_2 = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.
- 3⁰) a - Déterminer graphiquement, d'après la courbe (b), la valeur de la vitesse volumique de la réaction $v_v(t)$ à l'instant $t = 8 \text{ min}$. En déduire celle de la vitesse de la réaction $v(t)$ à cet instant.
b - Comment varie la vitesse de la réaction au cours du temps. Interpréter cette variation.
- 4⁰) a - Déterminer la valeur du temps de demi réaction $t_{1/2}$?
b - Dire, en le justifiant, comment varie $t_{1/2}$ si :
- on abaisse la température du milieu réactionnel ?
- on procède en présence d'ions Fe^{2+} comme catalyseur ?

Réponse :

- 1⁰) * La courbe (a) croît au cours du temps $\rightarrow$ apparition d'un produit $\rightarrow$ la courbe (a) représente $[\text{I}_2] = f(t)$.
* La courbe (b) décroît au cours du temps $\rightarrow$ disparition d'un réactif $\rightarrow$ la courbe (b) représente $[\text{I}^-] = g(t)$.
- 2⁰) a - $[\text{I}^-]_{\text{final}} \neq 0 \rightarrow n(\text{I}^-)_{\text{final}} \neq 0 \rightarrow (\text{I}^-)$ est en excès donc (H_2O_2) est le réactif limitant.
b - Graphiquement : $[\text{I}^-]_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{I}^-]_f = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

$$\text{On a : } n_f(\text{I}^-) = n_0(\text{I}^-) - 2x_f \rightarrow \frac{n_f(\text{I}^-)}{V_{\text{tot}}} = \frac{n_0(\text{I}^-)}{V_{\text{tot}}} - \frac{2x_f}{V_{\text{tot}}} \rightarrow [\text{I}^-]_f = [\text{I}^-]_0 - \frac{2x_f}{V_{\text{tot}}} \text{ et } x_f = \frac{[\text{I}^-]_0 - [\text{I}^-]_f}{2} \cdot V_{\text{tot}}$$

$$\text{A.N : } x_f = \frac{5 \cdot 10^{-2} - 10^{-2}}{2} \cdot (0,1 + 0,1) \text{ et } x_f = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$\text{c - } (\text{H}_2\text{O}_2) \text{ est le réactif limitant } \rightarrow n_f(\text{H}_2\text{O}_2) = n_0(\text{H}_2\text{O}_2) - x_f = 0 \rightarrow n_0(\text{H}_2\text{O}_2) = x_f$$

$$\text{On a : } [\text{H}_2\text{O}_2]_0 = \frac{n_0(\text{H}_2\text{O}_2)}{V_{\text{tot}}} \rightarrow [\text{H}_2\text{O}_2]_0 = \frac{x_f}{V_{\text{tot}}}$$

$$\text{A.N : } [\text{H}_2\text{O}_2]_0 = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{0,2} \text{ et } [\text{H}_2\text{O}_2]_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\mathbf{d} - [\text{I}^-]_0 = \frac{C_2 \cdot V_2}{V_{\text{tot}}} \rightarrow C_2 = [\text{I}^-]_0 \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_2} \cdot \text{A.N} : C_2 = 5.10^{-2} \cdot \frac{(0,1+0,1)}{0,1} \text{ et } C_2 = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$[\text{H}_2\text{O}_2]_0 = \frac{C_1 \cdot V_1}{V_{\text{tot}}} \rightarrow C_1 = [\text{H}_2\text{O}_2]_0 \cdot \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} \cdot \text{A.N} : C_1 = 2.10^{-2} \cdot \frac{(0,1+0,1)}{0,1} \text{ et } C_1 = 0,04 \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\mathbf{3^0) a} - v_v(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d[\text{I}^-]}{dt} \right)_t ;$$

$$\text{Graphiquement : } v_v(8) = -\frac{1}{2} \left(\frac{0,042 - 0,03}{0 - 8} \right) \text{ et } v_v(8) = 7,5.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}.$$

$$\text{On a : } v_v(t) = \frac{v(t)}{V} \rightarrow v(t) = V \cdot v_v(t)$$

$$\text{A.N : } v(8) = 0,27,5.10^{-4} \text{ et } v(8) = 1,5.10^{-4} \text{ mol.min}^{-1}.$$

b - La vitesse de la réaction $v(t)$ diminue au cours du temps.

Cette décroissance est due à la diminution de la concentration des réactifs qui engendre une diminution de la probabilité de chocs efficaces par unité de temps entre les entités réagissantes au cours du temps.

$$\mathbf{4^0) a} - x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2} \xrightarrow{\text{A.N}} x(t_{1/2}) = \frac{4.10^{-3}}{2} \text{ et } x(t_{1/2}) = 2.10^{-3} \text{ mol}.$$

$$\rightarrow [\text{I}^-]_{t_{1/2}} = \frac{n_{t_{1/2}}(\text{I}^-)}{V} = \frac{n_0(\text{I}^-) - 2 \cdot x(t_{1/2})}{V} = [\text{I}^-]_0 - 2 \cdot \frac{x(t_{1/2})}{V}$$

$$\text{A.N : } [\text{I}^-]_{t_{1/2}} = 5.10^{-2} - 2 \cdot \frac{(2.10^{-3})}{0,2} \text{ et } [\text{I}^-]_{t_{1/2}} = 3.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{Graphiquement : } t_{1/2} = 8 \text{ min}.$$

Remarque :

$$[\text{I}_2]_{t_{1/2}} = \frac{n_{t_{1/2}}(\text{I}_2)}{V} \xrightarrow{n(\text{I}_2)=x} [\text{I}_2]_{t_{1/2}} = \frac{x(t_{1/2})}{V}. \text{ A.N : } [\text{I}_2]_{t_{1/2}} = \frac{2.10^{-3}}{0,2} \text{ et } [\text{I}_2]_{t_{1/2}} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{Graphiquement : } t_{1/2} = 8 \text{ min}.$$

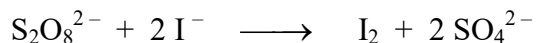
b - * On abaisse la température du milieu réactionnel, on ralentie alors la réaction et $t_{1/2}$ augmente.

* On procède en présence d'ions Fe^{2+} comme catalyseur, on accélère alors la réaction et $t_{1/2}$ diminue.

Exercice 8 :

On se propose d'étudier l'action des ions iodure (I^-) sur les ions peroxodisulfate ($\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$).

L'équation qui symbolise la réaction associée à cette transformation chimique, supposée totale, s'écrit :



Le mélange réactionnel, de volume $V = 100 \text{ mL}$, est préparé à partir d'un volume V_1 d'une solution de peroxodisulfate de sodium $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_8$ de concentration molaire $C_1 = 0,05 \text{ mol.L}^{-1}$ et d'un volume V_2 d'une solution d'iodure de potassium KI de concentration molaire $C_2 = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.

Le tableau descriptif de l'évolution du système chimique considéré est:

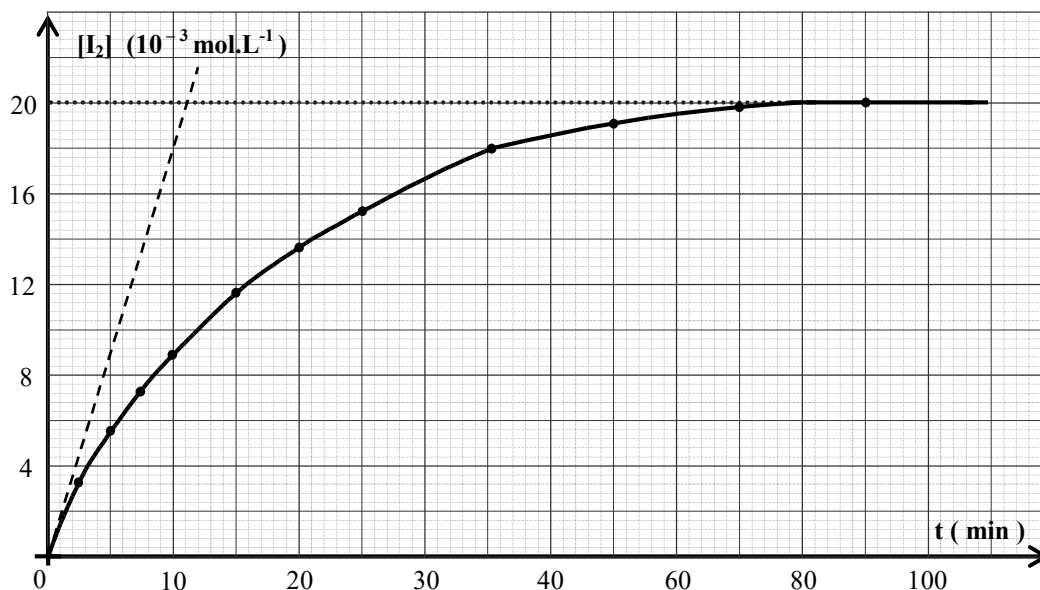
Equation chimique		$\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2 \text{I}^- \longrightarrow \text{I}_2 + 2 \text{SO}_4^{2-}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	2.10^{-3}	6.10^{-3}	0	0
Intermédiaire	x				
final	$x_{\text{max}} =$				

1⁰) a - Recopier et compléter le tableau d'avancement de la réaction.

b - Montrer que les valeurs des molarités initiales des ions réagissant sont $[S_2O_8^{2-}]_0 = 20.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[I^-]_0 = 60.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

c - En déduire les valeurs des volumes V_1 et V_2 utilisés.

2⁰) On donne le graphe représentant l'évolution de la molarité du diiode I_2 formé au cours du temps :



a - Déterminer, en exploitant le graphe $[I_2] = f(t)$, la valeur de l'avancement final x_f de la réaction. Le résultat confirme-t-il que la réaction étudiée est totale ?

b - Calculer la vitesse volumique de la réaction $v_V(0)$ à l'instant $t = 0$. En déduire la valeur de la vitesse de réaction $v(0)$ à cet instant.

c - Comment varie la vitesse de la réaction au cours du temps ? Interpréter cette variation.

d - Déterminer graphiquement le temps de demi réaction $t_{1/2}$.

5⁰) On recommence l'expérience dans des conditions expérimentales différentes.

On obtient les résultats suivants :

Expérience	$[S_2O_8^{2-}]_0 \text{ (mol.L}^{-1}\text{)}$	$[I^-]_0 \text{ (mol.L}^{-1}\text{)}$	Température ($^{\circ}\text{C}$)	Catalyseur
I	10.10^{-3}	30.10^{-3}	20	
II	20.10^{-3}	60.10^{-3}	20	
III	20.10^{-3}	60.10^{-3}	40	Fe^{2+}
IV	20.10^{-3}	60.10^{-3}	40	

Comparer la rapidité de la transformation chimique dans les quatre expériences en précisant chaque fois le facteur cinétique mis en jeu.

Réponse :

1⁰) a -

Equation chimique		$S_2O_8^{2-} + 2 I^- \longrightarrow I_2 + 2 SO_4^{2-}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	2.10^{-3}	6.10^{-3}	0	0
Intermédiaire	x	$2.10^{-3} - x$	$6.10^{-3} - 2x$	x	2x
final	$x_{\max} = 2.10^{-3}$	0	2.10^{-3}	2.10^{-3}	4.10^{-3}

$$\begin{cases} 2.10^{-3} - x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 2.10^{-3} \text{ mol} \\ 6.10^{-3} - 2x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 3.10^{-3} \text{ mol} \end{cases} \xrightarrow{\text{On prend la valeur la plus petite de } x_{\max}} \begin{cases} x_{\max} = 2.10^{-3} \text{ mol.} \\ (S_2O_8^{2-} \text{ est limitant}) \end{cases}$$

$$\text{b - } [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]_0 = \frac{n_0(\text{S}_2\text{O}_8^{2-})}{V}. \quad \text{A.N : } [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]_0 = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,1} \quad \text{et} \quad [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]_0 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$[\text{I}^-]_0 = \frac{n_0(\text{I}^-)}{V}. \quad \text{A.N : } [\text{I}^-]_0 = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{0,1} \quad \text{et} \quad [\text{I}^-]_0 = 60 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{c - } [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]_0 = \frac{C_1 \cdot V_1}{V} \rightarrow V_1 = \frac{[\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]_0 \cdot V}{C_1}. \quad \text{A.N : } V_1 = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{0,05} \quad \text{et} \quad V_1 = 40 \cdot 10^{-3} \text{ L}.$$

$$[\text{I}^-]_0 = \frac{C_2 \cdot V_2}{V} \rightarrow V_2 = \frac{[\text{I}^-]_0 \cdot V}{C_2}. \quad \text{A.N : } V_2 = \frac{60 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{0,1} \quad \text{et} \quad V_2 = 60 \cdot 10^{-3} \text{ L}.$$

$$2^0) \text{ Graphiquement, } [\text{I}_2]_f = 20 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}. \text{ Or } [\text{I}_2]_f = \frac{n_f(\text{I}_2)}{V} = \frac{x_f}{V} \rightarrow x_f = [\text{I}_2]_f \cdot V.$$

$$\text{A.N : } x_f = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 \quad \text{et} \quad x_f = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol}.$$

A l'état final, $x_f = x_{\max}$, le réactif limitant est totalement épuisé $\rightarrow$ la réaction étudiée est totale.

$$3^0) \text{ a - } v_v(t) = \frac{1}{1} \left(\frac{d[\text{I}_2]}{dt} \right)_t \xrightarrow{\text{graphiquement}} v_v(0) = \frac{1}{1} \frac{(18-0) \cdot 10^{-3}}{(10-0)} \quad \text{et} \quad v_v(0) = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

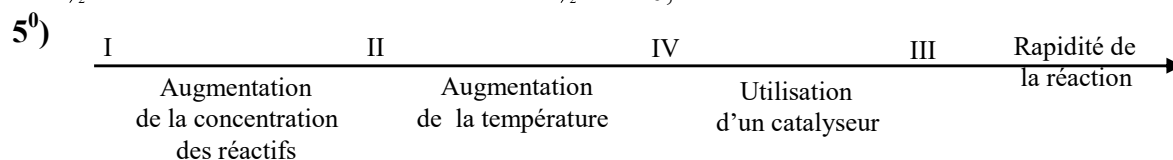
$$v(0) = V \cdot v_v(0). \quad \text{A.N : } v(0) = 0,1 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad v(0) = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ mol.min}^{-1}$$

b - la vitesse de la réaction diminue au cours du temps.

Au cours du temps, les quantités de matière des réactifs diminuent. La probabilité de rencontre entre les entités réagissantes diminue. Le nombre de chocs efficaces par unité de temps entre eux diminue et par conséquent la vitesse de la réaction diminue.

$$4^0) \text{ Au temps de demi réaction, } x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x_f}{2}.$$

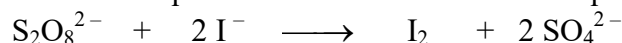
$$[\text{I}_2]_{t_{\frac{1}{2}}} = \frac{n_{t_{\frac{1}{2}}}(\text{I}_2)}{V} = \frac{x_{t_{\frac{1}{2}}}}{V} = \frac{x_f}{2 \cdot V}. \quad \text{A.N : } [\text{I}_2]_{t_{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,1} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}. \quad \text{Graphiquement : } t_{\frac{1}{2}} = 12 \text{ min}.$$



Exercice 9 :

On mélange un volume V_1 d'une solution (S_1) d'iodure de potassium de concentration $C_1 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et un volume V_2 d'une solution (S_2) de peroxydisulfate de sodium de concentration $C_2 = 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$.

L'équation qui symbolise la réaction chimique associée à la transformation qui a lieu est :



Le graphe ci-contre représente l'évolution au cours du temps du nombre de moles $n(\text{I}^-)$ d'ions iodure en fonction du temps :

1⁰) **a -** L'ion iodure I^- est-il le réactif limitant ? justifier.

b - Quel est le nombre de moles initial $n_0(\text{I}^-)$ d'ions iodure.

En déduire la valeur du volume V_1 de la solution (S_1).

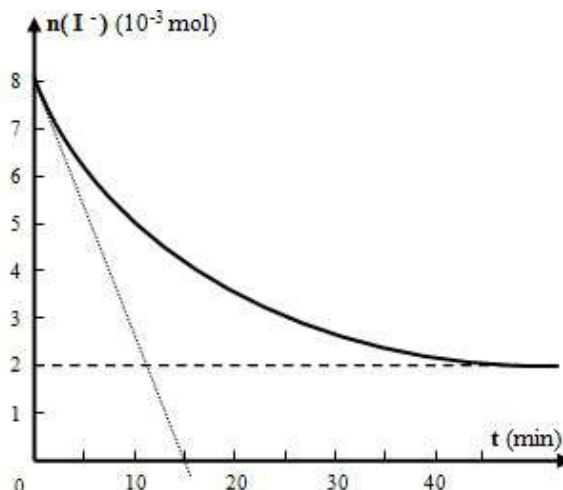
c - Calculer la valeur de l'avancement final de la réaction x_f .

d - Déterminer le nombre de moles initial $n_0(\text{S}_2\text{O}_8^{2-})$ d'ions peroxydisulfate.

En déduire la valeur du volume V_2 de la solution (S_2).

2⁰) **a -** La vitesse de réaction est définie par : $v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_t$.

$$\text{Montrer qu'elle peut s'écrire : } v(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{dn(\text{I}^-)}{dt} \right)_t.$$



b - Calculer la valeur initiale $v(0)$ de la vitesse de réaction.

c - Comment varie la vitesse de réaction au cours du temps ? Interpréter cette variation.

3⁰ **a** - Déterminer graphiquement la valeur du temps de demi réaction $t_{1/2}$.

b - En présence d'ions Fe^{2+} , on obtient $t_{1/2} = 5 \text{ min}$. Expliquer alors le rôle joué par les ions Fe^{2+} .

c - Comment varie $t_{1/2}$ si on augmente la température du milieu réactionnel ? Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰ **a** - Graphiquement, $n_f(\text{I}^-) = 2.10^{-3} \text{ mol} \neq 0 \rightarrow$ le réactif I^- n'est pas limitant.

b - Graphiquement, $n_0(\text{I}^-) = 8.10^{-3} \text{ mol}$.

$$\text{On a : } n_0(\text{I}^-) = C_1 \cdot V_1 \rightarrow V_1 = \frac{n_0(\text{I}^-)}{C_1}.$$

$$\text{A.N : } V_1 = \frac{8.10^{-3}}{4.10^{-2}} \text{ et } V_1 = 0,2 \text{ L.}$$

$$\text{c - On a : } n_f(\text{I}^-) = n_0(\text{I}^-) - 2x_f = 0 \rightarrow x_f = \frac{n_0(\text{I}^-) - n_f(\text{I}^-)}{2}.$$

$$\text{A.N : } x_f = \frac{8.10^{-3} - 2.10^{-3}}{2} \text{ et } x_f = 3.10^{-3} \text{ mol.}$$

$$\begin{aligned} \text{d - Le réactif } \text{S}_2\text{O}_8^{2-} \text{ étant limitant } &\rightarrow n_f(\text{S}_2\text{O}_8^{2-}) = n_0(\text{S}_2\text{O}_8^{2-}) - x_f = 0 \\ &\rightarrow n_0(\text{S}_2\text{O}_8^{2-}) = x_f \text{ et } n_0(\text{S}_2\text{O}_8^{2-}) = 3.10^{-3} \text{ mol.} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } n_0(\text{S}_2\text{O}_8^{2-}) = C_2 \cdot V_2 \rightarrow V_2 = \frac{n_0(\text{S}_2\text{O}_8^{2-})}{C_2}.$$

$$\text{A.N : } V_2 = \frac{3.10^{-3}}{10^{-2}} \text{ et } V_2 = 0,3 \text{ L.}$$

$$\text{2⁰ **a** - On a : $n(\text{I}^-) = n_0(\text{I}^-) - 2x \rightarrow \left(\frac{dn(\text{I}^-)}{dt} \right) = -2 \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)$$$

$$\text{or } v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right) \rightarrow \left(\frac{dn(\text{I}^-)}{dt} \right) = -2 \cdot v(t) \text{ et } v(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{dn(\text{I}^-)}{dt} \right).$$

$$\text{b - } v(0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{dn(\text{I}^-)}{dt} \right)_{t=0} \xrightarrow{\text{graphiquement}} v(0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{8.10^{-3} - 0}{0 - 15} \right) \text{ et } v(0) = 2,67.10^{-4} \text{ mol. min}^{-1}.$$

c - La vitesse de réaction décroît au cours du temps.

Au cours du temps, les quantités de matière des réactifs diminuent, la probabilité de rencontre entre les entités réagissantes diminue donc le nombre de chocs efficaces par unité de temps entre elles diminue et par conséquent la vitesse de réaction diminue.

$$\text{3⁰ **a** - Le temps de demi réaction est tel que : $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2} \rightarrow x(t_{1/2}) = \frac{3.10^{-3}}{2} \text{ et } x(t_{1/2}) = 1,5.10^{-3} \text{ mol.}$$$

$$\text{A l'instant } t_{1/2}, n(\text{I}^-) = 8.10^{-3} - 2 \cdot (1,5.10^{-3}) = 5.10^{-3} \text{ mol} \xrightarrow{\text{graphiquement}} t_{1/2} = 10 \text{ min.}$$

b - En présence de Fe^{2+} , $t_{1/2}$ diminue donc la réaction est accélérée. Par conséquent les ions Fe^{2+} jouent le rôle de catalyseur.

c - La température est un facteur cinétique. Si elle croît, la réaction s'accélère et par conséquent $t_{1/2}$ diminue.

Exercice 10 :

Les ions iodure (I^-) sont oxydés lentement par les ions peroxydisulfate ($S_2O_8^{2-}$) selon une réaction totale d'équation chimique : $S_2O_8^{2-} + 2 I^- \longrightarrow I_2 + 2 SO_4^{2-}$

Pour étudier la cinétique de cette réaction, on réalise deux expériences dont les conditions initiales sont données dans le tableau ci-contre. Dans les deux cas, le volume du mélange réactionnel est égal à V.

Expérience	1	2
$[S_2O_8^{2-}]_0$ (en mol.L ⁻¹)	10^{-2}	10^{-2}
$[I^-]_0$ (en mol.L ⁻¹)	5.10^{-2}	3.10^{-2}

Le graphe ci-dessous donne l'évolution de la quantité de matière de diiode (I_2) formé au cours du temps dans chacune des deux expériences :

1⁰ a - Trouver graphiquement la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

b - Justifier que ($S_2O_8^{2-}$) est le réactif limitant dans les deux expériences.

c - Calculer la valeur du volume V du mélange.

2⁰ a - Déterminer graphiquement les valeurs $v_1(0)$ et $v_2(0)$ des vitesses initiales de réaction respectivement dans les expériences 1 et 2.

b - Comparer $v_1(0)$ et $v_2(0)$. Citer le facteur cinétique qui permet de justifier ce résultat.

c - Comment varie la vitesse de la réaction au cours du temps ? Interpréter cette variation.

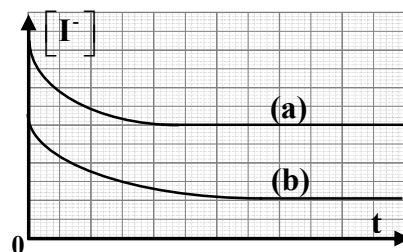
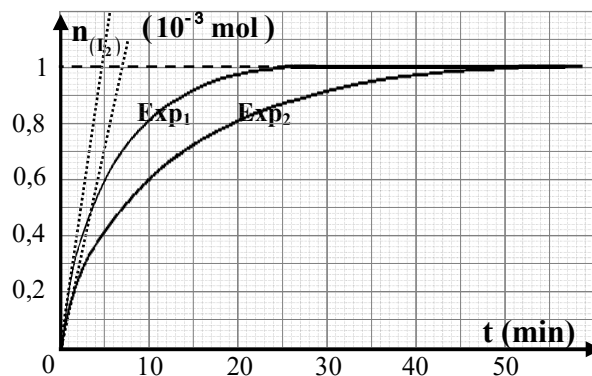
3⁰ a - Déterminer graphiquement la valeur du temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$ dans chaque expérience.

b - Comparer alors la rapidité de la réaction dans les deux expériences.

4⁰ On donne ci-contre les courbes d'évolution de la molarité des ions iodure (I^-) en fonction du temps.

a - Associer chaque courbe à l'expérience correspondante.

b - Calculer, dans chaque cas, la valeur de la molarité finale $[I^-]_f$ des ions iodure.



Réponse :

1⁰ a - On a $n(I_2) = x \rightarrow x_f = n_f(I_2)$. Graphiquement : $x_f = 10^{-3}$ mol dans les deux expériences.

b -

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{exp 1: } \frac{[S_2O_8^{2-}]_{01}}{[I^-]_{01}} = \frac{\frac{n_{01}(S_2O_8^{2-})}{V}}{\frac{n_{01}(I^-)}{V}} = \frac{n_{01}(S_2O_8^{2-})}{n_{01}(I^-)} \rightarrow \frac{n_{01}(S_2O_8^{2-})}{n_{01}(I^-)} = \frac{10^{-2}}{5.10^{-2}} = \frac{1}{5} < \frac{1}{2} \\ \text{exp 2: } \frac{[S_2O_8^{2-}]_{02}}{[I^-]_{02}} = \frac{\frac{n_{02}(S_2O_8^{2-})}{V}}{\frac{n_{02}(I^-)}{V}} = \frac{n_{02}(S_2O_8^{2-})}{n_{02}(I^-)} \rightarrow \frac{n_{02}(S_2O_8^{2-})}{n_{02}(I^-)} = \frac{10^{-2}}{3.10^{-2}} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \end{array} \right. \rightarrow (S_2O_8^{2-}) \text{ est limitant}$$

Remarque : $[I^-]_{01} \neq [I^-]_{02} \rightarrow n_{01}(I^-) \neq n_{02}(I^-)$ or $x_{f1} = x_{f2} \rightarrow x_f$ ne dépend pas de $n_0(I^-)$ donc (I^-) n'est pas le réactif limitant par conséquent ($S_2O_8^{2-}$) est limitant.

c - $[S_2O_8^{2-}]_0 = \frac{n_0(S_2O_8^{2-})}{V} \rightarrow V = \frac{n_0(S_2O_8^{2-})}{[S_2O_8^{2-}]_0}$

or $n_f(S_2O_8^{2-}) = n_0(S_2O_8^{2-}) - x_f = 0 \rightarrow n_0(S_2O_8^{2-}) = x_f$ donc $V = \frac{x_f}{[S_2O_8^{2-}]_0}$

A.N : $V = \frac{10^{-3}}{10^{-2}}$ et $V = 0,1 \text{ L}$.

$$2^0) \text{ a - } v(0) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} \xrightarrow{x=n_{I_2}} v(0) = \left(\frac{dn_{I_2}}{dt} \right)_{t=0}$$

$$\text{Exp 1 : } v_1(0) = \frac{(1-0) \cdot 10^{-3}}{5-0} \quad \text{et} \quad v_1(0) = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\text{Exp 2 : } v_2(0) = \frac{(1-0) \cdot 10^{-3}}{7-0} \quad \text{et} \quad v_2(0) = 1,43 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

b - $v_1(0) > v_2(0)$. Le facteur cinétique qui permet de justifier ce résultat est la concentration initiale des réactifs.

c - la vitesse de la réaction diminue au cours du temps.

Au cours du temps, les quantités de matière des réactifs diminuent. La probabilité de rencontre entre les entités réagissantes diminue. Le nombre de chocs efficaces par unité de temps entre eux diminue et par conséquent la vitesse de la réaction diminue.

$$3^0) \text{ a - } x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x_f}{2} \rightarrow x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{10^{-3}}{2} \quad \text{et} \quad x\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol}.$$

$$\text{Graphiquement : } t_{\frac{1}{2}}(\text{Exp1}) = 3,5 \text{ min} \quad \text{et} \quad t_{\frac{1}{2}}(\text{Exp2}) = 7 \text{ min}$$

b - $t_{\frac{1}{2}}(\text{Exp1}) < t_{\frac{1}{2}}(\text{Exp2}) \rightarrow$ La réaction est plus rapide dans l'expérience 1.

4⁰) a - La courbe (a) atteint sa limite finale plus rapidement, elle correspond donc à l'expérience la plus rapide.

Donc la courbe (a) correspond à l'expérience 1 et la courbe (b) correspond à l'expérience 2.

$$\text{b - } [I^-]_f = \frac{n_f(I^-)}{V} = \frac{n_0(I^-) - 2 \cdot x_f}{V} = \frac{n_0(I^-)}{V} - 2 \cdot \frac{x_f}{V} = [I^-]_0 - 2 \cdot \frac{x_f}{V}$$

$$\text{Exp 1 : } [I^-]_{f1} = 5 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot \frac{10^{-3}}{0,1} \quad \text{et} \quad [I^-]_{f1} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{Exp 2 : } [I^-]_{f2} = 3 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot \frac{10^{-3}}{0,1} \quad \text{et} \quad [I^-]_{f2} = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

LES ÉQUILIBRES CHIMIQUES

I / Réaction totale – Réaction limitée :

1⁰) L'avancement maximal $x_{\max}$ d'une réaction :

Soit un système chimique qui est le siège d'une transformation chimique et dont l'état final est atteint lorsque le réactif limitant est totalement épuisé. Ce système est alors le siège d'une réaction **totale**.

Au cours de la réaction totale, l'avancement x augmente de sorte que les quantités de matière des réactifs diminuent jusqu'à ce que celle du réactif limitant s'annule.

La valeur maximale atteinte par l'avancement et qui caractérise l'état final, sera appelée **avancement maximal** et notée $x_{\max}$.

Pour une réaction totale, l'avancement à l'état final est égal à l'avancement maximal : $x_f = x_{\max}$

Remarque : Si l'avancement maximal est atteint alors la **réaction est totale**.

Exemple : Considérons le tableau d'avancement de la réaction totale suivante :

Equation de la réaction		$2 \text{H}_2\text{S} + \text{SO}_2 \longrightarrow 3 \text{S} + 2 \text{H}_2\text{O}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial (t = 0)	0	5	4	0	0
Intermédiaire (t)	x	$5 - 2x$	$4 - x$	$3x$	$2x$
final	Avancement maximal $x_{\max} = 2,5$	0	1,5	7,5	5

$$\text{Avancement maximal} \longrightarrow \text{un des réactifs disparaît} \longrightarrow \begin{cases} 5 - 2x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 2,5 \text{ mol} \\ 4 - x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 4 \text{ mol} \end{cases}$$

On retient alors la **plus petite valeur** $\longrightarrow x_{\max} = 2,5 \text{ mol}$ (H_2S est alors le réactif limitant).

Lorsqu'une réaction totale atteint l'état final, la quantité de matière du réactif limitant est nulle.

- $\frac{n_0(\text{H}_2\text{S})}{n_0(\text{SO}_2)} = \frac{5}{4} = 1,25 < \frac{2}{1} \longrightarrow \text{H}_2\text{S}$ est le réactif limitant.
- Si on avait pris $x_{\max} = 4 \text{ mol}$, on aurait $n(\text{SO}_2)_{\text{final}} = 0$ et $n(\text{H}_2\text{S})_{\text{final}} = -3 \text{ mol} < 0$ ce qui est absurde.

2⁰) L'avancement final x_f d'une réaction :

Une réaction chimique n'est pas toujours totale.

Si le réactif en défaut n'est pas totalement épuisé lorsque l'état final est atteint, la réaction est alors dite **limitée** et l'avancement final x_f de la réaction sera inférieur à son avancement maximal $x_{\max}$.

Exemple : On prépare 1 litre d'une solution déci molaire d'acide éthanóïque CH_3COOH . Le tableau descriptif de l'évolution au cours du temps de la réaction de dissociation de CH_3COOH dans l'eau est :

Equation de la réaction		$\text{CH}_3\text{COOH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CH}_3\text{COO}^- + \text{H}_3\text{O}^+$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial (t = 0)	0	0,1	excès	0	0
Intermédiaire (t)	x	$0,1 - x$	excès	x	x
Final attendu	Avancement maximal $x_{\max} = 0,1$	0	excès	0,1	0,1
Final obtenu	Avancement final $x_f = 0,0013$	0,0987	excès	0,0013	0,0013

On voit que $x_f < x_{\max} \longrightarrow$ la dissociation de CH_3COOH dans l'eau est limitée.

3⁰) Le taux d'avancement final τ_f d'une réaction :

a - Définition :

Par définition, le taux d'avancement final d'une réaction est égal au rapport de l'avancement final de cette réaction par son avancement maximal.

$$\tau_f = \frac{X_{\text{final}}}{X_{\text{maximal}}} \Rightarrow \tau_f = \frac{X_f}{X_{\text{max}}}$$

b - Conséquences :

- Pour une réaction totale, $x_f = x_{\text{max}} \longrightarrow \tau_f = 1$
- Pour une réaction limitée, $x_f < x_{\text{max}} \longrightarrow \tau_f < 1$

c - Remarques :

- $\tau_f \leq 1$, on peut alors l'exprimer en pourcentage.

Exemple : Pour une solution déci molaire de CH_3COOH :

$$\begin{cases} x_f = 0,0013 \text{ mol} \\ x_{\text{max}} = 0,1 \text{ mol} \end{cases} \longrightarrow \tau_f = \frac{0,0013}{0,1} = 0,013 \quad \text{ou} \quad \tau_f = 1,3\%$$

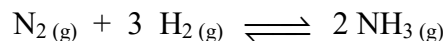
- Le taux d'avancement maximal est égal à 1 mais il n'est atteint que si la réaction est totale.
- τ_f dépend de l'état initial du système.

Exemple : Pour différentes concentrations de la solution de CH_3COOH :

$$\begin{cases} C_1(\text{CH}_3\text{COOH}) = 0,1 \text{ mol.L}^{-1} \longrightarrow \tau_{f1} = 0,013 \quad \text{ou} \quad \tau_{f1} = 1,3\% \\ C_2(\text{CH}_3\text{COOH}) = 0,01 \text{ mol.L}^{-1} \longrightarrow \tau_{f2} = 0,04 \quad \text{ou} \quad \tau_{f2} = 4\% \end{cases}$$

Application 1 :

L'équation associée à la réaction de synthèse est :



Dans un réacteur, on mélange $1,0 \cdot 10^2$ mol de diazote et $3,0 \cdot 10^2$ mol de dihydrogène.

Le taux d'avancement final de cette réaction est $\tau_f = 0,70$.

1⁰) Donner l'expression du taux d'avancement final et la signification des termes utilisés.

2⁰) La réaction de synthèse de l'ammoniac est-elle une réaction totale ? Justifier la réponse.

3⁰) Établir le tableau d'avancement relatif à cette réaction. En déduire la composition finale en quantité de matière du mélange.

Réponse :

$$1^0) \quad \tau_f = \frac{x_f}{x_{\text{max}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_f : \text{avancement final} \\ x_{\text{max}} : \text{avancement maximal} \end{cases}$$

2⁰) $\tau_f < 1$ donc la réaction n'est pas totale.

3⁰)

Equation de la réaction		$\text{N}_2(\text{g}) + 3 \text{H}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2 \text{NH}_3(\text{g})$		
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)		
Initial (t = 0)	0	$1,0 \cdot 10^2$	$3,0 \cdot 10^2$	0
Intermédiaire (t)	x	$1,0 \cdot 10^2 - x$	$3,0 \cdot 10^2 - 3x$	2x
Final	$x_f = 0,70 \cdot 10^2$	$0,30 \cdot 10^2$	$0,90 \cdot 10^2$	$1,40 \cdot 10^2$

Le mélange étant en proportions stœchiométriques, $x_{\text{max}} = 1,0 \cdot 10^2$ mol,
il vient alors que : $x_f = \tau_f \cdot x_{\text{max}} = 0,70 \cdot 10^2$ mol.

II / Equilibre d'estérification - hydrolyse :

1⁰) Estérification d'un alcool - Hydrolyse d'un ester :

a - la réaction d'estérification :



- La réaction d'estérification est **athermique**.

Considérons le tableau d'avancement suivant :

Equation de la réaction		$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} + \text{CH}_3\text{COOH} \rightleftharpoons \text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5 + \text{H}_2\text{O}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial (t = 0)	0	1	1	0	0
Intermédiaire (t)	x	1 - x	1 - x	x	x
Final	$x_f = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

La courbe d'apparition de l'ester au cours du temps est :

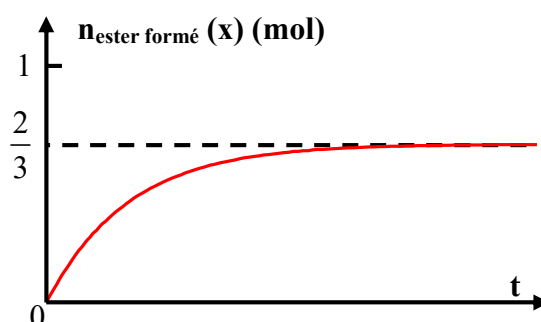
- La réaction d'estérification est **lente**.

On a :

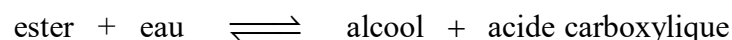
$$\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3} < 1$$

- La réaction d'estérification est **limitée**.

Il existe une réaction inverse qui la limite : c'est l'hydrolyse.



b - la réaction d'hydrolyse :



- La réaction d'hydrolyse est **athermique**.

Considérons le tableau d'avancement suivant :

Equation de la réaction		$\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} + \text{CH}_3\text{COOH}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial (t = 0)	0	1	1	0	0
Intermédiaire (t)	x'	1 - x'	1 - x'	x'	x'
Final	$x'_f = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

La courbe de disparition de l'ester au cours du temps est :

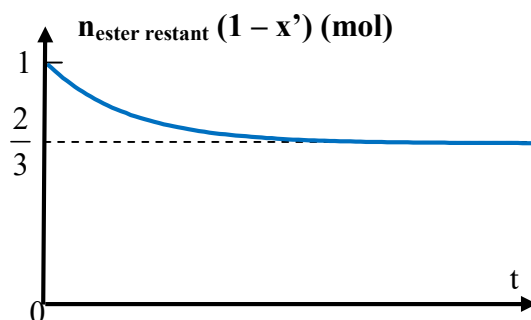
- La réaction d'hydrolyse est **lente**.

On a :

$$\tau'_f = \frac{x'_f}{x'_{\max}} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} < 1$$

- La réaction d'hydrolyse est **limitée**.

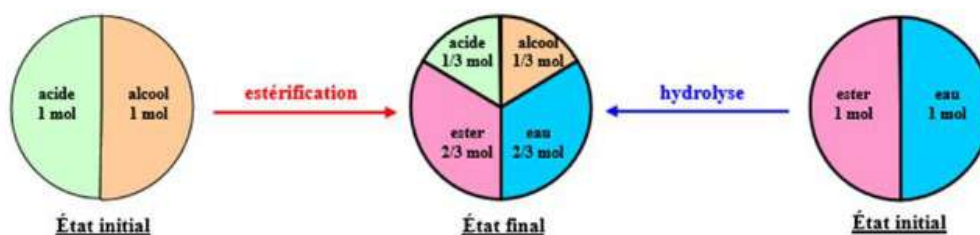
Elle a la même limite que l'estérification correspondante.



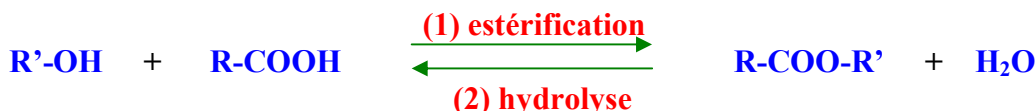
2⁰) L'équilibre chimique :

- L'estérification et l'hydrolyse correspondante, dans les mêmes conditions expérimentales, sont deux réactions limitées qui aboutissent à la même composition de l'état final.

La réaction d'estérification est alors **réversible** (la réaction et son inverse ont lieu simultanément).



- Lorsque l'état final est atteint, on dit qu'on a atteint **un état d'équilibre** (équilibre entre les réactifs et les produits).
- Les deux réactions inverses continuent d'avoir lieu sans influencer la composition de l'état d'équilibre auquel elles ont aboutis, on dit alors que **l'équilibre est dynamique**.

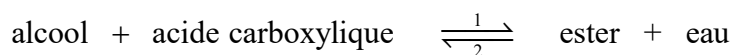


3⁰) Vitesse de la réaction réversible :

a - Définition :

La vitesse d'une réaction réversible est la vitesse d'évolution vers l'état d'équilibre.

Considérons la réaction d'estérification :



$$n_{\text{ester formé}} = n_1 - n_2$$

n_1 est le nombre de mole d'ester apparu dans le sens (1).

n_2 est le nombre de mole d'ester disparu dans le sens (2).

La vitesse de la réaction est :

$$v = v_1 - v_2$$

v_1 est la vitesse d'estérification seule

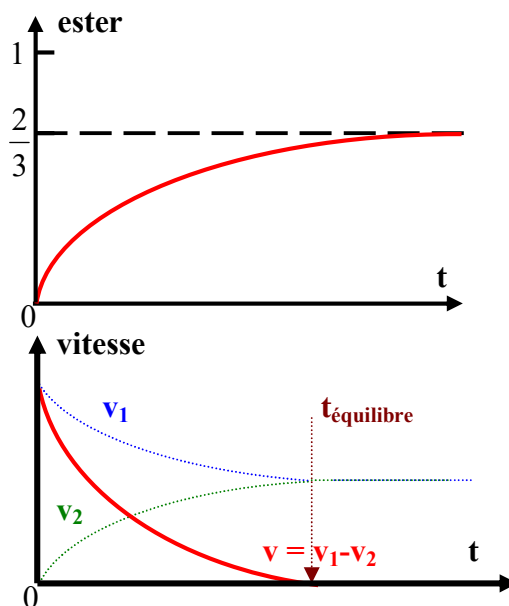
v_2 est la vitesse d'hydrolyse seule

Remarque :

La vitesse de la réaction diminue quand le système évolue vers l'état d'équilibre.

A l'équilibre, le système n'évolue plus et sa vitesse s'annule :

$$v = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$



A l'équilibre, estérification et hydrolyse se produisent en même temps et à la même vitesse, on dit alors que **l'équilibre est dynamique**.

b - Modification de la vitesse de la réaction :

• Influence de la température :

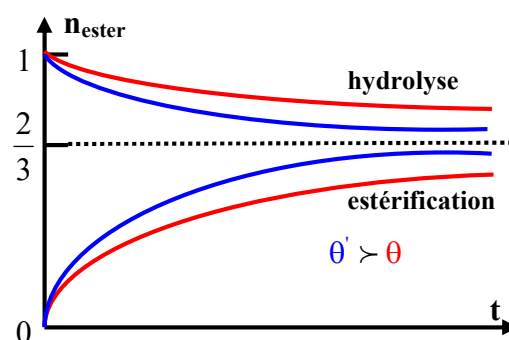
La vitesse de la réaction **croît** avec la température.

La réaction étant athermique, l'élévation de la température n'influe pas **sur la limite de la réaction**.

• Influence du catalyseur:

L'utilisation d'un catalyseur (H^+) **accélère** la réaction **sans modifier** la composition à l'état d'équilibre du système.

Si l'équilibre est atteint, le catalyseur est **indifférent** au sens de la réaction.



4⁰) Déplacement de la limite de la réaction d'estérification :

a - Utilisation d'un excès d'un des réactifs :

Si on partait d'un mélange de 5 moles d'acide éthanóïque et 1 mole d'éthanol, la limite se déplace vers 0,95 ; ce déplacement s'accompagne d'une **accélération de la réaction**.

b - Elimination d'un des produits :

Si on enlève à fur et à mesure un des produits lors de la réaction, la réaction inverse n'est plus possible et la transformation peut être complète.

Exemples :

- Enlèvement de l'eau à l'aide d'un déshydratant $\Rightarrow$ l'estérification est complète.
- Saponification de l'ester (action des ions OH^-) $\Rightarrow$ l'hydrolyse est complète.

5⁰) Influence de la classe de l'alcool :

Pour un mélange équimolaire d'acide carboxylique et d'alcool :

- Si l'alcool est I^{aire}, la limite est de 67 %
- Si l'alcool est II^{aire}, la limite est de 60 %
- Si l'alcool est III^{aire}, la limite est de 5 %

Application 2 :

La réaction étudiée met en jeu l'acide éthanóïque (A) de formule $\text{CH}_3\text{-COOH}$ et un alcool (B), on observe la formation d'un ester (E) de formule $\text{CH}_3\text{COO-CH}_2\text{-CH}_2\text{-CH}_3$ et de l'eau.

Dans un bécher placé dans de l'eau glacée, on introduit 0,38 mol d'acide (A) et 0,38 mol d'alcool (B) ainsi que quelques gouttes d'acide sulfurique concentré. Le volume du mélange est V. On agite alors le mélange.

On prélève à dix reprises un volume $V_0 = \frac{V}{10}$ de ce mélange, que l'on introduit dans 10 tubes à essai

numérotés de 0 à 9.

Le tube n°0 est placé dans la glace, les tubes numérotés de 1 à 9 sont munis d'un réfrigérant à air, puis introduits dans un bain thermostaté à 60 °C. On déclenche alors un chronomètre.

A l'instant $t_1 = 2$ minutes, le tube n°1 est placé dans de la glace. Les ions hydronium H_3O^+ contenus dans le tube sont dosés par une solution d'hydroxyde de sodium (soude) de concentration appropriée. On peut ainsi déterminer la quantité d'acide éthanóïque contenue dans ce tube.

On procède de même pour les autres tubes, le contenu du tube n°9 étant dosé à une date $t_9 = 90$ min.

1⁰) a - Quel est le rôle joué par l'acide introduit dans le mélange initial ?

b - Pourquoi les tubes numérotés de 1 à 9 sont-ils placés dans un bain thermostaté à 60 °C ?

c - Quel est le rôle du réfrigérant à air munissant les tubes de 1 à 9 ?

2⁰) Ecrire l'équation de la réaction d'estérification étudiée en identifiant l'alcool (B) utilisé.

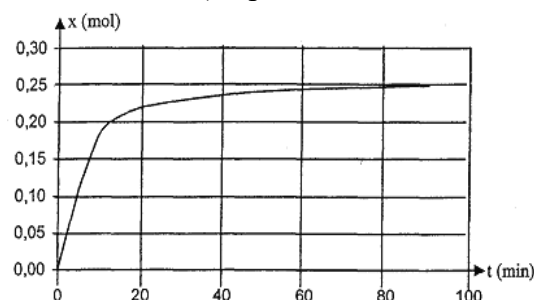
3⁰) a - Déterminer l'avancement maximal x_{max} de la réaction d'estérification étudiée (on peut éventuellement utiliser un tableau d'avancement).

b - L'étude précédente permet d'obtenir les variations de l'avancement x de cette réaction en fonction du temps.

On peut alors tracer la courbe ci-contre :

Déterminer graphiquement la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

c - Définir et calculer le taux d'avancement final de cette réaction.



Réponse :

1⁰) a - L'acide joue le rôle de catalyseur (facteur cinétique), il accélère donc la réaction.

b - L'élévation de température est un facteur cinétique, on accélère alors la réaction en augmentant la température du mélange réactionnel. (la réaction a lieu dans un bain thermostaté 60 °C).

c - Le réfrigérant à air empêche toute perte éventuelle de matière par évaporation.

2⁰) $\text{CH}_3\text{-COOH} + \text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-CH}_2\text{-OH} \rightleftharpoons \text{CH}_3\text{COO-CH}_2\text{-CH}_2\text{-CH}_3 + \text{H}_2\text{O}$

L'alcool utilisé est le propan-1-ol.

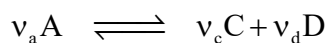
3) a - Le mélange étant en proportions stœchiométriques $\rightarrow x_{\text{max}} = 0,38$ mol.

b - Graphiquement, $x_f = 0,25$ mol.

c - le taux d'avancement final d'une réaction est égal au rapport de l'avancement final de cette réaction par son avancement maximal : $\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}}$. A.N : $\tau_f = \frac{0,25}{0,38}$ et $\tau_f = 0,66$.

III / Equilibre de dissociation :

Une réaction de dissociation s'écrit généralement :



Exemple : $\text{PCl}_5 \rightleftharpoons \text{PCl}_3 + \text{Cl}_2$

Le tableau d'avancement d'une réaction de dissociation est :

Equation de la réaction		$v_a A \rightleftharpoons v_c C + v_d D$		
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)		
Initial (t = 0)	0	$n_0(A)$	$n_0(C)$	$n_0(D)$
Intermédiaire (t)	x	$n_0(A) - v_a x$	$v_c x$	$v_d x$
Final	x_f	$n_0(A) - v_a x_f$	$v_c x_f$	$v_d x_f$

Le coefficient de dissociation α du composé A est défini par :

$$\alpha = \frac{\text{nombre de moles de A dissociées}}{\text{nombre de moles de A initiales}}$$

$$\alpha = \frac{v_a x_f}{n_0(A)}$$

Sachant que : $x_{\max} = \frac{n_0(A)}{v_a} \longrightarrow \alpha = \frac{x_f}{x_{\max}} = \tau_f$ taux d'avancement final de la dissociation .

Application 3 :

A 627°C et à la pression atmosphérique, le taux d'avancement final de la réaction de dissociation de l'anhydride sulfurique (SO_3) en anhydride sulfureux (SO_2) et dioxygène est égal à 0,33.

1⁰) Ecrire l'équation de la réaction dissociation.

2⁰) Trouver la composition molaire finale d'un système chimique contenant initialement 2 moles de SO_3 .

Réponse :

1⁰) $2 \text{SO}_3 \rightleftharpoons 2 \text{SO}_2 + \text{O}_2$

2⁰)

Equation de la réaction		$2 \text{SO}_3 \rightleftharpoons 2 \text{SO}_2 + \text{O}_2$		
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)		
Initial (t = 0)	0	2	0	0
Intermédiaire (t)	x	$2 - 2x$	$2x$	x
Final	$x_f = 0,33$	1,34	0,66	0,33

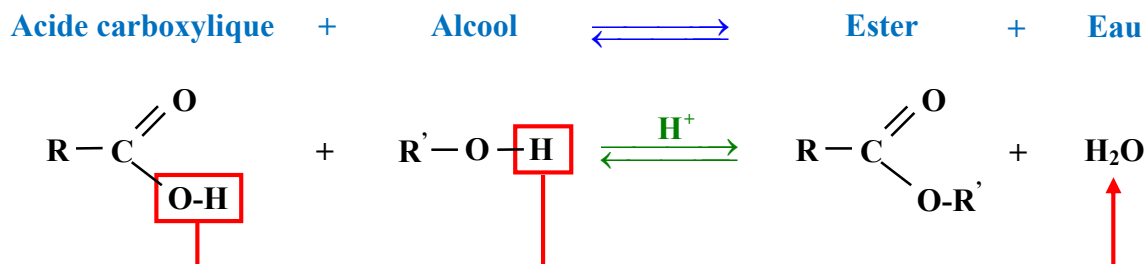
$2 - 2x_{\max} = 0 \longrightarrow x_{\max} = 1 \text{ mol.}$

$x_f = \tau_f \cdot x_{\max}$. A.N : $x_f = 0,33 \cdot 1$ et $x_f = 0,33 \text{ mol.}$

Pour en savoir plus

1⁰) La réaction d'estérification:

La réaction d'estérification est la réaction dans laquelle un acide carboxylique réagit avec un alcool pour produire un ester et de l'eau.



- La réaction d'estérification est athermique.
- La réaction d'estérification, très lente, est catalysée par quelques gouttes d'acide sulfurique concentré. Remarque : sans catalyseur et à une température $\theta = 20^\circ\text{C}$, l'état final est atteint au bout de quelques mois. A une température $\theta = 100^\circ\text{C}$, la réaction non catalysée dure quelques jours. A une température $\theta = 100^\circ\text{C}$, la durée de la réaction catalysée est de quelques dizaines de minutes.
- La réaction d'estérification produit une molécule d'eau. Elle est donc une réaction de condensation (ou de déshydratation). Par conséquent elle est réversible donc limitée par une réaction inverse qui consomme une molécule d'eau : c'est la réaction d'hydrolyse.

2⁰) Evolution de la réaction d'estérification au cours du temps :

La réaction d'estérification du butan-1-ol (alcool l'aire) par l'acide éthanoïque (acide carboxylique) conduit à la formation d'éthanoate de butyle (ester) et de l'eau :



On étudie, expérimentalement, l'évolution de cette réaction au cours du temps :

a - Protocole expérimental :

- On prépare plusieurs tubes à essais, numérotés, contenant chacun un mélange équimolaire constitué de $n_{\text{al}}(0)$ moles d'alcool et $n_{\text{ac}}(0)$ moles d'acide carboxylique ($n_{\text{al}}(0) = n_{\text{ac}}(0) = n_0$).

On ajoute à chaque tube à essais une goutte d'acide sulfurique concentré (catalyseur).

Chaque tube à essais est fermé par un bouchon mono trou muni d'un réfrigérant à air (tube capillaire) dont le rôle est d'éviter toute perte éventuelle de matière par évaporation.

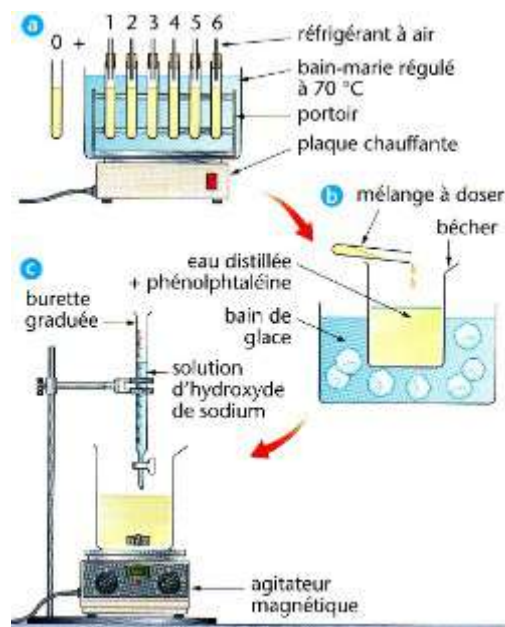
A $t = 0$, on plonge les tubes à essais dans un bain marie régulé à une température θ constante (θ doit être inférieure à la température d'ébullition de chacun des constituants du milieu réactionnel).

- A un instant t , on retire un des tubes du bain marie, on déverse son contenu dans un bêcher plongé dans un bain glacé (pour stopper la réaction), on rince soigneusement le tube ainsi que son condenseur avec une petite quantité d'eau distillée et on ajoute les eaux de rinçage au contenu du bêcher.

- Afin de déterminer la quantité de matière $n_{\text{ac}}(t)$ d'acide restant à l'instant t dans le mélange réactionnel, on ajoute une petite quantité de phénol phtaléine (indicateur coloré) au contenu du bêcher et on procède à un dosage colorimétrique de ce contenu par une solution d'hydroxyde de sodium NaOH de concentration C_b .

Soit V'_b le volume de la solution basique ajouté à l'équivalence (l'indicateur, préalablement incolore, vire au rouge violacé) au contenu du bêcher.

Soit V' le volume de la solution basique nécessaire pour doser une goutte d'acide sulfurique concentré.



b - Exploitation :

- Le volume effectif de la solution basique nécessaire pour doser l'acide éthanoïque restant dans le tube à essais à l'instant t sera donc : $V_b = V'_b - V'$.

La quantité de matière d'acide restant à l'instant t est : $n_{ac}(t) = C_b \cdot V_b \rightarrow n_{ac}(t) = C_b \cdot (V'_b - V')$.

- Soit x l'avancement de la réaction à l'instant t , on a : $n_{ac}(t) = n_{ac}(0) - x$

La quantité de matière d'ester formé à l'instant t est $n_{ester}(t) = x \rightarrow n_{ac}(t) = n_{ac}(0) - n_{ester}(t)$

Il vient alors que : $n_{ester}(t) = n_0 - n_{ac}(t)$

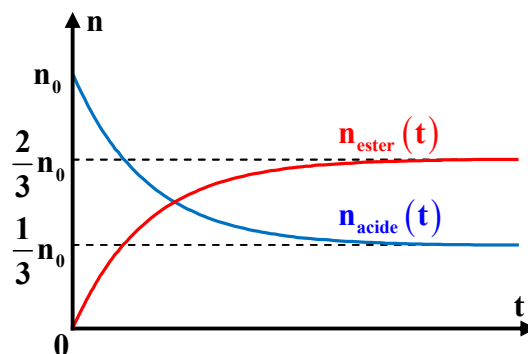
c - Evolution de la réaction d'estérification au cours du temps :

On procède au dosage du contenu des différents tubes numérotés à des instants t différents. Ceci permet de suivre l'évolution de la quantité de matière d'acide restant au cours du temps.

On en déduit alors l'évolution de la quantité de matière d'ester formé au cours du temps.

Les résultats expérimentaux permettent alors de tracer les courbes

$n_{acide\ restant} = g(t)$ et $n_{ester\ formé} = f(t)$ ci-contre :



d - L'équilibre estérification-hydrolyse :

- On applique le même protocole expérimental mais en partant, dans chaque tube à essais, d'un mélange équimolaire constitué de $n_{ester}(0)$ moles d'ester, $n_{eau}(0)$ moles d'eau ($n_{al}(0) = n_{ac}(0) = n_0$) et d'une goutte d'acide sulfurique concentré (catalyseur). On dose, à différents instants, l'acide formé au cours de la réaction d'hydrolyse de l'éthanoate de butyle :



- Soit $n_{ac}(t)$ la quantité de matière d'acide formé à un instant t ,

on a : $n_{ac}(t) = x$ (avancement de la réaction).

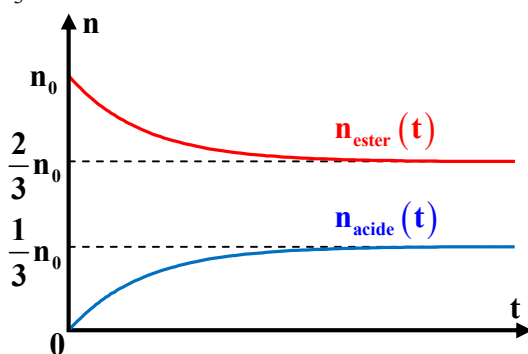
La quantité de matière d'ester restant à l'instant t , sera :

$$n_{ester}(t) = n_{ester}(0) - x$$

$$\frac{n_{ester}(0)=n_0}{x=n_{ac}(t)} \rightarrow n_{ester}(t) = n_0 - n_{ac}(t)$$

Les résultats expérimentaux permettent alors de tracer les courbes

$n_{acide\ formé} = g'(t)$ et $n_{ester\ restant} = f'(t)$ ci-contre :



- L'estérification et l'hydrolyse correspondante, sont deux réactions limitées qui, dans les mêmes conditions opératoires, aboutissent à la même composition de l'état final.

Lorsque l'état final est atteint, on dit qu'on a un état d'équilibre chimique (équilibre entre les réactifs et les produits de la réaction).

A l'état final, les deux réactions, inverses l'une de l'autre, continuent d'avoir lieu dans les mêmes proportions (les quantités de matière des différents constituants restent donc constantes).

On dit alors que l'équilibre chimique est un équilibre dynamique.

3⁰) La loi de Guldberg-Waage :

- Soit $[i]$ la concentration du composé i du mélange réactionnel au cours de la réaction d'estérification.

on a : $[i] = \frac{n_i}{V} \text{ mol.L}^{-1}$ avec $\begin{cases} n_i & \text{nombre de moles du constituant } i \text{ dans le mélange réactionnel} \\ V & \text{volume total du mélange réactionnel} \end{cases}$

On définit la fonction des concentrations relative à la réaction d'estérification par $\pi = \frac{[\text{ester}] \cdot [\text{eau}]}{[\text{acide}] \cdot [\text{alcool}]}$

Lorsqu'un système chimique évolue au cours du temps vers l'état d'équilibre, la valeur de π tend vers une valeur limite constante K , caractéristique de la réaction considérée, appelée constante d'équilibre.

Lorsque l'état d'équilibre est atteint, alors $\pi_{eq} = \frac{[ester]_{eq} \cdot [eau]_{eq}}{[acide]_{eq} \cdot [alcool]_{eq}} = K$

Cette expression traduit la loi de Guldberg-Waage pour la réaction d'estérification.

$$\text{Application : } K = \frac{\frac{n_{eq}(\text{ester})}{V} \cdot \frac{n_{eq}(\text{eau})}{V}}{\frac{n_{eq}(\text{alcool})}{V} \cdot \frac{n_{eq}(\text{acide})}{V}} = \frac{n_{eq}(\text{ester}) \cdot n_{eq}(\text{eau})}{n_{eq}(\text{alcool}) \cdot n_{eq}(\text{acide})} \rightarrow K = \frac{\left(\frac{2}{3}n_0\right) \cdot \left(\frac{2}{3}n_0\right)}{\left(\frac{1}{3}n_0\right) \cdot \left(\frac{1}{3}n_0\right)} \quad \text{et} \quad K = 4.$$

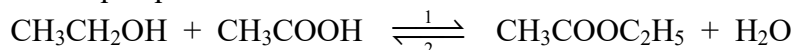
Remarque : En général, K ne dépend que de la température.

Pour une réaction athermique, sa constante d'équilibre ne dépend pas de la température.

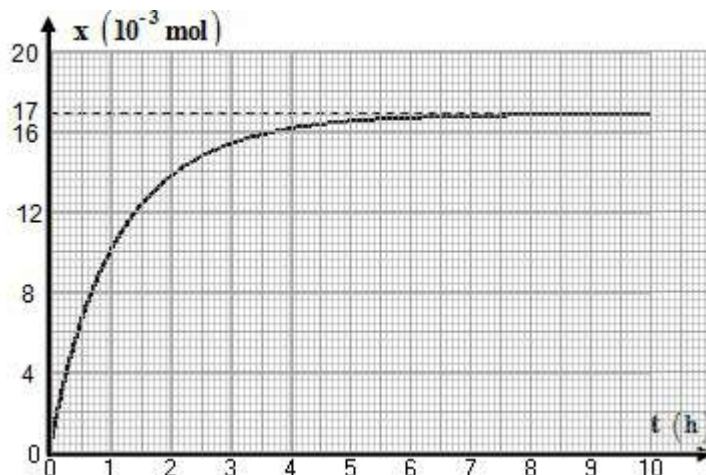
Applications

Exercice n° 1 :

On se propose d'étudier la réaction d'estérification de l'acide éthanóïque CH_3COOH avec l'éthanol $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$. L'équation chimique qui modélise cette réaction est :



Le suivi de l'évolution de l'avancement de la réaction en fonction du temps relatif à un mélange réactionnel contenant initialement 0,04 mol d'acide éthanóïque et 0,02 mol d'éthanol, en présence de quelques gouttes d'acide sulfurique et à une température θ_1 constante, a permis de représenter la courbe $x = f(t)$ ci-contre :



1⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

b - Calculer l'avancement maximal $x_{\max}$ de la réaction.

c - Calculer la valeur du taux d'avancement final τ_f de la réaction. En déduire si la réaction étudiée est totale ou limitée.

2⁰) a - Montrer que la constante d'équilibre K de la réaction étudiée s'exprime par : $K = \frac{\tau_f^2}{(2 - \tau_f) \cdot (1 - \tau_f)}$

b - Calculer la valeur de K .

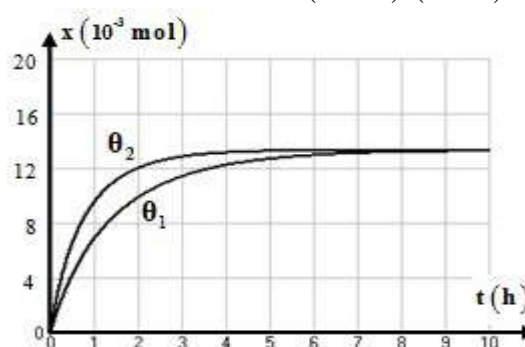
3⁰) On refait l'expérience avec un mélange équimolaire de 0,02 mol d'éthanol et 0,02 mol d'acide éthanóïque mais à deux températures différentes θ_1 et θ_2 .

On obtient les deux courbes ci-contre :

Justifier alors les deux affirmations suivantes :

a - la température $\theta_2 >$ la température θ_1 .

b - la réaction d'estérification est athermique ?



Réponse :

1⁰) a - Graphiquement : $x_f = 17 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$

b -

	al	+	ac	$\xrightleftharpoons[2]{1}$	ester	+	eau
à $t = 0$;	0,02		0,04		0		0 (mol)
à t ;	$0,02 - x$		$0,04 - x$		x		x

$$\begin{cases} 0,02 - x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 0,02 \\ 0,04 - x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 0,04 \end{cases} \xrightarrow{0,02 < 0,04} x_{\max} = 0,02 \text{ mol.}$$

c - $\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}}$. A.N : $\tau_f = \frac{17 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}}$ et $\tau_f = 0,85$ ou $\tau_f = 85\%$.

$\tau_f < 1 \rightarrow$ la réaction étudiée est limitée.

2⁰) a -

	al	+	ac	$\xrightleftharpoons[2]{1}$	ester	+	eau
à $t = 0$;	0,02		0,04		0		0 (mol)
à t_{eq} ;	$0,02 - x_f$		$0,04 - x_f$		x_f		x_f

$$\pi_{\text{eq}} = \frac{[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5]_{\text{eq}} \cdot [\text{H}_2\text{O}]_{\text{eq}}}{[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}]_{\text{eq}} \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{eq}}} = K \rightarrow K = \frac{\frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5)}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{O})}{V}}{\frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH})}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOH})}{V}}$$

$$\rightarrow K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5) \cdot n_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{O})}{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOH})} \quad \text{et} \quad K = \frac{x_f^2}{(0,02 - x_f) \cdot (0,04 - x_f)}$$

$$\tau_f = \frac{x_f}{x_{\text{max}}} \xrightarrow{x_{\text{max}}=0,02 \text{ mol}} x_f = 0,02 \cdot \tau_f \quad \text{donc}$$

$$K = \frac{(0,02 \cdot \tau_f)^2}{(0,02 - 0,02 \cdot \tau_f) \cdot (0,04 - 0,02 \cdot \tau_f)} \quad \text{et} \quad K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f) \cdot (2 - \tau_f)}$$

$$\mathbf{b -} K = \frac{(0,85)^2}{(1 - 0,85) \cdot (2 - 0,85)} \quad \text{et} \quad K = 4,19.$$

$$\mathbf{3^0)} \quad \tau_f' = \frac{x_f'}{x_{\text{max}}} \xrightarrow[x_{\text{max}}=0,02 \text{ mol}]{\tau_f'=0,9} x_f' = 18 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5) \cdot n_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{O})}{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOH})}$$

$$\rightarrow K = \frac{(x_f')^2}{(0,02 - x_f') \cdot (n_0 - x_f')} \rightarrow (n_0 - x_f') = \frac{(x_f')^2}{K \cdot (0,02 - x_f')} \rightarrow n_0 = \frac{(x_f')^2}{K \cdot (0,02 - x_f')} + x_f'.$$

$$\text{A.N: } n_0 = \frac{(0,018)^2}{4,19 \cdot (0,02 - 0,018)} + 0,018 \quad \text{et} \quad n_0 = 5,67 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

4⁰) a - L'élévation de température accélère une réaction chimique (facteur cinétique). Graphiquement, l'état final est atteint à la température θ_2 plus rapidement qu'à la température θ_1 . On en déduit que $\theta_2 > \theta_1$.

b - Graphiquement et pour les deux températures θ_1 et θ_2 , on a la même valeur de x_f (donc la même valeur de K). On en déduit que l'élévation de température n'influe pas sur la composition du système chimique à l'état d'équilibre. On en conclue que la réaction d'estérification est athermique

Exercice 2 :

L'éthanoate d'éthyle est un ester de formule $\text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3$. Il est formé par réaction d'un alcool avec un acide carboxylique.

1⁰) Ecrire l'équation de la réaction d'estérification correspondante.

2⁰) Pour étudier cette réaction, on réalise l'expérience suivante :

On prépare 10 ampoules identiques contenant chacune 0,01 mol de chacun des réactifs. Les ampoules sont scellées hermétiquement (soigneusement fermées) puis placées, à la date $t = 0$, dans une étuve (un four) à une température constante $\theta = 80^\circ\text{C}$.

A une date t donnée, on sort une ampoule qu'on refroidit immédiatement. On dose l'acide restant dans cette ampoule avec une solution titrée d'hydroxyde de sodium NaOH en présence de phénolphthaléine.

On répète la manipulation à différentes dates.

Les résultats obtenus permettent de tracer la courbe d'évolution du taux d'avancement de la réaction en fonction du temps : $\tau = f(t)$.

On rappelle que $\tau(t) = \frac{x(t)}{x_{\text{max}}}$, $x(t)$ étant l'avancement

de la réaction à l'instant t .

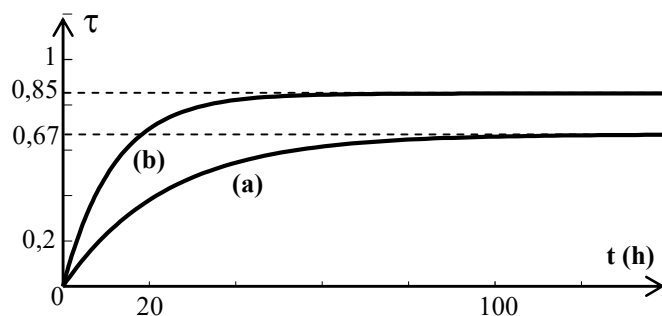
On obtient la courbe (a) ci-contre :

a - Expliquer pourquoi les ampoules devraient être fermées hermétiquement ?

b - Pourquoi refroidit-on les ampoules avant le dosage de l'acide restant ?

c - Quels sont les caractères de la réaction mis en évidence à partir de la courbe (a) ?

3⁰) a - Dresser le tableau d'avancement de la réaction ayant lieu dans chaque ampoule.



b - Définir le taux d'avancement final de la réaction τ_f . Déterminer graphiquement sa valeur.

c - Etablir l'expression de la constante d'équilibre K de la réaction en fonction de τ_f .

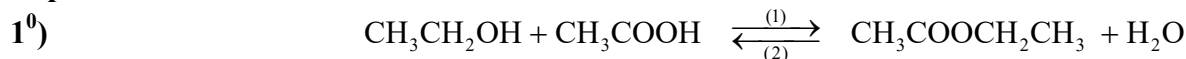
d - Calculer la valeur de K .

4⁰) Dans une deuxième expérience, on étudie cette réaction de la même façon et à la même température mais en partant, dans chacune des ampoules, de 0,01 mol d'acide et une plus grande quantité initiale n_0 d'alcool. On obtient alors la courbe (b).

a - Expliquer l'augmentation de la vitesse de la réaction au cours de cette deuxième expérience.

b - Calculer la quantité initiale n_0 d'alcool utilisée dans cette deuxième expérience.

Réponse :



2⁰ **a** - Les ampoules devraient être fermées hermétiquement pour éviter toute perte éventuelle de matière suite à une vaporisation d'un ou de plusieurs constituants du système chimique.

b - On refroidit les ampoules avant le dosage de l'acide restant pour pratiquement bloquer la réaction chimique.

c - Le graphe de la fonction $\tau = f(t)$ met en évidence les caractères de la réaction suivants :

- La réaction est lente (l'état final ($\tau = \tau_f$) n'est pas atteint instantanément).
- La réaction est limitée (à l'état final : $\tau_f < 1$).

3⁰ **a** -

Equation chimique		$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} + \text{CH}_3\text{COOH} \xrightleftharpoons[(2)]{(1)} \text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3 + \text{H}_2\text{O}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	0,01	0,01	0	0
Intermédiaire	x	$0,01 - x$	$0,01 - x$	x	x
final	x_f	$0,01 - x_f$	$0,01 - x_f$	x_f	x_f

b - Le taux d'avancement final de la réaction τ_f est par définition le rapport de son avancement final x_f par son avancement maximal $x_{\max}$: $\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}}$. Graphiquement (d'après la courbe (a)), $\tau_f = 0,67$.

c - Lorsque l'état d'équilibre est atteint : $\pi_{\text{eq}} = \frac{[\text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3]_{\text{eq}} [\text{H}_2\text{O}]_{\text{eq}}}{[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}]_{\text{eq}} [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{eq}}} = K$

$$\rightarrow K = \frac{\frac{n_f(\text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3)}{V} \cdot \frac{n_f(\text{H}_2\text{O})}{V}}{\frac{n_f(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH})}{V} \cdot \frac{n_f(\text{CH}_3\text{COOH})}{V}} = \frac{n_f(\text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3) \cdot n_f(\text{H}_2\text{O})}{n_f(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}) \cdot n_f(\text{CH}_3\text{COOH})} = \frac{x_f \cdot x_f}{(0,01 - x_f) \cdot (0,01 - x_f)}$$

$$\rightarrow K = \frac{x_f^2}{(0,01 - x_f)^2}$$

on a : $\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}} \rightarrow x_f = \tau_f \cdot x_{\max}$, il vient que : $K = \frac{(\tau_f \cdot x_{\max})^2}{(0,01 - \tau_f \cdot x_{\max})^2}$

l'avancement maximal est tel que : $0,01 - x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 0,01 \text{ mol}$, il vient que : $K = \frac{x_{\max}^2 \cdot \tau_f^2}{x_{\max}^2 (1 - \tau_f)^2}$

et enfin : $K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f)^2}$

d - A.N : $K = \frac{(0,67)^2}{(1 - 0,67)^2}$ et $K = 4,12$.

4⁰) a - Dans la deuxième expérience, on a augmenté la quantité de matière de l'alcool ; or l'augmentation de la concentration d'un des réactifs est un facteur cinétique d'où l'augmentation de la vitesse de la réaction.

b -

Equation chimique		$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} + \text{CH}_3\text{COOH} \xrightleftharpoons[(2)]{(1)} \text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3 + \text{H}_2\text{O}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	n_0	0,01	0	0
final	x_f	$n_0 - x_f$	$0,01 - x_f$	x_f	x_f

$$K = \frac{n_f(\text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3) \cdot n_f(\text{H}_2\text{O})}{n_f(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}) \cdot n_f(\text{CH}_3\text{COOH})} = \frac{x_f \cdot x_f}{(n_0 - x_f) \cdot (0,01 - x_f)} = \frac{x_f^2}{(n_0 - x_f) \cdot (0,01 - x_f)}$$

$$\rightarrow (n_0 - x_f) = \frac{x_f^2}{K \cdot (0,01 - x_f)} \quad \text{et} \quad n_0 = \frac{x_f^2}{K \cdot (0,01 - x_f)} + x_f$$

$$\begin{cases} \tau_f = 0,85 \\ n_0 > 0,01 \end{cases} \rightarrow x_{\max} = 0,01 \text{ mol} \rightarrow x_f = \tau_f \cdot x_{\max} = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

A la même température $K = 4,12$ (K ne dépend que de la température)

$$\text{A.N : } n_0 = \frac{(8,5)^2 \cdot 10^{-6}}{4,12 \cdot (10 \cdot 10^{-3} - 8,5 \cdot 10^{-3})} + 8,5 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad n_0 = 0,02 \text{ mol.}$$

Exercice 3 :

L'éthanoate de méthyle est un ester de formule $\text{CH}_3\text{COOCH}_3$. L'hydrolyse de cet ester produit du méthanol CH_3OH et de l'acide éthanoïque CH_3COOH .

On prépare un mélange contenant initialement 0,3 mol d'ester, 0,3 mol d'eau et quelques gouttes d'acide sulfurique concentré (H_2SO_4). A la date $t = 0$, le mélange est placé dans un bain marie à une température constante $\theta_1 = 70^\circ\text{C}$.

Le suivi de l'évolution de la quantité de matière d'acide formé, au cours du temps, a permis de tracer la courbe ci-contre :

1⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction d'hydrolyse étudiée.

b - Préciser le rôle de l'acide sulfurique ajouté.

2⁰) a - Déterminer graphiquement la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

b - Calculer le taux d'avancement final τ_f de la réaction, vérifier alors que la réaction est limitée.

c - Exprimer la constante d'équilibre K de la réaction en fonction de l'avancement final x_f .

Vérifier que $K = 0,25$.

3⁰) On refait la même expérience en triplant la quantité de matière initiale de l'eau.

a - Exprimer la constante d'équilibre K en fonction du taux d'avancement final τ_f .

b - Calculer la nouvelle valeur de τ_f .

c - Déterminer alors la composition molaire finale du mélange réactionnel.

4⁰) On refait l'expérience, à deux températures θ_1 et θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$), en partant d'un mélange contenant initialement 0,3 mol d'ester, n mol d'eau ($n > 0,3$) et quelques gouttes d'acide sulfurique concentré (H_2SO_4).

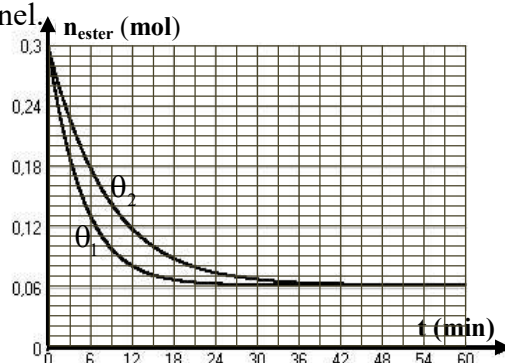
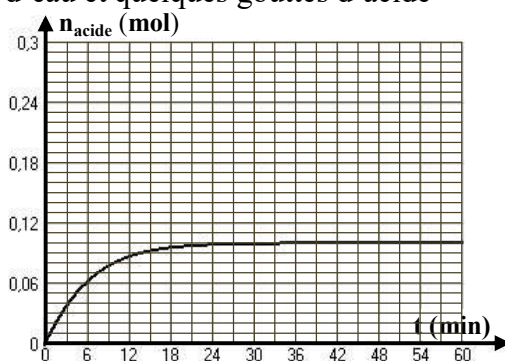
On donne ci-contre les courbes d'évolution de la quantité de matière d'ester au cours du temps aux deux températures θ_1 et θ_2 .

a - La réaction d'hydrolyse est lente, limitée et athermique.

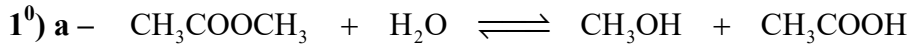
Justifier, graphiquement, chacune de ces propriétés.

b - Déterminer la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

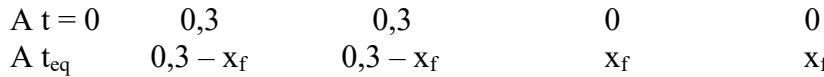
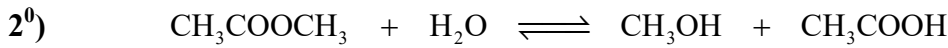
c - Calculer la valeur n de la quantité de matière initiale d'eau.



Réponse :



b - L'acide sulfurique ajouté joue le rôle de catalyseur.



a - Graphiquement : n_f (acide) = 0,1 mol $\xrightarrow{n_{\text{acide}}=x}$ x_f = 0,1 mol.

b - Le mélange étant stœchiométrique $\rightarrow 0,3 - x_{\text{max}} = 0$ et $x_{\text{max}} = 0,3$ mol.

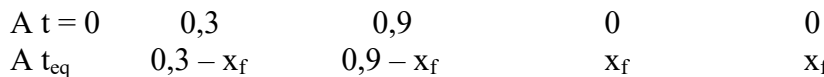
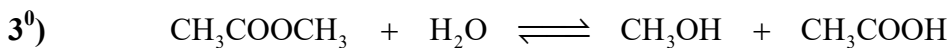
On a $\tau_f = \frac{x_f}{x_{\text{max}}}$. A.N: $\tau_f = \frac{0,1}{0,3}$ et $\tau_f = 0,33$.

$\tau_f < 1 \rightarrow$ la réaction est limitée.

c -

$$K = \pi_{\text{eq}} \rightarrow K = \frac{[\text{alcool}]_{\text{eq}} \cdot [\text{acide}]_{\text{eq}}}{[\text{ester}]_{\text{eq}} \cdot [\text{eau}]_{\text{eq}}} \rightarrow K = \frac{\frac{n_{\text{eq}}(\text{alcool})}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{acide})}{V}}{\frac{n_{\text{eq}}(\text{ester})}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{eau})}{V}} \text{ et } K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{alcool}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{acide})}{n_{\text{eq}}(\text{ester}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{eau})}$$

il vient alors que : $K = \frac{x_f^2}{(0,3 - x_f)^2}$. A.N: $K = \frac{(0,1)^2}{(0,3 - 0,1)^2}$ et $K = 0,25$.



a - $K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{alcool}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{acide})}{n_{\text{eq}}(\text{ester}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{eau})} \rightarrow K = \frac{x_f^2}{(0,3 - x_f) \cdot (0,9 - x_f)} = \frac{x_f^2}{(0,3)^2 \cdot \left(1 - \frac{x_f}{0,3}\right) \cdot \left(3 - \frac{x_f}{0,3}\right)}$

$$\rightarrow K = \frac{\left(\frac{x_f}{0,3}\right)^2}{\left(1 - \frac{x_f}{0,3}\right) \cdot \left(3 - \frac{x_f}{0,3}\right)} \xrightarrow[\substack{\tau_f = \frac{x_f}{x_{\text{max}}} \\ x_{\text{max}} = 0,3 \text{ mol}}]{\tau_f = \frac{x_f}{x_{\text{max}}}} K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f) \cdot (3 - \tau_f)}$$

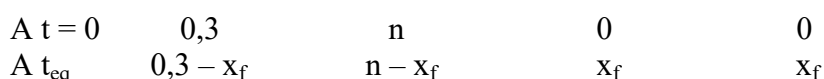
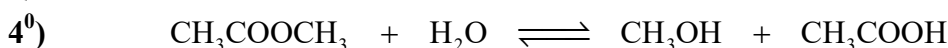
b - $0,25 = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f) \cdot (3 - \tau_f)} = \frac{\tau_f^2}{3 - 4 \cdot \tau_f + \tau_f^2} \rightarrow \tau_f^2 = 0,75 - \tau_f + 0,25 \cdot \tau_f^2$ et $0,75 \cdot \tau_f^2 + \tau_f - 0,75 = 0$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (0,75) \cdot (-0,75) = 3,25 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 1,8 \rightarrow \begin{cases} \tau_f = \frac{-1 - 1,8}{2 \cdot 0,75} < 0 \text{ à rejeter} \\ \tau_f = \frac{-1 + 1,8}{2 \cdot 0,75} = 0,53 \end{cases} \rightarrow \tau_f = 0,53.$$

$\tau_f = 0,53 \xrightarrow[\substack{\tau_f = \frac{x_f}{x_{\text{max}}} \\ x_{\text{max}} = 0,3 \text{ mol}}]{\tau_f = \frac{x_f}{x_{\text{max}}}} x_f = \tau_f \cdot x_{\text{max}} \rightarrow x_f = 0,16 \text{ mol}.$

c - La composition molaire finale du mélange réactionnel :

$$\begin{cases} n_{\text{eq}}(\text{ester}) = 0,3 - 1,6 & \text{et} & n_{\text{eq}}(\text{ester}) = 0,14 \text{ mol} \\ n_{\text{eq}}(\text{eau}) = 0,9 - 1,6 & \text{et} & n_{\text{eq}}(\text{eau}) = 0,74 \text{ mol} \\ n_{\text{eq}}(\text{alcool}) = n_{\text{eq}}(\text{acide}) = 0,16 \text{ mol} \end{cases}$$



a - * La réaction nécessite un certain temps pour atteindre l'état final : elle donc lente.

* L'ester étant le réactif en défaut et à l'état final, $n_f(\text{ester}) \neq 0$, donc la réaction est limitée.

* On a : $n_f(\text{ester})$ à $\theta_1 = n_f(\text{ester})$ à $\theta_2 \rightarrow$ la variation de température n'influe pas sur la composition molaire du mélange réactionnel à l'état final : la réaction est donc athermique.

b - $n_f(\text{ester}) = 0,3 - x_f \rightarrow x_f = 0,3 - n_f(\text{ester}) \xrightarrow[n_f(\text{ester})=0,06 \text{ mol}]{\text{graphiquement}} x_f = 0,24 \text{ mol}.$

c - $K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{alcool}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{acide})}{n_{\text{eq}}(\text{ester}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{eau})} \rightarrow K = \frac{x_f^2}{(0,3 - x_f) \cdot (n - x_f)} \rightarrow n - x_f = \frac{x_f^2}{K \cdot (0,3 - x_f)}$

et $n = \frac{x_f^2}{K \cdot (0,3 - x_f)} + x_f$. A.N: $n = \frac{(0,24)^2}{0,25 \cdot (0,3 - 0,24)} + 0,24$ et $n = 4,08$.

Exercice 4 :

On se propose d'étudier la réaction du propanoate d'éthyle $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{COO} - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$ avec l'eau.

On prépare des tubes à essais propres et secs contenant chacun 0,1 mol d'ester et 0,1 mol d'eau.

Les tubes sont fermés avec des réfrigérants à air et, à un instant pris comme origine des temps, ils sont placés dans une enceinte à température constante.

A une date t donnée, on sort un tube de l'enceinte qu'on refroidit rapidement et on effectue un dosage de l'acide propanoïque formé avec une solution de soude titrée.

Les résultats des dosages ont permis de tracer la courbe du graphe ci - dessous:

1⁰) a - Donner le nom de la réaction chimique qui a lieu entre les réactifs.

b - Ecrire l'équation de la réaction qui modélise la transformation étudiée.

c - Préciser le rôle du réfrigérant à air dont chaque tube est muni.

d - Pourquoi doit-on refroidir rapidement les tubes avant chaque dosage?

2⁰) a - Déterminer, d'après le graphe, la valeur de l'avancement final x_f .

b - Déterminer la valeur de l'avancement maximal x_{max} de la réaction ayant lieu dans chaque tube.

c - Citer les propriétés de la réaction étudiée qu'on peut mettre en évidence d'après le graphe.

3⁰) Définir le taux d'avancement final τ_f de la réaction et déterminer sa valeur.

4⁰) a - Etablir l'expression de la fonction des concentrations π en fonction de l'avancement x .

b - Montrer que la constante d'équilibre K peut s'écrire : $K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f)^2}$.

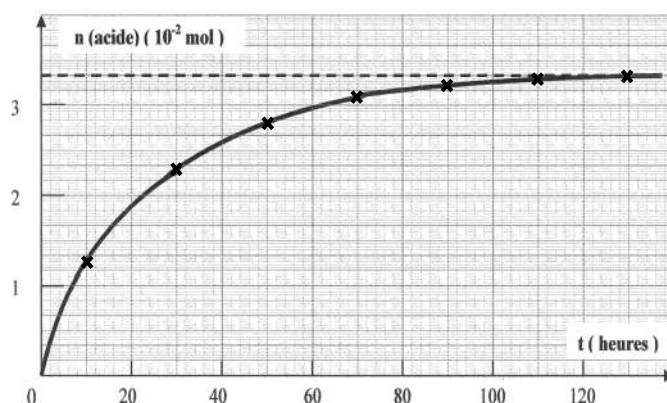
c - Calculer alors la valeur de K .

5⁰) On refait la même étude mais en partant initialement, dans chaque tube, d'un mélange constitué de 0,15 mol d'ester et 0,1 mol d'eau.

a - Calculer la valeur du volume V du mélange réactionnel initial dans chaque tube.

On donne : $\rho_{\text{ester}} = 0,89 \text{ g.cm}^{-3}$. $\rho_{\text{eau}} = 1 \text{ g.cm}^{-3}$. $M_{\text{ester}} = 102 \text{ g.mol}^{-1}$. $M_{\text{eau}} = 18 \text{ g.mol}^{-1}$.

b - Déterminer la nouvelle valeur du taux d'avancement final τ_f de la réaction.



Réponse :

1⁰) a - La réaction étudiée est l'hydrolyse.

b - $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{COO} - \text{CH}_2 - \text{CH}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{COOH} + \text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{OH}$

c - Le rôle du réfrigérant à air est d'éviter toute perte éventuelle de matière par évaporation.

d - On refroidit les tubes avant chaque dosage pour pratiquement stopper la réaction.

2⁰) a - Graphiquement : $n_f(\text{ac}) = 3,33 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$. or $n_f(\text{ac}) = 0 + x_f \rightarrow x_f = 3,33 \cdot 10^{-2} \text{ mol}.$

b - Le mélange initial étant stœchiométrique : $0,1 - x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 0,1 \text{ mol}$.

c - D'après le graphe, la réaction d'hydrolyse est :

- lente (évolution progressive au cours du temps vers l'état final)

- limitée ($x_f < x_{\max}$).

3⁰ Le taux d'avancement final d'une réaction est le rapport de l'avancement final de cette réaction par son avancement maximal.

$$\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}} \xrightarrow{\text{A.N}} \tau_f = \frac{3,33 \cdot 10^{-2}}{0,1} \text{ et } \tau_f = 33,3 \cdot 10^{-2} \quad (\tau_f = 33,3\%)$$

4⁰ **a** - ester + eau $\rightleftharpoons$ acide carboxylique + alcool

$$\begin{array}{ccccccc} t = 0 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0 & \text{mol} \\ t & 0,1 - x & 0,1 - x & x & x & \text{mol} \end{array}$$

$$\pi = \frac{[\text{ac}][\text{al}]}{[\text{ester}][\text{eau}]} \rightarrow \pi = \frac{\frac{n(\text{ac})}{V} \cdot \frac{n(\text{al})}{V}}{\frac{n(\text{ester})}{V} \cdot \frac{n(\text{eau})}{V}} = \frac{n(\text{ac}) \cdot n(\text{al})}{n(\text{ester}) \cdot n(\text{eau})} \text{ et } \pi = \frac{x^2}{(0,1 - x)^2}.$$

b - A l'équilibre chimique : $\pi_{\text{eq}} = K \rightarrow K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{ac}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{al})}{n_{\text{eq}}(\text{ester}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{eau})} \text{ et } K = \frac{x_f^2}{(0,1 - x_f)^2}$

$$\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}} \xrightarrow{x_{\max} = 0,1 \text{ mol}} x_f = 0,1 \cdot \tau_f. \text{ On écrit alors } K = \frac{(0,1 \cdot \tau_f)^2}{(0,1 - 0,1 \cdot \tau_f)^2} \text{ et } K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f)^2}.$$

c - $K = \frac{(33,3 \cdot 10^{-2})^2}{(1 - 33,3 \cdot 10^{-2})^2} \text{ et } K = 0,25.$

5⁰ **a** - $V = V_i(\text{ester}) + V_i(\text{eau})$

$$\left. \begin{array}{l} V_i(\text{ester}) = \frac{m_i(\text{ester})}{\rho_{\text{ester}}} = \frac{n_i(\text{ester}) \cdot M_{\text{ester}}}{\rho_{\text{ester}}} \\ V_i(\text{eau}) = \frac{m_i(\text{eau})}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{n_i(\text{eau}) \cdot M_{\text{eau}}}{\rho_{\text{eau}}} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{A.N}} V = \frac{0,15 \cdot 102}{0,89} + \frac{0,1 \cdot 18}{1} \text{ et } V = 19 \text{ cm}^3$$

b - ester + eau $\rightleftharpoons$ acide carboxylique + alcool

$$\begin{array}{ccccccc} t = 0 & 0,15 & 0,1 & 0 & 0 & \text{mol} \\ t_{\text{eq}} & 0,15 - x_f & 0,1 - x_f & x_f & x_f & \text{mol} \end{array}$$

$$K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{ac}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{al})}{n_{\text{eq}}(\text{ester}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{eau})} \rightarrow K = \frac{x_f^2}{(0,15 - x_f) \cdot (0,1 - x_f)} \xrightarrow[\substack{x_f = x_{\max} \cdot \tau_f \\ x_{\max} = 0,1 \text{ mol}}]{\substack{x_f = x_{\max} \cdot \tau_f \\ x_{\max} = 0,1 \text{ mol}}} K = \frac{\tau_f^2}{(1,5 - \tau_f) \cdot (1 - \tau_f)}$$

$$\frac{\tau_f^2}{(1,5 - \tau_f) \cdot (1 - \tau_f)} = 0,25 \rightarrow \tau_f^2 = 0,375 - 0,625 \cdot \tau_f + 0,25 \cdot \tau_f^2 \rightarrow 750 \cdot \tau_f^2 + 625 \cdot \tau_f - 375 = 0$$

$$\Delta = (625)^2 + 4 \cdot 750 \cdot 375 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 1231,11$$

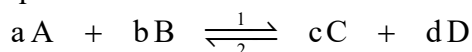
$$\tau_f = \frac{-625 + 1231,11}{2 \cdot 750} \text{ et } \tau_f = 0,404 \quad (\tau_f = 40,4\%)$$

$$\tau_f = \frac{-625 - 1231,11}{2 \cdot 750} \text{ à rejeter car } < 0 \quad (0 \leq \tau_f \leq 1)$$

LA LOI D'ACTION DE MASSE

I / La fonction des concentrations π :

Soit la réaction réversible en phase liquide :



Soit $[i] = \frac{n_i}{V}$ la concentration molaire du composé i dans le mélange (en mol.L⁻¹).

On définit la fonction des concentrations par :

$$\pi = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b}$$

Remarques :

- La fonction des concentrations π est par définition sans unité.
- Dans l'écriture de π n'interviennent que les concentrations molaires des entités dissoutes (le solvant et les espèces solides n'interviennent pas).

Exemple : Soit le tableau d'avancement de la réaction d'estérification :

Equation de la réaction		$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} + \text{CH}_3\text{COOH} \rightleftharpoons \text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5 + \text{H}_2\text{O}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial (t = 0)	0	$n_0(\text{al})$	$n_0(\text{ac})$	0	0
Intermédiaire (t)	x	$n_0(\text{al}) - x$	$n_0(\text{ac}) - x$	x	x

A chaque instant on a : $\pi = \frac{[\text{ester}] \cdot [\text{eau}]}{[\text{alcool}] \cdot [\text{acide}]} = \frac{\left(\frac{x}{V}\right) \cdot \left(\frac{x}{V}\right)}{\left(\frac{n_0(\text{al}) - x}{V}\right) \cdot \left(\frac{n_0(\text{ac}) - x}{V}\right)}$ et $\pi = \frac{x^2}{(n_0(\text{al}) - x) \cdot (n_0(\text{ac}) - x)}$.

II / La loi d'action de masse :

1⁰) La constante d'équilibre K :

Lorsque le système chimique évolue vers l'état d'équilibre, la fonction des concentrations π tend vers une valeur limite K.

Lorsque l'équilibre est atteint, on a : $\pi_{\text{eq}} = K$.

K est une constante caractéristique de la réaction considérée à l'équilibre.

K est appelée **constante d'équilibre**.

A l'équilibre dynamique :

$$\pi_{\text{eq}} = \frac{[C]_{\text{eq}}^c \cdot [D]_{\text{eq}}^d}{[A]_{\text{eq}}^a \cdot [B]_{\text{eq}}^b} = K$$

Cette expression traduit la loi d'action de masse.

Exemple : Considérons la réaction d'estérification avec un alcool primaire :

- $\begin{cases} n_0(\text{al}) = n_0(\text{ac}) = 1 \text{ mol} \\ n_0(\text{ester}) = n_0(\text{eau}) = 0 \end{cases}$; A l'équilibre, $x_f = \frac{2}{3} \text{ mol}$.

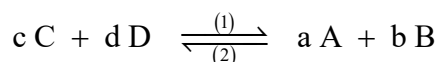
Donc $K = \frac{[\text{ester}]_{\text{eq}} \cdot [\text{eau}]_{\text{eq}}}{[\text{alcool}]_{\text{eq}} \cdot [\text{acide}]_{\text{eq}}} = \frac{x_f \cdot x_f}{(1 - x_f) \cdot (1 - x_f)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 4$

- $\begin{cases} n_0(\text{al}) = 1 \text{ mol}, n_0(\text{ac}) = 5 \text{ mol} \\ n_0(\text{ester}) = n_0(\text{eau}) = 0 \end{cases}$; on a $K = 4$.

$$\text{Donc } K = \frac{(x_f')^2}{(1-x_f')(5-x_f')} = 4 \longrightarrow 3(x_f')^2 - 24x_f' + 20 = 0 \longrightarrow x_f' = 0,95$$

Remarques :

- **K ne dépend que de la température.**
- Si on considère l'équilibre inverse :



$$\text{la loi d'action de masse s'écrit } K' = \frac{[A]_{\text{eq}}^a \cdot [B]_{\text{eq}}^b}{[C]_{\text{eq}}^c \cdot [D]_{\text{eq}}^d} = \pi'_{\text{eq}}$$

on remarque qu' **à la même température** , on a : **$K \cdot K' = 1$**

Exemple : alcool(I^{aire}) + acide carboxylique $\rightleftharpoons$ ester + eau , $K = 4$

ester + eau $\rightleftharpoons$ alcool(I^{aire}) + acide carboxylique , $K' = 0,25$

- Si la constante d'équilibre **K est très grande** ($K \succ 10^4$), la réaction correspondante est **quasi totale**.

2⁰) Enoncé de la loi d'action de masse :

A une température donnée, un système chimique est en équilibre lorsque sa composition devient invariante et telle que la fonction des concentrations π est égale à une constante K, indépendante de sa composition initiale, appelée constante d'équilibre.

3⁰) Formes usuelles de la loi d'action de masse :

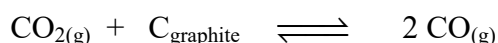
On convient que :

- la concentration d'un solide pur est constante.
- la concentration du solvant d'une solution très diluée est constante.

Dans un souci de simplicité, on ne les fait pas intervenir dans l'expression de la loi d'action de masse.

Exemples :

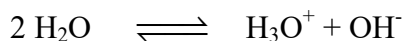
- Soit l'équilibre :



$$\text{la loi d'action de masse s'écrit alors : } K = \frac{[\text{CO}_g]^2}{[\text{CO}_{2g}]}$$

à 20 °C, la constante d'équilibre sera : $K = 187,3.6,05.10^{-26} = 1,13.10^{-23}$

- Soit l'équilibre d'autodissociation de l'eau :



$[\text{H}_2\text{O}] = 55,35 \text{ mol.L}^{-1}$ est constante à 25 °C

la loi d'action de masse s'écrit alors : $K = [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eq}} \cdot [\text{OH}^-]_{\text{eq}}$

à 25 °C, la constante d'équilibre sera $K = 3,24.10^{-18} \cdot (55,35)^2 = 10^{-14}$

Remarques :

- Pour l'auto ionisation de l'eau pure $K = K_e$ où **K_e : produit ionique de l'eau pure.**
 - D'après la neutralité électrique : $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-]$
- $$K_e = [\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] = 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1} \text{ à } 25^\circ\text{C}.$$

Application 1 :

1⁰) La limite d'estérification d'un alcool A et d'un acide carboxylique B est de 78 % pour un mélange initial renfermant 1 mole de A et 2 moles de B.

Déterminer la constante d'équilibre relative à cette réaction.

2⁰) Quelle serait cette limite pour un mélange initial renfermant 1 moles de A et 4 moles de B.

3⁰) Dans quelle proportion minimale doit-on mélanger ces deux composés pour estérifier 95 % au moins de l'alcool A utilisé ? Donner alors la composition du mélange à l'équilibre.

Réponse :1⁰)

Equation de la réaction		(A)	+	(B)	$\rightleftharpoons$	ester	+	H ₂ O
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)						
Initial (t = 0)	0	1		2		0		0
Final	x _f	1 - x _f		2 - x _f		x _f		x _f

$$\pi_{eq} = K \rightarrow K = \frac{[\text{ester}]_{eq} \cdot [\text{eau}]_{eq}}{[A]_{eq} \cdot [B]_{eq}} = \frac{x_f^2}{(1-x_f) \cdot (2-x_f)}$$

La limite d'estérification (rendement) est : $R = \frac{\text{nombre de moles d'ester formées}}{\text{nombre de moles d'ester formées si la réaction était totale}}$

$$R = \frac{x_f}{x_{\max}} \rightarrow R = \tau_f \text{ le taux d'avancement final de la réaction.}$$

$$\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}} \rightarrow x_f = \tau_f \cdot x_{\max} \xrightarrow{x_{\max}=1 \text{ mol}} x_f = 0,78 \cdot 1 = 0,78 \text{ mol.}$$

$$\xrightarrow{\text{A.N}} K = \frac{0,78^2}{(1-0,78) \cdot (2-0,78)} = 2,27 \text{ (alcool II}^{\text{aire}}).$$

$$2^0) \text{ Dans ce cas : } K = \frac{x_f^2}{(1-x_f) \cdot (4-x_f)}$$

$$\rightarrow (K-1)x^2 - 5Kx + 4K = 0 \rightarrow 1,27x^2 - 11,35x + 9,08 = 0$$

$$\Delta = \sqrt{(11,35)^2 - 4 \cdot 1,27 \cdot 9,08} = 9,09 \rightarrow \begin{cases} x_f = \frac{11,35 - 9,09}{2 \cdot 1,27} = 0,89 \text{ mol} \\ x_f = \frac{11,35 + 9,09}{2 \cdot 1,27} = 8,04 \text{ mol à rejeter car } > x_{\max} (x_{\max} = 1 \text{ mol}) \end{cases}$$

La limite d'estérification de l'alcool sera : $\tau_f' = \frac{0,89}{1}$ et $\tau_f' = 0,89$ ou 89 %.

3⁰)

Equation de la réaction		(A)	+	(B)	$\rightleftharpoons$	ester	+	H ₂ O
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)						
Initial (t = 0)	0	a		b		0		0
Final	x _f = 0,95a	a - 0,95a		b - 0,95a		0,95a		0,95a

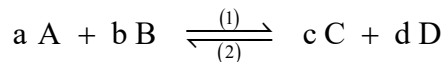
$$K = \frac{x_f^2}{(a-x_f) \cdot (b-x_f)} \rightarrow K = \frac{(0,95a)^2}{(a-0,95a) \cdot (b-0,95a)} = \frac{(0,95)^2}{(1-0,95) \cdot \left(\frac{b}{a} - 0,95\right)}$$

$$\rightarrow \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{(0,95)^2}{(1-0,95) \cdot K} + 0,95. \text{ A.N : } \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{(0,95)^2}{(1-0,95) \cdot 2,27} + 0,95 = 8,9.$$

donc pour 1 mole d'alcool, il faut utiliser 8,9 moles d'acide carboxylique.

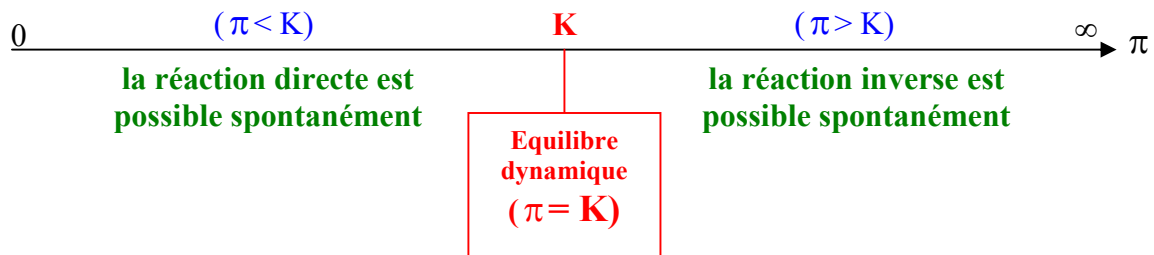
III / Condition d'évolution spontanée :

Soit la réaction chimique :



A une température donnée, $\pi = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b}$ tend vers la valeur K lorsque le système évolue vers l'état d'équilibre dynamique.

- Si $\pi < K$, la réaction directe (1) est possible spontanément.
- Si $\pi > K$, la réaction inverse (2) est possible spontanément.
- Si $\pi = K$, l'équilibre est atteint.



Application 2 :

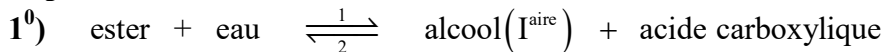
On mélange 0,5 mol d'un alcool primaire R-OH, 0,5 mol d'acide R'-COOH, 0,8 mol d'ester R'-COOR et 0,8 mol d'eau.

la constante d'équilibre relative à l'hydrolyse de l'ester est $K = 0,25$.

1⁰) Le mélange est-il en équilibre ? Si non, dans quel sens va-t-il évoluer. Justifier votre réponse.

2⁰) Donner la composition du mélange à l'équilibre.

Réponse :



$$\pi = \frac{[\text{al}] \cdot [\text{ac}]}{[\text{ester}] \cdot [\text{eau}]} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 0,8} = 0,39$$

$\pi \neq K$ donc le mélange n'est pas en équilibre.

$\pi > K$ donc la réaction évolue spontanément dans le sens inverse (sens 2)

2⁰)

Equation de la réaction		ester + eau $\xrightleftharpoons[2]{1}$ alcool(I ^{aire}) + acide carboxylique			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial (t = 0)	0	0,8	0,8	0,5	0,5
Final	$x_f = 0,066$	$0,8 + x_f$ 0,866	$0,8 + x_f$ 0,866	$0,5 - x_f$ 0,434	$0,5 - x_f$ 0,434

$$\pi_{\text{eq}} = K \rightarrow K = \frac{[\text{al}]_{\text{eq}} \cdot [\text{ac}]_{\text{eq}}}{[\text{ester}]_{\text{eq}} \cdot [\text{eau}]_{\text{eq}}} \rightarrow K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{al}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{ac})}{n_{\text{eq}}(\text{ester}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{eau})} \rightarrow 0,25 = \frac{(0,5 - x_f)^2}{(0,8 + x_f)^2}$$

$$\frac{(0,5 - x_f)}{(0,8 + x_f)} = \sqrt{0,25} = 0,5 \rightarrow x_f = 0,5 \cdot \frac{1 - 0,8}{1 + 0,5} \text{ et } x_f = 0,066 \text{ mol.}$$

$$n_{\text{eq}}(\text{ester}) = n_{\text{eq}}(\text{eau}) = 0,8 + x_f \rightarrow n_{\text{eq}}(\text{ester}) = n_{\text{eq}}(\text{eau}) = 0,866 \text{ mol.}$$

$$n_{\text{eq}}(\text{al}) = n_{\text{eq}}(\text{ac}) = 0,5 - x_f \rightarrow n_{\text{eq}}(\text{al}) = n_{\text{eq}}(\text{ac}) = 0,434 \text{ mol.}$$

$$\text{Remarque : } K = \frac{0,434^2}{0,866^2} = 0,25.$$

Pour en savoir plus

1⁰) Approche cinétique de la loi d'action de masse :

a - La loi de vitesse d'une réaction chimique :

• Un système fermé est le siège d'une réaction chimique : $\nu_A A + \nu_B B \xrightarrow{\text{sens direct}} \nu_C C + \nu_D D$

On vérifie expérimentalement que la vitesse volumique de la réaction est proportionnelle au produit des concentrations molaires des réactifs affectée chacune d'un exposant :

$$v_v = k \cdot [A]^\alpha \cdot [B]^\beta$$

- les exposants α et β sont les ordres partiels par rapport aux réactifs respectifs A et B.
- la somme des ordres partiels est l'ordre global de la réaction (ordre global = $\alpha + \beta$).
- la constante de proportionnalité k est appelée constante de vitesse de la réaction.

Remarques :

* D'après la loi d'Arrhenius : $k = A \cdot e^{\frac{-E_a}{R \cdot T}}$ avec E_a : énergie d'activation (en J.mol⁻¹)
R : constante des gaz parfaits (8,314 J.mol⁻¹.K⁻¹)
T : température absolue (en K)
A : facteur pré-exponentiel d'Arrhenius

la constante de vitesse k est une fonction croissante de la température.

* Si la concentration d'un réactif est pratiquement constante (cas d'un constituant solide ou du solvant), il y a dégénérescence de l'ordre par rapport à ce réactif, il n'intervient donc plus dans l'ordre global de la réaction.

Exemple : si $[A]_t \simeq [A]_0 \rightarrow v_v = k' \cdot [B]^\beta$ avec $k' = k \cdot [A]_0^\alpha$.

* Si la vitesse volumique d'une réaction ne peut pas s'exprimer sous la forme : $v_v = k \cdot [A]^\alpha \cdot [B]^\beta$, on dit alors qu'elle est sans ordre.

• Une réaction est dite **élémentaire** si elle s'effectue sans étapes intermédiaires. Dans une telle réaction, l'ordre partiel par rapport à chaque réactif est égal à son coefficient stœchiométrique. La vitesse volumique de la réaction s'exprime alors par : $v_v = k \cdot [A]^{\nu_A} \cdot [B]^{\nu_B}$. On dit que cette réaction suit la **loi de Van't Hoff**.

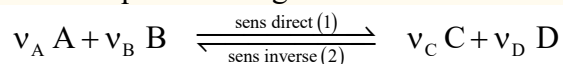
Remarques :

- * Toute réaction élémentaire (simple) suit la loi de van't Hoff (la réciproque est fausse).
- * Pour une réaction élémentaire, son ordre global est égal à sa molécularité (le nombre d'entités chimiques réactantes qui participent à cette réaction).
- * Si la réaction est complexe (s'effectue en plusieurs étapes élémentaires), sa vitesse volumique s'exprime par rapport à l'étape élémentaire la plus lente.

b - La loi de Guldberg-Waage :

• La loi de Guldberg et Waage est une loi empirique qui régit l'aspect quantitatif d'une réaction chimique réversible à l'état d'équilibre.

Considérons un système chimique fermé qui est le siège d'une réaction chimique réversible (limitée).



Lorsque l'état final est atteint, les concentrations molaires des différentes espèces chimiques ayant pris part à la réaction deviennent constantes.

Cet état d'équilibre chimique est caractérisé par l'expression :
$$\frac{[C]_{eq}^{\nu_C} \cdot [D]_{eq}^{\nu_D}}{[A]_{eq}^{\nu_A} \cdot [B]_{eq}^{\nu_B}} = K$$

K est une grandeur thermodynamique, sans unité, appelée **constante d'équilibre**.

K est une caractéristique de l'équilibre chimique considéré. **Elle ne dépend que de la température.**

• On définit la fonction des concentrations par : $\pi = \frac{[C]^{\nu_C} \cdot [D]^{\nu_D}}{[A]^{\nu_A} \cdot [B]^{\nu_B}}$. π est par définition sans unité.

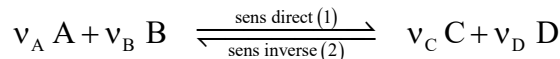
Lorsque la réaction chimique évolue vers l'état d'équilibre, les concentrations (appelées masses actives) des réactifs et des produits varient de sorte que π tend vers une valeur constante K.

Lorsque l'équilibre chimique est atteint, alors : $\pi_{eq} = \frac{[C]_{eq}^{v_C} \cdot [D]_{eq}^{v_D}}{[A]_{eq}^{v_A} \cdot [B]_{eq}^{v_B}} = K$

La loi de Guldberg-Waage porte aussi le nom de loi d'action de masse.

c - Aspect cinétique de l'équilibre chimique :

- Considérons un système chimique fermé qui est le siège d'une réaction chimique réversible.



La vitesse volumique v_v d'une réaction réversible est la vitesse d'évolution vers d'état d'équilibre.

On écrit formellement : $v_v = v_{v1} - v_{v2}$ où $\begin{cases} v_{v1} : \text{vitesse volumique de la réaction directe (sens 1) seule} \\ v_{v2} : \text{vitesse volumique de la réaction inverse (sens 2) seule} \end{cases}$

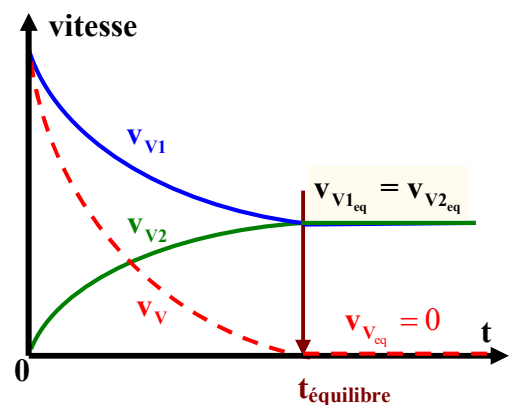
Lorsque l'équilibre chimique est atteint, la vitesse volumique de la réaction s'annule : $v_{v,eq} = 0 \rightarrow v_{v1,eq} = v_{v2,eq}$.

A l'équilibre, les deux réactions directe et inverse continuent d'avoir lieu dans les mêmes proportions et avec la même vitesse. L'équilibre chimique est alors un équilibre **dynamique**.

- Un équilibre chimique est un phénomène dynamique qui peut être traduit de l'égalité entre la vitesse de la réaction directe et celle de la réaction inverse.

Soient $v_{v1} = k_1 \cdot [A]_{eq}^{v_A} \cdot [B]_{eq}^{v_B}$ et $v_{v2} = k_2 \cdot [C]_{eq}^{v_C} \cdot [D]_{eq}^{v_D}$.

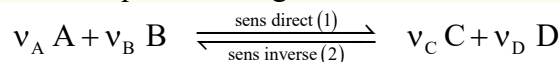
A l'équilibre chimique : $v_{v1,eq} = v_{v2,eq}$



$$\rightarrow k_1 \cdot [A]_{eq}^{v_A} \cdot [B]_{eq}^{v_B} = k_2 \cdot [C]_{eq}^{v_C} \cdot [D]_{eq}^{v_D} \rightarrow \frac{[C]_{eq}^{v_C} \cdot [D]_{eq}^{v_D}}{[A]_{eq}^{v_A} \cdot [B]_{eq}^{v_B}} = \frac{k_1}{k_2} \rightarrow K = \frac{k_1}{k_2}.$$

2⁰) Sens d'évolution spontané d'un système chimique :

Considérons un système chimique fermé qui est le siège d'une réaction chimique réversible.



Quantitativement, l'état d'équilibre du système chimique est caractérisé par l'égalité, à une température

donnée, entre la fonction des concentrations et la constante d'équilibre : $\pi_{eq} = \frac{[C]_{eq}^{v_C} \cdot [D]_{eq}^{v_D}}{[A]_{eq}^{v_A} \cdot [B]_{eq}^{v_B}} = K$.

Par conséquent, si $\pi \neq K$, le système chimique est hors-équilibre. Il peut évoluer spontanément dans le sens où la valeur de π tend vers celle de K .

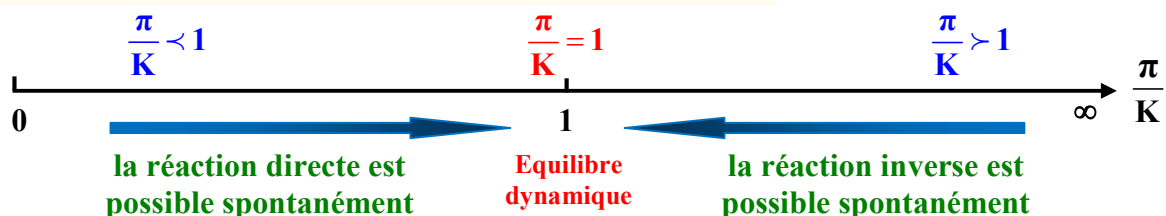
* Si $\pi < K \rightarrow \frac{\pi}{K} < 1$: pour atteindre l'équilibre, la valeur de π doit augmenter.

La réaction peut évoluer donc spontanément dans le sens direct.

* Si $\pi > K \rightarrow \frac{\pi}{K} > 1$: pour atteindre l'équilibre, la valeur de π doit diminuer.

La réaction peut évoluer donc spontanément dans le sens inverse.

* Si $\pi = K \rightarrow \frac{\pi}{K} = 1$: le système chimique est à l'état d'équilibre.



3⁰) Expression générale de la loi d'action de masse :

a - Activité d'une espèce chimique :

L'activité chimique d'une espèce chimique i , notée a_i , est une grandeur intensive qui rend compte de l'influence de cette espèce sur l'état du système physico-chimique auquel elle appartient.

L'activité a_i , sans unité, s'exprime selon la nature de l'espèce chimique i dans le système :

Nature de l'espèce chimique i	activité
Constituant pur (solide ou liquide) dans une phase condensée	$a_i = 1$
Solvant d'une solution diluée	$a_i = 1$
Soluté dans une solution diluée	$a_i = \frac{[i]}{C_0}$ avec $\begin{cases} [i] = \frac{n_i}{V} \text{ concentration molaire de } i \\ C_0 = 1 \text{ mol.L}^{-1} \text{ concentration de référence} \end{cases}$
Gaz dans un mélange de gaz parfaits	$a_i = \frac{P_i}{P_0}$ avec $\begin{cases} P_i \text{ pression partielle de } i \\ P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \text{ pression de référence} \end{cases}$ $P_i = x_i \cdot P$ avec $x_i = \frac{n_i}{n_{\text{total}}}$ fraction molaire de i $x_i = \frac{n_i}{n_{\text{total}}}$ avec $\begin{cases} n_i \text{ nombre de moles de } i \\ n_{\text{total}} \text{ nombre total de moles gazeuses} \end{cases}$

Remarques :

* Dans une enceinte close de volume V contenant un mélange de gaz supposés parfaits, la pression totale est égale à la somme des pressions partielles de ses constituants (loi de Dalton) :

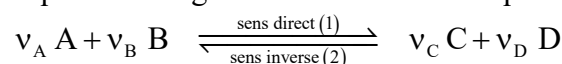
$$P = \sum_i P_i \xrightarrow{P_i \cdot V = n_i \cdot R \cdot T} P = \sum_i n_i \cdot \frac{R \cdot T}{V} \xrightarrow{\sum_i n_i = n_{\text{total}}} P = n_{\text{total}} \cdot \frac{R \cdot T}{V}$$

$$\begin{cases} P_i \cdot V = n_i \cdot R \cdot T \\ P \cdot V = n_{\text{total}} \cdot R \cdot T \end{cases} \rightarrow \frac{P_i}{P} = \frac{n_i}{n_{\text{total}}} \xrightarrow{x_i = \frac{n_i}{n_{\text{total}}}, \text{ fraction molaire}} P_i = x_i \cdot P$$

* Un constituant gazeux i , supposé parfait, exerce une pression $P_i = \frac{n_i}{V} \cdot R \cdot T \xrightarrow{\frac{n_i}{V} = [i]} P_i = [i] \cdot R \cdot T$.

b - La loi d'action de masse :

Considérons un système chimique qui est le siège d'une réaction chimique réversible :



Ce système chimique, à une température et à une pression données, est à l'état d'équilibre si sa composition est invariante au cours du temps (la réaction a atteint l'état final). Les activités des différents constituants du système qui interviennent dans la réaction vérifient la relation :

$$\frac{a_{C,\text{eq}}^{v_C} \cdot a_{D,\text{eq}}^{v_D}}{a_{A,\text{eq}}^{v_A} \cdot a_{B,\text{eq}}^{v_B}} = K \quad \text{où } K \text{ est une constante qui ne dépend que de la température}$$

K s'appelle la constante d'équilibre de la réaction considérée.

Cette expression traduit la loi d'action de masse.

Remarque :

* On définit la fonction des concentrations par : $\pi = \frac{a_C^{v_C} \cdot a_D^{v_D}}{a_A^{v_A} \cdot a_B^{v_B}}$.

Lorsque le système évolue vers l'état d'équilibre, π tend vers la valeur limite K .

Lorsque l'équilibre est atteint, alors on a : $\pi_{\text{eq}} = \frac{a_{C,\text{eq}}^{v_C} \cdot a_{D,\text{eq}}^{v_D}}{a_{A,\text{eq}}^{v_A} \cdot a_{B,\text{eq}}^{v_B}} = K$.

* Considérons un équilibre chimique en phase aqueuse :

Pour un constituant i du système intervenant dans la réaction : $a_i = \frac{[i]}{C_0} \xrightarrow{C_0=1\text{mol.L}^{-1}} a_i = [i]$ (sans unité).

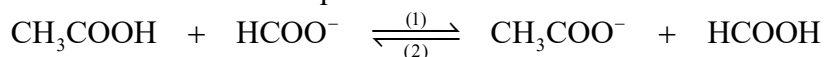
La loi d'action de masse s'écrit : $\frac{[C]_{\text{eq}}^{v_C} \cdot [D]_{\text{eq}}^{v_D}}{[A]_{\text{eq}}^{v_A} \cdot [B]_{\text{eq}}^{v_B}} = K$.

* On ne fait pas intervenir ni le solvant ni les espèces solides dans l'expression usuelle de la loi d'action de masse car leur activité $a = 1$.

Applications

Exercice 1 :

En solution aqueuse, l'acide éthanóïque CH_3COOH réagit avec l'ion méthanoate HCOO^- . L'équation de la réaction modélisant cette transformation chimique est :



A une température donnée et à la date $t = 0$, on mélange 0,02 mol de CH_3COOH et 0,04 mol de HCOO^- .

A l'équilibre dynamique, le taux d'avancement final de la réaction est $\tau_f = 0,34$.

1⁰) Pourquoi l'équilibre chimique est-il qualifié de dynamique ?

2⁰) a - Dresser le tableau descriptif de l'évolution du système chimique étudié.

b - En déduire l'avancement maximal $x_{\max}$ du système chimique.

c - Déterminer la composition molaire du système chimique à l'équilibre dynamique.

3⁰) a - Donner l'expression de la constante d'équilibre K de la réaction étudiée.

b - Calculer la valeur de K à la température considérée.

4⁰) A la même température, on prépare un mélange contenant $2 \cdot 10^{-2}$ mol de CH_3COOH , $2 \cdot 10^{-2}$ mol de HCOO^- , $2 \cdot 10^{-2}$ mol de CH_3COO^- et $4 \cdot 10^{-2}$ mol de HCOOH .

a - Le système chimique considéré se trouve-t-il dans un état d'équilibre chimique ? Si non, dans quel sens va-t-il évoluer ?

b - Déterminer la composition molaire du système chimique à l'équilibre dynamique.

Réponse :

1⁰) Lorsque l'état d'équilibre est atteint, la composition molaire du système chimique devient invariante mais à l'échelle microscopique, la réaction et son inverse continuent d'avoir lieu simultanément et avec la même vitesse. L'équilibre chimique est alors dit dynamique.

2⁰) a -

Equation chimique		$\text{CH}_3\text{COOH} + \text{HCOO}^- \xrightleftharpoons[(2)]{(1)} \text{CH}_3\text{COO}^- + \text{HCOOH}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	0,02	0,04	0	0
Intermédiaire	x	$0,02 - x$	$0,04 - x$	x	x
final	x_f	$0,02 - x_f$	$0,04 - x_f$	x_f	x_f

b - L'avancement maximal $x_{\max}$ est atteint si l'un des réactifs est totalement épuisé :

$$\begin{cases} 2 \cdot 10^{-2} - x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \\ 4 \cdot 10^{-2} - x_{\max} = 0 \rightarrow x_{\max} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \end{cases} \xrightarrow[\text{la plus faible}]{\text{on prend la valeur}} x_{\max} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

c - On a : $x_f = \tau_f \cdot x_{\max} = 0,34 \cdot 2 \cdot 10^{-2}$ et $x_f = 6,8 \cdot 10^{-3}$ mol

La composition molaire du système chimique à l'équilibre dynamique sera alors :

$$\begin{cases} n_f(\text{CH}_3\text{COOH}) = 2 \cdot 10^{-2} - x_f = 20 \cdot 10^{-3} - 6,8 \cdot 10^{-3} \text{ et } n_f(\text{CH}_3\text{COOH}) = 13,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \\ n_f(\text{HCOO}^-) = 4 \cdot 10^{-2} - x_f = 40 \cdot 10^{-3} - 6,8 \cdot 10^{-3} \text{ et } n_f(\text{HCOO}^-) = 33,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \\ n_f(\text{CH}_3\text{COO}^-) = x_f \text{ et } n_f(\text{CH}_3\text{COO}^-) = 6,8 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \\ n_f(\text{HCOOH}) = x_f \text{ et } n_f(\text{HCOOH}) = 6,8 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \end{cases}$$

$$3^0) \text{ a - } K = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{eq}} [\text{HCOOH}]_{\text{eq}}}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{eq}} [\text{HCOO}^-]_{\text{eq}}} = \frac{\frac{n_f(\text{CH}_3\text{COO}^-)}{V} \cdot \frac{n_f(\text{HCOOH})}{V}}{\frac{n_f(\text{CH}_3\text{COOH})}{V} \cdot \frac{n_f(\text{HCOO}^-)}{V}}$$

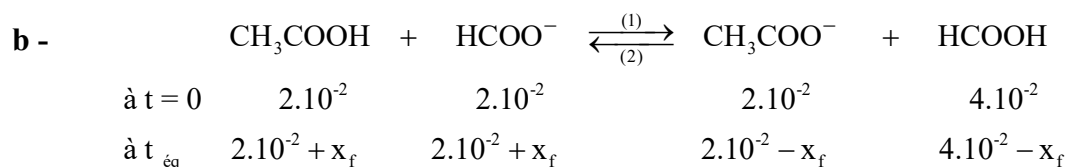
$$\rightarrow K = \frac{n_f(\text{CH}_3\text{COO}^-) \cdot n_f(\text{HCOOH})}{n_f(\text{CH}_3\text{COOH}) \cdot n_f(\text{HCOO}^-)}$$

$$\text{b - A.N : } K = \frac{(6,8 \cdot 10^{-3})^2}{13,2 \cdot 10^{-3} \cdot 33,2 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad K = 0,1$$

$$4^0) \text{ a - } \pi = \frac{n(\text{CH}_3\text{COO}^-) \cdot n(\text{HCOOH})}{n(\text{CH}_3\text{COOH}) \cdot n(\text{HCOO}^-)} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 2$$

$\pi \neq K \rightarrow$ le système chimique n'est pas en équilibre.

$\pi > K \rightarrow$ la réaction évolue spontanément dans le sens inverse (sens 2) .



$$K = \frac{(2 \cdot 10^{-2} - x_f)(4 \cdot 10^{-2} - x_f)}{(2 \cdot 10^{-2} + x_f)^2} = 0,1 \quad , \quad x_f < 2 \cdot 10^{-2} \quad \rightarrow \quad 0,9x_f^2 - 6,4 \cdot 10^{-2}x_f + 7,6 \cdot 10^{-4} = 0$$

$$\Delta = (6,4 \cdot 10^{-2})^2 - 4 \cdot 0,9 \cdot 7,6 \cdot 10^{-4} = 13,6 \cdot 10^{-4} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 3,69 \cdot 10^{-2} \quad \text{et}$$

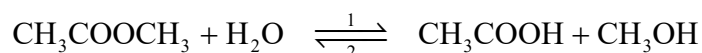
$$\begin{cases} x_f = \frac{(6,4 + 3,68) \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 0,9} = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ à rejeter} \\ x_f = \frac{(6,4 - 3,68) \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 0,9} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \end{cases}$$

La composition molaire du système chimique à l'équilibre dynamique sera alors :

$$\begin{cases} n_f(\text{CH}_3\text{COOH}) = 2 \cdot 10^{-2} + x_f = 2 \cdot 10^{-2} + 1,5 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad n_f(\text{CH}_3\text{COOH}) = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \\ n_f(\text{HCOO}^-) = 2 \cdot 10^{-2} + x_f = 2 \cdot 10^{-2} + 1,5 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad n_f(\text{HCOO}^-) = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \\ n_f(\text{CH}_3\text{COO}^-) = 2 \cdot 10^{-2} - x_f = 2 \cdot 10^{-2} - 1,5 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad n_f(\text{CH}_3\text{COO}^-) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \\ n_f(\text{HCOOH}) = 4 \cdot 10^{-2} - x_f = 4 \cdot 10^{-2} - 1,5 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad n_f(\text{HCOOH}) = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \end{cases}$$

Exercice 2 :

On réalise l'hydrolyse du l'éthanoate de méthyle. L'équation de la réaction chimique qui modélise cette transformation chimique est :



1⁰) Préciser les caractères de cette transformation chimique.

2⁰) On mélange, à une température θ_1 maintenue constante, 0,2 mol d'éthanoate de méthyle avec 0,5 mol d'eau. Lorsque l'état final est atteint, il se forme 0,1 mol d'acide éthanoïque.

a - Dresser le tableau descriptif de l'évolution de la transformation chimique au cours du temps.

b - Justifier que la réaction étudiée est limitée.

c - A l'état final, pourquoi dit-on que le système chimique est en équilibre dynamique ?

d - Etablir l'expression de la constante d'équilibre K de la réaction en fonction de l'avancement final x_f . En déduire que $K = 0,25$.

3⁰) On élève la température du mélange réactionnel à une valeur $\theta_2 > \theta_1$.

a - La composition du mélange à l'équilibre varie-t-elle ? Justifier la réponse.

b - Pour le même mélange initial, comparer les durées Δt_1 et Δt_2 nécessaires pour atteindre l'état final respectivement aux températures θ_1 et θ_2 ? Justifier la réponse.

4⁰) A la date $t = 0$ s, on mélange $2,5 \cdot 10^{-1}$ mol d'éthanoate de méthyle, 10^{-1} mol d'eau, 10^{-1} mol d'acide éthanoïque et $1,5 \cdot 10^{-1}$ mol de méthanol.

A une date t, on dose l'acide restant dans le mélange par une solution de soude dont la concentration molaire est $C_b = 2 \text{ mol.L}^{-1}$. On trouve que le nombre de mole d'acide restant est égal à $8 \cdot 10^{-2}$ mol.

a - Montrer qu'à $t = 0$, le système chimique n'est pas en équilibre et que c'est la réaction d'estérification qui a lieu spontanément.

b - Calculer le volume V_b de soude nécessaire pour le dosage de l'acide restant à la date t .

c - A la date t , le système chimique est-il en équilibre ? Sinon, quelle serait la masse m d'eau pure qu'on devrait ajouter ou retirer brusquement à cette date pour atteindre l'équilibre.

On donne : masse molaire moléculaire de l'eau pure : $M = 18 \text{ g.mol}^{-1}$.

Réponse :

1⁰) La réaction d'hydrolyse est athermique, lente et limitée.

2⁰) a -

Equation chimique		$\text{CH}_3\text{COOCH}_3 + \text{H}_2\text{O} \xrightleftharpoons[2]{1} \text{CH}_3\text{OH} + \text{CH}_3\text{COOH}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	0,2	0,5	0	0
final	x_f	$0,2 - x_f$	$0,5 - x_f$	x_f	x_f

b - L'avancement maximal est tel que : $0,2 - x_{\max} = 0 \longrightarrow x_{\max} = 0,2 \text{ mol}$.

Or l'avancement final est tel que : $x_f = n_f$ (acide carboxylique) $\longrightarrow x_f = 0,1 \text{ mol}$.

On remarque que : $x_f < x_{\max} \xrightarrow{\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}}} \tau_f < 1$ donc la réaction est limitée.

c - A l'état final, la composition molaire du système chimique reste invariante avec coexistence des réactifs et des produits, on dit que le système chimique a atteint un état d'équilibre.

Les deux réactions inverses l'une de l'autre continuent d'avoir lieu simultanément et à la même vitesse, on dit alors que l'équilibre est dynamique.

d - D'après la loi d'action de masse : $\pi_{\text{eq}} = K = \frac{[\text{CH}_3\text{OH}]_{\text{eq}} [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{eq}}}{[\text{CH}_3\text{COOCH}_3]_{\text{eq}} [\text{H}_2\text{O}]_{\text{eq}}}$

$$K = \frac{\frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{OH})}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOH})}{V}}{\frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOCH}_3)}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{O})}{V}} = \frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{OH}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOH})}{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOCH}_3) \cdot n_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{O})} = \frac{x_f \cdot x_f}{(0,2 - x_f) \cdot (0,5 - x_f)}$$

$$\text{Il vient alors que : } K = \frac{x_f^2}{(0,2 - x_f) \cdot (0,5 - x_f)}$$

$$\text{A.N : } K = \frac{(0,1)^2}{(0,2 - 0,1) \cdot (0,5 - 0,1)} \text{ et } K = 0,25.$$

3⁰) a - La réaction d'hydrolyse étant athermique, la variation de température n'influe pas sur la composition molaire du mélange à l'équilibre.

b - La température étant un facteur cinétique, son augmentation engendre une accélération de la réaction.

Pour le même mélange initial : $\theta_2 > \theta_1 \longrightarrow \Delta t_2 < \Delta t_1$

4⁰) $\text{CH}_3\text{COOCH}_3 + \text{H}_2\text{O} \xrightleftharpoons[2]{1} \text{CH}_3\text{OH} + \text{CH}_3\text{COOH}$

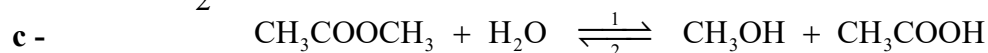
à $t = 0$, $2,5 \cdot 10^{-1}$ 10^{-1} $1,5 \cdot 10^{-1}$ 10^{-1}

$$\text{a - } \pi_0 = \frac{[\text{CH}_3\text{OH}]_0 [\text{CH}_3\text{COOH}]_0}{[\text{CH}_3\text{COOCH}_3]_0 [\text{H}_2\text{O}]_0} = \frac{\frac{n_0(\text{CH}_3\text{OH})}{V} \cdot \frac{n_0(\text{CH}_3\text{COOH})}{V}}{\frac{n_0(\text{CH}_3\text{COOCH}_3)}{V} \cdot \frac{n_0(\text{H}_2\text{O})}{V}} = \frac{n_0(\text{CH}_3\text{OH}) \cdot n_0(\text{CH}_3\text{COOH})}{n_0(\text{CH}_3\text{COOCH}_3) \cdot n_0(\text{H}_2\text{O})}$$

$$\pi_0 = \frac{(1,5 \cdot 10^{-1}) \cdot (10^{-1})}{(2,5 \cdot 10^{-1}) \cdot (10^{-1})} = 0,6 \rightarrow \begin{cases} \pi_0 \neq K : \text{le système chimique n'est pas en équilibre} \\ \pi_0 > K : \text{la réaction d'estérification (dans le sens inverse) a lieu spontanément} \end{cases}$$

b - A l'équivalence : $n_t(\text{acide carboxylique}) = C_b \cdot V_b \longrightarrow V_b = \frac{n_t(\text{acide carboxylique})}{C_b}$

$$A.N : V_b = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{2} \text{ et } V_b = 4 \cdot 10^{-2} \text{ L ou } V_b = 40 \text{ cm}^3.$$



$$\text{à } t, \quad 2,5 \cdot 10^{-1} + x_t \quad 10^{-1} + x_t \quad 1,5 \cdot 10^{-1} - x_t \quad 10^{-1} - x_t$$

$$n_t(\text{acide carboxylique}) = 10^{-1} - x_t = 8 \cdot 10^{-2} \longrightarrow x_t = 10^{-1} - 8 \cdot 10^{-2} \text{ et } x_t = 8 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

$$\pi_t = \frac{n_t(\text{CH}_3\text{OH}) \cdot n_t(\text{CH}_3\text{COOH})}{n_t(\text{CH}_3\text{COOCH}_3) \cdot n_t(\text{H}_2\text{O})} \xrightarrow{A.N} \pi_t = \frac{(15 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-2}) \cdot (10 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-2})}{(25 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2}) \cdot (10 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2})} \text{ et } \pi_t = 0,32$$

$\pi_t > K \longrightarrow$ le système chimique n'a pas atteint l'état d'équilibre.

Pour atteindre l'équilibre, il faut diminuer π_t jusqu'à la valeur K , on ajoute alors n mol d'eau pure :

$$\pi_t = K \rightarrow \frac{(13 \cdot 10^{-2}) \cdot (8 \cdot 10^{-2})}{(27 \cdot 10^{-2}) \cdot (12 \cdot 10^{-2} + n)} = 0,25 \rightarrow n = \frac{13,8}{27,25} - 12 \cdot 10^{-2} \text{ et } n = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

La masse d'eau pure ajoutée sera alors : $m = n \cdot M \rightarrow m = 3,4 \cdot 10^{-2} \cdot 18 \text{ et } m = 0,612 \text{ g.}$

Exercice 3 :

On réalise une réaction d'estérification en mélangeant initialement $n_0 = 0,06$ mol d'acide éthanoïque $\text{CH}_3\text{-COOH}$ et $n_0 = 0,06$ mol d'éthanol $\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-OH}$ (le mélange réactionnel est dans les proportions stœchiométriques).

Le mélange réactionnel est acidifié et maintenu chauffé à température constante.

La courbe 1 du graphe ci-dessous donne l'évolution de la quantité de matière de l'acide éthanoïque restant dans le mélange réactionnel au cours du temps.

1⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction chimique qui modélise la transformation étudiée.

b - Préciser les propriétés de la transformation chimique mis en évidence d'après la courbe 1.

2⁰) a - En exploitant la courbe 1, déduire l'avancement final x_f de la réaction. Vérifier alors que le taux d'avancement final de la réaction est $\tau_f = \frac{2}{3}$.

b - Montrer que la constante d'équilibre relative à la réaction étudiée s'exprime par : $K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f)^2}$. Calculer la valeur de K .

3⁰) On refait l'expérience, dans les mêmes conditions opératoires, mais en mélangeant initialement $n_0 = 0,06$ mol d'acide éthanoïque et n'_0 mol d'éthanol avec $n'_0 > n_0$.

On obtient alors la courbe 2 du graphe ci-dessus.

a - Quelle est la nouvelle valeur x'_f de l'avancement final de la réaction.

En déduire alors la nouvelle valeur τ'_f du taux d'avancement final de la réaction.

b - Etablir l'expression de la constante d'équilibre K en fonction de x'_f , n_0 et n'_0 .

c - Calculer alors la valeur de n'_0 .

4⁰) Quelle conclusion peut-on tirer à partir de ces deux expériences ?

Réponse :



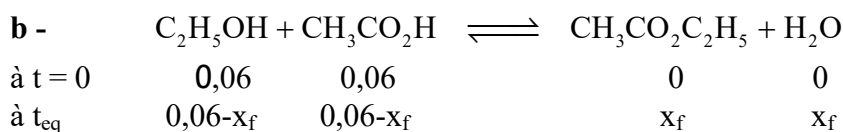
b - * Le mélange étant stœchiométrique et $n_f(\text{acide}) \neq 0 \rightarrow$ la réaction est limitée.

* La réaction est lente

2⁰) a - On a : $n_f(\text{acide}) = n_i(\text{acide}) - x_f \rightarrow x_f = n_i(\text{acide}) - n_f(\text{acide})$

A.N : $x_f = 6.10^{-2} - 2.10^{-2}$ et $x_f = 4.10^{-2}$ mol.

On a : $\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}} \xrightarrow{x_{\max}=0,06 \text{ mol}} \tau_f = \frac{4.10^{-2}}{6.10^{-2}}$ et $\tau_f = \frac{2}{3}$.



A l'équilibre :

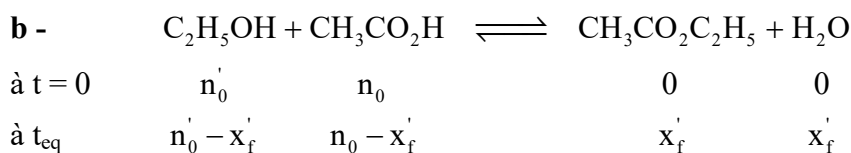
$$\pi_{\text{eq}} = K \rightarrow K = \frac{[\text{ester}]_{\text{eq}} \cdot [\text{eau}]_{\text{eq}}}{[\text{alcool}]_{\text{eq}} \cdot [\text{acide}]_{\text{eq}}} \rightarrow K = \frac{\frac{n_{\text{eq}}(\text{ester})}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{eau})}{V}}{\frac{n_{\text{eq}}(\text{alcool})}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{acide})}{V}} \text{ et } K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{ester}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{eau})}{n_{\text{eq}}(\text{alcool}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{acide})}.$$

$$K = \frac{x_f^2}{(0,06 - x_f)^2} = \frac{x_f^2}{(0,06)^2 \cdot \left(1 - \frac{x_f}{0,06}\right)^2} = \frac{\left(\frac{x_f}{0,06}\right)^2}{\left(1 - \frac{x_f}{0,06}\right)^2} \xrightarrow[\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}}]{x_{\max}=0,06 \text{ mol}} K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f)^2}.$$

A.N : $K = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2}$ et $K = 4$.

3⁰) a - $x'_f = n_i(\text{acide}) - n'_f(\text{acide}) \xrightarrow{\text{A.N}} x'_f = 6.10^{-2} - 10^{-2}$ et $x'_f = 5.10^{-2}$ mol.

On a : $\tau'_f = \frac{x'_f}{x'_{\max}} \xrightarrow[x'_{\max}=x_{\max}=0,06 \text{ mol}]{n'_0 > n_0} \tau'_f = \frac{5.10^{-2}}{6.10^{-2}} = \frac{5}{6}$ et $\tau_f = 0,83..$



$$K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{ester}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{eau})}{n_{\text{eq}}(\text{alcool}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{acide})} \rightarrow K = \frac{(x'_f)^2}{(n'_0 - x'_f) \cdot (n_0 - x'_f)}.$$

c - $K = \frac{(x'_f)^2}{(n'_0 - x'_f) \cdot (n_0 - x'_f)} \rightarrow (n'_0 - x'_f) = \frac{(x'_f)^2}{K \cdot (n_0 - x'_f)} \text{ et } n'_0 = \frac{(x'_f)^2}{K \cdot (n_0 - x'_f)} + x'_f.$

A.N : $n'_0 = \frac{(5.10^{-2})^2}{4 \cdot (6.10^{-2} - 5.10^{-2})} + 5.10^{-2}$ et $n'_0 = 11,25.10^{-2}$ mol.

4⁰) $n'_0 > n_0 \rightarrow \tau'_f > \tau_f.$

Si on utilise un des réactifs en excès, On augmente la limite de la réaction d'estérification.

Exercice 4 :

On réalise une réaction d'estérification avec un taux d'avancement final $\tau_f = 0,8$.

Le mélange réactionnel contient, initialement, a moles d'acide éthanoïque CH_3COOH et b moles de méthanol CH_3OH . L'alcool est le réactif en excès ($a < b$).

La réaction est réalisée à chaud et en présence de quelques gouttes d'acide sulfurique concentré.

La constante d'équilibre relative à cette réaction d'estérification est $K = 4$.

1⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction d'estérification étudiée.

b - Citer les propriétés de cette réaction.

2⁰) a - Soit x_f l'avancement final de la réaction, établir l'expression de K en fonction de a, b et x_f .

b - Sachant que $\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}}$, montrer que $K = \frac{\tau_f^2}{(1-\tau_f) \cdot \left(\frac{b}{a} - \tau_f\right)}$.

c - Vérifier que $\frac{b}{a} = 1,6$.

3⁰) Les quantités de matière a d'acide et b d'alcool sont obtenues respectivement à partir d'un volume V_1 d'acide et d'un volume V_2 d'alcool tels que $V_1 + V_2 = 64 \text{ cm}^3$.

On donne :

	acide éthanoïque	méthanol
Masse volumique (g.cm^{-3})	$\rho_1 = 1,05$	$\rho_2 = 0,79$
Masse molaire (g.mol^{-1})	$M_1 = 60$	$M_2 = 32$

a - Sachant que $a = \frac{\rho_1}{M_1} \cdot V_1$ et que $b = \frac{\rho_2}{M_2} \cdot V_2$. Calculer le rapport $\frac{V_1}{V_2}$.

b - Déterminer alors les valeurs de V_1 et V_2 .

c - Calculer les valeurs de a et de b.

d - Dresser le tableau d'avancement de la réaction.

4⁰) On refait l'expérience en partant initialement d'un mélange équimolaire d'acide et d'alcool ($a = b$). Déterminer dans ce cas la valeur du taux d'avancement final τ_f de la réaction.

Réponse :

1⁰) a - $\text{CH}_3\text{COOH} + \text{CH}_3\text{OH} \xrightleftharpoons[2]{1} \text{CH}_3\text{COOCH}_3 + \text{H}_2\text{O}$

b - La réaction d'estérification est athermique, lente et limitée.

2⁰) a -

	acide	+	alcool	$\xrightleftharpoons[2]{1}$	ester	+	eau
à $t = 0$;	a		b		0		0
à t_{eq} ;	$a - x_f$		$b - x_f$		x_f		x_f

A l'équilibre :

$$\pi_{\text{eq}} = K \rightarrow K = \frac{[\text{CH}_3\text{COOCH}_3]_{\text{eq}} \cdot [\text{H}_2\text{O}]_{\text{eq}}}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{eq}} \cdot [\text{CH}_3\text{OH}]_{\text{eq}}} \rightarrow K = \frac{\frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOCH}_3)}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{O})}{V}}{\frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOH})}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{OH})}{V}}$$

$$\rightarrow K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOCH}_3) \cdot n_{\text{eq}}(\text{H}_2\text{O})}{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOH}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{OH})} \quad \text{et} \quad K = \frac{x_f^2}{(a - x_f) \cdot (b - x_f)}$$

b - $\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}} \xrightarrow[\text{car } a < b]{x_{\max} = a} \tau_f = \frac{x_f}{a} \quad \text{et} \quad x_f = a \cdot \tau_f$

$$\text{donc} \quad K = \frac{(a \cdot \tau_f)^2}{(a - a \cdot \tau_f) \cdot (b - a \cdot \tau_f)} \rightarrow K = \frac{a^2 \cdot \tau_f^2}{a(1 - \tau_f) \cdot a \cdot \left(\frac{b}{a} - \tau_f\right)}$$

$$\text{et} \quad K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f) \cdot \left(\frac{b}{a} - \tau_f\right)}$$

$$\text{c - } K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f) \cdot \left(\frac{b}{a} - \tau_f\right)} \rightarrow \left(\frac{b}{a} - \tau_f\right) = \frac{\tau_f^2}{K \cdot (1 - \tau_f)} \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = \frac{\tau_f^2}{K \cdot (1 - \tau_f)} + \tau_f$$

$$\text{A.N : } \frac{b}{a} = \frac{(0,8)^2}{4 \cdot (1 - 0,8)} + 0,8 \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = 1,6.$$

$$3^0) \text{ a - } \left. \begin{aligned} a &= \frac{\rho_1}{M_1} \cdot V_1 \rightarrow V_1 = \frac{M_1}{\rho_1} \cdot a \\ b &= \frac{\rho_2}{M_2} \cdot V_2 \rightarrow V_2 = \frac{M_2}{\rho_2} \cdot b \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{M_2} \cdot \frac{a}{b}$$

$$\text{A.N : } \frac{V_1}{V_2} = \frac{60}{1,05} \cdot \frac{0,79}{32} \cdot \frac{1}{1,6} \quad \text{et} \quad \frac{V_1}{V_2} = 0,88$$

$$\text{b - } \left\{ \begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= 0,88 \\ V_1 + V_2 &= 64 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} V_1 &= 0,88 \cdot V_2 \\ V_1 + V_2 &= 64 \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} 0,88 \cdot V_2 + V_2 &= 64 \rightarrow 1,88 V_2 = 64 \rightarrow V_2 = \frac{64}{1,88} \quad \text{et} \quad V_2 = 34 \text{ cm}^3 \\ V_1 &= 0,88 \cdot V_2 \rightarrow V_1 = 0,88 \cdot 34 \quad \text{et} \quad V_1 = 30 \text{ cm}^3 \end{aligned} \right.$$

$$\text{c - } a = \frac{\rho_1}{M_1} \cdot V_1 \rightarrow a = \frac{1,05}{60} \cdot 30 \quad \text{et} \quad a = 0,525 \text{ mol.}$$

$$b = \frac{\rho_2}{M_2} \cdot V_2 \rightarrow b = \frac{0,79}{32} \cdot 34 \quad \text{et} \quad b = 0,839 \text{ mol.}$$

$$\text{d - } \tau_f = \frac{x_f}{a} \rightarrow x_f = a \cdot \tau_f \quad \text{A.N : } x_f = 525 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \quad \text{et} \quad x_f = 420 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

Equation chimique		$\text{CH}_3\text{COOH} + \text{CH}_3\text{OH} \rightleftharpoons \text{CH}_3\text{COOCH}_3 + \text{H}_2\text{O}$			
Etat du système	Avancement (10^{-3} mol)	Quantités de matière (10^{-3} mol)			
Initial	0	525	839	0	0
Intermédiaire	x	$525 - x$	$839 - x$	x	x
Final = équilibre	$x_f = 420$	105	419	420	420

$$4^0) \text{ On a : } K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f) \cdot \left(\frac{b}{a} - \tau_f \right)} \xrightarrow{a=b} K = \frac{\tau_f^2}{(1 - \tau_f)^2}$$

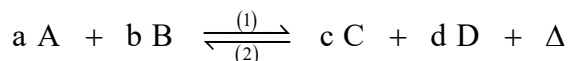
$$\rightarrow \frac{\tau_f}{1 - \tau_f} = \sqrt{K} \rightarrow \tau_f = \sqrt{K} - \tau_f \cdot \sqrt{K} \rightarrow \tau_f \cdot (1 + \sqrt{K}) = \sqrt{K} \quad \text{et} \quad \tau_f = \frac{\sqrt{K}}{1 + \sqrt{K}}$$

$$\text{A.N : } \tau_f = \frac{\sqrt{4}}{1 + \sqrt{4}} \quad \text{et} \quad \tau_f = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \tau_f = 0,67 \quad (\tau_f = 67\%).$$

LES LOIS DE DÉPLACEMENT DES ÉQUILIBRES CHIMIQUES

I / Influence des facteurs d'équilibre :

Soit l'équilibre :



où Δ est la chaleur de la réaction dans le sens (1).

on note : $\Delta n = (c + d) - (a + b)$.

1⁰) Influence de la température : (à pression constante)

a - Effets de la variation de la température:

D'après la loi de Van't Hoff :

- Si la réaction est exothermique : ($\Delta < 0$)
lorsque la température augmente, on favorise la réaction dans le sens (2).
- Si la réaction est endothermique : ($\Delta > 0$)
lorsque la température augmente, on favorise la réaction dans le sens (1).
- Si la réaction est athermique : ($\Delta = 0$)
La température n'influe pas sur l'état d'équilibre dynamique atteint.

b - Conclusion :

Pour un système chimique en équilibre dynamique, une **élévation de température** favorise le sens **endothermique**.

2⁰) Influence de la pression : (à température constante)

a - Effets de la variation de la pression :

Considérons un équilibre contenant des constituants gazeux :

Soit Δn_g la variation du nombre de moles gazeuses, dans les proportions stœchiométriques, entre les réactifs et les produits.

- Si $\Delta n_g < 0$
lorsque la pression augmente, on favorise la réaction dans le sens (1)
- Si $\Delta n_g > 0$
lorsque la pression augmente, on favorise la réaction dans le sens (2)
- Si $\Delta n_g = 0$
la pression n'influe pas sur l'état d'équilibre dynamique atteint.

b - Conclusion :

Pour un système chimique en équilibre dynamique, une **élévation de pression** favorise le sens qui tend à **minimiser** le nombre de moles gazeuses.

3⁰) Influence des concentrations : (à température constante)

a - Effets de la variation des concentrations :

Si on perturbe la composition du système à l'équilibre :

- On ajoute A ou B :
 n_A ou n_B augmente $\Rightarrow C_A$ ou C_B augmente $\Rightarrow$ on favorise la réaction dans le sens (1)
- On ajoute C ou D :
 n_C ou n_D augmente $\Rightarrow C_C$ ou C_D augmente $\Rightarrow$ on favorise la réaction dans le sens (2)

b - Conclusion :

Le système réagit généralement de façon à **modérer l'augmentation** du nombre de moles du composé ajouté.

Application 1 :

On considère la réaction chimique : $\text{C}_2\text{H}_4(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{g}) \xrightleftharpoons[2]{1} \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{g})$

Les valeurs de la constante d'équilibre sont à 145°C, $K = 6,8 \cdot 10^{-2}$ et à 250°C, $K = 6,7 \cdot 10^{-3}$.

1⁰) La réaction est-elle endothermique ou exothermique ? Justifier la réponse.

2⁰) Le système réactionnel étant en équilibre, on augmente la pression.

Dans quel sens se déplace l'équilibre ?

Réponse :

1⁰) Si la température θ augmente, K augmente $\longrightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens 1

Or Une augmentation de température favorise le sens endothermique.

On en déduit donc que le sens 1 est endothermique.

2⁰) Une augmentation de pression déplace l'équilibre dans le sens qui tend à minimiser le nombre de moles gazeuses c'est-à-dire dans ce cas le sens 2.

II / Loi de modération :

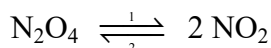
Dans un système en équilibre dynamique, toute perturbation qui a pour effet de modifier :

- soit la température (à pression constante)
- soit la pression (à température constante)
- soit la molarité d'un des constituants du système (à température constante)

entraîne un déplacement de l'équilibre dans **le sens qui tend à s'opposer** à cette perturbation.

Application 2 :

On introduit $a = 2$ mol de tétraoxyde de diazote N_2O_4 dans un récipient de volume $V = 2\text{L}$. L'équilibre suivant s'établit :



1⁰) a- Dresser le tableau d'avancement de la réaction.

b- Exprimer la constante d'équilibre K en fonction de V , a et le taux d'avancement final τ_f de la réaction.

2⁰) a - A la température $\theta = 25^\circ \text{C}$, on a $\tau_f = 0,186$. Calculer alors la valeur de K à cette température.

b - A la température $\theta = 45^\circ \text{C}$, on a $\tau_f = 0,380$. Quel est caractère énergétique de la réaction de dissociation de N_2O_4 .

3⁰) La température étant maintenue constante à 25°C , on modifie la pression du système.

On a alors $\tau_f' = 0,06$.

a - Dans quel sens se déplace l'équilibre à la suite de cette opération ? Justifier la réponse.

b - Dire, en le justifiant, s'il s'agit d'une augmentation ou d'un abaissement de pression.

Réponse :

1⁰) a -

Equation de la réaction		$\text{N}_2\text{O}_4 \xrightleftharpoons[2]{1} 2 \text{NO}_2$	
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)	
Initial ($t = 0$)	0	a	0
Final	x_f	$a - x_f$	$2x_f$

$$\text{b - } K = \frac{[\text{NO}_2]_{\text{eq}}^2}{[\text{N}_2\text{O}_4]_{\text{eq}}} \rightarrow K = \frac{\left(\frac{2x_f}{V}\right)^2}{\left(\frac{a - x_f}{V}\right)} = \frac{1}{V} \cdot \frac{4x_f^2}{a - x_f}$$

$$\text{or } x_f = \tau_f \cdot x_{\text{max}} = \tau_f \cdot a \quad \text{donc } K = \frac{1}{V} \cdot \frac{4\tau_f^2 \cdot a^2}{a - \tau_f \cdot a} \quad \text{et } K = \frac{a}{V} \cdot \frac{4\tau_f^2}{1 - \tau_f}$$

$$2^0) \text{ a - A } \theta = 25^0 \text{ C, } K = \frac{2}{2} \cdot \frac{4 \cdot (0,186)^2}{1 - 0,186} \text{ et } K = 42,5 \cdot 10^{-3}$$

b - Lorsque θ augmente, τ_f augmente donc K augmente $\longrightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens 1

Or Une augmentation de température favorise le sens endothermique.

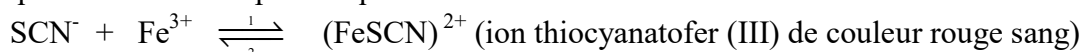
On en déduit donc que le sens 1 est endothermique.

3⁰) a - A même température, $\tau'_f < \tau_f$ l'équilibre s'est alors déplacé dans le sens 2

L'équilibre s'est déplacé dans le qui minimise le nombre de moles gazeuses ce qui correspond à l'effet d'une augmentation de pression.

Application 3 :

On étudie l'équilibre suivant en phase aqueuse:



1⁰) Exprimer la loi d'action de masse relative à cet équilibre.

2⁰) Une solution (S), de volume $V = 100 \text{ mL}$, contient initialement $8 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ d'ion ferrique Fe^{3+} et $32 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ d'ion thiocyanate SCN^- . A l'équilibre la concentration en ions Fe^{3+} est $[\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Calculer la valeur de la constante d'équilibre K .

3⁰) Le mélange précédant étant à l'équilibre, on ajoute quelques gouttes d'une solution concentrée de FeCl_3 . Dans quel sens se déplace l'équilibre ? Justifier la réponse.

4⁰) Le mélange précédant étant à l'équilibre, on ajoute de l'eau distillée.

Dans quel sens se déplace l'équilibre ? Justifier la réponse.

Réponse :

$$1^0) K = \frac{[(\text{FeSCN})^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{SCN}^-]_{\text{eq}} \cdot [\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}}}$$

Equation de la réaction		SCN^-	+	Fe^{3+}	$\xrightleftharpoons[2]{1}$	$(\text{FeSCN})^{2+}$
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)				
Initial ($t = 0$)	0	$32 \cdot 10^{-3}$		$8 \cdot 10^{-3}$		0
Final	x_f	$32 \cdot 10^{-3} - x_f$		$8 \cdot 10^{-3} - x_f$		x_f

$$\text{A l'équilibre, } [\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \text{ or } [\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} = \frac{8 \cdot 10^{-3} - x_f}{V}$$

$$\longrightarrow x_f = 8 \cdot 10^{-3} - [\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} \cdot V \xrightarrow{\text{A.N}} x_f = 8 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1 \text{ et } x_f = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$K = \frac{\left(\frac{x_f}{V}\right)}{\left(\frac{32 \cdot 10^{-3} - x_f}{V}\right) \left(\frac{8 \cdot 10^{-3} - x_f}{V}\right)} = V \cdot \frac{x_f}{(32 \cdot 10^{-3} - x_f) \cdot (8 \cdot 10^{-3} - x_f)}$$

$$\text{A.N : } K = 0,1 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3}}{(32 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}) \cdot (8 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3})} \text{ et } K = 1,11 \cdot 10^3$$

3⁰) On ajoute quelques gouttes d'une solution concentrée de $\text{FeCl}_3 \longrightarrow$ le nombre de moles d'ions Fe^{3+} augmente pour un volume V pratiquement constant donc l'équilibre se déplace dans le sens qui modère la perturbation c'est-à-dire le sens direct (sens 1).

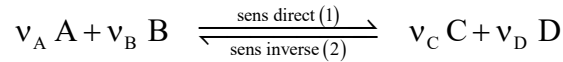
$$4^0) \text{ On ajoute de l'eau distillée } \longrightarrow \text{ le volume du mélange augmente or } K = V \cdot \frac{x_f}{(32 \cdot 10^{-3} - x_f) \cdot (8 \cdot 10^{-3} - x_f)}$$

K ne dépend que de la température donc si V augmente alors x_f diminue et l'équilibre se déplace dans le sens inverse (sens 2).

Pour en savoir plus

1⁰) Modification de l'état d'un système physico-chimique en équilibre :

Considérons un système chimique fermé qui est le siège d'une réaction chimique réversible.



Ce système chimique, à une température et à une pression données, est à l'état d'équilibre s'il vérifie la loi de

Guldberg-Waage : $\frac{[C]_{eq}^{\nu_C} \cdot [D]_{eq}^{\nu_D}}{[A]_{eq}^{\nu_A} \cdot [B]_{eq}^{\nu_B}} = K$ où K est la constante d'équilibre de la réaction considérée.

Si l'égalité entre la valeur de la fonction des concentrations à l'équilibre $\pi_{eq} = \frac{[C]_{eq}^{\nu_C} \cdot [D]_{eq}^{\nu_D}}{[A]_{eq}^{\nu_A} \cdot [B]_{eq}^{\nu_B}}$ et la valeur de la

constante d'équilibre K est rompue, le système chimique évolue de l'état d'équilibre initial (qui n'en est plus un) vers un nouvel état d'équilibre qui vérifie de nouveau la loi d'action de masse.

Les paramètres physico-chimiques dont la modification peut engendrer un déplacement de l'équilibre chimique s'appellent **les facteurs d'équilibre**.

Les principaux facteurs d'équilibre sont :

- la température : modification de la valeur de K
- la pression (pour des constituants à l'état gazeux) : modification de π_{eq}
- la concentration des solutés : modification de π_{eq}

2⁰) La loi générale de modération (Principe de Le Chatelier) :

a - Énoncé :

Lorsque les modifications extérieures apportées à un système physico-chimique en équilibre provoquent une évolution vers un nouvel état d'équilibre, l'évolution s'oppose aux perturbations qui l'ont engendrée et en modère l'effet.

Remarque :

- Le principe de Le Chatelier stipule que la perturbation d'un système chimique à l'équilibre engendre un déplacement de cet équilibre dans le sens qui modère les effets de cette perturbation.
- Le principe de Le Chatelier concerne les paramètres intensifs dont la modification influe sur l'état du système physico-chimique.

Remarque :

* Une grandeur intensive est une grandeur qui ne dépend pas de la quantité de matière en présence dans le système considéré (exemples : la température, la pression la concentration molaire).

Pour un système homogène, la valeur d'une grandeur intensive est identique pour le système entier et pour toute partie du système.

* Une grandeur extensive est une grandeur qui dépend de la quantité de matière en présence dans le système considéré (exemples : la masse, le volume).

Pour un système homogène, la valeur d'une grandeur extensive pour le système entier est la somme de ses valeurs pour chacune de ses parties.

b - Les lois de déplacement des équilibres chimiques:

• Influence de la température (loi de van't Hoff) :

Dans un système chimique fermé en équilibre, maintenu à pression constante (ou à volume constant), une élévation de température entraîne un déplacement de l'équilibre dans le sens endothermique.

• Influence de la pression (loi de Le Chatelier) :

Dans un système chimique fermé en équilibre et contenant des constituants gazeux, maintenu à température constante, une augmentation de pression entraîne un déplacement de l'équilibre dans le sens qui minimise le nombre de moles gazeuses.

- **Influence des concentrations :**

Dans un système chimique en équilibre, maintenu à une température constante, toute modification de la concentration d'un réactif ou d'un produit, entraîne un déplacement de l'équilibre qui tend à s'opposer à cette modification.

3⁰) Déplacement d'un équilibre chimique par ajout d'un constituant :

On distingue deux types de constituants :

- le constituant actif : il intervient dans l'équation de la réaction envisagée (réactif ou produit).
- le constituant inactif (ou inerte) : il n'intervient pas dans l'équation de la réaction envisagée.

Lorsqu'on ajoute un constituant (actif ou inactif) au système chimique à l'équilibre, on fait varier la quantité de matière de ce constituant qui est une grandeur extensive du système chimique.

La loi de modération n'est donc plus systématiquement applicable (elle concerne les grandeurs intensives).

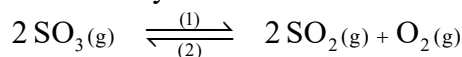
Le sens du déplacement de l'équilibre chimique est alors déterminé au cas par cas :

- On ajoute un constituant (actif ou inactif) qui forme, seul, une phase condensée pure (solide ou liquide), l'équilibre chimique n'est pas déplacé.
- On ajoute un soluté en solution aqueuse (à température, pression et volume constants) :
 - si le constituant est actif, l'équilibre se déplace dans le sens de la diminution de sa fraction molaire.
 - si le constituant est inactif, l'équilibre chimique n'est pas déplacé.
- On ajoute un constituant gazeux parfait (à température et volume constants) :
 - si le constituant est actif, l'équilibre se déplace dans le sens de la diminution de sa fraction molaire.
 - si le constituant est inactif, l'équilibre chimique n'est pas déplacé.
- On ajoute un constituant gazeux parfait (à température et pression constantes) :
 - si le constituant est actif, l'équilibre se déplace dans le sens de la diminution de sa fraction molaire.
 - si le constituant est inactif, l'équilibre chimique se déplace dans le sens qui augmente le nombre de moles gazeuses.

Applications

Exercice 1 :

On considère l'équilibre de dissociation du trioxyde de soufre :



Dans une enceinte close de volume $V = 10 \text{ L}$, on enferme une quantité de matière $n_0 = 1 \text{ mol}$ de trioxyde de soufre SO_3 (gazeux) à la température $\theta = 130^\circ \text{C}$.

A l'équilibre chimique, le taux d'avancement final de la réaction est $\tau_f = 2 \cdot 10^{-3}$.

1⁰) Dresser le tableau descriptif de l'évolution de l'avancement x de la réaction au cours du temps.

2⁰) a - Montrer que la constante d'équilibre K de cette réaction s'exprime par : $K = \frac{n_0 \cdot \tau_f^3}{2 \cdot V \cdot (1 - \tau_f)^2}$

b - Calculer la valeur de K à la température $\theta = 130^\circ \text{C}$.

3⁰) Sous une pression P constante, on a mesuré le taux d'avancement final de cette réaction à différentes températures. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-joint :

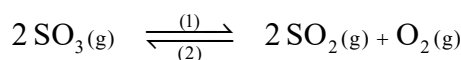
$\theta (^\circ \text{C})$	130	313	427
τ_f	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$

a - Comment, d'après ces mesures, peut-on conclure que la température est un facteur d'équilibre ?

b - Déterminer le caractère énergétique de la réaction de dissociation de SO_3 .

4⁰) Préciser, en justifiant la réponse, l'effet d'une augmentation de pression, à température constante, sur l'état d'équilibre.

Réponse :



1⁰)

Equation chimique		$2 \text{SO}_3 \rightleftharpoons 2 \text{SO}_2 + \text{O}_2$		
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)		
Initial	0	n_0	0	0
Intermédiaire	x	$n_0 - 2x$	$2x$	x
final	$x_f = 10^{-3}$	$998 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}

$$\begin{cases} \tau_f = 2 \cdot 10^{-3} \\ x_{\max} = \frac{n_0}{2} = \frac{1}{2} \text{ mol} \end{cases} \xrightarrow{\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}}} x_f = \tau_f \cdot x_{\max} = \tau_f \cdot \frac{n_0}{2} \text{ et } x_f = 10^{-3} \text{ mol}$$

$$2^0) \text{ a - } K = \frac{[\text{SO}_2]_{\text{eq}}^2 \cdot [\text{O}_2]_{\text{eq}}}{[\text{SO}_3]_{\text{eq}}^2} = \frac{\left(\frac{2x_f}{V}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_f}{V}\right)}{\left(\frac{n_0 - 2x_f}{V}\right)^2} = \frac{4x_f^3}{V \cdot (n_0 - 2x_f)^2} = \frac{4\left(\frac{\tau_f \cdot n_0}{2}\right)^3}{V \cdot \left(n_0 - 2 \cdot \frac{\tau_f \cdot n_0}{2}\right)^2} = \frac{\frac{4}{8} \cdot n_0^3 \cdot \tau_f^3}{V \cdot n_0^2} = \frac{n_0 \cdot \tau_f^3}{2 \cdot V \cdot (1 - \tau_f)^2}$$

$$\text{b - } K = \frac{1 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^3}{2 \cdot 10 \cdot (1 - 2 \cdot 10^{-3})^2} \text{ et } K = 4 \cdot 10^{-7} \text{ à } 130^\circ \text{C}.$$

3⁰) a - D'après le tableau de mesures, si la température varie $\rightarrow \tau_f$ varie $\rightarrow K$ varie $\rightarrow$ déplacement de l'équilibre. On en déduit que la température est un facteur d'équilibre.

b - Si θ augmente $\rightarrow \tau_f$ augmente $\rightarrow K$ augmente $\rightarrow$ déplacement de l'équilibre dans le sens direct

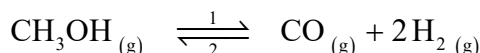
or si θ augmente $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ déplacement de l'équilibre dans le sens endothermique

On en déduit que le sens direct (correspondant à la dissociation de SO_3) est endothermique.

4⁰) D'après la loi de modération, une augmentation de pression, à température constante, déplace l'équilibre chimique dans le sens qui tend à minimiser le nombre de moles gazeuses.
 Dans le cas présent, une augmentation de pression, à température constante, déplace l'équilibre chimique dans le sens inverse.

Exercice 2 :

On considère la réaction limitée de dissociation du méthanol :



1⁰) Exprimer la fonction des concentrations π en fonction des quantités de matière des constituants du système chimique et du volume du mélange gazeux.

2⁰) Dans une enceinte de volume $V = 5\text{L}$, initialement vide, on introduit une mole de CH_3OH gazeux.

La température est maintenue constante $\theta_1 = 225^\circ\text{C}$.

A l'équilibre chimique, le taux d'avancement final de la réaction et $\tau_f = 0,60$.

a - Dresser le tableau descriptif de l'évolution de l'avancement x de la réaction au cours du temps.

b - Déterminer la composition molaire du système à l'équilibre chimique

c - Calculer la valeur de la constante d'équilibre K_1 .

3⁰) Quel est l'effet sur l'équilibre, à température constante :

a - d'une compression du mélange gazeux ?

b - d'un ajout d'une quantité de CO à volume constant ?

4⁰) On réalise l'expérience à la température $\theta_2 = 200^\circ\text{C}$, la constante d'équilibre est $K_2 = 2,40 \cdot 10^{-3}$.

Déduire, en le justifiant, le caractère énergétique de la réaction de dissociation de CH_3OH gazeux.

Réponse :

$$1^0) \quad \pi = \frac{[\text{CO}] \cdot [\text{H}_2]^2}{[\text{CH}_3\text{OH}]} = \frac{\frac{n_{\text{CO}}}{V} \cdot \frac{n_{\text{H}_2}^2}{V^2}}{\frac{n_{\text{CH}_3\text{OH}}}{V}} \longrightarrow \pi = \frac{1}{V^2} \cdot \frac{n_{\text{CO}} \cdot n_{\text{H}_2}^2}{n_{\text{CH}_3\text{OH}}}$$

2⁰) a -

Equation chimique		$\text{CH}_3\text{OH} \rightleftharpoons \text{CO} + 2\text{H}_2$		
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)		
Initial	0	1	0	0
Intermédiaire	x	$1 - x$	x	$2x$
final	x_f	$1 - x_f$	x_f	$2x_f$

$$b - \tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}} \rightarrow x_f = \tau_f \cdot x_{\max} \xrightarrow{x_{\max}=1 \text{ mol}} x_f = 0,6 \cdot 1 \text{ et } x_f = 0,6 \text{ mol.}$$

$$n_f(\text{CH}_3\text{OH}) = 1 - x_f = 1 - 0,6 \text{ et } n_f(\text{CH}_3\text{OH}) = 0,4 \text{ mol.}$$

$$n_f(\text{CO}) = x_f = 0,6 \text{ et } n_f(\text{CO}) = 0,4 \text{ mol.}$$

$$n_f(\text{H}_2) = 2x_f = 2 \cdot 0,6 \text{ et } n_f(\text{H}_2) = 1,2 \text{ mol}$$

$$c - K = \pi_{\text{eq}} \rightarrow K = \frac{1}{(5)^2} \cdot \frac{(0,6) \cdot (1,2)^2}{(0,4)} \text{ et } K = 86,4 \cdot 10^{-3}.$$

3⁰) a - Compression du mélange $\rightarrow$ augmentation de la pression $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens qui minimise le nombre de moles gazeuses $\rightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens inverse.

b - On ajoute CO $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens qui s'oppose à la perturbation $\rightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens inverse.

4⁰) Si θ diminue $\rightarrow$ K diminue $\longrightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens inverse.

Si θ diminue $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens exothermique.

Donc le sens inverse est exothermique et par conséquent la dissociation de CH_3OH est endothermique.

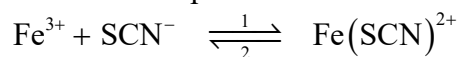
Exercice 3 :

On prépare une solution (S) en ajoutant à un volume $V = 0,1 \text{ L}$ d'une solution de chlorure de fer III (FeCl_3) de concentration molaire $C = 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$ quelques cristaux de thiocyanate de potassium KSCN correspondant à

$n = 10^{-3} \text{ mol}$ de l'ion thiocyanate SCN^- . L'ajout est supposé sans variation de volume.

La solution (S) prend alors une couleur rouge sang suite à la formation d'un complexe de formule $\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}$.

L'équilibre correspondant à la formation de ce complexe est :



1⁰) a - Montrer que la quantité de matière initiale de l'ion Fe^{3+} est $n = 10^{-3} \text{ mol}$.

b - Dresser le tableau d'avancement de la réaction relatif au système chimique étudié.

2⁰) Sachant que le taux d'avancement final de la réaction est $\tau_f = 0,73$:

a - Déterminer la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

b - Ecrire l'expression de la fonction des concentrations π relative à la formation du complexe $\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}$.

c - Montrer que la constante d'équilibre s'exprime par $K = 10^2 \cdot \frac{\tau_f}{(1 - \tau_f)^2}$. Calculer la valeur de K.

3⁰) a - Le système chimique étant en équilibre, on ajoute à la solution (S), sans pratiquement variation de volume, quelques cristaux de KSCN.

La couleur de la solution devient-elle plus foncée ou plus claire ? Justifier la réponse.

b - On augmente la température de la solution (S), on remarque alors que sa couleur devient plus claire.

En déduire si la réaction étudiée est exothermique ou endothermique. Justifier la réponse.

c - La variation de pression influe-t-elle sur le système chimique à l'équilibre ? Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰) a - $n(\text{Fe}^{3+}) = C.V.$ A.N : $n(\text{Fe}^{3+}) = 10^{-2} \cdot 0,1$ et $n(\text{Fe}^{3+}) = n = 10^{-3} \text{ mol}$.

b -

Equation de la réaction		$\text{Fe}^{2+} + \text{SCN}^- \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{SCN})^{2+}$		
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)		
Initial (t = 0)	0	10^{-3}	10^{-3}	0
Intermédiaire (t)	x	$10^{-3} - x$	$10^{-3} - x$	x
Final	x_f	$10^{-3} - x_f$	$10^{-3} - x_f$	x_f

2⁰) a - $\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}} \rightarrow x_f = \tau_f \cdot x_{\max} \xrightarrow[x_{\max} = 10^{-3} \text{ mol}]{10^{-3} - x_{\max} = 0} x_f = 0,73 \cdot 10^{-3}$ et $x_f = 0,73 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$.

b - $\pi = \frac{[\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}]}{[\text{Fe}^{3+}] \cdot [\text{SCN}^-]}$.

c - $\pi_{\text{eq}} = K \rightarrow K = \frac{[\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} \cdot [\text{SCN}^-]_{\text{eq}}} \cdot K = \frac{\left(\frac{x_f}{V}\right)}{\left(\frac{10^{-3} - x_f}{V}\right) \cdot \left(\frac{10^{-3} - x_f}{V}\right)} \text{ et } K = V \cdot \frac{x_f}{(10^{-3} - x_f)^2}$

$K = V \cdot \frac{\tau_f \cdot x_{\max}}{(10^{-3} - \tau_f \cdot x_{\max})^2} \xrightarrow{x_{\max} = 10^{-3} \text{ mol}} K = \frac{V}{10^{-3}} \cdot \frac{\tau_f}{(1 - \tau_f)^2} \xrightarrow{V = 0,1 \text{ L}} K = 10^2 \cdot \frac{\tau_f}{(1 - \tau_f)^2}$

A.N : $K = 10^2 \cdot \frac{0,73}{(1 - 0,73)^2}$ et $K \approx 10^3$.

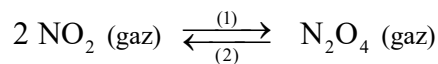
- 2⁰) a - On ajoute KSCN $\rightarrow$ $n(\text{SCN}^-)$ augmente $\rightarrow [\text{SCN}^-]$ augmente $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens direct $\rightarrow [\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}]_{\text{eq}}$ augmente $\rightarrow$ la couleur de la solution devient plus foncée.
- b - Si la température augmente $\rightarrow$ la couleur de la solution devient plus claire $\rightarrow [\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}]_{\text{eq}}$ diminue $\rightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens inverse.

Si la température augmente $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens endothermique. La réaction inverse est donc endothermique et par conséquent la réaction étudiée (sens direct) est exothermique.

c - La variation de pression n'influe pas sur l'état d'équilibre atteint car le système chimique étudié ne contient pas de constituants gazeux.

Exercice 4 :

On étudie la réaction de formation du tétraoxyde de diazote à partir du dioxyde d'azote:



Dans un récipient de volume constant $V = 15 \text{ L}$, on introduit $n_0 = 1 \text{ mol}$ de NO_2 .

Le système est maintenu à une température θ_1 sous une pression P_1 .

Lorsque l'équilibre dynamique est atteint, le nombre total de moles de gazeuses est $0,6 \text{ mol}$.

1⁰) a - Montrer que l'avancement final de la réaction est $x_f = 0,4 \text{ mol}$.

b - En déduire la valeur du taux d'avancement final τ_f de la réaction.

2⁰) a - Etablir l'expression de la constante d'équilibre K en fonction de n_0 , V et x_f .

b - Calculer la valeur de K à la température θ_1 .

3⁰) A l'équilibre et à la même température θ_1 , on ajoute $0,4 \text{ mole}$ de N_2O_4 .

a - Dans quel sens l'équilibre se déplace-t-il ? Justifier la réponse

b - En déduire la composition du mélange réactionnel lorsque le nouvel état d'équilibre est atteint.

4⁰) A une température $\theta_2 > \theta_1$ et sous la pression P_1 , la constante d'équilibre prend une valeur $K_2 < K_1$.

Préciser, en le justifiant, le caractère énergétique (exothermique, endothermique ou athermique) de la réaction étudiée.

5⁰) Donner, en le justifiant, le sens de déplacement de l'équilibre lorsque :

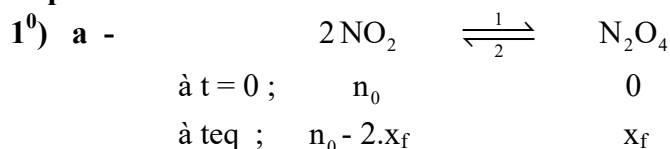
a - On élève la température du milieu réactionnel.

b - On diminue la pression du système chimique.

6⁰) a - A la même température θ_1 et dans le même volume V , on réalise un mélange contenant $0,3 \text{ mol}$ de NO_2 et $0,9 \text{ mol}$ de N_2O_4 . Montrer que le système chimique réalisé est à l'état d'équilibre.

b - Pourquoi l'équilibre chimique est-il dit dynamique ?

Réponse :



$$n_{\text{eq}}(\text{NO}_2) + n_{\text{eq}}(\text{N}_2\text{O}_4) = 0,6 \text{ mol} \rightarrow (n_0 - 2.x_f) + (x_f) = 0,6 \rightarrow n_0 - x_f = 0,6 \xrightarrow{n_0=1\text{mol}} x_f = 0,4 \text{ mol}.$$

$$\text{b - } \tau_f = \frac{x_f}{x_{\text{max}}}. \text{ On a : } n_0 - 2.x_{\text{max}} = 0 \xrightarrow{n_0=1\text{mol}} x_{\text{max}} = 0,5 \text{ mol}.$$

$$\text{A.N : } \tau_f = \frac{0,4}{0,5} \text{ et } \tau_f = 0,8 \text{ ou } \tau_f = 80\%$$

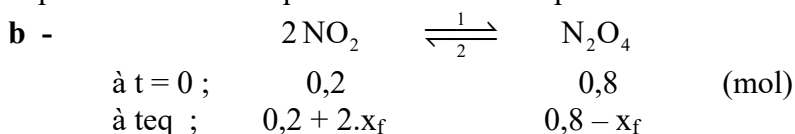
$$2^0) \text{ a - } K = \frac{[N_2O_4]_{eq}}{[NO_2]_{eq}^2} \rightarrow K = \frac{\frac{n_{eq}(N_2O_4)}{V}}{\left(\frac{n_{eq}(NO_2)}{V}\right)^2} \rightarrow K = V \cdot \frac{n_{eq}(N_2O_4)}{n_{eq}^2(NO_2)} \text{ et } K = V \cdot \frac{x_f}{(n_0 - 2x_f)^2}.$$

$$\text{b - } K = 15 \cdot \frac{0,4}{(1 - 2 \cdot 0,4)^2} \text{ et } K = 150.$$

$$3^0) \text{ a - } \pi = V \cdot \frac{n_{eq}(N_2O_4) + 0,4}{n_{eq}^2(NO_2)} \rightarrow \pi = 15 \cdot \frac{0,4 + 0,4}{(0,2)^2} \text{ et } \pi = 300.$$

$\pi > K$ donc l'équilibre se déplace dans le sens inverse.

Remarque : A l'équilibre, on ajoute un produit de la réaction. D'après la loi de modération, l'équilibre se déplace dans le sens qui tend à modérer la perturbation donc l'équilibre se déplace dans le sens inverse.



$$K = V \cdot \frac{n_{eq}(N_2O_4)}{n_{eq}^2(NO_2)} \rightarrow 150 = 15 \cdot \frac{(0,8 - x_f)}{(0,2 + 2x_f)^2} \rightarrow 600 \cdot x_f^2 + 135 \cdot x_f - 6 = 0$$

$$\Delta = 135^2 + 4 \cdot 600 \cdot 6 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 180,62 \rightarrow \begin{cases} x_f = \frac{-135 + 180,62}{2 \cdot 600} \text{ et } x_f = 38 \cdot 10^{-3} \text{ mol.} \\ x_f = \frac{-135 - 180,62}{2 \cdot 600} < 0 \text{ à rejeter.} \end{cases}$$

$$n_{eq}(N_2O_4) = 0,8 - 0,038 \text{ et } n_{eq}(N_2O_4) = 0,762 \text{ mol.}$$

$$n_{eq}(NO_2) = 0,2 + 2 \cdot 0,038 \text{ et } n_{eq}(NO_2) = 0,276 \text{ mol.}$$

4⁰) Si la température augmente $\rightarrow$ la constante d'équilibre K diminue
 $\rightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens inverse.

Si la température augmente $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens endothermique.
 La réaction inverse est donc endothermique et par conséquent la réaction étudiée (sens direct) est exothermique.

5⁰) a - Si la température augmente $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens endothermique.
 $\rightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens inverse.

Remarque : la réaction étudiée (sens direct) est exothermique et par conséquent la réaction inverse est donc endothermique.

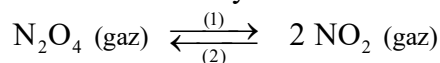
b - Si la pression diminue $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens à maximiser le nombre de moles gazeuses $\rightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens inverse.

$$6^0) \text{ a - } \pi = V \cdot \frac{n(N_2O_4)}{n^2(NO_2)} \rightarrow \pi = 15 \cdot \frac{(0,9)}{(0,3)^2} \text{ et } \pi = 150. \pi = K \rightarrow \text{le système chimique est à l'état d'équilibre.}$$

b - L'équilibre chimique est dit dynamique car à l'équilibre, les deux réactions (dans le sens direct et le sens inverse) continuent d'avoir lieu simultanément et avec la même vitesse.

Exercice 5 :

On considère la réaction de dissociation du tétraoxyde de diazote :



Dans un récipient de volume constant $V_0 = 2,4 \text{ L}$, on introduit initialement $n_0 = 0,1 \text{ mol}$ de N_2O_4 .

1⁰) Le système est maintenu à une température $\theta_1 = 25^\circ\text{C}$ et sous une pression P_1 .

Lorsque l'équilibre dynamique est atteint, le nombre de mole de N_2O_4 restant est $n_{eq} = 8,49 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

a - Exprimer l'avancement final x_f de la réaction en fonction de n_0 et n_{eq} . Calculer sa valeur.

b - Etablir l'expression de la constante d'équilibre K de la réaction considérée en fonction de n_0 , V_0 et x_f .

Calculer la valeur K_1 de la constante d'équilibre à la température θ_1 .

c - On définit le coefficient de dissociation du tétraoxyde de diazote par :

$$\alpha = \frac{\text{nombre de moles de } N_2O_4 \text{ dissociées}}{\text{nombre de moles de } N_2O_4 \text{ initiales}}$$

Calculer sa valeur α_1 à la température θ_1 .

2⁰) A une température $\theta_2 = 100^\circ C$ et sous la pression P_1 , la constante d'équilibre prend une valeur $K_2 = 0,5$.

a - Préciser, en le justifiant, le caractère énergétique (endothermique, exothermique ou athermique) de la réaction de dissociation du tétraoxyde de diazote.

b - Sachant que la constante d'équilibre peut s'exprimer par $K = 4 \cdot \frac{n_0}{V_0} \cdot \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)}$, déterminer la valeur α_2 du

coefficient de dissociation à la température θ_2 .

c - En déduire la nouvelle composition molaire du système chimique, à la température θ_2 , lorsque l'équilibre est atteint.

3⁰) On maintient la température θ_2 et on augmente la pression jusqu'à $P_2 > P_1$.

a - Cette opération influe-t-elle l'état d'équilibre atteint ? justifier votre réponse.

b - A la température θ_2 , on fait varier le volume du récipient et pour une valeur V , on retrouve la même composition molaire du système chimique à l'équilibre que celle obtenue à la température θ_1 .

Calculer la valeur V .

Réponse :



à $t = 0$; n_0 0

à t_{eq} ; $n_0 - x_f$ $2 \cdot x_f$

$$n_{eq}(N_2O_4) = 8,49 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \xrightarrow{n_{eq}(N_2O_4) = n_0 - x_f} x_f = n_0 - n_{eq}(N_2O_4)$$

$$\xrightarrow{n_0 = 0,1 \text{ mol}} x_f = 10 \cdot 10^{-2} - 8,49 \cdot 10^{-2} \rightarrow x_f = 1,51 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

b - A l'équilibre : $\pi_{eq} = K \rightarrow K = \frac{[NO_2]_{eq}^2}{[N_2O_4]_{eq}} \rightarrow K = \frac{\left(\frac{n_{eq}(NO_2)}{V_0}\right)^2}{\frac{n_{eq}(N_2O_4)}{V_0}} \rightarrow K = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{n_{eq}^2(NO_2)}{n_{eq}(N_2O_4)}$

donc : $K = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{(2x_f)^2}{(n_0 - x_f)}$ et $K = \frac{4}{V_0} \cdot \frac{x_f^2}{(n_0 - x_f)}$. A.N: $K_1 = \frac{4}{2,4} \cdot \frac{(1,51 \cdot 10^{-2})^2}{(8,49 \cdot 10^{-2})}$ et $K_1 = 4,48 \cdot 10^{-3}$

c - $\alpha_1 = \frac{x_f}{n_0} \rightarrow \alpha_1 = \frac{1,51 \cdot 10^{-2}}{0,1}$ et $\alpha_1 = 0,151$ ou $\alpha_1 = 15,1\%$.

2⁰) a - A $\theta_1 = 25^\circ C$, $K_1 = 4,48 \cdot 10^{-3}$ et à $\theta_2 = 100^\circ C$, $K_2 = 0,5$.

Si θ augmente, K augmente $\rightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens direct (sens 1)

Si θ augmente $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens endothermique

On en conclue que le sens direct est endothermique et par conséquent la réaction de dissociation du tétraoxyde de diazote est endothermique.

b - $K_2 = 4 \cdot \frac{n_0}{V_0} \cdot \frac{\alpha_2^2}{(1-\alpha_2)} \rightarrow \frac{\alpha_2^2}{(1-\alpha_2)} = \frac{K_2 \cdot V_0}{4 \cdot n_0} \rightarrow \frac{\alpha_2^2}{(1-\alpha_2)} = \frac{0,5 \cdot 2,4}{4 \cdot 0,1}$ et $\frac{\alpha_2^2}{(1-\alpha_2)} = 3$

$$\frac{\alpha_2^2}{(1-\alpha_2)} = 3 \rightarrow \alpha_2^2 = 3 - 3\alpha_2 \text{ et } \alpha_2^2 + 3\alpha_2 - 3 = 0$$

$$\Delta = 3^2 + 4.3 = 21 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 4,583 \rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{-3-4,583}{2} & \text{et } \alpha_2 = -3,792 \text{ à rejeter car } < 0 \\ \alpha_2 = \frac{-3+4,583}{2} & \text{et } \alpha_2 = 0,791 \text{ ou } \alpha_2 = 79,1\% \end{cases}$$

$$c - \alpha_2 = \frac{x_f}{n_0} \rightarrow x_f = \alpha_2 \cdot n_0 \rightarrow x_f = 0,791 \cdot 0,1 \text{ et } x_f = 7,91 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

$$n_{\text{eq}}(\text{N}_2\text{O}_4) = n_0 - x_f \rightarrow n_{\text{eq}}(\text{N}_2\text{O}_4) = 10 \cdot 10^{-2} - 7,91 \cdot 10^{-2} \text{ et } n_{\text{eq}}(\text{N}_2\text{O}_4) = 2,09 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

$$n_{\text{eq}}(\text{NO}_2) = 2 \cdot x_f \rightarrow n_{\text{eq}}(\text{NO}_2) = 2 \cdot 7,91 \cdot 10^{-2} \text{ et } n_{\text{eq}}(\text{NO}_2) = 15,82 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

3⁰) a - $P_2 > P_1$: D'après la loi de modération, une élévation de pression déplace l'équilibre dans le sens à minimiser le nombre de moles gazeuses. Donc l'équilibre se déplace dans le sens inverse (sens 2).

$$b - \text{A la température } \theta_2, K_2 = 4 \cdot \frac{n_0}{V_0} \cdot \frac{\alpha_2^2}{(1-\alpha_2)}$$

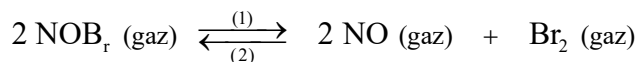
Si on veut la même composition à l'équilibre que celle obtenue à la température θ_1 (α_1), il faut faire varier le volume (V)

$$\rightarrow K_2 = 4 \cdot \frac{n_0}{V} \cdot \frac{\alpha_1^2}{(1-\alpha_1)} \text{ Or } K_1 = 4 \cdot \frac{n_0}{V_0} \cdot \frac{\alpha_1^2}{(1-\alpha_1)} \rightarrow \frac{K_2 \cdot V}{4 \cdot n_0} = \frac{K_1 \cdot V_0}{4 \cdot n_0} \rightarrow K_2 \cdot V = K_1 \cdot V_0 \text{ et } V = \frac{K_1 \cdot V_0}{K_2}$$

$$A.N : V = \frac{4,48 \cdot 10^{-3} \cdot 2,4}{0,5} \text{ et } V = 21,6 \cdot 10^{-3} \text{ L ou } V = 21,6 \text{ mL.}$$

Exercice 6 :

La dissociation du bromure de nitrosyle NOBr en monoxyde d'azote NO et dibrome Br₂ est modélisée par l'équation chimique suivante :



Dans un récipient de volume constant $V = 15 \text{ L}$ et à une température θ_1 , on introduit 0,5 mol de NOBr et 0,2 mol de Br₂. Lorsque l'équilibre chimique est atteint, le nombre total de moles gazeuses contenues dans le récipient est 0,75 mol.

1⁰) a - Justifier que le sens d'évolution spontané de la réaction vers l'état d'équilibre est le sens direct.

b - Calculer la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

c - Vérifier que le taux d'avancement final de la réaction est $\tau_{f1} = 0,2$.

d - Préciser la composition molaire du mélange à l'équilibre.

2⁰) Déterminer la valeur de la constante d'équilibre K_1 de la réaction étudiée à la température θ_1 .

3⁰) On élève la température du mélange réactionnel à une valeur θ_2 supérieure à θ_1 . On remarque qu'un nouvel état d'équilibre s'établit et le taux d'avancement final de la réaction devient $\tau_{f2} = 0,1$.

a - Donner, en justifiant la réponse, le sens de déplacement de l'équilibre chimique.

b - Soit K_2 la constante d'équilibre de la réaction étudiée à la température θ_2 .

Comparer, sans calcul, les valeurs de K_1 et de K_2 .

c - En déduire le caractère énergétique de la réaction de dissociation du bromure de nitrosyle.

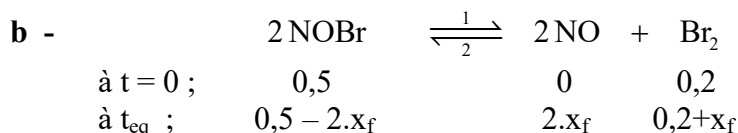
4⁰) Préciser l'effet d'une augmentation de pression, à température constante, sur l'état d'équilibre atteint.

Réponse :



$$\text{A } t = 0, \pi_i = \frac{[\text{NO}]_i^2 \cdot [\text{Br}]_i}{[\text{NOBr}]_i^2} \xrightarrow[\text{[NO]}_i = \sqrt{0}]{n_i(\text{NO})=0} \pi_i = 0 \xrightarrow{\forall K, K > 0} \pi_i < K$$

la réaction évolue spontanément dans le sens direct.



On a : $n_{\text{eq}}(\text{NOBr}) + n_{\text{eq}}(\text{NO}) + n_{\text{eq}}(\text{Br}_2) = 0,75 \rightarrow (0,5 - 2.x_f) + (2.x_f) + (0,2 + x_f) = 0,75$
 $\rightarrow 0,7 + x_f = 0,75 \rightarrow x_f = 0,75 - 0,7 \text{ et } x_f = 0,05 \text{ mol.}$

c - $\tau_{f1} = \frac{x_f}{x_{\text{max}}} \xrightarrow[x_{\text{max}} = 0,25 \text{ mol}]{0,5 - 2.x_{\text{max}} = 0} \tau_{f1} = \frac{0,05}{0,25} \text{ et } \tau_{f1} = 0,2$

d - $n_{\text{eq}}(\text{NOBr}) = 0,5 - 2.x_f = 0,5 - 2.0,05 \text{ et } n_{\text{eq}}(\text{NOBr}) = 0,4 \text{ mol.}$

$n_{\text{eq}}(\text{NO}) = 2.x_f = 2.0,05 \text{ et } n_{\text{eq}}(\text{NO}) = 0,1 \text{ mol.}$

$n_{\text{eq}}(\text{Br}_2) = 0,2 + x_f = 0,2 + 0,05 \text{ et } n_{\text{eq}}(\text{Br}_2) = 0,25 \text{ mol.}$

2⁰) A l'équilibre : $\pi_{\text{eq}} = K \rightarrow K_1 = \frac{[\text{NO}]_{\text{eq}}^2 \cdot [\text{Br}_2]_{\text{eq}}}{[\text{NOBr}]_{\text{eq}}^2} \rightarrow K_1 = \frac{\left(\frac{n_{\text{eq}}(\text{NO})}{V}\right)^2 \cdot \left(\frac{n_{\text{eq}}(\text{Br}_2)}{V}\right)}{\left(\frac{n_{\text{eq}}(\text{NOBr})}{V}\right)^2}$

$\rightarrow K_1 = \frac{1}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}^2(\text{NO}) \cdot n_{\text{eq}}(\text{Br}_2)}{n_{\text{eq}}^2(\text{NOBr})} \quad \text{A.N: } K_1 = \frac{1}{15} \cdot \frac{(0,1)^2 \cdot (0,25)}{(0,4)^2} \text{ et } K_1 = 1,04.10^{-3}$

3⁰) a - $\tau_{f2} \prec \tau_{f1} \xrightarrow[x_{\text{max}}]{\tau_f = x_f} x_{f2} \prec x_{f1} \text{ l'équilibre s'est alors déplacé dans le sens inverse.}$

b - L'équilibre s'est déplacé dans le sens inverse donc la valeur de K a diminuée $\rightarrow K_2 \prec K_1$.

c - Si θ augmente, K diminue $\rightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens inverse (sens 2)

Si θ augmente $\xrightarrow{\text{loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens endothermique

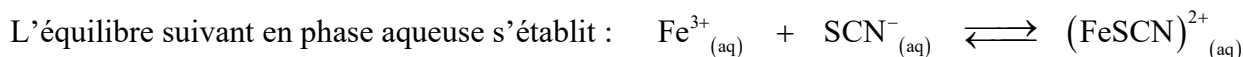
On en conclue que le sens inverse est endothermique.

Par conséquent la réaction de dissociation du NOBr (sens direct) est exothermique.

4⁰) D'après la loi de modération, une élévation de pression déplace l'équilibre dans le sens à minimiser le nombre de moles gazeuses. Donc l'équilibre se déplace dans le sens inverse (sens 2).

Exercice 7 :

On prépare un mélange M constitué initialement d'un volume $V_1 = 30 \text{ mL}$ d'une solution aqueuse de thiocyanate de sodium : ($\text{NaSCN} \rightarrow \text{Na}^+ + \text{SCN}^-$) de concentration $C_1 = 0,4 \text{ mol.L}^{-1}$ et d'un volume $V_2 = 20 \text{ mL}$ d'une solution aqueuse de sulfate de fer III : ($\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3 \rightarrow 2\text{Fe}^{3+} + 3\text{SO}_4^{2-}$) de concentration $C_2 = 0,3 \text{ mol.L}^{-1}$.



L'ion complexe thiocyanatofer III $(\text{FeSCN})^{2+}$ est de couleur rouge sang.

La constante d'équilibre de la réaction étudiée, à une température θ donnée, est $K = 10^3$.

1⁰) Donner l'expression de la loi d'action de masse relative à cet équilibre.

2⁰) A l'équilibre, la concentration de l'ion complexe est $\left[(\text{FeSCN})^{2+}\right]_{\text{eq}} = 22,5.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

a - Déterminer la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

b - Calculer la valeur du taux d'avancement final τ_f de la réaction.

c - Vérifier que : $\left[\text{Fe}^{3+}\right]_{\text{eq}} = \left[\text{SCN}^{-}\right]_{\text{eq}} = 1,5.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

3⁰) Montrer que le taux d'avancement τ_f de la réaction vérifie l'équation : $100.\tau_f^2 - 200,42.\tau_f + 100 = 0$.

4⁰) A l'équilibre, on ajoute au mélange, sans changement de volume, $n = 75 \cdot 10^{-5}$ mol de soude NaOH.

Une réaction de précipitation, instantanée et totale, a lieu : $\text{Fe}^{3+}_{(\text{aq})} + 3\text{OH}^{-}_{(\text{aq})} \longrightarrow \text{Fe}(\text{OH})_{3(\text{s})}$.

a - Prévoir, d'après la loi de modération, le sens de déplacement de l'équilibre.

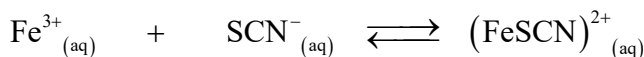
b - Calculer la valeur de la fonction des concentrations π juste après l'ajout de soude. Déduire alors le sens de déplacement de l'équilibre.

c - Dire, en le justifiant, si la couleur rouge sang de la solution devient plus intense ou moins intense.

5⁰) En chauffant le système chimique à l'équilibre, on constate que la couleur rouge sang s'intensifie.

Préciser, en le justifiant, le caractère énergétique de la réaction de formation de l'ion complexe thiocyanatofer III.

Réponse :



$$\text{A } t = 0 \quad n_0(\text{Fe}^{3+}) \quad n_0(\text{SCN}^{-}) \quad 0$$

$$\text{A } t_{\text{eq}} \quad n_0(\text{Fe}^{3+}) - x_f \quad n_0(\text{SCN}^{-}) - x_f \quad x_f$$

$$1^0) K = \frac{[\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} \cdot [\text{SCN}^{-}]_{\text{eq}}}$$

$$2^0) \text{ a - } [\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{x_f}{(V_1 + V_2)} \rightarrow x_f = [\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}]_{\text{eq}} \cdot (V_1 + V_2).$$

$$\text{A.N : } x_f = 22,5 \cdot 10^{-2} \cdot (30 + 20) \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad x_f = 1,125 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

$$\text{b - } \begin{cases} n_0(\text{Fe}^{3+}) = 2 \cdot C_2 \cdot V_2 \rightarrow n_0(\text{Fe}^{3+}) = 2 \cdot 0,3 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \\ n_0(\text{SCN}^{-}) = C_1 \cdot V_1 \rightarrow n_0(\text{SCN}^{-}) = 0,4 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \end{cases} \xrightarrow{n_0(\text{Fe}^{3+}) = n_0(\text{SCN}^{-})} x_{\text{max}} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

$$\tau_f = \frac{x_f}{x_{\text{max}}}. \quad \text{A.N : } \tau_f = \frac{1,125 \cdot 10^{-2}}{1,2 \cdot 10^{-2}} \quad \text{et} \quad \tau_f = 93,75 \cdot 10^{-2}.$$

$$\text{c - } n_0(\text{Fe}^{3+}) = n_0(\text{SCN}^{-}) = n_0 \rightarrow [\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} = [\text{SCN}^{-}]_{\text{eq}} = \frac{n_0 - x_f}{V_1 + V_2}.$$

$$\text{A.N : } [\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} = [\text{SCN}^{-}]_{\text{eq}} = \frac{(1,2 - 1,125) \cdot 10^{-2}}{(30 + 20) \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad [\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} = [\text{SCN}^{-}]_{\text{eq}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$3^0) K = \frac{[\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} \cdot [\text{SCN}^{-}]_{\text{eq}}} = \frac{\frac{x_f}{(V_1 + V_2)}}{\left[\frac{n_0 - x_f}{(V_1 + V_2)} \right]^2} = (V_1 + V_2) \cdot \frac{x_f}{(n_0 - x_f)^2} = (V_1 + V_2) \cdot \frac{x_f}{n_0^2 \cdot \left(1 - \frac{x_f}{n_0}\right)^2}$$

$$\rightarrow K = \frac{(V_1 + V_2)}{n_0} \cdot \frac{\frac{x_f}{n_0}}{\left(1 - \frac{x_f}{n_0}\right)^2} \xrightarrow{\tau_f = \frac{x_f}{x_{\text{max}}} = \frac{x_f}{n_0}} K = \frac{(V_1 + V_2)}{n_0} \cdot \frac{\tau_f}{(1 - \tau_f)^2} \rightarrow \tau_f = \frac{n_0 \cdot K}{(V_1 + V_2)} (1 - 2 \cdot \tau_f + \tau_f^2)$$

$$\rightarrow \tau_f^2 - \left[\frac{(V_1 + V_2)}{n_0 \cdot K} + 2 \right] \cdot \tau_f + 1 = 0 \xrightarrow{\frac{(V_1 + V_2)}{n_0 \cdot K} + 2 = \frac{(30 + 20) \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3} + 2 = 200,42 \cdot 10^{-2}} 100 \cdot \tau_f^2 - 200,42 \cdot \tau_f + 100 = 0$$

4⁰) a - On ajoute une solution de soude $\xrightarrow{\text{précipitation}}$ $n(\text{Fe}^{3+})$ diminue

$\xrightarrow{\text{la loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens inverse.

$$b - \pi = \frac{[\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Fe}^{3+}] \cdot [\text{SCN}^-]_{\text{eq}}} \quad \text{avec} \quad [\text{Fe}^{3+}] = \frac{n_{\text{eq}}(\text{Fe}^{3+}) - \frac{n}{3}}{(V_1 + V_2)} = [\text{Fe}^{3+}]_{\text{eq}} - \frac{n}{3 \cdot (V_1 + V_2)}$$

$$A.N : \pi = \frac{22,5 \cdot 10^{-2}}{\left(1,5 \cdot 10^{-2} - \frac{75 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot (30 + 20) \cdot 10^{-3}}\right) \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}} \quad \text{et} \quad \pi = 1500$$

$\pi > K \rightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens inverse.

c - L'équilibre se déplace dans le sens inverse $\rightarrow [\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}]$ diminue $\rightarrow$ la coloration devient moins intense.

d - Si θ augmente $\rightarrow$ la couleur rouge sang s'intensifie $\rightarrow$ l'équilibre se déplace dans le sens direct.

Si θ augmente $\xrightarrow{\text{La loi de modération}}$ l'équilibre se déplace dans le sens endothermique.

donc la réaction de formation de thiocyanatofer III (sens direct) est endothermique.

Etude d'un texte documentaire :

Exercice 1 :

L'histoire d'une synthèse

Fritz Haber (1868-1934), prix Nobel de chimie en 1918, et Carl Bosch (1874-1940) mirent au point la synthèse de l'ammoniac, en 1913, pour la société BASF.

L'équation de la synthèse s'écrit : $\text{N}_2(\text{g}) + 3 \text{H}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2 \text{NH}_3(\text{g})$

Mais à 25°C et sous une pression de 1 bar, leurs essais expérimentaux furent vains. Un problème se posait : le diazote réagissait trop lentement avec le dihydrogène ; l'ammoniac n'apparaissait pas.

Ils pensèrent à élever la température ; la transformation se faisait plus rapidement, mais un problème de rendement* se posait. Dans l'état final, la quantité d'ammoniac effectivement obtenue était très inférieure à celle que laissait espérer une transformation totale ; la transformation était donc limitée.

Ils pensèrent alors augmenter la pression (les réactifs étant des gaz). Le résultat fut concluant sur l'amélioration du rendement, mais il fallait atteindre des pressions de plus de 600 bars. Ils proposèrent alors un compromis : une température et une pression raisonnables (400°C, 200 bars) et l'emploi d'un catalyseur qui accélérât la transformation, sans améliorer toutefois son rendement.

<http://membres.lycos.fr/manuthibault/Terminale%>

$$* \text{rendement} = \frac{\text{nombre de moles réellement obtenues}}{\text{nombre de moles obtenues si la transformation était totale}}$$

Questions :

1⁰) Quels sont les deux grands problèmes auxquels étaient confrontés les chimistes lors de la synthèse de l'ammoniac ?

2⁰) a - Relever, à partir du texte, la phrase qui fait savoir que la réaction de synthèse de l'ammoniac est exothermique ? Justifier la réponse en utilisant la loi de modération.

b - Relever, à partir du texte, la phrase qui indique que la réaction de synthèse de l'ammoniac aboutit à un équilibre chimique.

3⁰) a - Quel est le facteur d'équilibre sur lequel ont agi les chimistes pour améliorer le rendement de la réaction de synthèse de l'ammoniac ?

b - Quel est le rôle du catalyseur employé dans la synthèse de l'ammoniac ?

Réponse :

1⁰) * A 25°C et sous une pression de 1 bar, un problème de **lenteur** de la réaction se pose !

* Si on augmente la température pour accélérer la réaction, un problème de **rendement** de la réaction se pose !

2⁰) a - « Ils pensèrent à élever la température ; la transformation se faisait plus rapidement, mais un problème de rendement se posait ».

S'il y a un problème de rendement, c'est que l'élévation de température a favorisée le sens inverse. Or l'élévation de température favorise le sens endothermique. On en déduit que la réaction de synthèse de l'ammoniac (dans le sens direct) est exothermique.

b - « Dans l'état final, la quantité d'ammoniac effectivement obtenue était très inférieure à celle que laissait espérer une transformation totale ; la transformation était donc limitée ».

Si la réaction directe est limitée, c'est qu'il y a une réaction inverse qui la limite. Lorsque l'état final est atteint, un équilibre chimique s'établit.

3⁰) a - Les chimistes ont agis sur la pression pour améliorer le rendement de la réaction (si élève la pression, la réaction de synthèse de l'ammoniac est favorisée).

b - Le catalyseur accélère la transformation (sans améliorer toutefois son rendement).

LES SOLUTIONS AQUEUSES D'ACIDES ET DE BASES

I / Rappels :

1⁰) Acides et bases dans la théorie de Brønsted - Lowry :

- Un monoacide est une molécule ou un ion susceptible de libérer un ion H^+ dans une réaction chimique.

On écrit formellement : $\text{Acide : } AH \longrightarrow H^+ + A^-$

- Une monobase est une molécule ou un ion susceptible de capter un ion H^+ dans une réaction chimique.

On écrit formellement : $\text{Base : } B + H^+ \longrightarrow BH^+$

Conséquence :



un acide réagit uniquement lorsqu'il est en présence d'une base et réciproquement .

Exemples :

- $NH_{3(g)} + HCl_{(g)} \longrightarrow NH_4Cl_{(s)}$: HCl est un acide et NH_3 est une base.
- $NaOH_{(s)} + NH_4Cl_{(s)} \longrightarrow NH_{3(g)} + H_2O + Na^+ + Cl^-$: NH_4^+ est un acide et OH^- est une base.

2⁰) Les couples acide - base :

Un acide AH , en perdant un proton H^+ , se transforme en base A^- .

On dit que A^- est la **base conjuguée** de l'acide AH .

La base A^- , en captant un proton H^+ , se transforme en acide AH .

On dit que AH est l'**acide conjugué** de la base A^- .

L'acide AH et sa base conjuguée A^- forment alors un **couple acide - base** : $\left(\frac{AH}{A^-} \right)$

On écrit formellement : $\left(\frac{AH}{A^-} \right) : \text{acide } AH \rightleftharpoons H^+ + A^- \text{ base}$

Exemples :

- $\left(\frac{CH_3COOH}{CH_3COO^-} \right)$: acide acétique $CH_3COOH \rightleftharpoons H^+ + CH_3COO^-$ ion acétate
- $\left(\frac{NH_4^+}{NH_3} \right)$: ion ammonium $NH_4^+ \rightleftharpoons H^+ + NH_3$ ammoniac
- $\left(\frac{H_3O^+}{H_2O} \right)$: ion hydronium $H_3O^+ \rightleftharpoons H^+ + H_2O$ eau
- $\left(\frac{H_2O}{OH^-} \right)$: eau $H_2O \rightleftharpoons H^+ + OH^-$ ion hydroxyde

Remarque :

L'eau peut se comporter comme un acide ou comme une base : c'est un **amphotère**.

3⁰) Les réactions acide - base :

Un acide réagit uniquement en présence d'une base et réciproquement.

Une réaction acide - base fait intervenir nécessairement deux couples acide - base.

Exemple : Dans la réaction acide - base : $CH_3COOH + NH_3 \rightleftharpoons CH_3COO^- + NH_4^+$, les couples mis

en jeu sont $\left(\frac{CH_3COOH}{CH_3COO^-} \right)$ et $\left(\frac{NH_4^+}{NH_3} \right)$.

Remarques :

- Les réactions acide - base sont spontanées, exothermiques et très rapides.
- Les réactions acide - base sont des réactions **par transfert d'ions H^+** .

II / Equilibre acide - base :

1⁰) Application de la loi d'action de masse :

Soient deux couples acide - base $\left(\frac{A_1H}{A_1^-} \right)$ et $\left(\frac{A_2H}{A_2^-} \right)$.

La réaction acide - base mettant en jeu ces deux couples est : $A_1H + A_2^- \xrightleftharpoons[(2)]{(1)} A_2H + A_1^-$

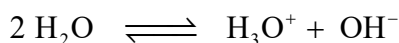
La loi d'action de masse s'écrit : $\pi_{eq} = \frac{[A_2H]_{eq} [A_1^-]_{eq}}{[A_1H]_{eq} [A_2^-]_{eq}} = K$

La réaction acide-base étant rapide, l'équilibre s'établit instantanément. On écrit alors : $K = \frac{[A_2H] \cdot [A_1^-]}{[A_1H] \cdot [A_2^-]}$.

- Si $K > 1$; A_1H est plus fort que $A_2H \rightarrow A_1^-$ est plus faible que A_2^- .
- Si $K < 1$; A_1H est plus faible que $A_2H \rightarrow A_1^-$ est plus fort que A_2^- .
- Si $K \approx 1$; les deux couples sont de forces équivalentes.

2⁰) Le produit ionique de l'eau :

Considérons la réaction d'auto dissociation de l'eau :



Le produit ionique de l'eau est défini par : $K_e = [H_3O^+][OH^-]$

La réaction d'ionisation propre de l'eau met en jeu les couples $\left(\frac{H_3O^+}{H_2O} \right)$ et $\left(\frac{H_2O}{OH^-} \right)$.

L'expression de K_e est l'expression usuelle de la constante d'équilibre associée à la réaction d'ionisation propre de l'eau.

Remarques :

- K_e ne dépend que de la température.
- $K_e = 10^{-14}$ à 25 °C
- D'après l'électroneutralité de l'eau : $[H_3O^+] = [OH^-] \rightarrow$ à 25 °C, $[H_3O^+] = [OH^-] = 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$.

3⁰) Notion de pH :

a - Définition :

En 1909, Sørensen a défini le pH d'une solution aqueuse par : $pH = \text{colog}_{10} [H_3O^+] = -\log_{10} [H_3O^+]$

où $[H_3O^+]$ est la concentration des ions H_3O^+ dans la solution (mol.L^{-1}).

Remarque :

Pour l'eau pure et à 25 °C, $pH = -\log_{10} [H_3O^+] \xrightarrow{[H_3O^+] = 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}} pH = -\log 10^{-7} \text{ et } pH = 7$

b - Echelle du pH :

• Solution aqueuse neutre :

Une solution aqueuse est dite neutre de point de vue acido-basique si à 25 °C son $pH = 7$.

$\rightarrow [H_3O^+] = [OH^-] = 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$.

• Solution aqueuse acide :

Une solution aqueuse est dite acide si à 25 °C son $pH < 7$.

$\rightarrow [H_3O^+] > 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ or $[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14} \rightarrow [OH^-] < 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$.

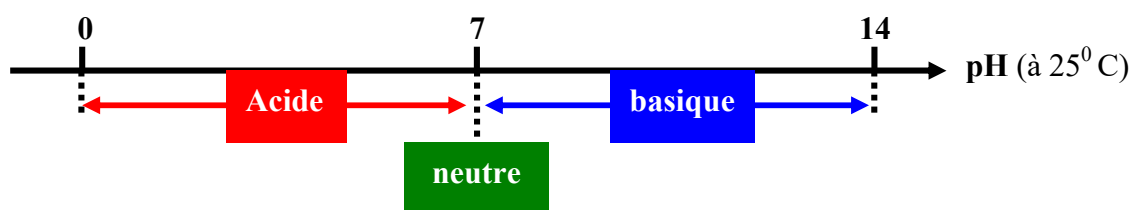
• Solution aqueuse basique :

Une solution aqueuse est dite basique si à 25 °C son $pH > 7$.

$\rightarrow [H_3O^+] < 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ or $[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14} \rightarrow [OH^-] > 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$.

c - Conséquence :

- Une solution aqueuse est d'autant plus acide que son pH est plus petit.
- Une solution aqueuse est d'autant plus basique que son pH est plus grand.



Application 1 :

On considère la réaction acide - base : $\text{HNO}_2 + \text{HCOO}^- \xrightleftharpoons[(2)]{(1)} \text{NO}_2^- + \text{HCOOH}$

1⁰) Quel sont les couples acide - base mis en jeu ?

2⁰) Donner l'expression de la loi d'action de masse relative à cette réaction.

3⁰) A l'équilibre on a $[\text{HNO}_2] = [\text{HCOO}^-] = 0,361 \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{NO}_2^-] = [\text{HCOOH}] = 0,639 \text{ mol.L}^{-1}$.

a - Calculer la constante d'équilibre K de cette réaction.

b - Comparer les forces des deux acides mis en jeu.

4⁰) Comparer les pH de deux solutions équimolaires de HNO_2 et de HCOOH .

Réponse :

1⁰) les couples mis en jeu sont $\left(\text{HNO}_2 / \text{NO}_2^- \right)$ et $\left(\text{HCOOH} / \text{HCOO}^- \right)$

2⁰) $\text{HNO}_2 + \text{HCOO}^- \xrightleftharpoons[(2)]{(1)} \text{NO}_2^- + \text{HCOOH}$

La loi d'action de masse s'écrit : $K = \frac{[\text{NO}_2^-][\text{HCOOH}]}{[\text{HNO}_2][\text{HCOO}^-]}$

3⁰) a - $K = \frac{[\text{NO}_2^-][\text{HCOOH}]}{[\text{HNO}_2][\text{HCOO}^-]} \xrightarrow{\text{A.N}} K = \frac{0,639 \cdot 0,639}{0,361 \cdot 0,361}$ et $K = 3,13$

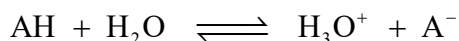
b - $K > 1 \longrightarrow \text{HNO}_2$ est plus fort que HCOOH .

4⁰) A même concentration, la solution d'acide le plus fort aura le pH le plus petit.
donc $\text{pH}(\text{sol. HNO}_2) < \text{pH}(\text{sol. HCOOH})$.

III / Forces des acides et des bases :

1⁰) Dissolution des acides et des bases dans l'eau :

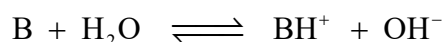
a - Cas des acides :



La dissolution d'un acide dans l'eau fait intervenir le couple $\left(\text{H}_3\text{O}^+ / \text{H}_2\text{O} \right)$

Le pH de la solution décroît au dessous de 7 à 25 °C.

b - Cas des bases :



La dissolution d'une base dans l'eau fait intervenir le couple $\left(\text{H}_2\text{O} / \text{OH}^- \right)$

Le pH de la solution croît au dessus de 7 à 25 °C.

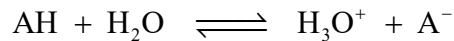
c - Remarque :

Dans les deux cas, $K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$ à 25 °C.

2⁰) Force des acides et des bases :

a - la constante d'acidité :

Dans le cas général, la dissolution d'un acide dans l'eau aboutit à l'équilibre :



La constante d'équilibre relative à cette réaction est appelée **la constante d'acidité** du couple $\left(\text{AH} / \text{A}^-\right)$.

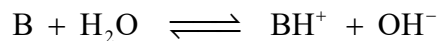
On la note K_a :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

Un acide est d'autant plus fort que la constante d'acidité K_a du couple correspondant est grande.

b - La constante de basicité :

Dans le cas général, la dissolution d'une base dans l'eau aboutit à l'équilibre :



La constante d'équilibre relative à cette réaction est appelée **la constante de basicité** du couple $\left(\text{BH}^+ / \text{B}\right)$.

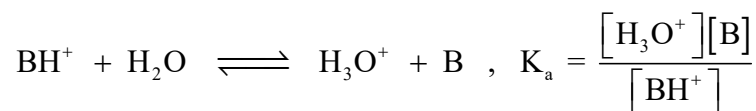
On la note K_b :

$$K_b = \frac{[\text{BH}^+][\text{OH}^-]}{[\text{B}]}$$

Une base est d'autant plus forte que la constante de basicité K_b du couple correspondant est grande.

c - Exploitation :

- A chaque base B correspond son acide conjugué BH^+ suivant le couple $\left(\text{BH}^+ / \text{B}\right)$:



On remarque qu'à la même température on a : $K_a \cdot K_b = K_e$

- Pour un couple acide - base : $K_e = K_a \cdot K_b \rightarrow -\log K_e = -\log K_a - \log K_b$

$$\mathbf{pK_e = pK_a + pK_b}$$

On définit la force d'un couple acide - base : plus un **acide est fort**, plus sa **base conjuguée est faible**.

$$\bullet \quad K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = K_a \cdot \frac{[\text{AH}]}{[\text{A}^-]} \rightarrow -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = -\log K_a - \log \frac{[\text{AH}]}{[\text{A}^-]}$$

$$\begin{cases} -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = \text{pH} \\ -\log K_a = \text{pK}_a \end{cases} \rightarrow \text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \quad \text{et} \quad \mathbf{\text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{base}]}{[\text{acide}]}}$$

$$\bullet \quad K_b = \frac{[\text{BH}^+][\text{OH}^-]}{[\text{B}]} \xrightarrow{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = K_e} K_b = \frac{[\text{BH}^+]}{[\text{B}]} \cdot \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_e}{K_b} \cdot \frac{[\text{BH}^+]}{[\text{B}]}$$

$$\rightarrow -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = -\log \frac{K_e}{K_b} - \log \frac{[\text{BH}^+]}{[\text{B}]} = -\log K_e + \log K_b + \log \frac{[\text{B}]}{[\text{BH}^+]} \quad \text{et} \quad \mathbf{\text{pH} = \text{pK}_e - \text{pK}_b + \log \frac{[\text{base}]}{[\text{acide}]}}$$

Application 2 :

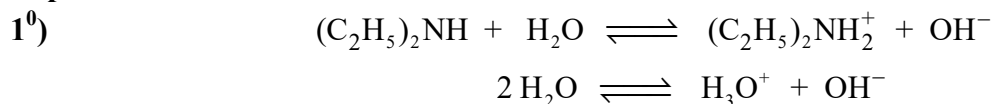
Une solution de diéthylamine $(C_2H_5)_2NH$ a un $pH = 10,8$.

le couple $\left((C_2H_5)_2NH_2^+ / (C_2H_5)_2NH \right)$ a un $pK_a = 11,1$.

1⁰) Calculer les molarités des différentes espèces chimiques présentes en solution.

2⁰) En déduire la concentration C de la solution de diéthylamine.

Réponse :



Les différentes espèces chimiques présentes en solution aqueuse sont : H_3O^+ , OH^- , $(C_2H_5)_2NH$ et $(C_2H_5)_2NH_2^+$.

$$* \quad pH = -\log[H_3O^+] \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-pH} \quad \text{A.N: } [H_3O^+] = 10^{-10,8} \quad \text{et} \quad [H_3O^+] = 1,6 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$* \quad [H_3O^+] \cdot [OH^-] = K_e \rightarrow [OH^-] = \frac{K_e}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-pK_e}}{10^{-pH}} \quad \text{et} \quad [OH^-] = 10^{pH-pK_e}$$

$$\text{A.N: } [OH^-] = 10^{10,8-14} \quad \text{et} \quad [OH^-] = 6,31 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$* \quad \text{L'électro neutralité} \rightarrow [H_3O^+] + [(C_2H_5)_2NH_2^+] = [OH^-] \rightarrow [(C_2H_5)_2NH_2^+] = [OH^-] - [H_3O^+]$$

$$\text{A.N: } [(C_2H_5)_2NH_2^+] = 6,31 \cdot 10^{-4} - 1,6 \cdot 10^{-11} \quad \text{et} \quad [(C_2H_5)_2NH_2^+] = 6,31 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = pK_a + \log \frac{[(C_2H_5)_2NH]}{[(C_2H_5)_2NH_2^+]} \rightarrow \frac{[(C_2H_5)_2NH]}{[(C_2H_5)_2NH_2^+]} = 10^{pH-pK_a}$$

$$\text{A.N: } \frac{[(C_2H_5)_2NH]}{[(C_2H_5)_2NH_2^+]} = 10^{10,8-11,1} \rightarrow \frac{[(C_2H_5)_2NH]}{[(C_2H_5)_2NH_2^+]} = 0,5 \quad \text{et} \quad [(C_2H_5)_2NH] = 0,5 \cdot [(C_2H_5)_2NH_2^+]$$

$$\text{A.N: } [(C_2H_5)_2NH] = 0,5 \cdot 6,31 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad [(C_2H_5)_2NH] = 3,16 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$2^0) \quad \text{La conservation de la matière} \rightarrow [(C_2H_5)_2NH_2^+] + [(C_2H_5)_2NH] = C$$

$$\text{A.N: } C = 6,31 \cdot 10^{-4} + 3,16 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad C = 9,47 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

IV/ Classification des couples acide - base dans l'eau :

1⁰) Critères de classement :

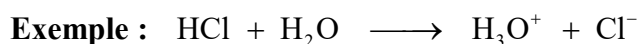
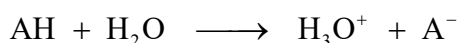
- Un acide est d'autant plus fort qu'il libère plus facilement un proton H^+ .
- Une base est d'autant plus forte qu'elle capte plus facilement un proton H^+ .
- Plus un acide est fort, plus sa base conjuguée est faible.
- En solution aqueuse, les couples de références sont : $\left(H_3O^+ / H_2O \right)$ et $\left(H_2O / OH^- \right)$.
- En solution aqueuse, un couple acide - base est caractérisé par sa constante d'acidité K_a ; Plus K_a est grand, plus l'acide est fort et plus sa base conjuguée est faible.



2⁰) Classement :

On distingue trois classes de couples acide - base :

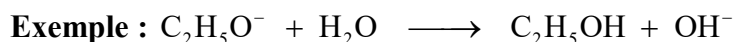
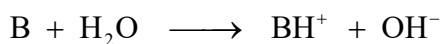
a - Couple acide - base dont l'acide est fort :



Un acide fort est plus fort que l'acide H_3O^+ .

La base conjuguée d'un acide fort **ne réagit pas avec l'eau** ; elle est alors dite **inerte** ou **indifférente**.

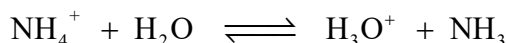
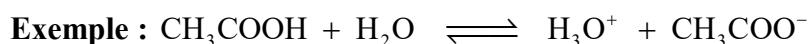
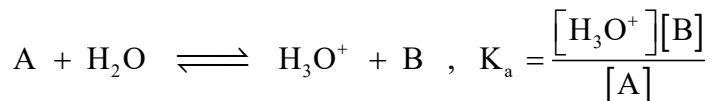
b - Couple acide - base dont la base est forte :



Une base forte est plus forte que la base OH^- .

L'acide conjugué d'une base forte ne **réagit pas avec l'eau** ; il est alors dit **inerte** ou **indifférent**.

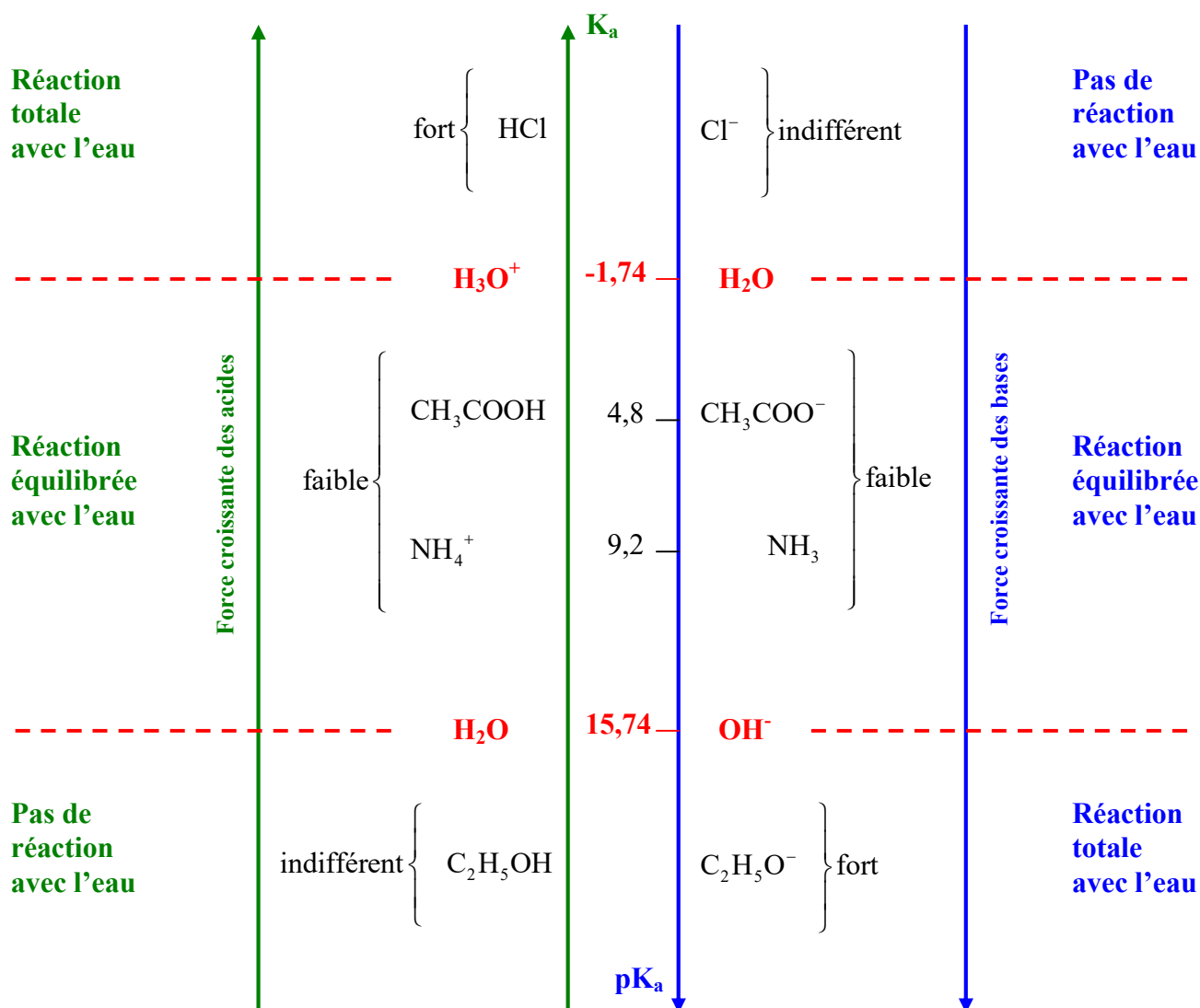
c - Couple acide - base faible :



Plus K_a est grand, plus l'acide faible est fort.

La **base conjuguée** d'un **acide faible** est **faible**.

3⁰) Classification :



4⁰) Remarques :

- Quel que soit l'acide fort, il donne mole à mole l'acide H_3O^+ .
L'ion H_3O^+ est alors l'acide le plus fort dans l'eau.
- Quelle que soit la base forte, elle donne mole à mole la base OH^- .
L'ion OH^- est alors la base la plus forte dans l'eau.
- On ne peut classer entre eux ni les acides forts ni les bases fortes ; on dit qu'il y a **nivellement de force**.
- Le pH de la solution aqueuse d'un acide faible de concentration molaire donnée est d'autant plus élevé (mais < 7) que cet acide est plus faible ; on peut alors envisager une classification suivant le pH des solutions équimolaires.

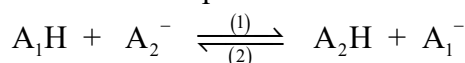
V/ Exploitation :

1⁰) La constante d'équilibre d'une réaction acide - base :

Le couple $\left(\text{A}_1\text{H} / \text{A}_1^- \right)$ a une constante d'acidité $K_{a1} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}_1^-]}{[\text{A}_1\text{H}]}$

Le couple $\left(\text{A}_2\text{H} / \text{A}_2^- \right)$ a une constante d'acidité $K_{a2} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}_2^-]}{[\text{A}_2\text{H}]}$

La réaction acide - base mettant en jeu ces deux couples est :



La loi d'action de masse s'écrit : $K = \frac{[\text{A}_1^-][\text{A}_2\text{H}]}{[\text{A}_1\text{H}][\text{A}_2^-]}$

$$K = [\text{H}_3\text{O}^+] \cdot \frac{[\text{A}_1^-][\text{A}_2\text{H}]}{[\text{A}_1\text{H}][\text{A}_2^-]} \cdot \frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_{a1}}{K_{a2}}, \text{ donc : } \mathbf{K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}}}$$

Remarque :

$$K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}} \rightarrow K = \frac{10^{-pK_{a1}}}{10^{-pK_{a2}}} \rightarrow \mathbf{K = 10^{pK_{a2} - pK_{a1}}}$$

2⁰) Ionisation partielle d'un acide ou d'une base faible :

On considère le tableau d'avancement volumique de la réaction d'ionisation d'un acide (ou d'une base) faible dans l'eau :

On ne tient pas compte de l'auto dissociation de l'eau.

Equation de la réaction		$\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{A}^- + \text{H}_3\text{O}^+$ ou $\text{B} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{BH}^+ + \text{OH}^-$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L ⁻¹)	Concentrations molaires (mol.L ⁻¹)			
Initial (t = 0)	0	C	excès	0	0
Final	y _f	C - y _f	excès	y _f	y _f

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{acide : } K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \\ \text{base : } K_b = \frac{[\text{BH}^+][\text{OH}^-]}{[\text{B}]} \end{array} \right. \rightarrow K_a (\text{ou } K_b) = \frac{y_f^2}{C - y_f}$$

Sachant que : $y_{\max} = C$, on peut écrire : $K_a(\text{ou } K_b) = \frac{\left(\frac{y_f}{y_{\max}}\right)^2}{\left(\frac{C}{C}\right) - \left(\frac{y_f}{y_{\max}}\right)} = \frac{\tau_f^2}{\frac{1 - \tau_f}{C}}$

Il vient alors que : $K_a(\text{ou } K_b) = C \frac{\tau_f^2}{1 - \tau_f}$

- Pour un même acide (ou base) faible, si C diminue alors τ_f augmente.

La dilution favorise la dissociation d'un acide (ou d'une base) faible.

- Pour une même concentration d'acide (ou de base), si K_a (ou K_b) augmente alors τ_f augmente donc $[H_3O^+]$ (ou $[OH^-]$) augmente et par conséquent le pH diminue (ou augmente).

On peut alors envisager une classification des acides ou des bases suivant le pH de leurs solutions aqueuses équimolaires.

Pour en savoir plus

1⁰) Le pH des solutions aqueuses :

a - Utilité du pH :

L'acidité (ou la basicité) d'une solution aqueuse est caractérisée par sa concentration molaire en ions H_3O^+ .
Pour les solutions aqueuses diluées, la valeur de $[\text{H}_3\text{O}^+]$ varie dans un large domaine (généralement entre la valeur de 1 mol.L^{-1} et la valeur de $10^{-14}\text{ mol.L}^{-1}$).

Pour plus de commodité, on préfère utiliser une échelle logarithmique moins étendue.

Ceci est réalisé grâce à un opérateur mathématique qui associe à toute valeur X son cologarithme décimal :

$$\text{pX} = \text{co log X} = \log\left(\frac{1}{X}\right) = -\log X$$

Le pH (potentiel Hydrogène) d'une solution aqueuse est défini par le cologarithme décimal de l'activité des ions H_3O^+ dans cette solution aqueuse : $\text{pH} = \text{co log}(a_{\text{H}_3\text{O}^+}) = -\log(a_{\text{H}_3\text{O}^+})$

Sachant que : $a_{\text{H}_3\text{O}^+} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C_0} \xrightarrow{C_0=1\text{ mol.L}^{-1}} a_{\text{H}_3\text{O}^+} = [\text{H}_3\text{O}^+]$ sans unité.

Il vient alors que : **pH = -log[H₃O⁺]**

Remarques :

* L'échelle du pH varie donc de 0 à 14.

* $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+] \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$ (en mol.L^{-1}).

b - Echelle du pH :

• L'eau pure est le siège d'une réaction d'ionisation propre : $2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{OH}^-$

$[\text{H}_3\text{O}^+].[\text{OH}^-] = K_e \xrightarrow{K_e=10^{-14} \text{ à } 25^\circ\text{C}} [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7}\text{ mol.L}^{-1} \text{ à } 25^\circ\text{C} \xrightarrow{\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]} \text{pH} = 7 \text{ à } 25^\circ\text{C}.$

Toute solution aqueuse dont le pH = 7 à 25 °C est une solution **neutre**.

• Une solution aqueuse a un caractère **acide** si son pH < 7 à 25 °C.

Dans une solution aqueuse acide, $[\text{H}_3\text{O}^+] > 10^{-7}\text{ mol.L}^{-1}$ à 25 °C et $[\text{OH}^-] < 10^{-7}\text{ mol.L}^{-1}$ à 25 °C.

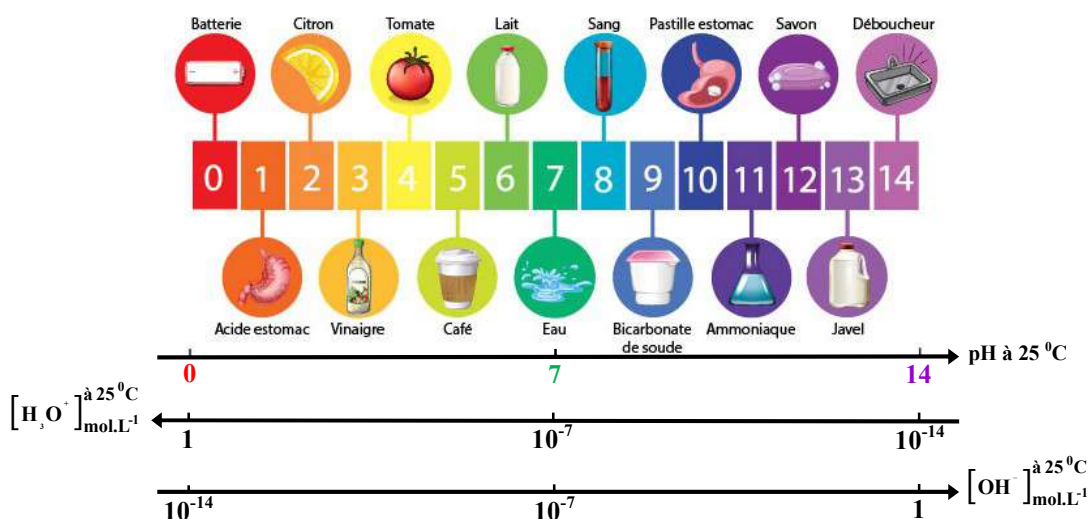
• Une solution aqueuse a un caractère **basique** si son pH > 7 à 25 °C.

Dans une solution aqueuse basique, $[\text{H}_3\text{O}^+] < 10^{-7}\text{ mol.L}^{-1}$ à 25 °C et $[\text{OH}^-] > 10^{-7}\text{ mol.L}^{-1}$ à 25 °C.

Remarques :

* Le caractère acide des solutions aqueuses augmente lorsque le pH diminue.

* Le caractère basique des solutions aqueuses augmente lorsque le pH augmente.



* Le produit ionique de l'eau : $K_e = [H_3O^+].[OH^-] \rightarrow -\log K_e = -\log [H_3O^+] - \log [OH^-]$

Pour une solution aqueuse diluée, on définit $pOH = -\log [OH^-]$ et $pK_e = -\log K_e$. On écrit alors :

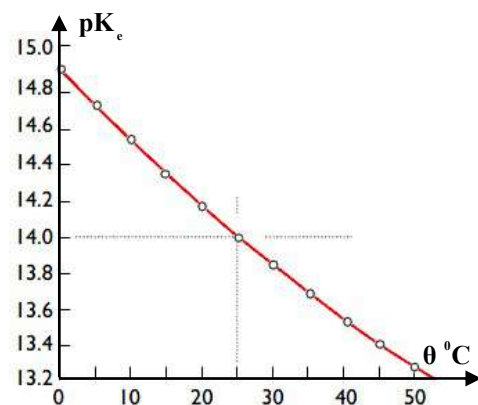
$$pK_e = pH + pOH$$

* La valeur du produit ionique de l'eau K_e dépend de la température. Lorsque la température augmente, la valeur de K_e augmente donc la valeur de pK_e diminue.

Dans l'eau pure, $[H_3O^+] = 10^{-\frac{pK_e}{2}}$ or $[H_3O^+] = 10^{-pH}$ donc l'état de neutralité de point de vue acide-base est vérifiée pour $pH_{neutre} = \frac{pK_e}{2}$.

Si θ augmente, pK_e diminue donc pH_{neutre} diminue.

Exemple : pour $\theta = 37^\circ C$, $pK_e = 13,6$, par conséquent $pH_{neutre} = 6,8$.



2⁰) Comportement d'un couple acide-base en solution aqueuse :

a - Diagramme de prédominance :

Pour un couple acide-base $\left(\frac{AH}{A^-}\right)$ en solution aqueuse, la relation qui relie le pH de la solution, le pK_a du couple et les molarités $[AH]$ et $[A^-]$ respectivement de l'acide et de sa base conjuguée est :

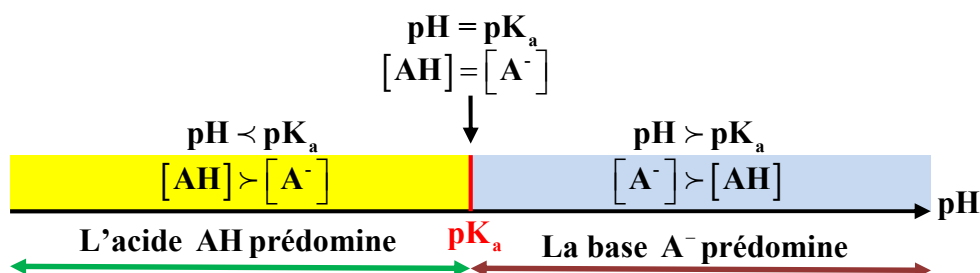
$$pH = pK_a + \log \frac{[A^-]}{[AH]} \quad \text{Equation de Henderson-Hasselbalch}$$

* Si $pH = pK_a \rightarrow \log \frac{[A^-]}{[AH]} = 0 \rightarrow [A^-] = [AH]$

* Si $pH < pK_a \rightarrow \log \frac{[A^-]}{[AH]} < 0 \rightarrow [A^-] < [AH]$: la forme acide prédomine devant la forme basique.

* Si $pH > pK_a \rightarrow \log \frac{[A^-]}{[AH]} > 0 \rightarrow [A^-] > [AH]$: la forme basique prédomine devant la forme acide.

On construit alors le diagramme de prédominance simple suivant :



b - Domaine de majorité :

En solution aqueuse, on convient de négliger $[X]$ devant $[Y]$ si $\frac{[X]}{[Y]} \leq 0,05 \rightarrow \log \frac{[X]}{[Y]} \leq -1,3$

* Si $pH \leq pK_a - 1,3 \rightarrow [AH] \gg [A^-]$:

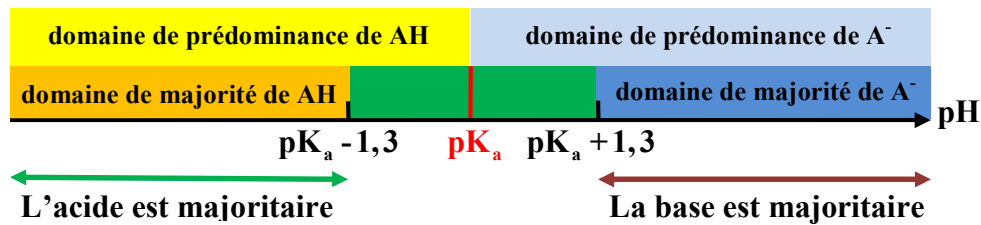
la forme acide est majoritaire devant la forme basique.

* Si $pH \geq pK_a + 1,3 \rightarrow [A^-] \gg [AH]$:

la forme basique est majoritaire devant la forme acide.

* Si $pK_a - 1,3 \leq pH \leq pK_a + 1,3$:

la forme acide et la forme basique sont de même ordre de grandeur.



Remarques :

- * Le domaine de majorité défini ci-dessus constitue un diagramme de prédominance à 5 %.
- * Suivant la convention adoptée, on peut construire un diagramme de prédominance à 1 %, à 10 %...etc.

c - Diagramme de distribution :

Le diagramme de distribution donne le pourcentage de la forme acide et de la forme basique d'un couple acide-base en fonction du pH de la solution aqueuse.

* Le pourcentage de la forme acide s'écrit : $P_{\text{acide}} = \frac{[AH]}{[AH] + [A^-]} \cdot 100$

On a : $pH = pK_a + \log \frac{[A^-]}{[AH]} \rightarrow \log \frac{[A^-]}{[AH]} = pH - pK_a \rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = 10^{pH - pK_a}$ et $[A^-] = [AH] \cdot 10^{pH - pK_a}$

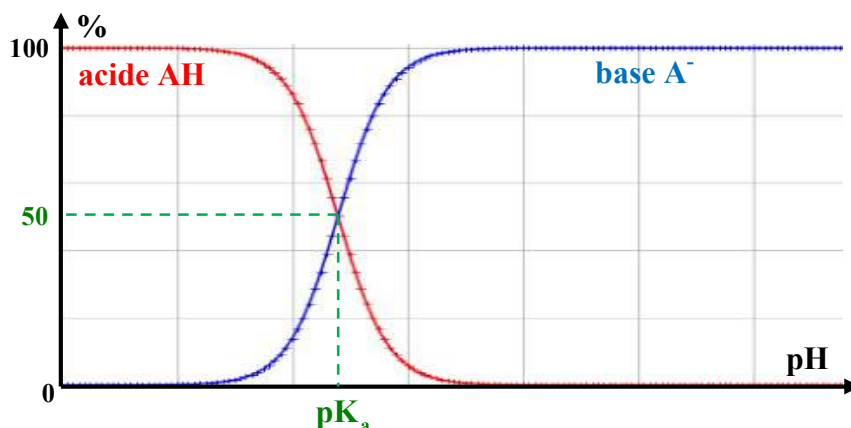
$$P_{\text{acide}} = \frac{[AH]}{[AH] + [AH] \cdot 10^{pH - pK_a}} \cdot 100 = \frac{1}{1 + 10^{pH - pK_a}} \cdot 100 \quad \text{et} \quad P_{\text{acide}} = \frac{10^{pK_a}}{10^{pK_a} + 10^{pH}} \cdot 100$$

* Le pourcentage de la forme basique s'écrit : $P_{\text{base}} = \frac{[A^-]}{[AH] + [A^-]} \cdot 100$

On a : $pH = pK_a + \log \frac{[A^-]}{[AH]} \rightarrow \log \frac{[A^-]}{[AH]} = pH - pK_a \rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = 10^{pH - pK_a}$ et $[A^-] = [AH] \cdot 10^{pH - pK_a}$

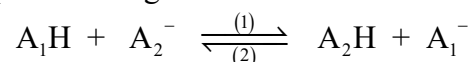
$$P_{\text{base}} = \frac{[AH] \cdot 10^{pH - pK_a}}{[AH] + [AH] \cdot 10^{pH - pK_a}} \cdot 100 = \frac{10^{pH - pK_a}}{1 + 10^{pH - pK_a}} \cdot 100 \quad \text{et} \quad P_{\text{base}} = \frac{10^{pH}}{10^{pK_a} + 10^{pH}} \cdot 100$$

* On remarque que : $P_{\text{acide}} + P_{\text{base}} = 100\%$.



d - La réaction acide-base :

Considérons une solution aqueuse qui est le siège d'une réaction acide-base :

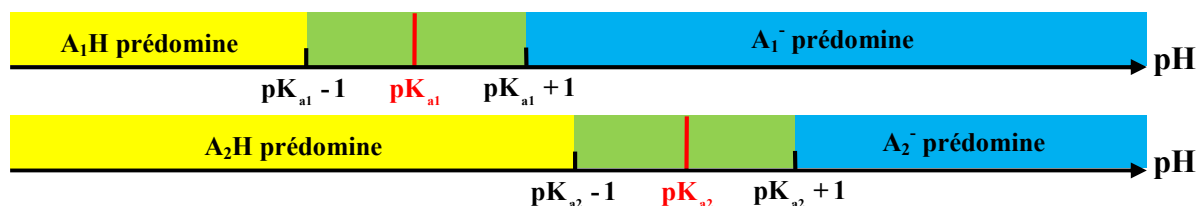


Cette réaction met en jeu les deux couples acide-base $\left(\frac{A_1H}{A_1^-} \right)$ et $\left(\frac{A_2H}{A_2^-} \right)$

La constante d'équilibre de cette réaction s'exprime par : $K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}} \xrightarrow{\frac{K_{a1} = 10^{-pK_{a1}}}{K_{a2} = 10^{-pK_{a2}}}} K = 10^{pK_{a2} - pK_{a1}}$

Associons à chaque couple acide-base un diagramme de prédominance à 10 %.

- 1^{er} cas : Incompatibilité entre A_1H et A_2^-



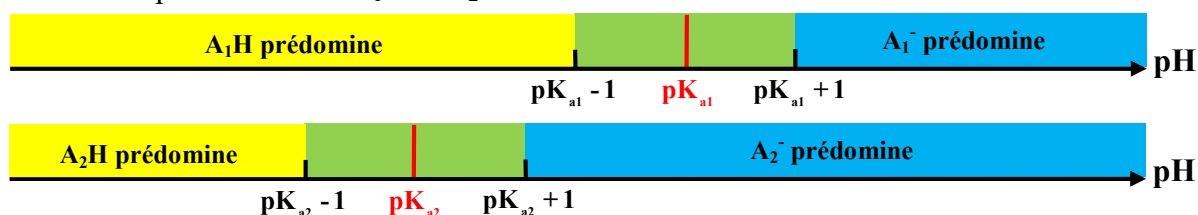
Il n'existe aucune valeur du pH pour laquelle les espèces A_1H et A_2^- peuvent prédominer ensemble.

On dit que les deux espèces A_1H et A_2^- sont incompatibles.

La réaction évolue spontanément dans le sens de la formation des espèces conjuguées c à d le sens direct.

Remarque : si $\Delta pK_a = pK_{a2} - pK_{a1} > 4 \rightarrow K > 10^4$, la réaction est pratiquement totale dans le sens direct.

- 2^{ème} cas : Compatibilité entre A_1H et A_2^-



Il existe un intervalle de valeurs du pH dans lequel les espèces A_1H et A_2^- peuvent prédominer ensemble.

On dit que les deux espèces A_1H et A_2^- sont compatibles.

La réaction entre A_1H et A_2^- sera fortement limitée (l'équilibre est fortement déplacé dans le sens inverse).

Remarque : si $\Delta pK_a = pK_{a2} - pK_{a1} < -4 \rightarrow K < 10^{-4}$, A_1H et A_2^- ne réagissent quasiment pas entre elles.

Applications

Exercice 1 :

Les solutions sont considérées à la température $\theta = 25^\circ \text{C}$.

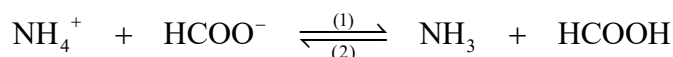
On donne à cette température : $K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$.

Dans le tableau ci-dessous, on donne les valeurs des pK_a des couples correspondants à quelques acides :

Acide	HClO	NH_4^+	HNO_2	HCOOH
pK_a	7,50	9,20	3,30	3,80

1⁰) En expliquant la méthode utilisée, classer ces acides par force croissante.

2⁰) On considère la réaction acide-base suivante :



a - Quels sont les couples acide-base mis en jeu dans cette réaction ?

b - Donner l'expression de la constante d'équilibre K de cette réaction.

c - Soit K_{a1} la constante d'acidité du couple correspondant à l'acide NH_4^+ et K_{a2} la constante d'acidité du couple correspondant à l'acide HCOOH. Exprimer K en fonction de K_{a1} et K_{a2} .

d - Calculer la valeur de K. Que peut-on dire de cette réaction ?

3⁰) On considère un volume $V = 200 \text{ mL}$ d'une solution aqueuse d'acide nitrique HNO_2 de concentration molaire $C = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$. Cette solution a un $\text{pH} = 2,15$.

En négligeant l'autodissociation de l'eau, le tableau d'avancement de la réaction de dissociation de HNO_2 dans l'eau est :

Equation chimique		$\text{HNO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{NO}_2^-$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantité de matière (mol)			
Initial	0	$2 \cdot 10^{-2}$	Excès	0	0
final	x_f	$2 \cdot 10^{-2} - x_f$	Excès	x_f	x_f

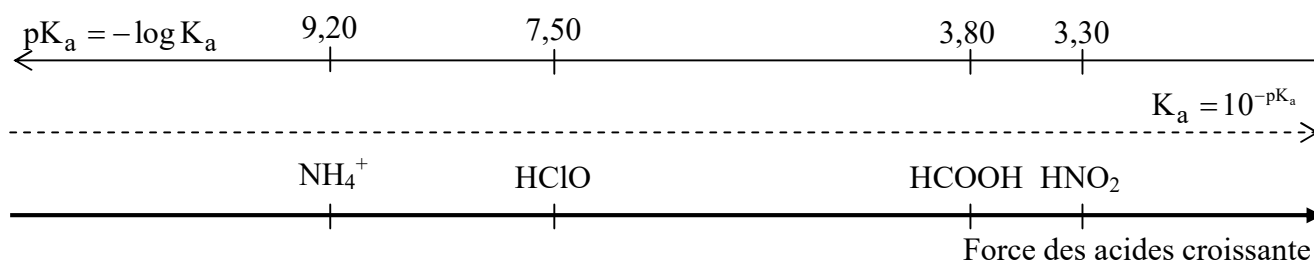
a - En exploitant l'expression $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$, calculer la valeur de x_f .

b - Montrer que la constante d'acidité du couple $(\text{HNO}_2/\text{NO}_2^-)$ s'exprime par : $K_a = \frac{x_f^2}{V \cdot (2 \cdot 10^{-2} - x_f)}$.

c - Calculer la valeur de K_a . En déduire celle de pK_a du couple considéré.

Réponse :

1⁰) Un acide est d'autant plus fort que la constante d'acidité K_a du couple acide-base correspondant est grande.



2⁰) $\text{NH}_4^+ + \text{HCOO}^- \xrightleftharpoons[(2)]{(1)} \text{NH}_3 + \text{HCOOH}$

a - Les couples acide-base mis en jeu dans cette réaction sont : $(\text{NH}_4^+/\text{NH}_3)$ et $(\text{HCOOH}/\text{HCOO}^-)$.

$$b - K = \frac{[NH_3] \cdot [HCOOH]}{[NH_4^+] \cdot [HCOO^-]} \text{ à l'équilibre.}$$

$$c - K = \frac{[NH_3] \cdot [HCOOH]}{[NH_4^+] \cdot [HCOO^-]} = [H_3O^+] \cdot \frac{[NH_3] \cdot [HCOOH]}{[NH_4^+] \cdot [HCOO^-]} \cdot \frac{1}{[H_3O^+]} = \frac{[H_3O^+] \cdot [NH_3]}{[NH_4^+]} \cdot \frac{[HCOOH]}{[HCOO^-] \cdot [H_3O^+]}$$

$$\text{donc : } K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}}$$

$$d - K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}} = \frac{10^{-pK_{a1}}}{10^{-pK_{a2}}} \longrightarrow K = \frac{10^{-9,2}}{10^{-3,8}} = 10^{-5,4} \text{ et } K = 3,98 \cdot 10^{-6}$$

La valeur de K est très faible donc la réaction est très limitée.

$$3^0) a - [H_3O^+] = \frac{x_f}{V} \text{ or } [H_3O^+] = 10^{-pH} \longrightarrow \frac{x_f}{V} = 10^{-pH} \text{ et } x_f = V \cdot 10^{-pH}$$

$$A.N : x_f = 0,2 \cdot 10^{-2,15} \text{ et } x_f = 1,416 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$b - K_a = \frac{[H_3O^+] \cdot [NO_2^-]}{[HNO_2]} = \frac{\left(\frac{x_f}{V}\right) \cdot \left(\frac{x_f}{V}\right)}{\left(\frac{2 \cdot 10^{-2} - x_f}{V}\right)} \longrightarrow K_a = \frac{x_f^2}{V \cdot (2 \cdot 10^{-2} - x_f)}$$

$$c - K_a = \frac{(1,416 \cdot 10^{-3})^2}{0,2(18,584 \cdot 10^{-3})} \text{ et } K_a = 5,39 \cdot 10^{-4}$$

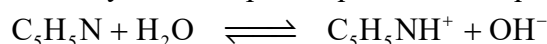
$$pK_a = -\log K_a \longrightarrow pK_a = -\log(5,39 \cdot 10^{-4}) \text{ et } pK_a = 3,27$$

Exercice 2 :

La pyridine est une base de formule brute C_5H_5N .

Une solution aqueuse de pyridine, de concentration molaire $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$, a un $pH = 8,60$.

La réaction de la pyridine avec l'eau est symbolisée par l'équation chimique :



1⁰) Quels sont les couples acide-base mis en jeu dans cette réaction ?

2⁰) En ne tenant pas compte de l'ionisation propre de l'eau, le tableau d'avancement volumique de la réaction de dissociation de la pyridine dans l'eau est :

Equation de la réaction		$C_5H_5N + H_2O \rightleftharpoons C_5H_5NH^+ + OH^-$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L ⁻¹)	Concentrations molaires (mol.L ⁻¹)			
Initial (t = 0)	0	C	excès	0	0
Final	y _f	C - y _f	excès	y _f	y _f

a - Montrer que la molarité des ions hydroxyde en solution est $[OH^-] = 10^{pH-pK_e}$.

b - Calculer le taux d'avancement final τ_f de la réaction.

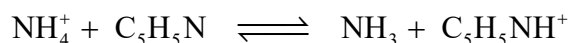
c - Montrer que la constante de basicité du couple acide-base $(C_5H_5NH^+/C_5H_5N)$ s'exprime par :

$$K_{b1} = C \cdot \frac{\tau_f^2}{1 - \tau_f}$$

d - Calculer la valeur de K_{b1} . En déduire celle de la constante d'acidité K_{a1} du même couple.

3⁰) Le couple acide-base (NH_4^+/NH_3) a un $pK_{a2} = 9,20$. Comparer la force des deux bases C_5H_5N et NH_3 .

4⁰) On considère la réaction acide-base :



a - Donner l'expression de la constante d'équilibre K relative à cette réaction.

b - Exprimer K en fonction de K_{a1} et K_{a2} .

c - Calculer la valeur de K. Que peut-on en déduire quant à la force des deux acides NH_4^+ et $\text{C}_5\text{H}_5\text{NH}^+$?

Réponse :

1⁰) Les couples mis en jeu sont $(\text{C}_5\text{H}_5\text{NH}^+/\text{C}_5\text{H}_5\text{N})$ et $(\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-)$.

2⁰) a - $K_e = [\text{H}_3\text{O}^+].[\text{OH}^-] \rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-pK_e}}{10^{-\text{pH}}} \text{ et } [\text{OH}^-] = 10^{\text{pH}-pK_e}.$

b - $\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} \xrightarrow{y_{\max}=C} \tau_f = \frac{[\text{OH}^-]}{C} \text{ et } \tau_f = \frac{10^{\text{pH}-pK_e}}{C}. \text{ A.N:}$

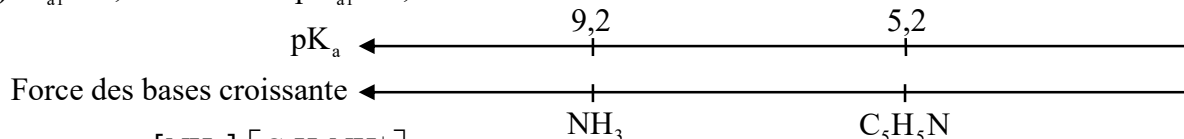
$\tau_f = \frac{10^{8,6-14}}{10^{-2}} = 10^{-3,4} \text{ et } \tau_f = 3,98.10^{-4}.$

c - $K_{b1} = \frac{[\text{OH}^-].[\text{C}_5\text{H}_5\text{NH}^+]}{[\text{C}_5\text{H}_5\text{N}]} \rightarrow K_{b1} = \frac{y_f^2}{C-y_f} \xrightarrow{y_f=\tau_f.C} K_{b1} = \frac{\tau_f^2.C^2}{C-\tau_f.C} \text{ et } K_{b1} = C.\frac{\tau_f^2}{1-\tau_f}$

d - $K_{b1} = 10^{-2}.\frac{(3,98.10^{-4})^2}{1-3,98.10^{-4}} \text{ et } K_{b1} = 15,85.10^{-10}.$

On a : $K_{a1}.K_{b1} = K_e \rightarrow K_{a1} = \frac{K_e}{K_{b1}}. \text{ A.N: } K_{a1} = \frac{10^{-14}}{15,85.10^{-10}} \text{ et } K_{a1} = 6,3.10^{-6}.$

3⁰) $K_{a1} = 6,3.10^{-6} \rightarrow pK_{a1} = 5,2.$

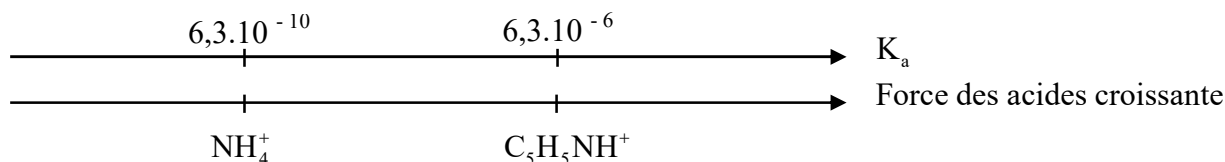


4⁰) a - $K = \frac{[\text{NH}_3].[\text{C}_5\text{H}_5\text{NH}^+]}{[\text{NH}_4^+].[\text{C}_5\text{H}_5\text{N}]}$

b - $K = \frac{[\text{NH}_3].[\text{C}_5\text{H}_5\text{NH}^+]}{[\text{NH}_4^+].[\text{C}_5\text{H}_5\text{N}]} = [\text{H}_3\text{O}^+].\frac{[\text{NH}_3].[\text{C}_5\text{H}_5\text{NH}^+]}{[\text{NH}_4^+].[\text{C}_5\text{H}_5\text{N}]}.\frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \text{ et } K = \frac{K_{a2}}{K_{a1}}.$

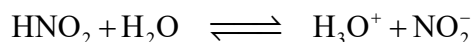
c - $K = \frac{10^{-9,2}}{10^{-5,2}} \text{ et } K = 10^{-4}.$

$K < 1 \rightarrow$ l'acide NH_4^+ est plus faible que l'acide $\text{C}_5\text{H}_5\text{NH}^+$.



Exercice 3 :

La réaction de dissociation de l'acide nitreux dans l'eau est symbolisée par l'équation chimique :

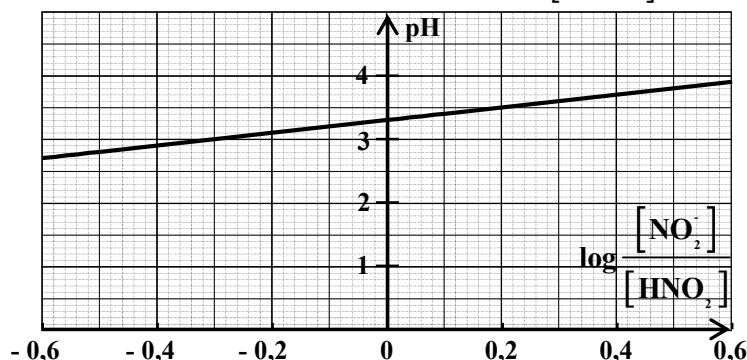


1⁰) a - Cette réaction acide-base met en jeu le couple $(\text{HNO}_2/\text{NO}_2^-)$ et un autre couple. Lequel ?

b - Donner l'expression de la constante d'acidité K_a du couple $(\text{HNO}_2/\text{NO}_2^-)$.

2⁰) Une solution aqueuse d'acide nitreux, de concentration molaire $C = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, a un $\text{pH} = 2,15$.

- a - Calculer la molarité $[H_3O^+]$. En déduire la molarité $[OH^-]$.
- b - En utilisant la loi de l'électro neutralité de la solution, déterminer la molarité $[NO_2^-]$.
- c - En utilisant la loi de la conservation de la matière, déterminer la molarité $[HNO_2]$.
- d - Calculer alors la valeur de la constante d'acidité K_a du couple (HNO_2/NO_2^-) .
- 3⁰) Le graphe ci-dessous donne les variations du pH en fonction de $\log \frac{[NO_2^-]}{[HNO_2]}$.



- a - Etablir la relation $pH = pK_a + \log \frac{[NO_2^-]}{[HNO_2]}$.
- b - Déduire, graphiquement, la valeur de la constante d'acidité K_a du couple (HNO_2/NO_2^-) ?

Réponse :

1⁰) a - La réaction acide-base considérée met en jeu le couple (HNO_2/NO_2^-) et le couple (H_3O^+/H_2O) .

b - $K_a = \frac{[H_3O^+][NO_2^-]}{[HNO_2]}$

2⁰) a - $[H_3O^+] = 10^{-pH} \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-2,15}$ et $[H_3O^+] = 7,08 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

$[OH^-] = \frac{K_e}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-pK_e}}{10^{-pH}} = 10^{pH-pK_e} \rightarrow [OH^-] = 10^{-11,85}$ et $[OH^-] = 1,41 \cdot 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - L'électro neutralité : $[H_3O^+] = [OH^-] + [NO_2^-]$

$\rightarrow [NO_2^-] = [H_3O^+] - [OH^-] \approx [H_3O^+]$ et $[NO_2^-] = 7,08 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

c - La conservation de la matière : $[HNO_2] + [NO_2^-] = C$

$\rightarrow [HNO_2] = C - [NO_2^-] \rightarrow [HNO_2] = 10^{-1} - 7,08 \cdot 10^{-3}$ et $[HNO_2] = 92,92 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

d - $K_a = \frac{(7,08 \cdot 10^{-3}) \cdot (7,08 \cdot 10^{-3})}{92,92 \cdot 10^{-3}}$ et $K_a = 5,4 \cdot 10^{-4}$.

3⁰) a - $K_a = \frac{[H_3O^+][NO_2^-]}{[HNO_2]}$

$\rightarrow -\log K_a = -\log [H_3O^+] - \log \frac{[NO_2^-]}{[HNO_2]} \rightarrow pK_a = pH - \log \frac{[NO_2^-]}{[HNO_2]}$ et $pH = pK_a + \log \frac{[NO_2^-]}{[HNO_2]}$.

b - Graphiquement : $pH = 3,3 + \log \frac{[NO_2^-]}{[HNO_2]}$.

Par identification, on déduit que $pK_a = 3,3 \rightarrow K_a = 10^{-3,3}$ et $K_a = 5,01 \cdot 10^{-4}$.

Exercice 4 :

1⁰) On donne les pK_a des couples acide-base suivants :

Couple acide-base	$(CH_3CO_2H/CH_3CO_2^-)$	$(HClO/ClO^-)$	(NH_4^+/NH_3)	$(CH_3NH_3^+/CH_3NH_2)$
pK_a	4,8	7,3	9,2	10,7

Classer les acides de ces couples par force croissante.

2⁰) On considère la réaction acide-base suivante : $CH_3CO_2H + NH_3 \rightleftharpoons CH_3CO_2^- + NH_4^+$

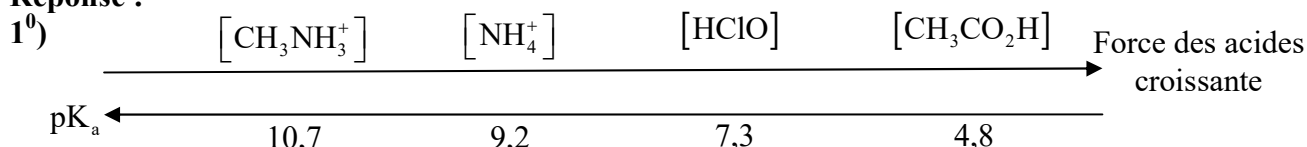
a - Donner l'expression de la constante d'équilibre K relative à cette réaction.

b - Soit K_{a1} la constante d'acidité du couple $(CH_3CO_2H/CH_3CO_2^-)$ et K_{a2} celle du couple (NH_4^+/NH_3) .

Exprimer K en fonction de K_{a1} et K_{a2} . Calculer la valeur de K .

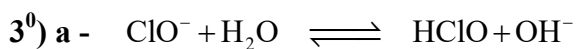
3⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction de l'ion hypochlorite ClO^- avec l'eau.

b - Quelle est la valeur de la constante de basicité K_b du couple $(HClO/ClO^-)$?

Réponse :

2⁰) a - $K = \frac{[CH_3CO_2^-][NH_4^+]}{[CH_3CO_2H][NH_3]}$

b - $K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}} \rightarrow K = \frac{10^{-4,8}}{10^{-9,2}} = 10^{4,4}$ et $K = 25,12 \cdot 10^3$.



b - $K_a \cdot K_b = K_e \rightarrow K_b = \frac{K_e}{K_a} = \frac{10^{-pK_e}}{10^{-pK_a}} = 10^{pK_a - pK_e} \rightarrow K_b = 10^{7,3-14} = 10^{-6,7}$ et $K_b \approx 2 \cdot 10^{-7}$.

Exercice 5 :

1⁰) a - Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Couple acide-base	K_a	pK_a	pK_b
(CH_3COOH/CH_3COO^-)		4,8	
(NH_4^+/NH_3)			4,8

b - Comparer les forces des acides ainsi que celles des bases des deux couples acide-base considérés.

2⁰) a - Soit la réaction acide-base : $CH_3COOH + NH_3 \rightleftharpoons CH_3COO^- + NH_4^+$

Soit K_{a1} la constante d'acidité du couple (CH_3COOH/CH_3COO^-) et K_{a2} celle du couple (NH_4^+/NH_3) .

Exprimer la constante d'équilibre K relative à cette réaction en fonction de K_{a1} et K_{a2} .

Calculer la valeur de K .

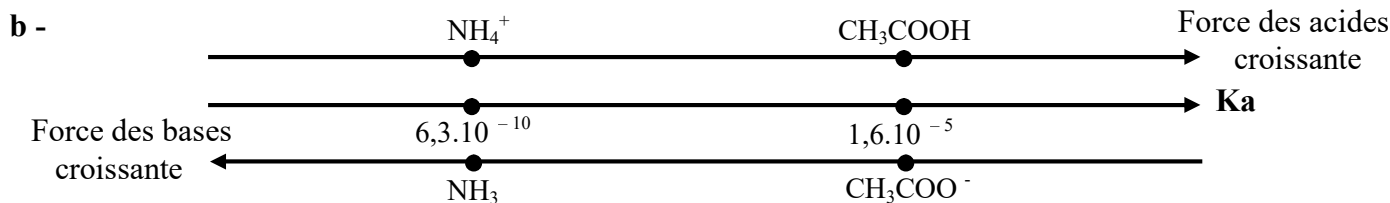
b - La valeur de la constante d'équilibre de la réaction : $CH_3COOH + NO_2^- \rightleftharpoons CH_3COO^- + HNO_2$ est $K' = 3,16 \cdot 10^{-2}$.

Déterminer la valeur de la constante d'équilibre K'' de la réaction : $NH_4^+ + NO_2^- \rightleftharpoons NH_3 + HNO_2$

Réponse :

1⁰) a -

Couple acide-base	K_a	pK_a	pK_b
(CH_3COOH/CH_3COO^-)	$1,6 \cdot 10^{-5}$	4,8	9,2
(NH_4^+/NH_3)	$6,3 \cdot 10^{-10}$	9,2	4,8



$$2^0) \text{ a - } K = \frac{[CH_3COO^-] \cdot [NH_4^+]}{[CH_3COOH] \cdot [NH_3]} = [H_3O^+] \frac{[CH_3COO^-] \cdot [NH_4^+]}{[CH_3COOH] \cdot [NH_3]} \cdot \frac{1}{[H_3O^+]} \rightarrow K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}}$$

$$K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}} \rightarrow K = \frac{10^{-pK_{a1}}}{10^{-pK_{a2}}} \text{ et } K = 10^{pK_{a2} - pK_{a1}}$$

$$\text{A.N : } K = 10^{9,2-4,8} \text{ et } K = 2,51 \cdot 10^4$$

b - Soit K_a la constante d'équilibre du couple (HNO_2/NO_2^-) :

$$K' = \frac{K_{a1}}{K_a} \text{ et } K'' = \frac{K_{a2}}{K_{a1}} \rightarrow K'' = \frac{K_{a2}}{K_{a1}} \cdot K' \text{ et } K'' = \frac{K'}{K}$$

$$\text{A.N : } K'' = \frac{3,16 \cdot 10^{-2}}{2,51 \cdot 10^4} \text{ et } K'' = 1,26 \cdot 10^{-6}$$

Exercice 6 :

Les constantes d'acidité des couples acide-base $(C_6H_5CO_2H/C_6H_5CO_2^-)$ et $(C_5H_5NH^+/C_5H_5N)$ sont respectivement $K_{a1} = 6,3 \cdot 10^{-5}$ et $K_{a2} = 6,3 \cdot 10^{-6}$.

1⁰) a - Ecrire les équations des réactions des acides avec l'eau.

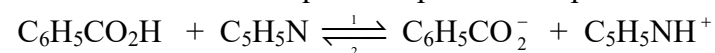
b - Donner les expressions des constantes d'acidité K_{a1} et K_{a2} des couples indiqués précédemment.

c - Calculer les valeurs de pK_{a1} et pK_{a2}

d - Comparer les forces des acides et celles des bases.

2⁰) On prépare un mélange, à partir de quatre solutions de même concentration molaire $C = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, constitué comme indiqué dans le tableau ci-contre :

La réaction acido-basique susceptible de se produire est :



a - Ecrire l'expression de la constante d'équilibre K associée à cette réaction et en déduire la relation entre K , K_{a1} et K_{a2} . Calculer alors la valeur de K .

b - Déterminer la valeur initiale π_i de la fonction des concentrations relative à la réaction étudiée.

c - Dans quel sens la réaction va évoluer à partir de l'état initial ?

3⁰) a - Calculer la valeur du rapport $\frac{[C_6H_5CO_2^-]_i}{[C_6H_5CO_2H]_i}$ à l'état initial.

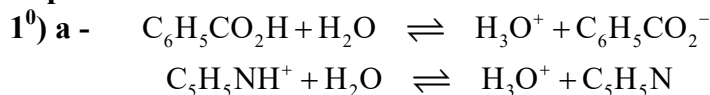
b - Exprimer le rapport $\frac{[C_6H_5CO_2^-]}{[C_6H_5CO_2H]}$ en fonction de pH et de pK_{a1} . Calculer sa valeur.

c - L'évolution de ce mélange est-elle conforme à la prévision de la question précédente?

4⁰) Déterminer la valeur de l'avancement final x_f de la réaction étudiée.

Mélange	
$V_1 (C_6H_5CO_2H)$	10 mL
$V_2 (C_6H_5CO_2^- + Na^+)$	20 mL
$V_3 (C_5H_5N)$	10 mL
$V_4 (C_5H_5NH^+ + Cl^-)$	20 mL
pH	4,7

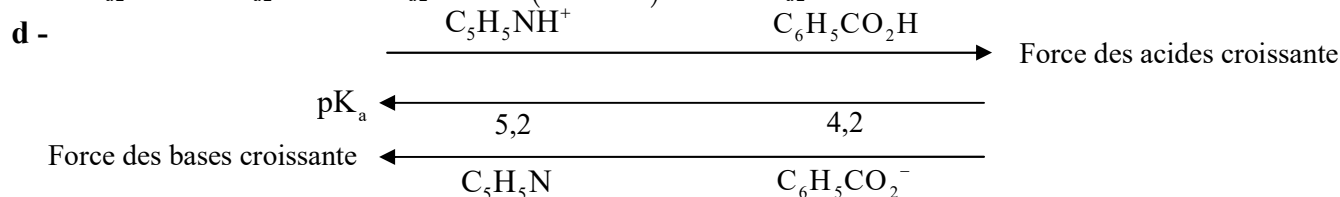
Réponse :



$$\mathbf{b} - K_{a1} = \frac{[H_3O^+].[C_6H_5CO_2^-]}{[C_6H_5CO_2H]} \quad \text{et} \quad K_{a1} = \frac{[H_3O^+].[C_5H_5N]}{[C_5H_5NH^+]}$$

$$\mathbf{c} - pK_{a1} = -\log K_{a1} \rightarrow pK_{a1} = -\log(6,3 \cdot 10^{-5}) \quad \text{et} \quad pK_{a1} = 4,2.$$

$$pK_{a2} = -\log K_{a2} \rightarrow pK_{a2} = -\log(6,3 \cdot 10^{-6}) \quad \text{et} \quad pK_{a2} = 5,2.$$



$$\mathbf{2^0) a} - K = \frac{[C_6H_5CO_2^-][C_5H_5NH^+]}{[C_6H_5CO_2H][C_5H_5N]}$$

$$K = [H_3O^+] \cdot \frac{[C_6H_5CO_2^-][C_5H_5NH^+]}{[C_6H_5CO_2H][C_5H_5N]} \cdot \frac{1}{[H_3O^+]} \rightarrow K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}}. \quad \text{A.N : } K = \frac{6,3 \cdot 10^{-5}}{6,3 \cdot 10^{-6}} \quad \text{et} \quad K = 10.$$

$$\mathbf{b} - \pi_i = \frac{[C_6H_5CO_2^-]_i [C_5H_5NH^+]_i}{[C_6H_5CO_2H]_i [C_5H_5N]_i} = \frac{\frac{n_i(C_6H_5CO_2^-)}{V} \frac{n_i(C_5H_5NH^+)}{V}}{\frac{n_i(C_6H_5CO_2H)}{V} \frac{n_i(C_5H_5N)}{V}} = \frac{(C.V_2)(C.V_4)}{(C.V_1)(C.V_3)} = \frac{20 \cdot 20}{10 \cdot 10} \quad \text{et} \quad \pi_i = 4.$$

$\mathbf{c} - \pi_i < K \rightarrow$ la réaction évolue spontanément dans le sens direct.

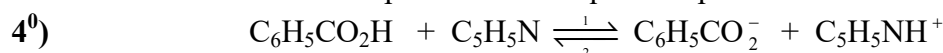
$$\mathbf{3^0) a} - \frac{[C_6H_5CO_2^-]_i}{[C_6H_5CO_2H]_i} = \frac{\frac{n_i(C_6H_5CO_2^-)}{V}}{\frac{n_i(C_6H_5CO_2H)}{V}} = \frac{(C.V_2)}{(C.V_1)} = \frac{20}{10} \quad \text{et} \quad \frac{[C_6H_5CO_2^-]_i}{[C_6H_5CO_2H]_i} = 2.$$

$$\mathbf{b} - pH = pK_{a1} + \log \frac{[C_6H_5CO_2^-]}{[C_6H_5CO_2H]} \rightarrow \log \frac{[C_6H_5CO_2^-]}{[C_6H_5CO_2H]} = pH - pK_{a1} \quad \text{et} \quad \frac{[C_6H_5CO_2^-]}{[C_6H_5CO_2H]} = 10^{pH - pK_{a1}}.$$

$$\text{A.N : } \frac{[C_6H_5CO_2^-]}{[C_6H_5CO_2H]} = 10^{4,7 - 4,2} \quad \text{et} \quad \frac{[C_6H_5CO_2^-]}{[C_6H_5CO_2H]} = 3,16$$

$$\mathbf{c} - \frac{[C_6H_5CO_2^-]_i}{[C_6H_5CO_2H]_i} < \frac{[C_6H_5CO_2^-]}{[C_6H_5CO_2H]} \rightarrow \text{la réaction évolue spontanément dans le sens direct.}$$

Ce résultat est conforme à la prévision de la question précédente.



A t = 0	C.V ₁	C.V ₃	C.V ₂	C.V ₄
A t _f	10 ⁻³ - x _f	10 ⁻³ - x _f	2.10 ⁻³ + x _f	2.10 ⁻³ + x _f

$$K = \frac{[C_6H_5CO_2^-][C_5H_5NH^+]}{[C_6H_5CO_2H][C_5H_5N]} = \frac{\frac{n(C_6H_5CO_2^-)}{V} \frac{n(C_5H_5NH^+)}{V}}{\frac{n(C_6H_5CO_2H)}{V} \frac{n(C_5H_5N)}{V}} = \frac{(2 \cdot 10^{-3} + x_f)(2 \cdot 10^{-3} + x_f)}{(10^{-3} - x_f)(10^{-3} - x_f)} = \frac{(2 \cdot 10^{-3} + x_f)^2}{(10^{-3} - x_f)^2}$$

$$\rightarrow \frac{(2 \cdot 10^{-3} + x_f)}{(10^{-3} - x_f)} = \sqrt{K} \rightarrow 2 \cdot 10^{-3} + x_f = 10^{-3} \sqrt{K} - x_f \sqrt{K} \rightarrow x_f (1 + \sqrt{K}) = (\sqrt{K} - 2) 10^{-3}$$

$$\text{et} \quad x_f = \frac{(\sqrt{K} - 2) 10^{-3}}{(1 + \sqrt{K})}. \quad \text{A.N : } x_f = \frac{(\sqrt{10} - 2) 10^{-3}}{(1 + \sqrt{10})} \quad \text{et} \quad x_f = 0,28 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

Exercice 7 :

1°) On donne ci-dessous le tableau d'avancement volumique de la réaction de dissociation d'un acide AH dans l'eau :

Equation de la réaction		$\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{A}^-$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L^{-1})	Concentrations molaires (mol.L^{-1})			
Initial ($t = 0$)	0	C	excès	$10^{\frac{-\text{pK}_e}{2}}$	0
Final	y_f	$C - y_f$	excès	$10^{-\text{pH}}$	y_f

a - En utilisant la loi de l'électro neutralité, déduire que $y_f \approx [\text{H}_3\text{O}^+]$.

b - Montrer alors que le taux d'avancement final de la réaction s'exprime par : $\tau_f = \frac{10^{-\text{pH}}}{C}$.

2°) On considère quatre solutions aqueuses d'acides différents et de même concentration molaire C. Les valeurs du pH des ces différentes solutions sont données dans le tableau suivant :

acide	A ₁ H	A ₂ H	A ₃ H	A ₄ H
pH de la solution	3,6	3,4	3,1	2,0

a - Sachant que l'un des acides considérés est un acide fort, indiquer lequel. Calculer alors la valeur de la concentration molaire C commune à ces solutions.

b - Calculer la valeur du taux d'avancement final τ_f relatif à chacun des acides faibles.

c - Déduire alors une classification des ces acides faibles par ordre de force croissante.

3°) On donne ci-dessous les valeurs du pK_a des couples acide-base correspondant aux acides faibles :

pK_a	4,2	4,8	5,2

Associer, en le justifiant, chaque acide faible à la valeur du pK_a du couple acide-base correspondant.

4°) On dilue la solution (S) de l'acide dont le couple correspondant a un $\text{pK}_a = 5,2$.

On obtient une nouvelle solution (S') de $\text{pH}' = 4,1$.

a - En utilisant la relation $\text{pH} = \text{pK}_a + \log \tau_f$, calculer la nouvelle valeur du taux d'avancement final τ'_f relatif à l'acide faible considéré.

b - Calculer alors la valeur de la concentration molaire C' de la solution (S').

c - Déduire l'effet de la dilution sur la dissociation d'un acide faible dans l'eau.

Réponse :

1°) a - $\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{A}^-$



Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont : AH, H_3O^+ , A^- et OH^- .

La loi de l'électro neutralité s'écrit : $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{A}^-] + [\text{OH}^-] \rightarrow [\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{OH}^-]$.

La solution étant acide $\rightarrow [\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+]$ donc $[\text{A}^-] \approx [\text{H}_3\text{O}^+] \xrightarrow{[\text{A}^-]=y_f} y_f \approx [\text{H}_3\text{O}^+]$.

b - On a : $\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} \xrightarrow{y_{\max}=C} \tau_f = \frac{y_f}{C} \xrightarrow{y_f=[\text{H}_3\text{O}^+]=10^{-\text{pH}}} \tau_f = \frac{10^{-\text{pH}}}{C}$.

2°) a - **A même concentration**, l'acide fort correspond à la solution aqueuse dont le pH est le plus petit. Donc l'acide A₄H est l'acide fort.

Pour une solution d'acide fort, $\tau_f = 1 \rightarrow \frac{10^{-\text{pH}}}{C} = 1 \rightarrow C = 10^{-\text{pH}}$. A.N : $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - Pour S(A₁H) : $\tau_{f1} = \frac{10^{-3,6}}{10^{-2}}$ et $\tau_{f1} = 2,51.10^{-2}$

Pour S(A₂H) : $\tau_{f2} = \frac{10^{-3,4}}{10^{-2}}$ et $\tau_{f2} = 3,98.10^{-2}$

Pour $S(A_3H)$: $\tau_{f3} = \frac{10^{-3,1}}{10^{-2}}$ et $\tau_{f3} = 7,94 \cdot 10^{-2}$

c - A même concentration, un acide est d'autant plus fort que le pH de sa solution aqueuse est plus petit (ou que le taux d'avancement final τ_f de sa réaction de dissociation dans l'eau est plus grand).

	A_1H	A_2H	A_3H	
pH	3,6	3,4	3,1	Force des acides croissante
	2,51	3,98	7,94	$\tau_f (10^{-2})$

3⁰) Un acide est d'autant plus fort que le pK_a du couple acide-base correspondant est plus petit.

	A_1H	A_2H	A_3H	
pK_a	5,2	4,8	4,2	Force des acides croissante

4⁰) a - $pH = pK_a + \log \tau_f \rightarrow \log \tau_f = pH - pK_a$ et $\tau_f = 10^{pH - pK_a}$.

A.N : pour la solution (S') : $\tau'_f = 10^{4,1 - 5,2} = 10^{-1,1}$ et $\tau'_f = 7,94 \cdot 10^{-2}$.

b - $\tau'_f = \frac{10^{-pH'}}{C'}$ $\rightarrow C' = \frac{10^{-pH'}}{\tau'_f}$. A.N : $C' = \frac{10^{-4,1}}{10^{-1,1}}$ et $C' = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

c - $C' < C \rightarrow \tau'_f > \tau_f$: La dilution favorise la dissociation d'un acide faible.

Exercice 8 :

On considère trois couples acide-base (A_1H/A_1^-), (A_2H/A_2^-) et (A_3H/A_3^-).

Le couple (A_1H/A_1^-) est caractérisé par $K_{b1} = 1,6 \cdot 10^{-10}$ et le couple (A_3H/A_3^-) par $pK_{a3} = 5,2$.

1⁰) a - Donner la définition d'un monoacide dans la théorie de Brönsted.

b - Calculer la valeur de pK_{a1} du couple (A_1H/A_1^-).

c - Comparer la force des deux acides A_1H et A_3H .

2⁰) On prépare trois solutions aqueuses (S_1), (S_2) et (S_3) respectivement des acides A_1H , A_2H et A_3H .

Ces trois solutions ont une même concentration $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Le pH de chacune des solutions a une des trois valeurs suivantes : 2 ; 3,1 ; 3,6.

a - Le taux d'avancement final de la réaction de dissociation d'un acide dans l'eau s'écrit : $\tau_f = \frac{10^{-pH}}{C}$.

Recopier et remplir le tableau suivant :

pH	2	3,1	3,6
τ_f			

b - Justifier que l'un des acides considérés est un acide fort.

c - Dans une solution aqueuse d'acide faible, dans le cas où $\tau_f \ll 1$ (l'acide est faiblement dissocié), la relation : $pK_a = pH - \log \tau_f$ est vérifiée. Attribuer alors à chacune des (S_1), (S_2) et (S_3) la valeur du pH correspondant. Justifier la réponse.

3⁰) Classer les bases conjuguées A_1^- , A_2^- et A_3^- des acides considérés par force de basicité croissante. Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰) a - Un monoacide est une molécule ou un ion capable de céder un ion H^+ au cours d'une réaction chimique.

b - On a ; $K_{a1} \cdot K_{b1} = K_e \rightarrow K_{a1} = \frac{K_e}{K_{b1}} \xrightarrow{pK_a = -\log K_a} pK_{a1} = -\log \frac{K_e}{K_{b1}}$.

A.N : $pK_{a1} = -\log \frac{10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-10}}$ et $pK_{a1} = 4,2$.

c - $pK_{a1} < pK_{a3} \rightarrow$ l'acide A_1H est plus fort que l'acide A_3H .

2⁰) a -

pH	2	3,1	3,6
τ_f	1	$7,9 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$

b - Pour la solution de pH = 2, on a $\tau_f = 1$.

L'acide correspondant est alors totalement dissocié donc c'est un acide fort.

c - Pour une solution d'acide faible ($\tau_f < 1$), on a : $pK_a = pH - \log \tau_f$

* Pour $\tau_f = 7,9 \cdot 10^{-2} \rightarrow pK_a = 3,1 - \log(7,9 \cdot 10^{-2}) = 4,2$ correspond au couple acide-base (A_1H/A_1^-).

La solution (S_1) a un pH = 3,1.

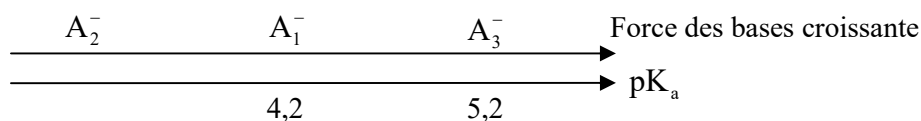
* Pour $\tau_f = 2,5 \cdot 10^{-2} \rightarrow pK_a = 3,6 - \log(2,5 \cdot 10^{-2}) = 5,2$ correspond au couple acide-base (A_3H/A_3^-).

La solution (S_3) a un pH = 3,6

* La solution (S_2) aura donc un pH = 2. Elle correspond à la solution d'acide fort (A_2H est l'acide fort).

3⁰) Un acide est d'autant plus fort que le pK_a du couple correspondant est plus petit.

Plus un acide est fort, plus sa base conjuguée est faible.



Exercice 9 :

On considère les couples acide-base suivants :

(CH_3COOH/CH_3COO^-) ; $K_{a1} = 1,8 \cdot 10^{-5}$

($HCOOH/HCOO^-$) ; $K_{a2} = 1,8 \cdot 10^{-4}$

1⁰) Comparer la force des acides CH_3COOH et $HCOOH$ ainsi que celle des bases CH_3COO^- et $HCOO^-$.

2⁰) a - Ecrire l'équation chimique de la réaction de dissociation de chacun des deux acides dans l'eau.

b - Donner l'expression de chacune des constantes d'acidité K_{a1} et K_{a2} .

3⁰) On fait réagir CH_3COOH avec $HCOO^-$.

a - Ecrire l'équation chimique de la réaction acide-base qui a lieu.

b - Donner l'expression de la constante d'équilibre K relative à cette réaction.

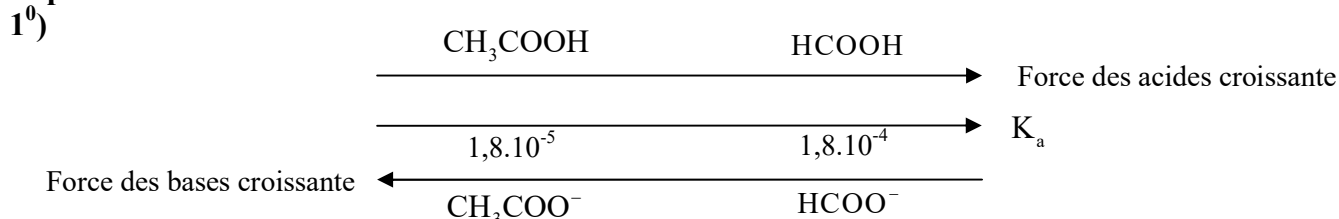
Etablir la relation qui lie K , K_{a1} et K_{a2} . Calculer alors la valeur de K .

4⁰) On réalise un système chimique formé initialement par 0,2 mol de $HCOOH$, 0,2 mol de CH_3COO^- , 0,22 mol de CH_3COOH et 0,22 mol de $HCOO^-$.

a - Montrer que le système ainsi formé n'est pas en équilibre. En déduire le sens d'évolution spontané.

b - Déterminer la valeur de l'avancement final x_f de la réaction.

Réponse :



2⁰) a - $CH_3COOH + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + CH_3COO^-$

$HCOOH + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + HCOO^-$

$$b - K_{a1} = \frac{[H_3O^+].[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]} \quad \text{et} \quad K_{a2} = \frac{[H_3O^+].[HCOO^-]}{[HCOOH]}.$$



$$b - K = \frac{[CH_3COO^-][HCOOH]}{[CH_3COOH][HCOO^-]}$$

$$K = [H_3O^+] \cdot \frac{[CH_3COO^-][HCOOH]}{[CH_3COOH][HCOO^-]} \cdot \frac{1}{[H_3O^+]} \rightarrow K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}}. \quad \text{A.N : } K = \frac{1,8 \cdot 10^{-5}}{1,8 \cdot 10^{-4}} \quad \text{et} \quad K = 0,1.$$

$$4^0) a - \pi_i = \frac{[CH_3COO^-]_i [HCOOH]_i}{[CH_3COOH]_i [HCOO^-]_i} = \frac{\frac{n_i(CH_3COO^-)}{V} \frac{n_i(HCOOH)}{V}}{\frac{n_i(CH_3COOH)}{V} \frac{n_i(HCOO^-)}{V}} = \frac{n_i(CH_3COO^-) \cdot n_i(HCOOH)}{n_i(CH_3COOH) \cdot n_i(HCOO^-)}$$

$$\text{A.N : } \pi_i = \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,22 \cdot 0,22} \quad \text{et} \quad \pi_i = 0,826$$

$\pi_i \neq K \rightarrow$ le système n'est pas en équilibre.

$\pi_i > K \rightarrow$ la réaction évolue spontanément dans le sens inverse.



$$\begin{array}{ccccc} \text{A } t = 0 & 0,22 & 0,22 & 0,2 & 0,2 \\ \text{A } t_f & 0,22 + x_f & 0,22 + x_f & 0,2 - x_f & 0,2 - x_f \end{array}$$

$$K = \frac{\frac{n(CH_3COO^-)}{V} \frac{n(HCOOH)}{V}}{\frac{n(CH_3COOH)}{V} \frac{n(HCOO^-)}{V}} = \frac{(0,2 - x_f)(0,2 - x_f)}{(0,22 + x_f)(0,22 + x_f)} = \frac{(0,2 - x_f)^2}{(0,22 + x_f)^2}$$

$$\rightarrow \frac{(0,2 - x_f)}{(0,22 + x_f)} = \sqrt{K} \rightarrow 0,2 - x_f = 0,22\sqrt{K} + x_f\sqrt{K} \rightarrow x_f(1 + \sqrt{K}) = (0,2 - 0,22\sqrt{K})$$

$$\text{et } x_f = \frac{0,2 - 0,22\sqrt{K}}{(1 + \sqrt{K})}. \quad \text{A.N : } x_f = \frac{0,2 - 0,22\sqrt{0,1}}{(1 + \sqrt{0,1})} \quad \text{et} \quad x_f = 0,1 \text{ mol.}$$

Exercice 10 :

Une solution (S) d'acide benzoïque C_6H_5COOH , de concentration $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$, a un $pH = 3,1$.

1⁰) a - Soit $[H_3O^+]$ la molarité des ions H_3O^+ dans la solution (S). Calculer le rapport $\frac{[H_3O^+]}{C}$.

Justifier que l'acide benzoïque est faible.

b - Ecrire alors l'équation de la réaction de dissociation de C_6H_5COOH dans l'eau.

c - Donner l'expression de la constante d'acidité K_a de couple $(C_6H_5COOH/C_6H_5COO^-)$.

d - Montrer que le rapport $\frac{[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]} = 10^{pH - pK_a}$

2⁰) a - Dresser le tableau d'avancement volumique de la réaction de l'acide benzoïque avec l'eau.

b - Montrer que l'avancement volumique final $y_f = 10^{-pH}$.

c - Etablir l'expression : $K_a = \frac{10^{-2 \cdot pH}}{C - 10^{-pH}}$. Calculer la valeur de K_a puis celle de pK_a .

d - Calculer la valeur du rapport $R = \frac{[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]}$.

3⁰) On dilue dix fois la solution (S). On obtient une solution (S') de pH = 3,6.

a - Calculer la nouvelle valeur du rapport $R = \frac{[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]}$

b - Préciser alors l'effet de la dilution sur la dissociation d'un acide faible.

Réponse :

1⁰) a - $\frac{[H_3O^+]}{C} = \frac{10^{-pH}}{C} \rightarrow \frac{[H_3O^+]}{C} = \frac{10^{-3,1}}{10^{-2}} \text{ et } \frac{[H_3O^+]}{C} = 7,94 \cdot 10^{-2}.$

$\frac{[H_3O^+]}{C} < 1 \rightarrow [H_3O^+] < C \text{ donc l'acide } C_6H_5COOH \text{ est faible.}$

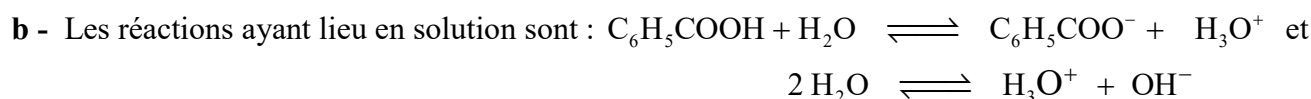


c - $K_a = \frac{[H_3O^+].[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]}.$

d - $\frac{[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]} = \frac{K_a}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-pK_a}}{10^{-pH}} \text{ et } \frac{[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]} = 10^{pH-pK_a}.$

2⁰) a -

Equation chimique		$C_6H_5COOH + H_2O \rightleftharpoons C_6H_5COO^- + H_3O^+$			
Etat du système	Avancement volumique	Concentrations molaires			
Initial	0	C	excès	0	$10^{\frac{pK_a}{2}}$
final	y _f	C - y _f	excès	y _f	10^{-pH}



Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont : C_6H_5COOH , $C_6H_5COO^-$, H_3O^+ et OH^-

L'électro neutralité implique que :

$[H_3O^+] = [C_6H_5COO^-] + [OH^-] \rightarrow [C_6H_5COO^-] = [H_3O^+] - [OH^-]$

L solution étant acide, $[H_3O^+] \gg [OH^-] \rightarrow [C_6H_5COO^-] \approx [H_3O^+] \text{ et } y_f = 10^{-pH}.$

c - $K_a = \frac{[H_3O^+].[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]} = \frac{10^{-pH} \cdot y_f}{C - y_f} \xrightarrow{y_f = 10^{-pH}} K_a = \frac{10^{-2pH}}{C - 10^{-pH}}.$

A.N : $K_a = \frac{10^{-2,3,1}}{10^{-2} - 10^{-3,1}} \text{ et } K_a = 6,85 \cdot 10^{-5} \xrightarrow{pK_a = -\log K_a} pK_a = 4,16.$

d - $R = \frac{[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]} = 10^{3,1-4,16} \text{ et } R = 8,71 \cdot 10^{-2}.$

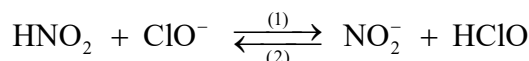
3⁰) a - Après dilution, $R = \frac{[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]} = 10^{3,6-4,16} \text{ et } R = 27,54 \cdot 10^{-2}.$

b - Après dilution, $R = \frac{[C_6H_5COO^-]}{[C_6H_5COOH]}$ augmente $\rightarrow [C_6H_5COO^-]$ augmente et $[C_6H_5COOH]$ diminue.

La dilution favorise alors la dissociation de l'acide faible.

Exercice 11 :

On considère la réaction acide-base suivante :



La constante d'équilibre relative à cette réaction est $K = 10^4$.

1⁰) a - Donner la définition d'un monoacide et celle d'une monobase dans la théorie de Brönsted.

b - Préciser les couples (acide / base) mis en jeu dans cette réaction ?

2⁰) Sachant que la constante d'acidité du couple qui contient l'entité HNO_2 est $K_{a1} = 5 \cdot 10^{-4}$:

a - Déterminer la constante d'acidité K_{a2} de l'autre couple mis en jeu dans la réaction considérée.

b - Comparer alors les forces respectives des acides dans ces deux couples, ainsi que celles de leurs bases conjuguées.

3⁰) Les molarités initiales dans le mélange sont :

$$[\text{HNO}_2]_i = [\text{ClO}^-]_i = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \quad \text{et} \quad [\text{NO}_2^-]_i = [\text{HClO}]_i = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

a - Montrer que le système ainsi formé n'est pas en équilibre. Dédurre le sens d'évolution spontanée de la réaction.

b - Déterminer la valeur de l'avancement volumique final y_f de la réaction.

Réponse :

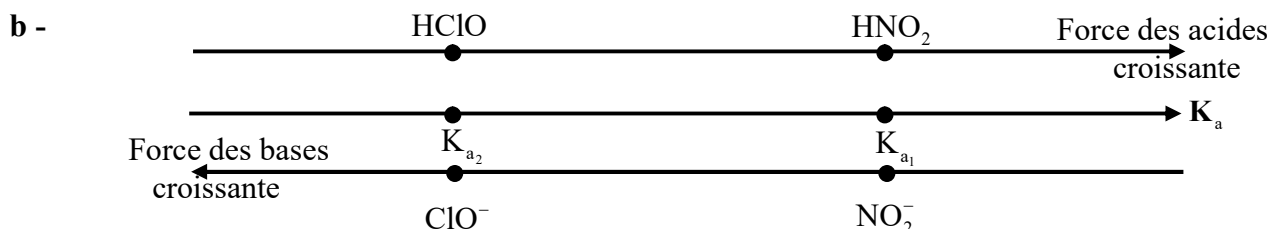
1⁰) a - Un monoacide est une molécule ou un ion susceptible de libérer un ion H^+ dans une réaction chimique.

Une monobase est une molécule ou un ion susceptible de capter un ion H^+ dans une réaction chimique.

b - Les couples (acide/base) mis en jeu sont : $(\text{HNO}_2/\text{NO}_2^-)$ et $(\text{HClO}/\text{ClO}^-)$.

$$2^0) \text{ a - } K = \frac{[\text{NO}_2^-] \cdot [\text{HClO}]}{[\text{HNO}_2] \cdot [\text{ClO}^-]} = [\text{H}_3\text{O}^+] \cdot \frac{[\text{NO}_2^-] \cdot [\text{HClO}]}{[\text{HNO}_2] \cdot [\text{ClO}^-] \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]} \rightarrow K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}} \rightarrow K_{a2} = \frac{K_{a1}}{K}$$

$$\text{A.N : } K_{a2} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^4} \quad \text{et} \quad K_{a2} = 5 \cdot 10^{-8}$$



$$3^0) \text{ a - } \pi_i = \frac{[\text{NO}_2^-]_i \cdot [\text{HClO}]_i}{[\text{HNO}_2]_i \cdot [\text{ClO}^-]_i} = \frac{10^{-1} \cdot 10^{-1}}{10^{-2} \cdot 10^{-2}} \quad \text{et} \quad \pi_i = 100$$

$\pi_i \neq K \rightarrow$ le système n'est pas en équilibre.

$\pi_i < K \rightarrow$ le système évolue spontanément dans le sens direct.



$$\begin{array}{ccccccc} \text{à } t = 0 & 10^{-2} & 10^{-2} & 10^{-1} & 10^{-1} \\ \text{à } t_{\text{eq}} & 10^{-2} - y_f & 10^{-2} - y_f & 10^{-1} + y_f & 10^{-1} + y_f \end{array}$$

$$K = \frac{(10^{-1} + y_f)^2}{(10^{-2} - y_f)^2} \rightarrow \frac{(10^{-1} + y_f)}{(10^{-2} - y_f)} = \sqrt{K} \rightarrow y_f = \frac{10^{-2} \cdot \sqrt{K} - 10^{-1}}{1 + \sqrt{K}}$$

$$\text{A.N : } y_f = \frac{1 - 0,1}{1 + 100} \quad \text{et} \quad y_f = 8,91 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

Exercice 12 :

La pyridine est une base de formule brute C_5H_5N .

Une solution aqueuse (S) de pyridine, de concentration molaire $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$, a un $\text{pH} = 8,60$.

1°) Le tableau d'avancement volumique de la réaction de dissociation de la pyridine dans l'eau est :

Equation de la réaction		$C_5H_5N + H_2O \rightleftharpoons C_5H_5NH^+ + OH^-$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L^{-1})	Concentrations molaires (mol.L^{-1})			
Initial ($t = 0$)	0	C	excès	0	$10^{\frac{\text{pK}_e}{2}}$
Final	y_f	$C - y_f$	excès	y_f	$10^{\text{pH} - \text{pK}_e}$

a - Montrer que le taux d'avancement final de la réaction s'écrit : $\tau_f = \frac{10^{\text{pH} - \text{pK}_e}}{C}$. Calculer la valeur de τ_f .

b - Ecrire l'expression de la constante d'acidité K_a . Déduire l'expression : $\text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[C_5H_5N]}{[C_5H_5NH^+]}$.

c - Dans le cas où la base est faiblement dissociée ($\tau_f \ll 1$), établir la relation : $\text{pK}_a = \text{pH} + \log \tau_f$.

Calculer alors la valeur de pK_a .

2°) A un volume $V_0 = 2 \text{ mL}$ de la solution (S) on ajoute $V = 48 \text{ mL}$ d'eau.

a - Calculer la concentration molaire C' de la solution (S') ainsi obtenue.

b - En posant $C' = \frac{C}{n}$ et en utilisant la relation : $\text{pH}' = \text{pH} - \frac{1}{2} \log n$, déterminer la valeur de pH' .

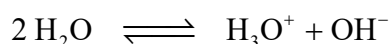
c - Calculer la valeur du taux d'avancement final τ'_f après la dilution.

d - Etablir l'expression : $\frac{\tau'_f}{\tau_f} = \sqrt{\frac{C}{C'}}$.

En déduire l'effet de la dilution sur la dissociation d'une base faible dans l'eau.

Réponse :

1°) a - $C_5H_5N + H_2O \rightleftharpoons C_5H_5NH^+ + OH^-$



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont : C_5H_5N , $C_5H_5NH^+$, H_3O^+ et OH^- .

L'électro neutralité $\rightarrow [H_3O^+] + [C_5H_5NH^+] = [OH^-] \rightarrow [C_5H_5NH^+] = [OH^-] - [H_3O^+]$

La solution étant basique, $[H_3O^+] \ll [OH^-] \rightarrow [C_5H_5NH^+] = [OH^-]$ et $y_f = 10^{\text{pH} - \text{pK}_e}$

$$\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} \xrightarrow[y_{\max} = C]{y_f = 10^{\text{pH} - \text{pK}_e}} \tau_f = \frac{10^{\text{pH} - \text{pK}_e}}{C}. \quad \text{A.N : } \tau_f = \frac{10^{8,6-14}}{10^{-2}} \quad \text{et} \quad \tau_f = 3,98 \cdot 10^{-4}.$$

b -

$$K_a = \frac{[H_3O^+].[C_5H_5N]}{[C_5H_5NH^+]} \rightarrow -\log K_a = -\log [H_3O^+] - \log \frac{[C_5H_5N]}{[C_5H_5NH^+]} \rightarrow \text{pK}_a = \text{pH} - \log \frac{[C_5H_5N]}{[C_5H_5NH^+]}$$

$$\text{donc : } \text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[C_5H_5N]}{[C_5H_5NH^+]}$$

$$\text{c - } \text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{C - y_f}{y_f} \xrightarrow[y_f = C \cdot \tau_f]{\tau_f = \frac{y_f}{C}} \text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{1 - \tau_f}{\tau_f}.$$

$$\tau_f \ll 1 \rightarrow \text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{1}{\tau_f} \rightarrow \text{pH} = \text{pK}_a - \log \tau_f \quad \text{et} \quad \text{pK}_a = \text{pH} + \log \tau_f$$

$$\text{A.N : } \text{pK}_a = 8,6 + \log(3,98 \cdot 10^{-4}) \quad \text{et} \quad \text{pK}_a = 5,2.$$

$$2^0) \text{ a - } C' = \frac{C \cdot V_0}{V_0 + V}. \text{ A.N: } C' = \frac{10^{-2} \cdot 2}{2 + 48} \text{ et } C' = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{b - } C' = \frac{C}{n} \rightarrow n = \frac{C}{C'}. \text{ A.N: } n = \frac{10^{-2}}{4 \cdot 10^{-4}} \text{ et } n = 25$$

$$\text{pH}' = \text{pH} - \frac{1}{2} \log n \xrightarrow{\text{A.N}} \text{pH}' = 8,6 - \frac{1}{2} \log 25 \text{ et } \text{pH}' = 7,9.$$

$$\text{c - On a : } \frac{\tau_f'}{\tau_f} = \frac{10^{\text{pH}' - \text{pK}_e}}{C'} \cdot \frac{C}{10^{\text{pH} - \text{pK}_e}} = \frac{C}{C'} \cdot 10^{\text{pH}' - \text{pH}}$$

$$\text{or : } \text{pK}_a = \text{pH} + \log \tau_f = \text{pH}' + \log \tau_f' \rightarrow \text{pH}' - \text{pH} = \log \tau_f - \log \tau_f' = \log \frac{\tau_f}{\tau_f'} \text{ et } 10^{\text{pH}' - \text{pH}} = \frac{\tau_f}{\tau_f'}$$

$$\text{donc : } \frac{\tau_f'}{\tau_f} = \frac{C}{C'} \cdot \frac{\tau_f}{\tau_f'} \rightarrow \left(\frac{\tau_f'}{\tau_f} \right)^2 = \frac{C}{C'} \text{ et } \frac{\tau_f'}{\tau_f} = \sqrt{\frac{C}{C'}}$$

$$\text{d - La dilution } \rightarrow C' < C \rightarrow \sqrt{\frac{C}{C'}} > 1 \rightarrow \frac{\tau_f'}{\tau_f} > 1 \rightarrow \tau_f' > \tau_f$$

La dilution favorise la dissociation d'une base faible dans l'eau.

Exercice 13 :

On fait réagir 1,5 mol de base CH_3COO^- avec 2,2 mol d'acide HNO_2 . Le système chimique ainsi formé est le siège d'une réaction chimique limitée

1⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction chimique. En déduire les couples acide-base mis en jeu.

b - Donner l'expression de la constante d'équilibre K de la réaction étudiée.

c - A l'équilibre chimique le mélange renferme 0,4 mol de CH_3COO^- . Montrer que $K = 2,75$

d - Comparer les forces des acides des deux couples considérés

2⁰) Soit K_{a1} la constante d'acidité du couple acide-base contenant HNO_2 et K_{a2} la constante d'acidité du couple acide-base contenant CH_3COO^- .

a - Exprimer pK_{a1} en fonction de $\log K$ et pK_{a2} .

b - Calculer la valeur de pK_{a1} sachant que $\text{pK}_{a2} = 3,75$.

c - Comparer les forces des bases des deux couples considérés. Justifier la réponse.

Réponse :



Les couples acide-base mis en jeu sont : $\left(\frac{\text{HNO}_2}{\text{NO}_2^-} \right)$ et $\left(\frac{\text{CH}_3\text{COOH}}{\text{CH}_3\text{COO}^-} \right)$

$$\text{b - } K = \frac{[\text{NO}_2^-] \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]}{[\text{HNO}_2] \cdot [\text{CH}_3\text{COO}^-]}$$



$$\text{à } t = 0 \quad \begin{array}{ccccc} 2,2 & 1,5 & 0 & 0 & \text{mol} \end{array}$$

$$\text{à } t_{\text{eq}} \quad \begin{array}{ccccc} 2,2 - x_f & 1,5 - x_f & x_f & x_f & \text{mol} \end{array}$$

$$n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COO}^-) = 0,4 \text{ mol} \rightarrow 1,5 - x_f = 0,4 \text{ et } x_f = 1,1 \text{ mol.}$$

$$K = \frac{[\text{NO}_2^-] \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]}{[\text{HNO}_2] \cdot [\text{CH}_3\text{COO}^-]} = \frac{\frac{n_{\text{eq}}(\text{NO}_2^-)}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOH})}{V}}{\frac{n_{\text{eq}}(\text{HNO}_2)}{V} \cdot \frac{n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COO}^-)}{V}} = \frac{n_{\text{eq}}(\text{NO}_2^-) \cdot n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COOH})}{n_{\text{eq}}(\text{HNO}_2) \cdot n_{\text{eq}}(\text{CH}_3\text{COO}^-)}$$

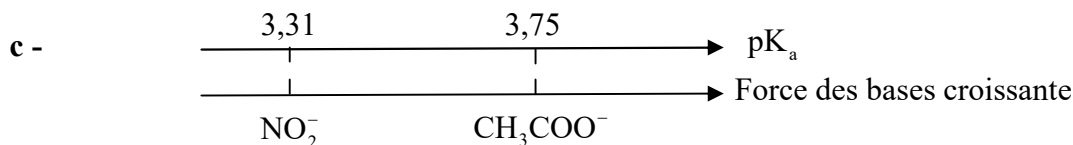
$$\rightarrow K = \frac{x_f^2}{(2,2 - x_f) \cdot (1,5 - x_f)}. \text{ A.N : } K = \frac{(1,1)^2}{(2,2 - 1,1) \cdot (1,5 - 1,1)} \text{ et } K = 2,75.$$

d - $K > 1 \rightarrow$ l'acide HNO_2 est plus fort que l'acide CH_3COOH .

$$2^0) \text{ a - } K = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HNO}_2]} \cdot \frac{[\text{NO}_2^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} \cdot \frac{1}{[\text{CH}_3\text{COO}^-]} \rightarrow K = \frac{K_{a1}}{K_{a2}} \xrightarrow{K_a = 10^{-pK_a}} K = 10^{pK_{a2} - pK_{a1}}$$

$$\log K = pK_{a2} - pK_{a1} \text{ donc } pK_{a1} = pK_{a2} - \log K$$

$$\text{b - } pK_{a1} = 3,75 - \log 2,75 \text{ et } pK_{a1} = 3,31$$



Exercice 14 :

La mesure du pH de trois solutions aqueuses acides, de même concentration molaire $C = 0,05 \text{ mol.L}^{-1}$, a donné les valeurs consignées dans le tableau ci-contre :

1⁰) Montrer que l'acide A_2H est fort tandis que les deux autres sont des acides faibles.

Acide	Solution aqueuse	pH
A_1H	(S ₁)	3,05
A_2H	(S ₂)	1,30
A_3H	(S ₃)	2,55

2⁰) On donne le tableau d'avancement volumique de la réaction d'ionisation d'un acide faible AH dans l'eau :

Equation chimique		$\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{A}^-$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L ⁻¹)	Concentration (mol.L ⁻¹)			
Initial	0	C	Excès	$10^{-\frac{pK_e}{2}}$	0
final	y_f	$C - y_f$	Excès	$10^{-\text{pH}}$	y_f

a - Soit τ_f le taux d'avancement final de la réaction. En exploitant la loi de l'électro neutralité, exprimer $[\text{H}_3\text{O}^+]$ en fonction de C et de τ_f . En déduire que le pH de la solution s'écrit : $\text{pH} = -\log C - \log \tau_f$.

b - Montrer que la constante d'acidité du couple (AH/A^-) s'exprime par : $K_a = 10^{-\text{pH}} \cdot \frac{\tau_f}{1 - \tau_f}$.

c - Sachant que l'acide est faiblement dissocié, déduire l'expression : $pK_a = 2\text{pH} + \log C$.

3⁰) a - Calculer le pK_a de chacun des couples correspondant aux acides faibles considérés.

b - Comparer alors les forces de ces deux acides faibles.

4⁰) On fait agir l'acide A_1H avec la base A_3^- .

a - Ecrire l'équation de la réaction acide-base qui a lieu.

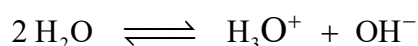
b - Déterminer la valeur de la constante d'équilibre K de la réaction considérée.

Réponse :

1⁰)

Acide	Solution aqueuse	C (mol.L ⁻¹)	pH	$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} \text{ (mol.L}^{-1}\text{)}$	Déduction
A_1H	(S ₁)	$5 \cdot 10^{-2}$	3,05	$10^{-3,05} = 8,9 \cdot 10^{-4}$	$[\text{H}_3\text{O}^+]_1 < C \rightarrow \text{A}_1\text{H acide faible}$
A_2H	(S ₂)	$5 \cdot 10^{-2}$	1,30	$10^{-1,30} = 5 \cdot 10^{-2}$	$[\text{H}_3\text{O}^+]_2 = C \rightarrow \text{A}_2\text{H acide fort}$
A_3H	(S ₃)	$5 \cdot 10^{-2}$	2,55	$10^{-2,55} = 2,8 \cdot 10^{-3}$	$[\text{H}_3\text{O}^+]_3 < C \rightarrow \text{A}_3\text{H acide faible}$

2⁰) a - Les réactions ayant lieu en solution sont : $\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{A}^-$ et



Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont : AH , A^- , H_3O^+ et OH^- .

L'électro neutralité implique que : $[H_3O^+] = [A^-] + [OH^-]$

$$\rightarrow [A^-] = [H_3O^+] - [OH^-] \xrightarrow{[OH^-] \ll [H_3O^+]} [A^-] = [H_3O^+] \xrightarrow{[A^-]=y_f} [H_3O^+] = y_f$$

on a : $\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} \xrightarrow{y_{\max}=C} \tau_f = \frac{y_f}{C} \rightarrow y_f = C \cdot \tau_f$ donc : $[H_3O^+] = C \cdot \tau_f$.

$$C \cdot \tau_f = [H_3O^+] \xrightarrow{[H_3O^+] = 10^{-pH}} C \cdot \tau_f = 10^{-pH} \rightarrow -pH = \log C + \log \tau_f \text{ et } pH = -\log C - \log \tau_f$$

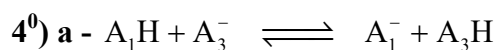
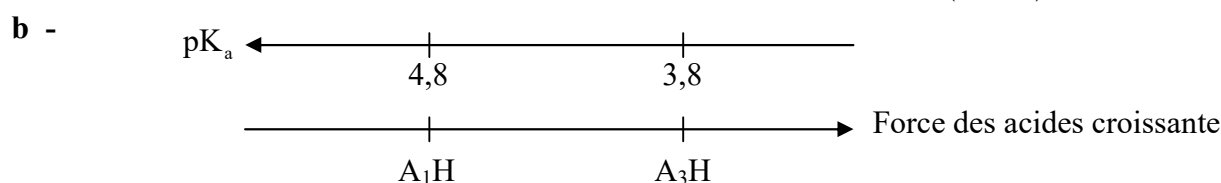
$$b - K_a = \frac{[H_3O^+] \cdot [A^-]}{[AH]} \rightarrow K_a = [H_3O^+] \frac{y_f}{C - y_f} = [H_3O^+] \frac{C \cdot \tau_f}{C - C \cdot \tau_f} \text{ et } K_a = 10^{-pH} \cdot \frac{\tau_f}{1 - \tau_f}$$

c - L'acide est faiblement dissocié $\rightarrow \tau_f \ll 1$

$$\text{donc : } K_a = 10^{-pH} \cdot \tau_f \rightarrow pK_a = pH - \log \tau_f \xrightarrow{-\log \tau_f = pH + \log C} pK_a = 2pH + \log C.$$

3⁰) a - Pour l'acide A_1H : $pK_{a1} = 2pH_1 + \log C \rightarrow pK_{a1} = 2.3,05 + \log(5 \cdot 10^{-2})$ et $pK_{a1} = 4,8$

Pour l'acide A_2H : $pK_{a3} = 2pH_3 + \log C \rightarrow pK_{a3} = 2.2,55 + \log(5 \cdot 10^{-2})$ et $pK_{a3} = 3,8$



$$b - K = \frac{[A_1^-] \cdot [A_3H]}{[A_1H] \cdot [A_3^-]} \rightarrow K = [H_3O^+] \cdot \frac{[A_1^-] \cdot [A_3H]}{[A_1H] \cdot [A_3^-] \cdot [H_3O^+]} = \frac{K_{a1}}{K_{a3}} = \frac{10^{-pK_{a1}}}{10^{-pK_{a3}}} \text{ et } K = 10^{pK_{a3} - pK_{a1}}.$$

A.N : $K = 10^{3,8-4,8}$ et $K = 10^{-1}$.

Exercice 15 :

1^o) On donne ci-dessous le tableau d'avancement volumique de la réaction de dissociation d'une base B dans l'eau :

Equation de la réaction		$B + H_2O \rightleftharpoons BH^+ + OH^-$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L ⁻¹)	Concentrations molaires (mol.L ⁻¹)			
Initial (t = 0)	0	C	excès	0	$10^{\frac{-pK_e}{2}}$
Final	y_f	$C - y_f$	excès	y_f	$10^{pH - pK_e}$

a - En utilisant la loi de l'électro neutralité, déduire que $y_f \approx [OH^-]$.

b - Montrer alors que le taux d'avancement final de la réaction s'exprime par : $\tau_f = \frac{10^{pH - pK_e}}{C}$.

2^o) On considère quatre solutions aqueuses de bases différentes et de même concentration molaire C. Les valeurs du pH des ces différentes solutions sont données dans le tableau suivant :

base	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
pH de la solution	8,1	8,4	8,6	12,0

a - Sachant que l'une des bases considérées est une base forte, indiquer laquelle. Calculer alors la valeur de la concentration molaire C commune à ces solutions.

b - Calculer la valeur du taux d'avancement final τ_f relatif à chacune des bases faibles.

c - Déduire alors une classification des ces bases faibles par ordre de force croissante.

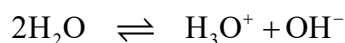
3^o) On donne ci-dessous les valeurs du pK_a des couples acide-base correspondant aux bases faibles :

pK_a	4,2	4,8	5,2

Associer, en le justifiant, chaque base faible à la valeur du pK_a du couple acide-base correspondant.

4°) Montrer que pour une base faible, faiblement dissociée ($\tau_f \ll 1$), on a la relation : $pH = pK_a - \log \tau_f$

Réponse :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont : B , BH^+ , OH^- et H_3O^+ .

La loi de l'électro neutralité s'écrit : $[BH^+] + [H_3O^+] = [OH^-] \rightarrow [BH^+] = [OH^-] - [H_3O^+]$.

La solution étant basique $\rightarrow [H_3O^+] \ll [OH^-]$ donc $[BH^+] \approx [OH^-] \xrightarrow{[BH^+] = y_f} y_f \approx [OH^-]$.

b - On a : $\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} \xrightarrow{y_{\max} = C} \tau_f = \frac{y_f}{C} \xrightarrow{y_f = [OH^-] = 10^{pH - pK_e}} \tau_f = \frac{10^{pH - pK_e}}{C}$.

2°) a - **A même concentration**, la base forte correspond à la solution aqueuse dont le pH est le plus grand. Donc la base B_4 est la base forte.

Pour une solution de base forte, $\tau_f = 1 \rightarrow \frac{10^{pH - pK_e}}{C} = 1 \rightarrow C = 10^{pH - pK_e}$. A.N : $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - Pour $S(B_1)$: $\tau_{f1} = \frac{10^{8,1-14}}{10^{-2}}$ et $\tau_{f1} = 1,26 \cdot 10^{-4}$

Pour $S(B_2)$: $\tau_{f2} = \frac{10^{8,4-14}}{10^{-2}}$ et $\tau_{f2} = 2,51 \cdot 10^{-4}$

Pour $S(B_3)$: $\tau_{f3} = \frac{10^{8,6-14}}{10^{-2}}$ et $\tau_{f3} = 3,98 \cdot 10^{-4}$

c - **A même concentration**, une base est d'autant plus forte que le pH de sa solution aqueuse est plus grand (ou que le taux d'avancement final τ_f de sa réaction de dissociation dans l'eau est plus grand).

B_1	B_2	B_3	Force des bases croissante
8,1	8,4	8,6	pH
1,26	2,51	3,98	$\tau_f (10^{-4})$

3°) Une base est d'autant plus forte que le pK_a du couple acide-base correspondant est plus grand.

B_1	B_2	B_3	Force des bases croissante
4,2	4,8	5,2	pK_a

4°) $K_a = \frac{[H_3O^+][B]}{[BH^+]} \rightarrow K_a = \frac{[H_3O^+](C - y_f)}{y_f} \xrightarrow{y_f = C \cdot \tau_f} K_a = \frac{[H_3O^+](1 - \tau_f)}{\tau_f} \xrightarrow{\tau_f \ll 1} K_a = \frac{[H_3O^+]}{\tau_f}$

$\rightarrow -\log K_a = -\log [H_3O^+] + \log \tau_f \rightarrow pK_a = pH + \log \tau_f \text{ et } pH = pK_a - \log \tau_f$.

Exercice 16 :

On considère trois solutions aqueuses acides (S_1), (S_2) et (S_3) :

Solution		C (mol.L ⁻¹)	pH
(S ₁)	Solution aqueuse d'acide bromhydrique HBr	$C_1 = 10^{-3}$	$pH_1 = 3$
(S ₂)	Solution aqueuse d'acide nitreux HNO ₂	$C_2 = 10^{-1}$	$pH_2 = 2,15$
(S ₃)	Solution aqueuse d'acide éthanöïque CH ₃ COOH	$C_3 = 10^{-1}$	$pH_3 = 2,9$

1°) a - Pourquoi peut-on affirmer que seul l'acide HBr est un acide fort ?

b - Classer, en le justifiant, les deux autres acides par ordre de force croissante.

- 2⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction de dissociation de l'acide HNO₂ dans l'eau.
b - Calculer les molarités des différentes espèces chimiques présentes dans la solution (S₂).
c - Déduire la valeur du pK_a du couple (HNO₂/NO₂⁻).

3⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction de dissociation de l'acide CH₃COOH dans l'eau.

b - Soit τ_f le taux d'avancement final de la réaction. Sachant que $\tau_f = \frac{10^{-\text{pH}}}{C}$, calculer la valeur de τ_f.

c - Etablir, en précisant l'approximation utilisée, l'expression K_a = 10^{-pH} · τ_f

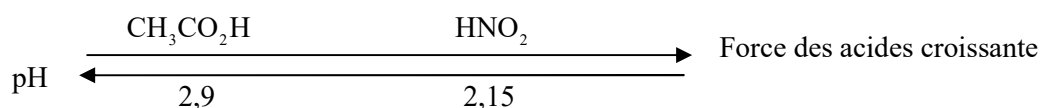
d - Déduire la valeur du pK_a du couple (CH₃COOH/CH₃COO⁻).

Réponse :

1⁰) a - $[\text{H}_3\text{O}^+]_1 = 10^{-\text{pH}_1} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_1 = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} = C_1 \rightarrow \text{HBr est totalement dissocié} \rightarrow \text{HBr est un acide fort}$

$$\left. \begin{aligned} [\text{H}_3\text{O}^+]_2 &= 10^{-\text{pH}_2} = 10^{-2,15} \text{ mol.L}^{-1} < C_2 \\ [\text{H}_3\text{O}^+]_3 &= 10^{-\text{pH}_3} = 10^{-2,9} \text{ mol.L}^{-1} < C_3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \text{HNO}_2 \text{ et } \text{CH}_3\text{COOH} \text{ sont partiellement dissociés} \\ \rightarrow \text{HNO}_2 \text{ et } \text{CH}_3\text{COOH} \text{ sont des acides faibles} \end{cases}$$

b - A même concentration molaire, un acide est d'autant plus fort que le pH de sa solution aqueuse est plus petit :



2⁰) a - $\text{HNO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{NO}_2^-$

b - $\text{HNO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{NO}_2^-$

$2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{OH}^-$

Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont : HNO₂, NO₂⁻, H₃O⁺ et OH⁻

* $[\text{H}_3\text{O}^+]_2 = 10^{-\text{pH}_2} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_2 = 10^{-2,15} \text{ et } [\text{H}_3\text{O}^+]_2 = 7,08 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$

* $[\text{OH}^-]_2 = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]_2} = \frac{10^{-\text{pK}_e}}{10^{-\text{pH}_2}} = 10^{\text{pH}_2 - \text{pK}_e} \rightarrow [\text{OH}^-]_2 = 10^{-11,85} \text{ et } [\text{OH}^-]_2 = 1,41 \cdot 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}.$

* L'électro neutralité : $[\text{H}_3\text{O}^+]_2 = [\text{OH}^-]_2 + [\text{NO}_2^-]$

$\rightarrow [\text{NO}_2^-] = [\text{H}_3\text{O}^+]_2 - [\text{OH}^-]_2 \approx [\text{H}_3\text{O}^+]_2 \text{ et } [\text{NO}_2^-] = 7,08 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$

* La conservation de la matière : $[\text{HNO}_2] + [\text{NO}_2^-] = C$

$\rightarrow [\text{HNO}_2] = C - [\text{NO}_2^-] \rightarrow [\text{HNO}_2] = 10^{-1} - 7,08 \cdot 10^{-3} \text{ et } [\text{HNO}_2] = 92,92 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

c - $\text{pH}_2 = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{NO}_2^-]}{[\text{HNO}_2]} \rightarrow \text{pK}_a = \text{pH} - \log \frac{[\text{NO}_2^-]}{[\text{HNO}_2]}$

A.N : $\text{pK}_a = 2,15 - \log \frac{7,08 \cdot 10^{-3}}{92,92 \cdot 10^{-3}} \text{ et } \text{pK}_a = 3,27$

3⁰) a - $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{CH}_3\text{CO}_2^-$

b - $\tau_f = \frac{10^{-\text{pH}_3}}{C_3} \xrightarrow{\text{A.N.}} \tau_f = \frac{10^{-2,9}}{10^{-1}} \text{ et } \tau_f = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ (}\tau_f = 1,26\%)$

c -	$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$	+	H_2O	$\rightleftharpoons$	H_3O^+	+	CH_3CO_2^-
	à t = 0		C		Excès		$10^{\frac{\text{pK}_e}{2}}$
			0				0
	à t _{eq}		C - y _f		Excès		$10^{-\text{pH}}$
							y _f

$$K_a = \frac{[H_3O^+]_{eq} \cdot [CH_3CO_2^-]_{eq}}{[CH_3CO_2H]_{eq}} \rightarrow K_a = \frac{10^{-pH} \cdot y_f}{C - y_f}$$

$$\tau_f = \frac{y_f}{y_{max}} = \frac{y_f}{C} \rightarrow y_f = \tau_f \cdot C \text{ on écrit alors : } K_a = \frac{10^{-pH} \cdot C \cdot \tau_f}{C - C \cdot \tau_f} = 10^{-pH} \frac{\tau_f}{1 - \tau_f}$$

L'acide est faiblement dissocié $\rightarrow \tau_f \ll 1$ on écrit alors : $K_a = 10^{-pH} \cdot \tau_f$

$$d - K_a = 10^{-pH_3} \cdot \tau_f = 10^{-2,9} \cdot 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ et } K_a = 1,6 \cdot 10^{-5}$$

$$pK_a = -\log K_a \rightarrow pK_a = -\log 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ et } pK_a = 4,8.$$

Etude d'un texte documentaire :

Exercice 1 :

Les pluies acides

Les pluies acides sont des pluies qui ont un pH inférieur à 5. D'habitude, l'eau de pluie se situe aux alentours de 5,6 de pH. Les retombés acides peuvent se caractériser par des précipitations humides, comme la pluie la neige ou le brouillard, mais aussi sous formes sèches dans de fines particules.

Les pluies acides proviennent principalement d'événements naturels comme les éruptions volcaniques, les feux de forêts ou encore de la décomposition naturelle biologique terrestre.

Ces événements entraînent des émissions d'oxydes d'azote et de soufre qui participent à l'acidification de l'atmosphère et donc à celle des pluies. Toutefois, les rejets provoqués par l'industrie, les transports, les centrales énergétiques et notre mode de vie en général contribuent grandement à cette acidification de l'atmosphère, mais également à celle des lacs et des océans, rentrant ainsi dans le processus d'évaporation et de précipitation.

Les retombés acides affaiblissent la flore de notre planète par l'acidification des sols. Elles permettent le développement de maladies ou même rendre complètement « stérile » certaines espèces. La faune est elle aussi impactée par ces retombés acides. Sa base, les insectes, poissons et petits mammifères peuvent subir l'affaiblissement de la flore dans leurs consommations alimentaires.

www.meteocity.com

Questions :

1⁰) a - Que désigne le terme pluie acide ?

b - Les retombés acides sont-elles toujours sous forme de pluies ? Justifier d'après le texte.

2⁰) a - Quels sont, d'après le texte, les composés chimiques qui peuvent participer à la formation des pluies acides ?

b - Citer, à partir du texte, un passage qui évoque la participation des activités humaines à l'acidification de l'atmosphère.

3⁰) a - Comment les retombés acides influent-elle sur la flore de notre planète ?

b - Pourquoi la faune est elle aussi impactée par les retombés acides ?

Réponse :

1⁰) a - Les pluies acides sont des pluies dont le pH est inférieur à 5.

b - Non ; car les retombés acides peuvent se caractériser par des précipitations humides (pluies, neige ou brouillard) mais aussi sous forme sèche dans de fines particules.

2⁰) a - Les oxydes d'azote et de soufre.

b - « les rejets provoqués par l'industrie, les transports, les centrales énergétiques et notre mode de vie en général contribuent grandement à l'acidification de l'atmosphère ».

3⁰) a - Les retombés acides contribuent à l'acidification des sols. Elles permettent le développement de maladies ou même rendre complètement stérile certaines espèces.

b - la base de la faune (les insectes, poissons et petits mammifères) peuvent subir l'affaiblissement de la flore dans leurs consommations alimentaires.

LE pH DES SOLUTIONS AQUEUSES

I / Introduction :

1⁰) Domaine de validité de la définition du pH :

a - Validité de la définition :

$$\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$$

Expérimentalement, une solution de HC de concentration $1,0 \text{ mol.L}^{-1}$ a un pH de 0,1.

Pour expliquer cette valeur, on peut émettre les hypothèses suivantes :

- le HCl n'est pas entièrement dissocié si la solution n'est pas trop diluée.
- la définition du pH n'est qu'approchée pour les solutions concentrées.

b - Limites de la définition :

La définition du pH n'est rigoureuse que pour des solutions dont la concentration en ions H_3O^+ est comprise entre $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ et $10^{-13} \text{ mol.L}^{-1}$.

En dehors de ce domaine, la définition du pH devient approchée car on ne peut plus négliger les interactions entre les entités dissoutes.

Usuellement et à 25°C , les limites de l'échelle du pH sont [0 , 14].

2⁰) Mesure du pH :

a - Mesure électrométrique :

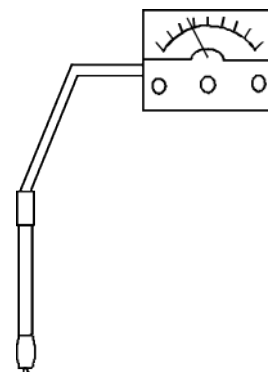
On utilise un pH mètre.

Un pH mètre est constitué par :

- Une sonde de mesure formée par deux électrodes, une de référence et une en verre sensible à la concentration en ions H_3O^+ de la solution étudiée.
- Un voltmètre électronique gradué en unité pH qui mesure la tension entre les deux électrodes.

Remarque :

Avant chaque mesure, le pH mètre doit être étalonné à l'aide d'une solution de pH préalablement connu (solution tampon).



b - Mesure colorimétrique :

On utilise des indicateurs colorés.

Un indicateur coloré est une solution dont la teinte varie en fonction du pH.

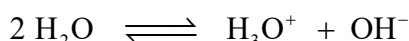
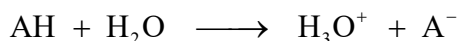
Un mélange judicieux d'indicateurs colorés permet de constituer un indicateur universel dont la teinte varie continuellement suivant la variation du pH.

Généralement, l'indicateur universel est utilisé imprégné sur du papier et séché : c'est le papier pH.

II / Calcul du pH d'une solution aqueuse d'acide ou de base forte :

1⁰) pH d'une solution aqueuse d'un monoacide fort :

a - Expression du pH :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont : H_3O^+ , OH^- et A^- .

- L'électroneutralité $\rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{A}^-]$
- La conservation de la masse $\rightarrow [\text{AH}] + [\text{A}^-] = C$ concentration de la solution .
- La loi d'action de masse $\rightarrow K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]$

- La solution est acide $\rightarrow [\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+]$
 $\rightarrow [\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{OH}^-] \approx [\text{H}_3\text{O}^+]$
- L'acide est presque totalement dissocié $\rightarrow [\text{A}^-] = C - [\text{AH}] \approx C$
- On en déduit que : $[\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] = C$; il vient alors que :

$$C = 10^{-\text{pH}} \text{ et } \text{pH} = -\log C$$

b - Remarques :

- Validité de l'approximation $[\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+]$:**

On négligera $[\text{OH}^-]$ devant $[\text{H}_3\text{O}^+]$ tant que $\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \leq 0,05$.

$$\text{or } [\text{OH}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \longrightarrow \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} \leq 0,05 \longrightarrow \frac{10^{-\text{p}K_e}}{10^{-2\text{pH}}} \leq 5 \cdot 10^{-2} \longrightarrow 10^{2\text{pH} - \text{p}K_e} \leq 5 \cdot 10^{-2}$$

donc $2\text{pH} - \text{p}K_e \leq (\log 5) - 2$ et $\text{pH} \leq 6,35$

- Validité de l'expression du pH :**

L'expression $\text{pH} = -\log C$ reste valable tant que $C > 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$.

Si $C \ll 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, on ne peut plus négliger $[\text{OH}^-]$ devant $[\text{H}_3\text{O}^+]$.

c - Application :

Soit une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène de concentration molaire $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Le tableau d'avancement volumique de la réaction dissociation de HCl dans l'eau est :

Equation de la réaction		$\text{HCl} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{Cl}^- + \text{H}_3\text{O}^+$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L^{-1})	Concentrations molaires (mol.L^{-1})			
Initial ($t = 0$)	0	C	excès	0	$10^{\frac{-\text{p}K_e}{2}}$
Final	y_f	$C - y_f$	excès	y_f	$10^{-\text{pH}}$

L'auto ionisation de l'eau :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont :

H_3O^+ , OH^- et Cl^- .

- L'électroneutralité $\longrightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{Cl}^-]$

$$\text{donc : } [\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} + [\text{Cl}^-] \text{ et } 10^{-\text{pH}} = \frac{10^{-\text{p}K_e}}{10^{-\text{pH}}} + y_f.$$

- L'acide étant fort $\longrightarrow y_f = y_{\text{max}} = C$

$$\text{donc : } 10^{-\text{pH}} = 10^{\text{pH} - \text{p}K_e} + C \text{ et } C = 10^{-\text{pH}} - 10^{\text{pH} - \text{p}K_e}$$

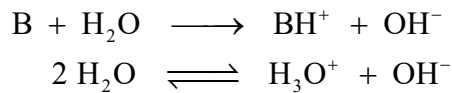
- Pour $C > 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, $10^{\text{pH} - \text{p}K_e}$ est négligeable devant $10^{-\text{pH}}$; il vient alors que :

$$C = 10^{-\text{pH}} \text{ et } \text{pH} = -\log C$$

$$\text{A.N : } \text{pH} = -\log 10^{-2} = 2$$

2⁰) pH d'une solution aqueuse d'une monobase forte :

a - Expression du pH :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont : H_3O^+ , OH^- et BH^+ .

- L'électroneutralité $\rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{BH}^+] = [\text{OH}^-]$
- La conservation de la masse $\rightarrow [\text{B}] + [\text{BH}^+] = C$ concentration de la solution.
- La loi d'action de masse $\rightarrow K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]$
- La solution est basique $\rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] \ll [\text{OH}^-]$
 $\rightarrow [\text{BH}^+] = [\text{OH}^-] - [\text{H}_3\text{O}^+] \simeq [\text{OH}^-]$
- La base est presque totalement dissociée $\rightarrow [\text{BH}^+] = C - [\text{B}] \simeq C$
- On en déduit que : $[\text{BH}^+] = [\text{OH}^-] = C$.

or $[\text{OH}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$ d'où $C = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-pK_e}}{10^{-\text{pH}}}$, il vient alors que :

$$C = 10^{\text{pH} - pK_e} \text{ et } \text{pH} = pK_e + \log C$$

b - Remarques :

- Validité de l'approximation $[\text{H}_3\text{O}^+] \ll [\text{OH}^-]$:

On négligera $[\text{H}_3\text{O}^+]$ devant $[\text{OH}^-]$ tant que $\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{OH}^-]} \leq 0,05$.

$$\text{or } [\text{OH}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \longrightarrow \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{K_e} \leq 0,05 \longrightarrow \frac{10^{-2\text{pH}}}{10^{-pK_e}} \leq 5 \cdot 10^{-2} \longrightarrow 10^{pK_e - 2\text{pH}} \leq 5 \cdot 10^{-2}$$

donc $pK_e - 2\text{pH} \leq (\log 5) - 2$ et $\text{pH} \geq 7,65$

- Validité de l'expression du pH :

L'expression $\text{pH} = pK_e + \log C$ reste valable tant que $C > 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$.

Si $C \ll 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, on ne peut plus négliger $[\text{H}_3\text{O}^+]$ devant $[\text{OH}^-]$.

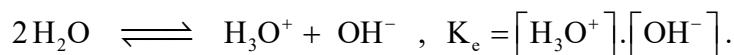
c - Application :

Soit une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Le tableau d'avancement volumique de la réaction dissociation de NaOH dans l'eau est :

Equation de la réaction		$\text{NaOH} \longrightarrow \text{Na}^+ + \text{OH}^-$		
Etat du système	Avancement volumique (mol.L^{-1})	Concentrations molaires (mol.L^{-1})		
Initial ($t = 0$)	0	C	0	$10^{-\frac{pK_e}{2}}$
Final	y_f	$C - y_f$	y_f	$10^{\text{pH} - pK_e}$

L'auto ionisation de l'eau :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont :

H_3O^+ , OH^- et Na^+ .

• L'électroneutralité $\longrightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{Na}^+] = [\text{OH}^-]$

donc : $[\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{Na}^+] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$ et $10^{-\text{pH}} + y_f = \frac{10^{-\text{p}K_e}}{10^{-\text{pH}}} .$

• La base étant forte $\longrightarrow y_f = y_{\text{max}} = C$

donc : $10^{-\text{pH}} + C = 10^{\text{pH}-\text{p}K_e}$ et $C = 10^{\text{pH}-\text{p}K_e} - 10^{-\text{pH}}$

• Pour $C \succ 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, $10^{-\text{pH}}$ est négligeable devant $10^{\text{pH}-\text{p}K_e}$; il vient alors que :

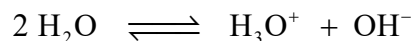
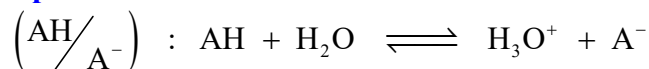
$$C = 10^{\text{pH}-\text{p}K_e} \text{ et } \text{pH} = \text{p}K_e + \log C$$

A.N : $\text{pH} = 14 + \log 10^{-2} = 12$

II / Calcul du pH d'une solution aqueuse d'acide ou de base faible :

1⁰) pH d'une solution aqueuse d'un monoacide faible :

a - Expression du pH :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont : H_3O^+ , OH^- , A^- et AH .

- L'électroneutralité $\rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{A}^-]$

- La conservation de la masse $\Rightarrow [\text{AH}] + [\text{A}^-] = C$ concentration de la solution .

- La loi d'action de masse $\Rightarrow K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]$ et $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$

• La solution est acide $\Rightarrow [\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+]$

$$\Rightarrow [\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{OH}^-] \simeq [\text{H}_3\text{O}^+]$$

• L'acide est faiblement dissocié $\Rightarrow [\text{A}^-] \ll [\text{AH}]$

$$\Rightarrow C = [\text{AH}] + [\text{A}^-] \simeq [\text{AH}] .$$

• On en déduit que : $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{C} \rightarrow C = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{K_a}$ et $C = \frac{10^{-2\text{pH}}}{10^{-\text{p}K_a}}$, il vient alors que :

$$C = 10^{-2\text{pH}+\text{p}K_a} \text{ et } \text{pH} = \frac{1}{2}\text{p}K_a - \frac{1}{2}\log C$$

b - Remarques :

• Validité des approximations :

$$[\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+] \longrightarrow \frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \leq 0,05 \longrightarrow \text{pH} \leq 6,35$$

$$[\text{A}^-] \ll [\text{AH}] \longrightarrow \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \leq 0,05$$

- **Validité de l'expression du pH :**

L'expression $\text{pH} = \frac{1}{2}\text{pK}_a - \frac{1}{2}\log C$ reste valable tant que $C > 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$ et l'acide est faiblement dissocié.

- **c - Application :**

Soit une solution aqueuse d'acide éthanóique de concentration molaire $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Le tableau d'avancement volumique de la réaction dissociation de CH_3COOH dans l'eau est :

Equation de la réaction		$\text{CH}_3\text{COOH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CH}_3\text{COO}^- + \text{H}_3\text{O}^+$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L^{-1})	Concentrations molaires (mol.L^{-1})			
Initial ($t = 0$)	0	C	excès	0	$10^{-\frac{\text{pK}_e}{2}}$
Final	y_f	$C - y_f$	excès	y_f	$10^{-\text{pH}}$

L'auto ionisation de l'eau :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont :

H_3O^+ , OH^- , CH_3COO^- et CH_3COOH .

- L'électroneutralité $\longrightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{CH}_3\text{COO}^-]$

$$\text{donc : } [\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} + [\text{CH}_3\text{COO}^-] \quad \text{et} \quad 10^{-\text{pH}} = \frac{10^{-\text{pK}_e}}{10^{-\text{pH}}} + y_f.$$

- Soit τ_f le taux d'avancement final de la réaction :

$$\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} = \frac{y_f}{C} \longrightarrow y_f = \tau_f \cdot C \quad \text{donc : } 10^{-\text{pH}} = 10^{\text{pH}-\text{pK}_e} + \tau_f \cdot C$$

$$\text{D'autre part on a : } K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot y_f}{C - y_f} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot \tau_f}{1 - \tau_f}$$

- L'acide étant faiblement dissocié , on négligera τ_f devant 1 ($\tau_f < 0,05$) , on aura alors :

$$K_a = [\text{H}_3\text{O}^+] \cdot \tau_f \longrightarrow \tau_f = \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 10^{\text{pH}-\text{pK}_a} \quad \text{et} \quad 10^{-\text{pH}} = 10^{\text{pH}-\text{pK}_e} + C \cdot 10^{\text{pH}-\text{pK}_a}$$

- Pour $C > 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, $10^{\text{pH}-\text{pK}_e}$ est négligeable devant $10^{-\text{pH}}$, donc :

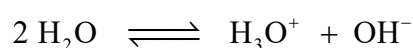
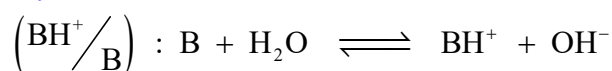
$$10^{-\text{pH}} = C \cdot 10^{\text{pH}-\text{pK}_a} \longrightarrow C = \frac{10^{-\text{pH}}}{10^{\text{pH}-\text{pK}_a}} , \text{ il vient alors que :}$$

$$C = 10^{-2\text{pH}+\text{pK}_a} \quad \text{et} \quad \text{pH} = \frac{1}{2}\text{pK}_a - \frac{1}{2}\log C$$

$$\text{A.N : } \text{pK}_a \left(\frac{\text{CH}_3\text{COOH}}{\text{CH}_3\text{COO}^-} \right) = 4,75 \longrightarrow \text{pH} = \frac{1}{2}(4,75) - \frac{1}{2}\log 10^{-2} \approx 3,4$$

1⁰) pH d'une solution aqueuse d'une monobase faible :

a - Expression du pH :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont : H_3O^+ , OH^- , BH^+ et B.

- L'électroneutralité $\Rightarrow [\text{BH}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-]$
- La conservation de la masse $\Rightarrow [\text{B}] + [\text{BH}^+] = C$ concentration de la solution .
- La loi d'action de masse $\Rightarrow K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]$ et $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{B}]}{[\text{BH}^+]}$
- La solution est basique $\Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] \ll [\text{OH}^-]$
 $\Rightarrow [\text{BH}^+] = [\text{OH}^-] - [\text{H}_3\text{O}^+] \approx [\text{OH}^-]$
- La base est faiblement dissociée $\Rightarrow [\text{BH}^+] \ll [\text{B}]$
 $\Rightarrow C = [\text{B}] + [\text{BH}^+] \approx [\text{B}]$.
- On en déduit que : $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+].C}{[\text{OH}^-]}$ or $[\text{OH}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$ d'où $C = \frac{K_e.K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}$

Donc : $C = \frac{10^{-\text{p}K_e} \cdot 10^{-\text{p}K_a}}{10^{-2\text{pH}}}$, il vient alors que :

$$C = 10^{2\text{pH} - \text{p}K_e - \text{p}K_a} \text{ et } \text{pH} = \frac{1}{2}\text{p}K_e + \frac{1}{2}\text{p}K_a + \frac{1}{2}\log C$$

b - Remarques :

- Validité des approximations :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \ll [\text{OH}^-] \longrightarrow \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{OH}^-]} \leq 0,05 \longrightarrow \text{pH} \geq 7,65$$

$$[\text{BH}^+] \ll [\text{B}] \longrightarrow \frac{[\text{BH}^+]}{[\text{B}]} \leq 0,05$$

- Validité de l'expression du pH :

L'expression $\text{pH} = \frac{1}{2}\text{p}K_e + \frac{1}{2}\text{p}K_a + \frac{1}{2}\log C$ reste valable tant que $C > 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$ et la base est faiblement dissociée.

c - Application :

Soit une solution aqueuse d'ammoniac de concentration molaire $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Le tableau d'avancement volumique de la réaction dissociation de NH_3 dans l'eau est :

Equation de la réaction		$\text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{NH}_4^+ + \text{OH}^-$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L^{-1})	Concentrations molaires (mol.L^{-1})			
Initial ($t = 0$)	0	C	excès	0	$10^{-\frac{\text{p}K_e}{2}}$
Final	y_f	$C - y_f$	excès	y_f	$10^{\text{pH} - \text{p}K_e}$

L'auto ionisation de l'eau :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont :

H_3O^+ , OH^- , NH_4^+ et NH_3 .

- L'électroneutralité $\longrightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-]$

donc : $[\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{NH}_4^+] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$ et $10^{-\text{pH}} + y_f = \frac{10^{-\text{pK}_e}}{10^{-\text{pH}}}$.

- Soit τ_f le taux d'avancement final de la réaction :

$$\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} = \frac{y_f}{C} \longrightarrow y_f = \tau_f \cdot C \text{ donc : } 10^{-\text{pH}} + \tau_f \cdot C = 10^{\text{pH}-\text{pK}_e}$$

D'autre part on a : $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot (C - y_f)}{y_f} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot (1 - \tau_f)}{\tau_f}$

- La base étant faiblement dissociée, on négligera τ_f devant 1 ($\tau_f < 0,05$), on aura alors :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{\tau_f} \longrightarrow \tau_f = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a} = 10^{\text{pK}_a - \text{pH}} \text{ et } 10^{-\text{pH}} + C \cdot 10^{\text{pK}_a - \text{pH}} = 10^{\text{pH}-\text{pK}_e}$$

- Pour $C \succ 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, $10^{\text{pH}-\text{pK}_e}$ est négligeable devant $10^{-\text{pH}}$, donc :

$$C \cdot 10^{\text{pK}_a - \text{pH}} = 10^{\text{pH}-\text{pK}_e} \longrightarrow C = \frac{10^{\text{pH}-\text{pK}_e}}{10^{\text{pK}_a - \text{pH}}}, \text{ il vient alors que :}$$

$$C = 10^{2\text{pH}-\text{pK}_e-\text{pK}_a} \text{ et } \text{pH} = \frac{1}{2}\text{pK}_e + \frac{1}{2}\text{pK}_a + \frac{1}{2}\log C$$

A.N : $\text{pK}_a \left(\frac{\text{NH}_4^+}{\text{NH}_3} \right) = 9,25 \longrightarrow \text{pH} = 7 + \frac{1}{2}(9,25) - \frac{1}{2}\log 10^{-2} \approx 10,6$

Pour en savoir plus

1⁰) pH d'une solution aqueuse acide :

a - Expression générale :

Considérons une solution aqueuse acide de concentration molaire C.

La dissociation de l'acide AH dans l'eau : $\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{A}^-$

L'autoprotolyse de l'eau : $2 \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{OH}^-$

Les espèces chimiques présentes dans la solution aqueuse : H_3O^+ , OH^- , A^- et AH.

• Les relations qui relient les molarités de ces différentes espèces chimiques sont :

* L'électroneutralité $\rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{A}^-]$

* La conservation de la masse $\rightarrow [\text{AH}] + [\text{A}^-] = C$ concentration de la solution .

* La loi d'action de masse $\rightarrow K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]$ et $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$

• Equation en $[\text{H}_3\text{O}^+]$:

$$\begin{cases} [\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{OH}^-] \\ [\text{AH}] = C - [\text{A}^-] \end{cases} \xrightarrow{K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]} K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2 - K_e}{C - [\text{H}_3\text{O}^+] + \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]}}$$

$$\rightarrow K_a \cdot C - K_a \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] + \frac{K_a \cdot K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = [\text{H}_3\text{O}^+]^2 - K_e$$

$$\rightarrow K_a \cdot C \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] - K_a \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]^2 + K_a \cdot K_e = [\text{H}_3\text{O}^+]^3 - K_e \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]$$

$$\text{Et enfin : } [\text{H}_3\text{O}^+]^3 + K_a \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]^2 - (K_a \cdot C + K_e) \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] - K_a \cdot K_e = 0.$$

On obtient une équation du troisième degré en $[\text{H}_3\text{O}^+]$ dont la résolution est compliquée.

b - Cas d'une solution d'acide fort :

• L'acide fort est complètement ionisé $\rightarrow [\text{A}^-] = C$.

$$\rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + C \xrightarrow{K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]} [\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} + C \text{ et } [\text{H}_3\text{O}^+]^2 - C \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] - K_e = 0.$$

$$\Delta = C^2 + 4 \cdot K_e \rightarrow \begin{cases} [\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{C + \sqrt{C^2 + 4 \cdot K_e}}{2} \\ [\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{C - \sqrt{C^2 + 4 \cdot K_e}}{2} \end{cases} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{C + \sqrt{C^2 + 4 \cdot K_e}}{2} \text{ à rejeter car } < 0$$

$$\text{On a } \text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+], \text{ il vient alors que : } \text{pH} = -\log\left(\frac{C + \sqrt{C^2 + 4 \cdot K_e}}{2}\right).$$

• Si $C \leq 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, l'acidité de la solution permet de négliger $[\text{OH}^-]$ devant $[\text{H}_3\text{O}^+]$.

$$[\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{OH}^-] \xrightarrow{[\text{H}_3\text{O}^+] \gg [\text{OH}^-]} [\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] \xrightarrow{C = [\text{A}^-]} [\text{H}_3\text{O}^+] = C.$$

On a $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$, il vient alors que : **pH = -log C**.

c - Cas d'une solution d'acide faible :

• On considère le cas où l'acide est faiblement ionisé $\rightarrow [\text{AH}] = C$.

$$\begin{cases} [A^-] = [H_3O^+] - [OH^-] \\ [AH] = C \end{cases} \xrightarrow{K_e = [H_3O^+][OH^-]} K_a = \frac{[H_3O^+]^2 - K_e}{C} \quad \text{et} \quad [H_3O^+]^2 - (K_a \cdot C + K_e) = 0$$

$$[H_3O^+]^2 = (K_a \cdot C + K_e) \rightarrow [H_3O^+] = \sqrt{K_a \cdot C + K_e}$$

On a $pH = -\log[H_3O^+]$, il vient alors que : $pH = -\log(\sqrt{K_a \cdot C + K_e})$

- Si $C \leq 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, l'acidité de la solution permet de négliger $[OH^-]$ devant $[H_3O^+]$.

$$\begin{cases} [A^-] = [H_3O^+] - [OH^-] \\ [AH] = C \end{cases} \xrightarrow{[H_3O^+] \gg [OH^-]} K_a = \frac{[H_3O^+]^2}{C} \rightarrow [H_3O^+] = \sqrt{K_a \cdot C}$$

On a $pH = -\log[H_3O^+] \rightarrow pH = -\frac{1}{2} \log K_a - \frac{1}{2} \log C$, il vient alors que : $pH = \frac{1}{2} pK_a - \frac{1}{2} \log C$.

Remarque :

Si l'acide n'est pas faiblement ionisé et en négligeant $[OH^-]$ devant $[H_3O^+]$:

$$\begin{cases} [A^-] = [H_3O^+] \\ [AH] = C - [A^-] \end{cases} \rightarrow K_a = \frac{[H_3O^+]^2}{C - [H_3O^+]} \quad \text{et} \quad [H_3O^+]^2 + K_a \cdot [H_3O^+] - K_a \cdot C = 0$$

$$\Delta = K_a^2 + 4 \cdot K_a \cdot C \rightarrow \begin{cases} [H_3O^+] = \frac{-K_a + \sqrt{K_a^2 + 4 \cdot K_a \cdot C}}{2} \\ [H_3O^+] = \frac{-K_a - \sqrt{K_a^2 + 4 \cdot K_a \cdot C}}{2} \end{cases} \quad \text{à rejeter car} < 0$$

$$\rightarrow [H_3O^+] = \frac{-K_a + \sqrt{K_a^2 + 4 \cdot K_a \cdot C}}{2}$$

On a $pH = -\log[H_3O^+]$, il vient alors que : $pH = -\log\left(\frac{-K_a + \sqrt{K_a^2 + 4 \cdot K_a \cdot C}}{2}\right)$.

2⁰) pH d'une solution aqueuse basique :

a - Expression générale :

Considérons une solution aqueuse basique de concentration molaire C.

La dissociation de la base B dans l'eau : $B + H_2O \rightleftharpoons BH^+ + OH^-$

L'autoprotolyse de l'eau : $2 H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$

Les espèces chimiques présentes dans la solution aqueuse : H_3O^+ , OH^- , BH^+ et B.

- Les relations qui relient les molarités de ces différentes espèces chimiques sont :

* L'électroneutralité $\rightarrow [H_3O^+] + [BH^+] = [OH^-]$

* La conservation de la masse $\rightarrow [B] + [BH^+] = C$ concentration de la solution.

* La loi d'action de masse $\rightarrow K_e = [H_3O^+][OH^-]$ et $K_a = \frac{[H_3O^+][B]}{[BH^+]}$

- Equation en $[H_3O^+]$:

$$\begin{cases} [BH^+] = [OH^-] - [H_3O^+] \\ [B] = C - [BH^+] \end{cases} \xrightarrow{K_e = [H_3O^+][OH^-]} K_a = \frac{[H_3O^+] \cdot C - K_e + [H_3O^+]^2}{\frac{K_e}{[H_3O^+]} - [H_3O^+]}$$

$$\rightarrow \frac{K_a \cdot K_e}{[H_3O^+]} - K_a \cdot [H_3O^+] = [H_3O^+]^2 + [H_3O^+] \cdot C - K_e$$

$$\rightarrow K_a \cdot K_e - K_a \cdot [H_3O^+]^2 = [H_3O^+]^3 + [H_3O^+]^2 \cdot C - K_e \cdot [H_3O^+]$$

$$\text{Et enfin : } [H_3O^+]^3 + (K_a + C) \cdot [H_3O^+]^2 - K_a \cdot [H_3O^+] - K_e = 0.$$

On obtient une équation du troisième degré en $[H_3O^+]$ dont la résolution est compliquée.

b - Cas d'une solution de base forte :

- La base forte est complètement ionisée $\rightarrow [BH^+] = C$.

$$\rightarrow [H_3O^+] + C = [OH^-] \xrightarrow{K_e = [H_3O^+][OH^-]} [H_3O^+] + C = \frac{K_e}{[H_3O^+]} \text{ et } [H_3O^+]^2 + C \cdot [H_3O^+] - K_e = 0.$$

$$\Delta = C^2 + 4 \cdot K_e \rightarrow \begin{cases} [H_3O^+] = \frac{-C + \sqrt{C^2 + 4 \cdot K_e}}{2} \\ [H_3O^+] = \frac{-C - \sqrt{C^2 + 4 \cdot K_e}}{2} \end{cases} \rightarrow [H_3O^+] = \frac{-C + \sqrt{C^2 + 4 \cdot K_e}}{2} \text{ à rejeter car } < 0$$

$$\text{On a } pH = -\log[H_3O^+], \text{ il vient alors que : } pH = -\log\left(\frac{-C + \sqrt{C^2 + 4 \cdot K_e}}{2}\right).$$

- Si $C \leq 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, la basicité de la solution permet de négliger $[H_3O^+]$ devant $[OH^-]$.

$$[BH^+] = [OH^-] - [H_3O^+] \xrightarrow{[H_3O^+] \gg [OH^-]} [BH^+] = [OH^-] \xrightarrow{\substack{C = [BH^+] \\ [OH^-] = \frac{K_e}{[H_3O^+]}}} [H_3O^+] = \frac{K_e}{C}.$$

$$\text{On a } pH = -\log[H_3O^+] \rightarrow pH = -\log K_e + \log C, \text{ il vient alors que : } pH = 14 + \log C.$$

c - Cas d'une solution de base faible :

- On considère le cas où la base est faiblement ionisée $\rightarrow [B] = C$.

$$\begin{cases} [BH^+] = [OH^-] - [H_3O^+] \\ [B] = C \end{cases} \xrightarrow{K_e = [H_3O^+][OH^-]} K_a = \frac{[H_3O^+] \cdot C}{\frac{K_e}{[H_3O^+] - [H_3O^+]}} \rightarrow K_a = \frac{[H_3O^+]^2 \cdot C}{K_e - [H_3O^+]^2}$$

$$\rightarrow K_a \cdot K_e - K_a \cdot [H_3O^+]^2 = [H_3O^+]^2 \cdot C \text{ et } (K_a + C) \cdot [H_3O^+]^2 - K_a \cdot K_e = 0$$

$$[H_3O^+]^2 = \frac{K_a \cdot K_e}{K_a + C} \rightarrow [H_3O^+] = \sqrt{\frac{K_a \cdot K_e}{K_a + C}}$$

$$\text{On a } pH = -\log[H_3O^+], \text{ il vient alors que : } pH = -\log\left(\sqrt{\frac{K_a \cdot K_e}{K_a + C}}\right)$$

- Si $C \leq 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, la basicité de la solution permet de négliger $[H_3O^+]$ devant $[OH^-]$.

$$\begin{cases} [BH^+] = [OH^-] - [H_3O^+] \\ [B] = C \end{cases} \xrightarrow{K_e = [H_3O^+][OH^-]} K_a = \frac{[H_3O^+]^2 \cdot C}{K_e} \rightarrow [H_3O^+] = \sqrt{\frac{K_e \cdot K_a}{C}}.$$

$$\text{On a } pH = -\log[H_3O^+] \rightarrow pH = -\frac{1}{2} \log K_e - \frac{1}{2} \log K_a + \frac{1}{2} \log C,$$

$$\text{il vient alors que : } pH = \frac{1}{2} pK_e + \frac{1}{2} pK_a + \frac{1}{2} \log C.$$

Remarque :

Si la base n'est pas faiblement ionisée et en négligeant $[H_3O^+]$ devant $[OH^-]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} [BH^+] = [OH^-] \\ [B] = C - [BH^+] \end{array} \right. \xrightarrow{[OH^-] = \frac{K_e}{[H_3O^+]}} K_a = \frac{[H_3O^+] \cdot \left(C - \frac{K_e}{[H_3O^+]} \right)}{\frac{K_e}{[H_3O^+]}} \rightarrow K_a = \frac{[H_3O^+]^2 \cdot \left(C - \frac{K_e}{[H_3O^+]} \right)}{K_e}$$

$$\rightarrow [H_3O^+]^2 \cdot C - K_e \cdot [H_3O^+] = K_a \cdot K_e \quad \text{et} \quad C \cdot [H_3O^+]^2 - K_e \cdot [H_3O^+] - K_a \cdot K_e = 0.$$

$$\Delta = K_e^2 + 4 \cdot K_a \cdot K_e \cdot C \rightarrow \begin{cases} [H_3O^+] = \frac{K_e + \sqrt{K_e^2 + 4 \cdot K_a \cdot K_e \cdot C}}{2 \cdot C} \\ [H_3O^+] = \frac{K_e - \sqrt{K_e^2 + 4 \cdot K_a \cdot K_e \cdot C}}{2 \cdot C} \end{cases} \text{ à rejeter car } < 0$$

$$\rightarrow [H_3O^+] = \frac{K_e + \sqrt{K_e^2 + 4 \cdot K_a \cdot K_e \cdot C}}{2 \cdot C}.$$

$$\text{On a } pH = -\log[H_3O^+], \text{ il vient alors que : } pH = -\log \left(\frac{K_e + \sqrt{K_e^2 + 4 \cdot K_a \cdot K_e \cdot C}}{2 \cdot C} \right).$$

3⁰) Interprétation graphique des domaines de validité des expressions du pH :

- Solution d'acide fort ou de base forte :

Les expressions $pH = -\log C$ pour une solution d'acide fort et $pH = 14 + \log C$ pour une solution de base forte restent valables pour : $10^{-6} \text{ mol.L}^{-1} \leq C \leq 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

- si $C < 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, on ne peut plus négliger :

* $[H_3O^+]$ devant $[OH^-]$ dans la solution acide

* $[OH^-]$ devant $[H_3O^+]$ dans la solution basique

- si $C > 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, on ne peut plus négliger les interactions entre les entités dissoutes aussi bien dans la solution acide que dans la solution basique.

- Solution d'acide faible ou de base faible :

- En tenant compte des mêmes considérations que pour les solutions d'acide fort et de base forte, le domaine de validité des expressions du pH pour les solutions d'acide faible et de base faible doit faire partie, dans une première approche, de l'intervalle de restriction $10^{-6} \text{ mol.L}^{-1} \leq C \leq 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

- Pour une même concentration C , un acide (ou une base) est d'autant plus fort (ou forte) que le pH de sa solution aqueuse est plus petit (ou plus grand).

* pour la même concentration C :

$$pH(\text{sol. acide faible}) > pH(\text{sol. acide fort})$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} pK_a - \frac{1}{2} \log C > -\log C$$

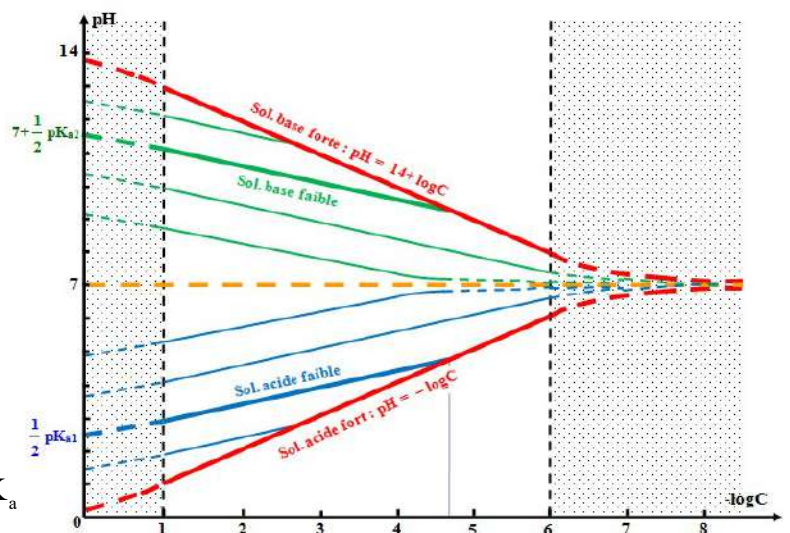
$$\rightarrow \frac{1}{2} pK_a > -\frac{1}{2} \log C \rightarrow -\log C < pK_a$$

* pour la même concentration C :

$$pH(\text{sol. base faible}) < pH(\text{sol. base forte})$$

$$\rightarrow 7 + \frac{1}{2} pK_a + \frac{1}{2} \log C < 14 + \log C$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} pK_a < 7 + \frac{1}{2} \log C \rightarrow -\log C < 14 - pK_a$$



Dans cette deuxième approche, la restriction ne tient pas compte du fait que les expressions du pH ne sont valables que pour des acides et des bases faiblement dissociés. Elle est donc nécessaire mais non suffisante.

- Dans une solution aqueuse, l'acide ou la base sont faiblement dissociés si $\tau_f \ll 1$.

Suivant la convention adoptée dans ce cours, on négligera τ_f devant 1 si $\frac{\tau_f}{1} \leq 0,05$ ($\tau_f \leq 5\%$) mais on peut suggérer, dans une approche finale, que les expressions du pH restent pratiquement valables pour $\tau_f \leq 10\%$.

* Pour une solution d'acide faible :

$$\begin{cases} \tau_f = \frac{10^{-\text{pH}}}{C} \\ K_a = 10^{-\text{pH}} \cdot \tau_f \end{cases} \rightarrow \frac{K_a}{C} = \tau_f^2 \xrightarrow{\tau_f \leq 0,1} \frac{K_a}{C} \leq 10^{-2} \quad \text{et} \quad C \geq \frac{K_a}{10^{-2}} \text{ mol.L}^{-1}$$

* Pour une solution de base faible :

$$\begin{cases} \tau_f = \frac{10^{\text{pH}-\text{p}K_e}}{C} \\ K_a = \frac{10^{-\text{pH}}}{\tau_f} \end{cases} \rightarrow \frac{10^{\text{p}K_a-\text{p}K_e}}{C} = \tau_f^2 \xrightarrow[\text{p}K_a+\text{p}K_b=\text{p}K_e]{\tau_f \leq 0,1} \frac{10^{-\text{p}K_b}}{C} \leq 10^{-2} \quad \text{et} \quad C \geq \frac{K_b}{10^{-2}} \text{ mol.L}^{-1}$$

Applications

Exercice 1 :

1⁰) Le pH d'une solution aqueuse d'un monoacide fort de concentration molaire C s'écrit : $\text{pH} = -\log C$. Montrer que le pH d'une solution aqueuse d'un monoacide faible de concentration molaire C, faiblement dissocié, s'exprime par : $\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_a - \log C)$

2⁰) On prépare trois solutions aqueuses (S₁), (S₂) et (S₃), de même concentration molaire C, respectivement des acides A₁H, A₂H et A₃H. On mesure le pH de chacune des solutions. On obtient les résultats suivants :

solution	S ₁	S ₂	S ₃
pH	3,05	1,30	2,30

a - Soit une solution aqueuse (S) d'un monoacide de concentration molaire C et de pH donné.

On dilue n fois cette solution (S), on obtient une solution (S') de concentration molaire $C' = \frac{C}{n}$ et dont le pH

a une valeur pH'. Montrer que :

- pour une solution aqueuse d'un monoacide fort : $n = 10^{\text{pH}' - \text{pH}}$
- pour une solution aqueuse d'un monoacide faible : $n = 10^{2(\text{pH}' - \text{pH})}$

b - On dilue 10 fois chacune des solutions (S₁), (S₂) et (S₃), on obtient respectivement les solutions (S₁'), (S₂') et (S₃'). On mesure le pH de chacune des solutions diluées. On obtient les résultats suivants :

solution	S ₁ '	S ₂ '	S ₃ '
pH	3,55	2,30	2,80

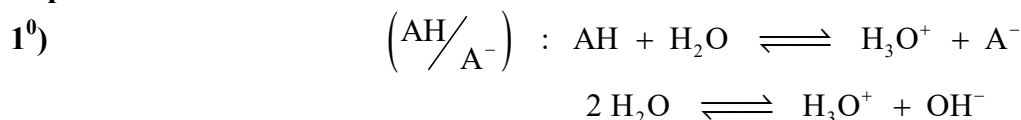
Montrer que l'acide A₂H est fort alors que les acides A₁H et A₃H sont faibles.

c - Comparer les forces des acides A₁H et A₃H.

3⁰) a - Déterminer la valeur de la concentration molaire C.

b - Calculer pK_{a1} et pK_{a3} des couples correspondants respectivement aux acides A₁H et A₃H.

Réponse :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont : H_3O^+ , OH^- , A^- et AH .

- L'électroneutralité $\Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{A}^-]$

- La conservation de la masse $\Rightarrow [\text{AH}] + [\text{A}^-] = C$ concentration de la solution.

- La loi d'action de masse $\Rightarrow K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]$ et $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$

* La solution est acide $\Rightarrow [\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+] \Rightarrow [\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{OH}^-] \approx [\text{H}_3\text{O}^+]$

* L'acide est faiblement dissocié $\Rightarrow [\text{A}^-] \ll [\text{AH}] \Rightarrow C = [\text{AH}] + [\text{A}^-] \approx [\text{AH}]$.

* On en déduit que : $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{C}$ et $C = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{K_a}$, il vient alors que : $C = \frac{10^{-2\text{pH}}}{10^{-\text{pK}_a}} = 10^{-2\text{pH} + \text{pK}_a}$

$$\text{et } \text{pH} = \frac{1}{2}\text{pK}_a - \frac{1}{2}\log C$$

2⁰) a - Pour une solution aqueuse d'acide fort : $\text{pH} = -\log C \rightarrow C = 10^{-\text{pH}}$

$$\begin{cases} C = 10^{-\text{pH}} \\ C' = 10^{-\text{pH}'} \end{cases} \xrightarrow{C' = \frac{C}{n}} n = \frac{C}{C'} = \frac{10^{-\text{pH}}}{10^{-\text{pH}'}} \text{ et } n = 10^{\text{pH}' - \text{pH}}$$

Pour une solution aqueuse d'acide faible : $\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_a - \log C) \rightarrow C = 10^{\text{pK}_a - 2\text{pH}}$

$$\begin{cases} C = 10^{\text{pK}_a - 2\text{pH}} \\ C' = 10^{\text{pK}_a - 2\text{pH}'} \end{cases} \xrightarrow{C' = \frac{C}{n}} n = \frac{C}{C'} = \frac{10^{\text{pK}_a - 2\text{pH}}}{10^{\text{pK}_a - 2\text{pH}'}} \quad \text{et} \quad n = 10^{2(\text{pH}' - \text{pH})}$$

b - On dilue 10 fois $\rightarrow n = 10$

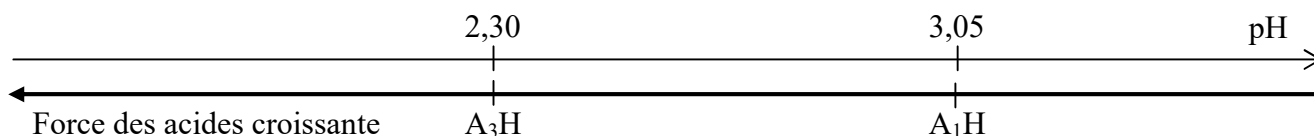
$$\rightarrow \log n = 1 \rightarrow \begin{cases} \text{pour une solution d'acide fort : } \text{pH}' - \text{pH} = 1 \\ \text{pour une solution d'acide faible : } \text{pH}' - \text{pH} = 0,5 \end{cases}$$

Pour la solution de A_1H : $\text{pH}' - \text{pH} = 3,55 - 3,05 = 0,5 \rightarrow \text{A}_1\text{H}$ est un acide faible.

Pour la solution de A_2H : $\text{pH}' - \text{pH} = 2,30 - 1,30 = 1 \rightarrow \text{A}_2\text{H}$ est un acide fort.

Pour la solution de A_3H : $\text{pH}' - \text{pH} = 2,80 - 2,30 = 0,5 \rightarrow \text{A}_3\text{H}$ est un acide faible.

c - Pour une même concentration, un acide est d'autant plus fort que le pH de sa solution aqueuse est plus petit.



3⁰ **a** - Pour la solution (S_2) , $\text{pH} = -\log C \rightarrow C = 10^{-\text{pH}}$

$$\text{A.N : } C = 10^{-1,3} \quad \text{et} \quad C = 5.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

b - Pour une solution aqueuse d'acide faible : $\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_a - \log C) \rightarrow \text{pK}_a = 2\text{pH} + \log C$

$$\text{Dans la solution } (\text{S}_1) : \text{pK}_{a1} = 2.(3,05) + \log(5.10^{-2}) \quad \text{et} \quad \text{pK}_{a1} = 4,8$$

$$\text{Dans la solution } (\text{S}_3) : \text{pK}_{a3} = 2.(2,30) + \log(5.10^{-2}) \quad \text{et} \quad \text{pK}_{a3} = 3,3$$

Exercice 2 :

On considère une solution aqueuse (S) d'ammoniac NH_3 de concentration molaire C. Elle a un $\text{pH} = 10,95$.

Le couple $(\text{NH}_4^+/\text{NH}_3)$ a un $\text{pK}_a = 9,2$.

1⁰ Dresser le tableau d'avancement volumique de la réaction de dissociation de l'ammoniac dans l'eau.

2⁰ **a** - Déterminer les molarités des différentes entités chimiques présentes dans la solution aqueuse (S).

b - En déduire la valeur de la concentration molaire C de la solution (S).

3⁰ Montrer que, en considérant la base très faiblement dissociée, le taux d'avancement final de la réaction

s'exprime par : $\tau_f = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{\text{K}_a}$. Calculer alors la valeur de τ_f .

4⁰ Le pH d'une solution aqueuse de base faiblement dissociée est donnée par : $\text{pH} = 7 + \frac{1}{2}\text{pK}_a + \frac{1}{2}\log C$.

a - Quel est le volume V_e d'eau qu'il faut ajouter à un volume $V = 10 \text{ mL}$ de la solution (S) pour obtenir une solution (S') de $\text{pH} = 10,6$?

b - Calculer le taux d'avancement final τ_f dans la solution (S').

c - En déduire l'effet de la dilution sur la réaction de dissociation de l'ammoniac dans l'eau.

Réponse :

1⁰

Equation de la réaction		$\text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{NH}_4^+ + \text{OH}^-$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L^{-1})	Concentrations molaires (mol.L^{-1})			
Initial ($t = 0$)	0	C	excès	0	$10^{-\frac{\text{pK}_e}{2}}$
Final	y_f	$C - y_f$	excès	y_f	$10^{\text{pH} - \text{pK}_e}$

2⁰) L'auto ionisation de l'eau : $2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{OH}^-$; $K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]$

a - Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont : H_3O^+ , OH^- , NH_4^+ et NH_3 .

* $\text{pH} = 10,95 \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-10,95}$ et $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1,122 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$

* $K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] \rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \rightarrow$

$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-10,95}} = 10^{-3,05}$ et $[\text{OH}^-] = 8,913 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$

* L'électroneutralité $\rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-] \rightarrow$

$[\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-] - [\text{H}_3\text{O}^+] \approx [\text{OH}^-]$ et $[\text{NH}_4^+] = 8,913 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$

* On a : $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} \rightarrow [\text{NH}_3] = K_a \frac{[\text{NH}_4^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 10^{-\text{p}K_a} \frac{[\text{NH}_4^+]}{10^{-\text{pH}}} \rightarrow$

$[\text{NH}_3] = 10^{-9,2} \frac{10^{-3,05}}{10^{-10,95}} = 10^{-1,3}$ et $[\text{NH}_3] = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

b - La conservation de la matière $\rightarrow [\text{NH}_3] + [\text{NH}_4^+] = C \rightarrow$

$C = 5 \cdot 10^{-2} + 8,913 \cdot 10^{-4}$ et $C = 5,09 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

3⁰) $\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} = \frac{y_f}{C} \longrightarrow y_f = \tau_f \cdot C$ donc $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+](C - y_f)}{y_f} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+](1 - \tau_f)}{\tau_f}$

La base étant faiblement dissociée, on négligera τ_f devant 1, on aura alors : $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{\tau_f}$ et $\tau_f = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a}$

A.N : $\tau_f = \frac{10^{-10,95}}{10^{-9,2}} = 10^{-1,75}$ et $\tau_f = 1,78 \cdot 10^{-2}$ ou $\tau_f = 1,78 \%$

4⁰) a - La concentration de la solution (S') est $C' = \frac{C \cdot V}{V + V_e} \rightarrow \frac{C}{C'} = \frac{V + V_e}{V} = 1 + \frac{V_e}{V}$

$\begin{cases} \text{pH} = 7 + \frac{1}{2}\text{p}K_a + \frac{1}{2}\log C \\ \text{pH}' = 7 + \frac{1}{2}\text{p}K_a + \frac{1}{2}\log C' \end{cases} \rightarrow \text{pH} - \text{pH}' = \frac{1}{2}(\log C - \log C') = \frac{1}{2}\log \frac{C}{C'} \rightarrow \frac{C}{C'} = 10^{2(\text{pH} - \text{pH}')} \rightarrow$

On en déduit que : $1 + \frac{V_e}{V} = 10^{2(\text{pH} - \text{pH}')} \rightarrow V_e = [10^{2(\text{pH} - \text{pH}')} - 1] \cdot V$

A.N : $V_e = [10^{2(10,95 - 10,6)} - 1] \cdot 10$ et $V_e = 40,12 \text{ mL}$

b - $\tau_f' = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a} = \frac{10^{-\text{pH}'}}{10^{\text{p}K_a}}$

A.N : $\tau_f' = \frac{10^{-10,6}}{10^{9,2}} = 10^{-1,4}$ et $\tau_f' = 3,98 \cdot 10^{-2}$ ou $\tau_f' = 3,98 \%$

c - $C' < C \longrightarrow \tau_f' > \tau_f$

La dilution favorise la dissociation de l'ammoniac dans l'eau (loi de modération).

Exercice 3 :

Une solution aqueuse d'hydroxylamine NH_2OH de concentration $C = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ a un $\text{pH} = 9,5$.

1⁰) a - Montrer que NH_2OH est une base faible.

b - Donner l'expression de la constante d'acidité K_a du couple $(\text{NH}_3\text{OH}^+ / \text{NH}_2\text{OH})$.

2⁰) a - Dresser le tableau d'avancement volumique de la réaction de l'hydroxylamine avec l'eau.

b - Soit τ_f le taux d'avancement final de la réaction. Montrer que : $K_a = \frac{[H_3O^+]}{[NH_3OH^+]} \cdot \frac{1-\tau_f}{\tau_f}$.

En considérant la base faiblement dissociée ($\tau_f \ll 1$), déduire l'expression : $pH = pK_a - \log \tau_f$.

c - En appliquant la loi de l'électro-neutralité à la solution, montrer que : $\tau_f = \frac{[OH^-] - [H_3O^+]}{C}$.

d - En négligeant $[H_3O^+]$ devant $[OH^-]$, établir alors l'expression : $pH = \frac{1}{2}(pK_e + pK_a + \log C)$.

3⁰) Calculer la valeur de la constante d'acidité K_a du couple (NH_3OH^+/NH_2OH).

4⁰) Quelle est la valeur de τ_f ? Conclure.

Réponse :

1⁰) a - $[OH^-] = \frac{K_e}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-pK_e}}{10^{-pH}} = 10^{pH-pK_e}$.

A.N : $[OH^-] = 10^{9,5-14} = 10^{-4,5}$ et $[OH^-] = 3,16 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

On a : $C = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1} \rightarrow [OH^-] \ll C \rightarrow NH_2OH$ est une base faible.

b - $K_a = \frac{[H_3O^+][NH_2OH]}{[NH_3OH^+]}$

2⁰) a -

Equation chimique		$NH_2OH + H_2O \xrightleftharpoons[2]{1} NH_3OH^+ + OH^-$			
Etat du système	Avancement volumique	Concentrations molaires			
Initial	0	C	excès	0	$10^{-\frac{pK_e}{2}}$
final	y_f	$C - y_f$	excès	y_f	10^{pH-pK_e}

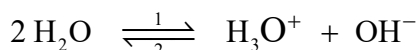
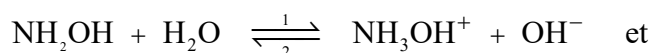
b - $K_a = \frac{[H_3O^+](C - y_f)}{y_f}$

on a : $\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} = \frac{y_f}{C} \rightarrow y_f = \tau_f \cdot C$, on écrit alors : $K_a = \frac{[H_3O^+](C - \tau_f \cdot C)}{\tau_f \cdot C}$ et $K_a = [H_3O^+] \cdot \frac{(1 - \tau_f)}{\tau_f}$.

$\tau_f \ll 1 \rightarrow K_a = \frac{[H_3O^+]}{\tau_f}$ et $[H_3O^+] = K_a \cdot \tau_f$. Donc : $-\log[H_3O^+] = -\log K_a - \log \tau_f$ et

$pH = pK_a - \log \tau_f$.

c - Les réactions ayant lieu en solution sont :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont : NH_2OH , NH_3OH^+ , H_3O^+ et OH^- .

L'électro neutralité implique que :

$$[H_3O^+] + [NH_3OH^+] = [OH^-] \rightarrow [NH_3OH^+] = [OH^-] - [H_3O^+] \rightarrow y_f = [OH^-] - [H_3O^+]$$

$$\tau_f = \frac{y_f}{C} \rightarrow \tau_f = \frac{[OH^-] - [H_3O^+]}{C}$$

d - $[H_3O^+] \ll [OH^-] \rightarrow \tau_f = \frac{[OH^-]}{C}$ et $pH = pK_a - \log \frac{[OH^-]}{C} = pK_a - \log[OH^-] + \log C$

$$[\text{OH}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-pK_e}}{10^{-pH}} = 10^{pH-pK_e} \rightarrow pH = pK_a - \log 10^{pH-pK_e} + \log C = pK_a - pH + pK_e + \log C$$

$$\text{et } pH = \frac{1}{2}(pK_e + pK_a + \log C)$$

$$3^0) pK_a = 2pH - pK_e - \log C = 2.9,5 - 14 - \log 10^{-1} \text{ et } pK_a = 6 \text{ or } K_a = 10^{-pK_a} \rightarrow K_a = 10^{-6}.$$

$$4^0) \log \tau_f = pK_a - pH = 6 - 9,5 = -3,5 \rightarrow \tau_f = 10^{-3,5} \text{ et } \tau_f = 3,16.10^{-4}$$

$\tau_f \ll 1$ donc la base NH_2OH est très faiblement dissociée.

Exercice 4 :

Deux solutions aqueuses acides (S_1) et (S_2) ont la même concentration $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

- (S_1) est une solution d'acide chlorhydrique (HCl) de $pH_1 = 2$.

- (S_2) est une solution d'acide méthanoïque (HCOOH) de $pH_2 = 2,9$.

1⁰) a - Montrer que l'un des acides est fort alors que l'autre est faible.

b - Ecrire l'équation de la réaction de chacun de ces deux acides avec l'eau.

2⁰) a - Déterminer les concentrations molaires des différentes espèces chimiques présentes dans (S_2).

b - Calculer la valeur de la constante d'acidité K_a du couple ($\text{HCOOH}/\text{HCOO}^-$).

3⁰) A un volume $V = 10^{-2} \text{ L}$ de la solution (S_2), on ajoute un volume V_e d'eau pure. On obtient alors une solution (S'_2) de $pH'_2 = 3,4$.

a - Ecrire l'expression du pH de la solution (S_2).

b - Montrer que $V_e = V \left(10^{2(pH'_2 - pH_2)} - 1 \right)$. Calculer V_e .

4⁰) A un volume $V = 10^{-2} \text{ L}$ de la solution (S_1), on ajoute le même volume V_e d'eau pure. On obtient alors une solution (S'_1).

a - Ecrire l'expression du pH de la solution (S_1).

b - Montre que pour (S'_1), on a $pH'_1 = pH_1 + \log \left(1 + \frac{V_e}{V} \right)$. Calculer pH'_1 .

5⁰) Soit $\tau_f = \frac{10^{-pH}}{C}$ le taux d'avancement final de la réaction de dissociation d'un acide faible dans l'eau.

Calculer τ_{f2} et τ'_{f2} respectivement dans la solution (S_2) et (S'_2). Commenter le résultat.

Réponse :

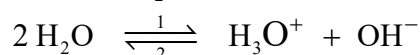
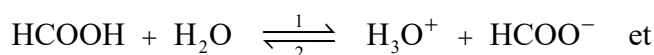
1⁰) a - $[\text{H}_3\text{O}^+]_1 = 10^{-pH_1} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_1 = C$ donc HCl est un acide fort.

$[\text{H}_3\text{O}^+]_2 = 10^{-pH_2} = 10^{-2,9} = 1,6.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_2 \ll C$ donc HCOOH est un acide faible.

b - Pour (S_1) : $\text{HCl} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$ (réaction totale avec l'eau)

Pour (S_2) : $\text{HCOOH} + \text{H}_2\text{O} \xrightleftharpoons{\frac{1}{2}} \text{H}_3\text{O}^+ + \text{HCOO}^-$ (réaction partielle avec l'eau)

2⁰) a - Les réactions ayant lieu en solution sont :



Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont :

HCOOH , HCOO^- , H_3O^+ et OH^- .

* $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-pH} = 10^{-2,9}$ et $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1,26.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

* $[\text{OH}^-] = 10^{pH-pK_e} = 10^{2,9-14} = 10^{-11,1}$ et $[\text{OH}^-] = 7,94.10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$.

* L'électroneutralité : $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{HCOO}^-] + [\text{OH}^-]$

$$\rightarrow [\text{HCOO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{OH}^-] \approx [\text{H}_3\text{O}^+] \quad \text{et} \quad [\text{HCOO}^-] = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

* La conservation de la matière : $C = [\text{HCOOH}] + [\text{HCOO}^-]$

$$\rightarrow [\text{HCOOH}] = C - [\text{HCOO}^-] \rightarrow [\text{HCOOH}] = 10^{-2} - 1,26 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad [\text{HCOOH}] = 8,74 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{b - } K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HCOO}^-]}{[\text{HCOOH}]} \rightarrow K_a = \frac{(1,26 \cdot 10^{-3})^2}{8,74 \cdot 10^{-3}} \quad \text{et} \quad K_a = 18,16 \cdot 10^{-5} \quad (pK_a = 3,74)$$

$$3^0) \text{ a - Pour une solution aqueuse d'acide faible : } pH_2 = \frac{1}{2}pK_a - \frac{1}{2}\log C$$

$$\text{b - Après la dilution : } pH'_2 = \frac{1}{2}pK_a - \frac{1}{2}\log C' \quad \text{avec} \quad C' = \frac{C \cdot V}{V + V_e}.$$

$$pH'_2 - pH_2 = \frac{1}{2}\log C - \frac{1}{2}\log C' = \frac{1}{2}\log \frac{C}{C'} \rightarrow 2(pH'_2 - pH_2) = \log \frac{C}{C'} \quad \text{et} \quad \frac{C}{C'} = 10^{2(pH'_2 - pH_2)}.$$

$$\text{or } \frac{C}{C'} = \frac{V + V_e}{V} = 1 + \frac{V_e}{V} \rightarrow V_e = V \cdot \left(\frac{C}{C'} - 1 \right) \quad \text{et enfin : } V_e = V \cdot \left(10^{2(pH'_2 - pH_2)} - 1 \right).$$

$$\text{A.N : } V_e = 10^{-2} \cdot \left(10^{2(3,4-2,9)} - 1 \right) \quad \text{et} \quad V_e = 9 \cdot 10^{-2} \text{ L}.$$

$$4^0) \text{ a - Pour une solution aqueuse d'acide fort : } pH_1 = -\log C$$

$$\text{b - Après la dilution : } pH'_1 = -\log C' \quad \text{avec} \quad C' = \frac{C \cdot V}{V + V_e}.$$

$$pH'_1 - pH_1 = \log C - \log C' = \log \frac{C}{C'} \rightarrow pH'_1 = pH_1 + \log \frac{C}{C'}$$

$$\text{or } \frac{C}{C'} = \frac{V + V_e}{V} = 1 + \frac{V_e}{V} \quad \text{donc : } pH'_1 = pH_1 + \log \left(1 + \frac{V_e}{V} \right).$$

$$\text{A.N : } pH'_1 = 2 + \log \left(1 + \frac{9 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} \right) \quad \text{et} \quad pH'_1 = 3.$$

$$5^0) \tau_{f2} = \frac{10^{-pH_2}}{C} = \frac{10^{-2,9}}{10^{-2}} = 10^{-0,9} \quad \text{et} \quad \tau_{f2} = 0,126 \quad (\tau_{f2} = 12,6 \%).$$

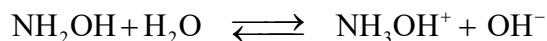
$$\tau'_{f2} = \frac{10^{-pH'_2}}{C'} = \frac{10^{-3,4}}{10^{-3}} = 10^{-0,4} \quad \text{et} \quad \tau'_{f2} = 0,398 \quad (\tau'_{f2} = 39,8 \%).$$

$$\tau'_{f2} > \tau_{f2} \rightarrow \text{la dilution favorise la dissociation.}$$

Exercice 5 :

L'hydroxylamine est une base faible. Le couple acide-base correspondant a un $pK_a = 6,00$.

La réaction de cette base avec l'eau est symbolisée par l'équation chimique :



Une solution aqueuse (S) d'hydroxylamine de concentration molaire C inconnue a un $pH = 9$.

1⁰) a Dresser le tableau d'avancement volumique de la réaction considérée

b Quelles sont les entités chimiques présentes dans la solution (S) ?

2⁰) a Montrer la relation : $10^{-pH} + C \cdot \tau_f = 10^{pH - pK_e}$ où τ_f est le taux d'avancement final de la réaction.

b - Sachant que $\tau_f = 10^{pK_a - pH}$, déduire l'expression $pH = 7 + \frac{1}{2}pK_a + \frac{1}{2}\log C$.

c - Calculer alors la valeur de la concentration molaire C de la solution (S).

3⁰) A un volume $V = 10 \text{ mL}$ de la solution (S), on ajoute un volume V_e d'eau pure.

La solution (S') obtenue a un $pH' = 8$.

a - Calculer la valeur de la concentration molaire C' de la solution (S').

b - Montrer que $V_e = V \cdot \left(\frac{C}{C'} - 1 \right)$. Calculer la valeur de V_e .

c - Comparer les valeurs du taux d'avancement final de la réaction dans (S) et (S'). Conclure.

Réponse :

1⁰) a -

Equation chimique		$\text{NH}_2\text{OH} + \text{H}_2\text{O} \xrightleftharpoons{1/2} \text{NH}_3\text{OH}^+ + \text{OH}^-$			
Etat du système	Avancement volumique	Concentrations molaires			
Initial	0	C	excès	0	$10^{-\frac{\text{pK}_e}{2}}$
final	x_f	$C - y_f$	excès	y_f	$10^{\text{pH} - \text{pK}_e}$

b - Les entités chimiques présentes dans la solution aqueuse (S) sont : H_3O^+ , OH^- , NH_3OH^+ et NH_2OH .

2⁰) a - La loi de l'électro neutralité $\rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{NH}_3\text{OH}^+] = [\text{OH}^-] \rightarrow 10^{-\text{pH}} + y_f = 10^{\text{pH} - \text{pK}_e}$.

on a : $\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} = \frac{y_f}{C} \rightarrow y_f = \tau_f \cdot C$, on écrit alors : $10^{-\text{pH}} + C \cdot \tau_f = 10^{\text{pH} - \text{pK}_e}$.

b - On a : $\tau_f = 10^{\text{pK}_a - \text{pH}}$, on écrit alors : $10^{-\text{pH}} + C \cdot 10^{\text{pK}_a - \text{pH}} = 10^{\text{pH} - \text{pK}_e} \rightarrow C \cdot 10^{\text{pK}_a - \text{pH}} = 10^{\text{pH} - \text{pK}_e} - 10^{-\text{pH}}$.

La solution étant basique, on néglige $[\text{H}_3\text{O}^+]$ devant $[\text{OH}^-] \rightarrow 10^{-\text{pH}} \ll 10^{\text{pH} - \text{pK}_e}$, donc :

$$C \cdot 10^{\text{pK}_a - \text{pH}} = 10^{\text{pH} - \text{pK}_e}$$

$$\rightarrow \log C + \log 10^{\text{pK}_a - \text{pH}} = \log 10^{\text{pH} - \text{pK}_e} \rightarrow \log C + \text{pK}_a - \text{pH} = \text{pH} - \text{pK}_e \rightarrow 2\text{pH} = \text{pK}_e + \text{pK}_a + \log C$$

Sachant que $\text{pK}_e = 14$, il vient alors que : $\text{pH} = 7 + \frac{1}{2}\text{pK}_a + \frac{1}{2}\log C$.

c - $2\text{pH} = \text{pK}_e + \text{pK}_a + \log C \rightarrow \log C = 2\text{pH} - \text{pK}_e - \text{pK}_a$ et $C = 10^{2\text{pH} - \text{pK}_e - \text{pK}_a}$.

$$\text{A.N : } C = 10^{2 \cdot 9 - 14 - 6} \text{ et } C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

3⁰) a - $C' = 10^{2\text{pH}' - \text{pK}_e - \text{pK}_a}$. A.N : $C' = 10^{2 \cdot 8 - 14 - 6}$ et $C' = 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - Après la dilution : $C' = \frac{C \cdot V}{V + V_e} \rightarrow \frac{C}{C'} = \frac{V + V_e}{V} = 1 + \frac{V_e}{V} \rightarrow V_e = V \cdot \left(\frac{C}{C'} - 1 \right)$.

$$\text{A.N : } V_e = 10 \left(\frac{10^{-2}}{10^{-4}} - 1 \right) \text{ et } V_e = 990 \text{ mL}.$$

$$\text{c} - \tau_f = 10^{\text{pK}_a - \text{pH}}. \quad \tau_f = 10^{6-9} \text{ et } \tau_f = 10^{-3}$$

$$\tau'_f = 10^{\text{pK}_a - \text{pH}'}. \quad \tau'_f = 10^{6-8} \text{ et } \tau'_f = 10^{-4}$$

$\tau'_f < \tau_f$ donc la dilution favorise la dissociation.

Exercice 6 :

La mesure du pH de trois solutions aqueuses acides, de même concentration molaire $C = 0,05 \text{ mol.L}^{-1}$, a donné les valeurs consignées dans le tableau ci-contre :

1⁰) Montrer qu'un des trois acides est fort tandis que les deux autres sont faibles.

2⁰) On donne ci-dessous le tableau d'avancement volumique de la réaction d'ionisation d'un acide faible AH dans l'eau :

Acide	Solution aqueuse	pH
A ₁ H	(S ₁)	3,05
A ₂ H	(S ₂)	1,30
A ₃ H	(S ₃)	2,55

Equation chimique		$\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{A}^-$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L ⁻¹)	Concentration (mol.L ⁻¹)			
Initial	0	C	Excès	$10^{-\frac{\text{pK}_e}{2}}$	0
final	y_f	$C - y_f$	Excès	$10^{-\text{pH}}$	y_f

a - Soit τ_f le taux d'avancement final de la réaction. En exploitant la loi de l'électro neutralité, exprimer $[H_3O^+]$ en fonction de C et de τ_f . En déduire que le pH de la solution s'écrit : $pH = -\log C - \log \tau_f$.

b - Montrer que la constante d'acidité du couple (AH/A^-) s'exprime par : $K_a = 10^{-pH} \cdot \frac{\tau_f}{1-\tau_f}$.

c - Sachant que l'acide est faiblement dissocié, déduire l'expression : $pK_a = 2pH + \log C$.

3⁰) a - Calculer le pK_a de chacun des couples correspondant aux acides faibles considérés.

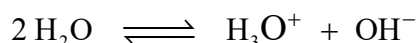
b - Comparer alors les forces de ces deux acides faibles.

Réponse :

1⁰)

Acide	Solution aqueuse	C (mol.L ⁻¹)	pH	$[H_3O^+] = 10^{-pH}$ (mol.L ⁻¹)	Déduction
A ₁ H	(S ₁)	$5 \cdot 10^{-2}$	3,05	$10^{-3,05} = 8,9 \cdot 10^{-4}$	$[H_3O^+]_1 < C \rightarrow A_1H$ acide faible
A ₂ H	(S ₂)	$5 \cdot 10^{-2}$	1,30	$10^{-1,30} = 5 \cdot 10^{-2}$	$[H_3O^+]_2 = C \rightarrow A_2H$ acide fort
A ₃ H	(S ₃)	$5 \cdot 10^{-2}$	2,55	$10^{-2,55} = 2,8 \cdot 10^{-3}$	$[H_3O^+]_3 < C \rightarrow A_3H$ acide faible

2⁰) a - Les réactions ayant lieu en solution sont : $AH + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + A^-$ et



Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont : AH , A^- , H_3O^+ et OH^- .

L'électro neutralité implique que : $[H_3O^+] = [A^-] + [OH^-]$

$\rightarrow [A^-] = [H_3O^+] - [OH^-] \xrightarrow{\substack{\text{La solution est acide} \\ [OH^-] \ll [H_3O^+]}} [A^-] = [H_3O^+] \text{ et } y_f = 10^{-pH}$

on a : $\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} = \frac{y_f}{C} \rightarrow y_f = C \cdot \tau_f$

donc : $C \cdot \tau_f = 10^{-pH} \rightarrow -pH = \log C + \log \tau_f \text{ et } pH = -\log C - \log \tau_f$

b - $K_a = \frac{[H_3O^+] \cdot [A^-]}{[AH]} \rightarrow K_a = [H_3O^+] \frac{y_f}{C - y_f} = [H_3O^+] \frac{C \cdot \tau_f}{C - C \cdot \tau_f} \text{ et } K_a = 10^{-pH} \cdot \frac{\tau_f}{1 - \tau_f}$

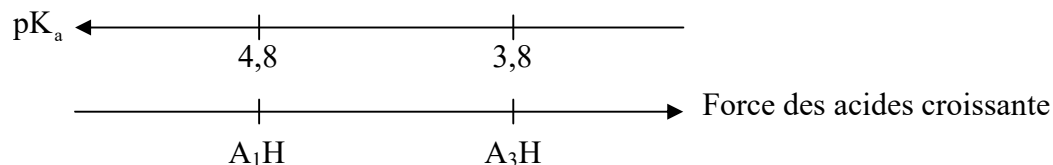
c - L'acide est faiblement dissocié $\rightarrow \tau_f \ll 1$

donc : $K_a = 10^{-pH} \cdot \tau_f \rightarrow pK_a = pH - \log \tau_f \xrightarrow{-\log \tau_f = pH + \log C} pK_a = 2pH + \log C$.

3⁰) a - Pour l'acide A₁H : $pK_{a1} = 2pH_1 + \log C \rightarrow pK_{a1} = 2,3,05 + \log(5 \cdot 10^{-2}) \text{ et } pK_{a1} = 4,8$

Pour l'acide A₂H : $pK_{a3} = 2pH_3 + \log C \rightarrow pK_{a3} = 2,2,55 + \log(5 \cdot 10^{-2}) \text{ et } pK_{a3} = 3,8$

b -



Exercice 7 :

On considère deux solutions aqueuses (S₁) et (S₂), respectivement de bases B₁ et B₂, de concentrations molaires identiques $C_1 = C_2 = C$ et de pH respectifs $pH_1 = 12,70$ et $pH_2 = 10,95$.

1⁰) Montrer que le taux d'avancement final de la réaction d'une base avec l'eau s'écrit : $\tau_f = \frac{10^{pH-pK_e}}{C}$.

2⁰) Dans une fiole jaugée de volume $V = 100$ mL, contenant un volume $V_0 = 20$ mL de la solution (S₁), on ajoute un volume $V_e = 80$ mL d'eau distillée.

On obtient une solution (S'₁) de concentration molaire C'_1 .

a - Vérifier que $C'_1 = \frac{C_1}{5}$.

b - Le pH de la solution (S'_1) est donné par : $pH'_1 = pH_1 - \log 5$.

Montrer que le taux d'avancement final τ'_{f1} après la dilution est égal au taux d'avancement final τ_{f1} avant la dilution.

c - En déduire que la base B_1 est une base forte.

d - Calculer alors la concentration molaire C_1 de la solution (S_1).

3⁰) a - Déterminer la valeur du taux d'avancement final τ_{f2} de la réaction de la base B_2 avec l'eau.

b - En déduire que la base B_2 est une base faible.

c - Sachant que le pH de la solution (S_2) a pour expression : $pH_2 = \frac{1}{2}(pK_e + pK_{a2} + \log C_2)$, calculer la valeur de pK_{a2} du couple acide-base (B_2H^+/B_2).

4⁰) A partir de la connaissance de la valeur de C_2 et celle de pH_2 , déterminer les molarités des différentes espèces chimiques présentes dans la solution aqueuse (S_2).

5⁰) Dans une fiole jaugée de volume $V = 100$ mL, contenant un volume $V_0 = 20$ mL de la solution (S_2), on ajoute un volume $V_e = 80$ mL d'eau distillée.

a - Quelle est la valeur pH'_2 du pH de la solution (S'_2) obtenue après la dilution.

b - Calculer la valeur du taux d'avancement final τ'_{f2} après la dilution. Comparer à τ_{f2} . Conclure.

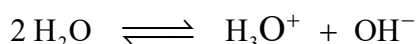
Réponse :

1⁰) $B + H_2O \rightleftharpoons BH^+ + OH^-$

$$\begin{array}{lcl} t = 0, & C & \text{excès} & 0 & 10^{-\frac{pK_e}{2}} \\ t_{eq}, & C - y_f & \text{excès} & y_f & 10^{pH - pK_e} \end{array}$$

$$\tau_f = \frac{y_f}{C} = \frac{y_f}{C} \xrightarrow{y_f = [BH^+]} \tau_f = \frac{[BH^+]}{C}$$

Les réactions ayant lieu en solution sont : $B + H_2O \rightleftharpoons BH^+ + OH^-$ et



Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont : B , BH^+ , H_3O^+ et OH^- .

L'électroneutralité implique que : $[H_3O^+] + [BH^+] = [OH^-]$

$$\rightarrow [BH^+] = [OH^-] - [H_3O^+] \xrightarrow{\substack{\text{La solution est basique} \\ [H_3O^+] \ll [OH^-]}} [BH^+] = [OH^-]$$

$$\text{donc : } \tau_f = \frac{[OH^-]}{C} \xrightarrow{[OH^-] = 10^{pH - pK_e}} \tau_f = \frac{10^{pH - pK_e}}{C}.$$

$$\mathbf{2^0) a - } C'_1 = \frac{C_1 \cdot V_0}{V_0 + V_e}. \text{ A.N : } C'_1 = \frac{C_1 \cdot 20}{20 + 80} \text{ et } C'_1 = \frac{C_1}{5}.$$

$$\mathbf{b - } \tau'_{f1} = \frac{10^{pH'_1 - pK_e}}{C'_1} = \frac{10^{pH_1 - \log 5 - pK_e}}{\frac{C}{5}} = 5 \cdot \frac{10^{pH_1 - pK_e} \cdot 10^{-\log 5}}{C} = 5 \cdot \frac{10^{pH_1 - pK_e}}{C} \cdot \frac{1}{5} = \frac{10^{pH_1 - pK_e}}{C} = \tau_{f1}.$$

c - $\tau'_{f1} = \tau_{f1} \rightarrow$ la dilution n'a pas d'influence sur la dissociation $\rightarrow$ la base B_1 est une base forte ($\tau'_{f1} = \tau_{f1} = 1$).

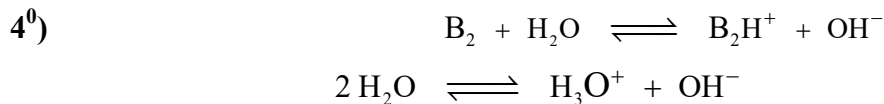
$$\mathbf{d - } \tau_{f1} = \frac{10^{pH_1 - pK_e}}{C_1} \rightarrow C_1 = \frac{10^{pH_1 - pK_e}}{\tau_{f1}}. \text{ A.N : } C_1 = \frac{10^{12,7 - 14}}{1} \text{ et } C_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$3^0) \text{ a - } \tau_{f2} = \frac{10^{pH_2 - pK_e}}{C_2}. \quad \text{A.N: } \tau_{f2} = \frac{10^{10,95-14}}{5 \cdot 10^{-2}} \quad \text{et} \quad \tau_{f2} = 1,78 \cdot 10^{-2}$$

b - $\tau_{f2} < 1 \rightarrow$ la base B_2 est une base faible.

$$\text{c - } pH_2 = \frac{1}{2}(pK_e + pK_{a2} + \log C_2) \rightarrow pK_{a2} = 2 \cdot pH_2 - pK_e - \log C_2$$

$$\text{A.N: } pK_{a2} = 2 \cdot 10,95 - 14 - \log 5 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad pK_{a2} = 9,2.$$



Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont : B_2 , B_2H^+ , H_3O^+ et OH^- .

$$* [H_3O^+] = 10^{-pH_2} \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-10,95} \quad \text{et} \quad [H_3O^+] = 1,12 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$* [OH^-] = 10^{pH_2 - pK_e} \rightarrow [OH^-] = 10^{10,95-14} \quad \text{et} \quad [OH^-] = 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$* \text{L'électroneutralité : } [H_3O^+] + [B_2H^+] = [OH^-]$$

$$\rightarrow [B_2H^+] = [OH^-] - [H_3O^+] \approx [OH^-] \quad \text{et} \quad [B_2H^+] = 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$* \text{La conservation de la matière : } [B_2] + [B_2H^+] = C_2$$

$$\rightarrow [B_2] = C_2 - [B_2H^+]. \quad \text{A.N: } [B_2] = 500 \cdot 10^{-4} - 8,9 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad [B_2] = 4,91 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{Remarque : } pK_{a2} = pH_2 - \log \frac{[B_2]}{[B_2H^+]} = 10,95 - \log \frac{491,1}{8,9} = 9,2$$

$$5^0) \text{ a - } C'_2 = \frac{C_2 \cdot V_0}{V_0 + V_e}. \quad \text{A.N: } C'_2 = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{20 + 80} \quad \text{et} \quad C'_2 = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH'_2 = \frac{1}{2}(pK_e + pK_{a2} + \log C'_2). \quad \text{A.N: } pH'_2 = \frac{1}{2}(14 + 9,2 + \log 10^{-2}) \quad \text{et} \quad pH'_2 = 10,6$$

$$\text{b - } \tau'_{f2} = \frac{10^{pH'_2 - pK_e}}{C'_2}. \quad \text{A.N: } \tau'_{f2} = \frac{10^{10,6-14}}{10^{-2}} \quad \text{et} \quad \tau'_{f2} = 3,98 \cdot 10^{-2}$$

$\tau'_{f2} = \tau_{f2} \rightarrow$ la dilution favorise la dissociation d'une base faible.

Exercice 8 :

Deux solutions aqueuses acides (S_1) et (S_2) ont la même concentration $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

- (S_1) est une solution d'acide chlorhydrique (HCl) de $pH_1 = 2$.

- (S_2) est une solution d'acide méthanoïque ($HCOOH$) de $pH_2 = 2,9$.

1⁰) a - Montrer que l'un des acides est fort alors que l'autre est faible.

b - Ecrire l'équation de la réaction de chacun de ces deux acides avec l'eau.

2⁰) a - Déterminer les concentrations molaires des différentes espèces chimiques présentes dans la solution (S_2).

b - Calculer la valeur de la constante d'acidité K_a du couple ($HCOOH/HCOO^-$).

3⁰) A un volume $V = 10^{-2} \text{ L}$ de la solution (S_2), on ajoute un volume V_e d'eau pure. On obtient alors une solution (S'_2) de $pH'_2 = 3,4$.

a - Ecrire l'expression du pH de la solution (S_2).

b - Montrer que $V_e = V \left(10^{2(pH'_2 - pH_2)} - 1 \right)$. Calculer V_e .

4⁰) A un volume $V = 10^{-2} \text{ L}$ de la solution (S_1), on ajoute le même volume V_e d'eau pure. On obtient alors une solution (S'_1).

a - Ecrire l'expression du pH de la solution (S_1).

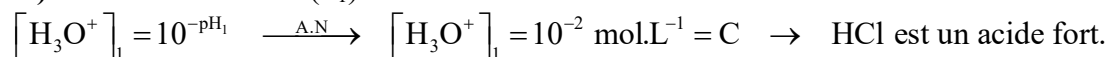
b - Montre que pour (S'_1), on a $pH'_1 = pH_1 + \log\left(1 + \frac{V_e}{V}\right)$. Calculer pH'_1 .

5⁰) Soit $\tau_f = \frac{10^{-pH}}{C}$ le taux d'avancement final de la réaction de dissociation d'un acide faible dans l'eau.

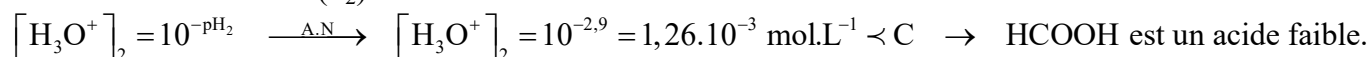
Calculer τ_{f2} et τ'_{f2} respectivement dans la solution (S_2) et (S'_2). Commenter le résultat.

Réponse :

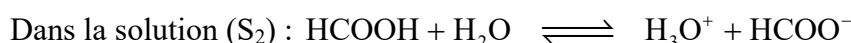
1⁰) a - Pour la solution (S_1) :



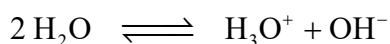
Pour la solution (S_2) :



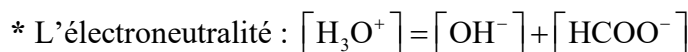
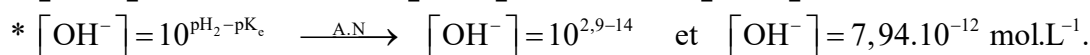
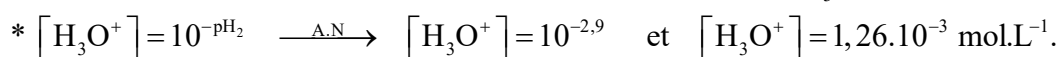
b - Dans la solution (S_1) : $HCl + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + Cl^-$



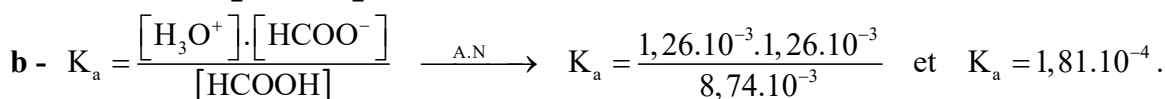
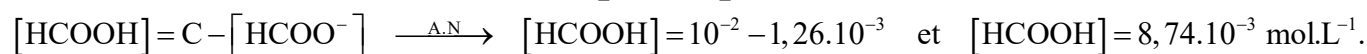
2⁰) a - $HCOOH + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + HCOO^-$



Les entités chimiques présentes en solutions aqueuses sont : H_3O^+ , OH^- , $HCOOH$ et $HCOO^-$.



* La conservation de la matière: $[HCOOH] + [HCOO^-] = C$



3⁰) a - Pour une solution d'acide faible : $pH = \frac{1}{2} pK_a - \frac{1}{2} \log C$.

b - Après dilution, on obtient une solution (S'_2) de concentration molaire : $C' = \frac{C \cdot V}{V + V_e}$.

$$\begin{cases} pH_2 = \frac{1}{2} pK_a - \frac{1}{2} \log C \\ pH'_2 = \frac{1}{2} pK_a - \frac{1}{2} \log C' \end{cases} \rightarrow pH'_2 - pH_2 = \frac{1}{2} \log C - \frac{1}{2} \log C' = \frac{1}{2} \log \frac{C}{C'} \rightarrow \log \frac{C}{C'} = 2(pH'_2 - pH_2)$$

$$\rightarrow \frac{C}{C'} = 10^{2(pH'_2 - pH_2)} \xrightarrow{\frac{C}{C'} = \frac{V + V_e}{V} = 1 + \frac{V_e}{V}} \frac{V_e}{V} = 10^{2(pH'_2 - pH_2)} - 1 \quad \text{et} \quad V_e = V \cdot (10^{2(pH'_2 - pH_2)} - 1).$$

$$A.N : V_e = 10^{-2} \cdot (10^{2(3,4-2,9)} - 1) \quad \text{et} \quad V_e = 9 \cdot 10^{-2} \text{ L.}$$

4⁰) a - Pour une solution d'acide fort : $pH = -\log C$.

b - Après dilution, on obtient une solution (S'_1) de concentration molaire : $C' = \frac{C \cdot V}{V + V_e}$.

$$pH'_1 = -\log C' = -\log\left(C \cdot \frac{V}{V + V_e}\right) = -\log C - \log \frac{V}{V + V_e} = -\log C + \log \frac{V + V_e}{V} \quad \text{et} \quad pH'_1 = pH_1 + \log\left(1 + \frac{V_e}{V}\right)$$

$$A.N : pH'_1 = 2 + \log\left(1 + \frac{9 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}}\right) \quad \text{et} \quad pH'_1 = 3.$$

$$5^0) \tau_{f2} = \frac{10^{-\text{pH}_2}}{C} = \frac{10^{-2,9}}{10^{-2}} \quad \text{et} \quad \tau_{f2} = 0,126 \quad \text{ou} \quad \tau_{f2} = 12,6 \, \%$$

$$\tau'_{f2} = \frac{10^{-\text{pH}'_2}}{C'} = \frac{10^{-3,4}}{10^{-2} \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-2} + 9 \cdot 10^{-2}}} \quad \text{et} \quad \tau'_{f2} = 0,398 \quad \text{ou} \quad \tau'_{f2} = 39,8 \, \%$$

$\tau'_{f2} > \tau_{f2} \rightarrow$ La dilution favorise la dissociation de l'acide faible.

Exercice 9 :

On dispose de deux flacons 1 et 2, Le flacon 1 contient une solution (S_1) d'un acide A_1H de concentration C_1 et le flacon 2 contient une solution (S_2) d'un acide A_2H de concentration C_2 .

Le pH des deux solutions (S_1) et (S_2) vaut $\text{pH}_1 = \text{pH}_2 = 3$.

1⁰) a - Sachant que A_1H est un acide fort, Déterminer la valeur de la concentration C_1 .

b - Sachant que A_2H est un acide faible, comparer, en le justifiant, les valeurs de C_1 et C_2 .

2⁰) On donne ci-dessous le tableau d'avancement volumique de la réaction d'ionisation de l'acide faible A_2H dans l'eau :

Equation chimique		$A_2H + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + A_2^-$			
Etat du système	Avancement volumique (mol.L ⁻¹)	Concentration (mol.L ⁻¹)			
Initial	0	C_2	Excès	$10^{-\frac{\text{pK}_a}{2}}$	0
final	y_f	$C_2 - y_f$	Excès	10^{-pH_2}	y_f

a - En justifiant l'approximation utilisée, établir l'expression du taux d'avancement final τ_f de cette réaction, en fonction de C_2 et de pH_2 .

b - Soit K_a la constante d'acidité du couple acide-base (A_2H/A_2^-) considéré.

Etablir l'expression de K_a en fonction de pH_2 et de τ_f .

c - Sachant que l'acide est faiblement dissocié, déduire l'expression : $\text{pH}_2 = \frac{1}{2}(\text{pK}_a - \log C_2)$

3⁰) Le couple acide-base (A_2H/A_2^-) a un $\text{pK}_a = 4,8$.

a - Calculer la valeur de la concentration C_2 .

b - Déterminer les molarités des différentes espèces chimiques présentes dans la solution aqueuse (S_2).

4⁰) On dilue n fois la solution (S_1). On obtient une solution (S'_1) de concentration $C'_1 = \frac{C_1}{n}$ et de $\text{pH} = \text{pH}'_1$.

On dilue p fois la solution (S_2). On obtient une solution (S'_2) de concentration $C'_2 = \frac{C_2}{p}$ et de $\text{pH} = \text{pH}'_2$.

a - Montrer que si $\text{pH}'_1 = \text{pH}'_2$, alors $\log n = \frac{1}{2} \cdot \log p$.

b - Déterminer la valeur de n pour que $\text{pH}'_1 = 4$.

5⁰) On dilue 10 fois les deux solutions (S_1) et (S_2). On obtient deux solutions de pH respectifs pH''_1 et pH''_2 .

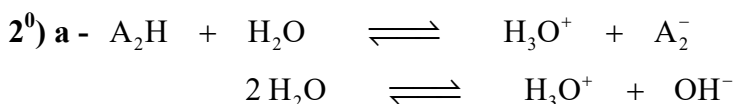
a - Déterminer la valeur du pH de chacune des deux solutions diluées.

b - Pour la solution d'acide faible, calculer la variation $\Delta \tau_f$ lors de la dilution.

Réponse :

1⁰) a - A_1H est un acide fort $\rightarrow [H_3O^+]_1 = C_1 \rightarrow 10^{-\text{pH}_1} = C_1$. A.N : $C_1 = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - A_2H est un acide faible $\rightarrow [H_3O^+]_2 < C_2 \rightarrow 10^{-\text{pH}_2} < C_2 \xrightarrow{10^{-\text{pH}_2} = C_1} C_1 < C_2$.



Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont : A_2H , H_3O^+ , A_2^- et OH^- .

$$\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} \xrightarrow{y_{\max}=C_2} \tau_f = \frac{y_f}{C_2}.$$

La loi de l'électro neutralité s'écrit : $[H_3O^+] = [A_2^-] + [OH^-]$

$$\rightarrow [A_2^-] = [H_3O^+] - [OH^-] \xrightarrow{\text{la solution étant acide } [H_3O^+] \gg [OH^-]} [A_2^-] \approx [H_3O^+] \xrightarrow{\frac{[A_2^-]}{[H_3O^+]} = \tau_f = 10^{-pH_2}} y_f = 10^{-pH_2}.$$

$$\text{donc : } \tau_f = \frac{10^{-pH_2}}{C_2}.$$

$$\mathbf{b - } K_a = \frac{[H_3O^+].[A_2^-]}{[A_2H]} \rightarrow K_a = \frac{[H_3O^+].y_f}{C_2 - y_f}$$

$$\tau_f = \frac{y_f}{C_2} \rightarrow y_f = \tau_f.C_2 \text{ donc } K_a = \frac{[H_3O^+].\tau_f.C_2}{C_2 - \tau_f.C_2} = \frac{[H_3O^+].\tau_f.C_2}{C_2(1 - \tau_f)} = \frac{[H_3O^+].\tau_f}{(1 - \tau_f)} \xrightarrow{[H_3O^+] = 10^{-pH_2}} K_a = \frac{10^{-pH_2}.\tau_f}{(1 - \tau_f)}.$$

$\mathbf{c -}$ L'acide est faiblement dissocié $\rightarrow \tau_f \ll 1$ donc : $K_a = 10^{-pH_2}.\tau_f$

$$\text{or on a : } \tau_f = \frac{10^{-pH_2}}{C_2} \rightarrow K_a = \frac{10^{-2.pH_2}}{C_2} \rightarrow 10^{-2.pH_2} = K_a.C_2 \rightarrow -2.pH_2 = \log K_a + \log C_2$$

$$\rightarrow 2.pH_2 = -\log K_a - \log C_2 = pK_a - \log C_2 \text{ et } pH_2 = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_2).$$

$$\mathbf{3^0) a - } \log C_2 = pK_a - 2pH_2 \rightarrow C_2 = 10^{pK_a - 2pH_2}. \text{ A.N: } C_2 = 10^{4,8-2.3} = 10^{-1,2} \text{ et } C_2 = 6,31.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\mathbf{b - } * [H_3O^+] = 10^{-pH_2}. \text{ A.N: } [H_3O^+] = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$* [OH^-] = 10^{pH_2 - pK_e}. \text{ A.N: } [OH^-] = 10^{3-14} \text{ et } [OH^-] = 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$* [A_2^-] = y_f = [H_3O^+] \rightarrow [A_2^-] = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$* [A_2H] = C_2 - y_f \rightarrow [A_2H] = C_2 - [A_2^-]. \text{ A.N: } [A_2H] = 63,1.10^{-3} - 10^{-3} \text{ et } [A_2H] = 6,21.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$\mathbf{4^0) a - } *$ Pour la solution (S'_1) :

$$pH'_1 = -\log C'_1 = -\log \frac{C_1}{n} = -\log C_1 + \log n \rightarrow pH'_1 = pH_1 + \log n$$

$* \text{ Pour la solution } (S'_2) :$

$$pH'_2 = \frac{1}{2}(pK_a - \log C'_2) = \frac{1}{2}\left(pK_a - \log \frac{C_2}{p}\right) = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_2 + \log p) = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_2) + \frac{1}{2}\log p \rightarrow pH'_2 = pH_2 + \frac{1}{2}\log p$$

$$* pH'_1 = pH'_2 \rightarrow pH_1 + \log n = pH_2 + \frac{1}{2}\log p \xrightarrow{pH_1 = pH_2} \log n = \frac{1}{2}\log p.$$

$$\mathbf{b - } pH'_1 = pH_1 + \log n \rightarrow \log n = pH'_1 - pH_1 \text{ et } n = 10^{pH'_1 - pH_1}. \text{ A.N: } n = 10^{4-3} \text{ et } n = 10.$$

$$\mathbf{5^0) a - } pH''_1 = pH_1 + \log n \xrightarrow{n=10} pH''_1 = 3 + \log 10 \text{ et } pH''_1 = 4.$$

$$pH''_2 = pH_2 + \frac{1}{2}\log p \xrightarrow{p=10} pH''_2 = 3 + \frac{1}{2}\log 10 \text{ et } pH''_2 = 3,5.$$

$$\mathbf{b - } \Delta\tau_f = \tau''_f - \tau_f = \frac{10^{-pH''_2}}{C''_2} - \frac{10^{-pH_2}}{C_2} \xrightarrow{C''_2 = \frac{C_2}{10}} \Delta\tau_f = \frac{1}{C_2}(10.10^{-pH''_2} - 10^{-pH_2})$$

$$\text{A.N: } \Delta\tau_f = \frac{1}{6,31.10^{-2}}(10.10^{-3,5} - 10^{-3}) \text{ et } \Delta\tau_f = 3,43.10^{-2}.$$

Exercice 10 :

Une solution (S) de triméthylamine $(CH_3)_3N$ de concentration $C = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ a un $pH = 11,45$.

$\mathbf{1^0) a -}$ Montrer que la triméthylamine $(CH_3)_3N$ est partiellement ionisée dans l'eau

$\mathbf{b -}$ Ecrire l'équation de dissociation de la triméthylamine $(CH_3)_3N$ dans l'eau.

2⁰) Le pK_a du couple acide-base associé à la triméthylamine s'écrit : $pK_a = pH + \log \frac{[(CH_3)_3 NH^+]}{[(CH_3)_3 N]}$.

a - En justifiant les approximations, établir l'expression $pK_a = 2pH - pK_e - \log C$.

b - Déduire la valeur du pK_a du couple au quel appartient la triméthylamine $(CH_3)_3 N$.

3⁰) A un volume $V = 100 \text{ cm}^3$ de la solution (S) de triméthylamine $(CH_3)_3 N$, on ajoute soit un volume $V_s = 100 \text{ cm}^3$ d'une solution de chlorure de sodium NaCl, soit un volume $V_e = 100 \text{ cm}^3$ d'eau.

a - Justifier que le pH des solutions obtenues, dans les deux cas, est le même.

b - Calculer alors la nouvelle valeur du pH des solutions obtenues.

Réponse :

1⁰) a - $[OH^-] = 10^{pH_2 - pK_e}$. A.N : $[OH^-] = 10^{11,45-14}$ et $[OH^-] = 2,83 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

Or $C = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1} \rightarrow [OH^-] < C$ donc la base étudiée est partiellement dissociée.

b - $(CH_3)_3 N + H_2O \rightleftharpoons (CH_3)_3 NH^+ + OH^-$

2⁰) a - $pK_a = pH + \log \frac{[(CH_3)_3 NH^+]}{[(CH_3)_3 N]}$

$(CH_3)_3 N + H_2O \rightleftharpoons (CH_3)_3 NH^+ + OH^-$

$2 H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$

Les entités chimiques présentes en solution aqueuse sont : $(CH_3)_3 N$, $(CH_3)_3 NH^+$, H_3O^+ et OH^- .

*La loi de l'électro neutralité s'écrit : $[H_3O^+] + [(CH_3)_3 NH^+] = [OH^-]$

$\rightarrow [(CH_3)_3 NH^+] = [OH^-] - [H_3O^+] \xrightarrow{[OH^-] \gg [H_3O^+]} [(CH_3)_3 NH^+] \approx [OH^-] \rightarrow [(CH_3)_3 NH^+] = 10^{pH - pK_e}$.

*La loi de la conservation de la matière s'écrit :

$[(CH_3)_3 N] + [(CH_3)_3 NH^+] = C \rightarrow [(CH_3)_3 N] = C - [(CH_3)_3 NH^+]$

La base est faiblement dissociée $\rightarrow [(CH_3)_3 N] \approx C$

*On écrit alors : $pK_a = pH + \log \frac{10^{pH - pK_e}}{C} \rightarrow pK_a = pH + pH - pK_e - \log C$ et $pK_a = 2pH - pK_e - \log C$.

b - A.N: $pK_a = 2 \cdot 11,45 - 14 - \log 10^{-1}$ et $pK_a = 9,9$.

3⁰) a - $NaCl \xrightarrow{\text{eau}} Na^+ + Cl^-$. Les ions Na^+ et Cl^- sont indifférents, ils ne réagissent pas avec l'eau, donc ils n'influent pas le pH de la solution qui les contient.

$V_s = V_e \rightarrow$ de point de vue pH, l'ajout d'une solution de NaCl revient à une simple dilution.

b - Dilution $\rightarrow C' = \frac{C \cdot V}{V + V_e} \rightarrow C' = \frac{C \cdot 100}{100 + 100} = \frac{C}{2} \xrightarrow{C = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}} C' = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

$pK_a = 2pH' - pK_e - \log C' \rightarrow pH' = \frac{1}{2}(pK_a + pK_e + \log C')$

A.N : $pH' = \frac{1}{2}(9,9 + 14 + \log 5 \cdot 10^{-2})$ et $pH' = 11,3$.

Exercice 11 :

La validité de l'expression du pH d'une solution d'acide dépend de la crédibilité des approximations :

Solution	approximations	Expression du pH
Acide fort	- on néglige $[OH^-]$ devant $[H_3O^+]$ ($[OH^-] \ll [H_3O^+]$) - l'acide est pratiquement totalement dissocié ($\tau_f = 1$)	$pH = -\log C$
Acide faible	- on néglige $[OH^-]$ devant $[H_3O^+]$ ($[OH^-] \ll [H_3O^+]$) - l'acide faible est faiblement dissocié ($\tau_f \ll 1$)	$pH = \frac{1}{2} pK_a - \frac{1}{2} \log C$

On considère deux solutions aqueuses (S_1) et (S_2) respectivement d'acide A_1H et A_2H .
Pour différentes concentrations molaires des solutions (S_1) et (S_2), la mesure du pH aboutit au tableau suivant :

Concentration molaire C (mol.L ⁻¹)		$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
pH	Solution (S_1)	1,3	2	3	4	5
	Solution (S_2)	3,1	3,4	3,9	4,4	5,2

1⁰) a - Pour la concentration $C = 10^{-2}$ mol.L⁻¹ et à partir des valeurs du pH, vérifier que A_1H est un acide fort et que A_2H est un acide faible.

b - Ecrire l'équation de dissociation de chacun des deux acides A_1H et A_2H dans l'eau.

c - Calculer les valeurs τ_f et τ'_f du taux d'avancement final de la réaction de dissociation de A_2H dans l'eau lorsque la concentration de la solution (S_2) est respectivement $C = 10^{-2}$ mol.L⁻¹ et $C' = 10^{-3}$ mol.L⁻¹.

On rappelle que $\tau_f = \frac{10^{-pH}}{C}$.

En déduire l'effet de la dilution sur la dissociation d'un acide faible dans l'eau.

2⁰) Pour chacune des solutions (S_1) et (S_2), on trace la courbe $pH = f(-\log C)$. On obtient le graphique ci-dessous :

a - Associer, en le justifiant, chacune des courbes (a) et (b) à l'acide qu'elle représente.

b - Déterminer, graphiquement, la valeur du pK_a du couple acide-base (A_2H/A_2^-).

c - Déterminer, par le calcul, la valeur du pH de la solution (S_2) lorsque la concentration est $C = 10^{-5}$ mol.L⁻¹.

Comparer avec la valeur du pH mesurée.

d - Montrer que, dans ce cas, l'une des approximations reste valable alors que l'autre ne l'est plus.

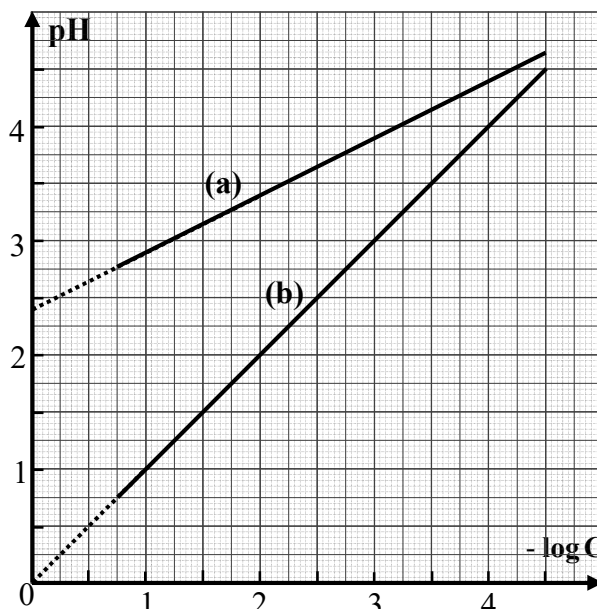
3⁰) Pour la solution (S_2) et lorsque la concentration est $C = 10^{-2}$ mol.L⁻¹ :

a - Recenser les différentes espèces chimiques présentes dans la solution aqueuse.

b - Calculer la molarité de chacune de ces espèces chimiques.

c - Déterminer la valeur de la constante d'acidité K_a du couple acide-base (A_2H/A_2^-).

En déduire la valeur du pK_a de ce couple acide-base.



Réponse :

1⁰) a - Pour la concentration $C = 10^{-2}$ mol.L⁻¹ :

* dans la solution (S_1) : $[H_3O^+] = 10^{-pH} \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-2}$ mol.L⁻¹ donc $[H_3O^+] = C$

L'acide A_1H est donc un acide fort.

* dans la solution (S_1) :

$[H_3O^+] = 10^{-pH} \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-3,4}$ et $[H_3O^+] = 4 \cdot 10^{-4}$ mol.L⁻¹ donc $[H_3O^+] < C$

L'acide A_2H est donc un acide faible.

b - $A_1H + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + A_1^-$

$A_2H + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + A_2^-$

c - Pour $C = 10^{-2}$ mol.L⁻¹, $pH = 3,4 \rightarrow \tau_f = \frac{10^{-3,4}}{10^{-2}}$ et $\tau_f = 0,04$ ($\tau_f = 4\%$)

Pour $C' = 10^{-3}$ mol.L⁻¹, $pH' = 3,9 \rightarrow \tau'_f = \frac{10^{-3,9}}{10^{-3}}$ et $\tau'_f = 0,126$ ($\tau'_f = 12,6\%$)

$C' < C \rightarrow \tau'_f > \tau_f$: la dilution favorise la dissociation d'un acide faible dans l'eau.

2⁰) a - *Pour une solution d'acide fort : $pH = -\log C$

La courbe $pH = f(-\log C)$ est une droite linéaire de pente 1 donc la courbe (b) représente A_1H .

*Pour une solution d'acide faible : $\text{pH} = \frac{1}{2} \text{pK}_a - \frac{1}{2} \log C$

La courbe $\text{pH} = f(-\log C)$ est une droite affine de pente $\frac{1}{2}$ donc la courbe (a) représente A_2H .

b - Graphiquement et sur la courbe (a) : $\text{pH}(0) = 2,4$ or $\text{pH}(0) = \frac{1}{2} \text{pK}_a \rightarrow \text{pK}_a = 4,8$

c - Pour $C = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$, $\text{pH} = 2,4 - \frac{1}{2} \log 10^{-5}$ et $\text{pH} = 4,9 \xrightarrow{\text{pH}_{\text{mesuré}} = 5,2} \text{pH}_{\text{calculé}} < \text{pH}_{\text{mesuré}}$

Remarque : pour une solution d'acide fort de concentration $C = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$, $\text{pH} = 5$

Formellement et à la même concentration $C = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$, la solution (S_2) d'acide faible sera plus acide que la solution (S_1) d'acide fort ! ce qui est totalement absurde.

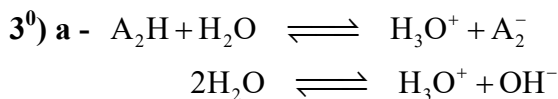
d - Pour la concentration $C = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$:

$$\left. \begin{array}{l} * [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-5,2} \text{ et } [\text{H}_3\text{O}^+] = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1} \\ * [\text{OH}^-] = 10^{\text{pH}-\text{pK}_e} \rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{5,2-14} \text{ et } [\text{OH}^-] = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 2,54 \cdot 10^{-4}$$

donc $[\text{OH}^-]$ est encore négligeable devant $[\text{H}_3\text{O}^+]$.

* $\tau_f = \frac{10^{-5,2}}{10^{-5}}$ et $\tau_f = 0,631$ ($\tau_f = 63,1\%$)

donc l'acide n'est plus faiblement dissocié (τ_f n'est plus négligeable devant 1).



Les espèces chimiques présentes en solution aqueuse sont : A_2H , A_2^- , H_3O^+ et OH^- .

b - * $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-3,4}$ et $[\text{H}_3\text{O}^+] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

* $[\text{OH}^-] = 10^{\text{pH}-\text{pK}_e} \rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{3,4-14}$ et $[\text{OH}^-] = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$.

* L'électroneutralité : $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{A}_2^-] + [\text{OH}^-] \rightarrow [\text{A}_2^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{OH}^-]$.

$[\text{H}_3\text{O}^+] \gg [\text{OH}^-] \rightarrow [\text{A}_2^-] \approx [\text{H}_3\text{O}^+] \text{ et } [\text{A}_2^-] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$

* La conservation de la matière : $[\text{A}_2\text{H}] + [\text{A}_2^-] = C \rightarrow [\text{A}_2\text{H}] = C - [\text{A}_2^-]$

$[\text{A}_2\text{H}] = 10^{-2} - 4 \cdot 10^{-4}$ et $[\text{A}_2\text{H}] = 96 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

c - $\text{K}_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}_2^-]}{[\text{A}_2\text{H}]} \rightarrow \text{K}_a = \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{96 \cdot 10^{-4}}$ et $\text{K}_a = 1,67 \cdot 10^{-5}$.

$\text{pK}_a = -\log \text{K}_a \rightarrow \text{pK}_a = -\log 1,67 \cdot 10^{-5}$ et $\text{pK}_a = 4,78$.

Exercice 12 :

1⁰) a - Soit un couple acide- base (BH^+/B) dont la base B est forte.

Dans une solution aqueuse de base forte B, de concentration molaire C, on a : $[\text{BH}^+] = [\text{OH}^-] = C$.

Déduire que le pH d'une solution aqueuse d'une monobase forte, de concentration molaire C, s'écrit :

$$\text{pH} = 14 + \log C$$

b - On considère un couple acide- base (BH^+/B) dont la base B est faible. Dans une solution aqueuse de la base faible B, faiblement dissociée, de concentration molaire C, on a : $[\text{B}] = C$ et $[\text{BH}^+] = [\text{OH}^-]$.

Sachant que : $\text{K}_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{B}]}{[\text{BH}^+]}$, déduire que le pH d'une solution aqueuse d'une monobase faible de

concentration molaire C, faiblement dissociée, s'exprime par : $\text{pH} = 7 + \frac{1}{2} \text{pK}_a + \frac{1}{2} \log C$

2⁰) Soit une solution aqueuse (S) d'une monobase de concentration molaire C et de pH donné.

On dilue n fois cette solution (S), on obtient une solution (S') de concentration molaire $C' = \frac{C}{n}$ et dont le pH a une valeur pH'. Montrer que :

a - pour une solution aqueuse d'une monobase forte : $n = 10^{pH - pH'}$.

b - pour une solution aqueuse d'une monobase faible : $n = 10^{2(pH - pH')}$.

3⁰) On dispose de trois solutions aqueuses (S₁), (S₂) et (S₃), respectivement des bases B₁, B₂ et B₃, de même concentration molaire C. La mesure du pH de chacune des solutions donne les résultats suivants :

solution	S ₁	S ₂	S ₃
pH	10,95	12,70	11,85

On dilue 10 fois chacune des solutions (S₁), (S₂) et (S₃), on obtient respectivement les solutions (S₁'), (S₂') et (S₃'). On mesure le pH de chacune des solutions diluées. On obtient les résultats suivants :

solution	S ₁ '	S ₂ '	S ₃ '
pH	10,45	11,70	11,35

a - Vérifier que la base B₂ est forte alors que les bases B₁ et B₃ sont faibles.

b - Comparer les forces des bases B₁ et B₃.

c - Déterminer la valeur de la concentration molaire C.

d - Calculer pK_{a1} et pK_{a3} des couples correspondants respectivement aux bases B₁ et B₃.

Réponse :

$$1^0) \text{ a - } \text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+] \xrightarrow{K_e = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]}{[\text{H}_2\text{O}]}} \text{pH} = -\log \frac{K_e}{[\text{OH}^-]} \xrightarrow{[\text{OH}^-] = C} \text{pH} = -\log \frac{K_e}{C}$$

$$\text{pH} = -\log K_e + \log C \rightarrow \text{pH} = \text{p}K_e + \log C \quad \text{et} \quad \text{pH} = 14 + \log C.$$

$$\text{b - } K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{B}]}{[\text{BH}^+]} \xrightarrow{\frac{[\text{B}]}{[\text{BH}^+]} = \frac{C}{[\text{OH}^-]}} K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+].C}{[\text{OH}^-]} \xrightarrow{K_e = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]}{[\text{H}_2\text{O}]}} K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2.C}{K_e}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+]^2 = \frac{K_e.K_a}{C} \rightarrow -2\log [\text{H}_3\text{O}^+] = -\log K_e - \log K_a + \log C \rightarrow 2\text{pH} = \text{p}K_e + \text{p}K_a + \log C$$

$$\text{pH} = \frac{1}{2}\text{p}K_e + \frac{1}{2}\text{p}K_a + \frac{1}{2}\log C \quad \text{et} \quad \text{pH} = 7 + \frac{1}{2}\text{p}K_a + \frac{1}{2}\log C.$$

$$2^0) \text{ a - } \text{pH}' = 14 + \log C' = 14 + \log \frac{C}{n} = 14 + \log C - \log n = \text{pH} - \log n \rightarrow$$

$$\log n = \text{pH} - \text{pH}' \quad \text{et} \quad n = 10^{\text{pH} - \text{pH}'}$$

$$\text{b - } \text{pH}' = 7 + \frac{1}{2}\text{p}K_a + \frac{1}{2}\log C' = 7 + \frac{1}{2}\text{p}K_a + \frac{1}{2}\log \frac{C}{n} = 7 + \frac{1}{2}\text{p}K_a + \frac{1}{2}\log C - \frac{1}{2}\log n = \text{pH} - \frac{1}{2}\log n$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\log n = \text{pH} - \text{pH}' \rightarrow \log n = 2(\text{pH} - \text{pH}') \quad \text{et} \quad n = 10^{2(\text{pH} - \text{pH}')}$$

$$3^0) \text{ a - On dilue 10 fois } \rightarrow n = 10 \rightarrow \log n = 1$$

$$\text{Pour (S}_2\text{) et (S}_2'\text{): } \text{pH} - \text{pH}' = 12,7 - 11,7 = 1 \rightarrow \text{B}_2 \text{ est une base forte.}$$

$$\text{Pour (S}_1\text{) et (S}_1'\text{): } \text{pH} - \text{pH}' = 10,95 - 10,45 = \frac{1}{2} \rightarrow \text{B}_1 \text{ est une base faible.}$$

$$\text{Pour (S}_3\text{) et (S}_3'\text{): } \text{pH} - \text{pH}' = 11,85 - 11,35 = \frac{1}{2} \rightarrow \text{B}_3 \text{ est une base faible.}$$

b - A même concentration, une base est d'autant plus forte que le pH de sa solution aqueuse est plus grand. $\text{pH}(\text{S}_3) > \text{pH}(\text{S}_1)$ donc la base B₃ est plus forte que la base B₁.

$$\text{c - Pour la solution (S}_2\text{): } \text{pH} = 14 + \log C \rightarrow C = 10^{\text{pH} - 14}. \text{ A.N : } C = 10^{12,7 - 14} \quad \text{et} \quad C = 5.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$d - pH = 7 + \frac{1}{2}pK_a + \frac{1}{2}\log C \rightarrow pK_a = 2\left(pH - 7 - \frac{1}{2}\log C\right)$$

$$\text{Pour } (S_1) : pK_{a1} = 2\left(10,95 - 7 - \frac{1}{2}\log 5.10^{-2}\right) \text{ et } pK_{a1} = 9,2$$

$$\text{Pour } (S_3) : pK_{a3} = 2\left(11,85 - 7 - \frac{1}{2}\log 5.10^{-2}\right) \text{ et } pK_{a3} = 11$$

Exercice 13 :

Une solution aqueuse (S) d'acide éthanóïque CH_3COOH , de concentration molaire $C = 5.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$, a un $pH = 3,05$.

1⁰) a - Déterminer les molarités des différentes entités chimiques présentes dans la solution aqueuse (S).

b - En déduire la valeur du pK_a du couple (CH_3COOH/CH_3COO^-) .

2⁰) Montrer, en considérant que l'acide est très faiblement dissocié, que le taux d'avancement final de la réaction de dissociation de l'acide dans l'eau s'écrit : $\tau_f = \frac{K_a}{[H_3O^+]}$. Calculer alors la valeur de τ_f .

3⁰) Le pH d'une solution aqueuse d'acide faiblement dissocié est donné par : $pH = \frac{1}{2}pK_a - \frac{1}{2}\log C$.

a - Quel est le volume V_e d'eau qu'il faut ajouter à un volume $V = 10 \text{ mL}$ de la solution (S) pour obtenir une solution (S') de $pH' = 3,4$?

b - Calculer le taux d'avancement final τ_f' dans la solution (S').

c - En déduire l'effet de la dilution sur la réaction de dissociation de l'acide éthanóïque dans l'eau.

Réponse :

1⁰) a - Les réactions ayant lieu en solution sont : $CH_3COOH + H_2O \rightleftharpoons CH_3COO^- + H_3O^+$ et $2 H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$

Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont : CH_3COOH , CH_3COO^- , H_3O^+ et OH^-

$$* [H_3O^+] = 10^{-pH} \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-3,05} \text{ et } [H_3O^+] = 8,91.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$* [OH^-] = 10^{pH-pK_e} \rightarrow [OH^-] = 10^{3,05-14} \text{ et } [OH^-] = 1,12.10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}.$$

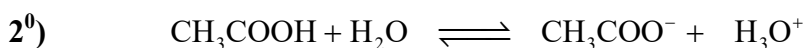
$$* \text{L'électro neutralité : } [CH_3COO^-] + [OH^-] = [H_3O^+] \rightarrow [CH_3COO^-] = [H_3O^+] - [OH^-] \approx [H_3O^+] \text{ donc } [CH_3COO^-] = 8,91.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$* \text{La conservation de la matière : } [CH_3COOH] + [CH_3COO^-] = C \rightarrow [CH_3COOH] = C - [CH_3COO^-]$$

$$A.N : [CH_3COOH] = 500.10^{-4} - 8,91.10^{-4} \text{ et } [CH_3COOH] = 491,09.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$b - pH = pK_a + \log \frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]} \rightarrow pK_a = pH - \log \frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}.$$

$$A.N : pK_a = 3,05 - \log \frac{8,91.10^{-4}}{491,09.10^{-4}} \text{ et } pK_a = 4,79.$$



$$A \text{ t } 0 \quad \begin{array}{ccccc} & C & \text{excès} & 0 & 10^{-7} \end{array}$$

$$A \text{ t eq} \quad \begin{array}{ccccc} & C - y_f & \text{excès} & y_f & 10^{-pH} \end{array}$$

$$K_a = \frac{[H_3O^+][CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]} \rightarrow K_a = \frac{[H_3O^+].y_f}{C - y_f} \xrightarrow[\rightarrow y_f = C.\tau_f]{\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}} \text{ et } y_{\max} = C} K_a = \frac{[H_3O^+].C.\tau_f}{C - C.\tau_f} \text{ et } K_a = \frac{[H_3O^+]\tau_f}{1 - \tau_f}$$

L'acide est faiblement dissocié $\rightarrow \tau_f \ll 1 \rightarrow K_a = [\text{H}_3\text{O}^+].\tau_f$ et $\tau_f = \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$.

A.N : $\tau_f = \frac{10^{-4,79}}{10^{-3,05}}$ et $\tau_f = 1,82.10^{-2}$.

3⁰) a - Après dilution : $\text{pH}' = \frac{1}{2}\text{pK}_a - \frac{1}{2}\log C' \xrightarrow{C' = \frac{C.V}{V+V_e}} \text{pH}' = \frac{1}{2}\text{pK}_a - \frac{1}{2}\log \frac{C.V}{V+V_e}$

$\text{pH}' = \frac{1}{2}\text{pK}_a - \frac{1}{2}\log C - \frac{1}{2}\log \frac{V}{V+V_e} = \text{pH} + \frac{1}{2}\log \frac{V+V_e}{V} \rightarrow \log \frac{V+V_e}{V} = 2(\text{pH}' - \text{pH}) \rightarrow \frac{V+V_e}{V} = 10^{2(\text{pH}' - \text{pH})}$

$\rightarrow V_e = V \left[10^{2(\text{pH}' - \text{pH})} - 1 \right]$. A.N : $V_e = 10 \left[10^{2(3,4 - 3,05)} - 1 \right]$ et $V_e = 40,12 \text{ mL}$.

b - $\tau'_f = \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$ $\rightarrow \tau'_f = \frac{10^{-4,79}}{10^{-3,4}}$ et $\tau'_f = 4,07.10^{-2}$

c - $\tau'_f > \tau_f \rightarrow$ la dilution favorise la dissociation de l'acide faible.

Exercice 14 :

Deux solutions aqueuses acides (S_1) et (S_2) ont la même concentration $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

- (S_1) est une solution acide de chlorure d'hydrogène (HCl) de $\text{pH}_1 = 2$.

- (S_2) est une solution basique d'ammoniac (NH_3) de $\text{pH}_2 = 10,6$.

1⁰) a - Montrer que l'acide HCl est fort alors que la base NH_3 est faible.

b - Ecrire l'équation de la réaction de l'acide et celle de la base avec l'eau.

2⁰) a - Déterminer les concentrations molaires des différentes espèces chimiques présentes dans (S_2).

b - Calculer la valeur de la constante d'acidité K_a du couple ($\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$).

3⁰) A un volume $V = 10^{-2} \text{ L}$ de la solution (S_1), on ajoute un volume V_e d'eau pure. On obtient alors une solution (S'_1) de $\text{pH}'_1 = 3$.

a - Sachant que dans la solution (S_1), on peut écrire : $[\text{H}_3\text{O}^+] = C$, déduire l'expression de son pH.

b - Montrer que $V_e = V \left(10^{(\text{pH}'_1 - \text{pH}_1)} - 1 \right)$. Calculer la valeur de V_e .

4⁰) A un volume $V = 10^{-2} \text{ L}$ de la solution (S_2), on ajoute le même volume V_e d'eau pure. On obtient alors une solution (S'_2).

a - Sachant que dans la solution (S_2), on peut écrire : $[\text{H}_3\text{O}^+]^2 = \frac{K_e.K_a}{C}$, déduire l'expression de son pH.

b - Montre que pour (S'_2), on a $\text{pH}'_2 = \text{pH}_2 - \frac{1}{2}\log \left(1 + \frac{V_e}{V} \right)$. Calculer la valeur de pH'_2 .

Réponse :

1⁰) a - Pour les deux solutions (S_1) et (S_2), $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

Pour (S_1) : $[\text{H}_3\text{O}^+]_1 = 10^{-\text{pH}_1} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_1 = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

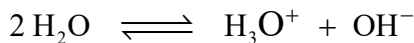
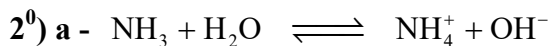
$[\text{H}_3\text{O}^+]_1 = C \rightarrow \text{HCl}$ est un acide fort.

Pour (S_2) : $[\text{OH}^-]_2 = 10^{\text{pH}_2 - \text{pK}_e} \rightarrow [\text{OH}^-]_2 = 10^{10,6 - 14}$ et $[\text{OH}^-]_2 = 3,98.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

$[\text{OH}^-]_2 < C \rightarrow \text{NH}_3$ est une base faible.

b - (S_1) : $\text{HCl} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$

(S_2) : $\text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{NH}_4^+ + \text{OH}^-$



Les entités chimiques présentes en solution aqueuses sont : NH_3 , NH_4^+ , H_3O^+ et OH^-

* $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} \rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-10,6}$ et $[\text{H}_3\text{O}^+] = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$.

* $[\text{OH}^-] = 10^{\text{pH}-\text{pK}_e} \rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{10,6-14}$ et $[\text{OH}^-] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

* L'électro neutralité : $[\text{NH}_4^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] \rightarrow [\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-] - [\text{H}_3\text{O}^+] \approx [\text{OH}^-]$

donc $[\text{NH}_4^+] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$

* La conservation de la matière : $[\text{NH}_3] + [\text{NH}_4^+] = C \rightarrow [\text{NH}_3] = C - [\text{NH}_4^+]$

A.N : $[\text{NH}_3] = 100 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4}$ et $[\text{NH}_3] = 96 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$. A.N : $K_a = \frac{2,5 \cdot 10^{-11} \cdot 96 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}}$ et $K_a = 6 \cdot 10^{-10}$ ($\text{pK}_a = 9,22$).

3⁰) a - $[\text{H}_3\text{O}^+] = C \xrightarrow{\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]} \text{pH} = -\log C$.

b - $\text{pH}'_1 = -\log C' \xrightarrow{C' = \frac{C \cdot V}{V + V_e}} \text{pH}'_1 = -\log \frac{C \cdot V}{V + V_e} = -\log C + \log \frac{V + V_e}{V} = \text{pH}_1 + \log \frac{V + V_e}{V}$

$\text{pH}'_1 - \text{pH}_1 = \log \frac{V + V_e}{V} = \log \left(1 + \frac{V_e}{V} \right) \rightarrow 1 + \frac{V_e}{V} = 10^{\text{pH}'_1 - \text{pH}_1}$ et $V_e = V(10^{\text{pH}'_1 - \text{pH}_1} - 1)$

A.N : $V_e = 10^{-2}(10^{3-2} - 1)$ et $V_e = 9 \cdot 10^{-2} \text{ L}$.

4⁰) a - $[\text{H}_3\text{O}^+]^2 = \frac{K_e \cdot K_a}{C} \rightarrow -2 \log [\text{H}_3\text{O}^+] = -\log K_e - \log K_a + \log C \rightarrow 2\text{pH} = \text{pK}_e + \text{pK}_a + \log C$

et $\text{pH} = \frac{1}{2}\text{pK}_e + \frac{1}{2}\text{pK}_a + \frac{1}{2}\log C$

b - $\text{pH}'_2 = \frac{1}{2}\text{pK}_e + \frac{1}{2}\text{pK}_a + \frac{1}{2}\log C' \xrightarrow{C' = \frac{C \cdot V}{V + V_e}} \text{pH}'_2 = \frac{1}{2}\text{pK}_e + \frac{1}{2}\text{pK}_a + \frac{1}{2}\log \frac{C \cdot V}{V + V_e}$

$\text{pH}'_2 = \frac{1}{2}\text{pK}_e + \frac{1}{2}\text{pK}_a + \frac{1}{2}\log C + \frac{1}{2}\log \frac{V}{V + V_e} = \text{pH}_2 - \frac{1}{2}\log \frac{V + V_e}{V}$ et $\text{pH}'_2 = \text{pH}_2 - \frac{1}{2}\log \left(1 + \frac{V_e}{V} \right)$

A.N : $\text{pH}'_2 = 10,6 - \frac{1}{2}\log \left(1 + \frac{9 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} \right)$ et $\text{pH}'_2 = 10,1$.

Exercice 15 :

Une solution aqueuse (S) d'acide méthanoïque HCOOH de concentration $C = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ a un $\text{pH} = 2,4$.

1⁰) a - Montrer que HCOOH est un acide faible.

b - Ecrire les équations des réactions chimiques qui ont lieu en solution aqueuse.

2⁰) a - Soit $\tau_f = \frac{y_f}{y_{\max}}$ le taux d'avancement final de la réaction de dissociation de HCOOH dans l'eau.

Exprimer la constante d'acidité K_a du couple ($\text{HCOOH}/\text{HCOO}^-$) en fonction de $[\text{H}_3\text{O}^+]$ et τ_f .

Que devient cette expression si on néglige τ_f devant 1 (l'acide est alors faiblement dissocié).

b - Sachant que : $\tau_f = \frac{10^{-\text{pH}}}{C}$, déduire que : $\tau_f = \sqrt{\frac{K_a}{C}}$.

c - Montrer alors que le pH de la solution (S) s'écrit :

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_a - \log C)$$

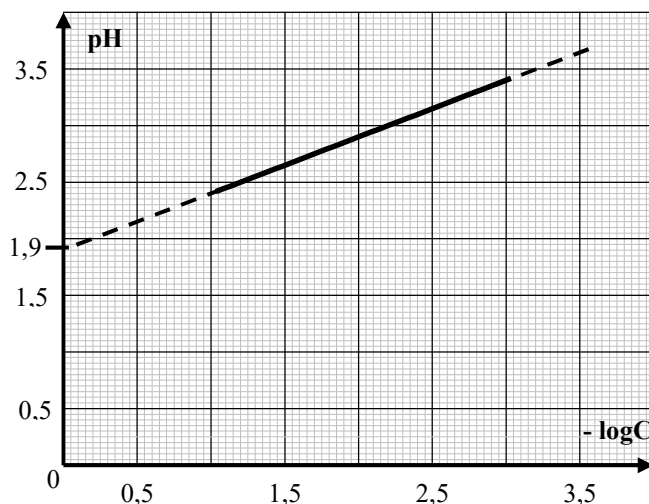
3⁰) Pour différentes concentrations C de la solution (S), on mesure chaque fois le pH. On obtient alors la courbe $\text{pH} = f(-\log C)$ ci-contre :

a - Déterminer l'équation numérique de la courbe.
b - Par identification avec l'expression théorique du pH, déterminer la valeur du pK_a .

4⁰) La mesure du pH d'une solution (S) de concentration $C = 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ donne $\text{pH}_{\text{exp}} = 4,1$.

a - Calculer la valeur du taux d'avancement final τ_f de la réaction dans la solution (S).

b - Calculer la valeur pH_{th} théorique du pH.
Comparer pH_{exp} et pH_{th} . Conclure.



Réponse :

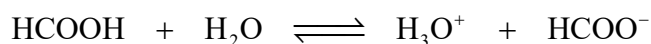
1⁰) a - $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} \xrightarrow{\text{A.N.}} [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2,4}$ et $[\text{H}_3\text{O}^+] = 3,98 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

$[\text{H}_3\text{O}^+] \ll C \rightarrow$ l'acide considéré est un acide faible.

b - $\text{HCOOH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{HCOO}^-$



$$2^0) \text{ a - } K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HCOO}^-]}{[\text{HCOOH}]}$$



A t=0	C	excès	$10^{-\frac{\text{pK}_a}{2}}$	0
A t _{eq}	C - y _f	excès	$10^{-\text{pH}}$	y _f

$$\text{On écrit alors : } K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+].y_f}{C - y_f}$$

$$\tau_f = \frac{y_f}{y_{\text{max}}} \xrightarrow{y_{\text{max}}=C} \tau_f = \frac{y_f}{C} \rightarrow y_f = C.\tau_f \text{ donc } K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+].C.\tau_f}{C - C.\tau_f} \text{ et } K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+].\tau_f}{1 - \tau_f}$$

L'acide étant faiblement dissocié, $\tau_f \ll 1$. On écrit alors : $K_a = [\text{H}_3\text{O}^+].\tau_f$.

$$\text{b - } K_a = [\text{H}_3\text{O}^+].\tau_f \rightarrow \tau_f = \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_a}{10^{-\text{pH}}} \xrightarrow{\tau_f = \frac{10^{-\text{pH}}}{C}} \tau_f = \frac{K_a}{C.\tau_f} \rightarrow \tau_f^2 = \frac{K_a}{C} \text{ et } \tau_f = \sqrt{\frac{K_a}{C}}$$

$$\text{c - } K_a = [\text{H}_3\text{O}^+].\tau_f \xrightarrow{[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}} \tau_f = \frac{K_a}{10^{-\text{pH}}} \xrightarrow{\tau_f = \sqrt{\frac{K_a}{C}}} \frac{K_a}{10^{-\text{pH}}} = \sqrt{\frac{K_a}{C}} \rightarrow 10^{-\text{pH}} = \sqrt{K_a.C}$$

$$\rightarrow -\text{pH} = \log(K_a.C)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\log K_a + \log C) \rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2}(-\log K_a - \log C) \text{ et } \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_a - \log C).$$

3⁰) a - $\text{pH} = f(-\log C)$ est une droite affine

$$\rightarrow \text{pH} = b + a.(-\log C) \text{ avec } a = \frac{3 - 2,5}{2,2 - 1,1} = \frac{1}{2} \text{ et } b = 1,9$$

Il vient alors que : $\text{pH} = 1,9 - \frac{1}{2} \log C$.

$$\text{b - } \left. \begin{array}{l} \text{pH}_{\text{th}} = \frac{1}{2} \text{pK}_a - \frac{1}{2} \log C \\ \text{pH}_{\text{exp}} = 1,9 - \frac{1}{2} \log C \end{array} \right| \xrightarrow{\text{par identification}} \frac{1}{2} \text{pK}_a = 1,9 \text{ et } \text{pK}_a = 3,8.$$

4⁰) a - $\tau_f = \frac{10^{-\text{pH}}}{C} \xrightarrow{\text{A.N}} \tau_f = \frac{10^{-4,1}}{10^{-4}} \text{ et } \tau_f = 79,43 \cdot 10^{-2} \quad (\tau_f = 79,43\%).$

b - $\text{pH}_{\text{th}} = 1,9 - \frac{1}{2} \log 10^{-4} \text{ et } \text{pH}_{\text{th}} = 3,9.$

$\text{pH}_{\text{exp}} = 4,1 \rightarrow \text{pH}_{\text{exp}} \neq \text{pH}_{\text{th}}.$

L'expression du pH n'est plus valable car τ_f n'est plus négligeable devant 1.

VARIATION DU pH AU COURS DES DOSAGES ACIDE - BASE

I / Réaction acide - base:

1⁰) Molarité et normalité :

a - Molarité d'une solution :

La molarité **C** d'une solution est le nombre de moles de soluté par litre de solution.

La molarité d'une solution est sa **concentration molaire** (en mol.L⁻¹).

b - Normalité d'une solution :

La normalité **N** d'une solution d'acide (ou de base) est le nombre de moles de protons H⁺ susceptibles d'être libérés (ou captés) par litre de solution .

Exemples :

- pour un monoacide (comme HCl) de molarité C , la normalité N = C .
- pour un diacide (comme H₂SO₄) de molarité C , la normalité N = 2.C .

2⁰) Réaction de neutralisation :

Soit une solution aqueuse d'un acide AH : $\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{A}^-$

Soit une solution aqueuse d'une base B : $\text{B} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{BH}^+ + \text{OH}^-$

En mélangeant les deux solutions d'acide et de base , une réaction de neutralisation a lieu :



Cette réaction est : - instantanée

- quasi-totale ($K = \frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]} = \frac{1}{K_e} \xrightarrow{K_e=10^{-14}} K = 10^{14}$ très grande).

- exothermique

II / Dosage acido - basique:

1⁰) Le dispositif de dosage acido-basique :

Le but de tout dosage est de déterminer la concentration d'une espèce chimique présente dans une solution.

Pour ce faire on fait réagir l'espèce dont on ne connaît pas la concentration (nommée solution titrée) avec une solution de concentration bien connue (nommée espèce titrante).

On dose soit une solution acide par une solution basique ou inversement.

La solution titrée (à doser) est placée dans le bécher.

La solution titrante (avec laquelle on dose) est placée dans la burette graduée.

Afin d'homogénéiser en permanence le mélange, on utilise un dispositif d'agitation magnétique.

On ajoute, dans le bécher, quelques gouttes d'un indicateur coloré approprié au dosage effectué (suivi colorimétrique).

Un pH-mètre permet un suivi pH-métrique du dosage.

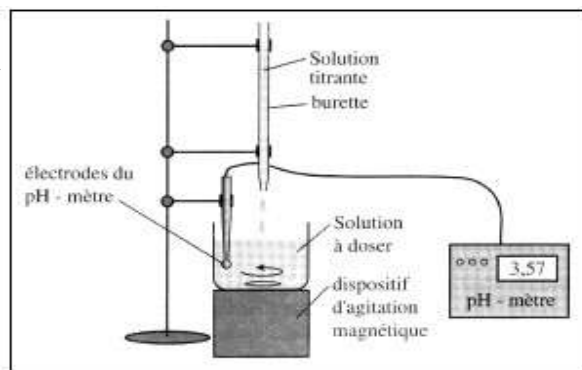
La solution à doser (dans le bécher) ayant un volume bien déterminé, on ajoute, à l'aide de la burette graduée des petits volumes successifs de la solution titrante et on note chaque fois le pH du mélange.

Remarque :

Un indicateur coloré est une espèce chimique dont la couleur dépend du pH du milieu qui le contient.

Lorsqu'il est ajouté à une solution, la coloration qu'il lui donne permet de déterminer l'intervalle auquel appartient le pH de cette solution.

Chaque indicateur coloré est caractérisé par sa zone de virage qui est l'intervalle de pH dans lequel il change de couleur.



Indicateur coloré	Teinte acide	Zone de virage	pK_a	Teinte basique
Hélianthine	Rouge	3,1 – 4,4	3,4	Jaune
Vert de bromocrésol	Jaune	3,8 – 5,4	4,9	Bleu
Bleu de bromothymol (BBT)	Jaune	6,0 – 7,6	7,1	Bleu
Rouge de crésol	Jaune	7,2 – 8,8	8,5	Rouge
Phénolphthaléine	Incolore	8,2 – 10,0	9,4	Rose
Rouge d'alizarine	Violet	10,0 – 12,0	≈ 11	Jaune
Carmin d'indigo	Bleu	11,6 – 14,0	12,6	Jaune

2⁰) L'équivalence acide-base :

a - Définition :

Il y a équivalence lorsque le nombre de moles d'ions $(H_3O^+)_{aq}$ susceptibles d'être apportés par l'acide est égal au nombre de moles d'ions $(OH^-)_{aq}$ susceptibles d'être apportés par la base.

$$n(H_3O^+)_{\text{apportés par l'acide}} = n(OH^-)_{\text{apportés par la base}}$$

b - Relation à l'équivalence :

Soit C_a la concentration d'une solution de monoacide, un volume V_a de cette solution peut apporter :

$$n(H_3O^+) = N_a \cdot V_a = C_a \cdot V_a$$

Soit C_b la concentration d'une solution de monobase, un volume V_b de cette solution peut apporter :

$$n(OH^-) = N_b \cdot V_b = C_b \cdot V_b$$

Lorsque l'état d'équivalence est atteint, on a : $n(H_3O^+) = n(OH^-)$, il vient alors que :

$$C_a \cdot V_a = C_b \cdot V_b$$

c - Solution à l'équivalence :

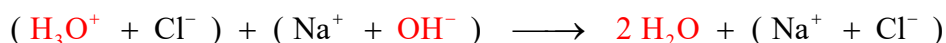
La solution obtenue à l'équivalence est une solution de sel dans l'eau.

A l'équivalence, le pH de la solution obtenue n'est pas forcément neutre.

II / Exploitation des courbes de dosage :

1⁰) Dosage d'un acide fort par une base forte :

On dose un volume V_a d'une solution de HCl de concentration C_a par une solution de NaOH de concentration C_b .



$$(H_3O^+ + OH^- \rightarrow 2 H_2O ; K = \frac{1}{[H_3O^+].[OH^-]} = \frac{1}{K_e} \xrightarrow{K_e=10^{-14}} K = 10^{14} \text{ très grande})$$

a - Allure de la courbe de dosage :

La courbe présente un seul point d'inflexion correspondant à la zone de saut brusque du pH.

b - Le point d'équivalence E :

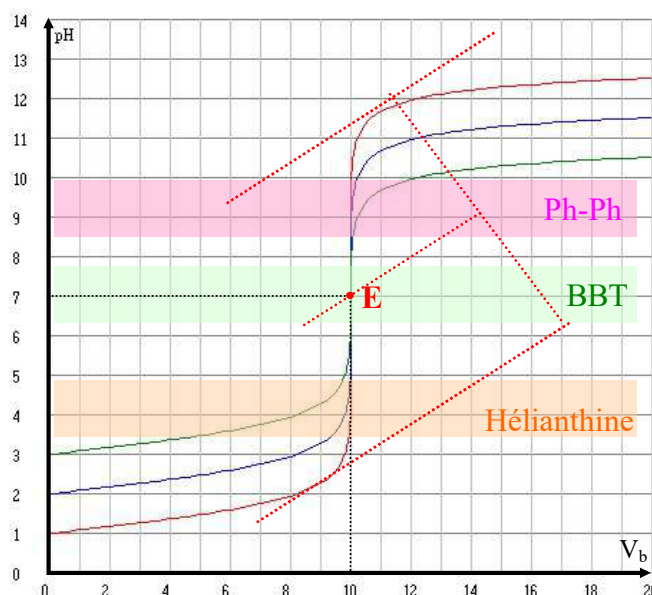
Le point d'équivalence est déterminé graphiquement par la méthode des tangentes.

Le point d'équivalence E coïncide avec le point d'inflexion de la courbe de dosage.

A l'équivalence, on obtient un sel neutre car les ions Na^+ et Cl^- sont indifférents.

A l'équivalence, la solution obtenue est neutre

$$E \left| \begin{array}{l} pH_E = 7 \\ V_{bE} = \frac{C_a \cdot V_a}{C_b} \end{array} \right.$$



c - Influence des concentrations initiales :

Si les concentrations initiales de l'acide et de la base diminuent, le saut brusque du pH autour du point d'équivalence E diminue.

Le changement des concentrations initiales **n'affecte pas** les coordonnées du point d'équivalence.

d - Choix de l'indicateur coloré :

L'indicateur coloré de choix est celui dont la zone de virage contient le pH au point d'équivalence E.

Le bleu de bromothymol est l'indicateur coloré qui convient le mieux à la détermination précise du volume à l'équivalence.

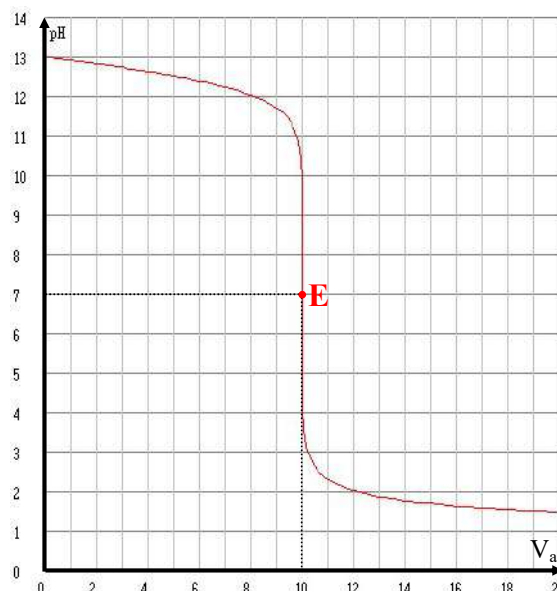
e - Remarque :

Lors du dosage d'une base forte par un acide fort, une inversion de l'allure de la courbe a lieu qui aboutit à un point d'équivalence E tel que :

$$E \left| \begin{array}{l} \text{pH}_E = 7 \\ V_{aE} = \frac{C_b \cdot V_b}{C_a} \end{array} \right.$$

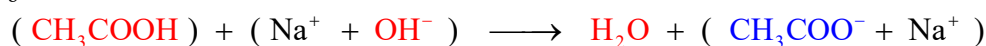
A l'équivalence, la solution obtenue est neutre.

L'exploitation de cette courbe reste identique à celle correspondante au dosage d'un acide fort par une base forte.



2⁰) Dosage d'un acide faible par une base forte :

On dose un volume V_a d'une solution de CH_3COOH de concentration C_a par une solution de NaOH de concentration C_b .



$$(\text{CH}_3\text{COOH} + \text{OH}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{CH}_3\text{COO}^- ; K = \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2^-]}{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] \cdot [\text{OH}^-]} \cdot \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_a}{K_e} \text{ très grande})$$

a - Allure de la courbe de dosage :

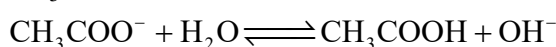
La courbe présente deux points d'inflexion, l'un correspondant à la zone de saut du pH et l'autre à la zone de faible variation du pH.

b - Le point d'équivalence E :

Le point d'équivalence est déterminé graphiquement par la méthode des tangentes.

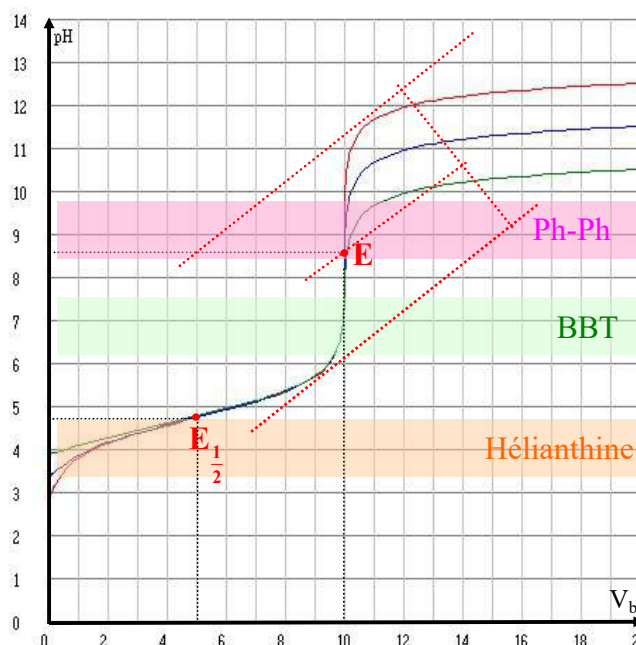
Le point d'équivalence E coïncide avec le point d'inflexion de la courbe de dosage correspondant au saut du pH.

A l'équivalence, on obtient un sel basique car l'ion CH_3COO^- est une base faible.



A l'équivalence, la solution obtenue est **basique**.

$$E \left| \begin{array}{l} \text{pH}_E > 7 \\ V_{bE} = \frac{C_a \cdot V_a}{C_b} \end{array} \right.$$



Remarque :

Le pH à l'équivalence est celui d'une base faible de concentration $C'_b = \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{bE}}$, il vient alors que :

$$pH_E = 7 + \frac{1}{2}pK_a + \frac{1}{2}\log \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{bE}}$$

c - Le point de demi-équivalence $E_{\frac{1}{2}}$:

Le point de demi-équivalence correspond à $V_{bE_{\frac{1}{2}}} = \frac{V_{bE}}{2}$.

Pour le couple $\left(\text{CH}_3\text{COOH} / \text{CH}_3\text{COO}^- \right)$, $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}$

Or à la demi équivalence, on a : $[\text{CH}_3\text{COOH}] = [\text{CH}_3\text{COO}^-]$ donc $K_a = [\text{H}_3\text{O}^+]$, il vient alors que :

$$pH_{E_{\frac{1}{2}}} = pK_a$$

d - Effet de la dilution :

La dilution fait diminuer le pH à l'équivalence.

La dilution n'affecte pas le pH à la demi-équivalence.

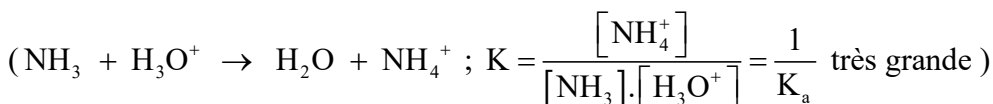
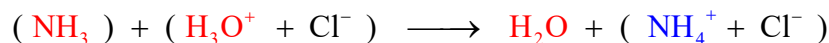
e - Choix de l'indicateur coloré :

L'indicateur coloré de choix est celui dont la zone de virage contient le pH au point d'équivalence E.

La phénol phtaléine est l'indicateur coloré qui convient le mieux à la détermination précise du volume à l'équivalence.

3⁰) Dosage d'une base faible par un acide fort :

On dose un volume V_b d'une solution de NH_3 de concentration C_b par une solution de HCl de concentration C_a .



a - Allure de la courbe de dosage :

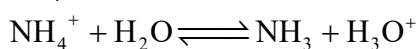
La courbe présente deux points d'inflexion, l'un correspondant à la zone de saut du pH et l'autre à la zone de faible variation du pH.

b - Le point d'équivalence E :

Le point d'équivalence est déterminé graphiquement par la méthode des tangentes.

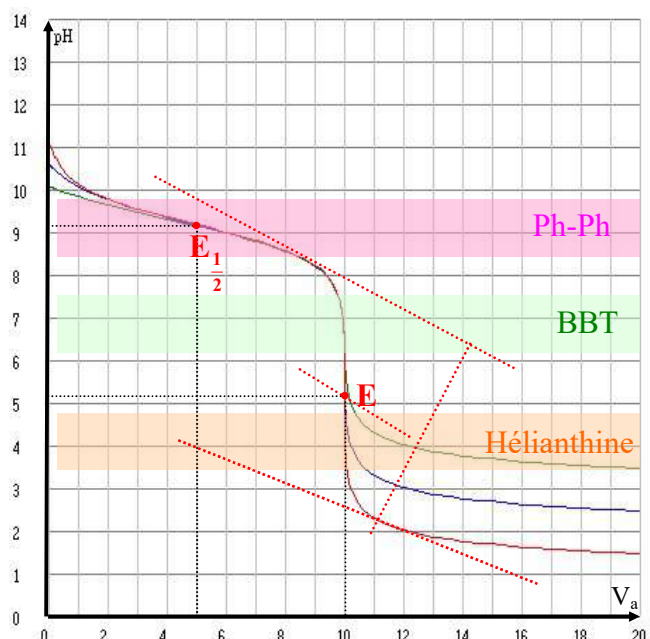
Le point d'équivalence E coïncide avec le point d'inflexion de la courbe de dosage correspondant au saut du pH.

À l'équivalence, on obtient un sel acide car l'ion NH_4^+ est un acide faible.



À l'équivalence, la solution obtenue est **acide**.

$$E \left| \begin{array}{l} pH_E < 7 \\ V_{aE} = \frac{C_b \cdot V_b}{C_a} \end{array} \right.$$



Remarque :

Le pH à l'équivalence est celui d'un acide faible de concentration $C'_a = \frac{C_b \cdot V_b}{V_b + V_{aE}}$, il vient alors que :

$$pH_E = \frac{1}{2} pK_a - \frac{1}{2} \log \frac{C_b \cdot V_b}{V_b + V_{aE}}$$

c - Le point de demi-équivalence $E_{\frac{1}{2}}$:

Le point de demi-équivalence correspond à $V_{aE_{\frac{1}{2}}} = \frac{V_{aE}}{2}$.

Pour le couple $\left(\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3 \right)$, $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$

Or à la demi équivalence, on a : $[\text{NH}_4^+] = [\text{NH}_3]$ donc $K_a = [\text{H}_3\text{O}^+]$, il vient alors que :

$$pH_{E_{\frac{1}{2}}} = pK_a$$

d - Effet de la dilution :

La dilution fait augmenter le pH à l'équivalence.

La dilution n'affecte pas le pH à la demi-équivalence.

e - Choix de l'indicateur coloré :

L'indicateur coloré de choix est celui dont la zone de virage contient le pH au point d'équivalence E.

L'hélianthine est l'indicateur coloré qui convient le mieux à la détermination précise du volume à l'équivalence.

III / Les solutions tampon :**1⁰) Définition :**

Une solution est dite tampon si son pH varie peu :

- par addition de petites quantités d'acide ou de base.
- par dilution modérée.

2⁰) Utilisation :

Les solutions tampons trouvent leur utilité dans :

- l'étalonnage des pH mètres
- les réactions chimiques à pH constant.

3⁰) Obtention :

Une solution tampon est obtenue par **mélange équimolaire** d'un acide faible et son sel de base forte ou d'une base faible et de son sel d'acide fort.

Au point de demi-équivalence : **pH = pK_a** constant.

Pour en savoir plus

1⁰) Dosage acide fort - base forte :

On dose un volume $V_a = 10 \text{ mL}$ d'une solution aqueuse de HCl de concentration molaire $C_a = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ par une solution aqueuse de NaOH de concentration molaire $C_b = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

L'état d'équivalence est atteint pour $V_{bE} = \frac{C_a \cdot V_a}{C_b} \xrightarrow{\text{A.N}} V_{bE} = \frac{10^{-2} \cdot 10}{10^{-2}}$ et $V_{bE} = 10 \text{ mL}$.

Le point d'équivalence est défini par $E(V_{bE} = 10 \text{ mL}, \text{pH}_E = 7)$

$$* [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}_E} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$* [\text{OH}^-] = 10^{\text{pH}_E - \text{pK}_e} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{OH}^-] = 10^{7-14} \text{ et } [\text{OH}^-] = 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$* [\text{Cl}^-] = \frac{n_E(\text{Cl}^-)}{V} = \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{bE}} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{Cl}^-] = \frac{10^{-2} \cdot 10}{10 + 10} \text{ et } [\text{Cl}^-] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$* [\text{Na}^+] = \frac{n_E(\text{Na}^+)}{V} = \frac{C_b \cdot V_{bE}}{V_a + V_{bE}} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{Na}^+] = \frac{10^{-2} \cdot 10}{10 + 10} \text{ et } [\text{Na}^+] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

2⁰) Dosage acide faible - base forte :

On dose un volume $V_a = 10 \text{ mL}$ d'une solution aqueuse de CH_3COOH de concentration molaire $C_a = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ par une solution aqueuse de NaOH de concentration molaire $C_b = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

L'état d'équivalence est atteint pour $V_{bE} = \frac{C_a \cdot V_a}{C_b} \xrightarrow{\text{A.N}} V_{bE} = \frac{10^{-2} \cdot 10}{10^{-2}}$ et $V_{bE} = 10 \text{ mL}$.

a - Au point d'équivalence :

Le point d'équivalence est défini par $E(V_{bE} = 10 \text{ mL}, \text{pH}_E = 8,2)$

$$* [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}_E} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-8,2} \text{ et } [\text{H}_3\text{O}^+] = 6,3 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$* [\text{OH}^-] = 10^{\text{pH}_E - \text{pK}_e} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{OH}^-] = 10^{8,2-14} \text{ et } [\text{OH}^-] = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$* [\text{Na}^+] = \frac{n_E(\text{Na}^+)}{V} = \frac{C_b \cdot V_{bE}}{V_a + V_{bE}} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{Na}^+] = \frac{10^{-2} \cdot 10}{10 + 10} \text{ et } [\text{Na}^+] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

* l'électro neutralité :

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] + [\text{OH}^-] = [\text{Na}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] \rightarrow [\text{CH}_3\text{COO}^-] = [\text{Na}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{OH}^-]$$

$$\xrightarrow{\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{OH}^-]} \ll \frac{[\text{Na}^+]}{[\text{Na}^+]}} [\text{CH}_3\text{COO}^-] \approx [\text{Na}^+] = \frac{C_b \cdot V_{bE}}{V_a + V_{bE}} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{CH}_3\text{COO}^-] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

* la conservation de la matière :

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] + [\text{CH}_3\text{COO}^-] = \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{bE}} \rightarrow [\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{bE}} - [\text{CH}_3\text{COO}^-]$$

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{bE}} - [\text{Na}^+] - [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{OH}^-] = \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{bE}} - \frac{C_b \cdot V_{bE}}{V_a + V_{bE}} - [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{OH}^-]$$

$$[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] = [\text{OH}^-] - [\text{H}_3\text{O}^+] \xrightarrow{\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{OH}^-]} \ll 1} [\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] = [\text{OH}^-] \text{ et } [\text{CH}_3\text{COOH}] = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}.$$

b - Au point de demi-équivalence :

A la demi-équivalence :

$$n(\text{OH}^-)_{\text{ajouté}} = \frac{n(\text{CH}_3\text{COOH})_{\text{initial}}}{2} \rightarrow C_b \cdot V_{bE_1/2} = \frac{C_a \cdot V_a}{2} \rightarrow V_{bE_1/2} = \frac{C_a \cdot V_a}{C_b \cdot 2} \rightarrow V_{bE_1/2} = \frac{V_{bE}}{2}$$

Le point de demi-équivalence est défini par $E_{\frac{1}{2}} \left(V_{bE_{\frac{1}{2}}} = 5 \text{ mL}, \text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}} = 4,8 \right)$

La réaction étant totale : $n(\text{OH}^-)_{\text{ajouté}} = n(\text{CH}_3\text{COO}^-)_{\text{formé}} \rightarrow [\text{CH}_3\text{COO}^-] = \frac{C_b \cdot V_{bE_{\frac{1}{2}}}}{V_a + V_{bE_{\frac{1}{2}}}} = \frac{C_a \cdot V_a}{2 \cdot (V_a + V_{bE_{\frac{1}{2}}})}$

la conservation de la matière : $[\text{CH}_3\text{COOH}] + [\text{CH}_3\text{COO}^-] = \frac{C_a \cdot V_a}{(V_a + V_{bE_{\frac{1}{2}}})} \rightarrow [\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{C_a \cdot V_a}{2 \cdot (V_a + V_{bE_{\frac{1}{2}}})}$

$\text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}} = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} \xrightarrow{[\text{CH}_3\text{COOH}] = [\text{CH}_3\text{COO}^-]} \rightarrow \text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}} = \text{pK}_a \text{ et } \text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}} = 4,8.$

3⁰) Effet de la dilution sur les courbes de dosage :

a - Dosage initial :

On dose un volume V_a d'une solution acide (S_a) de concentration molaire C_a par une solution de base forte (S_b) de concentration molaire C_b .

Nature de l'acide	pH_i (initial)	Relation à l'équivalence	$\text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}}$ (à la demi-équivalence)	pH_E (à l'équivalence)
Acide fort	$\text{pH}_i = -\log C_a$	$V_{bE} = \frac{C_a \cdot V_a}{C_b}$	---	$\text{pH}_E = 7$
Acide faible	$\text{pH}_i = \frac{1}{2} \text{pK}_a - \frac{1}{2} \log C_a$	$V_{bE} = \frac{C_a \cdot V_a}{C_b}$	$\text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}} = \text{pK}_a$	$\text{pH}_E = 7 + \frac{1}{2} \text{pK}_a + \frac{1}{2} \log C_{bE}$ $C_{bE} = \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{bE}}$

b - Effets de la dilution :

On procède à l'une ou à plusieurs des dilutions suivantes :

- On dilue la solution (S_a) jusqu'à obtenir une solution (S'_a) de concentration molaire : $C'_a = \frac{C_a}{n_a}$, ($n_a \geq 1$).
- A un volume V_a de la solution (S'_a) on ajoute de l'eau jusqu'à obtenir un volume : $V'_a = n \cdot V_a$, ($n \geq 1$).

Remarque : $V'_a = V_a + V_e \xrightarrow{V'_a = n \cdot V_a} V_a + V_e = n \cdot V_a \rightarrow V_e = (n-1) \cdot V_a$

- On dose le volume V'_a de la solution (S'_a) par une solution de base forte (S'_b) obtenue par dilution de la solution (S_b) et de concentration molaire : $C'_b = \frac{C_b}{n_b}$, ($n_b \geq 1$).

• Effet sur le pH initial :

La solution (S_{ai}) à doser a une concentration molaire : $C_{ai} = \frac{C'_a \cdot V_a}{V'_a} \rightarrow C_{ai} = \frac{\frac{C_a}{n_a} \cdot V_a}{n \cdot V_a}$ et $C_{ai} = \frac{C_a}{n_a \cdot n}$.

* Pour la solution d'acide fort : $\text{pH}'_i = -\log C_{ai}$

$\rightarrow \text{pH}'_i = -\log \frac{C_a}{n_a \cdot n} = -\log C_a + \log(n_a \cdot n) \text{ et } \text{pH}'_i = \text{pH}_i + \log(n_a \cdot n)$

* Pour la solution d'acide faible : $\text{pH}'_i = \frac{1}{2} \text{pK}_a - \frac{1}{2} \log C_{ai}$

$$\rightarrow \text{pH}'_i = \frac{1}{2} \text{pK}_a - \frac{1}{2} \log \frac{C_a}{n_a \cdot n} = \frac{1}{2} \text{pK}_a - \frac{1}{2} \log C_a + \frac{1}{2} \log (n_a \cdot n) \quad \text{et} \quad \text{pH}'_i = \text{pH}_i + \frac{1}{2} \log (n_a \cdot n)$$

- Effet sur la relation à l'équivalence :**

Le volume de base ajoutée à l'équivalence est indépendant de la nature (fort ou faible) de l'acide dont on dose la solution aqueuse.

A l'équivalence, on a : $C_{ai} \cdot V'_a = C'_b \cdot V_{bE}$

$$\rightarrow V'_{bE} = \frac{C_{ai} \cdot V'_a}{C'_b} = \frac{\frac{C_a}{n_a} \cdot n \cdot V_a}{\frac{C_b}{n_b}} \rightarrow V'_{bE} = \frac{n_b}{n_a} \cdot \frac{C_a \cdot V_a}{C_b} \quad \text{et} \quad V'_{bE} = \frac{n_b}{n_a} \cdot V_{bE}$$

Remarque : L'ajout de l'eau (V_e) au volume (V_a) de la solution acide à doser n'influe pas sur le volume de base ajoutée à l'équivalence (V'_{bE} indépendant de n) car la quantité de matière d'acide à doser ne varie pas.

- Effet sur le pH à la demi-équivalence :**

Pour une solution d'acide faible, la dilution n'affecte pas la valeur du pH à la demi-équivalence.

$$\text{pH}'_{E_{1/2}} = \text{pH}_{E_{1/2}} = \text{pK}_a$$

- Effet sur le pH à l'équivalence :**

A l'équivalence, on obtient une solution (S'_{bE}) de la base conjuguée de l'acide considéré.

La concentration molaire de la solution (S'_{bE}) est : $C'_{bE} = \frac{C_{ai} \cdot V'_a}{V'_a + V_{bE}}$

$$\rightarrow C'_{bE} = \frac{\frac{C_a}{n_a} \cdot n \cdot V_a}{n \cdot V_a + \frac{n_b}{n_a} \cdot V_{bE}} = \frac{\frac{C_a \cdot V_a}{n_a}}{n \cdot V_a + \frac{n_b}{n_a} \cdot V_{bE}} = \frac{C_a \cdot V_a}{n_a \cdot n \cdot V_a + n_b \cdot V_{bE}} \rightarrow C'_{bE} = \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{bE}} \cdot \frac{V_a + V_{bE}}{n_a \cdot n \cdot V_a + n_b \cdot V_{bE}}$$

$$\text{et} \quad C'_{bE} = C_{bE} \cdot \frac{V_a + V_{bE}}{n_a \cdot n \cdot V_a + n_b \cdot V_{bE}}$$

* Pour la solution d'acide fort :

La base conjuguée d'un acide fort est indifférente, elle ne réagit donc pas avec l'eau.

Par conséquent :

$$\text{pH}'_E = \text{pH}_E = 7 \quad \text{à } 25^\circ \text{C}$$

* Pour la solution d'acide faible :

La base conjuguée d'un acide faible est faible. Pour la solution (S'_{bE}), on a : $\text{pH}'_E = 7 + \frac{1}{2} \text{pK}_a + \frac{1}{2} \log C'_{bE}$

$$\rightarrow \text{pH}'_E = 7 + \frac{1}{2} \text{pK}_a + \frac{1}{2} \log C_{bE} \cdot \frac{V_a + V_{bE}}{n_a \cdot n \cdot V_a + n_b \cdot V_{bE}} = 7 + \frac{1}{2} \text{pK}_a + \frac{1}{2} \log C_{bE} + \frac{1}{2} \log \frac{V_a + V_{bE}}{n_a \cdot n \cdot V_a + n_b \cdot V_{bE}}$$

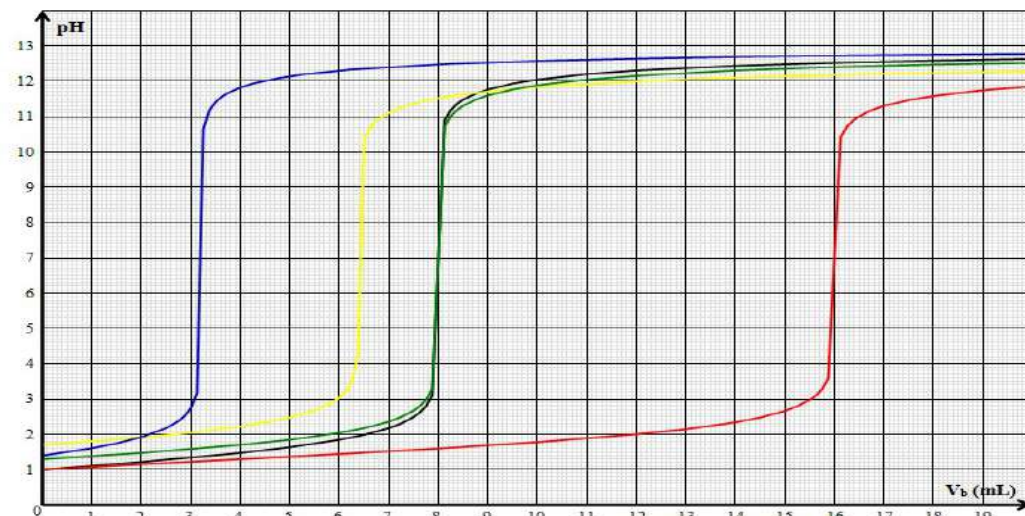
$$\text{et} \quad \text{pH}'_E = \text{pH}_E + \frac{1}{2} \log \frac{V_a + V_{bE}}{n_a \cdot n \cdot V_a + n_b \cdot V_{bE}}$$

Remarque : Quelle que soit la nature de la dilution, le pH à l'équivalence décroît vers 7.

c - Application :

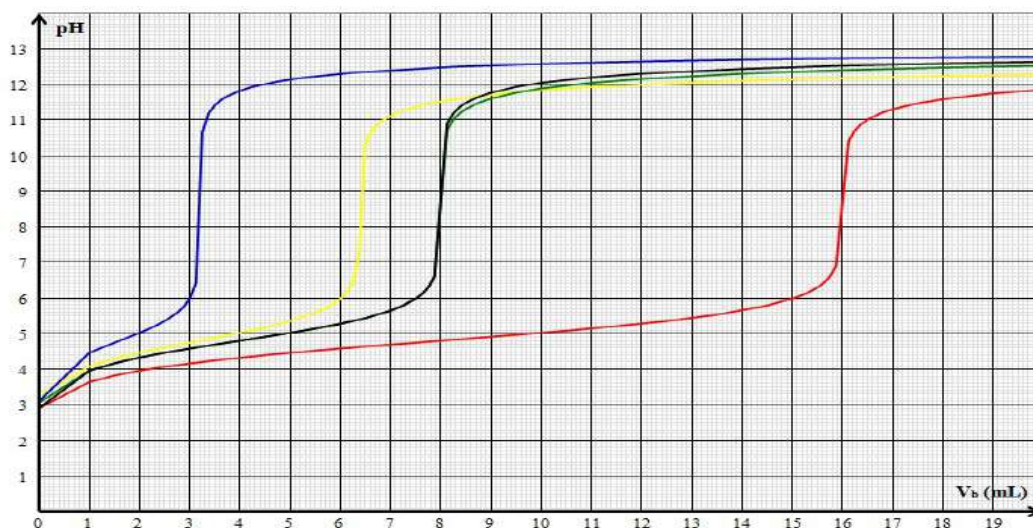
On dose un volume $V_a = 8 \text{ mL}$ d'une solution acide de concentration molaire $C_a = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ par une solution de base forte de concentration molaire $C_b = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

• Cas où l'acide est fort :



- * courbe — : $n_a = 1, n = 1, n_b = 1 \rightarrow \text{pH}_i = 1, V_{bE} = 8 \text{ mL}, \text{pH}_E = 7$
- * courbe — : $n_a = 2,5, n = 1, n_b = 1 \rightarrow \text{pH}'_i = 1,4, V'_{bE} = 3,2 \text{ mL}, \text{pH}'_E = 7$
- * courbe — : $n_a = 1, n = 2, n_b = 1 \rightarrow \text{pH}'_i = 1,3, V'_{bE} = 8 \text{ mL}, \text{pH}'_E = 7$
- * courbe — : $n_a = 1, n = 1, n_b = 2 \rightarrow \text{pH}'_i = 1, V'_{bE} = 16 \text{ mL}, \text{pH}'_E = 7$
- * courbe — : $n_a = 2,5, n = 2, n_b = 2 \rightarrow \text{pH}'_i = 1,7, V'_{bE} = 6,4 \text{ mL}, \text{pH}'_E = 7$

• Cas où l'acide est faible ($\text{pK}_a = 4,8$):



- * courbe — : $n_a = 1, n = 1, n_b = 1 \rightarrow \text{pH}_i = 2,9, V_{bE} = 8 \text{ mL}, \text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}} = 4,8, \text{pH}_E = 8,75$
- * courbe — : $n_a = 2,5, n = 1, n_b = 1 \rightarrow \text{pH}'_i = 3,1, V'_{bE} = 3,2 \text{ mL}, \text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}} = 4,8, \text{pH}'_E = 8,63$
- * courbe — : $n_a = 1, n = 2, n_b = 1 \rightarrow \text{pH}'_i = 3,05, V'_{bE} = 8 \text{ mL}, \text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}} = 4,8, \text{pH}'_E = 8,66$
- * courbe — : $n_a = 1, n = 1, n_b = 2 \rightarrow \text{pH}'_i = 2,9, V'_{bE} = 16 \text{ mL}, \text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}} = 4,8, \text{pH}'_E = 8,66$
- * courbe — : $n_a = 2,5, n = 2, n_b = 2 \rightarrow \text{pH}'_i = 3,25, V'_{bE} = 6,4 \text{ mL}, \text{pH}_{E_{\frac{1}{2}}} = 4,8, \text{pH}'_E = 8,48$

Applications

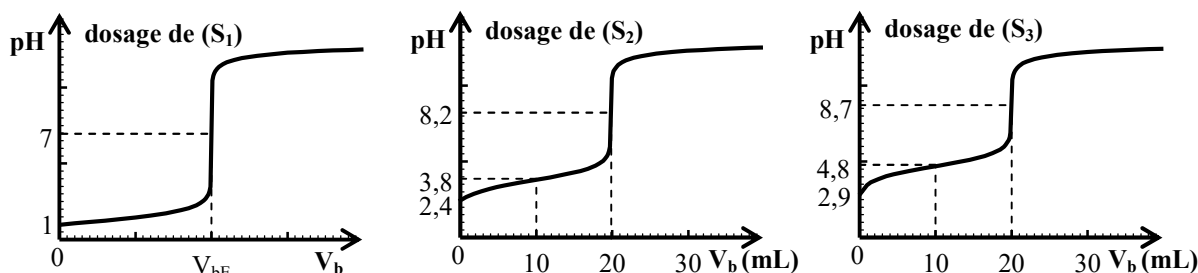
Exercice 1 :

On dispose de trois solutions aqueuses (S_1), (S_2) et (S_3) d'acides respectifs A_1H , A_2H et A_3H .

Les trois solutions ont la même concentration molaire C_a .

On dose, séparément, un volume $V_a = 20 \text{ cm}^3$ de chacune des trois solutions par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium NaOH de concentration molaire $C_b = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.

Au cours du dosage, on suit au pH-mètre l'évolution du pH du milieu réactionnel en fonction du volume V_b de solution d'hydroxyde de sodium versé. On obtient les trois courbes suivantes :



1⁰) Pourquoi, d'après l'allure des courbes de dosage, peut-on affirmer que A_1H est fort alors que A_2H et A_3H sont faibles ?

2⁰) A partir de la courbe de dosage de (S_1) :

a - En exploitant la valeur du pH initial, vérifier que $C_a = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.

b - Soit V_{bE} le volume de base ajouté à l'équivalence. Quelle est la relation qui lie C_a , V_a , C_b et V_{bE} ?
Calculer la valeur de V_{bE} .

c - Quel est le caractère (acide, basique ou neutre) de la solution obtenue à l'équivalence ? Justifier.

3⁰) A partir des courbes de dosage de (S_2) et (S_3) :

a - Quelles sont les valeurs de pK_{a2} et pK_{a3} respectivement des couples relatifs aux acides A_2H et A_3H ?

b - Retrouver, par le calcul, les valeurs pH_2 et pH_3 respectivement du pH des solutions (S_2) et (S_3).

Rappel : pour une solution aqueuse d'acide faible de concentration molaire C : $pH = \frac{1}{2}(pK_a - \log C)$.

c - Comment peut-on justifier le caractère basique des solutions obtenues à l'équivalence ?

4⁰) On dispose de trois indicateurs colorés dont les zones de virage sont données dans le tableau suivant et l'on désire effectuer chacun de ces dosages en présence de l'un d'eux :

Indicateur	Hélianthine	Bleu de bromothymol	Phénol-phtaleine
Zone de virage (pH)	3,1 - 4,4	6,2 - 7,6	8,0 - 10,0

Lequel des trois indicateurs est le mieux approprié pour le dosage de chacune des trois solutions acides étudiées ? Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰) La courbe de dosage de la solution (S_1) admet un seul point d'inflexion, elle correspond au dosage d'un acide fort par une base forte donc l'acide A_1H est fort.

Les courbes de dosage des solutions (S_2) et (S_3) admettent chacune deux points d'inflexion, chacune correspond au dosage d'un acide faible par une base forte donc les acides A_2H et A_3H sont faibles.

2⁰) a - A_1H est fort $\rightarrow$ dans la solution (S_1) : $[H_3O^+] = C_a \xrightarrow{[H_3O^+] = 10^{-pH_1}} C_a = 10^{-pH_1} \cdot A.N :$

$C_a = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - A l'équivalence : $n(H_3O^+)_{\text{susceptible d'être libéré}} = n(OH^-)_{\text{ajouté}} \rightarrow C_a \cdot V_a = C_b \cdot V_{bE}$

$V_{bE} = \frac{C_a \cdot V_a}{C_b} \cdot A.N : V_{bE} = \frac{10^{-1} \cdot 20}{10^{-1}} \text{ et } V_{bE} = 20 \text{ mL}.$

c - A l'équivalence, $pH_E = 7$. La solution obtenue à l'équivalence est neutre.

Remarque : A l'équivalence, on obtient une solution de sel ($\text{Na}^+ + \text{A}_1^-$). Les ions Na^+ et A_1^- sont indifférents, ils ne réagissent pas avec l'eau et par conséquent la solution obtenue à l'équivalence est neutre.

3⁰) a - Lors du dosage d'un acide faible par une base forte on a : $\text{pH}_{\text{E}_{\frac{1}{2}}} = \text{pK}_a$.

Pour les trois dosages : $\left| \begin{array}{l} \text{même } C_a \\ \text{même } V_a \\ \text{même } C_b \end{array} \right. \xrightarrow{C_a \cdot V_a = C_b \cdot V_{\text{bE}}} \text{même } V_{\text{bE}} = 20 \text{ mL} \quad \text{et} \quad V_{\text{bE}_{\frac{1}{2}}} = 10 \text{ mL}.$

A partir de la courbe de dosage de (S_2) : $\text{pH}_{\text{E}_{\frac{1}{2}}} = 3,8 \rightarrow \text{pK}_{a2} = 3,8$.

A partir de la courbe de dosage de (S_2) : $\text{pH}_{\text{E}_{\frac{1}{2}}} = 4,8 \rightarrow \text{pK}_{a3} = 4,8$.

b - Pour la solution (S_2) : $\text{pH}_2 = \frac{1}{2}(3,8 - \log 10^{-1})$ et $\text{pH}_2 = 2,4$.

Pour la solution (S_3) : $\text{pH}_3 = \frac{1}{2}(4,8 - \log 10^{-1})$ et $\text{pH}_3 = 2,9$.

c - A l'équivalence, tout l'acide se transforme en sa base conjuguée. La base conjuguée d'un acide faible étant faible, on obtient, à l'équivalence une solution de base faible d'où le caractère basique de la solution obtenue.

4⁰) L'indicateur coloré le plus approprié pour un dosage est celui dont la zone de virage contient la valeur du pH à l'équivalence.

Lors du dosage de la solution (S_1) : $\text{pH}_E = 7 \rightarrow$ on utilise le bleu de bromothymol (6,2 - 7,6)

Lors du dosage de la solution (S_2) : $\text{pH}_E = 8,2 \rightarrow$ on utilise la phénol phtaleine (8,0 - 10)

Lors du dosage de la solution (S_3) : $\text{pH}_E = 8,7 \rightarrow$ on utilise la phénol phtaleine (8,0 - 10)

Exercice 2 :

Dans le lait, et sous l'effet des ferments lactiques, le lactose se transforme progressivement en acide lactique $\text{CH}_3\text{CHOHCO}_2\text{H}$.

Moins le lait est frais, plus il contient d'acide lactique. La détermination de l'acidité d'un lait est donc une bonne indication de sa fraîcheur.

1⁰) a - L'acide lactique étant un acide faible, écrire l'équation de la réaction de sa dissociation dans l'eau.

b - Donner l'expression de la constante d'acidité K_a du couple ($\text{CH}_3\text{CHOHCO}_2\text{H} / \text{CH}_3\text{CHOHCO}_2^-$).

2⁰) On prélève un volume $V_0 = 20 \text{ mL}$ de lait. On le verse dans un bécher et on complète avec de l'eau distillée pour obtenir une solution aqueuse (S_a) de volume $V_a = 50 \text{ mL}$.

On dose alors la solution (S_a) par une solution aqueuse (S_b) d'hydroxyde de sodium ($\text{Na}^+ + \text{OH}^-$) de concentration molaire $C_b = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

La courbe ci-contre indique l'évolution du pH de la solution présente dans le bécher en fonction du volume V_b de base ajoutée.

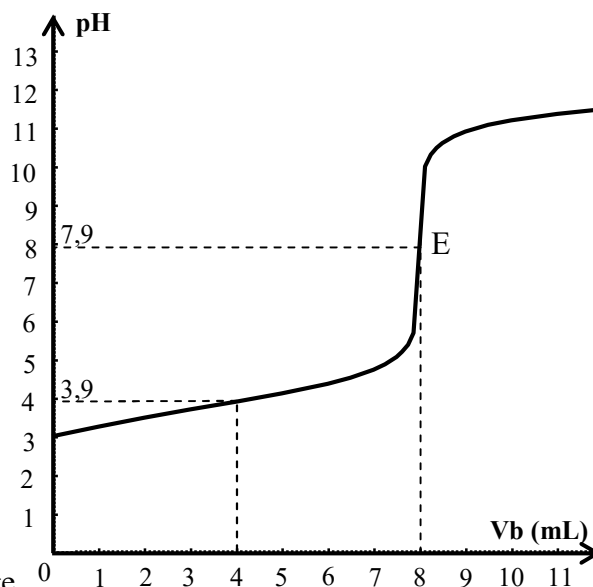
a - Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu au cours du dosage.

b - Préciser les valeurs des coordonnées ($V_{\text{bE}}, \text{pH}_E$) du point d'équivalence E.

c - Ecrire la relation qui lie la concentration molaire C_a de la solution (S_a) à C_b , V_{bE} et V_a .

Calculer la valeur de C_a .

3⁰) a - Montrer qu'à la demi équivalence on a : $\text{pH}_{\text{E}_{\frac{1}{2}}} = \text{pK}_a$.



b - Déterminer graphiquement la valeur du pK_a du couple $(CH_3CHOHCO_2H/CH_3CHOHCO_2^-)$.

c - En utilisant la valeur du pH initial de la solution (S_a), retrouver la valeur de pK_a .

d - Retrouver par le calcul la valeur pH_E à l'équivalence.

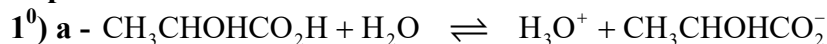
4⁰ Dans l'industrie alimentaire, l'acidité du lait s'exprime en degré Dornic (^0D). Un degré Dornic correspond à la présence de 0,1 g d'acide lactique dans 1 litre de lait.

Le lait est considéré frais si son acidité ne dépasse pas 18 ^0D .

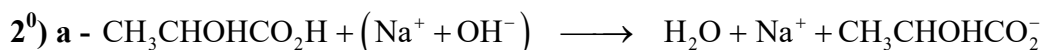
a - Montrer que la concentration molaire en acide lactique dans l'échantillon de volume V_0 de lait considéré est $C_0 = 2.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - Le lait étudié est-il encore frais ? On donne : masse molaire de l'acide lactique $M = 90 \text{ g.mol}^{-1}$.

Réponse :



b - $K_a = \frac{[H_3O^+].[CH_3CHOHCO_2^-]}{[CH_3CHOHCO_2H]}$.



b - Pour la détermination graphique du point d'équivalence E, utilise la méthode des tangentes dans la zone du saut du pH :

$$E \left| \begin{array}{l} V_{bE} = 8 \text{ mL} \\ pH_E = 7,9 \end{array} \right.$$

c - A l'équivalence : $n(H_3O^+)_{\text{susceptible d'être libéré}} = n(OH^-)_{\text{ajouté}} \rightarrow C_a \cdot V_a = C_b \cdot V_{bE} \text{ et } C_a = \frac{C_b \cdot V_{bE}}{V_a}$

A.N : $C_a = \frac{5.10^{-2} \cdot 8}{50} \text{ et } C_a = 8.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

3⁰) a - A la demi équivalence, $V_{bE_{\frac{1}{2}}} = \frac{V_{bE}}{2} \rightarrow n(OH^-)_{\text{ajouté}} = C_b \cdot V_{bE_{\frac{1}{2}}} = \frac{C_b \cdot V_{bE}}{2} = \frac{C_a \cdot V_a}{2}$

La réaction de dosage étant pratiquement totale :

$$n(CH_3CHOHCO_2^-) = n(OH^-)_{\text{ajouté}} \rightarrow n(CH_3CHOHCO_2^-) = \frac{C_a \cdot V_a}{2}$$

La conservation de la matière :

$$n(CH_3CHOHCO_2H) + n(CH_3CHOHCO_2^-) = C_a \cdot V_a \xrightarrow{n(CH_3CHOHCO_2^-) = \frac{C_a \cdot V_a}{2}} n(CH_3CHOHCO_2H) = \frac{C_a \cdot V_a}{2}$$

$$n(CH_3CHOHCO_2H) = n(CH_3CHOHCO_2^-) \rightarrow [CH_3CHOHCO_2H]_{E_{\frac{1}{2}}} = [CH_3CHOHCO_2^-]_{E_{\frac{1}{2}}}$$

$$pH_{E_{\frac{1}{2}}} = pK_a + \log \frac{[CH_3CHOHCO_2^-]_{E_{\frac{1}{2}}}}{[CH_3CHOHCO_2H]_{E_{\frac{1}{2}}}} \rightarrow pH_{E_{\frac{1}{2}}} = pK_a$$

b - A la demi-équivalence $V_{bE_{\frac{1}{2}}} = \frac{V_{bE}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ mL}$, $pH_{E_{\frac{1}{2}}} = 3,9 \rightarrow pK_a = 3,9$

c - La solution (S_a) étant une solution d'acide faible, on a :

$$pH_i = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_a) \rightarrow pK_a = 2 \cdot pH_i + \log C_a$$

A.N : $pK_a = 2.3 + \log 8.10^{-3} \text{ et } pK_a = 3,9$.

d - A l'équivalence on obtient une solution de base faible :

$$pH_E = 7 + \frac{1}{2}pK_a + \frac{1}{2} \log [CH_3CHOHCO_2^-]_E \rightarrow pH_E = 7 + \frac{1}{2}pK_a + \frac{1}{2} \log \frac{C_b \cdot V_{bE}}{V_a + V_{bE}}$$

$$A.N : pH_E = 7 + \frac{1}{2} \cdot 3,9 + \frac{1}{2} \log \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 8}{50 + 8} \quad \text{et} \quad pH_E = 7,9.$$

$$4^0) \text{ a - La solution } (S_a) \text{ est obtenue par dilution : } C_a = \frac{C_0 \cdot V_0}{V_a} \rightarrow C_0 = \frac{C_a \cdot V_a}{V_0}$$

$$A.N : C_0 = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 50}{20} \quad \text{et} \quad C_a = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{b - } C_0 = \frac{n}{V} \xrightarrow{n=\frac{m}{M}} C_0 = \frac{m}{M \cdot V} \quad \text{et} \quad \frac{m}{V} = C_0 \cdot M. \text{ L'acidité du lait sera alors : } \frac{C_0 \cdot M}{0,1} (^{\circ}D)$$

$$A.N : \text{L'acidité du lait est : } \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 90}{0,1} = 18 ^{\circ}D. \text{ Le lait utilisé est donc encore frais.}$$

Exercice 3 :

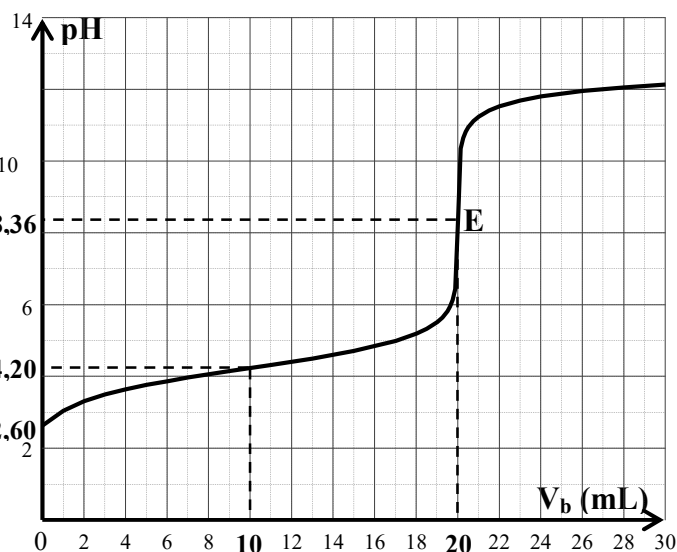
Le graphe ci-contre représente l'évolution du pH au cours du dosage d'un volume V_a d'une solution (S_a), de concentration molaire C_a , d'un acide AH par une solution d'hydroxyde de sodium NaOH (base forte) de concentration molaire $C_b = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

1⁰) a - Justifier, graphiquement, que l'acide AH est un acide faible.

b - Ecrire l'équation de la réaction, supposée totale, de dosage de cet acide faible par la base forte

2⁰) a - Exprimer, à l'équivalence, le volume V_{bE} de base ajouté en fonction de C_a , C_b et V_a . Déterminer graphiquement la valeur de V_{bE} .

b - Sachant qu'à la demi équivalence, $pH_{E_{\frac{1}{2}}} = pK_a$,



déterminer alors, graphiquement, la valeur du pK_a du couple acide-base (AH/A^-) considéré.

c - Sachant que l'acide AH est faiblement dissocié et en utilisant la valeur graphique du pH de la solution (S_a), calculer la valeur de la concentration C_a . Déduire alors la valeur du volume V_a utilisé lors du dosage.

3⁰) En fait, l'acide faible considéré est l'acide benzoïque C_6H_5COOH .

a - Calculer la constante d'équilibre K de la réaction de dosage étudiée. Justifier qu'elle est quasi totale.

b - Montrer qu'à la demi équivalence, $[C_6H_5COOH]_{E_{\frac{1}{2}}} = [C_6H_5COO^-]_{E_{\frac{1}{2}}}$ et en déduire que $pH_{E_{\frac{1}{2}}} = pK_a$.

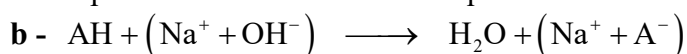
Donner le nom de la solution (S_T) obtenue et préciser ses propriétés.

c - Justifier le caractère basique de la solution obtenue à l'équivalence.

d - Retrouver par le calcul la valeur pH_E du pH à l'équivalence.

Réponse :

1⁰) a - La courbe $pH = f(V_B)$ admet deux points d'inflexion ; elle correspond donc au dosage d'un acide faible par une base forte. Par conséquent l'acide AH est un acide faible.



$$2^0) \text{ a - A l'équivalence : } n(OH^-)_{\text{ajoutée}} = n(H_3O^+)_{\text{capable d'être libérée}} \rightarrow C_b \cdot V_{bE} = C_a \cdot V_a \quad \text{et} \quad V_{bE} = \frac{C_a \cdot V_a}{C_b}.$$

Graphiquement : $V_{bE} = 20 \text{ mL}$.

$$\text{b - } pH_{E_{\frac{1}{2}}} = pK_a \xrightarrow[\text{graphiquement: } V_{bE_{\frac{1}{2}}} = \frac{V_{bE}}{2} = 10 \text{ mL}]{pH_{E_{\frac{1}{2}}} = 4,2} pK_a = 4,2.$$

$$\text{c - } pH_i = \frac{1}{2} pK_a - \frac{1}{2} \log C_a \rightarrow \log C_a = pK_a - 2 \cdot pH_i \quad \text{et} \quad C_a = 10^{pK_a - 2 \cdot pH_i}$$

$$\text{A.N : } C_a = 10^{4,2-2,2,6} \quad \text{et} \quad C_a = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{On a : } V_a = \frac{C_b \cdot V_{bE}}{C_a} \xrightarrow{\text{A.N}} V_a = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{10^{-1}} \quad \text{et} \quad V_a = 10 \text{ mL.}$$

$$3^0) \text{ a - } \text{AH} + \text{OH}^- \longrightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{A}^- ; \quad K = \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}] \cdot [\text{OH}^-]} \cdot \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_a}{K_e} \quad \text{et} \quad K = 10^{pK_e - pK_a}$$

$$\text{A.N : } K = 10^{14-4,2} \quad \text{et} \quad K = 6,3 \cdot 10^9. \quad K \text{ est très grande donc la réaction est pratiquement totale.}$$

$$\text{b - La réaction étant totale, } n(\text{A}^-)_{\text{formée}} = n(\text{OH}^-)_{\text{ajoutée}} \xrightarrow[\frac{V_{bE} \cdot 1}{2} = \frac{V_{bE}}{2}]{\text{A la demi équivalence}} n(\text{A}^-) = \frac{C_b \cdot V_{bE}}{2}.$$

$$\text{La conservation de la matière : } n(\text{AH}) + n(\text{A}^-) = C_a \cdot V_a$$

$$n(\text{AH}) = C_a \cdot V_a - n(\text{A}^-) \xrightarrow{C_a \cdot V_a = C_b \cdot V_{bE}} n(\text{AH}) = C_b \cdot V_{bE} - \frac{C_b \cdot V_{bE}}{2} \quad \text{et} \quad n(\text{AH}) = \frac{C_b \cdot V_{bE}}{2}$$

$$n(\text{AH}) = n(\text{A}^-) \rightarrow [\text{AH}] = [\text{A}^-] \quad \text{donc} \quad [\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}]_{E_1 \frac{1}{2}} = [\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}^-]_{E_1 \frac{1}{2}}.$$

$$\text{On a : } \text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}^-]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}]} \xrightarrow{\text{A la demi équivalence}} \text{pH}_{E_1 \frac{1}{2}} = \text{pK}_a$$

A la demi équivalence, la solution (S_T) obtenue est une solution tampon. Son pH varie peut :

- par addition de petites quantités d'acide ou de base
- par dilution modérée.

c - A l'équivalence, on obtient une solution de benzoate de sodium C₆H₅COONa.

Ce sel est constitué d'ions Na⁺ (ion indifférent) et d'ions C₆H₅COO⁻ (base faible car conjuguée d'un acide faible). Donc la solution obtenue à l'équivalence est basique (pH_E > 7 à 25°C).

$$\text{d - } \text{pH}_E = \frac{1}{2} \left(\text{pK}_e + \text{pK}_a + \log [\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}^-]_E \right) \rightarrow \text{pH}_E = \frac{1}{2} \left(\text{pK}_e + \text{pK}_a + \log \frac{C_b \cdot V_{bE}}{V_a + V_{bE}} \right)$$

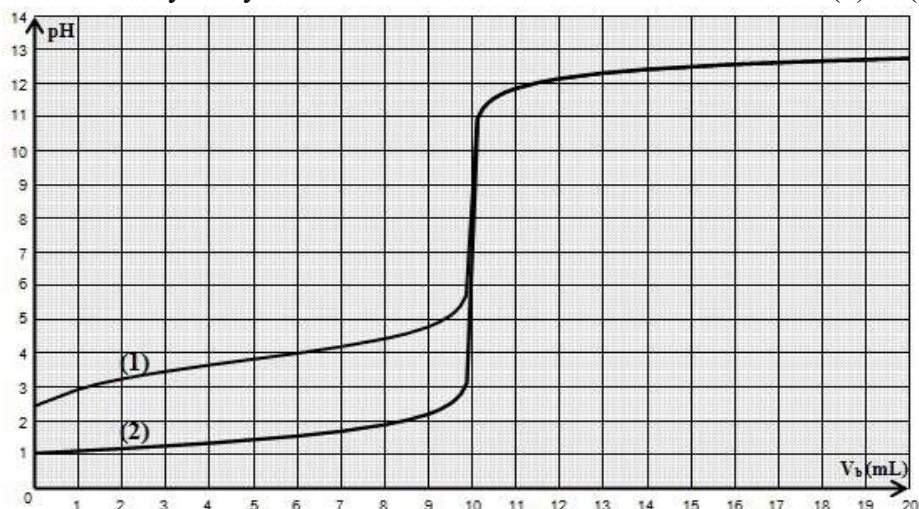
$$\text{A.N : } \text{pH}_E = \frac{1}{2} \left(14 + 4,2 + \log \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{10 + 20} \right) \quad \text{et} \quad \text{pH}_E = 8,36.$$

Exercice 4 :

On dispose de deux solutions aqueuses, l'une de chlorure d'hydrogène HCl (acide fort) de concentration molaire C_a et l'autre d'acide méthanoïque HCOOH de concentration molaire C'_a.

On dose séparément, un volume V = 20 mL de chacune des deux solutions contenue dans un bêcher, par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration molaire C_b.

Au cours du dosage, on suit à l'aide d'un pH-mètre l'évolution du pH du milieu réactionnel en fonction du volume V_b de la solution d'hydroxyde de sodium versée. On obtient les courbes (1) et (2) suivantes :



- 1⁰) a - Identifier la courbe qui correspond au dosage de la solution de chlorure d'hydrogène.
b - Déterminer la valeur de la concentration molaire C_a .
c - Calculer la valeur de la concentration molaire C_b .
2⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction qui se produit lors du dosage de la solution d'acide méthanoïque.
b - Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'équivalence E.
c - Justifier qualitativement le caractère de la solution obtenue à l'équivalence.
3⁰) a - Montrer, qu'à la demi-équivalence, la valeur du pH du mélange réactionnel est égale à celle du pK_a du couple $(HCOOH/HCOO^-)$. Déduire, graphiquement, la valeur du pK_a de ce couple.
b - Déterminer, par deux méthodes différentes, la valeur de la concentration molaire C'_a de la solution d'acide méthanoïque. (L'acide méthanoïque est faiblement dissocié)
4⁰) On dilue, d'une façon modérée, la solution d'acide méthanoïque initialement contenue dans le bêcher. On refait le dosage du contenu du bêcher par la même solution basique.
Préciser, en le justifiant qualitativement, l'effet de cette dilution sur les valeurs du :
* volume de la solution basique ajoutée pour atteindre l'équivalence.
* pH du mélange réactionnel à la demi-équivalence.

Réponse :

1⁰) a - La courbe qui correspond au dosage d'un acide fort par une base forte admet un seul point d'inflexion, donc la courbe (2) correspond au dosage de l'acide chlorhydrique.

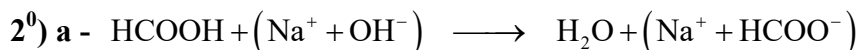
b - Sur la courbe (2) et pour $V_b = 0$, $pH = 1$

$$\text{or } pH = -\log C_a \rightarrow C_a = 10^{-pH} \text{ et } C_a = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$$

c - Sur la courbe (2) et à l'équivalence on a : $n(H_3O^+)_{\text{capable d'être libéré}} = n(OH^-)_{\text{ajouté}}$

$$\rightarrow C_a \cdot V_a = C_b \cdot V_{bE2} \text{ et } C_b = \frac{C_a \cdot V_a}{V_{bE2}}.$$

A.N : Graphiquement, $V_{bE2} = 10 \text{ mL}$ donc $C_b = \frac{10^{-1} \cdot 20}{10}$ et $C_b = 2 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.



b - Graphiquement, sur la courbe (1), et en utilisant la méthode des tangentes : $E_1 \left| \begin{array}{l} V_{bE1} = 10 \text{ mL} \\ pH_{E1} = 8,3 \end{array} \right.$

c - A l'équivalence, et on obtient une solution de méthanoate de sodium $(Na^+ + HCOO^-)$

L'ion Na^+ est indifférent alors que l'ion $HCOO^-$ est la base conjuguée de l'acide faible $HCOOH$, c'est donc une base faible et par conséquent la solution obtenue à l'équivalence est basique ($pH_{E1} > 7$).

3⁰) a - La réaction au cours du dosage étant pratiquement totale : $n(HCOO^-)_{\text{formé}} = n(OH^-)_{\text{ajouté}}$.

A la demi équivalence : $V_{bE\frac{1}{2}} = \frac{V_{bE1}}{2} \rightarrow n(HCOO^-) = C_b \cdot \frac{V_{bE1}}{2}$

La conservation de la matière $\rightarrow$

$$n(HCOOH) + n(HCOO^-) = C'_a \cdot V_a \rightarrow n(HCOOH) = C'_a \cdot V_a - n(HCOO^-)$$

or à l'équivalence $n(H_3O^+)_{\text{capable d'être libéré}} = n(OH^-)_{\text{ajouté}} \rightarrow C'_a \cdot V_a = C_b \cdot V_{bE1}$

donc $n(HCOOH) = C_b \cdot V_{bE1} - C_b \cdot \frac{V_{bE1}}{2}$ et $n(HCOOH) = C_b \cdot \frac{V_{bE1}}{2}$

$$n(HCOOH) = n(HCOO^-) \rightarrow [HCOOH] = [HCOO^-]$$

On a : $pH = pK_a + \log \frac{[HCOO^-]}{[HCOOH]} \xrightarrow{[HCOOH]=[HCOO^-]} pH_{E\frac{1}{2}} = pK_a.$

Graphiquement, pour $V_{bE\frac{1}{2}} = \frac{10}{2} = 5 \text{ mL}$, $pH_{E\frac{1}{2}} = 3,8 \rightarrow pK_a = 3,8$

b - * Sur la courbe (1) et à l'équivalence on a : $n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{capable d'être libéré}} = n(\text{OH}^-)_{\text{ajouté}}$

$$\rightarrow C'_a \cdot V_a = C_b \cdot V_{\text{bE1}} \quad \text{et} \quad C'_a = \frac{C_b \cdot V_{\text{bE1}}}{V_a}$$

A.N : Graphiquement, $V_{\text{bE1}} = 10 \text{ mL}$ donc $C'_a = \frac{2 \cdot 10^{-1} \cdot 10}{20}$ et $C'_a = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

* Sur la courbe (1) et pour $V_b = 0$, $\text{pH} = 2,4$

or $\text{pH} = \frac{1}{2} \text{pK}_a - \frac{1}{2} \log C'_a \rightarrow C'_a = 10^{\text{pK}_a - 2\text{pH}}$. A.N : $C'_a = 10^{3,8 - 2 \cdot 2,4}$ et $C'_a = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

4⁰ * A l'équivalence $n(\text{OH}^-)_{\text{ajouté}} = n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{capable d'être libéré}} \rightarrow n(\text{OH}^-)_{\text{ajouté}} = n(\text{HCOOH})_{\text{initial}}$

La dilution n'affecte pas le nombre de moles initial d'acide donc le volume de la solution basique ajoutée à l'équivalence ne change pas.

* A la demi équivalence, la solution obtenue est une solution tampon pour laquelle $\text{pH} = \text{pK}_a$ donc le pH ne varie pratiquement pas lors d'une dilution modérée.

Exercice 5 :

On effectue les dosages d'un même volume V_a de deux solutions aqueuses acides (S_1) et (S_2) :

- (S_1) est une solution aqueuse d'acide chlorhydrique (HCl) de concentration molaire C_{a1} .

- (S_2) est une solution aqueuse d'acide éthanóïque (CH_3COOH) de concentration molaire C_{a2} .

Les dosages sont réalisés par une même solution (S) d'hydroxyde de sodium (NaOH) de concentration molaire $C_b = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

La mesure du pH au cours de chacun des dosages a permis de tracer les courbes (a) et (b) ci-contre :

1⁰ a - L'acide HCl étant un acide fort, justifier que la courbe (a) correspond au dosage de (S_1).

Déduire alors que CH_3COOH est un acide faible.

b - Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu lors du dosage de chacune des solutions (S_1) et (S_2).

2⁰ a - Définir l'équivalence acido-basique.

b - En comparant les volumes V_{bE1} et V_{bE2} de base ajoutée à l'équivalence respectivement à la solution (S_1) et (S_2), montrer que : $C_{a1} = C_{a2}$.

c - Soit $C_a = C_{a1} = C_{a2}$. En exploitant la courbe (a), déterminer la valeur de C_a .

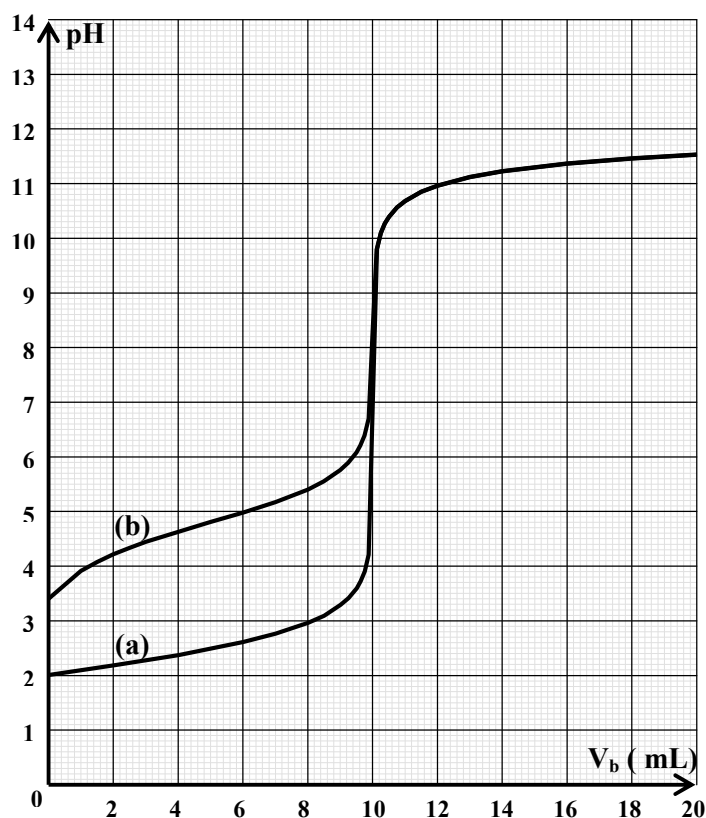
d - Calculer alors la valeur de V_a .

3⁰ a - Lors du dosage de la solution (S_2) et à la demi équivalence, montrer que : $\text{pH}_{\text{E} \frac{1}{2}} = \text{pK}_a$.

b - Déterminer graphiquement la valeur du pK_a du couple $(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-)$.

4⁰ a - Calculer la valeur pH_{E2} du pH à l'équivalence lors du dosage de la solution (S_2).

b - Lors du dosage de la solution (S_1) et à l'équivalence, $\text{pH}_{\text{E1}} = 7$. Justifier cette valeur.



Réponse :

1⁰ a - La courbe (a) admet un seul point d'inflexion. Elle correspond donc au dosage d'un acide fort par une base forte $\xrightarrow{\text{HCl est un acide fort}}$ la courbe (a) correspond au dosage de la solution (S_1).

La courbe (b), correspondant au dosage de la solution (S_2) admet deux points d'inflexion. Elle correspond donc au dosage d'un acide faible par une base forte. L'acide CH_3COOH est alors un acide faible.

b - pour la solution (S_1) : $(\text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-) + (\text{Na}^+ + \text{OH}^-) \longrightarrow 2\text{H}_2\text{O} + (\text{Na}^+ + \text{Cl}^-)$

pour la solution (S₂) : $\text{CH}_3\text{COOH} + (\text{Na}^+ + \text{OH}^-) \longrightarrow \text{H}_2\text{O} + (\text{Na}^+ + \text{CH}_3\text{COO}^-)$

2⁰) a - L'état d'équivalence est atteint lorsque : $n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{capable d'être libérés}} = n(\text{OH}^-)_{\text{ajoutés}}$.

b - Graphiquement et à l'équivalence : $V_{\text{bE1}} = V_{\text{bE2}} = 10 \text{ mL}$.

A l'équivalence : $\begin{cases} (S_1): C_{a1} \cdot V_a = C_b \cdot V_{\text{bE1}} \\ (S_2): C_{a2} \cdot V_a = C_b \cdot V_{\text{bE2}} \end{cases} \xrightarrow{V_{\text{bE1}} = V_{\text{bE2}}} C_{a1} = C_{a2}$.

c - Sur la courbe (a) et pour $V_b = 0$, $\text{pH}_i = -\log C_{a1}$ (HCL étant un acide fort) $\rightarrow C_{a1} = 10^{-\text{pH}_i}$.

Graphiquement : $\text{pH}_i = 2 \rightarrow C_a = C_{a1} = C_{a2} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

d - $C_{a1} \cdot V_a = C_b \cdot V_{\text{bE1}} \rightarrow V_a = \frac{C_b \cdot V_{\text{bE1}}}{C_{a1}}$. A.N : $V_a = \frac{10^{-2} \cdot 10}{10^{-2}}$ et $V_a = 10 \text{ mL}$.

3⁰) a - A la demi équivalence : $V_{\text{bE}\frac{1}{2}} = \frac{V_{\text{bE2}}}{2}$.

La réaction de dosage est pratiquement totale :

$n(\text{OH}^-)_{\text{ajoutés}} = n(\text{CH}_3\text{COO}^-)_{\text{formés}} \rightarrow n(\text{CH}_3\text{COO}^-) = C_b \cdot \frac{V_{\text{bE2}}}{2}$

La conservation de la matière :

$n(\text{CH}_3\text{COOH}) + n(\text{CH}_3\text{COO}^-) = C_a \cdot V_a \xrightarrow{C_a \cdot V_a = C_b \cdot V_{\text{bE2}}} n(\text{CH}_3\text{COOH}) = C_b \cdot \frac{V_{\text{bE2}}}{2}$

$n(\text{CH}_3\text{COOH}) = n(\text{CH}_3\text{COO}^-) \rightarrow \frac{n(\text{CH}_3\text{COOH})}{V_a + V_{\text{bE}\frac{1}{2}}} = \frac{n(\text{CH}_3\text{COO}^-)}{V_a + V_{\text{bE}\frac{1}{2}}} \rightarrow [\text{CH}_3\text{COOH}] = [\text{CH}_3\text{COO}^-]$

On a : $\text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} \xrightarrow[\text{[CH}_3\text{COOH]} = [\text{CH}_3\text{COO}^-]]{\text{A la demi équivalence}} \text{pH}_{\text{E}\frac{1}{2}} = \text{pK}_a$

b - Graphiquement : $\text{pH}_{\text{E}\frac{1}{2}} = 4,8 \rightarrow \text{pK}_a = 4,8$.

4⁰) a - A l'équivalence, on obtient une solution basique d'éthanoate de sodium ($\text{Na}^+ + \text{CH}_3\text{COO}^-$)

$\text{pH}_{\text{E}\frac{1}{2}} = 7 + \frac{1}{2} \text{pK}_a + \frac{1}{2} \log [\text{CH}_3\text{COO}^-] \xrightarrow{[\text{CH}_3\text{COO}^-] = \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{\text{bE2}}}} \text{pH}_{\text{E}\frac{1}{2}} = 7 + \frac{1}{2} \text{pK}_a + \frac{1}{2} \log \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_{\text{bE2}}}$.

A.N : $\text{pH}_{\text{E}\frac{1}{2}} = 7 + \frac{1}{2} 4,8 + \frac{1}{2} \log \frac{10^{-2} \cdot 10}{10 + 10}$ et $\text{pH}_{\text{E}\frac{1}{2}} = 8,25$.

b - A l'équivalence, on obtient une solution neutre de chlorure de sodium ($\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$) car les ions Na^+ et Cl^- sont indifférents (ils ne réagissent pas avec l'eau), par conséquent : $\text{pH}_{\text{E1}} = 7$.

Exercice 6 :

On dissout une masse m d'ammoniac de formule NH_3 dans l'eau pour préparer une solution (S_B) de concentration molaire C_B de volume $V_0 = 500 \text{ mL}$.

On effectue le dosage d'un volume $V_B = 20 \text{ mL}$ de la solution (S_B) par une solution (S_A) de chlorure d'hydrogène HCl de concentration molaire $C_A = 8 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

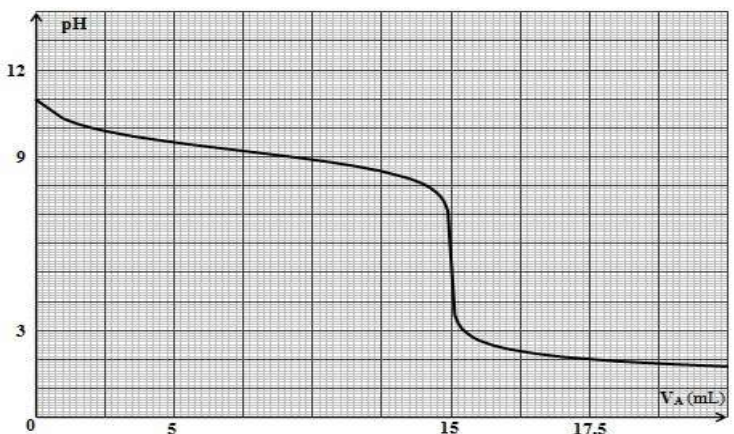
A l'aide d'un pH-mètre, on enregistre l'évolution du pH du mélange réactionnel, en fonction du volume V_A de la solution (S_A) ajoutée.

On obtient la courbe de la figure ci-contre :

1⁰) a - Montrer que l'ammoniac est une base faible.

b - Ecrire l'équation de la réaction qui se produit au cours du dosage.

2⁰) a - Déterminer graphiquement les coordonnées (V_{AE} , pH_E) du point d'équivalence E.



b - Justifier le caractère du mélange réactionnel à l'équivalence.

c - Calculer la valeur de la concentration C_B de la solution (S_B) et déduire la valeur de la masse m .

On donne les masses molaires atomiques en g. mol^{-1} :

$N = 14$ et $H = 1$.

d - Déterminer graphiquement la valeur du pK_a du couple acide- base correspondant.

3°) Retrouver par le calcul la valeur pH_E du pH au point d'équivalence.

4°) On dispose de trois indicateurs colorés dont les zones de virage sont données dans le tableau suivant :

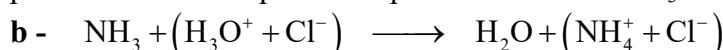
Indicateur	Hélianthine	Rouge de méthyle	Bleu de bromothymol
Zone de virage (pH)	3,1 - 4,4	4,2 - 6,2	6,2 - 7,6

Lequel des trois indicateurs est le plus approprié pour repérer l'équivalence lors de ce dosage?

Justifier la réponse.

Réponse :

1°) a - La courbe $pH = f(V_A)$ admet deux points d'inflexion donc elle correspond au dosage d'une base faible par un acide fort et par conséquent l'ammoniac NH_3 est une base faible.



2°) a - Graphiquement et appliquant la méthode des tangentes : $E(V_{AE} = 15 \text{ mL}, pH_E = 5,3)$.

b - A l'équivalence, toute la base NH_3 se transforme en son acide conjugué NH_4^+ .

L'acide conjugué d'une base faible étant un acide faible et l'ion Cl^- étant indifférent, la solution de chlorure d'ammonium ($NH_4^+ + Cl^-$) obtenue à l'équivalence aura un caractère acide.

c - A l'équivalence : $n(H_3O^+)_{\text{ajouté}} = n(OH^-)_{\text{capable d'être formé}}$

$$\rightarrow C_A \cdot V_{AE} = C_B \cdot V_B \quad \text{et} \quad C_B = \frac{C_A \cdot V_{AE}}{V_B}$$

$$A.N : C_B = \frac{8 \cdot 10^{-2} \cdot 15}{20} \quad \text{et} \quad C_B = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{On a : } C_B = \frac{n(NH_3)}{V_0} \quad \text{or} \quad n(NH_3) = \frac{m(NH_3)}{M(NH_3)} \rightarrow C_B \cdot V_0 = \frac{m(NH_3)}{M(NH_3)} \quad \text{et} \quad m(NH_3) = C_B \cdot V_0 \cdot M(NH_3)$$

$$A.N : m(NH_3) = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 0,517 \quad \text{et} \quad m(NH_3) = 0,51 \text{ g}.$$

d - A la demi équivalence : $pH_{E_{\frac{1}{2}}} = pK_a$.

$$\text{Graphiquement : } E_{\frac{1}{2}}(V_{AE_{\frac{1}{2}}} = 7,5 \text{ mL}, pH_{E_{\frac{1}{2}}} = 9,2) \rightarrow pK_a = 9,2.$$

$$3^0) \text{ A l'équivalence : } pH_E = \frac{1}{2} pK_a - \frac{1}{2} \log C \quad \text{avec} \quad C = \frac{n(NH_4^+)_E}{V_E} = \frac{n(NH_3)_{\text{initial}}}{V_B + V_{AE}} = \frac{C_B \cdot V_B}{V_B + V_{AE}}.$$

$$\rightarrow pH_E = \frac{1}{2} pK_a - \frac{1}{2} \log \frac{C_B \cdot V_B}{V_B + V_{AE}}.$$

$$A.N : pH_E = \frac{1}{2} \cdot 9,2 - \frac{1}{2} \log \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{20 + 15} \quad \text{et} \quad pH_E = 5,33.$$

4°) L'indicateur coloré le plus approprié est celui dont la zone de virage contient la valeur de pH_E .

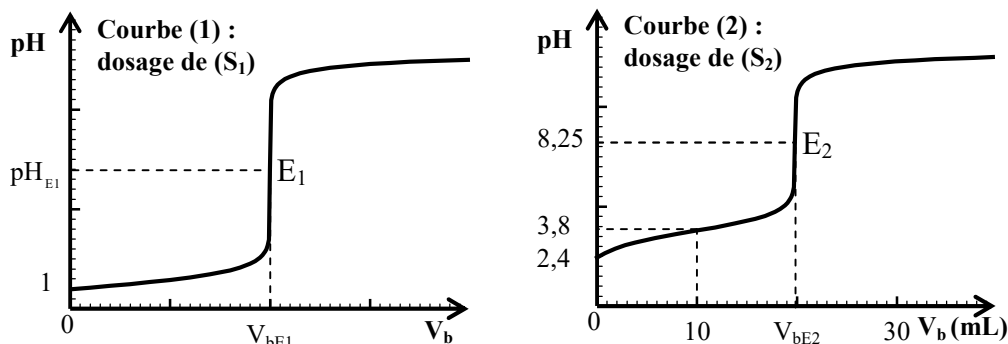
On utilise donc le rouge de méthyle.

Exercice 7 :

On a tracé, ci-dessous, les courbes représentatives $pH = f(V_b)$ obtenues en mesurant le pH au cours de l'addition progressive d'un volume V_b d'une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium NaOH de concentration $C_b = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$:

- à un volume $V_{a1} = 10 \text{ cm}^3$ d'une solution aqueuse (S_1) d'un acide noté A_1H , de concentration C_{a1} .

- à un volume $V_{a2} = 20 \text{ cm}^3$ d'une solution aqueuse (S_2) d'un acide noté A_2H , de concentration C_{a2} .



1⁰) L'observation de ces courbes permet-elle d'affirmer que A₁H est un acide fort alors que A₂H est un acide faible ? Justifier votre réponse.

2⁰) On s'intéresse au dosage de la solution (S₁) :

a - Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu au cours du dosage.

b - En exploitant la valeur du pH initial, vérifier que C_{a1} = 0,1 mol.L⁻¹.

c - Soit V_{bE1} le volume de base ajouté à l'équivalence. Calculer la valeur de V_{bE1}.

d - Quelle est la valeur pH_{E1} du pH de la solution obtenue à l'équivalence ? Justifier la réponse.

3⁰) On s'intéresse au dosage de la solution (S₂) :

a - Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu au cours du dosage.

b - Sachant que le volume de base ajouté à l'équivalence est V_{bE2} = 20 mL, calculer la valeur de la concentration C_{a2}.

c - Déterminer graphiquement le pH de la solution obtenue à la demi - équivalence.

d - En déduire la valeur du pK_a du couple relatif à l'acide faible.

4⁰) a - Lors du dosage de la solution (S₂) et à l'équivalence, montrer que le pH de la solution obtenue s'écrit :

$$\text{pH}_{E2} = 7 + \frac{\text{pK}_a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\frac{C_{a2} \cdot V_{a2}}{V_{a2} + V_{bE2}} \right).$$

On donne : pour une solution de base faible de concentration C, $\text{pH} = \frac{1}{2} \text{pK}_e + \frac{1}{2} \text{pK}_a + \frac{1}{2} \cdot \log C$

b - Calculer alors la valeur du pK_a du couple relatif à l'acide faible.

5⁰) Parmi les indicateurs colorés suivants, quel est celui qui paraît le plus approprié à chaque dosage ? Justifier la réponse.

Indicateur coloré	Hélianthine	Bleu de bromothymol	Phénol-phtaleine	Jaune d'alizarine
Zone de virage (pH)	3,1 - 4,4	6,0 - 7,6	8 - 10	10,1 - 12,1

Réponse :

1⁰) La courbe (1) admet un seul point d'inflexion donc elle correspond au dosage d'un acide fort par une base forte et par conséquent A₁H est un acide fort alors que la courbe (2) admet deux points d'inflexion donc elle correspond au dosage d'un acide faible par une base forte et par conséquent A₂H est un acide faible.

2⁰) a - $(\text{H}_3\text{O}^+ + \text{A}_1^-) + (\text{Na}^+ + \text{OH}^-) \longrightarrow 2 \text{H}_2\text{O} + (\text{Na}^+ + \text{A}_1^-).$

b - (S₁) est une solution d'acide fort $\rightarrow C_{a1} = [\text{H}_3\text{O}^+]_i = 10^{-\text{pH}_i} \xrightarrow{\text{pH}_i=1} C_{a1} = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$

c - A l'équivalence : $n(\text{OH}^-)_{\text{ajouté}} = n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{capable d'être libéré}} \rightarrow C_b \cdot V_{bE1} = C_{a1} \cdot V_{a1} \rightarrow V_{bE1} = \frac{C_{a1} \cdot V_{a1}}{C_b}$

A.N : $V_{bE1} = \frac{10^{-1} \cdot 10}{10^{-1}}$ et $V_{bE1} = 10 \text{ mL}.$

d - A l'équivalence, on obtient une solution de sel neutre contenant les ions Na⁺ et A₁⁻ indifférents qui ne réagissent pas avec l'eau et par conséquent pH_{E1} = 7.

3⁰) a - $\text{A}_2\text{H} + (\text{Na}^+ + \text{OH}^-) \longrightarrow \text{H}_2\text{O} + (\text{Na}^+ + \text{A}_2^-)$

b - A l'équivalence : $n(\text{OH}^-)_{\text{ajouté}} = n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{capable d'être libéré}} \rightarrow C_b \cdot V_{bE2} = C_{a2} \cdot V_{a2} \rightarrow C_{a2} = \frac{C_b \cdot V_{bE2}}{V_{a2}}$

$$A.N : C_{a2} = \frac{10^{-1} \cdot 20}{20} \quad \text{et} \quad C_{a2} = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$c - \text{A la demi équivalence, } V_{bE2\frac{1}{2}} = \frac{V_{bE2}}{2} \rightarrow V_{bE2\frac{1}{2}} = \frac{20}{2} \quad \text{et} \quad V_{bE2\frac{1}{2}} = 10 \text{ mL}$$

$$\xrightarrow[\text{graphiquement}]{V_b=10 \text{ mL}} \text{pH}_{E2\frac{1}{2}} = 3,8$$

$$d - \text{A la demi équivalence, } \text{pH}_{E\frac{1}{2}} = \text{pK}_a \longrightarrow \text{pK}_a = 3,8.$$

4⁰) a - A l'équivalence, tout l'acide A_2H se transforme en sa base conjuguée A_2^- .

On obtient alors une solution de base faible de concentration

$$C = [A_2^-]_E = \frac{n(A_2^-)_E}{V_E} = \frac{n(A_2H)_{\text{initial}}}{V_E} = \frac{C_{a2} \cdot V_{a2}}{V_{a2} + V_{bE2}}.$$

$$\text{Le pH a l'équivalence sera alors : } \text{pH}_{E2} = 7 + \frac{\text{pK}_a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{C_{a2} \cdot V_{a2}}{V_{a2} + V_{bE2}}\right)$$

$$b - \text{pH}_{E2} = 7 + \frac{\text{pK}_a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{C_{a2} \cdot V_{a2}}{V_{a2} + V_{bE2}}\right) \rightarrow \text{pK}_a = 2 \cdot \text{pH}_{E2} - 14 - \log\left(\frac{C_{a2} \cdot V_{a2}}{V_{a2} + V_{bE2}}\right)$$

$$A.N : \text{pK}_a = 2 \cdot 8,25 - 14 - \log\left(\frac{10^{-1} \cdot 20}{20 + 20}\right) \quad \text{et} \quad \text{pK}_a = 3,8$$

5⁰) L'indicateur coloré le plus approprié à chaque dosage est celui dont la zone de virage contient la valeur du pH à l'équivalence.

- Pour le dosage de (S_1), $\text{pH}_{E1} = 7$, on utilise comme indicateur coloré le bleu de bromothymol.

- Pour le dosage de (S_2), $\text{pH}_{E2} = 8,25$, on utilise comme indicateur coloré la Phénol-phtaleine.

Exercice 8 :

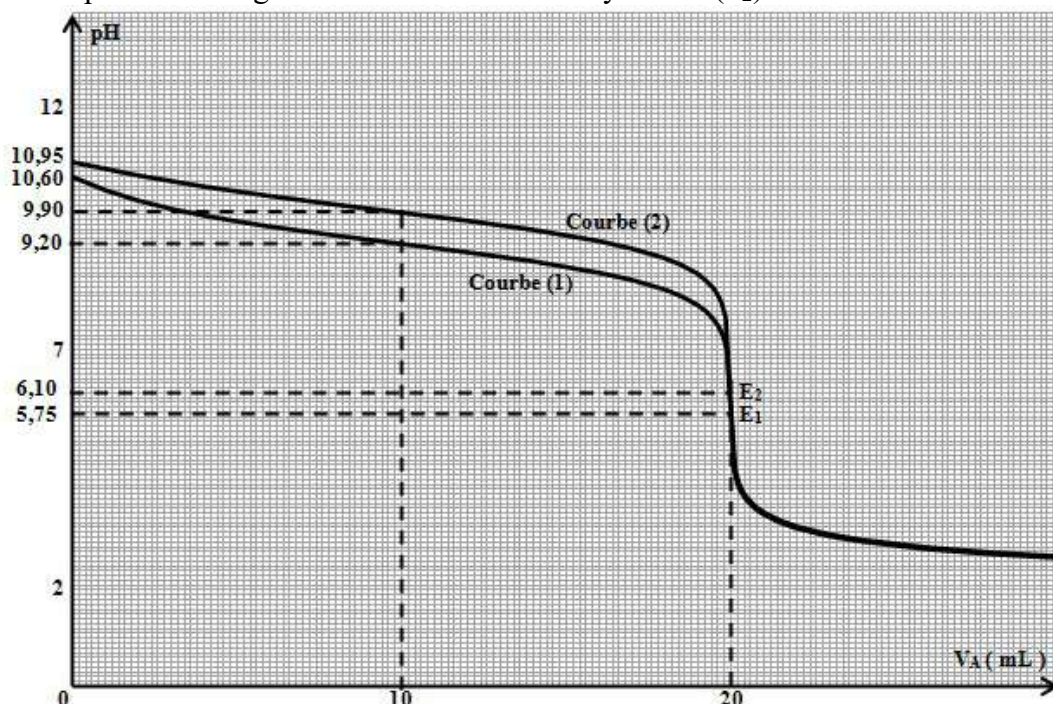
Un groupe de trois élèves est chargé d'effectuer le dosage pH-métrique d'un même volume $V_B = 20 \text{ mL}$:

- d'une solution aqueuse (S_1) d'ammoniac NH_3 de concentration molaire $C_{B1} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

- d'une solution aqueuse (S_2) de triméthylamine $(CH_3)_3N$ de concentration molaire $C_{B2} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Pour ces deux dosages, on utilise une solution d'acide chlorhydrique HCl (acide fort) de concentration molaire $C_A = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Sur la figure ci-dessous, la courbe (1) correspond au dosage de la solution d'ammoniac (S_1) alors que la courbe (2) correspond au dosage de la solution de triméthylamine (S_2) :



1⁰) En exploitant les courbes (1) et (2) :

a - Justifier que les deux bases utilisées NH_3 et $(\text{CH}_3)_3\text{N}$ sont faibles.

b - Déterminer alors graphiquement la valeur de pK_{a1} du couple $(\text{NH}_4^+/\text{NH}_3)$ et celle de pK_{a2} du couple $((\text{CH}_3)_3\text{NH}^+/(\text{CH}_3)_3\text{N})$.

2⁰) Pour le dosage de la solution (S_1) :

a - Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu au cours du dosage.

b - Justifier le caractère (acide ou basique) de la solution obtenue à l'équivalence. Retrouver alors par le calcul la valeur du pH au point d'équivalence.

3⁰) Dans le but de classer les deux bases étudiées par force croissante, chacun des trois élèves a exploité différemment les deux courbes de dosage (1) et (2) :

- Le premier a comparé les valeurs des pH initiaux des deux solutions (S_1) et (S_2).

- Le deuxième a comparé les valeurs des pH à la demi-équivalence.

- Le troisième a comparé les valeurs des pH à l'équivalence.

En justifiant la démarche utilisée, donner la classification obtenue par chaque élève.

4⁰) A un volume $V_B = 20 \text{ mL}$ de la solution (S_2), on ajoute un volume $V_e = 40 \text{ mL}$ d'eau pure. On dose la solution obtenue par la même solution d'acide chlorhydrique. Calculer la valeur du pH à l'équivalence.

Réponse :

1⁰) a - * Chacune des courbes (1) et (2) admet deux points d'inflexion. Donc les deux bases utilisées sont faibles.

Ou bien : * Pour une base forte de concentration molaire $C_B = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$, $\text{pH} = 14 + \log C_B = 12$.

Les pH initiaux des solutions (S_1) et (S_2) sont inférieurs à 12. Donc les deux bases utilisées sont faibles.

Ou bien : * Les pH à l'équivalence pH_{E1} et pH_{E2} sont inférieurs à 7. Donc les deux bases utilisées sont faibles.

b - Graphiquement on a : $\text{pK}_{a1} = 9,20$ et $\text{pK}_{a2} = 9,90$.

2⁰) a -
$$\text{NH}_3 + (\text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-) \longrightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{NH}_4^+ + \text{Cl}^-$$

b - A l'équivalence, on obtient une solution de sel $(\text{NH}_4^+ + \text{Cl}^-)$. L'ion Cl^- est indifférent, il ne réagit pas avec l'eau. L'ion NH_4^+ est l'acide conjugué de la base faible NH_3 , c'est donc un acide faible et il réagit avec l'eau : $\text{NH}_4^+ + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{NH}_3 + \text{H}_3\text{O}^+$. La solution obtenue à l'équivalence a donc un caractère acide et $\text{pH}_{E1} < 7$.

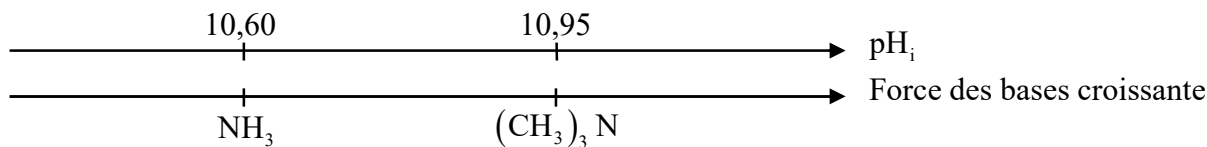
A l'équivalence :

$$n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{ajouté}} = n(\text{NH}_3)_{\text{initial}} \rightarrow C_A \cdot V_{AE} = C_{B1} \cdot V_B \xrightarrow{C_A = C_{B1}} V_{AE} = V_B \text{ et } V_{AE} = 20 \text{ mL}.$$

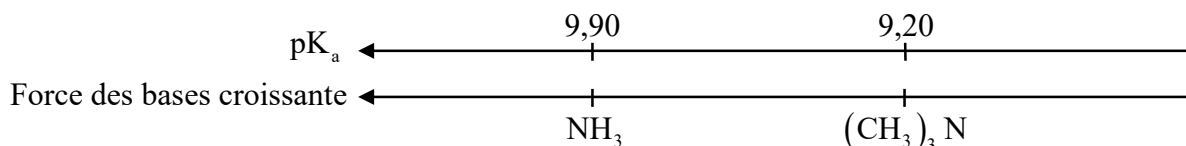
$$\text{Or : } n(\text{NH}_4^+)_{\text{formé}} = n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{ajouté}} = C_A \cdot V_{AE} \rightarrow C(\text{NH}_4^+) = \frac{C_A \cdot V_{AE}}{V_B + V_{AE}} \text{ et } \text{pH}_{E1} = \frac{1}{2} \text{pK}_{a1} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{C_A \cdot V_{AE}}{V_B + V_{AE}} \right).$$

$$\text{A.N : } \text{pH}_{E1} = \frac{1}{2} \cdot 9,20 - \frac{1}{2} \cdot \log \left(\frac{10^{-2} \cdot 20}{20 + 20} \right) \text{ et } \text{pH}_{E1} = 5,75.$$

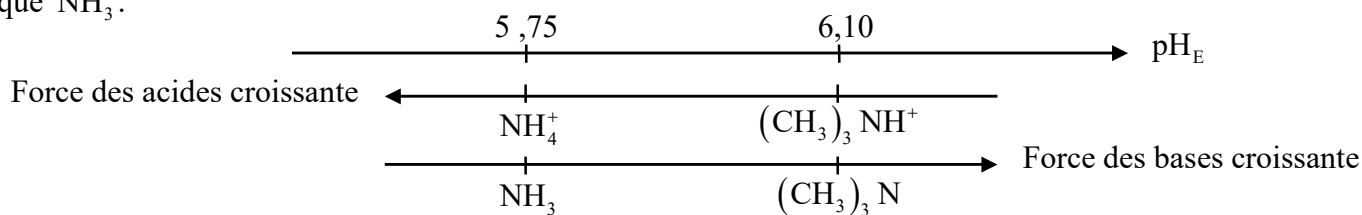
3⁰) * 1^{er} élève : A même concentration, une base est d'autant plus forte que le pH de sa solution aqueuse est plus grand. $C_{B1} = C_{B2}$ et $\text{pH}_i(\text{S}_1) < \text{pH}_i(\text{S}_2)$ donc la base $(\text{CH}_3)_3\text{N}$ est plus forte que NH_3 .



* 2^{eme} élève : Une base est d'autant plus forte que le pK_a du couple correspondant est plus grand.



* **3^{ème} élève** : Une base est d'autant plus forte que son acide conjugué est plus faible. A même concentration, un acide est d'autant plus fort que le pH de sa solution aqueuse est plus petit. Pour le même volume de base V_B et à l'équivalence : $C(NH_4^+)_E = C((CH_3)_3NH^+)_E$ et $pH_{E1} < pH_{E2}$ donc la base $(CH_3)_3N$ est plus forte que NH_3 .



4⁰) Dilution de la solution (S_2) : $C'_{B2} = \frac{C_{B2} \cdot V_B}{V_B + V_e}$. A l'équivalence on aura :

$$n(H_3O^+)_{ajouté} = n((CH_3)_3N)_{initial} \rightarrow C_A \cdot V_{AE} = C'_{B2} \cdot (V_B + V_e) = C_{B2} \cdot V_B \xrightarrow{C_A = C_{B2}} V_{AE} = V_B \text{ et } V_{AE} = 20 \text{ mL}$$

$$n((CH_3)_3NH^+)_{formé} = n(H_3O^+)_{ajouté} = C_A \cdot V_{AE} \rightarrow C((CH_3)_3NH^+)_E = \frac{C_A \cdot V_{AE}}{V_B + V_{AE} + V_e}$$

$$\text{et } pH'_{E2} = \frac{1}{2} pK_{a2} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{C_A \cdot V_{AE}}{V_B + V_{AE} + V_e} \right) \quad \text{A.N : } pH'_{E2} = \frac{1}{2} \cdot 9,90 - \frac{1}{2} \log \left(\frac{10^{-2} \cdot 20}{20 + 20 + 40} \right) \text{ et } pH'_{E2} = 6,25.$$

Exercice 9 :

Au cours du dosage pH-métrique d'un volume $V_A = 20 \text{ mL}$ d'une solution aqueuse d'un monoacide faible AH de concentration molaire $C_A = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium NaOH (base forte) de même concentration molaire $C_B = C_A$, on obtient les mesures suivantes :

$V_B \text{ (mL)}$	6	8	10	12	14
pH	3,80	4,00	4,20	4,40	4,60

1⁰) a - Définir l'équivalence acide-base.

b - Déterminer le volume de base V_{BE} nécessaire pour atteindre l'équivalence.

2⁰) Avant l'équivalence et pour un volume V_B de base ajoutée, on a :

$$[A^-] = \frac{C_B \cdot V_B}{V_A + V_B} + [H_3O^+] - [OH^-] \text{ et } [AH] = \frac{C_A \cdot V_A - C_B \cdot V_B}{V_A + V_B} - [H_3O^+] + [OH^-]$$

a - Donner l'expression du rapport $\frac{[A^-]}{[AH]}$ en fonction de V_A et V_B dans le cas où on néglige les molarités

$[H_3O^+]$ et $[OH^-]$ devant les autres concentrations molaires.

b - Donner l'expression de la constante d'acidité K_a du couple (AH/A^-) . En déduire alors l'expression :

$$pH = pK_a + \log \frac{V_B}{V_A - V_B}.$$

3⁰) a - Déterminer le volume V_B pour lequel on a $pH = pK_a$.

b - En exploitant le tableau de mesures, donner la valeur de pK_a .

c - Citer le nom et les propriétés de la solution ainsi obtenue.

Réponse :

1⁰) a - A l'équivalence : $n(OH^-)_{ajouté} = n(H_3O^+)_{\text{susceptible d'être libéré}}$.

b - $C_A \cdot V_A = C_B \cdot V_{BE} \xrightarrow{C_A = C_B} V_{BE} = V_A \text{ et } V_{BE} = 20 \text{ mL}.$

$$2^0) a - \frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{\frac{C_B \cdot V_B}{V_A + V_B} + [H_3O^+] - [OH^-]}{\frac{C_A \cdot V_A - C_B \cdot V_B}{V_A + V_B} - [H_3O^+] + [OH^-]} \xrightarrow[\text{devant les autres concentrations}]{\text{on néglige } [H_3O^+] \text{ et } [OH^-]} \frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{\frac{C_B \cdot V_B}{V_A + V_B}}{\frac{C_A \cdot V_A - C_B \cdot V_B}{V_A + V_B}}$$

On a : $C_A = C_B \rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{V_B}{V_A - V_B}$.

b - $K_a = \frac{[H_3O^+] \cdot [A^-]}{[AH]}$.

$\rightarrow [H_3O^+] = K_a \cdot \frac{[AH]}{[A^-]} \rightarrow pH = pK_a + \log \frac{[A^-]}{[AH]}$ et $pH = pK_a + \log \frac{V_B}{V_A - V_B}$.

3⁰) a - $pH = pK_a \rightarrow V_B = V_A - V_B \rightarrow 2V_B = V_A$ et $V_B = \frac{V_A}{2}$. A.N: $V_B = \frac{20}{2}$ et $V_B = 10 \text{ mL}$.

b - D'après le tableau : pour $V_B = 10 \text{ mL}$, $pH = 4,20$ donc : $pK_a = 4,20$.

c - On obtient une solution tampon $\left(V_B = \frac{V_{BE}}{2} = V_{BE_{\frac{1}{2}}} \right)$.

La solution tampon obtenue est caractérisée par :

* $pH = pK_a$

* son pH varie peu :

- par addition de petites quantités d'acide ou de base.
- par dilution modérée.

Exercice 10 :

On prélève un volume $V_0 = 5 \text{ mL}$ d'une solution commerciale (S) d'acide chlorhydrique HCl sur lequel on ajoute de l'eau distillée jusqu'à obtenir un volume $V = 80 \text{ mL}$ d'une solution (S_a) d'acide chlorhydrique. Cette solution acide (S_a) est utilisée pour effectuer un dosage pH-métrique d'une solution basique (S_b) de phénolate de sodium C_6H_5ONa de concentration molaire C_b inconnue.

A un volume $V_b = 12,5 \text{ mL}$ de la solution (S_b) on ajoute différents volumes V_a de la solution (S_a) et on mesure chaque fois le pH du mélange. Les résultats des mesures ont permis de tracer la courbe $pH = f(V_a)$ ci-dessous :

1⁰) a - Justifier, d'après l'allure de la courbe de dosage, que l'ion phénolate $C_6H_5O^-$ est une base faible.

b - Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu au cours du dosage.

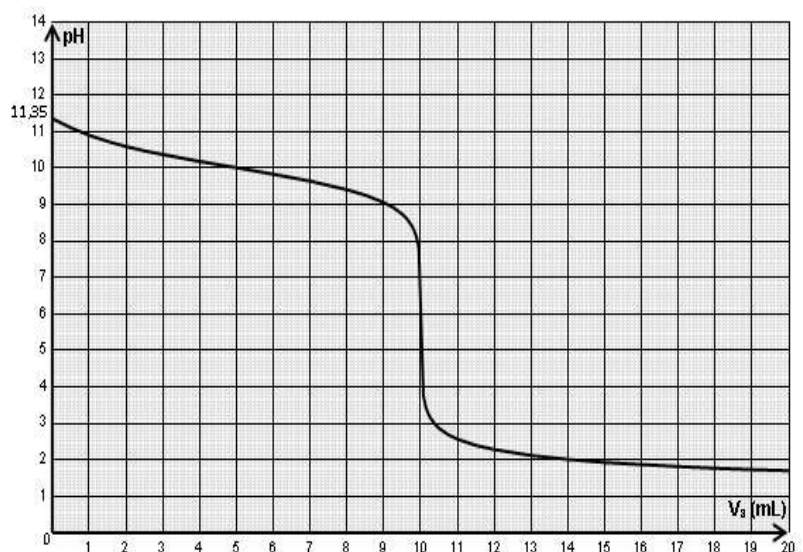
2⁰) a - Soit V_{aE} le volume de la solution (S_a) ajouté à l'équivalence. Donner l'expression de V_{aE} en fonction de C_a , C_b et V_b . Préciser, graphiquement, sa valeur.

b - A la demi-équivalence : $V_{aE_{\frac{1}{2}}} = \frac{V_{aE}}{2}$

Préciser, graphiquement, la valeur de $pH_{E_{\frac{1}{2}}}$.

3⁰) a - Donner l'expression de la constante d'acidité K_a du couple $(C_6H_5OH/C_6H_5O^-)$.

b - Montrer, qu'avant l'équivalence, on a : $\frac{[C_6H_5O^-]}{[C_6H_5OH]} = \frac{C_b \cdot V_b}{C_a \cdot V_a} - 1$. En déduire que : $pH = pK_a + \log \left(\frac{V_{aE}}{V_a} - 1 \right)$



c - Déterminer le volume V_a pour lequel on a : $\text{pH} = \text{pK}_a$. Préciser alors la valeur de pK_a .

4⁰) a - Le pH de la solution (S_b) s'écrit : $\text{pH}_b = 7 + \frac{1}{2} \text{pK}_a + \frac{1}{2} \log C_b$. Calculer la valeur de C_b .

b - Déterminer la concentration molaire C_a de la solution (S_a).

c - En déduire alors la concentration molaire C de la solution commerciale (S) d'acide chlorhydrique.

5⁰) a - Justifier qu'à l'équivalence, on a : $\text{pH}_E = \frac{1}{2} \text{pK}_a - \frac{1}{2} \log \frac{C_b \cdot V_b}{V_b + V_{aE}}$.

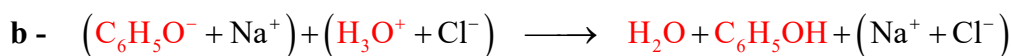
b - Calculer la valeur de pH_E .

c - Parmi les indicateurs colorés cités dans le tableau ci-contre, préciser celui qui est le plus adapté pour repérer l'état d'équivalence au cours de ce dosage.

Indicateur coloré	Zone de virage
Hélianthine	3.1 - 4.4
Rouge de méthyle	4.2 - 6.2
Bleu de bromothymol	6.0 - 7.6

Réponse :

1⁰) a - La courbe $\text{pH} = f(V_a)$ admet deux points d'inflexion donc elle correspond au dosage d'une base faible par un acide fort et par conséquent l'ion phénolate $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-$ est une base faible.



2⁰) a - A l'équivalence : $n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{ajouté}} = n(\text{OH}^-)_{\text{capable d'être formé}}$

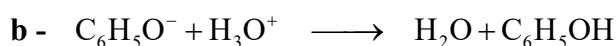
$$\rightarrow C_a \cdot V_{aE} = C_b \cdot V_b \quad \text{et} \quad V_{aE} = \frac{C_b \cdot V_b}{C_a}$$

Graphiquement : $V_{aE} = 10 \text{ mL}$ (correspondant au saut du pH)

Remarque : V_{aE} est l'abscisse du point d'équivalence déterminé graphiquement par la méthode des tangentes appliquée à la courbe $\text{pH} = f(V_a)$.

b - A la demi-équivalence : $V_{aE\frac{1}{2}} = \frac{V_{aE}}{2} \xrightarrow{V_{aE}=10\text{mL}} V_{aE\frac{1}{2}} = 5 \text{ mL}$

$$3^0) \text{ a - } K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}]}$$



La réaction de dosage étant quasitotale, $n(\text{C}_6\text{H}_5\text{OH})_{\text{formé}} = n(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{ajouté}} \rightarrow n(\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}) = C_a \cdot V_a$

$$n(\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-)_{\text{restant}} = n(\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-)_{\text{initial}} - n(\text{C}_6\text{H}_5\text{OH})_{\text{formé}} \rightarrow n(\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-) = C_b \cdot V_b - C_a \cdot V_a$$

Il vient alors que :

$$\frac{[\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}]} = \frac{\frac{n(\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-)}{V_T}}{\frac{n(\text{C}_6\text{H}_5\text{OH})}{V_T}} = \frac{n(\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-)}{n(\text{C}_6\text{H}_5\text{OH})} \rightarrow \frac{[\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}]} = \frac{C_b \cdot V_b - C_a \cdot V_a}{C_a \cdot V_a} \quad \text{et} \quad \frac{[\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}]} = \frac{C_b \cdot V_b}{C_a \cdot V_a} - 1$$

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}]} \rightarrow -\log K_a = -\log [\text{H}_3\text{O}^+] - \log \frac{[\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}]}$$

$$\xrightarrow{\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]} \text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}]} \xrightarrow{\frac{[\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}]} = \frac{C_b \cdot V_b}{C_a \cdot V_a} - 1} \text{pH} = \text{pK}_a + \log \left(\frac{V_{aE}}{V_a} - 1 \right)$$

$$\text{c - } \text{pH} = \text{pK}_a \xrightarrow{\log \left(\frac{V_{aE}}{V_a} - 1 \right) = 0} \frac{V_{aE}}{V_a} - 1 = 1 \rightarrow \frac{V_{aE}}{V_a} = 2 \quad \text{et} \quad V_a = \frac{V_{aE}}{2} \quad \left(V_a = V_{aE\frac{1}{2}} \right)$$

A.N : $V_a = 5 \text{ mL}$.

Graphiquement : $\text{pK}_a = 10$ (pH au point de demi-équivalence).

4⁰) a - Graphiquement, le pH de la solution (S_b) est égal à $\text{pH}(V_a = 0) \rightarrow \text{pH}_b = 11,35$.

On a : $\text{pH}_b = 7 + \frac{1}{2}\text{pK}_a + \frac{1}{2}\log C_b \rightarrow \log C_b = 2.\text{pH}_b - \text{pK}_a - 14$ et $C_b = 10^{2.\text{pH}_b - \text{pK}_a - 14}$

A.N : $C_b = 10^{(2.11,35) - 14} = 5.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - On a : $C_a.V_{aE} = C_b.V_b \rightarrow C_a = \frac{C_b.V_b}{V_{aE}}$.

A.N : $C_a = \frac{5.10^{-2}.12,5}{10}$ et $C_a = 6,25.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

c - La solution (S_a) est obtenue par dilution de la solution commerciale (S) de concentration C.

On a : $C_a = \frac{C.V_0}{V} \rightarrow C = C_a \cdot \frac{V}{V_0}$. A.N : $C = 6,25.10^{-2} \cdot \frac{80}{5}$ et $C = 1 \text{ mol.L}^{-1}$.

5⁰) a - A l'équivalence, toute la base s'est transformée en son acide conjugué.

L'ion phénolate $C_6H_5O^-$ étant une base faible, son acide conjugué, le phénol C_6H_5OH , est aussi faible.

On obtient donc à l'équivalence une solution d'acide faible de concentration molaire :

$$C_E = \frac{n_E(C_6H_5OH)}{V_{\text{total}}} \xrightarrow[n_E(C_6H_5OH) = n_i(C_6H_5O^-)]{V_{\text{total}} = V_b + V_{aE}} C_E = \frac{C_b.V_b}{V_b + V_{aE}}$$

Le pH d'une solution d'acide faible s'exprime par $\text{pH}_E = \frac{1}{2}\text{pK}_a - \frac{1}{2}\log C_E \rightarrow \text{pH}_E = \frac{1}{2}\text{pK}_a - \frac{1}{2}\log \frac{C_b.V_b}{V_b + V_{aE}}$.

b - A.N : $\text{pH}_E = \frac{1}{2}.10 - \frac{1}{2}\log \frac{5.10^{-2}.12,5}{12,5 + 10}$ et $\text{pH}_E = 5,78$.

c - L'indicateur coloré le plus adapté pour repérer l'état d'équivalence au cours de ce dosage est celui dont la zone de virage contient la valeur du pH à l'équivalence.

On utilise par conséquent le rouge de méthyle car $\text{pH}_E \in [(4,2), (6,2)]$.

LES PILES ÉLECTROCHIMIQUES

I / La pile Daniell :

1⁰) Constitution de la pile :

La pile Daniell comprend deux compartiments :

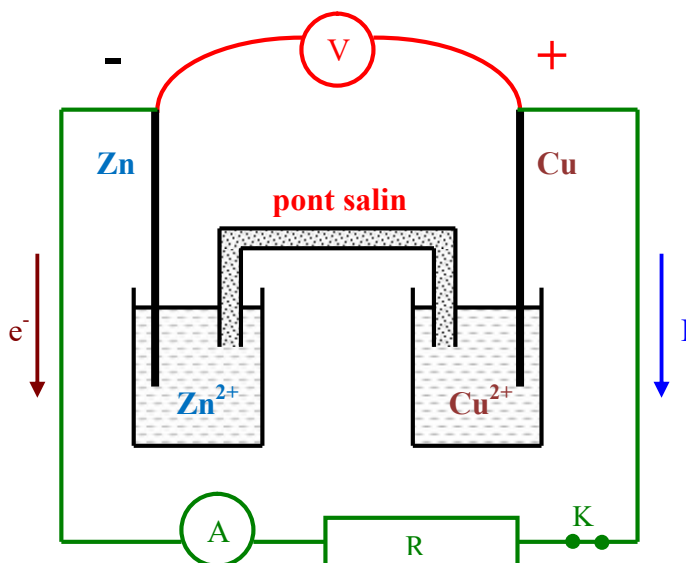
- Une lame de cuivre Cu plongeant dans une solution de sulfate de cuivre CuSO_4 .
- Une lame de zinc Zn plongeant dans une solution de sulfate de zinc ZnSO_4 .

Les deux compartiments sont reliés par un pont électrolytique de KCl ou de KNO_3 (pont salin).

2⁰) Fonctionnement :

Lorsque la pile fonctionne :

- L'électrode de Zn est le pôle négatif (-).
- L'électrode de Cu est le pôle positif (+).



Si les solutions de CuSO_4 et ZnSO_4 sont molaires (1 mol.L^{-1}), la pile maintient entre ses bornes une force électromotrice (f é m) $E = 1,08 \text{ V}$ à 25°C .

La pile débite dans un circuit électrique un courant circulant de la lame de **Cu** vers la lame de **Zn**.

3⁰) Interprétation :

a - Demi-réactions aux électrodes :

- Au pôle (+) :



L'électrode en Cu est alors appelée **cathode**.

Le couple redox $\left(\text{Cu}^{2+} / \text{Cu} \right)$ est le couple **oxydant**.

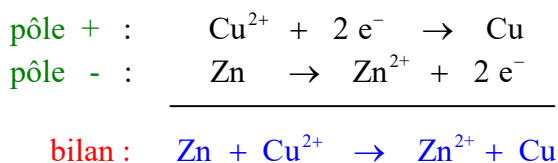
- Au pôle (-) :



L'électrode en Zn est alors appelée **anode**.

Le couple redox $\left(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn} \right)$ est le couple **réducteur**.

b - Equation-bilan de la réaction :

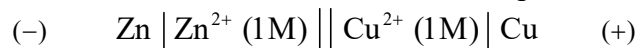


Cette réaction est **spontanée** et **exothermique**.

La pile Daniell permet de récupérer l'énergie de la réaction sous forme électrique.

4⁰) Notation conventionnelle :

Conventionnellement, on symbolise, dans les conditions standards, la pile Daniell par :



Les deux traits pleins entre les deux compartiments représentent le pont électrolytique.

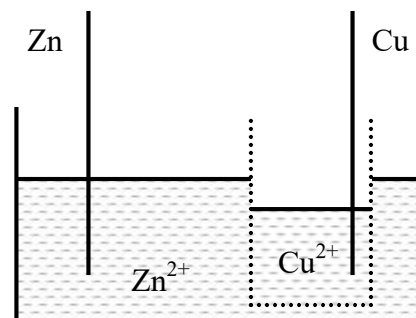
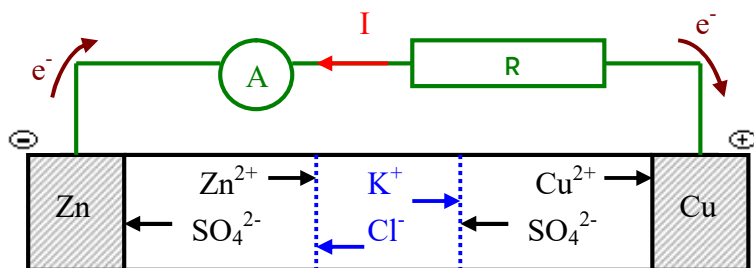
Remarques :

* Chaque compartiment de la pile constitue une **semi-pile**.

* Les deux traits pleins renvoient au rôle du pont salin : il permet la jonction entre les deux compartiments de la pile électrochimique.

5⁰) Rôle du pont électrolytique :

Le pont électrolytique (ou pont salin) assure la conductibilité électrique ionique au niveau des solutions électrolytiques ; on peut le remplacer par une séparation en paroi poreuse (terre cuite).



Remarque :

Le pont électrolytique assure :

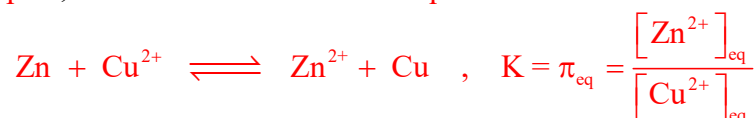
- la fermeture du circuit électrique comportant la pile.
- la neutralité électrique des solutions dans les deux compartiments de la pile.

6⁰) Evolution vers l'état d'équilibre :

Lorsque la pile **débite**, la réaction **spontanée** est :



Lorsque la pile **ne débite plus**, la réaction atteint **l'état d'équilibre** :



Lorsque la pile débite, la réaction électrochimique correspondante évolue vers son état d'équilibre.

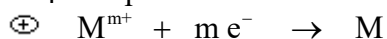
II / Généralisation :

1⁰) Principe de constitution :

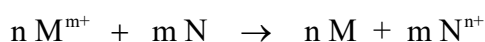
Une pile électrochimique est généralement constituée de deux demi-piles. Chaque demi-pile contient un couple redox.

Le couple redox dont la forme réduite joue le rôle de pôle négatif a un pouvoir réducteur supérieur à celui du couple dont la forme réduite joue le rôle de pôle positif.

Lorsque la pile débite :

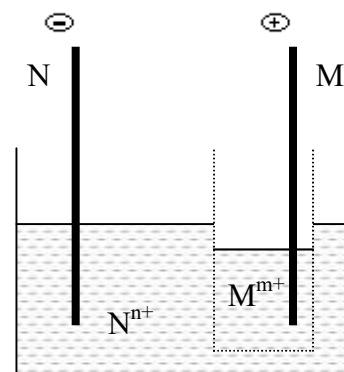
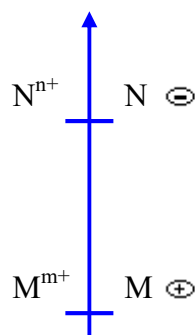


La réaction électrochimique **spontanée** est :



La f é m de la pile est alors : $E = V_M - V_N > 0$

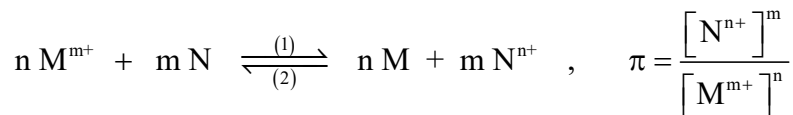
Pouvoir réducteur



2⁰) Généralisation :

Soit la pile électrochimique : **gauche** $N | N^{n+} || M^{m+} | M$ **droite**

La réaction associée à cette pile est :



La f é m de la pile est définie par :

$$E = V_{\text{droite}} - V_{\text{gauche}}$$

E est une grandeur algébrique :

- si $E > 0$, la réaction directe (sens 1) est spontanée et $\pi < K$
- si $E < 0$, la réaction inverse (sens 2) est spontanée et $\pi > K$
- si $E = 0$, un équilibre chimique s'établit et $\pi = K$

Exemples :

* Considérons la pile : $Zn | Zn^{2+} (1M) || Pb^{2+} (1M) | Pb$, $E = V_{Pb} - V_{Zn} = 0,61 \text{ V}$

La réaction associée à la pile est : $Zn + Pb^{2+} \xrightleftharpoons[(2)]{(1)} Zn^{2+} + Pb$

$E > 0$ donc la réaction spontanée est dans le sens direct (sens 1) : $Zn + Pb^{2+} \longrightarrow Zn^{2+} + Pb$

* Considérons la pile : $Cu | Cu^{2+} (1M) || Pb^{2+} (1M) | Pb$, $E = V_{Pb} - V_{Cu} = -0,47 \text{ V}$

La réaction associée à la pile est : $Cu + Pb^{2+} \xrightleftharpoons[(2)]{(1)} Cu^{2+} + Pb$

$E < 0$ donc la réaction spontanée est dans le sens inverse (sens 2) : $Cu^{2+} + Pb \longrightarrow Cu + Pb^{2+}$

Application 1 :

On considère la pile électrochimique représentée par le schéma suivant :

1⁰) Quel sont les couples rédox qui interviennent dans cette pile ?

2⁰) Donner le symbole de cette pile.

3⁰) Ecrire l'équation de la réaction rédox associée à cette pile.

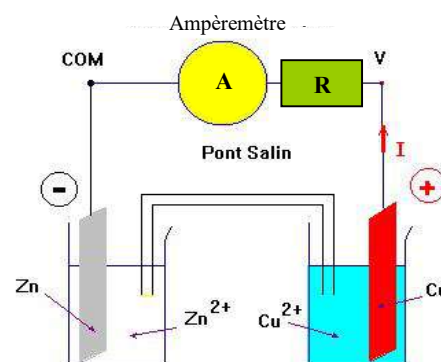
4⁰) D'après la polarité de la pile et lorsque la pile débite :

a - Quel est le signe de la f é m E de la pile ?

b - Quels sont les transformations chimiques ayant lieu aux électrodes ?

c - Ecrire l'équation de la réaction spontanée qui s'effectue dans la pile.

5⁰) Que se passe-t-il si on enlève le pont salin ?



Réponse :

1⁰) Les couples mis en jeu sont (Zn^{2+}/Zn) et (Cu^{2+}/Cu)

2⁰) Le symbole de la pile est : $(-) Zn | Zn^{2+} (1M) || Cu^{2+} (1M) | Cu (+)$

3⁰) La réaction associée à la pile : $Zn + Cu^{2+} \rightleftharpoons Zn^{2+} + Cu$

4⁰) a - $E = V_D - V_G > 0$

b - pôle positif : $Cu^{2+} + 2 e^- \rightarrow Cu$ réduction

pôle négatif : $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2 e^-$ oxydation

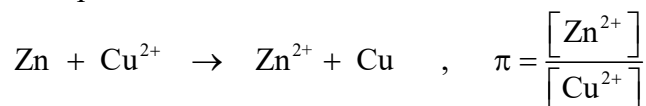
c - La réaction spontanée : $Zn + Cu^{2+} \rightarrow Zn^{2+} + Cu$

5⁰) Si on enlève le pont salin, la pile ne peut plus fonctionner.

III / Variation de la f é m d'une pile en fonction des concentrations :

1⁰) F é m standard d'une pile :

Pour une pile Daniell , la réaction spontanée est :



On remarque qu'à une température donnée, lorsque la pile débite :

- sa f é m E diminue.
- le rapport $\frac{[Zn^{2+}]}{[Cu^{2+}]}$ augmente .

Pour comparer deux piles électrochimiques , on utilise les **conditions standards** suivantes :

- Conditions opératoires : $\theta = 25^{\circ}C$ et $P = 1 \text{ atm}$.
- Concentrations molaires : 1 mol.L^{-1} .

La f é m ainsi mesurée est notée **E^0** et appelée **f é m standard** de la pile électrochimique.

Remarques :

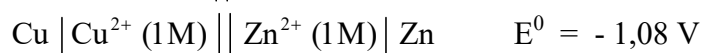
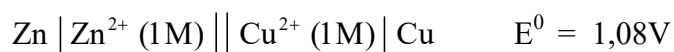
* E^0 ne dépend que la température et de la nature des métaux.

Exemples :



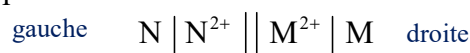
* Le signe de E^0 indique le sens spontané de la réaction dans une pile à l'état standard.

Exemples :



2⁰) Equation de Nernst :

Soit une pile électrochimique du type Daniell :



La réaction associée à cette pile est : $N + M^{2+} \rightleftharpoons N^{2+} + M$, $\pi = \frac{[N^{2+}]}{[M^{2+}]}$

A $25^{\circ}C$, la f é m de la pile est donnée par :

$$E = E^0 - 0,03 \log \pi \quad \text{avec} \quad \pi = \frac{[N^{2+}]}{[M^{2+}]}$$

Lorsque la pile ne débite plus :

$$E = 0 \rightarrow \text{on atteint un état d'équilibre} \Rightarrow \frac{[N^{2+}]_{eq}}{[M^{2+}]_{eq}} = K$$

donc : $E^0 = 0,03 \log K$, il vient alors que : **$K = 10^{\frac{E^0}{0,03}}$**

Exemple :

$$\text{Pour la pile Daniell : } E = E^0 - 0,03 \log \frac{[Zn^{2+}]}{[Cu^{2+}]}$$

Lorsque la pile ne débite plus : $Zn + Cu^{2+} \rightleftharpoons Zn^{2+} + Cu$, $K = \pi_{eq} = \frac{[Zn^{2+}]_{eq}}{[Cu^{2+}]_{eq}}$

$$E = 0 \quad \text{et} \quad \frac{[Zn^{2+}]_{eq}}{[Cu^{2+}]_{eq}} = K \rightarrow E^0 - 0,03 \log K = 0 \rightarrow K = 10^{\frac{E^0}{0,03}} . \text{ A.N : } K = 10^{\frac{1,08}{0,03}} \text{ et } K = 4,67.10^{36}$$

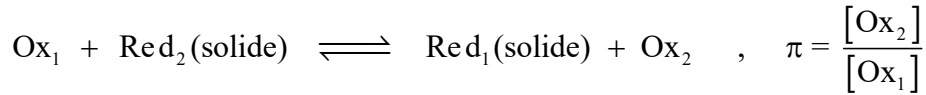
K est très grand donc, à l'équilibre, presque tous les ions Cu^{2+} sont réduits en Cu.

3⁰) Généralisation :

Soient deux couples redox $\left(\text{Ox}_1/\text{Red}_1\right)$ et $\left(\text{Ox}_2/\text{Red}_2\right)$ mettant en jeu le même nombre d'électrons n .

On constitue une pile électrochimique avec le couple $\left(\text{Ox}_1/\text{Red}_1\right)$ à droite et le couple $\left(\text{Ox}_2/\text{Red}_2\right)$ à gauche.

L'équation de la réaction associée à la pile correspondante est :

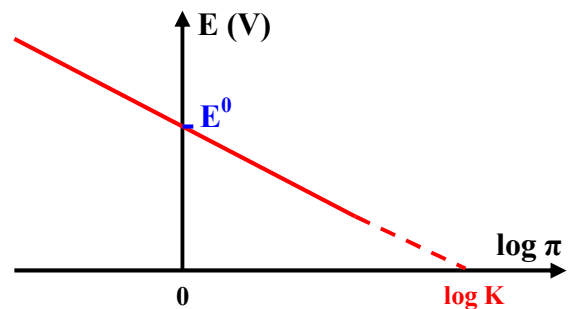


La f.é.m de la pile est : $E = E^0 - \frac{0,06}{n} \log \pi$

Lorsque la pile ne débite plus, $E = 0$ et $\pi = K$

$$\rightarrow E^0 = \frac{0,06}{n} \log K$$

$$\text{et } K = 10^{\frac{nE^0}{0,06}}$$



Application 2 :

On réalise la pile électrochimique : $\text{Sn} | \text{Sn}^{2+} (0,1\text{M}) || \text{Ni}^{2+} (1\text{M}) | \text{Ni}$

La f.é.m standard de cette pile est $E^0 = 0,01 \text{ V}$.

Les deux compartiments de la pile ont un même volume.

1⁰) Ecrire l'équation de la réaction associée à cette pile.

2⁰) a - Calculer la f.é.m initiale E de la pile. En déduire sa polarité.

b - Ecrire alors l'équation de la réaction spontanée qui a lieu lorsque la pile débite.

3⁰) La pile ne débite plus :

a - Déterminer la valeur de la constante d'équilibre K de la réaction associée à la pile.

b - Calculer la valeur initiale π_i de la fonction des concentrations. Comparer π_i et K .

En déduire le sens d'évolution de la réaction depuis l'état initial.

c - Calculer les molarités des ions Sn^{2+} et Ni^{2+} lorsque la pile ne débite plus.

d - Que se passe-t-il si, à l'équilibre, on ajoute de l'eau dans le compartiment gauche ?

Réponse :

1⁰) La réaction associée à la pile est : $\text{Sn} + \text{Ni}^{2+} \rightleftharpoons \text{Sn}^{2+} + \text{Ni}$

2⁰) a - La loi de Nernst s'écrit : $E = E^0 - 0,03 \log \pi$ avec $\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Ni}^{2+}]}$

$$\text{A.N : } E = 0,01 - 0,03 \log \frac{0,1}{1} \text{ et } E = 0,04 \text{ V.}$$

$$E = V_{\text{droite}} - V_{\text{gauche}} > 0 \quad \xrightarrow{V_{\text{droite}} = V_{(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni})}, V_{\text{gauche}} = V_{(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})}} V_{(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni})} > V_{(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})}, \text{ il vient alors que :}$$

- l'électrode en Ni est le pôle positif (+) de la pile.

- l'électrode en Sn est le pôle négatif (-) de la pile.

b - $E > 0$ donc le sens direct de la réaction est spontané : $\text{Sn} + \text{Ni}^{2+} \longrightarrow \text{Sn}^{2+} + \text{Ni}$.

Remarque :

- au pôle (+) : $\text{Ni}^{2+} + 2e^- \longrightarrow \text{Ni}$ (réduction)

- au pôle (-) : $\text{Sn} \longrightarrow \text{Sn}^{2+} + 2e^-$ (oxydation)

la réaction est spontanée sera alors : $\text{Sn} + \text{Ni}^{2+} \longrightarrow \text{Sn}^{2+} + \text{Ni}$.

3⁰) a - La pile ne débite plus $\rightarrow E = 0$ et la réaction atteint son état d'équilibre $\rightarrow \pi_{eq} = K$

On écrit alors : $0 = E^0 - 0,03 \log K \rightarrow K = 10^{\frac{E^0}{0,03}}$. A.N : $K = 10^{\frac{0,01}{0,03}}$ et $K = 2,15$.

$$\mathbf{b} - \pi_i = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_i}{[\text{Ni}^{2+}]_i} \xrightarrow{\text{A.N}} \pi_i = \frac{0,1}{1} \text{ et } \pi_i = 0,1$$

$\pi_i < K$ donc la réaction évolue spontanément dans le sens direct.

c - Les deux compartiments ayant le même volume V, on peut utiliser le tableau d'avancement volumique.

Equation de la réaction		$\text{Sn} + \text{Ni}^{2+} \longrightarrow \text{Sn}^{2+} + \text{Ni}$			
Etat du système	avancement volumique (mol.L ⁻¹)	Concentrations molaires (mol.L ⁻¹)			
Etat initial	0	constante	1	0,1	constante
Etat final	y_f	constante	$1 - y_f$	$0,1 + y_f$	constante

$$K = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{eq}}{[\text{Ni}^{2+}]_{eq}} \rightarrow K = \frac{0,1 + y_f}{1 - y_f} \longrightarrow y_f = \frac{1 \cdot K - 0,1}{1 + K}$$

$$\text{A.N : } y_f = \frac{2,15 - 0,1}{1 + 2,15} \text{ et } y_f = 0,65 \text{ mol.L}^{-1}$$

Il vient alors que : $[\text{Sn}^{2+}]_{eq} = 0,1 + 0,65$ et $[\text{Sn}^{2+}]_{eq} = 0,75 \text{ mol.L}^{-1}$.

$$[\text{Ni}^{2+}]_{eq} = 1 - 0,65 \text{ et } [\text{Ni}^{2+}]_{eq} = 0,35 \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{Remarque : } K = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{eq}}{[\text{Ni}^{2+}]_{eq}} \xrightarrow{\text{A.N}} K = \frac{0,75}{0,35} \text{ et } K = 2,14.$$

d - On ajoute de l'eau dans le compartiment gauche $\rightarrow [\text{Ni}^{2+}]$ diminue $\rightarrow \pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{eq}}{[\text{Ni}^{2+}]} > K$

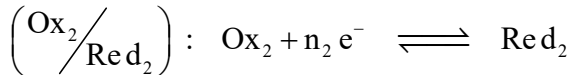
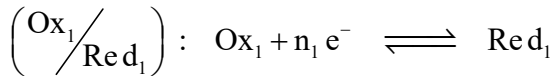
La réaction reprend alors dans le sens inverse et la pile débite de nouveau en changeant de polarité.

Pour en savoir plus

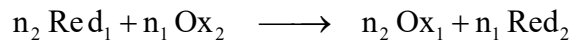
1⁰) Constitution d'une pile électrochimique :

a - La réaction d'oxydoréduction spontanée :

- Considérons deux couples redox :



Soit la réaction d'oxydoréduction spontanée qui met en jeu ces deux couple redox :



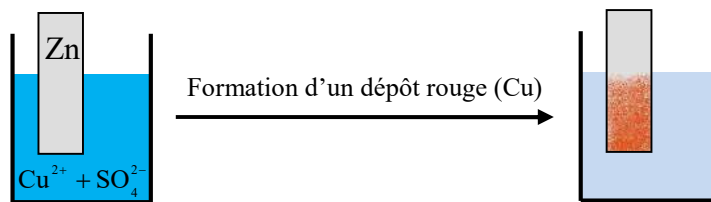
Au cours de cette réaction spontanée :

* le couple $\left(\text{Ox}_1 / \text{Red}_1 \right)$ subit une oxydation : $\text{Red}_1 \longrightarrow \text{Ox}_1 + n_1 e^-$

* le couple $\left(\text{Ox}_2 / \text{Red}_2 \right)$ subit une réduction : $\text{Ox}_2 + n_2 e^- \longrightarrow \text{Red}_2$

Le couple $\left(\text{Ox}_1 / \text{Red}_1 \right)$ a donc un pouvoir réducteur plus grand que celui du couple $\left(\text{Ox}_2 / \text{Red}_2 \right)$.

Exemple : On plonge une lame de zinc dans une solution de sulfate de cuivre :



La réaction spontanée qui a lieu : $\text{Zn} + \text{Cu}^{2+} \longrightarrow \text{Zn}^{2+} + \text{Cu}$.

Le couple $\left(\text{Cu}^{2+} / \text{Cu} \right)$ a un pouvoir oxydant plus grand que celui du couple $\left(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn} \right)$

Remarque : Si on plonge une lame de cuivre dans une solution de sulfate de zinc, rien ne se passe.

- La réaction d'oxydoréduction, exothermique, est une réaction par **transfert d'électrons** entre deux couples redox. L'énergie chimique de la réaction est dissipée par effet thermique dans le bain réactionnel.

b - Principe de constitution d'une pile électrochimique :

- Le principe d'une pile électrochimique est de récupérer l'énergie chimique d'une réaction spontanée d'oxydoréduction sous forme d'énergie électrique. Cette conversion d'énergie est réalisée en détournant le transfert d'électrons qui a lieu au cours d'une réaction d'oxydoréduction à travers un circuit électrique fermé.
- Pour pouvoir débiter un courant électrique dans un circuit extérieur fermé, La pile électrochimique doit comporter deux pôles entre lesquels existe une différence de potentiel.
- Le principe de conservation de la charge électrique dans un système isolé implique qu'à l'un des pôles de la pile il y a production d'électrons (pôle -) et qu'à l'autre il y a consommation d'électrons (pôle +).

c - Constitution d'une pile électrochimique :

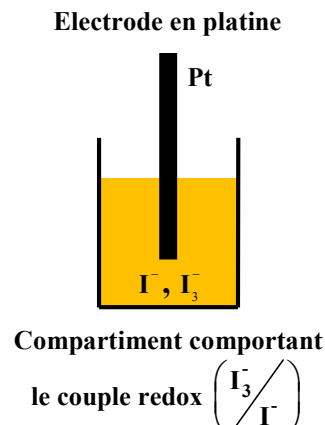
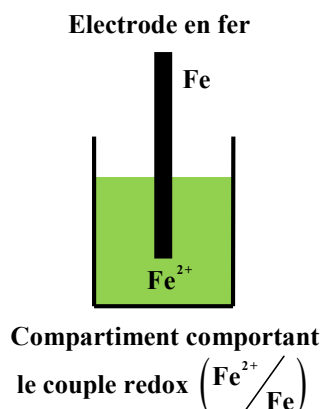
- Une pile électrochimique est constituée par une chaîne électrochimique qui comporte :
 - deux compartiments dont chacun est constitué par un couple redox
 - un pont salin ou une paroi poreuse qui relie les deux compartiments.
- Les deux pôles de la pile sont les électrodes de chacun des deux compartiments de la pile.

Une électrode est constituée par :

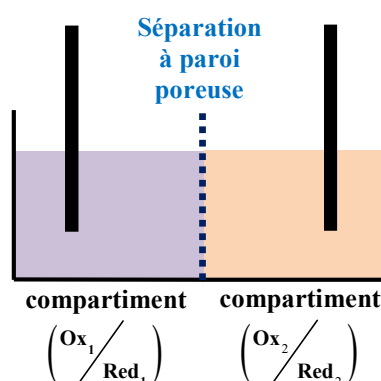
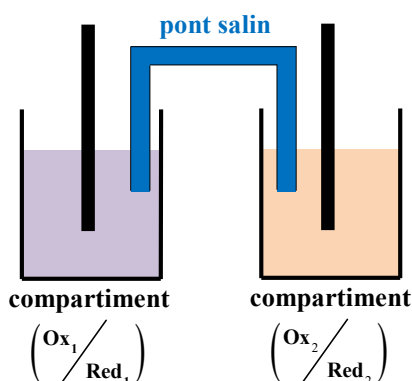
- la forme réduite du couple redox si elle est solide et conductrice, en contact avec la forme oxydée du même couple redox.

- un métal inattaquable (généralement un fil en platine) en contact avec les deux formes oxydée et réduite du couple redox.

Exemples :



- Les deux compartiments de la pile doivent être reliés par un pont salin de KCl (ou de KNO_3) ou par une séparation à paroi poreuse afin de :
 - permettre la fermeture du circuit électrique de la pile.
 - assurer la neutralité électrique dans chacun des compartiments de la pile.



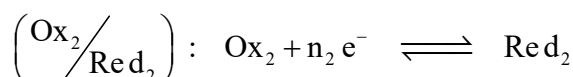
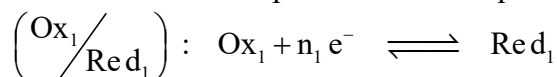
Remarque :

Le pont salin est constitué d'une solution électrolytique concentrée de KCl ou de KNO_3 dans laquelle les ions K^+ et Cl^- (ou NO_3^-) ont pratiquement la même mobilité. Ceci permet de rendre la tension au niveau des jonctions liquide-liquide de part et d'autre du pont salin quasiment nulle.

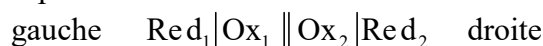
2⁰) La f é m aux bornes d'une pile électrochimique :

a - Application de la loi de Nernst :

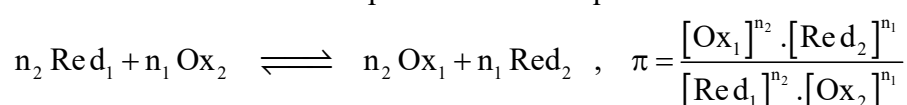
- On constitue une pile électrochimique avec les deux couples redox :



Le symbole de la pile est est :

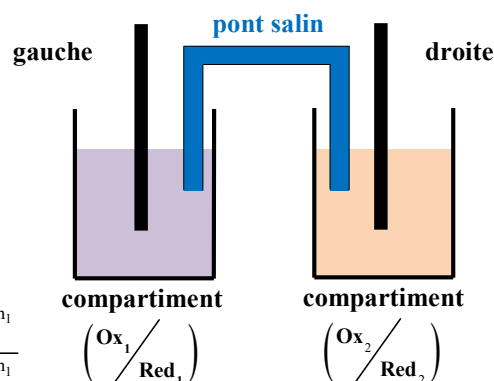


La réaction associée à cette pile électrochimique est :



La f é m $E = V_{\text{droite}} - V_{\text{gauche}}$ de la pile est donnée par la loi de Nernst :

$$E = E^0 - \frac{0,06}{n_1 \cdot n_2} \log \pi \quad \text{avec} \quad \pi = \frac{[\text{Ox}_1]^{n_2} \cdot [\text{Red}_2]^{n_1}}{[\text{Red}_1]^{n_2} \cdot [\text{Ox}_2]^{n_1}}$$



E^0 est la f é m de la pile mesurée dans les conditions standards ($P = 1 \text{ atm}$, $\theta = 25^0\text{C}$ et des concentrations molaires de 1 mol.L^{-1}).

E^0 est appelée **f é m standard** de la pile.

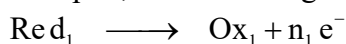
Remarques :

* Si les formes réduites des couples redox sont à l'état solide, elles n'interviennent pas dans l'expression de la fonction des concentrations π .

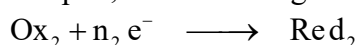
* Le signe de la f é m E renseigne sur la polarité de la pile et par conséquent du sens de la réaction spontanée de la réaction lorsque la pile débite.

- Si $E > 0$:

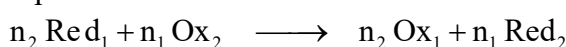
L'électrode gauche est le pôle négatif (-) de la pile, elle est le siège d'une oxydation (c'est donc une anode).



L'électrode droite est le pôle positif (+) de la pile, elle est le siège d'une réduction (c'est donc une cathode)

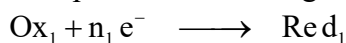


Lorsque la pile débite, la réaction spontanée est dans le sens direct :

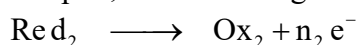


- Si $E < 0$:

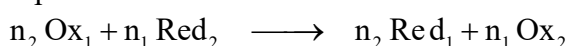
L'électrode gauche est le pôle positif (+) de la pile, elle est le siège d'une réduction (c'est donc une cathode)



L'électrode droite est le pôle négatif (-) de la pile, elle est le siège d'une oxydation (c'est donc une anode).



Lorsque la pile débite, la réaction spontanée est dans le sens inverse :



• Considérons le cas où les deux couples redox mettent en jeu le même nombre d'électrons ($n_1 = n_2 = n$) :

La réaction associée à la pile s'écrit : $\text{Red}_1 + \text{Ox}_2 \rightleftharpoons \text{Ox}_1 + \text{Red}_2$, $\pi = \frac{[\text{Ox}_1] \cdot [\text{Red}_2]}{[\text{Red}_1] \cdot [\text{Ox}_2]}$

La loi de Nernst s'écrit : $E = E^0 - \frac{0,06}{n} \log \pi$ avec $\pi = \frac{[\text{Ox}_1] \cdot [\text{Red}_2]}{[\text{Red}_1] \cdot [\text{Ox}_2]}$

Remarques :

* Les coefficients stœchiométriques étant les plus petits entiers naturels qui permettent d'équilibrer une équation chimique, l'expression de la loi de Nernst s'écrit :

$$E = E^0 - \frac{0,06}{n \cdot n} \log \frac{[\text{Ox}_1]^n \cdot [\text{Red}_2]^n}{[\text{Red}_1]^n \cdot [\text{Ox}_2]^n} = E^0 - \frac{0,06}{n^2} \log \left(\frac{[\text{Ox}_1] \cdot [\text{Red}_2]}{[\text{Red}_1] \cdot [\text{Ox}_2]} \right)^n = E^0 - \frac{0,06}{n^2} \cdot n \cdot \log \left(\frac{[\text{Ox}_1] \cdot [\text{Red}_2]}{[\text{Red}_1] \cdot [\text{Ox}_2]} \right)$$

Il vient alors que : $E = E^0 - \frac{0,06}{n} \log \pi$ avec $\pi = \frac{[\text{Ox}_1] \cdot [\text{Red}_2]}{[\text{Red}_1] \cdot [\text{Ox}_2]}$.

* Si de plus les formes réduites des couples redox sont à l'état solide, la loi de Nernst s'écrit :

$$E = E^0 - \frac{0,06}{n} \log \pi \quad \text{avec} \quad \pi = \frac{[\text{Ox}_1]}{[\text{Ox}_2]}$$

b - Usure de la pile électrochimique :

• Lorsqu'une pile électrochimique débite :

- sa f é m E tend à s'annuler ($|E|$ diminue).

- la réaction chimique évolue vers un état d'équilibre.

- la fonction des concentrations π tend vers la constante d'équilibre K de la réaction associée.

Considérons une pile électrochimique du type Daniell dans laquelle chaque compartiment est constitué par un métal qui plonge dans une solution contenant le cation métallique correspondant. Les deux couples redox mette en jeu le même nombre d'électrons n .

Le symbole d'une telle pile est : $M_1 \mid M_1^{n+} \parallel M_2^{n+} \mid M_2$

La réaction associée à cette pile est : $M_1 + M_2^{n+} \rightleftharpoons M_1^{n+} + M_2$, $\pi = \frac{[M_1^{n+}]}{[M_2^{n+}]}$

La loi de Nernst s'écrit : $E = E^0 - \frac{0,06}{n} \log \pi$ avec $\pi = \frac{[M_1^{n+}]}{[M_2^{n+}]}$

La f é m de la pile dépend, à une température donnée, de la nature des métaux et de la concentrations des ions métalliques correspondants.

Lorsque la pile ne débite plus, sa f é m s'annule, la réaction chimique atteint un état d'équilibre et $\pi_{eq} = K$.

La pile est **usée** : $\begin{cases} E = 0 \\ \pi_{eq} = K \end{cases} \rightarrow 0 = E^0 - \frac{0,06}{n} \log K \rightarrow E^0 = \frac{0,06}{n} \log K \rightarrow \log K = \frac{n.E^0}{0,06}$

Il vient alors que : **$K = 10^{\frac{n.E^0}{0,06}}$**

- Exploitation de l'expression de la loi de Nernst :

On a : $E = E^0 - \frac{0,06}{n} \log \pi \xrightarrow{E^0 = \frac{0,06}{n} \log K} E = \frac{0,06}{n} \log K - \frac{0,06}{n} \log \pi \rightarrow E = \frac{0,06}{n} (\log K - \log \pi)$

Il vient alors que : **$E = \frac{0,06}{n} \log \frac{K}{\pi}$**

- si $E > 0 \rightarrow \log \frac{K}{\pi} > 0 \rightarrow \frac{K}{\pi} > 1 \rightarrow \pi < K$

Lorsque la pile débite, la réaction redox évolue spontanément dans le sens direct.

- si $E < 0 \rightarrow \log \frac{K}{\pi} < 0 \rightarrow \frac{K}{\pi} < 1 \rightarrow \pi > K$

Lorsque la pile débite, la réaction redox évolue spontanément dans le sens inverse.

- si $E = 0 \rightarrow \log \frac{K}{\pi} = 0 \rightarrow \frac{K}{\pi} = 1 \rightarrow \pi_{eq} = K$

la pile ne débite plus, la réaction redox évolue a atteint l'état d'équilibre.

- Exploitation de l'expression de la constante d'équilibre :

Considérons la réaction redox : $Red_1 + Ox_2 \rightleftharpoons Ox_1 + Red_2$, $\pi_{eq} = \frac{[Ox_1]_{eq} \cdot [Red_2]_{eq}}{[Red_1]_{eq} \cdot [Ox_2]_{eq}} = K$

- Si **$K > 1$** $\rightarrow$ le couple $\left(\frac{Ox_2}{Red_2} \right)$ a un pouvoir oxydant supérieur à celui du couple $\left(\frac{Ox_1}{Red_1} \right)$

or $K = 10^{\frac{n.E^0}{0,06}} \xrightarrow{K > 1} 10^{\frac{n.E^0}{0,06}} > 1 \rightarrow \frac{n.E^0}{0,06} > 0 \rightarrow \mathbf{E^0 > 0}$.

- Si **$K < 1$** $\rightarrow$ le couple $\left(\frac{Ox_2}{Red_2} \right)$ a un pouvoir réducteur supérieur à celui du couple $\left(\frac{Ox_1}{Red_1} \right)$

or $K = 10^{\frac{n.E^0}{0,06}} \xrightarrow{K < 1} 10^{\frac{n.E^0}{0,06}} < 1 \rightarrow \frac{n.E^0}{0,06} < 0 \rightarrow \mathbf{E^0 < 0}$.

Le signe de la f é m standard E^0 d'une pile permet de comparer les pouvoirs oxydants (ou réducteurs) des deux couples redox qui constituent cette pile.

Applications

Exercice 1 :

On réalise la pile électrochimique :

* Le compartiment à gauche est constitué d'une lame en Sn plongeant dans un volume V_1 d'une solution (S_1) de SnCl_2 de concentration $C_1 = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

* Le compartiment à droite est constitué d'une lame en Pb plongeant dans un volume V_2 d'une solution (S_2) de PbCl_2 de concentration $C_2 = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

* La valeur la f é m standard de la pile est $E^0 = 0,01 \text{ V}$.

1⁰) a - Faire le schéma de la pile.

b - Exprimer la f é m E de la pile en fonction de E^0 , C_1 et C_2 . Calculer alors la valeur de E. En déduire la polarité de la pile.

2⁰) La pile alimente un circuit électrique :

a - Ecrire l'équation de la transformation électrochimique qui s'effectue à chacune de ses deux électrodes.

b - En déduire alors l'équation de la réaction spontanée qui se produit dans la pile lorsqu'elle débite.

c - Calculer la valeur de la constante d'équilibre K relative à la réaction associée à la pile.

3⁰) On donne le tableau d'avancement de la réaction associée à la pile :

Equation de la réaction		$\text{Sn} + \text{Pb}^{2+} \rightleftharpoons \text{Sn}^{2+} + \text{Pb}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantité de matière (mol)			
initial	$x = 0$	excès	2.10^{-2}	10^{-3}	excès
final	x_f	excès	$2.10^{-2} - x_f$	$10^{-3} + x_f$	excès

a - Déterminer les valeurs des volumes V_1 et V_2 des solutions dans les deux compartiments de la pile.

b - Montrer que $x_f = 9,88.10^{-3} \text{ mol}$.

c - Calculer les molarités $[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}}$ et $[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}}$ des ions Sn^{2+} et Pb^{2+} lorsque la pile ne débite plus.

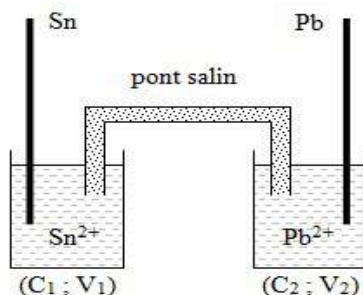
4⁰) Lorsque la pile ne débite plus, on ouvre le circuit électrique et on ajoute dans le compartiment à gauche la solution (S_1) jusqu'à ce que le volume atteigne la valeur $V_1' = V_2$.

a - Montrer que la molarité des ions Sn^{2+} est $[\text{Sn}^{2+}]' = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot V_1 + C_1 \cdot (V_2 - V_1)}{V_2}$. Calculer $[\text{Sn}^{2+}]'$.

b - Quelle est alors la nouvelle valeur E' de la f é m de la pile ? Conclure.

Réponse :

1⁰) a -



b - La réaction associée à la pile étant : $\text{Sn} + \text{Pb}^{2+} \rightleftharpoons \text{Sn}^{2+} + \text{Pb}$

La loi de Nernst s'écrit : $E = E^0 - 0,03 \text{ Log} \pi$; $\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]}$ $\rightarrow E = E^0 - 0,03 \text{ Log} \frac{C_1}{C_2}$.

A.N : $E = 0,01 - 0,03 \text{ Log} \frac{10^{-2}}{10^{-1}}$ et $E = 0,04 \text{ V}$.

$E = V_D - V_G > 0$ donc l'électrode en Pb est le pôle positif de la pile alors que l'électrode en Sn est son pôle négatif.

2⁰) a - pôle positif : $\text{Pb}^{2+} + 2 \text{e}^- \longrightarrow \text{Pb}$ réduction

pôle négatif : $\text{Sn} \longrightarrow \text{Sn}^{2+} + 2 \text{e}^-$ oxydation

b - La réaction spontanée : $\text{Sn} + \text{Pb}^{2+} \longrightarrow \text{Sn}^{2+} + \text{Pb}$.

Remarque : $E > 0$ donc la réaction associée à la pile évolue spontanément dans le sens direct.

c - Lorsque la pile ne débite plus ($E = 0$), on atteint l'état d'équilibre dynamique ($\pi_{\text{eq}} = K$)

$$0 = E^0 - 0,03 \text{ Log} K \rightarrow K = 10^{\frac{E^0}{0,03}} \quad \text{A.N : } K = 10^{\frac{0,01}{0,03}} \quad \text{et } K = 2,15.$$

$$3^0) \text{ a - } V_1 = \frac{n_i(\text{Sn}^{2+})}{C_1} \quad \text{A.N : } V_1 = \frac{10^{-3}}{10^{-2}} \quad \text{et } V_1 = 0,1 \text{ L.}$$

$$V_2 = \frac{n_i(\text{Pb}^{2+})}{C_2} \quad \text{A.N : } V_2 = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{10^{-1}} \quad \text{et } V_2 = 0,2 \text{ L}$$

$$\text{b - } K = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}}} \rightarrow K = \frac{\frac{n_{\text{eq}}(\text{Sn}^{2+})}{V_1}}{\frac{n_{\text{eq}}(\text{Pb}^{2+})}{V_2}} = \frac{(10^{-3} + x_f) \cdot V_2}{(2 \cdot 10^{-2} - x_f) \cdot V_1} \rightarrow 2 \cdot 10^{-2} \cdot K \cdot V_1 - K \cdot V_1 \cdot x_f = 10^{-3} \cdot V_2 + V_2 \cdot x_f$$

$$\rightarrow (V_2 + K \cdot V_1) \cdot x_f = 2 \cdot 10^{-2} \cdot K \cdot V_1 - 10^{-3} \cdot V_2 \quad \text{et } x_f = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot K \cdot V_1 - 10^{-3} \cdot V_2}{V_2 + K \cdot V_1}$$

$$\text{A.N : } x_f = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 2,15 \cdot 10^{-1} - 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 10^{-1} + 2,15 \cdot 10^{-1}} \quad \text{et } x_f = 9,88 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$\text{c - } [\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{n_{\text{eq}}(\text{Sn}^{2+})}{V_1} \quad \text{A.N : } [\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{10^{-3} + 9,88 \cdot 10^{-3}}{10^{-1}} \quad \text{et } [\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}} = 10,88 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{n_{\text{eq}}(\text{Pb}^{2+})}{V_2} \quad \text{A.N : } [\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{2 \cdot 10^{-2} - 9,88 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-1}} \quad \text{et } [\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}} = 5,06 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$4^0) \text{ a - } [\text{Sn}^{2+}] = \frac{n_t(\text{Sn}^{2+})}{V_2} = \frac{n_{\text{eq}}(\text{Sn}^{2+}) + n_{\text{ajouté}}(\text{Sn}^{2+})}{V_2} \quad \text{et } [\text{Sn}^{2+}] = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot V_1 + C_1 \cdot (V_2 - V_1)}{V_2}$$

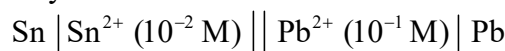
$$\text{A.N : } [\text{Sn}^{2+}] = \frac{10,88 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-1} + 10^{-2} \cdot (2 \cdot 10^{-1} - 10^{-1})}{2 \cdot 10^{-1}} \quad \text{et } [\text{Sn}^{2+}] = 5,94 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{b - } E' = E^0 - 0,03 \text{ Log} \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]} \quad \text{A.N : } E' = 0,01 - 0,03 \text{ Log} \frac{5,94 \cdot 10^{-2}}{5,06 \cdot 10^{-2}} \quad \text{et } E' = 7,9 \cdot 10^{-3} \text{ V.}$$

$E' > 0$ donc la pile débite de nouveau sans changer de polarité.

Exercice 2 :

On réalise la pile électrochimique de symbole :



Les deux compartiments de la pile ont un même volume $V = 0,1 \text{ L}$.

La f é m standard de cette pile est $E^0 = 10^{-2} \text{ V}$.

1⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction associée à cette pile.

Donner alors l'expression de la fonction des concentrations π relative à cette réaction.

b - Calculer la valeur de la f é m E de cette pile.

c - En déduire alors l'équation de la réaction spontanée qui a lieu lorsque la pile débite.

d - Faire le schéma de la pile en indiquant sa polarité.

2⁰) a - Quelle est la valeur de la constante d'équilibre K relative à la réaction associée à cette pile.

b - Calculer la valeur de l'avancement final x_f de la réaction lorsque l'équilibre dynamique est atteint.

3⁰) On maintient la molarité $[\text{Pb}^{2+}] = 10^{-1} \text{ M}$ dans la compartiment à droite . A partir de quelle valeur de la molarité $[\text{Sn}^{2+}]$ dans le compartiment à gauche on assiste à une inversion de la polarité de la pile ?

Réponse :

1⁰) a - La réaction associée à la pile est : $\text{Sn} + \text{Pb}^{2+} \rightleftharpoons \text{Sn}^{2+} + \text{Pb}$

La fonction des concentrations relative à la réaction associée est $\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]}$.

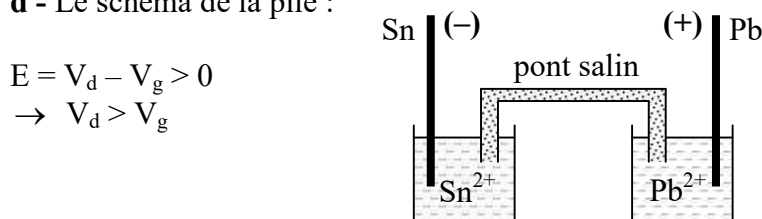
b - la loi de Nernst s'écrit : $E = E^0 - 0,03 \text{ Log} \pi$; $\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]}$

A.N : $E = 0,01 - 0,03 \text{ Log} \frac{10^{-2}}{10^{-1}}$ et $E = 0,04 \text{ V}$.

c - $E > 0$ donc $\pi < K$: la réaction associée à la pile évolue spontanément dans le sens direct.

La réaction spontanée sera donc : $\text{Sn} + \text{Pb}^{2+} \rightarrow \text{Sn}^{2+} + \text{Pb}$.

d - Le schéma de la pile :



$$E = V_d - V_g > 0 \\ \rightarrow V_d > V_g$$

2⁰) a - Lorsque la pile ne débite plus ($E = 0$), on atteint l'état d'équilibre dynamique ($\pi_{\text{eq}} = K$)

$$0 = E^0 - 0,03 \text{ Log} K \rightarrow K = 10^{\frac{E^0}{0,03}} \quad \text{A.N : } K = 10^{\frac{0,01}{0,03}} \quad \text{et } K = 2,15.$$

b - Les deux compartiments ont le même volume $V = 0,1 \text{ L}$.

$$n_0(\text{Pb}^{2+}) = 10^{-1} \cdot 0,1 = 10^{-2} \text{ mol.}$$

$$n_0(\text{Sn}^{2+}) = 10^{-2} \cdot 0,1 = 10^{-3} \text{ mol.}$$

Equation chimique		$\text{Sn} + \text{Pb}^{2+} \rightleftharpoons \text{Sn}^{2+} + \text{Pb}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
Initial	0	excès	10^{-2}	10^{-3}	excès
final	x_f	excès	$10^{-2} - x_f$	$10^{-3} + x_f$	excès

$$K = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}}} \rightarrow K = \frac{\frac{10^{-3} + x_f}{0,1}}{\frac{10^{-2} - x_f}{0,1}} = \frac{10^{-3} + x_f}{10^{-2} - x_f} \rightarrow (10^{-2} - x_f) \cdot K = 10^{-3} + x_f \rightarrow x_f \cdot (1 + K) = K \cdot 10^{-2} - 10^{-3}$$

$$\text{et } x_f = \frac{K \cdot 10^{-2} - 10^{-3}}{(1 + K)} \quad \text{A.N : } x_f = \frac{2,15 \cdot 10^{-2} - 10^{-3}}{(1 + 2,15)} \quad \text{et } x_f = 6,51 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

3⁰) On assiste à une inversion de la polarité de la pile $\rightarrow E < 0$ et $\pi > K$.

$$\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]} \xrightarrow{\pi > K} \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]} > K \rightarrow [\text{Sn}^{2+}] > K \cdot [\text{Pb}^{2+}]. \quad \text{A.N : } [\text{Sn}^{2+}] > 2,15 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$$

Exercice 3 :

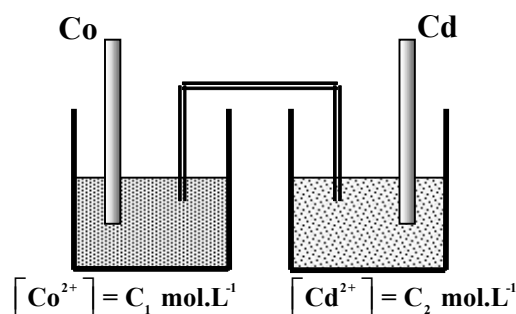
On considère la pile électrochimique schématisée ci-contre :

1⁰) a - Donner le symbole de la pile considérée.

b - Ecrire l'équation de la réaction associée à cette pile.

c - Exprimer la fonction π des concentrations relative à cette réaction en fonction des concentrations C_1 et C_2 .

d - Donner l'expression de la f é m E de la pile en fonction de sa f é m standard E^0 et de π .



$$[\text{Co}^{2+}] = C_1 \text{ mol.L}^{-1} \quad [\text{Cd}^{2+}] = C_2 \text{ mol.L}^{-1}$$

2⁰) On fait varier les concentrations C_1 et C_2 respectivement des ions Co^{2+} et Cd^{2+} et on mesure chaque fois la f é m E de la pile. Les résultats des mesures ont permis de tracer la courbe $E = f(\log \pi)$ ci-dessous:

a - L'équation de la courbe est $E = a(\log \pi) + b$. Déterminer

graphiquement les valeurs de a et de b.

b - En déduire alors que :

- La f é m standard de la pile considérée est $E^0 = -0,12 \text{ V}$.
- La valeur de la constante d'équilibre de la réaction associée à cette pile est $K = 10^{-4}$.

3⁰) Pour une concentration molaire $C_1 = [\text{Co}^{2+}] = 1 \text{ mol.L}^{-1}$,

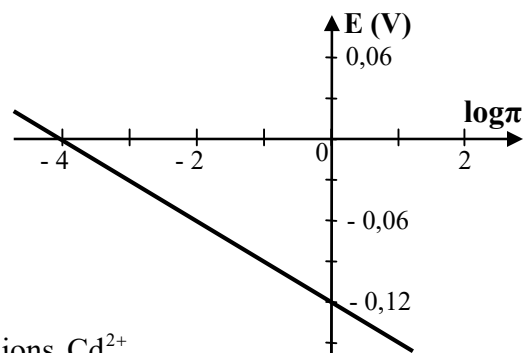
la f é m de la pile considérée est $E = -0,15 \text{ V}$.

a - Déterminer alors la valeur de la concentration molaire C_2 des ions Cd^{2+} .

b - Ecrire l'équation de la réaction spontanée qui a lieu lorsque la pile débite.

c - Sachant que les deux compartiments de la pile ont un même volume $V = 0,2 \text{ L}$, calculer les molarités des ions Co^{2+} et Cd^{2+} lorsque la pile ne débite plus (pile usée).

d - Calculer alors la variation de masse Δm de l'électrode de cobalt Co. On donne : $M(\text{Co}) = 59 \text{ g.mol}^{-1}$.



Réponse :

1⁰) a - Le symbole de la pile : $\text{Co} | \text{Co}^{2+} (C_1) || \text{Cd}^{2+} (C_2) | \text{Cd}$

b - La réaction associée à la pile : $\text{Co} + \text{Cd}^{2+} \rightleftharpoons \text{Co}^{2+} + \text{Cd}$

c - La fonction des concentrations s'exprime par : $\pi = \frac{[\text{Co}^{2+}]}{[\text{Cd}^{2+}]}$ $\rightarrow \pi = \frac{C_1}{C_2}$

d - La loi de Nernst s'écrit : $E = E^0 - 0,03 \log \pi$ avec $\pi = \frac{C_1}{C_2}$

2⁰) a - $E = a(\log \pi) + b$ Graphiquement : $\begin{cases} b = -0,12 \\ a = \frac{(-0,12) - (0)}{(0) - (-4)} \end{cases}$ et $a = -0,03$

b - $E = -0,12 - 0,03 \log \pi$

- par identification avec l'équation de Nerst : $E^0 = -0,12 \text{ V}$.

- Lorsque la pile ne débite plus : $\begin{cases} E = 0 \\ \pi_{\text{eq}} = K \end{cases} \rightarrow 0 = E^0 - 0,03 \log K$ et $K = 10^{\frac{E^0}{0,03}}$.

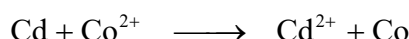
A.N : $K = 10^{\frac{-0,12}{0,03}}$ et $K = 10^{-4}$.

Remarque : graphiquement, pour $E = 0$, $\log K = -4$ donc $K = 10^{-4}$.

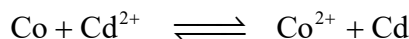
3⁰) a - $E = E^0 - 0,03 \log \pi \rightarrow \log \pi = \frac{E^0 - E}{0,03} \xrightarrow{\pi = \frac{C_1}{C_2}} \frac{C_1}{C_2} = 10^{\frac{E^0 - E}{0,03}}$ et $C_2 = C_1 \cdot 10^{\frac{E - E^0}{0,03}}$

A.N : $C_2 = 1 \cdot 10^{\frac{(-0,15) - (-0,12)}{0,03}}$ et $C_2 = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

b - $E < 0 \rightarrow \pi > K \rightarrow$ La réaction spontanée est dans le sens inverse :



c - Les deux compartiments de la pile ont un même volume. On raisonne avec l'avancement volumique :



à $t = 0$ 0,1 1
à t_{eq} 0,1 + y_f 1 - y_f

$$K = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}}} \rightarrow K = \frac{1 - y_f}{0,1 + y_f} \rightarrow y_f = \frac{1 - 0,1 \cdot K}{1 + K}.$$

$$A.N : y_f = \frac{1-10^{-5}}{1+10^{-4}} \quad \text{et} \quad y_f = 0,99989 \text{ mol.L}^{-1} (y_f \approx 1 \text{ mol.L}^{-1}).$$

$$[Co^{2+}]_{eq} = 1 - y_f \rightarrow [Co^{2+}]_{eq} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[Cd^{2+}]_{eq} = 0,1 + y_f \rightarrow [Cd^{2+}]_{eq} \approx 1,1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$d - n_i(Co^{2+}) = [Co^{2+}]_i \cdot V \xrightarrow{A.N} n_i(Co^{2+}) = 1,0,2 = 0,2 \text{ mol.}$$

$$n_f(Co^{2+}) = [Co^{2+}]_f \cdot V \xrightarrow{A.N} n_f(Co^{2+}) = 1,1 \cdot 10^{-4} \cdot 0,2 = 0,22 \cdot 10^{-4} \text{ mol.}$$

Le nombre de mole de Co^{2+} qui a réagi est : $n = 0,2 - 0,22 \cdot 10^{-4} \approx 0,2 \text{ mol}$

Le nombre de mole de Co formé est alors $n = 0,2 \text{ mol}$.

$$\text{Or } n = \frac{m}{M} \rightarrow m = n \cdot M. \quad A.N : m = 0,2 \cdot 59 = 11,8 \text{ g}$$

La variation de masse de l'électrode de cobalt est : $\Delta m = m_f - m_i = (m_i + m) - m_i = m \rightarrow \Delta m = 11,8 \text{ g}.$

Exercice 4 :

On considère la pile électrochimique :



La valeur de la f é m standard de la pile est $E^0 = 0,03 \text{ V}$.

1⁰) a - Faire le schéma de la pile.

b - Ecrire l'équation de la réaction associée à la pile.

2⁰) a - Exprimer la f é m E de la pile en fonction de E^0 , C_1 et C_2 . Calculer alors la valeur de E.

En déduire la polarité de la pile.

b - Ecrire alors l'équation de la réaction spontanée qui se produit dans la pile lorsqu'elle débite.

3⁰) a - Calculer la valeur de la constante d'équilibre K relative à la réaction associée à la pile.

b - Calculer les molarités $[Co^{2+}]_{eq}$ et $[Ni^{2+}]_{eq}$ des ions Co^{2+} et Ni^{2+} lorsque la pile ne débite plus.

Les volumes V_1 et V_2 des solutions dans les deux compartiments respectivement gauche et droite de la pile sont $V_1 = V_2 = V_0 = 0,1 \text{ L}$.

4⁰) Lorsque la pile ne débite plus, On l'isole et on ajoute de l'eau dans le compartiment de gauche jusqu'à ce que le volume atteigne la valeur $V'_1 = 10 V_0$.

a - Montrer, sans faire de calcul, que la pile va changer de polarité.

b - Calculer la molarité $[Co^{2+}]$ des ions Co^{2+} dans le compartiment gauche.

c - Déterminer la nouvelle valeur E' de la f é m de la pile.

5⁰) On ajoute maintenant, dans le compartiment de droite, un volume $V = 4 \cdot V_0$ d'une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium NaOH de concentration C.

Une réaction de précipitation $Ni^{2+} + 2 OH^- \rightarrow Ni(OH)_2$ va avoir lieu et la f é m de la pile prend alors une valeur E'' .

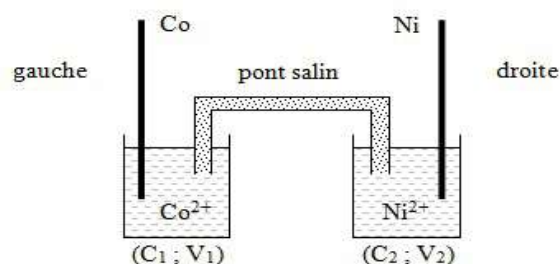
a - Montrer, sans faire de calcul, que $E'' < E'$.

b - Montrer que la molarité des ions Ni^{2+} est $[Ni^{2+}] = \frac{[Ni^{2+}]_{eq} - 2 \cdot C}{5}$

c - Calculer la valeur de C pour laquelle on a $E'' = 0$.

Réponse :

1⁰) a -



b - La réaction associée à la pile : $\text{Co} + \text{Ni}^{2+} \rightleftharpoons \text{Co}^{2+} + \text{Ni}$

2⁰) a - D'après la loi de Nernst : $E = E^0 - 0,03 \text{ Log} \pi$ avec $\pi = \frac{[\text{Co}^{2+}]}{[\text{Ni}^{2+}]}$ $\rightarrow E = E^0 - 0,03 \text{ Log} \frac{C_1}{C_2}$

A.N : $E = 0,03 - 0,03 \text{ Log} \frac{1}{10^{-2}}$ et $E = -0,03 \text{ V}$.

$E < 0$ or $E = V_{\text{droite}} - V_{\text{gauche}}$ donc l'électrode en Ni (à droite) est le pôle négatif (-) de la pile alors que l'électrode en Co

(à gauche) est son pôle positif (+).

b - $E < 0$ donc la réaction associée à la pile évolue spontanément dans le sens inverse.

La réaction spontanée est alors : $\text{Ni} + \text{Co}^{2+} \rightarrow \text{Ni}^{2+} + \text{Co}$.

3⁰) a - Lorsque la pile ne débite plus ($E = 0$), on atteint l'état d'équilibre dynamique ($\pi_{\text{eq}} = K$)

$0 = E^0 - 0,03 \text{ Log} K \rightarrow K = 10^{\frac{E^0}{0,03}}$. A.N : $K = 10^{\frac{0,03}{0,03}}$ et $K = 10$.

b - Les deux compartiments de la pile ont le même volume $V_1 = V_2 = V_0$. On élabore le tableau d'avancement volumique relatif à la réaction associée à la pile :

Equation de la réaction		$\text{Co} + \text{Ni}^{2+} \rightleftharpoons \text{Co}^{2+} + \text{Ni}$			
Etat du système	Avancement volumique	Concentrations molaires			
initial	$y = 0$	excès	C_2	C_1	excès
final	y_f	excès	$C_2 + y_f$	$C_1 - y_f$	excès

$K = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}} \rightarrow K = \frac{C_1 - y_f}{C_2 + y_f} \rightarrow C_2 \cdot K + K \cdot y_f = C_1 - y_f \rightarrow (1 + K) \cdot y_f = C_1 - C_2 \cdot K$ et $y_f = \frac{C_1 - C_2 \cdot K}{1 + K}$

A.N : $y_f = \frac{1 - 10^{-2} \cdot 10}{1 + 10}$ et $y_f = 8,18 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

$[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} = C_1 - y_f \rightarrow [\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} = 1 - 8,18 \cdot 10^{-2}$ et $[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} = 91,82 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

$[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} = C_2 + y_f \rightarrow [\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} = 10^{-2} + 8,18 \cdot 10^{-2}$ et $[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} = 9,18 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

4⁰) a - Avant l'ajout de l'eau, $\pi_{\text{eq}} = K = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}}$. On ajoute de l'eau dans le compartiment gauche $\rightarrow$

$[\text{Co}^{2+}]$ diminue

$\frac{[\text{Co}^{2+}]}{[\text{Ni}^{2+}]} < \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}} \rightarrow \pi < K \rightarrow E > 0$. La f.e.m de la pile change de signe donc la pile change de polarité.

b - $[\text{Co}^{2+}] = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot V_1}{V'_1} \rightarrow [\text{Co}^{2+}] = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot V_0}{10V_0}$ et $[\text{Co}^{2+}] = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{10}$.

A.N : $[\text{Co}^{2+}] = \frac{91,82 \cdot 10^{-2}}{10}$ et $[\text{Co}^{2+}] = 9,182 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

c - $E' = E^0 - 0,03 \text{ Log} \pi$ avec $\pi = \frac{[\text{Co}^{2+}]}{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}}$. A.N :

$E' = 0,03 - 0,03 \text{ Log} \frac{91,82 \cdot 10^{-3}}{9,18 \cdot 10^{-2}}$ et $E' = 0,03 \text{ V}$.

Remarque : $\pi = \frac{[\text{Co}^{2+}]}{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}} = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{10 \cdot [\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}} = \frac{K}{10} \xrightarrow{K=10} \pi = 1 \rightarrow E' = E^0$ et $E' = 0,03 \text{ V}$.

5⁰) a - On ajoute la solution de NaOH dans le compartiment de droite $\xrightarrow[\text{+ dilution}]{\text{précipitation}}$ $[\text{Ni}^{2+}]$ diminue donc la valeur de π augmente et par conséquent la valeur de la f é m diminue et $E'' < E'$.

b - D'après la réaction de précipitation qui a lieu : $n(\text{Ni}^{2+})_{\text{réagi}} = \frac{n(\text{OH}^-)_{\text{ajouté}}}{2}$

$$[\text{Ni}^{2+}] = \frac{n_f(\text{Ni}^{2+})}{V_{\text{total}}} = \frac{n_i(\text{Ni}^{2+}) - \frac{n(\text{OH}^-)}{2}}{V_2 + V} = \frac{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot V_2 - \frac{C \cdot V}{2}}{V_2 + V} = \frac{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot V_0 - \frac{C \cdot 4 \cdot V_0}{2}}{V_0 + 4 \cdot V_0}$$

il vient alors que : $[\text{Ni}^{2+}] = \frac{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} - 2 \cdot C}{5}$

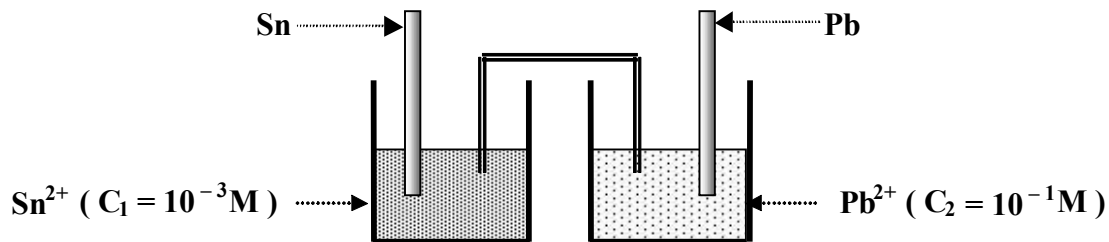
c - $E'' = 0 \rightarrow \pi = \frac{[\text{Co}^{2+}]}{[\text{Ni}^{2+}]} = K \xrightarrow{K = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}}} \frac{[\text{Co}^{2+}]}{[\text{Ni}^{2+}]} = \frac{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}}{10}$

$$\frac{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}}{10} = \frac{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} - 2 \cdot C}{5} \rightarrow [\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} = 2[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} - 4 \cdot C \text{ et } C = \frac{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}}{4}.$$

A.N : $C = \frac{9,18 \cdot 10^{-2}}{4}$ et $C = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Exercice 5 :

1⁰) La valeur de la f é m standard de la pile schématisée ci-dessous est $E^\circ = 0,01 \text{ V}$.



a - Rappeler le rôle du pont salin qui relie les deux compartiments de la pile.

b - Donner le symbole de la pile P.

2⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction associée à cette pile.

b - Donner l'expression de la f é m E de la pile en fonction de E° , $[\text{Pb}^{2+}]$ et $[\text{Sn}^{2+}]$.

Calculer alors la valeur de E .

3⁰) a - Préciser la polarité de la pile P.

b - Ecrire l'équation de la transformation électrochimique qui s'effectue au niveau de chacune des deux électrodes lorsque la pile débite.

c - En déduire alors l'équation de la réaction spontanée qui se produit dans la pile lorsqu'elle débite.

d - A un instant t , la mesure de la f é m de la pile donne $E = 0,02 \text{ V}$.

Calculer à cet instant t la valeur de la fonction des concentrations $\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]}$.

4⁰) a - Déterminer la valeur de la constante d'équilibre K relative à la réaction associée à la pile.

b - Sachant que les deux compartiments de la pile ont un même volume V , déterminer les concentrations molaires des ions Pb^{2+} et Sn^{2+} lorsque la pile ne débite plus.

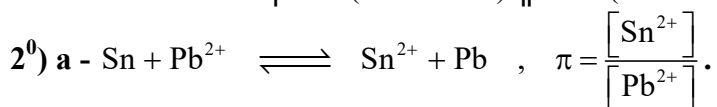
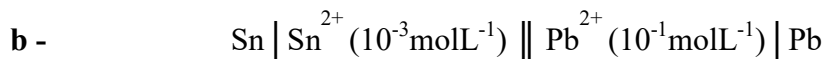
c - Dans quel compartiment faut-il alors ajouter de l'eau pour que la pile débite à nouveau avec inversion de sa polarité ? Justifier la réponse.

Réponse :

1⁰) a - Le pont salin assure :

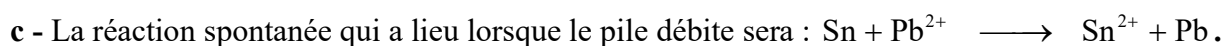
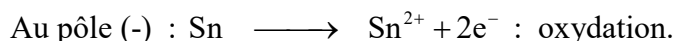
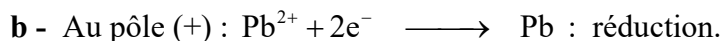
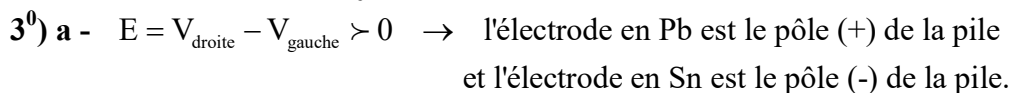
- la fermeture du circuit électrique qui contient la pile.

- l'électro neutralité des solutions électrolytiques dans les deux compartiments de la pile.



b - La loi de Nernst implique que : $E = E^0 - 0,03 \log \pi$ avec $\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]}$.

A.N : $E = 0,01 - 0,03 \log \frac{10^{-3}}{10^{-1}}$ et $E = 0,07 \text{ V}$.

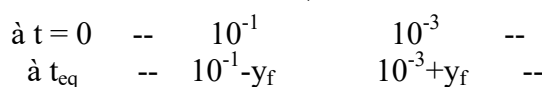
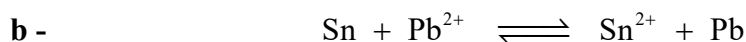


d - $E = E^0 - 0,03 \log \pi \rightarrow 0,03 \log \pi = E^0 - E \rightarrow \log \pi = \frac{E^0 - E}{0,03}$ et $\pi = 10^{\frac{E^0 - E}{0,03}}$

A.N : $\pi = 10^{\frac{0,01 - 0,02}{0,03}}$ et $\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]} = 0,464$.



$\begin{cases} E = 0 \\ \pi_{\text{eq}} = K \end{cases} \xrightarrow{\pi = 10^{\frac{E^0 - E}{0,03}}} K = 10^{\frac{E^0}{0,03}} \xrightarrow{E^0 = 0,01 \text{ V}} K = 10^{\frac{0,01}{0,03}}$ et $K = 2,15$.



$K = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}}} \rightarrow K = \frac{10^{-3} + y_f}{10^{-1} - y_f} \rightarrow 10^{-1} \cdot K - y_f \cdot K = 10^{-3} + y_f \rightarrow y_f (1 + K) = 10^{-1} \cdot K - 10^{-3}$ et $y_f = \frac{10^{-1} \cdot K - 10^{-3}}{1 + K}$

A.N : $y_f = \frac{10^{-1} \cdot 2,15 - 10^{-3}}{1 + 2,15}$ et $y_f = 67,94 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

$[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}} = 10^{-1} - y_f \xrightarrow{y_f = 67,94 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}} [\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}} = 32,06 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

$[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}} = 10^{-3} + y_f \xrightarrow{y_f = 67,94 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}} [\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}} = 68,94 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.



Sachant que la dilution fait diminuer la concentration molaire, on ajoute de l'eau dans le compartiment de droite.

Après la dilution : $[\text{Pb}^{2+}] \searrow \rightarrow [\text{Pb}^{2+}] < [\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}} \xrightarrow{K = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}}}} \pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Pb}^{2+}]} > K$.

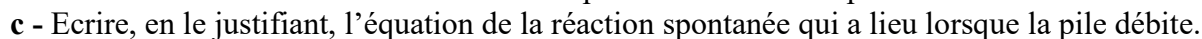
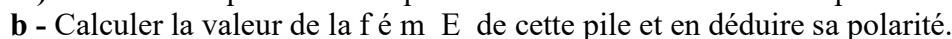
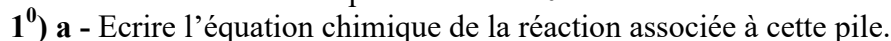
Exercice 6 :

On réalise la pile électrochimique de symbole :



Les deux compartiments de la pile ont un même volume $V = 0,1 \text{ L}$.

La f é m standard de cette pile est $E^0 = 10^{-2} \text{ V}$.



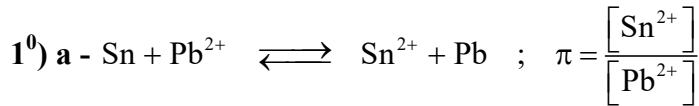
2⁰) a - Lorsque la pile débite, montrer que : $\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]} = 10^{\frac{E^0 - E}{0,03}}$.

b - Déterminer la valeur de la constante d'équilibre K relative à la réaction associée à cette pile.

c - Calculer la valeur de l'avancement final x_f de la réaction lorsque l'équilibre dynamique est atteint.

3⁰) La pile étant usée ($E = 0$) et isolé, préciser dans quel compartiment (droite ou gauche) doit-on ajouter un certain volume V_e d'eau pour que la f é m de la pile devienne $E = -E^0$. Calculer la valeur de V_e .

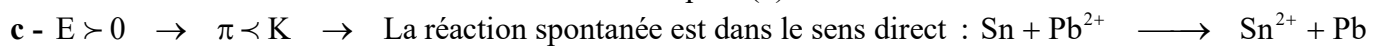
Réponse :



b - La loi de Nernst : $E = E^0 - 0,03 \log \pi$. A.N : $E = 0,01 - 0,03 \log \frac{10^{-2}}{10^{-1}}$ et $E = 0,04 \text{ V}$.

$E = V_{\text{droite}} - V_{\text{gauche}} > 0 \rightarrow$ l'électrode en Pb est le pôle (+)

l'électrode en Sn est le pôle (-)

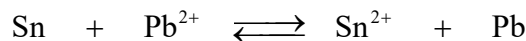


2⁰) a - $E = E^0 - 0,03 \log \pi \rightarrow \log \pi = \frac{E^0 - E}{0,03}$ et $\pi = 10^{\frac{E^0 - E}{0,03}}$.

b - Lorsque la pile ne débite plus ($E = 0$), la réaction atteint l'état d'équilibre ($\pi_{\text{eq}} = K$) $\rightarrow K = 10^{\frac{E^0}{0,03}}$.

A.N : $K = 10^{\frac{0,01}{0,03}}$ et $K = 2,15$.

c - Les deux compartiments de la pile ont le même volume $V = 0,1 \text{ L}$, on utilise l'avancement volumique :



à $t = 0$; $- \quad 0,1 \quad 0,01 \quad -$
à t_{eq} ; $- \quad 0,1 - y_f \quad 0,01 + y_f \quad -$

$\pi_{\text{eq}} = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}}} = K \rightarrow K = \frac{0,01 + y_f}{0,1 - y_f} \rightarrow y_f = \frac{0,1 \cdot K - 0,01}{K + 1}$.

A.N : $y_f = \frac{0,1 \cdot 2,15 - 0,01}{2,15 + 1}$ et $y_f = 6,51 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

On a : $y_f = \frac{x_f}{V} \rightarrow x_f = y_f \cdot V$

A.N : $x_f = 6,51 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1$ et $x_f = 6,51 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$.

3⁰) $E = -E^0 < 0 \rightarrow \pi > K = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}}}$

on ajoute de l'eau dans le compartiment de droite pour que $[\text{Pb}^{2+}]$ diminue.

Après dilution : $[\text{Pb}^{2+}] = \frac{[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot V}{V + V_e} \rightarrow \pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Pb}^{2+}]} = \frac{[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}}}{\frac{[\text{Pb}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot V}{V + V_e}} = K \cdot \frac{V + V_e}{V}$

$E = E^0 - 0,03 \log \pi = -E^0 \rightarrow 0,03 \log K \cdot \frac{V + V_e}{V} = 2E^0 \rightarrow K \cdot \frac{V + V_e}{V} = 10^{\frac{2E^0}{0,03}} \xrightarrow{K=10^{\frac{E^0}{0,03}}} \frac{V + V_e}{V} = K$

$1 + \frac{V_e}{V} = K \rightarrow V_e = V \cdot (K - 1)$.

A.N : $V_e = 0,1 \cdot (2,15 - 1)$ et $V_e = 0,115 \text{ L}$

Exercice 7 :

On considère la pile électrochimique de symbole : $\text{Cd} \mid \text{Cd}^{2+} (C_1) \parallel \text{Fe}^{2+} (C_2) \mid \text{Fe}$

Les deux compartiments de la pile ont un même volume $V = 0,1 \text{ L}$.

1⁰) a - Ecrire l'équation de la réaction associée à cette pile.

b - Exprimer la fonction des concentrations π relative à cette réaction en fonction de C_1 et C_2 .

c - Donner l'expression de la f é m E de cette pile en fonction de sa f é m standard E^0 et de π .

2⁰) On fait varier les concentrations C_1 et C_2 respectivement des ions Cd^{2+} et Fe^{2+} et on mesure chaque fois La f é m E de la pile.

Les résultats de ces mesures ont permis alors de tracer la courbe $E = f(-\log \pi)$ ci-dessous :

a - Déterminer l'équation numérique de la courbe $E = f(-\log \pi)$.

b - En déduire alors que :

- La f é m standard de la pile considérée est $E^0 = -0,04 \text{ V}$.

- La constante d'équilibre de la réaction associée à cette pile est $K = 46,42 \cdot 10^{-3}$.

3⁰) On prend $C_1 = 0,01 \text{ mol.L}^{-1}$ et $C_2 = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.

a - Ecrire l'équation de la réaction spontanée qui a lieu lorsque la pile débite ? Justifier la réponse.

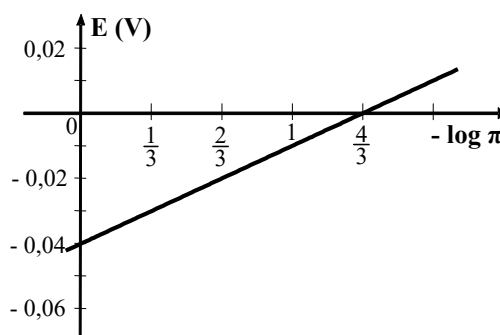
b - Déterminer les concentrations molaires des ions Fe^{2+} et Cd^{2+} lorsque la pile ne débite plus.

4⁰) Lorsque la pile est usée, on l'isole et on ajoute un volume V_e d'eau dans l'un des deux compartiments. On constate une inversion de la polarité avec une f é m initiale $E' = 0,02 \text{ V}$.

a - Préciser, en le justifiant, dans quel compartiment (de gauche ou de droite) on a ajouté de l'eau.

b - Soit π la fonction des concentrations juste après l'ajout de l'eau. Montrer que $V_e = \left(\frac{K}{\pi} - 1\right) \cdot V$

c - Sachant que $\pi = 10^{\frac{E^0 - E'}{0,03}}$, Calculer la valeur de V_e .



Réponse :

1⁰) a - $\text{Cd} + \text{Fe}^{2+} \rightleftharpoons \text{Cd}^{2+} + \text{Fe}$; $\pi = \frac{[\text{Cd}^{2+}]}{[\text{Fe}^{2+}]}$

b - $\pi = \frac{[\text{Cd}^{2+}]}{[\text{Fe}^{2+}]}$ $\rightarrow \pi = \frac{C_1}{C_2}$.

c - La loi de Nernst s'écrit : $E = E^0 - 0,03 \log \pi$ avec $\pi = \frac{[\text{Cd}^{2+}]}{[\text{Fe}^{2+}]}$.

2⁰) a - $E = f(-\log \pi)$ est une droite affine $\rightarrow E = B + A \cdot (-\log \pi)$

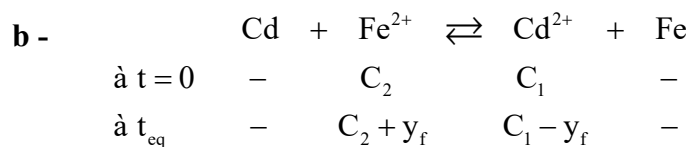
$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{(-0,04) - (0)}{(0) - \left(\frac{4}{3}\right)} = 0,03 \\ B = -0,04 \end{array} \right\} \rightarrow E = -0,04 - 0,03 \log \pi$$

b - $\left. \begin{array}{l} E_{\text{exp}} = -0,04 - 0,03 \log \pi \\ E_{\text{th}} = E^0 - 0,03 \log \pi \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{par identification}} E^0 = -0,04 \text{ V}$

Lorsque la pile est usée :

$E = 0$ et $\pi_{\text{eq}} = K \xrightarrow{\text{graphiquement}} -\log K = \frac{4}{3} \rightarrow K = 10^{\frac{4}{3}}$ et $K = 46,42 \cdot 10^{-3}$.

3⁰) a - $\pi = \frac{C_1}{C_2} \xrightarrow{\text{A.N}} \pi = \frac{0,01}{0,1}$ et $\pi = 10^{-1} \xrightarrow{K=46,42 \cdot 10^{-3}} \pi > K$ donc la réaction spontanée est dans le sens inverse : $\text{Fe} + \text{Cd}^{2+} \rightarrow \text{Fe}^{2+} + \text{Cd}$.



$$\pi_{\text{eq}} = \frac{[\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}}} = K \rightarrow K = \frac{C_1 - y_f}{C_2 + y_f} \rightarrow y_f = \frac{C_1 - C_2 \cdot K}{K + 1}$$

A.N: $y_f = \frac{10^{-2} - 10^{-1} \cdot 46,42 \cdot 10^{-3}}{46,42 \cdot 10^{-3} + 1}$ et $y_f = 5,12 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

$$[\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}} = C_1 - y_f \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}} = 10^{-2} - 5,12 \cdot 10^{-3} \text{ et } [\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}} = 4,88 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}} = C_2 + y_f \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}} = 10^{-1} + 5,12 \cdot 10^{-3} \text{ et } [\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}} = 105,12 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

4⁰) a - La dilution d'une solution fait diminuer la concentration molaire de cette solution.

$E' > 0 \rightarrow \pi < K$ or $\pi = \frac{[\text{Cd}^{2+}]}{[\text{Fe}^{2+}]}$ pour diminuer π il faut diluer la solution de Cd^{2+}

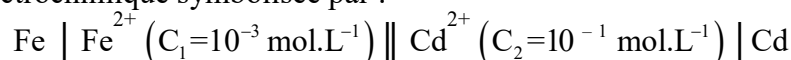
On ajoute alors de l'eau dans le compartiment de gauche.

b - $\pi = \frac{[\text{Cd}^{2+}]}{[\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}}} \rightarrow \pi = \frac{\frac{[\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot V}{V + V_e}}{[\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}}} = \frac{[\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}}} \cdot \frac{V}{V + V_e} = K \cdot \frac{V}{V + V_e} \rightarrow V + V_e = \frac{K}{\pi} \cdot V$ et $V_e = \left(\frac{K}{\pi} - 1 \right) \cdot V$

A.N: $\pi = 10^{\frac{-0,04 - 0,02}{0,03}} = 10^{-2}$ donc $V_e = \left(\frac{46,42 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} - 1 \right) \cdot 0,1$ et $V_e = 36,42 \cdot 10^{-2} \text{ L}$.

Exercice 8 :

On considère la pile électrochimique symbolisée par :



La f é m initiale de la pile est $E = 0,1 \text{ V}$.

1⁰) a - Schématiser la pile et préciser sa polarité.

b - Ecrire l'équation de la transformation électrochimique qui s'effectue à chacune de ses deux électrodes lorsque la pile est en fonctionnement.

c - En déduire alors l'équation de la réaction spontanée qui se produit dans la pile lorsqu'elle débite.

2⁰) On donne le tableau d'avancement de la réaction associée à la pile :

Equation de la réaction		$\text{Fe} + \text{Cd}^{2+} \rightleftharpoons \text{Fe}^{2+} + \text{Cd}$			
Etat du système	Avancement (mol)	Quantité de matière (mol)			
initial	x = 0	Excès	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	Excès
final	x _f	Excès	$2 \cdot 10^{-2} - x_f$	$2 \cdot 10^{-4} + x_f$	Excès

a - Montrer que les deux compartiments de la pile ont un même volume $V = 200 \text{ mL}$.

b - Calculer la valeur de la f é m standard E^0 de la pile.

c - Montrer que la valeur de la constante d'équilibre relative à la réaction associée à la pile est $K = 21,54$.

d - Déterminer la valeur de l'avancement final x_f.

En déduire les molarités des ions Fe^{2+} et Cd^{2+} lorsque la pile ne débite plus.

3⁰) Lorsque la pile ne débite plus, on l'isole et on ajoute un volume V_e d'eau dans l'un des deux compartiments. On constate une inversion de la polarité avec une f é m initiale $E' = -0,01 \text{ V}$.

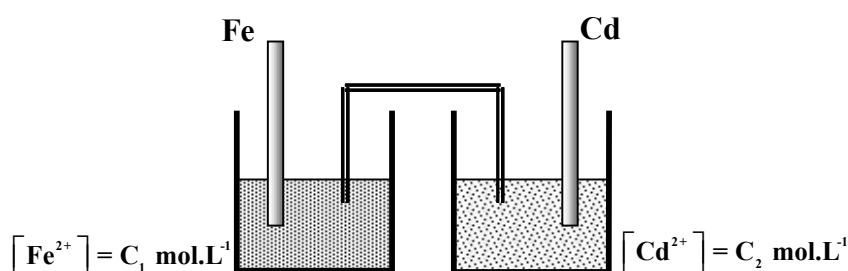
a - Préciser, en le justifiant, dans quel compartiment on a ajouté de l'eau.

b - Soit π la fonction des concentrations juste après l'ajout de l'eau. Montrer que $V_e = \left(\frac{\pi}{K} - 1\right) \cdot V$

c - Sachant que $\pi = 10^{\frac{E^0 - E'}{0,03}}$, Calculer la valeur de V_e .

Réponse :

1⁰) a -



$E = V_{\text{droite}} - V_{\text{gauche}} > 0$ L'électrode en Cd est le pôle (+) de la pile alors que l'électrode en Fe est son pôle (-).

b - Lorsque la pile débite :

- au pôle (+) : réduction $\rightarrow \text{Cd}^{2+} + 2e^- \rightarrow \text{Cd}$

- au pôle (-) : oxydation $\rightarrow \text{Fe} \rightarrow \text{Fe}^{2+} + 2e^-$

c - La réaction redox spontanée qui a lieu lorsque la pile débite est : $\text{Fe} + \text{Cd}^{2+} \rightarrow \text{Fe}^{2+} + \text{Cd}$

2⁰) a - $[\text{Cd}^{2+}]_i = \frac{n_i(\text{Cd}^{2+})}{V_1} \rightarrow V_1 = \frac{n_i(\text{Cd}^{2+})}{[\text{Cd}^{2+}]_i} \xrightarrow{\text{A.N.}} V_1 = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{10^{-1}} \text{ et } V_1 = 0,2 \text{ L.}$

$$[\text{Fe}^{2+}]_i = \frac{n_i(\text{Fe}^{2+})}{V_2} \rightarrow V_2 = \frac{n_i(\text{Fe}^{2+})}{[\text{Fe}^{2+}]_i} \xrightarrow{\text{A.N.}} V_2 = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} \text{ et } V_2 = 0,2 \text{ L.}$$

On remarque que : $V_1 = V_2 = V = 200 \text{ mL}$.

b - La réaction associée à la pile est : $\text{Fe} + \text{Cd}^{2+} \rightleftharpoons \text{Fe}^{2+} + \text{Cd}$, $\pi = \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{[\text{Cd}^{2+}]}$

La loi de Nernst : $E = E^0 - 0,03 \log \pi \rightarrow E^0 = E + 0,03 \log \pi$

A.N : $E^0 = 0,1 + 0,03 \log \frac{10^{-3}}{10^{-1}} \text{ et } E^0 = 0,04 \text{ V.}$

c - Lorsque la pile est usée : $E = 0$ et $\pi_{\text{eq}} = K \rightarrow 0 = E^0 - 0,03 \log K \rightarrow \log K = \frac{E^0}{0,03} \text{ et } K = 10^{\frac{E^0}{0,03}}$

A.N : $K = 10^{\frac{0,04}{0,03}} \text{ et } K = 21,54$.

d - $K = \frac{[\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}}} \xrightarrow{V_1=V_2} K = \frac{n_{\text{eq}}(\text{Fe}^{2+})}{n_{\text{eq}}(\text{Cd}^{2+})} \rightarrow K = \frac{2 \cdot 10^{-4} + x_f}{2 \cdot 10^{-2} - x_f} \rightarrow x_f = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot K - 2 \cdot 10^{-4}}{1 + K}$

A.N : $x_f = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 21,54 - 2 \cdot 10^{-4}}{1 + 21,54} \text{ et } x_f = 19,1 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$

$$[\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{n_{\text{eq}}(\text{Cd}^{2+})}{V_1} = \frac{n_i(\text{Cd}^{2+}) - x_f}{V_1} \xrightarrow{\text{A.N.}} [\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{2 \cdot 10^{-2} - 1,91 \cdot 10^{-2}}{0,2}$$

et $[\text{Cd}^{2+}]_{\text{eq}} = 0,45 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

$$[\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{n_{\text{eq}}(\text{Fe}^{2+})}{V_2} = \frac{n_i(\text{Fe}^{2+}) + x_f}{V_2} \xrightarrow{\text{A.N.}} [\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{2 \cdot 10^{-4} + 1,91 \cdot 10^{-2}}{0,2}$$

et $[\text{Fe}^{2+}]_{\text{eq}} = 9,65 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

$$3^0) a - E' < 0 \rightarrow \pi > K \text{ avec } K = \frac{[Fe^{2+}]_{eq}}{[Cd^{2+}]_{eq}}$$

La dilution diminue la concentration $\xrightarrow{\pi > K}$ on ajoute de l'eau dans le compartiment de droite

$$b - \pi = \frac{[Fe^{2+}]_{eq}}{[Cd^{2+}]} \text{ avec } [Cd^{2+}] = \frac{[Cd^{2+}]_{eq} \cdot V}{V + V_e} \rightarrow \pi = \frac{[Fe^{2+}]_{eq}}{[Cd^{2+}]} \cdot \frac{V + V_e}{V} \xrightarrow{K = \frac{[Fe^{2+}]_{eq}}{[Cd^{2+}]_{eq}}} \pi = K \cdot \frac{V + V_e}{V}$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{K} = \frac{V + V_e}{V} \rightarrow V + V_e = \frac{\pi}{K} \cdot V \rightarrow V_e = \frac{\pi}{K} \cdot V - V \text{ et } V_e = \left(\frac{\pi}{K} - 1 \right) \cdot V$$

$$c - V_e = \left(\frac{10^{\frac{E^0 - E'}{0,03}}}{K} - 1 \right) \cdot V \xrightarrow{A.N} V_e = \left(\frac{10^{\frac{(0,04) - (-0,01)}{0,03}}}{21,54} - 1 \right) \cdot 0,2 \text{ et } V_e = 0,231 L.$$

Exercice 9 :

1⁰) On considère la pile électrochimique schématisée ci-contre :
Les deux compartiments de la pile ont un même volume $V = 0,1 L$.
La valeur de la f é m standard de cette pile est $E^0 = 0,05 V$.

a - Préciser le rôle du pont salin.

b - Donner le symbole de la pile considérée.

c - Ecrire l'équation de la réaction associée à cette pile.

2⁰) a - Quel est la valeur de la f é m E de la pile ? En déduire sa polarité.

b - Ecrire alors l'équation de la réaction spontanée qui a lieu lorsque la pile débite.

c - Calculer la valeur de la constante d'équilibre K relative à la réaction associée à la pile.

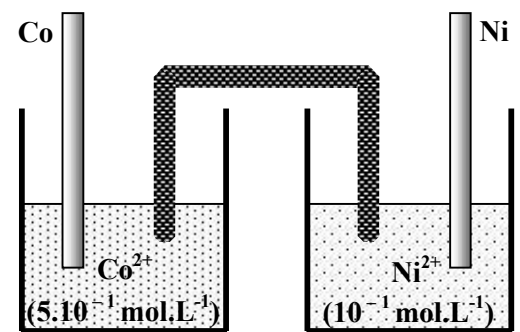
d - Déterminer les molarités des ions Co^{2+} et Ni^{2+} lorsque la pile ne débite plus (pile usée).

3⁰) Quand la pile est usée, elle ne débite plus. On ajoute alors dans un des deux compartiments un volume V_e d'eau, la f é m de la pile devient $E = -0,03 V$.

a - Dans quel compartiment (gauche ou droite) a-t-on ajouté de l'eau ? Justifier la réponse.

$$b - \text{Montrer que } \pi = \frac{[Co^{2+}]}{[Ni^{2+}]} = K \cdot \frac{V + V_e}{V}.$$

$$c - \text{En déduire que } E = -0,03 \log \frac{V + V_e}{V}. \text{ Calculer alors la valeur de } V_e.$$



Réponse :

1⁰) a - Le pont salin assure :

- la fermeture du circuit électrique qui contient la pile.

- l'électro neutralité des solutions électrolytiques dans les deux compartiments de la pile.

b - $Co | Co^{2+} (5.10^{-1} mol.L^{-1}) || Ni^{2+} (10^{-1} mol.L^{-1}) | Ni$

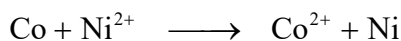
c - La réaction associée à la pile : $Co + Ni^{2+} \rightleftharpoons Co^{2+} + Ni$, $\pi = \frac{[Co^{2+}]}{[Ni^{2+}]}$.

2⁰) a - La loi de Nernst s'écrit : $E = E^0 - 0,03 \log \pi$ avec $\pi = \frac{[Co^{2+}]}{[Ni^{2+}]}$.

$$A.N : E = 0,05 - 0,03 \log \frac{5.10^{-1}}{10^{-1}} \text{ et } E = 0,03 V.$$

$E = V_{droite} - V_{gauche} > 0$ L'électrode en Ni est le pôle (+) de la pile alors que l'électrode en Co est son pôle (-).

b - $E > 0 \rightarrow \pi < K$: La réaction spontanée est dans le sens direct.



c - Lorsque la pile est usée : $E = 0$ et $\pi_{\text{eq}} = K \rightarrow 0 = E^0 - 0,03 \log K \rightarrow \log K = \frac{E^0}{0,03}$ et $K = 10^{\frac{E^0}{0,03}}$

A.N : $K = 10^{\frac{0,05}{0,03}}$ et $K = 46,42$.

d - Les deux compartiments de la pile ont un même volume V , on utilise donc l'avancement volumique :

$$\begin{array}{c} \text{Co} + \text{Ni}^{2+} \rightleftharpoons \text{Co}^{2+} + \text{Ni} \\ \text{à } t = 0 \quad [\text{Ni}^{2+}]_i \quad [\text{Co}^{2+}]_i \\ \text{à } t_{\text{eq}} \quad [\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} = [\text{Ni}^{2+}]_i - y_f \quad [\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} = [\text{Co}^{2+}]_i + y_f \\ \left\{ \begin{array}{l} [\text{Co}^{2+}]_i + [\text{Ni}^{2+}]_i = [\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} + [\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} \\ K = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}} \end{array} \right. \xrightarrow{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} = K[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}} [\text{Co}^{2+}]_i + [\text{Ni}^{2+}]_i = [\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot (K+1) \\ \rightarrow [\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{[\text{Co}^{2+}]_i + [\text{Ni}^{2+}]_i}{(K+1)} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} = \frac{0,5 + 0,1}{(46,42 + 1)} \text{ et } [\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \\ \text{et } [\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} = K \cdot [\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} \xrightarrow{\text{A.N}} [\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} = 46,42 \cdot 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ et } [\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}} = 60 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \end{array}$$

3⁰ **a** - $E < 0 \rightarrow \pi > K$ avec $K = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}}$

La dilution diminue la concentration $\xrightarrow{\pi > K}$ on ajoute de l'eau dans le compartiment de droite

b - $\pi = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Ni}^{2+}]}$ avec $[\text{Ni}^{2+}] = \frac{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}} \cdot V}{V + V_e} \rightarrow \pi = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}} \cdot \frac{V + V_e}{V} \xrightarrow{K = \frac{[\text{Co}^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Ni}^{2+}]_{\text{eq}}}} \pi = K \cdot \frac{V + V_e}{V}$

c - La loi de Nernst s'écrit : $E = E^0 - 0,03 \log \pi \xrightarrow{\pi = K \cdot \frac{V + V_e}{V}} E = E^0 - 0,03 \log \left(K \cdot \frac{V + V_e}{V} \right)$

$$E = E^0 - 0,03 \log K - 0,03 \log \left(\frac{V + V_e}{V} \right) \xrightarrow{E^0 - 0,03 \log K = 0} E = -0,03 \log \left(\frac{V + V_e}{V} \right)$$

$$\log \left(\frac{V + V_e}{V} \right) = -\frac{E}{0,03} \rightarrow \frac{V + V_e}{V} = 10^{\frac{E}{0,03}} \rightarrow V_e = \left(10^{\frac{E}{0,03}} - 1 \right) \cdot V$$

A.N : $V_e = \left(10^{\frac{-0,03}{0,03}} - 1 \right) \cdot 0,1$ et $V_e = 0,9 \text{ L}$.

Etude d'un texte documentaire :

Exercice 1 :

La pile à combustible

Une pile à combustible est un générateur électrochimique d'énergie permettant de transformer directement l'énergie chimique d'un combustible (hydrogène, hydrocarbures, alcools,...) en énergie électrique sans passer par l'énergie thermique. Elle est constituée de deux électrodes (anode et cathode) séparées par un électrolyte, matériau qui bloque le passage des électrons mais laisse circuler les ions.

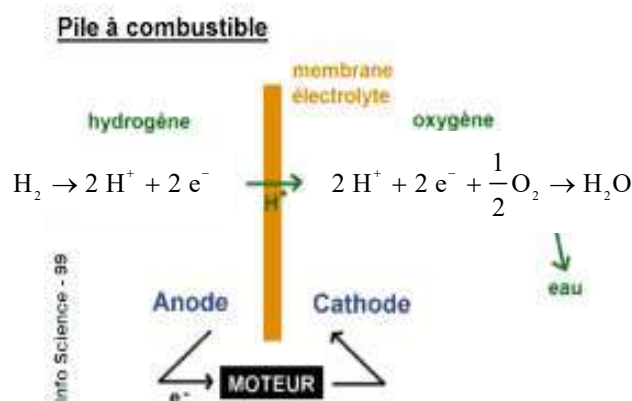
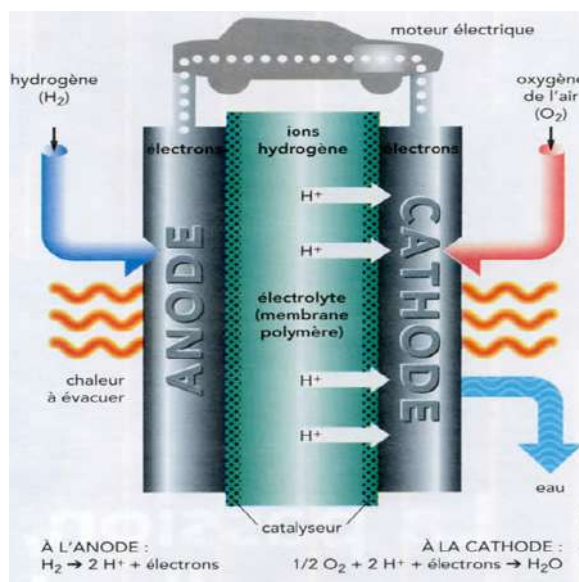
Le combustible à base d'hydrogène H_2 est amené sur l'anode. H_2 va se transformer en ions H^+ et libérer des électrons qui sont captés par l'anode. Les ions H^+ arrivent sur la cathode où ils se combinent aux ions O^{2-} constitués à partir de l'oxygène de l'air, pour former de l'eau.

C'est le transfert des ions H^+ et des électrons vers la cathode qui va produire un courant électrique continu à partir de l'hydrogène.

Cependant la tension ne dépasse pas 0,7 V par cellule; il faut donc utiliser un grand nombre de cellules en série pour obtenir la tension requise.

La réaction est déclenchée à l'aide d'un catalyseur. Il s'agit en général d'une fine couche de platine disposée sur les électrodes (anode et cathode)

Un des points critiques, relatif à la construction de la pile, est de pouvoir contrôler de manière optimale l'évacuation et l'approvisionnement des composés alimentant chaque cellule (généralement de l'hydrogène et de l'air), ou devant être évacués (généralement de l'eau).



D'après **Brice Canonne** et **Yoann Sapanel**, dossiers.
Techno-Science.net

Questions :

1⁰) a - En tant que générateur électrochimique d'énergie, quel est l'utilité d'une pile à combustible ?

b - Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu dans la pile à combustible.

2⁰) a - Quel est le rôle joué par l'électrolyte dans la pile à combustible ?

b - Quelle est la nécessité du catalyseur dans la pile à combustible ?

3⁰) D'après le texte, citer un inconvénient de la pile à combustion au niveau :

- de sa construction ?

- de son utilisation ?

Réponse :

1⁰) a - Une pile à combustible permet de transformer directement l'énergie chimique d'un combustible en énergie électrique sans passer par l'énergie thermique.

b - à l'anode : $H_2 \longrightarrow 2H^+ + 2e^-$

à la cathode : $2H^+ + 2e^- + \frac{1}{2}O_2 \longrightarrow H_2O$

La réaction qui a lieu dans la pile est : $H_2 + \frac{1}{2}O_2 \longrightarrow H_2O$

2⁰) a - L'électrolyte bloque le passage des électrons mais laisse circuler les ions.

b - Le catalyseur est nécessaire pour déclencher la réaction dans la pile.

3⁰) au niveau de la construction : pouvoir contrôler de manière optimale l'évacuation et l'approvisionnement des composés alimentant chaque cellule.

Au niveau de la construction : la faible tension par cellule implique l'utilisation d'un grand nombre de cellules en série pour obtenir la tension requise.

LE POTENTIEL STANDARD D'UN COUPLE REDOX

I / Comparaison des pouvoirs oxydants des couples redox :

Soit une pile électrochimique :



Au pôle $\oplus$: $M^{m+} + m e^- \rightarrow M$ réduction

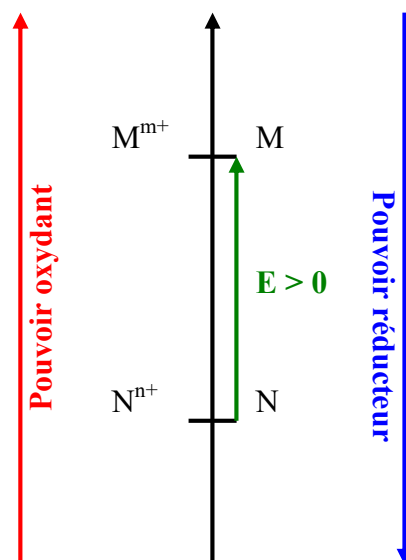
Au pôle $\ominus$: $N \rightarrow N^{n+} + n e^-$ oxydation

Le couple $\left(M^{m+} / M \right)$ a un pouvoir oxydant plus grand que celui du couple $\left(N^{n+} / N \right)$.

Le couple $\left(N^{n+} / N \right)$ a un pouvoir réducteur plus grand que celui du couple $\left(M^{m+} / M \right)$.

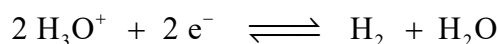
La f.é.m de la pile est : $E = V_{\text{droite}} - V_{\text{gauche}} = V_M - V_N > 0$.

Pour mesurer le potentiel redox d'un couple, il faut le comparer à celui d'une **électrode de référence**.



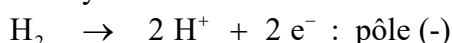
II / La demi-pile standard à hydrogène (E-S-H) :

Par convention, le couple $\left(H_3O^+ / H_2 \right)$ est choisi comme couple de référence.

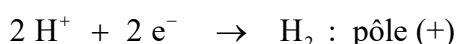


Au niveau de l'électrode en platine on aura :

- soit une oxydation :

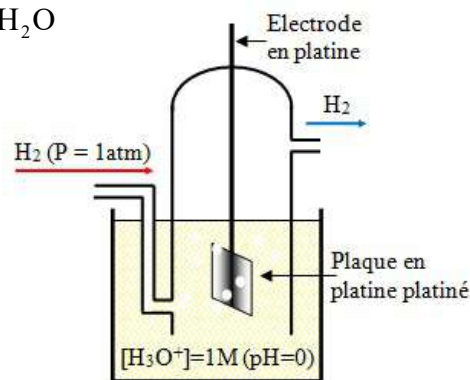


- soit une réduction :



Le potentiel de cette électrode est pris par convention égal à zéro.

$$V_{E-S-H} = 0 \text{ V}$$



III / Le potentiel standard d'un couple redox :

Pour mesurer le potentiel d'un couple redox, il faut le comparer au potentiel nul du couple de référence.

Le potentiel redox d'un couple dépend de la concentration de la solution.

Pour des solutions molaires, le potentiel mesuré est appelé potentiel standard du couple redox.

Exemples :

* Soit la pile : $Pt \mid H_2 (1atm), H_3O^+ (1M) \parallel Cu^{2+} (1M) \mid Cu$

$$E^0 = V_{Cu^{2+}/Cu} - V_{H_3O^+/H_2} = 0,34 \text{ V} \quad \text{or} \quad V_{H_3O^+/H_2} = 0 \Rightarrow E^0 = V_{Cu^{2+}/Cu} = E_{Cu^{2+}/Cu}^0 = 0,34 \text{ V}$$

* Soit la pile : $Pt \mid H_2 (1atm), H_3O^+ (1M) \parallel Zn^{2+} (1M) \mid Zn$

$$E^0 = V_{Zn^{2+}/Zn} - V_{H_3O^+/H_2} = -0,76 \text{ V} \quad \text{or} \quad V_{H_3O^+/H_2} = 0 \Rightarrow E^0 = V_{Zn^{2+}/Zn} = E_{Zn^{2+}/Zn}^0 = -0,76 \text{ V}$$

* Pour la pile : $\text{Zn} \mid \text{Zn}^{2+} (1\text{M}) \parallel \text{Cu}^{2+} (1\text{M}) \mid \text{Cu}$

$$E^0 = E^0_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}} - E^0_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}} = (0,34) - (-0,76) = 1,1\text{ V}$$

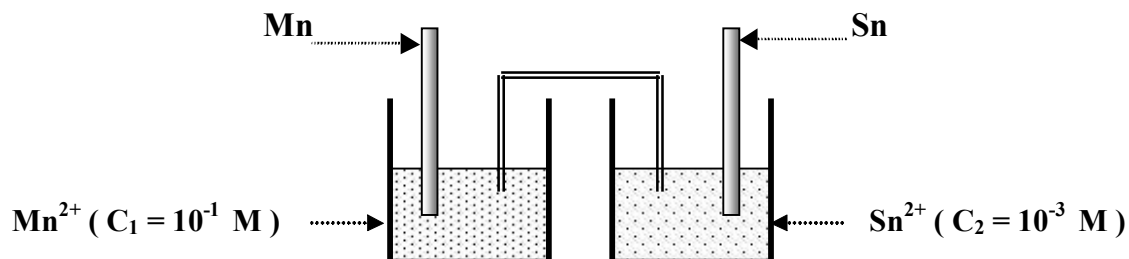
Application 1 :

On donne les potentiels standards des couples redox suivants :

$$E^0 (\text{Mn}^{2+} / \text{Mn}) = -1,19\text{ V}$$

$$E^0 (\text{Sn}^{2+} / \text{Sn}) = -0,14\text{ V}$$

Ces deux couples sont utilisés pour réaliser une pile P dont le schéma est donné ci-dessous :



1⁰) a - Donner le symbole de la pile P.

b - Ecrire l'équation de la réaction associée à cette pile.

c - Calculer la f é m standard E^0 de cette pile.

2⁰) a - Donner l'expression de la f é m E de la pile en fonction de E^0 , $[\text{Mn}^{2+}]$ et $[\text{Sn}^{2+}]$. Calculer E .

b - Ecrire l'équation de la transformation électrochimique qui s'effectue au niveau de chacune des deux électrodes lorsque la pile débite et en déduire alors l'équation de la réaction spontanée qui se produit dans la pile lorsqu'elle débite.

3⁰) La pile P alimente un circuit électrique, elle débite alors un courant dans ce circuit.

a - Comment varie La f é m E de la pile au cours du temps? Justifier la réponse.

b - A un instant t , la mesure de la f é m de la pile donne $E = 0,30\text{ V}$.

Calculer à cet instant t la valeur de la fonction des concentrations $\pi = \frac{[\text{Mn}^{2+}]}{[\text{Sn}^{2+}]}$.

4⁰) Lorsque la pile ne débite plus :

a - Calculer la valeur de la constante d'équilibre K

b - Déterminer les molarités des ions Mn^{2+} et Sn^{2+} . On supposera que les deux compartiments de la pile ont un même volume.

Réponse :

1⁰) a - $\text{Mn} \mid \text{Mn}^{2+} (10^{-1}\text{ M}) \parallel \text{Sn}^{2+} (10^{-3}\text{ M}) \mid \text{Sn}$

b - $\text{Mn} + \text{Sn}^{2+} \rightleftharpoons \text{Mn}^{2+} + \text{Sn}$

c - $E^0 = E^0 (\text{Sn}^{2+} / \text{Sn}) - E^0 (\text{Mn}^{2+} / \text{Mn})$. A.N: $E^0 = (-0,14) - (-1,19)$ et $E^0 = 1,05\text{ V}$

2⁰) a - $E = E^0 - 0,03 \log \frac{[\text{Mn}^{2+}]}{[\text{Sn}^{2+}]}$. A.N : $E = 1,05 - 0,03 \log \frac{10^{-1}}{10^{-3}}$ et $E = 0,99\text{ V}$

b - $E = V_{\text{droite}} - V_{\text{gauche}} > 0 \rightarrow$

- à la borne positive (électrode droite) : $\text{Sn}^{2+} + 2\text{e}^- \longrightarrow \text{Sn}$ (réduction)

- à la borne négative (électrode gauche) : $\text{Mn} \longrightarrow \text{Mn}^{2+} + 2\text{e}^-$ (oxydation)

La réaction spontanée qui se produit dans la pile est : $\text{Mn} + \text{Sn}^{2+} \longrightarrow \text{Mn}^{2+} + \text{Sn}$

3⁰) a - Lorsque la pile débite, $\pi = \frac{[\text{Mn}^{2+}]}{[\text{Sn}^{2+}]}$ augmente

or $E = E^0 - 0,03 \log \pi$ donc au cours du temps, la f é m E diminue.

b - $E = E^0 - 0,03 \log \pi \longrightarrow \pi = 10^{\frac{E^0 - E}{0,03}}$. A.N : $\pi = 10^{\frac{1,05 - 0,3}{0,03}}$ et $\pi = 10^{25}$.

4⁰) a - Lorsque la pile ne débite plus $\longrightarrow E = 0$ et $\pi = K$

On a alors $0 = E^0 - 0,03 \log K$ donc $K = 10^{\frac{E^0}{0,03}}$. A.N : $K = 10^{\frac{1,05}{0,03}}$ et $K = 10^{35}$

b -

Equation de la réaction		Mn	+	Sn ²⁺	$\longrightarrow$	Mn ²⁺	+	Sn
Etat du système	avancement volumique	Concentrations molaires						
Etat initial	0	constante		C ₂		C ₁		constante
Etat final	y _f	constante		C ₂ - y _f		C ₁ + y _f		constante

$$K = \frac{[\text{Mn}^{2+}]}{[\text{Sn}^{2+}]} = \frac{C_1 + y_f}{C_2 - y_f} \longrightarrow y_f = \frac{C_2 \cdot K - C_1}{1 + K} \approx C_2 \text{ car } K \text{ est très grand.}$$

donc $[\text{Mn}^{2+}]_{\text{eq}} = C_1 + C_2 = 1,01 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{Sn}^{2+}]_{\text{eq}} = 0$ (sous forme de traces)

IV / Classification des couples redox :

- Dans une pile constituée de deux couples redox à l'état standard, le pôle positif correspond au couple dont le potentiel standard est le plus élevé.
- La tension aux bornes de la pile standard est égale à la différence des potentiels standards des deux couples qui la forment.
- Le pouvoir réducteur d'un couple redox augmente lorsque le potentiel standard de ce couple diminue.

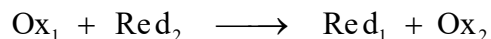
	E^0 (V)	
$\uparrow$ Pouvoir oxydant		$\downarrow$ Pouvoir réducteur
F ₂	2,85	2 F ⁻
Cu ²⁺	0,34	Cu
2 H ⁺	0	H ₂
Fe ²⁺	- 0,44	Fe
Zn ²⁺	- 0,76	Zn

V / Prévision du sens d'évolution des réactions redox :

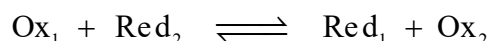
1⁰) Règle de Gamma :

L'oxydant du couple de potentiel le plus élevé oxyde le réducteur du couple de potentiel le plus bas.

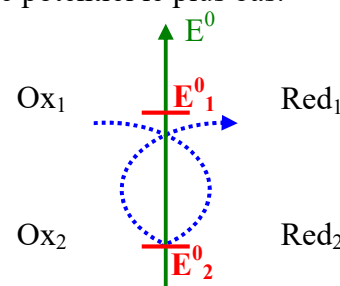
La réaction spontanée est :



Considérons la pile électrochimique dont la réaction associée est :



La f é m standard de cette pile sera : $E^0 = E^0_1 - E^0_2 > 0$



2⁰) Application :

Soit la pile standard : Ni | Ni²⁺ || Cu²⁺ | Cu

On donne : $E^0(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = 0,34 \text{ V}$ et $E^0(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}) = - 0,23 \text{ V}$

* La réaction associée à cette pile est : $\text{Cu}^{2+} + \text{Ni} \rightleftharpoons \text{Cu} + \text{Ni}^{2+}$, $\pi = \frac{[\text{Ni}^{2+}]}{[\text{Cu}^{2+}]}$

* La f é m de cette pile est : $E^0 = E^0(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) - E^0(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni})$

A.N : $E^0 = (0,34) - (- 0,23)$ et $E^0 = 0,57 \text{ V}$

* $E = E^0 \xrightarrow{E^0 > 0} E > 0$. La réaction spontanée est : $\text{Cu}^{2+} + \text{Ni} \longrightarrow \text{Cu} + \text{Ni}^{2+}$

* La loi de Nernst correspondante est : $E = E^0 - 0,03 \log \pi$ avec $\pi = \frac{[Ni^{2+}]}{[Cu^{2+}]}$

* Lorsque la pile ne débite plus ($E = 0$), un équilibre chimique est atteint ($\pi_{eq} = K$)

avec $0 = E^0 - 0,03 \log K \rightarrow \log K = \frac{E^0}{0,03}$ et $K = 10^{\frac{E^0}{0,03}}$.

A.N : $K = 10^{\frac{0,57}{0,03}}$ et $K = 10^{19}$

Application 2 :

1⁰) En vous aidant de la table de classement des couples réducteur, indiquer si une réaction est possible entre les réactifs proposés. Si oui, écrire l'équation de la réaction correspondante:

Réactifs	Oui / Non	Equation de la réaction
Fe et Ag^+		
Fe^{2+} et Ag		
Cu et Ag^+		
Zn^{2+} et Fe		
Pb et Fe^{2+}		

Ox.	E^0 (V)	Red.
Au^{3+}	1,50	Au
Pt^{2+}	1,00	Pt
Hg^{2+}	0,86	Hg
Ag^+	0,80	Ag
Cu^{2+}	0,34	Cu
H^+	0,00	H_2
Pb^{2+}	-0,13	Pb
Ni^{2+}	-0,23	Ni
Fe^{2+}	-0,44	Fe
Zn^{2+}	-0,76	Zn
Al^{3+}	-1,66	Al

2⁰) On réalise la pile : $Fe | Fe^{2+} (1M) || Cu^{2+} (1M) | Cu$

a - Faire un schéma de la pile en indiquant son pôle positif et le sens du courant dans un circuit extérieur à la pile.

b - Ecrire l'équation de la réaction associée à la pile.

c - Calculer la f é m de la pile.

d - Ecrire les équations des réactions aux électrodes.

3⁰) La f é m de la pile : $Sn | Sn^{2+} (1M) || Pb^{2+} (1M) | Pb$ est $E^0 = 0,01$ V.

a - Ecrire l'équation de la réaction associée à cette pile.

b - Quel est le potentiel normal du couple (Sn^{2+}/Sn) ?

c - Déterminer la f é m et la polarité de la pile : $Sn | Sn^{2+} (1M) || Ni^{2+} (1M) | Ni$

d - Ecrire alors l'équation de réaction spontanée ayant lieu dans cette pile lorsqu'elle débite.

Réponse :

1⁰)

Réactifs	Oui / Non	Equation de la réaction
Fe et Ag^+	Oui	$Fe + 2 Ag^+ \longrightarrow Fe^{2+} + 2 Ag$
Fe^{2+} et Ag	Non	
Cu et Hg^{2+}	Oui	$Cu + Hg^{2+} \longrightarrow Cu^{2+} + Hg$
Zn^{2+} et Fe	Non	
Pb et Fe^{2+}	Non	

2⁰) a - La pile est standard et $E^0_{(Cu^{2+}/Cu)} > E^0_{(Fe^{2+}/Fe)}$

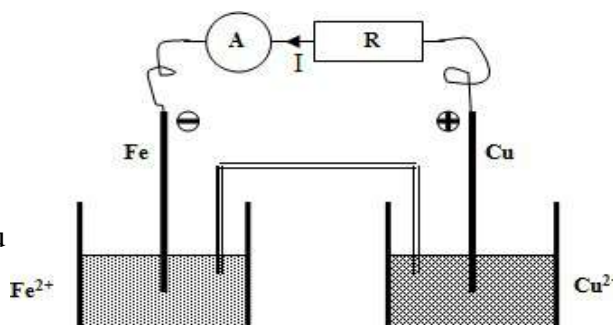
L'électrode en Cu joue le rôle de pôle positif pour la pile.
Dans un circuit électrique, le courant circule du pôle positif vers le pôle négatif de la pile.

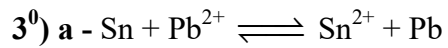
b - la réaction associée à la pile : $Fe + Cu^{2+} \rightleftharpoons Fe^{2+} + Cu$

c - $E^0 = E^0_{(Cu^{2+}/Cu)} - E^0_{(Fe^{2+}/Fe)} = (0,34) - (-0,44) = 0,78$ V.

d - Au pôle positif : $Cu^{2+} + 2 e^- \longrightarrow Cu$

Au pôle négatif : $Fe \longrightarrow Fe^{2+} + 2 e^-$



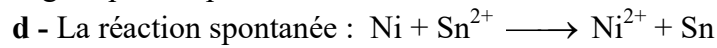


b - $E^0 = E^0_{\left(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb}\right)} - E^0_{\left(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn}\right)} \longrightarrow E^0_{\left(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn}\right)} = E^0_{\left(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb}\right)} - E^0$

A.N : $E^0_{\left(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn}\right)} = (-0,13) - (0,01)$ et $E^0_{\left(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn}\right)} = -0,14 \text{ V}$.

c - $E^0 = E^0_{\left(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}\right)} - E^0_{\left(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn}\right)}$. A.N : $E^0 = (-0,23) - (0,14)$ et $E^0 = -0,1 \text{ V}$.

$E^0 < 0 \rightarrow$ l'électrode en Sn joue le rôle de pôle positif pour la pile et l'électrode en Ni joue le rôle de pôle négatif pour la pile



Pour en savoir plus

1⁰) L'électrode de référence :

Expérimentalement, seule la différence de potentiel entre les électrodes d'une pile est mesurable. Le signe de cette tension indique la polarité de la pile et par conséquent permet de déduire la réaction d'oxydoréduction spontanée qui a lieu lorsque la pile débite.

La comparaison des deux potentiels d'électrodes d'une pile permet de préciser le rôle oxydant ou réducteur que joue chacun des deux couples redox qui constituent cette pile. Cette comparaison est relative et dépend des conditions physico-chimiques dans lesquelles sont pris les couples redox constituant la pile.

La mesure de la différence de potentiel par rapport à une électrode de référence permet de classer les potentiels des différents couples redox par rapport au potentiel du couple de référence.

a - L'électrode standard à hydrogène (ESH) :

L'électrode standard à hydrogène est l'électrode de référence absolue. Son potentiel est par convention égal à **zéro** quelle que soit la température.

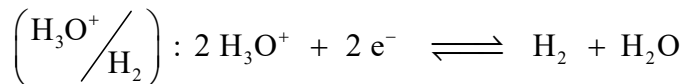
Cette électrode est associée au couple redox $\left(\text{H}_3\text{O}^+ / \text{H}_2 \right)$ pris à l'état standard, ce qui stipule que :

- La pression $P_{\text{H}_2} = 1 \text{ atm}$ et l'hydrogène a un comportement de gaz parfait.
- La concentration molaire $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ et l'ion H_3O^+ a un comportement idéal en solution.

Comme les comportements idéaux sont non réalisables en pratique, cette électrode reste hypothétique.

b - L'électrode normale à hydrogène (ENH) :

L'électrode normale à hydrogène (ENH) est la réalisation pratique la plus proche de l'électrode standard à hydrogène (ESH) mais sans le comportement idéal des espèces du couples redox $\left(\text{H}_3\text{O}^+ / \text{H}_2 \right)$.



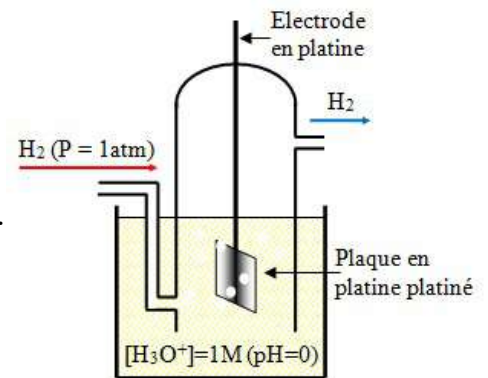
Cette électrode vérifie :

- La pression $P_{\text{H}_2} = 1 \text{ atm}$
- La concentration molaire $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1 \text{ mol.L}^{-1}$

A 25⁰C, le potentiel de l'électrode normale à hydrogène est $E_{\text{ENH}}^0 \approx 0 \text{ V}$.

Au niveau de l'électrode en platine, on a :

- soit une oxydation : $\text{H}_2 \rightarrow 2 \text{H}^+ + 2 \text{e}^-$: pôle (-)
- soit une réduction : $2 \text{H}^+ + 2 \text{e}^- \rightarrow \text{H}_2$: pôle (+)



Remarque :

Dans la pratique, c'est l'électrode normale à hydrogène qui est utilisée dans la mesure expérimentale de la valeur du potentiel d'un couple redox.

2⁰) Classification des couples redox :

a - Le potentiel standard d'un couple redox :

- Le potentiel d'un couple redox $\left(\text{Ox} / \text{Red} \right)$ est égal à la f é m de la pile constituée par l'électrode associée au couple $\left(\text{Ox} / \text{Red} \right)$ considéré à droite et l'électrode standard à hydrogène à gauche.

La f é m de cette pile s'écrit : $E = V_{\left(\text{Ox} / \text{Red} \right)} - E_{\text{ENH}}^0 \xrightarrow{E_{\text{ENH}}^0 = 0 \text{ V}} V_{\left(\text{Ox} / \text{Red} \right)} = E$.

- Lorsque le couple (Ox/Red) est pris dans les conditions standards ($\theta = 25^\circ\text{C}$, $P = 1\text{atm}$ et $C = 1\text{mol.L}^{-1}$), la f é m mesurée est la f é m standard E^0 . Le potentiel du couple (Ox/Red) est dans ce cas appelé potentiel standard du couple redox (Ox/Red) et il est noté $E^0_{(\text{Ox}/\text{Red})}$.

La f é m standard de la cette pile s'écrit : $E^0 = E^0_{(\text{Ox}/\text{Red})}(\text{droite}) - E^0_{\text{ENH}}(\text{gauche}) \xrightarrow{E^0_{\text{ENH}}=0\text{V}} E^0_{(\text{Ox}/\text{Red})} = E^0$

b - Classification des couples redox :

- La comparaison des valeurs du potentiel standard pour deux couples redox permet de comparer leurs pouvoirs oxydants (ainsi que leurs pouvoirs réducteurs) :
 - Le pouvoir oxydant d'un couple redox augmente lorsque le potentiel standard de ce couple croît.
 - Le pouvoir réducteur d'un couple redox diminue lorsque le potentiel standard de ce couple décroît.
- La connaissance des potentiels standards des couples redox permet de les classer par pouvoir oxydant (ou par pouvoir réducteur) croissant (ou décroissant).

	forme oxydée	E^0 (V)	forme réduite
Pouvoir oxydant croissant ↑	Ag^+	0,80	Ag
	Fe^{3+}	0,77	Fe^{2+}
	O_2	0,68	H_2O_2
	I_2	0,62	I^-
	Cu^{2+}	0,34	Cu
	CH_3CHO	0,19	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$
	SO_4^{2-}	0,17	SO_2
	$\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$	0,08	$\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$
	H^+	0,00	H_2
	CH_3COOH	-0,12	CH_3CHO
	Pb^{2+}	-0,13	Pb
	Sn^{2+}	-0,14	Sn
	Ni^{2+}	-0,23	Ni
	Co^{2+}	-0,29	Co
	PbSO_4	-0,36	Pb
	Cd^{2+}	-0,40	Cd
Fe^{2+}	-0,44	Fe	
Zn^{2+}	-0,76	Zn	
			Pouvoir réducteur croissant ↓

c - La réaction d'oxydoréduction :

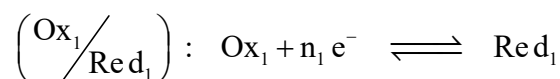
Une réaction d'oxydoréduction met en jeu deux couples redox.

La forme oxydée du couple de potentiel standard le plus grand oxyde la forme réduite du couple de potentiel standard le plus petit.

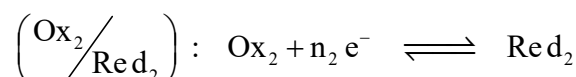
Cette proposition permet de prévoir si, en mettant en contact l'oxydant d'un couple et le réducteur d'un autre couple, une réaction d'oxydoréduction spontanée va avoir lieu ou non.

Considérons les deux couples redox :

- $(\text{Ox}_1/\text{Red}_1)$ de potentiel standard E_1^0 et mettant en jeu $n_1 e^-$

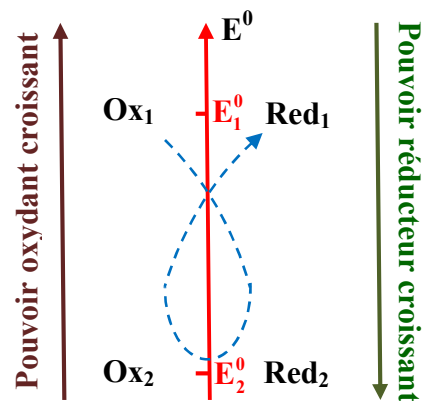


- $(\text{Ox}_2/\text{Red}_2)$ de potentiel standard E_2^0 et mettant en jeu $n_2 e^-$



Si $E_1^0 > E_2^0$, la réaction spontanée est : $n_2 \text{Ox}_1 + n_1 \text{Red}_2 \longrightarrow n_2 \text{Red}_1 + n_1 \text{Ox}_2$

Schématiquement, cette proposition est traduite par la règle de Gamma.



3⁰) L'équation de Nernst :

Considérons un couple redox $\left(\text{Ox} / \text{Red}\right) : \alpha \text{Ox} + n e^{-} \rightleftharpoons \beta \text{Red}$

Si on assimile les activités des espèces chimiques à leurs concentrations molaires, le potentiel du couple

redox est donné par l'équation de Nernst : $E_{(\text{Ox}/\text{Red})} = E_{(\text{Ox}/\text{Red})}^0 + \frac{R.T}{n.F} . \ln \left(\frac{[\text{Ox}]^{\alpha}}{[\text{Red}]^{\beta}} \right)$.

E : potentiel du couple redox

$E_{(\text{Ox}/\text{Red})}^0$: potentiel standard du couple redox

R : constante des gaz parfaits ($R = 8,314\,462\,1\text{ J mol}^{-1}\text{ K}^{-1}$)

T : température absolue

n : nombre d'électrons mis en jeu

F : Constante de faraday ($F = 96\,485\text{ C mol}^{-1}$)

Sachant que : $\ln(x) = \ln(10) . \log(x)$ et à $\theta = 25^{\circ}\text{C}$, $\frac{R.T}{F} . \ln(10) = \frac{8,3144621.298,15}{96485} . \ln(10) = 0,059 \approx 0,06$

Il vient alors que : $E_{(\text{Ox}/\text{Red})} = E_{(\text{Ox}/\text{Red})}^0 + \frac{0,06}{n} . \log \left(\frac{[\text{Ox}]^{\alpha}}{[\text{Red}]^{\beta}} \right)$

Remarque :

Considérons une pile du type Daniell : $M_1 \mid M_1^{n+} \parallel M_2^{n+} \mid M_2$

La réaction associée à cette pile est : $M_1 + M_2^{n+} \rightleftharpoons M_1^{n+} + M_2$, $\pi = \frac{[M_1^{n+}]}{[M_2^{n+}]}$

La f é m de la pile est : $E = V_{\text{droite}} - V_{\text{gauche}} \rightarrow E = E_{(M_2^{2+}/M_2)} - E_{(M_1^{2+}/M_1)}$

$$E = \left[E_{(M_2^{2+}/M_2)}^0 + \frac{0,06}{n} . \log([M_2^{2+}]) \right] - \left[E_{(M_1^{2+}/M_1)}^0 + \frac{0,06}{n} . \log([M_1^{2+}]) \right]$$

$$E = \left[E_{(M_2^{2+}/M_2)}^0 - E_{(M_1^{2+}/M_1)}^0 \right] + \frac{0,06}{n} \left[. \log([M_2^{2+}]) - \log([M_1^{2+}]) \right]$$

Soit $E^0 = E_{(M_2^{2+}/M_2)}^0 - E_{(M_1^{2+}/M_1)}^0$ la f é m standard de la pile, on écrit : $E = E^0 + \frac{0,06}{n} \left[. \log \left(\frac{[M_2^{2+}]}{[M_1^{2+}]} \right) \right]$

Il vient alors que : $E = E^0 - \frac{0,06}{n} \log \pi$ avec $\pi = \frac{[M_1^{n+}]}{[M_2^{n+}]}$

Applications

Exercice 1 :

1⁰) On considère la pile électrochimique (P₁) schématisée ci-dessous :

a - Quel est le rôle du pont salin ?

b - Quels sont les couples redox mis en jeu dans la pile (P₁) considérée ?

c - Ecrire le symbole de cette pile.

d - La f é m de cette pile est : $E(P_1) = -0,44 \text{ V}$.

En déduire le potentiel standard du couple $(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe})$.

2⁰) On considère maintenant la pile électrochimique (P₂) symbolisée par :

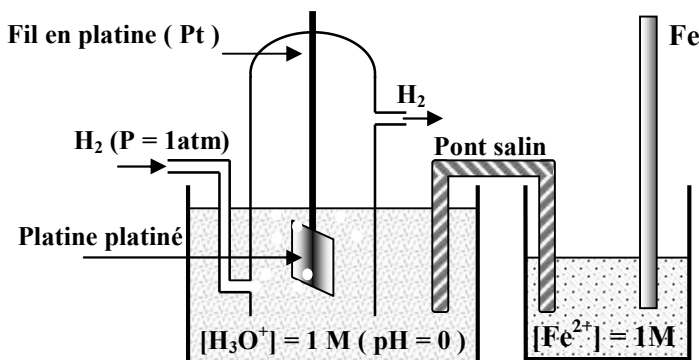


a - Ecrire l'équation de la réaction chimique associée à cette pile.

b - La mesure de la f é m de cette pile donne : $E(P_2) = 1,30 \text{ V}$. Montrer que le potentiel standard du couple

$(\text{Pd}^{2+}/\text{Pd})$ est $E_{\text{Pd}^{2+}/\text{Pd}}^0 = 0,83 \text{ V}$.

3⁰) Classer les deux couples redox $(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe})$ et $(\text{Pd}^{2+}/\text{Pd})$ par pouvoir réducteur croissant.



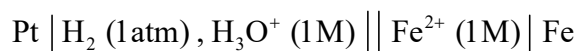
Réponse :

1⁰) a - Le pont électrolytique assure :

- la fermeture du circuit électrique comportant la pile.
- la neutralité électrique des solutions dans les deux compartiments de la pile.

b - Les couples redox mis en jeu sont : $(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2)$ et $(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe})$.

c - Le symbole de la pile est :



d - La pile considérée étant à l'état standard : $E(P_1) = E^0(P_1) = -0,44 \text{ V}$

$$E^0(P_1) = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^0 - E_{\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2}^0 \quad \text{or} \quad E_{\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2}^0 = 0 \Rightarrow E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^0 = E^0(P_1) \quad \text{et} \quad E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^0 = -0,44 \text{ V}.$$

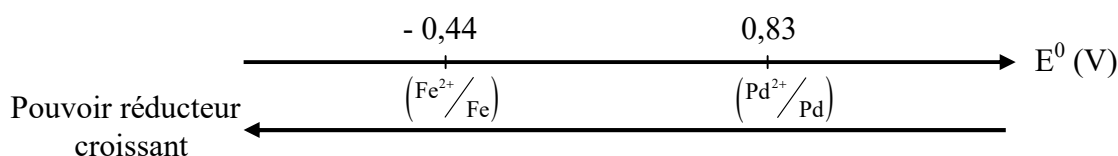
2⁰) a - La réaction associée à la pile : $\text{Fe} + \text{Pd}^{2+} \rightleftharpoons \text{Fe}^{2+} + \text{Pd}$

$$\text{b - D'après la loi de Nerst : } E(P_2) = E^0(P_2) - 0,03 \text{ Log} \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{[\text{Pd}^{2+}]} = \left(E_{\text{Pd}^{2+}/\text{Pd}}^0 - E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^0 \right) - 0,03 \text{ Log} \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{[\text{Pd}^{2+}]}$$

$$\text{Il vient alors que : } E_{\text{Pd}^{2+}/\text{Pd}}^0 = E(P_2) + E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^0 + 0,03 \text{ Log} \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{[\text{Pd}^{2+}]}$$

$$\text{A.N : } E_{\text{Pd}^{2+}/\text{Pd}}^0 = 1,3 - 0,44 + 0,03 \text{ Log} \frac{10^{-2}}{10^{-1}} \quad \text{et} \quad E_{\text{Pd}^{2+}/\text{Pd}}^0 = 0,83 \text{ V}.$$

3⁰) Le pouvoir réducteur d'un couple redox augmente lorsque le potentiel standard de ce couple diminue.



Le couple redox $(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe})$ a donc un pouvoir réducteur plus grand que celui du couple redox $(\text{Pd}^{2+}/\text{Pd})$.

Exercice 2 :

1⁰) On considère la pile électrochimique (P) schématisée ci-contre :
La mesure de la f é m de cette pile donne $E = +1,2V$.

a - Quel est le rôle du pont salin ?

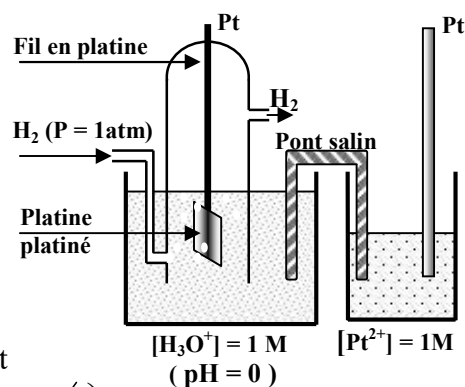
b - Quels sont les couples redox mis en jeu dans la pile considérée ?

2⁰) a - Déterminer la polarité de la pile (P).

b - Déduire alors l'équation de la transformation électrochimique qui s'effectue à chacune de ses deux électrodes.

c - Calculer la valeur du potentiel standard $E^0_{Pt^{2+}/Pt}$ du couple (Pt^{2+}/Pt) .

3⁰) Le tableau ci-dessous donne les f é m E de différentes piles qui sont constituées chacune d'un couple (M^{2+}/M) et du couple de référence (H_3O^+/H_2) :



Symbole de la pile	E (V)
$Pt H_2(P = 1atm), H_3O^+ (1mol.L^{-1}) Fe^{2+} (1mol.L^{-1}) Fe$	- 0,44
$Pt H_2(P = 1atm), H_3O^+ (1mol.L^{-1}) Cu^{2+} (1mol.L^{-1}) Cu$	+ 0,34
$Pt H_2(P = 1atm), H_3O^+ (1mol.L^{-1}) Zn^{2+} (1mol.L^{-1}) Zn$	- 0,76
$Pb Pb^{2+} (1mol.L^{-1}) H_3O^+ (1mol.L^{-1}), H_2(P = 1atm) Pt$	+ 0,13

a - Recopier et compléter le tableau suivant :

Couple (M^{2+}/M)	(Fe^{2+}/Fe)	(Cu^{2+}/Cu)	(Zn^{2+}/Zn)	(Pb^{2+}/Pb)
Potentiel standard $E^0_{M^{2+}/M}$ (V)				

b - Classer par pouvoir oxydant croissant les différents couples redox mis en jeu dans les piles ci-dessus.

Réponse :

1⁰) a - Le pont salin (ou électrolytique) assure :

- la fermeture du circuit électrique comportant la pile.
- la neutralité électrique des solutions dans les deux compartiments de la pile.

b - Les couples redox mis en jeu sont : (H_3O^+/H_2) et (Pt^{2+}/Pt) .

2⁰) a - $E = V_D - V_G > 0$ donc l'électrode en Pt (à droite) est le pôle positif (+) de la pile alors que l'électrode standard à hydrogène (à gauche) est son pôle négatif (-).

b - pôle positif : $Pt^{2+} + 2e^- \rightarrow Pt$: réduction

pôle négatif : $H_2 + 2H_2O \rightarrow 2H_3O^+ + 2e^-$: oxydation

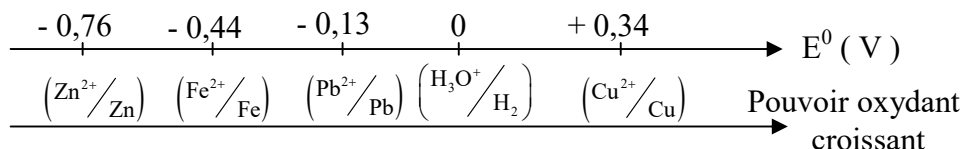
c - La pile considérée étant à l'état standard : $E(P) = E^0(P) = 1,2V$

$$E^0(P) = E^0_{Pt^{2+}/Pt} - E^0_{H_3O^+/H_2} \text{ or } E^0_{H_3O^+/H_2} = 0 \text{ (potentiel de référence)} \Rightarrow E^0_{Pt^{2+}/Pt} = E^0(P) \text{ et } E^0_{Pt^{2+}/Pt} = 1,2V.$$

3⁰) a - $E^0_{pile} = E^0_{couple \text{ redox à droite}} - E^0_{couple \text{ redox à gauche}}$

Couple (M^{2+}/M)	(Fe^{2+}/Fe)	(Cu^{2+}/Cu)	(Zn^{2+}/Zn)	(Pb^{2+}/Pb)
Potentiel standard $E^0_{M^{2+}/M}$ (V)	- 0,44	+ 0,34	- 0,76	- 0,13

b - Le pouvoir oxydant d'un couple redox augmente lorsque le potentiel standard de ce couple augmente.



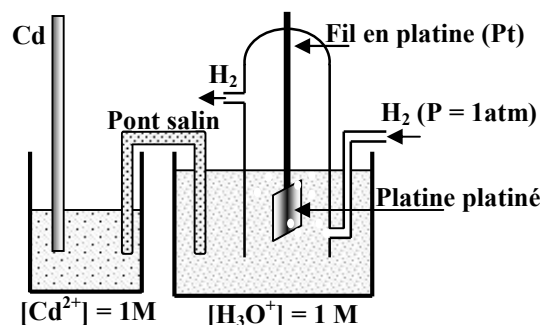
Exercice 3 :

On considère, dans les conditions standards, la pile électrochimique schématisée ci-dessous :

1⁰) a - Préciser le rôle du pont salin.

b - Ecrire le symbole de cette pile.

c - La f é m de cette pile est : $E = 0,40 \text{ V}$. Déduire la valeur du potentiel standard $E^0_{(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd})}$ du couple redox $(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd})$.



2⁰) a - Ecrire l'équation de la transformation électrochimique qui s'effectue à chacune de ses deux électrodes lorsque la pile est en fonctionnement.

b - En déduire alors l'équation de la réaction spontanée qui se produit dans la pile lorsqu'elle débite.

Réponse :

1⁰) a - Le pont salin assure :

- la fermeture du circuit électrique contenant la pile.
- la neutralité électrique des solutions dans les deux compartiments de la pile.

b - $\text{Cd} / \text{Cd}^{2+} (1 \text{ mol.L}^{-1}) \parallel \text{H}_3\text{O}^+ (1 \text{ mol.L}^{-1}), \text{H}_2 (1 \text{ atm}) / \text{Pt}$

c - La pile est à l'état standard $\rightarrow E = E^0 \xrightarrow{E=0,4 \text{ V}} E^0 = 0,4 \text{ V}$.

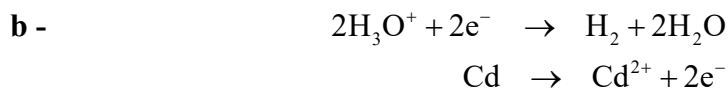
$$E^0 = E^0_{(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2)} - E^0_{(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd})} \rightarrow E^0_{(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd})} = E^0_{(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2)} - E^0 \xrightarrow[\substack{\text{par convention} \\ E^0_{(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2)}=0}]{E^0_{(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2)}=0} E^0_{(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd})} = -E^0 .$$

$$\text{A.N : } E^0_{(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd})} = -0,4 \text{ V} .$$

2⁰) a - $E = V_{\text{droite}} - V_{\text{gauche}} > 0 \rightarrow$ l'électrode en Pt est le pôle (+) et l'électrode en Cd est le pôle (-) :

Au pôle (+) : $2\text{H}_3\text{O}^+ + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$: réduction

Au pôle (-) : $\text{Cd} \rightarrow \text{Cd}^{2+} + 2\text{e}^-$: oxydation



La réaction spontanée : $\text{Cd} + 2\text{H}_3\text{O}^+ \rightarrow \text{Cd}^{2+} + \text{H}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$

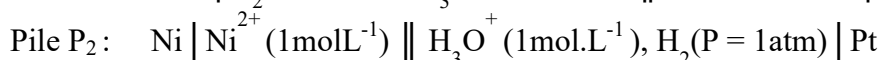
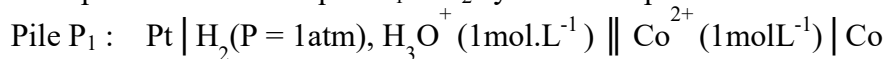
Remarque : la réaction associée à la pile : $\text{Cd} + 2\text{H}_3\text{O}^+ \rightleftharpoons \text{Cd}^{2+} + \text{H}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$

$E > 0 \rightarrow \pi < K \rightarrow$ la réaction spontanée est dans le sens direct :



Exercice 4 :

1⁰) On considère les deux piles électrochimiques P_1 et P_2 symbolisées par :

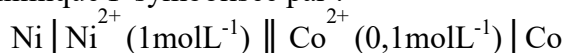


La mesure de la f é m des deux piles P_1 et P_2 donne les résultats suivants : $E_1 = -0,28 \text{ V}$ et $E_2 = 0,25 \text{ V}$.

a - Préciser les valeurs des potentiels normaux des couples rédox mis en jeu dans ces deux piles.

b - Comparer les pouvoirs réducteurs des couples $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2$, Co^{2+}/Co et Ni^{2+}/Ni .

2⁰) On considère la pile électrochimique P symbolisée par :



Les deux compartiments de la pile ont un même volume $V = 0,1 \text{ L}$.

a - Schématiser la pile P et écrire l'équation qui lui est associée.

b - Déterminer la valeur E de la f é m de la pile P.

c - En déduire le sens de la réaction spontanée qui a lieu lorsque la pile débite.

3⁰) On laisse la pile P débiter dans un circuit électrique extérieur jusqu'à ce que sa f é m atteigne la valeur

$$E' = \frac{E}{2} \text{ puis on l'isole.}$$

a - Calculer les valeurs des concentrations molaires des ions Co^{2+} et Ni^{2+} .

b - Préciser le compartiment (gauche ou droite) de la pile dans lequel on doit ajouter un volume V_e d'eau pour que la f.é.m de la pile P retrouve sa valeur initiale E. Justifier la réponse.

c - Calculer la valeur de V_e .

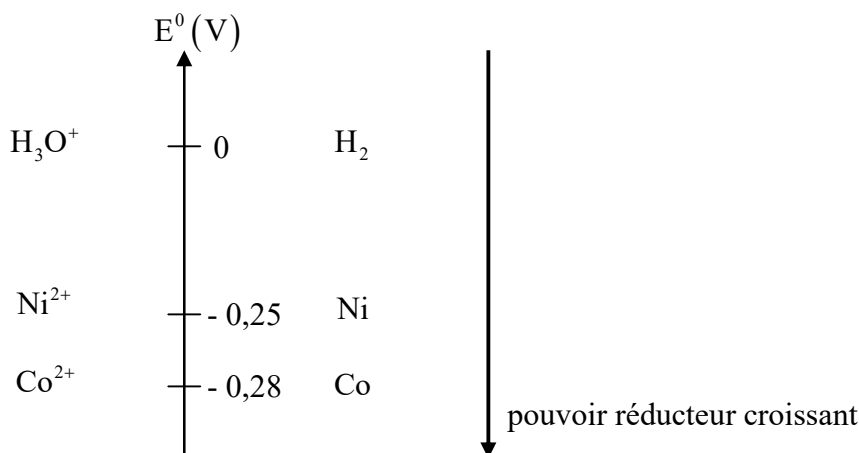
Réponse :

1⁰) a - * Par convention, le potentiel standard du couple $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2$ est pris comme référence $\rightarrow E_{\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2}^0 = 0$.

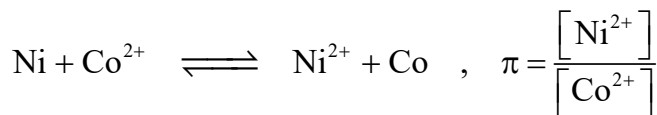
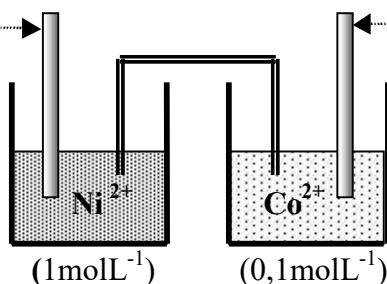
* Pour la pile P_1 : $E_1 = E_{\text{Co}^{2+}/\text{Co}}^0 - E_{\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2}^0 \xrightarrow{E_{\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2}^0 = 0} E_1 = E_{\text{Co}^{2+}/\text{Co}}^0$ et $E_{\text{Co}^{2+}/\text{Co}}^0 = -0,28 \text{ V}$

* Pour la pile P_2 : $E_2 = E_{\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2}^0 - E_{\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}}^0 \xrightarrow{E_{\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2}^0 = 0} E_2 = -E_{\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}}^0$ et $E_{\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}}^0 = -0,25 \text{ V}$

b -



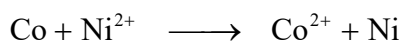
2⁰) a - Ni $\rightarrow$ Co



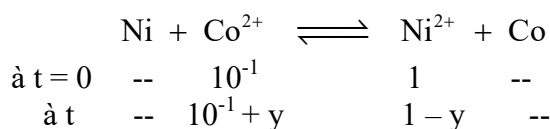
b - La loi de Nernst implique que : $E = E^0 - 0,03 \log \pi$ avec $E^0 = (E_{\text{Co}^{2+}/\text{Co}}^0 - E_{\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}}^0)$ et $\pi = \frac{[\text{Ni}^{2+}]}{[\text{Co}^{2+}]}$.

$E^0 = (-0,28) - (-0,25)$ et $E^0 = -0,03 \text{ V}$. A.N : $E = -0,03 - 0,03 \log \frac{1}{10^{-1}}$ et $E = -0,06 \text{ V}$.

c - $E < 0 \rightarrow \pi > K \rightarrow$ la réaction évolue spontanément dans le sens inverse



3⁰) a -



A la date t, $E' = \frac{E}{2} \xrightarrow{E = -0,06 \text{ V}} E' = -0,03 \text{ V}$

Or $E' = E^0 - 0,03 \log \pi' \rightarrow 0,03 \log \pi' = E^0 - E' \rightarrow \log \pi' = \frac{E^0 - E'}{0,03}$ et $\pi' = 10^{\frac{E^0 - E'}{0,03}} \xrightarrow{\frac{E^0 - E'}{0,03} = \frac{-0,03 \text{ V} - (-0,03 \text{ V})}{0,03}} \pi' = 1$

$\pi' = \frac{[\text{Ni}^{2+}]}{[\text{Co}^{2+}]}$ $\rightarrow \pi' = \frac{1-y}{0,1+y} \rightarrow 0,1\pi' + y\pi' = 1-y \rightarrow y(1+\pi') = 1-0,1\pi' \rightarrow y = \frac{1-0,1\pi'}{1+\pi'}$

A.N : $y = \frac{1-0,1 \cdot 1}{1+1}$ et $y = 0,45 \text{ mol.L}^{-1}$.

$$[\text{Ni}^{2+}] = 1 - y \xrightarrow{y=0,45 \text{ mol.L}^{-1}} [\text{Ni}^{2+}] = 0,55 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{Co}^{2+}] = 0,1 + y \xrightarrow{y=0,45 \text{ mol.L}^{-1}} [\text{Co}^{2+}] = 0,55 \text{ mol.L}^{-1}$$

b - Pour que $E' = E$ il faut que $\pi = \pi_i = \frac{1}{0,1} = 10$.

Or $\pi' = 1$ donc on doit augmenter la valeur de $\pi = \frac{[\text{Ni}^{2+}]}{[\text{Co}^{2+}]}$

Sachant que la dilution fait diminuer la concentration molaire, on ajoute de l'eau dans le compartiment de droite.

c - Après la dilution :

$$\pi_i = \frac{[\text{Ni}^{2+}]}{[\text{Co}^{2+}]} \cdot \frac{V}{V + V_e} \rightarrow \pi_i = \frac{[\text{Ni}^{2+}]}{[\text{Co}^{2+}]} \cdot \frac{V + V_e}{V} = \pi' \cdot \frac{V + V_e}{V} \rightarrow V_e = \frac{\pi_i}{\pi'} \cdot V - V \quad \text{et} \quad V_e = V \cdot \left(\frac{\pi_i}{\pi'} - 1 \right)$$

$$\text{A.N : } V_e = 0,1 \cdot \left(\frac{10}{1} - 1 \right) \quad \text{et} \quad V_e = 0,9 \text{ L.}$$

Exercice 5 :

1⁰ On considère la pile électrochimique schématisée ci-contre :

a - Quel est le rôle du pont salin ?

b - Ecrire le symbole de cette pile.

c - La f é m de cette pile est : $E = -0,14 \text{ V}$. Déduire la valeur

du potentiel normal $E^0_{(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})}$ du couple $(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})$.

2⁰ On réalise une pile électrochimique constituée à droite par le couple $(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb})$ et à gauche par le couple $(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})$.

a - Ecrire l'équation de la réaction chimique associée à la pile.

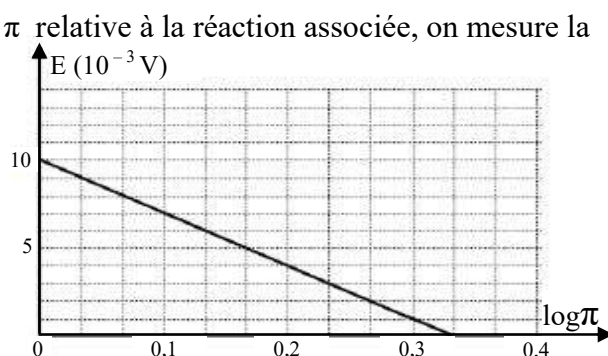
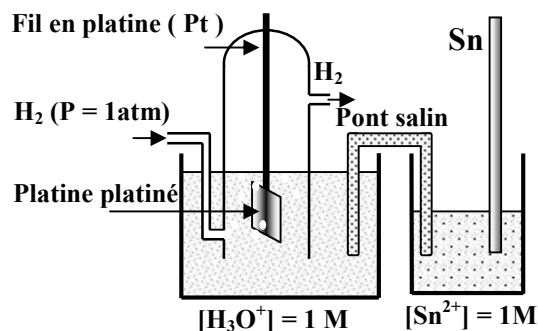
b - Pour différentes valeurs de la fonction des concentrations π relative à la réaction associée, on mesure la f é m. E de la pile jusqu'à atteindre l'équilibre.

On trace la courbe d'évolution de la f é m E en fonction de $\log \pi$ ci-contre :

Déterminer l'équation de la courbe $E = f(\log \pi)$.

c - Par identification avec la loi de Nernst, Trouver la valeur de la f é m standard E^0 de la pile. Déduire alors la valeur du potentiel standard $E^0_{(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb})}$ du couple $(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb})$.

3⁰ Classer les deux couples redox $(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})$ et $(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb})$ par pouvoir oxydant croissant.



Réponse :

1⁰ **a -** Le pont électrolytique assure :

- la fermeture du circuit électrique comportant la pile.
- la neutralité électrique des solutions dans les deux compartiments de la pile.

b - Le symbole de la pile : $\text{Pt} | \text{H}_2 (\text{P} = 1 \text{ atm}), \text{H}_3\text{O}^+ (1 \text{ mol.L}^{-1}) || \text{Sn}^{2+} (1 \text{ mol.L}^{-1}) | \text{Sn}$

c - La pile est à l'état standard $\rightarrow E = E^0 \xrightarrow{E=-0,14 \text{ V}} E^0 = -0,14 \text{ V}$.

$$E^0 = E^0_{(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})} - E^0_{(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2)} \rightarrow \xrightarrow[\text{E}^0_{(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2)}=0]{\text{par convention}} E^0_{(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})} = E^0 \quad \text{et} \quad E^0_{(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})} = -0,14 \text{ V}.$$

2⁰ **a -** la réaction associée à la pile : $\text{Sn} + \text{Pb}^{2+} \rightleftharpoons \text{Sn}^{2+} + \text{Pb}$, $\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]}$

b - $E = f(\log \pi)$ est une droite affine $\rightarrow E = B + A.(\log \pi)$

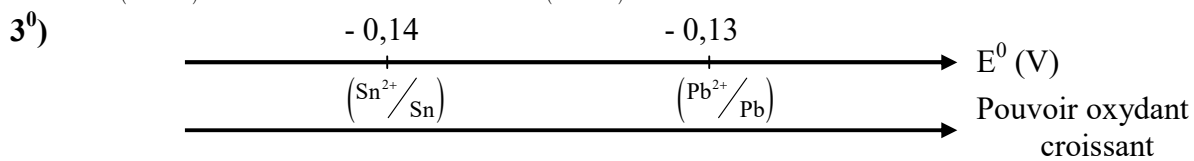
$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{(0,01)-(0)}{(0)-(0,333)} = -0,03 \\ B = 0,01 \end{array} \right\} \rightarrow E = 0,01 - 0,03 \log \pi$$

c - La loi de Nernst s'écrit : $E = E^0 - 0,03 \log \pi$ avec $\pi = \frac{[\text{Sn}^{2+}]}{[\text{Pb}^{2+}]}$.

$$\left. \begin{array}{l} E_{\text{exp}} = 0,01 - 0,03 \log \pi \\ E_{\text{th}} = E^0 - 0,03 \log \pi \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{par identification}} E^0 = 0,01 \text{ V}$$

$$E^0 = E^0_{(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb})} - E^0_{(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})} \rightarrow E^0_{(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb})} = E^0 + E^0_{(\text{Sn}^{2+}/\text{Sn})}$$

$$\text{A.N } E^0_{(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb})} = (0,01) + (-0,14) \text{ et } E^0_{(\text{Pb}^{2+}/\text{Pb})} = -0,13 \text{ V.}$$

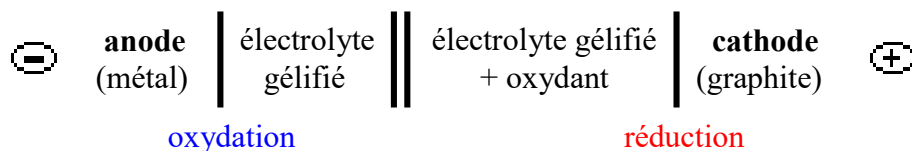


LES PILES ALCALINES

I / Introduction :

Dans l'utilisation usuelle, une pile doit être peu encombrante, transportable et adaptée à toutes les circonstances.

Les piles sèches, dans lesquelles les écoulements sont évités, répondent à ces critères :

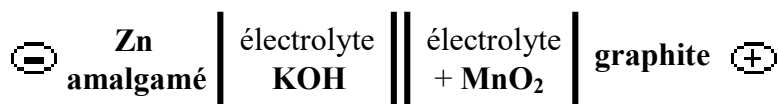


Lorsque l'\u00e9lectrolyte utilis\u00e9 est de l'hydroxyde de potassium KOH (potasse), la pile est dite **alcaline**.

Remarque : La d\u00e9nomination alcaline vient du fait que le potassium K est un m\u00e9tal alcalin.

II / Les piles du type Mallory :

1⁰) Description :

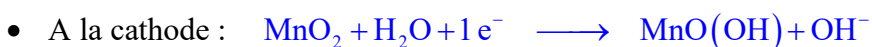
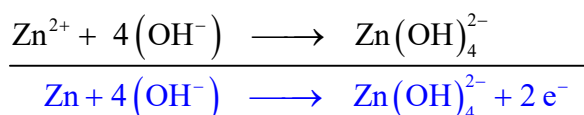


L'oxydant est l'oxyde de mangan\u00e8se MnO₂.

La f\u00e9m de la pile est $E \approx 1,5 \text{ V}$.

2⁰) Fonctionnement :

Les couples mis en jeu sont $\left(\text{Zn(OH)}_4^{2-} / \text{Zn} \right)$ et $\left(\text{MnO}_2 / \text{MnO(OH)} \right)$.

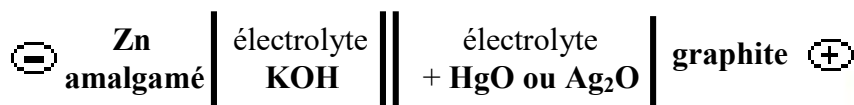


• Lorsque la pile d\u00e9bite, la r\u00e9action spontan\u00e9e est :



III / Les piles bouton :

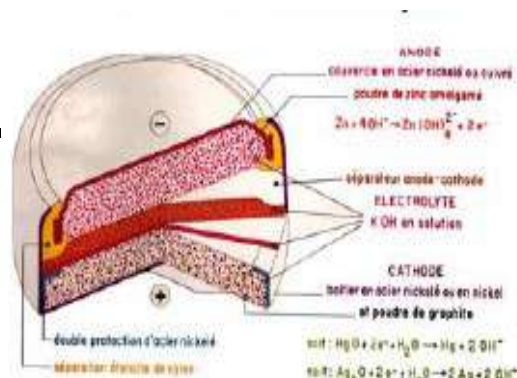
1⁰) Description :



L'oxydant est l'oxyde de mercure HgO ou l'oxyde d'argent Ag₂O.

La f\u00e9m de la pile est $E \approx 1,35 \text{ V}$ pour la pile \u00e0 HgO

$E \approx 1,55 \text{ V}$ pour la pile \u00e0 Ag₂O



2⁰) Fonctionnement :

Les couples mis en jeu sont $\left(\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-} / \text{Zn} \right)$ et $\left(\text{Ag}_2\text{O} / \text{Ag} \right)$ ou $\left(\text{HgO} / \text{Hg} \right)$.

- A l'anode : $\text{Zn} + 4(\text{OH}^-) \longrightarrow \text{Zn}(\text{OH})_4^{2-} + 2\text{e}^-$
- A la cathode : soit $\text{Ag}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- \longrightarrow 2\text{Ag} + 2\text{OH}^-$
soit $\text{HgO} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- \longrightarrow \text{Hg} + 2\text{OH}^-$
- Lorsque la pile débite, la réaction spontanée est :
soit $\text{Zn} + 2\text{OH}^- + 2\text{Ag}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{Zn}(\text{OH})_4^{2-} + 2\text{Ag}$
soit $\text{Zn} + 2\text{OH}^- + \text{HgO} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{Zn}(\text{OH})_4^{2-} + \text{Hg}$

Pour en savoir plus

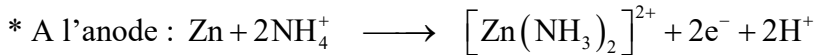
1⁰) De la pile saline à la pile alcaline :

a - La pile Leclanché :

Inventée en 1866, la pile Leclanché est à l'origine des piles bâton. Cette pile est constituée par :

- * Une électrode négative : c'est une coque cylindrique en zinc Zn.
- * Une électrode positive : c'est une tige en carbone revêtue d'une couche d'oxyde de manganèse MnO_2 .
- * Un électrolyte gélifié : c'est un gel qui contient une solution de chlorure d'ammonium NH_4Cl et de chlorure de zinc ZnCl_2 .

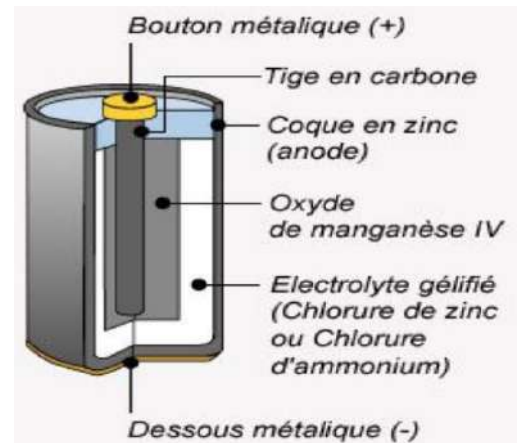
Lorsque la pile débite :



La réaction spontanée est :



La pile Leclanché a une f é m E = 1,5 V.



Remarques :

- * La pile Leclanché est appelée **pile saline** (dénomination liée à l'utilisation du sel NH_4Cl comme électrolyte) ou pile sèche (dénomination erronée puisque l'électrolyte gélifié est humide)
- * la pile Leclanché a une faible capacité électrique et une durée de vie limitée. Elle est la moins cher dans sa catégorie.
- * Le récipient en zinc étant en contact avec l'électrolyte qui est humide et légèrement acide, une corrosion de la coque avoir lieu suivant la réaction lente : $\text{Zn} + 2\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + 2\text{OH}^- + \text{H}_2$.

Cette réaction parasite a pour conséquences :

- le risque de perforation du récipient en zinc.
- la formation d'un gaz (l'hydrogène) dans une enceinte close.

Remarque : l'hydrogène formé réagit avec l'oxyde de manganèse : $\text{MnO}_2 + \text{H}_2 \rightarrow \text{MnO} + \text{H}_2\text{O}$.

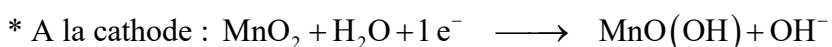
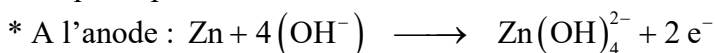
b - La pile alcaline :

Inventée en 1945, la pile alcaline peut être considérée comme une amélioration technologique de la pile saline.

Cette pile est constituée par :

- * Une électrode négative : c'est une tige en laiton en contact avec une pate de poudre de zinc Zn purifié.
- * Une électrode positive : c'est une coque cylindrique en acier en contact avec un mélange de d'oxyde de manganèse MnO_2 et de poudre de carbone.
- * Un électrolyte gélifié : c'est un gel qui contient une solution de potasse (hydroxyde de potassium KOH)

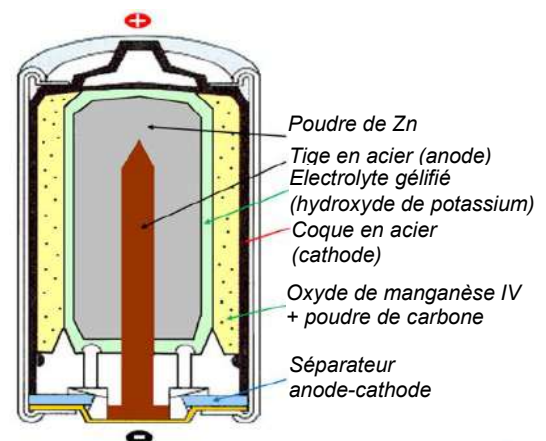
Lorsque la pile débite :



La réaction spontanée est :

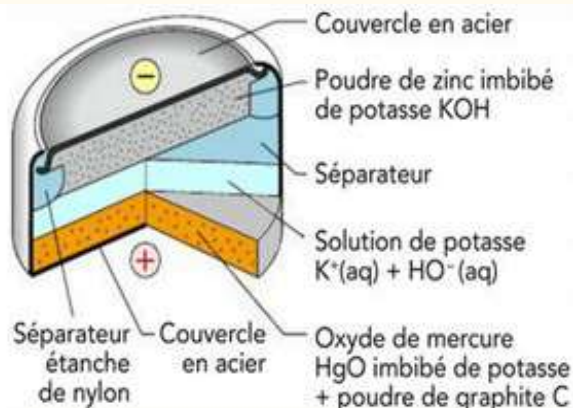


La pile alcaline a une f é m E = 1,5 V.

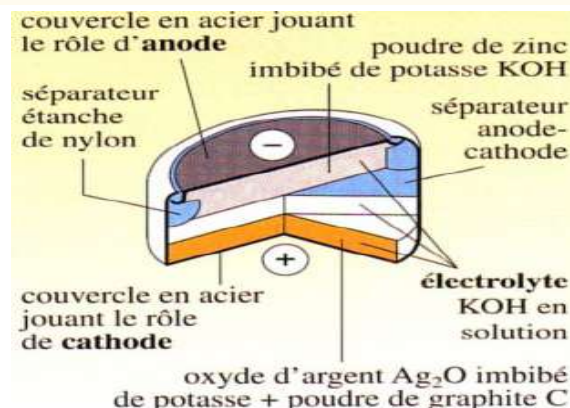


Remarques :

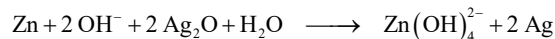
- * La dénomination **pile alcaline** est liée à l'utilisation de la potasse comme électrolyte (l'hydroxyde de potassium KOH étant un hydroxyde alcalin).
- * la pile alcaline a une forte capacité électrique et une longue durée de vie.
- * Les piles bouton sont des piles alcalines dont l'oxydant est l'oxyde de mercure HgO ou d'argent Ag₂O .



Lorsque la pile débite, la réaction spontanée :



Lorsque la pile débite, la réaction spontanée :



2⁰) Avantages et inconvénients des piles alcalines :

a - Avantages :

- Elle a une grande capacité électrique (3,5 Ah contre 1,5 Ah pour la pile saline)
- Elle a une très faible résistance interne
- Elle peut débiter un courant assez intense
- Elle est plus robuste que la pile Leclanché
- Elle a un temps de décharge de 50 à 60 h (contre 20 à 25 h pour la pile saline)
- Elle est hermétique (elle ne risque pas de couler comme la pile saline)
- Elle peut fonctionner à des basses températures (jusqu'à - 30⁰C)

b - Inconvénients :

- Elle a un coût élevé par rapport à la pile saline
- Elle est plus lourde que la pile saline.